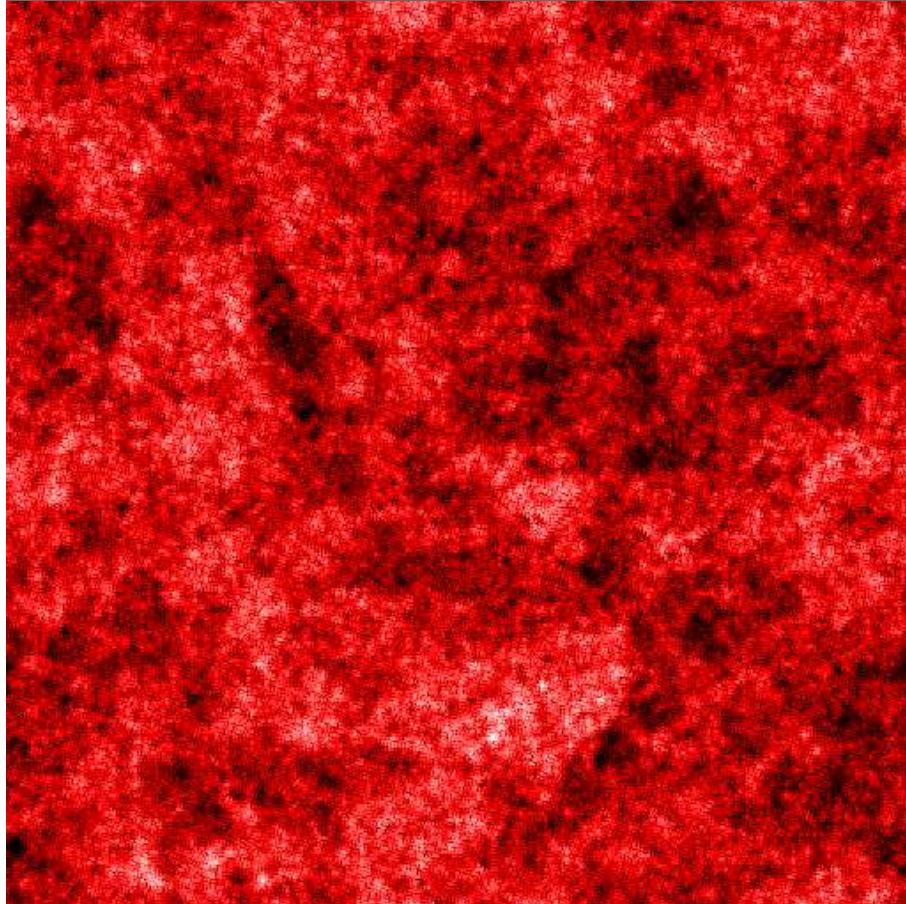


Thèse de l'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

# Chaînes de Spins, Fermions de Dirac, et Systèmes Désordonnés



Marc BOCQUET

Service de Physique Théorique du CEA, Saclay



ÉCOLE POLYTECHNIQUE

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

**Docteur de l'ÉCOLE POLYTECHNIQUE**

Spécialité

Physique théorique

par

Marc BOCQUET

Sujet :

**Chaînes de Spins, Fermions de Dirac,  
et Systèmes Désordonnés**

Soutenue le 14 Janvier 2000 devant la Commission d'examen :

|    |                   |                    |
|----|-------------------|--------------------|
| MM | Édouard BRÉZIN,   | Président          |
|    | Alain COMTET,     | Rapporteur         |
|    | Thierry JOLICŒUR, | Directeur de thèse |
|    | Vincent PASQUIER, |                    |
|    | Erik SØRENSEN,    | Rapporteur         |
|    | Alexei TSVELIK,   |                    |
|    | Martin ZIRNBAUER. |                    |



# Remerciements

Les deux premières années de thèse n'auront pas été fidèles à l'image idéalisée (naïve sans doute) que je m'en faisais. Mais à leur terme j'ai grandement bénéficié de l'aide inespérée de quelques personnes. Comme cela s'était déjà produit à deux ou trois reprises dans mon parcours, je réalise quelle a été l'importance de leur soutien. C'est pourquoi je crois pouvoir écrire que les remerciements que je leur adresse ne sont pas un exercice conventionnel.

Je pense d'abord à Thierry Jolicœur et Didina Theodorescu qui m'ont offert de collaborer avec eux à un moment décisif de la thèse. J'y suis d'autant plus sensible que tous deux n'avaient rien à y gagner et beaucoup de temps à perdre.

Je pense également à Vincent Pasquier. Bien que nous ne soyons pas parvenu à donner corps à notre travail, je n'oublie ni sa gentillesse, ni le temps qu'il m'a accordé sans compter, ni finalement tout ce que je réalise avoir pu apprendre à son contact.

Je tient également à remercier tout particulièrement Vivien Brunel, non seulement pour sa gentillesse constante, mais aussi très concrètement pour m'avoir co-initié aux subtilités de la bosonisation. Son formulaire "magique" demeure un allié puissant.

Je remercie Martin Zirnbauer d'avoir accepté ma collaboration mais aussi d'avoir répondu avec beaucoup de patience à mes nombreuses et insistantes questions.

J'ai eu la chance de partager mon bureau successivement avec Stéphane Nonnenmacher et Gabrielle Bonnet aux personnalités tranchées, mais passionnées et donc passionnantes.

Je remercie Jean Zinn-Justin et Jean-Paul Blaizot de m'avoir accueilli au sein du Service de Physique Théorique.

Plusieurs chercheurs dans le laboratoire ont une attitude d'ouverture manifeste (que j'ai pu éprouver) vers les jeunes chercheurs. Je tiens tout particulièrement à remercier quelques uns d'entre eux que j'ai pu solliciter. Parmi ceux-ci Michel Bergère, Michel Bauer, Jean-Marc Luck, Olivier Golinelli et André Voros.

Je remercie toute l'équipe logistique du service pour son sourire et sa disponibilité. Je pense en particulier à Sylvie Zaffanella, Anne-Marie Arnold, Bruno Savelli, Liliane Dumets, Claudine Verneyre et Janine Delouvrier.

Je garde toujours à l'esprit, grâce à Thierry Jolicœur et Stéphane Olivier, qu'il est possible d'exceller dans l'art délicat qui consiste à concilier rigueur, clarté et souci permanent de l'utilité de la chose (autrement dit de l'art d'être physicien). Il est des professeurs qui façonnent l'image que l'on se fait de sa (future) discipline et la rendent plus belle. Ce fut le cas récemment d'Édouard Brézin et d'Alain Comtet.

Je remercie Erik Sørensen et Alexei Tsvelik d'avoir bien voulu accepter de faire le déplacement pour participer au Jury de cette thèse.

M. BOCQUET

Enfin dans un système où l'acquis est pérenne, je veux ici insister sur le fait que je n'oublie pas l'institution qui a permis le financement de cette thèse. Il s'agit du Ministère de l'Équipement, des Transports et du Logement. Certaines personnes ont pensé qu'il est de l'intérêt de tous de faire, parfois, confiance aux individus. Et je tiens à les en remercier.

# Préambule

Les recherches que j'ai menées pendant ces trois années concernent les chaînes de spins quantiques d'une part et la physique des systèmes désordonnés d'autre part.

La partie systèmes désordonnés a pour axe directeur la physique des fermions de Dirac (en 1 ou 2 dimensions) en milieu aléatoire. Lorsqu'un système constitué de fermions, avec ou sans spins, présente une relation de dispersion linéaire à l'énergie de Fermi, des fermions de Dirac peuvent émerger comme excitations de basse énergie relativistes.

Le spin de ces fermions de Dirac est un degré de liberté quantique effectif, qui n'est pas nécessairement à mettre en relation avec un éventuel spin des fermions d'origine. Le fait que la relation de dispersion soit quasi-linéaire près des points de Fermi peut être généralement attribué à la présence d'une symétrie particule-trou. Les fermions de Dirac libres issus de la linéarisation des champs près des points de Fermi peuvent être perturbés par un terme d'interaction. Un tel terme peut provenir du développement du hamiltonien autour des points de Fermi. Il peut aussi correspondre à l'interaction effective, résultat de la moyenne sur le terme de couplage quasi-particules/impuretés. Si ce terme d'interaction préserve la symétrie particule-trou, l'image des Fermions de Dirac est inchangée, à une renormalisation près de leur célérité. Dans ce cas, la physique est toujours décrite par des fermions de Dirac.

La chaîne de spins  $s=1/2$  antiferromagnétique est un bel exemple de cela. En effet, le hamiltonien de la chaîne est équivalent à un hamiltonien de fermions sans spin (dit de Jordan-Wigner), en interaction, se déplaçant sur le réseau de la chaîne. Passant à la limite continue, la linéarisation du hamiltonien autour des points de Fermi mène au hamiltonien d'un fermion de Dirac libre perturbé par un terme d'interaction quartique. Sur cet exemple, la symétrie discrète de la chaîne équivalente à la transformation particule-trou est une rotation globale des spins d'un angle  $\pi$  autour d'un axe orthogonal à l'axe de quantification. Cette succession de transformations sera rappelée dans le chapitre 1.

En dimension 2, le cœur de la théorie effective de ces systèmes est une théorie de fermions de Dirac ou de Majorana libres et par conséquent une théorie de Wess-Zumino-Witten. La théorie de basse énergie du système complet est alors équivalente à une théorie de Wess-Zumino-Witten perturbée.

Lorsque la perturbation est non-pertinente ou marginalement non-pertinente, la théorie reste critique et contrôlée par le point fixe conforme, avec ou sans corrections marginales. Une telle situation sera rencontrée dans le chapitre 3, avec un exemple de liquide de Luttinger possédant un bord, mais aussi dans le chapitre 7 avec le calcul de la densité d'états d'un fermion de Dirac en masse aléatoire et en dimension 2.

Si la perturbation est pertinente ou marginalement pertinente, la physique aux grandes distances peut être celle d'une phase massive ou bien être contrôlée par un second point fixe. En fonction de la nature du désordre, on trouvera dans le chapitre 6 des exemples où la physique

devient massive sous la perturbation et un exemple où elle demeure critique mais contrôlée par un point fixe non-trivial (le fermion de Dirac en masse aléatoire et en dimension 1). Le chapitre 2 qui est consacré à des systèmes de spins alternant les couplages antiferromagnétiques et ferromagnétiques est précisément dédié à la physique d'une phase massive. Dans ce cas, une fois extrait le modèle sigma non-linéaire qui est la théorie des champs idoine de cette phase massive, la référence aux fermions de Dirac devient sans objet.

Généralement une perturbation qui conduit à une phase massive ne peut être appréhendée de façon analytique que comme un potentiel semi-classique. La courbure du potentiel en un de ses minima donne alors l'échelle de masse engendrée. Cette phase massive peut toutefois révéler quelques surprises. En effet, on verra dans le chapitre 7 que le modèle de WZW (nos fermions de Dirac libres) est entraîné par un terme de masse pertinent vers un modèle sigma non-linéaire (résultant de la minimisation du potentiel semi-classique). Jusque là rien de fondamentalement différent du cas précédemment cité des systèmes de spins massifs. Or, à l'opposé de ces derniers, la physique aux grandes distances du modèle sigma non-linéaire que l'on rencontrera dans le chapitre 7 s'obtient dans la limite de couplage *faible*. (La chaîne de spins effective équivalente à ce système est *supersymétrique* et *non-compacte*, ce qui justifiera l'inversion du flot du groupe de renormalisation en comparaison d'une chaîne de spins usuelle). La conductivité du système mésoscopique qui sera ainsi décrit devient infinie ; la phase est métallique !

\* \* \*

Voici maintenant un guide de lecture rapide de la thèse. Il est destiné à présenter succinctement le contenu des chapitres. Ceux-ci, comme annoncé, sont regroupés en deux parties portant pour l'une sur les chaînes de spins et pour l'autre sur (certains aspects) des fermions de Dirac dans les systèmes désordonnés.

## Première partie

La première partie de cette thèse est consacrée aux chaînes de spins quantiques. Il n'y a pas de cohérence particulière à trouver entre les deux chapitres de fond que constituent les deuxième et troisième chapitres. En effet le second chapitre est consacré à la physique d'une chaîne comportant un gap (phase massive) alors qu'on s'intéresse dans le troisième chapitre aux propriétés critiques d'une chaîne de spins ouverte.

## Chapitre 1

Le premier chapitre est un chapitre de généralités sur les chaînes de spins quantiques. Je n'y ai rappelé que ce qui me semblait nécessaire à la compréhension non seulement de la première partie de la thèse mais aussi, parfois, à la compréhension de la seconde.

La première section de ce chapitre de généralités est consacrée à la construction usuelle du modèle sigma non-linéaire sur la chaîne de spins antiferromagnétique de Heisenberg et de spin  $s=1/2$ . La deuxième et la troisième section discutent des techniques de théorie des champs mises en œuvre pour la chaîne massive  $s=1$  et la chaîne critique  $s=1/2$ . Le chapitre se termine par un rappel de théorèmes généraux qu'on utilisera par la suite.

Chaînes de Spins, Fermions de Dirac, et Systèmes Désordonnés

## Chapitre 2

Dans le chapitre 2, on s'intéresse à la physique d'une chaîne de spins quantiques alternant les couplages ferromagnétiques et antiferromagnétiques, ainsi qu'à un analogue parmi les échelles de spins. Outre qu'il existe des réalisations expérimentales de tels systèmes, ce modèle offre un point de vue séduisant sur la phase de Haldane de la chaîne de spins  $s=1$ . L'introduction que j'en ai faite en début de chapitre est assez détaillée et je n'en dirai pas plus ici.

## Chapitre 3

Dans le chapitre 3, on obtient par des moyens analytiques le temps de relaxation longitudinale d'une impureté non-magnétique au sein d'une chaîne de spins. Une prédiction susceptible d'être vérifiée expérimentalement par des techniques de résonance magnétique nucléaire est proposée. Appliquant les mêmes techniques à un liquide de Luttinger ouvert, on en déduit une quantité analogue mesurant les fluctuations de spin au bord du liquide.

Ce chapitre est un complément indispensable à la lecture de la (courte) publication. Quelques détails des calculs sont donnés et expliqués. De plus, un certain nombre de résultats, de moindre importance, qui n'ont pas été publiés, y sont mentionnés.

## Deuxième partie

La partie systèmes désordonnés de cette thèse possède comme thème récurrent celui des fermions de Dirac. Ce type de particules peut en effet apparaître comme excitations d'un système pur possédant une symétrie contraignante, par exemple une symétrie particule-trou. La théorie des champs qui correspond à la physique de ce système en présence de désordre est en général moins simple que celle d'une particule sans "spin", où le "spin" est un degré de liberté quantique d'origine variée. Un exemple de ce type de système est celui de la transition entre plateaux dans l'effet Hall quantique entier.

J'insiste sur le fait qu'on ne considèrera jamais ici les interactions entre particules. Les propriétés statistiques que nous recherchons sont des propriétés à une particule.

## Chapitre 4

Dans le chapitre 4, j'introduis deux exemples de systèmes se ramenant à des fermions de Dirac aléatoires en dimension 2 (des exemples en dimension 1 seront directement donnés dans le corps du chapitre 6). Le premier est celui de la physique de la transition entre plateaux de l'effet Hall quantique entier. C'est l'occasion de présenter les multiples facettes techniques de ce problème : modèles sur réseau, chaîne de superspins et modèle sigma non-linéaire. Le calcul de la chaîne de superspins est une version personnelle du calcul non-publié de Read. J'ai bénéficié pour cela de discussions avec Vincent Pasquier et Didina Serban. La construction générale du modèle sigma non-linéaire à partir de la chaîne de superspins que je donne est une généralisation d'un travail de Read et Sachdev. Le reste de ce qui est présenté dans ce chapitre n'est pas original.

La dernière section du chapitre est consacrée à la supraconductivité (onde  $d$ ) dans un milieu désordonné de symétrie  $D$ . Il s'agit du deuxième exemple d'intervention des fermions de Dirac dans la physique des systèmes désordonnés. La construction du modèle sigma non-linéaire associé est précisément l'objet du chapitre 7.

## Chapitre 5

Le chapitre 5 répond à un double objectif. D'abord mettre en valeur, autant que faire se peut, une partie du travail effectué pendant la première partie de cette thèse ; le second est de présenter deux questions relatives à l'effet Hall quantique entier (l'absence de singularité dans l'"énergie libre" et la multifractalité), et susceptibles d'être systématiquement soulevées dès lors qu'on étudie un système constitué de fermions de Dirac en milieu aléatoire.

## Chapitre 6

Le chapitre 6 est dédié au calcul de la densité d'états d'un système d'un fermion de Dirac en dimension 1 et en milieu aléatoire de nature variable.

Les conventions de signes diffèrent notablement de celles utilisées dans la publication. Alors que les résultats physiques n'en dépendent pas, certains raisonnements, notamment lorsque des fonctions de Bessel sont présentes, peuvent différer de façon significative ! Accessoirement plusieurs fautes de frappe et erreurs mineures ont été corrigées ici. Pour ces raisons, j'encourage le lecteur à se tenir à la présentation faite ici et non à celle de la publication. Enfin, je présente dans l'appendice B un complément inédit à ce chapitre.

## Chapitre 7

Comme annoncé plus haut, le chapitre 7 est consacré à la physique d'un supraconducteur (onde  $d$ ) dans un milieu aléatoire brisant la symétrie de rotation du spin et l'invariance par renversement du temps. Il est équivalent de dire qu'on étudie un système de fermions de Dirac en masse aléatoire.

Le chapitre reprend les grandes lignes de la publication. Quelques calculs diffèrent de la version officielle. J'y donne, en plus, un exemple de réalisation intuitive sur réseau désordonné de la symétrie  $D$  et, via la limite anisotrope, un modèle sigma non-linéaire associé.

\* \* \*

## Franglais

Je souhaite qu'on me pardonne quelques usages de franglais, désormais courants en physique au point qu'il est difficile de s'en passer. En particulier, j'utiliserai la terminologie de *gap* pour désigner un écart entre niveaux d'énergie et, de là le plus souvent, l'écart en énergie entre un fondamental et son premier état excité. J'emploierai également le terme de *cut-off* pour désigner une coupure dans un spectre énergétique.

# Table des matières

|                                                                                      |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Remerciements</b>                                                                 | <b>v</b>   |
| <b>Préambule</b>                                                                     | <b>vii</b> |
| <b>I Quelques propriétés de systèmes de spins quantiques</b>                         | <b>1</b>   |
| <b>1 Généralités sur les chaînes de spins quantiques</b>                             | <b>3</b>   |
| 1.1 Modèle sigma non-linéaire pour les chaînes de spins antiferromagnétiques . . . . | 4          |
| 1.1.1 États cohérents de spins . . . . .                                             | 4          |
| 1.1.2 Physique de basse énergie . . . . .                                            | 5          |
| 1.1.3 Groupe de renormalisation . . . . .                                            | 6          |
| 1.1.4 Approche hamiltonienne . . . . .                                               | 7          |
| 1.2 La phase de Haldane de la chaîne de spins $s=1$ . . . . .                        | 8          |
| 1.2.1 Modèle sigma non-linéaire et gap de spin . . . . .                             | 8          |
| 1.2.2 Fonction d'onde à liaisons de valence solides . . . . .                        | 8          |
| 1.2.3 Hamiltonien parent de Affleck-Kennedy-Lieb-Tasaki . . . . .                    | 10         |
| 1.2.4 Un ordre caché . . . . .                                                       | 11         |
| 1.3 La chaîne de spins $s=1/2$ . . . . .                                             | 13         |
| 1.3.1 Bosonisation abélienne . . . . .                                               | 13         |
| 1.3.2 Modèle de Wess-Zumino-Novikov-Witten . . . . .                                 | 18         |
| 1.3.3 Modèle de Hubbard . . . . .                                                    | 22         |
| 1.3.4 Bosonisation isotrope de la chaîne de spins $s=1/2$ . . . . .                  | 24         |
| 1.4 Théorèmes généraux . . . . .                                                     | 24         |
| 1.4.1 Théorèmes de Marshall . . . . .                                                | 24         |
| 1.4.2 Théorème de Lieb, Shultz et Mathis . . . . .                                   | 25         |
| 1.4.3 Théorème de Mermin-Wagner . . . . .                                            | 26         |
| <b>2 Phase de Haldane dans des chaînes et des échelles de spins alternées</b>        | <b>27</b>  |
| 2.1 Introduction . . . . .                                                           | 27         |
| 2.1.1 Motivation . . . . .                                                           | 27         |
| 2.1.2 Réalisations expérimentales . . . . .                                          | 30         |
| 2.2 Chaîne de spins ferro-antiferromagnétique . . . . .                              | 32         |
| 2.2.1 Spectre des ondes de spin . . . . .                                            | 32         |
| 2.2.2 Limite de couplage ferromagnétique fort et modèle sigma non-linéaire . .       | 33         |
| 2.2.3 Modèle sigma non-linéaire effectif . . . . .                                   | 34         |

|           |                                                                                                                  |           |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.2.4     | Évaluation du gap de spin dans la limite des $N$ grands . . . . .                                                | 36        |
| 2.3       | Une échelle de spins alternée . . . . .                                                                          | 38        |
| 2.3.1     | Modèle sigma non-linéaire effectif . . . . .                                                                     | 39        |
| 2.3.2     | Évaluation du gap de spin dans la limite des $N$ grands . . . . .                                                | 40        |
| 2.4       | Conclusion . . . . .                                                                                             | 41        |
| <b>3</b>  | <b>Propriétés critiques au bord d'une chaîne de spins ouverte</b>                                                | <b>43</b> |
| 3.1       | Introduction . . . . .                                                                                           | 43        |
| 3.1.1     | Problématique . . . . .                                                                                          | 43        |
| 3.1.2     | Expériences de RMN . . . . .                                                                                     | 44        |
| 3.1.3     | Temps de relaxation longitudinal et fonction de corrélation . . . . .                                            | 45        |
| 3.2       | Théorie critique en volume . . . . .                                                                             | 46        |
| 3.2.1     | Autocorrélations de spin . . . . .                                                                               | 47        |
| 3.2.2     | Fonctions de corrélation à température finie . . . . .                                                           | 48        |
| 3.2.3     | Calcul du taux de relaxation longitudinal et confirmation expérimentale . . . . .                                | 48        |
| 3.2.4     | Correction logarithmique au taux de relaxation longitudinal . . . . .                                            | 49        |
| 3.3       | Théorie critique de la chaîne ouverte . . . . .                                                                  | 51        |
| 3.3.1     | Théorie critique au bord et invariance conforme . . . . .                                                        | 51        |
| 3.3.2     | Bosonisation et condition au bord . . . . .                                                                      | 52        |
| 3.3.3     | Fonctions de corrélation critiques . . . . .                                                                     | 53        |
| 3.3.4     | Calcul du taux de relaxation longitudinal . . . . .                                                              | 55        |
| 3.3.5     | Correction logarithmique au taux de relaxation longitudinal . . . . .                                            | 55        |
| 3.3.6     | Influence du champ magnétique . . . . .                                                                          | 58        |
| 3.4       | Le liquide de Luttinger . . . . .                                                                                | 58        |
| 3.4.1     | Temps de relaxation dans le volume . . . . .                                                                     | 59        |
| 3.4.2     | Relaxation au bord du liquide de Luttinger . . . . .                                                             | 60        |
| <b>II</b> | <b>Quelques systèmes mésoscopiques désordonnés en basse dimension</b>                                            | <b>63</b> |
| <b>4</b>  | <b>Des systèmes physiques décrits par des Fermions de Dirac</b>                                                  | <b>65</b> |
| 4.1       | Modèles sur réseau et effet Hall quantique . . . . .                                                             | 65        |
| 4.1.1     | Les fondamentaux de l'effet Hall quantique entier . . . . .                                                      | 65        |
| 4.1.2     | Approche semi-classique de la transition entre plateaux . . . . .                                                | 67        |
| 4.1.3     | Le modèle de Chalker et Coddington . . . . .                                                                     | 68        |
| 4.1.4     | Calcul numérique . . . . .                                                                                       | 69        |
| 4.2       | Modèle sur réseau de l'effet Hall quantique et fermions de Dirac aléatoires . . . . .                            | 70        |
| 4.2.1     | Formulation unitaire . . . . .                                                                                   | 70        |
| 4.2.2     | Limite continue et hamiltonien de Dirac . . . . .                                                                | 72        |
| 4.3       | Modèles sur réseau et chaînes de spin quantiques effectives . . . . .                                            | 73        |
| 4.3.1     | Rappel : Transformation de Bogoliubov unitaire. . . . .                                                          | 73        |
| 4.3.2     | Formulation de première quantification des modèles sur réseau. Conduc-<br>tivité et formule de Landauer. . . . . | 74        |
| 4.3.3     | Seconde quantification et réseau de Chalker-Dohmen . . . . .                                                     | 76        |
| 4.3.4     | Seconde quantification et réseau de Chalker et Coddington . . . . .                                              | 79        |
| 4.4       | Chaîne de spins, états cohérents et modèle sigma non-linéaire . . . . .                                          | 80        |
| 4.4.1     | Représentation fonctionnelle à l'aide d'une base d'états cohérents . . . . .                                     | 80        |

|          |                                                                                                                           |            |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.4.2    | Physique de basse énergie et modèle sigma non-linéaire . . . . .                                                          | 84         |
| 4.5      | Un modèle sigma non-linéaire pour l'effet Hall quantique entier . . . . .                                                 | 85         |
| 4.5.1    | Représentation . . . . .                                                                                                  | 85         |
| 4.5.2    | Physique de basse énergie . . . . .                                                                                       | 86         |
| 4.6      | Supraconductivité, liquide nodal et fermions de Dirac . . . . .                                                           | 86         |
| 4.6.1    | Excitations de masse nulle dans un supraconducteur d'onde $d$ . . . . .                                                   | 87         |
| 4.6.2    | Description d'un nœud et Hamiltonien de Majorana . . . . .                                                                | 88         |
| 4.6.3    | Liquide nodal désordonné . . . . .                                                                                        | 89         |
| <b>5</b> | <b>Quelques traits spécifiques à ces systèmes désordonnés</b>                                                             | <b>93</b>  |
| 5.1      | Énergie libre et modèle de l'effet Hall quantique entier sur réseau . . . . .                                             | 93         |
| 5.1.1    | Matrice de transfert et relation de récurrence . . . . .                                                                  | 93         |
| 5.1.2    | Énergie libre (somme des exposants de Lyapunov) . . . . .                                                                 | 95         |
| 5.1.3    | La charge centrale dans le cas pur . . . . .                                                                              | 96         |
| 5.2      | Multifractalité au point critique . . . . .                                                                               | 97         |
| 5.2.1    | Spectre des singularités d'une mesure . . . . .                                                                           | 98         |
| 5.2.2    | Spectre multifractal associé au spectre de singularité . . . . .                                                          | 98         |
| 5.2.3    | Algorithme de calcul du spectre des singularités . . . . .                                                                | 100        |
| 5.2.4    | Spectre des singularités du modèle sur réseau et spectre de singularité de la transition de l'effet Hall entier . . . . . | 101        |
| <b>6</b> | <b>Fermions de Dirac en dimension 1</b>                                                                                   | <b>103</b> |
| 6.1      | Introduction . . . . .                                                                                                    | 103        |
| 6.1.1    | Localisation . . . . .                                                                                                    | 104        |
| 6.1.2    | Un modèle soluble mettant en jeu plusieurs désordres . . . . .                                                            | 104        |
| 6.1.3    | Fermions de Dirac 1d en masse aléatoire . . . . .                                                                         | 105        |
| 6.2      | Un problème de mécanique quantique . . . . .                                                                              | 106        |
| 6.2.1    | Représentation de la résolvante comme une intégrale de chemin . . . . .                                                   | 106        |
| 6.2.2    | Intégrale de chemin en temps réel . . . . .                                                                               | 107        |
| 6.2.3    | Transformation particule-trou . . . . .                                                                                   | 108        |
| 6.2.4    | Moyenne . . . . .                                                                                                         | 109        |
| 6.3      | Secteur du fondamental du hamiltonien répliqué . . . . .                                                                  | 110        |
| 6.3.1    | Description d'une base du secteur . . . . .                                                                               | 110        |
| 6.3.2    | Interprétation en terme de représentation . . . . .                                                                       | 110        |
| 6.4      | Énergie du fondamental . . . . .                                                                                          | 111        |
| 6.4.1    | Équation pour le fondamental . . . . .                                                                                    | 111        |
| 6.4.2    | États propres à gauche et à droite du hamiltonien . . . . .                                                               | 112        |
| 6.4.3    | Fonction d'onde du fondamental . . . . .                                                                                  | 112        |
| 6.4.4    | Équations hiérarchiques . . . . .                                                                                         | 112        |
| 6.4.5    | Formule pour la résolvante . . . . .                                                                                      | 113        |
| 6.4.6    | Formule sommatoire . . . . .                                                                                              | 113        |
| 6.5      | Densités d'états . . . . .                                                                                                | 114        |
| 6.5.1    | Modèle en masse aléatoire . . . . .                                                                                       | 114        |
| 6.5.2    | Modèle en potentiel électrique aléatoire . . . . .                                                                        | 117        |
| 6.5.3    | Modèle à désordre multiple . . . . .                                                                                      | 118        |
| 6.5.4    | Particule en champ aléatoire et en champ magnétique constant . . . . .                                                    | 120        |
| 6.6      | Analyse supersymétrique . . . . .                                                                                         | 121        |

|          |                                                                                          |            |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 6.7      | Symétries des désordres . . . . .                                                        | 125        |
| 6.8      | Conclusion . . . . .                                                                     | 127        |
| <b>7</b> | <b>Fermions de Dirac aléatoires en dimension 2 :</b>                                     |            |
|          | <b>Supraconducteur désordonné dans la classe D</b>                                       | <b>129</b> |
| 7.1      | Introduction . . . . .                                                                   | 129        |
| 7.2      | Hamiltonien de Dirac en masse aléatoire . . . . .                                        | 133        |
| 7.3      | Représentation de la résolvante comme une intégrale supersymétrique . . . . .            | 134        |
| 7.3.1    | Convergence de l'intégrale fonctionnelle . . . . .                                       | 135        |
| 7.3.2    | Symétrie de l'action . . . . .                                                           | 136        |
| 7.3.3    | Moyenne sur le désordre . . . . .                                                        | 136        |
| 7.4      | Perturbations marginales . . . . .                                                       | 136        |
| 7.4.1    | Le cas $N = 1$ . . . . .                                                                 | 137        |
| 7.4.2    | Le cas $N \gg 1$ . . . . .                                                               | 138        |
| 7.4.3    | Lien avec les supraconducteurs désordonnés . . . . .                                     | 139        |
| 7.4.4    | Dégénérescences accidentelles . . . . .                                                  | 139        |
| 7.5      | Champ composite et points cols diagonaux . . . . .                                       | 140        |
| 7.6      | Description de la variété de point-col . . . . .                                         | 142        |
| 7.6.1    | Conditions générales de convergence sur le champ composite $Q$ . . . . .                 | 142        |
| 7.6.2    | Contraintes de causalité sur la variété de point-col . . . . .                           | 143        |
| 7.7      | Développement en gradients . . . . .                                                     | 144        |
| 7.7.1    | Modèle de Wess-Zumino-Witten de type $C D$ . . . . .                                     | 146        |
| 7.7.2    | Fondement de la bosonisation non-abélienne . . . . .                                     | 148        |
| 7.7.3    | Bosonisation de l'action libre . . . . .                                                 | 150        |
| 7.7.4    | Fondement de la bosonisation non-abélienne, suite . . . . .                              | 151        |
| 7.7.5    | Bosonisation du couplage au champ $q$ . . . . .                                          | 152        |
| 7.7.6    | Détermination des constantes de couplages $f$ et $\theta$ . . . . .                      | 153        |
| 7.8      | Modèle sur réseau . . . . .                                                              | 154        |
| 7.8.1    | Construction du modèle . . . . .                                                         | 154        |
| 7.8.2    | Représentation et états cohérents . . . . .                                              | 156        |
| 7.8.3    | Représentation fonctionnelle de l'opérateur de Laplace-Casimir . . . . .                 | 157        |
| 7.8.4    | Représentation de l'opérateur d'énergie . . . . .                                        | 158        |
| 7.8.5    | Généralisation à $N$ espèces de fermions . . . . .                                       | 158        |
| 7.9      | Densité d'états . . . . .                                                                | 160        |
| 7.9.1    | Groupe de renormalisation . . . . .                                                      | 160        |
| 7.9.2    | Renormalisation de la densité d'états . . . . .                                          | 161        |
| 7.9.3    | Limite des matrices aléatoires . . . . .                                                 | 163        |
| 7.10     | Supraconducteur d'onde $d$ désordonné . . . . .                                          | 166        |
| 7.11     | Diagramme de phase et point fixe des fermions libres . . . . .                           | 168        |
| <b>A</b> | <b>Fonctions de corrélation de la chaîne de spins <math>s=1/2</math> ouverte</b>         | <b>173</b> |
| A.1      | Fonctions de corrélation en champ magnétique nul . . . . .                               | 173        |
| A.2      | Fonctions de corrélation en champ magnétique non-nul . . . . .                           | 174        |
| <b>B</b> | <b>Calcul à l'ordre 2 de l'énergie du fondamental <math>\lambda(\epsilon)</math></b>     | <b>177</b> |
| B.1      | Interprétation . . . . .                                                                 | 177        |
| B.2      | Calcul de $\lambda_1(\epsilon)$ pour le modèle en potentiel scalaire aléatoire . . . . . | 178        |

|          |                                                                             |            |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------|------------|
| B.2.1    | Calcul de $\lambda_1(\epsilon)$ pour le modèle en masse aléatoire . . . . . | 179        |
| <b>C</b> | <b>Classification de Cartan et classes de symétries</b>                     | <b>181</b> |
| C.1      | Classification de Cartan des espaces symétriques . . . . .                  | 181        |
| C.2      | Systèmes désordonnés et superespaces symétriques . . . . .                  | 181        |
| <b>D</b> | <b>Algèbre <math>\mathfrak{psu}(1, 1 2)</math> et superspin</b>             | <b>185</b> |
| D.1      | Algèbre des générateurs constitutifs d'un superspin . . . . .               | 185        |
| D.2      | Description de l'algèbre $\mathfrak{psu}(1, 1 2)$ . . . . .                 | 186        |
| D.2.1    | Générateurs associées aux racines simples . . . . .                         | 186        |
| D.2.2    | Générateurs de Cartan de $\mathfrak{psu}(1, 1 2)$ . . . . .                 | 186        |
| D.2.3    | Calcul des racines simples . . . . .                                        | 187        |
| D.2.4    | Forme de Killing et produit scalaire invariant . . . . .                    | 187        |
|          | <b>Listes des publications</b>                                              | <b>189</b> |



## Première partie

# Quelques propriétés de systèmes de spins quantiques



# Chapitre 1

## Généralités sur les chaînes de spins quantiques

On ne traitera dans ce chapitre que de chaînes antiferromagnétiques, qui seront celles que l'on rencontrera dans les deux parties principales de cette thèse. La plupart des résultats mentionnés dans cette introduction sont bien connus. Ce chapitre est donc un préambule aux deux chapitres qui suivent. Si les questions sont abordées dans l'esprit de la physique des chaînes de spins, nombre de raisonnements et résultats s'appliquent encore à la physique traitée dans la seconde partie de cette thèse (systèmes désordonnés et fermions de Dirac).

Dans ce chapitre, je n'aborderai que très peu les aspects expérimentaux et numériques de la physique des chaînes de spins. Des détails seront donnés au besoin dans le corps des chapitres 2 et 3. C'est toutefois une discipline où il existe un réel et stimulant échange entre les trois approches. Pour obtenir une image claire et concise de la physique expérimentale des chaînes de spins à l'usage du théoricien pressé, je recommande la lecture du premier chapitre de la thèse de Vivien Brunel [21].

On considère donc une assemblée unidimensionnelle de spins de groupe de symétrie  $SU(2)$ . Ce sont des opérateurs appartenant à une représentation de l'algèbre de Lie (compacte)  $su(2)$ , indexée par un entier ou demi-entier  $s$ , appelé communément le *spin*. Ces spins sont couplés à courte distance (plus proche voisins) par une interaction antiferromagnétique (appelée *échange*). Le hamiltonien de cette chaîne de spins s'écrit :

$$H = \sum_i J \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1}$$

$J$  est l'intensité du couplage et l'entier  $i$  indexe le site des spins. Outre qu'un tel modèle est l'archétype d'un système en interaction de basse dimensionnalité sur lequel on peut appliquer les nombreuses techniques de théorie des champs, il bénéficie désormais d'un grand nombre de réalisations expérimentales. Au prix de quelques efforts et du développement de techniques performantes (DMRG par exemple), il a également fait l'objet de nombreux travaux numériques. De plus, si la forme du hamiltonien est on ne peut plus simple, la physique qui se développe à basse température est d'une grande richesse. Mieux, il arrive souvent que les manifestations de sa nature quantique échappent totalement à l'intuition classique.

Les outils de théorie des champs qui ont été développés ont donc pour objectif de décrire la physique de basse énergie. L'un de ces outils, qui présente l'atout considérable d'être de nature non-perturbative, est le modèle sigma non-linéaire.

## 1.1 Modèle sigma non-linéaire pour les chaînes de spins antiferromagnétiques

On peut construire un modèle sigma non-linéaire aussi bien dans le formalisme lagrangien qu'hamiltonien. Si, en principe, les deux formalismes sont équivalents, les subtilités (termes topologiques) émergent de façons substantiellement différentes dans les deux cadres<sup>1</sup>. On se fondera ici essentiellement sur l'approche lagrangienne (intégrale de chemin) mais je donnerai un bref aperçu de l'approche hamiltonienne.

### 1.1.1 États cohérents de spins

Dans la construction de l'intégrale de chemin pour le hamiltonien de la chaîne de spins, le souci majeur est de maintenir explicite l'invariance par rotation. On utilise pour cela une base d'*états cohérents* qui respecte la symétrie, au prix d'être surcomplète (en particulier les états ne sont pas orthogonaux). Cette base est en général construite sur un état de plus haut ou de plus bas poids d'une représentation de la symétrie respectée (ici  $SU(2)$ )<sup>2</sup>. La famille est engendrée par l'action du groupe sur ce vecteur. La symétrie effective des états engendrés est le groupe de symétrie du hamiltonien quotienté par le groupe d'isotropie du vecteur cyclique choisi. Dans notre cas c'est l'espace symétrique  $SU(2)/U(1)$ . Une façon systématique d'en déduire l'intégrale de chemin pour tout groupe de Lie (raisonnable) sera présentée dans le chapitre 4. Dans le cas particulier de  $SU(2)/U(1)$ , on préfère généralement une formulation du type espace homogène qui consiste à remarquer que l'espace symétrique  $SU(2)/U(1)$  peut être paramétré par un vecteur unitaire sur la sphère  $S^2$ . Considérons donc un spin  $\mathbf{S}$  et dotons-le d'une base d'états cohérents. Concrètement, on définit la famille d'opérateurs

$$g_{\mathbf{n}} = \exp \left( i\theta \frac{\mathbf{n}_0 \wedge \mathbf{n}}{|\mathbf{n}_0 \wedge \mathbf{n}|} \cdot \mathbf{S} \right),$$

indexée par le vecteur unitaire  $\mathbf{n}$ .  $\mathbf{n}_0$  est un vecteur directeur arbitraire que l'on choisit pour diriger l'axe de quantification  $Oz$ . Donc  $\mathbf{n}_0 = (0, 0, 1)$ . Une fois cet axe choisi, on définit  $|\Omega\rangle$ , le vecteur de plus haut poids  $|\Omega\rangle = |\uparrow\rangle$  dans l'espace de Hilbert de spin  $s$  à  $2s + 1$  dimensions. L'angle  $\theta$  (co-latitude) est défini par  $\cos \theta = \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n}$ . La famille d'états cohérents est alors construite comme  $|\mathbf{n}\rangle = g_{\mathbf{n}}|\Omega\rangle$ . Même si cette famille est surcomplète, on peut lui associer une *résolution de l'identité*

$$\frac{2s + 1}{4\pi} \int \mathcal{D}\mathbf{n} |\mathbf{n}\rangle \langle \mathbf{n}| = \mathbb{I},$$

où  $\mathcal{D}$  est la mesure sur la sphère  $S^2$ . Techniquement, il est important de connaître la valeur moyenne prise par les opérateurs de spins  $\mathbf{S}$  sur un quelconque de ces états cohérents. On trouve  $\langle \mathbf{n} | \mathbf{S} | \mathbf{n} \rangle = s \mathbf{n}$ . Rien d'étonnant donc à ce que, dans la limite classique du modèle,  $\mathbf{n}_i$  s'identifie au spin classique. Une telle famille d'états cohérents est donc supposée construite pour chaque spin en chaque site  $i$  de la chaîne.

<sup>1</sup>Passer d'une représentation lagrangienne à une représentation hamiltonienne, c'est effectuer une transformation de Legendre (lorsque la dynamique n'est pas singulière). Or les termes topologiques sont issus du terme de conjugaison des variables dans la transformation de Legendre. Ce qui explique partiellement les surprenantes différences entre les deux formalismes.

<sup>2</sup>Il existe en fait plusieurs manières de les construire, d'un point de vue mathématique, mais aussi physique. Par exemple on peut les définir comme les états qui minimisent l'inégalité de Heisenberg, c'est-à-dire les plus proches intuitivement d'un état classique.

Utilisant la résolution de l'identité, on peut maintenant aisément construire l'action :

$$S = \int_0^\beta d\tau \left( i \frac{\langle \mathbf{n}(\tau) | \mathbf{n}(\tau + a) \rangle - 1}{a} - \langle \mathbf{n}(\tau) | \mathcal{H} | \mathbf{n}(\tau) \rangle \right),$$

où  $a$  est le pas du réseau de la chaîne. Le terme cinétique  $\int_0^\beta i \langle \mathbf{n} | d | \mathbf{n} \rangle$  s'appelle une *phase de Berry*. Son évaluation n'est pas chose immédiate (voir chapitre 4). Pour notre présent problème, on obtient, en notant  $\wedge$  le produit vectoriel tridimensionnel,

$$s W[\mathbf{n}] \equiv \int_0^\beta i \langle \mathbf{n} | d | \mathbf{n} \rangle = s \int_0^1 du \int_0^\beta d\tau \mathbf{n}(\tau, u) \cdot (\partial_\tau \mathbf{n}(\tau, u) \wedge \partial_u \mathbf{n}(\tau, u)).$$

$\mathbf{n}(\tau, u)$  est un prolongement continu sur la variable  $u$  de  $\mathbf{n}(\tau)$  de telle manière que  $\mathbf{n}(\tau, u = 1) = \mathbf{n}(\tau)$ . Si l'on suppose maintenant que les seules contributions significatives à l'intégrale de chemin proviennent des configurations  $\mathbf{n}$  qui tendent à l'infini vers une constante (dans le plan espace-temps), alors on peut compactifier cet espace-temps.  $\mathbf{n}(\tau)$  décrit donc une trajectoire fermée sur laquelle s'appuie  $\mathbf{n}(\tau, u)$ . La phase de Berry s'interprète alors clairement comme l'aire sur  $S^2$  délimitée par  $\mathbf{n}(\tau)$ . Cette aire est définie modulo un multiple de  $4\pi$  qui ne contribue pas dans l'intégrale de chemin car  $s$  est demi-entier. Autrement dit la multivaluation de  $W[\mathbf{n}]$ , qui ne dépend de l'arbitraire du prolongement que modulo  $4\pi$ , n'a aucune conséquence physique.

L'action prend donc la forme :

$$S = \int dt \sum_i J s^2 \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_{i+1} + \sum_i s W[\mathbf{n}_i].$$

### 1.1.2 Physique de basse énergie

#### Décomposition semi-classique des champs

S'inspirant des modes semi-classiques de plus basse énergie de la chaîne, les champ de vecteurs  $\mathbf{n}_i$  sont ensuite décomposés selon

$$\begin{cases} \mathbf{n}_{2i} = \mathbf{l}_{2i} - s \Phi_{2i} \\ \mathbf{n}_{2i+1} = \mathbf{l}_{2i+1} + s \Phi_{2i+1}, \end{cases}$$

où le champ de vecteurs  $\Phi_i$  (aimantation alternée locale) est un champ de norme unité ( $\Phi_i^2 = 1$ ) et où le champ  $\mathbf{l}_i$  est contraint à satisfaire  $\Phi_i \cdot \mathbf{l}_i = 0$ . L'inspiration de cette décomposition est semi-classique car elle imite l'*ordre de Néel* à courte portée, c'est-à-dire la configuration de basse énergie classique où les spins sont anti-alignés. La brisure de symétrie sous-jacente est évitée parce qu'on autorise cet ordre ( $\Phi_i$ ) à changer continûment le long de l'axe de la chaîne. C'est au demeurant un impératif, puisqu'en dimension 1, il n'y a pas brisure de symétrie (compacte, théorème de Mermin-Wagner qu'on rappellera à la fin de ce chapitre).

Supposons maintenant que  $\mathbf{l}_i$  soit de l'ordre de grandeur de  $a$ , le pas du réseau. Sous cette hypothèse, il est possible de prendre la limite continue de l'action  $S$ , qui dépend alors des champs  $\mathbf{l}(x, t)$  et  $\Phi(x, t)$ .

Parce que la chaîne est antiferromagnétique, les phases de Berry de deux spins consécutifs forment le terme  $\iint d\tau \delta \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \wedge \partial_\tau \mathbf{n} dx$ , où  $\delta \mathbf{n}$  est la variation spatiale du champ  $\mathbf{n}$ . Il sort de ce terme une contribution linéaire en  $\mathbf{l}$ , qui sera éliminée par intégration pour donner la dérivée temporelle du champ  $\Phi$ .

Il sort également un terme qui s'écrit  $\Gamma[\Phi] = \theta \mathcal{Q}$ , avec  $\theta = 2\pi s$  et  $\mathcal{Q} = \frac{1}{4\pi} \iint dx d\tau \Phi \cdot \partial_x \Phi \wedge \partial_\tau \Phi$ .

## Un soupçon de topologie

$\mathcal{Q}$  s'identifie au nombre d'enroulement algébrique de la sphère sur elle-même, qui est un entier relatif.  $\Gamma[\Phi]$  est donc de nature topologique. Par définition ce nombre appartient au groupe fondamental  $\Pi_2(S^2)$ . Or

$$\Pi_2(S^2) = \Pi_2(\mathrm{SU}(2)/\mathrm{U}(1)) = \mathrm{Ker}(\Pi_1(\mathrm{U}(1)) \hookrightarrow \Pi_1(\mathrm{SU}(2))) = \mathbb{Z}.$$

J'ai choisi d'écrire le  $\Pi_2$  des configurations de champs, non pas directement comme le  $\Pi_2$  de la sphère (qui est un résultat standard), mais comme celui d'un espace quotient, parce que cela met en évidence la manière dont les configurations peuvent être écrites avec un paramètre classique ( $\mathbf{n}$ ) plus une contribution topologique, donc de nature purement quantique. Autrement dit ce qui est perdu dans la construction semi-classique des états cohérents (c'est-à-dire la restriction de  $\mathrm{SU}(2)$  à  $\mathrm{SU}(2)/\mathrm{U}(1)$ ) est retrouvé dans la topologie non-triviale des configurations de champs classiques. Une façon séduisante de comprendre cela est d'interpréter ce passage de degrés de liberté quantiques à des degrés de liberté classiques auxquels on ajoute une distinction topologique des configurations, comme la fibration de Hopf de  $\mathrm{SU}(2) \simeq \mathrm{S}^3$  sur  $\mathrm{SU}(2)/\mathrm{U}(1) \simeq \mathrm{S}^2$ . L'apparition de la distinction topologique sur les configurations provient de ce que le fibré est non-trivial. La connexion, définie sur la base, est celle d'un monopôle. Le terme topologique peut ainsi être réinterprété comme la courbure de cette connexion sur la sphère ou encore être identifié au flux du monopôle.

## Action effective

Parce que l'on a supposé que  $\mathbf{l}$  est de l'ordre de grandeur de  $a$ , l'action est quadratique et locale en  $\mathbf{l}$ , de sorte que le champ peut être éliminé de l'action par une intégration gaussienne. L'action finale effective dans le champ  $\Phi$  est :

$$S = \Gamma[\Phi] + \iint dt dx \frac{1}{2g} \left( \frac{1}{c} (\partial_t \Phi)^2 - c (\partial_x \Phi)^2 \right), \quad (1.1)$$

où  $g$  est la constante de couplage du modèle sigma non-linéaire  $g = 2/s$  et  $c$  est la célérité  $c = 2Js$ .

D'après les arguments donnés précédemment,  $\Gamma[\Phi] = \theta \mathcal{Q}$  prend une valeur entière ou demi-entière selon que le spin est entier ou demi-entier (respectivement). Le terme topologique ne contribue donc pas à l'intégrale de chemin des chaînes de spins entières, alors qu'il scinde en deux la fonction de partition des chaînes de spins demi-entières, selon que les configurations effectuent un nombre pair ou impair de *torsions*.

### 1.1.3 Groupe de renormalisation

On a vu que le terme topologique correspondait à la valeur prise par une forme *fermée* sur une configuration du champ  $\Phi$ . Une telle forme échappe donc à la théorie de perturbations. Reste le terme cinétique du modèle sigma non-linéaire. La constante de couplage  $g$  évolue sous le groupe de renormalisation comme

$$\frac{dg}{d \ln \ell} = \frac{g^2}{2\pi},$$

où le facteur d'échelle  $\ell$  se comporte comme une distance, de sorte que le flot nous amène dans l'infrarouge vers le couplage fort. Pour une chaîne entière, et donc en l'absence de terme

topologique, on peut en toute vraisemblance estimer que le flot conduit le système vers une phase massive. La question est plus délicate pour une chaîne de spin demi-entier puisque l'on ne contrôle pas les effets non perturbatifs du terme topologique sur le flot. Pour la chaîne de spins  $s=1/2$ , on sait par d'autres moyens (Ansatz de Bethe, bosonisation) que le flot conduit à un point fixe que l'on sait décrire. Mais le problème demeure pour des groupes de symétrie plus complexes (voir chapitre 4) et continue d'enflammer nombre de spécialistes.

#### 1.1.4 Approche hamiltonienne

Dans l'approche hamiltonienne du modèle sigma non-linéaire, on définit les opérateurs :

$$\Phi_i = \frac{1}{2s} (\mathbf{S}_{2i+1} - \mathbf{S}_{2i}) \quad \text{et} \quad \mathbf{l}_i = \frac{1}{2} (\mathbf{S}_{2i+1} + \mathbf{S}_{2i}).$$

Sur un bloc de deux spins indexés par les sites  $2i$  et  $2i+1$ , de largeur  $2a$ , ces opérateurs vérifient les relations de commutation

$$[l^a, l^b] = \frac{1}{2} i \epsilon_{abc} l^c \quad [l^a, \Phi^b] = \frac{1}{2} i \epsilon_{abc} \Phi^c \quad [\Phi^a, \Phi^b] = \frac{1}{2s^2} i \epsilon_{abc} \Phi^c.$$

Dans la limite semi-classique  $s \rightarrow \infty$  et, prenant la limite continue de ces champs (le bloc est de taille  $2a$ ), on obtient

$$[l^a(x), l^b(x')] = i \epsilon_{abc} l^c \delta(x - x') \quad [l^a(x), \Phi^b(x')] = i \epsilon_{abc} \Phi^c \delta(x - x') \quad [\Phi^a(x), \Phi^b(x')] = 0.$$

De plus les opérateurs satisfont  $\Phi \cdot \mathbf{l} = 0$  et  $\mathbf{n}^2 = 1 + 1/s - (a^2/s^2) \mathbf{l}^2$ . Ces relations de commutation confèrent aux opérateurs une interprétation étonnante. Si l'on considère que l'opérateur vectoriel  $\mathbf{n}$  indique la position d'une particule quantique, alors le champ vectoriel  $\mathbf{l}$ , dont les composantes satisfont l'algèbre des générateurs des rotations, s'identifie à l'opérateur de moment cinétique de cette particule.

On développe alors (avec précaution) les termes de couplage, pour obtenir le hamiltonien continu

$$\mathcal{H} = J \int \frac{dx}{2} (4\mathbf{l}^2 + 2s^2 (\partial_x \Phi)^2 - 2s (\mathbf{l} \partial_x \Phi + \partial_x \Phi \mathbf{l})),$$

qui est factorisé sous la forme :

$$\mathcal{H} = \int dx \frac{c}{2} \left( g \left( 1 - \frac{\theta}{4\pi} \partial_x \Phi \right)^2 + \frac{1}{g} (\partial_x \Phi)^2 \right),$$

avec une célérité  $c = 2Js$ , une constante de couplage  $g = 2/s$  et un angle topologique  $\theta = 2\pi s$ . Il est possible de calculer le lagrangien associé à ce hamiltonien (voir [80] pour une preuve très claire) qui donne précisément l'action 1.1. A priori, il n'est pas certain que le terme  $-\frac{\theta}{4\pi} \partial_x \Phi$  corresponde au terme topologique de la version lagrangienne. Ce qui trahit sa nature est le fait qu'il ne soit pas invariant sous la transformation de parité ( $x \mapsto -x$ ). Un tel terme ne devrait pas être autorisé puisqu'il ne respecte pas une symétrie naturelle du système. À la différence du terme topologique lagrangien dont l'invariance sous la parité est superficielle et non-physique, il n'est pas ici aussi simple de se convaincre que la symétrie est physiquement toujours présente.

## 1.2 La phase de Haldane de la chaîne de spins s=1

### 1.2.1 Modèle sigma non-linéaire et gap de spin

Revenons au cas de la chaîne de spin entier. La phase massive est caractérisée par une masse  $m$ , que l'on dit *engendrée dynamiquement*. On l'appelle ainsi parce qu'aucune échelle d'énergie n'est présente dans le système, à la seule exception du pas du réseau  $a$  mais dont on ne conçoit pas qu'il dicte la physique de basse énergie. Elle est donc apparue spontanément ! Toutefois, en pratique, elle dépend bien du cut-off  $\Lambda = 1/a$ . Une telle dépendance n'est raisonnable que si cette masse ne varie pas sous l'action du groupe de renormalisation<sup>3</sup> :

$$\left( \frac{\partial}{\partial \ln \ell} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \right) m = 0, \quad (1.2)$$

ce qui conduit à l'estimation :

$$m = \Lambda e^{2\pi/g} = \Lambda e^{\pi s}.$$

Une preuve approchée, mais se déduisant de l'action de façon analytique, sera donnée dans le chapitre 7 sur un exemple analogue (mais régi par un groupe de symétrie moins simple). Le *gap de spin*, c'est-à-dire la différence d'énergie entre le fondamental et le premier niveau excité, est relié à la masse par  $\Delta = \sqrt{gc} m$ . La présence d'une phase avec gap a été pressentie par Haldane [57, 58]. Très différente d'une phase critique, elle donne lieu à des comportements activés (exciter le système requiert une énergie finie) à basse température. Par exemple la susceptibilité magnétique se comporte comme

$$\chi(T) \propto \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-\Delta/T},$$

à basse température [69]. La longueur de corrélation peut être reliée à l'inverse du gap :

$$\xi = \sqrt{\frac{c}{g}} \frac{1}{m}.$$

Quant aux corrélations de spins, elles s'obtiennent du propagateur massif  $(k^2 + \xi^{-2})^{-1}$  par transformation de Fourier :

$$\langle \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \rangle \propto (-1)^{i-j} \langle \Phi_i \cdot \Phi_j \rangle \propto (-1)^{i-j} \frac{e^{-|i-j|/\xi}}{\sqrt{|i-j|}}.$$

La chaîne de spins s=1 est donc un exemple de système à température nulle qui est désordonné<sup>4</sup> par les fluctuations quantiques.

### 1.2.2 Fonction d'onde à liaisons de valence solides

Une fonction d'onde à *liaisons de valence solides* (ou fonction d'onde VBS pour Valence Bond Solid) est une fonction d'onde qu'on espère être une bonne approximation variationnelle du fondamental d'un système de spins. L'idée est de construire une fonction d'onde invariante

<sup>3</sup>Cette masse est de nature non-perturbative, ce qui ne l'empêche pas de devoir satisfaire l'équation avec une fonction  $\beta(g)$  calculée perturbativement.

<sup>4</sup>Désordonné en ce sens que les fluctuations sont suffisamment grandes pour couper sur de très courtes distances les corrélations.

sous les rotations globales, donc un singulet de spin, en imposant cette condition localement, c'est-à-dire sur toutes les paires de spins voisins. Il est commode d'exprimer la fonction d'onde VBS en utilisant le formalisme de seconde quantification. Pour cela, on introduit les bosons dits de *Schwinger*.

### Bosons de Schwinger

Il existe plusieurs manières de reconstruire les opérateurs de spins (bornons-nous ici à  $SU(2)$ ) à partir d'opérateurs de création/annihilation bosoniques (voire fermionique pour le spin  $s=1/2$ ) : bosons de Holstein-Primakoff, de Dyson-Maleev ou de Schwinger. Ces derniers s'écrivent pour un opérateur vectoriel de spin :

$$\hat{S}^+ = a^\dagger b, \quad \hat{S}^- = b^\dagger a, \quad \hat{S}^z = \frac{1}{2} (a^\dagger a - b^\dagger b).$$

L'avantage, manifeste, est que ces opérateurs sont quadratiques en les oscillateurs. L'inconvénient (majeur) est qu'il est nécessaire de les contraindre par la relation  $a^\dagger a + b^\dagger b = 2s$ , puisque les représentations unitaires sont de dimension finie. Sous forme covariante vectorielle les opérateurs de spins s'écrivent

$$\hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} (a^\dagger, b^\dagger) \vec{\sigma} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

On notera que dans le cas particulier de la chaîne de spins  $s=1/2$ , les opérateurs de création/annihilation bosoniques peuvent être remplacés par des opérateurs fermioniques.

### La fonction d'onde VBS

On introduit donc pour chaque spin  $\mathbf{S}_i$  de la chaîne une représentation de l'opérateur en bosons de Schwinger  $a_i$  et  $b_i$ . La fonction d'onde VBS d'une chaîne de spins  $s$ , avec  $s$  entier, *et seulement entier*, est définie par

$$|\text{VBS}\rangle = \prod_{\langle i,j \rangle} (a_i^\dagger b_j^\dagger - b_i^\dagger a_j^\dagger)^s |0\rangle,$$

où  $|0\rangle$  est le vide bosonique et où  $\langle i,j \rangle$  désigne les paires de spins plus proches voisins. Dans le cas de la chaîne de spins  $s=1$ , cette construction est équivalente à faire de chaque spin  $s=1$  la somme de deux spins  $s=1/2$ . Comme on souhaite obtenir un état de spin  $s=1$ , les deux spins doivent se trouver dans l'état triplet. C'est-à-dire qu'on les symétrise. Puis chaque spin  $s=1/2$  d'une paire est antisymétrisé avec le spin  $s=1/2$  le plus proche de la paire adjacente, de façon à ce que l'on obtienne bien un état final singulet de spin. On représente graphiquement cette construction par le schéma de la figure 1.1. Pour des amplitudes de spins  $s$  plus élevées, on introduit autant de paires de spins  $s=1/2$  qu'il est nécessaire pour former le spin  $s$ .

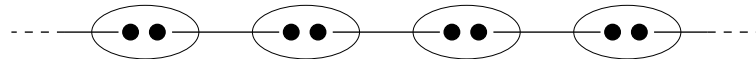


FIG. 1.1 – Construction de la fonction d'onde VBS, par scission des spins  $s=1$  en des paires de spins  $s=1/2$ , puis antisymétrisation.

Il est utile d'exprimer cette fonction d'onde sur la base des états cohérents de spins  $(|\mathbf{n}\rangle)_{\mathbf{n} \in \mathbb{S}^2}$  [6]. Pour cela, on écrit ces derniers à l'aide des bosons de Schwinger. Considérons l'opérateur

$$\hat{\psi} = u a^\dagger + v b^\dagger.$$

Sous l'action d'une rotation  $\hat{R} = \exp(i \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{S}}) \in \text{SU}(2)$ , il se transforme comme (confère chapitre 4)

$$\hat{R} \hat{\psi} \hat{R}^{-1} = R\psi \cdot \begin{pmatrix} a^\dagger \\ b^\dagger \end{pmatrix},$$

avec  $\psi = (u, v)^T$  et  $R = \exp(i \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}) \in \text{SU}(2)$ , les opérateurs de première quantification.

L'état cohérent  $|\mathbf{n}_0\rangle$ , dirigé selon l'axe de quantification, s'exprime clairement dans le formalisme de Schwinger :  $|\mathbf{n}_0\rangle = \frac{(a^\dagger)^{2s}}{\sqrt{(2s)!}}|0\rangle$ . Pour obtenir l'état cohérent  $|\mathbf{n}\rangle$ , il suffit donc de faire subir au précédent une rotation de spin amenant  $\mathbf{n}_0$  sur  $\mathbf{n}$  :

$$|\mathbf{n}\rangle = \frac{(u a^\dagger + v b^\dagger)^{2s}}{\sqrt{(2s)!}}|0\rangle \quad \text{avec} \quad u = \cos(\theta/2) e^{i\phi/2} \quad \text{et} \quad v = \sin(\theta/2) e^{-i\phi/2},$$

où  $\theta$  et  $\phi$  sont les angles d'Euler de la rotation. Ce lien établi, il est facile de calculer les amplitudes  $\Psi(\mathbf{n}) = \langle \mathbf{n} | \text{VBS} \rangle$ , où cette fois-ci  $\mathbf{n}$  désigne la collection des vecteurs  $\mathbf{n}_i$  des états cohérents. Elles valent

$$\Psi(\mathbf{n}) = \sqrt{(2s)!} \prod_{\langle i,j \rangle} \left( \frac{1 - \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j}{2} \right)^{s/2}.$$

Alors on peut exprimer la fonction VBS sur la famille des états cohérents :

$$|\text{VBS}\rangle = \frac{2s+1}{4\pi} \int \mathcal{D}\mathbf{n} \Psi(\mathbf{n}) |\mathbf{n}\rangle.$$

### Corrélations de la fonction d'onde à liaisons de valence solides

Et les fonctions de corrélation de la fonction VBS sont alors données explicitement par des intégrales statistiques :

$$\langle \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \rangle = (s+1 - \delta_{i,j})(s+1) \frac{\int \mathcal{D}\mathbf{n} |\Psi(\mathbf{n})|^2 \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j}{\int \mathcal{D}\mathbf{n} |\Psi(\mathbf{n})|^2}.$$

Les auteurs de [6] en ont déduit la fonction de corrélation

$$\langle \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \rangle \propto (-1)^{|i-j|} \left( 1 + \frac{2}{s} \right)^{-|i-j|},$$

associée à la longueur de corrélation  $\xi = \ln(1 + 2/s)$ .

### 1.2.3 Hamiltonien parent de Affleck-Kennedy-Lieb-Tasaki

Dans la physique des chaînes de spins, on utilise souvent le procédé qui consiste à remonter d'une fonction d'onde variationnelle au *hamiltonien parent* dont elle serait le fondamental. Le

hamiltonien parent est différent du hamiltonien physique d'origine, mais on espère (espoirs généralement fondés) qu'il en est proche.

C'est précisément ce que l'on peut faire subir à la fonction d'onde VBS. Pour la chaîne de spins s=1, on constate que les spins appariés ne peuvent être dans un état de spin s=2, par construction même de la fonction VBS. Exprimant donc que les projecteurs locaux sur les états de spin s=2 annihilent la fonction d'onde, on montre qu'elle est le fondamental d'énergie nulle du hamiltonien AKLT (pour Affleck-Kennedy-Lieb-Tasaki)[4] :

$$H_{\text{AKLT}} = \sum_i \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1} + \frac{1}{3} (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1})^2 + \frac{2}{3}.$$

Pour ce qui nous intéresse, le fait essentiel est qu'il a été montré numériquement [117, 119] que ce hamiltonien appartient bien à la phase de Haldane. On peut donc espérer transposer qualitativement certaines propriétés qu'il est possible d'obtenir analytiquement sur ce hamiltonien, à la physique des chaînes de Heisenberg de spin entier.

#### 1.2.4 Un ordre caché

Le fondamental du hamiltonien AKLT, c'est-à-dire la fonction d'onde VBS, peut se développer sur la base des états de spin s=1/2 polarisés selon l'axe Oz. On utilise pour cela la construction de première quantification de la fonction d'onde :

$$|\text{VBS}\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^N \sum_{\{\alpha_i\}_i, \{\beta_i\}_i} \dots |\alpha_i, \beta_i\rangle \epsilon_{\beta_i \alpha_{i+1}} |\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}\rangle \epsilon_{\beta_{i+1} \alpha_{i+2}} |\alpha_{i+2}, \beta_{i+2}\rangle \dots$$

avec  $|\alpha_i, \beta_i\rangle = |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle + |\beta_i\rangle \otimes |\alpha_i\rangle$ .  $N$  est le nombre de spins composant la chaîne. En termes d'états polarisés selon Oz de spin s=1 projetés sur Oz, la fonction d'onde est une somme sur les configurations

$$|\text{VBS}\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^N \sum_{\text{config.}} (-1)^P |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |-1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle \dots$$

L'antisymétrisation des composantes s=1/2 adjacentes impose que les spins de ces composantes soient opposés. Il est simple de se convaincre que les seules configurations qui contribuent peuvent s'écrire comme un *ordre de Néel dilué*. C'est-à-dire que l'on part d'un état de Néel à  $N - N_0$  spins  $|1\rangle \otimes |-1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |-1\rangle \otimes \dots$ , puis on insère  $N_0$  états de spin nul entre les spins 1 et -1. Cet ordre (caché!) peut être mis à jour à l'aide du paramètre d'ordre  $\check{S}_j^z = \langle \exp\left(i\pi \sum_{n=1}^j S_n^z\right) S_j^z \rangle$ . Une observable appropriée, appelé paramètre d'ordre *string*, est la fonction de corrélation

$$\mathcal{O}_{ij}^z = \langle \check{S}_i^z \check{S}_j^z \rangle_H = \langle S_i^z \exp\left(i\pi \sum_{n=i+1}^{j-1} S_n^z\right) S_j^z \rangle_H.$$

De même que pour la fonction de corrélation, il est possible de calculer le paramètre d'ordre  $\mathcal{O}^z$ , pour la fonction d'onde VBS :  $\lim_{|i-j| \rightarrow \infty} \mathcal{O}_{ij}^z = 4/9 \neq 0$ .

Comme on pense que la fonction d'onde VBS est similaire au fondamental de la chaîne de spins s=1, ce paramètre d'ordre y a été calculé numériquement. Sa valeur est de 0.37. Et de là de penser que la phase de Haldane possède le même ordre caché. On qualifie alors la phase gappée de *liquide* de Haldane du fait de la dilution de l'ordre de Néel.

### Brisure d'une symétrie $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Kennedy et Tasaki ont montré [72] que, pour la chaîne de spins  $s=1$ , le paramètre d'ordre est associé à la brisure d'une symétrie discrète, la brisure engendrant alors le gap. Pour cela, ils ont construit une transformation unitaire  $U$  sous laquelle le paramètre d'ordre string devient un paramètre d'ordre ferromagnétique plus conventionnel. Bien entendu, la transformation n'est pas locale, et le hamiltonien obtenu non plus. Plus précisément, si on appelle  $\tilde{H} = U H U^{-1}$  le hamiltonien transformé, on a :

$$\mathcal{O}^z(i, j)[H] = \mathcal{O}_{\text{ferro}}^z(i, j)[\tilde{H}], \quad (1.3)$$

où  $\mathcal{O}_{\text{ferro}}^z(i, j) = \langle S_i^z S_j^z \rangle_{\tilde{H}}$ . Le hamiltonien transformé est de la forme :

$$\tilde{H} = - \sum_j \left[ S_j^x S_{j+1}^x + S_j^z S_{j+1}^z - S_j^y \exp(i \pi (S_j^z + S_{j+1}^z)) S_{j+1}^y \right].$$

Ce hamiltonien est invariant sous le groupe fini des rotations discrètes d'axes  $O_x$ ,  $O_y$  et  $O_z$  et d'angle  $\pi$ . Comme l'une des rotations est engendrée par le produit des deux autres, la symétrie du système est  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . On peut démontrer que les brisures des deux symétries  $\mathbb{Z}_2$ , pour la chaîne de Heisenberg et pour la chaîne AKLT conduisent à la même phase.

### Autre manifestation de l'ordre caché

Il existe une manifestation bien plus spectaculaire de l'ordre caché que le calcul du paramètre d'ordre string. Considérons une chaîne finie de spins  $s=1$ . Si la perspective VBS du fondamental est correcte, alors il doit rester quatre degrés de liberté correspondant aux quatre polarisations des deux spins  $s=1/2$  aux deux extrémités de la chaîne. Les deux spins  $s=1/2$  ne participent pas aux états de valence. Une représentation en liens de valence est donnée sur la figure 1.2.

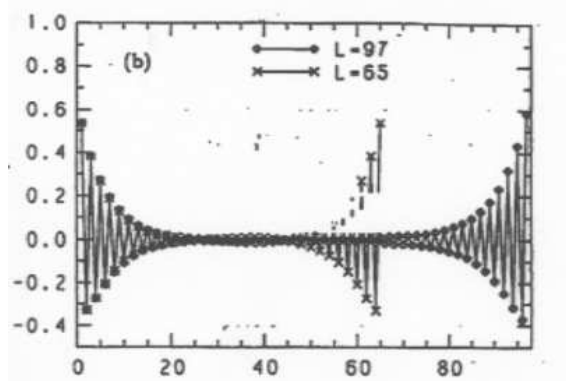
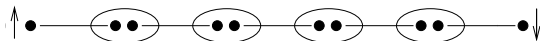


FIG. 1.2 – À gauche, les spins des extrémités ne forment pas des liens de valence. À droite, le calcul numérique de l'aimantation locale pour deux chaînes de taille finie [94].

Un test numérique de cette prédiction que l'on doit à Kennedy [71] est le calcul de l'aimantation locale le long de la chaîne finie et a été donné dans [94]. Comme prévu, l'aimantation

locale, nulle dans le volume, croît rapidement lorsque l'on s'approche des deux extrémités (voir figure 1.2).

## 1.3 La chaîne de spins $s=1/2$

L'approche des chaînes de spins  $s$  demi-entier par le modèle sigma non-linéaire, aussi séduisante soit-elle, conduit à une impasse technique. On verra dans le chapitre 4, que le même type d'impasse est apparue dans les travaux de Pruisken [110] dans la recherche de la théorie des champs permettant de décrire la transition de l'effet Hall quantique entier. Si le problème n'a pas encore trouvé de solution pour l'effet Hall, il est résolu dans le cas de la chaîne de spins  $s=1/2$  (beaucoup moins clairement pour les  $s$  demi-entiers supérieurs). Un arsenal de méthodes non-perturbatives à même de décrire la physique critique du système peut en effet être déployé.

### 1.3.1 Bosonisation abélienne

Dans cette sous-section, nous allons décrire la bosonisation abélienne de la chaîne de spins  $s=1/2$ . À la différence de la bosonisation non-abélienne, la version abélienne ne respecte pas la symétrie  $SU(2)$  du hamiltonien. Cette dernière n'est plus manifeste. On considère une version étendue anisotrope de la chaîne de Heisenberg (dite XXX), que l'on nomme chaîne XXZ :

$$\mathcal{H} = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_n (S_n^+ S_{n+1}^- + S_n^- S_{n+1}^+)}_{\mathcal{H}_{XY}} + \underbrace{\Delta \sum_n S_n^z S_{n+1}^z}_{\text{Anisotropie}},$$

avec  $S_n^+ = S_n^x + iS_n^y$  et  $S_n^- = S_n^x - iS_n^y$ . La valeur de l'échange  $J$  a été prise égale à 1. Nous verrons que la théorie de perturbations sera développée autour du point fixe constitué par la chaîne XY dont le hamiltonien est donné par  $\mathcal{H}_{XY}$ . Dans cette perspective, le terme d'anisotropie est considéré comme une perturbation. Le point fixe de la chaîne isotrope ( $\Delta = 1$ ) n'est donc pas accessible perturbativement. Toutefois il est possible de remédier à cet inconvénient. La chaîne est en effet intégrable au moyen de l'Ansatz de Bethe et l'on peut utiliser une partie des résultats pour substituer des coefficients exacts aux coefficients perturbatifs, dès lors qu'ils ont été mis en correspondance. La supériorité de l'Ansatz de Bethe s'arrête ici puisque l'on ne sait pas en tirer les fonctions de corrélation. Ceci connu, il est en pratique plus agréable de travailler dans le cadre de la bosonisation abélienne, car on sait décrire aisément le point fixe au moyen d'une théorie de bosons libres. Voyons comment on y arrive.

### Transformation de Jordan-Wigner

Une première transformation de caractère non perturbatif est la transformation de Jordan-Wigner. Cette transformation est exacte et associe au hamiltonien de la chaîne de spins, un hamiltonien de fermions libres sans spin. Les fermions se meuvent sur le réseau et sont en

interaction. La transformation s'écrit :

$$\begin{aligned} S_n^+ &= (-1)^n c_n^\dagger \cos \left( \pi \sum_{m < n} c_m^\dagger c_m \right), \\ S_n^- &= (-1)^n c_n \cos \left( \pi \sum_{m < n} c_m^\dagger c_m \right), \\ S_n^z &= c_n^\dagger c_n - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

La transformation est manifestement non-locale. Le facteur non local (string)  $\cos \left( \pi \sum_{m < n} c_m^\dagger c_m \right)$  a pour rôle de forcer les opérateurs de spin à commuter de site à site. En effet, à la différence des opérateurs de spin, les opérateurs fermioniques anticommulent. Il est clair que selon que l'aimantation locale au site  $j$  le long de Oz vaut  $m = 1/2$  ou  $m = -1/2$ , le site est occupé par un fermion ou ne l'est pas. Effectuant donc la transformation de Jordan-Wigner sur le hamiltonien, on obtient :

$$\mathcal{H} = -t \sum_n \left( c_{n+1}^\dagger c_n + c_n^\dagger c_{n+1} \right) + \Delta \sum_n \left( c_n^\dagger c_n - 1/2 \right) \left( c_{n+1}^\dagger c_{n+1} - 1/2 \right),$$

avec dans notre cas  $t = 1$ . Au hamiltonien de la chaîne XY correspond donc un hamiltonien de liaisons fortes de fermions libres (terme de *hopping*). Le terme d'anisotropie est devenu un terme d'interaction. Le hamiltonien de liaisons fortes se diagonalise en  $\mathcal{H}_0 = -t \sum_k \cos(ka) c_k^\dagger c_k$ . On rappelle que  $a$  est le pas du réseau. Le fondamental du système libre est obtenu en remplissant la mer d'états d'énergie négative. En l'absence de terme de champ magnétique, cela correspond au demi-remplissage des états, soit un fermion tous les deux sites. En référence à ce fondamental, on peut recourir à un ordre normal et écrire :

$$\mathcal{H} = -t \sum_n \left( c_{n+1}^\dagger c_n + c_n^\dagger c_{n+1} \right) + \Delta \sum_n : c_n^\dagger c_n : : c_{n+1}^\dagger c_{n+1} :.$$

On reviendra en détail sur ce hamiltonien dans la seconde partie de cette thèse lorsque les liaisons  $t$  seront désordonnées.

Jusqu'à présent il n'a été fait usage d'aucune approximation. Nous nous intéressons maintenant à la physique de basse énergie et souhaitons prendre la limite continue du hamiltonien. Tout repose alors sur le caractère unidimensionnel du système.

### Limite continue

On s'intéresse aux excitations du spectre de basse énergie, c'est-à-dire aux excitations de grande longueur d'onde. Ces excitations sont de deux types : il y a les excitations particule-trou de moment nul ( $k = 0$ ) et il y a celles à grand moment transféré ( $k = 2k_F$ ). On cherche donc à linéariser la bande électronique au voisinage de la surface de Fermi et à ne considérer que les fermions R se déplaçant vers la droite (d'impulsion  $k$  telle que  $|k - k_F| \ll k_F$ ) et les fermions L se déplaçant vers la gauche (d'impulsion  $k$  telle que  $|k + k_F| \ll k_F$ ). Cette procédure nécessite d'introduire un cut-off  $\Lambda \ll k_F$  afin d'éviter les doubles comptages de fermions. À la limite continue, les sommes discrètes sont remplacées par des intégrales, et la décomposition en modes de l'opérateur fermionique s'écrit :

$$c_n = e^{-ik_F n a} \int_{-k_F - \Lambda}^{-k_F + \Lambda} \frac{dk}{2\pi} c_k e^{i(k+k_F)na} + e^{ik_F n a} \int_{k_F - \Lambda}^{k_F + \Lambda} \frac{dk}{2\pi} c_k e^{i(k-k_F)na}.$$

D'où, à la limite continue :

$$\psi(x) = e^{-ik_F x} \psi_R(x) + e^{ik_F x} \psi_L(x).$$

Le hamiltonien libre se réécrit lui aussi à la limite continue :

$$\mathcal{H}_0 = v_F \int dx \left( \psi_L^\dagger i \partial_x \psi_L - \psi_R^\dagger i \partial_x \psi_R \right), \quad (1.4)$$

avec  $v_F = 2t \sin k_F$ . Nous avons donc obtenu une théorie continue de fermions relativistes de célérité  $c = v_F$ .

Obtenir la limite continue du terme d'interaction est une opération délicate car elle nécessite plusieurs régularisations. On introduit les courants chiraux  $J_L =: \psi_L^\dagger \psi_L :$  et  $J_R =: \psi_R^\dagger \psi_R :$ . Alors  $: c_n^\dagger c_n :$  s'exprime comme

$$: c_n^\dagger c_n := J_L + J_R + (-1)^n \left( \psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L \right).$$

Négligeant les termes oscillant rapidement, le terme d'interaction se décompose en

$$\begin{aligned} : c_n^\dagger c_n :: c_{n+1}^\dagger c_{n+1} := & (J_R + J_L)(na)(J_R + J_L)(na + a) \\ & - \left( \psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L \right)(na) \left( \psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L \right)(na + a). \end{aligned}$$

Le terme  $2 J_R J_L$  qui apparaît dans le développement du premier produit ne nécessite pas de régularisation à courte distance, alors que la somme  $J_R(na)J_R(na + a) + J_L(na)J_L(na + a)$  est régularisée en

$$\frac{1}{\pi} \left( \psi_L^\dagger i \partial_x \psi_L - \psi_R^\dagger i \partial_x \psi_R \right).$$

Le second terme du développement de l'interaction se décompose en deux classes de termes :

- Les termes croisés  $\psi_L^\dagger \psi_R(na) \psi_R^\dagger \psi_L(na + a) + \psi_R^\dagger \psi_L(na) \psi_L^\dagger \psi_R(na + a)$  correspondent à des processus de diffusion de quatre fermions à une dimension, de moment total nul (voir figure 1.3).

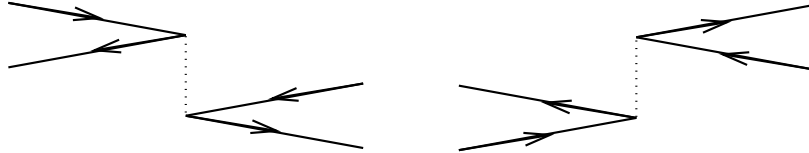


FIG. 1.3 – Processus de diffusion vers l'avant et vers l'arrière

- Les termes diagonaux  $\psi_L^\dagger \psi_R(na) \psi_L^\dagger \psi_R(na + a) + \psi_R^\dagger \psi_L(na) \psi_R^\dagger \psi_L(na + a)$  correspondent à des processus de diffusion de moment total  $4 k_F$  (voir figure 1.4). De tels processus sont autorisés par la nature discrète du réseau, lorsque l'on se trouve au demi-remplissage. En effet, les préfacteurs du type  $e^{i 4 k_F a} = 1$  n'induisent alors pas de termes oscillant rapidement. On les appelle des processus Umklapp.

Finalement, on obtient à la limite continue

$$\mathcal{H} = \int dx (\pi + 2\Delta) (J_R^2 + J_L^2) + 4\Delta J_R J_L - \underbrace{\Delta \left( \left( \psi_L^\dagger \psi_R \right)^2 + \left( \psi_R^\dagger \psi_L \right)^2 \right)}_{\text{Umklapp}}. \quad (1.5)$$



FIG. 1.4 – Processus de diffusion Umklapp

## Bosonisation

Le principe de la bosonisation est de transformer une première théorie des champs en une seconde dont les champs sont a priori très différents de ceux de la première, en l'occurrence mettre en correspondance une théorie de champs fermioniques et une théorie de champs bosoniques. L'équivalence des deux théories est assurée par l'identité des fonctions de corrélation des champs se correspondant. Les fonctions de corrélation ne sont pas nécessairement celles de la théorie complète (qu'on ne connaît pas dans les cas intéressants). Par exemple, dans le cas d'une théorie conforme perturbée, les fonctions de corrélation sont celles du point fixe conforme. La bosonisation s'étend alors aux termes de perturbation, en identifiant formellement les fonctions de corrélation à l'aide du théorème de Wick.

Concrètement, on souhaite bosoniser le hamiltonien d'un fermion libre  $\mathcal{H}_0$  (formule 1.4). Les fonctions de corrélation des champs se calculent simplement en décomposant les champs en modes de Fourier. On obtient pour les deux chiralités :

$$\langle \psi_L^\dagger(0,0) \psi_L(x,t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\alpha - i(x+t)} \quad \langle \psi_R^\dagger(0,0) \psi_R(x,t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\alpha + i(x-t)}.$$

$\alpha$  est un cut-off spatial. La théorie bosonique dont on cherche à prouver l'équivalence a pour hamiltonien

$$\mathcal{K}_0 = \frac{v_F}{2} \int dx \left( \Pi^2 + (\nabla \phi)^2 \right).$$

Les opérateurs bosoniques peuvent être ensuite décomposés en modes de Fourier. Puis, séparant les modes de moments positifs des modes de moments négatifs, on construit les champs droit  $\phi_R$  et gauche  $\phi_L$ , qu'on peut écrire en fonction du champ  $\phi$  et de son moment conjugué canoniquement  $\Pi$ , grâce aux formules de Mandelstam :

$$\phi_L = \frac{1}{2} \left[ \phi + \int_{-\infty}^x dy \Pi(y) \right], \quad \phi_R = \frac{1}{2} \left[ \phi - \int_{-\infty}^x dy \Pi(y) \right].$$

Ces champs sont chiraux. En effet, du point de vue hamiltonien, l'opérateur bosonique  $\phi$  satisfait les équations du mouvement  $\square \phi = 0$ , et donc se décompose en  $\phi(x,t) = \phi_L(x+t) + \phi_R(x-t)$ . Dans le formalisme lagrangien cette identité reste correcte mais au sens restreint de l'insertion dans les fonctions de corrélation. Dans la suite, on notera  $\tilde{\phi} = \phi_L - \phi_R$ , que l'on appelle champ dual de  $\phi$ .

Un des aspects non-triviaux de la procédure de bosonisation est que, si les champs chiraux commutent bien en des points distincts, ils ne commutent plus aux points coïncidents. Les

formules les plus utiles sont celles donnant les relations de commutation à temps égaux :

$$\begin{aligned} [\phi_R(x, t), \phi_R(y, t)] &= -i/4 \operatorname{sgn}(y - x), & [\phi_L(x, t), \phi_L(y, t)] &= i/4 \operatorname{sgn}(y - x), \\ [\phi_R(x, t), \phi_L(y, t)] &= i/4. \end{aligned}$$

Les fonctions de corrélation des champs bosoniques chiraux sont

$$\begin{aligned} \langle \phi_L^\dagger(0, 0) \phi_L(x, t) - \phi_L^2(0, 0) \rangle &= \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\alpha}{\alpha + i(x + t)}, \\ \langle \phi_R^\dagger(0, 0) \phi_R(x, t) - \phi_R^2(0, 0) \rangle &= \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\alpha}{\alpha - i(x - t)}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Manifestement ce ne sont pas les bons candidats à faire correspondre aux champs chiraux fermioniques. En revanche, les opérateurs de vertex  $e^{i\beta\phi_L}$  et  $e^{i\beta\phi_R}$  en sont. En effet, à l'aide des fonctions de corrélation qui précèdent (1.6), on montre que

$$\langle e^{i\beta\phi_L(0,0)} e^{-i\beta\phi_L(x,t)} \rangle = \left( \frac{\alpha}{\alpha + i(x+t)} \right)^{\frac{\beta^2}{4\pi}}, \quad \langle e^{i\beta\phi_R(0,0)} e^{-i\beta\phi_R(x,t)} \rangle = \left( \frac{\alpha}{\alpha - i(x-t)} \right)^{\frac{\beta^2}{4\pi}}.$$

Pour la valeur de  $\beta$  idoine, à savoir  $\beta = \sqrt{4\pi}$ , les fonctions de corrélations des champs fermioniques et des champs de vertex bosoniques correspondent à un facteur de normalisation près. On aboutit donc aux correspondances :

$$\psi_L \equiv \frac{i}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{i\sqrt{4\pi}\phi_L}, \quad \psi_R \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-i\sqrt{4\pi}\phi_R}.$$

Outre son rôle de régulateur, le cut-off ultra-violet  $\alpha$  permet de dimensionner (dimension canonique) correctement les opérateurs de vertex, puisque les opérateurs de fermions ont pour dimension 1/2. Si on garde à l'esprit les subtilités qui jalonnent la bosonisation (expression à régulariser, relations de commutation non-triviale entre champs chiraux, facteurs de Klein), on obtient les opérateurs correspondants aux courants chiraux :

$$J_L =: \psi_L^\dagger \psi_L := -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_x \phi_L, \quad J_R =: \psi_R^\dagger \psi_R := -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_x \phi_R,$$

et aux bilinéaires sans spin conforme :

$$:\psi_R^\dagger \psi_R + \psi_L^\dagger \psi_L := -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_x \phi, \quad \psi_R^\dagger \psi_L = \frac{1}{2\pi\alpha} e^{i\sqrt{4\pi}\phi}, \quad \psi_L^\dagger \psi_R = \frac{1}{2\pi\alpha} e^{-i\sqrt{4\pi}\phi}.$$

Reprenant le hamiltonien fermionisé (1.5) de la chaîne de spins, on obtient à l'aide des règles de bosonisation décrites plus haut ,

$$\mathcal{H} = \int dx \frac{c}{2} \left[ K \Pi^2 + \frac{1}{K} (\nabla \phi)^2 \right] - \frac{\Delta}{2(\pi\alpha)^2} \cos \sqrt{16\pi} \phi, \quad (1.7)$$

où  $c$ , la célérité et  $K$ , le rayon de compactification du champ bosonique, se calculent au premier ordre en  $\Delta$  :

$$c = 1 + \frac{2\Delta}{\pi} + O(\Delta^2) \quad \text{et} \quad K = 1 - \frac{2\Delta}{\pi} + O(\Delta^2).$$

Il est possible de dilater le champs  $\phi \longrightarrow \sqrt{K}\phi$ , de sorte que  $\Pi \longrightarrow \Pi/\sqrt{K}$ , et

$$\mathcal{H} = \int dx \frac{c}{2} [\Pi^2 + (\nabla\phi)^2] - \frac{\Delta}{2(\pi\alpha)^2} \cos \sqrt{16K}\pi\phi.$$

Ce hamiltonien correspond au modèle de sine-Gordon. Nous avons obtenu  $c$  et  $K$  en perturbation du facteur d'anisotropie. Le recours à l'Ansatz de Bethe permet de calculer  $K$  exactement :

$$\frac{1}{2K} = 1 - \frac{\arccos(\Delta)}{\pi}.$$

Ce qui permet de conclure que pour la chaîne isotrope  $\Delta = 1$  et  $K = 1/2$ . Dans ce cas la dimension d'échelle des termes Umklapp qui ont été bosonisés en :  $\cos \sqrt{8\pi}\phi$  : vaut 2 et le terme est marginal.

Lorsque l'on souhaite calculer des fonctions de corrélation de spins dans une chaîne, on peut recourir à la forme bosonisée (version abélienne) des opérateurs de spins :

$$\begin{aligned} S^+(x) &= \frac{e^{-i\sqrt{\pi}\tilde{\phi}}}{\sqrt{2\pi\alpha}} \left[ (-1)^x + \sin \sqrt{4\pi}\phi \right], \\ S^-(x) &= \frac{e^{i\sqrt{\pi}\tilde{\phi}}}{\sqrt{2\pi\alpha}} \left[ (-1)^x + \sin \sqrt{4\pi}\phi \right], \\ S^z(x) &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \nabla\phi + \frac{(-1)^x}{\pi\alpha} \cos \sqrt{4\pi}\phi. \end{aligned} \tag{1.8}$$

On utilisera ces formules dans le chapitre 3.

On présente maintenant quelques notions utiles sur les modèles de Wess-Zumino-Novikov-Witten. Ces rappels sont en particulier nécessaires à la bonne compréhension du formalisme de la bosonisation non-abélienne de la chaîne de spins  $s=1/2$ .

### 1.3.2 Modèle de Wess-Zumino-Novikov-Witten

On a vu qu'on pouvait faire correspondre à la chaîne de spins  $s=1/2$ , un modèle sigma non-linéaire construit sur un espace homogène paramétré par un vecteur unitaire appartenant à  $S^2 \simeq \text{SU}(2)/\text{U}(1)$ . Cette théorie incorpore un terme topologique qui la rend critique. Bien que le modèle soit critique, il ne possède pas la symétrie conforme (présence rédhibitoire de la perturbation marginalement non-pertinente des termes Umklapp). La symétrie de Lie affine sous-jacente ne peut lui être rigoureusement équivalente mais doit en principe fournir les exposants des fonctions de corrélation algébriques du modèle. La théorie du point fixe possédant la symétrie affine est construite sur le groupe  $\text{SU}(2)$  et est décrite par l'action du modèle de Wess-Zumino-Novikov-Witten (noté par la suite WZW) [140]. L'action d'un modèle de WZW général est :

$$S = \frac{k}{16\pi} \int d^2x \text{Tr} (\partial^\mu g^{-1} \partial_\mu g) + \frac{i k}{24\pi} \int d^3x \epsilon_{\mu\nu\lambda} \text{Tr} (\tilde{g}^{-1} \partial^\mu \tilde{g} \tilde{g}^{-1} \partial^\nu \tilde{g} \tilde{g}^{-1} \partial^\lambda \tilde{g}).$$

L'espace d'intégration (bidimensionnel) est supposé compactifié, de sorte qu'il s'identifie à la sphère  $S^2$ .

Les matrices  $g$  appartiennent à la représentation fondamentale du groupe de symétrie  $G$  qui est un groupe de Lie semi-simple. Dans le cas de la chaîne de spins de Heisenberg le groupe est  $G = \text{SU}(2)$ . Les matrices  $\tilde{g}$  sont alors le prolongement de  $g$  de la sphère  $S^2$  sur laquelle ce dernier

est défini à la boule intérieure à cette surface. Le second terme correspond à l'intégration de la 3-forme fermée  $\tilde{g}^{-1}d\tilde{g} \wedge \tilde{g}^{-1}d\tilde{g} \wedge \tilde{g}^{-1}d\tilde{g}$ . Ce terme est multivalué. La différence de deux tels termes s'écrit comme un élément du  $\Pi_3$  du groupe, qui pour les groupes de Lie simples, compacts et connexes vaut  $\mathbb{Z}$ . Pour que sa valeur soit déterminée modulo  $2\pi i$ , et pas moins de  $2\pi i$ , on montre donc que  $k$ , appelé *niveau* du modèle, doit être un entier (dans le cas exceptionnel de  $G = \text{SO}(3)$ ,  $k$  doit être un entier pair.). Dans le cas de la chaîne de spins s=1/2,  $k$  vaut 1.

### Symétrie et courants conservés

Tout comme dans le cas du modèle sigma non-linéaire  $\text{SO}(3)$ , le terme topologique rend le modèle critique. Mieux que cela, elle lui confère l'invariance conforme. En effet, grâce à ce terme, et au niveau classique, les équations du mouvement donnent la conservation des courants chiraux

$$\partial \bar{J} = 0 \quad \text{et} \quad \bar{\partial} J = 0 \quad \text{avec} \quad \bar{J} = \frac{k}{2} g^{-1} \bar{\partial} g \quad \text{et} \quad J = \frac{k}{2} g \partial g^{-1}.$$

Le facteur  $k/2$  est un facteur conventionnel. Ces courants (conservés au niveau classique et quantique) engendrent une symétrie  $G_L \times G_R$ , qui est définie par l'invariance de l'action sous la transformation  $g(z, \bar{z}) \rightarrow \Omega_L(z) g(z, \bar{z}) \Omega_R(\bar{z})$ , où  $\Omega_L(z)$  et  $\Omega_R(\bar{z})$  appartiennent à  $G$ . Cette symétrie élargit la simple symétrie  $G$  du modèle sigma non-linéaire (c'est-à-dire l'action de WZW sans le terme topologique) construit sur le groupe.

### Groupe de renormalisation

$k$  étant un entier, il ne se renormalise pas. Il n'y a pas de contre-terme proportionnel au terme topologique. En revanche, le terme topologique contribue au calcul de la fonction  $\beta$  associée à la constante de couplage du terme cinétique. Comme attendu, on peut montrer, au moins à l'ordre d'une boucle, que la fonction  $\beta$  s'annule, puisque la valeur  $k/16\pi$  donné a priori à la constante de couplage correspond à un point conforme.

### Analyse conforme quantique

L'analyse au niveau quantique de la conservation de ces courants conduit à une *algèbre de courants*. Techniquement les courants permettent (comme le tenseur énergie-impulsion pour une théorie conforme) d'écrire des identités de Ward. Par exemple, étudiant la fonction de corrélation  $\langle g(w, \bar{w}) \rangle$ , on effectue un changement de variables infinitésimal dans l'intégrale fonctionnelle :  $g \rightarrow e^{-X(z)} g e^{\bar{X}(\bar{z})}$  où  $X$  et  $\bar{X}$  sont respectivement holomorphe et antiholomorphe dans un voisinage de  $(w, \bar{w})$ . Distinguant les blocs holomorphes et antiholomorphes, il sort deux termes du changement de variables. Le premier correspond à la variation du champ moyenné  $\delta_{X, \bar{X}} g = -Xg + g\bar{X}$  et le second

$$\delta_{X, \bar{X}} S = \frac{i}{2\pi} \oint dz \text{Tr} (X(z) J(z)) - \frac{i}{2\pi} \oint d\bar{z} \text{Tr} (\bar{X}(\bar{z}) J(\bar{z}))$$

à la variation de l'action qui fait donc intervenir le produit d'un courant avec le champ  $g$ . Décomposant les courants sur les générateurs de  $\mathfrak{g}$ , l'algèbre de Lie de  $G$ ,  $J(z) = \sum_a J^a(z) T_a$ , on obtient l'OPE :

$$J^a(z) g(w, \bar{w}) = -\frac{T^a}{z-w} g(w, \bar{w}) + \text{termes réguliers}, \quad (1.9)$$

pour le bloc holomorphe et

$$\bar{J}^a(\bar{z})g(w, \bar{w}) = g(w, \bar{w})\frac{T^a}{\bar{z} - \bar{w}} + \text{termes réguliers}, \quad (1.10)$$

pour le bloc antiholomorphe.

Les OPE des courants entre eux s'obtiennent de façon analogue en considérant une reparamétrisation de  $\langle J(z) \rangle$ . On utilise à cette fin la variation du courant sous la transformation :

$$\delta_{X, \bar{X}} J = [X, J] - \frac{k}{2} \partial X.$$

Cela conduit à une algèbre chirale de courants

$$J^a(z)J^b(w) = \frac{k \kappa_{ab}}{2(z-w)^2} + \sum_c i f^a{}^b{}_c \frac{J^c(w)}{z-w} + \text{termes réguliers},$$

où  $f_{abc}$  sont les constantes de structure de l'algèbre ( $[T^a, T^b] = i f^a{}^b{}_c T^c$ ).  $\kappa_{ab}$  est son tenseur métrique. Il existe bien sûr une algèbre similaire pour la seconde chiralité. Dans la représentation de spin de  $\text{su}(2)$  de générateurs  $S^0, S^+$  et  $S^-$ , on obtient  $i f^{0+}{}_+ = 1$ ,  $i f^{0-}{}_- = -1$  et  $i f^{+-}{}_0 = 2$ . La métrique est définie par

$$\kappa_{ab} = \frac{1}{C_{\text{ad}}} \text{Tr} (\text{ad}_{T_a} \circ \text{ad}_{T_b}),$$

où  $C_{\text{ad}}$  est le nombre de Coxeter dual, c'est-à-dire la valeur du Casimir quadratique dans la représentation adjointe. Explicitement, cela s'écrit  $f^a{}^b{}_c f^{ab}{}^d{}_c = C_{\text{ad}} \delta_c^d$ . Dans notre cas  $C_{\text{ad}} = 2$ ,  $\kappa^{00} = 1$ ,  $\kappa^{+-} = 2$ , et  $\kappa^{-+} = 2$ .

Procédant à un développement de Laurent  $J^a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n-1} J_n^a$ , on montre en utilisant l'OPE ci-dessus que les composantes du développement satisfont à

$$[J_n^a, J_m^b] = \sum_c i f^a{}^b{}_c J_{n+m}^c + \frac{k}{2} \kappa^{ab} n \delta_{n, -m}.$$

Ces relations de commutation définissent une algèbre de Kac-Moody ou algèbre de Lie affine de niveau  $k$ .

### Construction de Sugawara

On souhaite retrouver dans la symétrie affine non-minimale la symétrie conforme du modèle et, notamment, un tenseur énergie-impulsion qui engendre cette dernière. Le tenseur énergie-impulsion de la théorie classique est  $T(z) = 1/k \sum_{ab} \kappa_{ab} J^a(z)J^b(z)$ . Comme les courants ne sont pas des champs libres, leur produit est renormalisé et le tenseur énergie-impulsion est dilaté d'un facteur numérique. Ce facteur est calculé en demandant que le produit à courte distance du tenseur avec les courants soit de la forme :

$$T(z)J^a(w) = \frac{J^a(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial J^a(w)}{(z-w)} + \text{termes réguliers},$$

qui exprime corrélativement le fait que  $T(z)$  est un véritable opérateur énergie impulsion (en se sens que son mode 0 est l'opérateur ayant pour spectre les dimensions conformes des opérateurs

de la théorie) et  $J(w)$  est un opérateur de dimensions  $(1,0)$  puisqu'il est un courant holomorphe conservé. On en déduit la forme définitive du tenseur énergie-impulsion (voir par exemple [38])

$$T(z) = \frac{1}{k + C_{\text{ad}}} \sum_{ab} \kappa_{ab} J^a J^b(z).$$

Dans le cas de  $\text{su}(2)$ , le tenseur de Sugawara est donc

$$T(z) = \frac{1}{2(k+2)} (2 S^0 S^0 + S^+ S^- + S^- S^+)$$

### Charge centrale

La charge centrale de la théorie conforme est calculée en obtenant la fonction de corrélation

$$\langle T(z)T(w) \rangle = \frac{c/2}{(z-w)^4} \quad \text{avec} \quad c = \frac{k \dim(\mathfrak{g})}{k + h^*}. \quad (1.11)$$

Naturellement les composantes de Fourier du tenseur de Sugawara

$$L_m = \frac{1}{2\pi i} \oint T(z) z^{m+1} dz$$

engendrent une algèbre de Virasoro de charge  $c$ . Dans le cas de la théorie conforme de la chaîne de spins  $s=1/2$ ,  $\dim(\mathfrak{g}) = 3$  et  $h^* = 2$ , donc  $c = 3k/(k+2)$ . Et notamment  $c = 1$  pour le niveau  $k = 1$ .

### Dimensions des champs

Les champs primaires de la théorie de WZW sont les champs qui se transforment de façon covariante de  $G_L \times G_R$ . Un champ primaire  $\phi(z, \bar{z})$  vérifie l'OPE à courte distance suivante

$$J^a(z) \phi(w, \bar{w}) = -\frac{T^a \phi(w, \bar{w})}{(z-w)} + \dots$$

Comme on l'a vu, c'est le cas du champ  $g(w, \bar{w})$  du modèle de WZW, dans la représentation fondamentale de  $G$ .

Tous les champs primaires d'une théorie de WZW étant aussi des champs primaires de la théorie conforme associée, on peut calculer leurs dimensions conformes. En utilisant le générateur des dilatations  $L_0$  pour les calculer et en exprimant  $L_0$  comme le mode zéro du tenseur de Sugawara, on obtient facilement les dimensions conformes du champ  $\phi(z, \bar{z})$ . Lorsque le champ est de spin conforme nul, ce qui est le cas lorsqu'il se transforme dans une même représentation de  $\mathfrak{g}$  sous une transformation holomorphe que sous une transformation antiholomorphe, alors

$$\Delta_\phi = \bar{\Delta}_\phi = \frac{C_\phi}{k + C_{\text{ad}}}, \quad (1.12)$$

avec  $C_\phi$  la valeur du Casimir dans la représentation de l'algèbre utilisée pour  $\phi$ .

Cela s'applique au cas du champ du modèle de WZW  $g(z, \bar{z})$ . Revenons à l'exemple de la chaîne de spins  $s=1/2$ . Le Casimir quadratique est  $\kappa_{ab} J^a J^b$  que l'on sait être égal à  $s(s+1) = 3/4$ . Il en résulte que  $\Delta_g = \bar{\Delta}_g = 1/4$ . Le champ  $g(z, \bar{z})$  a donc pour dimension d'échelle

$$\dim(g) = \Delta_g + \bar{\Delta}_g = 2 \times \frac{s(s+1)}{k + C_{\text{ad}}} = 2 \times \frac{3/4}{1+2} = 1/2.$$

Ce rappel sur le modèle WZW servait, outre la description du point critique associé à la chaîne de spins  $s=1/2$ , de préalable technique au chapitre 7, où ce type de construction sera généralisé à un modèle de WZW supersymétrique.

### 1.3.3 Modèle de Hubbard

Je fais ici un bref rappel de la physique du gaz d'électrons avec spin en dimension  $1+1$ . Ce rappel se révélera utile dans le chapitre 3. Accessoirement nous en obtiendrons un moyen indirect de bosoniser la chaîne de spins  $s=1/2$  directement au point isotrope [3].

Notre point de départ est le modèle de Hubbard. C'est-à-dire un modèle de liaisons fortes de fermions avec spin en dimension  $1+1$ . Il prend en compte une interaction de charge sur site dont la constante de couplage sera notée  $U$ . Son hamiltonien est

$$\mathcal{H} = -t \sum_{j,\sigma} \left( c_{j+1,\sigma}^\dagger c_{j,\sigma} + c_{j,\sigma}^\dagger c_{j+1,\sigma} \right) + U n_{j,\uparrow} n_{j,\downarrow} ,$$

où  $\sigma = \uparrow, \downarrow$  indexe le spin de l'électron. On applique à ce modèle la stratégie utilisée pour la bosonisation abélienne de la chaîne  $s=1/2$ . Aux deux composantes de spin des fermions seront associés par la bosonisation deux champs bosoniques  $\phi_\uparrow$  et  $\phi_\downarrow$ . Je n'introduis pas explicitement de facteurs de Klein, qui auraient eu pour but d'assurer l'anticommutation des composantes spinorielles du fermion bosonisé, car les signes associés aux produits d'opérateurs de vertex sont évidents. Il sera commode, puis physiquement justifié, d'introduire les champs bosoniques de charge  $\phi_c = (\phi_\uparrow + \phi_\downarrow)/\sqrt{2}$  et de spin  $\phi_s = (\phi_\uparrow - \phi_\downarrow)/\sqrt{2}$ . Le taux de remplissage de la bande fermionique du modèle n'étant pas connue a priori, le moment de Fermi n'est pas nécessairement égal à  $\pi/2$  (valeur qui correspond à la présence d'un fermion par site, soit le demi-remplissage de la bande). La bosonisation du hamiltonien libre de liaisons fortes est immédiate :

$$\mathcal{H}_0 = \frac{v_F}{2} \int dx [\Pi_c^2 + (\nabla \phi_c)^2] + \frac{v_F}{2} \int dx [\Pi_s^2 + (\nabla \phi_s)^2] ,$$

avec  $v_F = 2t \sin k_F$ . Le terme d'interaction au site  $j$  se décompose en

$$\begin{aligned} n_{j,\uparrow} n_{j,\downarrow} = & (J_R + J_L)_\uparrow (J_R + J_L)_\downarrow + e^{-4ik_F j} (\psi_L^\dagger \psi_R)_\uparrow (\psi_L^\dagger \psi_R)_\downarrow + e^{4ik_F j} (\psi_R^\dagger \psi_L)_\uparrow (\psi_R^\dagger \psi_L)_\downarrow \\ & + (\psi_L^\dagger \psi_R)_\uparrow (\psi_R^\dagger \psi_L)_\downarrow + (\psi_R^\dagger \psi_L)_\uparrow (\psi_L^\dagger \psi_R)_\downarrow . \end{aligned}$$

Les termes Umklapp se bosonisent en  $\frac{2}{(2\pi\alpha)^2} \cos(\sqrt{8\pi}\phi_c - 4k_F n)$ , tandis que les deux autres termes de diffusion se bosonisent en  $\frac{2}{(2\pi\alpha)^2} \cos(\sqrt{8\pi}\phi_s)$ . Quant au terme produit de courants  $(J_R + J_L)_\uparrow (J_R + J_L)_\downarrow$ , il se bosonise en  $((\nabla \phi_c)^2 - (\nabla \phi_s)^2)/(2\pi)$ . On obtient donc au total :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_c + \mathcal{H}_s + \frac{2U}{(2\pi\alpha)^2} \int dx \cos(\sqrt{8\pi}\phi_s) + \delta(4k_F - 2\pi) \frac{2U}{(2\pi\alpha)^2} \int dx \cos(\sqrt{8\pi}\phi_c) ,$$

avec

$$\mathcal{H}_c = \frac{c_c}{2} \int dx \left[ K_c \Pi_c^2 + \frac{1}{K_c} (\nabla \phi_c)^2 \right] , \quad \mathcal{H}_s = \frac{c_s}{2} \int dx \left[ K_s \Pi_s^2 + \frac{1}{K_s} (\nabla \phi_s)^2 \right] ,$$

et  $K_c = 1/(1 + U/\pi v_F)$ ,  $K_s = 1/(1 - U/\pi v_F)$  et  $c_c = v_F(1 + U/\pi v_F)$ ,  $c_s = v_F(1 - U/\pi v_F)$ . La séparation des degrés de liberté de charge et de spin est manifeste sur ce hamiltonien. Le terme d'interaction de charge n'est présent qu'au demi-remplissage ( $k_F = \pi/2$ ), car dans le cas contraire le terme oscille rapidement et ne contribue pas à la limite continue. De plus l'analyse des dimensions d'échelle des opérateurs cosinus, nous permet de dresser rapidement un tableau des phases dans les secteurs de charge et de spin.

|                                    | $U > 0$<br>(Interaction répulsive) | $U < 0$<br>(Interaction attractive) |
|------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|
| Secteur de spin                    | Pas de Gap                         | Gap                                 |
| Secteur de charge $k_F \neq \pi/2$ | Pas de Gap                         | Pas de Gap                          |
| Secteur de charge $k_F = \pi/2$    | Gap                                | Pas de Gap                          |

### Les deux phases du modèle de Hubbard

Dans le cas attractif ( $U < 0$ ), le secteur de charge est sans gap alors que le secteur de spin possède un gap. Ce sont des propriétés caractéristiques de la physique d'un supraconducteur singulet de spin.

Dans le cas répulsif ( $U > 0$ ) au demi-remplissage ( $k_F = \pi/2$ ), un gap s'ouvre dans le secteur de charge. Le système est un isolant électrique. En revanche le secteur de spin est sans gap ; il existe donc des excitations de spin de type onde de spins. C'est pourquoi la phase est appelée *onde de densité de spin*. Il existe une complication qui ne nous permet pas dans ce secteur d'utiliser tel quel le résultat ci-dessus pour la valeur de  $K_s$ . En effet le point fixe isotrope de spin correspondant à  $U = 0$  est situé sur une ligne critique. Or le produit d'opérateurs de courant qui est apparu comme perturbation est un opérateur exactement marginal déplaçant ainsi le point fixe, ce qui invalide le résultat ci-dessus. La solution consiste à étudier le groupe de renormalisation dans l'espace des paramètres  $K_s$  et  $g$ , la constante de couplage des termes de diffusion standard, au voisinage du point fixe isotrope et sans interaction  $g = 0$ . Le flot obtenu est appelé flot de Kosterlitz-Thouless et sera calculé dans le chapitre 3. Par la contrainte d'isotropie du spin du modèle, on restreint ce flot à deux dimensions à une ligne de flot (qui est une séparatrice du flot bidimensionnel).

Dans le cas répulsif ( $U > 0$ ), hors du demi-remplissage ( $k_F \neq \pi/2$ ), le secteur de charge est sans gap car le terme Umklapp disparaît. Le rayon de compactification  $K_c < 1$  du boson de charge n'est pas contraint par la symétrie. Il n'est donc pas universel.

### Hamiltonien effectif dans le limite de couplage fort

Cette phase d'onde de densité de spin peut être mise à profit. Le secteur de charge possédant un gap, le modèle est au couplage fort et on peut calculer un hamiltonien effectif de basse énergie pour le système en utilisant la théorie de perturbations : le hamiltonien de liaisons fortes est une perturbation du terme d'interaction. On introduit les opérateurs de spins  $S_j^\alpha = \frac{1}{2}c_{ja}^\dagger \sigma_{ab}^\alpha c_{jb}$ . Alors dans la limite de couplage fort le hamiltonien est équivalent au hamiltonien effectif

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \frac{4t^2}{U} \sum_j \left( \mathbf{S}_j \mathbf{S}_{j+1} - \frac{1}{4} \right).$$

A priori les opérateurs  $S^\alpha$  forment avec le quatrième opérateur  $n_\uparrow + n_\downarrow$  les quatre opérateurs de l'algèbre  $u(2)$ , rien de plus ni de moins. Comme le secteur de charge est massif, la symétrie  $U(1)$  du groupe  $U(2)$  est gelée et la symétrie effective des opérateurs de spins est  $su(2)$ . Mieux, comme on est au demi-remplissage on a  $n_\uparrow + n_\downarrow = 1$ , ce qui signifie qu'ils forment une représentation de spin  $s=1/2$ . Nous avons donc obtenu le hamiltonien d'une chaîne de spins  $SU(2)$  antiferromagnétique de spin  $s=1/2$ .

### 1.3.4 Bosonisation isotrope de la chaîne de spins $s=1/2$

Incidemment, nous avons donné du hamiltonien de la chaîne antiferromagnétique de spins  $s=1/2$  une action de basse énergie construite autour du point fixe isotrope. Si l'on fait abstraction des termes marginalement non-pertinents, c'est une représentation bosonique connue (dite de Frenkel-Kaz) du modèle de WZW de symétrie  $SU(2)$  au niveau  $k = 1$ . On en conclut que la physique de basse énergie du point fixe critique associé à la chaîne de spins est décrite par ce modèle de WZW au niveau  $k = 1$ .

## 1.4 Théorèmes généraux

Dans cette section, on passe en revue les principaux théorèmes, outils commodes de la physique des chaînes de spins. Ils renseignent sur la nature du fondamental, ainsi que sur la présence ou non d'un gap dans le spectre d'énergie entre le fondamental et le premier état excité. Cette section dépasse le cadre de la première partie de cette thèse, puisqu'il a été récemment tenté de les étendre (modulo quelques modifications) à une chaîne de superspins non-compacte [91].

### 1.4.1 Théorèmes de Marshall

L'opérateur de spin *total*  $\mathbf{S}_T = \sum_i \mathbf{S}_i$  commute avec le hamiltonien de la chaîne de spins. On peut donc distinguer  $2sN$  secteurs d'aimantation  $M$ , valeur propre de  $S_T^z = \sum_i S_i^z$ .  $N$  est le nombre de spins qui composent la chaîne. Malheureusement, pour une chaîne antiferromagnétique, le paramètre d'ordre pertinent n'est pas l'aimantation totale mais l'aimantation alternée  $\mathbf{S}_T = \sum_i (-1)^i \mathbf{S}_i$ , qui ne commute *pas* avec le hamiltonien. C'est pourquoi la description du fondamental des chaînes antiferromagnétiques n'est pas chose évidente. Le paramètre d'ordre naturel incite à distinguer les sites pairs des sites impairs. On dit que le réseau possède une structure *bipartite*. Le sous-réseau formé par les sites pairs sera désigné par  $A$  et celui des sites impairs par  $B$ . On suppose que les sous-réseaux  $A$  et  $B$  comptent autant de spins. Donc  $N$  est pair. Il est à noter que la structure bipartite est donnée *a priori* pour des chaînes de spins de symétrie autre que  $SU(2)$ . Les opérateurs de spin des sites impairs appartiennent alors à la représentation conjuguée de celle à laquelle appartiennent les opérateurs affectés aux sites pairs. Dans le cas de  $SU(2)$ , les représentations conjuguées sont confondues.

#### Lemme de Marshall

On considère un secteur d'aimantation  $M$ . Une base du secteur est formée par les états  $\Phi_\alpha$ , produits tensoriels des états d'aimantation  $m_i$  le long de  $Oz$ , en chaque site, et tels que  $\sum_i m_i = M$ . Cette base est indexée par  $\alpha$ . Alors le lemme de Marshall [90] affirme que l'état de plus basse énergie de ce secteur se décompose sous la forme :

$$|\Psi_0^M\rangle = \sum_{\alpha} (-1)^{(\sum_{i \in B} s+m_i)} f_{\alpha}^M |\Phi_{\alpha}^M\rangle \quad \text{avec} \quad \forall \alpha, f_{\alpha}^M > 0.$$

Il résulte de ce lemme que cet état de plus basse énergie est non-dégénéré. En effet le produit scalaire de deux états orthogonaux (non-nuls) de plus basse énergie est strictement positif, puisqu'ils satisfont tous deux à la décomposition qui précède. Ils sont donc confondus.

Toutefois à ce stade rien ne garantit que le fondamental (tous secteurs compris) soit non-dégénéré. Comparons maintenant les énergies des fondamentaux des secteurs  $M$  et  $M+1$ . L'état

de plus basse énergie du secteur d'aimantation  $M + 1$   $\Psi_{M+1}$  doit avoir un spin supérieur  $S$  à  $M + 1$ . Alors l'état  $S_T^- \Psi_{M+1}$ , qui appartient au secteur  $M$ , est non nul et de même énergie que  $\Psi_{M+1}$ . Donc  $E(\Psi_M) \leq E(\Psi_{M+1})$ . Démontrer l'inégalité stricte est plus difficile.

### Le fondamental est singulet de spin

L'inégalité stricte a été prouvée dans [90, 81]. Pour cela, les auteurs montrent que le spin de  $\Psi_M$  vaut exactement  $M$ . Si on reprend le raisonnement précédent,  $S_T^- \Psi_{M+1}$  est de spin  $S = M + 1$  et est donc distinct de  $\Psi_M$  que l'on sait être non-dégénéré et de spin  $M$ . L'inégalité est donc stricte. En conséquence le fondamental est non-dégénéré et est singulet de spin (c'est-à-dire qu'il vérifie  $S_T |\Psi_0\rangle = 0$ ).

En réalité ce résultat est valable pour tout système de spins pourvu qu'il possède une structure bipartite.

### 1.4.2 Théorème de Lieb, Shultz et Mathis

Le résultat de Marshall s'applique indifféremment aux chaînes de spins, quel que soit leur spin. Le théorème qui suit ne s'applique qu'aux chaînes de spins  $s$  demi-entiers. Cette fois-ci on exploite le fait que les spins demi-entiers indexent des représentations projectives (et non fidèles comme les spins entiers) du groupe des rotations  $SO(3)$  (ou des encore des représentations fidèles de son recouvrement universel  $SU(2)$ ). En clair un spin demi-entier prend un signe moins sous l'action d'une rotation de  $2\pi$ .

Considérons une chaîne de spins antiferromagnétique de spin  $s$  demi-entier. On suppose :

- que la chaîne est finie mais fermée (les deux spins extrêmes sont couplés),
- que la chaîne compte  $2N$  spins, de sorte qu'aucune frustration résultant du point précédent n'apparaisse et que la structure bipartite soit non-ambiguë,
- qu'elle est invariante par translation. (Dans le cas contraire, par exemple lorsque la chaîne est dimérisée, rien n'interdit l'apparition d'un gap.)

Alors son hamiltonien possède un état excité, dont l'écart en énergie avec le hamiltonien s'annule à la limite thermodynamique. Autrement dit, la chaîne (infinie) est sans gap. Ce résultat est dû à Lieb, Shultz et Mathis [82]. La preuve donnée par ces auteurs est enthousiasmante parce qu'elle est constructive. Elle contribue à clarifier quelque peu le rôle du terme topologique du modèle sigma non-linéaire. J'en donne donc un bref aperçu. L'idée est de partir du fondamental  $\Psi_0$  et de construire un état  $\Psi_1$  qui consiste à greffer au fondamental une phase croissante le long de la chaîne :

$$|\Psi_1\rangle = \exp \left( i \frac{2\pi}{N} \sum_{j=1}^N j S_j^z \right) |\Psi_0\rangle.$$

Partant d'un spin arbitraire de la chaîne, on effectue donc une rotation progressive de la phase des spins, au fur et à mesure que l'on avance dans la chaîne jusqu'à atteindre le spin précédent le spin de départ, où la rotation est de  $2\pi$ . Selon que le spin est entier ou demi-entier, et puisque la rotation complète le long de la chaîne est de  $2\pi$  (et non par exemple  $4\pi$ ), on s'attend à obtenir un état de nature très différente. Effectivement on montre que dans le cas demi-entier, l'état est orthogonal au fondamental. D'autre part, comme l'état  $\Psi_1$  ne se distingue du fondamental que par une multiplication locale de la phase, on peut espérer que son énergie diffère peu de celle du fondamental. C'est bien le cas, puisque l'on montre que le gap se comporte en  $O(1/N)$  à la

limite thermodynamique. L'état  $\Psi_1$  n'est pas nécessairement état propre du hamiltonien, mais il se décompose sur des états exacts de  $\mathcal{H}$ , le fondamental exclu. L'un de ces états propres excités satisfait donc aux exigences du théorème.

### 1.4.3 Théorème de Mermin-Wagner

Le théorème de Mermin-Wagner a pour but de décider si une symétrie de Lie d'un système est dynamiquement brisée ou non. Pour des dimensions de l'espace-temps élevées et à température nulle, on s'attend (champ moyen) à ce qu'il y ait brisure spontanée de symétrie. Il existe deux facteurs qui peuvent expliquer une éventuelle absence de brisure de symétrie. Le premier est la température. Les fluctuations thermiques pourraient suffire à maintenir le paramètre d'ordre à une moyenne nulle. La seconde cause pourrait être celle des fluctuations quantiques qui prennent de l'importance en basse dimension.

Mermin et Wagner [93] ont établi le théorème général suivant. Ils ont considéré le hamiltonien d'un système de spins quantiques

$$\mathcal{H} = \sum_{i,j}^N J_{ij} S_i S_j - h S_{\mathbf{q}}^z.$$

L'opérateur  $S_{\mathbf{q}}^z$  est la transformée de Fourier spatiale de  $S^z$ . On l'introduit comme une perturbation infinitésimale permettant de mettre en évidence une brisure de symétrie et qui sera mise finalement à zéro à la limite thermodynamique quand  $N$ , le nombre de spins du système, sera devenu infini. Les couplages sont supposés à courte portée  $1/N \sum_{i,j} |J_{ij}| |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2 < \infty$ .

Mermin et Wagner ont alors prouvé qu'il n'y a pas de brisure spontanée de symétrie à température finie en dimension 1 et 2. C'est-à-dire

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle S_{\mathbf{q}}^z \rangle = 0.$$

Le théorème ne peut être systématiquement étendu au cas limite de la température nulle. Il existe même des contre-exemples. Par exemple le réseau carré de spins antiferromagnétique est bien désordonné à température finie. Cependant, à température nulle, l'existence d'un ordre dépend de l'amplitude du spin  $s$  et de la forme de l'interaction entre spins. On pense que pour un réseau avec une interaction entre les spins plus proches voisins et pour toute amplitude du spin  $s$ , les spins s'ordonnent et la symétrie est brisée spontanément.

Ces résultats ont été étendus [35] pour tout système statistique possédant une symétrie *continue*, *compacte* et des interactions à *courte portée*.

## Chapitre 2

# Phase de Haldane dans des chaînes et des échelles de spins alternées

### 2.1 Introduction

#### 2.1.1 Motivation

Dans le chapitre précédent, on a pu observer à quel point les chaînes de spin  $s$  entier pouvaient se comporter différemment des chaînes de spin  $s$  demi-entier. En particulier les corrélations spatiales (à temps égaux) sont à courte portée, ce que l'on résume en disant que le fondamental est désordonné. Toutefois, comme on l'a vu, il subsiste un ordre caché qui n'est révélé que par des observables non-locales. Cet ordre est remarquablement mis en évidence par la fonction d'onde VBS, que l'on sait être de même nature que le fondamental exact.

Katzuo Hida a eu l'idée de faire émerger la chaîne de spin  $s=1$  d'une chaîne de spins paramétrée qui matérialise l'esprit de la fonction d'onde VBS [61, 62]. Il a considéré une chaîne inhomogène de spins  $s=1/2$  qui alterne les échanges ferromagnétiques et les échanges antiferromagnétiques. Son hamiltonien est

$$\mathcal{H} = J_{AF} \sum_n \mathbf{S}_{2n} \cdot \mathbf{S}_{2n+1} + J_F \sum_n \mathbf{S}_{2n+1} \cdot \mathbf{S}_{2n+2} . \quad (2.1)$$

$J_{AF}$  est une constante *positive* et  $J_F$  est une constante *négative*. Dans la suite, on pose  $J_{AF} = 1$  et  $J_F = -\gamma$ , sans perte de généralité. L'alternance des échanges est schématisée sur la figure 2.1.

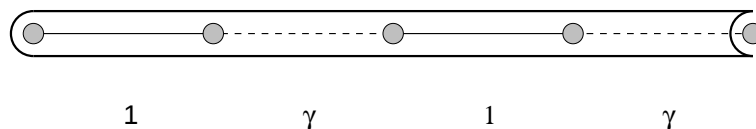


FIG. 2.1 – La chaîne de spins ferro-antiferromagnétique. Le couplage  $\gamma$  représente la force des liens ferromagnétiques. Le motif élémentaire utilisé dans la construction du modèle sigma non-linéaire contient quatre spins.

La famille de systèmes définie par ce hamiltonien, paramétrée par  $\gamma$ , possède des cas limites simples. Lorsque  $\gamma = 0$ , le hamiltonien a un fondamental trivial constitué de paires de spins :

toutes les paires sont figées en l'état singulet de spin. Lorsque  $\gamma \rightarrow \infty$ , les spins  $s=1/2$  sont couplés par paires dans un état triplet pour former une chaîne de spins  $s=1$ . Hida a étudié numériquement le gap du système en fonction de  $\gamma$ . Il a utilisé des techniques de diagonalisation de Lanczos pour évaluer le gap et montrer numériquement qu'il n'y avait pas de transition de phase dans l'intervalle  $\gamma \in [0, \infty[$ . En conséquence le gap de Haldane associé à la limite  $\gamma \rightarrow \infty$  est relié continûment au gap trivial associé à la limite  $\gamma = 0$ . Le spectre d'excitations évolue également continûment. Ainsi cette chaîne peut offrir un point de vue simple sur le gap de Haldane (et accessoirement sur l'ordre topologique caché). Notre idée est de construire le modèle sigma non-linéaire qui correspond à cette chaîne, pour toute valeur de  $\gamma$ , et de donner dans cette approximation semi-classique, une estimation analytique du gap de spin.

Il existe d'autres systèmes de spins que l'on soupçonne être également des liquides de Haldane. C'est le cas de l'échelle de spins  $s=1/2$  antiferromagnétique à deux montants. L'argument suivant permet de comprendre rapidement pourquoi il en est ainsi : l'échelle peut être vue comme l'assemblage de deux chaînes de spins  $s=1/2$ . Ayant à l'esprit la construction de leur modèle sigma non-linéaire respectif, chacune des deux chaînes donne un terme topologique  $\theta = 2\pi s$ . Si bien que, si l'on admet que le modèle sigma non-linéaire est encore pertinent pour les deux montants réunis, le terme topologique total ne contribue pas ( $\theta = 2\pi s \pm 2\pi s$ ), et le système possède un gap. White a proposé [139] de relier continûment cette échelle de spins à la chaîne de spins  $s=1$  en introduisant un barreau diagonal (voir figure 2.2) supportant un couplage ferromagnétique. Nous lui appliquons la construction du modèle sigma non-linéaire conçue pour la chaîne alternée.

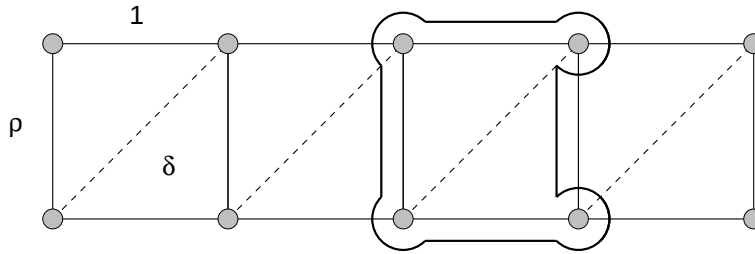


FIG. 2.2 – Une échelle de spins avec des couplages additionnels diagonaux  $\delta$ . Le motif élémentaire permettant de construire le modèle sigma non-linéaire possède quatre spins.

Il existait auparavant des techniques développées dans [123, 37] pour construire des modèles sigma non-linéaires des chaînes et échelles de spins inhomogènes. Mais celles-ci alternent uniquement les couplages antiferromagnétiques et les résultats sont inapplicables à la chaîne de Hida.

### Nature du fondamental

On a vu que dans les deux cas limites, le fondamental est non-dégénéré et singulet de spin. Il est tentant de supposer que cette propriété persiste pour toute valeur de  $\gamma$ . En fait cela peut être prouvé rigoureusement, en étendant légèrement le théorème de Marshall. Le Lemme se généralise immédiatement, la structure bipartite étant celle donnée par l'ordre de Néel de la chaîne :  $\dots \uparrow\uparrow\downarrow\downarrow \dots$ . Le reste de la preuve est une généralisation sans complications de la démonstration donnée pour la chaîne homogène. On en conclut que le fondamental est unique et singulet de spin.

## Ordre caché

Une bonne manière de se persuader que la chaîne alternée ferro-antiferro appartient à la phase de Haldane est de construire un paramètre d'ordre de type string analogue à celui de la chaîne de spin  $s=1$ , qui puisse trahir la présence d'un ordre caché. Les opérateurs que l'on peut construire et qui généralisent celui de la chaîne de spin  $s=1$  sont :

$$\mathcal{O}_{2i+1,2j}^\alpha = \langle S_{2i+1}^\alpha \exp \left( i\pi \sum_{n=2i+2}^{2j-1} S_n^\alpha \right) S_{2j}^\alpha \rangle ,$$

où  $\alpha$  représente une des directions de l'espace de plongement. On notera que le nombre de sites du spin  $2i+1$  au spin du site  $2j$  est pair. Kohmoto et Tasaki [76] ont construit la transformation unitaire non-locale permettant de passer du paramètre d'ordre ci-dessus à un paramètre d'ordre de type ferromagnétique. La transformation des opérateurs de spin fait apparaître un double jeu de matrices de Pauli,  $\sigma_i$  et  $\tau_i$ , ainsi que les opérateurs de désordre  $\tilde{\sigma}_i$  et  $\tilde{\tau}_i$  [99], ceux qui sont naturellement associés aux précédents par la dualité de Kramers-Wannier du modèle d'Ising<sup>1</sup>. Les bilinéaires en les opérateurs de spin qui constituent le hamiltonien s'expriment en fonction des opérateurs d'ordre, c'est-à-dire du premier jeu de matrices de Pauli. Le hamiltonien prend alors la forme de deux modèles d'Ising couplés :

$$\tilde{\mathcal{H}} = -\frac{1}{4} \sum_j [ (\sigma_j^x + \gamma \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z) + (\tau_j^x + \gamma \tau_j^z \tau_{j+1}^z) + \gamma \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \tau_j^z \tau_{j+1}^z + \sigma_j^x \tau_j^x ] .$$

Ce hamiltonien est indépendant des opérateurs de désordre. Il jouit d'une invariance par rotation des spins  $\sigma_i$  et  $\tau_i$ , d'un angle  $\pi$  autour de l'axe Ox. Cela engendre une symétrie  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . Dans le cas où  $\gamma$  est infini, on a toutes les raisons de penser (confère [72]) que la symétrie est spontanément brisée. Dans le cas totalement dimérisé  $\gamma = 0$ , on peut calculer le fondamental trivialement et constater qu'il brise totalement la symétrie. Il est donc raisonnable de croire que c'est encore le cas pour  $\gamma \in ]0, \infty[$ , et que les moyennes suivantes sont non-nulles :

$$\langle \sigma_j^z \rangle = \langle \tau_j^z \rangle = \langle \sigma_j^z \tau_j^z \rangle \neq 0 .$$

On peut aussi montrer que les opérateurs string  $\mathcal{O}_{ij}^\alpha$  se réécrivent en fonction des nouveaux opérateurs de spins comme

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{2i+1,2j}^x &= \langle S_{2i+1}^x \exp \left( i\pi \sum_{n=2i+2}^{2j-1} S_n^x \right) S_{2j}^x \rangle = \sigma_i^z \sigma_j^z, \\ \mathcal{O}_{2i+1,2j}^y &= \langle S_{2i+1}^y \exp \left( i\pi \sum_{n=2i+2}^{2j-1} S_n^y \right) S_{2j}^y \rangle = \tau_i^z \tau_j^z, \\ \mathcal{O}_{2i+1,2j}^z &= \langle S_{2i+1}^z \exp \left( i\pi \sum_{n=2i+2}^{2j-1} S_n^z \right) S_{2j}^z \rangle = \sigma_i^z \tau_i^z \sigma_j^z \tau_j^z, \end{aligned}$$

qui sont les opérateurs que l'on souhaite soumettre aux tests numériques. Et effectivement Hida a obtenu [61] pour  $\mathcal{O}^z = \lim_{|i-j| \rightarrow \infty} \mathcal{O}_{2i+1,2j}^z$  une valeur non-nulle. Il a tracé son graphe en fonction de  $\gamma$ . Son résultat est reproduit sur la figure 2.3.

<sup>1</sup>On les appelle variables de désordre parce que leur valeur moyenne est nulle. Dans le modèle d'Ising, les opérateurs  $\tilde{\sigma}_i$  prennent une valeur moyenne non-nulle dans la phase haute température alors que le paramètre d'ordre donné par le jeu de matrices de Pauli original  $\sigma_i$  est nul. Dans la phase basse température, c'est l'inverse qui se produit.

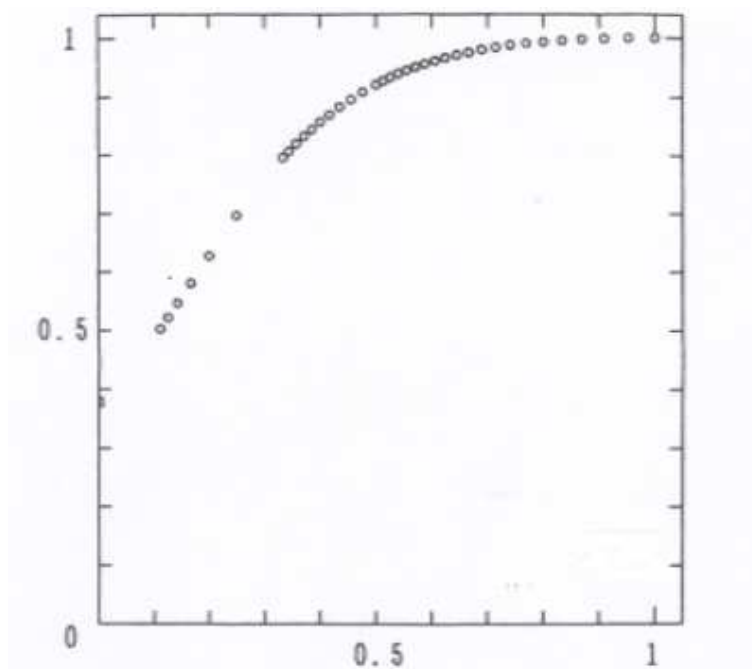


FIG. 2.3 – Paramètre d'ordre string calculé par Hida. En abscisse  $(1 + \gamma)^{-1}$ . Lorsque  $\gamma = 0$  (à droite), le paramètre d'ordre vaut 1. Dans le cas limite de la chaîne de spins  $s=1$  (à gauche), la courbe tend vers la valeur 0.37 déjà mentionnée (1.2.3) et indiquée par un petit carré.

Lorsque le nombre de sites entre spins est impair, les paramètres d'ordre s'expriment en fonction des opérateurs de désordre dont on attend qu'ils prennent une valeur moyenne nulle.

### 2.1.2 Réalisations expérimentales

Les chaînes alternées ferro-antiferro ne sont pas des curiosités académiques puisqu'il en existe plusieurs réalisations physiques aujourd'hui étudiées expérimentalement. Sont connues aussi bien des chaînes de spins  $s=1/2$  que des chaînes de spins  $s=1$ .

#### Exemples de chaînes $s=1$

Des chaînes de spins  $s=1$  ferro-antiferromagnétique ont été mises en évidence par des équipes d'expérimentateurs barcelonais [112]. Toutefois, la littérature sur le sujet étant orientée fortement vers la chimie, elle dépasse mes compétences actuelles.

#### Exemple de chaînes $s=1/2$

L'exemple le mieux connu de chaîne de spins  $s=1/2$  ferromagnétique-antiferromagnétique est celui du composé  $\text{CuNb}_2\text{O}_6$ . Dans ce composé se forment des chaînes unidimensionnelles résultant d'un empilement d'octaèdres  $\text{CuO}_6$ . Chacun des octaèdres partage une arête formée par une liaison O-O avec chacun des deux octaèdres voisins (voir figure 2.4). Les ions Cuivre  $\text{Cu}^{2+}$  enserrés dans les octaèdres portent un spin  $s=1/2$ , et la succession des ions Cuivre et des atomes d'Oxygène forme une chaîne de spins.

Le composé se retrouve sous deux formes : une structure orthorhombique et une structure monoclinique. La forme orthorhombique s'ordonne antiferromagnétiquement sous  $T_N = 7.3$  K, alors que la forme monoclinique possède un gap de spin de l'ordre de 20 K.

Les preuves expérimentales de l'existence du gap dans la phase monoclinique ont été obtenues par la mesure de la susceptibilité magnétique et par des expériences de diffusion de neutrons. Pour le premier type d'expérience, un comportement thermiquement activé a été mis en évidence [100], ce qui est la signature d'un gap de spin. Les expériences de diffusion de neutrons ont, quant à elles, révélé que le facteur de structure comporte un minimum pour le vecteur d'onde  $k = \pi/2$ . Cet indice est caractéristique d'une alternance ferro-antiferromagnétique dans les couplages<sup>2</sup>.

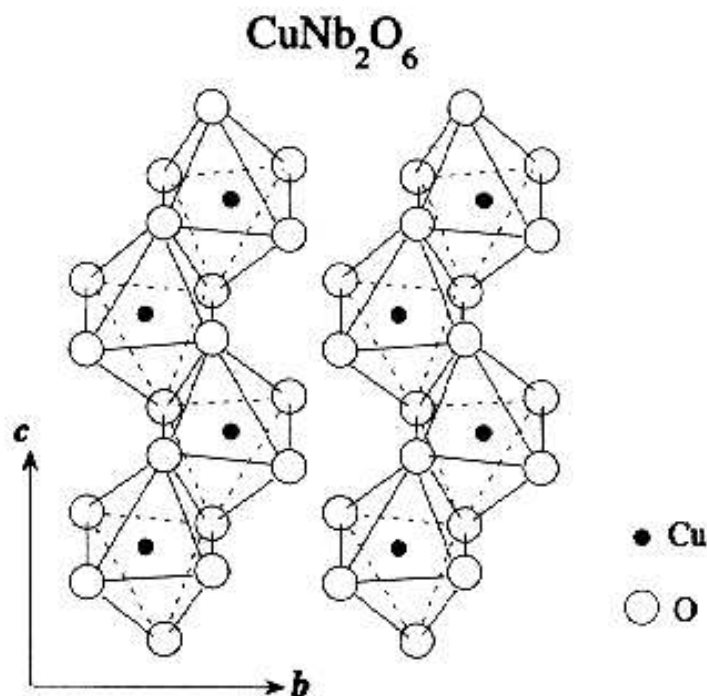


FIG. 2.4 – Empilement cristallin octaédrique du composé  $\text{CuNb}_2\text{O}_6$ . **b** et **c** sont deux des axes du réseau cristallin. Seuls sont représentés les octaèdres structurant la chaîne de spins formée par la succession des atomes de Cuivre et d'Oxygène. Les atomes de Niobium n'apparaissent pas. Ils peuvent être négligés du point de vue du magnétisme. Cette figure est empruntée à [100].

### Dopage et modulation de $\gamma = -J_F/J_{AF}$

Il est possible de doper la chaîne en substituant des atomes de zinc aux atomes de cuivres, la différence résultant essentiellement dans des encombrements stériques distincts. Les composés ainsi réalisés, qui ont pour formule chimique  $\text{Cu}_{1-x}\text{Zn}_x\text{Nb}_2\text{O}_6$ , possèdent toujours un gap de spin. Il leur correspond un échange  $J_{AF}$  et un rapport  $\gamma$ , tous deux fonction décroissante du dopage  $x$ .

<sup>2</sup>On s'en convainc aisément en considérant le cas totalement dimérisé  $\gamma = 0$  et en calculant la relation de dispersion des premières excitations.

## 2.2 Chaîne de spins ferro-antiferromagnétique

### 2.2.1 Spectre des ondes de spin

La physique de basse énergie d'une chaîne de spins (a priori uniforme) peut être décrite par un modèle sigma non-linéaire. C'est une théorie des champs non perturbative, qui est construite sur les modes énergétiques les plus bas de la théorie classique de la chaîne. C'est pourquoi nous commencerons par étudier les aspects classiques de la chaîne de spins alternée. Les équations du mouvement de la chaîne ferro-antiferromagnétique découlent de l'équation d'évolution  $\frac{d}{dt} \mathbf{n}_i = i[\mathcal{H}, \mathbf{n}_i]$ . Elles prennent la forme du système suivant :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \mathbf{n}_{2i} &= -\mathbf{n}_{2i} \times (-\gamma \mathbf{n}_{2i+1} + \mathbf{n}_{2i-1}), \\ \frac{d}{dt} \mathbf{n}_{2i+1} &= \mathbf{n}_{2i+1} \times (-\gamma \mathbf{n}_{2i} + \mathbf{n}_{2i+2}),\end{aligned}$$

où  $\mathbf{n}_i$  est le vecteur du spin classique au site  $i$ . Ces équations doivent ensuite être linéarisées autour de la configuration de Néel  $\mathbf{n}_{2i} = (-1)^i s \mathbf{u} + \alpha_i$  et  $\mathbf{n}_{2i+1} = (-1)^i s \mathbf{u} + \beta_i$  où  $\mathbf{u}$  est un vecteur unitaire arbitraire et  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  sont des champs vectoriels appartenant au plan orthogonal à  $\mathbf{u}$ . Il est clair que  $\mathbf{u}$  brise la symétrie naturelle  $O(3)$  du hamiltonien. On représente ensuite  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  par des champs complexes  $\xi_i$  et  $\chi_i$ . Les équations linéarisées prennent alors la forme :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \xi_n &= i s (-1)^n (-\gamma \chi_n + \chi_{n-1} + (1 + \gamma) \xi_n), \\ \frac{d}{dt} \chi_n &= i s (-1)^n (-\gamma \xi_n + \xi_{n+1} + (1 + \gamma) \chi_n).\end{aligned}$$

On peut formuler pour ces champs un Ansatz constitué d'ondes planes :

$$\begin{aligned}\xi_n &= e^{i(\omega + kn)} (a(k) + (-1)^n b(k)), \\ \chi_n &= e^{i(\omega + kn)} (c(k) + (-1)^n d(k)).\end{aligned}$$

Les états propres  $(a, b, c, d)(k)$ , d'énergie  $\omega$  et de moment  $k$  sont les vecteurs propres de la matrice suivante :

$$s \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 + \gamma & 0 & -\gamma - e^{-ik} \\ 1 + \gamma & 0 & -\gamma + e^{-ik} & 0 \\ 0 & -\gamma - e^{ik} & 0 & 1 + \gamma \\ -\gamma + e^{ik} & 0 & 1 + \gamma & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

et sont associés aux valeurs propres  $\omega(k)$ . On en déduit la relation de dispersion de ces ondes de spins :

$$\omega(k) = s \sqrt{2\gamma(1 + \gamma) \pm 2\gamma \sqrt{(1 + \gamma)^2 - \sin^2 k}}. \quad (2.3)$$

Les deux excitations positives les plus faibles correspondent aux moments  $k_c = 0$  et  $k_c = \pi$ . On obtient au voisinage de ces modes une relation de dispersion linéaire  $\omega = s \sqrt{\frac{\gamma}{1 + \gamma}} |k - k_c|$ , en linéarisant la relation 2.3 près de  $k_c$ .

La célérité de ces ondes de spin est donc  $v = s \sqrt{\frac{\gamma}{1 + \gamma}}$ . Ces ondes peuvent être assimilées aux modes de Goldstone qui résultent de la brisure (classique) de symétrie  $O(3)$ . Notons que le calcul de la relation de dispersion aurait également pu être mené à cet ordre du développement semi-classique avec une représentation de Holstein-Primakoff des opérateurs de spins.

Nous allons bâtir le modèle sigma non-linéaire sur ces modes, en supposant qu'ils sont lentement variables, dans une théorie où l'invariance par rotation est rétablie. On supposera (raisonnablement) que les modes massifs n'interfèrent pas significativement avec les modes de Goldstone, leur énergie étant de l'ordre de  $2s\sqrt{\gamma(1+\gamma)}$ .

### 2.2.2 Limite de couplage ferromagnétique fort et modèle sigma non-linéaire

L'un des aspects les plus attrayants du modèle de Hida est le lien continu qui est établi entre la chaîne alternée à des valeurs finies de  $\gamma$  et la limite  $\gamma \rightarrow \infty$ . Dans cette limite, le système devient une chaîne antiferromagnétique de spins  $s = 1$  et d'interaction d'échange  $J_{AF}/4$ . Rappelons ici pourquoi le couplage devrait être tel. Dans la limite que l'on considère, les paires de spins liées par un échange ferromagnétique sont dans un état triplet. Parce qu'il y a invariance par rotation, le hamiltonien limite peut être mis sous la forme d'une chaîne effective de spins  $s = 1$ . Les couplages ne peuvent être que quadratiques  $\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j$  ou quartiques  $(\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j)^2$ . L'interaction quartique est exclue parce qu'elle correspond au second ordre de la théorie des perturbations en  $\gamma^{-1}$ . Ceci connu, l'intensité de l'interaction d'échange peut être déterminée au moyen du calcul d'un unique élément de matrice. Par exemple la configuration où tous les spins sont alignés fournit aisément  $J_{\text{eff}} = J_{AF}/4$ .

Afin d'établir les notations utilisées dans ce chapitre, je rappelle très brièvement la façon d'obtenir un modèle sigma non-linéaire pour une chaîne de spins  $s$ , avec  $s$  pair, qui se trouve bien décrire la limite  $\gamma \rightarrow \infty$  de notre chaîne. Considérons donc une chaîne antiferromagnétique de spin  $s$  avec  $s$  pair, caractérisée par le hamiltonien  $\mathcal{H} = \sum_i J_{AF} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1}$ . On peut lui faire correspondre un modèle sigma non-linéaire. Si on a recours à une représentation en états cohérents des opérateurs de spins, la correspondance peut être établie dans le cadre du formalisme lagrangien. L'action discrète (avant que ne soit prise la limite continue) est constituée des termes d'interaction et des phases de Berry  $W[\mathbf{n}_i]$ , fonctions du champ vectoriel unitaire  $\mathbf{n}_i$  qui indexe les états cohérents. Je rappelle (pour comparaison ultérieure) que l'action est de la forme :

$$S = \int dt \sum_i J s^2 \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_{i+1} + \sum_i s \cdot W[\mathbf{n}_i].$$

Que les champ de vecteurs  $\mathbf{n}_i$  sont ensuite décomposés selon

$$\begin{cases} \mathbf{n}_{2i} = \mathbf{l}_{2i} - s\Phi_{2i} \\ \mathbf{n}_{2i+1} = \mathbf{l}_{2i+1} + s\Phi_{2i+1}, \end{cases}$$

où le champ de vecteur  $\Phi_i$  est un champ de norme unité et où le champ  $\mathbf{l}_i$  satisfait  $\Phi_i \cdot \mathbf{l}_i = 0$ . Rappelons aussi que l'on suppose  $\mathbf{l}_i$  de l'ordre de grandeur de  $a$ , le pas du réseau, et qu'il est alors possible de prendre la limite continue de l'action  $S$ . Les fluctuations  $\mathbf{l}$  peuvent être intégrées pour obtenir une action effective en  $\Phi$ . Puisque le spin est pair, les phases de Berry de tous les spins forment (entre autres termes) un terme topologique d'angle  $\theta = 2\pi s \in \mathbb{N}$ , dont l'incidence est nulle sur la physique si bien qu'on l'omet. L'action finale effective dans le champ  $\Phi$  est :

$$S = \iint dt dx \frac{1}{2g} \left( \frac{1}{c} (\partial_t \Phi)^2 - c (\partial_x \Phi)^2 \right),$$

où  $g$  est la constante de couplage du modèle sigma non-linéaire  $g = 2/s$  et  $c$  est sa célérité  $c = 2J_{AF}s$ .

### 2.2.3 Modèle sigma non-linéaire effectif

Revenons maintenant à la chaîne de spins alternée (s peut être de nouveau demi-entier). La première des difficultés rencontrées lorsque l'on tente de formuler une théorie des champs continue d'une chaîne de spins inhomogène, est qu'il n'est pas naturel d'obtenir une action continue à partir du hamiltonien discret inhomogène. En effet, la structure microscopique élémentaire est un bloc de deux spins (qu'on désignera par exemple par 1 et 2). Il apparaîtra qu'il est plus commode d'apparier les spins qui sont couplés par un lien ferromagnétique, plutôt que par un lien antiferromagnétique. Il est clair que ce choix correspond à l'idée de Hida d'apparier les spins  $s=1/2$  pour former des spins  $s=1$  effectifs dans la limite  $\gamma \rightarrow \infty$  (couplage ferromagnétique fort).

L'approche la plus rigoureuse que l'on puisse imaginer pour établir une limite continue serait d'introduire deux champs vectoriels d'états cohérents, un pour chaque site d'une même paire. Malheureusement, cela conduit à la prolifération de termes mal contrôlés dans l'action, que l'on impute à l'apparition des modes massifs. En particulier, les phases de Berry attachées à ces états cohérents ne seraient plus aisément assimilables à un invariant topologique<sup>3</sup>.

Considérons maintenant une structure formée de deux blocs, et donc constituée des quatre spins  $\mathbf{S}_{2i}^1, \mathbf{S}_{2i}^2, \mathbf{S}_{2i+1}^1$ , et  $\mathbf{S}_{2i+1}^2$ . Les paires formées des spins  $\mathbf{S}_{2i}^1, \mathbf{S}_{2i+1}^1$  et des spins  $\mathbf{S}_{2i}^2, \mathbf{S}_{2i+1}^2$  sont de parfaits candidats pour engendrer deux modèles sigma non-linéaires. Une première idée (incorrecte), soutenue par notre intention de prendre la limite continue, est de supposer qu'elles forment le même modèle sigma non-linéaire. Cette hypothèse est correcte dans la limite  $\gamma \rightarrow \infty$  mais bien trop grossière dans tous les autres cas.

Pour corriger cela, du moins partiellement, on ajoute un champ supplémentaire aux deux modes lents semi-classiques  $\mathbf{l}_i$  et  $\Phi_i$ . Il représente les petites fluctuations quantiques, reliquat à basse énergie des modes massifs, qui sont susceptibles d'apporter des corrections à l'action du modèle sigma non-linéaire.

Suivant cette démarche, les états cohérents se décomposent selon :

$$\begin{cases} \mathbf{n}_{2i}^1 = \mathbf{l}_{2i} - s\Phi_{2i} + a\Delta_{2i} \\ \mathbf{n}_{2i}^2 = \mathbf{l}_{2i} - s\Phi_{2i} - a\Delta_{2i} \\ \mathbf{n}_{2i+1}^1 = \mathbf{l}_{2i+1} + s\Phi_{2i+1} - a\Delta_{2i+1} \\ \mathbf{n}_{2i+1}^2 = \mathbf{l}_{2i+1} + s\Phi_{2i+1} + a\Delta_{2i+1}. \end{cases}$$

$s$  est l'amplitude du spin et  $a$  est le pas du réseau. Il est essentiel de savoir que ce pas est de la longueur d'un bloc d'une paire de spins. L'amplitude des fluctuations quantiques est supposée de l'ordre de grandeur du pas. Cette dernière approximation fait de ce problème, un problème soluble, puisqu'il n'est pas nécessaire de considérer les dérivées du champ  $\Delta_i$  lorsque l'on passe à la limite continue dans l'action. On impose cette approximation en mettant  $a$  en préfacteur du champ de fluctuation. Quant au champ  $\mathbf{l}$ , il est implicitement supposé d'ordre  $a$  (convention usuelle).

Intentionnellement, nous n'avons retenu qu'un unique champ de fluctuation, démarche qui se distingue celle de Sénéchal [120] (qui s'applique aux chaînes antiferromagnétiques inhomogènes) où les champs issus de la construction des états cohérents sont décomposés en autant de champs de fluctuation que possible. Notre choix est maintenant justifié au moyen d'un raisonnement sur l'intégrale de chemins.

On subodore que certains chemins très irréguliers ont une contribution significative dans l'action. En effet, les constantes de couplage varient d'une quantité macroscopique sur une échelle

<sup>3</sup>En réalité, la démarche donne des résultats et semble, lorsqu'on ne retient que les termes quadratiques donner le résultat attendu. Toutefois les calculs [18], certes systématiques, sont lourds.

microscopique, et ne sont donc pas une fonction continue de la position. Par conséquent, certains chemins très fluctuant pourraient être énergétiquement favorisés. Et pourtant ils n'apparaissent pas dans la limite continue naïve de l'action, puisqu'ils ne sont pas réguliers. C'est pourquoi on doit inclure ces chemins dans la théorie. Voyons pourquoi choisir ce champ particulier  $\Delta_i$  permet de le faire. Les champs  $\mathbf{l}_i$  et  $\Phi_i$  paramétrisent les variations du chemin entre les motifs de deux blocs de spins  $(2i, 2i+1)$ , indexés spatialement par  $i$ . C'est pourquoi un seul champ doit suffire pour rendre compte de la variation à l'intérieur des blocs. Dans le bloc  $2i$ , les vecteurs des états cohérents  $\mathbf{n}_{2i}^1$  et  $\mathbf{n}_{2i}^2$  diffèrent de  $2a\Delta_i$ . Puisque la structure microscopique périodique la plus petite est un bloc de deux spins, nous n'avons pas d'autre choix que de faire différer les vecteurs  $\mathbf{n}_{2i+1}^1$  et  $\mathbf{n}_{2i+1}^2$  de  $-2a\Delta_i$  (parce que la variation sur l'échelle d'un bloc de deux spins a déjà été prise en compte dans les champs du modèle sigma non-linéaire). Et cela épuise toutes les contributions possibles aux fluctuations des chemins.

L'action de la chaîne de spins que l'on obtient au travers des états cohérents est de la forme :

$$S = \int dt \sum_i s^2 \mathbf{n}_{2i} \cdot \mathbf{n}_{2i+1} - \gamma \sum_i s^2 \mathbf{n}_{2i+1} \cdot \mathbf{n}_{2i+2} + \sum_i s \cdot W[\mathbf{n}_i].$$

On développe ensuite les termes d'interaction, puis on passe à la limite continue pour obtenir :

$$S_c = \iint dt \frac{dx}{a} [-4a^2(1+\gamma)\Delta^2 - 4l^2 + 4a^2 s \partial_x \Phi \cdot \Delta - a^2 s^2 (\partial_x \Phi)^2].$$

J'insiste sur le fait que les termes d'échange ferromagnétique sont développés autour de la configuration alignée, contrairement aux termes d'échange antiferromagnétique qui sont développés à partir de l'ordre de Néel. C'est la raison pour laquelle les modèles sigma non-linéaires obtenus pour les échelles ou les chaînes alternées antiferromagnétiques [127, 75, 48, 49], ne peuvent être utilisés dans notre cas : ils ne sont pas construits sur les mêmes configurations semi-classiques ! Remarquons que puisque l'élément de mesure  $dx$  correspond à un bloc de deux spins, il est égal à  $a$ . Les phases de Berry des spins sont de la forme  $\int dt dx \delta \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \wedge \partial_t \mathbf{n}$ , où  $\delta \mathbf{n}$  est la variation spatiale du champ  $\mathbf{n}$ , et donnent

$$S_b = \iint dt \frac{dx}{a} s(4l + 2as \partial_x \Phi) \cdot \Phi \wedge \partial_t \Phi.$$

Comme nous sommes les contributions de paires de blocs de deux spins (soit des groupes de quatre spins), nous devons diviser la somme totale par un facteur 2. On aboutit alors à

$$S = \iint dx dt \left[ -2(1+\gamma)\Delta^2 - 2l^2 - 2s\Delta \cdot \partial_x \Phi - \frac{1}{2}s^2(\partial_x \Phi)^2 \right] \\ + \iint dx dt \left[ s^2(\partial_x \Phi) \cdot \Phi \wedge \partial_t \Phi + 2sl \cdot \Phi \wedge \partial_t \Phi \right],$$

où on a choisi  $a = 1$  par commodité. On retrouve un terme topologique  $\theta$  d'une chaîne de spin  $2s$  avec  $\theta = 4\pi s$ . C'est pourquoi le terme topologique ne contribue pas, de sorte qu'on s'attend à ce que la chaîne possède un gap.

On intègre ensuite sur les champs de fluctuations, c'est-à-dire  $l$  et  $\Delta$ . On obtient alors l'action du modèle sigma non-linéaire :

$$S = \iint dt dx \left[ \frac{1}{2}(\partial_t \Phi)^2 - \frac{1}{2}s^2 \frac{\gamma}{1+\gamma} (\partial_x \Phi)^2 \right].$$

Les paramètres standards de ce modèle sont la constante de couplage  $g$  et la célérité  $c$  données par

$$g = \frac{1}{s} \sqrt{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \quad \text{et} \quad c = s \sqrt{\frac{\gamma}{1+\gamma}}.$$

On remarque que  $c$  correspond parfaitement à la célérité  $v$  obtenue pour les ondes de spins classiques. Lorsque l'on fait tendre  $\gamma$  vers l'infini, la constante de couplage  $g$  tend vers  $1/s$  et la célérité vers  $s$ . Ce sont les paramètres attendus pour le modèle sigma non-linéaire de la chaîne de spin  $2s$ . Plus précisément, la chaîne de Hida est formée de spins  $1/2$ , de sorte que pour  $s = 1/2$   $g$  tend vers 2 et  $c$  vers  $1/2$  en unité du couplage antiferromagnétique. Ce sont les paramètres du modèle sigma non-linéaire d'une chaîne de spins  $s=1$ , de couplage  $J_{AF}/4$ . Cela correspond à la limite trouvée par Hida, que nous avons rappelée un peu plus tôt. Notre modèle est ainsi cohérent avec la démarche de Hida.

### 2.2.4 Évaluation du gap de spin dans la limite des $N$ grands

Afin d'évaluer le gap de spin, on calcule la masse engendrée par le modèle sigma non-linéaire dans le cas limite d'un grand nombre de composantes pour le champ  $\Phi$  ( $N \rightarrow \infty$ ). Dans cette limite, on peut en obtenir une expression en utilisant l'approximation (alors exacte) du point col [106]. Cela conduit à une masse engendrée dynamiquement, qui est donnée implicitement par une équation du point col. Lorsque l'on prend en compte les corrections du groupe de renormalisation (et qui se résument *in fine* à remplacer  $N$  par  $N - 2$ ) et que l'on se place dans le cas  $N = 3$ , on obtient :

$$\int \frac{dk}{2\pi} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{\frac{c}{g}k^2 + \frac{1}{gc}\omega^2 + m^2} = 1.$$

Rendu à ce point, il est imprudent d'appliquer directement le résultat connu standard pour la masse. Dans la limite  $\gamma \rightarrow 0$ , la chaîne est totalement dimérisée et la célérité  $c$  tend vers 0. De ce fait, mais aussi parce que l'on souhaite obtenir des résultats valables sur une plage étendue de  $\gamma$ , nous n'allons pas faire le choix d'un cut-off radial dans l'espace-temps euclidien du modèle sigma non-linéaire. Nous allons d'abord intégrer sur les fréquences, puis intégrer sur ces moments, avec une coupure  $\Lambda$  sur les moments. De sorte qu'au lieu d'un disque, le domaine d'intégration est une bande dans le plan  $(k, \omega)$  le long de l'axe  $\omega$ . La raison de ce choix est que lorsque  $\gamma$  tend vers 0, le préfacteur  $cg^{-1}$  de  $k^2$  tend aussi vers zéro alors que le préfacteur  $(cg)^{-1}$  de  $\omega^2$  demeure constant. Ainsi les larges fréquences sont de plus en plus pertinentes et ne doivent pas être coupées. Dans le même temps, nous avons perdu une dimension d'espace-temps, puisque les dimères sont de plus en plus découplés.

Intégrant sur  $\omega$  puis sur  $k$ , on peut extraire la masse du modèle sigma non-linéaire :

$$m = \sqrt{\frac{c}{g}} \frac{\Lambda}{\sinh(2\pi s \sqrt{\frac{\gamma}{1+\gamma}})}.$$

Dans le calcul standard de la masse engendrée (voir par exemple [7]), le sinus hyperbolique aurait été remplacé par la fonction exponentielle. En effet pour que ce calcul ait un sens, on doit avoir  $\sqrt{gc^{-1}}m \ll \Lambda$ . Puisque dans le modèle sigma non-linéaire de la chaîne de spin  $2s$ ,  $\sqrt{gc^{-1}}$  est finie, le sinus hyperbolique (alors inutile) serait remplacé par la fonction exponentielle. Or, pour notre chaîne alternée, cela ne peut être fait puisque dans la limite  $\gamma \rightarrow 0$  l'argument de la fonction s'annule. Le sinus hyperbolique doit donc être préservé.

On peut maintenant en déduire le gap énergétique  $\Delta_{2s} = \sqrt{gc}.m$ . Quel que soit la magnitude du spin  $s$ , le gap d'une paire de spins couplés de façon antiferromagnétique est égal au gap entre les états triplet et singulet, c'est-à-dire  $J_{AF}$ . Aussi lorsque  $\gamma \rightarrow 0$ , nous obtenons que  $\Delta_{2s}$  tend  $\Lambda/(2\pi)$ . Ce qui nous permet de déterminer le cut-off qui vaut  $2\pi$  (en fait  $2\pi/a$  car nous avons posé  $a = 1$ ). On peut donc écrire :

$$\Delta_{2s} = \frac{2\pi s \sqrt{\frac{\gamma}{1+\gamma}}}{\sinh(2\pi s \sqrt{\frac{\gamma}{1+\gamma}})}. \quad (2.4)$$

Nous avons donc obtenu une estimation *auto-cohérente* du gap de la chaîne de spin  $s$ . Pour la chaîne de spin  $s = 1$ , on obtient  $\Delta_1 = \frac{4\pi}{\sinh \pi}$ , qui vaut 1.08, loin du résultat numérique [51] connu de 0.41. On s'attend à un meilleur résultat pour la chaîne de spin  $s=2$ , plus proche de la *limite de grand spin*. On obtient  $\Delta_2 = \frac{8\pi}{\sinh 2\pi}$ , qui vaut 0.094, très proche de la valeur numérique [118] connue de 0.085. En ce qui concerne les longueurs de corrélation, on obtient  $\xi_1 \sim 2$  à comparer à la valeur numérique  $\xi_1 \sim 6$  tandis que l'on obtient  $\xi_2 \sim 43$  à comparer à la valeur numérique  $\xi_2 \sim 49$ .

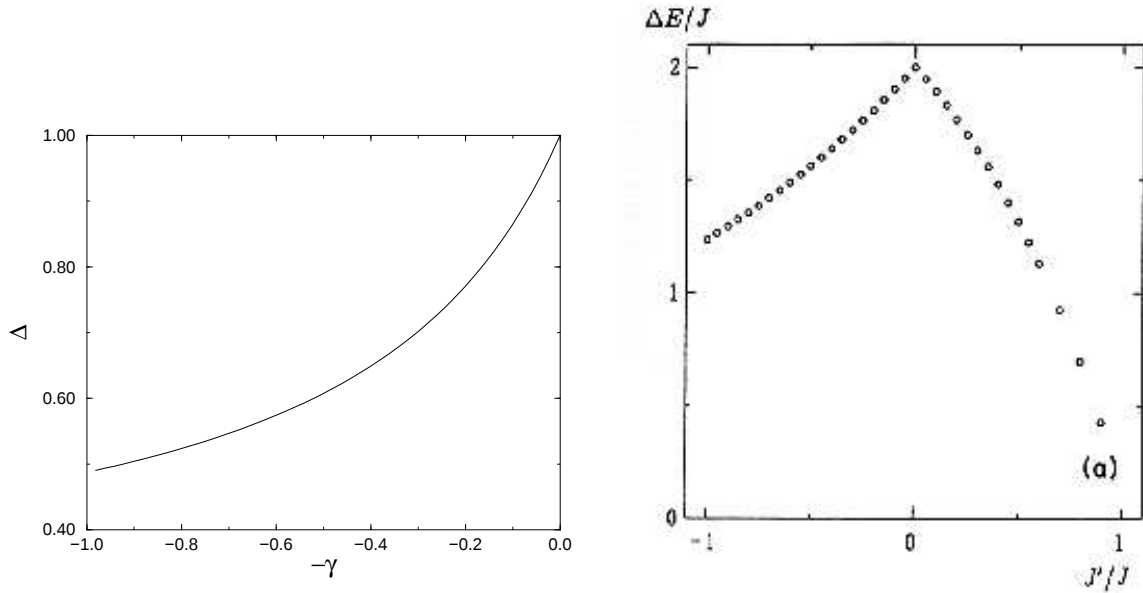


FIG. 2.5 – À gauche, le gap de la chaîne alternée fonction de  $\gamma$ . Le point correspondant aux dimères découplés est sur la droite du graphe. La figure de droite est la courbe obtenue numériquement par Hida. Les échelles d'énergie diffèrent d'un facteur 2. Seule la partie gauche de la courbe correspond à la chaîne ferro-antiferro ( $J'/J \leq 0$  dans les notations de Hida).

Les figures 2.5 et 2.6 sont les graphes du gap de spin en fonction de  $-\gamma$  dans l'intervalle  $\gamma \in [0, 1]$  et  $-1/\gamma$  dans l'intervalle  $\gamma \in [1, \infty[$ . Les courbes ont été tracées ainsi de façon à comparer nos résultats avec les résultats numériques de Hida [61, 63, 64]. Nos résultats sont en accord qualitatif sur tout le spectre de  $\gamma$ , la limite  $\gamma$  tendant vers zéro y comprise.

Afin de vérifier que notre approche est encore valable dans la limite de formation des dimères,

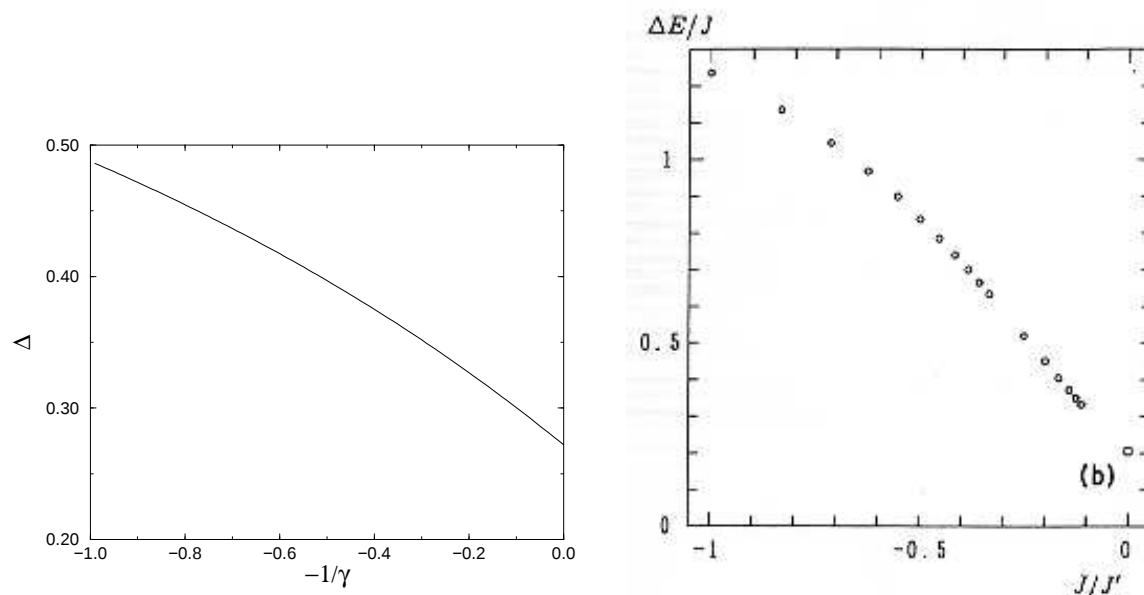


FIG. 2.6 – Même figure que la précédente mais cette fois-ci la chaîne de spin  $s=1$  est obtenue sur la droite pour  $1/\gamma = 0$ . La figure de droite est la courbe obtenue numériquement par Hida. Les échelles d'énergie diffèrent encore d'un facteur 2.

nous pouvons aussi calculer la longueur de corrélation :  $\xi = \sqrt{\frac{c}{g} \frac{1}{m}}$ , ou

$$\xi = \frac{1}{2\pi} \sinh \left( 2\pi s \sqrt{\frac{\gamma}{1+\gamma}} \right).$$

On vérifie que la longueur de corrélation tend vers zéro comme  $s\sqrt{\gamma}$  lorsque  $\gamma \rightarrow 0$ , ce qui est attendu puisqu'en ce point la chaîne est constituée de dimères découplés.

### Autres sources de comparaisons

**Gap de  $\text{CuNb}_2\text{O}_6$**  Le couplage antiferromagnétique a été estimé à  $51K$  (voir [135]) et la valeur de  $\gamma$  à 2.36 [101]. La valeur du gap de  $\text{CuNb}_2\text{O}_6$  a été estimée à environ  $\Delta \simeq 20K$ . Les calculs numériques effectués sur le modèle de Hida sont en très bon accord avec les données expérimentales ( $\Delta \simeq 20K$ ). Utilisant la formule 2.4, on obtient la valeur  $\Delta \simeq 0.38J$ , soit pour  $J = 51K$ , un gap de  $\Delta \simeq 19K$ . Presque trop beau pour être vrai compte tenu de ce que la formule du gap a été obtenue de façon approchée...

**Comportement de la longueur de corrélation** Les calculs numériques que l'on trouve dans [135], semblent confirmer le comportement de la longueur de corrélation en  $\xi \sim s\sqrt{\gamma}$  lorsque  $\gamma$  tend vers 0.

## 2.3 Une échelle de spins alternée

Dans [139], S. R. White a construit plusieurs modèles qui interpolent continûment entre une échelle de spins  $s=1/2$  et une chaîne de spins  $s=1$ , tout en restant dans la phase similaire à celle

de Haldane. Dans cette section, nous appliquons notre formalisme à un de ces modèles. Il s'agit d'une échelle antiferromagnétique possédant un barreau diagonal supplémentaire dans chaque plaquette formée par les montants et les barreaux (voir figure 2.2). Le terme d'échange associé à ce lien est ferromagnétique (on l'appellera  $D$ ) et n'introduit pas de frustration dans l'échelle. Son hamiltonien est donné par

$$\mathcal{H} = J \sum_{n;a=1,2} \mathbf{S}_n^a \mathbf{S}_{n+1}^a + K \sum_n \mathbf{S}_n^1 \mathbf{S}_n^2 + D \sum_n \mathbf{S}_n^1 \mathbf{S}_{n+1}^2 ,$$

où les constantes de couplages  $J$  et  $K$  sont choisies positives, tandis que  $D$  est négatif. Lorsque  $D$  tend vers zéro, on retrouve l'échelle de spins antiferromagnétique bien connue. En revanche, lorsque  $-D$  tend vers l'infini, les paires de spins liés de façon ferromagnétique sont dans un état triplet. Le hamiltonien effectif peut ensuite être développé en terme du couplage antiferromagnétique d'une chaîne de spin  $s=1$ , en utilisant l'invariance par rotation. La constante de couplage de la chaîne peut être évaluée sur tout élément de matrice. Elle vaut  $J_{\text{eff}} = (2J + K)/4$ . Dans cette limite le modèle correspond à une chaîne antiferromagnétique de spin  $s=1$ . Puisque, dans cette limite, il semble que l'échelle ne sorte pas de la phase de Haldane, on peut appliquer notre formalisme pour tenter d'estimer le gap de spin, comme fonction du couplage diagonal  $D$ .

### 2.3.1 Modèle sigma non-linéaire effectif

Le motif élémentaire de l'échelle est composé de quatre spins  $\mathbf{S}_{2i}^1, \mathbf{S}_{2i}^2, \mathbf{S}_{2i+1}^1$ , et  $\mathbf{S}_{2i+1}^2$  qui forment un carré et, en plus du lien additionnel diagonal, trois liens : un sur chaque montant et le dernier sur un des deux barreaux qui clôt le carré (voir figure 2.2). Tout comme pour la chaîne de Hida, les calculs sont menés sur un double motif.

Les paires de spins candidates pour former un modèle sigma non-linéaire sont les spins voisins sur un même montant. Les paires de spins liés par un barreau contribuent au même modèle sigma non-linéaire. Dans ce cas de figure, nous n'aurons besoin que d'un unique champ de fluctuations additionnel permettant de décrire les fluctuations d'un chemin à l'intérieur d'un motif, *avant* de passer à la limite continue. Les champs paramétrisant les états cohérents sont décomposés selon :

$$\begin{cases} \mathbf{n}_{2i}^1 = \mathbf{l}_{2i} - s\Phi_{2i} + a\Delta_{2i} \\ \mathbf{n}_{2i}^2 = \mathbf{l}_{2i} - s\Phi_{2i} + a\Delta_{2i} \\ \mathbf{n}_{2i+1}^1 = \mathbf{l}_{2i+1} + s\Phi_{2i+1} - a\Delta_{2i+1} \\ \mathbf{n}_{2i+1}^2 = \mathbf{l}_{2i+1} + s\Phi_{2i+1} - a\Delta_{2i+1} . \end{cases}$$

Dans la suite on pose  $J = 1$ ,  $K = \rho$  et  $D = -\delta$ , de sorte que les constantes de couplages sont exprimées en unité du couplage antiferromagnétique longitudinal  $J$ . On développe alors les termes d'interaction de l'action, ce qui donne :

$$S_c = \iint dt \frac{dx}{a} [-4a^2(\rho + \delta)\Delta^2 - 4(2 + \rho)\mathbf{l}^2 + 4a^2\delta s\partial_x\Phi \cdot \Delta - a^2(\rho + \delta)s^2(\partial_x\Phi)^2]$$

avec la même attention portée sur le développement des échanges ferromagnétiques. Comme dans le cas de la chaîne de Hida, l'élément de mesure  $dx$  correspond à un bloc de deux spins et vaut  $a$ . Les phases de Berry sont de la forme  $\iint dt dx \delta \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \wedge \partial_t \mathbf{n}$  et donnent

$$S_b = \iint dt \frac{dx}{a} 2s \mathbf{l} \cdot \Phi \wedge \partial_t \Phi .$$

Puisque les calculs ont été menés pour un double bloc, on doit diviser la somme des contributions à l'action d'un facteur 2. Et on aboutit à

$$S = \iint dxdt \left[ -2(2+\rho)l^2 - 2(\rho+\delta)\Delta^2 - 2s\Delta \cdot \partial_x \Phi - \frac{1}{2}s^2(2+\delta)(\partial_x \Phi)^2 \right] \\ + \iint dxdt [2ls\Phi \wedge \partial_t \Phi]$$

où on a fixé le pas du réseau  $a$  à 1. On peut ensuite intégrer sur les champs de fluctuations, c'est-à-dire  $l$  et  $\Delta$ . De sorte qu'on obtient finalement l'action du modèle sigma non-linéaire

$$S = \iint dt dx \left[ \frac{1}{2+\rho}(\partial_t \Phi)^2 - \frac{1}{2}s^2(2+\frac{\delta\rho}{\delta+\rho})(\partial_x \Phi)^2 \right].$$

dont les paramètres sont

$$g = \frac{1}{s} \sqrt{\frac{2+\rho}{2+\frac{\delta\rho}{\delta+\rho}}} \quad \text{et} \quad c = s \sqrt{(2+\rho) \left( 2 + \frac{\delta\rho}{\delta+\rho} \right)}.$$

De façon à se conformer aux notations de White, nous posons  $\rho = 1$  pour obtenir :

$$g = \frac{1}{s} \sqrt{\frac{3(1+\delta)}{2+3\delta}} \quad \text{et} \quad c = \frac{s}{2} \sqrt{\frac{3(2+3\delta)}{1+\delta}}.$$

Ce sont les constantes du couplage et de la célérité du modèle sigma non-linéaire effectif.

### 2.3.2 Évaluation du gap de spin dans la limite des $N$ grands

On peut raisonner similairement à ce qui a été développé pour la chaîne de Hida. Dans la limite d'un grand nombre  $N$  de composantes du champ, on obtient une équation du point col et, de là, la masse engendrée. Le gap est alors donné par :

$$\Delta_L^s = \Lambda.c. \exp\left(-\frac{2\pi}{g}\right).$$

Au contraire de la section précédente, il est inutile de retenir la fonction sinus hyperbolique. Grâce aux constantes de couplage  $g$  et célérité  $c$  précédemment calculées, on obtient

$$\Delta_L^s = \Lambda \cdot \frac{s}{2} \sqrt{\frac{3(2+3\delta)}{1+\delta}} \exp\left(-2\pi s \sqrt{\frac{2+3\delta}{3(1+\delta)}}\right).$$

Puisque lorsque  $\delta$  tend vers l'infini, on doit retrouver 3/4 du gap  $\Delta_C^1$  de la chaîne de spins  $s=1$ , on reformule l'expression en :

$$\frac{\Delta_L^s}{\frac{3}{4} \cdot \Delta_C^{2s}} = \sqrt{\frac{2+3\delta}{3(1+\delta)}} \exp\left[2\pi s \left(1 - \sqrt{\frac{2+3\delta}{3(1+\delta)}}\right)\right].$$

Ainsi peut-on relier le gap de spin de la chaîne de spins  $s=1$ , au gap de l'échelle antiferromagnétique de spins  $s=1/2$  (à deux montants) par la formule

$$\frac{\Delta_L^{1/2}}{\Delta_C^1} = \sqrt{\frac{3}{8}} \exp\left[\pi \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right].$$

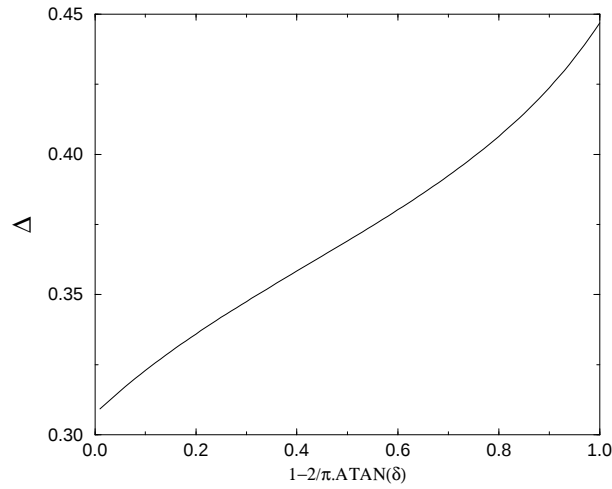


FIG. 2.7 – Le gap de l'échelle de spins avec des couplages diagonaux ferromagnétiques, fonction de  $1 - 2/\pi \cdot \arctan(\delta)$ .

Avec la valeur  $\Delta_C^1 \simeq 0.41$ , on obtient une estimation  $\Delta_L^{1/2} \simeq 0.45$ , proche de la valeur numérique [126] connue 0.50. Sur la figure 2.7, nous avons tracé le graphe du gap de spin normalisé  $\Delta_L^{1/2}/(3/4 \cdot \Delta_C^1)$  en fonction de  $1 - 2/\pi \cdot \arctan \delta$ . On peut comparer la courbe aux données de White [139]. Nos résultats sont en accord qualitatif. Mais ils sont aussi quantitativement proches.

## 2.4 Conclusion

Nous avons construit des modèles sigma non-linéaires destinés à décrire des chaînes de spins généralisées qui comprennent des échanges ferromagnétiques. Dans le cas de la chaîne de spins alternée ferro-antiferromagnétique, notre approche reproduit correctement la transition continue des dimères découplés vers la phase de Haldane de la chaîne de spins  $s=1$ . Nous avons également traité le cas d'une échelle incluant des liens ferromagnétiques, de sorte que la phase de Haldane peut être atteinte en variant l'intensité relative du couplage ferromagnétique. Là encore, il y a un bon accord avec les données numériques.



## Chapitre 3

# Propriétés critiques au bord d'une chaîne de spins ouverte

### 3.1 Introduction

#### 3.1.1 Problématique

Le dopage est un outil précieux pour tester notre compréhension de la physique des chaînes de spins quantiques. Contrairement à l'objet de la deuxième partie de cette thèse, il ne s'agit pas ici d'étudier la nouvelle physique engendrée par l'apport de désordre dans le système pur. Il s'agit davantage de tester avec précision la physique du système pur, en en modifiant ses paramètres ou, ce qui est plus original sa géométrie. C'est précisément l'objet de ce chapitre.

Nous avons déjà rencontré dans le chapitre précédent un exemple de modulation d'un paramètre d'une chaîne au moyen du dopage : dans la chaîne alternée  $\text{Cu}_{1-x}\text{Zn}_x\text{Nb}_2\text{O}_6$ , il était possible de faire varier le facteur  $\gamma$ , rapport des couplages ferro et antiferromagnétique en substituant aux ions Cuivre des ions Zinc.

Dans ce chapitre, on envisage du dopage (naturel ou artificiel) par des impuretés qui possèdent un spin nucléaire.

Du point de vue du magnétisme, plusieurs cas de figure peuvent survenir. Il se peut que l'impureté possède un spin électronique, mais aussi un spin nucléaire. Prenons l'exemple de la chaîne de spins  $s=1/2$   $\text{Sr}_2\text{CuO}_3$ , où les spins électroniques sont portés par les ions  $\text{Cu}^{2+}$ . Dans ce cas précis, il n'y a pas vraiment de dopage de la chaîne. Cependant l'exemple nous permettra de mieux apprécier la suite du chapitre. Les atomes de Cuivre sont naturellement des isotopes  $^{63}\text{Cu}$ , ou  $^{65}\text{Cu}$  qui possèdent tous deux un spin nucléaire ( $I=3/2$ ). Ils possèdent également un spin électronique (ce sont eux qui constituent la chaîne). Le spin nucléaire de chacun des ions Cuivre est en interaction avec le spin électronique de l'isotope mais également avec les spins électroniques des ions Cuivre voisins dans la chaîne. Une vision schématique de la situation est proposée sur la figure 3.1.

La physique du système peut être explorée en excitant le spin nucléaire. Ce dernier relaxe alors *dans le volume* vers l'équilibre thermodynamique via un couplage hyperfin aux spins électroniques du réseau (ou pour ce qui nous concerne de la chaîne). Plusieurs types de couplages sont possibles : couplage hyperfin dipolaire ou quadripolaire, couplage hyperfin transféré. Il est possible de mesurer les temps de relaxation longitudinal  $T_1$  et transverse  $T_2$  qui apportent de l'information sur les autocorrélations en temps des spins électroniques. Dans cet exemple, les ions

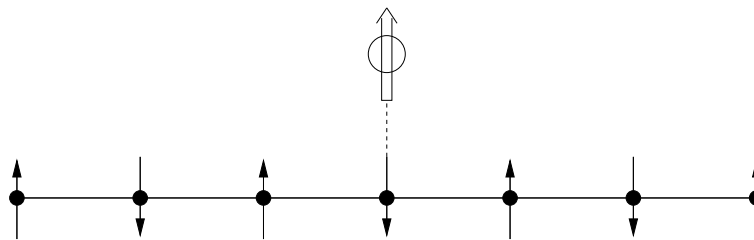


FIG. 3.1 – Impureté non-magnétique possédant un spin nucléaire couplé au volume de la chaîne.

possèdent tous un spin nucléaire si bien que l'intensité du signal mesuré est fort et l'expérience bien maîtrisée.

Le cas de figure qui nous intéressera ici se produit lorsqu'une véritable impureté, qui ne possède pas de spin électronique mais possède un spin nucléaire, se substitue à un ion de la chaîne. Un couplage hyperfin, que l'on peut raisonnablement supposer d'intensité nettement plus faible que l'échange entre les spins de la chaîne, relie le spin nucléaire aux spins plus proches voisins. Ces deux spins électroniques sont alors très peu corrélés (la corrélation est proportionnelle au carré du rapport du couplage hyperfin sur la valeur de couplage d'échange dans le volume). La chaîne a été cassée en deux. Sous l'effet d'une excitation, le spin nucléaire relaxe via les spins des deux chaînes ouvertes résultantes, que l'on peut considérer comme indépendantes.

Il est important de garder à l'esprit que l'on s'intéresse aux conséquences *locales* du dopage par *une* impureté. Il ne s'agit pas d'étudier théoriquement l'effet d'une concentration finie d'impuretés<sup>1</sup>.

Un exemple possible est celui de la chaîne  $\text{Sr}_2\text{CuO}_3$  où l'on substitue un ion isotope du Zinc,  $^{67}\text{Zn}$ , de spin nucléaire  $I=5/2$  et sans spin électronique à un ion Cuivre. Le facteur gyromagnétique de cet isotope ( $\gamma = 1.68 \cdot 10^7 \text{ rad T}^{-1}\text{s}^{-1}$ ) est bien distinct de ceux des isotopes du Cuivre ( $\gamma = 7.11 \cdot 10^7 \text{ rad T}^{-1}\text{s}^{-1}$  pour  $^{63}\text{Cu}$  et  $\gamma = 7.60 \cdot 10^7 \text{ rad T}^{-1}\text{s}^{-1}$  pour  $^{65}\text{Cu}$ ). La figure 3.2 est une représentation schématique de l'inclusion de l'impureté dans le volume de la chaîne.

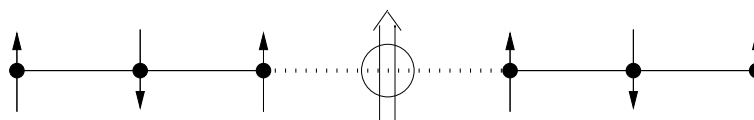


FIG. 3.2 – Impureté non-magnétique possédant un spin nucléaire couplé aux bords de la chaîne.

La méthode consacrée pour la mesure du temps de relaxation dans le système est celle de la *résonance magnétique nucléaire*.

### 3.1.2 Expériences de RMN

La résonance magnétique nucléaire (RMN) est une technique de sondage très sélective de la matière. Son principe de fonctionnement est le suivant. On suppose que dans un matériau,

<sup>1</sup>D'un point de vue expérimental, la concentration en impuretés est toujours finie, pour que le signal soit mesurable, par exemple dans une expérience de RMN. Pour une concentration faible, on s'attend toutefois à ce que la mesure du  $T_1$  corresponde à la valeur du système individuel. Il suffit en effet pour cela que les impuretés consécutives présentes au sein d'une *même* chaîne de spins soient suffisamment distantes.

une catégorie d'atomes possèdent un spin nucléaire. Si l'on soumet l'échantillon à un fort champ magnétique, la dégénérescence de spins est levée. Le matériau peut alors être excité par rayonnement à la fréquence correspondant à l'écart de niveaux  $\Delta E = \gamma \hbar B_0$ , où  $\gamma$  est le facteur gyromagnétique et où  $B_0$  est le champ magnétique (intense) appliqué.

La précision du procédé est telle qu'en tenant compte des corrections induites sur l'éclatement Zeeman par les atomes voisins du spin nucléaire, les chimistes parviennent à exciter sélectivement une molécule précise ou un groupement d'atomes bien défini.

Le procédé permet également d'explorer la dynamique du spin nucléaire et en particulier la façon dont il relaxe avec son environnement. Pour cela on donne une impulsion au spin sous la forme de l'application d'un champ magnétique de sens opposé au champ ambiant  $B_0$  (dans la perspective de la mesure du temps de relaxation *longitudinal*  $T_1$ ) et on observe sa réaction. La mesure dans le temps des aimantations permet alors de remonter aux temps de relaxation, au moyen des équations de Bloch. Ce sont ces équations qui déterminent l'évolution des valeurs moyennes des opérateurs de spins (aimantations) :

$$\begin{aligned}\frac{d\langle S^z(t) \rangle}{dt} &= \frac{1}{T_1} (\langle S^z(t) \rangle - \langle S_{\text{eq}}^z \rangle) , \\ \frac{d\langle S^\pm(t) \rangle}{dt} &= \mp i(\Omega_L + \delta\Omega_L) \langle S^\pm(t) \rangle - \frac{1}{T_2} \langle S^\pm(t) \rangle .\end{aligned}$$

$S_{\text{eq}}^z$  est la position d'équilibre thermodynamique.  $\Omega_L = \gamma B_0$  est la fréquence de précession de Larmor.  $T_1$  et  $T_2$  sont respectivement les temps de relaxation longitudinal et transverse. Enfin  $\delta\Omega_L$  est le *Knight shift* et correspond à un déplacement de la raie de résonance (c'est un effet quantique systématique).

Les temps de relaxation sont de l'ordre de quelques secondes pour les liquides<sup>2</sup>. Pour la chaîne  $\text{Sr}_2\text{CuO}_3$ , on verra que le temps de relaxation  $T_1$  est de l'ordre de quelques millisecondes.

### 3.1.3 Temps de relaxation longitudinal et fonction de corrélation

Le temps de relaxation  $T_1$  est relié à la susceptibilité des spins du réseau par la formule

$$\frac{1}{T_1} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{2k_B T}{\hbar^2 \omega} \int \frac{dk}{2\pi} A_{\parallel}^2(k) \text{Im} \chi(k, \omega). \quad (3.1)$$

où  $\chi(\omega)$  est la susceptibilité de spin, c'est-à-dire

$$\chi(k, \omega) = \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{\infty} dt e^{i(\omega t - kx)} \langle [S^+(x, t), S^-(0, 0)] \rangle_T. \quad (3.2)$$

Moriya fut le premier à donner en 1956 une expression pour  $T_1$  [95, 96], en calculant la réponse du réseau de spins au premier ordre des perturbations. La formule ci-dessus est une mise en forme que l'on trouve dans [114, 105]. La limite prise dans la formule (3.1) consiste à faire tendre la fréquence  $\omega$  vers 0 car elle correspond en fait à la fréquence de Larmor ( $\Omega_L = \gamma B_0$ ), qui est beaucoup plus faible que toute autre fréquence caractéristique du système.

$A_{\parallel}$  est la valeur du couplage hyperfin par l'intermédiaire duquel relaxe le spin nucléaire. Il dépend de la position relative des spins. La fonction est au carré dans (3.1) car le premier ordre de perturbation contribuant au  $T_1$  est quadratique dans le spin nucléaire.

<sup>2</sup>Il est connu en imagerie biomédicale qu'en dépit que ses immenses qualités, la technique RMN possède un vrai défaut en comparaison du scanner : sa lenteur empêche l'observation de la dynamique métabolique, par exemple de la circulation sanguine.

Les spins électroniques éloignés de l'atome possédant le spin nucléaire contribuent bien moins que les plus proches voisins. Par exemple si l'interaction hyperfine est dipolaire, on s'attend à une décroissance en  $1/r^6$  de la distance  $r$  séparant l'atome du spin électronique. Dans ces conditions, on peut se restreindre à une relaxation au travers des spins plus proches voisins :

$$\frac{1}{T_1} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{2k_B T}{\hbar^2 \omega} A_{\parallel}^2 \text{Im} \chi(\omega), \quad (3.3)$$

où  $\chi(\omega)$  est la susceptibilité temporelle d'un spin électronique. Utilisant la formule (3.2) pour donner de (3.3) une expression explicite, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_1} &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{k_B T}{\hbar^3 \omega} A_{\parallel}^2 \left( \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \langle S^+(t) S^-(0) \rangle_T - e^{-i\omega t} \langle S^-(t) S^+(0) \rangle_T \right) \\ &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{k_B T}{\hbar^3 \omega} A_{\parallel}^2 \left( \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \langle S^+(t) S^-(0) \rangle_T - e^{i\omega t} \langle S^-(0) S^+(t) \rangle_T \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

La relaxation se manifeste par la dissipation engendrée par la réponse du spin électronique au spin nucléaire. Il est donc naturel de devoir maintenant recourir implicitement au théorème de fluctuation-dissipation. On transforme la deuxième fonction de corrélation dans le dernier membre de (3.4) en translatant le temps dans la fonction de corrélation à température finie de  $i\hbar/k_B T$  et en utilisant la cyclicité de la trace :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \langle S^-(0) S^+(t) \rangle_T = e^{-\hbar\omega/k_B T} \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle S^+(t) S^-(0) \rangle_T.$$

donc

$$\frac{1}{T_1} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{k_B T}{\hbar^3 \omega} A_{\parallel}^2 \left( 1 - e^{\hbar\omega/k_B T} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \langle S^+(t) S^-(0) \rangle_T$$

Faisant tendre la fréquence de Larmor vers 0 dans le facteur d'occupation, on obtient la formule finale qui nous sera utile en pratique :

$$\frac{1}{T_1} = A^2 \lim_{\omega \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} \langle \mathbf{S}(0, t) \cdot \mathbf{S}(0, 0) \rangle_T, \quad (3.5)$$

où  $A = A_{\parallel}/\hbar$ . L'intégrale est régularisée en  $-\infty$  et  $+\infty$ , par exemple par une petite partie imaginaire de signe approprié présente dans la fréquence. Cela correspond physiquement au fait que le système n'est excité que sur une durée de temps finie. On notera que  $A$  ne dépend de la température qu'au travers de la dépendance du couplage hyperfin, dépendance qu'on peut négliger.

Dans la suite, lorsque les fonctions de corrélation seront clairement comprises comme étant à température finie, on omettra le suffixe  $T$ .

## 3.2 Théorie critique en volume

On commence dans cette section par rappeler la façon dont on calcule les fonctions de corrélation de spins de la théorie critique en volume et à température finie de la chaîne de spins  $s=1/2$ . Non seulement les résultats nous serviront de base de comparaison pour la théorie critique avec bord (chaîne ouverte) mais encore les fonctions de corrélation de cette dernière, lorsque les points sont suffisamment distants du bord devront redonner les fonctions de corrélation en volume.

### 3.2.1 Autocorrélations de spin

Dans la suite on s'appuie sur la forme bosonisée de la chaîne XXZ de spins  $s=1/2$  obtenue en (1.7) :

$$\mathcal{H} = \int dx \frac{c}{2} \left[ K \Pi^2 + \frac{1}{K} (\nabla \phi)^2 \right] - \frac{\Delta}{2(\pi\alpha)^2} \cos \sqrt{16\pi} \phi.$$

Pour le calcul des dimensions d'échelle des opérateurs de spins, et donc des parties invariantes d'échelles des fonctions de corrélation, on retient le hamiltonien du point fixe :

$$\mathcal{H}_0 = \frac{c}{2} \int dx \left[ K \Pi^2 + \frac{1}{K} (\nabla \phi)^2 \right]. \quad (3.6)$$

Dans tout ce qui suit on prendra  $c = 1$ , quitte ensuite à re-dilater de façon différenciée les axes de temps et d'espace. Le terme  $g \int dx : \cos \sqrt{16\pi} \phi :$  qui s'ajoute à  $\mathcal{H}_0$  pour former le hamiltonien total est non-pertinent pour  $\Delta \in [0, 1[$ , soit  $K \in ]1/2, 1]$ . Les corrections induites dans le cas marginal  $\Delta = 1$  ou  $K = 1/2$  feront l'objet d'un traitement ultérieur. Utilisant la forme bosonisée des opérateurs de spin (1.8), ainsi que les dimensions conformes des champs  $\phi, \tilde{\phi} : e^{i\sqrt{\pi}\tilde{\phi}} :$ , et  $: e^{i\sqrt{4\pi}\phi} :$ , qui sont respectivement 0 pour les deux premiers (opérateurs logarithmiques),  $(1/K, 1/K)$  et  $(K, K)$  pour les deux suivants, on en déduit (assez) simplement les exposants critiques des fonctions de corrélation à deux points :

$$\begin{aligned} \langle S^z(0, t) S^z(0, 0) \rangle_u &\propto \frac{1}{t^2} & \langle S^z(0, t) S^z(0, 0) \rangle_a &\propto \frac{1}{t^{2K}} \\ \langle S^+(0, t) S^-(0, 0) \rangle_u &\propto \frac{1}{t^{2K+1/2K}} & \langle S^+(0, t) S^-(0, 0) \rangle_a &\propto \frac{1}{t^{1/2K}}. \end{aligned}$$

Pour la dimension d'échelle de la fonction de corrélation  $\langle S^+(0, t) S^-(0, 0) \rangle_u$ , on a pu additionner les dimensions conformes des opérateurs  $: e^{i\sqrt{\pi}\tilde{\phi}} :$  et  $: e^{i\sqrt{4\pi}\phi} :$ , car leur produit à courte distance n'engendre pas de nouvelles singularités.

Au point isotrope, i.e.  $K = 1/2$ , on vérifie que les deux corrélations uniformes et les deux corrélations alternées se correspondent bien. Ce test constitue un moyen puissant de vérification des calculs, qui sera utilisé de nouveau plus tard. Réciproquement, supposant la forme de la partie invariante conforme du hamiltonien  $\mathcal{H}_0$  donnée par (3.6) au point isotrope, requérir l'invariance des fonctions de corrélation par les rotations fournit  $K = 1/2$  pour rayon de compactification, ce qui est patent sur la partie alternée de la fonction de corrélation. Et l'on peut très bien alors se passer de l'Ansatz de Bethe...

Les amplitudes des fonctions de corrélation  $\langle S^+(0, t) S^-(0, 0) \rangle_{u,a}$  et  $\langle S^z(0, t) S^z(0, 0) \rangle_a$  ne sont pas universelles, alors que  $\langle S^z(0, t) S^z(0, 0) \rangle_u$  l'est. On calcule (asymptotiquement) exactement cette dernière à l'aide de la forme bosonisée des opérateurs de spins et on obtient

$$\langle S^z(x, t) S^z(0, 0) \rangle_u = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{x^2 - t^2}.$$

Lukyanov [89, 88], puis Affleck [1], ont calculé la valeur des amplitudes non-universelles des fonctions de corrélation asymptotiques, à temps égaux,  $\langle S^x S^x \rangle$  ou  $\langle S^y S^y \rangle$  de la chaîne XXZ, par l'Ansatz de Bethe (la fonction de corrélation  $\langle S^z S^z \rangle$  n'est pas connue). Par exemple au point isotrope

$$\langle S^\alpha(0, t) S^\alpha(0, 0) \rangle = \frac{\sqrt{\ln(t/t_0)}}{(2\pi)^{3/2} t},$$

pour  $\alpha = x, y, z$  et  $t_0$  est une constante dimensionnée.

### 3.2.2 Fonctions de corrélation à température finie

Le point fixe étant décrit par une théorie invariante conforme, il est aisé d'obtenir les fonctions de corrélation à température finie, grâce à une transformation conforme. Les opérateurs de spins sont en effet des opérateurs primaires de la théorie conforme et se transforment comme tels.

À ce stade il est judicieux de passer en temps imaginaire. Les opérateurs sont alors définis sur l'intervalle de temps imaginaire  $[0, 1/T]$  et prennent la même valeur aux extrémités de l'intervalle. Leurs fonctions de corrélation ne sont donc pas celles du plan mais celles définies sur le cylindre. Pour se ramener au cas connu des fonctions de corrélation dans le plan, on a recours à la transformation conforme qui, au plan infini (de coordonnée holomorphe  $z$ ), fait correspondre le cylindre de rayon  $1/2\pi T$  (de coordonnée  $w$ ). Explicitement, elle s'écrit :

$$w = \frac{1}{2\pi T} \ln z. \quad (3.7)$$

Considérons la fonction à deux points d'un champ primaire  $\zeta$  de poids conformes  $\Delta$  et  $\bar{\Delta}$  :

$$\langle \zeta(z_1, \bar{z}_1) \zeta(z_2, \bar{z}_2) \rangle_{Cyl} = \left( \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z_1} \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z_2} \right)^\Delta \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z}_1} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z}_2} \right)^{\bar{\Delta}} \langle \zeta(w_1, \bar{w}_1) \zeta(w_2, \bar{w}_2) \rangle_{Plan},$$

que l'on a soumis à la transformation conforme ci-dessus (3.7). Pour les opérateurs qui nous intéressent on a  $\Delta = \bar{\Delta}$ , et leur dimension d'échelle est  $\Delta + \bar{\Delta}$ . Si  $\langle \zeta(z_1, \bar{z}_1) \zeta(z_2, \bar{z}_2) \rangle_{Plan} = \frac{1}{(z_1 - z_2)^{\Delta + \bar{\Delta}} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{\Delta + \bar{\Delta}}}$ , il vient :

$$\langle \zeta(w_1, \bar{w}_1) \zeta(w_2, \bar{w}_2) \rangle_{Cyl} = \left[ \frac{\pi T}{\sinh \pi T (w_1 - w_2)} \frac{\pi T}{\sinh \pi T (\bar{w}_1 - \bar{w}_2)} \right]^{\Delta + \bar{\Delta}}.$$

Lorsque  $T \rightarrow 0$  on retrouve bien le comportement critique de la corrélation à température nulle. On obtient ainsi toutes les corrélations de spin souhaitées, chacune contenant une partie uniforme et une partie alternée :

$$\begin{aligned} \langle S^z(t) S^z(0) \rangle &\propto \left( \frac{\pi T}{\sinh \pi T t} \right)^2 + \left( \frac{\pi T}{\sinh \pi T t} \right)^{2K}, \\ \langle S^+(t) S^-(0) \rangle &\propto \left( \frac{\pi T}{\sinh \pi T t} \right)^{2K+1/2K} + \left( \frac{\pi T}{\sinh \pi T t} \right)^{1/2K}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dans ces relations, nous avons omis les préfacteurs ; le premier terme est la partie uniforme de la corrélation alors que le second est sa partie alternée.

### 3.2.3 Calcul du taux de relaxation longitudinal et confirmation expérimentale

Dans le cas d'une chaîne isotrope ( $K = 1/2$ ), les deux corrélations ci-dessus sont égales. Aux temps longs, la partie alternée domine et les corrélations se comportent en  $\pi T / \sinh \pi T t$ . Le taux de relaxation  $1/T_1$  correspondant à la transformée de Fourier de la corrélation à fréquence nulle, il est précisément contrôlé par le comportement aux temps longs de la fonction de corrélation. L'intégration donne approximativement  $T/(i\omega - \pi T)$  ; puis on fait tendre  $\omega$  vers 0. Le dépendance en température est donc  $1/T_1 \propto T^0$ . Ce comportement est en bon accord avec les résultats expérimentaux de Takigawa et al. [128]. Leurs mesures ont été effectuées sur le composé  $\text{Sr}_2\text{CuO}_3$ , qui est une chaîne de spins  $s=1/2$  de température de Néel  $T_N = 5$  K. Dans ce composé, au delà

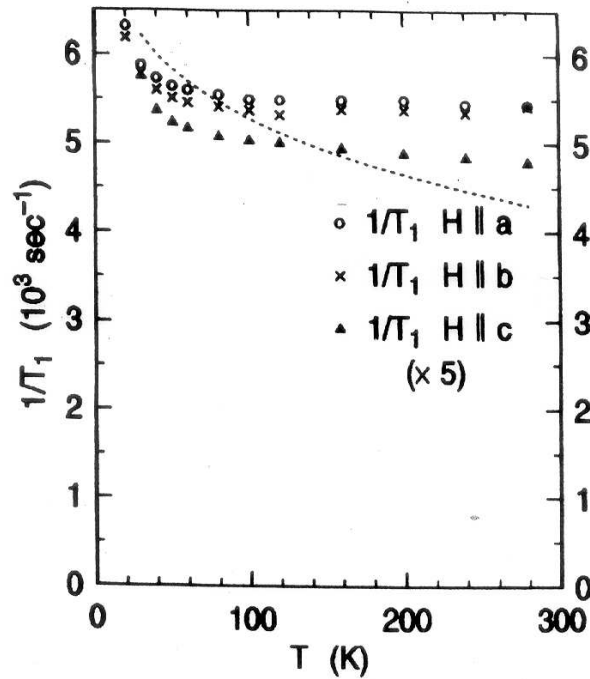


FIG. 3.3 – Taux de relaxation longitudinal  $1/T_1$  en fonction de la température.

de 20 K, le taux de relaxation longitudinal ne dépend plus de la température. Ce composé est celui que nous avons mentionné dans l'introduction de ce chapitre. Il correspond au premier des cas de figure envisagés pour le dopage. Le calcul du temps de relaxation  $T_1$  est dans ce cas un test des autocorrélations de spins *en volume*.

En revanche, il subit une remontée à basse température (voir figure 3.3).

Cette inflexion tire son origine de la présence des opérateurs marginaux dans le modèle microscopique isotrope [2, 124].

### 3.2.4 Correction logarithmique au taux de relaxation longitudinal

Pour toute valeur finie du facteur d'anisotropie  $\Delta$ , le lagrangien  $\mathcal{L}_0$  correspondant au hamiltonien  $\mathcal{H}_0$  s'écrit :

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2K} \int dx (\partial_\mu \phi)^2,$$

où la célérité  $c$  a été prise égale à 1. On se place désormais au point fixe isotrope décrit par le lagrangien  $\mathcal{L}_\odot \equiv \mathcal{L}_0(K = 1/2)$ . La chaîne de Heisenberg correspond à ce Lagrangien mais que l'on a perturbé par le terme Umklapp, auquel on ajoute l'opérateur  $x \int dx (\partial_\mu \phi)$ , engendré par le flot du terme Umklapp et qui correspond à la renormalisation du rayon de compactification  $1/2K = 1 + x$ .

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\odot + x \int dx (\partial_\mu \phi) + y \int dx \cos \sqrt{16\pi} \phi.$$

## Corrections logarithmiques dans la physique des chaînes de spins

Les deux perturbations sont marginales et donnent une correction logarithmique [44] au comportement en loi de puissance des fonctions de corrélation et sont dès lors susceptibles de modifier la dépendance en température du  $T_1$ . Ces corrections n'ont été mises en évidence expérimentalement que récemment [97]. Si de telles corrections logarithmiques à une loi d'échelle sont bien connues en théorie statistique des champs, elles ont la particularité d'être très difficilement identifiables tant numériquement<sup>3</sup> qu'expérimentalement. C'est la raison pour laquelle elles constituent toujours, en physique de la matière condensée, un sujet d'actualité.

Une telle correction doit pouvoir être mesurée dans les meilleures conditions sur une observable que la théorie gaussienne donne pour constante à basse température, puisqu'alors la monotonie de l'observable dépendra de la correction. Un exemple marquant a été donné dans [44] avec la susceptibilité magnétique de la chaîne de Heisenberg. Au point isotrope, la susceptibilité dépend du couplage marginal  $g$ , et au premier ordre en  $g$  :

$$\chi(T) \propto 1 + \lambda g(T),$$

où  $\lambda$  est une constante. On connaît la fonction  $g(T)$  qui est solution de l'équation de flot de l'opérateur marginal. On en conclut alors :

$$\pi^2 J \chi(T) \sim 1 + \frac{1}{2 \ln(T_0/T)},$$

où  $T_0$  est une constante qui dépend des caractéristiques de la chaîne.

### Correction au $T_1$

Revenons au cas qui nous intéresse. Les équations du groupe de renormalisation sont celles du flot de Kosterlitz-Thouless (elles se déduisent facilement des OPE des opérateurs marginaux) :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\ell} &= 2\pi^2 y^2, \\ \frac{dy}{d\ell} &= 2xy. \end{aligned}$$

On se place désormais sur la ligne marginale  $g \equiv y = -\frac{1}{\pi}x$ . En effet, c'est la contrainte que l'on obtient lorsque l'on demande que les fonctions de corrélation soient isotropes. La fonction  $\beta(g)$  de la perturbation marginale est donc  $\beta(g) = -2\pi g^2$ . Appelons  $\mathcal{G}(t)$  la partie alternée de la fonction de corrélation  $\langle S^+(0, t) S^-(0, 0) \rangle$  (qui domine la partie uniforme),  $\mathcal{G}(t) = \langle S^+(0, t) S^-(0, 0) \rangle_a$ .  $\mathcal{G}$  est solution de l'équation du groupe de renormalisation :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \ln t} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + 2\gamma(g) \right] \mathcal{G}(t, g) = 0, \quad (3.9)$$

où  $\gamma(g) = (1 - \pi g)/2$  est la dimension anormale de la partie alternée de l'opérateur  $S^+$ . On calcule  $\gamma(g)$  en perturbations au premier ordre en  $g$  (OPE à une boucle de l'opérateur marginal avec l'opérateur  $S^+ S^-$ ). La forme de la fonction  $\mathcal{G}$  s'obtient en résolvant l'équation (3.9) :

$$\langle S^+(t, 0) S^-(0, 0) \rangle_a \propto \frac{1}{t} \sqrt{1 + g \ln(t/a)},$$

---

<sup>3</sup>Rien ne ressemble plus numériquement à  $T \ln T$  que  $T^{1+\epsilon}$  avec  $\epsilon \ll 1$ .

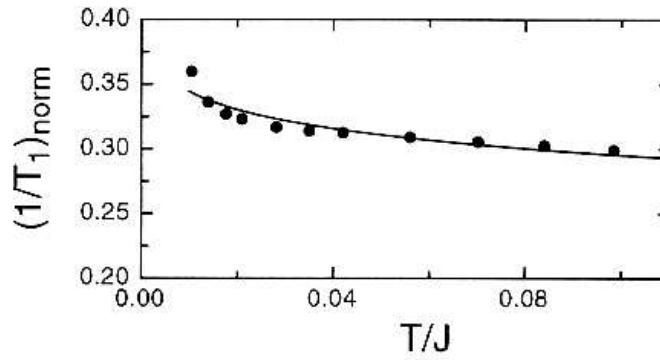


FIG. 3.4 – Taux de relaxation longitudinal en fonction de la température. Les points sont les données expérimentales de Takigawa, et la courbe en trait plein est le résultat du groupe de renormalisation à 2 boucles obtenu par Barzykin.

où  $a$ , le pas du réseau, est utilisé comme cut-off aux courtes distances. Pour les temps longs, cette corrélation se comporte comme  $t^{-1}\sqrt{\ln t}$ . À température finie, on a :

$$\langle S^+(0, t) S^-(0, 0) \rangle_a \propto \frac{\pi T}{\sinh \pi T t} \sqrt{\ln(t/a)}.$$

Utilisant la formule (3.5), cela conduit à une correction logarithmique [114, 115] pour le temps de relaxation  $T_1$ , valable à basse température, lorsque les corrections logarithmiques ne sont plus négligeables :

$$\frac{1}{T_1} \propto T^0 \sqrt{\ln T}.$$

Ce comportement est reporté en pointillés sur la figure 3.3, et on constate un accord plus que partiel entre la théorie et l'expérience. Récemment, une amélioration notable de l'interpolation des données de Takigawa a été obtenue par Barzykin [11]. Il a calculé les corrélations de spin dans la chaîne de spins 1/2 à l'ordre de deux boucles. À cet ordre, la fonction  $\beta$  de l'opérateur marginal est  $\beta(g) = -2\pi(g^2 + g^3/2)$ . On en déduit la forme de la partie alternée des autocorrélations de spin dans le temps à température finie :

$$\langle \mathbf{S}(t) \mathbf{S}(0) \rangle_T \propto \frac{\pi T}{\sinh(\pi T t)} \left[ \ln \frac{\Lambda}{T} + \frac{1}{2} \ln \ln \frac{\Lambda}{T} \right]^{1/2},$$

avec  $\Lambda = 1/a$  le cut-off ultraviolet. On en déduit le taux de relaxation longitudinal  $1/T_1$  :

$$\frac{1}{T_1} \propto \sqrt{\ln \frac{\Lambda}{T} + \frac{1}{2} \ln \ln \frac{\Lambda}{T}}.$$

La figure 3.4 reproduit la courbe de Barzykin [11] et les données expérimentales de Takigawa. On constate que l'interpolation est bien meilleure que par le  $\sqrt{\ln T}$  de Sachdev.

### 3.3 Théorie critique de la chaîne ouverte

#### 3.3.1 Théorie critique au bord et invariance conforme

En toute généralité, les fonctions de corrélation d'observables d'une théorie critique dans le volume d'un système de taille infinie et qui sont en lois de puissances le demeurent lorsque les

mesures des observables sont prises près d'un bord. En revanche Cardy [23, 24, 25] a prouvé que les exposants (dits de bord) des fonctions de corrélation diffèrent en général des exposants dans le volume. Dans notre cas, nous sommes intéressés à calculer les autocorrélations dans le temps d'un spin appartenant à une chaîne de spins  $s=1/2$  et qui est voisin immédiat d'une impureté. En principe, ces exposants critiques doivent pouvoir être obtenus de la théorie conforme avec bord associée à la partie critique de la chaîne avec des règles de fusion (formule de Verlinde spécifique) différant des règles de fusion de la théorie dans le volume. Nous n'emprunterons toutefois pas ce chemin, trop formel pour notre objectif (qui est de calculer le  $T_1$ ), et qui ne nous aidera guère mieux dans le calcul des corrections logarithmiques. De plus le calcul pédestre que nous allons mener nous permettra de comprendre explicitement comment disparaît l'une des deux symétries chirales de la théorie en volume, induite par la perte de l'invariance par translation. Enfin, nous calculerons non seulement les autocorrélations temporelles au bord de la chaîne mais également les fonctions de corrélation en deux points quelconques de la chaîne.

### 3.3.2 Bosonisation et condition au bord

La bosonisation de la chaîne de spins  $s=1/2$  ne pose pas de difficulté particulière qui n'ait déjà été soulevée dans la théorie en volume. Son action s'écrit donc (confère 1.7)

$$\mathcal{H} = c \int_0^\infty dx [J_L^2 + J_R^2] - g \int_0^\infty dx \cos \sqrt{16\pi K} \phi. \quad (3.10)$$

Naturellement, la première des questions à nous poser est celle de la condition au bord. D'une condition de Dirichlet à une condition de type Neumann, en passant par tous les cas mixtes, l'éventail des possibilités est large et peut différer radicalement selon qu'elle est posée sur les champs fermionique ou les champs bosoniques.

Si l'on suppose que la condition est de type Dirichlet pour le champ  $\phi$ , il prend une valeur fixée en  $x = 0$ , position de l'impureté. Faisant alors appel à l'invariance par rotation de la chaîne, nous demandons que l'aimantation du spin de bord soit nulle  $\langle S^z(0, t) \rangle = 0$ . Et, utilisant la forme bosonisée de l'opérateur de spin  $S^z(x, t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_x \phi(x, t) + \frac{(-1)^x}{\pi \alpha} \cos \sqrt{4\pi} \phi(x, t)$ , il est équivalent de demander que  $\langle \cos(\sqrt{4\pi K} \phi(0, t)) \rangle = 0$ , soit par exemple  $\phi(0, t) = \sqrt{\frac{\pi}{16K}}$ , ou encore  $\phi_L(0, t) + \phi_R(0, t) = \sqrt{\frac{\pi}{16K}}$ . Utilisant la chiralité respective des champs  $\phi_L$  et  $\phi_R$ , la condition est encore équivalente à

$$\phi_L(-x, t) + \phi_R(x, t) = \sqrt{\frac{\pi}{16K}},$$

pour tout  $x$  positif. Il est donc tentant d'utiliser la relation  $\phi_R(x, t) = -\phi_L(-x, t) + \sqrt{\frac{\pi}{16K}}$  pour se passer des champs de chiralité droite au prix modique du prolongement analytique des champs de chiralité gauche au demi-plan des positions négatives. L'opération se représente élégamment (merci Vivien) par le schéma 3.5.

Les champs bosoniques de la théorie en volume s'expriment immédiatement en fonction du champ chiral rescapé :

$$\phi(x, t) = \phi_L(x, t) - \phi_L(-x, t) + \sqrt{\frac{\pi}{16K}}, \quad \tilde{\phi}(x, t) = \phi_L(x, t) + \phi_L(-x, t) - \sqrt{\frac{\pi}{16K}}.$$

Le hamiltonien de départ (3.10) se réécrit comme

$$\mathcal{H} = \frac{c}{2} \int_{-\infty}^\infty dx [J_L^2 + J_R^2] - \frac{g}{2} \int_{-\infty}^\infty dx \cos \sqrt{16\pi K} \phi.$$

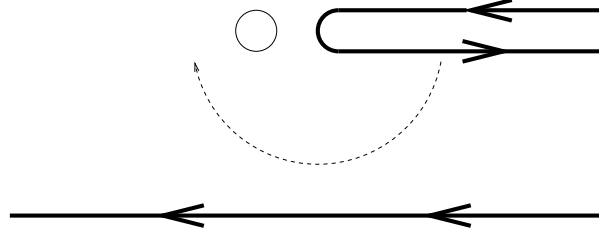


FIG. 3.5 – De la chaîne ouverte à une théorie chirale dans le volume.

Ce faisant, on a utilisé le fait que  $J_R(x, t) = J_L(-x, t)$ , pour l'action libre et

$$\begin{aligned}
 \cos \sqrt{16\pi K} \phi(-x, t) &= \cos \sqrt{16\pi K} \left( \phi_L(-x, t) - \phi_L(x, t) + \sqrt{\frac{\pi}{16K}} \right) \\
 &= \cos \sqrt{16\pi K} \left( \phi_L(x, t) - \phi_L(-x, t) - \sqrt{\frac{\pi}{16K}} \right) \\
 &= \cos \sqrt{16\pi K} \left( \phi_L(x, t) - \phi_L(-x, t) + \sqrt{\frac{\pi}{16K}} \right) \\
 &= \cos \sqrt{16\pi K} \phi(x, t) ,
 \end{aligned}$$

pour la perturbation. On en déduit que la nouvelle célérité est divisée par 2, ainsi que la constante de couplage des termes Umklapp. En revanche, le rayon de compactification est inchangé.

### 3.3.3 Fonctions de corrélation critiques

Pour des opérateurs quadratiques dans le champs  $\phi$ , la très classique technique des images électrostatiques s'applique parfaitement. Dans le cas contraire, la méthode n'est plus applicable et un calcul explicite s'impose. La fonction de corrélation  $\mathcal{C}(x_1, x_2, t) = \langle S^z(x_1, t) S^z(x_2, t) \rangle_u$  peut donc seule en bénéficier :

$$\mathcal{C}(x_1, x_2, t)_{\text{bord}} = \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \mathcal{C}(\varepsilon_1 x_1, \varepsilon_2 x_2, t)_{\text{volume}} .$$

Pour les autres, plusieurs subtilités, qu'on ne rencontre pas dans la théorie en volume, se présentent. Je donne ici l'exemple de la partie alternée de la fonction  $\langle S^z(x_1, t) S^z(x_2, t) \rangle_a$ .

$$\begin{aligned}
 \langle S^z(x_1, 0) S^z(x_2, t) \rangle_a &\propto (-1)^{x_1 - x_2} \langle \cos(\sqrt{4\pi K} \phi(x_1, 0)) \cos(\sqrt{4\pi K} \phi(x_2, t)) \rangle \\
 &\propto (-1)^{x_1 - x_2} \langle \left( e^{\sqrt{4\pi K} i (\phi_L(x_1, 0) - \phi_L(-x_1, 0) + \sqrt{\frac{\pi}{16K}})} + e^{-\sqrt{4\pi K} i (\phi_L(x_1, 0) - \phi_L(-x_1, 0) + \sqrt{\frac{\pi}{16K}})} \right) \\
 &\quad \times \left( e^{\sqrt{4\pi K} i (\phi_L(x_2, t) - \phi_L(-x_2, t) + \sqrt{\frac{\pi}{16K}})} + e^{-\sqrt{4\pi K} i (\phi_L(x_2, t) - \phi_L(-x_2, t) + \sqrt{\frac{\pi}{16K}})} \right) \rangle \\
 &\propto (-1)^{x_1 - x_2} \langle e^{i\pi} e^{\sqrt{4\pi K} i (\phi_L(x_1, 0) - \phi_L(-x_1, 0))} e^{\sqrt{4\pi K} i (\phi_L(x_2, t) - \phi_L(-x_2, t))} \\
 &\quad + e^{-i\pi} e^{\sqrt{4\pi K} i (\phi_L(x_1, 0) - \phi_L(-x_1, 0))} e^{-\sqrt{4\pi K} i (\phi_L(x_2, t) - \phi_L(-x_2, t))} \rangle \\
 &\quad + (-1)^{x_1 - x_2} \langle e^{\sqrt{4\pi K} i (\phi_L(x_1, 0) - \phi_L(-x_1, 0))} e^{-\sqrt{4\pi K} i (\phi_L(x_2, t) - \phi_L(-x_2, t))} \\
 &\quad + e^{\sqrt{4\pi K} i (\phi_L(x_1, 0) - \phi_L(-x_1, 0))} e^{\sqrt{4\pi K} i (\phi_L(x_2, t) - \phi_L(-x_2, t))} \rangle .
 \end{aligned}$$

Contrairement au calcul de la même quantité pour la chaîne XXZ standard, les termes non-croisés qui apparaissent sur l'antépénultième ligne et celle qui la précède, et qui ne satisfont

pas la condition de neutralité de charge sur  $\phi$  ont une contribution non-nulle. Il est essentiel de remarquer l'importance de la constante issue de la condition de Dirichlet qui introduit un facteur global  $e^{i\pi} = -1$  devant ces termes non-croisés. Commençons par calculer la seconde moyenne du dernier membre de droite (termes croisés). On note

$$A = \sqrt{4\pi K} i \left( \phi_L(x_1, 0) - \phi_L(-x_1, 0) + \sqrt{\frac{\pi}{16K}} \right),$$

$$B = \sqrt{4\pi K} i \left( \phi_L(x_2, t) - \phi_L(-x_2, t) + \sqrt{\frac{\pi}{16K}} \right).$$

Pour calculer la moyenne d'un produit d'exponentielles, on utilise le résultat standard (pour toute action libre gaussienne) :  $e^A :: e^B := e^{\langle AB + \frac{1}{2}(A^2 + B^2) \rangle} : e^{A+B} :$ . Pour le premier produit, on doit donc effectuer :

$$\begin{aligned} \langle AB \rangle &= 4\pi K \langle (\phi_L(x_1, 0) - \phi_L(-x_1, 0))(\phi_L(x_2, t) - \phi_L(-x_2, t)) \rangle \\ &= 4\pi K (G(x_1, x_2 + t) + G(x_1, -x_2 + t) - G(x_1, -x_2 + t) - G(-x_1, x_2 + t)) , \\ \langle A^2 \rangle &= -4\pi K \langle (\phi_L(x_1, 0) - \phi_L(-x_1, 0))^2 \rangle \\ &= -4\pi K (G(x_1, x_1) + G(-x_1, -x_1) - G(x_1, -x_1) - G(-x_1, x_1)) , \\ \langle B^2 \rangle &= -4\pi K \langle (\phi_L(x_2, t) - \phi_L(-x_2, t))^2 \rangle \\ &= -4\pi K (G(x_2 + t, x_2 + t) + G(-x_2 + t, -x_2 + t) \\ &\quad - G(x_2 + t, -x_2 + t) - G(-x_2 + t, x_2 + t)) . \end{aligned}$$

$G$  désigne la fonction de Green chirale à gauche  $G(x_1 + t_1, x_2 + t_2) = \langle \phi_L(x_1, t_1) \phi_L(x_2, t_2) \rangle$  qui est non-connexe et qui vérifie

$$\begin{aligned} G(x_1 + t_1, x_2 + t_2) &- \frac{1}{2} [G(x_1 + t_1, x_1 + t_1) + G(x_2 + t_2, x_2 + t_2)] \\ &= \frac{1}{4\pi} \ln \left[ \frac{\pi T}{\sinh[\pi T(x_2 - x_1 + t_2 - t_1)]} \right] . \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \langle AB + \frac{A^2 + B^2}{2} \rangle &= K \ln \left[ \frac{\text{sh}\pi T(-x_2 - x_1 + t) \text{sh}\pi T(x_2 + x_1 + t)}{\text{sh}\pi T(x_2 - x_1 + t) \text{sh}\pi T(-x_2 + x_1 + t)} \right] \\ &\quad - K \ln \left[ \frac{\text{sh}(\pi T \text{sh}(2x_1)) \text{sh}(\pi T \text{sh}(2x_2))}{(\pi T)^2} \right] . \end{aligned}$$

Passant à l'exponentielle, on obtient la première partie de la fonction de corrélation  $\langle S^z S^z \rangle_a$  donnée dans l'appendice A. Le calcul des termes croisés est analogue, à la seule différence que  $AB$  est transformé en  $-AB$ , ce qui conduit à une inversion de l'argument du premier logarithme de l'expression ci-dessus. Les autres fonctions de corrélation se calculent de la même manière.

Si le calcul de  $\langle S^+(x_1, t) S^-(x_2, t) \rangle_u$  est assez pénible, il ne présente pas de difficulté supplémentaire. Les résultats sont rassemblés dans l'appendice A.

On obtient les autocorrélations en temps du spin de bord en prenant  $x_1 = x_2 = a$ . Si la démarche semble naturelle, elle demande réflexion puisque cette particularisation intervient

après le passage à la limite continue. On obtient finalement

$$\begin{aligned}\langle S^z(t) S^z(0) \rangle &\propto \left( \frac{\pi T}{\sinh \pi T t} \right)^2 + \left( \frac{\pi T}{\sinh \pi T t} \right)^2, \\ \langle S^+(t) S^-(0) \rangle &\propto \left( \frac{\pi T}{\sinh \pi T t} \right)^{1/K} + \left( \frac{\pi T}{\sinh \pi T t} \right)^{1/K}.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Dans ces relations, nous avons omis les préfacteurs ; le premier terme est la partie uniforme de la corrélation alors que le second est sa partie alternée.

### 3.3.4 Calcul du taux de relaxation longitudinal

Le comportement en température du taux de relaxation longitudinal se déduit à nouveau de la relation (3.5). Dans le cas de la chaîne anisotrope, on obtient

$$\frac{1}{T_1} \propto T + T^{1/K-1}.$$

Au point isotrope  $1/T_1 \propto T$ , ce qui constitue un résultat très différent du cas d'une impureté couplée au volume de la chaîne. C'est un résultat qui devrait pouvoir être observé expérimentalement.

### 3.3.5 Correction logarithmique au taux de relaxation longitudinal

Se pose encore le problème du calcul des corrections logarithmiques au point isotrope pour la chaîne ouverte. Comme on va le voir, la fonction  $\beta(g)$  ne dépend pas des conditions aux limites et s'identifie à la fonction  $\beta(g)$  du volume. Le calcul des dimensions anormales des champs est plus délicat. On attend de ces dimensions qu'elles soient modifiées à l'approche du bord. Il ne fait pas de doute que la technique d'OPE peut être adaptée afin d'obtenir la correction en  $g$  aux dimensions anormales. Toutefois dans notre cas le calcul n'est guère plus efficace que le recours aux anciennes méthodes de développement perturbatif. De plus, comme on va le voir, le calcul n'est pas moins éloquent que la généralisation des techniques d'OPE (ces dernières nécessitent de prendre en compte simultanément le produit à courte distance de trois opérateurs : l'opérateur situé sur le bord, l'opérateur marginal et son image.)

Le lagrangien du modèle microscopique s'écrit :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\odot + x \int_0^\infty dx (\partial_\mu \phi)^2 + y \int_0^\infty dx \cos \sqrt{16\pi} \phi,$$

avec  $\mathcal{L}_\odot = \int_0^\infty dx (\partial_\mu \phi)^2$ .

#### Fonction $\beta(y)$

La fonction  $\beta(y)$  est *la même* que celle donnée par le flot dans le volume, c'est-à-dire celui de Kosterlitz-Thouless. La raison de cela est qu'elle est déterminée par le comportement à *courte distance* des opérateurs marginaux dans *tout le volume* de la chaîne ouverte. Le bord étant de mesure nulle, il n'y a pas de différence notable avec la chaîne infinie.

### Dimension anormale $\gamma_B(y)$

Il n'en va pas de même de la dimension anormale des opérateurs. Nous prendrons comme exemple dans la suite la fonction de corrélation  $\langle S^z(0, t_1) S^z(0, 0) \rangle_u$ . Sa dimension anormale de bord est donnée à une boucle par le produit à courte distance de l'opérateur marginal, avec l'opérateur de spins  $S^z(0, t_1) S^z(0, 0)$ , que l'on situe donc, lui, sur le bord (éventuellement à des temps différents).

Utilisant la forme bosonisée de  $S^z(x, t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_x \phi(x, t) + \frac{(-1)^x}{\pi \alpha} \cos \sqrt{4\pi} \phi(x, t)$ , nous allons procéder au calcul perturbatif nous permettant d'accéder à la dimension anormale de bord de cet opérateur  $\mathcal{O} = \frac{1}{\pi} \partial_x \phi(0, t_1) \partial_x \phi(0, 0)$ . On souhaite développer dans les couplages marginaux  $x$  et  $y$  la valeur moyenne de  $\mathcal{O}$  prise pour le lagrangien

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\odot + \frac{x}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{y}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \cos \sqrt{16\pi} \phi,$$

écrite après que l'on a déplié la chaîne. La valeur moyenne a pour représentation fonctionnelle

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \mathcal{O} e^{-S_\odot - x/2 \int (\partial_\mu \phi)^2 - y/2 \int \cos \sqrt{16\pi} \phi}}{\int \mathcal{D}\phi e^{-S_\odot - x/2 \int (\partial_\mu \phi)^2 - y/2 \int \cos \sqrt{16\pi} \phi}},$$

où les intégrations sont entendues désormais sur toute la droite réelle  $\mathbb{R}$ . Puis, la moyenne se développe au premier ordre des couplages marginaux en

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \langle \mathcal{O} \rangle_\odot - \frac{x}{2} \langle \mathcal{O} \int (\partial_\mu \phi)^2 \rangle_\odot - \frac{y}{2} \langle \mathcal{O} \int \cos \sqrt{16\pi} \phi \rangle_\odot + \frac{y}{2} \langle \mathcal{O} \rangle_\odot \langle \int \cos \sqrt{16\pi} \phi \rangle_\odot.$$

On remarque d'abord que, pour cette fonction de corrélation,  $\langle \mathcal{O} \int (\partial_\mu \phi)^2 \rangle_\odot = 0$ . Il en sera de même pour  $\langle S^z(0, t_1) S^z(0, 0) \rangle_a$ , au contraire de  $\langle S^+(0, t_1) S^-(0, 0) \rangle$ . Dans la suite on effectue la transformation  $\phi \rightarrow \phi/\sqrt{2}$ , et on passe en temps imaginaire (comme le laissent supposer les conventions euclidiennes adoptées dans la moyenne fonctionnelle ci-dessus), de façon à utiliser les notations complexes. On a

$$\begin{aligned} \langle S^z(z_1) S^z(z_2) \rangle_u &= \langle S^z(z_1) S^z(z_2) \rangle_\odot^u - \frac{y}{2} \left( \langle S^z(z_1) S^z(z_2) \int \cos(\sqrt{8\pi} \phi(z)) \rangle_\odot^u \right. \\ &\quad \left. - \langle S^z(z_1) S^z(z_2) \rangle_\odot^u \langle \int \cos(\sqrt{8\pi} \phi(z)) \rangle_\odot \right) \\ &= \langle S^z(z_1) S^z(z_2) \rangle_\odot^u - \frac{y}{2} \langle : S^z(z_1) S^z(z_2) : \int \cos(\sqrt{8\pi} \phi(z)) \rangle_\odot^u. \end{aligned}$$

Or  $\langle \phi(z_1) \phi(z_2) \cos(\sqrt{8\pi} \phi(z)) \rangle_\odot = -8\pi \langle \phi(z_1) \phi(z) \rangle_\odot \langle \phi(z_2) \phi(z) \rangle_\odot \langle \cos(\sqrt{8\pi} \phi(z)) \rangle_\odot$ , donc

$$\langle : S^z(z_1) S^z(z_2) : \int \cos(\sqrt{8\pi} \phi(z)) \rangle_\odot^u = -8\pi \int \partial_{z_1} \langle \phi(z_1) \phi(z) \rangle_\odot \partial_{z_2} \langle \phi(z_2) \phi(z) \rangle_\odot \langle \cos(\sqrt{8\pi} \phi(z)) \rangle_\odot.$$

Puis

$$\partial_{x_1} \langle \phi(z_1) \phi(z) \rangle_\odot = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{\bar{z} + z_1} + \frac{1}{z + \bar{z}_1} + \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_1} + \frac{1}{z - z_1} \right],$$

que l'on particularise à  $z_1 = it_1$  et  $z_2 = 0$ , de sorte que

$$\partial_{x_1} \langle \phi(z_1) \phi(z) \rangle_\odot \partial_{x_2} \langle \phi(z_2) \phi(z) \rangle_\odot = \frac{1}{4\pi^2} \frac{(z + \bar{z})^2}{|z - it_1|^2 |z|^2}.$$

Alors à l'ordre  $O(y^0)$ , on obtient

$$\langle : S^z(z_1) S^z(z_2) : \int \cos(\sqrt{8\pi}\phi(z)) \rangle_{\odot}^u \simeq -\frac{1}{\pi^2} \int dx dt \frac{1}{|z - it_1|^2 |z|^2}.$$

On doit donc évaluer cette dernière intégrale, qui possède deux singularités en  $z = 0$  et  $z = it_1$ . Ces deux singularités sont images l'une de l'autre. Lorsque l'on opère le produit à courte distance de la fonction de corrélation et de l'opérateur marginal, ce dernier acquiert le statut d'*opérateur bilocal*. Le produit à courte distance consiste donc à faire confluer trois points et non deux pour une théorie en volume. On montre que

$$\int dx dt \frac{1}{|z - it_1|^2 |z|^2} \sim \frac{4\pi}{t_1^2} \ln \frac{t_1}{a}.$$

Finalement, on obtient

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \langle \mathcal{O} \rangle_{\odot} \left( 1 + 4\pi y \ln \frac{t_1}{a} \right).$$

La dimension anormale au bord de  $\partial_x \phi(x, t)$  est donc

$$\gamma_B(g) = 1 - 2\pi g.$$

### Groupe de renormalisation

La fonction de corrélation  $\mathcal{G}(t) = \langle \mathcal{O} \rangle$  satisfait l'équation de Callan-Symanzik

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \ln t} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + 2\gamma_B(g) \right] \mathcal{G}(t, g) = 0. \quad (3.12)$$

La solution de cette équation (3.12) est :

$$G(t) \sim \frac{1}{t^2} (\ln t)^2 \xrightarrow{T \gg 0} \left( \frac{\pi T}{\sinh \pi T t} \right)^2 (\ln t)^2. \quad (3.13)$$

Bien que ce calcul soit le plus simple de ceux à effectuer sur les quatre fonctions de corrélation, aucune difficulté supplémentaire n'émerge du calcul des trois autres. On vérifie en particulier que le dernier résultat est identique à celui de  $\langle S^+(0, 0) S^-(0, t_1) \rangle_u$ , propriété que l'on attend de l'invariance par rotation de la chaîne. En fait on obtient la même dimension anormale de bord pour les quatre fonctions de corrélation.

Cela implique que le taux de relaxation  $1/T_1$  subit également une correction :

$$1/T_1 \propto T \left( \ln \frac{T}{\Lambda} \right)^2.$$

Dans la mesure où l'on connaît la fonction  $\beta$  à deux boucles, et qu'à cet ordre seul compte la correction à une boucle de la dimension anormale  $\gamma(g)$ , et suivant Barzykin, on peut obtenir davantage de précision avec

$$1/T_1 \propto T \left( \ln \frac{T}{\Lambda} + \frac{1}{2} \ln \ln \frac{T}{\Lambda} \right)^2.$$

### 3.3.6 Influence du champ magnétique

L'application d'un champ magnétique (ne serait-ce que celui utilisé en RMN) n'a pas en général de conséquence majeure sur la physique de la chaîne de spins car l'énergie Zeeman mise en jeu est dans la plupart des cas très inférieure à celle de l'échange entre spins. Toutefois, un certain nombre de conséquences secondaires doivent être prises compte.

Le problème de la chaîne de spins  $s=1/2$  XXZ dans le volume et en champ magnétique est intégrable. Toutefois le rayon de compactification des bosons  $K(\Delta, h)$  est donné par une équation intégrale et on ne connaît pas son expression exacte. On en déduit cependant que la dépendance de  $K(\Delta, h)$  en  $h$  est continue. Aussi, pour des valeurs de champ raisonnables, le rayon de compactification ne dévie que peu du cas en champ nul.

Un effet notable du champ magnétique est d'introduire de l'incommensurabilité. Les termes Umklapp ne contribuent plus et les corrections logarithmiques n'ont plus lieu d'être.

Dans le cas de la chaîne ouverte, il n'y a aucune raison de penser que  $K(\Delta, h)$  soit modifié et le raisonnement ci-dessus tient toujours. En conséquence on s'attend à ce que le temps de relaxation  $T_1$  dépende continûment de  $h$  et en dépende faiblement pour des valeurs du champ raisonnables. De même apparaît de l'incommensurabilité dans les fonctions de corrélation. On s'attend encore à ce que les corrections logarithmiques disparaissent.

Toutefois, avec la brisure de l'invariance par rotation provoquée par la présence du champ magnétique, de nouveaux opérateurs sont autorisés et peuvent émerger dans la construction de théorie des champs de la chaîne ouverte. Deux nouveaux opérateurs marginaux  $\partial_x \phi_L(0, t)$  et  $\exp(i\sqrt{2\pi}\phi_L(0, t))$  sont susceptibles de jouer un rôle, et d'induire de nouvelles corrections logarithmiques. Du fait de leur caractère marginal, ils ne modifient pas les exposants critiques déjà calculés (seule la modification du rayon de compactification peut avoir une influence).

Faisant abstraction de nouvelles corrections logarithmiques potentielles, nous avons calculé les fonctions de corrélation en champ magnétique non-nul et les avons rassemblées dans l'appendice A. Ces formules généralisent celles obtenues dans [33] pour la théorie en volume. Le champ magnétique, dirigé selon Oz, est d'amplitude  $h$ . On doit donc inclure dans le hamiltonien un terme Zeeman  $\sum_n h \cdot S_n^z$ . Le champ magnétique décale l'énergie de Fermi de sorte que les nouveaux moments de Fermi sont

$$k_F a = \pm \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{h}{J}\right) \right).$$

Ce que l'on peut encore interpréter comme un décalage dans le champ  $\phi$  qui dépend de l'aimantation  $m$ , qui elle-même mesure l'écart au demi-remplissage.

## 3.4 Le liquide de Luttinger

Grâce aux nanotubes, il est aujourd'hui possible de réaliser expérimentalement un gaz quantique d'électrons unidimensionnel. Les nanotubes sont des tubes de carbones très fin (quelques nanomètres). Il est relativement simple de montrer (pour une discussion détaillée voir [83]) que la quantification des modes transverses d'un tube conduit à deux bandes électroniques unidimensionnelles. Ce que l'on modélise par le degré de liberté de spin du modèle de Hubbard que l'on a évoqué dans les rappels du chapitre 1.

Les techniques que l'on a développées dans ce présent chapitre sont donc susceptibles de s'appliquer à de tels systèmes. Elles peuvent nous servir à étudier l'extrémité d'un fil quantique

cassé, comme par exemple un conducteur organique unidimensionnel. Avant de s'engager dans cette voie, rappelons ce qu'est le temps de relaxation pour le liquide de Luttinger et quelle est sa valeur pour la relaxation dans le volume d'un système unidimensionnel.

### 3.4.1 Temps de relaxation dans le volume

On note à nouveau  $U$  la constante de couplage de l'interaction de Hubbard (voir chapitre 1). Nous sommes intéressés par le cas répulsif  $U > 0$  (interaction de coulomb écrantée entre les électrons), c'est-à-dire la phase onde de densité de spin. Le cas attractif  $U < 0$ , qui correspond à la phase supraconductrice, ne nous intéresse pas ici car il correspond à une théorie non-critique. Le hamiltonien bosonisé qui décrit la *physique de basse énergie* des excitations du système *isotrope* dans le secteur *onde de densité de spin* est

$$\mathcal{H} = \frac{c_c}{2} \int dx \left[ K_c \Pi_c^2 + \frac{1}{K_c} (\nabla \phi_c)^2 \right] + \delta(4k_F - 2\pi) \frac{g}{(2\pi\alpha)^2} \int dx \cos(\sqrt{8\pi}\phi_c) \\ + \frac{v_F}{2} \int dx [\Pi_s^2 + (\nabla \phi_s)^2] .$$

Les opérateurs marginalement non-pertinents dans le secteur de spin n'y sont pas pris en compte, car on ne s'intéressera ici qu'au comportement d'échelle des fonctions de corrélation. Dans ce liquide de Luttinger, ce qui fait office d'opérateur de spin est l'opérateur de densité de spin  $\mathcal{O}_{\text{ODS}} = c_{j\alpha}^\dagger \sigma_{\alpha\beta}^z c_{j\eta} = n_{j\uparrow} - n_{j\downarrow}$ . Le taux  $1/T_1$  est défini par

$$\frac{1}{T_1} \propto \lim_{\omega \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} \langle \mathcal{O}_{\text{ODS}}(0, t) \cdot \mathcal{O}_{\text{ODS}}(0, 0) \rangle_T ,$$

qui généralise la formule (3.5) à un liquide de Luttinger. Ce taux de relaxation est une sonde des fluctuations de spin du système.

L'opérateur onde de densité de spin  $\mathcal{O}_{\text{ODS}}$  peut être bosonisé en

$$\mathcal{O}_{\text{ODS}} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \nabla \phi_s - \frac{2}{\pi\alpha} \sin(\sqrt{2\pi}\phi_c + 2k_F j) \sin(\sqrt{2\pi}\phi_s) . \quad (3.14)$$

Supposons d'abord que le système est au demi-remplissage ( $k_F = \pi/2$ ). On a vu dans ce cas que le secteur de charge acquiert un gap. La valeur moyenne de  $\phi_c$  est telle que  $\cos(\sqrt{8\pi}\phi_c)$  soit minimum. De sorte que l'opérateur onde de densité de spins prend la forme effective

$$\mathcal{O}_{\text{ODS}} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \nabla \phi_s - (-1)^j \frac{2}{\pi\alpha} \sin(\sqrt{2\pi}\phi_s) .$$

On reconnaît l'opérateur de la chaîne de spin  $2S^z$  (1.8) à condition de substituer  $\sqrt{2}(\phi - \sqrt{\pi}/4)$  à  $\phi_c$ . Le facteur  $\sqrt{2}$  était attendu car la bosonisation s'effectue ici directement au point fixe isotrope. Dans ce cas, nous sommes ramenés à la chaîne de spins  $s=1/2$  et  $\langle \mathcal{O}_{\text{ODS}}(t) \mathcal{O}_{\text{ODS}}(0) \rangle \propto \pi T / \sinh(\pi T t)$  (la partie alternée domine asymptotiquement).

Supposons maintenant que le système n'est pas au demi-remplissage ( $k_F \neq \pi/2$ ). Dans ce cas la partie alternée de la fonction de corrélation est calculée en utilisant le découplage des secteurs de charge et de spin et

$$\langle \mathcal{O}_{\text{ODS}}(t) \mathcal{O}_{\text{ODS}}(0) \rangle \propto \langle \sin(\sqrt{2\pi}\phi_c(t)) \sin(\sqrt{2\pi}\phi_c(0)) \rangle \langle \sin(\sqrt{2\pi}\phi_s(t)) \sin(\sqrt{2\pi}\phi_s(0)) \rangle \\ \propto \left[ \frac{\pi T}{\sinh \pi T t} \right]^{1+K_c} .$$

Cette contribution alternée à la fonction de corrélation est encore dominante car on a toujours  $K_c < 1$ . Dans le cas contraire le secteur de charge aurait un gap et l'on serait ramené au premier des deux cas envisagés (demi-remplissage).

### 3.4.2 Relaxation au bord du liquide de Luttinger

Dans ce qui suit on suppose que l'on a effectué le changement de variables  $\phi_c \mapsto \sqrt{K_c}\phi_c$ , de sorte que le rayon de compactification apparaît dans l'expression des fonctions de corrélation et non dans l'action. On va supposer (raisonnablement dans le cas d'un fil quantique sectionné) que les densités électroniques  $n_\uparrow$  et  $n_\downarrow$  s'annulent toutes les deux au bord. Il est équivalent de demander que la densité électronique totale  $n_\uparrow + n_\downarrow$  et l'opérateur de spin  $S^z$  prennent une valeur moyenne nulle à l'extrémité du fil. On a vu qu'elle est l'expression bosonisée 3.14 de l'opérateur onde de densité de spin. Voyons quelle est celle de l'opérateur onde de densité de charge :

$$\mathcal{O}_{\text{ODC}} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\nabla\phi_c + \frac{2}{\pi\alpha}\cos(\sqrt{2\pi}\phi_c + 2k_Fj)\cos(\sqrt{2\pi}\phi_s). \quad (3.15)$$

On obtient modulo les rayons de compactification respectifs des deux bosons :

$$\phi_c(0, t) = \sqrt{\frac{\pi}{8K_c}}, \quad \phi_s(0, t) = 0.$$

En dépliant le demi-fil, il en résulte que

$$\phi_{cR}(x, t) = -\phi_{cL}(x, t) + \sqrt{\frac{\pi}{8K_c}}, \quad \phi_{sR}(x, t) = -\phi_{sL}(x, t).$$

La fonction de corrélation  $\langle \mathcal{O}_{\text{ODS}}(t)\mathcal{O}_{\text{ODS}}(0) \rangle$  se scinde en deux fonctions de corrélations, une pour chaque secteur :

$$\langle \sin(\sqrt{2\pi}\phi_c(t)) \sin(\sqrt{2\pi}\phi_c(0)) \rangle_{\phi_c(0,t)=\sqrt{\frac{\pi}{8K_c}}} \times \langle \sin(\sqrt{2\pi}\phi_s(t)) \sin(\sqrt{2\pi}\phi_s(0)) \rangle_{\phi_s(0,t)=0}.$$

Compte tenu de la condition au bord dans le secteur de spin, il apparaît que la fonction de corrélation de spins est exactement la fonction de corrélation de spins alternée  $\langle S^z(0, t)S^z(0, 0) \rangle$  que nous avons calculée dans la sous-section 3.3.3 pour la chaîne de spins ouverte. Donc le secteur de spin a pour contribution à la fonction de corrélation complète  $(\pi T)^2/\sinh^2(\pi T)$ . Occupons-nous maintenant du secteur de charge.

Supposons dans un premier temps que nous sommes au demi-remplissage ( $k_F = \pi/2$ ). Alors le secteur possède un gap. Le champ  $\phi_c$  prend une valeur moyenne semi-classique, qui se trouve être égale à sa condition au bord. La fonction de corrélation dans le secteur de charge est alors constante.

Supposons ensuite que nous ne sommes pas au demi-remplissage ( $k_F \neq \pi/2$ ). Alors le secteur de charge est sans masse et, compte tenu de la condition au bord, on doit calculer la fonction de corrélation

$$\langle \cos(\sqrt{2\pi}\phi_c(t)) \cos(\sqrt{2\pi}\phi_c(0)) \rangle.$$

Le calcul est formellement identique à celui de la partie alternée de  $\langle S^z(0, t)S^z(0, 0) \rangle$ , à un signe près (crucial). En reprenant le calcul détaillé dans 3.3.3 et l'expression donnée dans l'appendice

A, on obtient

$$\begin{aligned}
 [(\mathcal{O}_{\text{ODC}}(x_1, 0)\mathcal{O}_{\text{ODC}}(x_2, t))_a]_{\text{charge}} \sim & \left[ \frac{(\pi T)^2}{\text{sh}(2\pi T x_1)\text{sh}(2\pi T x_2)} \right]^{K_c} \times \\
 & \left\{ \left[ \frac{\text{sh}(\pi T(-x_2 - x_1 + t))\text{sh}(\pi T(x_2 + x_1 + t))}{\text{sh}(\pi T(x_2 - x_1 + t))\text{sh}(\pi T(-x_2 + x_1 + t))} \right]^{K_c} \right. \\
 & \left. + \left[ \frac{\text{sh}(\pi T(x_2 - x_1 + t))\text{sh}(\pi T(-x_2 + x_1 + t))}{\text{sh}(\pi T(-x_2 - x_1 + t))\text{sh}(\pi T(x_2 + x_1 + t))} \right]^{K_c} \right\} ,
 \end{aligned}$$

qui est valable dans tout le demi-fil quantique. Lorsque l'on approche du bord,  $x_1$  et  $x_2$  tendent vers  $a$ , et la fonction de corrélation tend vers une constante.

En résumé seul le secteur de spin apporte une contribution au temps de relaxation. Reprenant les résultats de la chaîne ouverte on obtient donc

$$\frac{1}{T_1} \propto T .$$

Le résultat est "super-universel" en ce sens qu'il ne dépend pas du rayon de compactification du secteur de charge  $K_c$ , dont l'universalité est en général limitée parce que sa valeur dépend du modèle physique précis.



## Deuxième partie

# Quelques systèmes mésoscopiques désordonnés en basse dimension



## Chapitre 4

# Des systèmes physiques décrits par des Fermions de Dirac

### 4.1 Modèles sur réseau et effet Hall quantique

#### 4.1.1 Les fondamentaux de l'effet Hall quantique entier

L'effet Hall classique décrit la physique d'un gaz d'électrons bidimensionnel soumis à un champ magnétique fort et orthogonal au plan des électrons, dans des conditions normales de température. La conductivité transverse se comporte de façon linéaire en  $(en_e)/B$  où  $B$  est l'intensité du champ magnétique et où  $n_e$  est la densité électronique. La conductivité longitudinale classique est simplement donnée par le modèle de Drude.

Pour espérer réaliser un équivalent quantique de ce système, on doit pouvoir constituer un gaz d'électrons bidimensionnel de taille mésoscopique et très dense (jusqu'à  $10^{13}$  électrons par  $\text{cm}^{-2}$ ). Un tel piège à électrons est réalisé soit dans les MOSFET (Transistor à effet de champ formé de semi-conducteurs métal-oxyde), soit dans une hétérostructure de semi-conducteurs (par exemple GaAs/ $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ ). Une déplétion de potentiel (de quelques dizaines d'Angström de largeur) se forme alors à l'interface des deux types de semi-conducteurs et les électrons y sont piégés. Leur densité est ajustée par la tension de grille dans le premier cas ou par la concentration du semi-conducteur dopé dans le second cas. Lorsque le champ magnétique est intense (supérieur généralement à 10 T), lorsque que l'on atteint de très basses températures (de 1 à 2 K) et enfin lorsque la taille du système est suffisamment petite pour que le régime atteint soit quantique, la conductivité transverse ne suit plus une loi linéaire. Des plateaux de conductivité transverse  $\sigma_{xy}$  se forment autour de la droite classique (confère figure 4.1 tirée de [104]).

Plus étonnante que la formation de ces plateaux, est la quantification très précise de la conductivité Hall qui, sur le  $n$ -ième plateau, prend la valeur  $\sigma_{xy} = n e^2/h$ , ne dépendant donc que des constantes universelles. Ce qui a donné lieu, peu de temps après la découverte du phénomène [134], à des applications en métrologie dans la définition de l'unité de champ magnétique. Les conductivité *et* résistivité longitudinales sont quasi-nulles dans le régime des plateaux. Ce qui révèle un régime sans dissipation. Au contraire, la conductivité longitudinale prend une valeur finie à la transition entre deux de ces plateaux.

Seule la prise en compte du désordre permet d'expliquer ces phénomènes. En fait, la formation des plateaux ne peut se produire qu'en présence du désordre. On considère généralement que les interactions ne jouent pas un rôle fondamental dans l'effet Hall quantique *entier*, même si

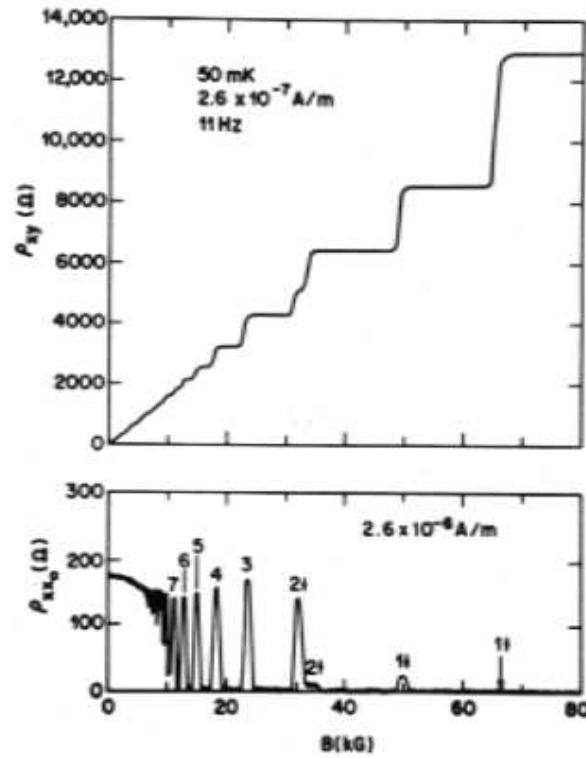


FIG. 4.1 – Résistivités transverse  $\rho_{xy}$  et longitudinale  $\rho_{xx}$  d'un échantillon Hall.

l'énergie de Coulomb est parfois de magnitude comparable au potentiel créé par le désordre.

C'est pourquoi on commence par décrire les états d'un électron dans un champ magnétique et qui se meut dans un plan. La physique de cet électron est décrite par le hamiltonien de Landau :

$$H = \frac{1}{2m^*} \left( -i\hbar \vec{\nabla} - e\vec{A} \right)^2 + V_{\text{imp}}$$

où  $m^*$  est la masse effective de l'électron,  $\vec{A}$  est le potentiel vecteur d'un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme et orthogonal à l'échantillon et  $V_{\text{imp}}$  est le potentiel scalaire créé par les impuretés. On choisit ici pour  $\vec{A}$  la jauge radiale :  $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \wedge \vec{r}$ . Lorsque  $V_{\text{imp}} = 0$ , c'est-à-dire dans le cas pur, les états propres de ce hamiltonien sont les fonctions d'ondes

$$\psi_{n,m}(r, \theta) = \sqrt{\frac{n!}{2\pi\ell^2 2^m (n + |m|)}} \left( \frac{r}{\ell} \right)^{|m|} L_n^{|m|} \left( \frac{r^2}{2\ell^2} \right) e^{-im\theta - r^2/(4\ell^2)},$$

d'énergie  $E_{m,n} = \hbar\omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right)$  et de moment orbital  $J_z = -m\hbar$ . Les fonctions  $L_n^m$  sont les polynômes de Laguerre.  $\omega_c = (eB)/m^*$  est la fréquence cyclotron, quantité d'interprétation classique, qui est proportionnelle à l'inverse de la période de l'orbite d'une particule classique dans le champ magnétique.  $\ell = \sqrt{\frac{\hbar}{m^*\omega_c}} = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$  est la *longueur magnétique*. Elle s'interprète comme le rayon de giration d'un électron dans le champ magnétique. Elle est expérimentalement de l'ordre d'une dizaine de nanomètres. Il est essentiel de remarquer que les niveaux d'énergie ne

dépendent pas du moment orbital.  $n$  est l'entier qui indexe les niveaux dit de Landau. Cela entraîne une grande dégénérescence de ces niveaux. Cette dégénérescence est d'autant plus grande que le champ magnétique est fort. Concrètement, il y a, dans un niveau de Landau, autant d'états que l'aire du système mesurée en unité de  $2\pi\ell^2$ .

Lorsque l'on introduit du désordre, les niveaux de Landau s'élargissent et peuvent se recouvrir légèrement. La majorité de ces nouveaux états sont localisés par le désordre. Un unique état étendu, voire quelques uns, perdure à l'énergie du niveau de Landau.

Nous allons maintenant constituer progressivement un liquide de Hall quantique. Grâce au principe de Pauli, nous remplissons les états des niveaux de Landau. Lorsque le potentiel chimique se trouve entre deux énergies de Landau, les électrons proches du niveau de Fermi occupent des états localisés. La conductivité longitudinale est nulle, et la conductivité transverse stagne sur un plateau. Lorsque l'on atteint un milieu de bande, un état étendu est occupé et la conductivité longitudinale prend une valeur finie, tandis que la conductivité transverse saute d'un plateau à l'autre. Au milieu du plateau, entre deux niveaux de Landau, la conductivité transverse retrouve sa valeur classique. Si, dans cette optique, on comprend bien le comportement de  $\sigma_{xx}$ , il convient pour mieux comprendre le comportement de  $\sigma_{xy}$  d'inclure dans la description les états dit de *bords*. Ceux-ci occupent aujourd'hui une place de choix dans la description de l'effet Hall quantique [59]. Nous n'en parlerons pas ici, car nous n'en aurons pas besoin.

Jusqu'à présent une description quantitative définitive de la transition entre deux plateaux n'a pas été obtenue. En particulier, on ne sait pas calculer les exposants critiques associés à cette transition. Sur des bases semi-analytiques [131, 56] ou numériques [27], on s'attend à ce que la longueur de corrélation dans le système diverge à la transition comme  $\xi(B) \propto (B - B_c)^{-\nu}$ , avec  $\nu \sim 7/3$ . Cela n'exclut pas que plusieurs descriptions analytiques [137, 79, 110, 150, 17] sont pressenties comme des descriptions correctes de la transition. Toutefois, elles ne permettent pas (modèle sigma non-linéaire), ou n'ont pas encore permis (identification de la théorie conforme sous-jacente), d'obtenir la valeur de cet exposant.

Lorsque que le désordre est plus faible et que l'on descend davantage en température, de nouveaux plateaux de conductivité se forment. Ils se situent entre les plateaux de l'effet Hall entier, et leur conductivité est une *fraction* de la conductivité élémentaire  $e^2/h$ . On parle alors d'effet Hall quantique fractionnaire (découvert par Tsui, Störmer et Gossard [132]). Afin de le comprendre, il est indispensable de considérer l'effet des interactions. Le désordre ne suffit plus à rendre compte de l'existence de ces plateaux. Dans la suite on abordera uniquement certaines problématiques de l'effet Hall *entier*.

#### 4.1.2 Approche semi-classique de la transition entre plateaux

Je vais maintenant décrire l'approche semi-classique de la transition entre plateaux. Lorsque le champ magnétique est suffisamment fort, les états occupés se situent tous dans le premier niveau de Landau. De plus l'écart entre niveaux croît, si bien qu'on peut négliger l'influence des niveaux supérieurs sur le premier niveau de Landau. Dans une perspective semi-classique, on suppose de plus que le potentiel du désordre  $V_{\text{imp}}$  varie lentement et satisfait :

$$|\vec{\nabla} V_{\text{imp}}| \ll \frac{\hbar \omega_c}{\ell}.$$

Dans ces conditions, les électrons, que l'on peut voir comme des particules classiques, effectuent des orbites cyclotron de faible rayon, tout en dérivant le long des équipotentielles du désordre

scalaire. Il est donc naturel, semi-classiquement, de considérer la fonction d'onde d'un électron comme un "ruban" d'épaisseur  $\ell$  et qui suit les lignes équipotentiellles. Or ces équipotentiellles sont génériquement fermées. Elles ne le sont plus lorsqu'elles se confondent avec les séparatrices (confère figure 4.2). Ce dernier cas de figure se produit à une énergie bien précise. Lorsque la fonction d'onde suit une équipotentielle fermée, elle est localisée. Lorsqu'elle suit une séparatrice, elle est étendue. On peut donc identifier cet état à l'état conducteur de la transition entre plateaux.

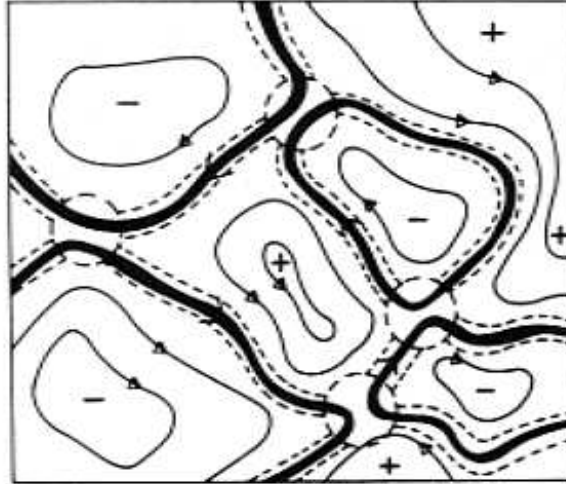


FIG. 4.2 – Lignes équipotentiellles et trajectoires semi-classiques.

Une première intuition conduit à penser que l'exposant de la longueur de corrélation dans ce système est l'exposant de la percolation classique, à savoir  $\nu = 4/3$ , puisque la longueur caractéristique des trajectoires fermées diverge de cette façon lorsqu'elles tendent à se confondre avec les séparatrices. Ce fut la première proposition faite pour  $\nu$  [131]. Or le résultat est incorrect. On ne peut en effet faire abstraction de la diffusion tunnel entre trajectoires, en particulier lorsqu'elles se jouxtent près des points cols. La délocalisation peut s'en trouver sensiblement améliorée. C'est donc l'image d'une *percolation quantique* qui doit se substituer à la précédente. L'argument semi-analytique de G.V. Milnikov et M. Sokolov [56] consiste à dire que l'exposant est la somme de deux contributions,  $4/3$  provenant de la percolation classique et 1 provenant de l'effet tunnel, soit au total  $\nu = 7/3$ . Il n'est bien sûr pas satisfaisant.

Ces considérations semi-classiques ont finalement abouti en 1988, grâce à J.T. Chalker et P.D. Coddington [27] à un modèle sur réseau de la transition de l'effet Hall quantique entier.

#### 4.1.3 Le modèle de Chalker et Coddington

Il s'agit de réaliser sur un réseau carré la description semi-classique qui précède. Chaque lien du réseau porte une partie de la fonction d'onde semi-classique de l'électron. On lui associe donc une valeur.

Chaque nœud du réseau correspond à un point col sur lequel s'intersectent deux séparatrices. Pour modéliser l'effet tunnel, on choisit d'associer à ce vertex une matrice de diffusion  $2 \times 2$  qui, aux valeurs de la fonction d'onde sur les deux liens entrants, associe les valeurs de la fonction

d'onde sur les deux liens sortants. Les matrices de diffusion appartiennent à  $SO(2)$ . Les matrices de transfert locales correspondantes appartiennent à  $SO(1,1)$ . Ces dernières sont paramétrées par un angle hyperbolique. Selon que l'on se place en deçà ou au delà de l'énergie de transition, la fonction d'onde semi-classique évolue dans les vallées ou sur les sommets. Pour modéliser cela, on décide que les vertex appartiennent à un réseau bi-partite. Les vertex appartenant à l'un des deux sous-réseaux ont des matrices de transfert paramétrées par un angle  $\theta$  alors que les autres ont des matrices paramétrées par un angle  $\theta'$ . Lorsque  $\theta = \theta'$ , on est à la transition. Pour préserver l'isotropie du modèle, on demande que  $\theta$  et  $\theta'$  soient reliées par  $\theta' = \cosh^{-1}(\coth \theta)$ , qui s'obtient simplement en demandant l'invariance par rotation d'un quart de tour du réseau. Ce qui donne pour l'angle critique  $\theta_c = \ln(1 + \sqrt{2})$ . À chaque vertex, on peut établir un lien de proportionnalité entre  $\theta - \theta_c$  et la différence d'énergie  $E - E_c$  entre les équipotentielles.

Dernière étape de la construction, on souhaite tenir compte du fait que la fonction d'onde d'un électron dans le champ magnétique uniforme prend une phase égale au produit du champ par l'aire balayée par la particule (le flux balayé par rapport à un axe de référence). Or, en première approximation, les liens entre deux nœuds sont de longueur arbitraire. De sorte qu'on demande que la fonction d'onde prenne une phase arbitraire sur chaque lien.

#### 4.1.4 Calcul numérique

Ce modèle est bien adapté au calcul numérique. En effet, la majorité des modèles de la transition sont proposés dans le cadre du formalisme de seconde quantification (indispensable lorsque l'on désire obtenir un modèle effectif, c'est-à-dire après avoir effectué la moyenne sur le désordre). Au contraire, ce modèle simple de matrices de transfert relève du formalisme de première quantification. Le désordre y est figé. Pour obtenir des informations moyennes sur le système, il est par conséquent nécessaire de se fonder sur son ergodicité. Obtenir la longueur de corrélation dans le système est un travail désormais standard mais non trivial. Il est illusoire de penser pouvoir l'obtenir pour une taille de système numérique suffisamment grande. Au lieu de cela, on exploite les effets de taille finie en plaçant le réseau sur un cylindre à  $N$  canaux, et de très grande longueur. On peut alors en tirer les exposants de Lyapunov de la matrice de transfert, et en particulier le plus petit de ceux-ci, qu'on ne peut obtenir sans les autres, et qui donne la longueur de corrélation en taille transverse finie  $\xi_N(\theta)$ . Puis, procédant au calcul pour plusieurs tailles transverses de système, et utilisant une hypothèse d'invariance d'échelle à un paramètre

$$\frac{\xi_N(\theta)}{N} = g\left(\frac{\xi_\infty(\theta)}{N}\right),$$

on peut obtenir numériquement [27] la fonction d'échelle  $g$ . Cette dernière donnant enfin accès à la longueur de corrélation en taille infinie  $\xi_\infty(\theta)$  en fonction des données numériques en taille finie. J'ai repris la démarche de l'article originel, calculé puis tracé sur la figure 4.3 la fonction  $g$  dans une échelle logarithmique (fonction et argument). En taille finie  $N$  et pour une valeur de  $\theta$  suffisamment proche de  $\theta_c$ , la longueur de corrélation sature à la taille du système. La fonction  $g$  tend alors vers une constante. Ce raisonnement vaut aussi à  $\theta$  fixé, lorsque la taille du système est suffisamment petite. Dans les cas opposés, c'est-à-dire lorsque l'on s'éloigne des conditions critiques, la longueur de corrélation en taille finie tend vers la longueur de corrélation en taille infinie et on attend de  $g$  un comportement linéairement décroissant.

La valeur de l'exposant critique que je tire du comportement de  $\xi_\infty(\theta)$  en  $\theta_c$  est  $\nu = 2.31 \pm 0.03$ , conforme aux résultats numériques de [65].

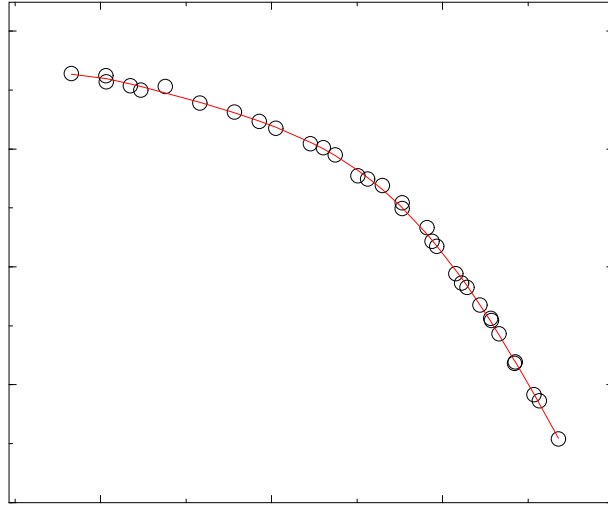


FIG. 4.3 – Fonction d'échelle  $g$ , en abscisse les valeurs de  $\ln(\xi_\infty(\theta)/N)$  et en ordonnée celles de  $\ln(\xi_N(\theta)/N)$ . Sur la gauche du graphe, on tend vers le comportement critique, alors qu'à droite le régime est fortement localisé.

## 4.2 Modèle sur réseau de l'effet Hall quantique et fermions de Dirac aléatoires

### 4.2.1 Formulation unitaire

Il y a deux façons d'aborder le modèle de Chalker et Coddington. On peut l'étudier par le biais du formalisme hamiltonien. C'est-à-dire que l'on privilégie une des deux directions du plan, et on définit pour le modèle une matrice de transfert. C'est ce qui a été précédemment présenté. Ou bien on l'étudie au moyen d'une approche unitaire, à l'aide d'une matrice d'évolution qui détermine la diffusion dans le système. Concrètement, pour faire simple et supprimer les effets de bords, on peut imposer des conditions périodiques aux bords du réseau, de sorte que le modèle est défini sur un tore. Dans cette approche on substitue aux matrices de transfert locales appartenant à  $SO(1, 1)$ , une matrice de diffusion locale appartenant à  $SO(2)$ . On choisit le réseau dans sa configuration isotrope :

$$\sin \theta \sin \theta' = 1.$$

L'angle  $\theta$  trigonométrique utilisé ici n'est pas égal à l'angle hyperbolique  $\alpha$  utilisé dans la formulation du réseau par les matrices de transfert que l'on rencontrera au début du chapitre 5. Ils sont reliés par  $\sin \theta = \tanh \alpha$ .

Considérons le cas du modèle sur réseau désordonné, avec un demi-fluxon par plaquette. C'est tacitement la convention retenue dans la formulation originelle du problème. Supposons que les valeurs prises par la fonction d'onde sur les liens du réseau soient rangées dans le vecteur colonne  $Z$ . À chaque vertex du réseau est défini un processus de diffusion qui relie les valeurs de la fonction d'onde sur les deux liens sortants en fonction des valeurs prises par la fonction sur les liens entrant. De sorte qu'il existe une matrice unitaire  $U$ , telle que  $Z = UZ$ . La fonction d'onde dont on souhaite étudier les propriétés est donc solution du système

$$(I - U)Z = 0.$$

Deux cas se présentent alors. Ou bien 1 n'est pas un élément du spectre de  $U$  et dans ce cas le système n'a pas de solution. On introduit alors une source de courant (de probabilité)  $\Sigma$ , de même format que  $Z$ , sur un ou plusieurs liens, de sorte que la fonction d'onde est solution de  $(I - U)Z = \Sigma$ . Ce système est soluble puisque  $\det(I - U) \neq 0$ . Alors

$$Z = \frac{1}{1 - U}\Sigma = \Sigma + U\Sigma + U^2\Sigma + \dots$$

Ceci fournit un algorithme de calcul de la fonction d'onde, qui consiste à sommer les contributions des événements de diffusion.

Dans l'autre cas de figure, 1 appartient au spectre de  $U$ . On peut alors partir d'une source quelconque qui sera de la forme  $\Sigma = \alpha\Sigma_1 + \Sigma_*$  où  $\Sigma_1$  est le projeté de  $\Sigma$  sur l'espace propre associé à la valeur propre 1, et  $\Sigma_*$  le complément orthogonal. Alors si  $\alpha = 0$ ,  $\Sigma + U\Sigma + U^2\Sigma + \dots$  est solution de  $(I - U)Z = \Sigma$ , alors que si  $\alpha \neq 0$ ,  $\Sigma + U\Sigma + U^2\Sigma + \dots + U^N\Sigma \sim \alpha N\Sigma_1$  et effectuer la somme des contributions, c'est projeter, à la normalisation près, sur le sous-espace propre associé à 1.

Dans tous les cas on a obtenu un algorithme simple de calcul d'une fonction d'onde sur le réseau.

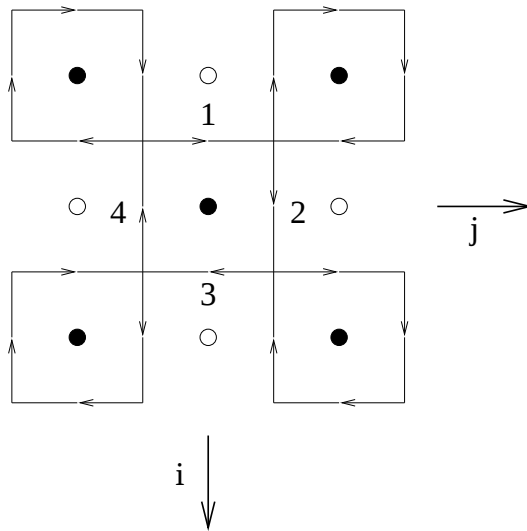


FIG. 4.4 – Maille élémentaire du réseau

On peut lire sur la figure 4.4 les événements de diffusion et les rassembler dans

$$\begin{cases} Z_1(i, j) = e^{i\phi_1}(\cos \theta.Z_4(i, j) - \sin \theta.Z_2(i - 1, j - 1)) \\ Z_3(i, j) = e^{i\phi_3}(\cos \theta.Z_2(i, j) + \sin \theta.Z_4(i + 1, j + 1)) \\ Z_2(i, j) = e^{i\phi_2}(-\cos \theta.Z_1(i, j) + \sin \theta.Z_3(i - 1, j + 1)) \\ Z_4(i, j) = e^{i\phi_4}(\cos \theta.Z_3(i, j) + \sin \theta.Z_1(i + 1, j - 1)) \end{cases}$$

$\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_3$  et  $\phi_4$  sont les phases aléatoires locales. Afin de prendre en compte le demi-fluxon, nous avons défini la phase  $\phi_2$  par rapport à  $\pi$  et non 0.

On peut réécrire le système sous forme opératorielle :

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\phi_1} & 0 \\ 0 & e^{i\phi_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\theta.t_x^-t_y^- & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta.t_x^+t_y^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_2 \\ Z_4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} Z_2 \\ Z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\phi_2} & 0 \\ 0 & e^{i\phi_4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta.t_x^-t_y^+ \\ \sin\theta.t_x^+t_y^- & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_3 \end{pmatrix}.$$

Les  $t_x^\pm$  et  $t_y^\pm$  sont les opérateurs de translation de une unité sur le réseau. La structure anti-diagonale de la matrice  $U$  permet donc de découpler deux évolutions, une pour  $(Z_1, Z_3)$  et l'autre pour  $(Z_2, Z_4)$ . Par exemple pour  $(Z_1, Z_3)$ , la matrice de diffusion est

$$U = \begin{pmatrix} \text{cs}.e^{i\phi_1+i\tilde{\phi}_2}.t_x^-t_y^- + \text{cs}.e^{i\phi_1+i\phi_4}.t_x^+t_y^- & c^2.e^{i\phi_1+i\phi_4} - s^2.e^{i\phi_1+i\tilde{\phi}_2}.(t_x^-)^2 \\ -c^2.e^{i\phi_1+i\phi_3} + s^2.e^{i\phi_3+i\tilde{\phi}_4}.(t_x^+)^2 & \text{cs}.e^{i\phi_1+i\phi_3}.t_x^-t_y^+ + \text{cs}.e^{i\phi_3+i\tilde{\phi}_4}.t_x^+t_y^+ \end{pmatrix}$$

où on a noté  $\tilde{\phi}_2(i, j) = \phi_2(i-1, j-1)$  et  $\tilde{\phi}_4(i, j) = \phi_4(i+1, j+1)$  et abrégé  $\sin\theta$  et  $\cos\theta$  en  $s$  et  $c$ .

#### 4.2.2 Limite continue et hamiltonien de Dirac

On peut maintenant passer à la limite continue en supposant que les phases aléatoires varient très lentement à l'échelle de la maille du réseau. De plus, on se place près du point de transition quantique de sorte que  $2\sin\theta\cos\theta = \cos m \simeq 1$  et  $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \sin m \simeq m$  avec  $m = \pi/2 - 2\theta$ . Le paramètre  $m$  (*la masse*) mesure l'écart à la transition quantique située en  $\theta = \pi/4$ . Alors dans cette limite

$$U = 1 + \frac{i}{2}(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4) + \begin{pmatrix} \frac{i}{2}(\phi_1 - \phi_3) - \partial_y & \frac{i}{2}(\phi_4 - \phi_2) + \partial_x + m \\ \frac{i}{2}(\phi_4 - \phi_2) + \partial_x - m & \frac{i}{2}(\phi_3 - \phi_1) + \partial_y \end{pmatrix}.$$

Ceci fait on peut extraire un hamiltonien de cette matrice unitaire :

$$U \simeq 1 - iH.$$

Ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} H &= -V + \begin{pmatrix} -i\partial_y - A_y & i\partial_x + A_x + im \\ i\partial_x + A_x - im & i\partial_y + A_y \end{pmatrix} \\ &= -V + (i\partial_x + A_x)\sigma_x - (i\partial_y + A_y)\sigma_z - m\sigma_y, \end{aligned}$$

où on a défini les potentiels scalaire et vecteur :

$$V = \frac{\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4}{2}, \quad A_x = \frac{\phi_2 - \phi_4}{2} \quad \text{et} \quad A_y = \frac{\phi_1 - \phi_3}{2}.$$

Une rotation de  $\pi/2$  dans l'espace des spins autour de l'axe  $Ox$  conduit au hamiltonien final :

$$H = -V + (i\partial_x + A_x)\sigma_x + (i\partial_y + A_y)\sigma_y - m\sigma_z.$$

Le hamiltonien est celui d'un fermion de Dirac en dimension 2 soumis à un champ de masse, un champ de jauge et un potentiel scalaire aléatoires.

Chaînes de Spins, Fermions de Dirac, et Systèmes Désordonnés

## 4.3 Modèles sur réseau et chaînes de spin quantiques effectives

Sous l'impulsion de Nick Read, un certain nombre de travaux ont permis de donner pour le modèle de Chalker et Coddington et ses dérivés un hamiltonien effectif de seconde quantification. Ce hamiltonien prend la forme d'une chaîne de spins supersymétrique. Si, pour le problème de l'effet Hall, la méthode ne donne qu'une nouvelle façon d'obtenir la chaîne de spins (quoique très attrayante), elle s'est révélée utile au calcul des fluctuations de conductance du *métal chiral* (c'est une variante du premier modèle à symétrie compacte).

Je présente dans cette section une preuve *optimisée* de la dérivation de Read, Gruzberg et Sachdev [54, 55] pour le réseau dirigé du métal chiral (réseau de Chalker-Dohmen [29]). J'y donne également ma version de la preuve pour le modèle de Chalker et Coddington<sup>1</sup>. La chaîne de spins obtenue pour le réseau dirigé avait été précédemment dérivée par L. Balents, M.P.A. Fisher et M.R. Zirnbauer par d'autres moyens [10]. La chaîne de spins obtenue pour le modèle sur réseau de l'effet Hall est équivalente à celles exhibées par des méthodes différentes par Dong Hai Lee [77] ou M.R. Zirnbauer [144, 146]. Une bonne manière de simplifier la dérivation donnée dans [54] est de recourir à des transformations de Bogoliubov unitaires puis généralisées, et d'invoquer quelques astuces permettant de se ramener du réseau alterné au réseau dirigé.

### 4.3.1 Rappel : Transformation de Bogoliubov unitaire.

Soit  $H$  une matrice hermitienne (un hamiltonien). On lui associe un opérateur de seconde quantification

$$\hat{H} = \sum_{i,j} a_i^\dagger H_{ij} a_j = a^\dagger . H . a ,$$

où les  $a_i^\dagger$  et  $a_i$  sont des opérateurs de création/annihilation bosoniques. À une fonction d'onde  $(v_i)$ , élément de l'espace sur lequel agit  $H$ , on associe un opérateur de seconde quantification  $\hat{v}$  dans l'espace de Fock sur lequel agit  $\hat{H}$  :

$$\hat{v}^\dagger = \sum_k v_k a_k^\dagger = v . a^\dagger .$$

On cherche naturellement à expliciter l'action de  $\hat{H}$  sur  $\hat{v}$ , corrélativement à l'action de  $H$  sur  $v$ . En usant des relations de commutation des opérateurs  $a^\dagger$  et  $a$ , on obtient aisément l'action adjointe de  $\hat{H}$  sur  $\hat{v}^\dagger$  et sur  $\hat{v}$  :

$$[\hat{H}, \hat{v}^\dagger] = (H.v) . a^\dagger \quad \text{et} \quad [\hat{H}, \hat{v}] = -(v^\dagger . H) . a .$$

Puisque  $e^{i\hat{H}} \hat{v}^\dagger e^{-i\hat{H}} = \hat{v}^\dagger + i[\hat{H}, \hat{v}^\dagger] + \frac{i^2}{2}[\hat{H}, [\hat{H}, \hat{v}^\dagger]] + \dots = \hat{v}^\dagger + i(H.v) . a^\dagger + \frac{i^2}{2}(H.v)^2 . a^\dagger + \dots$ , on en déduit que

$$e^{i\hat{H}} \hat{v}^\dagger e^{-i\hat{H}} = (e^{iH} . v) . a^\dagger .$$

Cette transformation est unitaire car  $H$  est hermitien. On l'appellera transformation de Bogoliubov unitaire. De plus, ne mélangeant pas les opérateurs de création et d'annihilation, elle est *canonique*.

<sup>1</sup>C'est originalement sur ce modèle que Nick Read a appliqué ce type d'idées relatives à la formulation de seconde quantification du modèle sur réseau. Il ne l'a toutefois pas publié.

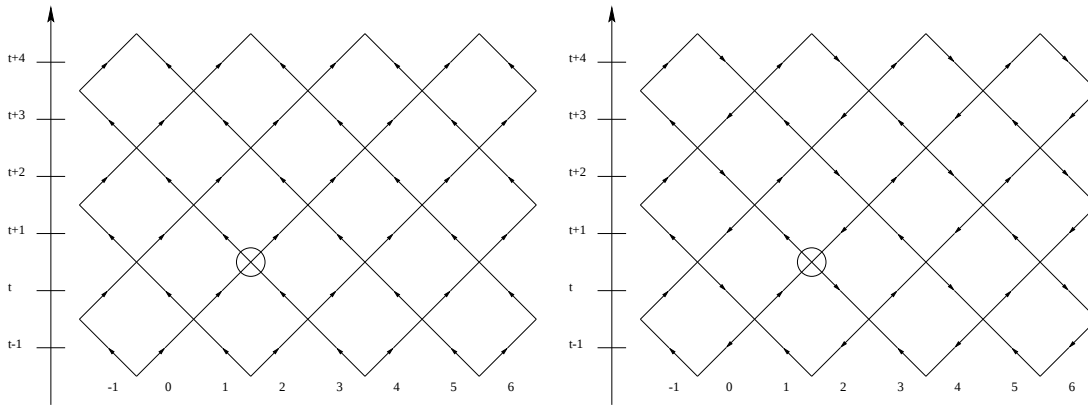


FIG. 4.5 – Réseau dirigé et réseau alterné.

### 4.3.2 Formulation de première quantification des modèles sur réseau. Conductivité et formule de Landauer.

On souhaite calculer la conductivité du réseau de Chalker et Coddington. C'est la quantité la plus simple donnant accès aux propriétés critiques de la transition de l'effet Hall quantique entier (la densité d'état est finie). Gruzberg, Read et Sachdev ont utilisé la *formule de Landauer* :

$$g = \langle \text{Tr}(t \cdot t^\dagger) \rangle = \sum_{i,j} \langle t_{ij} t_{ji}^* \rangle.$$

$g$  est la conductivité moyenne traversant de part et d'autre un échantillon du réseau de taille finie.  $t$  est la *matrice de transmission*. Elle ne doit pas être confondue avec la matrice de transfert  $M$  du système. Car elle est égale à l'inverse de son bloc supérieur gauche dans la *représentation in-out* (canaux entrants / canaux sortants). Pour fixer les idées, donnons l'expression générique de cette matrice de transfert

$$M = \begin{pmatrix} t^{-1} & -t^{-1}r' \\ rt^{-1} & t' - rt^{-1}r' \end{pmatrix}.$$

La matrice  $r$  est la *matrice de réflexion* et un prime  $'$  indique qu'il s'agit de la quantité retour (de la droite à la gauche du système). Comparée à la matrice de transfert totale, la matrice de transmission  $t$  ne compte que les contributions dues aux électrons qui rentrent dans le système par la gauche et en ressortent par la droite. Une telle contribution, qui s'apparente à un chemin de Feynman, est représentée sur la figure 4.6. À un tel chemin est associé le produit des amplitudes de diffusion par les vertex, ainsi que le produit des phases aléatoires acquises par l'électron sur sa trajectoire. La quantité  $t_{ij}$  est la somme de toute ces contributions dites *retardées*. La quantité  $t_{ji}^*$  est la somme sur ce même chemin des produits d'amplitudes de diffusion mais avec des amplitudes complexes conjuguées. Les contributions correspondantes sont dites *avancées*.

Lorsqu'on travaille sur ce type de modèle désordonné sur réseau, on se convainc bien vite du raisonnement suivant. Obtenir la conductivité moyenne, c'est effectuer la moyenne sur chacune des phases aléatoires. Aussi fixons notre attention sur une d'entre elles. Il est clair que la moyenne ne pourra être non nulle qu'à la seule condition que passent par le lien portant la phase autant de chemins retardés qu'avancés. En première quantification cette constatation demeure la dernière (il est difficile d'aller au delà). Par opposition, l'atout majeur de la seconde quantification est

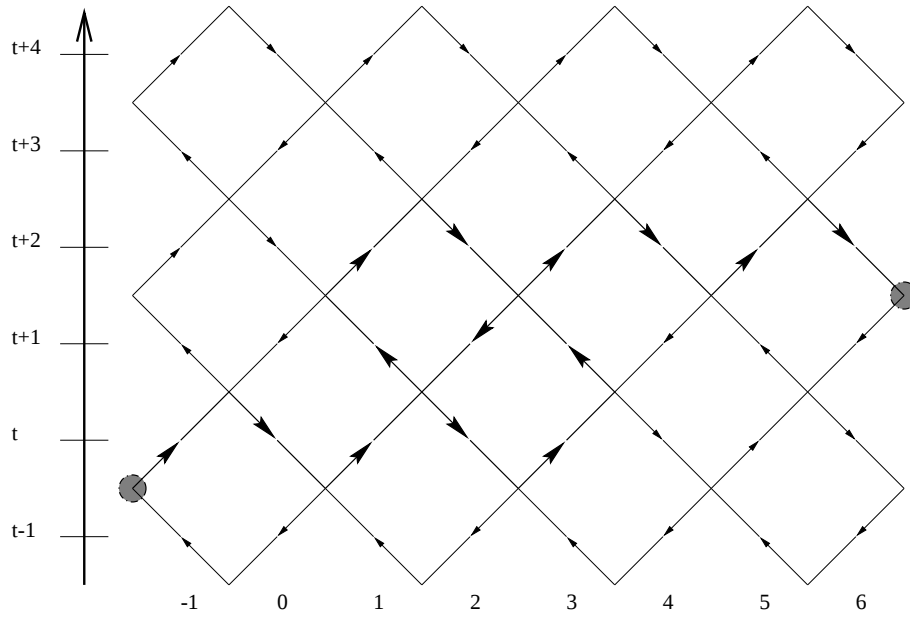


FIG. 4.6 – Chemin (en ligne épaisse) représentant une contribution à un élément de matrice de la matrice de transmission.

de suivre le décompte du passage, par un lien donné, des chemins avancés et retardés en terme de nombre de particules, et de là, de pouvoir rendre *explicite* l'opération consistant à moyenner sur les phases. Son inconvénient est d'engendrer des chemins fermés indésirables (boucles) qui n'apparaissent pas en première quantification. Il existe deux manières bien connues de se débarrasser de ces diagrammes du vide. Soit on réplique  $n$  fois le système, on moyenne et on fait tendre  $n$  vers 0. Les contributions des boucles, qui, une fois la moyenne effectuée, se trouvent avoir une dépendance analytique linéaire en  $n$ , disparaissent. Autre possibilité, on introduit de nouvelles particules décrivant les boucles et dont les contributions sont opposées à celles des boucles originelles. Puisqu'il faut parvenir à produire un signe moins pour chaque boucle engendrée par ces nouvelles particules, elles doivent être de nature *fermionique*. C'est la méthode supersymétrique. En conclusion, le calcul de la conductivité moyenne nécessite, dans le formalisme de seconde quantification supersymétrique, l'introduction de quatre types de particules, des bosons avancés et retardés, des fermions avancés et retardés.

Considérons un vertex comme celui encerclé sur la figure 4.5 où aboutissent les liens 1 et 2. Dans le cas du réseau dirigé l'opérateur de diffusion associé au vertex appartient à  $SU(2)$ . Il est de la forme

$$V = \exp\left(\frac{i}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{\sigma}\right)$$

où  $\vec{\theta}$  est un vecteur d'angles réels et où  $\vec{\sigma}$  est le vecteur des matrices de Pauli.

Le cas du réseau alterné est un peu plus subtil. Les liens entrants et sortants du vertex se distinguent de ceux du réseau dirigé. Pour extraire un hamiltonien du réseau, il faut commencer par orienter ce réseau en définissant comme un temps une des deux directions. La procédure est moins évidente que dans le cas du réseau de Chalker-Dohmen, par construction même du réseau dirigé. Pour se ramener à un réseau orienté, on interprète le réseau comme un réseau dirigé avec des matrices de diffusion  $2 \times 2$  appartenant à  $SU(1, 1)$

$$V = \exp\left(\frac{i}{2}\vec{\theta}.\vec{\Sigma}\right) \quad \text{avec} \quad \vec{\Sigma} = (\sigma_3, i\sigma_1, i\sigma_2).$$

### 4.3.3 Seconde quantification et réseau de Chalker-Dohmen

Une formulation de seconde quantification du réseau dirigé (voir figure 4.5) est plus simple à mettre en œuvre car elle permet l'utilisation directe de la transformation de Bogoliubov unitaire. Considérons à nouveau le vertex encerclé sur la figure 4.5 où aboutissent les liens 1 et 2. À la fonction d'onde locale  $(v_1, v_2)$ , on associe l'opérateur  $\hat{v}^\dagger(t) = v_1(t)a_1^\dagger + v_2(t)a_2^\dagger$ .  $t$  désigne le temps. Donc  $\hat{v}^\dagger(t)$  représente la fonction d'onde sur les sites 1 et 2 *avant* qu'elle soit diffusée par le vertex. On introduit alors le hamiltonien local

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \vec{\theta} \cdot (a_1^\dagger, a_2^\dagger) \vec{\sigma} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

et en appliquant la transformation de Bogoliubov, on obtient la loi d'évolution de  $\hat{v}$

$$e^{i\hat{H}} \hat{v}^\dagger(t) e^{-i\hat{H}} = (e^{iH} \cdot v(t)) \cdot a^\dagger = v(t+1) \cdot a^\dagger = \hat{v}^\dagger(t+1).$$

De plus comme l'opérateur de vertex est *canonique*, l'algèbre des opérateurs de création et d'annihilation est conservée dans la transformation. Ainsi le raisonnement algébrique que nous venons de tenir demeure valide pour le passage de  $t+1$  à  $t+2$  et ainsi de suite.

### Particules avancées

Le calcul de propriétés du type conductivité requiert l'introduction simultanée de fonctions de Green retardées et avancées. Ces dernières permettent de calculer des modules de quantités physiques, et impliquent donc de prendre en compte les valeurs complexe et complexe conjuguée de la fonction d'onde. Il est aisé de se convaincre (en conjuguant l'équation de Schrödinger) que le hamiltonien gouvernant l'évolution de la fonction d'onde conjuguée est  $-\hat{H}^*$ . En pratique Gruzberg, Read et Sachdev ont introduit dans le formalisme de seconde quantification des particules avancées. Les opérateurs de seconde quantification que nous associons à ces particules sont

$$-\hat{H}^* = \frac{1}{2} \vec{\theta} \cdot (b_1^\dagger, b_2^\dagger) \vec{\sigma}^* \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \hat{v}^\dagger(t) = v_1^*(t)b_1^\dagger + v_2^*(t)b_2^\dagger.$$

Toutefois, pour se ramener au cas des particules retardées, il est judicieux (me semble-t-il) d'effectuer les transformations particule-trou suivantes

$$b_i \rightarrow -b_i^\dagger, \quad b_i^\dagger \rightarrow b_i.$$

On vérifie aisément que, sous cette transformation, le hamiltonien  $-\hat{H}^*$  est changé en  $\hat{H}$ . Par conséquent à condition d'écrire le vecteur de seconde quantification pour les particules avancées sous la forme  $\hat{v}^\dagger(t) = v_1^*(t)b_1^\dagger + v_2^*(t)b_2^\dagger$ , et à condition que l'on effectue les transformations particule-trou inverses une fois tous les calculs faits, alors les particules avancées se comportent comme des particules retardées.

### Introduction des variables fermioniques

Les particules fermioniques retardées, partenaires des  $a_i$ , seront notées  $f_i$ . Les particules fermioniques avancées seront notées  $g_i$ . On admet que ce qui précède vaut encore pour les particules fermioniques modulo les transformations particule-trou appropriées, à savoir :

$$g_i \rightarrow g_i^\dagger, \quad g_i^\dagger \rightarrow g_i.$$

### Chaîne de spins pour le réseau dirigé anisotrope

L'opérateur de vertex initial est  $V_{12} = \exp(t^* \sigma_+ - t \sigma_-)$ , où  $\sigma_+ = \sigma_x + i \sigma_y$  et  $\sigma_- = \sigma_x - i \sigma_y$ . L'opérateur de vertex de seconde quantification est alors

$$\hat{V}_{12} = \exp(t^* \mathcal{F}_{12}^+ - t \mathcal{F}_{12}^-) := \exp \left( t^* (a_1^\dagger a_2 + b_1^\dagger b_2 + f_1^\dagger f_2 + g_1^\dagger g_2) - t (a_2^\dagger a_1 + b_2^\dagger b_1 + f_2^\dagger f_1 + g_2^\dagger g_1) \right).$$

On vérifie que les *opérateurs de liens* nouvellement introduits satisfont  $(\mathcal{F}_{12}^-)^\dagger = \mathcal{F}_{12}^+$ , mais aussi, en introduisant  $\mathcal{F}_{12}^0 = n_{a_1} + n_{b_1} + n_{f_1} + n_{g_1} - (n_{a_2} + n_{b_2} + n_{f_2} + n_{g_2})$  qu'ils satisfont aux relations de commutation

$$[\mathcal{F}_{12}^+, \mathcal{F}_{12}^-] = 2\mathcal{F}_{12}^0, \quad [\mathcal{F}_{12}^0, \mathcal{F}_{12}^+] = \mathcal{F}_{12}^+ \quad \text{et} \quad [\mathcal{F}_{12}^0, \mathcal{F}_{12}^-] = -\mathcal{F}_{12}^-.$$

C'est-à-dire que les opérateurs de liens locaux vérifient l'algèbre de  $\mathfrak{su}(2)$ . On va maintenant développer l'exponentielle à l'ordre d'anisotropie  $o(|t|^2)$ . Pour ce faire, on peut préalablement mettre  $\hat{V}_{12}$  sous forme normale à l'aide d'une *décomposition de Gauss*, rendue possible par la structure d'algèbre de Lie des  $\mathcal{F}_{12}$  :

$$\hat{V}_{12} = \exp(t^* \mathcal{F}_{12}^+) \cdot \exp(\eta \mathcal{F}_{12}^0) \cdot \exp(-t \mathcal{F}_{12}^-)$$

où  $\eta = \ln(1 + |t|^2)$ <sup>2</sup>. Jusqu'à présent nous n'avons eu recours à aucune approximation. Il est en principe possible de poursuivre dans cette voie en se servant de transformations couleur-saveur [147]. Toutefois on peut accéder directement au hamiltonien du réseau dans sa limite fortement anisotrope. C'est-à-dire lorsque  $|t|^2 \ll 1$ . Le développement de  $\hat{V}_{12}$  sous cette forme donne

$$\hat{V}_{12} = 1 + t^* \mathcal{F}_{12}^+ - t \mathcal{F}_{12}^- - |t|^2 \mathcal{F}_{12}^+ \mathcal{F}_{12}^- + |t|^2 \mathcal{F}_{12}^0 + \frac{1}{2} t^{*2} (\mathcal{F}_{12}^+)^2 + \frac{1}{2} t^2 (\mathcal{F}_{12}^-)^2 + o(|t|^2).$$

### Moyenne sur le désordre

L'opération de moyenne sur le désordre consiste à projeter  $\hat{V}_{12}$  sur l'espace de représentation de spin 0, à savoir :  $n_{a_i} + n_{b_i} + n_{f_i} + n_{g_i} = 0$  pour tout  $i$ . Cette relation provient de l'égalité plus naturelle  $n_{a_i} + n_{f_i} = n_{b_i} + n_{g_i}$  qui identifie le nombre de particules avancées et retardées mais après avoir effectué les transformations particule-trou. Notons simplement  $P$  l'opération de projection. On a

$$P \mathcal{F}_{12}^{+2} P = P \mathcal{F}_{12}^{-2} P = P \mathcal{F}_{12}^+ P = P \mathcal{F}_{12}^- P = 0 \quad \text{et} \quad P \mathcal{F}_{12}^0 P = 0.$$

<sup>2</sup>C'est une généralisation de la décomposition BCH (pour Baker-Campbell-Hausdorff). On l'appelle parfois dans la littérature *distingling identity*. On trouvera dans [50] une preuve dans le cas  $\text{SU}(2)$ .

On obtient donc pour vertex effectif  $P\widehat{V}_{12}P = 1 - |t|^2 P\mathcal{F}_{12}^+ \mathcal{F}_{12}^- P + o(|t|^2)$ . On introduit alors les opérateurs de spins

$$\mathcal{J}_i = \begin{pmatrix} a_i^\dagger \\ f_i^\dagger \\ b_i^\dagger \\ g_i^\dagger \end{pmatrix} (a_i, f_i, b_i, g_i) = \begin{pmatrix} a_i^\dagger a_i & a_i^\dagger f_i & a_i^\dagger b_i & a_i^\dagger g_i \\ f_i^\dagger a_i & f_i^\dagger f_i & f_i^\dagger b_i & f_i^\dagger g_i \\ b_i^\dagger a_i & b_i^\dagger f_i & b_i^\dagger b_i & b_i^\dagger g_i \\ g_i^\dagger a_i & g_i^\dagger f_i & g_i^\dagger b_i & g_i^\dagger g_i \end{pmatrix}.$$

Signalons que c'est une façon de représenter les générateurs de la superalgèbre  $\mathfrak{gl}(2|2)$ . On vérifie alors que l'on a l'identité

$$P\widehat{V}_{12}P = 1 - |t|^2 \text{STr}(\mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2).$$

### Chaîne de spins

Sommant les contributions de tous les sites, on obtient la chaîne de spins :

$$\mathcal{H} = \sum_i J \text{STr}(\mathcal{J}_i \mathcal{J}_{i+1}) + \frac{J}{2} \text{STr} \Xi (\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_N),$$

où on a défini  $J := |t|^2$ . Le second terme présent dans le hamiltonien est un terme de bord. Il traduit le fait que l'on injecte à l'entrée, puis pompe à la sortie un boson et un fermion retardés. Ce sont les particules dont on a besoin pour obtenir une représentation de seconde quantification de la conductivité (on peut se référer à [55] pour une telle expression de la conductivité). La matrice  $\Xi$  est une matrice fixée qui vaut  $\Xi = \text{diag}(1, -1, 1, -1)$ . Le terme de bord peut s'interpréter comme un terme Zeeman et  $\Xi$  comme un champ magnétique local<sup>3</sup>.

Il reste toutefois à effectuer les transformations particule-trou inverses sur les particules avancées. Ce qui mène à la forme suivante du spin

$$\mathcal{J}_i = \begin{pmatrix} a_i^\dagger \\ f_i^\dagger \\ -b_i \\ g_i \end{pmatrix} (a_i, f_i, b_i^\dagger, g_i^\dagger) = \begin{pmatrix} a_i^\dagger a_i & a_i^\dagger f_i & a_i^\dagger b_i^\dagger & a_i^\dagger g_i^\dagger \\ f_i^\dagger a_i & f_i^\dagger f_i & f_i^\dagger b_i^\dagger & f_i^\dagger g_i^\dagger \\ -b_i a_i & -b_i f_i & -b_i b_i^\dagger & -b_i g_i^\dagger \\ g_i a_i & g_i f_i & g_i b_i^\dagger & g_i g_i^\dagger \end{pmatrix}.$$

C'est une façon de représenter les générateurs de  $\mathfrak{u}(1, 1|2)$ . La notation  $\mathfrak{u}(1, 1|2)$  correspond à une forme réelle de la superalgèbre  $\mathfrak{gl}(2|2)$ . Il est implicite que le produit scalaire est défini en référence à la conjugaison naturelle sur les opérateurs de création/annihilation. Dans le cas d'une superalgèbre, comme ici, il peut cependant y avoir ambiguïté. En effet il existe au moins deux conjugaisons naturelles possibles sur les opérateurs fermioniques, fait que l'on exploitera dans le chapitre 6. De plus, dans le cadre d'une formulation du problème par l'intégrale de chemin, il est généralement préférable de ne définir aucune conjugaison sur les variables de Grassmann (pour plus de détails voir [145], et le chapitre 7 de cette thèse). La notion de forme réelle se comprend toutefois bien sur la sous-algèbre bosonique de  $\mathfrak{u}(1, 1|2)$ , c'est-à-dire  $\mathfrak{u}(1, 1) \times \mathfrak{u}(2)$ , qui est l'algèbre débarrassée de ses générateurs fermioniques.

<sup>3</sup>D'un point de vue technique, ce terme peut être crucial. En effet dans le cadre d'une formulation par l'intégrale de chemin, il permet d'assurer la convergence des intégrales fonctionnelles sur des variétés qui se révèlent parfois non-compactes.

#### 4.3.4 Seconde quantification et réseau de Chalker et Coddington

Retournons maintenant au cas du réseau alterné. On se souvient que nous sommes passés à une formulation de matrice de transfert avec des vertex appartenant au groupe  $SU(1, 1)$ . Le prix de cette astuce est que le raisonnement utilisé pour le réseau de Chalker-Dohmen est invalidé ici parce que  $\hat{V}$ , version quantifiée de l'opérateur de vertex  $V$ , n'est plus canonique. Explicitement, l'opérateur de vertex initial portant sur les liens 1 et 2 est  $V_{12} = \exp(t^* \sigma_+ + t \sigma_-)$ , qui se distingue de la matrice de diffusion du réseau dirigé par le signe + devant  $t$ .

Notre objectif est d'écrire l'évolution dans le temps d'un opérateur  $\hat{w}(t)$  similaire à  $\hat{v}^\dagger(t) = v_1(t)a_1^\dagger + v_2(t)a_2^\dagger$ . Comme les vertex du type  $V_{12}$  ne sont plus unitaires mais pseudo-unitaires, ils sont aussi symplectiques. Pour que la transformation de  $\hat{w}(t)$  permettant de passer de la date  $t$  à la date  $t + 1$ , soit canonique, on définit  $\hat{w}(t)$  comme  $\hat{w}(t) = T\hat{v}(t)T^{-1} = v_1(t)a_1^\dagger + v_2(t)a_2$ , où  $T$  est la transformation particule-trou qui à  $a_2$  fait correspondre  $-a_2^\dagger$  et à  $a_2^\dagger$  fait correspondre  $a_2$ .

Un équivalent formel de la transformation de Bogoliubov (4.1) qui agissait sur  $\hat{v}^\dagger$  subsiste. Pour l'obtenir, on commence par effectuer la transformation  $t^* \rightarrow t^*$  et  $t \rightarrow -t$  sur (4.1). Puis faisant agir  $T$  sur cette même équation, et sous réserve de noter  $iK = t^* \sigma_+ + t \sigma_-$ , on en déduit

$$e^{iT\hat{K}T^{-1}}\hat{w}^\dagger e^{-iT\hat{K}T^{-1}} = (e^{iK}.w(t)). \begin{pmatrix} a_1^\dagger \\ a_2 \end{pmatrix} = \hat{w}^\dagger(t+1).$$

Cette transformation de Bogoliubov non-unitaire possède toutes les propriétés souhaitées. La différence entre les représentations de seconde quantification des réseaux dirigé et alterné réside donc dans une transformation particule-trou sur le site 2 (et plus généralement sur les sites pairs).

Afin de se ramener (temporairement) au cas du réseau dirigé, pour en réutiliser les résultats, on effectue la transformation inverse et changeons le vecteur  $\hat{w}(t)$  en le vecteur  $\hat{v}(t)$ . Il faut également que nous puissions changer les opérateurs de vertex en des opérateurs unitaires. On effectue donc temporairement la transformation  $t^* \rightarrow t^*$  et  $t \rightarrow -t$ .

On outre, on fait subir aux particules avancées la même transformation (formelle) particule-trou que dans le cas du réseau dirigé, et ce sur tous les sites.

À ce stade, nous nous sommes ramenés au cas du réseau dirigé et pouvons en exploiter les résultats. On en extrait directement le résultat final, à savoir le hamiltonien de la chaîne de spins. Il reste à effectuer les transformations inverses :

1.  $t^* \rightarrow t^*$  et  $t \rightarrow -t$ .
2. les transformations particule-trou qui résultent de l'opération sur les particules avancées et sur le renversement du temps un site sur deux (structure bipartite), et qui sont dans le cas des sites 1 et 2 :

$$\begin{aligned} b_1 &\rightarrow b_1^\dagger, & b_1^\dagger &\rightarrow -b_1, & g_1 &\rightarrow g_1^\dagger, & g_1^\dagger &\rightarrow g_1, \\ a_2 &\rightarrow a_2^\dagger, & a_2^\dagger &\rightarrow -a_2, & f_2 &\rightarrow f_2^\dagger, & f_2^\dagger &\rightarrow f_2. \end{aligned}$$

Le hamiltonien final s'en déduit

$$\mathcal{H} = - \sum_i J \text{STr} \left( \mathcal{J}_{2i-1} \tilde{\mathcal{J}}_{2i} \right) + J' \text{STr} \left( \tilde{\mathcal{J}}_{2i} \mathcal{J}_{2i+1} \right) + \frac{J}{2} \text{STr} \Lambda \left( \tilde{\mathcal{J}}_1 + \mathcal{J}_N \right),$$

avec la notation

$$\tilde{\mathcal{J}}_i = \begin{pmatrix} -a_i \\ f_i \\ b_i^\dagger \\ g_i^\dagger \end{pmatrix} (a_i^\dagger, f_i^\dagger, b_i, g_i) = \begin{pmatrix} -a_i a_i^\dagger & -a_i f_i^\dagger & -a_i b_i & -a_i g_i \\ f_i a_i^\dagger & f_i f_i^\dagger & f_i b_i & f_i g_i \\ b_i^\dagger a_i^\dagger & b_i^\dagger f_i^\dagger & b_i^\dagger b_i & b_i^\dagger g_i \\ g_i^\dagger a_i^\dagger & g_i^\dagger f_i^\dagger & g_i^\dagger b_i & g_i^\dagger g_i \end{pmatrix}.$$

et  $J = |t|^2$ ,  $J' = |t'|^2$ . La chaîne est de spin  $\mathcal{C} = 0$  ( $n_{a_i} + n_{f_i} = n_{b_i} + n_{g_i}$ ).

Utilisant une extension du théorème de Lieb, Shultz et Mathis (voir le chapitre 1), J.B. Marston et S.W. Tsai [91] ont démontré que le fondamental de ce hamiltonien est unique. C'est indirectement une preuve de l'unicité de l'état étendu du modèle de Chalker et Coddington (non pas à désordre gelé mais "en moyenne").

## 4.4 Chaîne de spins, états cohérents et modèle sigma non-linéaire

Il est bien connu (confère chapitre 1) qu'au moins dans le cas de la chaîne de spins  $SU(2)$ , il est possible de décrire la physique de basse énergie de la chaîne par un modèle sigma non-linéaire de symétrie  $SO(3)$ . Cette identification provient de l'utilisation d'une base d'états cohérents qui permet de construire l'intégrale de chemin associée au hamiltonien de la chaîne. Ces états cohérents sont paramétrés de façon naturelle par les éléments d'un espace symétrique  $SU(2)/U(1) \simeq S^2$  (voir par exemple [7]).

N. Read et S. Sachdev [111] ont généralisé cette application aux cas des chaînes de spins  $SU(N)$  dans une représentation quelconque. Je me propose ici de généraliser cette dérivation à un certain nombre de superalgèbres de Lie. Cela nous sera utile, d'une part pour donner une dérivation du modèle sigma non-linéaire de Pruisken (dans une version supersymétrique due à Weidenmüller [138]) décrivant la physique de basse énergie de l'effet Hall quantique entier, et, d'autre part, dans l'intention de l'appliquer dans le chapitre 7 à un modèle sur réseau tombant dans la classe de symétrie D (confère appendice C).

### 4.4.1 Représentation fonctionnelle à l'aide d'une base d'états cohérents

Le point de départ de notre problème est un hamiltonien de chaîne de spins. Les opérateurs de spin de ce hamiltonien sont les générateurs d'une (super-)algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  dont le (super-)groupe de Lie est  $G$ . Soit  $\{T^a\}_a$  une base de  $\mathfrak{g}$  et soit  $\mathcal{K}$  la forme de Killing définie sur cette algèbre, que l'on suppose non-dégénérée.  $\kappa_{ab}$  est le tenseur métrique de l'algèbre :  $\kappa_{ab} = \mathcal{K}(T_a, T_b)$ . Remarquons que, puisque la base est arbitraire (et donc non nécessairement orthonormale), la position des indices de générateurs importe. Le hamiltonien de la chaîne de spins s'écrira typiquement :

$$H = g \sum_i \kappa_{ab} T_i^a T_{i+1}^b,$$

pour une chaîne ferromagnétique et

$$H = -g \sum_i \kappa_{ab} \tilde{T}_{2i-1}^a T_{2i}^b + \kappa_{ab} T_{2i}^a \tilde{T}_{2i+1}^b,$$

pour une chaîne antiferromagnétique ( $g$  est positif). Dans la suite, j'emprunterai à M.R. Zirnbauer la terminologie suggestive d'*opérateur de Laplace-Casimir* pour  $H/g$  (terminologie valable *stricto sensu* pour le hamiltonien de la chaîne ferromagnétique).

Les générateurs  $T^a$  appartiennent à une représentation particulière de l'algèbre  $\mathfrak{g}$ . Les générateurs  $\widetilde{T^a}$  appartiennent à la représentation conjuguée. Le lien précis entre les générateurs et le modèle statistique doit, en principe, déterminer totalement ces représentations. Il est possible dès à présent d'en préciser la nature. Le hamiltonien  $H$  est la forme infinitésimale d'une matrice de transfert d'un modèle sur réseau. Les générateurs  $T^a$  sont donc des opérateurs qui agissent dans l'espace de Fock formé par les états *nombre-de-particules* du réseau. En conséquence, ils s'expriment en fonction d'opérateurs de création/annihilation des particules vivant sur le réseau. Cela restreint la nature de la représentation sans toutefois la spécifier entièrement<sup>4</sup>. Ce type de représentation admet un vecteur de plus haut ou de plus bas poids. À un facteur multiplicatif global près, ces poids sont des entiers car reliés au nombre de particules. Il reste à spécifier le vecteur de plus bas ou de plus haut poids correspondant, que l'on notera  $|\Omega\rangle$ . Il est clair qu'il sera entièrement déterminé par l'observable que l'on souhaite étudier sur le réseau (densité d'états, conductivité, etc). Si la représentation à laquelle les générateurs  $T^a$  appartiennent est de plus bas poids, la représentation conjuguée sera la représentation de plus haut poids duale de la précédente.

Les signes globaux des hamiltoniens précédents peuvent paraître surprenant. Ils dépendent de la compacité de la forme réelle du groupe de symétrie  $G$ . Dans les cas que nous rencontrerons dans cette thèse, la symétrie est non-compacte, et le signe est l'opposé du signe usuel (par exemple l'opposé du cas de la chaîne de spins  $s=1/2$  de Heisenberg).

Poursuivons notre raisonnement. On suppose maintenant qu'il existe une représentation matricielle de  $\mathfrak{g}$ . Cela n'est pas toujours le cas. Le cas échéant, l'astuce consiste à plonger l'algèbre dans une algèbre plus grande admettant une représentation matricielle, quitte à introduire un ou plusieurs degrés de liberté de jauge rendant compte des générateurs additionnels. Dans la suite, on appellera  $\rho$  l'homomorphisme de (super-)algèbre de  $\mathfrak{g}$  dans l'espace de Fock vers la représentation matricielle de l'algèbre. Terminons ces préliminaires par une remarque d'importance. On a supposé que la forme de Killing  $\mathcal{K}$  de  $\mathfrak{g}$  était non-dégénérée. Mais l'exception est la règle et cela n'est pas toujours le cas<sup>5</sup>. Par exemple la forme de Killing de  $\mathfrak{psu}(1,1|2)$  est nulle (voir appendice D). Toutefois tout autre produit scalaire invariant (non-dégénéré) pourra avantageusement se substituer à une forme de Killing défailante. Dans ce dernier cas, les calculs qui suivent s'en trouveront légèrement modifiés.

## Formule fondamentale

On suppose donnée une famille d'états cohérents  $|\mathcal{Q}\rangle$ , construite sur la représentation ci-dessus. Un état cohérent a la forme :  $|\mathcal{Q}\rangle = \exp(X)|\Omega\rangle$ , où  $X$  est un élément de  $\mathfrak{g}$  et où  $|\Omega\rangle$  est un vecteur de plus haut ou de plus bas poids de la représentation. Dans le processus de construction de l'intégrale fonctionnelle, il est nécessaire de calculer les éléments de matrice

<sup>4</sup>Il existe bien sûr des représentations de (super-)algèbres qui n'admettent pas d'écriture sous forme d'oscillateurs. C'est en ce sens qu'il y a restriction.

<sup>5</sup>Pour plus de précisions on se reportera à [46]. En particulier les superalgèbres  $A(n,n)$  ont une forme de Killing nulle. Puisque ces dernières algèbres ont un intérêt physique certain, la remarque n'est pas anecdotique.

$\langle \mathcal{Q}|T^a|\mathcal{Q}\rangle$ . Or on a :

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{Q}|T^a|\mathcal{Q}\rangle &= \langle \Omega|\exp(-X)T^a\exp(X)|\Omega\rangle = \langle \Omega|\exp(-\text{ad}(X))T^a|\Omega\rangle \\
 &= \langle \Omega|\rho^{-1}[\exp(-\text{ad}(\rho(X)))\rho(T^a)]|\Omega\rangle \\
 &= \langle \Omega|T^b|\Omega\rangle \mathcal{K}(\rho(T_b), \exp(-\text{ad}(\rho(X)))\rho(T^a)) \\
 &= \langle \Omega|T^b|\Omega\rangle \mathcal{K}(\exp(\text{ad}(\rho(X)))\rho(T_b), \rho(T^a)) \\
 &= \mathcal{K}(\exp(\text{ad}(\rho(X)))\left[\langle \Omega|T^b|\Omega\rangle \rho(T_b)\right], \rho(T^a)).
 \end{aligned}$$

Pour alléger l'écriture, on note :  $\Lambda = \frac{1}{\eta}\langle \Omega|T^b|\Omega\rangle \rho(T_b)$ . Dans tous les cas rencontrés, on verra que  $\Lambda^2 \propto \mathbb{I}$ . On demande donc  $\Lambda^2 = \mathbb{I}$ , ce qui fixe  $\eta$ .

On définit ensuite les matrices  $Q$  par  $Q = U\Lambda U^{-1}$ , où  $U = \exp(X)$ . Puisque  $Q$  appartient à la représentation matricielle de l'algèbre  $\mathfrak{g}$ , on peut la décomposer sur la base matricielle des générateurs :  $Q = Q_a \rho(T^a)$ . Alors

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{Q}|T^a|\mathcal{Q}\rangle &= \mathcal{K}(\exp(\text{ad}(\rho(X)))\cdot(\eta\Lambda), \rho(T^a)) \\
 &= \eta Q_b \mathcal{K}(\rho(T^b), \rho(T^a)) = \eta \kappa^{ba} Q_b = \eta Q^a.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Notons que jusqu'à ce point, il a suffi que  $\mathcal{K}$  soit un produit scalaire invariant (pas nécessairement la forme de Killing). Remarquons que comme  $\Lambda^2 = 1$ , on a  $Q^2 = 1$ .

On définit par  $H$  le groupe d'isotropie de  $\Lambda$ , dont les éléments appartiennent à  $G$ . L'orbite de  $\Lambda$  décrite par les  $Q$  est donc isomorphe à  $G/H$ .

### Éléments de matrice du Laplace-Casimir

$(\rho(T^a), \rho(T^b)) \rightarrow \text{STr}(\rho(T^a)\rho(T^b))$  est une forme non-dégénérée définie sur l'algèbre. Elle est donc proportionnelle à la forme de Killing :  $\mathcal{K}(\rho(T^a), \rho(T^b)) = \kappa \text{STr}(\rho(T^a)\rho(T^b))$ .  $\kappa^{-1}$  est l'indice de la représentation matricielle que nous avons adoptée pour  $\mathfrak{g}$ . On remarque que l'on a

$$\begin{aligned}
 \text{STr}(Q_1 Q_2) &= \text{STr}(Q_1^a \rho(T_a) Q_2^b \rho(T_b)) = Q_1^a Q_2^b \text{STr}(\rho(T_a)\rho(T_b)) \\
 &= Q_1^a Q_2^b \frac{1}{\kappa} \mathcal{K}(\rho(T_a), \rho(T_b)) = \frac{1}{\kappa} \kappa_{ab} Q_1^a Q_2^b,
 \end{aligned}$$

que l'on met à profit pour calculer les éléments de matrice du Laplace-Casimir :  $H_{L.C.} = \sum_i \kappa_{ab} T_i^a T_{i+1}^b$  :

$$\langle \mathcal{Q}|H_{L.C.}|\mathcal{Q}\rangle = \sum_i \kappa_{ab} \langle \mathcal{Q}|T_i^a|\mathcal{Q}\rangle \langle \mathcal{Q}|T_{i+1}^b|\mathcal{Q}\rangle = \eta^2 \sum_i \kappa_{ab} Q_i^a Q_{i+1}^b = \kappa \eta^2 \sum_i \text{STr}(Q_i Q_{i+1}).$$

Ce calcul valait pour la chaîne ferromagnétique. Voyons ce qu'il en est pour la chaîne antiferromagnétique.

### Matrice $Q$ pour la représentation conjuguée

La matrice conjuguée est définie par  $\tilde{Q} = U\tilde{\Lambda}U^{-1}$ , où  $\tilde{\Lambda} = \frac{1}{\eta}\langle \Omega|\tilde{T}^b|\Omega\rangle \rho(\tilde{T}_b)$ . Or les générateurs qui apparaissent dans la somme définissant  $\Lambda$  et  $\tilde{\Lambda}$ , sont des générateurs de Cartan. Les poids pris par les générateurs de la représentation conjuguée sur le fondamental sont alors les opposés

de ceux pris par les générateurs de la représentation originelle. Il en résulte que  $\tilde{\Lambda} = -\Lambda$ , et  $\tilde{Q} = -Q$ . Alors

$$\langle \mathcal{Q} | H_{L.C.} | \mathcal{Q} \rangle = \kappa \eta^2 \sum_i \text{STr} (\tilde{Q}_i Q_{i+1}) = -\kappa \eta^2 \sum_i \text{STr} (Q_i Q_{i+1}).$$

### Intégrale de chemin

L'utilisation de la résolution de l'identité sur les états cohérents conduit à la fonction de partition

$$Z = \int DQ \exp \left[ i \int_0^\beta d\tau \left( i \frac{\langle \mathcal{Q}(\tau) | \mathcal{Q}(\tau + a) \rangle - 1}{a} - H(Q(\tau)) \right) \right],$$

où  $a$  est le pas temporel du réseau et la mesure  $DQ$  inclut le bérézien des états cohérents. Le terme cinétique  $\int_0^\beta i \langle \mathcal{Q} | d | \mathcal{Q} \rangle$  qui s'ajoute à la forme fonctionnelle du hamiltonien  $-\int_0^\beta d\tau H(Q(\tau))$  est la phase de Berry.

### Phases de Berry

Dans un premier temps, nous allons calculer la contribution de la phase de Berry d'un spin. Pour cela nous mettons à profit une astuce formelle (due à Duhamel), qui, pour tout opérateur matriciel  $M$ , donne

$$\partial_x e^M = \int_0^1 du e^{M(1-u)} (\partial_x M) e^{Mu}.$$

Il en résulte que la phase de Berry du spin peut être écrite sous forme intégrale :

$$\begin{aligned} S_B &= i \int_0^\beta d\tau \int_0^1 du \langle \Omega | \exp[-uX] \frac{\partial X}{\partial \tau} \exp[uX] | \Omega \rangle \\ &= i \int_0^\beta d\tau \int_0^1 du \frac{\partial x_a}{\partial \tau} \langle \mathcal{Q}(u) | T^a | \mathcal{Q}(u) \rangle \\ &= i\eta \int_0^\beta d\tau \int_0^1 du \frac{\partial x_a}{\partial \tau} Q^a = -\eta \int_0^\beta d\tau \int_0^1 du x_a \frac{\partial Q^a}{\partial \tau} \\ &= -\kappa \eta i \int_0^\beta d\tau \int_0^1 du \text{STr} \left( \rho(X) \frac{\partial Q}{\partial \tau} \right). \end{aligned}$$

Les états cohérents ont été prolongés grâce au paramètre  $u \in [0, 1]$  en  $|\mathcal{Q}(u)\rangle = \exp[uX]|\Omega\rangle$ . Cela conduit au prolongement des matrices  $Q : Q^a = \langle \mathcal{Q}(u) | T^a | \mathcal{Q}(u) \rangle$  où, par souci de simplicité d'écriture, nous avons omis la dépendance de  $Q$  en  $\tau$  et  $u$ . La définition du prolongement des états cohérents impose les contraintes  $Q(u=0, \tau) = \Lambda$  et  $Q(u=1, \tau) = Q(\tau)$ . On demande également que  $Q(u, \tau=0) = Q(u, \tau=\beta)$ , que l'on a utilisé au cours du calcul lors d'une intégration par partie sur  $\tau$ . Par conséquent, les matrices  $Q$  prolongées sont définies sur un disque,  $u$  désignant la coordonnée radiale d'un point, et  $\tau$  sa coordonnée angulaire. Le champ de matrice  $Q(\tau)$  vivait originellement sur la circonférence de ce disque. Notons aussi qu'au cours du calcul nous avons eu recours à la décomposition  $X = x_a T^a$ .

Comme  $\{Q, \rho(X)\} = 0$ , on a

$$Q \frac{\partial Q}{\partial u} = Q \frac{\partial}{\partial u} (\exp(u \text{ad}(\rho(X))) \Lambda) = Q \text{ad}(\rho(X)) Q = -2\rho(X).$$

Cette identité permettant alors de conclure que

$$S_B = i \frac{\kappa\eta}{2} \int_0^\beta d\tau \int_0^1 du \text{STr} \left( Q \frac{\partial Q}{\partial u} \frac{\partial Q}{\partial \tau} \right).$$

### Action totale

Jusqu'à présent l'action était évaluée en temps réel. Nous passons maintenant en temps imaginaire ( $\tau = -ix$ ,  $\beta = iT$ ). Utilisant le résultat sur les phases de Berry, ainsi que la formule fondamentale (4.2) pour calculer la contribution fonctionnelle du hamiltonien, on obtient l'action totale :

$$S = \frac{\kappa\eta}{2} \sum_j (-\varepsilon)^j \int_0^T dx \int_0^1 du \text{STr} \left( Q_j \frac{\partial Q_j}{\partial u} \frac{\partial Q_j}{\partial x} \right) + \frac{\kappa\eta^2 g}{a} \int_0^T dx \sum_j \text{STr} (Q_j Q_{j+1}),$$

avec  $\varepsilon = 1$  pour la chaîne ferromagnétique et  $\varepsilon = -1$  pour la chaîne antiferromagnétique.

#### 4.4.2 Physique de basse énergie et modèle sigma non-linéaire

Dans cette section, on ne s'intéresse plus qu'à la chaîne de spins antiferromagnétique. Le paramètre d'ordre de basse énergie de la chaîne est alterné. En revanche, l'action a été construite de telle sorte que ce paramètre d'ordre soit lié à la partie uniforme du champ  $Q$ . On décompose alors le champ matriciel  $Q$  en le paramètre d'ordre  $\Omega_j$ , lentement variable, et un champ alterné (la partie uniforme du système d'origine) :

$$Q_j = \Omega_j \sqrt{1 - a^2 L_j^2} + (-1)^j a L_j.$$

Les champs ont été construits de telle façon qu'ils satisfassent  $\Omega_j^2 = 1$  et  $\{L_j, \Omega_j\} = 0$ .  $\Omega_j$  est l'aimantation alternée alors que  $a L_j$  est la densité de spin, un champ de fluctuation de faible amplitude. Nous prenons maintenant la limite continue de l'action :

$$\sum_j \text{STr} (Q_j Q_{j+1}) = -\frac{a^2}{2} \sum_j \text{STr} ((\partial_y \Omega_j)^2 + 4L_j^2) \mapsto -\frac{a}{2} \iint dxdy \text{STr} ((\partial_y \Omega)^2 + 4L^2),$$

et

$$\begin{aligned} & \sum_j (-1)^j \int_0^T dx \int_0^1 du \text{STr} (Q_j \partial_u Q_j \partial_x Q_j) \\ & \mapsto \frac{1}{2} \iint dxdy \text{STr} (\Omega \partial_x \Omega \partial_y \Omega) + \iint dxdy \text{STr} (L \Omega \partial_x \Omega). \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} S = & \frac{\kappa\eta}{4} \iint dxdy \text{STr} (\Omega \partial_x \Omega \partial_y \Omega) + \frac{\kappa\eta}{2} \iint dxdy \text{STr} (L \Omega \partial_x \Omega) \\ & - \frac{\kappa\eta^2 g}{2} \iint dxdy \text{STr} ((\partial_y \Omega)^2 + 4L^2). \end{aligned}$$

On intègre alors sur la fluctuation  $L$  :

$$\begin{aligned} S &= \frac{\kappa\eta}{4} \iint dx dy \text{STr} (\Omega \partial_x \Omega \partial_y \Omega) - \frac{\kappa}{32g} \iint dx dy \text{STr} ((\partial_x \Omega)^2) \\ &\quad - \frac{\kappa\eta^2 g}{2} \iint dx dy \text{STr} ((\partial_y \Omega)^2) \\ &= \frac{\kappa\eta}{4} \iint dx dy \text{STr} (\Omega \partial_x \Omega \partial_y \Omega) - \frac{\kappa\eta}{8} \iint dx dy \left[ \frac{1}{v} \text{STr} ((\partial_x \Omega)^2) + v \text{STr} ((\partial_y \Omega)^2) \right], \end{aligned}$$

où  $v = 4\eta g$ . Enfin, effectuant une transformation d'échelle anisotrope sur les directions d'espace et de temps imaginaire, nous aboutissons au modèle sigma non-linéaire défini sur le (super)espace symétrique  $G/H$  :

$$S = \frac{\kappa\eta}{8} \iint dx dy \epsilon^{\mu\nu} \text{STr} (\Omega \partial_\mu \Omega \partial_\nu \Omega) - \frac{\kappa\eta}{8} \iint dx dy \text{STr} (\partial_\mu \Omega \partial^\mu \Omega).$$

Cette analyse ne présume en rien de la convergence (ou non) de ces intégrales fonctionnelles. Un travail important est parfois nécessaire pour fonder correctement leur convergence. On en verra un exemple avec  $G = \text{OSp}(2|2)$  dans le chapitre 7.

## 4.5 Un modèle sigma non-linéaire pour l'effet Hall quantique entier

Nous allons maintenant faire usage du formalisme précédent sur la chaîne de spins du réseau de Chalker et Coddington. On rappelle que le hamiltonien du système dans sa version anisotrope s'écrit

$$\mathcal{H} = - \sum_i J \text{STr} (\mathcal{J}_{2i-1} \tilde{\mathcal{J}}_{2i}) + J' \text{STr} (\tilde{\mathcal{J}}_{2i} \mathcal{J}_{2i+1}) + \frac{J}{2} \text{STr} \Lambda (\tilde{\mathcal{J}}_1 + \mathcal{J}_N),$$

où les opérateurs de spin  $\mathcal{J}$  et  $\tilde{\mathcal{J}}$  ont été définis par les formules (4.3.3) et (4.3.4). Les générateurs constitutifs du superspin  $\mathcal{J}$  forment une algèbre  $\mathfrak{u}(1,1|2)$ , décrite dans l'appendice D. En se référant aux notations de cet appendice, il est facile de montrer que la partie du Casimir quadratique qui dépend des générateurs de Cartan de  $\mathfrak{u}(1,1|2)$  s'écrit :

$$\text{STr} (\mathcal{J}^2) = 2 (K_B^0)^2 - 2 (K_F^0)^2 + \frac{1}{2} \mathcal{I} \mathcal{C} + \dots$$

où  $K_B^0$ ,  $K_F^0$ ,  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{I}$  sont ses quatre générateurs de Cartan. Or  $\mathcal{C} = 0$  (la charge centrale de l'algèbre) est nulle puisque qu'il y a autant de particules avancées que de particules retardées en chaque site du réseau. On en déduit que le hamiltonien s'exprime exclusivement avec les générateurs de  $\mathfrak{psu}(1,1|2)$ .

### 4.5.1 Représentation

Le vecteur de plus bas poids est manifestement le vide bosonique et fermionique  $|\Omega\rangle$ . Comme  $K_B^0 = \frac{1}{2}(1 + n_a + n_b)$  et  $K_F^0 = \frac{1}{2}(-1 + n_f + n_g)$ , on en déduit immédiatement les poids de la représentation

$$K_B^0 \in \left[ \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \right], \quad K_F^0 \in \left[ -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right].$$

En particulier les générateurs de Cartan de  $\text{psu}(1, 1|2)$  agissent sur le vecteur de plus bas poids comme :

$$K_B^0 |\Omega\rangle = \frac{1}{2} |\Omega\rangle \quad , \quad K_F^0 |\Omega\rangle = -\frac{1}{2} |\Omega\rangle .$$

On définit alors les états cohérents

$$|\mathcal{Q}\rangle = \exp \left( zK_B^+ + \rho K_F^+ + \xi J^+ + \zeta J_{41}^+ - \bar{z}K_B^- - \bar{\rho}K_F^- - \bar{\xi}J^- - \bar{\zeta}J_{41}^- \right) |\Omega\rangle .$$

On remarque que seuls quatre opérateurs d'échelle, ainsi que leurs conjugués, participent à la construction d'un état cohérent. En effet tous les autres générateurs (autres que ceux de Cartan) annihilent l'état de plus bas poids. Il résulte des considérations de l'appendice D que l'on dispose d'une représentation matricielle de  $\text{psu}(1, 1|2)$ . On peut donc appliquer le formalisme qui précède. Comme la forme de Killing de  $\text{psu}(1, 1|2)$  est nulle, on choisit pour produit scalaire invariant  $(X, Y) \rightarrow \text{STr}(\rho(X)\rho(Y))$ . Cela ne modifie que peu la dérivation générale donnée précédemment et fixe  $\kappa$  à 1. On a alors :

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{1}{\eta} \langle \Omega | T^b | \Omega \rangle \rho(T_b) \\ &= \frac{1}{2\eta} \langle \Omega | K_B^0 | \Omega \rangle (2) \rho(K_B^0) + \frac{1}{2\eta} \langle \Omega | K_F^0 | \Omega \rangle (2) \rho(K_F^0) \\ &= \frac{1}{2\eta} (E_{11} - E_{22} - E_{33} + E_{44}) . \end{aligned}$$

Donc  $\eta = 1/2$ .

#### 4.5.2 Physique de basse énergie

Le modèle sigma non-linéaire associé s'écrit donc :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{16} \iint dx dy \epsilon^{\mu\nu} \text{STr}(\Omega \partial_\mu \Omega \partial_\nu \Omega) - \frac{1}{16} \iint dx dy \text{STr}(\partial_\mu \Omega \partial^\mu \Omega) \\ &\quad + \frac{J}{8a} \int_0^T dx \text{STr} \Xi(\Omega_N - \Omega_1) . \end{aligned}$$

La célérité  $v = 2J$  du modèle a été éliminée de l'expression au moyen d'une transformation d'échelle anisotrope sur les directions.

Nous avons donc vu quels pouvaient être les liens qui unissent modèle sur réseau, fermions de Dirac en milieu aléatoire, chaîne de superspins antiferromagnétique et modèle sigma non-linéaire. Pour clore ce chapitre, je donne un deuxième exemple d'apparition de fermions de Dirac (ou de Majorana) comme excitations effectives d'un modèle de physique de la matière condensée. La construction d'un modèle sigma non-linéaire mais aussi d'un modèle sur réseau et d'une chaîne de superspins sont l'objet du chapitre 7.

### 4.6 Supraconductivité, liquide nodal et fermions de Dirac

Dans les supraconducteurs conventionnels, la fonction d'onde du mouvement relatif des paires de Cooper est généralement de type s (isotrope). La fonction de gap est alors homogène et isotrope. En revanche, dans les Cuprates (les matériaux composites supraconducteurs à haute

température), le mouvement orbital peut être de symétrie p ou d, lorsque que les symétries des plans supra le permettent. La fonction de gap n'est plus isotrope. Dans le cas des fonctions d'onde d, le gap est de la forme

$$\Delta_{x^2-y^2} = \Delta_0(\cos(k_x a) - \cos(k_y a)) \quad \text{ou} \quad \Delta_{xy} = \Delta_0 \sin(k_x a) \sin(k_y a) .$$

De telles fonctions de gap ouvrent la possibilité d'excitations de masse nulle près des lignes nodales de la fonction de gap. Et de là l'apparition d'une symétrie lorentzienne, qui s'exprime dans le fait que les excitations sont décrites par des fermions de Majorana (ou de Dirac). Dans la littérature américaine, on appelle de tels systèmes, caractérisés par leurs propriétés de basse énergie, des *liquides nodaux*.

On a pu voir dans cette section un exemple des liens qui peuvent être établis entre un modèle sur réseau, un modèle sigma non-linéaire, une chaîne de superspins, et des fermions de Dirac. La mise à jour de ce type de relations [144] n'a toutefois pas permis d'obtenir des résultats quantitatifs sur l'effet Hall quantique entier. Le chapitre 7 est un exemple où ce type de liens peut être exploité avantageusement. La section qui suit est un préambule sur la physique du chapitre 7, et un nouvel exemple faisant apparaître les fermions de Dirac comme excitations de basse énergie.

#### 4.6.1 Excitations de masse nulle dans un supraconducteur d'onde $d$

Je décris ici la façon dont peuvent émerger des excitations de masse nulle dans un supraconducteur de symétrie d'onde  $d$ . Le hamiltonien décrivant les excitations particule-trou dans un supraconducteur est le hamiltonien effectif de Bogoliubov-De Gennes, qui s'écrit :

$$H = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} (\epsilon(\mathbf{k}) - \mu) c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{\mathbf{k}} \Delta(\mathbf{k}) c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger + \Delta^*(\mathbf{k}) c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow}.$$

$\mu$  est le potentiel chimique. Lorsque  $\mu = 0$ , on se trouve au demi-remplissage de bande. Pour un modèle sur réseau, l'énergie cinétique d'un mode  $\mathbf{k}$  est  $\epsilon(\mathbf{k}) = -2t(\cos(k_x a) + \cos(k_y a))$ . Ce hamiltonien peut être écrit de manière élégante (et pratique) grâce à l'introduction du spineur de Nambu-Gorkov  $\Phi_{\mathbf{k}} = (c_{\mathbf{k}\uparrow}, c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger)$  :

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \Phi_{\mathbf{k}}^\dagger [(\epsilon(\mathbf{k}) - \mu)\tau_z + \Delta(\mathbf{k})\tau_+ + \Delta^*(\mathbf{k})\tau_-] \Phi_{\mathbf{k}},$$

et d'un jeu de matrices de Pauli  $\tau_x$ ,  $\tau_y$  et  $\tau_z$  ( $\tau_{\pm} = \frac{1}{2}(\tau_x \pm i\tau_y)$ ). Sous cette forme le hamiltonien est aisément diagonalisable, d'énergies propres :

$$E_{\mathbf{k}} = \pm \sqrt{(\epsilon(\mathbf{k}) - \mu)^2 + |\Delta(\mathbf{k})|^2}.$$

Pour obtenir les points nodaux, il suffit donc d'annuler simultanément le gap et l'énergie cinétique. Dans les supraconducteurs de type onde  $d$ , le gap s'écrit  $\Delta = \Delta_0(\cos(k_x a) - \cos(k_y a))$ . Les lignes de gap nul sont les séparatrices des axes Ox et Oy. Elles intersectent la surface de Fermi en quatre points nodaux (voir figure 4.7), autour desquels on peut linéariser le hamiltonien. Les coordonnées de ces nœuds sont données par  $k_0 \equiv |k_x| = |k_y| = a^{-1} \arccos(-\mu/4t)$  et on note  $(\pm\pm)$  le point nodal de coordonnées  $(\pm k_0, \pm k_0)$  dans l'espace des moments.

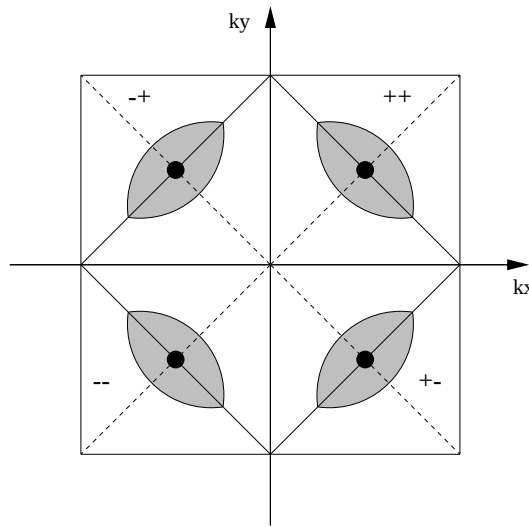


FIG. 4.7 – Positions des nœuds. L'isocontour  $\diamond$  représente la surface de Fermi au voisinage du demi-remplissage de bande ( $\mu \simeq 0$ ). Les séparatrices en pointillés représentent les lignes de paramètre d'ordre  $\Delta$  nul. Aux intersections des courbes se trouvent les nœuds. Les zones grisées correspondent idéalement aux domaines de validité des liquides nodaux.

#### 4.6.2 Description d'un nœud et Hamiltonien de Majorana

Par commodité, on effectue maintenant une rotation de  $\pi/4$  dans l'espace des moments (et des positions). Les nouvelles coordonnées s'écrivent  $K_x = (k_x + k_y)/\sqrt{2}$  et  $K_y = (k_x - k_y)/\sqrt{2}$ . Les points nodaux ont alors pour coordonnées

$$\mathbf{K}^{++} = (\sqrt{2}k_0, 0), \quad \mathbf{K}^{--} = (-\sqrt{2}k_0, 0), \quad \mathbf{K}^{(-+)} = (0, \sqrt{2}k_0), \quad \text{et} \quad \mathbf{K}^{(+-)} = (0, -\sqrt{2}k_0).$$

Concentrons-nous sur un voisinage du point nodal  $(++)$  de moment  $\mathbf{K}^{++}$ . On linéarise le gap et l'énergie cinétique en

$$\epsilon(K_x^{(++)} + q_x, K_y^{(++)} + q_y) \simeq \mu + 2\sqrt{2}t \sin(k_0 a) q_x \quad \Delta(K_x^{(++)} + q_x, K_y^{(++)} + q_y) \simeq \sqrt{2}\Delta_0 \sin(k_0 a) q_y.$$

On introduit les célérités  $v_x = 2\sqrt{2}t \sin(k_0 a)$  et  $v_y = \sqrt{2}\Delta_0 \sin(k_0 a)$ , de sorte que le hamiltonien effectif local au point nodal  $(++)$ , s'écrit

$$H_0^{(++)} \simeq \sum_{\mathbf{q}} \Phi_{\mathbf{K}^{(++)} + \mathbf{q}}^\dagger [v_x q_x \tau_z + v_y q_y \tau_x] \Phi_{\mathbf{K}^{(++)} + \mathbf{q}}.$$

On passe maintenant dans l'espace des positions en définissant

$$f_\uparrow^\dagger(x, y) = \sum_{\mathbf{k}} e^{ik_x x + ik_y y} c_\uparrow^\dagger(\mathbf{K}^{(++)} + \mathbf{K}), \quad f_\downarrow^\dagger(x, y) = \sum_{\mathbf{k}} e^{ik_x x + ik_y y} c_\downarrow^\dagger(-\mathbf{K}^{(++)} + \mathbf{K}),$$

où on se souvient que  $\mathbf{K}$  est relié à  $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$  par une rotation de  $\pi/4$ . Dans le secteur de spin  $\downarrow$ , on a pris garde au fait que les quasiparticules sont renversées dans le temps (comparées à celle du secteur  $\uparrow$ ) et l'origine du point nodal est fixée par  $-\mathbf{K}^{(++)}$  et non  $\mathbf{K}^{(++)}$ . De cette manière les modes de basse énergie peuvent être décrits par le seul moment  $\mathbf{K}$ .

Ainsi le hamiltonien s'écrit dans l'espace des positions

$$H_0^{(++)} = \int d^2x \left( f_{\uparrow}^{\dagger}, f_{\downarrow} \right) [v_x i \partial_x \tau_3 + v_y i \partial_y \tau_1] \begin{pmatrix} f_{\uparrow}^{\dagger} \\ f_{\downarrow} \end{pmatrix}.$$

Cela n'est pas la forme usuelle d'un hamiltonien de Majorana, et l'on préfère se ramener à un hamiltonien de forme standard en effectuant la transformation de Bogoliubov :

$$f_{\uparrow} = \frac{1}{2}(c_1 - ic_2 + c_1^{\dagger} - ic_2^{\dagger}) \quad \text{et} \quad f_{\downarrow} = \frac{1}{2}(ic_1 - c_2 - ic_1^{\dagger} + c_2^{\dagger}).$$

On prendra garde au fait que les nouveaux opérateurs  $c_a^{\dagger}$  et  $c_a$  ne sont qu'indirectement reliés aux opérateurs des quasiparticules du hamiltonien de Bogoliubov-De Gennes. Alors, ayant recours à quelques intégrations par partie comme  $\int d^2x c_1^{\dagger} \partial_x c_2 = \int d^2x c_2 \partial_x c_1^{\dagger}$ , on obtient pour forme définitive du hamiltonien des excitations libres :

$$H_0^{(++)} = \frac{1}{2} i v_x \int d^2x \sum_a \left( c_a^{\dagger} \partial_x c_a^{\dagger} + c_a \partial_x c_a \right) + \frac{1}{2} i v_y \int d^2x \sum_a \left( -i c_a^{\dagger} \partial_y c_a^{\dagger} + i c_a \partial_y c_a \right).$$

Il s'agit manifestement d'un hamiltonien libre impliquant deux fermions de Majorana. On traite de la même façon les trois autres point nodaux. On obtient aisément  $H_0^{(--)} = -H_0^{(++)}$ , alors que  $H_0^{(+-)}$  se distingue de  $H_0^{(++)}$  par l'interversion de  $v_x$  et  $v_y$ ; enfin  $H_0^{(-+)}$  s'obtient par l'inversion du signe global de  $H_0^{(+-)}$  ( $H_0^{(-+)} = -H_0^{(+-)}$ ).

### Perte locale de la symétrie de parité

Bien que le hamiltonien de Bogoliubov-De Gennes soit invariant par la transformation discrète  $x \leftrightarrow y$  (symétrie de parité)<sup>6</sup>, cette propriété est absente de chacun des hamiltoniens de Majorana pris individuellement. En effet l'opérateur de Dirac impose le choix d'une orientation (il est défini sur une variété nécessairement orientée), et brise donc la symétrie de renversement de la parité. Toutefois on ne doit pas en conclure que l'opération de linéarisation du hamiltonien de Bogoliubov-de Gennes est erronée. En effet, l'opération de parité transforme un hamiltonien  $H_0^{(st)}$  ( $s, t = \pm$ ) en le hamiltonien  $H_0^{(st')}$  ( $s, t' = \mp$ ). Les hamiltoniens  $H^{(++)}$  et  $H^{(--)}$  possèdent une orientation positive alors que les deux restants ( $H^{(+-)}$  et  $H^{(-+)}$ ) ont une orientation négative.

### 4.6.3 Liquide nodal désordonné

La prise en compte du désordre dans le supraconducteur peut avoir des conséquences profondes sur la physique du liquide nodal. Il est raisonnable de penser (comme on le fait en dimension 1) que les excitations de masse nulle persistent et que la description hamiltonienne ci-dessus du liquide nodal demeure. Dans ce qui suit, mais aussi et surtout dans le chapitre 7, on envisage le cas d'un supraconducteur dont le désordre se distingue par l'absence de symétrie particulière, comme l'invariance par renversement du temps et l'invariance par rotation du spin. Un tel système appartient à la classe de symétrie D (à ne pas confondre avec la symétrie cristalline d), dont une définition précise sera donnée au début du chapitre 7. Elle fut introduite par

<sup>6</sup>À dire vrai, cette symétrie peut être violée dans des supraconducteurs particuliers comme ceux possédant un paramètre d'ordre chirale (comme  $d_{x^2-y^2} + i d_{xy}$ ) ou bien sous un fort champ magnétique.

M.R. Zirnbauer et A. Atland [5] comme l'une des classes de symétrie servant à la description par les matrices aléatoires d'une interface métal-supra désordonnée.

On distingue deux types de désordre : le désordre induisant des transitions dans un même liquide nodal (diffusion en avant) et le désordre qui implique plusieurs nœuds (diffusion en arrière : l'interaction fait intervenir plusieurs moments, très différents).

Bien sûr le désordre doit être suffisamment faible. Par exemple la symétrie D peut être induite par des impuretés magnétiques qui brisent l'invariance par renversement du temps (par le champ magnétique local engendré) et l'invariance par rotation du spin par les couplages spins-orbites. La concentration en impuretés doit alors rester sous-critique afin que le champ magnétique local ne finisse pas par détruire la supraconductivité.

Comme ni la charge électrique, ni le spin d'une quasiparticule ne sont conservés dans la classe  $D$ , la seule constante du mouvement est l'énergie. Il en ressort que la diffusion ou la localisation d'une quasiparticule dans un supraconducteur de la classe  $D$  ne peut être étudiée que par l'intermédiaire du transport *thermique*.

### Désordre intra-nœud

Commençons donc par le cas où la diffusion sur les impuretés s'effectue à l'intérieur d'un même liquide nodal et continuons avec le nœud  $(++)$ . La perturbation (locale) la plus générale s'écrit :

$$H_1^{(++)} = \frac{1}{2} \int d^2x \left( \sum_{ab} c_a^\dagger M_{ab} c_b + \Delta c_1^\dagger c_2^\dagger + \text{h.c.} \right),$$

où  $\Delta$  est maintenant une fonction de gap aléatoire et  $M_{ab} = M_{ba}^*$  est une matrice de masse  $2 \times 2$  qui fluctue de façon aléatoire dans l'espace des positions. Ceci dit, étant donnée la succession de transformations qui a précédé, il n'y aucune raison d'identifier précisément ces fonctions à un potentiel scalaire aléatoire, paramètre d'ordre supraconducteur aléatoire ou autres désordres de source donnée. Elles n'en sont que des combinaisons linéaires.

Considérons le hamiltonien total  $H^{(++)} = H_0^{(++)} + H_1^{(++)}$ . L'étude de ses propriétés et notamment de sa densité d'états moyenne sera menée dans le chapitre 7. Pour le moment, on cherche à mettre en forme son expression. Pour cela, on choisit des unités de longueur anisotropiques dans les directions de  $Ox$  et  $Oy$ , de façon à ce que  $v_x = v_y = 1$ , quitte à les rétablir (dans leur complète anisotropie) ultérieurement. Le hamiltonien total s'écrit donc

$$H^{(++)} = \frac{1}{4} \int d^2x \left( c_a^\dagger c_a \right) \cdot \mathcal{H}^{(++)} \cdot \begin{pmatrix} c_a \\ c_a^\dagger \end{pmatrix} + \text{const}, \quad (4.3)$$

$$\mathcal{H}^{(++)} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & i\partial_1 + \partial_2 & \Delta \\ M_{21} & M_{22} & -\Delta & i\partial_1 + \partial_2 \\ i\partial_1 - \partial_2 & -\bar{\Delta} & -M_{11} & -M_{21} \\ \bar{\Delta} & i\partial_1 - \partial_2 & -M_{12} & -M_{22} \end{pmatrix}.$$

Il est équivalent d'étudier le hamiltonien de première quantification  $\mathcal{H}^{(++)}$  ou celui de seconde quantification  $H^{(++)}$ . On choisit pour désordre le bruit blanc gaussien suivant

$$\begin{aligned} \langle M_{ab}(\mathbf{x}) \bar{M}_{cd}(\mathbf{x}') \rangle &= g \delta_{ac} \delta_{bd} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') , \\ \langle \Delta(\mathbf{x}) \bar{\Delta}(\mathbf{x}') \rangle &= g \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') , \end{aligned}$$

avec pour valeurs moyennes  $\langle M_{ab} \rangle = \langle \Delta \rangle = 0$ .

### Désordre inter-nœuds

De façon très générale, on attend d'un couplage entre nœuds qu'il réduise le groupe de symétrie produit des quatre groupes de symétrie des quatre liquides nodaux, en le sous-groupe diagonal du produit, qui est égal à l'un des quatre groupes. Il est donc raisonnable de penser, que les champs effectifs des quatre liquides nodaux se verrouillent les uns sur les autres. Cela suppose bien entendu que le désordre entre nœuds soit suffisant pour qu'il y ait suffisamment de diffusion d'un liquide à l'autre. On anticipe également que dans une telle limite la symétrie naturelle du supraconducteur sous la parité soit rétablie.

L'étude la physique de basse énergie de ce liquide nodal en présence d'impuretés magnétiques sera précisément l'objet majeur du chapitre 7.



## Chapitre 5

# Quelques traits spécifiques à ces systèmes désordonnés

Ce chapitre est consacré à deux propriétés de l'effet Hall quantique entier. Il se subdivise logiquement en deux sections.

Dans la première, j'obtiens une expression pour la somme des exposants de Lyapunov positifs du modèle de Chalker et Coddington. Cette somme s'identifie à une énergie libre. On constatera que, contrairement au cas non-désordonné, la somme ne présente pas de singularité. Nous verrons que cela est lié au fait que la charge centrale du modèle est nulle.

La deuxième section est consacrée à un travail numérique. J'y présente la notion de multifractalité d'une fonction d'onde au point critique. Je montre que le spectre multifractal de la fonction d'onde étendue sur le réseau de Chalker et Coddington est numériquement identique à celui obtenu en diagonalisant un hamiltonien de Landau en potentiel scalaire. Ce travail n'a toutefois pas été publié, m'étant aperçu un peu trop tard que Klesse et Metzler avaient eu cette idée deux ans avant moi.

Au cours de l'élaboration de ces deux petits résultats, j'ai bénéficié des nombreux conseils de Vincent Pasquier. Le calcul de la somme des Lyapunov n'aurait pas pu être mené sans son aide.

### 5.1 Énergie libre et modèle de l'effet Hall quantique entier sur réseau

#### 5.1.1 Matrice de transfert et relation de récurrence

On utilise ici le modèle sur réseau de Chalker-Coddington pour simuler la transition de l'effet Hall quantique entier [27]. En particulier nous avons recours à la technique de la matrice de transfert. Il nous faut donc écrire la matrice de transfert pour le réseau de Chalker et Coddington.

Nous commençons par introduire les matrices suivantes qui appartiennent au groupe non-compact  $U(N, N)$

$$M = \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \otimes \mathbb{I}_N = \begin{pmatrix} \cosh(\theta)\mathbb{I}_N & \sinh(\theta)\mathbb{I}_N \\ \sinh(\theta)\mathbb{I}_N & \cosh(\theta)\mathbb{I}_N \end{pmatrix}$$

où  $N$  est le nombre de canaux du réseau<sup>1</sup>.  $M'$  sera une matrice identique à la matrice  $M$  à

---

<sup>1</sup>Pour un système mésoscopique quasi-unidimensionnel, un canal est un des modes induits par la quantification

ceci près que  $\theta'$  est son argument. On définit maintenant la matrice unitaire  $T$  (appartenant à  $U(N)$ ) comme la matrice de permutation qui est un cycle sur la totalité des vecteurs de la base canonique :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de transfert d'une tranche complète du réseau peut donc s'écrire :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} c\mathbb{I}_N & s\mathbb{I}_N \\ s\mathbb{I}_N & c\mathbb{I}_N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{I}_N & 0 \\ 0 & T^\dagger \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c'\mathbb{I}_N & s'\mathbb{I}_N \\ s'\mathbb{I}_N & c'\mathbb{I}_N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{I}_N & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi' & 0 \\ 0 & \phi' \end{pmatrix}.$$

où  $c$  est l'abréviation de  $\cosh(\theta)$ ,  $c'$  l'abréviation de  $\cosh(\theta')$ , et ainsi de suite.  $\varphi$ ,  $\varphi'$ ,  $\phi$  and  $\phi'$  sont des matrices diagonales d'unimodulaires, dont les phase sont des variables réelles, aléatoires, indépendantes, et identiquement et uniformément distribuées sur  $[0, 2\pi]$ .

Notons  $\mathcal{M}_n$  la matrice de transfert après  $n$  itérations. Puisque  $\mathcal{M}_n$  appartient au groupe pseudo-unitaire  $U(N, N)$ , nous pouvons la "diagonaliser" selon

$$\mathcal{M}_n = \begin{pmatrix} U'_n & 0 \\ 0 & V'_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{1+\Lambda_n} & \sqrt{\Lambda_n} \\ \sqrt{\Lambda_n} & \sqrt{1+\Lambda_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_n & 0 \\ 0 & V_n \end{pmatrix}.$$

$\Lambda_n$  est une matrice diagonale réelle positive. Les matrices  $U_n$ ,  $V_n$ ,  $U'_n$  et  $V'_n$  appartiennent à  $U(N)$ . Par la suite les  $N$  coefficients de  $\Lambda_n$  seront notés  $\Lambda_n^{(i)}$ .

À chaque étape de la construction itérative de la matrice de transfert, la relation de récurrence s'écrit

$$\mathcal{M}_{n+1} = \mathcal{M}_n \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{I}_N & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c\mathbb{I}_N & s\mathbb{I}_N \\ s\mathbb{I}_N & c\mathbb{I}_N \end{pmatrix},$$

si  $n$  est pair (pour fixer les idées) et de même pour  $n$  impair avec  $\theta$  et  $T$  changés en  $\theta'$  et  $T^\dagger$ . Nous pouvons faire le choix  $\varphi = \mathbb{I}$ , qui s'apparente à une fixation de la jauge associée au processus de détermination des phases aléatoires et qui, par conséquent, n'altère pas les résultats issus du modèle.

On suppose maintenant que la matrice de permutation  $T$  a absorbé la matrice des unimodulaires aléatoires  $\phi$ . Elle demeure donc une matrice unitaire. Sous la forme d'une représentation en blocs de matrice, la relation de récurrence devient :

$$\begin{cases} U_n^{\dagger} \cdot U'_{n+1} \cdot \sqrt{\Lambda_{n+1}} \cdot U_{n+1} = \cosh \theta \cdot \sqrt{\Lambda_n} \cdot U_n + \sinh \theta \cdot \sqrt{\Lambda_n} V_n \cdot T \\ V_n^{\dagger} \cdot V'_{n+1} \cdot \sqrt{\Lambda_{n+1}} \cdot V_{n+1} = \sinh \theta \cdot \sqrt{\Lambda_n} \cdot U_n + \cosh \theta \cdot \sqrt{\Lambda_n} V_n \cdot T \\ V_n^{\dagger} \cdot V'_{n+1} \cdot \sqrt{\Lambda_{n+1}} \cdot U_{n+1} = \cosh \theta \cdot \sqrt{\Lambda_n} \cdot U_n + \sinh \theta \cdot \sqrt{\Lambda_n} V_n \cdot T \\ U_n^{\dagger} \cdot U'_{n+1} \cdot \sqrt{\Lambda_{n+1}} \cdot V_{n+1} = \sinh \theta \cdot \sqrt{\Lambda_n} \cdot U_n + \cosh \theta \cdot \sqrt{\Lambda_n} V_n \cdot T \end{cases}$$

On a utilisé le fait qu'à la limite asymptotique  $\sqrt{\Lambda_n} \simeq \sqrt{1+\Lambda_n}$ .

des directions transverses. Pour obtenir un système bidimensionnel, il "suffit" d'augmenter indéfiniment le nombre de modes transverses dans une des directions perpendiculaires.

### 5.1.2 Énergie libre (somme des exposants de Lyapunov)

Raisonnons sur le premier bloc de la matrice de transfert, qui est indexé par l'angle  $\theta$ . Rappelons que toutes la phases ont été incluses dans la matrice  $T$ . Nous prenons le déterminant des deux membres de la première des quatre relations de récurrence. Ce qui conduit à

$$\det(U_n^\dagger \cdot U'_{n+1} \cdot \sqrt{\Lambda_{n+1}} \cdot U_{n+1}) = \det(\cosh \theta \cdot \sqrt{\Lambda_n} \cdot U_n + \sinh \theta \cdot \sqrt{\Lambda_n} \cdot V_n \cdot T).$$

Puis on factorise chacun des deux membres selon

$$\det(U_n^\dagger \cdot U'_{n+1} \cdot U_{n+1}) \cdot \det(\sqrt{\Lambda_{n+1}}) = \det(\sqrt{\Lambda_n}) \cdot \det(U_n) \cdot \det(\cosh \theta I_N) \cdot \det(I_N + \tanh \theta \cdot V_n \cdot T \cdot U_n^\dagger).$$

Nous en prenons ensuite le module et aboutissons à :

$$\det(\sqrt{\Lambda_{n+1}}) = \det(\sqrt{\Lambda_n}) \cdot (\cosh \theta)^N \cdot |\det(I_N + \tanh \theta \cdot V_n \cdot T \cdot U_n^\dagger)|,$$

ou

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \ln \frac{\Lambda_{n+1}^{(i)}}{\Lambda_n^{(i)}} = N \cdot \ln \cosh \theta + \ln |\det(I + \tanh \theta \cdot V_n \cdot T \cdot U_n^\dagger)|.$$

Pour obtenir la somme des exposants de Lyapunov, on souhaite effectuer la moyenne sur l'indice  $n$ , en utilisant l'hypothèse d'ergodicité du système,

$$\lambda_i = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \sum_{n=1}^{2L} \ln \frac{\Lambda_{n+1}^{(i)}}{\Lambda_n^{(i)}}.$$

Puis, ajoutant les contributions en  $\theta$  et  $\theta'$  et sommant les  $N$  exposants

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \lambda_i &= \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \ln \frac{\Lambda_{2n+2}^{(i)}}{\Lambda_{2n+1}^{(i)}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \ln \frac{\Lambda_{2n+1}^{(i)}}{\Lambda_{2n}^{(i)}} \right] = N \ln(\cosh \theta \cosh \theta') \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L \left[ \ln |\det(I + \tanh \theta \cdot V_{2n+1} \cdot T \cdot U_{2n+1}^\dagger)| + \ln |\det(I + \tanh \theta' \cdot V_{2n} \cdot T \cdot U_{2n}^\dagger)| \right]. \end{aligned}$$

On suppose qu'il existe une distribution asymptotique et stationnaire  $P$  pour les matrices unitaires  $U_n$  et  $V_n$ , liées à la matrice de réflexion du système. Nous avons alors, par exemple pour la partie dépendant de  $\theta$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L \ln |\det(I + \tanh \theta \cdot V_{2n+1} \cdot T \cdot U_{2n+1}^\dagger)| \\ &= \prod_{i=1}^N \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\varphi_i \int dP(U, V) \cdot \text{Re} \left( \ln \det(I + \tanh \theta \cdot V \cdot T \cdot U^\dagger) \right) \\ &= \int dP(U, V) \text{Re} \left( \prod_{i=1}^N \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\varphi_i \ln \det(I + \tanh \theta \cdot V \cdot T \cdot U^\dagger) \right) \\ &= \int dP(U, V) \text{Re} \left( \prod_{i=1}^N \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz_i}{z_i} \text{Tr} \ln(I + \tanh \theta \cdot V \cdot T \cdot U^\dagger) \right). \end{aligned}$$

Puisque  $||\tanh \theta V.T.U^\dagger|| = \tanh \theta . ||V.T.U^\dagger|| = \tanh \theta < 1$  car  $U$ ,  $V$  et  $T$  sont unitaires, les coupures des logarithmes sont extérieures au chemin d'intégration. La fonction intégrée est alors holomorphe. Appliquant le théorème des résidus, l'intégrale prend la valeur de la fonction au point  $z_i = 0$ , ce qui donne une contribution nulle ! Donc :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_i = \ln(\cosh(\theta) \cosh(\theta')).$$

J'ai pu vérifier numériquement l'exactitude de cette relation. Pour  $N = 1$ , la relation était connue de J.T. Chalker mais non publiée. On peut interpréter la somme des exposants Lyapunov positifs du modèle comme son énergie libre.  $\theta$  et  $\theta'$ , qui sont liés dans le cas isotrope, sont une mesure de l'énergie du système. On en conclut que l'énergie libre n'est pas singulière. Au contraire, en l'absence de désordre, l'énergie libre devient singulière. Il est facile de montrer, en utilisant les résultats de la sous-section qui suit, que l'énergie libre se comporte comme  $(\theta - \theta')^2 \ln |\theta - \theta'|$  (analogue au modèle d'Ising) près du point critique  $\theta = \theta'$ .

Comme je l'ai mentionné, il est très instructif de comparer ces résultats au cas sans désordre.

### 5.1.3 La charge centrale dans le cas pur

En l'absence de désordre, le réseau correspond à un réseau privé de ses phases aléatoire mais avec un demi-flux élémentaire ( $\pi$  pour nous, un demi-fluxon pour la physique sous-jacente) par plaquette. Dans ce qui suit  $\lambda_k$  désigne une valeur propre de la matrice de transfert alors que  $\ln \lambda_k$  correspond à l'exposant de Lyapunov associé.

Après diagonalisation de la matrice de transfert par transformée de Fourier discrète, on obtient le spectre du réseau :

$$\{\ln \lambda_k, k \in [0, N-1]\} \quad \text{avec} \quad \lambda_k^2 - 2[\cosh \theta \cosh \theta' + \cos \zeta_k \sinh \theta \sinh \theta'] \lambda_k + 1 = 0 \quad \text{et} \quad \zeta_k = \frac{2\pi k}{N}.$$

L'énergie libre du modèle est  $F_N = \sum_{k=0}^{N-1} \ln \lambda_k$ . On définit  $\lambda_k = \exp \alpha_k$  avec

$$\cosh \alpha_k = \cosh \theta \cosh \theta' + \cos \zeta_k \sinh \theta \sinh \theta'.$$

On utilise la représentation intégrale suivante :

$$\alpha = \ln 2 + f(\alpha) = \ln 2 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\omega \ln(\cosh \alpha + \cos(\omega)).$$

Par conséquent

$$F_N = N \ln 2 + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\omega \ln(\cosh \theta \cosh \theta' + \cos \zeta_k \sinh \theta \sinh \theta' + \cos(\omega)).$$

On entreprend maintenant de développer thermodynamiquement l'énergie libre. On peut montrer qu'en toute généralité, pour une fonction  $f$  deux fois continûment dérivable

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) d\omega = 2\zeta \sum_{k=-M}^{k=M} f(\zeta_k) + \frac{1}{3} \zeta^3 \sum_{k=-M}^{k=M} f^{(2)}(\zeta_k) + O(\zeta^5),$$

avec  $\zeta = \pi/N$ . On tire de la formule qui précède :

$$F_N = N \left( \ln 2 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) d\omega \right) - \frac{\pi}{12N} (f'(\pi) - f'(-\pi)) + O\left(\frac{1}{N^4}\right).$$

Lorsque  $\theta \neq \theta'$ ,  $f'$  est bien définie et périodique. Donc  $f'(\pi) = f'(-\pi)$ . Alors  $F_N = N\varphi$ , où

$$\varphi = \ln 2 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) d\omega$$

est la densité (par canal) continue d'énergie libre.

Au point critique, des effets de taille finie sont attendus qui permettent le calcul de la charge centrale. Notamment  $f'$  devient singulière, mais encore avec une limite de  $\pi$  par valeur négative et  $-\pi$  par valeur positive. Nous obtenons  $f'(\pi) - f'(-\pi) = 2 \sinh \theta$ . Finalement

$$F_N = N\varphi + \frac{\pi s}{6N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Le facteur  $s = \sinh \theta$  rend compte de l'anisotropie du modèle. Dans le cas isotrope ( $\theta = \theta' = \ln \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ), on a  $\sinh \theta = 1$ . On peut alors conclure que la charge centrale du modèle isotrope est  $c = 1$ . Elle peut être interprétée comme la manifestation de la présence d'un fermion complexe de Dirac (deux fermions de Majorana). On retrouve là le fermion de Dirac révélé par le calcul de Chalker et Ho présenté dans le chapitre 4.

Ce calcul nous permet d'affirmer que la charge centrale du modèle désordonné pourrait être 0 puisque aucun terme d'énergie du vide n'apparaît dans le développement de taille finie de l'énergie libre. Bien que cette conclusion soit triviale lorsque que l'on a recours aux techniques des répliques où à la méthode supersymétrique (la fonction de partition vaut alors 1!), c'est ici moins évident parce qu'il n'a pas été nécessaire d'introduire soit des partenaires supersymétriques, soit des répliques, qui n'apparaissent que comme des astuces techniques.

On se place désormais au point critique et on s'intéresse aux propriétés de la fonction d'onde de l'effet Hall quantique entier à la transition. En particulier, on a à l'esprit pour cette fonction d'onde l'image d'un amas de *percolation quantique*, jouissant de propriétés fractales.

## 5.2 Multifractalité au point critique

La fonction d'onde délocalisée dans la transition de l'effet Hall entier présente des propriétés statistiques de distribution tout à fait remarquables. Non seulement la mesure qui lui est associée (module carré de l'amplitude) est singulière, comme l'est l'amas percolant de la percolation classique (que l'on peut voir comme une mesure homogène sur l'ensemble fractal que constitue son support), mais encore elle présente un continuum de singularités d'intensités différentes. Chacune de ces singularités peut être observée au voisinage des points d'un support de dimension fractale propre. C'est pourquoi l'on parle de *spectre multifractal*.

Je vais maintenant résumer les définitions quantitatives de la multifractalité et donner notamment une dérivation heuristique (originale?) de l'algorithme (pour la première fois proposé dans [32]) de calcul numérique du spectre de singularité.

### 5.2.1 Spectre des singularités d'une mesure

On se donne une mesure  $\psi$  normalisée définie dans le plan. Elle peut être singulière. En tout point  $x$  de son support, on définit *un exposant de singularité*  $\alpha$  (modulo la partie régulière de la mesure, il est aussi appelé exposant de *Lipschitz-Hölder*) par

$$\psi(B(x, \epsilon)) \sim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^\alpha$$

où  $B(x, \epsilon)$  est la boîte de côté  $\epsilon$  centrée en  $x$  (un carré dans le plan).

On peut alors caractériser l'ensemble des points possédant la même singularité  $\alpha$  par sa dimension fractale. On la note  $f(\alpha)$ . Plus précisément  $f(\alpha)$  est définie par le comportement du nombre minimum de boîtes disjointes de taille  $\epsilon$ ,  $N_\alpha(\epsilon)$ , nécessaires au recouvrement de l'ensemble des points de singularité  $\alpha$ , dans la limite où  $\epsilon$  tend vers 0. Le comportement de  $N_\alpha(\epsilon)$

$$N_\alpha(\epsilon) \sim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-f(\alpha)}$$

définit un *spectre des singularités*, fonction de  $\alpha$  à valeurs dans une partie de la droite réelle. Dans le cas d'une mesure homogène possédant pour support un ensemble fractal de dimension  $d_f$ ,  $f$  vaut simplement  $f(\alpha) = d_f \cdot 1_{\{\alpha=d_f\}}$ .

### 5.2.2 Spectre multifractal associé au spectre de singularité

Le spectre des singularités d'une mesure multifractale est une description *locale* de l'objet. Il est possible de relier biunivoquement ce spectre au spectre dit *multifractal* qui donne une description *globale* de la mesure. La mesure de ce dernier spectre se prête donc mieux au calcul numérique.

Il s'agit de généraliser la notion de dimension fractale à une famille continue de dimensions fractales (parfois appelées *dimensions de Renyi*) décrivant la mesure. Nous avons mentionné comment la donnée d'un ensemble de dimensions fractales intervenait dans la description locale des singularités de la mesure. A contrario, la définition du spectre multifractal fait appel à une analyse globale.

Pour tout  $q$  réel, on définit l'exposant  $\tau(q)$  de la façon suivante. Pour tout  $\epsilon$  positif, on choisit un recouvrement du support de la mesure par des boîtes  $B_i(\epsilon)$  au nombre de  $N_q(\epsilon)$ . Alors on déduit l'exposant  $\tau(q)$  du comportement de la quantité

$$\sum_{i=1}^{N_q(\epsilon)} \psi(B_i(\epsilon))^q \sim \epsilon^{\tau(q)}$$

lorsque  $\epsilon$  tend vers 0. Le spectre des dimensions fractales généralisées à proprement parler est donné par la fonction

$$D(q) = \frac{\tau(q)}{q-1}.$$

Pour  $q = 0$ , on retrouve la dimension fractale du support de la mesure.

Supposons maintenant connu le spectre des singularités de la mesure. Essayons d'en déduire le spectre multifractal. On souhaite exprimer la somme des moments  $\sum_{i=1}^{N_q(\epsilon)} \psi(B_i(\epsilon))^q$  sous forme intégrale. On attribue aux exposants de singularité  $\alpha$  une densité  $\rho(\alpha)N_\alpha(\epsilon)d\alpha$  où  $\rho(\alpha)$  est une mesure régulière normalisée.  $\rho(\alpha)d\alpha$  est proportionnel au nombre de sous-ensembles fractals de

singularité comprise entre  $\alpha$  et  $\alpha + d\alpha$ . Cette densité mesure donc le volume de l'ensemble des points de singularité compris entre  $\alpha$  et  $\alpha + d\alpha$ . Alors

$$\sum_{i=1}^{N_q(\epsilon)} \psi(B_i(\epsilon))^q \sim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \rho(\alpha) \epsilon^{-f(\alpha)+q \cdot \alpha} d\alpha.$$

Évaluons le membre de droite. Dans la limite où  $\epsilon$  tend vers 0, l'intégrale est dominée par le minimum que prend l'exposant de  $\epsilon$ . Précisément l'intégrande est dominée par la valeur  $\min_{\alpha}(q \cdot \alpha - f(\alpha))$ . Donc  $\tau(q) = \min_{\alpha}(q \cdot \alpha - f(\alpha))$ . Il en résulte que  $\tau(q)$  est la transformée de Legendre de  $f(\alpha)$ , toutes deux fonctions des variables conjuguées  $q$  et  $\alpha$ . Dans le cas où  $f(\alpha)$  est  $C^1$  continue et de dérivée continue, (en pratique c'est le cas), la transformation de Legendre s'écrit

$$q = \frac{df(\alpha)}{d\alpha} \quad \tau(q) = q \cdot \alpha - f(\alpha).$$

### Singularité la plus fréquente

Pour  $q = 0$  on observe que  $-\tau(0) = D(0) = \max_{\alpha} f(\alpha)$ , qui n'est autre que la dimension fractale du support de la mesure  $\psi$ . La valeur de la singularité  $\alpha$  correspondant à ce maximum de  $f$  est notée usuellement  $\alpha_0$  et correspond à la singularité la plus fréquente de la mesure.

### Singularités la plus faible et la plus forte

Lorsque  $q$  tend vers  $-\infty$ ,  $\tau(q) \sim q \cdot \max(\alpha)$  et donc  $D(-\infty) = \alpha_{\max}$ . Il s'agit de la singularité la plus faible pour la mesure. De même lorsque  $q$  tend vers  $\infty$ ,  $\tau(q) \sim q \cdot \min(\alpha)$  et donc  $D(\infty) = \alpha_{\min}$ . Il s'agit de la singularité la plus forte pour la mesure.

### Singularité de plus grande contribution

**Singularité dominante pour la mesure** Comme la mesure est normalisée, on a  $\tau(q = 1) = 0$ . Donc  $\min_{\alpha}(\alpha - f(\alpha)) = 0$ , ce qui signifie que le graphe du spectre de singularité est sous la diagonale  $f(\alpha) = \alpha$ . De plus le minimum est atteint pour  $q = 1$ . L'exposant de singularité  $\alpha_1$  est le plus probable au sens de la mesure  $\psi$ . En effet l'ensemble fractal  $S(\alpha)$  associé à l'exposant  $\alpha$  contribue dans la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  à hauteur de  $N_{\alpha}(\epsilon) \cdot \epsilon^{\alpha}$  dans la somme de la mesure, soit  $\epsilon^{\alpha - f(\alpha)}$ , qui est maximum pour  $\alpha_1$ .

**Concentration de la mesure** On cherche à évaluer le rapport

$$r = \frac{\sum_{\alpha_1 - \sigma < \alpha < \alpha_1 + \sigma} \psi(S(\alpha))}{\sum_{-\infty < \alpha < +\infty} \psi(S(\alpha))}$$

On sait que l'ensemble  $S(\alpha)$  contribue dans la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  à hauteur de  $N_{\alpha}(\epsilon) \cdot \epsilon^{\alpha}$  dans ces sommes. Alors

$$r = \frac{\int_{\alpha_1 - \sigma}^{\alpha_1 + \sigma} \epsilon^{\alpha - f(\alpha)} \rho(\alpha) d\alpha}{\int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon^{\alpha - f(\alpha)} \rho(\alpha) d\alpha}.$$

Or on a  $\alpha - f(\alpha) = -\frac{1}{2}f''(\alpha_1)(\alpha - \alpha_1)^2 + o((\alpha - \alpha_1)^2)$ , donc si  $a = f''(\alpha_1)$  (qui est négatif car  $f$  est toujours concave), on obtient

$$\begin{aligned} r &= \frac{\int_{\alpha_1-\sigma}^{\alpha_1+\sigma} \epsilon^{\alpha-f(\alpha)} \rho(\alpha) d\alpha}{\int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon^{\alpha-f(\alpha)} \rho(\alpha) d\alpha} = \frac{\int_{-\sigma}^{+\sigma} \epsilon^{-\frac{1}{2}a\eta^2} \rho(\alpha_1 + \eta) d\eta}{\int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon^{-\frac{1}{2}a\eta^2} \rho(\alpha_1 + \eta) d\eta} \\ &= \frac{\int_{-\sigma\sqrt{a\ln\epsilon}}^{+\sigma\sqrt{a\ln\epsilon}} e^{-\frac{1}{2}u^2} \rho(\alpha_1 + \frac{u}{\sqrt{a\ln\epsilon}}) du}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} \rho(\alpha_1 + \frac{u}{\sqrt{a\ln\epsilon}}) du} = \frac{\int_{-\sigma\sqrt{a\ln\epsilon}}^{+\sigma\sqrt{a\ln\epsilon}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du} \end{aligned}$$

et lorsque, à  $\sigma$  aussi petit que l'on veut (mais fixé),  $\epsilon \rightarrow 0$ , alors  $r$  tend vers 1. On en déduit que la mesure se concentre (avec probabilité 1) à l'intérieur de  $S(\alpha_1)$ .

## Le nombre de Renyi d'ordre 2 $D(2)$ et ses interprétations

**Inverse du quotient de participation** L'inverse du quotient de participation (IPR) a été introduit comme critère de localisation d'une fonction d'onde en milieu désordonné [136]. Pour une fonction d'onde solution d'un problème continu et supposée suffisamment régulière, il prend la forme  $P(\psi) = \int_{\Omega} |\psi|^4(\vec{r}) d\vec{r}$ .

Considérons une fonction d'onde bidimensionnelle dans une boîte carrée  $\Omega$  de taille unité. La mesure à considérer est  $|\psi|^2$ . On suppose cette fonction d'onde uniforme sur son support  $\text{Supp}(\psi) \subset \Omega$  et de valeur  $\frac{1}{\sqrt{r}}$  réelle. Comme la mesure associée est normalisée, il en résulte que  $r$  représente la mesure de son support. Alors, pour cet exemple,  $P(\psi) = \int_{\Omega} |\psi|^4(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{\text{Supp}(\psi)} \frac{1}{r^2} d\vec{r} = 1/r$ . D'où la dénomination d'inverse du quotient de participation. Plus  $P(\psi)$  est grand, plus la fonction d'onde est localisée. Dans le cas singulier qui nous intéresse et dans la limite des grands volumes  $\Omega$ , on a clairement l'identification

$$D(2) = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{\ln(P(\psi))}{\ln \Omega}$$

qui correspond au facteur d'échelle  $q = 2$  puisque la mesure en question est le module carré de la fonction d'onde.

**Exposant de diffusion anormal** Le nombre de Renyi d'ordre 2 est également relié à l'exposant de diffusion anormal dans le système et qui entre dans la fonction de corrélation à deux points. On a  $D(2) = 2 - \eta$ , cité dans [109, 26], sans que j'aie pu m'en convaincre (difficile de trouver une preuve facilement *accessible*).

### 5.2.3 Algorithme de calcul du spectre des singularités

Une fois connu numériquement le spectre multifractal, on peut espérer en déduire le spectre des singularités par une transformation de Legendre. Malheureusement, dans de nombreux cas, le calcul numérique de la transformée est délicat. Le spectre obtenu est alors entaché d'imprécisions.

En fait il est possible de calculer les exposants et le spectre de singularités à partir de quantités non locales [32]. Pour cela on définit une famille  $\psi_q$  de mesures déduites de  $\psi$ , qui est indexée par le paramètre d'échelle  $q$

$$\psi_q(B_j(\epsilon)) = \frac{\psi(B_j(\epsilon))^q}{\sum_{i=1}^{N_q(\epsilon)} \psi(B_i(\epsilon))^q}.$$

Le spectre de singularités se déduit alors du calcul de l'*entropie* (encore appelée *dimension d'information*) de ces mesures

$$f(q) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\ln \epsilon} \sum \psi_q(B_i(\epsilon)) \ln(\psi_q(B_i(\epsilon)))$$

tandis que la valeur moyenne des exposants de singularités pour la mesure  $\psi_q$  est

$$\alpha(q) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\ln \epsilon} \sum \psi_q(B_i(\epsilon)) \ln(\psi(B_i(\epsilon))) .$$

Je montre maintenant, par le biais d'une preuve heuristique simple, comment on retrouve la famille  $\{\alpha, f(\alpha)\}$ , dans la limite où  $\epsilon$  tend vers 0. On a d'une part

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln \epsilon} \sum_{i=1}^{N_q(\epsilon)} \psi_q(B_i(\epsilon)) \ln(\psi(B_i(\epsilon))) &\simeq \frac{1}{\ln \epsilon} \int \epsilon^{-\tau(q)+q \cdot \alpha} \ln(\epsilon^\alpha) \rho(\alpha) \epsilon^{-f(\alpha)} d\alpha \\ &= \int \alpha \epsilon^{-\tau(q)+q \cdot \alpha - f(\alpha)} \rho(\alpha) d\alpha \\ &\simeq \alpha(q) \int \rho(\alpha) d\alpha = \alpha(q) . \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln \epsilon} \sum_{i=1}^{N_q(\epsilon)} \psi_q(B_i(\epsilon)) \ln(\psi_q(B_i(\epsilon))) &\simeq \frac{1}{\ln \epsilon} \int \epsilon^{-\tau(q)+q \cdot \alpha} \ln(\epsilon^{q \cdot \alpha - \tau(q)}) \rho(\alpha) \epsilon^{-f(\alpha)} d\alpha \\ &= \int (q \cdot \alpha - \tau(q)) \epsilon^{-\tau(q)+q \cdot \alpha - f(\alpha)} \rho(\alpha) d\alpha \\ &\simeq f(\alpha(q)) \int \rho(\alpha) d\alpha = f(q) . \end{aligned}$$

#### 5.2.4 Spectre des singularités du modèle sur réseau et spectre de singularité de la transition de l'effet Hall entier

Lorsque j'ai effectué de travail, je pensais que jusqu'alors il n'avait pas été vérifié numériquement que le modèle de Chalker et Coddington possédait une fonction d'onde à la transition de même spectre de singularités que la celle de la transition de l'effet Hall. Je me suis aperçu ensuite qu'une bonne part du travail numérique avait été fait dans [73].

Le spectre multifractal de la fonction d'onde a déjà été calculé numériquement en diagonalisant le hamiltonien de Landau en présence de désordre [66]. Les résultats obtenus sont  $\alpha_0 = 2.29 \pm 0.02$  avec des dimensions limites  $D_{-\infty} = 0.95 \pm 0.1$  et  $D_{\infty} = 3.7 \pm 0.1$  [68].

Pour calculer le spectre de singularités de la fonction d'onde délocalisée, nous avons imposé au réseau du modèle de Chalker et Coddington des conditions périodiques dans les deux directions. Puis pour un désordre figé, nous avons calculé itérativement une fonction d'onde approchée de l'état délocalisé. La taille du tore est de  $256 \times 256$ . La fonction d'onde obtenue est représentée sur la figure de la page de couverture. L'échelle d'intensité est logarithmique.

Nous avons appliqué les deux algorithmes de calcul de  $\{\alpha, f(\alpha)\}$  ci-dessus. Puisque le modèle est discret, il n'est pas possible de faire varier le paramètre  $\epsilon$  hors de certaines limites. Il faut par exemple que l'échelle de résolution soit nettement supérieure au pas du réseau (physiquement

l'échelle de résolution doit être nettement supérieure à la longueur magnétique  $\ell$ ). L'échelle de résolution doit également être bien inférieure à la taille du système pour minimiser les effets de taille finie (ou de cyclicité sur le tore), et bien évidemment inférieure à la longueur de corrélation dans le système.

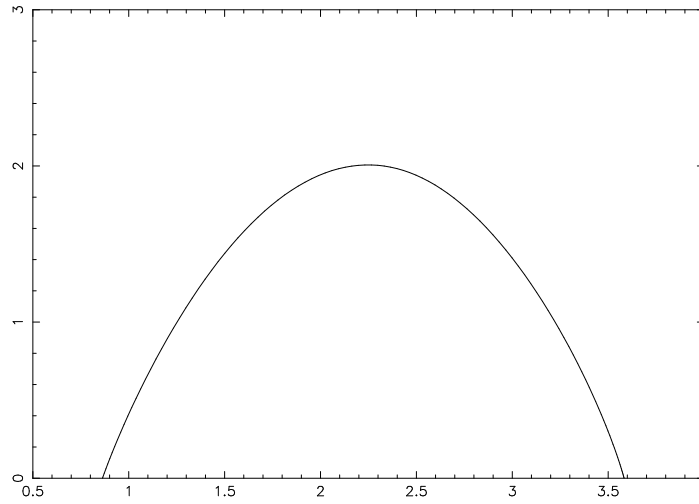


FIG. 5.1 – Fonction de singularité de la fonction d'onde délocalisée sur le réseau de Chalker et Coddington.

Nous avons obtenu le spectre tracé sur la figure 5.1.

Un test de précision est donné par la valeur de la dimension critique du support, c'est-à-dire  $f(\alpha_0)$ . On obtient  $2.00 \pm 0.01$  correspondant à la dimension topologique du plan. Ce test permet également d'ajuster les bornes de l'intervalle balayé par l'échelle de résolution. Il correspond à ce spectre les valeurs  $\alpha_0 = 2.28 \pm 0.03$  puis  $D_{-\infty} = 3.6 \pm 0.2$  et  $D_{\infty} = 0.9 \pm 0.2$ . La valeur de la singularité de plus grande contribution est de  $\alpha_1 = 1.75 \pm 0.03$ . Ces résultats sont en parfait accord avec [66] et confirme qu'à la transition même, la fonction d'onde de Chalker et Coddington est bien dans la même classe d'universalité que la fonction d'onde électronique de la transition dans l'effet Hall entier.

On obtient aussi  $D(2) = 1.55 \pm 0.1$ . Cette mesure de l'inverse du quotient de participation est reliée à l'exposant de diffusion anormal  $\eta$  par  $D(2) = 2 - \eta$ . Dans notre cas, celui-ci est défini par le comportement de la fonction de Green moyenne (en présence de désordre) à deux points

$$\langle |G(\vec{r})|^2 \rangle = \langle |\langle \vec{r} | \frac{1}{1-U} | \vec{0} \rangle|^2 \rangle \sim |\vec{r}|^{2-d-\eta}.$$

Par conséquent,  $\eta = 0.45 \pm 0.1$ . Chalker et Daniell [28] obtiennent  $D(2) = 1.62 \pm 0.04$ .

## Chapitre 6

# Fermions de Dirac en dimension 1

### 6.1 Introduction

Dans ce chapitre, on souhaite étudier la densité d'états et la longueur de localisation d'une particule de Dirac en dimension 1 soumise à des potentiels aléatoires de différentes natures. Sa dynamique est gouvernée par le hamiltonien

$$h = i\sigma_z\partial_x - \Phi\sigma_x + M\sigma_y + V \quad (6.1)$$

où les champs sont des réalisations de variables aléatoires indexées par la position  $x$  sur la droite réelle (ou plus simplement de *champs aléatoires*).  $M$  est un *champ de masse*,  $\Phi$  un *champ magnétique* et  $V$  un *potentiel électrique* (souvent appelé dans la littérature *potentiel scalaire*).

Que la densité d'états et la longueur de corrélation puissent être obtenues simultanément est une agréable conséquence de l'unidimensionnalité du milieu. Cela résulte de la formule dite de Thouless [130] qui identifie densité d'états intégrée et inverse de la longueur de corrélation, aux parties imaginaire et réelle d'une même fonction holomorphe. On fera par la suite un usage intensif de cette identification. Plus généralement, en dimension 1, il est possible de traduire le calcul des propriétés statistiques à une particule en un problème de mécanique quantique. Cela évite ainsi le recours aux techniques usuelles de théorie des champs. C'est pourquoi, il est parfois (mais rarement) possible d'obtenir des résultats exacts sur ces systèmes.

Le revers de la médaille est que la physique de ce type de systèmes est considérée comme moins riche que leur analogue bidimensionnel. La meilleure illustration de la (relative) pauvreté des systèmes unidimensionnels est l'absence de véritable régime diffusif pour les systèmes désordonnés en dimension 1. Dans les milieux désordonnés de dimensionnalité plus élevée, on distingue en effet trois régimes distincts délimités par un jeu de longueurs caractéristiques. Il s'agit du régime *ballistique*, dont la longueur caractéristique est le *libre parcours moyen*, le régime *diffusif* auquel on associe une longueur de diffusion, et le régime *localisé* délimité du régime diffusif par la longueur de localisation. Comparant la taille du système à ces longueurs caractéristiques, on détermine le régime dominant la physique du système à l'échelle considérée. Or on verra qu'en dimension 1, la relation de Thouless relie la longueur de localisation à la fonction de Green à deux points et, de là, à la longueur de diffusion. Cela contraint fortement l'existence du régime diffusif. Cela explique par exemple pourquoi la théorie des matrices aléatoires s'applique difficilement à la statistique des systèmes unidimensionnels<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Pour plus de détails on pourra avantageusement consulter [129].

Si la physique des systèmes unidimensionnels est moins riche, l'analyse qu'il est possible d'en faire est beaucoup plus fine. De plus il existe de nombreuses réalisations expérimentales ou théoriques qui alimentent ce type d'études. Pour ma part, je vais avancer ci-dessous les raisons qui m'ont poussé à aborder l'étude des fermions de Dirac en potentiels aléatoires et en dimension 1.

### 6.1.1 Localisation

On sait qu'en dimension 1 tous les états propres du hamiltonien de Anderson (que le modèle soit discret ou continu) sont des états localisés. C'est-à-dire que la longueur de localisation de ces états est finie. Cette propriété est attachée au comportement du laplacien en présence de désordre.

Elle ne doit donc pas être extrapolée à un opérateur de Dirac. Et effectivement, dans le cas particulier où seule est présente une diffusion de recul ("backward scattering"), c'est-à-dire lorsque seul un désordre de masse est présent, il existe un état délocalisé, d'énergie nulle, qui peut être calculé exactement. Mais c'est le seul cas connu non-trivial de fonction d'onde délocalisée pour des fermions de Dirac en dimension 1.

La première des raisons de cette étude est donc de trancher la question de savoir s'il existe d'autres états délocalisés, sous l'influence d'une combinaison quelconque de désordres. En particulier l'introduction d'impuretés induisant une diffusion en avant ("forward scattering"), provoque-t-elle nécessairement la localisation des fonctions d'ondes ?

### 6.1.2 Un modèle soluble mettant en jeu plusieurs désordres

Incidemment, il me semblait intéressant d'obtenir une expression exacte pour la densité d'états d'un système mettant en jeu des désordres de différentes natures. D'autant qu'à ma connaissance un tel exemple n'avait pas encore été donné dans la littérature. Il semblait également important d'étudier les liens qui unissent les différents types de désordre possibles pour ces fermions de Dirac. En voici la raison.

Dans le très bel article [87], Ludwig, Fisher, Shankar, et Grinstein esquissent un diagramme de phases pour les fermions de Dirac désordonnés en dimension 2 et analysent la stabilité de ces phases sous le groupe de renormalisation. Utilisant la bosonisation et les outils du groupe de renormalisation, ils ont pu obtenir des résultats exacts sur la localisation/délocalisation sous un champ magnétique aléatoire (modèle de Sine-Gordon) ainsi qu'avec une masse aléatoire (perturbation du cas libre par un opérateur marginalement non-pertinent que l'on rencontrera à nouveau dans le chapitre 7). En revanche, lorsqu'un désordre scalaire est présent, le flot du groupe de renormalisation s'éloigne du point fixe gaussien vers un point fixe inaccessible, que l'on suppose décrire la transition de l'effet Hall quantique entier. Et de là de conclure que le potentiel scalaire est un champ pertinent pour la description de l'effet Hall quantique entier. Chalker et Ho dans [30] ont également insisté sur l'importance du potentiel électrique. Ils ont pris la limite continue isotrope du modèle sur réseau de l'effet Hall quantique entier et l'ont identifiée aux fermions de Dirac bidimensionnels (voir le chapitre 4 pour plus de détails). En particulier, ils ont montré que l'opération de passage à la limite continue engendre un potentiel scalaire aléatoire, qui s'identifie localement à la mesure du flux traversant une plaquette du réseau.

Il n'existe jusqu'à présent aucun moyen de prendre en compte analytiquement ce désordre. Il était donc tentant de résoudre ce problème en 1d. En particulier, je montrerai qu'il existe une

application non-unitaire et non triviale reliant le désordre de masse au désordre scalaire. Cela doit être comparé à un argument proposé dans [87] qui établit un lien formel entre les deux types de désordre.

### 6.1.3 Fermions de Dirac 1d en masse aléatoire

Revenons au cas où l'origine du désordre réside exclusivement dans la masse aléatoire. Ce modèle jouit de remarquables propriétés mathématiques. À commencer par la symétrie *particule-trou* du hamiltonien ( $\sigma_x h \sigma_x = -h$ ) qui se traduit par une symétrie du spectre par rapport à l'origine et ce pour toute configuration du champ de masse :  $(\psi, \epsilon) \rightarrow (\sigma_x \psi, -\epsilon)$ . Ce qui montre que cette symétrie persiste en présence de désordre. Le carré du hamiltonien,  $h^2$ , est connu comme le “toy-model” de Witten [141] pour la *mécanique quantique supersymétrique* (à ne pas confondre avec la supersymétrie que nous utiliserons plus tard comme outil de moyenne sur le désordre). Sa version désordonnée a été étudiée dans [103], puis, indépendamment dans [36, 20]. Y ont été calculées les densité d'états et longueur de localisation. Dans ce dernier papier, Bouchaud, Comtet, Georges, et Le Doussal montrent que  $h^2$  décrit la diffusion d'une particule classique dans un champ de force aléatoire. Je ne résiste pas au plaisir de redonner ici la correspondance telle qu'on la trouve dans [20].

Considérons le processus de diffusion d'une particule classique d'abscisse  $x(t)$  dans un champ de force gelé  $\phi(x)$ . La particule est en outre soumise à un bruit thermique distribué comme un bruit blanc  $dW(t)$ . L'équation de Langevin associée au processus est

$$dx(t) = 2\phi(x(t)) + dW(t)$$

où  $W$  est une mesure de Wiener telle que :  $\langle W(t) W(t') \rangle = 2 \min(t, t')$ . L'équation de Fokker-Planck associée au processus stochastique (au sens de Stratonovich) est

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial P}{\partial x} - 2\phi P \right).$$

$P(x, t) = \langle \delta(x - x(t)) \rangle$  désigne la distribution de la variable aléatoire  $x$ . Puis, grâce à la transformation  $\psi(x, t) = e^{-\int^x dy \phi(y)} P(x, t)$ , on obtient l'équation de Shrödinger associée au problème :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + [h^2]_+ \psi = 0 \quad \text{avec} \quad h^2 = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \phi^2 + \sigma_3 \phi',$$

le crochet  $[ ]_+$  indiquant que l'on ne retient que le bloc supérieur gauche de  $h^2$ .

Plusieurs problèmes de statistique fermionique s'identifient, dans la limite de basse énergie, à un problème de fermions de Dirac en masse aléatoire. L'archétype de ces systèmes est la dynamique d'une assemblée de fermions sans spin qui se meuvent sur un réseau unidimensionnel de liaisons fortes. Le désordre est porté par les valeurs des liaisons  $t_n$ . Elles se décomposent en  $t_n = t + (-1)^n \delta_n$  où  $t$  est leur partie uniforme. Le hamiltonien de liaisons fortes correspondant est :

$$H = \sum_n -t_n (c_n^\dagger c_{n+1} + c_{n+1}^\dagger c_n).$$

En l'absence de désordre ( $t_n = t$ ), le hamiltonien se diagonalise en  $H = \sum_k -2t \cos(k) c_k^\dagger c_k$ . Le pas du réseau a été choisi égal à 1. A demi-remplissage (soit un électron tous les deux sites), le fondamental du système est obtenu en remplissant la mer d'états d'énergie négative. Parce que

le système est unidimensionnel, les excitations de plus basse énergie prennent place autour des deux points de Fermi  $k_F$ , à droite, et  $-k_F$  à gauche.

En présence de désordre, la symétrie particule-trou  $c_n \rightarrow (-1)^n c_n^\dagger$  persiste. C'est pourquoi on considère que le désordre ne modifie pas la nature du fondamental et la description des excitations. Le fondamental est obtenu à demi-remplissage et  $k_F = \pi/2$ . Afin d'extraire la physique de basse énergie, on linéarise les champs fermioniques près des points de Fermi :

$$c_n = (-i)^n \psi_L(n) + (i)^n \psi_R(n) .$$

Ceci fait, on peut linéariser le hamiltonien pour obtenir :

$$H = v_F \int dx \left( \psi_R^\dagger i \partial_x \psi_R - \psi_L^\dagger i \partial_x \psi_L \right) - 2i \int dx m(x) \left( \psi_R^\dagger \psi_L - \psi_L^\dagger \psi_R \right) .$$

$m(x)$  représente la limite continue de la composante  $\delta t_n$  de  $t_n$  (composante de Fourier  $k_F$ ) et  $v_F = 2t \sin k_F$ .

Un autre exemple est celui de la chaîne de spins antiferromagnétique XX en présence (ou non) d'un champ magnétique transverse [84, 45]. Ce sont les couplages qui portent le désordre. Utilisant une transformation de Jordan-Wigner, on peut aisément se ramener au modèle précédent. Il existe plusieurs autres exemples de modèles en physique statistique et en matière condensée se ramenant à l'étude des propriétés statistiques d'un fermion de Dirac en potentiel aléatoire. On trouvera un grand nombre de références dans [92].

Cette section était destinée à mettre en perspective l'intérêt physique de l'étude des fermions de Dirac dans un milieu désordonné.

La suite de ce chapitre est organisée comme suit. Dans les sections 6.1, 6.2 et 6.3, je traduis le calcul de la résolvante du hamiltonien  $h$  dans le langage d'un problème de mécanique quantique, au moyen de la procédure de Feynman. Dans la section 6.4, j'obtiens des formules exactes pour cette résolvante. En particulier une dérivation alternative de la résolvante connue du modèle en masse aléatoire est proposée. Dans la section 6.5, je calcule la densité d'états exacte ainsi que la longueur de localisation *typique* dans diverses configurations du désordre. Certaines ont déjà été obtenues par d'autres techniques, d'autres sont inédites. Puis, dans la section 6.6, j'expose succinctement une dérivation efficace par la méthode supersymétrique. Je finis avec la section 6.7 où je mets à jour les symétries naturelles et moins naturelles existant entre les différents hamiltoniens désordonnés étudiés. Dans l'appendice B, j'aborde un prolongement technique de la section 6.4.

## 6.2 Un problème de mécanique quantique

On souhaite calculer la résolvante du hamiltonien  $h$  (6.1) de façon à en extraire la densité d'états et la longueur de localisation. Pour cela, on applique la procédure de Feynman qui consiste à traduire un problème de théorie statistique des champs à une dimension en un problème de mécanique quantique (théorie quantique des champs 0-dimensionnelle). À partir de maintenant, et jusqu'au début de la section 6.6, je n'utilise que la méthode des répliques.

### 6.2.1 Représentation de la résolvante comme une intégrale de chemin

L'objet qui mène au calcul de la densité d'états et à la longueur de localisation et dont on cherche à prendre la moyenne, est la résolvante à deux points  $G(x, y, \epsilon - i\eta) = \text{tr}_{\text{spin}} G_{\alpha, \beta}(x, y, \epsilon -$

$i\eta$ ), où  $\alpha$  et  $\beta$  sont les indices de spin. Précisément, la résolvante possède les composantes suivantes

$$G_{\alpha,\beta}(x, y, \epsilon - i\eta) = \langle x, \alpha | \frac{1}{h - (\epsilon - i\eta)} | y, \beta \rangle$$

où  $\eta$  est strictement positif. Comme la moyenne de la résolvante sur le désordre  $G(\epsilon - i\eta) := \langle G(x, x, \epsilon - i\eta) \rangle$  est invariante par translation, on peut écrire :

$$G(\epsilon - i\eta) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx \langle \text{tr}_{\text{spin}} G_{\alpha,\beta}(x, x, \epsilon - i\eta) \rangle.$$

$2L$  est la taille de l'échantillon du système. Le terme intégré peut être formellement représenté au moyen d'un champ bosonique  $\xi$  possédant deux composantes spinorielles  $(\xi_{\uparrow}, \xi_{\downarrow})$ , de sorte que

$$G(\epsilon - i\eta) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2iL} \int_{-L}^L dx \langle \text{tr}_{\text{spin}} \frac{\int \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\xi^* \xi_{\alpha}^*(x) \xi_{\beta}(x) \exp(i \int_{-L}^L dx dy \xi^*(x) \langle x | h - (\epsilon - i\eta) | y \rangle \xi(y))}{\int \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\xi^* \exp(i \int_{-L}^L dx dy \xi^*(x) \langle x | h - (\epsilon - i\eta) | y \rangle \xi(y))} \rangle.$$

Remarquons que  $\eta$  permet de garantir la convergence de l'intégrale gaussienne. On obtient alors

$$G(\epsilon - i\eta) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \langle \ln \left( \int \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\xi^* \exp(i \int_{-L}^L dx \xi^*(x) \langle x | h - (\epsilon - i\eta) | x \rangle \xi(x)) \right) \rangle. \quad (6.2)$$

Pour que cette identité fonctionnelle soit valide,  $\xi$  doit être un champ complexe car le terme cinétique de  $h$  est antisymétrique. Afin de prendre la moyenne du logarithme, on utilise l'astuce des répliques. Elle consiste à introduire  $n$  copies du champs bosonique spinoriel et permet de réécrire la résolvante sous la forme

$$G(\epsilon - i\eta) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial n} \langle \int \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\xi^* \exp \left( i \int_{-L}^L dx \sum_{k=1}^n \xi_k^*(x) \langle x | h - (\epsilon - i\eta) | x \rangle \xi_k(x) \right) \rangle.$$

### 6.2.2 Intégrale de chemin en temps réel

Le formalisme de Feynman permet de traduire cette intégrale de chemin unidimensionnelle de théorie statistique des champs en une théorie quantique des champs sans dimension, c'est-à-dire une simple mécanique quantique. Par la suite, on va montrer que le hamiltonien *physique* de cette théorie quantique est hermitien dans un sens qui reste à définir. Par physique, je veux dire faire  $\eta = 0$  dans le hamiltonien, puisque la partie imaginaire de l'énergie est un artifice mathématique destiné à rendre compte du caractère analytique de la résolvante.

Dans un premier temps, et contrairement à la démarche adoptée dans l'article, les intégrales seront comprises en temps réel. Ce n'est qu'après avoir écrit le hamiltonien effectif associé que j'adopterai un temps imaginaire. Revenons à la fonction de partition apparue dans la formule précédente :

$$Z_L(n) = \langle \int \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\xi^* \exp \left( i \int_{-L}^L dx \sum_{k=1}^n \xi_k^*(x) \langle x | h + i(i\epsilon + \eta) | x \rangle \xi_k(x) \right) \rangle. \quad (6.3)$$

On effectue maintenant le prolongement analytique qui consiste à remplacer  $i\epsilon + \eta$  par une variable  $\epsilon$  strictement positive (de fait on met à zéro la partie  $i\epsilon$  de l'énergie complexe). Une fois

tous les calculs terminés, il suffira de prolonger analytiquement  $\epsilon$  sur l'axe imaginaire. Désormais on notera  $G(\epsilon)$  la résolvante moyenne, qui se substitue à  $G(\epsilon - i\eta)$  une fois le prolongement analytique effectué.

On obtient finalement la formule ramassée suivante

$$G(\epsilon) = i \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial n} Z_L(n). \quad (6.4)$$

On a introduit ici un  $i = \sqrt{-1}$  pour compenser le fait que la dérivée est désormais effectuée par rapport à la variable d'énergie prolongée  $\epsilon$ .

### 6.2.3 Transformation particule-trou

Les précédentes intégrales de chemin sont en réalité mal définies, et ce même lorsque  $\eta \neq 0$ , vu comme régulateur, est présent ! En effet, elles correspondent à une théorie quantique de hamiltonien qui n'est pas borné inférieurement. Pour comprendre cela, on suit le formalisme de Feynman : on écrit le hamiltonien classique associé aux précédentes intégrales de chemin, puis on procède à sa quantification.

Les moments associés aux champs spinoriels  $\xi_k$  sont

$$\pi_{\xi_k} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\xi}_k} = i \xi_k^* \sigma_z$$

où  $\mathcal{L}$  est le lagrangien et où le point signale une dérivée par rapport au *temps*  $x$ . Donc l'intégrale de chemin mène au hamiltonien classique

$$H_c = \sum_{k=1}^n \Pi_{\xi_k} \cdot \partial_x \xi_k - \mathcal{L}(\Pi_{\xi_k}, \xi_k, x)$$

avant qu'une quelconque moyenne ait été prise. Afin de procéder à la quantification de ce hamiltonien, on impose les relations de commutation suivantes :

$$[\xi_k, \Pi_{\xi_l}] = i \delta_{k,l}.$$

Cela conduit à un terme  $-\epsilon \Pi_{\xi_k} \sigma_z \xi_k$  dans le hamiltonien quantique qui n'admet alors plus de borne énergétique inférieure. Cela tient au signe moins qui est apparu devant le produit des composantes  $\downarrow$ . Pour quantifier correctement ce hamiltonien, nous avons la liberté d'effectuer toute transformation portant sur les opérateurs canoniques, pourvu que les relations de commutation soient préservées. La procédure orthodoxe pour les fermions de Dirac consiste à remplir la mer de Dirac, et ce au moyen économe d'une simple transformation particule-trou. Malheureusement, un tel changement de vide n'est pas adapté au cas des bosons, qui ont une fâcheuse propension à condenser. Il est par conséquent nécessaire de recourir à une transformation plus radicale. On peut choisir

$$\Pi_{\xi_k} = (\xi_{k\uparrow}^+, -\xi_{k\downarrow}) \quad \xi_k = i (\xi_{k\uparrow}, \xi_{k\downarrow}^+). \quad (6.5)$$

Le signe moins permet de borner inférieurement le spectre. La transformation particule-trou est destinée à restaurer les relations de commutation canoniques des bosons, qui ont été affectées par le changement de signe sur les composantes  $\downarrow$  des opérateurs. Le prix à payer pour cet écart à l'orthodoxie est que le moment conjugué  $\Pi_{\xi_k}$  n'est plus le *conjugué hermitien* de  $\xi_k$ . Nous verrons par la suite que la symétrie dynamique du hamiltonien répliqué n'est plus alors

$U(2n)$  mais le groupe non compact  $U(n, n)$ . Je précise que j'appelle *algèbre dynamique* (ou improprement groupe), toute algèbre dont les générateurs sont les seuls opérateurs constitutifs du hamiltonien.

Définissons maintenant les opérateurs de spin hermitiens  $\vec{J}_{kl} = \frac{1}{2i}\Pi_{\xi_k}(i\sigma_x, i\sigma_y, \sigma_z)\xi_l$ . Avec les opérateurs  $Q_{kl} = \frac{1}{2i}\Pi_{\xi_k}\xi_l$ , ils constituent les  $4n^2$  générateurs de  $u(n, n)$ . Composante par composante, ils s'écrivent

$$\mathbf{J}_{kl}^x = \frac{i}{2}(\xi_{k\uparrow}\xi_{l\downarrow} - \xi_{k\downarrow}\xi_{l\uparrow}) \quad \mathbf{J}_{kl}^y = \frac{1}{2}(\xi_{k\uparrow}\xi_{l\downarrow} + \xi_{k\downarrow}\xi_{l\uparrow}) \quad \mathbf{J}_{kl}^z = \frac{1}{2}(\xi_{k\uparrow}\xi_{l\uparrow} - \xi_{k\downarrow}\xi_{l\downarrow}).$$

Que ce soit avant ou après avoir pris la moyenne, le hamiltonien (ou la densité hamiltonienne) ne dépend que des opérateurs somme suivant

$$Z^x = \sum_{k=1}^n \mathbf{J}_{kk}^x \quad Z^y = \sum_{k=1}^n \mathbf{J}_{kk}^y \quad Z^z = \sum_{k=1}^n \mathbf{J}_{kk}^z.$$

On définit alors les opérateurs d'échelle associés, qui nous permettront ultérieurement d'engendrer les secteurs physiques du hamiltonien effectif

$$Z^+ = Z^y - iZ^x \quad Z^- = Z^y + iZ^x \quad Z^0 = Z^z.$$

Ces opérateurs obéissent aux relations de commutation de  $su(1, 1)$

$$[Z^+, Z^-] = -2Z^0 \quad [Z^0, Z^+] = Z^+ \quad [Z^0, Z^-] = -Z^-.$$

Ces dernières doivent être complétées avec la prescription  $(Z^+)^\dagger = Z^-$ , qui stipule que la forme réelle de  $sl(2, \mathbb{C})$  est engendrée par les générateurs  $\vec{Z}$ .

Cela permet d'affirmer que l'algèbre dynamique peut être réduite de  $u(n, n)$  à  $u(1, 1)$ . Ce type de simplification n'avait pas été envisagé dans [9], conduisant ainsi à des complications inutiles. Cette simplification se produit également dans la version supersymétrique de la démonstration.

#### 6.2.4 Moyenne

On range maintenant les trois types de désordre introduits dans un champ vectoriel  $\Delta = (M, \Phi, V)$  dont la valeur moyenne est  $\Delta_0 = (m, \phi, 0)$ . La distribution du désordre obéit à une loi gaussienne, dont la forme la plus générale est spécifiée par une matrice de covariance  $C$ . On suppose que  $C$  est symétrique et définie positive, ce qui est physiquement raisonnable. La mesure gaussienne s'écrit alors

$$P(\Delta) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\Delta - \Delta_0)^\dagger C (\Delta - \Delta_0) d\Delta\right).$$

Après avoir effectué la moyenne, on obtient un hamiltonien effectif de la forme

$$\frac{1}{2}H = -\Delta_0 \cdot \vec{Z} - \vec{Z}^\dagger C^{-1} \vec{Z}$$

qui ne dépend plus de la position  $x$ . Par commodité, on redéfinit ce hamiltonien en le multipliant par 2, afin de se débarrasser de cet encombrant facteur  $\frac{1}{2}$ . La matrice de covariance pouvant être

diagonalisée, on ne retient pas les termes non-diagonaux, ce qui conduit à la forme définitive du hamiltonien effectif :

$$i H = \epsilon Z^z + im Z^x + i\phi Z^y + g_x (Z^x)^2 + g_y (Z^y)^2 + g_z (Z^z)^2 \quad (6.6)$$

où  $g_x$ ,  $g_y$  et  $g_z$  définissent l'intensité des différents types de désordre. Comme annoncé, le hamiltonien effectif ne dépend que des opérateurs de spin  $\vec{Z}$ . Compte tenu de la définition heuristique que l'on a adoptée pour une algèbre dynamique, il est clair que  $u(1, 1)$  en est une pour  $H$ .

Dans toute la suite, on adopte un temps imaginaire. Pour ce faire, il suffit d'oublier le facteur  $i = \sqrt{-1}$  devant le hamiltonien  $H$  dans le membre de gauche de (6.6).

## 6.3 Secteur du fondamental du hamiltonien répliqué

Dans cette section, nous allons exhiber quelques propriétés du secteur dans lequel se trouve le fondamental. Cette analyse est destinée à évaluer  $Z_L(n)$  lorsque  $L$  tend vers l'infini et lorsque l'indice des répliques  $n$  tend vers 0.

### 6.3.1 Description d'une base du secteur

On recherche le fondamental du hamiltonien effectif dans l'espace de plus bas poids engendré par la symétrie dynamique  $u(1, 1)$ . Ce faisant, l'opérateur de trace de  $u(1, 1)$  commutant avec  $H$ , on est amené à restreindre la symétrie dynamique à  $su(1, 1)$  dans chacun des secteurs du hamiltonien spécifié par ce Casimir. Le plus bas poids du secteur recherché est égal à  $n/2$  en tant que somme de  $n$  représentations de plus bas poids de spin  $1/2$  correspondant à chacun des  $n$  spins. Appelons  $|\Omega\rangle$  le vecteur de plus bas poids de cette représentation. Les états de cet espace de représentation, qui sont obtenus par l'action des opérateurs  $Z^+$  sur  $|\Omega\rangle$ , sont

$$|k\rangle = \frac{(Z^+)^k}{k!} |\Omega\rangle.$$

La norme de ces états est alors donnée par

$$\langle k|k\rangle = \frac{\Gamma(k+n)}{\Gamma(n)\Gamma(k+1)}.$$

Grâce à la réduction de l'algèbre dynamique, il est ainsi aisé d'engendrer tout l'espace de représentation. Autre conséquence, l'action des opérateurs d'échelle sur la base des  $\{|k\rangle\}$  peut être obtenue aisément :

$$Z^0|k\rangle = (k + \frac{n}{2})|k\rangle \quad Z^+|k\rangle = (k+1)|k+1\rangle \quad Z^-|k\rangle = (k+n-1)|k-1\rangle.$$

### 6.3.2 Interprétation en terme de représentation

Je vais maintenant montrer que la limite des répliques ( $n$  tend vers 0) est mathématiquement fondée. De plus, bien que je ne puisse la justifier, je lève explicitement l'ambiguïté des répliques [149] à la limite  $n$  tend vers 0, en choisissant le prolongement analytique qui préserve la symétrie  $su(1, 1)$ . Par ailleurs, rappelons qu'une représentation irréductible unitaire de  $su(1, 1)$  appartient à l'une des trois catégories suivantes : les séries discrètes semi-infinies qui sont des représentations

de plus bas et de plus haut poids et indexées par des demi-entiers (ce sont les généralisations naturelles des représentations unitaires de  $\mathfrak{su}(2)$ ), la série principale infinie et la série supplémentaire infinie qui sont toutes deux des représentations non-bornées, indexées par un paramètre continu.

Tant que  $n$  est un entier positif, le secteur du fondamental demeure une représentation de plus bas poids de  $\mathfrak{su}(1, 1)$  appartenant à la série discrète. Lorsque  $n$  tend vers 0 par prolongement dans l'intervalle  $]0, 1[$ , alors l'espace de représentation n'appartient plus à la série discrète mais à la série supplémentaire. Si l'on suit les notations de Vilenkin, cette représentation est indexée par  $(l = n - 1, \epsilon = 0)$  [133] où le paramètre continu est  $l$ . Notons que la suite d'états  $|k\rangle$  n'est plus tronquée par l'action de  $Z^-$  sur  $|1 - n\rangle$ . En conséquence, il n'y a plus de vecteur de plus bas poids. En théorie, la représentation devrait s'étendre à  $-\infty$ , même si nous n'avons besoin que des états  $|k\rangle$  pour  $k \geq 0$ .

Étonnamment, lorsque  $n$  tend vers 0, on obtient

$$\langle k|k\rangle = \frac{\Gamma(k+n)}{\Gamma(n)\Gamma(k+1)} \longrightarrow \delta_{k,0}.$$

De sorte qu'au point précis correspondant au système physique désordonné ( $n = 0$ ), la restriction du produit scalaire au secteur du fondamental dégénère. Les états  $|k\rangle$  sont des *états nuls* à l'exception de  $k = 0$ .

Pour  $n$  compris dans  $]0, \infty[$ , on peut définir un authentique produit scalaire dans le secteur du fondamental pour les fonctions d'onde de la forme  $|\phi\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k |k\rangle$  :

$$\langle \psi | \phi \rangle = \frac{1}{\Gamma(n)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+n)}{\Gamma(k+1)} \bar{\psi}_k \phi_k.$$

Cette formule est identique à celle donnée par Vilenkin (voir à nouveau [133]) mais tronquée sous  $k = 0$ . Ce produit scalaire sera utilisé un peu plus tard.

## 6.4 Énergie du fondamental

### 6.4.1 Équation pour le fondamental

On se souvient que le hamiltonien effectif répliqué est

$$H = \epsilon Z^z + imZ^x + i\phi Z^y + g_x(Z^x)^2 + g_y(Z^y)^2 + g_z(Z^z)^2.$$

$|\Psi\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k |k\rangle$  est le développement de la fonction d'onde du fondamental sur la base des états  $\{|k\rangle\}$ . Le fondamental satisfait l'équation aux valeurs propres  $H|\Psi\rangle = \lambda(n)|\Psi\rangle$ . On attend de  $\lambda(n)$  qu'il se comporte comme  $\lambda n + O(n^2)$  quand  $n$  tend vers 0. Réexprimée dans la base des  $\{|k\rangle\}$ , l'équation aux valeurs propres s'écrit

$$\begin{aligned} & (\epsilon(k + \frac{n}{2}) + g_z(k + \frac{n}{2})^2) \zeta_k - \frac{m}{2} (k \zeta_{k-1} - (k+n) \zeta_{k+1}) + i \frac{\phi}{2} (k \zeta_{k-1} + (k+n) \zeta_{k+1}) \\ & + \frac{1}{4} k(k-1) (g_y - g_x) \zeta_{k-2} + \frac{1}{2} (k(k+n) + \frac{n}{2}) (g_y + g_x) \zeta_k + \frac{1}{4} k(k+1) (g_y - g_x) \zeta_{k+2} = \lambda(n) \zeta_k. \end{aligned}$$

Cette équation est valable pour tout entier  $k \geq 0$ .

### 6.4.2 États propres à gauche et à droite du hamiltonien

Dans le cas  $\eta \neq 0$ , on est amené à considérer un hamiltonien non-hermitien. Par conséquent, la formule de Feynman qui donne les amplitudes de probabilité d'une théorie quantique en termes d'intégrales de chemin unidimensionnelles, doit être écrite au moyen d'états propres à gauche et à droite. Cela est notamment nécessaire parce que la résolution de l'identité, essentielle à la construction de l'intégrale de chemin, est exprimée au moyen d'états gauches et droits.

Toutefois, il apparaît qu'ici le hamiltonien et son conjugué hermitien sont reliés unitairement par une simple rotation  $R = \exp(i\pi \sum_{k=1}^n \mathbf{J}_{kk}^z) = \exp(i\pi Z^z)$ . Les vecteurs propres à gauche vivent dans l'espace dual de l'espace de Fock utilisé jusqu'à présent. Il n'est pas strictement nécessaire de les projeter dans l'espace de Fock originel, mais, puisque c'est ici possible et que c'est pratique, je ne m'en priverai pas. Et donc, grâce à la transformation  $R$ , on affecte à chacun de ces états à gauche  $\langle \psi |_l$ , leur pendant dans l'espace de Fock :

$$|\psi\rangle_l = R|\psi\rangle_r.$$

### 6.4.3 Fonction d'onde du fondamental

Puisque l'on est conduit à calculer des amplitudes de probabilités, il nous faut normaliser la fonction d'onde du fondamental. Lorsque  $n \neq 0$ , on a, utilisant notre produit scalaire :

$$\langle \Psi |_l \Psi \rangle_r = \frac{1}{\Gamma(n)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k+n)}{\Gamma(k+1)} |\zeta_k|^2.$$

Dans la limite  $n$  tend vers zéro, on obtient  $||\Psi||^2 = |\zeta_0|^2$ , de sorte que la condition de normalisation est simplement  $\zeta_0(n=0) = 1$ . Il n'est pas si étonnant d'obtenir une telle condition, qui ne porte que sur la première composante du fondamental. Elle tient à des propriétés mathématiques dites de *localisation* très générales, qui apparaissent notamment dans le contexte des systèmes désordonnés.

### 6.4.4 Équations hiérarchiques

Je vais maintenant développer la fonction d'onde du fondamental et son énergie en puissances de  $n$  car nous sommes intéressés par la limite  $n$  tend vers 0. Il n'est toutefois pas difficile de se rendre compte que c'est le *germe* complet des éléments propres du fondamental en  $n=0$  qui fournit de l'information sur le système désordonné. (Une telle méthode a été utilisée dans [67] sur le cas du modèle d'Halperin). On pose les notations du développement jusqu'à l'ordre 1

$$\begin{cases} \lambda(n) = n\lambda + O(n^2) \\ \zeta_k(n) = \psi_k + n\chi_k + O(n^2) . \end{cases}$$

À l'ordre 0, on obtient l'équation pour le fondamental physique (point  $n=0$ )

$$\begin{aligned} (\epsilon + (g_z + \frac{g_x + g_y}{2})k)\psi_k - \frac{m}{2}(\psi_{k-1} - \psi_{k+1}) + i\frac{\phi}{2}(\psi_{k-1} - \psi_{k+1}) \\ + \frac{1}{4}(g_y - g_x)(k-1)\psi_{k-2} + \frac{1}{4}(g_y - g_x)(k+1)\psi_{k+2} = 0 . \end{aligned} \quad (6.7)$$

Ce résultat est une généralisation d'une équation obtenue par J.M. Luck [84] puis par Balents et Fisher [9]. On doit pouvoir interpréter les coefficients  $\psi_k$  en terme d'amplitudes de diffusions

multiples sur des impuretés. Formellement, et dans le cas particulier du modèle en masse aléatoire avec une masse moyenne nulle, les coefficients  $\psi_{2k}$  peuvent être interprétés comme un bloc de Berezinskii  $R_k$  à droite (voir [13, 125]). Les relations de récurrence que satisfont les blocs  $R_k$  sont en effet les mêmes que celles satisfaites par les coefficients de notre fondamental (les coefficients impairs  $\psi_{2n+1}$  ne contribuent pas). De façon similaire les coefficients du fondamental à gauche peuvent être vus comme les blocs de Berezinskii à gauche  $\tilde{R}_k$ . Ces blocs sont les sommes des contributions imputées aux diffusions se produisant à gauche ou à droite du point où la fonction de Green (à un point) est calculée.

Revenons maintenant au système hiérarchique, l'ordre 1 fournit l'équation suivante pour  $\chi_k$  :

$$\begin{aligned} & \left[ (\epsilon + (g_z + \frac{g_x + g_y}{2})k) \chi_k - \frac{m}{2}(\chi_{k-1} - \chi_{k+1}) + i\frac{\phi}{2}(\chi_{k-1} - \chi_{k+1}) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{4}(g_y - g_x)(k-1)\chi_{k-2} + \frac{1}{4}(g_y - g_x)(k+1)\chi_{k+2} \right] k \\ & \quad + \frac{\epsilon}{2}\psi_k + \frac{g_x + g_y}{2}(k + \frac{1}{2})\psi_k + gk\psi_k + \frac{1}{4}(2k+1)(g_y - g_x)\psi_{k+2} + \frac{1}{2}(m + i\phi)\psi_{k+1} = \lambda\psi_k. \end{aligned}$$

Cette équation peut être légitimement évaluée au point  $k = 0$ , ce qui donne le résultat très simple :

$$\lambda = \frac{\epsilon}{2} + \frac{g_x + g_y}{4} + \frac{m + i\phi}{2} \frac{\psi_1}{\psi_0} + \frac{g_y - g_x}{4} \frac{\psi_2}{\psi_0}. \quad (6.8)$$

#### 6.4.5 Formule pour la résolvante

D'après la formule (6.3), pour calculer la résolvante en temps imaginaire, il suffit de calculer la fonction de partition  $Z_L(n)$  dans la limite où  $L$  tend vers l'infini et l'indice des répliques  $n$  tend vers 0. Dans cette limite, on a

$$Z_L(n) \sim \langle \Psi |_l \exp(-LH) | \Psi \rangle_r \sim \exp(-2L\lambda n + O(n^2)),$$

de sorte qu'avec l'équation (6.4)

$$G(\epsilon) = -2i \frac{\partial \lambda}{\partial \epsilon}. \quad (6.9)$$

Remarquons que le facteur 2 est dû à la convention adoptée pour le hamiltonien qui se traduit immédiatement sur  $\lambda$ . Une exploitation plus systématique du développement de  $\lambda(n)$  sera ébauchée dans l'appendice B.

#### 6.4.6 Formule sommatoire

J'ai précédemment mis à jour une façon efficace d'obtenir la résolvante. Bien que ce soit moins élégant, il est aussi possible d'obtenir par la méthode des répliques la résolvante sous la forme d'une formule sommatoire, telle qu'obtenue dans [9]. Incidemment le rapprochement des deux expressions conduit à des règles de somme sur les fonctions de Bessel qui sont originales (c'est du moins ce que je suppose, ne les trouvant pas dans les tables). Tout d'abord, la fonction de corrélation est répliquée  $n$  fois sans que sa valeur s'en trouve modifiée :

$$G(\epsilon) = \frac{1}{i} \langle \text{tr}_{\text{spin}} \frac{\int \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\xi^* \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_\alpha^{k*}(x) \xi_\beta^k(x) \exp(-\int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_{k=1}^n \xi_k^*(x) \langle x | -ih + (i\epsilon + \eta) | x \rangle \xi_k(x))}{\int \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\xi^* \exp(-\int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_{k=1}^n \xi_k^*(x) \langle x | -ih + (i\epsilon + \eta) | x \rangle \xi_k(x))} \rangle.$$

Dans la limite  $n$  tend vers 0, le dénominateur de la fonction de partition tend vers 1. Aussi devient-il possible de prendre la moyenne

$$G(\epsilon) = \frac{1}{i} \lim_{n \rightarrow 0} \langle \text{tr}_{\text{spin}} \int \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\xi^* \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_{\alpha}^{k*}(x) \xi_{\beta}^k(x) \exp \left( - \int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_{k=1}^n \xi_k^*(x) \langle x | -i\hbar + (i\epsilon + \eta) | x \rangle \xi_k(x) \right) \rangle.$$

Après avoir régularisé cette intégrale de chemin par une transformation particule-trou comme je l'ai fait auparavant, et traduit l'intégrale de chemin dans le problème quantique équivalent, on obtient pour la résolvante moyenne :

$$G(\epsilon) = -2i \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \langle \Psi | {}_l Z^0 | \Psi \rangle_r. \quad (6.10)$$

On rend explicite cette amplitude en ayant recours au produit scalaire

$$G(\epsilon) = -2i \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(k + \frac{n}{2}\right) |\psi_k|^2 \frac{\Gamma(k+n)}{\Gamma(n)\Gamma(k+1)}.$$

Finalement, on prend la limite  $n \rightarrow 0$  pour obtenir :

$$G(\epsilon) = -2i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k |\psi_k|^2. \quad (6.11)$$

## 6.5 Densités d'états

Je passe maintenant en revue plusieurs modèles de désordre et calcule dans chacun des cas la résolvante du problème.

### 6.5.1 Modèle en masse aléatoire

Le modèle en masse aléatoire, qui correspond au hamiltonien  $h = -i\sigma_z \partial_x + M\sigma_y$  est le cas le plus étudié et le mieux connu.  $M$  est le champ de masse aléatoire et suit la distribution gaussienne

$$P(M) = \exp\left(-\frac{1}{2g} \int_{-\infty}^{\infty} dx (M - m)^2\right).$$

Une fois la moyenne effectuée, on obtient pour ce problème le hamiltonien effectif

$$H = \epsilon Z^z + imZ^x + g(Z^x)^2.$$

Pour  $k \geq 1$  l'équation du fondamental associé est

$$\left(\epsilon + \frac{g}{2}k\right)\psi_k - \frac{m}{2}(\psi_{k-1} - \psi_{k+1}) - \frac{1}{4}g(k-1)\psi_{k-2} - \frac{1}{4}g(k+1)\psi_{k+2} = 0 \quad (6.12)$$

tandis que la formule donnant l'énergie du fondamental (6.8) est réduite à

$$\lambda = \frac{\epsilon}{2} + \frac{g}{4} + \frac{m}{2} \frac{\psi_1}{\psi_0} - \frac{g}{4} \frac{\psi_2}{\psi_0}.$$

Une telle équation aux différences (6.12) peut être résolue exactement. Dans la littérature, pour résoudre les *équations de récurrence quasi-linéaires*, on utilise, lorsque c'est possible, la technique de la fonction génératrice. Après quelques errements, il m'est apparu que la méthode de Laplace, bien qu'équivalente, est de loin plus rapide. Elle permet en effet d'extraire une solution particulière de l'équation en choisissant un contour dans le plan complexe, approprié au type de solution recherchée. C'est d'autant plus utile qu'on s'attend à n'obtenir qu'une unique solution physique au sein d'un espace vectoriel de solutions de dimension finie.

D'abord, on construit une représentation intégrale de  $\psi_k$  dans le plan complexe, qui porte sur un contour  $\mathcal{C}$  que l'on ne choisira que par la suite :

$$\psi_k = \int_{\mathcal{C}} dw K(k, w) \psi(w). \quad (6.13)$$

Pour notre problème, on choisit le noyau de Mellin  $K(k, w) = w^{-k-1}$ . Alors, si l'on suppose que les termes de bord ne contribuent pas dans la transformation, on peut montrer que l'on obtient les règles de correspondance suivantes

$$k\psi_k \longrightarrow w\partial_w\psi_w \quad \psi_{k+1} \longrightarrow \frac{\psi_w}{w} \quad \psi_{k-1} \longrightarrow w\psi_w.$$

L'équation de la fonction d'onde du fondamental se réécrit

$$\left[ \epsilon + \frac{m}{2} \left( \frac{1}{w} - w \right) - \frac{g}{4} \left( w^2 - \frac{1}{w^2} \right) \right] \psi_w + \frac{g}{4} w \left[ 2 - w^2 - \frac{1}{w^2} \right] \partial_w \psi_w = 0$$

qui est une équation différentielle du premier ordre, donc soluble. Un contour acceptable, pour lequel la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k |\psi_k|^2$$

(dont dépend  $G(\epsilon)$ ) converge, est l'intervalle  $] -1, 1[$ . On en tire  $\psi_w$  que l'on insère dans la représentation intégrale (6.13) pour obtenir finalement

$$\psi_k = \int_{-1}^1 dw \frac{w^k}{1-w^2} \left( \frac{1+w}{1-w} \right)^{\frac{m}{g}} \exp \left( \frac{\epsilon}{g} \frac{w^2}{w^2-1} \right).$$

Cette intégrale a déjà été obtenue dans [84]. Dans ce papier, J.M. Luck traite le problème de la chaîne de spins XX, avec désordre dans les couplages (notre masse aléatoire) et baignée par un champ magnétique transverse, qui joue le rôle de la valeur moyenne  $m$  du champ de masse aléatoire. Sa démonstration utilise l'*exposant caractéristique*  $\Omega(\epsilon)$  du problème de localisation, qui peut être formellement identifié à  $2\lambda(i\epsilon)$ . Ce modèle est connu pour être équivalent au modèle des fermions de Dirac en masse aléatoire avec masse moyenne (nulle ou non).

Ce dernier  $\psi_k$  n'est pas normalisé. Je rappelle que  $||\Psi||^2 = |\psi_0|^2 = 1$  si bien que prendre  $\psi_k/\psi_0$  pour une composante de la fonction d'onde normalise le fondamental. Effectuant le changement de variable  $w = \tanh(\theta/2)$  et quelques intégrations par parties, on obtient finalement pour  $\lambda$  l'expression suivante

$$\lambda = -\frac{m}{2} + \frac{\epsilon}{2} \frac{K_{1+\frac{m}{g}}(\frac{\epsilon}{g})}{K_{\frac{m}{g}}(\frac{\epsilon}{g})}$$

où  $K$  désigne la fonction de Bessel modifiée du second type. Au final, la résolvante peut être mise sous la forme :

$$G(\epsilon) = i \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[ \epsilon \frac{K'_m(\frac{\epsilon}{g})}{K_m(\frac{\epsilon}{g})} \right] \quad (6.14)$$

à l'aide de la relation  $K_{1+\frac{m}{g}}(\frac{\epsilon}{g}) = \frac{m}{\epsilon} K_{\frac{m}{g}}(\frac{\epsilon}{g}) - K'_{\frac{m}{g}}(\frac{\epsilon}{g})$ . Ce résultat est précisément celui obtenu dans [19] pour  $h^2$ . Le prime désigne une dérivation par rapport à l'argument de la fonction de Bessel.

À partir de cette formule en énergie imaginaire, on peut déduire la densité d'états intégrée ainsi que l'inverse de la longueur typique de localisation. Il suffit pour cela d'appliquer la formule de Thouless qui prend ici la forme :

$$2\lambda(i\epsilon) = l^{-1}(\epsilon) + i\pi N(\epsilon),$$

après avoir prolongé analytiquement la variable de l'énergie<sup>2</sup>. Les expressions finales pour la densité d'états et l'inverse de la longueur de localisation [36] sont représentées graphiquement sur la figure 6.1. Ce sont des cas particuliers d'expressions données plus loin dans le cadre du modèle en champ de masse aléatoire et champ magnétique constant (voir table 6.2). Dans le cas particulier  $m = 0$ , les comportements de la longueur de localisation typique et de la densité d'états près de  $\epsilon = 0$ , comprennent des corrections logarithmiques (singularité de Dyson) :

$$l(\epsilon) \sim -\frac{1}{g} \ln \left( \frac{\epsilon}{2g} \right) \quad \text{et} \quad \rho(\epsilon) \sim \frac{1}{2\frac{\epsilon}{g} \left( \ln \left( \frac{\epsilon}{2g} \right) \right)^3}.$$

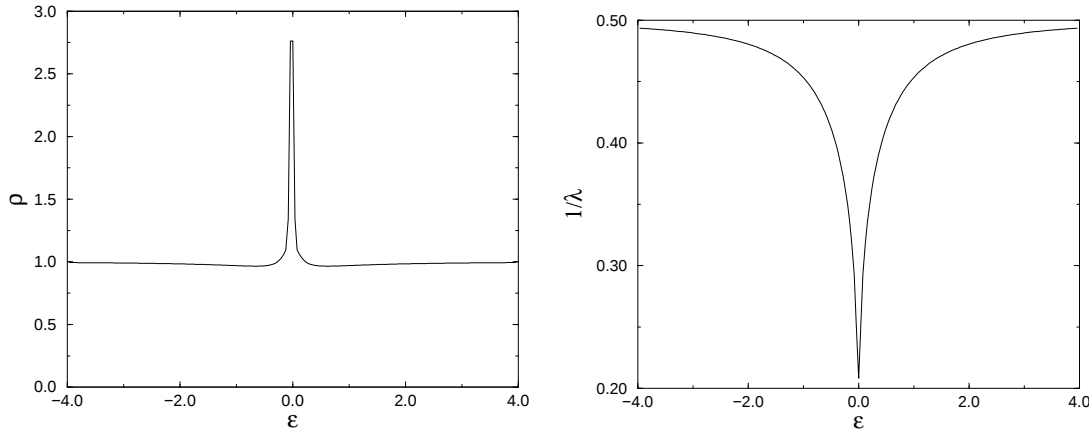


FIG. 6.1 – Densité d'états et inverse de la longueur de localisation pour le modèle en masse aléatoire  $g_x = 1$ . et  $m = 0$ .

<sup>2</sup>La formule de Thouless est précisément, pour  $\eta$  positif :

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx \langle x | \frac{1}{H - \epsilon + i\eta} | x \rangle = -\frac{d}{d\epsilon} (l^{-1}(\epsilon)) - i\pi \rho(\epsilon),$$

ou encore en énergie réelle  $G(\epsilon) = -\frac{d}{d\epsilon} (l^{-1}(\epsilon) + i\pi N(\epsilon))$ , formule qui mène à l'identification de  $\lambda(\epsilon)$ .

### 6.5.2 Modèle en potentiel électrique aléatoire

#### Particule de Dirac sans masse

Le modèle en potentiel électrique aléatoire d'une particule sans masse correspond au hamiltonien

$$h = -i\sigma_z \partial_x + V.$$

Le potentiel électrique  $V$  suit une distribution gaussienne

$$P(V) = \exp\left(-\frac{1}{2g} \int_{-\infty}^{\infty} dx V^2\right).$$

Ce modèle est trivialement soluble parce que les états propres peuvent être calculés pour toute énergie  $\epsilon$

$$\psi_\epsilon(x) = \exp\left(i\sigma_z \int_0^x [\epsilon - V(u)] du\right)$$

et pour tout désordre gelé  $V$ .

#### Particule massive

Dans le cas moins trivial de la particule massive, le hamiltonien est

$$h = -i\sigma_z \partial_x + m\sigma_y + V$$

où  $m$  est la masse fixe de la particule et  $V$ , le potentiel électrique suit la distribution gaussienne  $P(V) = \exp(-\frac{1}{2g} \int_{-\infty}^{\infty} dx V^2)$ . Le hamiltonien effectif est  $H = \epsilon Z^z + imZ^x + g(Z^z)^2$ . On en tire l'équation pour le fondamental valable pour  $k \geq 1$

$$(\epsilon + gk)\psi_k + \frac{m}{2}(\psi_{k+1} - \psi_{k-1}) = 0, \quad (6.15)$$

tandis que la formule donnant l'énergie est réduite à

$$\lambda = \frac{\epsilon}{2} + \frac{m}{2} \frac{\psi_1}{\psi_0}. \quad (6.16)$$

On peut dès à présent remarquer qu'il s'agit d'une relation de récurrence vérifiée par les fonctions de Bessel modifiées. Plutôt que de chercher à deviner quelle est la bonne combinaison de fonctions de Bessel, il est préférable d'utiliser à nouveau la méthode de Laplace, car les conditions aux limites doivent être prises en compte soigneusement. Le noyau de Mellin  $K(k, w) = w^{-k-1}$  est encore approprié. L'équation du fondamental est alors

$$\left[\epsilon + \frac{m}{2} \left(\frac{1}{w} - w\right)\right] \psi_w + gw \partial_w \psi_w = 0.$$

Un contour acceptable est l'un de ceux utilisés pour les représentations intégrales de certaines fonctions de Bessel. Le contour retenu part de  $-\infty$  sous l'axe réel, encercle l'origine 0, puis revient vers  $-\infty$  mais au dessus de l'axe réel. On en tire  $\psi_w$  que l'on insère dans la représentation intégrale, pour obtenir la valeur non-normalisée de  $\psi_k$  :

$$\psi_k = \int_{-\infty}^{0^+} dw w^{-k-\frac{\epsilon}{g}-1} \exp\left(\frac{m}{2g} \left(w + \frac{1}{w}\right)\right).$$

| $\epsilon$       | $\epsilon < m$                                | $m < \epsilon$                                           |
|------------------|-----------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| $\rho(\epsilon)$ | 0                                             | $\frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 - m^2}}$ |
| $l(\epsilon)$    | $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{m^2}}}$ | $\infty$                                                 |

TAB. 6.1 – Densité d'états et longueur de localisation pour une particule de Dirac libre et massive.

L'expression exacte pour  $\lambda$  est alors donnée par

$$\lambda = \frac{\epsilon}{2} + \frac{m}{2} \frac{I_{1+\frac{\epsilon}{g}}(\frac{m}{g})}{I_{\frac{\epsilon}{g}}(\frac{m}{g})} \quad (6.17)$$

où  $I$  est la fonction de Bessel modifiée du premier type.

Puis, grâce à  $I_{1+\frac{m}{g}}(\frac{\epsilon}{g}) = -\frac{\epsilon}{m} I_{\frac{m}{g}}(\frac{\epsilon}{g}) + I'_{\frac{m}{g}}(\frac{\epsilon}{g})$ ,

$$G(\epsilon) = -im \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[ \frac{I'_{\frac{\epsilon}{g}}(\frac{m}{g})}{I_{\frac{\epsilon}{g}}(\frac{m}{g})} \right].$$

On déduit de (6.17) une expression exacte pour la densité d'états

$$N(\epsilon) = \frac{g}{\pi^2} \frac{\sinh \pi \frac{\epsilon}{g}}{|I_{i\frac{\epsilon}{g}}(\frac{m}{g})|^2}$$

obtenue avec la formule de Thouless et un usage intensif des relations liant les fonctions de Bessel. Ce résultat avait été obtenu dans un autre contexte dans [52] grâce à des techniques de S-matrice.

Dans le cas sans désordre, on sait que la bande d'énergie  $] -m, m[$  est une région interdite. La densité d'états et la longueur de localisation sont bien connues et données dans la table 6.1. En présence de désordre, la particule pénètre statistiquement dans la région interdite. Dans la limite du faible désordre il persiste une densité d'états résiduelle au milieu de la bande ( $\epsilon \simeq 0$ ) que l'on peut évaluer :

$$\rho(0) \simeq_{g \rightarrow 0} \frac{2m}{g} e^{-2\frac{m}{g}}.$$

Les graphes de la densité d'états et de l'inverse de la longueur de localisation sont représentés sur la figure 6.2.

### 6.5.3 Modèle à désordre multiple

Que se passe-t-il lorsqu'on combine plusieurs types de désordre ? Sera-t-on en mesure d'observer un état délocalisé ? Je vais montrer qu'une telle combinaison détruit la singularité en  $\epsilon = 0$ . Pire, quel que soit la matrice de covariance (pourvu qu'elle reste bien définie positive), il n'y a pas d'autre transition que celle connue dans le cas de la masse aléatoire (ou du champ magnétique aléatoire). Pour faire simple, on va choisir pour les champs aléatoires en jeu des valeurs moyennes nulles. Toutefois, les calculs pourraient être généralisés à toutes valeurs moyennes non-nulles. Un tel modèle correspond au hamiltonien

$$h = -i\sigma_z \partial_x + \Phi \sigma_x + M \sigma_y + V$$

Chaînes de Spins, Fermions de Dirac, et Systèmes Désordonnés

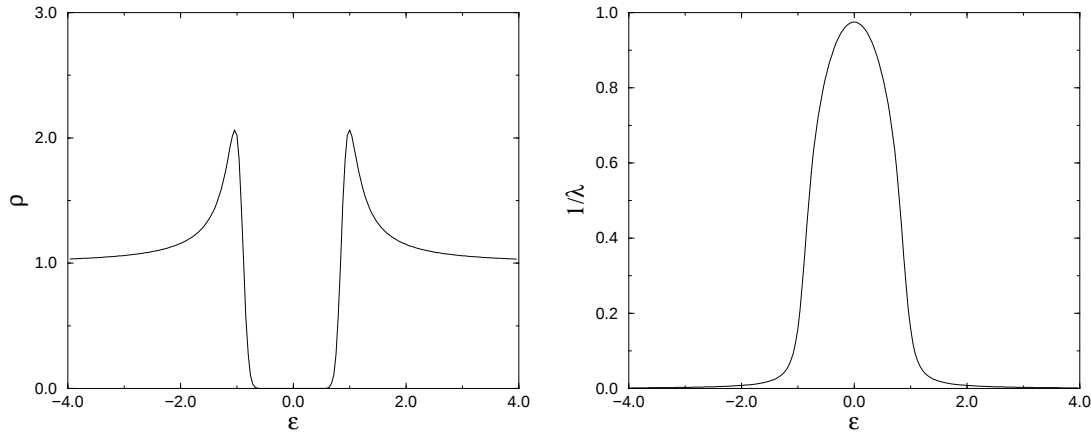


FIG. 6.2 – Densité d'états et inverse de la longueur de localisation pour le modèle en potentiel électrique aléatoire  $g_z = 0.05$  et  $m = 1$ .

où  $M$  est la masse aléatoire de la particule,  $\Phi$  est le champ magnétique et  $V$  le potentiel électrique.

Le hamiltonien effectif est  $H = \epsilon Z^z + g_x (Z^x)^2 + g_y (Z^y)^2 + g_z (Z^z)^2$ . Il lui correspond une équation du fondamental, valable pour  $k \geq 1$

$$(\epsilon + (g_z + \frac{g_x + g_y}{2})k)\psi_k + \frac{1}{4}(g_y - g_x)(k-1)\psi_{k-2} + \frac{1}{4}(g_y - g_x)(k+1)\psi_{k+2} = 0,$$

alors que son énergie est

$$\lambda = \frac{\epsilon}{2} + \frac{g_x + g_y}{4} + \frac{g_y - g_x}{2} \frac{\psi_2}{\psi_0}.$$

Seules les composantes paires contribuent. On peut en effet montrer que les éléments impairs de la suite  $\{\psi_k\}$  constituent une sous-suite divergente que l'on doit rejeter.

En conséquence, on redéfinit  $\psi_{2k} \rightarrow \psi_k$ , et on pose  $\delta = g_y - g_x$  et  $\sigma = 2g_z + g_y + g_x$  de sorte que les formules précédentes deviennent

$$\lambda = \frac{\epsilon}{2} + \frac{g_x + g_y}{4} + \frac{g_y - g_x}{2} \frac{\psi_1}{\psi_0},$$

$$(\epsilon + \sigma.k)\psi_k + \frac{\delta}{2}(k - \frac{1}{2})\psi_{k-1} + \frac{\delta}{2}(k + \frac{1}{2})\psi_{k+1} = 0.$$

Puis on introduit les racines  $\alpha_{\pm}$  de  $w^2 + 2\frac{\sigma}{\delta}w + 1 = 0$  et la constante  $\beta$  :

$$\alpha_{\pm} = -\frac{\sigma}{\delta} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{\delta^2} - 1}, \quad \beta = \frac{2}{\delta(\alpha_+ - \alpha_-)}.$$

L'émergence d'une singularité, et par conséquent d'une longueur de localisation typique infinie, est équivalente à la confluence des racines  $\alpha_{\pm}$ . Pour qu'une singularité apparaisse, on en déduit qu'il faut  $\sigma^2 - \delta^2 = 0$ , ce qui est équivalent à

$$g_z + g_y = 0 \quad \text{ou} \quad g_z + g_x = 0.$$

Puisque ces constantes sont toutes positives ou nulles, on en conclut que la diffusion en avant ( $g_z > 0$ ) interdit toute singularité. De plus, pour satisfaire le critère, l'un des deux types de

désordre restants doit aussi disparaître, c'est-à-dire  $g_x = 0$  ou  $g_y = 0$ . En particulier, l'introduction d'impuretés de natures différentes détruit la transition observée en masse aléatoire.

On suppose maintenant  $|\frac{g}{\delta}| = |\frac{2g_z + g_x + g_y}{g_y - g_x}| > 1$ . Les racines sont alors distinctes et réelles. Par commodité, on choisit  $\delta < 0$  si bien que les racines  $\alpha_{\pm}$  sont positives. On utilise ensuite les outils développés précédemment et on obtient pour  $\psi_k$  :

$$\begin{aligned}\psi_k &= \frac{1}{2i\pi} \oint_{[\alpha_+, \infty[} dw w^{-k-\frac{1}{2}} (w - \alpha_+)^{-\frac{1}{2}-\beta\epsilon} (w - \alpha_-)^{-\frac{1}{2}+\beta\epsilon} \\ &= \frac{\cos(\pi\beta\epsilon)}{\pi} \int_{\alpha_+}^{\infty} d\alpha \frac{(\alpha - \alpha_+)^{-\frac{1}{2}-\beta\epsilon} (\alpha - \alpha_-)^{-\frac{1}{2}+\beta\epsilon}}{\alpha^{k+\frac{1}{2}}}.\end{aligned}$$

On en déduit  $\lambda$ , qui donne à son tour

$$G(\epsilon) = i \left( 1 + \frac{g_y - g_x}{2} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \frac{\int_{\alpha_+}^{\infty} d\alpha \alpha^{-\frac{3}{2}} (\alpha - \alpha_+)^{-\frac{1}{2}-\beta\epsilon} (\alpha - \alpha_-)^{-\frac{1}{2}+\beta\epsilon}}{\int_{\alpha_+}^{\infty} d\alpha \alpha^{-\frac{1}{2}} (\alpha - \alpha_+)^{-\frac{1}{2}-\beta\epsilon} (\alpha - \alpha_-)^{-\frac{1}{2}+\beta\epsilon}} \right).$$

Dans les notations de départ, les racines valent

$$\alpha_{\pm} = -\frac{2g_z + g_x + g_y}{g_y - g_x} \pm \sqrt{\left(\frac{2g_z + g_x + g_y}{g_y - g_x}\right)^2 - 1} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{2\sqrt{(g_z + g_x)(g_z + g_y)}}. \quad (6.18)$$

L'inverse de la longueur de localisation typique associée à cette résolvante en énergie imaginaire est finie. Sous l'influence d'un ou plusieurs autres types de désordre le point critique du modèle en masse aléatoire devient massif. La densité d'états et l'inverse de la longueur de localisation sont représentés dans un cas particulier (mais générique) sur la figure 6.3.

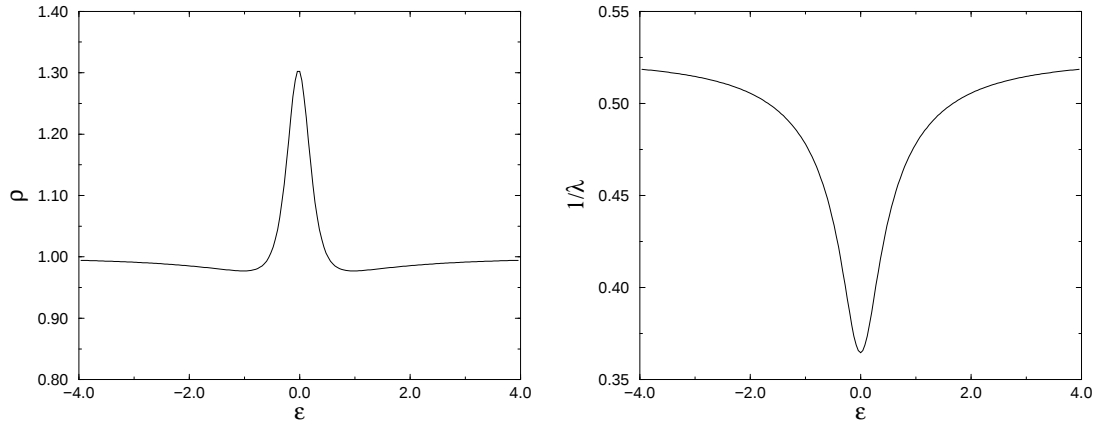


FIG. 6.3 – Densité d'états et inverse de la longueur de localisation pour le modèle à désordre multiple  $g_x = 1$ . et  $g_y = 0.05$

#### 6.5.4 Particule en champ aléatoire et en champ magnétique constant

Ce modèle est aussi équivalent à celui d'une particule de Dirac dotée d'une masse fixe et finie, en champ magnétique aléatoire. Il est décrit par le hamiltonien  $h = -i\sigma_z \partial_x + \phi \sigma_x + M \sigma_y$ .

| $\epsilon^2$       | $\epsilon^2 < \phi^2$                                                                                                                                                                                      | $\phi^2 < \epsilon^2$                                                                                                                                  |
|--------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $N(\epsilon)$      | 0                                                                                                                                                                                                          | $\frac{2g}{\pi^2} \cdot \frac{1}{M_{\frac{m}{g}}^2(\frac{\sqrt{\epsilon^2 - \phi^2}}{g})}$                                                             |
| $l^{-1}(\epsilon)$ | $-\frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[ \sqrt{\phi^2 - \epsilon^2} \cdot \frac{K'_{\frac{m}{g}}(\frac{\sqrt{\phi^2 - \epsilon^2}}{g})}{K_{\frac{m}{g}}(\frac{\sqrt{\phi^2 - \epsilon^2}}{g})} \right]$ | $-\frac{\epsilon^2 - \phi^2}{2\epsilon} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \ln \left[ M_{\frac{m}{g}}^2(\frac{\sqrt{\epsilon^2 - \phi^2}}{g}) \right]$ |

TAB. 6.2 – Densité d'états intégrée et inverse de la longueur de localisation typique pour une particule de Dirac en masse aléatoire et en champ magnétique homogène.  $M_\mu^2(z) = J_\mu^2(z) + N_\mu^2(z)$ , et  $J_\mu$  et  $N_\mu$  sont respectivement les fonctions de Bessel du premier et second type.

$\phi$  est le champ *magnétique* homogène et  $M$  est le champ de masse aléatoire qui suit la mesure  $P(M) = \exp(-\frac{1}{2g} \int_{-\infty}^{\infty} dx (M - m)^2)$ .  $\phi$  peut aussi être interprété comme un champ magnétique alterné homogène pointant dans la troisième direction et perturbant la chaîne de spins aléatoire. Une fois la moyenne effectuée, le hamiltonien effectif est obtenu :

$$H = \epsilon Z^z + (\phi + im)Z^x + g(Z^x)^2.$$

Les difficultés du calcul sont mineures comparées au cas de la masse aléatoire à la condition d'utiliser l'application non-unitaire décrite en section 6.7. Je me contente donc de donner le résultat :

$$G(\epsilon) = i \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[ \sqrt{\epsilon^2 + \phi^2} \cdot \frac{K'_{\frac{m}{g}}(\frac{\sqrt{\epsilon^2 + \phi^2}}{g})}{K_{\frac{m}{g}}(\frac{\sqrt{\epsilon^2 + \phi^2}}{g})} \right].$$

Prolongeant analytiquement  $\epsilon$ , on obtient l'expression de la densité d'états et de l'inverse de la longueur de localisation que l'on trouve dans la table 6.2. Elles sont aussi représentées graphiquement sur la figure 6.4.

Dans cette section, nous avons établi des formules de résolvantes en énergie imaginaire qui fournissent la densité d'états exacte comme la longueur de localisation typique exacte des modèles étudiés. Tant que le désordre est un bruit blanc gaussien, ces quantités peuvent être calculées exactement. Cela provient de la linéarité en  $k$  de l'équation (6.7). En effet le recours à la méthode de Laplace fournit une équation différentielle du premier ordre. C'est pourquoi dans ce cas une expression exacte peut toujours être obtenue.

## 6.6 Analyse supersymétrique

Dans [9], les auteurs ont utilisé l'astuce supersymétrique pour décrire le modèle en masse aléatoire dans le voisinage de  $\epsilon = m = 0$ . Il ont obtenus l'équation (6.12) après qu'ils ont identifié le secteur du fondamental en *pré-diagonalisant* le hamiltonien effectif. Cette diagonalisation n'est pas vraiment nécessaire. Le secteur du fondamental peut être engendré algébriquement comme une représentation dégénérée de  $\mathfrak{su}(1,1)$  dite *super-étoilée*<sup>3</sup>. De manière similaire au cas des répliques, je vais identifier  $U(1,1)$  au groupe dynamique du hamiltonien effectif, de préférence à  $U(1,1|2)$ . Dans la suite je vais procéder dans l'ordre adopté pour la dérivation par les répliques.

<sup>3</sup>Je ne suis pas sûr que la terminologie super-étoilée existe dans la littérature mathématique française.

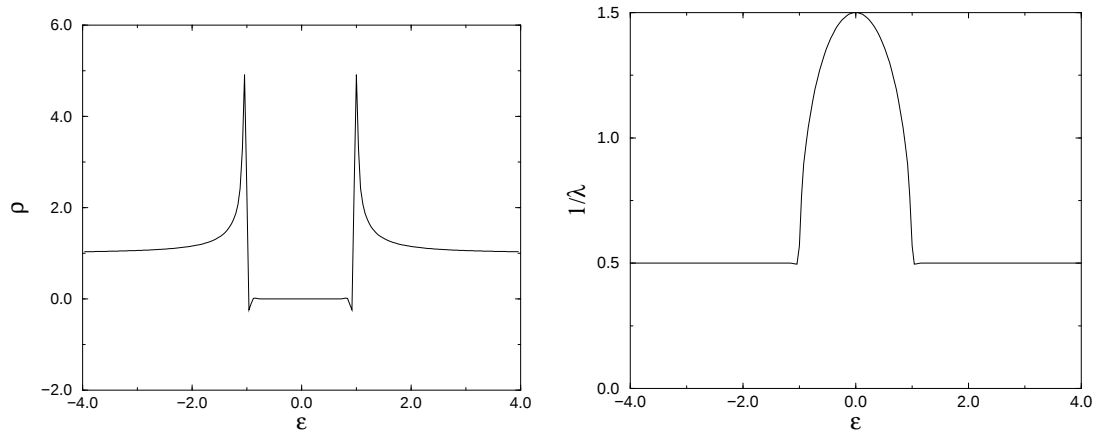


FIG. 6.4 – Densité d'états et inverse de la longueur de localisation pour le modèle en masse aléatoire et en champ magnétique  $g_x = 1.$ ,  $m = 0.5$  et  $\phi = 1$ . Les artefacts numériques près des points critiques sont dus au fait que, près de la transition, tous les événements de diffusion contribuent significativement, alors que seuls les événements comptant moins de 50 diffusions sont pris en compte dans le tracé des graphes.

J'insisterai sur les propriétés algébriques qui permettent d'aboutir à une dérivation efficace dans le cadre supersymétrique.

La représentation de la résolvante par une intégrale de chemin est obtenue comme dans [9]. Je rappelle ici l'expression pour la résolvante moyenne :

$$G(\epsilon - i\eta) = \langle \text{tr}_{\text{spin}} \int \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\xi^* \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \bar{\psi}_\alpha(x) \psi_\beta(x) \exp(i \int_{-\infty}^{\infty} dx \xi^*(x) \langle x | h + i(i\epsilon + \eta) | x \rangle \xi(x) + i \int_{-\infty}^{\infty} dx \bar{\psi}(x) \langle x | h + i(i\epsilon + \eta) | x \rangle \psi(x)) \rangle .$$

Pour mémoire,  $\psi$  et  $\bar{\psi}$  sont des champs spinoriels fermioniques alors que  $\xi$  et  $\xi^*$  sont des champs spinoriels bosoniques.

De la même façon que nous avons procédé dans le cas des répliques, nous prolongeons  $i\epsilon + \eta$  à  $\epsilon$  qui devient strictement positif. Une fois tous les calculs terminés, nous prolongerons analytiquement  $\epsilon$  en le rétablissant sur l'axe imaginaire. L'intégrale de chemin est mal définie dans le secteur des bosons. Comme dans le cas des répliques nous allons nous en assurer et y remédier en suivant la procédure de Feynman : écrire le hamiltonien classique associé à l'intégrale de chemin, puis le quantifier. Les moments conjugués des champs spinoriels  $\xi$  et  $\psi$  sont

$$\Pi_\psi = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\psi}} = i \bar{\psi} \sigma_z \quad \text{et} \quad \pi_\xi = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\xi}} = i \xi^* \sigma_z .$$

De nouveau, les points signalent une dérivation par rapport à  $x$ . Précisons que la dérivée fermionique est une dérivée à droite. On tire alors de l'intégrale de chemin des états cohérents, le hamiltonien classique

$$H_c = \Pi_\psi \cdot \partial_x \psi - \mathcal{L}(\Pi_\psi, \psi, x) + \Pi_\xi \cdot \partial_x \xi - \mathcal{L}(\Pi_\xi, \xi, x)$$

avant que la moyenne ne soit prise.

Afin de quantifier le hamiltonien, j'impose les relations de commutations canoniques

$$\{\psi, \Pi_\psi\} = i \quad \text{et} \quad [\xi, \Pi_\xi] = i .$$

Apparaît alors dans le hamiltonien quantique un terme  $\epsilon \cdot \Pi_\xi \sigma_z \xi$  qui le rend non-borné inférieurement, parce qu'un signe moins se trouve devant le produit des composantes  $\downarrow$  des opérateurs. Pour procéder à la quantification sans dommage de ce hamiltonien, nous pouvons effectuer toute transformation canonique sur les opérateurs. On sait que pour les fermions, il suffit de remplir la mer de Dirac en effectuant la transformation particule-trou :

$$\Pi_\psi = (\psi_\uparrow^+, \psi_\downarrow) \quad \psi = i(\psi_\uparrow, \psi_\downarrow^+) .$$

Comme nous l'avions déjà remarqué, cette procédure ne convient pas aux bosons qui ont tendance à condenser. On recourt donc aux transformations

$$\Pi_\xi = (\xi_\uparrow^+, -\xi_\downarrow) \quad \text{et} \quad \xi = i(\xi_\uparrow, \xi_\downarrow^+) ,$$

que l'on avait déjà justifiées dans le cadre des répliques. Le moment conjugué  $\Pi_\xi$  n'est pas l'hermitien conjugué de  $\xi$ . Remarquons que cet *accident* ne se produit pas pour les opérateurs fermioniques. Enfin, la symétrie dynamique du hamiltonien n'est plus  $U(2|2)$  mais  $U(1, 1|2)$ .

Afin de réduire la symétrie dynamique du hamiltonien, on définit les opérateurs de spin suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^x &= \frac{i}{2}(\xi_\uparrow^+ \xi_\downarrow^+ - \xi_\uparrow \xi_\downarrow) + \frac{i}{2}(\psi_\uparrow^+ \psi_\downarrow^+ - \psi_\uparrow \psi_\downarrow) , \\ \mathcal{J}^y &= \frac{1}{2}(\xi_\uparrow^+ \xi_\downarrow^+ + \xi_\uparrow \xi_\downarrow) + \frac{1}{2}(\psi_\uparrow^+ \psi_\downarrow^+ + \psi_\uparrow \psi_\downarrow) , \\ \mathcal{J}^z &= \frac{1}{2}(\xi_\uparrow^+ \xi_\uparrow + \xi_\downarrow^+ \xi_\downarrow) + \frac{1}{2}(\psi_\uparrow^+ \psi_\uparrow + \psi_\downarrow^+ \psi_\downarrow) . \end{aligned}$$

Le hamiltonien ne dépend que de ces opérateurs. On en déduit les opérateurs d'échelle associés :

$$\mathcal{J}^+ = \mathcal{J}^y - i\mathcal{J}^x \quad \mathcal{J}^- = \mathcal{J}^y + i\mathcal{J}^x \quad \mathcal{J}^0 = \mathcal{J}^z$$

qui obéissent aux relations de commutation de  $\mathfrak{su}(1, 1)$  :

$$[\mathcal{J}^+, \mathcal{J}^-] = -2\mathcal{J}^0 \quad [\mathcal{J}^0, \mathcal{J}^+] = \mathcal{J}^+ \quad [\mathcal{J}^0, \mathcal{J}^-] = -\mathcal{J}^- .$$

Cette dernière assertion n'est pas suffisante. Notamment, elle ne permet pas une construction aisée des secteurs du hamiltonien en tant qu'espace de représentation. Cela tient à  $(\mathcal{J}^+)^{\dagger} \neq \mathcal{J}^-$ . En effet, les relations de commutation ne stipulent pas la forme réelle de l'algèbre  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  qu'adopte la physique du problème. Cette non-identité provient de ce que les parties bosoniques et fermioniques de  $\mathcal{J}^+$  sont régies par deux formes réelles distinctes de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  (respectivement  $\mathfrak{su}(1, 1)$  et  $\mathfrak{su}(2)$ ).

Je vais maintenant montrer comment *transmuter* une représentation fermionique de  $\mathfrak{su}(2)$  en une représentation de  $\mathfrak{su}(1, 1)$ . Une telle transformation est concevable dans la mesure où l'espace de Fock est gradué. En effet deux types de représentations étoilées y sont autorisés. Je fais appel à la moins commune : la représentation super-étoilée. Elle est caractérisée en particulier par les propriétés de l'adjonction [116] sur les opérateurs de l'algèbre de Lie :

$$(P^+)^{\dagger} = (-1)^{\deg P} P ,$$

où  $\deg P$  prend les valeurs 0 ou 1 selon que  $P$  est pair ou impair.

Parvenir à satisfaire une telle identité n'est possible qu'en changeant de produit scalaire dans notre espace de Fock. Auparavant, il était implicitement défini par les opérateurs de création/annihilation et par la façon dont ces derniers agissaient sur le vide. Supposons qu'au lieu d'adopter les définitions usuelles de la conjugaison des opérateurs fermioniques, nous préférons

$$(\psi_{\uparrow})^{\dagger} = \psi_{\uparrow}^{+} \quad (\psi_{\uparrow}^{+})^{\dagger} = -\psi_{\uparrow} \quad \text{et} \quad (\psi_{\downarrow})^{\dagger} = \psi_{\downarrow}^{+} \quad (\psi_{\downarrow}^{+})^{\dagger} = -\psi_{\downarrow}$$

qui sont des hypothèses cohérentes à la condition de redéfinir le produit scalaire dans le secteur fermionique de l'espace de Fock. On vérifie la compatibilité de ce nouveau *produit scalaire* avec l'adjonction super-étoilée grâce à

$$\langle P^{\dagger}x|y\rangle = (-1)^{\deg P \cdot \deg x} \langle x|Py\rangle$$

valable pour tout opérateur homogène  $P$  et tous vecteurs homogènes  $x$  et  $y$ . Cependant, ce *produit scalaire* n'est plus défini positif (c'est pourquoi, en principe, on ne devrait plus l'appeler produit scalaire). Par exemple si  $|\Omega\rangle$  est le vide fermionique de norme unité, alors  $\|\psi_{\uparrow}^{+}|\Omega\rangle\|^2 = 1$  et  $\|\psi_{\uparrow}^{+}\psi_{\downarrow}^{+}|\Omega\rangle\|^2 = -1$ . Plus généralement un état avec  $4n$  ou  $4n+1$  fermions a pour norme 1, alors qu'un état avec  $4n+2$  ou  $4n+3$  fermions a pour norme  $-1$ .

Une conséquence de ce changement est que l'on a maintenant  $(\mathcal{J}^{+})^{\dagger} = \mathcal{J}^{-}$  ! Une deuxième conséquence liée à la précédente est que le hamiltonien en temps réel et lorsque  $\eta = 0$  (limite physique) est un vrai opérateur hermitien, si tant est qu'on accepte le produit scalaire dégénéré. En conséquence les opérateurs de spin  $\vec{\mathcal{J}}$  obéissent maintenant pleinement aux contraintes d'une algèbre  $\mathfrak{su}(1,1)$ . De la sorte, l'algèbre dynamique peut être réduite de  $\mathfrak{u}(1,1|2)$  à  $\mathfrak{u}(1,1)$ . C'est évidemment l'analogie de la simplification survenue dans l'analyse des répliques.

En pratique, une fois identifiée la représentation super-étoilée de l'algèbre dynamique du hamiltonien, on peut facilement engendrer ses principaux secteurs. Par exemple le secteur du fondamental est engendré par les états  $|k\rangle = \frac{(\mathcal{J}^{+})^k}{k!}|\Omega\rangle$ , où maintenant  $|\Omega\rangle$  est le vide bosonique et fermionique. Dans le cadre de notre formalisme on peut maintenant les écrire au moyen des opérateurs d'échelle :

$$|k\rangle = \frac{(\mathcal{J}^{+})^k}{k!}|\Omega\rangle = \frac{1}{k!} \left( (\xi_{\uparrow}^{+}\xi_{\downarrow}^{+})^k + k(\xi_{\uparrow}^{+}\xi_{\downarrow}^{+})^{k-1}\psi_{\uparrow}^{+}\psi_{\downarrow}^{+} \right) |\Omega\rangle$$

qui sont précisément les états obtenus dans [9]. Ils sont de norme nulle à l'exception de  $|0\rangle$ .

Les états propres à gauche peuvent être projetés de l'espace dual dans l'espace usuel au moyen de la transformation unitaire  $R = \exp(i\pi\mathcal{J}^z)$  <sup>4</sup>, qui est un opérateur supersymétrique. L'action du hamiltonien général

$$H = \epsilon\mathcal{J}^z + im\mathcal{J}^x + i\phi\mathcal{J}^y + g_x(\mathcal{J}^x)^2 + g_y(\mathcal{J}^y)^2 + g_z(\mathcal{J}^z)^2$$

sur le développement du fondamental  $|\Psi\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k |k\rangle$  produit l'équation à l'ordre 0 (6.7). À la différence des répliques, la méthode supersymétrique ne mène qu'à la formule sommatoire (6.11) pour la résolvante. En effet, utilisant le formalisme de Feynman, on se contente d'écrire la résolvante comme

$$G(\epsilon) = -2i\langle\Psi|_l S^0 |\Psi\rangle_r .$$

où  $S^0$  est la partie fermionique du générateur  $\mathcal{J}^0$ . C'est l'analogie de (6.10) et conduit à la formule (6.11).

<sup>4</sup>qui ne doit pas être confondue avec l'opérateur utilisé dans [9].

## 6.7 Symétries des désordres

Dans cette section, on discute des symétries qui peuvent exister entre des hamiltoniens associés à différents types de désordre. Une telle question est d'un intérêt tout particulier pour les modèles de fermions de Dirac aléatoires en dimension 2. Dans [87], les auteurs affirment que le flot du groupe de renormalisation du modèle en masse aléatoire est le flot inverse du modèle en potentiel scalaire aléatoire (les fonctions  $\beta$  sont identiques à un signe près global et bien sûr crucial quant à la pertinence du flot). Dans notre cas unidimensionnel, non seulement il existe au moins une application non-triviale entre le hamiltonien désordonné en masse et le hamiltonien désordonné en potentiel électrique, mais elle peut, de plus, être explicitée. En outre, il existe une symétrie plus évidente entre les problèmes du désordre de masse et celui du désordre de champ magnétique, qui mérite d'être mentionnée.

Le groupe géométrique dont le double recouvrement est le groupe  $SU(1, 1)$  est le groupe de Lorentz  $SO(2, 1)$ . C'est pourquoi on peut imaginer l'espace tridimensionnel des constantes de couplages des trois types de désordre de la manière suivante : l'axe du temps  $Oz$  mesure la force du potentiel électrique tandis que les axes  $Ox$  et  $Oy$  rendent compte des intensités du champ de masse et du champ magnétique. Les variétés invariantes sous  $SO(2, 1)$  sont les hyperboloïdes d'axe  $Oz$ .  $\mathcal{J}^x$ ,  $\mathcal{J}^y$  et  $\mathcal{J}^z$  sont les générateurs de l'algèbre de Lie. Plus précisément  $\mathcal{J}^z$  engendre la rotation euclidienne autour de l'axe  $Oz$  de l'hyperboloïde, alors que  $\mathcal{J}^x$  et  $\mathcal{J}^y$  engendrent les *boosts* d'axes  $Ox$  et  $Oy$ .

On peut écrire l'action d'un quart de tour autour de l'axe du temps sur les opérateurs de spin

$$e^{-i\frac{\pi}{2}\mathcal{J}^z} \mathcal{J}^x e^{i\frac{\pi}{2}\mathcal{J}^z} = \mathcal{J}^y \quad e^{-i\frac{\pi}{2}\mathcal{J}^z} \mathcal{J}^y e^{i\frac{\pi}{2}\mathcal{J}^z} = -\mathcal{J}^x.$$

Cette opérateur de rotation établit une symétrie unitaire entre la physique en champ magnétique aléatoire et en champ de masse aléatoire.

Plus intéressante est la remarque qu'aucune transformation unitaire ne peut transformer un désordre de masse en désordre scalaire. En effet aucun boost unitaire n'est capable de transformer un axe d'espace en l'axe du temps. Considérons alors l'opérateur non-unitaire, bien que non singulier,  $R = \exp(\frac{\pi}{2}\mathcal{J}^y)$ , qui est un boost d'axe  $Oy$  et d'angle *imaginaire*  $i\frac{\pi}{2}$ . Nous allons montrer que cet opérateur réalise la transformation recherchée. En particulier son action sur les opérateurs de spin est

$$e^{\frac{\pi}{2}\mathcal{J}^y} \mathcal{J}^z e^{-\frac{\pi}{2}\mathcal{J}^y} = i\mathcal{J}^x \quad e^{\frac{\pi}{2}\mathcal{J}^y} \mathcal{J}^x e^{-\frac{\pi}{2}\mathcal{J}^y} = i\mathcal{J}^z.$$

Commençons par raisonner sur le hamiltonien effectif  $H = \epsilon\mathcal{J}^z + im\mathcal{J}^x + g(\mathcal{J}^x)^2$  du modèle en masse aléatoire. Nous faisons alors agir  $R$  sur  $H$  :

$$RHR^{-1} = i\epsilon\mathcal{J}^x - m\mathcal{J}^z - g(\mathcal{J}^z)^2.$$

En effectuant les substitutions

$$\epsilon \longrightarrow -m, \quad m \longrightarrow \epsilon \quad \text{et} \quad g \rightarrow -g \quad (6.19)$$

on transforme le problème du potentiel électrique aléatoire de la section 6.5 en le modèle décrit par le hamiltonien  $RHR^{-1}$ .

Cependant la transformation étant non-unitaire, elle est non-triviale. Comme nous avons perdu l'unitarité, il ne nous est pas possible d'utiliser les propriétés des hamiltoniens qui dépendent du produit scalaire. C'est pourquoi, on ne considère plus désormais notre espace de Fock comme un espace de Hilbert mais comme un banal espace vectoriel.

On remarque toutefois que les noyaux des opérateurs sont des objets covariants, c'est-à-dire

$$\text{Ker}(RHR^{-1}) = R(\text{Ker}(H)),$$

car  $R$  n'est pas singulier. En oubliant le produit scalaire, j'ai élargi le noyau de  $H$  d'un sous-espace unidimensionnel à un sous-espace bidimensionnel, parce que toute condition de normalisation a disparu. Commençons par décrire  $\text{Ker}(\epsilon \mathcal{J}^z + im \mathcal{J}^x + g(\mathcal{J}^z)^2)$ . Nous savons déjà que la fonction d'onde  $I_{k+\frac{\epsilon}{g}}(\frac{m}{g})$  appartient au noyau. Une seconde solution indépendante est  $(-1)^k K_{k+\frac{\epsilon}{g}}(\frac{m}{g})$ . Pour s'en convaincre, il suffit d'effectuer le changement de variable dans la relation de récurrence (6.15) de  $\psi_k$  à  $(-1)^k \psi_k$ , et d'observer qu'il conduit à la même relation de récurrence des fonctions de Bessel modifiées du second type. On en conclut

$$\begin{aligned} \text{Ker}(RHR^{-1}) &= \text{Vec} \left\{ I_{k+\frac{m}{g}}(-\frac{\epsilon}{g}), (-1)^k K_{k+\frac{m}{g}}(-\frac{\epsilon}{g}) \right\} \\ &= \text{Vec} \left\{ (-1)^k I_{k+\frac{m}{g}}(\frac{\epsilon}{g}), (-1)^k \left[ e^{i\pi(k+\frac{m}{g})} K_{k+\frac{m}{g}}(\frac{\epsilon}{g}) - i\pi I_{k+\frac{m}{g}}(\frac{\epsilon}{g}) \right] \right\} \\ &= \text{Vec} \left\{ (-1)^k I_{k+\frac{m}{g}}(\frac{\epsilon}{g}), K_{k+\frac{m}{g}}(\frac{\epsilon}{g}) \right\}. \end{aligned}$$

Il nous reste à déterminer l'image (physique) de notre fondamental originel dans cet espace bidimensionnel. Il nous faut choisir la bonne combinaison des deux vecteurs de base du noyau, celle qui constitue la fonction d'onde du fondamental du *premier* des deux hamiltoniens. Cette combinaison ne dépend pas des valeurs des paramètres du hamiltonien parce que  $R$  agit linéairement sur les états.

Pour ce faire, on recourt à la méthode alternative des répliques et on interprète  $n$  comme un paramètre de déformation. Alors l'énergie du fondamental du hamiltonien répliqué  $\lambda(n) = \lambda n + O(n^2)$  est caractérisée par

$$\lambda = -\frac{m}{2} + \frac{\epsilon}{2} \frac{\psi_1}{\psi_0}. \quad (6.20)$$

Dans la version supersymétrique du problème, la règle de sélection du fondamental est la convergence des séries qui définissent les fonctions de corrélation. Cela s'applique en particulier à la résolvante. Dans le cas des répliques, l'analogue de cette règle de sélection est le signe de  $\lambda$  qui décide de la finitude de la théorie quantique. Dans la mesure où nous avons renoncé au produit scalaire, il est maladroit d'évaluer les séries définissant la résolvante du problème originel, alors qu'il est beaucoup plus simple de vérifier le signe de  $\lambda$  pour toutes les valeurs raisonnables des paramètres  $\epsilon$ ,  $m$ , et  $g$ .

Appliquons maintenant notre règle de sélection. Essentiellement parce qu'apparaît un signe moins dans la formule (6.20) en comparaison de la formule originelle (6.16), la seule combinaison acceptable dans  $\text{Ker}(RHR^{-1})$  est la fonction d'onde  $\psi_k = K_{k+\frac{m}{g}}(\frac{\epsilon}{g})$ . Et en effet, on a dans ce cas

$$\lambda = -\frac{\epsilon}{2} \frac{K'_{\frac{m}{g}}(\frac{\epsilon}{g})}{K_{\frac{m}{g}}(\frac{\epsilon}{g})}.$$

Or les fonctions de Bessel modifiées du second type sont strictement décroissantes, donc  $\lambda > 0$ . Finalement, on conclut

$$G(\epsilon) = -2i \frac{\partial}{\partial \epsilon} \lambda = i \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[ \epsilon \frac{K'_{\frac{m}{g}}(\frac{\epsilon}{g})}{K_{\frac{m}{g}}(\frac{\epsilon}{g})} \right]$$

et on retrouve le résultat (6.14).

Cette manière d'obtenir (6.14) épargne en pratique bien des calculs. En particulier, nous avons transformé une relation de récurrence d'ordre 5 en une autre relation de récurrence d'ordre 3, plus facile à résoudre.

## 6.8 Conclusion

Nous avons calculé la densité d'états et la longueur de localisation typique pour plusieurs configurations de désordre. En particulier, nous avons montré que, quel que soit le désordre gaussien, même dans un cas de désordre hétérogène, il n'y a pas de nouvelle singularité émergeant autre que celle déjà connue du désordre en masse aléatoire. Ce faisant, nous avons utilisé des méthodes algébriques pour décrire les différents secteurs du hamiltonien. Pour le calcul des quantités précédemment citées, il est plus direct d'utiliser la méthode des répliques, en interprétant l'indice des répliques  $n$  comme un paramètre de déformation. L'algèbre dynamique du hamiltonien effectif est  $u(1, 1)$  et permet d'engendrer aisément le secteur du fondamental dont on peut extraire les propriétés thermodynamiques de ces modèles.

L'espace vectoriel du secteur du fondamental est identifié à une représentation supplémentaire de l'algèbre dynamique, indexée par  $n$ . Une preuve analogue a été donnée dans le cadre du formalisme supersymétrique.

J'ai également souligné l'existence de symétries entre les hamiltoniens décrivant différents modèles désordonnés. En particulier, j'ai établi un lien entre un désordre de masse et un désordre scalaire à l'aide d'une transformation non-unitaire.

Ces calculs ne peuvent être que partiellement généralisés au calcul de la fonction de Green à deux points. Les simplifications algébriques apparues dans les alternatives répliques/supersymétrie sont toujours opérationnelles, de même que la méthode de Laplace. Toutefois les équations différentielles qui en résultent sont invariablement des équations différentielles du second ordre qui proviennent de la confluence de six singularités élémentaires. Malheureusement, cela exclut tout calcul exact. En outre des approximations contrôlées ne sont simples que lorsqu'il existe un point critique (qui implique quelques simplifications notables, comme le passage à la limite continue pour l'équation aux différences), ce qui est le cas déjà connu du modèle en masse aléatoire.



## Chapitre 7

# Fermions de Dirac aléatoires en dimension 2 : Supraconducteur désordonné dans la classe D

### 7.1 Introduction

Le modèle d'Ising est certainement l'exemple le mieux connu des modèles bidimensionnels non-triviaux où apparaissent des fermions de Dirac. Il possède une transition de phase magnétique à température finie. La physique de ce point critique est équivalente à une théorie relativiste d'un fermion de Majorana. Élever la fonction de partition au carré est une astuce qui permet de se ramener à deux fermions de Majorana qui composent alors un unique fermion de Dirac. C'est pourquoi on pourra tout aussi bien dans ce chapitre faire référence à des fermions de Dirac.

L'influence du désordre sur ce système est un sujet très étudié. Nous nous intéressons au cas où les couplages des liens entre spins prennent des valeurs fluctuantes. On montre qu'alors le fermion de Majorana acquiert une masse aléatoire. Une étude du groupe de renormalisation par les répliques a été menée par les frères Dotsenko [40] sur ce système désordonné. Ils ont montré que le terme de masse est marginalement non-pertinent et qu'il conduit par conséquent à des corrections logarithmiques en comparaison du modèle d'Ising pur. En particulier, la chaleur spécifique reste singulière, mais sous une forme affaiblie (dépendance en  $\ln \ln$  plutôt que  $\ln$  en la température  $\tau - \tau_c$  relative à la température critique). Cette conclusion a été confirmée puis étendue aux moments des corrélations spin-spin par Shankar dans [122] et Ludwig dans [85, 86].

En dépit de ces travaux, Ziegler a prétendu que les corrections logarithmiques thermodynamiques du modèle d'Ising sont en réalité lissées par le désordre. En particulier il estime que la densité d'états d'un fermion à énergie nulle est finie et considère que c'est une conséquence de corrections non-perturbatives. Pour appuyer ses affirmations, il se réfère à un modèle de fermions de Dirac sur réseau dont on peut montrer que la densité d'états est positive. Il est montré dans notre publication que son modèle n'est pas une discrétisation appropriée d'un fermion de Dirac en masse aléatoire mais d'un hamiltonien appartenant à une classe de symétrie radicalement différente qui possède l'invariance par renversement du temps (la classe de Wigner-Dyson AI

pour la nommer).

Le calcul de théorie des champs de Ziegler imite le traitement standard des métaux désordonnés, qui est fondé sur une transformation de Hubbard-Stratonovich, suivie par une approximation du point-col. Dans un premier papier [142], il soutient que toutes les fluctuations autour du point col sont massives alors que dans un papier plus récent [143] il affirme que la supersymétrie est spontanément brisée, de sorte qu'apparaît un mode fermionique sans masse, tandis que le mode bosonique demeure massif. Un premier objectif de ce travail est donc de tenter de clarifier tout cela.

Quoiqu'il en soit, l'idée de Ziegler d'utiliser les méthodes non-perturbatives développées pour la théorie des systèmes désordonnés est séduisante. Ces méthodes ont été élaborées non pas en se fondant sur le champ de l'électron mais sur le champ composite de Hubbard-Stratonovich  $Q \sim \psi\bar{\psi}$ . La théorie effective de ces métaux, formulée en termes de ce champ  $Q$ , permet de calculer les corrections au régime métallique provenant des interférences quantiques, et plus généralement la physique non-perturbative de la localisation en basse dimension. L'idée de Ziegler est donc (de tenter) de passer d'un champ de Majorana  $\psi$  à un champ composite  $Q \sim \psi\bar{\psi}$ .

Malheureusement, dans les travaux de Ziegler, la symétrie du hamiltonien n'est pas correctement prise en compte ! Voyons quelle est cette symétrie. Le hamiltonien d'un fermion de Dirac en masse aléatoire  $m(x)$  et en dimension 2 est

$$H = \begin{pmatrix} m(x) & -i\partial_1 - \partial_2 \\ -i\partial_1 + \partial_2 & -m(x) \end{pmatrix}, \quad (7.1)$$

et se distingue par sa symétrie particule-trou :

$$H = -\sigma_1 H^T \sigma_1 \quad \text{où} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.2)$$

Je rappelle qu'on a doublé le nombre de fermions de Majorana (ici deux) pour obtenir un fermion de Dirac. Si l'on se réfère à la classification générale des systèmes désordonnés à une particule, le hamiltonien (7.1) est dans la classe de symétrie  $D$ . L'appellation  $D$  provient de la dénomination  $D_N$  par Cartan de l'algèbre de Lie orthogonale en dimension paire  $\text{so}(2N)$ , qui est précisément la symétrie maximale de (7.2) (au sens des matrices aléatoires). Cette classification consiste à faire l'inventaire des symétries possibles pour un hamiltonien désordonné. En faisant quelques hypothèses, comme par exemple le caractère hermitique du hamiltonien, on peut classer les hamiltoniens en 10 (voire 11) familles. Lorsque l'approximation des matrices aléatoires est valable (régime ergodique), cette classification acquiert un caractère universel. M.R. Zirnbauer et A. Atland ont essentiellement clos le sujet en donnant des exemples de réalisations physiques des classes C, D, CI et DIII dans les interfaces métal normal/supraconducteur. Il ont également obtenu des résultats sur le spectre des ensembles gaussiens de matrices aléatoires respectant ces symétries. On trouvera dans l'appendice C, la liste des classes de symétrie et quelques indications sur leur interprétation physique.

Il est donc important de tenir compte de la symétrie du hamiltonien. Mais cela n'est pas la seule difficulté. En effet, dans le cas des métaux désordonnés, l'approximation du point-col est correcte parce qu'elle est justifiée de façon perturbative. En effet, effectuer l'approximation du point-col revient à négliger les diagrammes croisés. Or, pour les métaux désordonnés, ces diagrammes croisés sont multipliés par un facteur adimensionné  $\alpha^{-1} = \lambda_F/\ell$  où  $\ell$  est le libre parcours moyen et  $\lambda_F$  la longueur de Fermi. Dans la limite où l'on s'intéresse aux *corrections* quantiques, on a  $\alpha \gg 1$ , de sorte qu'il devient raisonnable de négliger les diagrammes croisés.

Or rien de tel dans notre cas ! En effet la physique du hamiltonien de Dirac ne fait apparaître aucune échelle naturelle analogue à la longueur de Fermi. Et il n'y a aucune raison de négliger les termes croisés, et donc aucune raison de croire que la démarche utilisée avec succès sur les métaux désordonnés peut s'appliquer à notre problème.

Revenons à notre hamiltonien de Dirac en masse aléatoire (7.1). En suivant l'analyse faite dans [145], on en déduit que la théorie des champs pour ce fermion de Dirac possède une invariance globale sous le supergroupe de Lie orthosymplectique  $\mathrm{OSp}(2n|2n)$ , lorsque l'énergie du système est nulle et que l'on souhaite calculer la moyenne d'un produit de  $n$  fonctions de Green. L'existence de cette symétrie avait été dévoilée par D. Bernard [14] et C. Mudry [98, 31].

Une telle symétrie peut avoir des conséquences substantielles sur la physique de basse énergie. D'une part Altland et Zirnbauer [5] ont montré que l'ensemble gaussien des matrices aléatoires de classe  $D$  exhibait une densité d'états positive à l'énergie nulle. D'autre part, dans la théorie des champs des fermions de Dirac, la densité d'états joue le rôle d'un "paramètre d'ordre". Une densité d'états non-nulle en  $E = 0$  serait donc le signe d'une brisure de la symétrie  $\mathrm{OSp}(2n|2n)$ . Le théorème de Goldstone prédit alors l'apparition de modes de masse nulle. Ce raisonnement a un sens lorsque la taille du système est finie. Que se passe-t-il à la limite thermodynamique ? Pour le savoir il faudra faire appel au groupe de renormalisation, car la théorie des champs des bosons de Goldstone en interaction est non-triviale. La réponse sera donnée dans la section 7.9.

Nous allons aborder ce problème en utilisant de manière complémentaire l'approche d'Efetov des systèmes désordonnés menant à un modèle sigma non-linéaire et l'approche d'un système de fermions de Dirac comme un modèle de Wess-Zumino-Novikov-Witten (perturbé).

## Plan du chapitre

Donnons un aperçu du raisonnement suivi dans le chapitre. Ce que nous allons précisément étudier, c'est une famille de modèles à  $N \geq 1$  espèces de fermions. La masse  $m(x)$  du modèle à un fermion est remplacée par une matrice de masse  $M_{kl}(x)$  pour  $N$  espèces de particules (sections 7.2 et 7.3). On augmente le nombre de fermions parce que l'on sait qu'à la limite  $N \rightarrow \infty$ , l'approximation du point col est justifiée. On espère ainsi mieux cerner le domaine de validité des théories des champs effectives construites sur le hamiltonien. Un calcul perturbatif, puis une analyse du groupe de renormalisation montre qu'en plus du terme de masse habituel, plusieurs autres opérateurs sont engendrés par le flot pour  $N > 1$ . Un de ces opérateurs, jouant un rôle particulier, sera incorporé dans le modèle dès le départ (section 7.4).

On transforme ensuite la théorie de Dirac en milieu désordonné en une action effective pour les champs non-linéaires  $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{X}$ . L'espace de plongement  $\mathbf{X}$  est un superspace symétrique Riemannien de type  $CI|DIII$ . Sa base bosonique est le produit  $M_B \times M_F$  où  $M_B = \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})/\mathrm{U}(n)$  est un espace symétrique non-compact de type  $CI$ , et  $M_F = \mathrm{O}(2n)/\mathrm{U}(n)$  est un espace symétrique compact de type  $DIII$  (section 7.5).

L'action effective pour le champ composite  $Q$  s'écrit comme le logarithme d'un superdéterminant, issu de l'intégration sur les champs de Dirac. On veut ensuite développer en gradients de  $Q$  l'action effective afin de construire un modèle sigma non-linéaire. Il se trouve que le calcul est délicat (du moins plus que nous ne le pensions), puisqu'il implique de prendre en compte une anomalie chirale. Il est possible de s'y prendre de façon très formelle (régularisation par le noyau de la chaleur), mais nous préférons avoir recours à une variante de la bosonisation non-abélienne. Je rappelle que depuis le travail de Witten [140], on sait qu'une théorie libre de  $2n$  fermions de Majorana a une représentation équivalente par un modèle de Wess-Zumino-Noviko-

Witten (WZW)  $O(2n)$  de niveau  $k = 1$ . L'introduction de la supersymétrie nous contraint à prolonger cette analyse à une équivalence entre  $2n + 2n$  champs de Majorana (fermions et fantômes bosoniques) et un modèle WZW au niveau  $k = 1$  prenant ses valeurs dans un superspace symétrique Riemannien de type  $C|D$ . L'espace de plongement  $C|D$  est construit sur la base  $\mathcal{M}_B \times \mathcal{M}_F$  où  $\mathcal{M}_B = \text{Sp}(2n, \mathbb{C})/\text{Sp}(2n)$  et  $\mathcal{M}_F = O(2n)$ . On l'appellera  $\mathbf{X}_n$ .

En utilisant une extension supersymétrique des règles de bosonisation pour les densités chirales  $\psi_\pm \bar{\psi}_\mp$ , on peut alors calculer le développement en gradients de l'action effective. Le lagrangien du modèle sigma non-linéaire ainsi obtenu contient un terme topologique, d'angle topologique encore noté  $\theta$ . Un tel terme est autorisé par la symétrie puisque le Hamiltonien de Dirac sans masse  $H_0$  dépend du choix d'une orientation. Le terme topologique est trivial pour  $n = 1$ , mais ne l'est plus au delà ( $n \geq 2$ ), car

$$\Pi_2(\text{SO}(2n)/\text{U}(n)) = \begin{cases} 0 & \text{for } n = 1, \\ \mathbb{Z} & \text{for } n \geq 2. \end{cases}$$

En restreignant l'action du modèle WZW  $C|D$  à  $\mathbf{X}_n$ , on montre que l'angle topologique vaut  $\theta = N\pi$ . Tout cela est traité dans la section 7.7.

Un exemple de réalisation de la symétrie  $D$  sur réseau désordonné est proposé dans la section 7.8. S'inspirant du chapitre 4, il est possible d'en déduire, dans la limite fortement anisotrope, le hamiltonien effectif d'une chaîne de superspins antiferromagnétique construite sur une forme réelle du groupe  $\text{OSp}(2|2)$ . Sa physique de basse énergie est décrite par un modèle sigma non-linéaire que l'on compare avec succès au modèle sigma non-linéaire obtenu précédemment.

Comme on l'a déjà mentionné, le passage de la théorie de Dirac en masse aléatoire au modèle sigma non-linéaire, de même que la description du réseau par un modèle sigma non-linéaire, sont justifiés pour  $N \gg 1$ . C'est une des raisons invoquées pour augmenter le nombre de fermions. En fait le cas  $N = 2$  présente un intérêt physique. Il se trouve que le passage est également contrôlé dans le cas  $N = 2$ , si le terme cinétique est *anisotropique*, la première espèce de fermions étant plus véloce dans la direction  $x$  et la seconde dans la direction  $y$ .

Ce cas de figure correspond précisément à la physique d'un supraconducteur d'onde  $d$  désordonné avec une concentration sous-critique d'impuretés magnétiques [53]. Pour  $N \gg 1$ , ou  $N = 2$  avec une grande anisotropie, le modèle sigma non-linéaire est dans un régime de couplage faible et sa fonction  $\beta$  à une boucle prédit une renormalisation vers un point fixe gaussien qui correspond à un métal parfait. Dans ce cas la densité d'états diverge logarithmiquement en  $E = 0$  à la limite thermodynamique. Nous calculons également la densité d'états pour un système de taille finie dans le régime ergodique. Nous obtenons un bon accord avec la prédiction de la théorie des matrices aléatoires [5]. Ces expressions pour la densité d'états sont calculées dans la section 7.9.

Au contraire, pour  $N = 1$ , le passage au modèle sigma non-linéaire n'est pas maîtrisé. Et nous nous contentons dans ce cas d'exploiter le groupe de renormalisation partant des fermions de Dirac. Ce qui est suffisant dans le cas d'un désordre faible, puisque l'opérateur du désordre est dans ce cas marginalement non-pertinent. Alors le modèle part dans l'infrarouge vers le point fixe des fermions libres et la densité d'états s'annule à l'énergie nulle.

La deuxième motivation de ce travail est la physique du supraconducteur de classe  $D$  telle qu'elle a été introduite à la fin du chapitre 4. Nos résultats lui seront appliqués dans la section 7.10. La physique qualitative de quasiparticules dans un supraconducteur de la classe  $D$  a été étudiée simultanément par Senthil et Fisher [121]. Les auteurs y établissent, entre autres, un diagramme de phase du cas bidimensionnel. Le diagramme comporte trois phases : l'isolant

thermique, l'isolant thermique de Hall, et un métal thermique. Les trois phases se rencontrent en un point multicritique  $\mathcal{M}^*$ . La structure du diagramme de phases est déterminée par quelques arguments élémentaires : la localisation de tous les états pour les deux phases isolantes, la distinction s'opérant entre les deux par un argument topologique, manifestation de courants (thermiques) de bord attendus dans la phase isolante de Hall. La phase métallique est obtenue comme celle d'un modèle sigma non-linéaire faiblement couplé CI|DIII.

De façon plus spéculative, Senthil et Fisher ont tenté de comparer ce diagramme de phase à celui du modèle d'Ising aléatoire (avec du désordre sur les liens). Une telle identification est motivée par la présence du fermion de Majorana dans le modèle d'Ising. Il apparaît toutefois une difficulté. Des trois phases du diagramme de la classe  $D$ , seules deux ont leur contrepartie dans le diagramme du modèle d'Ising, à savoir la phase paramagnétique et la phase ferromagnétique. Les auteurs ont donc cherché la troisième phase et proposé deux scénarii. Le premier identifie le point multicritique  $\mathcal{M}^*$  au point de Nishimori [102]. Le second interprète la troisième phase comme une phase de verre de spins. Ni l'un ni l'autre ne nous ont paru convaincants et nous proposons une troisième solution. Nous pensons que la phase métallique ne peut être atteinte que dans un espace de paramètres élargi pour plus d'une espèce de fermions ( $N > 1$ ), et est totalement absente dans le cas  $N = 1$ . Cela nous pousse à identifier le point multicritique  $\mathcal{M}^*$  du supraconducteur désordonné de type  $D$  avec le point fixe des fermions libres. Notre analyse sera exposée dans la section 7.11.

Venons-en maintenant au hamiltonien de Dirac en masse aléatoire et à ses symétries.

## 7.2 Hamiltonien de Dirac en masse aléatoire

On attribue au hamiltonien  $H$  bidimensionnel qui décrit  $N$  espèces de fermions de Dirac libres, un terme de masse aléatoire et on l'écrit

$$H = \begin{pmatrix} M(x) & -2i\partial \\ -2i\bar{\partial} & -M^T(x) \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

$M = (M_{kl})$  est la matrice de masse  $N \times N$ , et l'on a utilisé les conventions  $\partial = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2)$ ,  $\bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2)$ . Afin d'éviter toute confusion, précisons que ces espèces de fermions ne sont ni des répliques destinées à des opérations de moyenne, ni des copies destinées au calcul de la moyenne du produit de  $n$  fonctions de Green.

Le hamiltonien est hermitien :  $H^\dagger = H$ . Il satisfait aussi la propriété fondamentale :

$$H = -\sigma_1 H^T \sigma_1, \quad (7.4)$$

que l'on appelle dans la littérature *symétrie particule-trou*. D'un point de vue plus systématique, cela signifie que le hamiltonien appartient à la classe D. L'opération d'adjonction duale  $T$  signifie la transposition dans l'espace particule-trou et dans l'espace des positions (on a  $\partial^T = -\partial$ ). La densité lagrangienne de Majorana associée à  $H$  est :

$$\mathcal{L}_M = i\bar{\psi}_l \partial \bar{\psi}_l + i\psi_l \bar{\partial} \psi_l + \bar{\psi}_k M_{kl} \psi_l.$$

La sommation sur les indices répétés est sous-entendue. La première des conséquences de la symétrie particule-trou est qu'à tout état propre de  $H$  d'énergie  $E$ , on peut faire correspondre un second état propre d'énergie  $-E^1$ . En conséquence la densité d'états est une fonction paire

<sup>1</sup>Il est facile de voir que cet état est  $\sigma_1 \psi^*$ , où  $*$  est la conjugaison complexe.

de l'énergie<sup>2</sup>. Autre conséquence, il existe une relation entre les fonctions de Green avancée et retardée  $G^\pm(E) = (E \pm i0 - H)^{-1}$  :

$$G^-(E) = -\sigma_1 G^+(-E)^T \sigma_1 .$$

Le cas non-désordonné bien connu est celui où la matrice de masse est un multiple de l'unité  $M(x) = m \times 1_N$ . On calcule alors aisément la densité d'états locale :

$$\begin{aligned} \nu(E) &= (\text{aire})^{-1} \pi^{-1} \text{Im Tr} (E - i0^+ - H)^{-1} \\ &= \frac{2N}{\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \text{Im} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{E - i\eta}{(E - i\eta)^2 - k^2 - m^2} \\ &= \frac{N|E|}{2\pi} \theta(E^2 - m^2) , \end{aligned}$$

qui s'annule linéairement en  $E = 0$  dans la limite de masse nulle.

Dans ce qui suit, on demande que les éléments de la matrice de masse soient distribués de façon gaussienne, de moyennes nulles, et de seconds moments donnés par

$$\langle M_{ij}(x) M_{kl}(y) \rangle = (2g_M/N) \delta_{il} \delta_{jk} \delta(x - y) . \quad (7.5)$$

### 7.3 Représentation de la résolvante comme une intégrale supersymétrique

La densité d'états moyenne peut être obtenue par le calcul de la fonction de Green moyenne. Pour cela, nous allons adapter la méthode supersymétrique de Efetov [43]. En principe un tel calcul est standard. En fait il n'en n'est rien puisque nous devons l'appliquer à un opérateur de Dirac, qui est loin de posséder les propriétés conciliantes d'un laplacien. C'est pourquoi il est important de rendre compte des étapes du calcul.

Pour calculer la valeur moyenne des fonctions de Green, nous allons employer une représentation intégrale supersymétrique. Il s'agit de la même technique que celle employée dans le chapitre 6. Nous allons de même entreprendre le calcul de la valeur moyenne d'une fonction de Green ( $n = 1$ ). Bien que nous nous contentions ici d'une seule fonction de Green pour que les calculs soient clairs, la généralisation à un nombre de copies arbitraire  $n > 1$  est immédiate [145]. On introduit  $2N$  supermultiplets  $\phi_k$  et  $\bar{\phi}_l$  ( $k, l = 1, \dots, N$ ) donnés par

$$\phi = \begin{pmatrix} \psi_- \\ \psi_+ \\ c \\ b \end{pmatrix} , \quad \bar{\phi} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_- \\ \bar{\psi}_+ \\ \bar{c} \\ \bar{b} \end{pmatrix} ,$$

chacun contenant deux composantes fermioniques et deux composantes bosoniques. On définit également la forme duale de  $\phi$  :

$$\phi^t \equiv (\psi_+, \psi_-, b, -c) \quad (7.6)$$

<sup>2</sup>Remarquons que ce raisonnement est non seulement valable en moyenne sur le désordre mais aussi à désordre gelé.

et la forme  $\bar{\phi}^t$  définie similairement. Ces nouveaux supermultiplets sont les *transposés orthosymplectiques* de  $\phi$  et  $\bar{\phi}$  respectivement. Cette dualité vectorielle est équivalente à la donnée du produit intérieur

$$\bar{\phi}^t \phi = \bar{\psi}_+ \psi_- + \bar{\psi}_- \psi_+ + \bar{b}c - \bar{c}b = -\phi^t \bar{\phi} , \quad (7.7)$$

manifestement antisymétrique.

Les champs se transforment sous l'action multiplicative de matrices  $4 \times 4$  :

$$\phi(x) \mapsto T \cdot \phi(x) , \quad \bar{\phi}(x) \mapsto T \cdot \bar{\phi}(x) .$$

La dualité orthosymplectique s'étend à la définition d'une transposition orthosymplectique pour les opérateurs, naturellement donnée sur  $T$  par  $(T\phi)^t \equiv \phi^t T^t$ , pour tout  $\phi$ . La dualité a été construite de telle sorte que le super-groupe de Lie (complexe car aucune forme réelle n'est spécifiée)  $\text{OSp}(2|2)$  soit défini par  $T^t T = 1$ .

La formulation de théorie des champs conduit à la densité lagrangienne

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\phi}_l^t \partial \bar{\phi}_l + \phi_l^t \bar{\partial} \phi_l + i \bar{\phi}_k^t M_{kl} \phi_l - i E \bar{\phi}_l^t \Sigma_3 \phi_l , \quad (7.8)$$

où

$$\Sigma_3 = 1_{\text{susy}} \otimes \sigma_3 = \text{diag}(+1, -1, +1, -1) ,$$

et l'on sous-entend la sommation sur les indices répétés  $k$  et  $l$ .

Si l'on note  $j$  et  $\bar{j}$  les sources, les fonctions de Green du hamiltonien de Dirac (7.3) sont engendrées par la fonctionnelle

$$\mathcal{Z}[j] = \left\langle \int \mathcal{D}\bar{\phi} \mathcal{D}\phi \exp - \int d^2x (\mathcal{L}_0 + \bar{\phi}^t j + \phi^t \bar{j}) \right\rangle ,$$

comme on peut le vérifier simplement par le fait que  $\mathcal{L}_0$  est une forme quadratique construite en intercalant l'opérateur

$$1_{\text{susy}} \otimes i(H - E) = 1_{\text{susy}} \otimes \begin{pmatrix} iM - iE & 2\partial \\ 2\bar{\partial} & -iM^T - iE \end{pmatrix}$$

entre

$$(\bar{\psi}_+, \bar{b}, \psi_+, b) \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \psi_- \\ c \\ \bar{\psi}_- \\ \bar{c} \end{pmatrix} ,$$

et en intégrant par parties pour rendre symétriques les termes de dérivées.

### 7.3.1 Convergence de l'intégrale fonctionnelle

Pour que les intégrales gaussiennes sur  $\phi$  et  $\bar{\phi}$  puissent converger, il est nécessaire de définir une conjugaison complexe  $*$  sur les champs bosoniques :

$$b_l^* = \bar{c}_l , \quad c_l^* = \bar{b}_l . \quad (7.9)$$

Ce choix étant fait, l'intégrale fonctionnelle est purement oscillante pour  $E \in \mathbb{R}$ , et converge pour des énergies dans le demi-plan complexe supérieur ( $\text{Im} E > 0$ ).

### 7.3.2 Symétrie de l'action

Dans la limite  $E \rightarrow 0$ , l'action acquiert une invariance sous les transformations globales,

$$\begin{aligned}\phi_l(x) &\mapsto T \cdot \phi_l(x) , & \bar{\phi}_l(x) &\mapsto T \cdot \bar{\phi}_l(x) , \\ \phi_l^\dagger(x) &\mapsto \phi_l^\dagger(x) \cdot T^\dagger , & \bar{\phi}_l^\dagger(x) &\mapsto \bar{\phi}_l^\dagger(x) \cdot T^\dagger ,\end{aligned}$$

pour tout élément  $T$  dans  $\text{OSp}(2|2)$ , c'est-à-dire, rappelons-le, si  $T$  satisfait  $T^\dagger T = 1$ .

### 7.3.3 Moyenne sur le désordre

On moyenne sur le désordre selon la prescription (7.5). Dans le cas  $E = 0$ , la densité lagrangienne devient

$$\mathcal{L}_1 = \bar{\phi}_l^\dagger \partial \bar{\phi}_l + \phi_l^\dagger \bar{\partial} \phi_l + (g_M/N) \Phi^{(1)} , \quad \Phi^{(1)} = \bar{\phi}_k^\dagger \phi_l \bar{\phi}_l^\dagger \phi_k . \quad (7.10)$$

Par comptage de puissance, il est simple de comprendre que l'opérateur  $\Phi^{(1)}$  est une perturbation marginale (au sens du groupe de renormalisation) de la théorie de Dirac libre et sans masse. Que la perturbation  $\Phi^{(1)}$  soit pertinente ou non dépend de la fonction  $\beta(g_M)$ , ou encore du produit à courte distance de  $\Phi^{(1)}$  avec lui-même.

## 7.4 Perturbations marginales

Le produit à courte distance de  $\Phi^{(1)}$  avec lui-même engendre trois nouveaux opérateurs :

$$\begin{aligned}\Phi^{(2)} &= \bar{\phi}_k^\dagger \bar{\phi}_l \phi_l^\dagger \phi_k , \\ \Phi^{(3)} &= \bar{\phi}_k^\dagger \phi_k \bar{\phi}_l^\dagger \phi_l , \\ \Phi^{(4)} &= \bar{\phi}_k^\dagger \phi_l \bar{\phi}_k^\dagger \phi_l ,\end{aligned}$$

pour  $N > 1$ . Il est aisé de vérifier que chacun de ces opérateurs est marginal et invariant sous  $\text{OSp}(2|2)$ , et que l'ensemble  $\Phi^{(1)}, \dots, \Phi^{(4)}$  épuise l'ensemble des perturbations marginales permises par la symétrie. Lorsque  $N = 1$  la situation se simplifie puisqu'alors  $\Phi^{(1)} \equiv \Phi^{(3)} \equiv \Phi^{(4)}$ , et  $\Phi^{(2)} \equiv 0$  grâce à (7.7).

Étant donné que les opérateurs  $\Phi^{(\alpha)}$  ( $\alpha = 2, 3, 4$ ) sont engendrés par le flot, il est naturel de les inclure dans la théorie de départ. L'analyse du groupe de renormalisation doit donc être effectuée sur la densité lagrangienne étendue

$$\mathcal{L}_2 = \bar{\phi}_l^\dagger \partial \bar{\phi}_l + \phi_l^\dagger \bar{\partial} \phi_l + N^{-1} \sum_{\alpha=1}^4 g_\alpha \Phi^{(\alpha)} . \quad (7.11)$$

Le développement de produits d'opérateurs est complètement déterminé par les propagateurs des champs holomorphes (fonctions de  $z = x_1 + ix_2$ ) et antiholomorphes (fonctions de  $z^* = x_1 - ix_2$ ) (au sens de l'inclusion dans les fonctions de corrélation). Ils sont

$$\phi_k^a(z) \phi_l^b(w) \sim \frac{1}{2\pi} \frac{\delta_{kl} \tau^{ab}}{z - w} , \quad \bar{\phi}_k^a(z^*) \bar{\phi}_l^b(w^*) \sim \frac{1}{2\pi} \frac{\delta_{kl} \tau^{ab}}{z^* - w^*} , \quad (7.12)$$

où

$$\tau = \sigma_1 \otimes E_{\text{FF}} + i\sigma_2 \otimes E_{\text{BB}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

est caractéristique de la structure orthosymplectique. Lorsque  $N > 1$ , le calcul des OPE conduit à

$$\begin{aligned} \dot{g}_1 &= g_1 g_2 - N^{-1} (g_1 g_2 + g_1 g_4 - g_2 g_3 + g_3 g_4) , \\ \dot{g}_2 &= \frac{1}{2} (g_1^2 + g_2^2) + N^{-1} (g_1 g_3 + g_1 g_4 - g_2^2 - g_3 g_4) , \\ \dot{g}_3 &= -(g_1 + g_2) g_3 - N^{-1} (g_1^2 - g_1 g_2 + g_1 g_4 + g_2 g_3 + g_3^2 + g_3 g_4) , \\ \dot{g}_4 &= -N^{-1} (g_1 g_2 + g_1 g_3 + g_2 g_3 + g_4^2) , \end{aligned} \quad (7.13)$$

avec la convention

$$\dot{g}_i \equiv \frac{\pi}{2} \frac{dg_i}{d \ln \ell} .$$

Les équations pour les couplages  $g_1, g_2, g_3$  et  $g_4$  manquent singulièrement de transparence, et la forme précise du flot demeure obscure en général. Toutefois lorsque  $N = 1$  ou bien à l'opposé lorsque  $N \gg 1$ , les équations se simplifient avantageusement.

#### 7.4.1 Le cas $N = 1$

Lorsque  $N = 1$  ces équations sont grandement réduites. Dans ce cas  $\Phi^{(2)} \equiv 0$ , et on abandonne le couplage  $g_2$ . Comme  $\Phi^{(1)} = \Phi^{(3)} = \Phi^{(4)}$ , le seul paramètre qui soit renormalisé est  $g \equiv g_1 + g_3 + g_4$ . En sommant les trois équations restantes, on obtient

$$\frac{dg}{d \ln \ell} = -\frac{2g^2}{\pi} , \quad (7.14)$$

qui reproduit le résultat bien connu [40] que l'opérateur représentant le désordre de masse aléatoire est marginalement non-pertinent (pour  $N = 1$ ). Étrangement il semble que personne n'ait trouvé bon d'en déduire (ou d'en publier) l'expression de la densité d'état  $\nu(E, g)$  au voisinage de  $E = 0$  pour un désordre suffisamment faible. Faisons donc le calcul.

La densité d'états locale est donnée par

$$\nu(E, g, \Lambda) \equiv (\text{aire})^{-1} \pi^{-1} \text{Re} \langle (\psi_- \bar{\psi}_+ + \bar{\psi}_- \psi_+) \rangle ,$$

où  $\Lambda$  est le cut-off énergétique. Les équations du flot sont données par

$$\frac{dg}{d \ln \ell} = \beta[g] = -\frac{1}{2\pi} g^2 , \quad \frac{d \ln E}{d \ln \ell} = \kappa[g] = \frac{1}{4\pi} g ,$$

où  $\ell$  est un paramètre d'échelle qui se comporte comme une distance. La dimension anormale de l'opérateur  $\mathcal{E} = \psi_- \bar{\psi}_+ + \bar{\psi}_- \psi_+$  provient du facteur  $Z(\ell)$ , donné par

$$\frac{d \ln Z}{d \ln \ell} = \eta[g] = \kappa[g] .$$

Il me semble bon de mentionner que la fonction de corrélation à deux points ne subit pas de correction logarithmique. Cela est dû au fait, qu'à l'ordre d'une boucle, l'opérateur de masse

aléatoire ne modifie pas la dimension anormale du supermultiplet  $\phi : \gamma(g) = \gamma^* + O(g^2)$ . C'est différent de l'insertion  $\mathcal{E}$  qui possède une dimension anormale non-nulle à l'ordre d'une boucle.

À toute échelle, on a

$$\nu(E, g, \Lambda) = Z(\ell) \nu(E(\ell), g(\ell), \Lambda/\ell) .$$

Faisant donc l'hypothèse que le membre de droite est indépendant de l'échelle  $\ell$ , on peut écrire l'équation du groupe de renormalisation pour  $\nu(E(\ell), g(\ell), \Lambda/\ell)$  :

$$\left[ \ell \frac{\partial}{\partial \ell} + \beta[g] \frac{\partial}{\partial g} + \kappa[g] E \frac{\partial}{\partial E} + \eta[g] \right] \nu = 0 ,$$

dont la solution est

$$\nu(E, g, \Lambda) = \exp \left( \int_{g(1)}^{g(\ell)} dg \frac{\eta[g]}{\beta[g]} \right) \nu(E(\ell), g(\ell), \Lambda/\ell) ,$$

avec

$$g(\ell) = \frac{g(1)}{1 + \frac{1}{2\pi} g(1) \ln \ell} , \quad E(\ell) = E(1) \sqrt{1 + \frac{1}{2\pi} g(1) \ln \ell} .$$

Une analyse dimensionnelle élémentaire donne

$$\nu(E/\ell, g, \Lambda) = \frac{1}{\ell} \nu(E, g, \ell \Lambda) .$$

Par conséquent

$$\nu(\ell) \equiv \nu(E/\ell, g, \Lambda) = \frac{1}{\ell} \exp \left( \int_{g(1)}^{g(\ell)} dg \frac{\eta[g]}{\beta[g]} \right) \nu(E(\ell), g(\ell), \Lambda) .$$

Dans la limite où  $\ell$  tend vers l'infini,  $g(\ell)$  tend vers 0, et  $\nu(E(\ell), g(\ell), \Lambda)$  se comporte comme  $E(\ell)/(2\pi)$ . Donc

$$\nu(\ell) \sim \frac{E(1)}{2\pi \ell} \left( 1 + \frac{1}{2\pi} g(1) \ln \ell \right) .$$

Dans la limite thermodynamique (système de taille infinie), on obtient

$$\nu(E) \propto E \ln(1/E) .$$

Il en résulte que le désordre, qui est marginalement non-pertinent, induit une correction logarithmique. Il prédit aussi un comportement quasi-conique pour la densité d'états dans le voisinage de  $E = 0$ . Comme dans le cas pur, la densité d'états est nulle en  $E = 0$ .

#### 7.4.2 Le cas $N \gg 1$

Lorsque  $N \gg 1$  les équations se réduisent à

$$\dot{g}_1 \pm \dot{g}_2 = \pm \frac{1}{2} (g_1 \pm g_2)^2 , \quad \dot{g}_3 = -(g_1 + g_2) g_3 , \quad \dot{g}_4 = 0 .$$

Si les couplages  $g_3$  et  $g_4$  sont initialement à zéro, ils le restent sous le flot (c'est du moins ce que suggère le calcul à une boucle). Les couplages pertinents sont  $g_1$  et  $g_2$ , qui semblent tendre vers la ligne  $g = g_1 = g_2$ , avec  $g$  qui satisfait

$$\frac{dg}{d \ln \ell} = \beta(g) = + \frac{2g^2}{\pi} . \quad (7.15)$$

Le signe + traduit la pertinence de l'opérateur, au contraire du cas  $N = 1$ . Ce qui nous convainc d'adopter la densité lagrangienne

$$\mathcal{L}_3 = \bar{\phi}_l^\dagger \partial \bar{\phi}_l + \phi_l^\dagger \bar{\partial} \phi_l + (g/N) \left( \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} \right) . \quad (7.16)$$

Ajouter  $\Phi^{(2)}$  au hamiltonien effectif correspond à insérer dans le hamiltonien (7.3) un terme de désordre additionnel

$$H \rightarrow H + \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta^\dagger & 0 \end{pmatrix} , \quad (7.17)$$

où  $\Delta$  est une matrice  $N \times N$  antisymétrique dont les éléments sont distribués selon une loi gaussienne de moyennes nulles et de seconds moments

$$\langle \Delta_{ij}(x) \bar{\Delta}_{kl}(y) \rangle = (2g/N) (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) \delta(x - y) .$$

Un tel terme est autorisé par la symétrie particule-trou (7.4) des hamiltoniens de la classe  $D$ . Dans le cas  $N = 1$ ,  $\Delta$  est identiquement nulle parce qu'antisymétrique et de taille  $1 \times 1$ .

### 7.4.3 Lien avec les supraconducteurs désordonnés

À ce stade, on peut comparer le hamiltonien obtenu (7.17) ci-dessus au hamiltonien (4.3) du chapitre 4 :

$$\mathcal{H}^{(++)} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & i\partial_1 + \partial_2 & \Delta \\ M_{21} & M_{22} & -\Delta & i\partial_1 + \partial_2 \\ i\partial_1 - \partial_2 & -\bar{\Delta} & -M_{11} & -M_{21} \\ \bar{\Delta} & i\partial_1 - \partial_2 & -M_{12} & -M_{22} \end{pmatrix} .$$

Nous pensons qu'il décrit un liquide nodal dans la classe de symétrie  $D$ . Pour voir cela, on étudie le cas  $N = 2$  du hamiltonien (7.17). Les indices  $i, j, k$  et  $l$  indexent alors les degrés de liberté de spin des excitations particule-trou, alors que les fonctions  $M(x)$  et  $\Delta(x)$  deviennent des combinaisons linéaires des désordres physiques. Les hamiltoniens sont alors identiques.

### 7.4.4 Dégénérescences accidentelles

Il nous faut mentionner trois cas correspondant à des choix de couplages particuliers, et dont on peut comprendre la nature du flot du groupe de renormalisation.

Le premier cas est  $g_1 = g_3 = 0$ ,  $N > 2$ . En remontant à un hamiltonien aléatoire *hermitien*, on observe que les constantes de couplages sont soumises aux contraintes  $g_1 \pm g_4 \geq 0$ . Donc choisir  $g_1 = 0$  impose  $g_4 = 0$ . Dans cette limite le hamiltonien a une symétrie plus forte :

$$\begin{aligned} H &= -(\sigma_1 \otimes 1_N) H^T (\sigma_1 \otimes 1_N) \\ &= +(\sigma_2 \otimes 1_N) H^T (\sigma_2 \otimes 1_N) , \end{aligned}$$

où la seconde égalité est une sorte d'invariance par renversement du temps, qui place  $H$  dans la classe  $DIII$  (voir appendice C). Il subsiste le couplage  $g_2$ , qui se comporte sous le flot comme  $\dot{g}_2 \propto (N - 2)g_2^2$  et se révèle pertinent pour  $N > 2$ .

Le second cas particulier correspond à faire  $N = 2$  dans le cas précédent. Le hamiltonien qui sous-tend le cas est de la forme

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -2i\partial + a\sigma_2 \\ -2i\bar{\partial} + \bar{a}\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Parce qu'il commute avec  $\text{diag}(\sigma_2, \sigma_2)$ , l'espace de Hilbert se décompose en deux secteurs invariants sous l'action de  $H$ . (Ce qui n'est pas le cas pour  $N > 2$ ). La restriction du hamiltonien à l'un des deux secteurs correspond au hamiltonien d'un fermion de Dirac dans un potentiel vecteur abélien  $\pm a(x)$ , qui relève de la classe AIII (voir appendice C) et explique [87] pourquoi le seul couplage  $g_2$  semble être exactement marginal pour  $N = 2$ . La symétrie de renversement dans le temps se contente de relier les deux restrictions de  $H$  par un homomorphisme d'algèbre de Lie. Sa seule conséquence est de donner une double dégénérescence des niveaux, et la classe de symétrie est AIII au lieu de DIII.

Il existe un troisième cas où les équations du flot se ramènent à un unique couplage. C'est le cas  $g_2 = g_3 = 0 = g_1 + g_4$  avec  $g_1 > 0$ , et de nouveau  $N = 2$ . Le hamiltonien correspondant est de la forme

$$H = \begin{pmatrix} V\sigma_2 & -2i\partial \\ -2i\bar{\partial} & V\sigma_2 \end{pmatrix},$$

que l'on peut transformer par une simple conjugaison  $H' = UHU^{-1}$ , en  $H' = \text{diag}(H_+, H_-)$  où

$$H_{\pm} = \begin{pmatrix} \pm V & -2i\partial \\ -2i\bar{\partial} & \pm V \end{pmatrix}$$

sont deux copies de fermions de Dirac en potentiel scalaire aléatoire  $V(x)$ . Dans la nouvelle base, chaque copie satisfait

$$H_{\pm} = \sigma_2 H_{\pm}^T \sigma_2,$$

qui se trouve être l'équation définissant l'ensemble de Wigner-Dyson symplectique de la classe AII. La symétrie particule-trou (classe D) n'est rien de plus qu'un homomorphisme d'algèbre de Lie reliant la première copie à la seconde et la classe de symétrie demeure AII.

Selon [145], les classes de symétrie D, DIII et AII épuisent toutes les représentations de théorie des champs qui préservent la structure symplectique pour les bosons et la structure orthogonale pour les fermions. On peut donc estimer qu'il n'y a pas de dégénérescence accidentelle supplémentaire.

## 7.5 Champ composite et points cols diagonaux

On se focalise sur le cas  $N \gg 1$ . Comme on l'a vu le couplage  $g = g_1 = g_2$  croît sous le groupe de renormalisation. C'est donc un problème de couplage fort dans l'infrarouge. L'une des rares méthodes non-perturbatives qui puisse nous aider est celle qui consiste à passer à une formulation duale, en terme d'un champ de Hubbard-Stratonovich  $Q \sim \phi_l \bar{\phi}_l^t + \bar{\phi}_l \phi_l^t$ .

La manière d'introduire le champ composite  $Q$  est standard mais un rappel permet de fixer les notations. On commence par réarranger la densité lagrangienne (7.16) comme suit :

$$\mathcal{L}_3 = \bar{\phi}_l^t \partial \bar{\phi}_l + \phi_l^t \bar{\partial} \phi_l + \frac{g}{2N} \text{STr} (\phi_k \bar{\phi}_k^t + \bar{\phi}_k \phi_k^t) (\phi_l \bar{\phi}_l^t + \bar{\phi}_l \phi_l^t).$$

Le terme quartique d'interaction peut maintenant être découpé en introduisant le champ auxiliaire  $Q$  qui est une supermatrice  $4 \times 4$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 &= \bar{\phi}_l^t \partial \bar{\phi}_l + \phi_l^t \bar{\partial} \phi_l + \text{STr} Q (\phi_l \bar{\phi}_l^t + \bar{\phi}_l \phi_l^t) - \frac{N}{2g} \text{STr} Q^2 \\ &= (\bar{\phi}_l^t \ \phi_l^t) \begin{pmatrix} Q & \partial \\ \bar{\partial} & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_l \\ \bar{\phi}_l \end{pmatrix} - \frac{N}{2g} \text{STr} Q^2. \end{aligned} \tag{7.18}$$

Dans un deuxième temps on effectue l'intégration gaussienne sur les champs de Dirac pour obtenir l'action

$$S_5[Q] = -\frac{N}{2g} \int d^2x \text{STr} Q^2 + \frac{N}{2} \mathbf{STr} \ln \begin{pmatrix} \Sigma_3 Q & \partial \\ \bar{\partial} & Q \Sigma_3 \end{pmatrix}, \quad (7.19)$$

où  $\mathbf{STr}$  combine les opérations de supertrace  $\text{STr}$  et d'intégration sur l'espace des positions. Les facteurs  $\Sigma_3$  sous le logarithme sont dûs à la transformation  $\bar{\phi}_l \mapsto \Sigma_3 \bar{\phi}_l$  et  $\bar{\phi}_l^\dagger \mapsto \bar{\phi}_l^\dagger \Sigma_3$ , qui corrige le fait que  $\bar{\phi}$  n'est pas le complexe conjugué de  $\phi^\dagger$  (voir les définitions (7.6) et les relations (7.9)).

Il est clair que les calculs ci-dessus ont été effectués dans le cas  $E = 0$ . Pour restaurer la dépendance en énergie, il suffit de décaler  $Q \rightarrow Q - (iE/2)\Sigma_3$  dans le logarithme. Nous n'avons jusqu'à présent concédé aucune approximation.

Un sous-produit du passage du supermultiplet  $\phi$  au champ composite  $Q$ , est que le paramètre  $N$  apparaît maintenant comme un facteur dans l'exponentielle, alors que le champ  $Q$  ignore le nombre d'espèces. Pour les grands  $N$ , cela suggère d'appliquer l'approximation du point-col à l'intégrale sur  $Q$ . Évidemment aucun contrôle sur la validité de l'approximation n'est assuré dans le cas  $N = 1$ . L'équation du point-col s'écrit

$$Q(x)/g = \frac{1}{2} \langle x | (Q - \partial Q^{-1} \bar{\partial})^{-1} | x \rangle + (\partial \leftrightarrow \bar{\partial}).$$

Nous cherchons une solution constante dans l'espace des positions qui soit de la forme  $Q(x) = \mu \Sigma_3$ . L'équation du point-col se réduit alors à

$$\frac{1}{g} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (\mu^2 + k^2/4)^{-1}.$$

Attribuant à l'intégrale indéfinie ci-dessus un cut-off ultraviolet  $|k| < 1/\ell_0$ , on obtient :

$$\pi/g = \ln(1 + (2\mu\ell_0)^{-2}),$$

soit encore,

$$\mu = (2\ell_0)^{-1} / \sqrt{e^{\pi/g} - 1}. \quad (7.20)$$

Pour un désordre faible ( $g \ll 1$ ), on peut approcher  $\mu$  par  $\mu \approx (2\ell_0)^{-1} e^{-\pi/2g}$ . Grâce à (7.15), on remarque que  $\mu$  obéit à l'équation du groupe de renormalisation

$$\left( \frac{d}{d \ln \ell} + \beta(g) \frac{d}{dg} \right) \mu(\ell, g) = 0,$$

et acquiert donc le sens de *masse engendrée dynamiquement*. Autrement dit, l'échelle de masse  $\mu$  demeure invariante

$$\mu(\ell_0, g(\ell_0)) = \mu(\ell, g(\ell)), \quad (7.21)$$

sous une transformation du groupe de renormalisation  $\ell_0 \rightarrow \ell$ <sup>3</sup>. C'est un indice fort de l'échec de cette approche pour le cas  $N = 1$ . En effet le flot du RG pour  $N = 1$  est différent du cas  $N \gg 1$  et ne donne donc plus à  $\mu$  le statut de masse engendrée dynamiquement. Il est dans

<sup>3</sup>Cela signifie que le champ de Dirac subit le phénomène de *transmutation dimensionnelle*. Alors que le bilinéaire  $\bar{\phi}_i^\dagger \phi_i$  a pour dimension 1 au point des fermions libres, sa dimension tend vers 0 sur les larges distances. Corrélativement,  $Q \sim \phi_i \bar{\phi}_i^\dagger + \bar{\phi}_i \phi_i^\dagger$  acquiert une valeur moyenne non-nulle.

ce cas impossible de donner un sens satisfaisant à l'approximation du point-col, la variété de point-col se contractant à un point sous l'action du groupe de renormalisation .

En principe, toutes les matrices diagonales constituées des éléments  $\pm\mu$  sont candidates à être solutions de l'équation du point-col. Toutefois, il peut arriver que l'une d'entre elles ne soit pas à l'intérieur du domaine d'intégration, ou ne puisse être atteinte par prolongement analytique du domaine. C'est pourquoi il est nécessaire de préciser rigoureusement quel est le domaine d'intégration sur les superchamps  $\phi_l$ ,  $\bar{\phi}_l$  et  $Q$ .

## 7.6 Description de la variété de point-col

Le problème qui consiste à choisir correctement le domaine d'intégration pour les superchamps  $\phi$ ,  $\bar{\phi}$  et  $Q$  a été étudié en détail par M.R. Zirnbauer dans [145]. Cela dit, ce type de raisonnement était pour moi une première et il est nécessaire de le généraliser à notre cas. C'est pourquoi j'en donne ici les détails. On suppose que  $E$  possède une petite partie imaginaire positive ( $\text{Im}E > 0$ ) (ce n'est pas une supposition formelle, puisque, par exemple, elle est nécessaire au calcul de la densité d'états). On a déjà remarqué que pour que les intégrales fonctionnelles portant sur les partenaires bosoniques convergent, il est nécessaire d'imposer les contraintes (7.9) où de façon équivalente  $\phi_{a,B}^\dagger = \bar{\phi}_{a,B}^\dagger \sigma_3$ . On rappelle, mais c'est important pour la suite, qu'il est bien connu que la convergence sur les champs de Grassmann ne suppose aucune contrainte particulière...parce que ces intégrales sont des dérivées !

### 7.6.1 Conditions générales de convergence sur le champ composite $Q$

Il est immédiat de vérifier que le bilinéaire  $A \equiv \phi_l \bar{\phi}_l^\dagger + \bar{\phi}_l \phi_l^\dagger$  dans la densité lagrangienne  $\mathcal{L}_4$  est impair sous l'action de la transposition orthosymplectique :  $A^t = -A$  ; donc  $A \in \text{osp}(2|2)$ , par définition de l'algèbre de Lie orthosymplectique. Par le biais de son couplage à  $A$  dans  $\mathcal{L}_4$ , la supermatrice  $Q$  hérite de la même propriété algébrique :

$$Q = -Q^t \in \text{osp}(2|2) .$$

Si l'on a pu assurer la convergence sur les superchamps  $\phi$ , cela ne garantit en rien la convergence de l'intégration sur  $Q$ . En fait, assurer la convergence sur le bloc boson-boson (BB) de  $Q$ , qui sera par la suite noté  $Q_{\text{BB}}$ , est un problème délicat. La convergence sur le bloc  $Q_{\text{BB}}$  peut être assurée à la condition que l'on adopte la paramétrisation suivante (sans conséquence sur les fantômes  $b, c$ ) :

$$Q_{\text{BB}} = Y + \gamma e^X \Sigma_3 e^{-X} ,$$

où  $X, Y \in \text{osp}(2|2)$ .  $X$  est impair et  $Y$  est pair sous la conjugaison par  $\Sigma_3$  :

$$\Sigma_3 X \Sigma_3 = -X , \quad \Sigma_3 Y \Sigma_3 = Y ,$$

et les conditions de réalité sur les parties paires (i.e. bosoniques dans le langage des superalgèbres de Lie)  $X_0, Y_0$  de  $X, Y$  :

$$X_0 = X_0^\dagger , \quad Y_0 = -Y_0^\dagger .$$

La preuve n'est pas tout à fait triviale et je suggère au lecteur intrigué de revenir à la référence absolue sur le sujet [145]. Cette paramétrisation est valide pour tout  $\gamma > 0$ . C'est pourquoi, anticipant sa valeur sur la variété de point-col, on choisit  $\gamma = \mu$ . Voilà pour le secteur boson-boson. Le problème dans le secteur fermion-fermion (FF) est beaucoup plus simple et la solution

immédiate : la convergence sur les intégrales sur  $Q_{\text{FF}}$  est assurée en demandant que  $Q_{\text{FF}}$  soit hermitique :  $Q_{\text{FF}} = Q_{\text{FF}}^\dagger$ .

### 7.6.2 Contraintes de causalité sur la variété de point-col

On compare maintenant la paramétrisation ci-dessus de  $Q$  aux solutions diagonales de l'équation du point-col. La structure de la solution dans le bloc BB est fixée univoquement par les contraintes de convergence :

$$Q_{0,\text{BB}} = \mu \sigma_3 .$$

Les autres solutions du point-col ne peuvent pas être atteintes par déformation de la variété d'intégration, sans qu'on ne soit obligé de croiser une singularité.

À l'inverse, dans le secteur FF, la dépendance analytique dans les champs grassmanniens garantit l'absence de pôles (d'éventuels zéros sont possibles). Si bien qu'aucune contrainte n'est imposée et le domaine d'intégration peut englober (par prolongement analytique) l'une quelconque des solutions diagonales. Toutefois, dans la limite des grands  $N$ , plusieurs point-cols contribuent de façon non-significative. Les contributions dominantes proviennent des variétés cols qui minimisent la super-dimension de la variété transverse. Cette condition est remplie lorsque  $Q_{0,\text{FF}}$  possède autant de valeurs propres négatives que de valeurs propres positives. Ce qui nous laisse *in fine* deux possibilités :

$$Q_{0,\text{FF}} = \pm \mu \sigma_3 .$$

En résumé, nous avons obtenu les points-cols diagonaux suivant :

$$Q_0 = \mu (\pm E_{\text{FF}} + E_{\text{BB}}) \otimes \sigma_3 . \quad (7.22)$$

Nous sommes toutefois loin du compte. En effet, le groupe de symétrie du problème à  $E = 0$  (à savoir  $G \equiv \text{OSp}(2|2)$ ) agit sur  $Q$  par conjugaison  $Q(x) \mapsto TQ(x)T^{-1}$  ( $T \in G$ ). Clairement, une telle transformation laisse l'action  $S_5[Q]$  (7.19) invariante. Par conséquent les points-cols de  $S_5[Q]$  sont continûment dégénérés : étant donnée une solution  $Q_0$  de l'équation du point-col, on obtient une orbite de solutions en faisant agir le groupe de symétrie  $G$  sur  $Q_0$ .

Toutefois cela n'est pas tout puisque le stabilisateur de  $Q_0$  (groupe des éléments  $h$  tels que  $hQ_0h^{-1} = Q_0$ ) est non-trivial et vaut manifestement  $H = \text{GL}(1|1)$ . Il en résulte que l'orbite de  $Q_0$  est isomorphe à l'espace quotient  $G/H = \text{OSp}(2|2)/\text{GL}(1|1)$ .

Cette orbite est réalisée comme celle du groupe de symétrie *complexe*, puisqu'à ce stade nous n'avons spécifié aucune forme réelle pour  $G$ . Or, jusqu'à présent, nous n'avons imposé de contraintes de réalité que sur  $Q$ , garantissant la convergence des intégrales fonctionnelles. Il nous faut donc traduire cette contrainte sur la variété du point col  $G/H$ , pour la restreindre à une variété *réelle*. Discutons maintenant de la manière de procéder. Pour cela on commence par mettre à zéro les variables de Grassmann qui n'interviennent pas dans la discussion. La partie bosonique du supergroupe complexe  $\text{OSp}(2|2)$  est  $\text{O}(2, \mathbb{C}) \times \text{Sp}(2, \mathbb{C})$ . Dans le secteur BB, le groupe de symétrie est  $\text{Sp}(2, \mathbb{C})$ , qui est le groupe des transformations  $T$ ,

$$\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} \mapsto T \cdot \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} \bar{b} \\ \bar{c} \end{pmatrix} \mapsto T \cdot \begin{pmatrix} \bar{b} \\ \bar{c} \end{pmatrix} ,$$

qui préservent la forme symplectique

$$\bar{b}c - \bar{c}b = (\bar{b}, \bar{c}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} .$$

Ces transformations symplectiques de  $(b, c)$  et  $(\bar{b}, \bar{c})$  qui préservent les conditions de réalité (7.9), forment un sous-groupe réel  $\text{Sp}(2, \mathbb{R})$ . Divisant par le stabilisateur, isomorphe à  $\text{U}(1) \subset H$ , on obtient la variété du secteur BB :  $M_B = \text{Sp}(2, \mathbb{R})/\text{U}(1) \simeq \mathbb{H}^2$ . C'est un hyperboloïde à deux nappes. Pour  $n \geq 1$ , on obtient le quotient  $\text{Sp}(2n, \mathbb{R})/\text{U}(n)$ , qui est un espace symétrique non-compact de type CI.

Dans le secteur FF, le groupe de symétrie agit par  $\text{O}(2, \mathbb{C})$ , qui est le groupe des transformations qui préservent la structure orthogonale

$$\bar{\psi}_+ \psi_- + \bar{\psi}_- \psi_+ = (\bar{\psi}_+, \bar{\psi}_-) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}.$$

Le groupe réel est déterminé par la contrainte d'hermiticité  $Q_{\text{FF}} = Q_{\text{FF}}^\dagger$ , qui sélectionne la forme réelle  $\text{O}(2)$  de  $\text{O}(2, \mathbb{C})$ , le groupe orthogonal en dimension 2. Divisant par le stabilisateur,  $\text{U}(1)$ , on obtient  $M_F = \text{O}(2)/\text{U}(1) \simeq \mathbb{Z}_2$ . (Pour  $n \geq 1$ , on obtient  $\text{O}(2n)/\text{U}(n)$ , un espace symétrique compact de type DIII.)

On en conclut que la partie paire de la variété-col (sur laquelle s'appuie toute intégration numérique) est  $M_B \times M_F = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{Z}_2$ . Rétablissant les variables de Grassman dans leur intégrité, on parvient à la variété-col  $\mathbf{X}_1$ , qui est un espace symétrique riemannien de type CI|DIII (voir appendice C).

Une propriété remarquable de  $\mathbf{X}_1$  est qu'elle se compose de *deux* parties non-connexes, ce que l'on impute à la topologie de  $\text{O}(2)$  (selon que le déterminant de la transformation de  $\text{O}(2)$  vaut 1 ou  $-1$ ). Cependant, bien que l'orbite de la partie paire de  $\text{O}(2) \times \text{Sp}(2, \mathbb{R}) \subset \text{OSp}(2|2)$ , définissant la variété de point-col de  $S_5[Q]$ , ne soit pas connexe, elle est unique. C'est une propriété que l'on retrouve aussi dans la classe DIII (voir [145]).

### Cas $n > 1$

Bien qu'on se soit focalisé sur le traitement d'une unique fonction de Green, tout ce qui précède s'applique avec très peu de modifications au cas  $n \geq 1$ . Le groupe de symétrie est promu à  $G = \text{OSp}(2n|2n)$ , alors que la matrice  $\Sigma_3$  prend un facteur tensoriel supplémentaire  $\Sigma_3 = 1_{\text{susy}} \otimes \sigma_3 \otimes 1_n$ , et le stabilisateur devient  $H = \text{GL}(n|n)$ . L'espace du paramètre d'ordre est noté  $\mathbf{X}_n$ , et possède pour sous-variété paire

$$M_B \times M_F = (\text{Sp}(2n, \mathbb{R})/\text{U}(n)) \times (\text{O}(2n)/\text{U}(n)).$$

De nouveau, elle se décompose en deux parties disjointes, correspondant aux deux composantes de  $\text{O}(2n)$  ( $\text{Det} = \pm 1$ ).

Dans la suite, on travaille avec un  $n$  quelconque.

## 7.7 Développement en gradients

Nous sommes arrivés à la situation suivante. Notre problème possède une symétrie globale  $G = \text{OSp}(2n|2n)$  qui est brisée en  $\text{GL}(n|n)$  lorsque l'on utilise l'approximation du point col. Que la symétrie soit véritablement brisée est une question qui ne pourra être tranchée qu'ultérieurement. A priori, si l'on se réfère au théorème de Mermin-Wagner, la symétrie doit être rétablie dans l'infrarouge (voir la section 1.4.3 du chapitre 1). On verra plus tard que c'est faux. Grâce à notre analyse du point-col, nous avons pu identifier le paramètre d'ordre  $Q = \mu q$ ,

où  $q \equiv T\Sigma_3 T^{-1}$  prend ses valeurs dans le superspace symétrique  $\mathbf{X}_n$ . Les configurations de basse énergie de l'action  $S_5[Q]$  dans (7.19) sont données par les champs variant lentement

$$q(x) = T(x)\Sigma_3 T(x)^{-1} \quad (T(x) \in G) .$$

Ce sont les modes de Goldstone de la symétrie brisée  $G$ . Remarquons que  $q$ , qui est un élément d'une orbite adjointe de  $G$ , appartient à  $\text{osp}(2n|2n)$ , et vérifie la contrainte  $q^2 = 1$ .

Nous souhaitons maintenant obtenir l'action effective de basse énergie des modes de Goldstone  $q(x)$ . À cette fin, toutes les fluctuations massives transverses à la variété de point-col seront négligées. En principe l'action effective doit être de la forme

$$S_{\text{eff}}[q] = -\frac{1}{16\pi f} \int d^2x \text{STr} \partial_\mu q \partial_\mu q + \frac{\theta}{32\pi} \int d^2x \epsilon_{\mu\nu} \text{STr} q \partial_\mu q \partial_\nu q . \quad (7.23)$$

Ces deux termes sont les seuls qui ne contiennent pas plus de deux dérivées, qui respectent l'invariance par rotation dans l'espace des positions et qui sont compatibles avec la symétrie globale  $G$ . À ces deux termes, nous ajouterons ensuite un terme correspondant au cas  $E \neq 0$  et qui brise la symétrie. On reconnaît dans le second terme un terme topologique. Il correspond à l'intégration de la 2-forme fermée  $\text{STr} q dq \wedge dq$  de  $\mathbf{X}_n$ , ramenée à une intégration sur l'espace des positions. Sa valeur peut être non-triviale puisque

$$\Pi_2(\mathbf{X}_n) = \Pi_2(M_B \times M_F) = \Pi_2(\text{O}(2n)/\text{U}(n)) = \Pi_1(\text{U}(n)) = \mathbb{Z}$$

pour  $n > 1$ . En revanche, pour  $n = 1$ , elle est triviale puisqu'on a  $\Pi_2(\text{O}(2)/\text{U}(1)) = 0$ . Pour toute surface sans bord  $\Sigma$ , on a

$$\frac{1}{32\pi i} \int_\Sigma d^2x \epsilon_{\mu\nu} \text{STr} q \partial_\mu q \partial_\nu q \in \mathbb{Z} .$$

Pour  $n = 2$ , on peut se convaincre que le facteur de normalisation adéquat est bien  $(32\pi i)^{-1}$  par un calcul direct utilisant l'isomorphisme  $\text{O}(4)/\text{U}(2) \simeq \text{S}^2 \times \mathbb{Z}_2$ . La généralisation à  $n > 2$  est dictée par le lien avec l'action multivaluée  $\Gamma[M]$  dans l'équation (7.30) ci-dessous. Le terme topologique est impair sous l'opération de renversement de la parité  $x_1 \leftrightarrow x_2$ . Cependant, sa présence n'a rien de surprenant puisque le choix du hamiltonien de Dirac pur  $H_0 = \sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2$  implique le choix d'une orientation dans l'espace des positions (à comparer avec  $H_0 = \sigma_2 p_1 + \sigma_1 p_2$ ).

Toute la difficulté réside dans l'obtention des valeurs des constantes de couplage  $f$  et  $\theta$ . Cela est (relativement) simple pour  $f$ , par un développement en gradients de

$$S_5[q] = \frac{N}{2} \ln \mathbf{SDet} \begin{pmatrix} \mu \Sigma_3 q & \partial \\ \partial & \mu q \Sigma_3 \end{pmatrix} . \quad (7.24)$$

En revanche, déterminer la valeur de l'angle topologique  $\theta$  est une question subtile. Elle ne peut être obtenue *de façon simple* par un développement en gradients. La raison heuristique de cela est que les excitations topologiques, comme les instantons, dont les charges topologiques sont précisément les quantités mesurées par le terme topologique, impliquent nécessairement des variations de grande échelle du champ  $q$ , et de là échappent à un calcul perturbatif à partir de l'action fonctionnelle, tout du moins tant que l'on souhaite ne pas faire appel à des techniques de re-sommation. Une solution serait d'évaluer  $S_{\text{eff}}[q]$  et  $S_5[q]$  sur une configuration  $q(x)$  bien choisie, comme un instanton (il en existe pour  $n > 1$ ), de comparer leur valeur et d'en déduire

$\theta$ . Malheureusement, l'évaluation de  $S_5[q]$  sur un instanton n'est pas facile, et guère instructive. Une deuxième approche pour calculer les déterminants d'opérateurs de Dirac est d'en prendre la dérivée logarithmique par rapport à un paramètre  $s$ , puis d'intégrer ensuite sur  $s$ . Mais comme la dérivée d'un terme topologique est nulle, on n'est guère plus avancé car il a disparu dans l'opération.

La manière la plus élégante et la plus douce d'extraire la théorie de basse énergie de  $S_5[q]$  est d'utiliser la bosonisation non-abélienne. S'inspirant d'un célèbre papier de Witten [140], cette technique est devenue un outil standard pour traiter des théories perturbées des théories de fermions libres. Malheureusement, dans le contexte des théories supersymétriques, la méthode est moins établie.

### 7.7.1 Modèle de Wess-Zumino-Witten de type $C|D$

Dans cette sous-section, nous allons construire l'espace de plongement du modèle de WZW, en se fondant sur la notion de superespace symétrique riemannien. Notre principal souci sera de construire une action bornée inférieurement, de sorte que la théorie soit stable. En effet la convergence des intégrales fonctionnelles sur les supergroupes n'est pas toujours assurée. Sur des espaces comme  $GL_{\mathbb{R}}(n|n)$  ou  $OSp_{\mathbb{R}}(2n|2n)$ , la restriction de tenseurs de rang 2 supersymétriques sur la partie paire de l'espace a nécessairement une signature indéfinie. La métrique est donc non-riemannienne et les convergences d'intégrales fonctionnelles non-garanties. En effet tout tenseur invariant de rang 2 sur un supergroupe de Lie s'écrit comme une forme quadratique invariante sur la superalgèbre de Lie associée, qui par supersymétrie est nécessairement une supertrace, et donc une *différence* de deux traces. Donc les supergroupes ne peuvent en général être des espaces de plongement pour une extension supersymétrique d'un modèle de WZW.

La difficulté peut être contournée en utilisant la notion de variété CS (la terminologie est due à J. Bernstein, la lettre C veut dire complexe et la lettre S super.) La notion de variété analytique réelle ou complexe est en la circonstance insuffisante. Une variété CS peut être (grossièrement) vue comme un fibré de base une variété analytique réelle et de fibre une algèbre de Grassmann sur  $\mathbb{C}$ . Aucune opération de conjugaison ni d'adjonction n'est requise.

Notre objectif est de pouvoir définir une métrique riemannienne sur la base. Les variables grassmanniennes seront intégrées selon la définition de Berezin, c'est-à-dire comme une dérivation, ce qui n'implique aucune contrainte de réalité sur les variables de Grassmann. Ces deux notions sont claires et permettent de contrôler de façon satisfaisante l'intégration. C'est pourquoi la définition de Bernstein est séduisante. Dans cette optique une notation du type  $U(n|n)$  est incorrecte dans la mesure où elle suggère le choix d'une forme réelle sur les variables fermioniques, ce que l'on proscriit. Le lecteur attentif aura remarqué que la démarche est à l'opposé de celle du chapitre 6, ou, au contraire, nous avons mis à profit la liberté du choix de l'adjonction sur les opérateurs fermioniques.

Pour construire la variété CS que nous cherchons pour définir le modèle de WZW, nous partons du supergroupe complexe  $G \equiv OSp_{\mathbb{C}}(2n|2n)$ . Comme on l'a déjà vu, ses éléments satisfont  $M^{-1} = M^t$ . En tant que variété différentielle, le groupe est muni naturellement du 2-tenseur supersymétrique  $\kappa = -STr dM^{-1}dM = STr (M^{-1}dM)^2$ , qui est invariant sous les translations à droite et à gauche  $M \mapsto g_L M g_R^{-1}$ . On note  $G_0 = O(2n, \mathbb{C}) \times Sp(2n, \mathbb{C})$  le sous-groupe pair (bosonique) de  $G$ . Comme  $G_0$  est un groupe de matrice dont les éléments sont complexes, la géométrie induite sur  $G_0$  par restriction de  $\kappa$  n'est pas riemannienne.

Nous avons besoin de spécifier une sous-variété de  $G_0$  pour laquelle la géométrie induite par

$\kappa$  est riemannienne. Voilà comment on procède.

De  $O(2n, \mathbb{C})$  (le secteur FF de  $G_0$ ) on tire une sous-variété  $\mathcal{M}_F$  isomorphe au groupe orthogonal (compact)  $O(2n)$ . Près de l'unité,  $\mathcal{M}_F$  est paramétrée par  $e^Y$  où  $Y = -Y^\dagger = -\sigma_1 Y^T \sigma_1$ . Le groupe  $O(2n)$  agit sur  $\mathcal{M}_F$  indépendamment à droite et à gauche  $e^Y \mapsto O_L e^Y O_R^{-1}$ , et cette action est transitive, ce qui signifie que tous les éléments de  $\mathcal{M}_F$  se déduisent de l'unité par translation. Dans les secteur BB, on procède différemment en choisissant l'intersection  $\mathcal{M}_B$ , de  $Sp(2n, \mathbb{C})$  avec l'ensemble des matrices hermitiennes positives. Les éléments de  $\mathcal{M}_B$  peuvent être écrits comme  $gg^\dagger$  avec  $g \in Sp(2n, \mathbb{C})$ . De fait former le produit  $gg^\dagger$ , c'est diviser le sous-groupe maximal compact  $Sp(2n)$  de  $Sp(2n, \mathbb{C})$  sur la droite, de sorte que l'ensemble  $\mathcal{M}_B$  est isomorphe à  $Sp(2n, \mathbb{C})/Sp(2n)$ . Utilisant l'application exponentielle,  $\mathcal{M}_B$  peut être paramétré par  $e^X$  où  $X = +X^\dagger = -\sigma_2 X^T \sigma_2$ . Comme le produit de deux matrices hermitiennes positives n'est pas en général une matrice hermitienne positive,  $\mathcal{M}_B$  n'est pas un groupe. Il est en revanche un espace symétrique non-compact, et le groupe complexe  $Sp(2n, \mathbb{C})$  agit transitivement sur  $\mathcal{M}_B$  par  $e^X \mapsto g e^X g^\dagger$ .

Considérons maintenant le produit  $\mathcal{M}_B \times \mathcal{M}_F$ . C'est une variété hybride puisque  $\mathcal{M}_F$  est un groupe, à la différence de  $\mathcal{M}_B$ . Tous deux ( $\mathcal{M}_F$  et  $\mathcal{M}_B$ ) sont cependant des espaces symétriques riemanniens. Le premier est compact, le second non-compact et le produit  $\mathcal{M}_B \times \mathcal{M}_F$  possède la propriété souhaitée d'être une sous-variété riemannienne de  $G_0$ .

Pour établir cette dernière propriété, on commence par travailler sur l'espace tangent à l'unité,  $\mathcal{T}_1(\mathcal{M}_B \times \mathcal{M}_F)$ . Ses éléments sont les paires  $A \oplus B = \left. \frac{d}{ds} e^{s(A \oplus B)} \right|_{s=0}$ , et l'évaluation de  $\kappa = \text{STr}(M^{-1}dM)^2$  sur elles (en  $M = 1$ ) donne

$$\text{STr}(A \oplus B)^2 = \text{Tr} A^2 - \text{Tr} B^2 = \text{Tr} A^\dagger A + \text{Tr} B^\dagger B \geq 0.$$

On en déduit que  $\kappa$  est défini positif sur  $\mathcal{T}_1(\mathcal{M}_B \times \mathcal{M}_F)$ . Cette propriété se transporte à tout  $\mathcal{M}_B \times \mathcal{M}_F$ , par l'invariance de  $\kappa$  sous l'action transitive du groupe  $Sp(2n, \mathbb{C}) \times (O(2n)_L \times O(2n)_R)$ . Par conséquent,  $\kappa$  a pour restriction à  $\mathcal{M}_B \times \mathcal{M}_F$  une structure riemannienne.

Comme conséquence immédiate, on a que la partie numérique de la fonction  $\text{STr} M = \text{STr} M^{-1}$  sur  $\mathcal{M}_B \times \mathcal{M}_F$  est localement exprimée par

$$\begin{aligned} \text{STr} M_0 &= \text{Tr} e^A - \text{Tr} e^B = \text{Tr} e^{-A} - \text{Tr} e^{-B} \\ &= \text{Tr} \cosh \sqrt{A^\dagger A} - \text{Tr} \cos \sqrt{B^\dagger B}. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Cette fonction présente un minimum absolu en  $M = 1$ . Nous nous servirons de ce résultat.

En résumé, l'objet mis en exergue est donc très structuré. Il est constitué du supergroupe complexe  $G = \text{OSp}_{\mathbb{C}}(2n|2n)$  avec la métrique  $\kappa = \text{STr}(M^{-1}dM)^2$ , et d'une sous-variété riemannienne  $\mathcal{M}_B \times \mathcal{M}_F$ . Le triplet  $(G, \kappa, \mathcal{M}_B \times \mathcal{M}_F)$  est ce que l'on appelle [145], un superspace symétrique riemannien de type  $C|D$ . La dénomination implique que le secteur non-compact BB est symplectique ( $C$ ), tandis que le secteur compact FF est orthogonal en dimension paire ( $D$ ).

L'avantage des superspaces symétriques riemanniens est qu'ils constituent des espaces de plongement valides pour les modèles sigma non-linéaires, comme on va le voir. On dénote par  $S$  l'action construite de la manière habituelle. C'est-à-dire, si  $\kappa_{ij}(\varphi)d\varphi^i d\varphi^j$  est l'expression de la métrique en terme de coordonnées  $\varphi^i$  sur l'espace de plongement, dont celles désignées par  $i = 1, \dots, p$  sont bosoniques et celles désignées par  $i = p+1, \dots, p+q$  sont fermioniques, alors l'action s'écrit  $S = \int d^2x \kappa_{ij}(\varphi) \partial_\mu \varphi^i \partial_\mu \varphi^j$ . Puis, on suit Berezin [12] qui postule que la superintégration est une opération s'effectuant en deux temps. On effectue d'abord les intégrations sur les variables de Grassmann, c'est-à-dire que l'on différencie  $e^{-S}$  par rapport aux variables fermioniques. Ces

intégrations sont toujours permises. Le résultat s'exprime en terme de champs bosoniques, sous la forme arbitraire  $e^{-S_0} D_0$ . Dans un deuxième temps, on procède à l'intégration sur les champs bosoniques, qui prennent leurs valeurs sur la variété de plongement réelle  $\mathcal{M}_B \times \mathcal{M}_F$ . Si l'on met de côté les difficultés propres à la théorie des champs (régularisation ultraviolette, régularisation des modes zéro), cette intégrale fonctionnelle est correctement posée car nous avons construit son espace de plongement comme une variété riemannienne, avec une action bosonique  $S_0$  bornée inférieurement.

Le modèle de WZW que nous recherchons est donc l'intégrale fonctionnelle des applications à valeurs dans le superspace symétrique riemannien de type  $C|D$ ,

$$\left( \text{OSp}_{\mathbb{C}}(2n|2n), \text{STr}(M^{-1}dM)^2, \mathcal{M}_B \times \mathcal{M}_F \right),$$

avec l'action qui sera donnée un peu plus bas dans (7.29). (Afin de rendre le modèle parfaitement bien défini, on doit ajouter un terme de masse infinitésimal  $\epsilon \int d^2x \text{STr}(M + M^{-1})$  pour régulariser les modes zéro). On l'appellera le modèle WZW de type  $C|D$  de niveau  $k = 1$ .

La stabilité du modèle sigma non-linéaire avec pour espace de plongement le superspace  $C|D$  est maintenant claire. Afin d'étendre le résultat au modèle de WZW, il est nécessaire de contrôler le terme multivalué  $\Gamma[M]$  en plus du terme principal construit sur le tenseur métrique  $\kappa$ . Alors que  $i\Gamma[M]/24\pi$  est imaginaire pur (et ambigu d'un multiple entier de  $2\pi i$ ) dans le secteur FF (situation reposante à laquelle nous sommes habitués dans le monde des chaînes de spins compactes), elle est *réelle* (et mono-valuée) dans le secteur BB. Ce qui peut mettre en danger la convergence de l'intégrale. Toutefois M.R. Zirnbauer a donné [150] une borne sur la partie réelle du terme topologique. L'inégalité a été établie dans le cas particulier de  $\mathcal{M}_B = \mathbb{H}^3$  (3-hyperboloïde), qui est isomorphe à  $\mathcal{M}_B = \text{Sp}(2n, \mathbb{C})/\text{Sp}(2n)$  pour  $n = 1$ .

De plus, l'inégalité est *optimale*. Si l'on multiplie le terme cinétique de l'action de WZW  $W[M]$  par un facteur plus petit et arbitrairement proche de l'unité, il existe des configurations de champ violant l'inégalité et l'intégrale fonctionnelle devient instable. C'est-à-dire que le modèle de WZW  $C|D$  se situe *exactement sur la frontière de la zone de stabilité*. Il résulte de cela que  $W[M]$  ne tolère l'addition d'une perturbation courant-courant  $J_L J_R$  qu'avec un signe fixé de la constante de couplage.

### 7.7.2 Fondement de la bosonisation non-abélienne

Maintenant que notre intégrale fonctionnelle est solidement établie, nous pouvons développer une extension supersymétrique de la bosonisation non-abélienne. Nous devons montrer que la théorie des fermions libres de Dirac avec leurs partenaires bosoniques  $b$ - $c$  est équivalente au modèle de WZW  $C|D$  au niveau  $k = 1$ . Pour cela, on considère la fonction de partition :

$$\mathcal{Z}_{\text{WZW}}[\bar{A}, A] = \int \mathcal{D}M \exp -W[M; \bar{A}, A],$$

où  $W[M; \bar{A}, A]$  est une action de WZW avec des champs de jauge couplés minimalement :

$$W[M; \bar{A}, A] = W[M] - \frac{1}{2\pi} \int d^2x \text{STr} \left( M^{-1} \bar{\partial} M A + \bar{A} M \partial M^{-1} + \bar{A} M A M^{-1} - \bar{A} A \right),$$

et  $\bar{A}$  et  $A$  sont des sources extérieures prenant leurs valeurs dans  $\text{osp}(2n|2n)$ . Un outil de choix pour explorer le modèle de WZW est la relation de Polyakov-Wiegmann [107]

$$W[gh^{-1}] = W[g] + W[h^{-1}] - \frac{1}{2\pi} \int d^2x \text{STr} g^{-1} \bar{\partial} g h^{-1} \partial h. \quad (7.26)$$

À l'aide de cette relation, on obtient facilement

$$W[g_L M g_R^{-1}] = W[M; g_L^{-1} \bar{\partial} g_L, g_R^{-1} \partial g_R] + W[g_L g_R^{-1}] ,$$

et en paramétrant les sources extérieures par

$$\bar{A} = g_L^{-1} \bar{\partial} g_L , \quad A = g_R^{-1} \partial g_R , \quad (7.27)$$

on peut calculer la fonction de partition  $\mathcal{Z}_{\text{WZW}}[\bar{A}, A]$  exactement :

$$\mathcal{Z}_{\text{WZW}}[\bar{A}, A] = \int \mathcal{D}M e^{-W[g_L M g_R^{-1}] + W[g_L g_R^{-1}]} = \exp W[g_L g_R^{-1}] .$$

Pour arriver à cette dernière expression, nous avons changé de variable de  $M$  à  $M' = g_L M g_R^{-1}$  dans l'intégrale fonctionnelle.

On peut également faire usage de la relation de Polyakov-Wiegmann pour vérifier l'invariance de  $W[M]$  sous les transformations locales de  $\text{OSp}_{\mathbb{C}}(2n|2n)_L \times \text{OSp}_{\mathbb{C}}(2n|2n)_R$ ,

$$M(z, \bar{z}) \mapsto g_L(z) M(z, \bar{z}) g_R(\bar{z})^{-1} ,$$

Cette invariance est caractéristique de tout modèle de WZW et, au niveau quantique, prend la forme d'une symétrie de Lie affine qui est non-unitaire. Par le théorème de Noether, l'invariance implique l'existence de deux familles de courants conservés :

$$J = M \partial M^{-1} , \quad \bar{J} = M^{-1} \bar{\partial} M ,$$

qui satisfont les équations du mouvement  $\bar{\partial} J = \partial \bar{J} = 0$ .

Considérons maintenant la théorie de Dirac libre supersymétrique de fonction de partition

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{\text{Dirac}}[\bar{A}, A] &= \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\bar{\phi} \exp - \int d^2x \left( \bar{\phi}^t (\partial + A) \bar{\phi} + \phi^t (\bar{\partial} + \bar{A}) \phi \right) \\ &= \mathbf{SDet}^{-1/2} \begin{pmatrix} 0 & \partial + A \\ \bar{\partial} + \bar{A} & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Le super-déterminant fonctionnel est mal défini et doit être régularisé dans l'infrarouge, en ajoutant par exemple un petit terme de type énergie au lagrangien de Dirac,

$$\epsilon \left( \bar{\phi}^t \Sigma_3 \phi + \phi^t \Sigma_3 \bar{\phi} \right) = 2\epsilon(|b|^2 + |c|^2 + \dots) .$$

En utilisant des techniques standards de noyau de la chaleur [108], on peut montrer que le super-déterminant s'identifie à l'exponentielle d'une autre action de WZW :

$$\mathcal{Z}_{\text{Dirac}}[\bar{A}, A] = \mathbf{SDet}^{-1/2} \begin{pmatrix} \epsilon \Sigma_3 & \partial + A \\ \bar{\partial} + \bar{A} & \epsilon \Sigma_3 \end{pmatrix} = \exp W[g_L \Sigma_3 g_R^{-1} \Sigma_3] ,$$

où les sources  $\bar{A}$  et  $A$  sont une nouvelle fois supposées de la forme (7.27). En comparant les réponses, on observe que les fonctions de partition du modèle de WZW $_{k=1}$   $C|D$  (obtenu du supergroupe complexe  $\text{OSp}(2n|2n)$ ) et le système de Dirac + ses superpartenaires (avec  $n$  espèces de particules) coïncident :

$$\mathcal{Z}_{\text{Dirac}}[\bar{A}, A] = \mathcal{Z}_{\text{WZW}}[\Sigma_3 \bar{A} \Sigma_3, A] ,$$

sur des sources de jauge de la forme (7.27). Cette équivalence est le fer de lance de la bosonisation non-abélienne de notre modèle.

On obtient comme conséquences immédiates les règles de bosonisation pour les courants :

$$\phi\phi^\dagger \sim \frac{1}{2\pi} \partial M M^{-1}, \quad \Sigma_3 \bar{\phi}\phi^\dagger \Sigma_3 \sim -\frac{1}{2\pi} M^{-1} \bar{\partial} M, \quad (7.28)$$

en comparant les perturbations  $J \cdot A$  dans les deux théories. En utilisant ces règles de bosonisation, on peut réécrire une seule espèce de fermions en masse aléatoire comme un modèle de WZW avec des interactions courant-courant marginalement non-pertinentes. Toutefois, on ne gagne rien de plus à représenter ainsi la théorie des champs du fermion.

### 7.7.3 Bosonisation de l'action libre

C'est un début et nous sommes à ce stade en mesure de bosoniser l'action libre des fermions et des fantômes bosoniques. On commence par défaire l'intégration sur les champs  $\phi, \bar{\phi}$  :

$$e^{-S_5[q]/N} = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\bar{\phi} \exp - \int d^2x \left( \bar{\phi}^\dagger \partial \bar{\phi} + \phi^\dagger \bar{\partial} \phi + \mu \bar{\phi}^\dagger q \phi + \mu \phi^\dagger q \bar{\phi} \right).$$

Les notations sont les mêmes que précédemment à ceci près que nous avons abandonné la sommation sur les indices d'espèces de fermions ( $l = 1, \dots, N$ ) et divisé en conséquence  $S_5$  par  $N$ . L'étape suivante est la bosonisation proprement dite. Je rappelle qu'en dimension 2, la version de la bosonisation non-abélienne de Witten établit que la théorie libre de  $2n$  fermions de Majorana, ou  $n$  fermions de Dirac est équivalente à un modèle de Wess-Zumino-Witten avec pour espace de plongement  $O(2n)$ , respectivement  $U(n)$ , au niveau  $k = 1$ . Comme il sera montré dans la sous-section 7.7.4 ci-dessous, cette équivalence peut être étendue aux fantômes bosoniques  $b$ - $c$  du côté des fermions libres. La théorie bosonisée équivalente se révèle être ce qu'on pourrait appeler et seulement pourrait comme on l'a vu, un modèle de WZW sur le groupe  $OSp(2n|2n)$ . En effet nous savons maintenant que nous devons demander que le champ du modèle de WZW que l'on notera  $M$  prenne ses valeurs dans l'espace symétrique riemannien de type  $C|D$ .

L'action du modèle possède la forme usuelle

$$W[M] = \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma} d^2x \text{STr} (M^{-1} \partial_{\mu} M)^2 + \frac{i\Gamma[M]}{24\pi}. \quad (7.29)$$

La fonctionnelle multivaluée  $\Gamma[M]$  s'obtient en supposant un prolongement  $\tilde{M}$  de  $M$  à une 3-boule  $\mathcal{B}$  qui possède pour bord l'espace des positions  $\Sigma$  ( $\partial\mathcal{B} = \Sigma$ ) :

$$\begin{aligned} \Gamma[M] &= \int_{\mathcal{B}} \text{STr} (\tilde{M}^{-1} d\tilde{M})^{\wedge 3} \\ &= \int_{\mathcal{B}} d^3x \epsilon_{\mu\nu\lambda} \text{STr} \tilde{M}^{-1} \partial_{\mu} \tilde{M} \tilde{M}^{-1} \partial_{\nu} \tilde{M} \tilde{M}^{-1} \partial_{\lambda} \tilde{M}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

L'espace des positions  $\Sigma$  est supposé être une surface sans bord comme une sphère ou un tore.

À ce stade, il faut établir les règles de bosonisation qui permettront d'écrire le couplage du champ  $q$  aux bilinéaires en  $\phi$ .

### 7.7.4 Fondement de la bosonisation non-abélienne, suite

Le modèle  $C|D$  WZW <sub>$k=1$</sub> , comme tout autre modèle de WZW, possède un certain nombre de propriétés permettant, par exemple, d'obtenir les dimensions conformes des opérateurs et plus généralement de calculer les fonctions de corrélation. Il s'agit d'étendre les résultats rappelés dans la section 1.3.2 du chapitre 1. Nous avons insisté sur le fait qu'à un groupe de Lie, on substituait une variété CS. Les opérateurs de trace se généralisent en opérateurs de supertrace. Les opérateurs de courant projetés le long d'un élément  $A$  spatialement constant  $A \in \text{osp}(2|2)$  seront notés  $J^A = -\frac{1}{2} \text{STr } A M \partial M^{-1}$  et  $\bar{J}^A = -\frac{1}{2} \text{STr } A M^{-1} \bar{\partial} M$ .

L'algèbre de courant est fondée sur

$$J^A(z) J^B(w) = -\frac{\frac{1}{2} \text{STr } AB}{(z-w)^2} + \frac{J^{[A,B]}(w)}{z-w} + \dots, \quad (7.31)$$

avec le même développement pour la partie antiholomorphe (modulo  $z \rightarrow \bar{z}$ , etc).

La construction du tenseur énergie-impulsion de Sugawara est similaire. Pour l'obtenir, il nous suffit donc de calculer la métrique sur l'algèbre  $\text{osp}(2|2)$  et le nombre de Coxeter dual  $C_{\text{ad}}$  comme on l'a fait dans le cas de  $\text{SU}(2)$  appliqué à la théorie conforme de la chaîne de spins  $s=1/2$ .

On obtient pour  $\text{osp}(2|2)$  le nombre de Coxeter dual :

$$C_{\text{ad}} = -2,$$

dont le calcul peut être généralisé à  $\text{osp}(2n, 2n)$  pour donner la même valeur. Le nombre de Coxeter dual ne dépend pas de  $n$ . Remarquons qu'il est négatif! On verra que cela est nécessaire pour que les dimensions conformes du champ fondamental du modèle de WZW soient positives.

Ayant obtenu ce nombre, on peut calculer le tenseur énergie-impulsion de Sugawara et construire la théorie conforme associée. La charge centrale de la théorie est nulle par supersymétrie (voire chapitre 5). La formule de la charge centrale (1.11) du chapitre 1 se généralise donc aussi, la dimension de l'algèbre devenant sa superdimension, or dans notre cas  $\text{sdim}(\mathfrak{g}) = \text{sdim}(\text{osp}(2|2)) = 0$ .

La théorie est donc invariante conforme et l'on peut chercher à calculer les dimensions conformes des opérateurs primaires, en particulier celles de  $M(w, \bar{w})$ , le champ de WZW dans la représentation fondamentale. Les formules (1.12) se généralisent donc.

Notons maintenant  $C_M = \kappa_{ij} e^i e^j$  le Casimir quadratique invariant de  $\text{osp}(2n|2n)$ , et  $(\Delta_M, \bar{\Delta}_M)$  les dimensions conformes du champ  $M$ . On obtient que  $C_M = -1/2$ , ce qui donne une dimension d'échelle totale de 1 pour le champ  $M$  :

$$\dim(M) = \Delta_M + \bar{\Delta}_M = 2 \times \frac{C_M}{1 + C_{\text{ad}}} = 2 \times \frac{-1/2}{1 - 2} = 1.$$

Cela signifie que la fonction de corrélation à deux points  $\langle MM \rangle$  se comporte comme le carré inverse de la distance. L'invariance globale  $G_L \times G_R$  contraint l'OPE de  $M$  avec lui-même à la forme

$$\text{STr } A M(z, \bar{z}) \times \text{STr } B M^{-1}(w, \bar{w}) = -\frac{\ell^2}{(2\pi|z-w|)^2} \text{STr } AB + \dots,$$

où  $\ell$  est une unité de longueur qui dépend du schéma de régularisation. Les supermatrices  $A$  et  $B$  sont des éléments arbitraires de  $\text{osp}(2n|2n)$ .

On revient maintenant au système des fermions de Dirac avec son cortège de fantômes. Le résultat de l'OPE qui a été donné dans (7.12) peut être mis sous forme invariante

$$\text{STr } A\phi(z)\bar{\phi}^t(\bar{z})\Sigma_3 \times \text{STr } B\Sigma_3\bar{\phi}(\bar{w})\phi^t(w) = -\frac{\text{STr } AB}{(2\pi|z-w|)^2} + \dots$$

La présence des facteurs  $\Sigma_3$  est à l'origine du signe moins global dans le membre de droite. Les OPE sont en accord si on identifie  $M/\ell$  avec  $\phi\phi^t\Sigma_3$ , et  $M^{-1}/\ell$  avec  $\bar{\phi}\phi^t\Sigma_3$ . De plus les OPE de ces champs avec les courants des théories respectives sont identiques également à l'ordre d'une boucle. En calculant les fonctions de corrélation à trois et quatre points, on trouve [74] que la correspondance persiste à des ordres plus élevés. Cela nous conduit aux règles de bosonisation

$$\phi\bar{\phi}^t\Sigma_3 \sim (2\pi\ell)^{-1}M, \quad \text{et} \quad \Sigma_3\bar{\phi}\phi^t \sim (2\pi\ell)^{-1}M^{-1}. \quad (7.32)$$

Leur statut est le même que dans le cas standard [39].

### 7.7.5 Bosonisation du couplage au champ $q$

Les règles de bosonisation nous enjoignent donc de remplacer la théorie de Dirac libre, augmentée des superpartenaires, par le modèle de WZW d'action  $W[M]$ , et les bilinéaires  $\phi\bar{\phi}^t\Sigma_3$  et  $\Sigma_3\bar{\phi}\phi^t$  par  $\ell^{-1}M$  respectivement  $\ell^{-1}M^{-1}$ . Le facteur  $\ell^{-1}$  dépend du schéma de régularisation et permet simultanément une dimensionnalisation correcte de l'expression. C'est bien ce que l'on fait et, posant  $T = e^X$  avec  $X = -\Sigma_3 X \Sigma_3$ , de sorte que  $q\Sigma_3 = T\Sigma_3 T^{-1}\Sigma_3 = e^{2X} = T^2$ , on obtient

$$e^{-S_5/N} = \int \mathcal{D}M \exp \left( -W[M] - \frac{\mu}{\ell} \int d^2x \text{STr}(MT^{-2} + T^2M^{-1}) \right).$$

Puis, on ôte le facteur  $T^2 = e^X$  du second terme dans le poids de l'exponentielle, en changeant les variables d'intégration de  $M$  à  $M' = MT^2$  :

$$e^{-S_5/N} = \int \mathcal{D}M' \exp \left( -W[M'T^2] - \frac{\mu}{\ell} \int d^2x \text{STr}(M' + M'^{-1}) \right).$$

Maintenant  $T^2$  apparaît dans l'argument de la fonctionnelle de WZW  $W[*]$ , alors que le second terme est devenu un pur terme de masse.

La dernière étape du raisonnement consiste à utiliser le fait que l'opérateur de masse a pour dimension 1, ce qui en fait un terme pertinent dans l'infrarouge. Le terme de masse peut alors être vu comme un potentiel semi-classique dont il nous faut trouver le minimum, de façon à déterminer la polarisation de  $M$ . Comme on l'a démontré, le potentiel  $\text{STr}(M + M^{-1})$  possède un minimum absolu en  $M = 1$ , ce qui découle de la définition de l'espace de plongement comme un superspace symétrique riemannien (confère équation (7.25) ci-dessus). L'approximation la plus simple consiste donc à supposer que le champ  $M'$  est polarisé en l'unité, ce qui fournit

$$S_5[q] \Big|_{q=T\Sigma_3 T^{-1}} = N W[T^2].$$

Développant le potentiel semi-classique au voisinage de  $M' = 1$ , il est patent que la masse associée vaut  $\sqrt{\mu/\ell}$ . L'approximation est donc justifiée pour la physique se jouant à des échelles de longueur supérieures à  $\sqrt{\ell/\mu}$ . Remarquons que si l'on applique l'approximation du point-col après avoir suivi le flot amenant une valeur faible de  $g$  à l'unité (typiquement), les deux échelles de longueur  $\ell$  et  $\mu^{-1} \approx 2\ell\sqrt{g/\pi}$  sont identifiées. C'est donc cette échelle de longueur  $\mu^{-1} \sim \ell$  qui fixe le cut-off à courte distance du modèle sigma non-linéaire.

### 7.7.6 Détermination des constantes de couplages $f$ et $\theta$

En insérant  $M = T^2 = e^{2X}$  avec  $X = -\Sigma_3 X \Sigma_3$  dans le premier terme de  $W[M]$  et en comparant avec  $S_{\text{eff}}[q]$  pour  $q = T \Sigma_3 T^{-1} = e^{2X} \Sigma_3$ , on en déduit immédiatement  $f = 1/N$ . On peut vérifier ce résultat pour  $f$  par un développement en gradients de  $S_5$ , sans passer par le modèle de WZW. Un calcul plus précis, qui prend en compte la valeur finie de  $\mu/\ell$ , donne

$$f = \frac{1}{N(1 - e^{-\pi/g})} . \quad (7.33)$$

Nous abordons maintenant la question du calcul de l'angle topologique  $\theta$ . On attend du terme topologique de  $\Gamma[M]$  du modèle de WZW qu'il fournisse le terme topologique du modèle sigma non-linéaire. C'est pourquoi on commence par effectuer la substitution  $M = T^2$  dans  $\Gamma[M]$ . Ce faisant, le terme topologique est réduit à zéro. La raison en est que  $\mathbf{X}_n$  ne peut servir de support à la substitution. Écrire  $\Gamma[M]$  de la forme (7.30) requiert une extension *régulière* de  $M$  à la boule  $\mathcal{B}$ . Si nous persistons à vouloir plonger  $M \Sigma_3 = T^2 \Sigma_3 = q$  dans  $\mathbf{X}_n$ , nous sommes certains d'échouer puisqu'à cause de l'obstruction topologique  $\Pi_2(\mathbf{X}_n) \neq 0$  (pour  $n > 1$ ), un tel prolongement ne peut exister.

La seule façon de contourner (au sens propre comme au figuré) l'obstruction est de permettre à  $q$  de prendre ses valeurs dans un espace *plus grand*, typiquement le groupe complexe  $\text{OSp}(2n|2n)$ . Alors, si  $0 \leq s \leq 1$  est une coordonnée radiale de la boule  $\mathcal{B}$ , nous pouvons opter pour le prolongement

$$\tilde{M}(x, s) = T(x) \exp(\pm i s \pi \Sigma_3 / 2) T(x)^{-1} (\mp i \Sigma_3) .$$

Pour  $s = 1$  on a  $\tilde{M}(x, 1) = T(x) \Sigma_3 T(x)^{-1} \Sigma_3 = q(x) \Sigma_3$ , tandis que pour  $s = 0$  on a  $\tilde{M}(x, 0) = \mp i \Sigma_3$ , indépendant de  $x$ . En insérant ce prolongement dans l'expression (7.30) pour  $\Gamma[M]$ , et en changeant le domaine d'intégration de  $\mathcal{B}$  à  $\Sigma = \partial \mathcal{B}$  (invoquant le théorème de Stokes), on obtient

$$\frac{i}{24\pi} \Gamma[q \Sigma_3] = \pm \frac{1}{32} \int_{\Sigma} d^2 x \epsilon_{\mu\nu} \text{STr } q \partial_{\mu} q \partial_{\nu} q .$$

Compte tenu de la relation  $S_5[q] = NW[q \Sigma_3]$  et de la formule pour  $W[M]$ , la comparaison de ce résultat avec l'action du modèle sigma non-linéaire (7.23) nous livre la valeur de l'angle topologique

$$\theta = \pm N \pi . \quad (7.34)$$

L'ambiguïté de signe provient du caractère multivalué de  $\Gamma[M]$ . Naturellement, cela ne prête à aucune conséquence puisque la physique du modèle sigma non-linéaire est périodique dans l'angle topologique  $\theta$ , tant que l'espace des positions est une surface sans bord  $\Sigma$ .

Pour être complet, il reste à calculer l'incidence d'une énergie finie  $E \neq 0$  sur le modèle sigma non-linéaire. En décalant  $q \mapsto q - i(E/2\mu)\Sigma_3$  dans (7.24), et en développant à l'ordre linéaire en  $E$ , on obtient l'action totale effective

$$S_E[q] = S_{\text{eff}}[q] - \frac{i\mu N E}{2g} \int d^2 x \text{STr } q \Sigma_3 . \quad (7.35)$$

Finalement, un calcul standard partant du lagrangien (7.8) donne l'expression suivante de la densité d'états locale :

$$\nu(E; x) = \frac{\mu N}{2\pi g} \text{Re} \int \mathcal{D}q \text{Tr } q_{\text{FF}}(x) \sigma_3 e^{-S_E[q]} , \quad (7.36)$$

où on garde en mémoire que l'action fonctionnelle doit être calculée avec une partie imaginaire positive  $\text{Im} E > 0$ , dans la limite  $\text{Im} E \rightarrow 0$ .

## 7.8 Modèle sur réseau

Nous cherchons à donner de la symétrie  $D$  un exemple de réalisation sur réseau. Nous allons pour cela nous servir des enseignements du chapitre 4. Nous y avons rappelé que le modèle de Chalker-Coddington donne une bonne image de la transition dans l'effet Hall quantique entier. Puis, suivant Read, nous en avons donné une version de seconde quantification qui autorisait des opérations de moyenne. Le hamiltonien effectif qui en avait émergé, correspondant à la limite fortement anisotrope du modèle, est celui d'une chaîne de superspins  $\mathcal{C} = 0$  de symétrie  $\text{psu}(1, 1|2)$ . Nous avons donné une construction générale (dépassant le cadre du groupe  $\text{PSU}(1, 1|2)$ ), d'un modèle sigma non-linéaire censé décrire la physique de basse énergie du modèle. En particulier cela suffisait à obtenir la valeur de l'angle topologique du modèle sigma non-linéaire.

Nous nous proposons de faire de même ici en implémentant sur réseau la symétrie  $D$ . L'intérêt de ce calcul est double. Il permettra de confirmer la valeur de l'angle topologique, d'une part, et de proposer un modèle numérique de réalisation de la classe  $D$  et, peut-être, de l'une des phases qui seront proposées dans la section 7.11.

### 7.8.1 Construction du modèle

Le modèle sur réseau que l'on souhaite construire doit satisfaire, pour être représentatif de la symétrie  $D$ , au moins deux contraintes. Nous demandons qu'il brise l'invariance par renversement du temps et l'invariance  $\text{SU}(2)$  de spin. Ces conditions sont vérifiées par le modèle de Chalker et Coddington qui constitue donc un bon point de départ. On demande aussi que la charge ne soit pas conservée (la charge des quasiparticules dans un supraconducteur ne l'est pas). En cela notre modèle doit différer de celui du réseau de l'effet Hall. C'est pourquoi, on peut choisir un modèle sur réseau réel (aucune référence à la charge). Il ne sera donc pas nécessaire d'introduire des particules avancées dans la description de seconde quantification. Le désordre ne pouvant être mis sur les liens, puisque l'on renonce aux phases, il est inclus dans les vertex. Les opérateurs de vertex sont donc des matrices de diffusion appartenant à  $\text{SO}(2)$ , et plus généralement  $\text{SO}(2N)$  pour  $N$  fermions. Ça n'est bien sûr pas un hasard si l'algèbre de Lie de ces matrices est  $D_N$ . Le réseau est représenté schématiquement sur la figure 7.1.

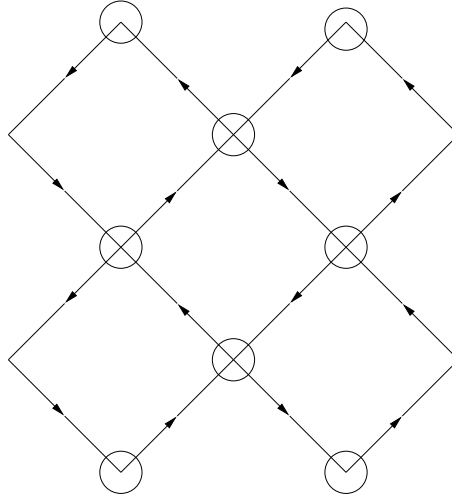
On considère maintenant le cas  $N = 1$ , que l'on généralisera ensuite. On introduit donc sur chaque site  $i$  un boson  $b_i$  et un fermion  $f_i$ . Une des directions du réseau est identifiée à un temps. Je rappelle qu'un site est un chemin suivant ou rebroussant la flèche du temps. Une fois la direction du temps fixée, on peut calculer la matrice de transfert effective pour le réseau, ou un hamiltonien effectif dans sa version anisotrope. Suivant la démarche introduite dans le chapitre 4, on effectue une transformation particule-trou sur les sites descendants (rebroussant le temps) :

$$b_i^\dagger \rightarrow b_i \quad b_i \rightarrow -b_i^\dagger \quad f_i^\dagger \rightarrow f_i \quad f_i \rightarrow f_i^\dagger,$$

transformations qu'on inversera à la fin des calculs. Cela permet de nous ramener à un modèle sur réseau dirigé, qui a le mérite de ne pas être bipartite.

Les opérateurs de vertex  $V_{i,i+1}$  sont les matrices de transfert locales dans la direction du temps qui mélangent les particules des sites  $i$  et  $i + 1$ . L'opérateur de vertex liant les sites 1 et 2 s'écrit par exemple :

$$V_{12} = \exp \left( m(b_1^\dagger b_2 + f_1^\dagger f_2) - \varepsilon m(b_2^\dagger b_1 + f_2^\dagger f_1) \right).$$

FIG. 7.1 – Réseau alterné  $SO(2N)$  .

Lorsque  $\varepsilon = 1$ , l'opérateur de vertex est orthogonal et correspond au cas du réseau dirigé (l'équivalent du métal chirale rencontré dans le chapitre 4). Lorsque  $\varepsilon = -1$ , l'opérateur de vertex est symplectique et on retrouve le modèle de départ. Pour ce qui nous concerne, il nous suffira donc de faire  $\varepsilon = -1$  à la fin des calculs.

Moyennant sur les angles de  $SO(2)$ , à savoir  $m$ , suivant une distribution gaussienne, on obtient un opérateur de vertex effectif :  $V_{12} = \exp \left( g(b_1^\dagger b_2 + f_1^\dagger f_2 - \varepsilon b_2^\dagger b_1 - \varepsilon f_2^\dagger f_1)^2 \right)$  où  $g$  est l'intensité du désordre. Plus  $g$  est faible, plus l'anisotropie est forte.

On introduit maintenant les générateurs :

$$\begin{aligned} K^0 &= \frac{1}{2}(n_b + \frac{1}{2}) & B &= \frac{1}{2}(n_f - \frac{1}{2}) & K^+ &= \frac{1}{2}(b^\dagger)^2 & K^- &= \frac{1}{2}(b)^2, \\ V^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}b^\dagger f^\dagger & V^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}b f^\dagger & W^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}b^\dagger f & W^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}b f, \end{aligned}$$

qui forment une algèbre  $osp(2|2)$ . On remarquera que ces générateurs spécifient implicitement une forme réelle de l'algèbre complexe, si l'on suit le produit scalaire naturel des opérateurs de création/annihilation. En particulier la sous-algèbre bosonique est ici  $Sp(2, \mathbb{R}) \times O(2)$ . On peut alors réarranger les opérateurs de création/annihilation du vertex effectif en :

$$V_{12} = \exp(8g H_{12}) \quad \text{avec} \quad H_{12} = -\varepsilon K_1^0 K_2^0 + \varepsilon B_1 B_2 + \frac{1}{2} K_1^- K_2^+ + \frac{1}{2} K_1^+ K_2^- \\ + \frac{1}{2} W_1^+ V_2^- + \frac{1}{2} V_1^+ W_2^- + \frac{1}{2} \varepsilon W_1^- V_2^+ + \frac{1}{2} \varepsilon V_1^- W_2^+.$$

$H_{12}$  est l'opérateur de Laplace-Casimir sur  $osp(2|2)$ .

La version de première quantification de ce modèle sur réseau est une généralisation continue d'un modèle proposé par S. Cho et M.P.A. Fisher pour rendre compte du modèle d'Ising en liens aléatoires mais avec une distribution du désordre binaire [34]. Des techniques de transformation couleur-saveur ont été appliquées à ce dernier modèle dans [16].

### Opérateur d'énergie

Comme on l'a vu, et contrairement au modèle de Chalker et Coddington, une particule qui se meut sur le réseau ne prend pas de phases aléatoires sur les liens entre diffusions sur les

vertex. Cependant, si on suppose que cette particule est d'énergie  $E$ , son transport sur un lien lui confère une phase additionnelle de  $Ea$ , où  $a$  est le pas du réseau, c'est-à-dire la distance parcourue (ou le temps passé) sur le lien.

Dans le cadre du formalisme de seconde quantification, le décalage dans la phase se traduit par un facteur supplémentaire dans la matrice de transfert totale :

$$\mathcal{E} = \exp \left( iEa \sum_j \epsilon^j (K_j^0 + B_j) \right),$$

avec  $\epsilon^j$  prenant la valeur  $+1$  ou  $-1$  selon que le site  $j$  correspondait originellement à un chemin montant ou descendant.

### 7.8.2 Représentation et états cohérents

On note  $|n_b, n_f\rangle$  les états nombre de particules. Tous ces états appartiennent à l'une des deux représentations *atypiques* de plus bas poids de  $\text{osp}(2|2)^4$ . On les distingue par le nombre quantique  $n_f$ . Leur état de plus bas poids est pour l'une  $|\Omega\rangle = |0, 0\rangle$  et pour l'autre  $|\Omega'\rangle = |0, 1\rangle$ . L'espace de Fock est alors scindé en deux parties bien distinctes. La fonction de partition qui y est construite se décompose par conséquent en deux contributions.

Il est aisé de constater que les deux représentations sont toutes deux atypiques, parce qu'un des trois opérateurs d'échelle (montant) de la superalgèbre  $\text{osp}(2|2)$  annihile l'état de plus bas poids.

#### États cohérents

Il est alors naturel de construire les états cohérents suivants :

$$\begin{aligned} |Q\rangle &= \exp(zK^+ + \xi V^+ - \bar{z}K^- - \bar{\xi}W^-) |\Omega\rangle, \\ |Q'\rangle &= \exp(zK^+ + \xi W^+ - \bar{z}K^- - \bar{\xi}V^-) |\Omega'\rangle. \end{aligned}$$

Chacun des deux ensembles engendre les états d'une des deux représentations.

Les états cohérents duaux des précédents sont définis par conjugaison hermitique en utilisant la conjugaison canonique dans l'espace de Fock et la convention supplémentaire (qui n'est pas strictement nécessaire) sur les variables de Grassmann :  $\xi^\dagger = \bar{\xi}$  et  $\bar{\xi}^\dagger = \xi$ . Ces états cohérents ont été construits de manière à être de norme unité :  $\langle Q|Q\rangle = \langle Q'|Q'\rangle = 1$ .

Ils forment une "base" d'états surcomplète. Leur propriété essentielle est qu'il existe une résolution de l'unité

$$\int_{|z|<1} d\bar{\xi} d\xi d\bar{z} dz \frac{2}{\pi} \frac{1}{1 - z\bar{z} - \xi\bar{\xi}} |Q\rangle \langle Q| = \mathbb{I},$$

qui permet la construction des intégrales fonctionnelles. La mesure de la variété formée par ces états peut être lue sur la formule précédente.

<sup>4</sup>On trouvera dans [8] une construction des états cohérents de  $\text{osp}(2|2)$  élaborée sur toutes les représentations de la superalgèbre, pas seulement les représentations atypiques. Toutefois ces états cohérents diffèrent de ceux que j'ai introduits parce qu'ils ne sont pas naturellement normalisés.

### 7.8.3 Représentation fonctionnelle de l'opérateur de Laplace-Casimir

Nous allons maintenant mettre en œuvre les enseignements de la section 4.4 du chapitre 4.

On désigne par  $\{T^a\}_a$  une base arbitraire de l'algèbre de Lie  $\text{osp}(2|2)$  et soit  $\mathcal{K}$  sa forme de Killing. Elle est non-dégénérée et nous pouvons par conséquent appliquer sans détour les résultats de la section 4.4. Nous pouvons nous contenter d'écrire la représentation fondamentale sur laquelle est construite le modèle sigma non-linéaire, puis calculer les paramètres  $\eta$  et  $\kappa$ . Ces derniers pourraient sans nul doute être obtenus en fonction de caractéristiques de l'algèbre et de la représentation (index de la représentation, nombre de Coxeter dual de l'algèbre) mais l'intérêt de le faire est inexistant. Je rappelle qu'on note  $\kappa_{ab}$  le tenseur métrique sur l'algèbre défini par  $\kappa_{ab} = \mathcal{K}(T_a, T_b)$ .

On introduit donc la représentation matricielle  $4 \times 4$  de l'algèbre. D'autres choix sont possibles (comme une représentation  $3 \times 3$ ), mais la représentation choisie nous permet de faire le lien avec la dérivation du modèle sigma non-linéaire de la section 7.7. On définit l'algèbre des supermatrices de  $\text{gl}(2|2)$  :

$$[E_{ab}, E_{cd}] = \delta_{bc}E_{ad} - \delta_{ad}(-1)^{(|a|+|b|)(|c|+|d|)}E_{cb}.$$

On prendra garde au fait que le commutateur doit être compris comme un supercommutateur. La représentation matricielle des générateurs de  $\text{osp}(2|2)$  est avec ces notations

$$\begin{aligned} K^0 &= \frac{1}{2}(E_{11} - E_{33}) & B &= \frac{1}{2}(E_{22} - E_{44}) \\ K^+ &= E_{13} & K^- &= -E_{31} \\ V^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{23} - E_{14}) & V^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{21} + E_{34}) \\ W^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{12} - E_{43}) & W^- &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(E_{32} + E_{41}). \end{aligned} \quad (7.37)$$

Il est alors facile de vérifier que  $\kappa = 2$ . Pour calculer  $\eta$ , on effectue

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{1}{\eta} \langle \Omega | T^b | \Omega \rangle \rho(T_b) = \frac{1}{\eta} \langle \Omega | T^b | \Omega \rangle \kappa_{ab} \rho(T^a) \\ &= \frac{1}{\eta} \langle \Omega | K^0 | \Omega \rangle (-\varepsilon) \rho(K^0) + \frac{1}{\eta} \langle \Omega | B | \Omega \rangle (+\varepsilon) \rho(B) \\ &= -\frac{\varepsilon}{4\eta} \rho(K^0) - \frac{\varepsilon}{4\eta} \rho(B) = -\frac{\varepsilon}{8\eta} (E_{11} + E_{22} - E_{33} - E_{44}) \\ &= -\frac{\varepsilon}{8\eta} \Sigma_3, \\ \Lambda' &= \frac{1}{\eta} \langle \Omega' | T^b | \Omega' \rangle \rho(T_b) = \frac{1}{\eta} \langle \Omega' | T^b | \Omega' \rangle \kappa_{ab} \rho(T^a) \\ &= \frac{1}{\eta} \langle \Omega' | K^0 | \Omega' \rangle (-\varepsilon) \rho(K^0) + \frac{1}{\eta} \langle \Omega' | B | \Omega' \rangle (+\varepsilon) \rho(B) \\ &= -\frac{\varepsilon}{4\eta} \rho(K^0) + \frac{\varepsilon}{4\eta} \rho(B) = -\frac{\varepsilon}{8\eta} (E_{11} - E_{22} - E_{33} + E_{44}) \\ &= -\frac{\varepsilon}{8\eta} \sigma \Sigma_3. \end{aligned}$$

Demandant  $\Lambda^2 = \Lambda'^2 = 1$ , on obtient  $\eta = 1/8$ . La construction du modèle sigma non-linéaire à énergie nulle en découle :

$$S = \frac{1}{32} \iint dx dy \epsilon^{\mu\nu} \text{STr} (\Omega \partial_\mu \Omega \partial_\nu \Omega) - \frac{1}{32} \iint dx dy \text{STr} (\partial_\mu \Omega \partial^\mu \Omega).$$

### 7.8.4 Représentation de l'opérateur d'énergie

On calcule maintenant les éléments de matrice sur les états cohérents de la partie du hamiltonien qui correspond à l'opérateur d'énergie  $H_{\mathcal{E}} = iE \sum_j \varepsilon^j (K_j^0 + B_j)$ . On obtient sur les sites impairs :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{Q} | H_{\mathcal{E}} | \mathcal{Q} \rangle &= iE \sum_j \varepsilon^j \langle \mathcal{Q} | K_j^0 + B_j | \mathcal{Q} \rangle = iE \sum_j \varepsilon^j \eta (Q_j^{K^0} + Q_j^B) \\ &= iE \eta \sum_j \varepsilon^j \frac{2}{\kappa} \kappa \text{STr} ((\rho(K_j^0) + \rho(B_j)) Q_j) \\ &= iE \eta \sum_j \varepsilon^j \text{STr} (\Sigma_3 Q_j) . \end{aligned}$$

Puis, compte tenu de ce que  $\varepsilon^j = (-1)^j$  mais aussi de ce que la matrice  $Q$  conjuguée vaut  $\tilde{Q} = -Q$  sur les sites pairs, l'élément de matrice vaut

$$\langle \mathcal{Q} | H_{\mathcal{E}} | \mathcal{Q} \rangle = iE \eta \sum_j \text{STr} (\Sigma_3 Q_j) ,$$

sur tous les sites. Finalement le modèle sigma non-linéaire s'écrit

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{32} \iint dx dy \epsilon^{\mu\nu} \text{STr} (\Omega \partial_\mu \Omega \partial_\nu \Omega) - \frac{1}{32} \iint dx dy \text{STr} (\partial_\mu \Omega \partial^\mu \Omega) \\ &\quad + i \frac{E}{8a} \iint dx dy \text{STr} (\Omega \Sigma_3) . \end{aligned}$$

### 7.8.5 Généralisation à $N$ espèces de fermions

Le modèle sur réseau est généralisé de la façon suivante. On introduit  $N$  espèces de fermions sur chaque site que l'on indexe par les variables  $k$  et  $l$ . Les opérateurs de création/annihilation qui leur sont associés sont notés  $f_k^\dagger, f_k$ . On leur attribue également des partenaires (fantômes) bosoniques  $b_k^\dagger$  et  $b_k$ . On effectue les transformations particules-trous de la même manière que dans le cas  $N = 1$ . Les particules sont diffusées sur les vertex par des matrices orthogonales de  $\text{SO}(2N)$ . Un opérateur de vertex représentatif (matrice de transfert locale) est de la forme :

$$\begin{aligned} V_{12} &= \exp \left( (b_{1,k}^\dagger, b_{2,k}^\dagger) M_{k,l} \begin{pmatrix} b_{1,l} \\ b_{2,l} \end{pmatrix} + (f_{1,k}^\dagger, f_{2,k}^\dagger) M_{kl} \begin{pmatrix} f_{1,l} \\ f_{2,l} \end{pmatrix} \right) \\ \text{où} \quad M_{kl} &= \begin{pmatrix} A & \varepsilon C \\ -C^T & B \end{pmatrix}_{kl} . \end{aligned}$$

$A$  et  $B$  sont des matrices antisymétriques, tandis que  $C$  est une matrice réelle. Selon que  $\varepsilon$  vaut 1 ou  $-1$ , la matrice de transfert locale appartient au groupe  $\text{SO}(2N)$  (réseau dirigé) ou au groupe  $\text{SO}(N, N)$  (réseau alterné). Comme précédemment, nous ne sommes ici intéressés que par le cas  $\varepsilon = -1$ .

Les angles aléatoires de diffusion sont distribués selon la loi gaussienne

$$P(M) = \exp \left( -\frac{N}{4g} \text{Tr}(M^2) \right) .$$

On procède ensuite comme pour  $N = 1$ . On moyenne sur les matrices  $\text{SO}(2N)$  et on obtient un hamiltonien effectif. Le résultat, par exemple pour le hamiltonien local décrivant l'interaction des sites 1 et 2, se décompose comme une somme d'opérateurs plus deux opérateurs de Casimir qui vivent sur les sites 1 et 2 respectivement. On peut montrer que ceux-ci sont nuls sur les deux représentations avec lesquelles on travaille. L'opérateur de Laplace-Casimir est alors le même que dans le cas  $N = 1$  à ceci près que les générateurs sont les sommes des générateurs construits sur chacune des espèces :

$$V_{12} = \exp \left( \frac{8g}{N} H_{12} \right) \quad \text{avec} \quad H_{12} = -\varepsilon K_1^0 K_2^0 + \varepsilon B_1 B_2 + \frac{1}{2} K_1^- K_2^+ + \frac{1}{2} K_1^+ K_2^- \\ + \frac{1}{2} W_1^+ V_2^- + \frac{1}{2} V_1^+ W_2^- + \frac{1}{2} \varepsilon W_1^- V_2^+ + \frac{1}{2} \varepsilon V_1^- W_2^+ .$$

Par exemple, les générateurs de Cartan sur le site 1 sont :

$$K_1^0 = \sum_{k=1}^N K_{1,k}^0 = \frac{1}{2} \left( \frac{N}{2} + \sum_{k=1}^N n_{b_{1,k}} \right) \quad B_1 = \sum_{k=1}^N B_{1,k} = \frac{1}{2} \left( -\frac{N}{2} + \sum_{k=1}^N n_{f_{1,k}} \right) .$$

Pour ce qui est des représentations, nous cherchons les états de plus bas poids singulets sous l'action de  $\text{SO}(N)$ . C'est pourquoi, on introduit sur chaque site les états de plus bas poids

$$|\Omega\rangle = |0\rangle , \quad |\Omega'\rangle = \prod_{k=1}^N f_k^\dagger |0\rangle ,$$

où  $|0\rangle$  est le vide de l'espace de Fock. Cela définit deux représentations atypiques disjointes de  $\text{osp}(2|2)$  similaires aux précédentes mais avec des poids qui diffèrent. Les états cohérents sont donc définis pareillement mais avec de nouveaux états de plus bas poids et des générateurs d'échelle sommes. Les variables continues qui indexent ces états cohérents sont notées de la même façon. La nouvelle résolution de l'identité est alors

$$\int_{|z|<1} d\bar{\xi} d\xi d\bar{z} dz \left[ \frac{2}{\pi} \frac{1}{1 - z\bar{z} - \xi\bar{\xi}} \right]^N |\mathcal{Q}\rangle \langle \mathcal{Q}| = \mathbb{I} .$$

L'application de l'espace de Fock sur la représentation en terme de matrice  $Q$  est inchangée si l'on excepte les adaptations  $\Lambda = -\frac{\varepsilon N}{8\eta} \Sigma_3$  et  $\Lambda' = -\frac{\varepsilon N}{8\eta} \sigma \Sigma_3$ . On obtient alors  $\eta = N/8$  et  $g$  est remplacé par  $g/N$ . Ces changements conduisent à un modèle sigma non-linéaire de paramètres

$$\theta = \pm N \pi \quad \text{et} \quad f = \frac{2}{\pi N} .$$

La valeur de l'angle topologique est en parfait accord avec (7.34). Le fait que la constante de couplage soit distincte de la valeur que nous avons obtenue par le développement en gradients (ce à quoi on doit s'attendre en prenant la limite anisotrope) n'a rien de restrictif puisque, contrairement à l'angle topologique, elle n'a aucun caractère universel et, comme on le verra plus loin, tend vers 0 dans l'infrarouge.

Pour finir je mentionne qu'il est utile, tout particulièrement pour le calcul numérique, d'obtenir la version de première quantification du réseau. Pour cela, on procède à la façon de Chalker et Ho (voir section 4.2 du chapitre 4) et on montre que l'on obtient bien  $N$  fermions de Dirac en masse aléatoire avec une matrice de masse correspondant à l'opérateur  $\Phi^{(1)} + \Phi^{(2)}$ .

## 7.9 Densité d'états

Dans la section 7.5 nous avons signalé que tant que les fluctuations sont négligées, le champ composite  $Q$  prend une valeur moyenne non-nulle  $\mu$  sur la variété de point col. Comme  $Q$  a été introduit par le biais de son couplage au terme bilinéaire  $\phi_l \bar{\phi}_l^\dagger + \bar{\phi}_l \phi_l^\dagger$ , ce dernier acquiert également une valeur moyenne non-nulle, interprétée comme une densité d'états non-nulle en  $E = 0$ .

Cela se produit alors que la théorie de Dirac ne possède aucune échelle de masse (en dehors d'un cut-off qui dépend de la réalisation physique de la théorie) et donne un exemple (le second dans cette thèse, confère section 1.2 du chapitre 1) de masse engendrée dynamiquement. Une valeur fixée du paramètre d'ordre  $Q$  brise la symétrie  $\text{OSp}(2n|2n)$  et conduit à l'existence de modes de Goldstone qui donnent la théorie de basse énergie que représente le modèle sigma non-linéaire (7.23).

Quel est l'effet des fluctuations du paramètre d'ordre ? Le théorème de Mermin-Wagner-Coleman (extension à tout type de théorie des champs du théorème de Mermin-Wagner rappelé dans le chapitre 1) affirme qu'aucune symétrie continue ne peut être brisée en dimension 2. Cependant le théorème ne s'applique qu'aux symétries continues *compactes*, ou aux modèles sigma non-linéaires d'espaces de plongement compacts. Dans ce dernier cas, le groupe de renormalisation part vers le couplage fort, les fluctuations s'amplifient et, dans l'infrarouge, rétablissent la symétrie potentiellement brisée. C'est précisément à ce type de physique qu'est consacré le chapitre 2 de la thèse. Or les modèles sigma non-linéaires supersymétriques (ou dans la limite d'un nombre de répliques nul), et/ou non-compacts peuvent être asymptotiquement libres dans l'infrarouge : le flot conduit à un point fixe gaussien qui correspond à un métal parfait. C'est ce qui se produit dans le cas d'un système d'électrons avec couplage spin-orbite et qui est invariant par renversement du temps (classe AII, ou encore ensemble de Wigner-Dyson  $\beta = 4$ ).

Comme cela a été mentionné dans [22], c'est également ce qu'il advient de notre modèle sigma non-linéaire. Voyons comment...

### 7.9.1 Groupe de renormalisation

Friedan [47] a prouvé très généralement qu'à l'ordre d'une boucle la fonction  $\beta$  d'un modèle sigma non-linéaire ayant un espace de plongement de métrique  $\kappa$ , est déterminée par le tenseur de courbure de Ricci  $R$  :

$$\frac{d\kappa}{d \ln \ell} = -\frac{R}{2\pi} + \dots$$

La métrique de notre espace de plongement est  $\kappa = -(8\pi f)^{-1} \text{STr}(dq)^2$ . Le calcul du tenseur de Ricci réclame quelques connaissances en géométrie différentielle et sur les propriétés des espaces symétriques. En particulier, il est possible de le calculer à partir des propriétés algébriques du groupe de Lie sur lequel est construit l'espace symétrique. C'est-à-dire que le tenseur de Ricci est relié aux constantes de structure de l'algèbre. Concrètement, on paramètre  $q$  par  $q = e^X \Sigma_3 e^{-X}$  avec la contrainte  $\Sigma_3 X \Sigma_3 = -X$  qui est une manière de fixer la liberté de jauge dans  $X$ . Alors le tenseur de Ricci est le tenseur invariant de rang 2 défini par la forme quadratique [60]

$$R_0(X, X') = -\text{STr} \, \text{ad}(X) \text{ad}(X')$$

sur l'espace tangent à  $X = 0$ , ou  $q = \Sigma_3$ .

Pour un espace symétrique irréductible, ce tenseur est un multiple (constant) de la métrique. De plus la constante de proportionnalité est indépendante de  $n$  par supersymétrie, et on peut

se contenter de la calculer dans le cas  $n = 1$ . À cette fin, on évalue les deux tenseurs sur un élément de l'espace tangent, par exemple  $H = h E_{\text{BB}} \otimes \sigma_1$ .

Les valeurs propres de l'action adjointe sont par définition les racines de l'algèbre. Dans la troisième partie de cette section, je détaille la structure de l'algèbre dans le cas  $n = 1$ . On utilise ici le fait qu'il existe deux racines (positives) non-nulles, une racine bosonique  $2h$  de multiplicité 1, et une racine fermionique  $h$  de multiplicité 2. C'est pourquoi

$$-R_0(H, H) = (2h)^2 - 2h^2 = 2h^2 = \text{STr } H^2 .$$

Ce qui donne  $R = \text{STr } (dq)^2 / 4$ . Exprimée avec le couplage  $f$ , l'équation du groupe de renormalisation à une boucle s'écrit

$$\frac{df}{d \ln \ell} = -f^2 . \quad (7.38)$$

On intègre ensuite cette équation de l'échelle du cut-off  $\ell_0$  à  $\ell$ , avec la condition initiale

$$f_0 \equiv f(\ell_0) = N^{-1} (1 - e^{-\pi/g})^{-1} ,$$

pour trouver que la constante de couplage  $f$  tend vers 0 comme l'inverse d'un logarithme :

$$f(\ell) = \frac{f_0}{1 + f_0 \ln(\ell/\ell_0)} . \quad (7.39)$$

Cela s'interprète par le fait que le système devient un métal parfait, de résistivité ( $\sim f$ ) tendant vers 0 dans la limite thermodynamique (c'est-à-dire à grande distance). Il en résulte que la symétrie brisée  $\text{OSp}(2n|2n)$  n'est *pas* restaurée, reste vraiment brisée, et la densité d'états sera assurément non-nulle en  $E = 0$ , comme on le prouvera sous peu.

### 7.9.2 Renormalisation de la densité d'états

Nous allons maintenant calculer la densité d'états locale en s'appuyant sur la formule (7.36). Nous allons suivre le flot du groupe de renormalisation du cut-off  $\ell_0$  (physiquement le libre parcours moyen effectif du système) jusqu'à la taille du système  $L$ , puis nous évaluerons l'intégrale fonctionnelle (7.36) dans l'approximation zéro-dimensionnelle. Le cut-off initial est pris pour la longueur associée à la masse engendrée dynamiquement  $\ell_0 \sim \mu^{-1}$ , qui établit l'échelle à partir de laquelle le régime "ballistique" des fermions libres atteint celui du modèle sigma non-linéaire, c'est-à-dire la diffusion. (On comprend que la réduction au modèle sigma non-linéaire est valide sur les échelles de longueur supérieures à  $1/\mu$  en revenant sur l'argument de bosonisation non-abélienne donné en début de section 7.7.)

On commence par ajouter un terme de source  $\lambda \int d^2x \text{Tr } q_{\text{FF}} \sigma_3$  à l'action fonctionnelle que l'on différencie par rapport à  $\lambda$  au point  $\lambda = 0$  (l'astuce déjà utilisée dans le chapitre 6). On tire de [47] que le paramètre  $\lambda$  obéit à l'équation du groupe de renormalisation

$$\frac{d\lambda}{d \ln \ell} = -f C_q \lambda ,$$

où  $C_q$  est le Casimir quadratique de  $\text{osp}(2n|2n)$ , normalisé selon la métrique  $-\text{STr } (dq)^2 / 8$  et évalué dans la représentation sous laquelle se transforme le champ  $q$ . Ce nombre se révèle négatif :

$$C_q = -1 .$$

Comme on va le constater, cela conduit à une divergence logarithmique dans la densité d'états à la limite thermodynamique.

On suppose que le système est de taille  $L$ . Dans notre cas précis,  $\lambda$  est proportionnel à  $\mu E$  (voir équation 7.35). Or  $\mu$ , bien que de dimension canonique la dimension d'une énergie, ne se renormalise pas. C'est pourquoi si l'on introduit la constante de couplage  $\epsilon(\ell)$ , de valeur initiale  $\epsilon_0 = \mu N E / 2g$  (l'analogue de  $\lambda$  pour notre système), son équation de flot prend un facteur linéaire supplémentaire :

$$\frac{d \ln \epsilon}{d \ln \ell} = 1 + \eta[f] = 1 + f .$$

En intégrant le flot de  $\epsilon(\ell)$  du cut-off microscopique  $\ell_0$  jusqu'à la taille du système  $L$ ,

$$\epsilon(\ell) = \epsilon(1) \exp \int_1^\ell f(\ell') d \ln \ell' ,$$

et en insérant la dépendance de la constante de couplage  $f$  (7.39) dans l'échelle, on obtient

$$\epsilon(\ell)/\epsilon(1) = \ell (1 + f_0 \ln(\ell)) .$$

Comme précédemment, on note la densité d'états locale par  $\nu(E, f, \Lambda, L)$ , où  $\Lambda$  est un cut-off pour le modèle sigma non-linéaire qu'il ne sera pas nécessaire de préciser. La dimension canonique de  $\nu$  provient de la masse engendrée dynamiquement  $\mu$  d'après (7.36). Comme elle ne se renormalise pas, il est préférable de conduire l'étude du groupe de renormalisation sur la quantité sans dimension  $\rho = \nu/\mu$ . L'analyse conduit à la dépendance dans l'échelle  $\ell$  suivante :

$$\rho(E, f, \Lambda, L) = \exp \left( \int_{f(1)}^{f(\ell)} df \frac{\eta[f]}{\beta[f]} \right) \rho(E \epsilon(\ell)/\epsilon_0, f(\ell), \Lambda/\ell, L) .$$

Une analyse dimensionnelle élémentaire donne à toute échelle  $\ell$  :

$$\rho(E, f, \Lambda, L) = \rho(E\ell, f, \Lambda\ell, L/\ell) .$$

Si bien que l'on obtient

$$\rho(\ell) \equiv \rho(E, f, \Lambda) = \exp \left( \int_{f(1)}^{f(\ell)} df \frac{\eta[f]}{\beta[f]} \right) \rho(E\ell \epsilon(\ell)/\epsilon_0, f(\ell), \Lambda, L/\ell) .$$

Le facteur d'échelle  $\ell$  peut croître jusqu'à la taille du système  $\ell = L/\ell_0$ , de sorte que

$$\rho(\ell) = (1 + f_0 \ln(L/\ell_0)) \rho(E L/\ell_0 \epsilon(L/\ell_0)/\epsilon_0, f(L/\ell_0), \Lambda, \ell_0) .$$

Pour une taille du système  $L$  suffisante,  $f(L/\ell_0)$  est proche de zéro. De plus la taille du système pour laquelle le  $\rho$  du membre de droite est évalué est  $\ell_0$ , le cut-off physique. De sorte que, pour une énergie initiale  $E$  suffisamment faible, on approche du régime des matrices aléatoires. Dans cette limite  $E \epsilon(L/\ell_0)/\epsilon_0$  devient grand et la densité d'états locale dans l'approximation des matrices aléatoires est constante (l'énergie devient beaucoup plus grande que l'écart moyen entre niveaux). On obtient donc à énergie nulle  $E = 0$  :

$$\nu(f_0, L) \propto \mu f_0 \ln(L/\ell_0) ,$$

qui est un résultat donné précédemment par Senthil et Fisher [121].

En fait, nous pouvons préciser notre résultat. Nous pouvons en effet évaluer l'expression  $\rho(E L/\ell_0, \epsilon(L/\ell_0)/\epsilon_0, f(L/\ell_0), \Lambda, \ell_0)$  dans l'approximation des matrices aléatoires. L'intégrale fonctionnelle peut alors être calculée en ne retenant que les modes spatialement homogènes  $q(x) = q_0$  (approximation des modes zéro) :

$$\nu(E, \ell_0) = \frac{\mu N}{2\pi g} \operatorname{Re} \int Dq_0 \operatorname{Tr}(q_{\text{FF}} \sigma_3) \exp \left( \frac{i\mu N E \ell_0^2}{2g} \operatorname{STr} q_0 \Sigma_3 \right) . \quad (7.40)$$

Cette expression ne dépend plus du couplage  $f$ . Le calcul de cette intégrale est le sujet de la prochaine partie de cette section. En utilisant le résultat donné plus bas (7.45), on a

$$\nu(E, f_0, L) = \bar{\nu}_L + \frac{\sin(2\pi \bar{\nu}_L E L^2)}{2\pi E L^2} , \quad (7.41)$$

où

$$\bar{\nu}_L = \frac{\mu N}{\pi g} (1 + f_0 \ln(L/\ell_0)) .$$

L'approximation des matrices aléatoires n'a de sens que si l'énergie  $E$  est suffisamment faible pour permettre au système d'explorer la totalité de son espace des phases, et en particulier de l'espace des positions de taille  $L$ . On traduit cela en supposant que la validité des résultats est limitée aux énergies basses  $E \ll E_c$ . La borne énergétique  $E_c$  est l'énergie de Thouless  $E_c = D/L^2$ , où  $D = g/(2\pi\mu N f_0)$  s'apparente à une constante de diffusion. Dans le régime opposé  $E \gg E_c$ , on peut utiliser la théorie des perturbations à une boucle qui fournit

$$\begin{aligned} \nu(E) &= \bar{\nu}_{\ell_0} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{1}{D k^2 - 2iE} \\ &= \bar{\nu}_{\ell_0} + \frac{1}{8\pi^2 D} \ln \left( 1 + \left( \frac{D}{2E \ell_0^2} \right)^2 \right) , \end{aligned} \quad (7.42)$$

où l'intégrale sur les moments a été coupée par le cut-off  $|k| < 1/\ell_0$ . La partie de la densité d'états qui dépend de l'énergie se comporte comme  $\ln(1/E)$  sur les échelles intermédiaires, et comme  $E^{-2}$  dans le régime asymptotique des grandes énergies  $E$ .

### 7.9.3 Limite des matrices aléatoires

Dans le cas  $n = 1$ , nous allons calculer la superintégrale

$$I(\epsilon) = \frac{1}{2} \int Dq \operatorname{Tr}(q_{\text{FF}} \sigma_3) \exp \frac{1}{4} i \epsilon \operatorname{STr} q \Sigma_3 ,$$

où  $Dq$  est la mesure invariante de Berezin sur le superspace symétrique  $\mathbf{X}_1$  (Section 7.5). La mesure est supposée normalisée  $\int Dq \exp \frac{1}{2} i \epsilon \operatorname{STr} q \Sigma_3 = 1$ . Cette intégrale est apparue dans (7.40), et s'identifie à la densité d'états dans la limite des systèmes de petite taille (régime ergodique ou limite universelle des matrices aléatoires). Il est possible de montrer que  $I(\epsilon)$  est semi-classiquement exacte, c'est-à-dire égale à sa valeur dans l'approximation du point-col (généralisation supersymétrique du théorème de Duistermaat-Heckman [41, 42]). Comme ce type d'analyse sort du cadre de ce travail, nous préférons emprunter ici une voie plus pédestre.

La première étape du calcul consiste à se doter d'une paramétrisation pour la supermatrice  $q$ . Je choisis ici de ne pas reproduire la paramétrisation de la publication, mais d'en donner une autre. Elle est une preuve, s'il en fallait une, que le calcul sur les supervariétés que l'on rencontre en physique des systèmes désordonnés, peut ne pas être bénin et qu'il n'est pas toujours possible de faire l'économie de la rigueur.

### Paramétrisation de la variété de point-col

Dans cette sous-section, on réorganise par commodité l'espace boson-fermion et particule-trou, de telle sorte que les supermultiplets s'écrivent maintenant

$$\phi = \begin{pmatrix} c \\ \psi_- \\ b \\ \psi_+ \end{pmatrix}.$$

La transposition orthosymplectique s'écrit donc maintenant :

$$\phi^t \equiv (b, \psi_+, -c, \psi_-). \quad (7.43)$$

On a  $\phi^t = -\phi^T \tau$ , où on se souvient que  $\tau = E_{BB} \otimes i\sigma_2 + E_{FF} \otimes \sigma_1$ .  $^T$  dénote ici la supertransposition standard. Il en résulte que la condition  $X = -X^t$  d'appartenance de  $X$  à l'algèbre complexe  $\text{osp}(2|2)$  s'écrit explicitement  $X^t = \tau X^T \tau^{-1} = -X$ .

J'utilise cette relation, ainsi que les contraintes de réalité sur l'espace symétrique  $\mathbf{X}_1$ , pour obtenir les éléments de la forme réelle associée. Elle peut être paramétrée par quatre nombres réels  $z = \theta - i\varphi$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  ainsi que quatre variables de Grassmann indépendantes  $\eta, \bar{\eta}, \xi$  et  $\bar{\xi}$  (il n'y aucune conjugaison complexe sur les variables de Grassmann). Un élément générique s'écrit :

$$X = \begin{pmatrix} i\alpha & \eta & 0 & 0 \\ \bar{\eta} & i\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\alpha & \bar{\eta} \\ 0 & 0 & -\eta & -i\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & z & -\xi \\ 0 & 0 & \xi & 0 \\ z^* & \bar{\xi} & 0 & 0 \\ \bar{\xi} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$z^*$  désigne le conjugué complexe de  $z$ . Cette représentation matricielle est en fait la même que celle donnée par les générateurs (7.37). J'ai écrit la matrice comme une somme de façon à mettre en évidence la décomposition de cette forme réelle de la superalgèbre de Lie  $\text{osp}(2|2)$  :  $\mathcal{G} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{M}$ . L'algèbre  $\mathcal{K}$  est l'algèbre de Lie du sous-groupe maximal compact de  $\text{OSp}(2|2)$ , alors que  $\mathcal{M}$  est un espace vectoriel isomorphe à l'espace  $\mathcal{T}_1$  tangent à  $\mathbf{X}_1$  en l'identité. On peut aussi dire que le complexifié de cet espace est tangent à l'espace symétrique complexe  $\text{OSp}(2|2)/\text{Gl}(1|1)$ . Les éléments de cet espace symétrique complexe peuvent être décomposés selon

$$T = kak^{-1}$$

où  $k \in \mathcal{K}$ .  $a$  est un élément de l'algèbre abélienne maximale  $\mathcal{A}$  incluse dans  $\mathcal{M}$  (parfois appelée algèbre de Cartan de l'espace symétrique). Les coordonnées polaires sont les variables qui paramètrent aussi bien  $k$  que  $a$ . Spécifiquement, les coordonnées radiales sur l'espace symétrique sont les coordonnées de  $a$ , alors que celles de  $k$  sont les coordonnées angulaires. Plusieurs des variables angulaires sont inutiles. En effet celles qui sont associées aux générateurs de  $\mathcal{A}$  et qui commutent avec  $\mathcal{K}$  ne contribuent pas dans  $kak^{-1}$ . Ici  $\mathcal{A}$  est engendrée par un unique générateur.

On suppose (c'est un choix) qu'il est associé à la coordonnée radiale  $\theta$ .  $\alpha$ ,  $\eta$  et  $\bar{\eta}$  sont les variables angulaires restantes. Les éléments de l'espace symétrique peuvent être paramétrés selon  $T = kak^{-1}$  avec

$$a = \exp(\theta E_{BB} \otimes \sigma_1) \quad \text{et} \quad k = \begin{pmatrix} \tilde{k} & 0 \\ 0 & (\tilde{k}^t)^{-1} \end{pmatrix},$$

où  $\tilde{k}$  est décomposé comme

$$\tilde{k} = \exp \begin{pmatrix} i\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ \bar{\eta} & 0 \end{pmatrix}.$$

### Mesure globale sur le superspace symétrique non-compact

$\mathbf{X}_1$  possède une supermesure invariante globale qui s'écrit

$$\omega = \frac{1}{2\pi} d\theta \wedge d\alpha \otimes \partial_{\eta} \partial_{\bar{\eta}} \frac{\sinh 2\theta}{2 \sinh^2 \theta} + \frac{1}{\pi} d\alpha \otimes \partial_{\eta} \partial_{\bar{\eta}} \circ \eta \bar{\eta} \partial_{\theta}.$$

Le poids qui multiplie le premier terme de la mesure (qui est un terme usuel) est donné par le produit des sinh des racines de  $\mathcal{A}$ . J'explique maintenant son origine : nous cherchons à calculer le Jacobien de l'application  $dadk \rightarrow [T^{-1}dT, \Sigma_3]$ . Pour cela, on utilise la décomposition suivante :

$$k^{-1}[T^{-1}dT, \Sigma_3]k = 2a^{-1}da + 2 \bigoplus_{\alpha > 0} \sinh(\alpha(\ln a)) \cdot [(k^{-1}dk)_{\alpha}, \Sigma_3] \quad (7.44)$$

où l'indice  $\alpha$  signifie que l'on a projeté sur l'espace propre de la racine  $\alpha$ . Trouver les valeurs spécifiques des racines revient à diagonaliser  $\text{Ad}(E_{BB} \otimes \sigma_1)^5$ , l'action adjointe du générateur associé à  $\theta$ . Pour  $\text{OSp}(2|2)/\text{Gl}(1|1)$ , on trouve une racine (positive) bosonique de longueur 2 et deux racines (positives) fermioniques de longueur 1. Le bérézinién peut alors être lu simplement sur la décomposition (7.44).

Le second terme de la mesure ne provient pas de la généralisation d'une mesure sur une variété usuelle à  $\mathbf{X}_1$ . Il apparaît parce que le superspace symétrique Riemannien est *non-compact*. C'est une manifestation subtile du fait qu'une supervariété CS n'est pas véritablement une variété mais une *cohomologie de faisceaux* [78, 148]. Cette anomalie peut être également vue comme un terme induit par l'action adjointe de  $k$  sur  $[T^{-1}dT, \Sigma_3]$ , qui translate la coordonnée non-compacte  $\theta$  avec un produit pair de variables fermioniques. Ce changement de variables se manifeste sur le bord de la "variété" non-compacte en engendrant l'anomalie. La forme générale d'une telle anomalie a été donnée par Rothstein [113].

### Calcul de l'intégrale $I(\epsilon)$

On indexe par 1 et 2 les deux parties connexes de la variété de point-col  $\mathbf{X}_1$ . L'intégrale s'écrit en pratique

$$I(\epsilon) = \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1,2} \int Dq_i \text{STr}((q_i)_{FF} \Sigma_3) e^{\frac{1}{4}i\epsilon \text{STr} q_i \Sigma_3}}{\sum_{i=1,2} \int Dq_i e^{\frac{1}{4}i\epsilon \text{STr} q_i \Sigma_3}}.$$

<sup>5</sup>On se souvient qu'il s'agit du générateur qui nous avait servi au calcul du tenseur de Ricci.

Le numérateur, comme le dénominateur, est donné par une somme sur les deux parties connexes. La première de celles-ci est décrite par l'orbite de  $q_0 = \Sigma_3$  et la seconde par l'orbite de  $q_0 = \sigma \Sigma_3$ , où  $\sigma = E_{BB} - E_{FF}$  est l'opérateur de superparité.

Nous devons calculer les quantités  $\text{STr}(q\Sigma_3)$  et  $\text{STr}(E_{FF}q\Sigma_3)$  en terme des coordonnées polaires pour les deux parties connexes. Pour la partie 1, on obtient facilement

$$\begin{cases} \text{STr}(q_1\Sigma_3) = \text{STr}(a^2) = 2(\cosh(2\theta) - 1) \\ \text{STr}(E_{FF}q_1\Sigma_3) = \text{STr}(E_{FF}k(a^2)k^{-1}) = -2 - 2(\cosh(2\theta) - 1)\eta\bar{\eta} . \end{cases}$$

Pour ce qui est de la partie 2, on préfère changer de base à l'intérieur de la supertrace, de façon à changer  $\sigma\Sigma_3$  en  $\Sigma_3$ , ce qui peut être réalisé en permutant les vecteurs de base dans l'espace FF. Ceci nous permet d'utiliser les résultats obtenus pour la partie 1. On en déduit

$$\begin{cases} \text{STr}(q_2\Sigma_3) = \text{STr}(E_{FF}ka^2k^{-1}) = 2(\cosh(2\theta) + 1) + 4(\cosh(2\theta) - 1)\eta\bar{\eta} \\ \text{STr}(E_{FF}q_2\Sigma_3) = -\text{STr}(E_{FF}ka^2k^{-1}) = 2 + 2(\cosh(2\theta) - 1)\eta\bar{\eta} , \end{cases}$$

où les coordonnées (variables d'intégration muettes) ne sont pas celles utilisées pour paramétrer les mêmes éléments que dans le calcul mené pour la partie 1, car on a changé de variables en changeant de base.

Une fois ces résultats connus, une intégration sur les variables de Grassmann  $\eta$  et  $\bar{\eta}$ , puis une intégration sur  $\theta$  peuvent être effectuées. La convergence des intégrales est assurée par la présence d'une petite partie imaginaire dans l'énergie  $\epsilon$ . Les deux parties contribuant au numérateur sont

$$N_1 = 2 - \frac{2}{i\epsilon} \quad \text{et} \quad N_2 = \frac{2}{i\epsilon} e^{-i\epsilon} .$$

Les deux parties du dénominateur qui ne sont autres que les fonctions de partition valent  $Z_1 = 1$  et  $Z_2 = 0$ , de telle sorte que la fonction de partition totale vaut 1 comme on s'y attendrait pour un système désordonné. Finalement, l'intégrale est égale à

$$I(\epsilon) = 1 - \frac{1}{i\epsilon} + \frac{e^{i\epsilon}}{i\epsilon} . \quad (7.45)$$

En prenant la partie réelle, on obtient

$$\text{Re } I(\epsilon) = 1 + \frac{\sin \epsilon}{\epsilon} ,$$

en accord avec le résultat connu [5] pour la densité d'états de l'ensemble gaussien de matrices aléatoires dans la classe D.

Pour clore ce calcul, on peut noter que la partie connexe 1 fournit la partie uniforme de la densité d'états alors que la partie connexe 2 donne la partie oscillante. Cela est cohérent avec l'analyse de M.R. Zirnbauer dans [149].

## 7.10 Supraconducteur d'onde $d$ désordonné

On peut maintenant revenir sur le chapitre 4. Nous avons montré quelle forme devait avoir le hamiltonien d'un liquide nodal désordonné de symétrie D. Notamment le hamiltonien de première quantification associé était donné par l'expression (4.3). Dans la sous-section 7.4.3 de ce présent chapitre nous avons remarqué son adéquation avec le problème du hamiltonien (7.17).

Il ne nous reste donc plus qu'à écrire la théorie des champs de basse énergie de ce problème. Pour commencer, on rétablit les unités de longueur appropriées sur chaque direction, de sorte que l'on obtient pour le point nodal  $(++)$ , le modèle sigma non-linéaire anisotropique ( $q = q^{(++)}$ )

$$S^{(++)} = -\frac{1}{8\pi} \int d^2x \text{STr} \left( \frac{v_x}{v_y} \partial_x q \partial_x q + \frac{v_y}{v_x} \partial_y q \partial_y q \right) + \frac{1}{16} \int d^2x \epsilon_{\mu\nu} \text{STr} q \partial_\mu q \partial_\nu q .$$

Le terme topologique ne dépendant d'aucune métrique, il ne peut être fonction du rapport  $v_x/v_y$ . La même action effective gouverne le point nodal  $(--)$ , définie sur le champ  $q^{(--)}$ . Les actions des deux autres nœuds sont obtenues en intervertissant  $\partial_x \leftrightarrow \partial_y$ , ce qui a pour conséquence d'inverser le signe du terme topologique.

On établit maintenant un désordre couplant tous les nœuds. Que va-t-il se passer pour les quatre théories des champs ? Les champs  $q^{(st)}$  des quatre nœuds  $(st)$  sont les modes de Goldstone issus de la brisure de la symétrie orthosymplectique. En l'absence de couplage inter-nœuds, les quatre secteurs décrits par les champs  $q^{(st)}$  sont découplés, et le groupe de symétrie consiste en quatre copies indépendantes de  $\text{OSp}(2n|2n)$ . La diffusion entre les nœuds projette cette symétrie sur le sous-groupe diagonal du produit, qui agit identiquement sur les quatre copies. On s'attend donc à ce que le couplage inter-nœuds verrouille les champs les uns sur les autres  $q^{(++)} = q^{(--)}$ ,  $q^{(+-)} = q^{(-+)} \equiv q$ , aux grandes échelles. Le champ effectif  $q$ , résultat de la projection, est le mode de Goldstone subsistant dû à la symétrie diagonale :  $\text{OSp}(2n|2n)$ . L'action effective est alors la somme des quatre contributions :

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}} &= S^{(++)} + S^{(--) + S^{(+-)} + S^{(-+)} \\ &= -\frac{v_1^2 + v_2^2}{4\pi v_1 v_2} \int d^2x \text{STr} \partial_\mu q \partial_\mu q . \end{aligned}$$

Dans l'expression finale, l'anisotropie apparue sur chacun des nœuds a disparu. Les quatre termes topologiques se sont annulés, comme on s'y attendait, puisque la symétrie de parité doit être globalement rétablie.

Nous sommes donc parvenus au modèle sigma non-linéaire pour la classe de symétrie D. Le modèle est dans un régime de couplage faible tant que l'anisotropie  $v_1/v_2$  est très petite ou très grande. Or c'est expérimentalement le cas ( $v_y \ll v_x$ ).

Le couplage  $f^{-1} = 4(v_1^2 + v_2^2)/v_1 v_2$  s'interprète comme la conductivité associée au transport de particules. Quelles sont ces particules ? Pour répondre à cette question, il faut remonter à la construction du hamiltonien de Majorana partant du hamiltonien de Bogoliubov-De Gennes (fin du chapitre 4). On comprend que les seules particules conservées sont celles associées au spineur de Nambu-Gorkov  $\Phi_\alpha$ , qui ne sont pas trivialement reliées aux électrons physiques dans le système. Suivant [121], nous pouvons alors utiliser une loi de Weiedemann-Franz qui relie le transport thermique au transport de particules. C'est-à-dire que la conductivité thermique du supraconducteur désordonné s'écrit  $\kappa \propto T \times \sigma \propto T \times f^{-1}$  où  $T$  est la température. (Une valeur non-nulle de l'angle topologique  $\theta$  aurait correspondu à une conductivité thermique transverse de type Hall.)

Le groupe de renormalisation pour la théorie faiblement couplée a été étudié dans la section 7.9. La théorie se renormalise vers le point fixe gaussien décrivant un métal (thermique) parfait. La densité d'états diverge de façon logarithmique en  $E = 0$  dans la limite thermodynamique.

## 7.11 Diagramme de phase et point fixe des fermions libres

Nous avons montré qu'en dimension 2, un modèle comptant  $N$  espèces de fermions, perturbés par du désordre de symétrie (générique) de classe  $D$  comporte une phase métallique. Nous avons donné des arguments forts en faveur de l'existence de cette phase pour  $N \gg 1$ , ou  $N = 2$  avec une forte anisotropie dans les célérités. Dans cette section on cherche à savoir [143, 121] où se trouve le point fixe des fermions libres par rapport à la phase métallique. Ce que l'on va montrer, c'est que le point fixe des fermions libres se situe sur la frontière séparant la phase métallique de la phase localisée. Pour cela nous allons encore utiliser l'extension supersymétrique de la bosonisation non-abélienne développée dans la section 7.7.

Notre point de départ est la densité lagrangienne  $\mathcal{L}_2$  dans (7.11), qui décrit  $N$  espèces de fermions de Dirac sans masse avec des fantômes bosoniques  $b$ - $c$ , faiblement perturbés par les opérateurs  $\Phi^{(\alpha)}$  avec les couplages  $g_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, 4$ ). Comme on l'a vu, le cas  $N = 1$  correspondant à une seule espèce de fermion est équivalent au modèle de WZW  $C|D$  au niveau  $k = 1$ , avec pour champ  $M$  et une action  $W[M]$ . On bosonise maintenant  $\mathcal{L}_2$ , en exploitant cette équivalence pour chacune des espèces *séparément* :

$$\phi_l^\dagger \bar{\partial} \phi_l + \bar{\phi}_l^\dagger \partial \bar{\phi}_l \rightarrow W[M_l] \quad (l = 1, \dots, N) .$$

Cette procédure peut être justifiée en introduisant des champs auxiliaires  $Q$  comme dans (7.18) pour transformer  $\mathcal{L}_2$  en une densité lagrangienne de  $N$  espèces bosonisées. Les perturbations  $\Phi^{(\alpha)}$  sont ensuite bosonisées en utilisant les règles établies dans la sous-section 7.7.4. On obtient alors

$$\begin{aligned} S'_2 &= \sum_{l=1}^N \left( W[M_l] - \frac{g_1 + g_3 + g_4}{(2\pi)^2 N} \int d^2x \text{STr } J_l \Sigma_3 \bar{J}_l \Sigma_3 \right) \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{k \neq l} \int d^2x \left( \frac{g_1}{\ell^2} \text{STr } M_k \Sigma_3 M_l \Sigma_3 + \frac{g_2}{\ell^2} \text{STr } M_k^{-1} M_l \right. \\ &\quad \left. + \frac{g_3}{\ell^2} (\text{STr } M_k \Sigma_3) (\text{STr } M_l \Sigma_3) - \frac{g_4}{(2\pi)^2} \text{STr } J_k \Sigma_3 \bar{J}_l \Sigma_3 \right) . \end{aligned}$$

La partie de la perturbation qui agit à l'intérieur d'une même espèce  $l$  a été isolée, puis bosonisée en utilisant les règles de bosonisation des courants :

$$(\bar{\phi}_l^\dagger \phi_l)^2 = -\text{STr}(\phi_l \phi_l^\dagger)(\bar{\phi}_l \bar{\phi}_l^\dagger) \rightarrow -(2\pi)^{-2} \text{STr } J_l \Sigma_3 \bar{J}_l \Sigma_3 .$$

On observe que puisque les champs  $J_l = M_l \partial M_l^{-1}$ ,  $\bar{J}_l = M_l^{-1} \bar{\partial} M_l$  et  $M_l$  ont pour dimensions conformes respectives  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ , et  $(1/2, 1/2)$ , la bosonisation a préservé la marginalité de la perturbation. Bien sûr les couplages ne seront pas marginaux à tous les ordres mais évolueront sous le flot du groupe de renormalisation d'une manière qui sera déterminée par les OPE des différentes perturbations. Si la bosonisation donne une image fidèle de la théorie originelle alors il n'est pas nécessaire de recalculer le flot. Ce dernier est identique à celui calculé plus tôt et donné par (7.13).

Pour aller plus loin, nous devons distinguer les cas. Supposons d'abord que  $N \geq 2$  et prenons pour constante de couplage nue  $g_1(\ell_0) = g_2(\ell_0)$ , et  $g_3(\ell_0) = g_4(\ell_0) = 0$ . L'intégration numérique du flot (7.13) indique que les couplages  $g_1, g_2$  croissent ( $g_1$  plus fortement que  $g_2$ ),  $g_3$  devient non-nulle et positive, et  $g_4$  prend des valeurs négatives mais respecte l'inégalité  $g_1 + g_4 \geq 0$  qui

est dictée par le caractère hermitique du hamiltonien désordonné. C'est ce qui semble se passer qualitativement pour tout  $N > 1$ , le cas  $N = 2$  inclus. Donc il existe une perturbation pertinente qui éloigne le système du point fixe des fermions libres. On fait l'hypothèse que le flot calculé à l'ordre d'une boucle demeure pertinent à tous les ordres du développement en perturbations.

On peut comprendre comment le système s'éloigne du point des fermions libres en interprétant la représentation bosonisée de l'action. D'abord, l'effet du terme  $\text{STr } M_k^{-1} M_l$  avec un couplage fort  $g_2$  est de verrouiller les champs, car la fonction  $\text{STr } M_k^{-1} M_l$  possède un minimum absolu en  $M_k^{-1} M_l = 1$  (voir expression (7.25)). Puis, dans l'espace des configurations "verrouillées"  $M_k = M_l \equiv M$  les termes en facteur de  $g_1$  et  $g_3$  deviennent  $\ell^{-2}(N - 1) (g_1 \text{STr}(M\Sigma_3)^2 + g_3 \text{STr}^2(M\Sigma_3))$ . Effectuant la décomposition  $M = T e^Y T$ , avec  $Y = +\Sigma_3 Y \Sigma_3$  et  $\Sigma_3 T \Sigma_3 = T^{-1}$ , on peut les écrire comme

$$g_1 \text{STr}(M\Sigma_3)^2 + g_3 \text{STr}^2(M\Sigma_3) = g_1 \text{STr } e^{2Y} + g_3 (\text{STr } e^Y \Sigma_3)^2 .$$

C'est un potentiel pour la variable  $Y$  qui, d'après (7.25), présente un minimum absolu en  $Y = 0$ . Dans le régime de couplage fort, on peut poser  $Y = 0$ . Ce faisant, et insérant  $M_l = T^2$  dans l'expression de l'action bosonisée  $S'_2$ , on obtient

$$S''_2 = NW[T^2] + \frac{g_1 + g_3 + Ng_4}{(2\pi)^2} \int d^2x \text{STr } \partial T^2 \Sigma_3 \bar{\partial} T^2 \Sigma_3 .$$

On pose  $q = T\Sigma_3 T^{-1}$  pour finalement identifier  $q$  avec le champ du modèle sigma non-linéaire. Ensuite, modifiant à peine les calculs de la section 7.7, on trouve que  $S''_2$  se réduit à l'action effective  $S_{\text{eff}}[q]$  donnée dans (7.23), avec les constantes de couplage

$$f = (N - (g_1 + g_3 + Ng_4)/\pi)^{-1} , \quad \theta = \pm N\pi . \quad (7.46)$$

Qu'advient-il de ce modèle sigma non-linéaire sous l'analyse du groupe de renormalisation ? Rappelons que pour le choix effectué, les couplages nus  $g_1$ ,  $g_2$  et  $g_3$  partent vers les valeurs positives alors que  $g_4$  devient négatif. En combinant linéairement les équations du flot (7.13) on trouve que

$$\dot{g}_1 + \dot{g}_3 + N\dot{g}_4 = -\frac{(g_1 + g_4)^2}{N} - \frac{(g_3 + g_4)^2}{N} - (1 - 2/N)g_4^2 - 2(g_1 + g_2)g_3 .$$

Le membre de droite de l'équation est négatif, de sorte que la combinaison  $g_1 + g_3 + Ng_4$  a une dérivée négative, pour tout  $N \geq 2$  (et ce même si, prises individuellement, les constantes de couplages sont croissantes.) C'est pourquoi, la constante de couplage du modèle sigma non-linéaire de (7.46) est d'ordre  $1/N$  et décroît sous le groupe de renormalisation. Il est donc raisonnable de penser que le modèle se trouve dans la phase métallique, où le flot se dirige vers le point fixe gaussien  $f = 0$ . Notre argument consiste à dire que le flot amène la densité lagrangienne  $\mathcal{L}_2$  (partant des couplages nus  $g_1 = g_2$  et  $g_3 = g_4 = 0$ ) dans la phase métallique. Cela reste vrai pour tous les couplages  $g_1 = g_2$  arbitrairement petits. Donc, aussi proche soit-on initialement du point fixe des fermions libres, le flot nous ramène vers la phase métallique. C'est-à-dire que pour  $N \geq 2$ , il existe une phase métallique et le point fixe des fermions libres se situe juste à sa frontière. C'est précisément ce que l'on avait soutenu dans l'introduction de cette section.

Pour  $N = 1$  la situation est qualitativement différente. La seule possibilité de désordre local dans la classe  $D$  est le désordre de masse. Si on suppose  $m_0 \equiv \langle m(x) \rangle = 0$ , il ne reste que le

couplage  $g_M$ , défini par (7.5). L'action bosonisée s'écrit simplement

$$S'_2 = W[M] - \frac{g_M}{(2\pi)^2} \int d^2x \text{STr } J \Sigma_3 \bar{J} \Sigma_3 .$$

C'est un modèle de WZW perturbé par une interaction courant-courant. En calculant directement l'OPE des courants du modèle  $J$  et  $\bar{J}$ , on trouve que la perturbation est marginalement non-pertinente dans le domaine (physique)  $g_M > 0$ , en accord avec l'équation de flot (7.14). C'est donc que le flot du groupe de renormalisation est attiré par le point fixe du modèle de WZW (les fermions libres) et le système, en ce sens, est *critique*.

Jusqu'à présent, on a supposé  $m_0 = 0$ . Lorsque le désordre de masse prend une valeur moyenne non-nulle, l'action bosonisée  $S'_2$  acquiert un terme supplémentaire

$$(im_0/\ell) \int d^2x \text{STr } M \Sigma_3 .$$

Ce terme est pertinent au point fixe du modèle de WZW, et sort le système du domaine critique. Une masse de Dirac finie  $m_0$  ouvre un gap près de  $E = 0$  dans le spectre énergétique du système pur, qui provoque par l'intermédiaire du désordre la localisation de tous les états. Un tel raisonnement ne s'applique que pour un  $g_M$  suffisamment petit (c'est manifeste en dimension 1, confère chapitre 6). Par conséquent le segment de ligne critique  $m_0 = 0$ ,  $g_M > 0$  sépare deux phases *isolantes*. Comme cela est bien connu depuis [87], la distinction entre les deux phases est de nature topologique. Si l'une des deux phases est pleinement isolante, disons  $m_0 < 0$  pour fixer les idées, l'autre ( $m_0 > 0$ ) peut être considérée comme la phase isolante d'un effet Hall quantique (en ce sens que la présence d'un bord ouvre la possibilité d'excitations de bord chirales qui induisent une réponse quantifiée de type effet Hall). Dans le langage du modèle d'Ising à deux dimensions avec des liens faiblement désordonnés, les deux phases correspondent aux phases paramagnétique et ferromagnétique. On obtient donc deux phases isolantes, et il n'apparaît aucune phase métallique, tout du moins pas dans le voisinage du point fixe des fermions libres, pour  $N = 1$ .

En rassemblant ces résultats, on parvient au schéma représenté sur la figure 7.2, donnant une image du diagramme de phase *au voisinage* du point fixe des fermions libres. Trois phases se rencontrent en ce point : isolante, isolante Hall et métallique. Les deux phases isolantes sont séparées par une ligne critique, décrite par le modèle de théorie des champs des fermions de Dirac en masse aléatoire, ou après bosonisation non-abélienne par le modèle  $C|D$  WZW $_{k=1}$  avec une perturbation courant-courant. La ligne se termine au point fixe des fermions libres et contrôle le comportement critique de la transition de phase de l'isolant à l'isolant Hall. La phase métallique existe pour  $N > 1$  espèces de fermions mais est absente dans le cas  $N = 1$ . Le modèle de théorie des champs dans le cas  $N > 1$  est le modèle sigma non-linéaire  $CI|DIII$  avec les constantes de couplage  $f$  et  $\theta$ . Il est raisonnable de penser [121] que dans cette phase la réponse Hall n'est pas quantifiée mais varie continûment avec l'angle  $\theta$ .

Un diagramme de phase similaire a été proposé par Senthil et Fisher [121]. Pour conclure, il est donc intéressant de mentionner les différences qui opposent notre analyse de la leur.

En fait, ces auteurs n'ont pas identifié le point tricritique de la classe  $D$  comme celui des fermions libres et par conséquent certaines de leurs lignes de flot sont inversées. Ensuite, contrairement à ce que l'on lit dans [121], nous ne pensons *pas* que le modèle sigma non-linéaire  $CI|DIII$  soit une description valable de la ligne critique séparant les deux phases isolantes (évidemment la différence de point de vue est assez considérable). Comme indiqué au début de la section 7.7,

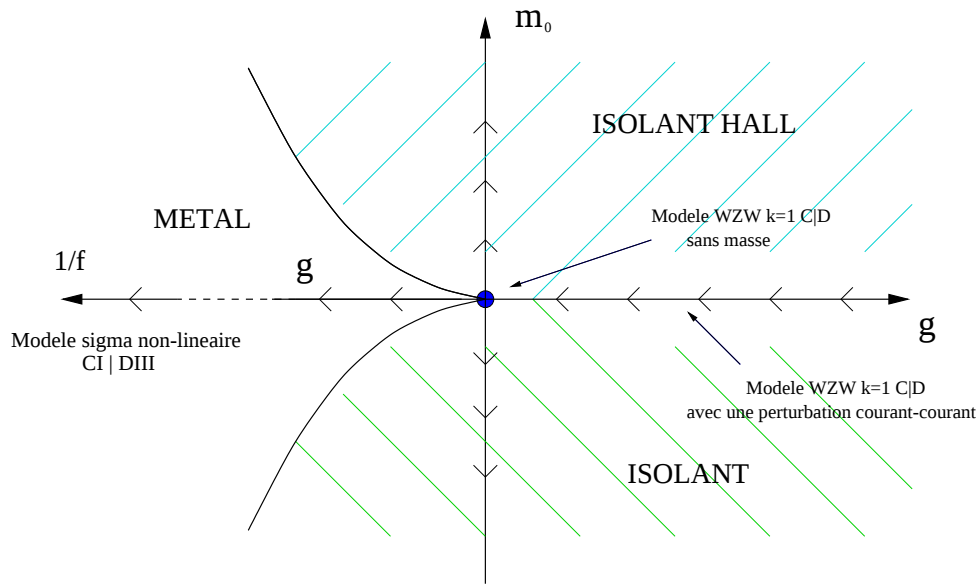


FIG. 7.2 – Structure schématique du diagramme de phase, près du point fixe des fermions libres pour la classe de symétrie  $D$  en dimension 2. La phase métallique n'existe que pour plus d'une seule espèce de fermions ( $N > 1$ ). Quelques unes des réalisations de théorie des champs sont indiquées.

le terme topologique du modèle est *trivial* dans le cas d'une seule réplique ( $n = 1$ ), qui contient toute l'information donnée par une seule fonction de Green à l'énergie  $E$  ou deux fonctions de Green à l'énergie  $E = 0$ . Il est alors difficile de croire qu'un terme topologique trivial puisse induire une transition de phase. Tout ce que l'on peut en dire est qu'il peut engendrer, pour un système avec bord, un courant de bord qui varie continûment dans la phase métallique.



## Annexe A

# Fonctions de corrélation de la chaîne de spins $s=1/2$ ouverte

Dans cet appendice, nous exposons les résultats du calcul des fonctions de corrélation de spin pour la chaîne de spins  $s=1/2$  avec bord. Nous n'avons pas tenu compte des corrections logarithmiques induites par les termes marginaux au point isotrope. Chaque corrélation contient une partie uniforme et une partie alternée. Nous avons, en deux points  $x_1$  et  $x_2$  arbitraires :

### A.1 Fonctions de corrélation en champ magnétique nul

$$\langle S^z(x_1, 0) S^z(x_2, t) \rangle_u \sim -\frac{K}{4\pi^2} \left[ \frac{(\pi T)^2}{\text{sh}^2(\pi T(-x_2 - x_1 + t))} + \frac{(\pi T)^2}{\text{sh}^2(\pi T(x_2 + x_1 + t))} + \frac{(\pi T)^2}{\text{sh}^2(\pi T(x_2 - x_1 + t))} + \frac{(\pi T)^2}{\text{sh}^2(\pi T(-x_2 + x_1 + t))} \right].$$

$$\begin{aligned} \langle S^z(x_1, 0) S^z(x_2, t) \rangle_a &\sim (-1)^{x_1 - x_2} \left[ \frac{(\pi T)^2}{\text{sh}(2\pi T x_1) \text{sh}(2\pi T x_2)} \right]^K \times \\ &\quad \left\{ \left[ \frac{\text{sh}(\pi T(-x_2 - x_1 + t)) \text{sh}(\pi T(x_2 + x_1 + t))}{\text{sh}(\pi T(x_2 - x_1 + t)) \text{sh}(\pi T(-x_2 + x_1 + t))} \right]^K \right. \\ &\quad \left. - \left[ \frac{\text{sh}(\pi T(x_2 - x_1 + t)) \text{sh}(\pi T(-x_2 + x_1 + t))}{\text{sh}(\pi T(-x_2 - x_1 + t)) \text{sh}(\pi T(x_2 + x_1 + t))} \right]^K \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle S^+(x_1, 0) S^-(x_2, t) \rangle_u &\sim \frac{(\pi T)^{2K + \frac{1}{2K}}}{[\text{sh}(2\pi T x_1) \text{sh}(2\pi T x_2)]^{K - \frac{1}{4K}}} \times \\ &\left\{ \frac{[\text{sh}(\pi T(x_2 + x_1 + t)) \text{sh}(\pi T(-x_2 - x_1 + t))]^{K - \frac{1}{4K}}}{[\text{sh}(\pi T(x_2 - x_1 + t)) \text{sh}(\pi T(-x_2 + x_1 + t))]^{K + \frac{1}{4K} - 1}} \right. \\ &\quad \left[ \frac{1}{\text{sh}^2(\pi T(-x_2 + x_1 + t))} + \frac{1}{\text{sh}^2(\pi T(x_2 - x_1 + t))} \right] \\ &+ \frac{[\text{sh}(\pi T(x_2 - x_1 + t)) \text{sh}(\pi T(-x_2 + x_1 + t))]^{K - \frac{1}{4K}}}{[\text{sh}(\pi T(x_2 + x_1 + t)) \text{sh}(\pi T(-x_2 - x_1 + t))]^{K + \frac{1}{4K} - 1}} \\ &\quad \left. \left[ \frac{1}{\text{sh}^2(\pi T(-x_2 - x_1 + t))} + \frac{1}{\text{sh}^2(\pi T(x_2 + x_1 + t))} \right] \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle S^+(x_1, 0) S^-(x_2, t) \rangle_a &\sim (-1)^{x_1 - x_2} \times \\ &\left[ \frac{(\pi T)^2 \text{sh}(\pi T 2x_1) \text{sh}(\pi T 2x_2)}{\text{sh}(\pi T(-x_2 - x_1 + t)) \text{sh}(\pi T(x_2 + x_1 + t)) \text{sh}(\pi T(x_2 - x_1 + t)) \text{sh}(\pi T(-x_2 + x_1 + t))} \right]^{\frac{1}{4K}}. \end{aligned}$$

Ces fonctions de corrélation sont valables tant que  $1/2 \leq K(\Delta) \leq 1$ . Pour obtenir les expressions au bord, il “suffit” de prendre  $x_1 = x_2 = a$ .

## A.2 Fonctions de corrélation en champ magnétique non-nul

Lorsque le champ magnétique est non-nul, les moments de Fermi sont fonction du champ appliqué. Les fonctions de corrélation de spin dépendent alors de l'aimantation des spins  $m = \langle S^z(x, t) \rangle$  qui résulte de l'application du champ. On notera que lorsqu'une incommensurabilité apparaît au point isotrope, les termes Umklapp ne contribuent plus, les corrections logarithmiques n'ont plus lieu d'être et les fonctions de corrélation ci-dessous sont asymptotiquement exactes, du moins tant que de nouveaux opérateurs marginaux ne sont pas mis en évidence. Nous avons, en deux points  $x_1$  et  $x_2$  arbitraires :

$$\begin{aligned} \langle S^z(x_1, 0) S^z(x_2, t) \rangle_u &\sim m^2 - \frac{K}{4\pi^2} \left[ \frac{(\pi T)^2}{\text{sh}^2(\pi T(-x_2 - x_1 + t))} + \frac{(\pi T)^2}{\text{sh}^2(\pi T(x_2 + x_1 + t))} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\pi T)^2}{\text{sh}^2(\pi T(x_2 - x_1 + t))} + \frac{(\pi T)^2}{\text{sh}^2(\pi T(-x_2 + x_1 + t))} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle S^z(x_1, 0) S^z(x_2, t) \rangle_a &\sim (-1)^{x_1 - x_2} \left[ \frac{(\pi T)^2}{\text{sh}(2\pi T x_1) \text{sh}(2\pi T x_2)} \right]^K \times \\ &\left\{ \cos(2\pi m(x_2 - x_1)) \left[ \frac{\text{sh}(\pi T(-x_2 - x_1 + t)) \text{sh}(\pi T(x_2 + x_1 + t))}{\text{sh}(\pi T(x_2 - x_1 + t)) \text{sh}(\pi T(-x_2 + x_1 + t))} \right]^K \right. \\ &\quad \left. - \cos(2\pi m(x_2 + x_1)) \left[ \frac{\text{sh}(\pi T(x_2 - x_1 + t)) \text{sh}(\pi T(-x_2 + x_1 + t))}{\text{sh}(\pi T(-x_2 - x_1 + t)) \text{sh}(\pi T(x_2 + x_1 + t))} \right]^K \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle S^+(x_1, 0)S^-(x_2, t) \rangle_u \sim & \frac{(\pi T)^{2K + \frac{1}{2K}}}{[\text{sh}(2\pi T x_1)\text{sh}(2\pi T x_2)]^{K - \frac{1}{4K}}} \times \\
& \left\{ \frac{[\text{sh}(\pi T(x_2 + x_1 + t))\text{sh}(\pi T(-x_2 - x_1 + t))]^{K - \frac{1}{4K}}}{[\text{sh}(\pi T(x_2 - x_1 + t))\text{sh}(\pi T(-x_2 + x_1 + t))]^{K + \frac{1}{4K} - 1}} \right. \\
& \left[ \frac{\exp(2\pi i m(x_2 - x_1))}{\text{sh}^2(\pi T(-x_2 + x_1 + t))} + \frac{\exp(-2\pi i m(x_2 - x_1))}{\text{sh}^2(\pi T(x_2 - x_1 + t))} \right] \\
& + \frac{[\text{sh}(\pi T(x_2 - x_1 + t))\text{sh}(\pi T(-x_2 + x_1 + t))]^{K - \frac{1}{4K}}}{[\text{sh}(\pi T(x_2 + x_1 + t))\text{sh}(\pi T(-x_2 - x_1 + t))]^{K + \frac{1}{4K} - 1}} \\
& \left. \left[ \frac{\exp(2\pi i m(x_2 + x_1))}{\text{sh}^2(\pi T(-x_2 - x_1 + t))} + \frac{\exp(-2\pi i m(x_2 + x_1))}{\text{sh}^2(\pi T(x_2 + x_1 + t))} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle S^+(x_1, 0)S^-(x_2, t) \rangle_a \sim & (-1)^{x_1 - x_2} \times \\
& \left[ \frac{(\pi T)^2 \text{sh}(2\pi T x_1) \text{sh}(2\pi T x_2)}{\text{sh}(\pi T(-x_2 - x_1 + t)) \text{sh}(\pi T(x_2 + x_1 + t)) \text{sh}(\pi T(x_2 - x_1 + t)) \text{sh}(\pi T(-x_2 + x_1 + t))} \right]^{\frac{1}{4K}}.
\end{aligned}$$

On prendra garde au fait que le rayon de compactification  $K(\Delta, h)$  possède une dépendance dans la valeur du champ magnétique  $h$ .



## Annexe B

# Calcul à l'ordre 2 de l'énergie du fondamental $\lambda(\epsilon)$

J'expose dans cet appendice un prolongement technique de la section 6.8 du chapitre 6. Il s'inspire d'une idée de C. Itzykson qu'il a employée sur le modèle de Halperin. Cette idée consiste à exploiter plus systématiquement le germe de l'énergie du fondamental du hamiltonien répliqué en  $n = 0$ . Elle permet de calculer le  $\lambda_1$  de  $\lambda(n) = n\lambda_0 + n^2\lambda_1 + O(n^3)$ . À l'instar de  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$  est une quantité pertinente pour la description du point désordonné  $n = 0$ . Toutefois, je n'ai pas été en mesure d'aller plus loin que l'ordre 2 dans l'indice des répliques  $n$ .

### B.1 Interprétation

À l'ordre 2, l'énergie du fondamental répliqué est

$$\lambda(n, \epsilon) = n\lambda_0(\epsilon) + n^2\lambda_1(\epsilon) + O(n^3).$$

Les efforts déployés dans le chapitre 6 étaient destinés au calcul exact de  $\lambda_0(\epsilon)$ . On va maintenant donner une expression pour  $\lambda_1(\epsilon)$ . On établira la preuve dans le cas du potentiel scalaire aléatoire, et on donnera également le résultat en masse aléatoire en omettant les détails.

Auparavant, je rappelle l'interprétation physique donnée par C. Itzykson dans [67] pour  $\lambda_1(\epsilon)$ . Si  $L$  est la taille du système, alors  $\nu_L(\epsilon)$  est le nombre de niveaux d'énergie du hamiltonien entre  $E$  et  $E + dE$ . La densité d'états est donc naturellement

$$\rho(\epsilon) = \lim_{L \rightarrow \infty} \langle \nu_L(\epsilon) \rangle.$$

On peut aussi former la corrélation densité d'états-densité d'états, ou en plus court DOS-DOS, à l'aide de  $\nu_L(\epsilon)$

$$\sigma(\epsilon_1, \epsilon_2) = \lim_{L \rightarrow \infty} (\langle \nu_L(\epsilon_1) \nu_L(\epsilon_2) \rangle - \langle \nu_L(\epsilon_1) \rangle \langle \nu_L(\epsilon_2) \rangle).$$

De ces définitions, on peut tirer sans difficultés majeures les expressions intégrales

$$\begin{aligned} \lambda_0(\epsilon) &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{i} \int d\epsilon' \rho(\epsilon') \ln(\epsilon' - \epsilon + i\eta), \\ \lambda_1(\epsilon) &= \lim_{\eta_i \rightarrow 0} \int d\epsilon_1 \int d\epsilon_2 \sigma(\epsilon_1, \epsilon_2) \ln(\epsilon_1 - \epsilon + i\eta_1) \ln(\epsilon_2 - \epsilon + i\eta_2). \end{aligned}$$

La première des deux formules n'est autre que la version intégrée de l'expression (6.9) du chapitre 6. Avec la seconde, on comprend que  $\lambda_1(\epsilon)$  est une sorte de valeur moyenne de la corrélation DOS-DOS, sans toutefois pouvoir aller beaucoup plus loin dans l'interprétation.

## B.2 Calcul de $\lambda_1(\epsilon)$ pour le modèle en potentiel scalaire aléatoire

L'équation aux valeurs propres que l'on peut écrire pour le fondamental du problème est pour  $k \geq 1$

$$\left[ \epsilon(k + \frac{n}{2}) + g(k + \frac{n}{2})^2 \right] \zeta_k - \frac{m}{2} [k\zeta_{k-1} - (k+n)\zeta_{k+1}] = \lambda(n)\zeta_k.$$

À l'ordre 2, on pose

$$\begin{cases} \lambda(n) = n\lambda_0 + n^2\lambda_1 + O(n^3) \\ \zeta_k(n) = \psi_k + n\chi_k + n^2\xi_k + O(n^3). \end{cases}$$

Injectant ces expressions dans l'équation aux valeurs propres, on en tire le système d'équations hiérarchiques

$$\begin{aligned} (\epsilon + gk)\psi_k + \frac{m}{2}(\psi_{k+1} - \psi_{k-1}) &= 0, \\ k \left[ (\epsilon + gk)\chi_k + \frac{m}{2}(\chi_{k+1} - \chi_{k-1}) \right] + \left( \frac{\epsilon}{2} + gk \right)\psi_k + \frac{m}{2}\psi_{k+1} &= \lambda_0\psi_k, \\ k \left[ (\epsilon + gk)\xi_k + \frac{m}{2}(\xi_{k+1} - \xi_{k-1}) \right] + \left( \frac{\epsilon}{2} + gk \right)\chi_k + \frac{m}{2}\chi_{k+1} + \frac{g}{4}\psi_k &= \lambda_0\chi_k + \lambda_1\psi_k, \end{aligned}$$

qui sont dans l'ordre les équations d'ordre 0, 1 et 2. La première de ces équations n'est valable que pour  $k \geq 1$ . Les deux autres peuvent être prolongées en  $k = 0$ . Le système qu'elles forment permet d'obtenir

$$\lambda_1 = \frac{g}{4} + \frac{m}{2} \frac{\chi_1\psi_0 - \psi_1\chi_0}{\psi_0^2}.$$

Si l'on note  $\Delta_k = \psi_k\chi_{k+1} - \chi_k\psi_{k+1}$ , il nous faut calculer  $\Delta_0$ . Pour cela, on multiplie maintenant l'équation d'ordre 0 par  $k\chi_k$ , l'équation d'ordre 1 par  $\psi_k$  et on soustrait les deux produits. On obtient pour différence, la relation de récurrence :

$$k \frac{m}{2} (\Delta_k + \Delta_{k-1}) + \psi_k^2 \left( \left( \frac{\epsilon}{2} + gk - \lambda_0 \right) + \frac{m}{2} \frac{\psi_{k+1}}{\psi_k} \right) = 0.$$

Or on se souvient que

$$\frac{\epsilon}{2} - \lambda_0 = -\frac{m}{2} \frac{\psi_1}{\psi_0},$$

ce qui mène à

$$k(\Delta_k + \Delta_{k-1}) + \frac{\psi_k}{\psi_0} (\psi_{k+1}\psi_0 - \psi_k\psi_1) + gk\psi_k^2 = 0,$$

valable pour  $k \geq 1$ . On somme alors cette identité de  $k = 1$  à l'infini en ayant multiplié chaque terme par un facteur  $(-1)^k$ . On obtient

$$-\Delta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \psi_k^2 \left( \frac{\psi_{k+1}}{\psi_k} - \frac{\psi_1}{\psi_0} + gk \right) = 0.$$

D'où l'expression finale

$$\lambda_1 = \frac{g}{4} + \frac{m}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \psi_k^2}{k \psi_0^2} \left( \frac{\psi_{k+1}}{\psi_k} - \frac{\psi_1}{\psi_0} + gk \right).$$

$\lambda_1$  ne dépend bien que de données déjà connues (les  $\psi_k$ ). Les parties réelle et imaginaire de  $\lambda_1$  ont été tracées sur la figure B.1.

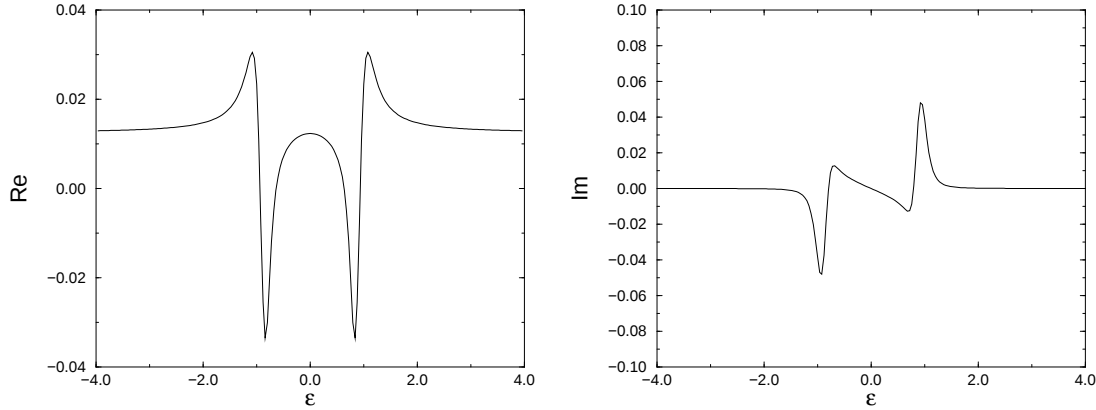


FIG. B.1 – Partie réelle et partie imaginaire de  $\lambda_1$  pour le modèle en potentiel électrique aléatoire avec  $g_z = 1.$  et  $m = 1.$

### B.2.1 Calcul de $\lambda_1(\epsilon)$ pour le modèle en masse aléatoire

Ce calcul peut également être mené dans le cas désordonné en masse. Le principe de la preuve demeure. Seuls les calculs sont un peu plus long et conduisent à :

$$\lambda_1 = -\frac{g \psi_2}{4 \psi_0} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \psi_k^2}{k \psi_0^2} \left( \frac{g}{2} k - \frac{m \psi_1}{2 \psi_0} + \frac{g \psi_2}{4 \psi_0} + \frac{m \psi_{k+1}}{2 \psi_k} - \frac{g}{2} (2k+1) \frac{\psi_{k+2}}{\psi_k} \right).$$

Les parties réelle et imaginaire de  $\lambda_1$  ont été tracées sur la figure B.2.

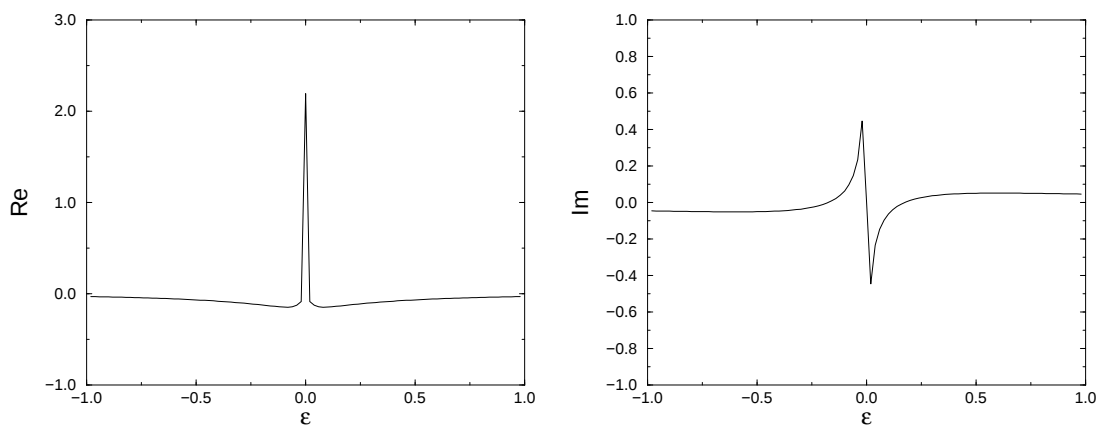


FIG. B.2 – Partie réelle et partie imaginaire de  $\lambda_1$  pour le modèle en masse aléatoire avec  $g_x = 1$ . et  $m = 0$ .

## Annexe C

# Classification de Cartan et classes de symétries

Ces tables sont directement inspirées (ou copiées) des articles de M.R. Zirnbauer et A. Altland [145, 5]. Ces auteurs ont étendu (et mis en forme) la classification des symétries que peuvent posséder les systèmes désordonnés. Cela est particulièrement utile pour des systèmes pouvant être décrits par la théorie des matrices aléatoires. Les propriétés spectrales de ces systèmes se déduisent alors formellement du calcul d'intégrales sur les superspaces symétriques donnés ci-dessous. La première des tables ci-dessous est la classification de Cartan des espaces symétriques. La deuxième table associe à une "symétrie" donnée du hamiltonien le superspace symétrique qui s'impose comme la symétrie effective du hamiltonien, une fois introduits les superpartenaires. La troisième table est un tableau synthétique. Il associe à une classe de symétrie (formelle) du hamiltonien, des propriétés de symétries physiques.

### C.1 Classification de Cartan des espaces symétriques

| Classe | Forme réelle non-compacte     | Forme réelle compacte        |
|--------|-------------------------------|------------------------------|
| A      | $Gl(n, \mathbb{C})/U(n)$      | $U(n)$                       |
| AI     | $Gl(n, \mathbb{R})/O(n)$      | $U(n)/O(n)$                  |
| AII    | $U^*(2n)/Sp(n)$               | $U(2n)/Sp(n)$                |
| AIII   | $U(p, q)/U(p) \times U(q)$    | $U(p+q)/U(p) \times U(q)$    |
| BDI    | $SO(p, q)/SO(p) \times SO(q)$ | $SO(p+q)/SO(p) \times SO(q)$ |
| CII    | $Sp(p, q)/Sp(p) \times Sp(q)$ | $Sp(p+q)/Sp(p) \times Sp(q)$ |
| BD     | $SO(n, \mathbb{C})/SO(n)$     | $SO(n)$                      |
| C      | $Sp(n, \mathbb{C})/Sp(n)$     | $Sp(n)$                      |
| CI     | $Sp(n, \mathbb{R})/U(n)$      | $Sp(n)/U(n)$                 |
| DIII   | $SO^*(2n)/U(n)$               | $SO(2n)/U(n)$                |

### C.2 Systèmes désordonnés et superspaces symétriques

| Système désordonné   | Symétrie du hamiltonien | Superespace symétrique                      | Base $M_B \times M_F$ |
|----------------------|-------------------------|---------------------------------------------|-----------------------|
| Wigner-Dyson GUE     | A                       | $Gl(m+p n+q)/Gl(m n) \times Gl(p q)$        | AIII $\times$ AIII    |
| Wigner-Dyson GOE     | AI                      | $OSp(m+p 2n+2q)/OSp(m 2n) \times OSp(p 2q)$ | BDI $\times$ CII      |
| Wigner-Dyson GSE     | AII                     | $OSp(m+p 2n+2q)/OSp(m 2n) \times OSp(p 2q)$ | CII $\times$ BDI      |
| GUE Chiral           | AIII                    | $Gl(m n)$                                   | A $\times$ A          |
| GOE Chiral           | BDI                     | $Gl(m 2n)/OSp(m 2n)$                        | AI $\times$ AII       |
| GSE Chiral           | CII                     | $Gl(m 2n)/OSp(m 2n)$                        | AII $\times$ AI       |
| Hybride Normal-Supra | C                       | $OSp(2m 2n)/Gl(m n)$                        | DIII $\times$ CI      |
| Hybride Normal-Supra | D                       | $OSp(2m 2n)/Gl(m n)$                        | CI $\times$ DIII      |
| Hybride Normal-Supra | CI                      | $OSp(m 2n)$                                 | BD $\times$ C         |
| Hybride Normal-Supra | DIII                    | $OSp(m 2n)$                                 | C $\times$ BD         |

| Système désordonné   | Symétrie du hamiltonien | Symétrie |              |        |                | Réalisation, exemples.                                                     |
|----------------------|-------------------------|----------|--------------|--------|----------------|----------------------------------------------------------------------------|
|                      |                         | T        | SU(2) - spin | Charge | Particule-trou |                                                                            |
| Wigner-Dyson GUE     | A                       | Non      |              | Oui    | Non            | Métal désordonné en champ magnétique                                       |
| Wigner-Dyson GOE     | AI                      | Oui      | Oui          | Oui    | Non            |                                                                            |
| Wigner-Dyson GSE     | AII                     | Oui      | Non          | Oui    | Non            | Métal désordonné avec des couplages spin-orbite                            |
| GUE Chiral           | AIII                    | Non      |              | Oui    | Oui            | QCD                                                                        |
| GOE Chiral           | BDI                     | Oui      | Oui          | Oui    | Oui            | QCD                                                                        |
| GSE Chiral           | CII                     | Oui      | Non          | Oui    | Oui            | QCD                                                                        |
| Hybride Normal-Supra | C                       | Non      | Oui          | Non    | Oui            | Quasi-paticules (onde s) dans un supraconducteur<br>Liquide nodal de spins |
| Hybride Normal-Supra | D                       | Non      | Non          | Non    | Oui            | Fermions de Dirac 2d en masse aléatoire<br>Liquide nodal thermique         |
| Hybride Normal-Supra | CI                      | Oui      | Oui          | Non    | Oui            |                                                                            |
| Hybride Normal-Supra | DIII                    | Oui      | Non          | Non    | Oui            |                                                                            |



## Annexe D

# Algèbre $\text{psu}(1, 1|2)$ et superspin

### D.1 Algèbre des générateurs constitutifs d'un superspin

Dans ce qui suit on parlera abusivement d'algèbre  $\text{psu}(1, 1|2)$  au lieu de ce qui sera *la représentation fondamentale* de cette même algèbre. Par représentation fondamentale, on entend celle qui agit dans l'espace de Fock qui est usuellement rencontrée dans les applications. Puisque les valeurs prises par les opérateurs *nombre-de-particules* sont entières, les représentations associées seront de nature discrètes (i.e. elles seront indexées par des paramètres discrets). On donnera donc directement une représentation en terme d'oscillateurs de l'algèbre  $\text{u}(1, 1|2)$  et  $\text{su}(1, 1|2)$ . L'opérateur de superspin présent dans le hamiltonien effectif des modèles sur réseau de l'effet Hall quantique entier et du métal chirale est

$$\mathcal{J}_i = \begin{pmatrix} a^\dagger a & a^\dagger f & a^\dagger b^\dagger & a^\dagger g^\dagger \\ f^\dagger a & f^\dagger f & f^\dagger b^\dagger & f^\dagger g^\dagger \\ -ba & -bf & -bb^\dagger & -bg^\dagger \\ ga & gf & gb^\dagger & gg^\dagger \end{pmatrix}.$$

Ses coefficients sont les générateurs de la superalgèbre de Lie  $\text{u}(1, 1|2)$ , dont on va tirer ceux de  $\text{psu}(1, 1|2)$ . Les conventions adoptées pour les différents oscillateurs sont

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad [b, b^\dagger] = 1 \quad \{f, f^\dagger\} = 1 \quad \{g, g^\dagger\} = 1.$$

Il est aisé de vérifier qu'on peut associer à l'algèbre  $\text{gl}(2|2)$  une représentation matricielle sous forme des générateurs  $E_{ab}$  qui correspondent aux vecteurs de la base canonique de l'algèbre des matrices et qui satisfont les relations de commutation :

$$[E_{ab}, E_{cd}] = \delta_{bc} E_{ad} - \delta_{ad} (-1)^{(|a|+|b|)(|c|+|d|)} E_{cb}.$$

Privée de  $\sum_i (-1)^{|i|} E_{ii}$ , les générateurs forment la représentation matricielle de l'algèbre  $\text{sl}(2|2)$ , et lorsque la forme réelle appropriée sera spécifiée de  $\text{su}(1, 1|2)$ .

La droite engendrée par le générateur  $\mathcal{C} = \text{Tr}(\mathcal{J}) = (n_a + n_f) - (n_b + n_g)$ , de représentation matricielle  $\sum_i E_{ii}$ , forme le centre de l'algèbre des éléments du superspin  $\mathcal{J}$ . Pour le calcul de la conductivité dans le réseau, il est nécessaire d'introduire autant de particules avancée que de particules retardées, et ce pour chaque site du réseau, donc chaque superspin. Le cas physique qui nous intéresse correspondra donc à  $\mathcal{C} = 0$ .

Comme on le verra par la suite, les seuls générateurs de Cartan qui apparaissent dans l'algèbre  $[\text{su}(1, 1|2), \text{su}(1, 1|2)]$  sont  $K_B^0 = \frac{1}{2}(1 + n_a + n_b)$  et  $K_F^0 = \frac{1}{2}(-1 + n_f + n_g)$  et  $\mathcal{C}$ . Le générateur de Cartan

$$\mathcal{I} = \text{STr } \mathcal{J} = n_a - n_b - n_f + n_g - 2,$$

qui possède une supertrace non-nulle (et qui s'écrit matriciellement  $\sum_i (-1)^{|i|} E_{ii}$ ) n'y apparaît pas. L'algèbre restreinte, c'est-à-dire  $\text{u}(1, 1|2)$  privée du générateur  $\mathcal{I}$  est notée logiquement  $\text{su}(1, 1|2)$ . Une représentation matricielle en a été donnée plus haut.

On pose alors  $\text{psu}(1, 1|2) = \text{su}(1, 1|2) / \mathcal{C}$ , qui est une algèbre simple, contrairement à  $\text{su}(1, 1|2)$ . C'est une forme réelle de la superalgèbre que Kac [70] (voir aussi [46]) note  $A(1, 1)$ , et qui se nomme également  $\text{psl}(2|2)$ .  $\text{su}(1, 1|2)$  apparaît donc comme une extension centrale de  $\text{psu}(1, 1|2)$ . Le coefficient accompagnant l'élément central (*la charge centrale*) est  $\mathcal{C}$ . Dans le cas physique qui nous intéresse, la charge centrale est nulle. En conséquence, dans tout ce qui suit, on supposera que  $n_a + n_f = n_b + n_g$ . Cela a pour conséquence, dans ce cas et seulement dans ce cas, que la projection de  $\text{su}(1, 1|2)$  sur  $\text{psu}(1, 1|2)$  est factorisable et que la représentation  $\text{psu}(1, 1|2)$  peut hériter de la représentation matricielle de  $\text{su}(1, 1|2)$ , elle-même issue de la représentation matricielle (et intuitive) de  $\text{u}(1, 1|2)$ . On notera  $\rho$  cette représentation matricielle.

## D.2 Description de l'algèbre $\text{psu}(1, 1|2)$

Cette algèbre comporte un certain nombre de dégénérescences que l'on mentionnera par la suite. On pose les notations suivantes pour les générateurs de  $\text{psu}(1, 1|2)$ . Pour commencer les générateurs bosoniques :

$$\begin{aligned} K_B^0 &= \frac{1}{2}(1 + n_a + n_b) & K_F^0 &= \frac{1}{2}(-1 + n_f + n_g) & K_B^+ &= b^\dagger a^\dagger & K_B^- &= ab \\ K_F^+ &= f^\dagger g^\dagger & K_F^- &= gf & J^+ &= f^\dagger b^\dagger & J^- &= fb, \end{aligned}$$

puis les générateurs fermioniques

$$\begin{aligned} J_{12}^+ &= a^\dagger f & J_{41}^+ &= a^\dagger g^\dagger & J_{34}^+ &= bg^\dagger \\ J_{12}^- &= f^\dagger a & J_{41}^- &= ga & J_{34}^- &= gb^\dagger. \end{aligned}$$

### D.2.1 Générateurs associées aux racines simples

On a les relations de commutation :

$$[K_B^+, J^+] = -J_{12}^+ \quad [K_F^+, J^+] = -J_{34}^+ \quad [K_B^+, J_{34}^+] = J_{41}^+ \quad [K_F^+, J_{12}^+] = -J_{41}^+,$$

donc les générateurs  $K_B^+$ ,  $K_F^+$  et  $J^+$  engendrent les autres opérateurs d'échelle.

### D.2.2 Générateurs de Cartan de $\text{psu}(1, 1|2)$

On a les relations de commutation :

$$[K_B^+, K_B^-] = -2K_B^0 \quad [K_F^+, K_F^-] = 2K_F^0 \quad \{J^+, J^-\} = K_B^0 - K_F^0,$$

mais aussi

$$\{J_{12}^+, J_{12}^-\} = K_B^0 + K_F^0 \quad \{J_{41}^+, J_{41}^-\} = K_B^0 - K_F^0 \quad \{J_{34}^+, J_{34}^-\} = K_B^0 + K_F^0$$

ce qui suggère que  $K_B^0$  et  $K_F^0$  sont les seuls générateurs de Cartan de l'algèbre  $A(1, 1)$ . Le rang de l'algèbre est donc 2.

Chaînes de Spins, Fermions de Dirac, et Systèmes Désordonnés

### D.2.3 Calcul des racines simples

$$\begin{aligned} [K_B^0, K_B^+] &= K_B^+ & [K_B^0, K_F^+] &= 0 & [K_B^0, J^+] &= \frac{1}{2}J^+ \\ [K_F^0, K_B^+] &= 0 & [K_F^0, K_F^+] &= K_F^+ & [K_F^0, J^+] &= \frac{1}{2}J^+. \end{aligned}$$

À  $K_B^+$  est donc associée la racine simple  $\alpha_B = (1, 0)$ . À  $K_F^+$  est associée la racine simple  $\alpha_F = (0, 1)$ . Et enfin à  $J^+$  est associée la racine simple  $\alpha = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ . De sorte que les racines simples sont liées par  $\alpha_B + 2\alpha + \alpha_F = 0$ . Les racines impaires (associées à des générateurs fermioniques) sont attachées à un espace de générateurs de dimension 2 et sont simultanément positives et négatives!

### D.2.4 Forme de Killing et produit scalaire invariant

À l'aide des relations de commutation qui précèdent, il est aisé de calculer la forme de Killing de  $\mathfrak{psu}(1,1|2)$  définie par  $\mathcal{K} = \text{STr}(\text{ad} \circ \text{ad})$ . Et de s'apercevoir qu'elle est nulle. Toutefois,  $(X, Y) \rightarrow \text{STr}(\rho(X)\rho(Y))$  peut avantageusement remplacer la forme de Killing et servir de produit scalaire invariant.

On pourra consulter [15], ou revenir à [46] pour obtenir davantage de précisions.



# Listes des publications

Ci-dessous sont succinctement décrits, par ordre chronologique, les quatre articles qui forment le support de cette thèse.

– *Some spectral properties of the one-dimensional disordered Dirac equation*

Nous étudions les propriétés spectrales d'un hamiltonien de Dirac unidimensionnel dans divers types de désordre. Nous utilisons la technique des répliques pour calculer la densité d'états ainsi que la longueur de localisation typique d'une particule de Dirac. On montre que ces quantités peuvent être obtenues de façon exacte en tout type de désordre, pourvu que la distribution du désordre suive une loi de bruit blanc gaussien. En plus des cas n'impliquant qu'un seul type de désordre, nous étudions un cas mixte où la singularité de Dyson est détruite. Nous clarifions également l'approche supersymétrique du problème, même si elle se révèle moins efficace que les répliques pour les quantités que nous calculons. Nous montrons que la plus petite algèbre dynamique du formalisme hamiltonien est  $u(1, 1)$ , plutôt que  $u(n, n)$  pour les répliques ou  $su(1, 1|2)$  pour la version supersymétrique. Finalement, nous discutons des symétries entre les désordres, et mettons en évidence une relation non-triviale entre le désordre scalaire et le désordre en masse aléatoire.

Référence : **M. Bocquet, Nuclear Physics B 546 [FS] (1999) 621-646**

– *Generalized nonlinear sigma model approach to alternating spin chains and ladders*

Nous généralisons l'approche des chaînes de spins quantiques antiferromagnétiques, par un modèle sigma non-linéaire aux cas qui incluent des liens ferromagnétiques. Lorsque ceux-ci sont assez fort, le fondamental classique n'est plus l'ordre de Néel et nous présentons une extension du formalisme connu adaptée à cette situation. Nous étudions la chaîne alternant les liens ferro et antiferro introduite par Hida. L'interpolation régulière entre les dimères découplés et la phase de Haldane est reproduite semi-quantitativement. Nous étudions également une échelle de spins avec des couplages diagonaux qui interpole entre la phase gappée de l'échelle de spins à deux montants et la phase de Haldane de la chaîne de spins  $s=1$ . À nouveau, nous montrons qu'il y a un bon accord entre les données DMRG et nos résultats analytiques.

Référence : **M. Bocquet, T. Jolicœur, The European Journal of Physics B 14 (2000) 47-52**

– *Edge Logarithm Corrections Probed by Impurity NMR*

Les chaînes de spins quantiques semi-infinies possèdent des corrélations de spins près du bord en loi de puissance qui sont données par les théories conformes avec bord. Nous montrons que les mesures de RMN sur des impuretés sans spin, qui ont pour effet de casser une chaîne de spins, mènent à la donnée du taux de relaxation spin-réseau  $1/T_1^{\text{bord}}$  dont la dépendance en température est un test direct des exposants anormaux aux bords. Nous montrons que  $1/T_1^{\text{bord}} \propto T \ln^2 T$ , dans le cas d'une chaîne de spins antiferromagnétique avec bord, au lieu de  $\ln^{1/2} T$  dans le volume. Nous montrons enfin que dans le cas d'un conducteur décrit par un liquide de Luttinger, une mesure similaire mène à un taux de relaxation  $1/T_1^{\text{bord}} \propto T$ , indépendant de l'exposant anormal  $K_\rho$ .

Référence : **V. Brunel, M. Bocquet, T. Jolicœur, Physical Review Letters 83 (1999) 2821-2824**

– *Disordered 2d quasiparticles in class D : Dirac Fermions with random mass, and dirty superconductors*

Les hamiltoniens décrivant la physique de quasi-particules sans interaction dans un milieu désordonné, dont les exemples les plus marquants sont les supraconducteurs désordonnés avec brisure de la symétrie de renversement du temps et de la symétrie de rotation du spin, ou encore le modèle d'Ising en liens aléatoires, appartiennent à la classe de symétrie D. En dimension 2, les systèmes désordonnés de ce type pourraient posséder une phase métallique, au delà des phases isolantes attendues en fort désordre. Nous montrons que la phase métallique provient de la perturbation pertinente d'un modèle de WZW décrivant le point fixe des fermions de Majorana libres. Le diagramme de phase qui en résulte contient la phase métallique qui est située en dehors de l'espace des paramètres du diagramme de phase du modèle d'Ising, corrigeant en cela les travaux de Ziegler, puis Senthil et Fisher. Dans la phase métallique, la densité d'états est non-nulle à l'énergie nulle. Cette propriété est étudiée dans le cadre d'un système de N espèces de Fermions de Dirac, au moyen d'un modèle sigma non-linéaire. Nous calculons la densité d'états d'un système de taille finie, dans la limite ergodique, et obtenons la prédiction du modèle de matrices aléatoires en classe D. Nous montrons que du désordre sous forme de vortex, qui est une perturbation pertinente au point des fermions libres, mène à une nouvelle classe de symétrie appelée BD. Sa signature est l'apparition d'une singularité dans la densité d'états à l'énergie nulle, qui reflète la présence de modes zéro fermioniques.

Référence : **M. Bocquet, D. Serban, M.R. Zirnbauer, Nuclear Physics B 578 [FS] (2000) 628-680**

# Bibliographie

- [1] I. AFFLECK. *J. Phys. A*, **31**, 4573, 1998.
- [2] I. AFFLECK, D. GEPNER, H.J. SCHULZ, et T. ZIMAN. *J. Phys. A.*, **22**, 511, 1989.
- [3] I. AFFLECK et F.D.M. HALDANE. *Phys. Rev. B*, **36**, 5291, 1987.
- [4] I. AFFLECK, T. KENNEDY, E.H. LIEB, et H. TASAKI. *Phys. Rev. Lett.*, **59**, 799, 1987.
- [5] A. ALTLAND et M.R. ZIRNBAUER. *Phys. Rev. B*, **55**, 1142, 1997.
- [6] D.P. AROVAS, A. AUERBACH, et F.D.M. HALDANE. *Phys. Rev. Lett*, **60**, 531, 1988.
- [7] A. AUERBACH. *Interacting Electrons and Quantum Magnetism*. Graduate Texts in Contemporary Physics, Springer-Verlag, 1994.
- [8] A.B. BALENTEKIN, H.A. SCHMITT, et P. HALSE. *J. Math. Phys.*, **30**, 274, 1989.
- [9] L. BALENTS et M.P.A. FISHER. *Phys. Rev. B*, **56**, 12970, 1997.
- [10] L. BALENTS, M.P.A. FISHER, et M.R. ZIRNBAUER. *Nucl. Phys. B [FS]*, **483**, 601, 1997.
- [11] V. BARZYKIN. Temperature-dependent logarithmic corrections in the spin-1/2 Heisenberg chain. *Preprint cond-mat/9904250*, 1999.
- [12] F.A. BEREZIN. *Introduction to Superalgebra*. Reidel, Dordrecht, 1987.
- [13] V. BEREZINSKII. *Sov. Phys. JETP*, **38**, 620, 1974.
- [14] D. BERNARD. (Perturbed) conformal field theory applied to 2d disordered systems : an introduction. *preprint hep-th/9509137*, 1995.
- [15] M. BERSHADSKY, S. ZHUKOV, et A. VAINTROB. PSL( $n|n$ ) Sigma Model as a Conformal Field Theory. *preprint hep-th/9902180*, 1999.
- [16] G. BEUCHELT. Dirac Fermions in 2+1 Dimensions with Random Mass Distribution. Master's thesis, Université de Cologne, 1997.
- [17] M.J. BHASEEN, I.I. KOGAN, O.A. SOLOVIEV, N. TANIGUCHI, et TSVELIK A.M. Towards a Field Theory of the Plateau Transitions in the Integer Quantum Hall Effect. *preprint cond-mat/9912060*, 1999.
- [18] M. BOCQUET. *Unpublished*, 1999.
- [19] J-P. BOUCHAUD, A. COMTET, A. GEORGES, et P. LE DOUSSAL. *Europhys. Lett.*, **3**, 653, 1987.
- [20] J-P. BOUCHAUD, A. COMTET, A. GEORGES, et P. LE DOUSSAL. *Ann. Phys. (N.Y.)*, **201**, 285–341, 1990.
- [21] V. BRUNEL. *Systèmes de spins quantiques unidimensionnels. Désordre et impuretés*. Thèse de doctorat, Université Paris XI, 1999.

- [22] R. BUNDSCHUH, C. CASSANELLO, D. SERBAN, et M.R. ZIRNBAUER. *Phys. Rev. B*, **59**, 4382, 1999.
- [23] J. CARDY. *Nucl. Phys. B*, **240**, 514, 1984.
- [24] J. CARDY. *Nucl. Phys. B*, **270**, 186, 1986.
- [25] J. CARDY. *Nucl. Phys. B*, **275**, 200, 1986.
- [26] J.T. CHALKER. *Physica A*, **167**, 253, 1990.
- [27] J.T. CHALKER et P.D. CODDINGTON. *J. Phys. C.*, **21**, 2665, 1988.
- [28] J.T. CHALKER et G.J. DANIELL. *Phys. Rev. Lett.*, **61**, 593, 1988.
- [29] J.T. CHALKER et A. DOHMEN. *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 4496, 1995.
- [30] J.T. CHALKER et C.-M. HO. *Phys. Rev. B.*, **54**, 8708, 1996.
- [31] C. CHAMON, C. MUDRY, et X.-G.W. WEN. *Phys. Rev. B*, **53**, R7638, 1996.
- [32] A. CHHABRA et R.V. JENSEN. *Phys. Rev. Lett.*, **62**, 1327–1330, 1989.
- [33] R. CHITRA et T. GIAMARCHI. *Phys. Rev. B*, **55**, 5816, 1997.
- [34] S. CHO et M.P.A. FISHER. *Phys. Rev. B*, **55**, 1025, 1997.
- [35] S. COLEMAN. *Comm. Math. Phys.*, **31**, 259, 1973.
- [36] A. COMTET, A. GEORGES, et P. LE DOUSSAL. *Phys. Lett. B*, **208**, 487, 1988.
- [37] S. DELL'ARINGA, E. ERCOLESSI, G. MORANDI, et G. SIERRA. *Phys. Rev. Lett*, **77**, 3443, 1996.
- [38] P. DI FRANCESCO, P. MATHIEU, et D. SÉNÉCHAL. *Conformal Field Theory*, chapter 15. Springer-Verlag, 1997.
- [39] P. DI VECCHIA, B. DURHUUS, et J.L. PETERSEN. *Phys. Lett. B*, **144**, 245, 1984.
- [40] V.S. DOTSSENKO et V.S. DOTSSENKO. *Adv. Phys.*, **32**, 129, 1983.
- [41] J.J. DUISTERMAAT et G. HECKMAN. *Inv. Math.*, **69**, 259, 1982.
- [42] J.J. DUISTERMAAT et G. HECKMAN. *Inv. Math.*, **72**, 153, 1983.
- [43] K.B. EFETOV. *Adv. Phys.*, **32**, 53, 1983.
- [44] S. EGGERT, I. AFFLECK, et M. TAKAHASHI. *Phys. Rev. Lett.*, **73**, 332, 1994.
- [45] D.S. FISHER. *Phys. Rev. B*, **50**, 3799–3821, 1994.
- [46] L. FRAPPAT, P. SORBA, et A. SCIARRINO. Dictionary on Lie Superalgebras. *hep-th/9607161*, 1996.
- [47] D.H. FRIEDAN. *Ann. Phys.*, **163**, 318, 1985.
- [48] T. FUKUI et N. KAWAKAMI. Alternating spin chains with singlet ground states. *Preprint cond-mat/9707148*, 1997.
- [49] T. FUKUI et N. KAWAKAMI. Alternating-Spin Ladders. *Preprint cond-mat/9710082*, 1997.
- [50] R. GILMORE. *Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications*. Wiley-Interscience, 1974.
- [51] O. GOLINELLI, T. JOLICOEUR, et R. LACAZE. *Phys. Rev. B*, **50**, 3037, 1994.
- [52] A.A. GOLUB et Y.M. CHUMAKOV. *Sov. J. Low. Temp.*, **5**, 427, 1980.
- [53] M.J. GRAF, A.V. BALATSKY, et J.A. SAULS. Local time-reversal symmetry breaking in  $d_{x^2-y^2}$  superconductors. *preprint cond-mat/9907300*, 1999.

- [54] I.A. GRUZBERG, N. READ, et S. SACHDEV. *Phys. Rev. B*, **55**, 10593, 1996.
- [55] I.A. GRUZBERG, N. READ, et S. SACHDEV. *Phys. Rev. B*, **56**, 13218, 1996.
- [56] MIL'NIKOV G.V. et SOKOLOV M. *JETP Lett.*, **48**, 536, 1988.
- [57] F.D.M. HALDANE. *Phys. Rev. Lett*, **93A**, 464, 1983.
- [58] F.D.M. HALDANE. *Phys. Rev. Lett*, **50**, 1153, 1983.
- [59] B.I. HALPERIN. *Phys. Rev. B*, **25**, 2185, 1982.
- [60] S. HELGASON. *Differential geometry, Lie groups an symmetric spaces*. Academic Press, New York, 1978.
- [61] K. HIDA. *Phys. Rev. B*, **45**, 2207, 1992.
- [62] K. HIDA. *Phys. Rev. B*, **46**, 8268, 1992.
- [63] K. HIDA. *J. Phys. Soc. Jpn*, **62**, 439, 1463, 1466 et 3357, 1993.
- [64] K. HIDA. *J. Phys. Soc. Jpn*, **63**, 2514, 1994.
- [65] B. HUCKESTEIN. *Europhys. Lett.*, **20**, 451–456, 1992.
- [66] B. HUCKESTEIN, B. KRAMER, et L. SCHWEITZER. *Surf. Sci.*, **263**, 125–128, 1992.
- [67] C. ITZYKSON et J.-M. DROUFFE. *Statistical Field Theory*, volume 2, chapter 9. Cambridge university Press, 1989.
- [68] M. JANSSEN. *Int. J. Mod. Phys. B*, **8**, 943, 1994.
- [69] T. JOLICOEUR et O. GOLINELLI. *Phys. Rev. B*, **50**, 9265, 1994.
- [70] V. KAC. *Adv. Math.*, **26**, 8–96, 1977.
- [71] T. KENNEDY. *J. Phys. Condens. Matter*, **2**, 5737, 1990.
- [72] T. KENNEDY et H. TASAKI. *Phys. Rev. B*, **45**, 304, 1992.
- [73] R. KLESSE et M. METZLER. *Europhys. Lett.*, **32**, 229–234, 1996.
- [74] V.G. KNIZHNIK et ZAMOLODCHIKOV A.B. *Nucl. Phys. B*, **247**, 83, 1984.
- [75] A. KOGA, S. KUMADA, N. KAWAKAMI, et T. FUKUI. Mixed-Spin Ladders and Plaquette Spin Chains. *Preprint cond-mat/9711061*, 1997.
- [76] M. KOHOTO et H. TASAKI. *Phys. Rev. B*, **46**, 3486, 1992.
- [77] D.-H. LEE. *Phys. Rev. B*, **50**, 10788, 1994.
- [78] D.A. LEITES. *Russian Math. Surveys*, **35**, 1–64, 1980.
- [79] H. LEVINE, S. LIBBY, et A. PRUISKEN. *Phys. Rev. Lett*, **51**, 1915, 1983.
- [80] L.P. LEVY. *Magnétisme et supraconductivité*. Savoirs Actuels, Éditions du CNRS, 1997.
- [81] E. LIEB et D.C. MATTIS. *J. Math. Phys.*, **3**, 749, 1962.
- [82] E. LIEB, D.C. MATTIS, et T.D. SCHULTZ. *Ann. Phys.*, **16**, 407, 1961.
- [83] H.-H. LIN. *Phys. Rev. B*, **58**, 4963–4971, 1998.
- [84] J.M. LUCK. *J. Stat. Phys.*, **72**, 417–458, 1993.
- [85] A.W.W. LUDWIG. *Phys. Rev. Lett.*, **61**, 2388, 1987.
- [86] A.W.W. LUDWIG. *Nucl. Phys. B.*, **330**, 639, 1990.
- [87] A.W.W. LUDWIG, M.P.A. FISHER, R. SHANKAR, et G. GRINSTEIN. *Phys. Rev. B*, **50**, 7526, 1994.

- [88] S. LUKYANOV. *Nucl. Phys. B*, **522**, 533, 1998.
- [89] S. LUKYANOV et A. ZAMALODCHIKOV. *Nucl. Phys. B*, **493**, 571, 1997.
- [90] W. MARSHALL. *Proc. R. Soc. London Ser.A*, **232**, 48, 1955.
- [91] J.B. MARSTON et S.W. TSAI. *Phys. Rev. Lett*, **82**, 4906, 1999.
- [92] R.H. MCKENZIE. *Phys. Rev. Lett.*, **77**, 4804, 1996.
- [93] N.D. MERMIN et H. WAGNER. *Phys. Rev. Lett.*, **17**, 1133, 1966.
- [94] S. MIYASHITA et S. YAMAMOTO. *Phys. Rev. B*, **48**, 913, 1993.
- [95] T. MORIYA. *Prog. Theor. Phys.*, **16**, 23, 1956.
- [96] T. MORIYA. *Prog. Theor. Phys.*, **28**, 371, 1962.
- [97] N. MOTOYAMA, H. EISAKI, et S. UCHIDA. *Phys. Rev. Lett.*, **76**, 3212, 1996.
- [98] C. MUDRY, C. CHAMON, et X.-G.W. WEN. *Nucl. Phys. B [FS]*, **466**, 283–443, 1996.
- [99] A.A. NERSESYAN et A. LUTHER. *Phys. Rev. B*, **50**, 309, 1994.
- [100] T. NISHIKAWA, K. MASAYA, M. KANADA, T. FUKAMACHI, K. KODAMA, H. HARASHINA, et M. SATO. *J. Phys. Soc. Jpn*, **67**, 57, 1998.
- [101] T. NISHIKAWA, K. MASAYA, M. KANADA, T. FUKAMACHI, K. KODAMA, H. HARASHINA, et M. SATO. *J. Phys. Soc. Jpn*, **67**, 1988, 1998.
- [102] H. NISHIMORI. *Prog. Theor. Phys.*, **66**, 1169, 1981.
- [103] A.A. OVCHINNIKOV et N.S. ERIKHMANN. *Sov. Phys. JETP*, **46**, 340, 1977.
- [104] M.A. PAALANEN, D.C. TSUI, et A.C. GOSSARD. *Phys. Rev. B*, **25**, 5566, 1982.
- [105] C.H. PENNINGTON et C.P. SLICHTER. *Phys. Rev. Lett*, **66**, 381, 1991.
- [106] A.M. POLYAKOV. *Gauge Fields and Strings*. Hardwood academic publishers, 1987.
- [107] A.M. POLYAKOV et P.B. WIEGMANN. *Phys. Lett. B*, **141**, 223, 1984.
- [108] A.M. POLYAKOV et P.B. WIEGMANN. *Nucl. Phys. B*, **238**, 61, 1984.
- [109] W. POOK et M. JANSSEN. *Z Phys. B*, **82**, 295, 1991.
- [110] A. PRUISKEN. *Nucl. Phys. B [FS]*, **235**, 277, 1984.
- [111] N. READ et S. SACHDEV. *Nucl. Phys. B [FS]*, **316**, 609–640, 1989.
- [112] J. RIBAS, M. MONTFORT, B.K. GHOSH, X. SOLANS, et M. FONT-BARDIA. *J.Chem.Soc. Chem. Commun.*, page 2375, 1995.
- [113] M.J. ROTHSTEIN. *Trans.Am.Math.Soc.*, **299**, 387, 1987.
- [114] S. SACHDEV. *Phys. Rev. B*, **50**, 13006, 1994.
- [115] A.W. SANDVIK. *Phys. Rev. B*, **52**, 9831, 1995.
- [116] M. SCHEUNERT, W. NAHM, et V. RITTENBERG. *J. Math. Phys.*, **18**, 146, 1977.
- [117] U. SCHOLLWÖCK. *Le groupe de renormalisation numérique dans l'espace réel : application aux chaînes de spins quantiques*. Thèse de doctorat, Université Paris XI, 1995.
- [118] U. SCHOLLWÖCK et T. JOLICOEUR. *Europhys. Lett.*, **30**, 493, 1995.
- [119] U. SCHOLLWÖCK, T. JOLICOEUR, et T. GAREL. *Phys. Rev. B*, **53**, 3304, 1996.
- [120] D. SÉNÉCHAL. *Phys. Rev. B*, **52**, 15319, 1996.

- [121] T. SENTHIL et M.P.A. FISHER. Quasiparticle localization in superconductors with spin-orbit scattering. *Preprint cond-mat/9906290*, 1999.
- [122] R. SHANKAR. *Phys. Rev. Lett.*, **58**, 129, 1987.
- [123] G. SIERRA. *J. Phys. A*, **29**, 3299, 1996.
- [124] R.R.P. SINGH, M. FISHER, et R. SHANKAR. *Phys. Rev. B*, **39**, 2562, 1989.
- [125] M. STEINER, M. FABRIZIO, et A.O. GOGOLIN. *Phys. Rev. B*, **57**, 8290, 1998.
- [126] BARNES T., E. DAGOTTO, J. RIERA, et S. SWANSON. *Phys. Rev. B*, **47**, 3196, 1993.
- [127] K. TAKANO. Non-Linear Sigma Model for Inhomogeneous Spin Chains. *Preprint cond-mat/9804055*, 1998.
- [128] M. TAKIGAWA, N. MOTOYAMA, H. EISAKI, et S. UCHIDA. *Phys. Rev. Lett.*, **76**, 4612, 1996.
- [129] C. TEXIER. *Quelques aspects du transport quantique dans les systèmes désordonnés de basse dimension*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, 1999.
- [130] D.J. THOULESS. *J. Phys. Cond. Matter.*, **5**, 77, 1972.
- [131] S.A. TRUGMAN. *Phys. Rev. B*, **27**, 7539, 1983.
- [132] D.C. TSUI, H.L. STÖRMER, et A.C. GOSSARD. *Phys. Rev. Lett*, **48**, 1559, 1982.
- [133] N.J. VILENKIN. *Special Functions and the Theory of Group Representations*. American Mathematical Society, 1988.
- [134] K. VON KLITZING, G. DORDA, et M. PEPPER. *Phys. Rev. Lett*, **45**, 494, 1980.
- [135] S. WANATABE et H. YOKOYAMA. *J. Phys. Soc. Jpn*, **68**, 2073, 1999.
- [136] F. WEGWER. *Z.Physik B*, **36**, 209–214, 1980.
- [137] F. WEGWER. *Z.Physik B*, **51**, 579, 1983.
- [138] H.A. WEIDENMÜLLER. *Nucl. Phys. B [FS]*, **290**, 87, 1987.
- [139] S.R. WHITE. *Phys. Rev. B*, **53**, 52, 1996.
- [140] E. WITTEN. *Comm. Math. Phys.*, **92**, 455, 1981.
- [141] E. WITTEN. *Nucl. Phys. B [FS]*, **188**, 513, 1981.
- [142] K. ZIEGLER. *Nucl. Phys. B*, **344**, 499, 1990.
- [143] K. ZIEGLER. *Phys. Rev. Lett*, **80**, 3113, 1998.
- [144] M.R. ZIRNBAUER. *Annalen der Physik*, **3**, 513, 1994.
- [145] M.R. ZIRNBAUER. *J. Math. Phys.*, **37**, 4986, 1996.
- [146] M.R. ZIRNBAUER. *J. Math. Phys.*, **38**, 2007, 1997.
- [147] M.R. ZIRNBAUER. Dans *Proceedings of the XIIth International Congress of Mathematical physics*, 1997.
- [148] M.R. ZIRNBAUER. *Communication privée*, 1999.
- [149] M.R. ZIRNBAUER. Another critique of the replica trick. *preprint cond-mat/9903338*, 1999.
- [150] M.R. ZIRNBAUER. Conformal field theory of the integer quantum Hall plateau transition. *preprint hep-th/9905054*, 1999.





## Chaînes de Spins, Fermions de Dirac, et Systèmes Désordonnés

La première partie de cette thèse traite des chaînes de spins quantiques. On étudie tout d'abord des systèmes de spins quantiques qui sont reliés de façon continue à la chaîne de Heisenberg  $s=1$ . La construction d'un modèle sigma non-linéaire permet d'estimer le gap de ces systèmes. On étudie ensuite une chaîne de spins  $s=1/2$  dopée par des impuretés non-magnétiques possédant un spin nucléaire. À l'aide de techniques de bosonisation, on calcule analytiquement le temps de relaxation longitudinal d'une impureté en fonction de la température, corrections logarithmiques incluses. Ce type d'analyse est également mené sur un liquide de Luttinger chiral, modélisant par exemple un demi-fil quantique.

La deuxième partie est consacrée aux systèmes désordonnés en basse dimension. Des liens formels sont éclaircis entre modèle désordonné sur réseau, fermions de Dirac en milieu aléatoire, chaînes de spins supersymétriques non-compactes et modèle sigma non-linéaire. Le détail des calculs est donné sur l'exemple de la transition entre plateaux de l'effet Hall quantique entier. On calcule ensuite exactement les densités d'états et les longueurs de localisation typiques d'un fermion de Dirac en dimension 1 dans des potentiels aléatoires de différentes natures. De nombreux modèles de théorie de la matière condensée, comme par exemple la chaîne XX désordonnée, se ramènent à ce système. Puis nous étudions les fermions de Dirac en dimension 2 en milieu aléatoire. Plus particulièrement, nous analysons le cas de fermions en masse aléatoire. Ce modèle décrit les excitations de basse énergie d'un supraconducteur d'onde  $d$  dont les impuretés sont magnétiques. Un diagramme de phase est proposé. Il s'articule autour du point tricritique des fermions de Dirac libres et fait apparaître une phase métallique thermique inattendue.

**Mots-clés :** Chaînes de spins quantiques. Chaînes de spins inhomogènes. Modèle sigma non-linéaire. Bosonisation. Temps de relaxation. Milieux désordonnés. Effet Hall quantique entier. Fermions de Dirac. Supraconducteur haute-température.

## Spin Chains, Dirac Fermions, and Disordered Systems

The first part is dedicated to quantum spin chains. We first study quantum spin systems that are continuously connected to the Heisenberg spin chain  $s=1$ . We build a non-linear sigma model to estimate the spin gap of those systems. Next we study a  $s=1/2$  spin chain doped by non-magnetic impurities but which nevertheless possess a nuclear spin. We use abelian bosonization to calculate the longitudinal relaxation rate of an impurity and its dependence in the temperature. Logarithmic corrections to its behavior are also given. We perform the same analysis on a chiral Luttinger liquid, such as a quantum lead cut in half.

The second part deals with disordered systems in low dimension. We shed light upon formal links between disordered systems on a network, random Dirac fermions, non-compact superspin chain and non-linear sigma model. Details are given on the example of the plateau transition in the integer quantum Hall effect. Then we perform exact calculations of the densities of states and typical localization lengths of a Dirac fermion in 1 dimension in various types of disorder. Many condensed matter systems are equivalent to this model, such as the random XX quantum spin chain. Next we study random Dirac fermions in 2 dimensions. Specifically, we are concerned with the problem of Dirac fermions with random mass. This model describes low energy excitations of a disordered  $d$ -wave superconductor, which impurities are magnetic. A phase diagram is proposed. It is built around the tricritical point of free Dirac fermions and shows an unexpected metallic phase for thermal conduction.

**Key Words :** Quantum spin chains. Inhomogeneous spin chains. Non-linear sigma model. Bosonization. Relaxation rate. Disordered systems. Quantum Hall effect. Dirac fermions. High  $T_c$  superconductivity.