

UNIVERSITE DE PARIS-SUD
U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THESE

présentée
pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Paris XI ORSAY

par

GÉRALDINE SERVANT

Sujet :

**Etudes phénoménologiques
au-delà du Modèle Standard**

Soutenue le 1er juin 2001 devant la Commission d'examen :

MM	Ignatios ANTONIADIS,	Rapporteur,
	Pierre BINÉTRUY,	Président,
	Emilian DUDAS,	Rapporteur,
	Mariano QUIROS,	Examineur,
	Carlos SAVOY,	Directeur de thèse.

UNIVERSITE DE PARIS-SUD
U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THESE

présentée
pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Paris XI ORSAY

par

GÉRALDINE SERVANT

Sujet :

**Etudes phénoménologiques
au-delà du Modèle Standard**

Soutenue le 1er juin 2001 devant la Commission d'examen :

MM	Ignatios ANTONIADIS,	Rapporteur,
	Pierre BINÉTRUY,	Président,
	Emilian DUDAS,	Rapporteur,
	Mariano QUIROS,	Examineur,
	Carlos SAVOY,	Directeur de thèse.

Remerciements

Je remercie les responsables du D.E.A *Champs, Particules, Matières*, Yves Charon et Pierre Binétruy, grâce à qui cette thèse a pu débuter dans les meilleures conditions. Je tiens en particulier à exprimer ma reconnaissance à Yves Charon pour l'intérêt qu'il porte à la formation et à l'avenir des futurs physiciens et je remercie Pierre Binétruy pour avoir encouragé mon penchant pour la physique théorique et m'avoir confortée dans mon choix de thèse.

Je remercie Carlos Savoy pour m'avoir accordé sa confiance en acceptant d'encadrer cette thèse. Il m'a ainsi donné l'opportunité de me diriger vers un domaine passionnant de la physique mais aussi offert une grande liberté dans le choix de mes recherches, me permettant notamment d'entretenir une collaboration avec James Cline. Je lui suis très reconnaissante pour sa générosité, son infinie disponibilité, sa patience et les nombreux contacts qu'il m'a permis de nouer en particulier avec Steven Abel et Christophe Grojean; j'ai aussi eu le plaisir pendant la dernière année de ma thèse de bénéficier de discussions avec Stéphane Lavignac que je remercie.

J'ai eu la chance de préparer cette thèse au sein du Service de Physique Théorique du CEA Saclay et de profiter d'un environnement scientifique très stimulant. La liste des personnes ayant contribué à enrichir et rendre agréable mon séjour doctoral dans ce laboratoire est très longue. Je remercie donc l'ensemble de ses membres, chercheurs permanents, post-doctorants, thésards, personnel administratif et en particulier le chef de service et ses adjoints, Jean-Paul Blaizot, Alain Billoire et Jean-Marie Normand pour leur accueil ainsi que Francis Bernardeau, Philippe Brax, Pierre Vanhove pour diverses conversations.

J'ai effectué deux séjours à l'université Mc Gill de Montréal pendant la première année de ma thèse. Je tiens à remercier le département de physique pour leur chaleureux accueil et notamment les chercheurs du Centre de Physique des Hautes Energies, C. Burgess, H. Lam, R. Myers. Je remercie évidemment James Cline pour avoir guidé mes premiers pas de chercheur avec autant d'enthousiasme et de dynamisme et m'avoir permis de m'initier notamment à la baryogénèse électrofaible. Je remercie Guy D. Moore pour une collaboration fort enrichissante mais aussi pour sa patience face à mes innombrables questions de débutante.

Je remercie Steven Abel pour m'avoir permis de réorienter mes travaux dans une direction nouvelle lors de son séjour à Orsay ainsi que pour sa grande patience et sa

gentillesse. Je remercie aussi C. Deffayet, E. Dudas, M. Joyce, J. Mourad et J.P. Uzan pour leur chaleureux accueil lors de mes diverses visites au LPT Orsay.

Je remercie Emilian Dudas et Ignatios Antoniadis d'avoir accepté la tâche de rapporteur ainsi que les autres membres du jury, Pierre Binétruy, Mariano Quiros et Carlos Savoy.

Enfin, surtout, et sans aucune mesure, je remercie Christophe Grojean.

Table des matières

Introduction	1
1 Baryogénèse: premiers pas au-delà ...	7
1.1 Asymétrie baryonique	7
1.1.1 Mesure de l'asymétrie baryonique de l'univers	8
1.1.2 Conditions de Sakharov	9
1.2 Baryogénèse électrofaible	11
1.2.1 Violation du nombre baryonique dans le Modèle Standard	11
1.2.2 Dynamique de la transition de phase électrofaible	17
1.2.3 Potentiel scalaire effectif	19
1.2.4 De la nécessité d'une nouvelle physique	25
1.3 Transition de phase électrofaible dans le MSSM	25
1.3.1 Le Modèle Standard Supersymétrique Minimal	25
1.3.2 Ordre de la transition de phase dans le MSSM	31
1.3.3 Condensation du stop et brisure de couleur	32
1.3.4 Transition de phase électrofaible en deux étapes	33
1.4 Conclusions	36
Bibliographie du chapitre I	38
2 Phénoménologie des théories de supercordes	45
2.1 Quel pont entre le MSSM et la théorie $\mathcal{M}$?	45
2.1.1 Phénoménologie des supercordes: problématique	47
2.1.2 Supergravité $D = 4$, $N = 1$	49
2.1.3 Brisure spontanée de la supergravité	51
2.1.4 Quelques exemples issus des modèles de cordes	54
2.1.5 Stabilisation du dilaton	56
2.2 Théories de cordes de type I	59
2.2.1 Orientifolds de type IIB	59
2.2.2 Cordes ouvertes et branes	60
2.2.3 Lagrangien effectif $D = 4$, $N = 1$ des orientifolds IIB	61
2.2.4 Minimisation du potentiel scalaire	67
2.3 CP et saveurs	74
2.3.1 Violation de CP et problème des saveurs en supersymétrie	74
2.3.2 Violation spontanée de CP	75

2.3.3	Termes <i>soft</i>	77
	Bibliographie du chapitre II	79

3 Univers branaire et localisation de la gravité 85

3.1	Problème de hiérarchie et géométrie de l'espace transverse	85
3.1.1	Reformulation de problème de hiérarchie en termes géométriques	86
3.1.2	Modèle de Randall–Sundrum	88
3.2	Cosmologie branaire	92
3.2.1	Taux d'expansion de l'univers quadri-dimensionnel	92
3.2.2	Loi de Friedmann à cinq dimensions	93
3.2.3	Généralisation à N dimensions	97
3.2.4	Réconcilier loi de Friedmann et solution au problème de hiérarchie	98
3.2.5	Stabilisation de la cinquième dimension	99
3.3	Questions ouvertes	100
3.3.1	Origine du <i>fine-tuning</i> entre les ‘constantes cosmologiques’	100
3.3.2	Peut-on reproduire l'action effective de Randall–Sundrum à partir d'une théorie plus fondamentale?	100
3.3.3	Problème de la constante cosmologique	102
	Bibliographie du chapitre III	104

I Electroweak Phase Transition: a Color-Broken Phase? 109

1	Introduction	112
2	Rough estimates and the choice of parameters	115
2.1	Preferred values of the couplings	115
2.2	Relation to MSSM parameters	117
3	The Effective Potential	122
3.1	Definition of V_{tree} and V_{ct}	122
3.2	Field-dependent masses	124
3.3	Thermal masses	126
3.4	Two-loop effects	127
4	Bubble nucleation from CCB phase	128
4.1	Nucleation rates	128
4.2	Getting into the CCB phase: choice of μ_s^2	130
4.3	CCB to EW transition	132
5	Results and Conclusions	133
5.1	Results	133
5.2	Is there a way out?	137
5.3	Conclusions	138
A	Saddle point search algorithms	139
A.1	General saddlepoint finding algorithm	139
A.2	Efficient algorithm just for multi-field critical bubbles	142
B	Renormalization Group choice of couplings	144

II	Cosmological Expansion with an Extra Dimension	149
III	Inflating Intersecting Branes and the Hierarchy Problem	161
IV	Warped Compactifications and Cosmological Constants	175
1	Introduction	178
2	Brane cosmological constant as a warp in an anti-de Sitter bulk	180
3	Effective cosmological constants from dynamics of codimension one branes	182
4	Generalization to higher codimension brane-universe	188
5	Discussion	190
V	Dilaton Stabilization in Type I String Models	195
1	Introduction	198
2	Preliminaries; Structure of Type I Models	198
3	Gaugino condensation in heterotic and type I	200
4	Preview; heterotic versus Type I	202
5	Minimization of the SUGRA Scalar Potential	206
6	Supersymmetry breaking terms	213
7	Conclusion	217
VI	CP and Flavour in Type I String Models	221
1	Introduction	224
2	Stabilization with and without modular invariance	226
2.1	Effective models and modular invariance	226
2.2	Two assumptions for stabilization	228
2.3	The general form of the scalar potential	229
2.4	Stabilization without modular invariance	231
2.5	Stabilization with modular invariance	234
2.6	Relation to the heterotic string	237
3	Generating CP and flavour structure in Yukawas	238
4	Scales	240
4.1	Scales with degenerate T_i moduli	240
4.2	Scales with independent T_i moduli	242
5	Structure of SUSY breaking terms	244
6	Further phenomenological issues	249
6.1	The generation of μ and B and approximate CP	249
6.2	Higher order corrections in the Kähler potential	252
6.3	Relating CP violation and flavour changing	253
7	Summary	254

Introduction

Le Modèle Standard de la physique des particules décrit trois des quatre forces fondamentales s'exerçant entre les constituants *élémentaires* de la matière, les quarks et les leptons: l'interaction forte, l'interaction faible et l'interaction électromagnétique. Edifié sur une théorie de jauge renormalisable $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, il a été remarquablement testé auprès des grands accélérateurs jusqu'à une énergie de l'ordre de la centaine de Giga électron-volts et représente ainsi une illustration spectaculaire de la théorie quantique des champs. Malgré ces succès, il reste à tester un aspect central de la théorie, le mécanisme de Higgs, responsable de la brisure de la symétrie électrofaible à l'origine de la masse des bosons $W^\pm$ et Z et donc de la portée finie des interactions faibles. La recherche du boson de Higgs est l'enjeu le plus important des recherches expérimentales actuelles. Pourtant, même si le Higgs est découvert et sa masse mesurée, un grand nombre de problèmes demeurent encore sans solutions et obligent les physiciens à constater l'insuffisance du Modèle Standard. La recherche d'une nouvelle physique *au-delà du Modèle Standard* est motivée par de nombreuses raisons à la fois expérimentales et théoriques que nous allons maintenant passer en revue.

En 1998, l'expérience SuperKamiokande a observé des oscillations de neutrinos atmosphériques révélant ainsi le premier signal d'une physique au-delà du Modèle Standard: l'existence d'une masse pour les neutrinos. Dans le Modèle Standard, les neutrinos ne possèdent pas d'état de chiralité droite (comme le confirmait l'expérience jusqu'à récemment) et pour cette raison sont des particules de masse nulle. Les solutions au problème de l'origine de la masse des neutrinos nécessitent une extension du Modèle Standard (selon le mécanisme considéré, de nouveaux champs, scalaires ou fermioniques, sont requis). En outre, un autre problème, celui du déficit des neutrinos solaires fait aussi appel à des propriétés non standard des neutrinos; l'interprétation en termes d'oscillation étant la plus convaincante.

Un second problème est relié à la masse manquante de l'univers. Il est bien connu que la courbe de rotation des galaxies (vitesse radiale en fonction de la distance au coeur de la galaxie) ne peut être expliquée que par la présence dans l'univers d'une matière pesante non lumineuse. Les propriétés de cette matière (non baryonique, non relativiste) sont contraintes par les modèles cosmologiques et les particules du Modèle Standard ne semblent pas être des candidats viables pour la matière *noire*. Une autre question appartenant elle aussi à la fois aux champs de la physique des particules et de

la cosmologie est celle de l'asymétrie matière-antimatière. Les ingrédients nécessaires pour produire une asymétrie baryonique sont a priori réunis dans le Modèle Standard: violation du nombre baryonique (à haute température), violation des symétries discrètes C et CP (où C est la conjugaison de charge et P la parité) auxquels il faut ajouter une condition de non équilibre thermodynamique. Il n'existe à ce jour aucun modèle de baryogénèse satisfaisant les contraintes expérimentales du Modèle Standard.

Les symétries discrètes C, P et CP et surtout leur violation ont joué un grand rôle dans la détermination de la forme des interactions électrofaibles. Par exemple, on a cru longtemps que l'invariance des lois de la physique par parité était aussi fondamentale que leur invariance par rotation. Ce n'est qu'en 1956 que Lee et Yang ont réalisé qu'il n'existait aucune preuve de la conservation de la parité par les interactions faibles. L'année suivante, plusieurs expériences qu'ils avaient suggérées démontraient la non conservation de P. Un autre résultat remarquable est la découverte de la violation de CP en 1964 dans l'asymétrie des oscillations entre les mésons neutres K^0 et $\bar{K}^0$. Celle-ci s'explique par la présence d'une phase dans la matrice de mélange des trois familles de quarks, dite matrice de Cabibbo–Kobayashi–Maskawa (CKM). La violation de CP était jusqu'à très récemment le secteur le moins testé du Modèle Standard. Aujourd'hui, un domaine très vivant des programmes expérimentaux en cours est consacré aux "usines à mésons B " ainsi qu'aux désintégrations rares des mésons K et devraient fournir de nouvelles informations prochainement. En fait, il n'y a pas à ce jour de problème expérimental concernant la violation de CP dans le secteur électrofaible, mais il faut garder à l'esprit que tous les tests n'ont pas encore été effectués. Il existe par contre une inadéquation entre les prédictions du Modèle Standard et les observations dans le secteur des interactions fortes. Le lagrangien de la chromodynamique quantique possède en effet une source de violation de CP à travers le terme topologique $\bar{\Theta}_{\text{QCD}} F\tilde{F}$. D'après les mesures du moment électrique dipolaire du neutron, $\bar{\Theta}_{\text{QCD}} < 10^{-9}$. Le fait que rien dans le Modèle Standard n'explique une valeur aussi peu naturelle est appelé le problème de "CP fort". Cela nous amène à considérer les problèmes plus conceptuels du Modèle Standard.

Le Modèle Standard contient dix neuf paramètres libres: trois constantes de couplage de jauge, six masses de quarks, quatre paramètres de la matrice CKM (trois angles plus une phase), trois masses de leptons (auxquelles il faut maintenant ajouter les paramètres de masse des neutrinos), la masse du boson électrofaible W, la masse du Higgs et enfin le paramètre $\bar{\Theta}_{\text{QCD}}$. Cette prolifération de paramètres arbitraires est peu satisfaisante. En particulier, leur mesure expérimentale ne permet pas de comprendre les caractéristiques du spectre de masse des fermions. Pourquoi les masses de fermions sont-elles beaucoup plus faibles que l'échelle de la brisure électrofaible? Quelle est l'origine de la grande dispersion des valeurs aussi bien entre des familles différentes qu'au sein d'une même famille? Une autre question est celle de l'unification des interactions électrofaible et forte. Quarks et leptons partagent des propriétés très semblables suggérant qu'ils pourraient appartenir à des représentations d'un groupe de symétrie plus grand (comme $SU(5)$). Dans ce cas, leurs ressemblances seraient une conséquence de la théorie. Les valeurs des constantes de couplage de jauge mesurées à l'échelle électrofaible peuvent être extrapolées vers de plus hautes énergies à l'aide des

équations du groupe de renormalisation. Celles-ci indiquent que les trois constantes de couplage se rapprochent à une échelle de l'ordre de 10^{15} GeV mais ne se rencontrent pas exactement au même point.

Enfin, le problème conceptuel grave du Modèle Standard, connu sous le nom de problème de hiérarchie de jauge est celui de la déstabilisation du potentiel scalaire par les corrections radiatives. La masse du Higgs reçoit en effet des corrections quadratiques par rapport au *cut off* de la théorie nécessitant un ajustement fin des paramètres du potentiel (*fine tuning*) peu satisfaisant. La solution la plus élégante à ce problème est apportée par la supersymétrie, qui, à chaque degré de liberté fermionique (bosonique) associe un partenaire supersymétrique bosonique (fermionique). Une conséquence intéressante est la disparition des corrections radiatives quadratiques dans les termes de masse des scalaires. De plus, dans l'extension supersymétrique minimale du Modèle Standard, les couplages de jauge s'unifient à une échelle $(2-4) \times 10^{16}$ GeV. La solution au problème de hiérarchie et la prédiction de l'unification des couplages sont des arguments très forts en faveur du Modèle Standard Supersymétrique Minimal (MSSM).

L'histoire de la physique est dominée par la notion de symétrie, et en particulier, cette seconde moitié du vingtième siècle est marquée par le triomphe des théories invariantes sous les symétries locales. Cela nous amène aujourd'hui à considérer le Modèle Standard comme une théorie effective d'une théorie plus fondamentale (*i.e.* plus symétrique) qui devient manifeste à une certaine échelle d'énergie. Les extensions du Modèle Standard en termes de théories de champs sont en nombre infini, chacune abordant un des problèmes seulement du Modèle Standard. Par exemple, les théories des champs supersymétriques sont les meilleures candidates pour résoudre le problème de hiérarchie de jauge. Les théories de Grande Unification résolvent le problème de l'unification des couplages. Les théories de Kaluza–Klein expliquent l'origine des symétries de jauge par l'existence de dimensions supplémentaires. Ces différentes extensions correspondent à différents choix de théories quantiques des champs et ne répondent pas à la plupart des questions: Pourquoi vivons-nous à quatre dimensions? Pourquoi le groupe de jauge est-il $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$? Pourquoi y-a-t-il trois familles? Quelle est l'origine de la hiérarchie de masse entre les fermions? Pourquoi $\alpha_{\text{elec}} = 1/137$? Pourquoi la constante cosmologique est-elle (quasi) nulle? etc. Nombre de physiciens partagent la conviction que toutes ces questions resteront sans réponse tant que les extensions du Modèle Standard n'aborderont pas le problème majeur de la physique des hautes énergies: la quantification de la gravité.

Les seules théories quantiques de la gravitation cohérentes à ce jour sont les cinq théories des cordes. Contrairement aux théories des champs, les degrés de liberté fondamentaux, les cordes, ne sont plus ponctuels mais possèdent une extension spatiale. La description quantique de ces objets est extrêmement contrainte. Ainsi, la dimension de l'espace-temps ($D=10$) est une prédiction de ces théories, de même que l'existence du graviton, le contenu en champs et les nombres quantiques des particules. De plus, la théorie ne possède qu'un seul paramètre, l'échelle d'énergie fondamentale, autrement dit l'échelle du quantum d'excitation des cordes. Les couplages (de jauge et de Yukawa) et plus généralement toutes les quantités observables ne sont pas des constantes arbitraires mais correspondent à des valeurs moyennes de champs scalaires et peuvent

être déterminées dynamiquement. En résumé, les théories des cordes sont les seules théories offrant l'espoir d'une description unifiée des interactions gravitationnelles avec les autres forces fondamentales. Tout l'enjeu de la phénoménologie des particules moderne est donc de faire le lien entre le Modèle Standard et les théories effectives de basse énergie des théories de cordes (décrites par des théories des champs). L'obstacle majeur est probablement notre ignorance de l'échelle fondamentale de la théorie des cordes. Jusqu'à récemment, cette échelle était considérée naturellement proche de l'échelle de la gravitation quantique à quatre dimensions soit l'échelle de Planck $M_P \sim 10^{19}$ GeV. Cela limitait évidemment toute chance d'observer expérimentalement une manifestation directe de la théorie des cordes. La *révolution des dualités* survenue il y a quelques années a bouleversé cette interprétation et finalement a autorisé les physiciens à traiter cette échelle comme essentiellement un paramètre libre.

Pendant ces trois années de thèse, je me suis penchée sur différents aspects phénoménologiques utilisant des degrés divers de nouvelle physique. Mes premiers travaux, en collaboration avec James Cline et Guy Moore, ont porté sur l'étude de la transition de phase électrofaible dans le MSSM, cadre du modèle de baryogénèse électrofaible. Cette théorie a pour objectif d'expliquer l'origine de la prépondérance de la matière sur l'antimatière. Elle met en jeu une physique riche à l'interface de la physique des particules et de la cosmologie utilisant à la fois la dynamique de la transition de phase, des effets de haute température ainsi que les propriétés des nouveaux degrés de liberté introduits par la supersymétrie. C'est aussi la seule théorie de baryogénèse qui présente l'avantage d'être testable auprès des accélérateurs actuels. Le résultat principal de ce travail est d'avoir exclu la possibilité d'une brisure de couleur précédant la transition de phase électrofaible.

J'ai ensuite réorienté mes recherches afin de prendre en compte les avancées récentes et l'intérêt phénoménologique des théories de cordes de type *I* faisant suite à la découverte des D-branes. Les propriétés de localisation des interactions de jauge par les D-branes ont en effet motivé l'émergence de l'idée d'univers branaire et avec, un certain nombre de modèles phénoménologiques (ou *toy models*). Ces modèles ne résultent pas d'une construction de théories de cordes explicite mais possèdent des propriétés phénoménologiques intéressantes. Ainsi, de nouvelles idées sont apparues pour reformuler le problème de hiérarchie en termes géométriques et plus généralement pour exploiter les dimensions supplémentaires comme de nouveaux ingrédients permettant de regarder de vieux problèmes sous un nouveau jour. Un de ces modèles, le modèle de Randall–Sundrum, propose un mécanisme de localisation de la gravité. En collaboration avec Christophe Grojean et James Cline nous avons étudié la cosmologie de ce modèle et montré qu'il était possible de retrouver à cinq dimensions les lois de Friedmann de la cosmologie standard décrivant l'évolution de l'univers après la nucléosynthèse primordiale.

Enfin, mes deux derniers articles, avec Steven Abel, reflètent une approche différente. Il s'agit cette fois-ci de partir d'une construction quadri-dimensionnelle supersymétrique explicite obtenue par compactification de la théorie de cordes de type *I* et regarder ses propriétés phénoménologiques. Nous avons plus précisément étudié la brisure de supersymétrie par condensation de jauginos et la stabilisation du potentiel scalaire dans

ces modèles ainsi que les conséquences sur le spectre des particules supersymétriques.

Le manuscrit de cette thèse est organisé en trois parties (ne respectant pas l'ordre chronologique des travaux):

- Le premier chapitre est une entrée en matière progressive dans l'univers de la physique non standard. La problématique générale de la baryogénèse y est exposée et sert de motivation pour aller au-delà du Modèle Standard. Nous y détaillons la dynamique de la transition de phase électrofaible. Ce chapitre est aussi l'occasion de présenter le Modèle Standard Supersymétrique Minimal, en particulier les termes génériques de *brisure douce* de la supersymétrie. Enfin, nous y résumons le sujet de la première publication.
- Le deuxième chapitre est consacré à la phénoménologie des théories des cordes. L'accent est mis sur les théories effectives possédant une supersymétrie à quatre dimensions. Nous insistons sur l'intérêt de l'étude des termes de brisure douce exposés dans le premier chapitre et détaillons leur origine dans le contexte des théories de supergravité spontanément brisées. Le problème de la brisure de la supersymétrie et de la stabilisation du dilaton et des champs de modules dans les théories de cordes effectives est présenté. Dans la deuxième section, nous nous concentrons sur les théories de type *I* puis discutons le mécanisme de stabilisation par condensation de jausino dans ces modèles. La dernière section de ce chapitre porte sur les aspects de violation de CP et la structure de saveur des termes de brisure douce, deux points sensibles pour tester la théorie sous-jacente.
- Le troisième chapitre se rapporte aux travaux développés dans les trois publications II, III et IV. Les différentes hypothèses concernant la taille des dimensions supplémentaires sont discutées ainsi que lien avec le problème de hiérarchie. Il présente le modèle de Randall–Sundrum et son application à la cosmologie.

Ces trois parties peuvent être quasiment considérées indépendantes. Le lien entre les deux premiers chapitres réside dans le rôle joué par les termes de brisure douce. Dans le premier chapitre, ces termes sont des paramètres arbitraires; seule l'expérience permet de poser des limites sur leurs valeurs. L'objectif du second chapitre est précisément de discuter la forme de ces termes dans les modèles de supergravité dérivés des théories de cordes. Le point commun entre le deuxième et troisième chapitre est l'utilisation des branes et l'étude de leurs conséquences phénoménologiques. Enfin, le premier et troisième chapitre partagent aussi certaines motivations. Les théories de baryogénèse dépendent fortement du taux d'expansion de l'univers primordial. Dans les travaux II et III, il est question justement de déterminer les lois d'expansion qui pourraient être non standard avant l'époque de la nucléosynthèse.

Chapitre 1

Baryogénèse: premiers pas au-delà

...

Ce chapitre expose un premier travail réalisé dans le contexte de la baryogénèse électrofaible. La problématique générale des théories de baryogénèse est introduite dans la première section. Nous nous concentrerons ensuite sur la dynamique de la transition de phase électrofaible, cadre du modèle de baryogénèse électrofaible. Après avoir exposé dans la deuxième section le mécanisme et l'impossibilité de créer dans le Modèle Standard l'asymétrie baryonique observée, nous montrerons comment la transition de phase est modifiée dans l'extension minimale supersymétrique du Modèle Standard (section 3).

1.1 Asymétrie baryonique

Notre univers est constitué de manière évidente presque entièrement de matière et d'une quantité infime d'antimatière. Comprendre l'origine de cet excès de matière est l'objet des théories de baryogénèse. L'histoire de la baryogénèse commence en 1967 par la publication du célèbre article d'Andrei Sakharov [1] énonçant que la création d'une asymétrie baryonique stable pouvait être réalisée dans le cadre conjoint de la physique des particules et de la cosmologie sous réserve de satisfaire trois fameuses conditions:

- la loi de conservation de la charge baryonique doit être brisée.
- Les symétries discrètes C et CP doivent être violées.
- L'évolution de l'univers doit passer par une phase de non-équilibre thermodynamique.

Les premiers modèles de baryogénèse [2] sont apparus suite à l'avènement des théories de Grande Unification (1974) [3] où la violation du nombre baryonique apparaît naturellement. Entretemps, 't Hooft démontra (1976) que la charge baryonique n'est pas conservée par les interactions électrofaibles en raison de l'anomalie chirale et de la topologie des théories de Yang–Mills [4]. Il fallut cependant attendre une dizaine

d'années [5] pour concevoir que l'asymétrie baryonique de l'univers puisse être d'origine électrofaible. Avant d'introduire les concepts très particuliers exploités par les mécanismes de baryogénèse électrofaible nous allons maintenant passer rapidement en revue l'évidence observationnelle en faveur d'un univers asymétrique puis commenter les trois critères de Sakharov.

1.1.1 Mesure de l'asymétrie baryonique de l'univers

Les seules traces d'antimatière observée dans l'univers sont sous forme d'antiprotons présents dans les rayons cosmiques dans une proportion $n_{\bar{p}}/n_p \sim 10^{-4}$. Cette proportion est cependant compatible avec celle résultant de collisions $pp \rightarrow 3p + \bar{p}$ se produisant dans le gaz interstellaire de notre galaxie, auquel cas ces antiprotons ne seraient que des produits secondaires (voir aussi la référence [6] pour l'estimation de la production secondaire d'autres anti-noyaux comme $\bar{D}$ et ${}^3\bar{\text{He}}$). Il n'existe donc aucune preuve de l'existence d'antimatière primordiale.

Pour estimer l'ampleur de l'asymétrie initiale entre matière et antimatière, l'information directe dont on dispose est le rapport n_B/n_γ entre le nombre de baryons et le nombre de photons par unité de volume dans l'univers actuel (avec $n_\gamma = 2\xi(3)T^3/\pi^2$ à la température T). C'est la théorie de la nucléosynthèse primordiale qui permet de déterminer ce rapport avec la meilleure précision. Les proportions de D, ${}^3\text{He}$, ${}^4\text{He}$, B et ${}^7\text{Li}$ dépendent en effet de ce rapport. Le deutérium est en fait le *baryomètre* le plus précis; n_B/n_γ dépend très sensiblement de son abondance primordiale. Il existe cependant des incertitudes sur celle-ci. Selon le type de sources observées, deux options mutuellement exclusives sont à envisager [7]:

$$\begin{aligned} \text{"abondance faible"} &: 2.9.10^{-5} < \frac{D}{H} < 4.10^{-5} \rightarrow 4.2.10^{-10} < \frac{n_B}{n_\gamma} < 6.3.10^{-10} \\ \text{"abondance élevée"} &: 1.10^{-4} < \frac{D}{H} < 3.10^{-4} \rightarrow 1.2.10^{-10} < \frac{n_B}{n_\gamma} < 2.8.10^{-10} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Toutefois, ce rapport ne représente pas la valeur de l'asymétrie baryonique de l'univers. Tous les photons ne sont pas issus d'annihilation baryon-antibaryon; certains peuvent par exemple provenir de chocs entre leptons et antileptons. Connaissant le nombre d'espèces de particules présentes dans l'univers primordial on peut remonter au déséquilibre initial entre baryons et antibaryons. On définit alors l'asymétrie baryonique par la quantité

$$\eta \equiv \frac{n_B}{s}, \quad s = 1.8g_s^* n_\gamma \quad (1.2)$$

où s est la densité d'entropie reliée à la densité de photons et g_s^* compte les degrés de liberté relativistes présents dans le bain thermique à la température T . Aujourd'hui $s = 7.04n_\gamma$, d'où, selon les deux options (1.1) :

$$5.9.10^{-11} < \frac{n_B}{s} < 8.9.10^{-11} \quad \text{ou} \quad 1.7.10^{-11} < \frac{n_B}{s} < 3.9.10^{-11} \quad (1.3)$$

A une température supérieure à la masse des nucléons, $T \gtrsim m_N$, les nucléons étaient relativistes et leurs densités $n_N \sim n_{\bar{N}} \sim n_\gamma$ étaient telles que $\frac{n_B}{n_\gamma} \sim \frac{n_N - n_{\bar{N}}}{n_N} \sim 10^{-10}$.

Cette valeur démontre que l'univers est asymétrique. Elle est en effet incompatible avec la valeur obtenue en calculant dans un univers symétrique la densité relique de nucléons après annihilation avec les anti-nucléons: $\frac{n_N}{s} \approx 7.10^{-20}$. ⁽¹⁾

Pour clore cette partie, mentionnons les travaux de Cohen *et al.* [8] écartant l'alternative selon laquelle matière et antimatière seraient confinées dans des régions séparées de l'univers. L'asymétrie baryonique $n_b/s \sim 10^{-10}$ doit donc être expliquée par les théories de baryogénèse. A moins d'imposer à la main l'existence d'une asymétrie initiale (en contradiction avec le principe de naturalité), cette asymétrie doit être créée dynamiquement. Les trois ingrédients de la baryogénèse ont été énoncés par Sakharov en 1967 [1].

1.1.2 Conditions de Sakharov

- Violation du nombre baryonique :

Cette première condition est évidente si l'on suppose que l'univers était initialement symétrique. Cependant aucun processus violant le nombre baryonique B (désintégration du proton ou oscillation $n - \bar{n}$) n'a encore été observé. Ceux-ci doivent se manifester à haute énergie uniquement.

- Violation de C et CP :

C , l'opération de conjugaison de charge et P , la parité, agissent sur les spineurs de Dirac de la façon suivante:

Sous la transformation C :

$$\psi \xrightarrow{C} C\bar{\psi}^T \quad (1.4)$$

$$\psi^\dagger \psi \xrightarrow{C} \bar{\psi}^{T\dagger} C^\dagger C \bar{\psi}^T = -\psi^\dagger \psi \quad (1.5)$$

où C est défini par la condition d'invariance de l'équation de Dirac sous la conjugaison de charge: $-\gamma_\mu = C^T \gamma_\mu C^{-1}$ (les γ_μ sont les matrices de Dirac) et vérifie $C^\dagger = C^{-1}$. De même, sous la transformation CP :

$$\psi \xrightarrow{P} \gamma^0 \psi \quad (1.6)$$

$$\psi \xrightarrow{PC} \gamma^0 C \bar{\psi}^T \quad (1.7)$$

$$\psi^\dagger \psi \xrightarrow{PC} \bar{\psi}^{T\dagger} C^\dagger \gamma^0 \gamma^0 C \bar{\psi}^T = -\psi^\dagger \psi \quad (1.8)$$

En supposant qu'initialement l'univers contenait autant de matière que d'antimatière, son nombre baryonique était nul, il se trouvait donc dans un état propre de C et CP . Si C et CP sont des symétries, l'univers reste dans l'état $B = 0$ au cours de son évolution.

$$|\phi(t)\rangle = e^{iHt} |\phi_0\rangle \quad \text{si} \quad [C, H] = [CP, H] = 0 \quad (1.9)$$

⁽¹⁾ Il est aussi facile de vérifier que la valeur de η n'est pas un pur effet de fluctuation statistique: Sachant que notre galaxie contient $\sim 10^{12} M_\odot$ et qu'à la température supérieure à 1 GeV il y avait 10^{79} photons pour 10^{79} baryons et antibaryons, la fluctuation statistique sur le nombre de baryons dans notre galaxie est de l'ordre de $\sim 10^{-39} \ll \eta$.

La seule façon de générer $B \neq 0$ est de violer à la fois C et CP . Dans le modèle standard, la violation de C est maximale et la violation de CP est au moins observée dans le système des mésons K .

- Condition Hors-équilibre.

D'après le théorème CPT , particules X et antiparticules $\bar{X}$ ont même masse et même durée de vie. Les distributions de Fermi–Dirac ou Bose–Einstein des espèces X et $\bar{X}$ à l'équilibre thermodynamique valent (dans un système d'unités où $k_B = 1$):

$$f_X(\mathbf{p}) = \frac{1}{\exp[(E_X(\mathbf{p}) - \mu_X)/T] \pm 1} \quad (1.10)$$

$$f_{\bar{X}}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\exp[(E_{\bar{X}}(\mathbf{p}) - \mu_{\bar{X}})/T] \pm 1} \quad (1.11)$$

où $E_X^2 = \mathbf{p}^2 + m_X^2 \stackrel{CPT}{=} E_{\bar{X}}$. A l'équilibre, les réactions d'annihilation $X + \bar{X} \leftrightarrow \gamma + \gamma$ donnent $\mu_X = -\mu_{\bar{X}}$. En outre, les interactions violant B sont du type $X + \bar{X} \leftrightarrow \dots \leftrightarrow \gamma + \gamma$ d'où $\mu_X = 0$ et finalement $f_X(\mathbf{p}) = f_{\bar{X}}(\mathbf{p})$: à l'équilibre thermique, aucune asymétrie ne peut exister. On peut aussi illustrer ce critère d'une autre façon, en calculant la moyenne thermique de l'opérateur B :

$$\langle B \rangle_T = \text{Tr}(e^{-H/T} B) = \text{Tr}((CPT)(CPT)^{-1} e^{-H/T} B) \quad (1.12)$$

$$= \text{Tr}(e^{-H/T} (CPT)^{-1} B (CPT)) = -\langle B \rangle_T = 0 \quad (1.13)$$

où nous avons utilisé le fait que l'hamiltonien H commute avec CPT .

Exemple: baryogénèse GUT

Ces trois conditions sont naturellement réalisées dans les théories de Grande Unification. La charge B n'y est pas conservée, la violation de C et CP est déjà observée au niveau des interactions électrofaibles et la condition de non-équilibre est fournie par l'expansion de l'univers. Cependant ce scénario souffre de plusieurs problèmes:

- Dans ce modèle, l'asymétrie baryonique est produite à très haute énergie ($\sim 10^{15}$ GeV) et est généralement diluée par l'inflation. Il faudrait alors que la température à laquelle sont produites les particules après l'inflation —température dite de *reheating*, T_{RH} — soit très élevée, $T_{RH} \sim M_{GUT}$, pour pouvoir produire des bosons lourds susceptibles de se désintégrer en baryons. Une telle valeur est exclue par les contraintes sur la densité de gravitini produite à l'époque du “reheating”.⁽²⁾

⁽²⁾Cette conclusion ne s'applique pas dans les récentes théories de “*preheating*” [9] où les oscillations cohérentes de l'inflaton modifient drastiquement le mode de production des particules après l'inflation [10].

- Ce modèle s'appuie sur des paramètres qui ne peuvent être testés expérimentalement.
- B est violé à haute température par des effets non perturbatifs qui détruisent toute asymétrie produite avant la transition de phase électrofaible sauf si $B - L \neq 0$ (où L est le nombre leptonique) comme nous allons le voir dans la prochaine section .

Une issue possible pour la baryogénèse GUT est de générer $B - L \neq 0$ (ce qui est impossible dans $SU(5)$ où $B - L$ est une symétrie) et utiliser le fait que $\langle B \rangle_T \propto \langle B - L \rangle_T$. Une autre alternative appelée baryogénèse *via la leptogénèse* [11] consiste à produire dans un premier temps une asymétrie leptonique (par la désintégration de neutrinos par exemple) qui est convertie en asymétrie baryonique par les processus violant $B + L$ à haute température. Il existe en fait de nombreuses variantes de baryogénèse (GUT, Affleck–Dine, électrofaible, ... , pour une revue des différents mécanismes voir [10, 12–14]), cependant, la possibilité de générer l'asymétrie baryonique de l'univers à l'échelle électrofaible est celle ayant suscité le plus d'études quantitatives approfondies. Cet attrait particulier est évidemment lié au fait que le scénario de baryogénèse électrofaible est le moins spéculatif de tous. Il nécessite une modification minimale du modèle standard (au niveau du secteur scalaire responsable de la brisure électrofaible et de la source de violation de CP) et présente ainsi l'avantage d'être testable auprès des grands accélérateurs actuels. Nous allons dès à présent nous concentrer sur ce modèle.

1.2 Baryogénèse électrofaible

Dans cette section, nous allons commencer par exposer les mécanismes de violation du nombre baryonique B dans le Modèle Standard. Nous discuterons ensuite l'idée de base de la baryogénèse électrofaible qui repose sur la dynamique de la transition de phase électrofaible. Enfin nous présenterons le calcul du potentiel scalaire effectif qui permet de déterminer l'ordre et la nature de la transition de phase.

1.2.1 Violation du nombre baryonique dans le Modèle Standard

En plus de ses symétries de jauge $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, le Modèle Standard possède un certain nombre de symétries $U(1)$ globales accidentelles. Ces symétries sont associées à la conservation de la charge baryonique B

$$B = \frac{N_c}{3} \int d^3\mathbf{x} \sum_i (\bar{u}_i \gamma^0 u_i + \bar{d}_i \gamma^0 d_i), \quad i = 1, \dots, N_f \quad (1.14)$$

où $N_c = 3$ est le nombre de couleurs et N_f le nombre de familles, et à la conservation des charges leptoniques L_i ,

$$L_i = \int d^3\mathbf{x} (\bar{l}_i \gamma^0 l_i + \bar{\nu}_i \gamma^0 (1 - \gamma_5) \nu_i), \quad i = e, \mu, \tau \quad (1.15)$$

On notera par la suite $L = L_e + L_\mu + L_\tau$ le courant leptonique total.

Des effets non perturbatifs (instantons) peuvent donner lieu à des processus violant la combinaison $B + L$ tandis que la combinaison orthogonale $B - L$ reste conservée. Ces effets résultent de deux éléments clés: l'anomalie chirale et la topologie non triviale du vide de la théorie électrofaible.

L'anomalie $B+L$

A cause de l'anomalie chirale, ces symétries accidentelles sont brisées au niveau quantique. La divergence des courants baryonique et leptonique total vaut:

$$\partial_\mu j_B^\mu = \partial_\mu j_L^\mu = -N_f \left(\frac{g^2}{32\pi^2} W_{\mu\nu}^a \tilde{W}^{a\mu\nu} - \frac{g'^2}{32\pi^2} B_{\mu\nu} \tilde{B}^{\mu\nu} \right), \quad (1.16)$$

où W et B sont respectivement les tenseurs de champs de jauge $SU(2)_L$ et $U(1)_Y$. La charge $B + L$ n'est donc pas conservée par les fluctuations quantiques des champs de jauge tandis que la combinaison orthogonale $B - L$ reste une symétrie des interactions électrofaibles. Exprimons maintenant la variation de charge baryonique:

$$\Delta B = B(+\infty) - B(-\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \partial_0 \int d\mathbf{x} j^0(\mathbf{x}, t) \quad (1.17)$$

$$= \int dt d\mathbf{x} \partial_\mu j^\mu = N_f \int d^4x \left(\frac{g^2}{32\pi^2} W \tilde{W} - \frac{g'^2}{32\pi^2} B \tilde{B} \right) \quad (1.18)$$

L'intégrant du membre de droite de l'équation (1.18) pouvant s'écrire comme une dérivée totale, il est en général ignoré après intégration par parties. Cependant, cette intégrale peut être non nulle pour certaines configurations des champs de jauge non abéliens et donner lieu à des effets observables. Pour comprendre la violation du nombre baryonique dans le Modèle Standard, il faut ajouter à l'anomalie chirale la topologie non triviale des théories de Yang-Mills [15, 16]: ce sont des transitions entre états topologiquement distincts du vide du champ de jauge de $SU(2)_L$ qui créent les baryons.

Instantons et effet tunnel

Considérons l'action de Yang-Mills dans l'espace euclidien à quatre dimensions.

$$S_E = \frac{1}{g^2} \int d^4x \text{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1.19)$$

Les instantons sont des configurations qui sont "pures jauge" à l'infini de l'espace euclidien:

$$F_{\mu\nu} \rightarrow 0 \quad (1.20)$$

$$A_\mu \rightarrow \frac{1}{g} U \partial_\mu U^{-1} \quad (1.21)$$

Définissons maintenant le courant de Chern–Simons K_μ tel que

$$\partial_\mu K^\mu = \frac{g^2}{32\pi^2} \text{Tr} F \tilde{F} \quad (1.22)$$

ainsi que la charge topologique $\nu[A]$ de l’instanton:

$$\nu[A] = -\frac{g^2}{32\pi^2} \int d^4x \text{Tr} F \tilde{F} = \int d\sigma^\mu K_\mu \quad (1.23)$$

où l’intégrale de surface est effectuée sur la sphère S^3 à l’infini. Dans cette région, le champ de jauge est donné par (1.21), on montre alors que [15, 16]

$$\nu[A] = n_{CS}[A]_{+\infty} - n_{CS}[A]_{-\infty} \quad (1.24)$$

où n_{CS} est un entier, l’indice de Chern–Simons, caractérisant les différents états du vide. La variation de la charge baryonique devient:

$$\Delta B = N_f \Delta n_{CS} \quad (1.25)$$

où Δn_{CS} concerne le vide de $SU(2)_L$. En effet, la variation de n_{CS} est nulle pour $U(1)$. La transition d’un vide à l’autre s’accompagne ainsi de la création de baryons. Le taux de violation du nombre baryonique est donné par le taux de transition entre vides adjacents ($\Delta n_{CS} = 1$). Dans la théorie électrofaible brisée la barrière de potentiel entre vides adjacents est finie et déterminée par l’échelle de brisure [17–19]:

$$E \approx \frac{\langle \phi \rangle}{\alpha_W} \sim \mathcal{O}(\text{TeV}) \quad (1.26)$$

où $\langle \phi \rangle$ est le paramètre d’ordre *i.e.* la valeur moyenne dans le vide du champ de Higgs. La configuration métastable des champs bosoniques au sommet de la barrière est appelée *sphaléron* [18]. On peut retrouver la valeur (1.26) grossièrement en définissant la taille caractéristique du sphaléron $l \sim m_W^{-1}$ et en écrivant:

$$E \sim \int d^3x F_{ij} F^{ij} \sim \frac{1}{l g^2} \sim \frac{\langle \phi \rangle}{g^2} \quad \text{avec} \quad (1.27)$$

$$F_{ij} \sim \partial_i A_j \sim \frac{1}{gl^2} \quad \text{et} \quad A_j \sim \frac{1}{g} U \partial_j U^{-1} \sim \frac{1}{gl} \quad (1.28)$$

La valeur précise de la hauteur de la barrière est couramment écrite sous la forme:

$$E_{sph}(T) = \frac{2m_W(T)}{\alpha_W} C(\lambda/g^2) \quad (1.29)$$

Dans cette expression, C est une constante d’ordre 1 nécessitant une évaluation numérique dépendante de la masse du Higgs: $1.5 < C < 2.7$ [18–22]. A température nulle, la seule possibilité de passer d’un vide à l’autre est par effet tunnel quantique. Dans l’approximation semi-classique, la probabilité de pénétration de la barrière est

essentiellement déterminée par l'exponentielle de l'action euclidienne de l'instanton $S_E = 2\pi/\alpha_W$ [4]:

$$e^{-2S_E} \sim e^{-4\pi/\alpha_W} \sim 10^{-170} \quad (1.30)$$

La création de charge baryonique par effet tunnel est par conséquent totalement inobservable. Par contre, il serait possible de créer des baryons à haute température en passant directement par dessus la barrière [23]. Kuzmin, Rubakov et Shaposhnikov ont alors suggéré en 1985 que ces transitions pouvaient avoir joué un rôle important dans l'univers primordial (où $T > 100$ GeV) non sans conséquence pour la baryogénèse [5].

Taux de violation de B à température finie

Dans la phase brisée

A température élevée (mais inférieure à la température critique T_c au-delà de laquelle la symétrie électrofaible est restaurée), la probabilité de création d'une configuration sphaléron d'énergie E_{sph} , par l'intermédiaire des fluctuations thermiques est pondérée par une exponentielle de Boltzmann [23]:

$$P \sim A e^{-E_{sph}/T} \quad (1.31)$$

Le calcul du taux de transition utilise le formalisme développé par Langer [24] & Affleck [25] qui consiste à approcher une intégrale de chemin par une gaussienne en développant les petites fluctuations autour de la solution métastable, le sphaléron. L'énergie du sphaléron détermine le facteur de Boltzmann tandis que l'intégrale sur les fluctuations gaussiennes autour du sphaléron donne le préfacteur A . Le calcul de ce préfacteur est présenté dans la référence [26]. Le taux de transition vaut alors:

$$\Gamma_{sp} \sim 2.8 \times 10^5 T^4 \left(\frac{\alpha_W}{4\pi} \right)^4 \kappa \left[\frac{E_{sp}(T)}{CT} \right]^7 e^{-E_{sp}(T)/T}, \quad (1.32)$$

Dans la phase symétrique

A très haute température, $T > T_c$, la symétrie électrofaible est restaurée et la barrière de potentiel disparaît. Le nombre baryonique peut changer sans suppression due à l'effet tunnel ou à l'exponentielle de Boltzmann. L'approximation de Langer & Affleck ne peut plus être appliquée mais une évaluation naïve par de simples arguments dimensionnels permet de trouver la forme de Γ_{sp} dans la phase symétrique [27, 28]. Le taux de violation de B par unité de volume ξ^3 et de temps $t \sim \xi$ peut s'écrire $\Gamma_{sp} \sim 1/\xi^4$ où ξ fixe l'échelle des corrélations spatiales du plasma à haute température et correspond à la longueur de cohérence maximale du système analogue à une longueur d'écrantage donnée par l'inverse de la masse magnétique $\sim g^2 T$. D'où

$$\Gamma_{sp} \sim k(\alpha_W T)^4 \quad (1.33)$$

Ce comportement a été confirmé par les simulations sur réseaux et le coefficient k calculé numériquement (travaux de Ambjorn *et al.* notamment) [29–33]. On peut aussi le retrouver en évaluant l'énergie du sphaléron pour laquelle l'exponentielle de Boltzmann n'est plus un facteur de suppression:

$$\frac{E_{sp}}{T} \sim 1 \Rightarrow \frac{l^{-1}}{\alpha_W} \gtrsim T \Rightarrow l \lesssim \xi \quad \text{où} \quad \xi \sim (\alpha_W T)^{-1} \quad (1.34)$$

Il a été montré plus tardivement [34–36] que cet argument simple ne reproduit pas correctement le comportement de Γ_{sp} (pour un état des lieux récent voir [37, 38]). Celui-ci doit en fait prendre en compte les excitations “dures” [39, 40] d'énergie typique $T > g^2 T$ qui introduisent un facteur α_W supplémentaire tel que

$$\Gamma_{sp} \sim \alpha_W^5 T^4 \quad (1.35)$$

D'après les simulations sur réseaux [41, 42]

$$\Gamma_{sp} \sim (25.4 \pm 2) \alpha_W^5 T^4 \stackrel{!}{\simeq} \alpha_W^4 T^4 \quad (1.36)$$

La valeur numérique correspondante est en coïncidence fortuite avec celle proposée initialement par Ambjorn *et al.*

Evolution de la charge baryonique à haute température

Le taux de transition que nous venons de présenter décrit aussi bien la création de baryons que leur destruction. En l'absence de biais, il y a autant de transitions du type $\Delta n_{CS} = +1$ que de transitions $\Delta n_{CS} = -1$ et en moyenne, le nombre baryonique ne varie pas. Cette situation résulte du fait que l'énergie potentielle (1.29) n'inclut que la contribution des bosons de jauge. Puisque les transitions s'accompagnent de la production ou destruction de baryons, il faut également prendre en compte l'énergie libre des fermions, ce qui a pour effet de lever la dégénérescence entre les différents vides. L'énergie des configurations bosoniques devient biaisée en présence de fermions et favorise alors les fluctuations de B dans une direction pouvant entraîner la création d'un nombre baryonique non nul [23]: Si nous introduisons un potentiel chimique μ_{B+L} pour la charge $B + L$, la contribution des fermions et anti-fermions à l'énergie libre vaut:

$$F = T \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\ln \left(1 + e^{-(E_k - \mu_{B+L})/T} \right) + (\mu_{B+L} \rightarrow -\mu_{B+L}) \right]. \quad (1.37)$$

A haute température, la densité de charge n_{B+L} s'écrit alors:

$$n_{B+L} \sim \mu_{B+L} T^2 \quad (1.38)$$

d'où l'expression de l'énergie libre

$$F \sim \mu_{B+L}^2 T^2 \sim \frac{n_{B+L}^2}{T^2} \quad (1.39)$$

Les transitions augmentant la valeur de n_{B+L} sont donc énergétiquement défavorables. Le système tend à évoluer vers son état d'énergie minimale *i.e.* vers $\langle B \rangle = 0$. Nous pouvons maintenant déterminer l'équation d'évolution de la charge baryonique à haute température. Soient Γ_+ et Γ_- les taux respectivement augmentant et diminuant la charge baryonique. Leur rapport est donné par

$$\frac{\Gamma_+}{\Gamma_-} = e^{-\frac{\delta F}{T}} \quad (1.40)$$

où δF est la différence d'énergie libre entre deux minima consécutifs. Le bilan détaillé de la variation de charge baryonique lors d'une transition entre minima adjacents peut s'écrire (en supposant δF petit devant T) [13, 23, 43]:

$$\frac{dn_{B+L}}{dt} = N_f(\Gamma_+ - \Gamma_-) \approx -\frac{N_f}{T} \frac{\delta F}{\delta Q_{B+L}} \Gamma_{sp} \quad (1.41)$$

où nous avons tenu compte du fait qu'il y a création ou destruction de N_f baryons lors de chaque transition. Γ_{sp} est le taux de transition en l'absence de biais (il correspond à la moyenne de Γ_+ et $-\Gamma_-$). Or,

$$\frac{\delta F}{\delta Q_{B+L}} = \mu_{B+L} \sim \frac{n_{B+L}}{T^2} \quad (1.42)$$

d'où

$$\frac{dn_{B+L}}{dt} \sim -\frac{N_f}{T^3} n_{B+L} \Gamma_{sp} \quad (1.43)$$

Cette équation est le point de départ pour tout calcul ultérieur de la production baryonique.

Condition de non-équilibre thermodynamique

Les conditions de violation de B sont donc satisfaites par les interactions électrofaibles, de même pour la violation de C et CP . Il ne manque plus que la condition de non-équilibre thermodynamique. Celle-ci peut être fournie par l'expansion de l'univers si le taux d'expansion est supérieur au taux caractéristique des processus non perturbatifs électrofaibles. D'après (1.43), la relation entre taux de violation de B et taux de transition sphaléron est de la forme

$$\frac{1}{n_B} \frac{dn_B}{dt} \sim \frac{\Gamma_{sp}}{T^3} \quad (1.44)$$

Nous pouvons maintenant comparer le taux de violation de B dans la phase symétrique avec le taux d'expansion de l'univers $H \sim 2\sqrt{g_s^*} \frac{T^2}{M_{Pl}}$. Les transitions sphaléron sont hors-équilibre lorsque

$$\alpha_W^4 T < 10 \frac{T^2}{M_P} \Rightarrow T > 10^{12} \text{ GeV} \quad (1.45)$$

Dans l'univers très primordial, l'expansion de l'univers est donc suffisamment rapide pour assurer l'écart à l'équilibre thermodynamique requis pour la génération d'une asymétrie baryonique. Par contre, à des températures $\frac{M_W}{\alpha_W} < T < 10^{12}$ GeV, les sphalérons deviennent très efficaces et ont pour action de gommer toute asymétrie qui aurait pu être produite antérieurement; le nombre baryonique évolue alors vers sa valeur d'équilibre $\langle B \rangle_T = 0$.

Examinons maintenant la situation dans la phase brisée à des températures $T \sim M_W$ au moment de la transition électrofaible. Une analyse détaillée [43] montre que les processus non perturbatifs sont hors-équilibre si la condition [44]

$$\frac{E_{sp}}{T} \gtrsim 45 \quad (1.46)$$

est vérifiée. En utilisant (1.29), cela donne

$$\frac{\phi(T)}{T} \gtrsim 1 \quad (1.47)$$

A basse température, les processus violant B sont donc gelés. Puisque tout nombre baryonique éventuellement produit dans l'univers primordial est gommé par l'action ultérieure des sphalérons dans la phase symétrique, l'asymétrie baryonique observée doit être créée lors de la transition de phase électrofaible. Cela est possible si celle-ci est du premier ordre (dans une transition du second ordre $\langle \phi(T_c) \rangle = 0$ et les processus violant B sont à l'équilibre thermodynamique). En outre, la transition doit être “fortement” du premier ordre, c'est à dire que la barrière de potentiel déterminée par le paramètre d'ordre —la valeur moyenne du champ de Higgs— doit être suffisamment élevée pour empêcher les transitions sphaléron dans la phase brisée. Dans ce cas, il y a, à la température critique, coexistence d'une phase brisée où les processus non perturbatifs violant $B + L$ sont supprimés et d'une phase symétrique où la violation de $B + L$ est très importante. D'autre part, la brisure spontanée de la symétrie électrofaible est responsable de la brisure de CP . Les trois conditions de Sakharov sont bien réunies. L'étape suivante consiste donc à calculer le potentiel effectif du Higgs à température finie et étudier l'ordre de la transition. Avant cela, nous allons exposer l'idée de base du mécanisme de production baryonique lors d'une transition du premier ordre.

1.2.2 Dynamique de la transition de phase électrofaible

Mécanisme de la production baryonique

Si la transition de phase est du premier ordre, elle se produit par nucléation de bulles de phase brisée où $\langle \phi(T) \rangle \neq 0$ puis expansion de ces bulles jusqu'à conversion totale de l'univers dans la phase brisée. A l'extérieur de la bulle, les particules n'ont pas de masse tandis qu'elles sont massives à l'intérieur. La paroi de la bulle se comporte donc comme une barrière de potentiel sur laquelle diffusent les particules. Afin d'imaginer le mécanisme, considérons l'interaction d'un quark avec la bulle macroscopique (de sorte que la courbure soit négligeable à l'échelle $L \sim T^{-1}$ des interactions des particules

avec le mur). Nous noterons z la direction perpendiculaire à la surface de la bulle en expansion. L'interaction avec le mur conservant le moment cinétique total perpendiculairement à la surface, un quark incident venant de la région symétrique (et donc non massif) de chiralité droite est réfléchi en un quark gauche. Si l'interaction avec le mur viole CP , cela se traduit par un coefficient de réflexion/transmission différent pour les quarks et antiquarks, de même pour les droits et gauches produisant un excès de q_L par rapport aux $\bar{q}_L$ à l'amont de la paroi compensé par un excès égal et opposé de q_R de telle sorte que $\langle B \rangle = 0$ à ce stade.

La violation de CP est donc à l'origine d'un mécanisme de séparation de charge [45–50]. Le flux asymétrique composé de quarks gauches réfléchis en amont du mur augmente l'énergie libre du plasma et alimente ainsi les processus violant $B + L$ actifs dans cette région (cf équations (1.36)). Les distributions des particules hors équilibre au voisinage du mur biaisent les processus sphalérons qui tentent de minimiser l'énergie libre en détruisant l'asymétrie et la redistribuant en d'autres espèces de quarks et leptons. Le mur balayant le plasma laisse alors derrière lui une asymétrie qui ne peut survivre que si l'action des sphalérons est totalement supprimée dans la phase brisée.

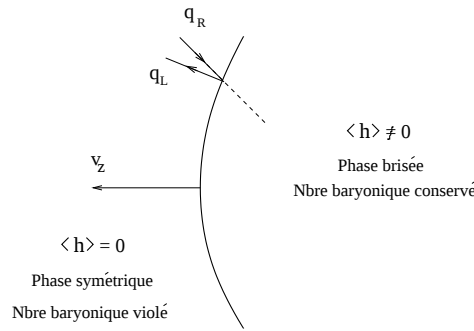


Figure 1.1: Dans les modèles de baryogénèse électrofaible, le mécanisme de production baryonique a lieu dans la région proche de la paroi de la bulle de phase brisée en expansion.

Equation maîtresse de la baryogénèse électrofaible

Le calcul de l'asymétrie baryonique est loin d'être évident. Nous pouvons néanmoins présenter son principe. La densité de baryons est calculée en intégrant sur les densités de quarks q_L dans la région symétrique jusqu'à la position à laquelle les processus violant le nombre baryonique sont négligeables, en l'occurrence $z = 0$:

$$n_B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dn_B}{dt} \frac{dz}{v_z} \propto \frac{\Gamma_{sp}}{T^3} \int_{-\infty}^0 n_L(z) dz \quad (1.48)$$

où nous avons utilisé l'équation (1.43) et supposé la vitesse du mur v_z constante ⁽³⁾; Toute la difficulté consiste à déterminer le profil de densité $n_L(z)$ en amont du mur.

⁽³⁾Les interactions avec le plasma freinent le mur et un régime stationnaire peut s'installer si la pression des particules du plasma compense exactement la pression du vide.

Ce calcul demande d'identifier les sources principales de violation de CP responsables de la séparation de charge et de résoudre des équations de transport [51–53]. Nous reviendrons brièvement sur ce point à la fin de ce chapitre.

L'équation (1.48) résume à elle seule les trois conditions de Sakharov. La violation du nombre baryonique est contenue dans Γ_{sp} . On comprend maintenant pourquoi le calcul du taux de violation du nombre baryonique dans la phase symétrique a été l'objet d'études aussi approfondies : c'est lui qui contrôle la production baryonique. La violation de CP intervient très sensiblement dans la détermination du profil $n_L(z)$ qui requiert la résolution d'équations de diffusion au voisinage du mur. Enfin, la condition de non-équilibre se traduit par le terme de vitesse du mur v_z . Celle-ci a aussi été calculée précisément et nécessite la résolution d'équations de Boltzmann prenant en compte les diverses sources de freinage dans le plasma [54].

1.2.3 Potentiel scalaire effectif

L'objectif de cette section est d'étudier la nature de la transition de phase électrofaible dans le Modèle Standard. Nous verrons dans une première approche qualitative comment la condition de suppression des processus de violation du nombre baryonique dans la phase brisée (1.47) s'exprime par une borne supérieure sur la masse du boson de Higgs. Nous présenterons ensuite plus en détail le type de calculs mis en oeuvre pour déterminer précisément le potentiel scalaire à haute température.

Transitions de phase du premier et second ordre

La transition de phase est du premier ordre s'il existe une température (définissant la température critique T_c) pour laquelle le potentiel thermodynamique possède deux minima dégénérés. C'est le cas par exemple du potentiel suivant :

$$V(X) = \frac{\lambda X^2}{4}(X - X_0)^2 \quad (1.49)$$

où le terme cubique $-\lambda X^3 X_0/2$ est ici crucial pour générer une barrière de potentiel séparant les deux minima en $\langle X \rangle = 0$ et $\langle X \rangle = X_0$.

Dans le Modèle Standard le potentiel du Higgs à température nulle s'écrit :

$$V_{\text{arbre}}(h, T = 0) = -\mu_h^2 \frac{h^2}{2} + \lambda_h \frac{h^4}{4} \quad (1.50)$$

présentant un minimum en $\langle h(T = 0) \rangle = v = \pm \mu_h / \sqrt{\lambda_h}$ (voir figure (1.2)) et définissant la masse du Higgs $m_h^2 = 2\lambda_h^2 v^2$ ($v = 247$ GeV). L'ajout des corrections de température finie a pour effet à l'ordre le plus bas de modifier la courbure du potentiel en $h = 0$:

$$\mu_h^2 \rightarrow \mu_h^2(T) = \mu_h^2 - c_h T^2 \quad (1.51)$$

Réécrivons le potentiel à température finie comme :

$$V(h, T) = D(T^2 - T_0^2)h^2 + \lambda_h \frac{h^4}{4} \quad (1.52)$$

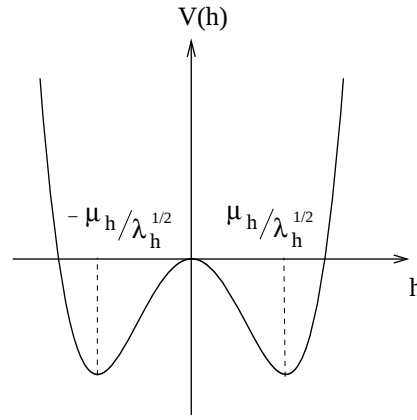


Figure 1.2: Potentiel de Higgs à température nulle

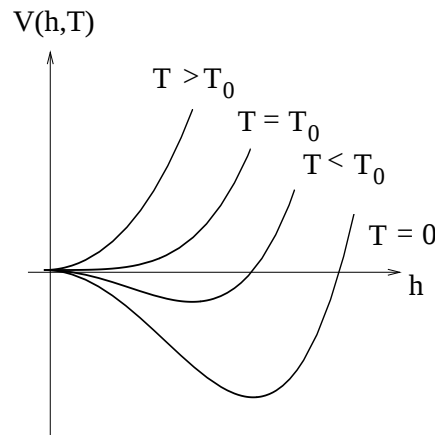


Figure 1.3: Potentiel de Higgs à température finie: transition de phase du second ordre

où

$$D = c_h^2/2 \text{ et } DT_0^2 = \mu_h^2/2 \quad (1.53)$$

Dans cette expression, nous avons négligé la très faible variation de λ_h en fonction de la température. Nous pouvons résumer le comportement du potentiel (1.52) en fonction de la température:

- A $T > T_0$, il n'y a qu'un seul extremum, le minimum en $\langle h \rangle = 0$. Le terme en $h^2 T^2$ est ainsi responsable de la restauration de la symétrie à haute température. Définissons T_0 la température critique à laquelle la courbure en $h = 0$ s'annule.
- A $T = T_0$, $\langle h \rangle = 0$ demeure l'unique solution.
- A $T < T_0$, $\langle h \rangle = 0$ devient un maximum. Simultanément, un minimum en $\langle h \rangle \neq 0$ apparaît.

Ce potentiel (voir figure (1.3)) décrit une transition de phase du deuxième ordre. Comme nous allons le voir un peu plus loin, à l'ordre suivant dans le développement de

haute température apparaissent des termes cubiques rendant possible l'existence d'une transition de phase du premier ordre:

$$V_{1-\text{boucle}}(h, T) = D(T^2 - T_0^2)h^2 - ET h^3 + \frac{1}{4}\lambda_h h^4 \quad (1.54)$$

E est une constante que nous déterminerons par la suite. L'évolution de ce potentiel en fonction de la température est représentée par la figure (1.4).

- A haute température $T > T_1$, l'univers demeure dans la phase symétrique $\langle h \rangle = 0$.
- $T = T_1$ correspond à l'existence d'un point d'inflexion défini par

$$T_1^2 = \frac{8\lambda D T_0^2}{8\lambda D - 9E^2} \quad (1.55)$$

$$\langle h(T_1) \rangle = \frac{3ET_1}{2\lambda} \quad (1.56)$$

- A $T < T_1$, une barrière se développe entre ce point et le minimum en $\langle h \rangle = 0$. Le point (1.56) donne naissance à un maximum $h_-(T)$ et un minimum local $h_+(T)$:

$$h_{\pm}(T) = \frac{3ET}{2\lambda} \pm \frac{1}{2\lambda} \sqrt{9E^2 T^2 - 8\lambda D(T^2 - T_0^2)} \quad (1.57)$$

- A T_c , l'origine $\langle h \rangle = 0$ et le minimum $h_+(T)$ deviennent dégénérés *i.e.* $V(0, T_c) = V(h_+, T_c)$. On montre alors:

$$h_+(T_c) = \frac{2ET_c}{\lambda_h} \quad (1.58)$$

- A $T_0 < T < T_c$, le minimum en $\langle h \rangle = 0$ devient métastable, $h_+(T)$ le minimum global.
- A $T = T_0$, la barrière disparaît, l'origine devient un maximum;

Notons qu'il sera important dans la section 1.3.4 de faire une distinction entre la température T_c à laquelle l'énergie libre de la phase symétrique et celle de la phase brisée sont égales et la température de la transition T_t . La transition se produit effectivement à une température légèrement inférieure lorsque la phase brisée est suffisamment favorisée pour que puissent se former par effet tunnel des bulles critiques. Les détails de la transition dépendent sensiblement de la forme de la barrière séparant le minimum local du minimum global et donc du terme cubique $-ET h^3$. Pour l'instant, nous confondons T_c et T_t , peu éloignées, et exprimons maintenant la condition (1.47) lors de la transition de phase:

$$v(T_c)/T_c \gtrsim 1 \quad (1.59)$$

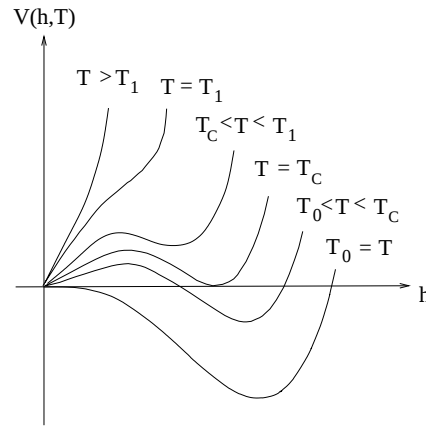


Figure 1.4: Potentiel de Higgs à température finie: transition de phase du premier ordre

D'après l'équation (1.58),

$$\frac{v(T_c)}{T_c} = \frac{2Ev^2}{\lambda_h v^2} = \frac{4Ev^2}{m_h^2} \quad (1.60)$$

d'où

$$\frac{v(T_c)}{T_c} \gtrsim 1 \Rightarrow m_h \lesssim 2v\sqrt{E} \quad (1.61)$$

La condition de persistance de l'asymétrie baryonique après la transition de phase se traduit donc par une borne supérieure sur la masse du Higgs. Une connaissance détaillée du potentiel effectif à haute température est requise pour déterminer la valeur du coefficient E . De plus, les valeurs précises des températures T_c , T_0 et T_t ainsi que la valeur du paramètre d'ordre $v(T_c)$ dépendent sensiblement des corrections radiatives aux ordres supérieurs du calcul des perturbations. Nous allons maintenant expliciter l'origine de l'expression (1.54) pour le potentiel scalaire effectif à haute température.

Calcul du potentiel effectif à haute température

Le potentiel effectif est une fonction dont la minimisation définit la valeur exacte du vide dans une théorie quantique des champs (pour son calcul à température finie voir [44]). Dans le Modèle Standard à l'ordre d'une boucle il peut s'écrire

$$V_{\text{eff}}(h, T) = V_{\text{arbre}} + V_{1,T=0} + V_{1,\text{therm}}. \quad (1.62)$$

V_{arbre} est donné par l'expression (1.50), $V_{1,T=0}$ représente les contributions à température nulle à l'ordre d'une boucle données par (potentiel de Coleman–Weinberg)

$$V_{1,T=0}(h) = \frac{1}{64\pi^2} \sum_i \pm m_i^4(h) \left(\ln \frac{m_i^2(h)}{\bar{\mu}^2} - \frac{3}{2} \right), \quad (1.63)$$

où la sommation sur i est effectuée sur tous les degrés de liberté se couplant au champ de Higgs. Le signe du haut (bas) concerne les bosons (fermions). Enfin, la partie purement thermique:

$$V_{1,\text{therm}}(h, T) = \pm \frac{T}{(2\pi)^3} \sum_i \int d^3p \ln \left(1 \mp e^{-\sqrt{p^2 + m_i^2(h)}/T} \right) \quad (1.64)$$

$$= \pm \frac{T^4}{2\pi^2} \sum_i \int_0^\infty x^2 dx \ln \left(1 \mp e^{-\sqrt{x^2 + m_i^2(h)}/T} \right) \quad (1.65)$$

$$= \pm \frac{T^4}{2\pi^2} \sum_i J_F \left(\frac{m_i^2(h)}{T^2} \right) \quad (1.66)$$

J_B et J_F admettent un développement de haute température:

$$J_B \left(\frac{m^2}{T^2} \right) = -\frac{\pi^4}{45} + \frac{\pi^2}{12} \frac{m^2}{T^2} - \frac{\pi}{6} \left(\frac{m^2}{T^2} \right)^{3/2} - \frac{m^4}{32T^4} \ln \frac{m^2}{a_b T^2} \dots \quad (1.67)$$

$$J_F \left(\frac{m^2}{T^2} \right) = \frac{7\pi^4}{360} - \frac{\pi^2}{24} \frac{m^2}{T^2} - \frac{m^4}{32T^4} \ln \frac{m^2}{a_f T^2} \dots \quad (1.68)$$

avec

$$a_b = 16\pi^2 \exp\left(\frac{3}{2} - 2\gamma_E\right), \quad a_f = \pi^2 \exp\left(\frac{3}{2} - 2\gamma_E\right) \quad (1.69)$$

$$\gamma_E = 0.5772 \text{ (constante d'Euler-Mascheroni)} \quad (1.70)$$

$$\ln a_b = 5.4076, \quad \ln a_f = 2.6351 \quad (1.71)$$

D'après le troisième terme du développement de J_B (1.67), seuls les bosons ⁽⁴⁾ sont responsables de l'apparition du terme cubique en h :

$$-\frac{T}{12\pi} \sum_{i=\text{bosons}} m_i^3(h) \quad (1.72)$$

Dans le Modèle Standard, seuls les bosons de jauge W et Z contribuent à cette somme⁽⁵⁾:

$$\sum_{i=W_T, Z_T} m_i^3(h) = 4m_W^3(h) + 2m_Z^3(h) = (4m_W^3 + 2m_Z^3) \frac{h^3}{v^3} \quad (1.73)$$

ce qui peut s'écrire sous la forme utilisée en (1.54)

$$-\frac{T}{12\pi} \sum_{i=W_T, Z_T} m_i^3(h) = -ETH^3 \quad (1.74)$$

⁽⁴⁾ En outre, seules les composantes transverses des bosons de jauge contribuent au potentiel effectif, les composantes longitudinales étant écrantées par les effets de plasma.

⁽⁵⁾ La contribution du Higgs est en effet négligeable en raison de la faible constante d'auto-couplage. De plus, les composantes longitudinales des bosons de jauge, qui acquièrent une masse thermique, ne contribuent plus effectivement au terme purement cubique et finalement seules les composantes transverses des bosons de jauge sont prises en compte.

avec

$$E = \frac{2}{3} \frac{2m_W^3 + m_Z^3}{4\pi v^3} \sim 6.3 \cdot 10^{-3} \quad (1.75)$$

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer la borne supérieure sur la masse du Higgs ⁽⁶⁾ (1.61):

$$\frac{v(T_c)}{T_c} \gtrsim 1 \Rightarrow m_h \lesssim 2v\sqrt{E} \Rightarrow m_h \leq 47 \text{ GeV} \quad (1.76)$$

La limite expérimentale étant $m_h \geq 113.5 \text{ GeV}$, la transition de phase électrofaible dans le Modèle Standard n'est que *très faiblement* du premier ordre. L'asymétrie baryonique ne peut être conservée après la transition. Nous avons ici simplifié l'analyse dans un but pédagogique mais la situation réelle est en fait bien plus défavorable à l'existence d'une transition du premier ordre dans le Modèle Standard. En effet, afin d'améliorer la convergence du développement perturbatif à température finie, il est en outre important d'effectuer une resommation de diagrammes d'ordres supérieurs appelés diagrammes *daisy* [55–57]. Cela revient à remplacer les masses $m_i^2(h)$ dans le potentiel par les masses effectives à haute température $m_i^2(h, T) = m_i^2(h) + c_i T^2$. Cette resommation a pour conséquence de minimiser l'effet des termes cubiques et donc d'*affaiblir* la barrière. Au final, les calculs précis concluent à l'absence de transition du premier ordre dans le Modèle Standard [58–61]

Validité de l'approche perturbative

Il est temps de vérifier la validité de l'approche perturbative à proximité de la température de transition. A température finie, le paramètre de développement perturbatif est évalué en calculant ce que coûte l'addition d'une nouvelle boucle:

$$\beta \equiv g^2 T \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + m^2(h))^2} \sim \frac{g^2 T}{m(h)} \sim \frac{gT}{h} \quad (1.77)$$

Or, à la température critique $h(T_c)/T_c \sim g^3/\lambda$. Nous avons donc

$$\beta \sim \frac{\lambda}{g^2} \sim \frac{m_h^2}{m_W^2} \quad (1.78)$$

Cette analyse semble indiquer que l'approche perturbative est totalement injustifiée pour $m_h > m_W$. Néanmoins, l'expérience montre que les résultats obtenus par cette méthode (menée jusqu'à l'ordre de deux boucles [62–67]) ne sont pas si mauvais (au moins qualitativement) comparés aux simulations sur réseaux [68,69] ou aux approches de réduction dimensionnelle [70–74]. Nous allons donc poursuivre cette approche.

⁽⁶⁾La valeur numérique en (1.76) ne prend pas en compte les corrections radiatives dues au quark top. Cependant, même lorsqu'elles sont prises en compte, cette valeur reste trop faible pour satisfaire la contrainte $v(T_c)/T_c \gtrsim 1$.

1.2.4 De la nécessité d'une nouvelle physique

Nous venons de conclure que dans le Modèle Standard il n'y a pas de transition du premier ordre et donc toute asymétrie baryonique produite peut être effacée après la transition. La nature de la transition de phase dépend cruciallement du terme (1.72). Pour renforcer la barrière de potentiel, il faudrait de nouveaux degrés de liberté bosoniques se couplant fortement avec le champ de Higgs [75] tout en étant légers ⁽⁷⁾. Comme nous allons le voir dans la prochaine section, l'extension minimale supersymétrique du Modèle Standard (MSSM) fournit naturellement ce type de candidats. En particulier, le stop de chiralité droite, $\tilde{t}_R$, partenaire supersymétrique du top, peut contribuer considérablement au *renforcement* de la transition en raison de son couplage élevé avec le boson de Higgs donné par le couplage de Yukawa du top y_t [64, 76, 77]. Naïvement, on s'attend à une modification de la mesure de la force de la transition de la forme:

$$\frac{v(T_c)}{T_c} \underset{\text{MS}}{\sim} \frac{g_W^3}{\lambda} \rightarrow \frac{v(T_c)}{T_c} \underset{\text{MSSM}}{\sim} \frac{y_t^3}{\lambda} \quad (1.79)$$

et par conséquent à une modification de la borne supérieure sur la masse du Higgs (1.76).

Parmi les extensions possibles du Modèle Standard phénoménologiquement acceptables, le Modèle Standard Supersymétrique Minimal est le plus motivé. Il est donc naturel d'étudier plus en détails la nature de sa transition de phase électrofaible [76–79]. De plus, de nouvelles sources de violation de CP présentent un intérêt évident pour générer l'asymétrie baryonique [80] ⁽⁸⁾.

1.3 Transition de phase électrofaible dans le MSSM

Avant de présenter notre travail, nous allons passer un peu de temps à discuter le Modèle Standard Supersymétrique Minimal, ce qui permettra d'introduire quelques notions utiles aussi pour le chapitre II, comme les termes de brisure douce de la supersymétrie.

1.3.1 Le Modèle Standard Supersymétrique Minimal

Il existe plusieurs extensions du modèle standard possédant $N = 1$ supersymétrie. La plus économique consiste à n'introduire que les champs nécessaires pour reproduire le modèle standard ($N = 0$) ce qui demande tout de même de doubler le nombre de degrés de liberté: à chaque particule de spin entier (demi-entier) est associée une partenaire supersymétrique de spin demi-entier (entier) possédant les mêmes nombres quantiques. Particule et superparticule sont décrits par un même superchamp Φ . Ainsi, chaque

⁽⁷⁾ Les particules lourdes découplent du bain thermique et le développement de haute température (1.67) n'est plus applicable.

⁽⁸⁾ En plus de l'absence de transition du premier ordre, il existe une deuxième raison pour laquelle le Modèle Standard ne peut expliquer la charge baryonique de l'univers: l'insuffisance de la violation de CP présente dans la matrice de Cabibbo–Kobayashi–Maskawa [81, 82].

fermion chiral du modèle standard, quark ou lepton, devient la composante spinorielle d'un superchamp chiral. La composante scalaire est appelée squark ou slepton.

$$\begin{aligned}
L \rightarrow \Phi_L : & \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_L \\ \tilde{e}_L \end{pmatrix} \quad (\text{slepton gaucher}) \\
\mathbf{Q} \rightarrow \Phi_{\mathbf{Q}} : & \begin{pmatrix} \mathbf{u}_L \\ \mathbf{d}_L \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_L \\ \tilde{\mathbf{d}}_L \end{pmatrix} \quad (\text{squark gaucher}) \\
\bar{e} \rightarrow \Phi_{\bar{e}} : & \bar{e}_L \quad \text{et} \quad \tilde{e}_R^* \quad (\text{antislepton droitier}) \\
\bar{\mathbf{u}} \rightarrow \Phi_{\bar{\mathbf{u}}} : & \bar{\mathbf{u}}_L \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{u}}_R^* \quad (\text{antisquark droitier}) \\
\bar{\mathbf{d}} \rightarrow \Phi_{\bar{\mathbf{d}}} : & \bar{\mathbf{d}}_L \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{d}}_R^* \quad (\text{antisquark droitier})
\end{aligned} \tag{1.80}$$

où $\bar{\psi}_L \equiv \sigma_2 \psi_R^*$. L'indice L (ou R) est utilisé pour les scalaires bien qu'ils n'aient pas de spin afin de rappeler qu'ils sont les superpartenaires de fermions gauches (ou droits).

Quant aux bosons de jauge du modèle standard, ils forment avec les jauginos de spin $1/2$ un superchamp vectoriel. Il y a ainsi 8 gluinos $\tilde{\mathbf{g}}$, un bino $\tilde{B}^0$, deux winos chargés $\tilde{W}^\pm$ et un wino neutre $\tilde{W}^0$.

Enfin, le doublet de Higgs du modèle standard apparaît comme la composante scalaire d'un superchamp chiral contenant un doublet de $SU(2)$ de fermions de Weyl, les Higgsinos. Ces fermions, qui possèdent la même hypercharge que le Higgs, génèrent des anomalies. Pour pallier à ce problème, il est nécessaire d'ajouter un deuxième doublet de Higgsinos d'hypercharge opposée permettant d'annuler ces anomalies. Le modèle $N = 1$ minimal doit donc contenir deux doublets de Higgs:

$$\Phi_{H_d} : \begin{pmatrix} H_d^0 \\ H_d^- \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \tilde{H}_d^0 \\ \tilde{H}_d^- \end{pmatrix} \quad (\text{Higgsino}) \tag{1.81}$$

$$\Phi_{H_u} : \begin{pmatrix} H_u^+ \\ H_u^0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \tilde{H}_u^+ \\ \tilde{H}_u^0 \end{pmatrix} \quad (\text{Higgsino}) \tag{1.82}$$

Les interactions de Yukawa dans le MSSM sont les mêmes que dans le modèle standard et reproduites par le superpotentiel suivant:

$$W_{Yukawa} = \mathbf{Y}_{ij}^u \Phi_{\mathbf{Q}}^i \Phi_{\bar{\mathbf{u}}}^j \Phi_{H_u} + \mathbf{Y}_{ij}^d \Phi_{\mathbf{Q}}^i \Phi_{\bar{\mathbf{d}}}^j \Phi_{H_d} + \mathbf{Y}_{ij}^l \Phi_{\mathbf{L}}^i \Phi_{\bar{e}}^j \Phi_{H_d} \tag{1.83}$$

où i et j sont des indices de famille. Il y a une différence importante avec le modèle standard où un seul doublet de Higgs donne la masse à tous les fermions. La supersymétrie ne permet pas aux champs complexes conjugués d'apparaître dans le superpotentiel qui doit être une fonction holomorphe des superchamps. La conservation de l'hypercharge interdisant au Higgs de se coupler analytiquement à la fois aux deux composantes du doublet, sans un deuxième doublet de Higgs certains quarks et/ou leptons restent sans masse. L'introduction d'un deuxième doublet de Higgs est donc nécessaire pour d'une part, la cohérence de la théorie (absence d'anomalies) et d'autre part la nécessité de donner une masse à tous les fermions.

Le superpotentiel (1.83) ne suffit pas pour reproduire la réalité phénoménologique pour deux raisons:

- Il génère un potentiel scalaire ne dépendant que de la puissance quatrième des champs et n'a donc aucune chance de mener à la brisure électrofaible.
- Il prédit une dégénérescence de masse entre particule et superparticule, non observée à basse énergie.

La solution au premier problème consiste à introduire dans le superpotentiel ce qui est appelé un μ -terme,

$$\mu \Phi_{H_u} \Phi_{H_d} \quad (1.84)$$

qui respecte à la fois supersymétrie et symétrie électrofaible et permet de donner une masse aux Higgs et Higgsinos. Se pose encore la question de l'échelle du paramètre μ qui n'est contrainte par aucune considération de symétrie (nous discutons ce point dans l'article VI). La solution au deuxième problème exige l'introduction de termes brisant la supersymétrie et levant ainsi la dégénérescence en masse. Pour ne pas altérer la structure ultra-violette de la théorie perturbative et donc respecter la solution au problème de hiérarchie de jauge, la brisure de supersymétrie ne doit se manifester que par des termes de brisure *douce*, c'est-à-dire n'apportant pas de corrections radiatives quadratiques.

Termes de brisure douce

Il existe trois formes de termes de brisure douce dans le potentiel scalaire:

- des termes de masse pour les scalaires
pour les squarks et sleptons

$$m_{\tilde{\mathbf{Q}}_{ij}}^2 \tilde{\mathbf{Q}}_i^\dagger \tilde{\mathbf{Q}}_j + m_{\tilde{\mathbf{u}}_{ij}}^2 \tilde{\mathbf{u}}_{Ri}^\dagger \tilde{\mathbf{u}}_{Rj} + m_{\tilde{\mathbf{d}}_{ij}}^2 \tilde{\mathbf{d}}_{Ri}^\dagger \tilde{\mathbf{d}}_{Rj} + m_{\tilde{L}_{ij}}^2 \tilde{L}_i^\dagger \tilde{L}_j + m_{\tilde{e}_{ij}}^2 \tilde{e}_{Ri}^\dagger \tilde{e}_{Rj} \quad (1.85)$$

pour les champs de Higgs

$$m_{H_u}^2 H_u^\dagger H_u + m_{H_d}^2 H_d^\dagger H_d + B\mu(H_u H_d + c.c.) \quad (1.86)$$

- des termes de masse pour les jauginos

$$\frac{1}{2} M_a \hat{\lambda}_a \lambda_a + c.c. \quad (1.87)$$

- des couplages triscalaires

$$\left(\mathcal{A}_{\mathbf{u}}^{ij} \tilde{\mathbf{u}}_{Ri} H_u \tilde{\mathbf{Q}}_j + \mathcal{A}_{\mathbf{d}}^{ij} \tilde{\mathbf{d}}_{Ri} H_d \tilde{\mathbf{Q}}_j + \mathcal{A}_e^{ij} \tilde{e}_{Ri} H_d \tilde{L}_j \right) + c.c. \quad (1.88)$$

Les scalaires contribuent de façon importante aux corrections radiatives du potentiel de Higgs. Leurs masses sont ainsi contraintes, ce qui signifie que l'échelle de brisure doit être inférieure ou égale au TeV. Il est bien connu que dans le contexte de la supersymétrie globale, la supersymétrie ne peut être brisée spontanément de manière

phénoménologiquement acceptable. Dans le cas d'un lagrangien renormalisable, la formule de la supertrace indique en effet que la moyenne des masses au carré des degrés de liberté fermioniques doit être égale à la moyenne des masses au carré des degrés de liberté bosoniques. Ce qui implique l'existence de superpartenaires plus légers que les particules du modèle standard. Cependant, cette formule n'est valide qu'à l'ordre des arbres. Des corrections de boucle aussi bien que des interactions non renormalisables peuvent produire un spectre réaliste. Pour cette raison, le secteur de brisure de supersymétrie doit appartenir à un secteur *caché* ne possédant pas d'interaction renormalisables à l'ordre des arbres avec le secteur observable. S'ouvrent deux⁽⁹⁾ alternatives pour briser la supersymétrie:

- Ce sont les corrections radiatives impliquant les champs de jauge du MSSM qui sont responsables de la brisure de supersymétrie (*Gauge Mediated SUSY Breaking*).
- Le MSSM est une théorie effective dérivant d'une théorie de supergravité non renormalisable (*SUGRA Mediated SUSY Breaking*).

La brisure spontanée de la supergravité engendre précisément des termes du type (1.85-1.88). Ce sera notamment l'objet du chapitre II d'étudier la production et l'échelle de ces termes dans une théorie de supergravité héritée des modèles de cordes de type I.

Si l'on souhaite écrire le MSSM en toute généralité sans s'appuyer sur un mécanisme particulier de brisure de supersymétrie, l'addition de termes soft arbitraires introduit une centaine de nouveaux paramètres. Il existe cependant des contraintes expérimentales très sévères sur ces paramètres. Les matrices de masse des sfermions ainsi que les interactions triscallaires sont à l'origine de processus avec changements de saveur lors de l'échange virtuel de squarks et sleptons. Dans le modèle Standard, les courants neutres avec changement de saveur (*Flavour Changing Neutral Currents*) sont supprimés par le mécanisme de GIM [83]. Afin d'être en accord avec l'expérience, les matrices de masse et les couplages triscallaires doivent présenter une structure bien particulière dans l'espace des familles (*e.g.* $\tilde{m}_{ij} \propto \delta_{ij}$, $\mathcal{A}_{\mathbf{u},\mathbf{d},e}^{ij} = A_{\mathbf{u},\mathbf{d},e} Y_{\mathbf{u},\mathbf{d},e}^{ij}$).

C'est tout l'enjeu de la section 2.3 du chapitre II d'essayer de comprendre une telle structure dynamiquement, autrement dit de relier la structure de saveur des sfermions avec le mécanisme de brisure de supersymétrie.

Potentiel scalaire

Le potentiel scalaire du MSSM dépend d'un grand nombre de champs, sa minimisation constitue une tâche ardue. En outre, la plupart de ces champs étant chargés et colorés, s'ils acquerraient une valeur moyenne dans le vide, cela briserait le groupe de jauge. Le

⁽⁹⁾Il existe en fait une troisième possibilité: utiliser la *vev* du terme de Fayet-Iliopoulos présent dans les modèles possédant des symétries $U(1)$ pseudo-anomales (*anomaly-mediated supersymmetry breaking*).

potentiel reçoit des contributions de trois sources⁽¹⁰⁾. A l'ordre des arbres:

$$V = V^F + V^D + V_{soft} \quad (1.89)$$

où

$$V_F = \sum_{\alpha} \left| \frac{\partial W}{\partial \phi_{\alpha}} \right|^2 \quad et \quad V_D = \frac{1}{2} \sum_a g_a^2 \left(\sum_{\alpha} \phi_{\alpha}^{\dagger} T^a \phi_{\alpha} \right)^2 \quad (1.90)$$

ϕ_{α} représente la composante scalaire des superchamps Φ_{α} , V_{soft} est donné par la somme des expressions (1.85–1.88). En l'absence du terme μ et des termes soft, ce potentiel serait une fonction purement quartique des champs. En présence du terme μ , V_F engendre des termes quadratiques et cubiques. Enfin, les termes soft sont aussi à l'origine de termes de masse et de couplages triscalaires. La contribution des masses soft peut être problématique. Si elle est négative, deux conséquences graves sont à prévoir: l'existence de minima brisant la charge ou la couleur (*Charge and Color Breaking, CCB*) et l'existence de directions instables (*Unbounded From Below, UFB*). Afin d'empêcher aux squarks et sleptons de prendre une valeur moyenne dans le vide, un certain nombre d'inégalités entre les paramètres sont imposées. Notons que ces inégalités dérivées à température nulle sont souvent trop sévères. En effet, l'existence d'un minimum global plus bas que le minimum électrofaible du modèle standard ne signifie pas que le vide de la théorie doit nécessairement y siéger. Si la barrière de potentiel est suffisamment élevée, l'échelle de temps de transition par effet tunnel peut être très supérieur à l'âge de l'univers. Nous vivrions alors dans un univers métastable mais à très longue durée de vie. Pour comprendre pourquoi le vide est ce qu'il est aujourd'hui il faut analyser le potentiel à température finie. La réponse appropriée à la question levée par la violation des bornes *CCB* ou *UFB* est plus cosmologique que directement expérimentale. C'est précisément ce type d'analyse qui est l'objet de l'article I.

Il n'est pas question ici d'exposer la minimisation du potentiel et le mécanisme de Higgs dans le MSSM. Nous allons seulement rappeler quelques notions utiles pour la suite de ce chapitre en supposant que la brisure électrofaible se produit au minimum:

$$\langle H_u \rangle = \frac{v_u}{\sqrt{2}} ; \quad \langle H_d \rangle = \frac{v_d}{\sqrt{2}} \quad (1.91)$$

où la combinaison $v_u^2 + v_d^2 \equiv v^2$ est fixée par la constante de Fermi. Il nous faut introduire le paramètre

$$\tan \beta \equiv \frac{v_u}{v_d} \quad (1.92)$$

Les états propres de masse du MSSM après addition des termes soft dans le potentiel sont peu affectés dans le spectre des quarks et leptons. Par contre, de sérieuses modifications apparaissent dans le secteur du Higgs. Il devient aussi possible de discuter du spectre des charginos et neutralinos ainsi que des squarks et sleptons.

⁽¹⁰⁾ V^F et V^D sont ici donnés dans le cadre d'un modèle minimal où la normalisation des termes cinétiques est canonique, nous généraliserons ces expressions à la supergravité dans le deuxième chapitre

Secteur du Higgs

Après brisure spontanée de la symétrie électrofaible, le secteur de Higgs est beaucoup plus riche que dans le modèle standard où il n'y a qu'un seul champ de Higgs. En revanche, il est beaucoup plus contraint: ses couplages quartiques sont des fonctions des couplages de jauge. Des huit degrés de liberté initiaux, il en subsiste cinq: deux champs chargés $H^\pm$, un champ neutre A impair sous CP et deux champs neutres pairs sous CP, à savoir les champs de Higgs h (léger) et H (lourd). Les masses des champs neutres sont données à l'ordre des arbres par:

$$m_A^2 = \frac{2B\mu}{\sin 2\beta} \quad (1.93)$$

$$m_{H/h}^2 = \frac{1}{2}(m_A^2 + m_Z^2) \pm \sqrt{(m_A^2 + m_Z^2)^2 - (2m_Z m_A \cos 2\beta)^2} \quad (1.94)$$

Les masses de A et H peuvent être rendues très élevées en choisissant la valeur du paramètre $B\mu$. Par contre, en raison du signe moins dans l'équation (1.94), h ne peut être arbitrairement lourd. Ce champ h remplace le champ de Higgs du modèle standard. Ses couplages avec les quarks et leptons sont les mêmes que ceux du champ de Higgs standard à un facteur multiplicatif près (tendant vers 1 dans la limite de grand m_A). Si nous développons alors en puissances de m_A^{-1}

$$m_h^2 = m_Z^2 \cos^2 2\beta - m_A^2 \left(\frac{m_Z}{m_A}\right)^4 (2 - \sin^2 2\beta) + \dots \quad (1.95)$$

A l'ordre des arbres, la masse du Higgs ne dépend que deux paramètres, $\tan \beta$ et m_A et est limitée par la masse du Z . Heureusement, les corrections à une boucle en particulier le couplage de Yukawa du top sauvent le MSSM :

$$m_h^2 = M_Z^2 \cos^2 2\beta + \frac{3}{4\pi^2} \frac{\overline{m}_t^4}{v^2} \log \left(\frac{m_t^2 m_{\tilde{T}}^2}{\overline{m}_t^4} \right) \left[1 + \mathcal{O} \left(\frac{\tilde{A}_t^2}{m_Q^2} \right) \right], \quad (1.96)$$

Si nous supposons $|\tilde{A}_t|/m_Q \ll 1$ et $m_{\tilde{t}} < m_{\tilde{T}}$ cela place la limite à $m_h \lesssim 130 \text{ GeV}^{(11)}$.

Squarks

Dans l'équation (1.96), $m_{\tilde{t}}$ et $m_{\tilde{T}}$ sont les valeurs propres de la matrice de masse des stops $\tilde{t}_{L,R}$:

$$\mathcal{M}_{\tilde{t}_L, \tilde{t}_R} = \begin{pmatrix} m_Q^2 + m_t^2 + D_{\tilde{t}_L}^2 & m_t \tilde{A}_t \\ m_t \tilde{A}_t^* & m_U^2 + m_t^2 + D_{\tilde{t}_R}^2 \end{pmatrix}, \quad (1.97)$$

$m_t = y_t \langle H_u^0 \rangle$ est la masse du top; m_U et m_Q sont les termes de masse *soft* pour $\tilde{t}_L$ et $\tilde{t}_R$. $D_{\tilde{t}_{L/R}}^2$ représente la contribution du potentiel V_D , elle peut être négligée en première

⁽¹¹⁾à des variantes près dépendant des hypothèses faites sur les limites supérieures des masses des stops.

approximation; $\tilde{A}_t = \mathcal{A}_t - \mu / \tan \beta$ où $\mathcal{A}_t$ est la constante de couplage associée au terme soft trilineaire impliquant $\tilde{t}_L$, $\tilde{t}_R$ et H_u^0 . Le couplage de Yukawa y_t élevé est responsable d'un mélange important entre $\tilde{t}_L$ et $\tilde{t}_R$ ce qui se traduit, après diagonalisation par l'existence d'un état propre de masse léger, $m_{\tilde{t}}$. Dans la limite où $|\tilde{A}_t/m_Q| \ll 1$, celui-ci est alors essentiellement aligné avec $\tilde{t}_R$. La limite inverse où le stop gauche est léger n'est pas phénoménologiquement acceptable car dans ce cas $\tilde{t}_L$ contribue de manière trop importante au paramètre de précision électrofaible ρ .

1.3.2 Ordre de la transition de phase dans le MSSM

Parmi les nouveaux degrés de liberté bosoniques apportés par la supersymétrie, seules les particules légères et possédant un couplage élevé avec le champs de Higgs peuvent affecter sensiblement le rapport $v(T_c)/T_c$. Le candidat naturel jouant ce rôle de manière dominante est le stop droit $\tilde{t}_R$ qui se couple au doublet de Higgs H_u suivant le terme d'interaction $y_t^2 |\tilde{t}_R|^2 |H_u|^2$ où

$$H_u = H \sin \beta \quad (1.98)$$

La masse de $\tilde{t}_R$ à $T = 0$ à l'ordre des arbres peut s'écrire (état propre léger de (1.97))

$$m_{\tilde{t}_R}^2(h) = m_U^2 + m_t^2(h) \left(1 - \frac{\tilde{A}_t^2}{m_Q^2} \right) \quad (1.99)$$

Dans le développement perturbatif de haute température amélioré, toutes les masses $m_i^2(h)$ sont remplacées par les masses effectives $m_i^2(h, T)$. La contribution de $\tilde{t}_R$ au terme *cubique* est:

$$2N_c \frac{T}{12\pi} m_{\tilde{t}_R}^3(h, T) \quad (1.100)$$

où N_c est le nombre de couleurs et

$$m_{\tilde{t}_R}^3(h, T) = (m_{\tilde{t}_R}^2(h) + c_s T^2)^{3/2} \quad (1.101)$$

Pour se rapprocher le plus possible d'une forme purement cubique en h^3 à l'origine de la barrière de potentiel, m_U^2 doit être négatif de telle sorte à compenser la contribution thermique $c_s T^2$ [64].

$$m_U^2 < 0 \Rightarrow m_{\tilde{t}_R}(T=0) < m_t \quad (1.102)$$

Une première conclusion s'impose: la baryogénèse électrofaible est envisageable dans le MSSM sous la condition d'une masse très légère pour le stop droit (la limite expérimentale actuelle est $m_{\tilde{t}_R} \gtrsim 105$ GeV). A l'ordre d'une boucle, le paramètre d'ordre de la transition (1.60) devient dans la situation idéale où $m_U^2 + c_s T^2 \approx 0$:

$$\left(\frac{v(T_c)}{T_c} \right)_{MSSM} = \left(\frac{v(T_c)}{T_c} \right)_{MS} + \underbrace{\frac{2m_t^3}{\pi v m_h^2} \left(1 - \frac{\tilde{A}_t^2}{m_Q^2} \right)^{3/2}}_{\sim \left[\frac{122 \text{ GeV}}{m_h} \right]^2 \text{ si } |\tilde{A}_t| \ll m_Q} \quad (1.103)$$

Bien que $v(T_c)/T_c$ dans le MSSM soit dominé par l'effet du stop, la contrainte (1.59) continue à se traduire par une borne sévère sur la masse du Higgs. En effet, dans le MSSM, m_h n'est pas inconnue de la théorie mais au contraire doit satisfaire (1.96): Dans la cas où $m_{\tilde{t}_R} < m_t$, il devient difficile d'avoir un Higgs lourd car cela demanderait une masse élevée non naturelle pour le $\tilde{t}_L$.

Nous avons évoqué précédemment la nécessité de calculer le potentiel effectif jusqu'à l'ordre de deux boucles en raison du faible degré de convergence de la série perturbative à haute température. Les effets à deux boucles sont d'autant plus importants dans le MSSM en raison des constantes de couplage fort y_t et g_s apparaissant dans le potentiel effectif. Il a en fait été montré que les effets à deux boucles *renforcent* très sensiblement la transition de phase [62, 63, 65–67, 73]. Cette analyse et la validité de la théorie perturbative ont été récemment confirmées par les calculs sur réseaux [84, 85]. De plus, les résultats non perturbatifs augmentent la valeur de $v(T_c)/T_c$ de dix à quinze pourcents. En résumé, les valeurs de m_h et $m_{\tilde{t}_R}$ autorisant une transition de phase du premier ordre sont [67, 86]:

$$110 \text{ GeV} \lesssim m_h \lesssim 116 \text{ GeV} \text{ et } 105 \text{ GeV} \lesssim m_{\tilde{t}_R} \lesssim 175 \text{ GeV} \quad (1.104)$$

1.3.3 Condensation du stop et brisure de couleur

Pour que la transition de phase soit du premier ordre, le paramètre m_U^2 doit être négatif, ce qui ouvre potentiellement la voie à l'existence d'une instabilité dangereuse dans la direction $\tilde{t}_R$ brisant la charge et la couleur. Comme nous l'avons évoqué dans la section (1.3.1), l'existence d'un minimum du potentiel dans la direction du $\tilde{t}_R$ n'est pas exclue à haute température. Si m_U^2 est suffisamment négatif, un minimum stable peut se former. Si celui-ci est énergétiquement plus favorable que le minimum apparaissant dans la direction du Higgs, une transition de phase peut avoir lieu au cours de laquelle le stop droit acquiert une valeur moyenne dans le vide [66, 87]. La symétrie de jauge $SU(3)$ de QCD serait alors temporairement brisée puis restaurée à l'occasion d'une deuxième transition vers le minimum électrofaible. C'est cet enchainement d'événements que nous avons étudié dans la publication I. Nous avons calculé le potentiel scalaire effectif à haute température dans l'espace des configurations bidimensionnel $(h, \tilde{t}_R)$ à l'ordre de deux boucles et examiné la séquence de transitions suivante:

$$(h, \tilde{t}_R) : (0, 0) \xrightarrow{1} (0, \langle \tilde{t}_R \rangle) \xrightarrow{2} (\langle h \rangle, 0) \quad (1.105)$$

La deuxième transition tend à être très fortement du premier ordre et donc très intéressante pour la baryogénèse. Elle se produirait en effet à une température plus basse que celle de la transition de phase électrofaible habituelle. Le minimum le long de la direction h correspondrait alors à une valeur moyenne dans le vide $\langle h \rangle$ élevée d'où un rapport $v(T_c)/T_c$ élevé lors de la transition électrofaible.

Une telle transition de phase en deux étapes ouvrirait la porte à une phénoménologie tout à fait nouvelle pour la baryogénèse. Notamment, les degrés de liberté et états propres de masse seraient totalement différents en raison de la valeur moyenne non nulle du stop au moment de la transition électrofaible.

1.3.4 Transition de phase électrofaible en deux étapes

Nous souhaitons rechercher quelle région de l'espace des paramètres du MSSM autorise le scénario (1.105) dont l'intérêt pour la baryogénèse repose sur la large séparation dans l'espace des configurations $(h, \tilde{t}_R)$ entre le minimum $(0, \langle \tilde{t}_R \rangle)$ —que nous appellerons dorénavant minimum CCB (Charge and Color Breaking)— et le minimum électrofaible $(\langle h \rangle, 0)$. Si cette séparation est trop importante au point d'empêcher la transition 2, l'univers restera piégé dans le minimum CCB, une telle situation est évidemment à proscrire.

Analyse à l'ordre des arbres

Le potentiel scalaire à l'ordre des arbres à température nulle dans le plan $(h, \tilde{t}_R)$ peut s'écrire ⁽¹²⁾:

$$V(h, s) = -\mu_h^2 \frac{h^2}{2} + \lambda_h \frac{h^4}{4} - \mu_s^2 \frac{s^2}{2} + \lambda_s \frac{s^4}{4} + \lambda_y \frac{h^2 s^2}{4} \quad (1.106)$$

où $\mu_s^2 = |m_U^2|$ et $\lambda_h, \lambda_s, \lambda_y$ sont des fonctions des couplages de jauge g, g', g_s et de Yukawa y_t déterminés après avoir sélectionné dans le lagrangien du MSSM tous les termes impliquant exclusivement les champs h et s :

$$\lambda_h = \frac{g^2 + g'^2}{8} \cos^2 2\beta \quad (1.107)$$

$$\lambda_s = \frac{g_s^2}{6} + \frac{2g'^2}{9} \quad (1.108)$$

$$\lambda_y = y_t^2 \sin^2 \beta \left(1 - \frac{\tilde{A}^2}{m_Q^2}\right) \quad (1.109)$$

Le terme en $\tilde{A}^2/m_Q^2$ dans (1.109) rend compte du fait que nous avons dans un premier temps minimisé le potentiel par rapport à $\tilde{t}_L$ avec h et s fixés puis intégré l'effet de sa condensation dans $V(h, s)$. Les minima de ce potentiel sont localisés sur les axes car le terme couplant h et s est responsable d'une large barrière empêchant les deux champs de développer une valeur moyenne dans le vide simultanément. Ces deux minima sont définis par:

$$h_0^2 = \frac{\mu_h^2}{\lambda_h} \quad , \quad V(h_0, 0) = -\frac{\mu_h^4}{4\lambda_h} \quad (1.110)$$

$$s_0^2 = \frac{\mu_s^2}{\lambda_s} \quad , \quad V(0, s_0) = -\frac{\mu_s^4}{4\lambda_s} \quad (1.111)$$

Choix des paramètres

Bien que μ_h^2 et λ_h soient contraints par les limites expérimentales sur la mass du Higgs et que λ_s soit fixé par la relation (1.108), nous avons une certaine liberté de choix pour

⁽¹²⁾Pour simplifier nous utiliserons la notation s pour le champ $\tilde{t}_R$.

les valeurs des paramètres μ_s^2 et λ_y . Pour que la probabilité d'effet tunnel associée à la transition 2 soit significative, la condition suivante doit être satisfaite:

$$|V(0, s_0)| < |V(h_0, 0)| \Rightarrow \mu_s^4 < \mu_h^4 \frac{\lambda_s}{\lambda_h} \quad (1.112)$$

D'autre part, la condition de condensation du stop avant la condensation du Higgs se traduit approximativement par:

$$T_s^{CCB} > T_s^{EF} \quad (1.113)$$

où T_s^{CCB} (T_s^{EF}) est la température spinodale pour laquelle la courbure du potentiel devient négative à l'origine dans la direction du stop (Higgs), c'est à dire:

$$\mu_{s/h}^2(T) = \mu_{s/h}^2 - c_{s/h} T^2 < 0 \quad (1.114)$$

soit

$$T_s^{CCB} = \frac{\mu_s^2}{c_s} \quad , \quad T_s^{EF} = \frac{\mu_h^2}{c_h} \quad (1.115)$$

La condition (1.113) s'écrit ainsi

$$\mu_s^2 > \left(\frac{c_s}{c_h} \right) \mu_h^2 \quad (1.116)$$

En combinant (1.112) et (1.116), nous pouvons fixer la valeur optimale pour μ_s^2 :

$$\mu_s^2 = \left(\frac{c_s}{c_h} \right) \mu_h^2 \quad (1.117)$$

Il sera utile par la suite de remarquer que dans ce cas optimal la profondeur du minimum CCB est donnée par

$$V^{opt}(0, s_0) = -\frac{1}{4} \left(\frac{c_s}{c_h} \right)^2 \frac{\mu_h^4}{\lambda_s} \propto m_h^4 \quad (1.118)$$

Quelle est maintenant la contrainte sur λ_y ? Exprimons le fait que le minimum CCB ne doit pas être instable dans la direction du Higgs:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial h^2} \Big|_{h=s_0} > 0 \Rightarrow \lambda_h > \lambda_s \left(\frac{c_h}{c_s} \right) \quad (1.119)$$

Ce qui peut se récrire en utilisant (1.117)

$$m_U^2 < -(g_s^2/6y_t^2)m_h^2 \quad (1.120)$$

Enfin, la barrière séparant les deux minima doit être minimale pour ne pas supprimer l'effet tunnel. La hauteur de cette barrière est définie au point selle du potentiel.

Afin de trouver le point selle, nous minimisons dans un premier temps le potentiel par rapport à s^2 dans chaque direction où le rapport $R = s^2/h^2$ est fixé, ce qui définit le potentiel $V(R)$. Le point selle est alors le minimum de $V(R)$. On trouve:

$$V_{point\atop selle} = -\frac{\mu_s^2\mu_h^2\lambda_y - \mu_h^4\lambda_s - \mu_s^4\lambda_h}{\lambda_y^2 - 4\lambda_s\lambda_y} \quad (1.121)$$

A μ_h^2 , μ_s^2 , λ_h , λ_s fixés, la hauteur de la barrière est minimisée pour de faibles valeurs de λ_y . D'après (1.109), nous pouvons ajuster λ_y en faisant varier le rapport $\tilde{A}/m_Q$ de manière à minimiser (1.121) tout en respectant les bornes imposées par les limites expérimentales sur la masse du stop ($\rightarrow \tilde{A}/m_Q \lesssim 0.64$).

Taux de nucléation

Comme nous l'avons mentionné dans la section 1.2.3 la transition n'a pas lieu à T_c mais à plus basse température, T_N , appelée température de nucléation. Celle-ci est beaucoup plus difficile à évaluer. Elle peut être définie comme la température à laquelle le taux de nucléation d'une bulle critique par effet tunnel Γ est tel qu'au moins une bulle critique se forme par unité de volume de Hubble et par unité de temps de Hubble

$$\Gamma(T_N) \sim \frac{1}{t_H l_H^3} \sim H^4 \quad (1.122)$$

où H est la constante de Hubble, $H \sim T^2/M_{Pl}$ pour un univers dominé par la densité d'énergie du plasma relativiste. D'autre part, le taux de nucléation s'exprime [44]

$$\Gamma(T_N) \sim T^4 e^{-S_c} \quad (1.123)$$

où S_c est l'action d'une bulle critique, elle même déterminée en recherchant le point selle de l'action euclidienne:

$$S = \int_0^{1/T} d\tau \int d^3x \left[\frac{1}{2} ((\partial_\tau s)^2 + (\partial_i s)^2 + (\partial_\tau h)^2 + (\partial_i h)^2) + V_{eff}(T, h, s) \right] \quad (1.124)$$

où V_{eff} est le potentiel scalaire effectif. A haute température, l'approximation

$$\int_0^{1/T} d\tau \sim \frac{1}{T} \quad (1.125)$$

est justifiée. D'où

$$e^{-S} \sim e^{-E/T} \quad (1.126)$$

E est l'énergie du point selle. La nucléation se produit alors si:

$$e^{-E/T_N} \gtrsim \left(\frac{H}{T_N} \right)^4 \quad (1.127)$$

$$\frac{E}{T_N} \lesssim 4 \ln \frac{T_N}{H} \approx 145 \text{ à l'époque électrofaible} \quad (1.128)$$

Nous devons calculer deux températures de nucléation: T_{N_1} associée à la transition $(0,0) \rightarrow (0,s)$ pour laquelle l'action euclidienne est calculée avec $V_{eff}(T,0,s)$ et T_{N_2} associée à la transition $(0,0) \rightarrow (h,0)$ calculée avec $V_{eff}(T,h,0)$. Il faut évidemment vérifier que $T_{N_1} > T_{N_2}$. Pour cela, nous devons déterminer les nouveaux états propres de masses prenant en compte les contributions venant de la valeur moyenne non nulle du stop. Par exemple, certains gluons et photons deviennent massifs; (cf matrices de masse reproduites dans la section (3.2) de l'article I). Nous devons ensuite calculer pour toutes les températures inférieures à T_{N_1} le taux de transition 2. La difficulté ici consiste à écrire un algorithme permettant de trouver le point selle dans un espace de configurations de champs bidimensionnel. La nucléation de bulles de phase brisée électrofaible à partir du vide CCB peut se produire à une température T_{N_3} si

$$e^{-E/T_{N_3}} \gtrsim \left(\frac{H}{T_{N_3}} \right)^4 \quad (1.129)$$

où cette fois-ci H est dominé par l'énergie du vide $H \sim m_h^2/M_P$:

$$\frac{E}{T_{N_3}} \lesssim 170 \quad (1.130)$$

Nous avons calculé l'évolution du rapport E/T en fonction de la température et nos résultats sont les suivants (voir courbes dans l'article):

- Le taux de transition 2 juste après la transition 1 est supprimé en raison d'une différence de potentiel $\Delta V = |V_{CCB} - V_{EF}|$ trop faible entre les 2 minima.
- A plus basse température, ΔV augmente mais la séparation entre les deux minima dans l'espace des configurations augmente.

En résumé, le minimum de E/T est trop élevé d'un ordre de grandeur pour que la transition soit possible. Nous concluons donc que le scénario d'une transition de phase électrofaible en deux étapes dans le cadre du MSSM n'est pas viable cosmologiquement.

1.4 Conclusions

Nous avons écarté une alternative qui avait potentiellement de riches implications pour la baryogénèse dans le cadre du MSSM et aurait permis d'élargir l'espace des paramètres autorisant la transition de phase électrofaible du premier ordre *traditionnelle*. Celle-ci est aujourd'hui connue de façon très détaillée et autorisée dans une fenêtre très réduite de l'espace des paramètres qui devrait être couverte par les expériences prochainement. Ce qui reste moins clair est le calcul de l'asymétrie baryonique. Plusieurs techniques ont été utilisées. Toutes réduisent le problème à un système d'équations de diffusion couplées de la forme

$$D_i \frac{\partial^2 \mu_i}{\partial z^2} + v_w \frac{\partial \mu_i}{\partial z} + \Gamma_i (\mu_i + \mu_j + \dots) = S_i \quad (1.131)$$

où i représente les différentes espèces dont le potentiel chimique est μ_i , z , la direction perpendiculaire à la surface de la bulle en expansion, Γ_i , le taux de conversion de la particule i en d'autres particules, S_i , le courant source de violation de CP généré au niveau de la paroi ⁽¹³⁾. Le point essentiel qui est aussi le point de désaccord, concerne la façon de dériver ces termes sources [48–53, 86, 88–93]. Dans le MSSM, les sources dominantes de violation de CP sont les paramètres complexes μ et M_2 dans la matrice de masse des charginos mélangeant winos et higgsinos chargés:

$$\bar{\psi}_R \mathcal{M}_\chi \psi_L = (\overline{\widetilde{W}^+}, \overline{\widetilde{H}^+}_u)_R \begin{pmatrix} M_2 & gH_d \\ gH_u & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{W}^+ \\ \widetilde{H}^+_d \end{pmatrix}_L. \quad (1.132)$$

La variation du champ de Higgs en fonction de z est responsable de la variation de la phase des états propres de masse de la matrice (1.132) à travers le mur et engendre ainsi des courants sources de violation de CP. Le calcul de ces courants dépend sensiblement du profil du mur [94] et de sa vitesse [54, 95–97]. Selon le formalisme utilisé, les prédictions sur la valeur de la phase du paramètre μ nécessaire pour produire une asymétrie baryonique η de l'ordre de 10^{-11} varient. D'après les derniers résultats de Cline *et al.* [98], pour que cette phase soit compatible avec les contraintes imposées par le moment électrique dipolaire du neutron, il est nécessaire que $M_2 \sim \mu \sim 50$ GeV, ce qui est exclu par LEP.

⁽¹³⁾ Il n'y a pas de violation de CP dans la phase symétrique. La source de violation de CP est à l'intérieur de la bulle et diffuse vers l'extérieur dans une région limitée à proximité du mur

Bibliographie du chapitre I

- [1] A. D. Sakharov, *violation of CP invariance, C asymmetry, and baryon asymmetry of the universe*, Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **5** (1967) 32–35.
- [2] S. Weinberg, *Cosmological production of baryons*, Phys. Rev. Lett. **42** (1979) 850.
- [3] H. Georgi and S. L. Glashow, *Unity of all elementary particle forces*, Phys. Rev. Lett. **32** (1974) 438.
- [4] G. 't Hooft, *Symmetry breaking through Bell-Jackiw anomalies*, Phys. Rev. Lett. **37** (1976) 8–11.
- [5] V. A. Kuzmin, V. A. Rubakov, and M. E. Shaposhnikov, *On the anomalous electroweak baryon number nonconservation in the early universe*, Phys. Lett. **B155** (1985) 36.
- [6] P. Chardonnet, J. Orloff, and P. Salati, *The production of anti-matter in our galaxy*, Phys. Lett. **B409** (1997) 313–320, [astro-ph/9705110](#).
- [7] K. A. Olive, G. Steigman, and T. P. Walker, *Primordial nucleosynthesis: Theory and observations*, Phys. Rept. **333** (2000) 389–407, [astro-ph/9905320](#).
- [8] A. G. Cohen, A. D. Rujula, and S. L. Glashow, *A matter-antimatter universe?*, Astrophys. J. **495** (1998) 539, [astro-ph/9707087](#).
- [9] L. Kofman, A. Linde, and A. A. Starobinsky, *Reheating after inflation*, Phys. Rev. Lett. **73** (1994) 3195–3198, [hep-th/9405187](#).
- [10] A. Riotto, *Theories of baryogenesis*, [hep-ph/9807454](#).
- [11] M. Fukugita and T. Yanagida, *Baryogenesis without grand unification*, Phys. Lett. **B174** (1986) 45.
- [12] A. D. Dolgov, *NonGUT baryogenesis*, Phys. Rept. **222** (1992) 309–386.
- [13] A. G. Cohen, D. B. Kaplan, and A. E. Nelson, *Progress in electroweak baryogenesis*, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **43** (1993) 27–70, [hep-ph/9302210](#).
- [14] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, *Electroweak baryon number non-conservation in the early universe and in high-energy collisions*, Usp. Fiz. Nauk **166** (1996) 493–537, [hep-ph/9603208](#).
- [15] J. Curtis G. Callan, R. F. Dashen, and D. J. Gross, *The structure of the gauge theory vacuum*, Phys. Lett. **B63** (1976) 334–340.
- [16] R. Jackiw and C. Rebbi, *Vacuum periodicity in a Yang-Mills quantum theory*, Phys. Rev. Lett. **37** (1976) 172–175.

- [17] R. Dashen, B. Hasslacher, and A. Neveu, *Nonperturbative methods and extended hadron models in field theory. 3. Four-dimensional nonabelian models*, Phys. Rev. **D10** (1974) 4138.
- [18] N. S. Manton, *Topology in the Weinberg-Salam theory*, Phys. Rev. **D28** (1983) 2019.
- [19] F. R. Klinkhamer and N. S. Manton, *A saddle point solution in the Weinberg-Salam theory*, Phys. Rev. **D30** (1984) 2212.
- [20] J. Kunz, B. Kleihaus, and Y. Brihaye, *Sphalerons at finite mixing angle*, Phys. Rev. **D46** (1992) 3587–3600.
- [21] Y. Brihaye and J. Kunz, *Electroweak bubbles and sphalerons*, Phys. Rev. **D48** (1993) 3884–3890, hep-ph/9304256.
- [22] J. M. Moreno, D. H. Oaknin, and M. Quiros, *Sphalerons in the MSSM*, Nucl. Phys. **B483** (1997) 267–290, hep-ph/9605387.
- [23] M. Dine, O. Lechtenfeld, B. Sakita, W. Fischler, and J. Polchinski, *Baryon number violation at high temperature in the standard model*, Nucl. Phys. **B342** (1990) 381–408.
- [24] J. S. Langer, *Statistical theory of the decay of metastable states*, Ann. Phys. **54** (1969) 258–275.
- [25] I. Affleck, *Quantum statistical metastability*, Phys. Rev. Lett. **46** (1981) 388.
- [26] L. Carson, X. Li, L. McLerran, and R.-T. Wang, *Exact computation of the small fluctuation determinant around a sphaleron*, Phys. Rev. **D42** (1990) 2127–2143.
- [27] P. Arnold and L. McLerran, *Sphalerons, small fluctuations and baryon number violation in electroweak theory*, Phys. Rev. **D36** (1987) 581.
- [28] S. Y. Khlebnikov and M. E. Shaposhnikov, *The statistical theory of anomalous fermion number nonconservation*, Nucl. Phys. **B308** (1988) 885.
- [29] J. Ambjorn, M. Laursen, and M. E. Shaposhnikov, *Baryon asymmetry of the universe: a Monte Carlo study on the lattice*, Phys. Lett. **B197** (1987) 49.
- [30] J. Ambjorn, T. Askgaard, H. Porter, and M. E. Shaposhnikov, *Lattice simulations of electroweak sphaleron transitions in real time*, Phys. Lett. **B244** (1990) 479–487.
- [31] J. Ambjorn, T. Askgaard, H. Porter, and M. E. Shaposhnikov, *Sphaleron transitions and baryon asymmetry: A Numerical real time analysis*, Nucl. Phys. **B353** (1991) 346–378.

- [32] J. Ambjorn and K. Farakos, *Topography of the hot sphaleron transitions*, Phys. Lett. **B294** (1992) 248–256, [hep-lat/9207020](#).
- [33] J. Ambjorn and A. Krasnitz, *The classical sphaleron transition rate exists and is equal to $1.1(\alpha_w T)^4$* , Phys. Lett. **B362** (1995) 97–104, [hep-ph/9508202](#).
- [34] P. Arnold, D. Son, and L. G. Yaffe, *The hot baryon violation rate is $O(\alpha_w^5 T^4)$* , Phys. Rev. **D55** (1997) 6264–6273, [hep-ph/9609481](#).
- [35] P. Arnold, *Hot B violation, the lattice, and hard thermal loops*, Phys. Rev. **D55** (1997) 7781–7796, [hep-ph/9701393](#).
- [36] P. Arnold, *B violation in the hot standard model*, [hep-ph/9706305](#).
- [37] G. D. Moore, *The sphaleron rate: Where we stand*, [hep-ph/9902464](#).
- [38] G. D. Moore, *The sphaleron rate: Boedeker's leading log*, Nucl. Phys. **B568** (2000) 367, [hep-ph/9810313](#).
- [39] E. Braaten and R. D. Pisarski, *Soft amplitudes in hot gauge theories: A general analysis*, Nucl. Phys. **B337** (1990) 569.
- [40] E. Braaten and R. D. Pisarski, *Simple effective Lagrangian for hard thermal loops*, Phys. Rev. **D45** (1992) 1827–1830.
- [41] G. D. Moore, C. ran Hu, and B. Muller, *Chern-Simons number diffusion with hard thermal loops*, Phys. Rev. **D58** (1998) 045001, [hep-ph/9710436](#).
- [42] D. Bodeker, G. D. Moore, and K. Rummukainen, *Hard thermal loops and the sphaleron rate on the lattice*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **83** (2000) 583–585, [hep-lat/9909054](#).
- [43] A. I. Bochkarev, S. V. Kuzmin, and M. E. Shaposhnikov, *On the model dependence of the cosmological upper bound on the higgs boson and top quark masses*, Phys. Rev. **D43** (1991) 369–374. [PHRVA,D43,369](#);
- [44] M. Quiros, *Finite temperature field theory and phase transitions*, [hep-ph/9901312](#).
- [45] A. E. Nelson, D. B. Kaplan, and A. G. Cohen, *Why there is something rather than nothing: Matter from weak interactions*, Nucl. Phys. **B373** (1992) 453–478.
- [46] G. R. Farrar and M. E. Shaposhnikov, *Baryon asymmetry of the universe in the minimal Standard Model*, Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 2833–2836, [hep-ph/9305274](#).
- [47] G. R. Farrar and M. E. Shaposhnikov, *Baryon asymmetry of the universe in the standard electroweak theory*, Phys. Rev. **D50** (1994) 774, [hep-ph/9305275](#).

- [48] P. Huet and E. Sather, *Electroweak baryogenesis and standard model CP violation*, Phys. Rev. **D51** (1995) 379–394, [hep-ph/9404302](#).
- [49] M. Joyce, T. Prokopec, and N. Turok, *Nonlocal electroweak baryogenesis. Part 1: Thin wall regime*, Phys. Rev. **D53** (1996) 2930–2957, [hep-ph/9410281](#).
- [50] M. Joyce, T. Prokopec, and N. Turok, *Nonlocal electroweak baryogenesis. Part 2: The Classical regime*, Phys. Rev. **D53** (1996) 2958–2980, [hep-ph/9410282](#).
- [51] P. Huet and A. E. Nelson, *Electroweak baryogenesis in supersymmetric models*, Phys. Rev. **D53** (1996) 4578–4597, [hep-ph/9506477](#).
- [52] M. Carena, M. Quiros, A. Riotto, I. Vilja, and C. E. M. Wagner, *Electroweak baryogenesis and low energy supersymmetry*, Nucl. Phys. **B503** (1997) 387, [hep-ph/9702409](#).
- [53] J. M. Cline, M. Joyce, and K. Kainulainen, *Supersymmetric electroweak baryogenesis in the WKB approximation*, Phys. Lett. **B417** (1998) 79–86, [hep-ph/9708393](#).
- [54] G. D. Moore and T. Prokopec, *How fast can the wall move? A Study of the electroweak phase transition dynamics*, Phys. Rev. **D52** (1995) 7182–7204, [hep-ph/9506475](#).
- [55] D. J. Gross, R. D. Pisarski, and L. G. Yaffe, *QCD and instantons at finite temperature*, Rev. Mod. Phys. **53** (1981) 43.
- [56] R. R. Parwani, *Resummation in a hot scalar field theory*, Phys. Rev. **D45** (1992) 4695–4705, [hep-ph/9204216](#).
- [57] P. Arnold and O. Espinosa, *The Effective potential and first order phase transitions: Beyond leading-order*, Phys. Rev. **D47** (1993) 3546–3579, [hep-ph/9212235](#).
- [58] K. Kajantie, M. Laine, K. Rummukainen, and M. Shaposhnikov, *Is there a hot electroweak phase transition at $m(H) \gtrsim \text{approx. } m(W)$?*, Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 2887–2890, [hep-ph/9605288](#).
- [59] M. Gurtler, E. M. Ilgenfritz, and A. Schiller, *Where the electroweak phase transition ends*, Phys. Rev. **D56** (1997) 3888–3895, [hep-lat/9704013](#).
- [60] K. Rummukainen, M. Tsypin, K. Kajantie, M. Laine, and M. Shaposhnikov, *The universality class of the electroweak theory*, Nucl. Phys. **B532** (1998) 283–314, [hep-lat/9805013](#).
- [61] F. Csikor, Z. Fodor, and J. Heitger, *Endpoint of the hot electroweak phase transition*, Phys. Rev. Lett. **82** (1999) 21, [hep-ph/9809291](#).

- [62] J. R. Espinosa, *Dominant Two-Loop Corrections to the MSSM Finite Temperature Effective Potential*, Nucl. Phys. **B475** (1996) 273–292, hep-ph/9604320.
- [63] B. de Carlos and J. R. Espinosa, *The baryogenesis window in the MSSM*, Nucl. Phys. **B503** (1997) 24, hep-ph/9703212.
- [64] M. Carena, M. Quiros, and C. E. M. Wagner, *Opening the Window for Electroweak Baryogenesis*, Phys. Lett. **B380** (1996) 81–91, hep-ph/9603420.
- [65] M. Carena, M. Quiros, and C. E. M. Wagner, *Electroweak baryogenesis and Higgs and stop searches at LEP and the Tevatron*, Nucl. Phys. **B524** (1998) 3, hep-ph/9710401.
- [66] D. Bodeker, P. John, M. Laine, and M. G. Schmidt, *The 2-loop MSSM finite temperature effective potential with stop condensation*, Nucl. Phys. **B497** (1997) 387–414, hep-ph/9612364.
- [67] J. M. Cline and G. D. Moore, *Supersymmetric electroweak phase transition: Baryogenesis versus experimental constraints*, Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 3315–3318, hep-ph/9806354.
- [68] F. Csikor *et al.*, *Electroweak phase transition in the MSSM: 4-dimensional lattice simulations*, Phys. Rev. Lett. **85** (2000) 932, hep-ph/0001087.
- [69] Y. Aoki, F. Csikor, Z. Fodor, and A. Ukawa, *The endpoint of the first-order phase transition of the $SU(2)$ gauge-Higgs model on a 4-dimensional isotropic lattice*, Phys. Rev. **D60** (1999) 013001, hep-lat/9901021.
- [70] K. Kajantie, M. Laine, K. Rummukainen, and M. Shaposhnikov, *Generic rules for high temperature dimensional reduction and their application to the standard model*, Nucl. Phys. **B458** (1996) 90–136, hep-ph/9508379.
- [71] J. M. Cline and K. Kainulainen, *Supersymmetric Electroweak Phase Transition: Beyond Perturbation Theory*, Nucl. Phys. **B482** (1996) 73–91, hep-ph/9605235.
- [72] M. Laine, *Effective theories of MSSM at high temperature*, Nucl. Phys. **B481** (1996) 43–84, hep-ph/9605283.
- [73] M. Losada, *The two-loop finite-temperature effective potential of the MSSM and baryogenesis*, Nucl. Phys. **B537** (1999) 3, hep-ph/9806519.
- [74] M. Losada, *Mixing effects in the finite-temperature effective potential of the MSSM with a light stop*, Nucl. Phys. **B569** (2000) 125, hep-ph/9905441.
- [75] G. W. Anderson and L. J. Hall, *The Electroweak phase transition and baryogenesis*, Phys. Rev. **D45** (1992) 2685–2698.

- [76] J. R. Espinosa, M. Quiros, and F. Zwirner, *On the electroweak phase transition in the minimal supersymmetric Standard Model*, Phys. Lett. **B307** (1993) 106–115, [hep-ph/9303317](#).
- [77] A. Brignole, J. R. Espinosa, M. Quiros, and F. Zwirner, *Aspects of the electroweak phase transition in the minimal supersymmetric standard model*, Phys. Lett. **B324** (1994) 181–191, [hep-ph/9312296](#).
- [78] G. F. Giudice, *The Electroweak phase transition in supersymmetry*, Phys. Rev. **D45** (1992) 3177–3182.
- [79] S. Myint, *Baryogenesis constraints on the minimal supersymmetric model*, Phys. Lett. **B287** (1992) 325–330, [hep-ph/9206266](#).
- [80] A. G. Cohen and A. E. Nelson, *Supersymmetric baryogenesis*, Phys. Lett. **B297** (1992) 111–117, [hep-ph/9209245](#).
- [81] M. B. Gavela, P. Hernandez, J. Orloff, and O. Pene, *Standard model baryogenesis*, [hep-ph/9407403](#).
- [82] M. B. Gavela, P. Hernandez, J. Orloff, and O. Pene, *Standard model CP violation and baryon asymmetry*, Mod. Phys. Lett. **A9** (1994) 795–810, [hep-ph/9312215](#).
- [83] S. L. Glashow and J. Iliopoulos and L. Maiani *Weak Interactions with Lepton – Hadron Symmetry*, Phys. Rev. **D2** (1970) 1285.
- [84] M. Laine and K. Rummukainen, *A strong electroweak phase transition up to $m(H)$ approx. 105-GeV*, Phys. Rev. Lett. **80** (1998) 5259–5262, [hep-ph/9804255](#).
- [85] M. Laine and K. Rummukainen, *The MSSM electroweak phase transition on the lattice*, Nucl. Phys. **B535** (1998) 423–457, [hep-lat/9804019](#).
- [86] M. Carena, J. M. Moreno, M. Quiros, M. Seco, and C. E. M. Wagner, *Supersymmetric CP-violating currents and electroweak baryogenesis*, [hep-ph/0011055](#).
- [87] A. Kusenko, P. Langacker, and G. Segre, *Phase Transitions and Vacuum Tunneling Into Charge and Color Breaking Minima in the MSSM*, Phys. Rev. **D54** (1996) 5824–5834, [hep-ph/9602414](#).
- [88] A. Riotto, *Supersymmetric electroweak baryogenesis, nonequilibrium field theory and quantum Boltzmann equations*, Nucl. Phys. **B518** (1998) 339, [hep-ph/9712221](#).
- [89] A. Riotto, *The more relaxed supersymmetric electroweak baryogenesis*, Phys. Rev. **D58** (1998) 095009, [hep-ph/9803357](#).

- [90] N. Rius and V. Sanz, *Supersymmetric electroweak baryogenesis*, Nucl. Phys. **B570** (2000) 155, [hep-ph/9907460](#).
- [91] M. Joyce, K. Kainulainen, and T. Prokopec, *The semiclassical propagator in field theory*, Phys. Lett. **B468** (1999) 128, [hep-ph/9906411](#).
- [92] J. M. Cline, M. Joyce, and K. Kainulainen, *Supersymmetric electroweak baryogenesis*, JHEP **07** (2000) 018, [hep-ph/0006119](#).
- [93] S. J. Huber, P. John, and M. G. Schmidt, *Bubble walls, CP violation and electroweak baryogenesis in the MSSM*, [hep-ph/0101249](#).
- [94] S. J. Huber, P. John, M. Laine, and M. G. Schmidt, *CP violating bubble wall profiles*, Phys. Lett. **B475** (2000) 104, [hep-ph/9912278](#).
- [95] G. D. Moore, *Electroweak bubble wall friction: Analytic results*, JHEP **03** (2000) 006, [hep-ph/0001274](#).
- [96] P. John and M. G. Schmidt, *Do stops slow down electroweak bubble walls?*, Nucl. Phys. **B598** (2001) 291–305, [hep-ph/0002050](#).
- [97] P. John and M. G. Schmidt, *Bubble wall velocity in the MSSM*, [hep-ph/0012077](#).
- [98] J. M. Cline and K. Kainulainen, “A new source for electroweak baryogenesis in the MSSM,” Phys. Rev. Lett. **85** (2000) 5519 [[hep-ph/0002272](#)].

Chapitre 2

Phénoménologie des théories de supercordes

Ce chapitre présente les conséquences phénoménologiques de la brisure de supersymétrie par condensation de jauginos dans les théories effectives de cordes de type I. Nous commençons dans la première section par motiver les théories de cordes et leur approche phénoménologique. La deuxième section introduit les théories de type I, plus précisément les orientifolds de type IIB pour lesquels nous présentons un mécanisme de brisure de supersymétrie. La troisième section est consacrée à la brisure spontanée de CP dans ce modèle ainsi que les propriétés sous CP des termes de brisure douce.

2.1 Quel pont entre le MSSM et la théorie $\mathcal{M}$?

Le but ultime de la physique des hautes énergies est l'unification de la gravitation avec les autres interactions fondamentales au sein d'une même théorie. A ce jour, la théorie des supercordes est la plus prometteuse et l'unique théorie réunissant dans un même cadre gravité et interactions de jauge. Il n'existe que cinq théories de supercordes cohérentes (sans anomalies): Les théories de cordes fermées IIA et IIB, les cordes hétérotiques $E8 \otimes E8$ et $SO(32)$ et les cordes ouvertes de type I avec le groupe de jauge $SO(32)$. Toutes sont formulées à dix dimensions. Toutes contiennent dans leur spectre une particule de masse nulle de spin 2 interprétée comme le graviton. Notons aussi que la supersymétrie d'espace-temps est un ingrédient clé de ces théories⁽¹⁾. Il est établi depuis le milieu des années 90 que ces cinq théories sont reliées les unes aux autres par des symétries de dualité [7–11] et peuvent être interprétées comme différentes manifestations d'une ultime théorie $\mathcal{M}$ [12–14], qui, selon le régime considéré, s'exprime par l'une ou l'autre de ces limites.

Le spectre de ces théories présente un nombre infini d'états massifs correspondant

⁽¹⁾Remarquons cependant que des théories de cordes non supersymétriques sans tachyon ont été construites [1, 2] et plus récemment [3, 4] ainsi que [5, 6] (en dimension moins élevée).

aux modes d'excitation de la corde. L'énergie d'excitation est quantifiée en termes de l'échelle fondamentale de la théorie, M_s , qui est le seul paramètre arbitraire de la théorie, tous les autres sont déterminés dynamiquement par la valeur moyenne de champs comme le dilaton ou les champs de modules. Les théories effectives décrivant les modes de masse nulle sont décrites par des théories des champs ordinaires dont les symétries et le contenu en matière sont bien définis. Ce n'est pas le cas de l'état du vide qui, lui, est très dégénéré. Les théories effectives hétérotiques et de type I sont décrites, dans leur secteur gravitationnel, par la même théorie de supergravité $N = 1$, $D = 10$. Les théories de type II possèdent deux supersymétries à dix dimensions, $N = (1, 1)$ pour la théorie IIA non chirale et $N = (2, 0)$ pour la théorie IIB chirale. Toutes ces théories effectives à dix dimensions comportent un champ scalaire ϕ , le dilaton, définissant la constante de couplage des cordes:

$$\lambda = e^\phi \quad (2.1)$$

Il existe de nombreuses manières de construire des modèles quadri-dimensionnels réalistes à partir d'une théorie des cordes à dix dimensions, ce qui rend la connexion entre supercordes et modèle standard difficile en pratique. La procédure naturelle consiste à la fois à réduire le nombre de dimensions et de supersymétries. Lors de la réduction dimensionnelle, l'espace à dix dimensions est décomposé selon $M_{10} = M_4 \times K_6$ où M_4 est l'espace-temps de Minkowski et K_6 est une variété compacte dont le volume V définit l'échelle des excitations de Kaluza–Klein dans l'espace *interne*, $M_c = V^{-1/6}$ (dans le cas où la compactification est isotrope). Le groupe de jauge, le contenu en matière et les couplages à quatre dimensions sont fonction de la géométrie de l'espace interne. Après une simple compactification toroïdale, les cordes hétérotiques donnent lieu à des théories possédant $N = 4$ supersymétries à quatre dimensions. Quant aux théories de type II, elles correspondent à $N = 8$ à $D = 4$. Plusieurs procédures peuvent être suivies pour réduire le nombre de supersymétries:

- au sein de la théorie perturbative des cordes: la supersymétrie est brisée par compactification; afin de préserver une supersymétrie $N = 1$ à quatre dimensions, les dimensions supplémentaires sont compactifiées sur un Calabi-Yau ou un orbifold. En l'absence de D-branes⁽²⁾, la seule méthode connue pour briser la supersymétrie spontanément est la généralisation du mécanisme de Scherk–Schwarz à la théorie des cordes [26–30]. Un twist est réalisé lors de la compactification (pour les conséquences phénoménologiques voir [31–33]);
- au sein de la théorie des champs effective de basse énergie: la supersymétrie est brisée par une méthode de théorie des champs utilisant la dynamique (non perturbative) du secteur *caché*. Le mécanisme le plus répandu est la condensation de jaugino [34–37].

Supposons qu'il existe une supersymétrie $N = 1$ à l'échelle électrofaible, ce qui est motivé en particulier par la résolution du problème de hiérarchie en physique des

⁽²⁾Ces dernières années ont vu naître de nouveaux mécanismes de brisure de la supersymétrie basés sur la présence de D-branes dans les théories de type I [5, 6, 15–23] (pour des revues voir aussi [24, 25]).

particules (exposé dans le chapitre 3). Si le spectre des particules supersymétriques est mesuré, cela constituera une première connexion avec la théorie des cordes. Les termes de brisure douce présentés dans le premier chapitre sont en effet calculables en principe dans la théorie effective de cordes une fois connu le mécanisme de brisure de la supersymétrie. Leurs propriétés sous CP et leur structure de saveurs sont sévèrement contraintes par l'expérience. Pour cette raison, la phénoménologie des termes *soft* constitue le point sensible pour tester la théorie de cordes sous-jacente.

2.1.1 Phénoménologie des supercordes: problématique

La première approche phénoménologique consiste à exprimer les paramètres quadri-dimensionnels autrement dit les constantes de couplage de jauge et gravitationnelle α_{GUT} et M_P en fonction des paramètres dix-dimensionnels, $\lambda = e^\phi$ et M_s , et du volume de compactification V . Pour ce faire, nous devons sélectionner dans l'action effective dix-dimensionnelle les termes qui seront, après compactification, à l'origine de l'action⁽³⁾:

$$S_{4D} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{\mathcal{R}}{2\kappa^2} - \frac{\text{tr } F^2}{16\pi\alpha} + \dots \right), \quad (2.2)$$

avec $\kappa^2 = m_P^{-2}$ où $m_P = \frac{M_P}{\sqrt{8\pi}}$ est la masse de Planck réduite et

$$M_P = 1.2 \cdot 10^{19} \frac{\text{GeV}}{c^2} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G_N}} \quad (2.3)$$

où $G_N = 6.67 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ est la constante de Newton. Ainsi, dans les unités où $\hbar = c = 1$:

$$M_P^2 = G_N^{-1} \quad (2.4)$$

Notons que cette normalisation du terme de courbure est équivalente à l'action d'Einstein

$$\int d^4x \frac{\mathcal{R}}{16\pi G_N} \quad (2.5)$$

Un exemple: le cas hétérotique

Considérons par exemple l'action effective de la théorie hétérotique perturbative à dix dimensions. Les termes de courbure et de Yang-Mills sont tous deux générés à l'ordre des arbres et de la forme:

$$S_{het} = \int d^{10}x \sqrt{-g} \left(\frac{M_s^8}{\lambda^2} \mathcal{R} - \frac{M_s^6}{\lambda^2} \text{tr } F^2 + \dots \right), \quad (2.6)$$

Après compactification:

$$S_{het} = \int d^4x \sqrt{-g} V \left(\frac{M_s^8}{\lambda^2} \mathcal{R} - \frac{M_s^6}{\lambda^2} \text{tr } F^2 + \dots \right), \quad (2.7)$$

⁽³⁾ où la convention utilisée pour la signature de la métrique est $(-, +, +, +)$.

L'identification des coefficients respectifs de (2.2) et (2.7) donne

$$\begin{aligned} M_s &= \sqrt{\alpha_{GUT}} M_P \sim 10^{18} \text{ GeV} \\ \lambda &= \sqrt{16\pi\alpha_{GUT} V} M_s^3 \end{aligned} \quad (2.8)$$

La première relation indique l'unification des couplages de jauge avec la constante de couplage gravitationnelle $G_N = \alpha_{GUT} M_s^{-2}$. Pour rester dans le régime perturbatif, il nous faut imposer $\lambda < 1$, ce qui correspond à un volume de compactification

$$V < \frac{M_P^{-6}}{16\pi\alpha_{GUT}^4} \quad (2.9)$$

En outre, si nous identifions l'échelle de grande unification M_{GUT} avec l'énergie des états de Kaluza–Klein les plus légers, soit l'échelle de compactification au-delà de laquelle l'approche de la théorie des champs n'est plus valable, nous avons :

$$M_{GUT} > (16\pi)^{1/6} \alpha_{GUT}^{2/3} M_P \quad (2.10)$$

ce qui est trop élevé de deux ordres de grandeur par rapport à l'échelle M_{GUT} obtenue par extrapolation des couplages mesurés à basse énergie. Demander $M_{GUT} \sim (2 - 4) 10^{16}$ GeV nécessite un régime de couplage fort. Nous verrons dans la deuxième section comment les relations (2.8) sont modifiées dans le cas des cordes de type I pour lesquelles le régime perturbatif n'est pas incompatible avec une échelle des cordes basse.

Champs de modules

Nous souhaitons maintenant exprimer λ et M_s en fonction des valeurs moyennes des champs scalaires de la théorie compactifiée. A dix dimensions, toutes les théories contiennent un dilaton ϕ , une forme antisymétrique $B_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ et un graviton $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$, où $\hat{\mu}, \hat{\nu} = 0, \dots, 9$. Après compactification, les nouveaux degrés de liberté bosoniques correspondent à (μ, ν) sont les indices de Minkowski, I, J ceux des coordonnées compactes):

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &\rightarrow \text{graviton 4D} \\ g_{\mu I}, B_{\mu I} &\rightarrow \text{vecteurs} \\ g_{IJ} &\rightarrow \text{scalaires décrivant la géométrie de l'espace compact} \\ B_{\mu\nu}, B_{IJ} &\rightarrow \text{pseudo-scalaires} \end{aligned}$$

Les degrés de liberté scalaires sont réarrangés et, dans le secteur universel, décrits par le dilaton quadri-dimensionnel noté S et les champs de modules T_i où $i = 1, 2, 3$ indexe les coordonnées complexes. Les expressions de S et T_i dépendent de la théorie compactifiée. Nous les écrirons précisément dans le cas de la corde de type I dans la prochaine section. S'y ajoutent généralement d'autres champs dépendant du modèle de

compactification⁽⁴⁾. Pour l'instant, nous souhaitons compléter l'action (2.2) et inclure les degrés de liberté scalaires que nous notons de manière générique

$$\phi^\alpha = \{S, T_i, \phi^n\} \quad (2.11)$$

où ϕ^n représentent des champs de matière. Toutes les quantités observables comme les couplages de Yukawa, les couplages de jauge et les termes de brisure de supersymétrie dépendent des valeurs moyennes dans le vide des champs scalaires. Il est donc essentiel de les stabiliser.

2.1.2 Supergravité $D = 4$, $N = 1$.

Pour des raisons phénoménologiques nous nous intéressons à un modèle de cordes chirale quadri-dimensionnel possédant $N = 1$ supersymétrie. Le spectre de ces modèles contient: un multiplet gravitationnel (graviton $G_{\mu\nu}$, gravitino Ψ_μ), des multiplets de jauge (A_μ^a, λ^a), des multiplets chiraux $\Phi^\alpha = (\phi^\alpha, \psi^\alpha)$ décrivant les champs de matière, les champs de modules et le dilaton. L'action effective quadri-dimensionnelle contient les couplages non renormalisables permettant de communiquer la brisure de supersymétrie au secteur observable. C'est donc la deuxième méthode de brisure de supersymétrie exposée ci-dessus que nous allons utiliser dans ce chapitre. C'est aussi l'approche qui a été le plus utilisée par le passé, essentiellement dans le cadre de la corde hétérotique [39]. Notre travail sera de la mettre en oeuvre dans les modèles de type I. Le lagrangien le plus général s'exprime à l'aide de trois fonctions, le potentiel de Kähler, $K(\Phi, \bar{\Phi})$, le superpotentiel $W(\Phi)$ et la fonction cinétique de jauge $f_{ab}(\Phi)$. f_{ab} est une fonction holomorphe des superchamps donnant les constantes de couplage de jauge:

$$g_{ab}^{-2} = \text{Re}(f_{ab}(\Phi)) \quad (2.12)$$

Le superpotentiel W est une fonction holomorphe des Φ^α . Il est invariant sous les transformations de jauge et de saveur et fixe (entre autres) les couplages de Yukawa. K est aussi un invariant de jauge, c'est une fonction réelle des superchamps qui fixe notamment la normalisation des champs scalaires. Rappelons que l'espace des champs scalaires ϕ^α , composantes des supermultiplets chiraux $\Phi^\alpha = (\phi^\alpha, \psi^\alpha, F^\alpha)$ forme une variété kählérienne dont la géométrie définit les termes cinétiques des théories supersymétriques $N = 1$. On définit la métrique de Kähler par:

$$K_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{\partial^2 K(\phi^\alpha, \bar{\phi}^\alpha)}{\partial \phi^\alpha \partial \bar{\phi}^\beta} \quad (2.13)$$

⁽⁴⁾De manière générique, les modèles de cordes quadri-dimensionnels possèdent trop de superchamps chiraux par rapport à ceux du MSSM. Ce surplus de matière peut néanmoins être perçu comme un avantage: les modèles contiennent en effet souvent des interactions de jauge *cachées* qui ne se couplent pas avec les particules observables mais peuvent être responsables de la brisure de supersymétrie. Après celle-ci, une direction particulière de l'espace des champs scalaires est choisie et permet d'éliminer (*via* les couplages de Yukawa) les particules indésirables.

Son inverse transposée sera notée par la suite $K^{\alpha\bar{\beta}}$. Les termes cinétiques du lagrangien supersymétrique s'écrivent alors:

$$\mathcal{L}_{\text{cinétique}} = K_{\alpha\bar{\beta}} (D_\mu \bar{\phi}^{\bar{\alpha}} D^\mu \phi^\beta + i \bar{\psi}^\beta D \psi^\alpha + F^\alpha F^{\bar{\beta}}) \quad (2.14)$$

où les F^α sont les champs auxiliaires des multiplets chiraux. Leurs expressions sont obtenues à partir des équations du mouvement:

$$F^\alpha = \kappa^{-1} e^{\kappa G/2} G^{\alpha\bar{\beta}} G_{\bar{\beta}} \quad (2.15)$$

où

$$G = K + \kappa^{-2} \ln |\kappa^3 W|^2, \quad G_{\bar{\beta}} = \frac{\partial G}{\partial \bar{\phi}^{\bar{\beta}}}, \quad \text{et} \quad G^{\alpha\bar{\beta}} = K^{\alpha\bar{\beta}}. \quad (2.16)$$

Les champs auxiliaires des multiplets vectoriels sont donnés par:

$$D^a = G_\alpha \delta_a \phi^\alpha \quad (2.17)$$

Le superpotentiel étant invariant de jauge et ne dépendant que des ϕ^α , nous avons

$$D^a = K_\alpha \delta_a \phi^\alpha \quad (2.18)$$

Généralement, les superchamps chiraux se transforment linéairement sous la symétrie de jauge: $\delta_a \Phi^\alpha = (T^a)_\beta^\alpha \Phi^\beta$, d'où

$$D^a = K_\alpha (T^a)_\beta^\alpha \phi^\beta. \quad (2.19)$$

Exprimons maintenant la partie purement bosonique du lagrangien supersymétrique:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}_{bos}}{\sqrt{-g}} = & \frac{1}{2\kappa^2} \mathcal{R} - K_{\alpha\bar{\beta}} D_\mu \bar{\phi}^{\bar{\alpha}} D^\mu \phi^\beta - V(\phi^\alpha, \bar{\phi}^{\bar{\alpha}}) - \frac{1}{4} \text{Re}(f_{ab}(\Phi)) F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu} \\ & + \frac{1}{8} \text{Im}(f_{ab}(\Phi)) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^a F_{\rho\sigma}^b \end{aligned} \quad (2.20)$$

Le potentiel scalaire s'écrit, après avoir remplacé les champs auxiliaires par leurs expressions (2.15) et (2.19):

$$V(\phi^\alpha, \bar{\phi}^{\bar{\alpha}}) = V^F(\phi^\alpha, \bar{\phi}^{\bar{\alpha}}) + V^D(\phi^\alpha, \bar{\phi}^{\bar{\alpha}}) \quad (2.21)$$

$$V^F(\phi^\alpha, \bar{\phi}^{\bar{\alpha}}) = \kappa^{-2} e^{\kappa^2 G} (G_\alpha G^{\alpha\bar{\beta}} G_{\bar{\beta}} - 3\kappa^{-2}) \quad (2.22)$$

$$V^D(\phi^\alpha, \bar{\phi}^{\bar{\alpha}}) = \frac{1}{2} g_{ab}^2 D^a D^b \quad (2.23)$$

Une grande partie du travail exposé par la suite repose sur la minimisation de ce potentiel.

Les expressions de K , W et f décrivant le comportement de basse énergie d'un modèle de supercordes peuvent être dérivées au sein de la théorie perturbative soit directement en calculant l'action quadri-dimensionnelle ou bien en identifiant les symétries

accidentelles de l'action des cordes et en les imposant à l'action de supergravité. Une autre méthode consiste à comparer les amplitudes calculées en théorie des cordes et en supergravité. A l'ordre des arbres, le potentiel de Kähler pour le dilaton et les champs de modules s'écrit⁽⁵⁾

$$K(S, T_i) = -\ln(S + \bar{S}) - \sum_{i=1}^3 \ln(T_i + \bar{T}_i) \quad (2.24)$$

et la fonction cinétique de jauge se trouve être diagonale; elle s'écrit, pour la corde hétérotique:

$$f_{ab} = k_a \delta_{ab} S \quad (2.25)$$

où k_a est une constante de normalisation, le niveau de Kac–Moody du groupe de jauge. Souvent, pour les groupes non abéliens $k_a = 1$. L'unification des couplages de jauge est donc naturelle en théorie des cordes.

2.1.3 Brisure spontanée de la supergravité

Notre intérêt est de faire le lien entre la stabilisation des champs scalaires ϕ^α et la brisure de la supersymétrie. Les valeurs moyennes non nulles des champs auxiliaires $\langle F^\alpha \rangle$ et $\langle D^a \rangle$ signalent la brisure spontanée de la supersymétrie locale. Les termes de brisure douce (1.85-1.88) exposés dans le premier chapitre peuvent être calculés en supergravité [40–44]. Ils s'expriment en fonction de la masse du gravitino, $m_{3/2}$, elle-même fonction des *vevs* des champs scalaires,

$$m_{3/2} = \kappa^{-1} \langle e^{\kappa G/2} \rangle \quad (2.26)$$

Nous les écrirons dans un premier temps tels qu'ils apparaissent dans le lagrangien de supergravité. Cependant, ils devront au final être calculés pour les champs physiques, c'est à dire les champs redéfinis dans une base où les termes cinétiques sont canoniquement normalisés.

Termes de brisure douce

Les termes de brisure douce associés aux champs de matière du secteur visible que nous noterons $C^i, \bar{C}^{\bar{j}}$, sont de la forme:

$$V_{soft} = \tilde{m}_{i\bar{j}}^2 C^i \bar{C}^{\bar{j}} + \left[\frac{1}{6} \mathcal{A}_{ijk} C^i C^j C^k + \frac{1}{2} \mathcal{B}_{ij} C^i C^j + \text{h.c.} \right] \quad (2.27)$$

Avant la brisure électrofaible:

$$\langle C^i \rangle = \langle \bar{C}^{\bar{j}} \rangle = 0 \quad (2.28)$$

⁽⁵⁾ En pratique, ce calcul n'a été effectué que dans le cadre de la corde hétérotique pour des compactifications toroïdales et sur des orbifolds, sur des Calabi-Yau ou encore des constructions fermioniques. L'utilisation des symétries de T-dualité permet d'extrapoler pour d'autres constructions. Nous n'avons écrit ici que la partie commune à la plupart des constructions.

Le potentiel de Kähler et le superpotentiel peuvent être développés en puissances des C^i et $\bar{C}^{\bar{j}}$:

$$K = \mathcal{K}(\phi^\alpha, \bar{\phi}^{\bar{\alpha}}) + \mathcal{Z}_{i\bar{j}}(\phi^\alpha, \bar{\phi}^{\bar{\alpha}}) C^i \bar{C}^{\bar{j}} + \left[\frac{1}{2} \mathcal{H}_{ij}(\phi^\alpha, \bar{\phi}^{\bar{\alpha}}) C^i C^j + \text{h.c.} \right] \quad (2.29)$$

$$W = \hat{W}(\phi^\alpha) + \frac{1}{2} \mu_{ij}(\phi^\alpha) C^i C^j + \frac{1}{6} Y_{ijk} C^i C^j C^k \quad (2.30)$$

Les indices i, j se rapportent aux champs du secteur observable, les indices α, β à ceux du secteur caché. $\mathcal{K}$, $\mathcal{Z}_{i\bar{j}}$ et $\mathcal{H}_{ij}$ sont des fonctions quelconques des champs du secteur caché. L'expression la plus générale pour les masses des scalaires ⁽⁶⁾ est:

$$\tilde{m}_{i\bar{j}}^2 = V_{i\bar{j}} \big|_{V_i=V_{\bar{j}}=0} = (\tilde{m}_{i\bar{j}}^2)^F + (\tilde{m}_{i\bar{j}}^2)^D \quad (2.31)$$

$$(\tilde{m}_{i\bar{j}}^2)^F = (G_{i\bar{j}} + G_i G_{\bar{j}}) V_0 + m_{3/2}^2 \left(G_{i\bar{j}} + \frac{1}{3} G_i G_{\bar{j}} - G^\alpha R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}} G^{\bar{\beta}} \right) \quad (2.32)$$

$$(\tilde{m}_{i\bar{j}}^2)^D = g_a^2 \langle D_i^a D_{\bar{j}}^a + D^a D_{i\bar{j}}^a \rangle \quad (2.33)$$

où $V_0 = \langle V \rangle$ est la valeur de la constante cosmologique et $R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}}$ est le tenseur de Riemann de l'espace de Kähler ⁽⁷⁾:

$$R_{A\bar{B}C\bar{D}} = \partial_A \partial_{\bar{B}} K_{C\bar{D}} - K^{\bar{E}F} \partial_A K_{C\bar{E}} \partial_{\bar{B}} K_{F\bar{D}} \quad (2.34)$$

D'après (2.28), $\langle G_i \rangle = \langle G_{\bar{j}} \rangle = \langle D_i \rangle = 0$. D'autre part, $D_{i\bar{j}}^a = g^a q_i \mathcal{Z}_{i\bar{j}}$. Les expressions (2.32) et (2.33) deviennent:

$$(\tilde{m}_{i\bar{j}}^2)^F = G_{i\bar{j}} (V_0 + m_{3/2}^2) - G^\alpha R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}} G^{\bar{\beta}} \quad (2.35)$$

$$(\tilde{m}_{i\bar{j}}^2)^D = g_a^2 \langle D^a D_{i\bar{j}}^a \rangle = g_a^2 q_i^a \mathcal{Z}_{i\bar{j}} \langle D^a \rangle \quad (2.36)$$

Il nous reste à exprimer ces masses dans la base *physique*. Redéfinissons les champs tels que:

$$\hat{C}^i = \zeta_k^i C^k \quad \hat{\bar{C}}^{\bar{i}} = \bar{\zeta}_{\bar{k}}^{\bar{i}} \bar{C}^{\bar{k}} \quad \zeta_k^i \bar{\zeta}_{\bar{l}}^{\bar{i}} = K_{k\bar{l}} \quad (2.37)$$

Dans cette nouvelle base, les champs sont canoniquement normalisés:

$$K_{k\bar{l}} D_\mu C^k D^\mu \bar{C}^{\bar{l}} + \tilde{m}_{k\bar{l}}^2 C^k \bar{C}^{\bar{l}} \longrightarrow |D_\mu \hat{C}^i|^2 + \tilde{m}_{k\bar{l}}^2 (\zeta^{-1})_i^k (\bar{\zeta}^{-1})_{\bar{j}}^{\bar{l}} \hat{C}^i \hat{\bar{C}}^{\bar{j}} \quad (2.38)$$

Le paramètre de masse renormalisé est donc:

$$(\tilde{m}_{i\bar{j}}^2)_{\text{ren}}^F = (V_0 + m_{3/2}^2) \delta_{i\bar{j}} - G^\alpha G^{\bar{\beta}} \hat{R}_{\alpha\bar{\beta}i\bar{j}} \quad (2.39)$$

$$(\tilde{m}_{i\bar{j}}^2)_{\text{ren}}^D = g_a^2 q_i^a \delta_{i\bar{j}} \langle D^a \rangle \quad (2.40)$$

⁽⁶⁾L'expression (2.32) est en fait celle du *splitting* de masse engendré par le mécanisme de Super-Higgs, plus précisément la différence $\tilde{m}_{i\bar{j}}^2 - (m_{\frac{1}{2}} m_{\frac{1}{2}}^\dagger)_{i\bar{j}}$ où $(m_{\frac{1}{2}} m_{\frac{1}{2}}^\dagger)_{i\bar{j}} = (m_{\frac{1}{2}})_{ik} G^{k\bar{l}} (m_{\frac{1}{2}}^\dagger)_{\bar{l}\bar{j}}$ et $m_{\frac{1}{2}}$ est la matrice de masse des fermions chiraux.

⁽⁷⁾Remarque: les articles [39] et [45] utilisent des conventions de signe opposées pour le tenseur de Riemann.

où nous avons utilisé

$$(\zeta^{-1})_i^k K_{k\bar{l}} (\bar{\zeta}^{-1})_{\bar{j}}^{\bar{l}} = \delta_{i\bar{j}} \quad (2.41)$$

et défini

$$\hat{R}_{\alpha\bar{\beta}i\bar{j}} = R_{\alpha\bar{\beta}k\bar{l}} (\zeta^{-1})_i^k (\bar{\zeta}^{-1})_{\bar{j}}^{\bar{l}} \quad (2.42)$$

Notons que deux types de termes apparaissent dans (2.39): une contribution universelle et une contribution mélangeant *a priori* les saveurs. La contribution du terme D est aussi une source de non-universalité à travers la dépendance par rapport aux charges q_i^a . Cependant, elle n'apparaît pas dans de nombreux modèles où $\langle D^a \rangle = 0$. Passons maintenant à l'expression des couplages tri-scalaires (avant redéfinition des champs):

$$\mathcal{A}_{ijk} Y_{ijk} = \langle F^\alpha e^{\hat{K}/2} \rangle \left(\partial_\alpha Y_{ijk} + K_\alpha Y_{ijk} - \Gamma_{\alpha i}^{i'} Y_{i'jk} + \Gamma_{\alpha j}^{j'} Y_{ij'k} + \Gamma_{\alpha k}^{k'} Y_{ijk'} \right) \quad (2.43)$$

Le deuxième terme du membre de droite de cette expression représente la contribution universelle. Le premier terme est non nul uniquement dans la situation particulière où les couplages de Yukawa sont des fonctions des champs responsables de la brisure de supersymétrie. Les derniers termes dépendent plus spécifiquement de la géométrie de Kähler à travers la connexion définie par:

$$\Gamma_{AB}^C = K^{\bar{D}C} \partial_A K_{B\bar{D}} \quad (2.44)$$

L'expression (2.43) se simplifie considérablement si la métrique de Kähler est diagonale:

$$\mathcal{Z}_{i\bar{j}} = \delta_i^j \mathcal{Z}_i \quad (2.45)$$

En outre, dans ce cas, les contributions non universelles dans les termes de masse peuvent disparaître. L'universalité est phénoménologiquement désirable car, comme nous l'avons déjà évoqué et comme nous le verrons dans la section 3, cela permet non seulement de réduire le nombre de paramètres dans le MSSM mais surtout d'éviter les processus mettant en jeu des courants mélangeant les saveurs. Sous l'hypothèse (2.45) les paramètres renormalisés s'écrivent:

$$(\tilde{m}_i^2)_{\text{ren}} = V_0 + m_{3/2}^2 - \langle F^\alpha F^{\bar{\beta}} \rangle \partial_\alpha \partial_{\bar{\beta}} \ln \mathcal{Z}_i \quad (2.46)$$

$$(\mathcal{A}_{ijk})_{\text{ren}} = \langle F^\rho \rangle (K_\rho + \partial_\rho \ln Y_{ijk} - \partial_\rho \ln (\mathcal{Z}_i \mathcal{Z}_j \mathcal{Z}_k)) \quad (2.47)$$

Il est aussi courant dans la littérature de supposer que Y_{ijk} ne dépend pas des champs du secteur caché afin d'éliminer une potentielle source de non universalité dans $\mathcal{A}_{ijk}$.

Enfin, l'expression la plus simple, celle de la masse des jauginos:

$$M_{ab} = \frac{1}{2} F^\alpha \partial_\alpha f_{ab} \quad (2.48)$$

devient après la redéfinition $f_{ab} \lambda^a \lambda^b \longrightarrow \hat{\lambda}^a \hat{\lambda}^b$

$$M_{ab} = \frac{1}{2} (Re(f_a))^{-1} F^\alpha \partial_\alpha f_a \quad (2.49)$$

2.1.4 Quelques exemples issus des modèles de cordes

L'expression exacte des termes *soft* repose d'une part sur la forme du potentiel de Kähler et l'expression des Yukawa, et d'autre part sur le schéma de brisure de supersymétrie. Dans un modèle de cordes donné, la forme de K et des Yukawas est en principe prédite. Par contre, le mécanisme de brisure de SUSY est inconnu. Il est usuel de paramétrer notre ignorance en introduisant des *angles de goldstino* mesurant les parts respectives des différents champs auxiliaires participant à la brisure de supersymétrie et d'étudier les effets séparés de chaque contribution sur le spectre des particules observables. Si nous supposons que les *vevs* des champs auxiliaires du dilaton et des champs de modules dominant sur les autres champs, cette paramétrisation prend la forme [46]:

$$\begin{aligned} F^S &= \sqrt{3}Cm_{3/2} \sin \theta \mathcal{K}_{S\bar{S}}^{-1/2} e^{-i\gamma_S} \\ F^i &= \sqrt{3}Cm_{3/2} \cos \theta P^{i\bar{j}} \Theta_{\bar{j}} \end{aligned} \quad (2.50)$$

où la constante C est définie par $C^2 = 1 + V_0/(3m_{3/2}^2)$ et où le potentiel de Kähler de l'équation (2.29) est tel que $\mathcal{K}(S, \bar{S}, T_i, \bar{T}_i) = -\ln(S + \bar{S}) + \mathcal{K}(T_i, \bar{T}_i)$. P est la matrice de normalisation $P^\dagger \mathcal{K}_{i\bar{j}} P = 1$. Les angles θ et $\Theta_{\bar{j}}$ paramétrisent la direction du goldstino dans l'espace des champs $\{S, T_i\}$ et $\sum_j \Theta_j^* \Theta_j = 1$. Nous pouvons maintenant appliquer les formules (2.46, 2.47, 2.49) et calculer les termes soft en fonction de θ et $\Theta_{\bar{j}}$. En raison de l'expression (2.25) pour la fonction cinétique de jauge à l'ordre des arbres, les masses des jauginos sont universelles :

$$M_a = \frac{F^S}{S + \bar{S}} = \sqrt{3}Cm_{3/2} \sin \theta e^{-i\gamma_S} \quad (2.51)$$

En général, les termes soft des bosons dependent du secteur des modules et doivent être étudiés dans le cadre de modèles spécifiques de cordes, exception faite du cas où $\cos \theta = 0$. Dans cette limite, le secteur du dilaton est entièrement responsable de la brisure de supersymétrie. Cette situation est très souvent mentionnée dans la littérature — sous le nom de *dilaton domination scenario* — car il mène à des termes soft très simples et universels sans avoir besoin de connaître les détails du secteur des modules:

$$\tilde{m}_i^2 = V_0 + m_{3/2}^2 \quad (2.52)$$

$$\mathcal{A}_{ijk} = -M_a \quad (\text{si } \partial_s Y_{ijk} = 0) \quad (2.53)$$

et si $V_0 = 0$, alors $\tilde{m}_i^2 = m_{3/2}^2$ et $M_a = \pm \sqrt{3}m_{3/2}$.

Brisure mixte dilaton/Moduli et invariance modulaire

Revenons à la situation où les modules participent également à la brisure de supersymétrie et concentrons-nous sur un exemple où la métrique est naturellement diagonale

dans les champs de module et les champs de matière. C'est le cas dans une certaine classe d'orbifolds abéliens symétriques pour lesquels le potentiel de Kähler s'écrit:

$$K = -\ln(S + \bar{S}) - \sum_i \ln(T_i + \bar{T}_i) + \sum_m |C^m|^2 \prod_i (T_i + \bar{T}_i)^{n_m^i} \quad (2.54)$$

où les n_m^i sont les poids modulaires des champs de matière. La paramétrisation (2.50) se réécrit:

$$F^S = \sqrt{3} m_{3/2} \sin \theta \mathcal{K}_{S\bar{S}}^{-1/2} e^{-i\gamma_S} \quad (2.55)$$

$$F^i = \sqrt{3} m_{3/2} \cos \theta \mathcal{K}_{i\bar{i}}^{-1/2} \Theta_i e^{-i\gamma_i} \quad (2.56)$$

Les expressions des masses scalaires et paramètres trilineaires deviennent:

$$\tilde{m}_m^2 = m_{3/2}^2 \left(1 + 3C^2 \cos^2 \theta \vec{n}_m \vec{\Theta}^2 \right) + V_0 \quad (2.57)$$

$$\mathcal{A}_{pqr} = \sqrt{3} C m_{3/2} (\sin \theta e^{-i\gamma_S} - (S + \bar{S}) \partial_S \ln Y_{pqr}) \quad (2.58)$$

$$+ \cos \theta \sum_i \Theta_i e^{-i\gamma_i} [1 + n_p^i + n_q^i + n_r^i - (T_i + \bar{T}_i) \partial_i \ln Y_{pqr}] \quad (2.59)$$

Notons que les masses scalaires ne dépendent pas explicitement du dilaton et des champs de modules mais seulement des angles de goldstino. C'est l'un des avantages de cette paramétrisation. En revanche, les termes trilineaires peuvent en dépendre explicitement si les couplages de Yukawa sont fonction de $\langle S \rangle$ et de $\langle T_i \rangle$. Notons aussi que les masses scalaires *a priori* ne sont pas universelles même dans le cas où la métrique est diagonale en raison de la dépendance par rapport aux poids modulaires. Nous souhaitons ici souligner le rôle important joué par une des propriétés de l'espace compact que nous n'avons pas mentionnée jusqu'ici: l'existence des symétries modulaires $[SL(2, \mathbf{Z})]^3$ agissant sur les T_i

$$T_i \rightarrow \frac{a_i T_i - i b_i}{i c_i T_i + d_i}, \quad a_i d_i - b_i c_i = 1, \quad a_i, d_i, b_i, c_i \in \mathbf{Z} \quad (2.60)$$

La transformation induite sur le potentiel de Kähler est de la forme:

$$K \rightarrow K + \sum_i (\ln(i c_i T_i + d_i) + h.c.) \quad (2.61)$$

Le lagrangien de supergravité est invariant si la fonction de Kähler G est invariante c'est à dire si le superpotentiel (de poids modulaire égal à -1 par rapport à chaque direction complexe) se transforme selon

$$W \rightarrow W \prod_i (i c_i T_i + d_i)^{-1} \quad (2.62)$$

et on associe aux champs de matière les poids modulaires n_n^j :

$$\phi^n \rightarrow \prod_{j=1}^3 (i c_j T_j + d_j)^{n_n^j} \phi^n \quad (2.63)$$

Cette symétrie a des conséquences importantes pour la physique de basse énergie puisque les couplages de jauge et les interactions de Yukawa dans le lagrangien doivent aussi être invariants modulaires. Elle est brisée spontanément lorsque les champs scalaires acquièrent une valeur moyenne.

Bien qu'un certain nombre de tendances et résultats puissent être dégagés à l'aide de la paramétrisation (2.50), aucune prédiction sur la structure des termes soft ne peut être faite tant que le schéma de brisure de supersymétrie n'est pas connu. Le problème du calcul des termes soft revient à stabiliser les *vevs* du secteur caché. En particulier, la stabilisation du dilaton est cruciale pour fixer la constante de couplage de jauge. Dans le MSSM, les couplages de jauge s'unifient [47] à une valeur $\alpha_{GUT} \sim 1/24$, ce qui se traduit par $\text{Re } S \sim 2$.

2.1.5 Stabilisation du dilaton

Calculons le potentiel scalaire associé au potentiel de Kähler de la forme

$$K = -\ln s - \sum_i \ln \tau_i \quad (2.64)$$

où $s = S + \bar{S}$ et $\tau_i = T_i + \bar{T}_i - |\phi^i|^2 - |C^i|^2$. Dans ce cas, les champs ϕ^i et C^i ont un poids modulaire $n_i^j = -\delta_i^j$. Si le superpotentiel est indépendant du dilaton et des champs de modules, comme c'est le cas au niveau perturbatif, alors

$$F^S = -m_{3/2}s \quad (2.65)$$

$$F^{T_i} = -m_{3/2}\tau_i \left(1 - \frac{\bar{\phi}^i \bar{W}_i}{\bar{W}}\right) \quad (2.66)$$

$$F^{\phi^i} = m_{3/2}\tau_i \frac{\bar{W}_i}{\bar{W}} \quad (2.67)$$

et le potentiel scalaire s'écrit simplement

$$V = \frac{\kappa^2}{s \prod_i \tau_i} \left(|W|^2 + \sum_i \tau_i |\bar{W}_i|^2 \right) \quad (2.68)$$

A $|W|$ fixé, ce potentiel est minimisé pour des valeurs infinies de s correspondant à un régime de couplage infiniment faible. Cet exemple illustre le comportement général des potentiels des théories effectives quadri-dimensionnelles, couramment appelés potentiels *runaway*. Une façon de remédier à ce problème est d'autoriser une dépendance en S dans le superpotentiel qui sera nécessairement d'origine non perturbative. Une telle dépendance est en fait engendrée naturellement dans le régime de couplage fort des théories de jauge supersymétriques. Ce régime peut en outre être à l'origine de la brisure dynamique de la supersymétrie. Le superpotentiel effectif obtenu après intégration des condensats de jauginos est une fonction de l'échelle de condensation $\Lambda = M_s e^{-f/2\beta}$ où β est la fonction *beta* du groupe de jauge asymptotiquement libre et f la fonction cinétique de jauge, linéaire en S à l'ordre des arbres.

Condensation de jaugino

Concentrons-nous sur l'exemple le plus étudié, la théorie de Yang–Mills supersymétrique $SU(N_c)$ avec N_f saveurs de quarks $\mathcal{Q}$ dans la représentation fondamentale $\mathbf{N}_c$ et N_f saveurs d'antiquarks $\tilde{\mathcal{Q}}$ dans la représentation antifondamentale $\overline{\mathbf{N}}_c$. Dans ce cas, $\beta = (3N_c - N_f)/16\pi^2$. A basse énergie, la théorie est confinée; soit $\mathcal{M}$ la matrice $(N_f \times N_f)$ représentant les mésons

$$\mathcal{M}_f^g = \mathcal{Q}_{fc} \tilde{\mathcal{Q}}^{cg} \quad (2.69)$$

où la sommation porte sur les indices de couleur. La forme du superpotentiel effectif non perturbatif W_{np} est dictée par les symétries de la théorie [48, 49]. W_{np} ne peut dépendre des mésons qu'à travers le déterminant de $\mathcal{M}$, le seul singlet de jauge qui soit aussi invariant sous les symétries (globales) de saveur $SU(N_f) \times SU(N_f)$. On montre que

$$W_{np} = c \left[\frac{\Lambda^{3N_c - N_f}}{\det \mathcal{M}} \right]^{\frac{1}{N_c - N_f}} \quad (2.70)$$

où $c \propto (N_f - N_c)$. Les exposants sont fixés de manière à ce que d'une part W_{np} soit invariant sous les symétries globales de la théorie et d'autre part possède une charge par rapport à la R -symétrie $U(1)_R$ égale à 2. Notons que cette formule n'est valable que pour $N_f < N_c$ (pour $N_f \geq N_c$, il faut prendre en compte, en plus des mésons, la présence d'autres champs composites, les baryons).

Nous allons maintenant rappeler l'approche courante utilisée (essentiellement dans le cadre de la théorie hétérotique) pour la minimisation du potentiel scalaire dont le superpotentiel contient une contribution non perturbative du type (2.70). Pour simplifier nous nous plaçons dans le cas où $N_f = 1$ et notons $\phi_0^2 = \mathcal{Q}\tilde{\mathcal{Q}}$. Le superpotentiel W_{np} s'écrit simplement

$$W_{np} = \left[\frac{\Lambda^{3N_c - 1}}{h(T)^{3N_c - 1} \phi_0^2} \right]^{\frac{1}{N_c - 1}} \quad (2.71)$$

où nous avons introduit une fonction $h(T)$ qui, dans le cas où la théorie effective dérive d'une théorie de supercordes, assure que W_{np} a un poids modulaire égal à -3 . En effet, dans le cas hétérotique, la fonction cinétique de jauge reçoit des corrections radiatives à l'ordre d'une boucle qui ne sont pas invariantes modulaires; leurs transformations doivent être compensées par celles de la fonction $h(T)$. Nous reviendrons sur la nature de cette fonction dans la deuxième section de ce chapitre.

A cette contribution non perturbative s'ajoute une composante perturbative et le superpotentiel complet s'écrit

$$W = W_p + W_{np} \quad \text{où} \quad W_p = a\phi_1\phi_0^2 + b\phi_1^3 \quad (2.72)$$

ϕ_1 est un champ de matière quelconque qui fixe la masse des quarks. Recalculons le potentiel scalaire associé au potentiel de Kähler (2.64) en prenant maintenant en

compte la dépendance en S et T_i du superpotentiel:

$$V_F = \frac{1}{s \prod_i \tau_i} \left(|sW_s - W|^2 + \sum_{i=1}^3 \tau_i |W_{\phi^i} + \bar{\phi}^i W_{T_i}|^2 + \sum_{i=1}^3 |\tau_i W_{T_i} - W|^2 \right) \quad (2.73)$$

Nous supposons que les champs ϕ^i ne sont pas chargés ce qui nous permet dans cet exemple d'ignorer le terme D . Il est courant de supposer pour commencer la minimisation que les *vevs* des champs ϕ^i sont beaucoup plus faibles que celles du dilaton et des modules. Le potentiel est alors dominé par les termes $|W_{\phi^i}|$ et les équations $W_{\phi^i} = 0$ permettent d'exprimer les *vevs* des champs de matière en fonction de l'échelle du condensat Λ :

$$W_1 = W_2 = 0 \rightarrow \phi_1 \propto \phi_0 \propto W_{np}^{1/3} \quad (2.74)$$

Le superpotentiel effectif après élimination du méson ϕ_0 et du champ de matière ϕ_1 s'écrit

$$W_{eff} = W_p + W_{np} \propto W_{np} \sim \left(\frac{\Lambda}{h} \right)^3 = \frac{e^{-3f/2\beta}}{h^3(T)} \quad (2.75)$$

Remarquons que $W_S/W = -3k_a/(2\beta)$ est une constante *négative*. Il est important de garder à l'esprit que W_S/W est fixé ici par les conditions de minimisation $W_{\phi^i} = 0$. A ce stade, il est possible d'extraire la dépendance en $s = S + \bar{S}$ de V^F :

$$V^F \sim \frac{e^{-\Delta s}}{s} ((1 + \Delta s)^2 + g) \quad (2.76)$$

où nous avons introduit $\Delta = -W_S/W$. g est une fonction indépendante de s ; ce potentiel est représenté sur la figure 1 de la publication (V); quelle que soit la valeur de g , il ne possède pas de minimum en une valeur finie et positive de s .

La solution usuelle pour stabiliser le dilaton est d'avoir recours à des condensations de jauginos multiples [50]. Le superpotentiel non perturbatif effectif correspond alors à une somme d'exponentielles qui peuvent donner lieu à un minimum phénoménologiquement acceptable pour le dilaton au prix d'un *fine-tuning* des paramètres des groupes de jauge impliqués. Ces modèles sont appelés modèles *race track* [51, 52]. Une autre solution⁽⁸⁾ utilise les corrections non perturbatives du potentiel de Kähler dans les modèles hétérotiques de la forme $e^{-1/g}$. Il existe aussi d'autres approches dont les corrections non perturbatives ont une toute autre origine: la compactification, qui génère un superpotentiel dépendant de S [53].

La condensation de jaugino a été l'objet de travaux très détaillés dans les cordes hétérotiques. Par contre, elle n'avait pas encore été abordée dans le cadre des théories de type I. L'objet du travail présenté dans les publications V et VI a été précisément d'étudier comment le problème de la stabilisation du dilaton par condensation de jaugino peut être modifié dans ces théories et plus généralement d'étudier la brisure de supersymétrie par condensation de jaugino.

⁽⁸⁾appelée *Kähler stabilization*

2.2 Théories de cordes de type I

2.2.1 Orientifolds de type IIB

Les théories de type I [54–60] sont des théories décrivant la dynamique des cordes ouvertes. Elles étaient beaucoup moins étudiées que les théories hétérotiques ⁽⁹⁾ jusqu'à ce que l'avènement des dualités, la découverte des D-branes [61] et la compréhension d'aspects non perturbatifs permettent de franchir un pas très important dans la compréhension du vide de ces théories [62] (pour une revue des nouvelles perspectives phénoménologiques voir [63]). Les théories de type I à 10 dimensions peuvent être obtenues à partir de la projection *orientifold* Ω de la théorie de type IIB [54] où Ω échange les modes droits et gauches de la corde. Son action sur les coordonnées de la surface d'univers de la corde σ et τ ou plutôt sur la coordonnée complexe $z = e^{\tau+i\sigma}$ est: $z \xrightarrow{\Omega} \bar{z}$. Le résultat de la projection Ω de la corde IIB est une corde fermée non orientée avec une seule supersymétrie à 10 dimensions. En outre, la cohérence de la théorie à dix dimensions (*i.e.* absence de tadpoles Ramond–Ramond qui détruiraient le bon comportement ultra-violet) nécessite l'introduction de 32 D-9 branes.

De nouveaux vides perturbatifs $N = 1, D = 4$ peuvent être obtenus en combinant cette projection orientifold avec un orbifold standard comme ceux effectués dans les théories hétérotiques [64–68]. On obtient ainsi une théorie IIB compactifiée sur un orbifold $T^6/\{G + \Omega \times G\}$ où $G = Z_N$ ou $Z_N \times Z_M$. La charge totale de Ramond–Ramond est alors compensée par l'introduction de D-p branes dont le nombre et la nature dépendent de la projection G . Par exemple, pour Z_N avec N impair, le vide ne peut contenir que des D-9 branes. Pour N pair, des D-9 et D-5 branes peuvent être à la fois présentes. Le volume d'univers de ces D5-branes contient l'espace de Minkowski plus une dimension complexe X_i , $i = 1, 2, 3$. On notera D-5_{*i*} les branes correspondantes. A la place de Ω , il existe d'autres projections compatibles avec l'existence d'une supersymétrie à quatre dimensions. Celles-ci font intervenir des réflexions par rapport aux plans complexes X_i ou bien l'opérateur $(-)^{F_L}$ où F_L compte le nombre de fermions gauches sur la surface d'univers. Dans ce cas, les conditions d'annulation des tadpoles requièrent la présence de D-7 et D-3 branes (modulo des T-dualités). Il existe aussi 3 types de D7_{*i*} branes suivant la dimension X_i transverse à leur volume d'univers.

En résumé, selon la nature des générateurs de la projection orientifold, nous pourrions avoir affaire à des D-3, D5_{*i*}, D-7_{*i*}, D-9branes. Cependant, le maintien d'une supersymétrie à quatre dimensions empêche d'avoir toutes ces branes simultanément présentes. Un vide $D = 4, N = 1$ contenant des Dp-branes et Dp'-branes doit satisfaire $p - p' = 0, \pm 4$. Il présente donc soit des D-9 et D-5branes soit des D7- et D-3branes. Ces deux situations sont en fait reliées par T-dualité ⁽¹⁰⁾.

⁽⁹⁾La raison principale étant la difficulté technique liée à l'annulation des anomalies à quatre dimensions. A la différence des théories hétérotiques $SO(32)$ pour lesquelles l'invariance modulaire garantit l'existence de conditions générales d'annulation des anomalies dans les modèles $D = 4, N = 1$, l'annulation des anomalies dans les différents modèles quadri-dimensionnels de type I se traduit par des conditions d'annulation des tadpoles.

⁽¹⁰⁾Si le volume de l'espace compact est un 6-tore, $T^6 = T^2 \times T^2 \times T^2$, chaque composante de T^2

2.2.2 Cordes ouvertes et branes

Dans ces théories, les cordes fermées décrivent les interactions gravitationnelles tandis que les interactions de jauge sont décrites par les cordes ouvertes dont les extrémités sont contraintes à se propager sur les D-branes. Les D-branes peuvent être définies comme des hypersurfaces sur lesquelles sont accrochées les extrémités des cordes ouvertes et possèdent ainsi la propriété importante de localiser les interactions de jauge sur leur volume d'univers. Nous allons voir que cette distinction entre interactions gravitationnelles capables de se propager dans toutes les dimensions et interactions de jauge localisées sur des D-branes a des conséquences très importantes pour la phénoménologie, notamment les contraintes usuelles sur la taille de l'espace compact sont modifiées. Si nous supposons que les interactions du modèle standard sont localisées sur une D- p brane, $p \geq 3$, nous sommes amenés à distinguer deux types de dimensions compactes:

- $(9 - p)$ directions (de volume $V_{\perp}$) perpendiculaires au volume d'univers de la brane
- $(p - 3)$ directions longitudinales (de volume $V_{\parallel}$).

L'action perturbative de supergravité à dix dimensions s'écrit

$$S_I = \int dx^{10} \sqrt{-g} \left(\frac{M_s^8}{\lambda^2} \mathcal{R} - \frac{M_s^6}{\lambda} \frac{1}{4} F_{(9)}^2 + \dots \right), \quad (2.77)$$

où l'indice (9) fait référence au groupe de jauge venant des 32 D9-branes dont le volume d'univers remplit tout l'espace 10-dimensionnel. Cette action peut être obtenue à partir de l'action hétérotique (2.6) en effectuant la transformation:

$$\lambda \rightarrow \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad M_s \rightarrow \frac{M_s}{\sqrt{\lambda}} \quad (2.78)$$

Ainsi, la corde hétérotique $SO(32)$ dans son régime de couplage fort est duale à la corde de type I faiblement couplée. Remarquons que contrairement au cas hétérotique, le terme de courbure et le terme de jauge apparaissent à des ordres différents de la théorie perturbative (sphère pour le terme de courbure et disque pour le terme de Yang-Mills). Cela a des conséquences importantes pour la relation entre les couplages quadri-dimensionnels et couplages à dix dimensions.

Couplages 4-dimensionnels

Généralisons l'action (2.77) au cas où le groupe de jauge est associé à une D- p brane dont le volume d'univers est de dimension $p + 1$:

$$S_I = \int dx^{10} \sqrt{-g} \left(\frac{M_s^8}{\lambda^2} \mathcal{R} - \frac{M_s^{p-3}}{\lambda} F_{(p)}^2 \delta^{9-p}(y_{\perp}) + \dots \right), \quad (2.79)$$

étant caractérisée par un rayon R_i , alors la transformation de T-dualité est telle que $R_i \rightarrow M_s^{-2} R_i^{-1}$.

La réduction dimensionnelle de cette action donne

$$S_4 = \int dx^4 \sqrt{-g} \left(\frac{M_s^8 V_{\parallel} V_{\perp}}{\lambda^2} \mathcal{R} - \frac{M_s^{p-3} V_{\parallel}}{\lambda} F_{(p)}^2 + \dots \right), \quad (2.80)$$

L'identification avec l'action (2.2) donne, à des coefficients numériques près,

$$M_P^2 = M_s^8 \frac{V_{\parallel} V_{\perp}}{\lambda^2} \quad (2.81)$$

$$\frac{1}{\alpha_p} = \frac{M_s^{p-3} V_{\parallel}}{\lambda} \quad (2.82)$$

En combinant ces deux égalités nous obtenons la relation entre masse de Planck quadri-dimensionnelle et échelle des cordes

$$M_P^2 = \frac{M_s^{2(7-p)}}{\alpha_p^2} \frac{V_{\parallel}}{V_{\perp}} = \frac{M_s^{11-p} V_{\perp}}{\alpha_p^2 v_{\parallel}} \quad (2.83)$$

qui, par opposition à la situation hétérotique où $M_s \sim \sqrt{\alpha_{GUT}} M_P$, fait intervenir les facteurs de volume de compactification. Nous avons introduit le volume longitudinal exprimé en unités de l'échelle des cordes, $v_{\parallel} = V_{\parallel} M_s^{p-3}$

Contraintes phénoménologiques sur le volume de compactification

Il est utile de réécrire la relation (2.83) en fonction de n , le nombre de dimensions transverses à la D-p brane, $n = 9 - p$,

$$M_P^2 = \frac{2}{v_{\parallel} \alpha_p^2} M_s^{n+2} R_{\perp}^n \quad (2.84)$$

La condition $\lambda < 1$ se traduit par $v_{\parallel} < 1/(2\alpha_p)$. Il n'y a par contre aucune contrainte sur le volume transverse à la brane. Dans les théories de type I, l'échelle des cordes peut donc être considérée comme un paramètre libre [69]. Choisir une échelle des cordes à basse énergie correspond à un grand volume transverse, ce qui n'est pas en contradiction avec un régime de couplage faible. Ce n'est pas non plus en contradiction avec les contraintes expérimentales. Les bosons de jauge ne se propageant pas dans le volume transverse, la seule contrainte sur la taille des dimensions transverses vient des mesures de l'interaction gravitationnelle à courte distance or la loi de Newton n'a pas été testée en dessous de la centaine de microns. Les contraintes expérimentales sont donc $R \lesssim \text{TeV}^{-1} \sim 10^{-19} \text{ m}$ pour les dimensions longitudinales et $R \lesssim 10^{-1} \text{ mm}$ pour les dimensions transverses.

2.2.3 Lagrangien effectif $D = 4$, $N = 1$ des orientifolds IIB

Secteur de jauge

La nature du groupe de jauge et des champs chiraux chargés dépend du type et de la position des branes présentes dans le vide. Si nous considérons le cas le plus général avec

des D-9 et les trois types de D-5branes, il y aura les groupes de jauge G_9 , G_{5_i} et quatre types de champs de matière: C_i^9 (i est l'indice des trois dimensions complexes) ont pour origine des cordes ouvertes accrochées sur des D-9branes; $C_i^{5_j}$ viennent de cordes ouvertes accrochées sur la même D-5_jbrane; $C^{5_i 5_j}$ ont leurs extrémités accrochées sur des D-5branes différentes; enfin, les $C^{9 5_i}$ possèdent une des extrémités sur une D-9brane et l'autre sur une D-5_ibrane. Les interactions entre ces champs sont décrites par un superpotentiel de la forme [65, 70]

$$W_9 = C_1^9 C_2^9 C_3^9 + C^{5_1 5_2} C^{5_3 5_1} C^{5_2 5_3} + \sum_{i=1}^3 C_i^9 C^{9 5_i} C^{9 5_i} \quad (2.85)$$

$$W_5 = \sum_{i=1}^3 (C_1^{5_i} C_2^{5_i} C_3^{5_i} + C_i^{5_i} C^{9 5_i} C^{9 5_i}) \quad (2.86)$$

$$+ \sum_{i \neq j \neq k=1}^3 \left(C_j^{5_i} C^{5_i 5_k} C^{5_i 5_k} + \frac{1}{2} C^{5_j 5_k} C^{9 5_j} C^{9 5_k} \right)$$

où nous n'avons pas écrit les constantes de couplage de Yukawa. Celles-ci sont des nombres d'ordre 1 indépendants des champs de modules avant renormalisation canonique des champs.

Secteur des cordes fermées

En plus du dilaton et des champs de module non twistés T_i , il existe dans le secteur des cordes fermées des champs scalaires twistés, notés M_k^f associés aux points fixes de l'orientifold. L'indice k est relatif aux différents secteurs twistés indépendants et f compte le nombre de points fixes sous le twist $\theta^{k(11)}$. Ces champs jouent un rôle crucial dans la compensation des anomalies. En effet, contrairement aux théories hétérotiques, le groupe de jauge des orientifolds IIB présente plusieurs facteurs abéliens $U(1)_X$ anomaux. Ibañez, Rabadán et Uranga [71] ont proposé un mécanisme de compensation des anomalies qui est une généralisation du mécanisme de Green–Schwarz inspirée par Sagnotti [72], utilisant, à la place du dilaton, la transformation des modules twistés M_k^f : sous la symétrie de jauge abélienne

$$A_\mu^X(x) \rightarrow A_\mu^X(x) + \partial_\mu \alpha(x) \quad (2.87)$$

les champs M_k^f subissent la transformation

$$M_k^f \rightarrow M_k^f + \frac{i}{2} \delta_{GS,k}^X \alpha(x). \quad (2.88)$$

⁽¹¹⁾L'action de l'orbifold Z_N est réalisée par des puissances du générateur de twist $\theta = e^{2i\pi(v_1 J_{45} + v_2 J_{67} + v_3 J_{89})}$, ($\theta^N = 1$), où les J_{mn} sont les générateurs de Cartan de $SO(6)$ et les v_i sont les composantes du vecteur de twist $v = (v_1, v_2, v_3)$. Définissons les coordonnées complexes $Y_1 = X_4 + iX_5$, $Y_2 = X_6 + iX_7$, $Y_3 = X_8 + iX_9$. L'action de l'orbifold est alors diagonale: $\theta^k Y_i = e^{2i\pi k v_i} Y_i$. Le maintien d'une supersymétrie $N = 1$ se traduit par la condition $\pm v_1 \pm v_2 \pm v_3 = 0$. Pour des orientifolds Z_N , N impair, sur lesquels nous nous concentrerons par la suite, $k = 1, \dots, (N-1)/2$. Par exemple, dans le cas Z_3 , il n'y a qu'un seul secteur twisté et $v = \frac{1}{3}(1, 1, -2)$.

Ce mécanisme nécessite de modifier la fonction cinétique de jauge à l'ordre des arbres. Ainsi, pour le groupe de jauge associé aux D9 branes⁽¹²⁾:

$$f_{9a} = S + \sum_k \sigma_a^k M_k, \quad (2.89)$$

et pour les D5-branes

$$f_{5ia} = T_i + \sum_k \sigma_{ia}^k M_k, \quad (2.90)$$

Les coefficients σ_a^k dépendent de la projection d'orbifold considérée. Remarquons que la constante de Kac–Moody n'apparaît plus dans la fonction cinétique de jauge et que pour les D5 branes, le couplage de jauge ne dépend plus du dilaton mais des champs de modules. Le fait que la fonction cinétique de jauge soit maintenant une combinaison linéaire de S (ou T) et M_k est un ingrédient crucial pour la stabilisation du potentiel scalaire. Les anomalies mixtes $U(1) \times [G_N]^2$ sont alors compensées sous la condition

$$C_a^X = 4\pi^2 \sum_k \sigma_a^k \delta_{GS,k}^X \quad (2.91)$$

Notons enfin que la transformation (2.88) est à l'origine d'un terme de Fayet–Iliopoulos dans le terme D du potentiel scalaire

$$\xi^2 = \frac{1}{2} \delta_{GS,k}^X \frac{\partial K}{\partial M_k} \quad (2.92)$$

Potentiel de Kähler

Dans le cas le plus général où à la fois les D9 et les trois types de D5 branes sont présentes, le potentiel de Kähler est donné par⁽¹³⁾ [70]

$$\begin{aligned} K = & -\ln \left(S + \bar{S} - \sum_i |C_i^{5i}|^2 \right) - \sum_i \ln \left(T_i + \bar{T}_i - |C_i^9|^2 - \sum_{j \neq k \neq i} |C_j^{5k}|^2 \right) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j \neq k \neq i} \left(\frac{|C_j^{5i}|^2}{(S + \bar{S})^{1/2} (T_i + \bar{T}_i)^{1/2}} + \frac{|C_i^{95i}|^2}{(T_j + \bar{T}_j)^{1/2} (T_k + \bar{T}_k)^{1/2}} \right) \\ & + \hat{K}(m_k) \end{aligned} \quad (2.93)$$

où $\hat{K}$ est la partie dépendante des champs de modules twistés M_k . $\hat{K}$ n'a pas été calculé. On sait cependant qu'en raison de la symétrie d'orbifold, $\hat{K}$ est une fonction

⁽¹²⁾ Nous travaillerons par la suite avec les champs $M_k = \sum_f M_k^f$.

⁽¹³⁾ En raison de la dualité entre la théorie hétérotique $SO(32)$ et la théorie de type I le lagrangien effectif à quatre dimensions pour la théorie de type I en l'absence de D-5branes est analogue à celui des orbifolds hétérotiques. Le lagrangien complet décrivant un modèle possédant aussi des D-5branes peut être reconstruit à partir du lagrangien pour un modèle ne comprenant que des D9branes en utilisant l'invariance sous les transformations de T-dualité.

paire de $m_k = M_k + \overline{M}_k$ et que le terme dominant dans un développement autour du point fixe $m_k = 0$ est le terme quadratique: $1/2 \sum_k m_k^2$.

Il est possible de définir des poids modulaires n_m^l pour chacun des champs de matière C_m se transformant selon $C_m \rightarrow \prod_{l=1}^3 (ic_l T_l + d_l)^{n_m^l} C_m$. Ils prennent une des trois valeurs $\{1, -1/2, 0\}$. En outre, la métrique de Kähler est diagonale⁽¹⁴⁾ pour ces champs, $\mathcal{K}_{c\bar{d}} = \mathcal{Z}_c \delta_d^c$, où les indices c et d font référence aux cinq types de champs de matière, et peut être exprimée sous la forme:

$$\mathcal{Z}_c = \prod_l \tau_l^{n_c^l} \text{ pour } C_i^9, C_i^{5_i}, C_j^{5_k} \quad (2.94)$$

$$\mathcal{Z}_c = \frac{1}{2} \prod_l \tau_l^{n_c^l} \text{ pour } C^{5_j 5_k} \text{ et } C^{95_i} \quad (2.95)$$

où $l = 0, 1, 2, 3$ et $\tau_0 = s$. Les valeurs des poids modulaires sont:

$$\begin{aligned} n_{C_i^9}^l &= -\delta_i^l \\ n_{C_i^{5_i}}^l &= \begin{cases} 0 & \forall i, l \neq k \neq j \neq 0 \\ -1 & l = 0 \end{cases} \\ n_{C_j^{5_k}}^l &= \begin{cases} -1 & l \neq k \neq j \neq 0 \\ 0 & l = j, k, 0 \end{cases} \\ n_{C^{5_j 5_k}}^l &= \begin{cases} -1/2 & l \neq k \neq j \neq 0 \\ 0 & l = j, k \\ -1/2 & l = 0 \end{cases} \\ n_{C^{95_i}}^l &= \begin{cases} 0 & l = i \\ -1/2 & l = k, j \neq i \\ 0 & l = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.96)$$

Invariance modulaire

Le lagrangien des théories hétérotiques effectives $D = 4, N = 1$ est invariant classiquement sous les symétries modulaires $SL(2, R)$ relatives aux transformations (2.60, 2.61, 2.63). Il en est de même pour le lagrangien des modèles 4D orientifolds de type IIB pour lesquels il n'y a que des D9 branes. En présence de D-5_i branes, la symétrie est explicitement brisée dans le plan complexe X_i , comme l'indique l'expression de la fonction cinétique de jauge (2.90). L'invariance est maintenue dans les plans complexes $X_{j \neq i}$ si aucune D-5_j brane n'est présente [73]. Cette symétrie classique qui agit aussi sur les fermions chiraux⁽¹⁵⁾ est potentiellement brisée au niveau quantique par l'anomalie⁽¹⁶⁾ [74, 75]:

$$\delta \mathcal{L} = \int d^2 \theta \frac{b_a'^i}{8\pi^2} (\ln(ic_i T_i + d_i) W_a^\alpha W_{a\alpha} + h.c.) \quad (2.97)$$

⁽¹⁴⁾à des corrections d'ordre δ^2 près mélangeant les champs C_i^9 et $C_j^{5_k}$.

⁽¹⁵⁾ $\psi_\alpha \rightarrow e^{in_\alpha^i \theta_i} \psi_\alpha$ avec $\theta_i = \arg(ic_i T_i + d_i)$.

⁽¹⁶⁾où $b_a'^i = -C(G_a) + \sum_\alpha T(R_a^\alpha)(1 + 2n_\alpha^i)$.

Dans la théorie hétérotique, la symétrie est rétablie au niveau quantique; en général, l'anomalie (2.97) peut être compensée par deux contributions:

- La première est un mécanisme de type Green–Schwarz impliquant la transformation du dilaton S à l'ordre d'une boucle:

$$S \rightarrow S - \frac{1}{8\pi^2} \sum_i \delta_{GS}^i \ln(ic_i T_i + d_i) \quad (2.98)$$

Le terme cinétique de jauge $\mathcal{L}_{CJ} = \int d^2\theta (f_{bc} W_b^\alpha W_{c\alpha} + h.c.)$ où $f_{bc} = k_b S \delta_{bc}$ subit alors la transformation

$$\delta \mathcal{L}_{CJ} = -\frac{\delta_{GS}^i k_a}{8\pi^2} \int d^2\theta (\ln(ic_i T_i + d_i) W_a^\alpha W_{a\alpha} + h.c.) \quad (2.99)$$

ce qui compense la partie de l'anomalie commune à tous les facteurs du groupe de jauge. Afin de maintenir l'invariance du potentiel de Kähler à l'ordre d'une boucle, la partie en $\ln(S + \bar{S})$ doit être modifiée en $\ln Y$ où

$$Y = S + \bar{S} - \frac{\delta_{GS}^i}{8\pi^2} \ln(T_i + \bar{T}_i) \quad (2.100)$$

- La partie non universelle doit être compensée par la variation d'un lagrangien du type

$$-\frac{(b_a'^i - k_a \delta_{GS}^i)}{8\pi^2} \int d^2\theta (\ln \eta(T_i)^2 W_b^\alpha W_{b\alpha} + h.c.) \quad (2.101)$$

où $\eta(T_i)$ est la fonction de Dedekind qui, sous une transformation modulaire se comporte comme $\eta^2(T_i) \rightarrow (ic_i T_i + d_i) \eta^2(T_i)$.

C'est précisément ce type de terme qui est engendré par les modes massifs des cordes (correspondant aux modes twistés $N = 2$ de l'orbifold) qui modifient la fonction cinétique de jauge à l'ordre d'une boucle [74, 76]

$$f_{1-boucle}^a = k_a S - \frac{1}{8\pi^2} \sum_i b_{a,i}^{N=2} \ln \eta(T_i)^2 \quad (2.102)$$

où les $b_{a,i}^{N=2}$ sont déterminés par un calcul de cordes.

La condition de compensation des anomalies modulaires s'écrit donc

$$b_a'^i = k_a \delta_{GS}^i + b_{a,i}^{N=2} \quad (2.103)$$

Dans le cas où le i -ème plan complexe n'est laissé invariant par aucun twist, $b_{a,i}^{N=2} = 0$, ce qui impose une contrainte très forte sur le coefficient d'anomalie $b_a'^i$ qui doit être le même pour tous les facteurs de jauge (généralement $k_a = 1$).

Remarquons enfin que la fonction cinétique de jauge à l'ordre d'une boucle se transforme selon

$$f_{1-boucle}^a \rightarrow f_{1-boucle}^a - \sum_i \frac{b_i'^a}{8\pi^2} \ln(ic_i T_i + d_i) \quad (2.104)$$

soit

$$e^{-3f_{1-boucle}^a/2\beta_a} \rightarrow e^{-3f_{1-boucle}^a/2\beta_a} \prod_i (ic_i T_i + d_i)^{\frac{3b_i'^a}{16\pi^2\beta_a}} \quad (2.105)$$

et le potentiel effectif (2.75) s'écrit

$$W_{eff} \sim e^{\frac{-3}{2\beta_a} f_{1-boucle}^a} = e^{-3k_a S/2\beta_a} \prod_i \eta(T_i)^{3b_{a,i}^{N=2}/8\pi^2\beta_a} \quad (2.106)$$

Si aucun plan complexe n'est laissé invariant, $b_{a,i}^{N=2} = 0$, les anomalies sont exclusivement compensées par un mécanisme de Green-Schwarz, $b_i'^a = \delta_{GS}^i$, et le superpotentiel effectif est indépendant des modules T_i , $W_{eff} \sim e^{-3k_a S/2\beta_a}$.

Quelle est maintenant la situation dans les modèles de type I? En raison de la dualité théorie hétérotique/théorie de type I⁽¹⁷⁾, on s'attend à ce que la symétrie modulaire subsiste aussi au niveau quantique. Il a en fait été proposé un mécanisme de Green-Schwarz compensant les anomalies modulaires de manière similaire à celui mis en oeuvre pour compenser les anomalies des symétries de jauge $U(1)_X$ à travers la transformation des modules twistés [73]:

$$M^k \rightarrow M^k - \frac{1}{8\pi^2} \sum_i \delta_{GS}^{i,k} \ln(ic_i T_i + d_i) \quad (2.107)$$

et pour préserver l'invariance modulaire à l'ordre d'une boucle, $\hat{K}$ doit dépendre de la fonction $m^k = M^k + \overline{M}^k - \frac{1}{8\pi^2} \sum_i \delta_{GS}^{i,k} \ln(T_i + \overline{T}_i)$. Ce mécanisme s'applique en particulier aux orientifolds Z_N , pour N impair. Il a en outre été montré [79] que $b_{a,i}^{N=2} = 0$; ainsi le superpotentiel non perturbatif est indépendant des modules T_i . Soulignons une autre différence avec le cas hétérotique (où $b_i'^a = \delta_{GS}^i$ en l'absence de secteur $N = 2$): même si $b_{a,i}^{N=2} = 0$, il est possible de compenser l'anomalie pour des facteurs de jauge différents grâce aux coefficients $\sigma_{a,k}$: $b_i'^a = \sum_k \sigma_{a,k} \delta_{GS}^{i,k}$.

Nous nous placerons par la suite dans des modèles de type Z_3 pour lesquels $\sigma_a \propto \beta_a$ et W_{np} possède un poids modulaire -3 garantissant l'invariance modulaire.

En résumé de cette sous-section, retenons les caractéristiques principales des modèles de type I. Toutes sont reliées à la présence des modules twistés M_k :

- Les champs M_k sont responsables de la compensation des anomalies (des symétries $U(1)_X$ et des symétries modulaires)
- Ils modifient le terme de Fayet-Iliopoulos $\delta_{GS}^X \frac{\partial K}{\partial S} \longrightarrow \delta_{GS,k}^X \frac{\partial K}{\partial M_k}$

⁽¹⁷⁾dualité manifeste à dix dimensions [77] mais non clairement établie à quatre dimensions [78].

- Ils apparaissent linéairement dans la fonction cinétique de jauge à l'ordre des arbres.

Notre motivation est d'étudier les conséquences de ces nouvelles propriétés sur la forme du potentiel scalaire. Les seules hypothèses que nous ferons concernent la forme du superpotentiel: nous supposons que le groupe de jauge G_9 contient un groupe $SU(N_c)$ responsable de la condensation de jaugino sur la D-9brane. L'échelle de condensation Λ dépendra alors non seulement de S mais aussi des modules twistés. C'est cette dépendance par rapport aux champs M_k dans l'échelle Λ qui sera l'ingrédient clé de la stabilisation du dilaton.

2.2.4 Minimisation du potentiel scalaire

Nous allons écrire le potentiel scalaire en utilisant une forme simplifiée du potentiel de Kähler (2.93) car nous supposons que seuls les champs C_i^9 prennent une valeur moyenne dans le vide non nulle. Nous notons de manière générique ϕ_n ces champs. En particulier, ϕ_0 est associé au méson $\sqrt{Q\tilde{Q}}$. De plus, pour simplifier nous nous plaçons dans le cas isotrope $T = T_i$ et dans le cas où il n'y a qu'un seul secteur twisté, $k = 1$ (il est facile de généraliser au cas $k \neq 1$). Le potentiel de Kähler s'écrit⁽¹⁸⁾

$$K = -\ln s - 3 \ln \tau + \hat{K}(m), \quad (2.108)$$

où

$$s = S + \bar{S}; \quad \tau = T + \bar{T} - \sum_n |\phi_n|^2; \quad m = M + \bar{M} - \delta \ln \tau. \quad (2.109)$$

Reprenons la forme du superpotentiel non perturbatif engendré par la condensation de jaugino donnée en (2.71)

$$W_{np} = \left(\frac{\Lambda^{3N_c-1}}{\phi_0^2} \right)^{\frac{1}{N_c-1}}. \quad (2.110)$$

où $\Lambda = e^{-f_9/2\beta}$, $\beta = \frac{3N_c-1}{16\pi^2}$. Soit $q_0 = (q + \tilde{q})/2$ la charge sous la symétrie $U(1)_X$ du champ composite ϕ_0 et -1 son poids modulaire. D'après la condition de compensation des anomalies (2.91), le coefficient $C_{SU(N_c)} = \frac{(q+\tilde{q})}{4\pi^2}$ de l'anomalie mixte $U(1)_X \times [SU(N_c)]^2$, vérifie $C_{SU(N_c)} = \sigma_{SU(N_c)} \delta_{GS}^X$, ce qui garantit l'invariance sous $U(1)_X$ du superpotentiel (2.110). Le poids modulaire de W_{np} est bien égal à -3 en l'absence de D5-branes sous la condition $\sigma\delta = -2\beta$ (associée à la transformation modulaire $M \rightarrow M - \delta \ln(icT + d)$ où $\delta = \frac{3}{8\pi^2} \delta_{GS}^i$).

⁽¹⁸⁾La forme du Kähler utilisée pour le méson peut être justifiée comme suit: soit l'expression du potentiel de Kähler en fonction des quarks: $K^{(Q)} = Q^\dagger Q + \tilde{Q}^\dagger \tilde{Q}$ où Q et $\tilde{Q}^\dagger$ sont des matrices de dimension $(N_f \times N_c)$, $\tilde{Q}$ et $Q^\dagger$ de dimension $(N_c \times N_f)$. Afin de réécrire le potentiel de Kähler en fonction des champs composites nous nous plaçons le long des directions plates $\langle D \rangle = 0$, $Q_{fj} = \tilde{Q}_{jf}^\dagger$, ce qui donne, dans le cas où il n'y a qu'une seule saveur, $K^{(Q)} \propto \sqrt{\mathcal{M}\mathcal{M}^\dagger}$ soit $K^{(Q)} \propto |\phi_0|^2$.

Potentiel scalaire

En plus du méson ϕ_0 nous incluons d'autres champs ϕ_m se couplant à ϕ_0 via la symétrie $U(1)_X$ sous laquelle ils possèdent la charge q_m . Les parties V^F et V^D du potentiel scalaire s'écrivent

$$V^F = e^G B = e^G (G_\alpha G^{\alpha\bar{\beta}} G_{\bar{\beta}} - 3) = e^{G/2} (G_\alpha F^\alpha - 3e^{G/2}) \quad (2.111)$$

$$V^D = \frac{g_x^2}{2} D_X^2, \quad D_X = q_n \phi_n \frac{\partial K}{\partial \phi_n} - \delta_{GS}^X \frac{x}{2} \quad (2.112)$$

où nous avons adopté la notation $x = \frac{\partial K}{\partial M}$. Remarquons que pour de faibles valeurs de m , $x \sim m$. Comme nous l'avons montré dans l'article V, la métrique de Kähler peut être inversée facilement (la généralisation au cas anisotrope figure dans l'appendice de l'article (VI)) et les champs auxiliaires s'écrivent

$$\begin{aligned} F^S &= e^{G/2} s \cdot \left(s \frac{\bar{W}_S}{\bar{W}} - 1 \right) \\ F^n &= \frac{e^{G/2}}{3 + \delta x} \tau \cdot \frac{\bar{W}_{\bar{\phi}_n}}{\bar{W}} \\ F^T &= -\frac{e^{G/2}}{3 + \delta x} \tau \cdot \left(3 - \bar{\phi}_n \frac{\bar{W}_{\bar{\phi}_n}}{\bar{W}} - \delta \frac{\bar{W}_M}{\bar{W}} \right) \\ F^M &= e^{G/2} \hat{A} \left(B_0 + \frac{\bar{W}_M}{\bar{W}} \right). \end{aligned} \quad (2.113)$$

où

$$B_0 = x - \frac{\delta}{\hat{A}}, \quad \hat{A} = \frac{1}{\hat{K}_{M\bar{M}}} + \frac{\delta^2}{3 + \delta x} \quad (2.114)$$

Rappelons qu'en l'absence de champ M , dans les modèles dits *no scale* ⁽¹⁹⁾, V_F est défini positif et peut être mis sous la forme simple

$$V_F = \frac{3}{\tau} \sum_n |F^{\phi_n}|^2 + \frac{1}{s^2} |F^S|^2 \quad (2.115)$$

en raison de la propriété

$$K_T F^T + \sum_n K_{\phi_n} F^{\phi_n} = 3e^{G/2} \quad (2.116)$$

En présence du champ M , cette propriété devient

$$K_T F^T + \sum_n K_{\phi_n} F^{\phi_n} = e^{G/2} \left[3 - \delta \frac{\bar{W}_M}{\bar{W}} \right] \quad (2.117)$$

⁽¹⁹⁾Nous appelons ici modèles *no scale* ces modèles où les variables T et ϕ_n apparaissent dans le potentiel de Kähler à travers la combinaison τ uniquement. L'origine de cette appellation vient du fait que si $F^S = 0$ alors $V = \frac{1}{3s\tau^2} \sum_n |W_n|^2$ et le minimum est obtenu pour $|W_n| = 0$ soit un potentiel plat *no scale* $V_0 = 0$, $\forall S, \tau$ et de plus les masses soft des scalaires sont nulles.

et V^F s'écrit simplement en termes des champs auxiliaires 'canoniques':

$$V_F = e^G \delta B_0 + |\hat{F}^S|^2 + |\hat{F}^M|^2 + \sum_{n=0} |\hat{F}^n|^2 \quad (2.118)$$

où

$$\hat{\phi}_n = \sqrt{\frac{(3 + \delta x)}{\tau}} \phi_n ; \hat{F}^n = \sqrt{\frac{(3 + \delta x)}{\tau}} F^n ; \hat{F}^S = \frac{1}{s} F^S ; \hat{F}^M = \frac{1}{\sqrt{\hat{A}}} F^M$$

Une des nouveautés de ce potentiel est le terme δB_0 , fonction de x uniquement, qui peut rendre V^F négatif. Notamment, pour $\hat{F}^{S,M,n} = 0$, la supersymétrie est restaurée si $x = -3/\delta$, ce qui correspond au minimum global $V^F = -3e^G$. Avant d'entrer dans les détails de la stabilisation de ce potentiel il est possible de donner les raisons pour lesquelles celle-ci est possible. Le point important vient du fait que W_S/W apparait **deux** fois dans ce potentiel. Dans $\hat{F}^S$ et dans $\hat{F}^M$ ($W_M/W = \sigma W_S/W$). Dans la plupart des études sur la minimisation du potentiel, il est couramment supposé $\langle \phi_n \rangle \ll \langle S \rangle, \langle T \rangle$. Sous cette hypothèse, la minimisation mène à (voir section(2.1.5)) $W_{eff} \sim e^{-3S/2\beta}$ ce qui fixe W_S/W à une constante négative et rend impossible la stabilisation du dilaton de s par l'équation $F^S = 0$ (auquel cas $\langle s \rangle < 0$). Dans le potentiel (2.118) nous avons une variable supplémentaire, M , et W_S/W peut être traité comme une variable dynamique. Sa *vev*, au lieu d'être fixée par l'équation de minimisation par rapport aux champs ϕ_n est fixée grâce à la contribution de F^M et peut être positive. Le dilaton admet alors un minimum par l'intermédiaire de l'équation $F^S = 0$. Dans cette stabilisation la contribution du terme D_X est importante car elle est à l'origine d'un minimum local pour x . Les détails du calcul sont donnés dans l'article (V) et reformulés de façon plus concise dans l'article (VI) où sont comparées deux situations, l'une où la symétrie modulaire est brisée et l'autre où elle est respectée. Nous allons maintenant résumer les points importants.

Stabilisation en l'absence de symétrie modulaire

Nous utilisons dans une première approche un superpotentiel de la forme $W = W_p + W_{np}$ où W_p est une fonction quelconque des m invariants sous $U(1)_X$ $X_m = \phi_0^2 \phi_m^{-2q_0/q_m}$. Les ϕ_n ayant un poids modulaire égal à -1 , les X_m possèdent des poids modulaires variables; la partie perturbative du superpotentiel brise ainsi l'invariance modulaire. Nous commençons par imposer la condition $D_X = 0$:

$$\sum_n q_n |\hat{\phi}_n|^2 = \frac{|\delta_{GS}^X x|}{2} M_P^2 \quad (2.119)$$

où nous avons anticipé le fait que $\langle \delta_{GS}^X x \rangle$ est positif. Minimiser V_F est équivalent à ne minimiser que B , où B a été défini dans l'équation (2.111), si la constante cosmologique est nulle. Réécrivons B :

$$B = \delta B_0 + \left| 1 - s \frac{W_S}{W} \right|^2 + \frac{\tau}{(3 + \delta x)} \sum_n \left| \frac{W_n}{W} \right|^2 + \hat{A} \left| B_0 + \sigma \frac{W_S}{W} \right|^2 \quad (2.120)$$

Le troisième terme de (2.120) s'écrit

$$\frac{\tau}{(3 + \delta x)} \sum_n \left| \frac{W_n}{W} \right|^2 = \frac{1}{|\hat{\phi}_0|^2} \left(\left| 2 \sum_m \Gamma_m + \frac{W_S}{W} \right|^2 + \sum_m 4 \frac{q_0^2}{q_m^2} \frac{1}{\epsilon_m} |\Gamma_m|^2 \right) \quad (2.121)$$

où

$$\Gamma_m = \frac{X_m}{W} \frac{\partial W_p}{\partial X_m}, \quad \epsilon_m = |\phi_m|^2 / |\phi_0|^2 \quad (2.122)$$

Dans la publication V, nous travaillons dans l'approximation où le condensat ϕ_0 domine sur tous les autres champs ϕ_m et minimisons perturbativement en fonction du paramètre ϵ_m . Après avoir imposé la contrainte (2.119), il reste $3 + m$ variables indépendantes. La minimisation de B par rapport à s , $\frac{W_S}{W}$ et Γ_m donne:

$$\begin{aligned} s &= -\frac{\sigma^2 + \lambda^2}{\sigma B_0} + \mathcal{O} \left| \frac{\phi_m}{\phi_0} \right|^2 \\ \frac{W_S}{W} &= -\frac{\sigma B_0}{\sigma^2 + \lambda^2} + \mathcal{O} \left| \frac{\phi_m}{\phi_0} \right|^2 \\ \Gamma_m &= \frac{\sigma B_0}{\sigma^2 + \lambda^2} \frac{q_m^2}{8\pi^2 q_0^2} \left| \frac{\phi_m}{\phi_0} \right|^2 + \mathcal{O} \left| \frac{\phi_m}{\phi_0} \right|^4 \end{aligned} \quad (2.123)$$

où nous avons défini

$$\lambda^2 = \frac{1}{\hat{A}} \frac{q_0}{8\pi^4 |\delta_{GS} x|}. \quad (2.124)$$

Le dilaton est donc stabilisé dès que x prend une valeur moyenne et si $\langle \sigma B_0 \rangle < 0$. Rappelons qu'à l'ordre zéro en ϵ , la *vev* de F^S est nulle. En outre, les *vev* des autres champs auxiliaires au minimum satisfont

$$\frac{F^0}{\phi_0} = \frac{e^{G/2} q_0}{2\pi^2 s |\delta_{GS} x|} = \frac{q_0}{q_m} \frac{F^m}{\phi_m} = -4\pi^2 \sigma F^M \quad (2.125)$$

Cette relation entre F^0 , F^m et F^M sera très importante par la suite lorsque nous déterminerons la structure des termes *soft*. Elle garantit en particulier le fait que les couplages triscalaires $\mathcal{A}_{ijk}$ sont réels.

A ce stade, B ne dépend plus que de x et s'écrit:

$$B = B_0 \frac{\delta}{\sigma^2 + \lambda^2} \left(\sigma^2 - \frac{q_0}{8\pi^4 \delta_{GS} \delta} (1 + \mathcal{O} \left| \frac{\phi_m}{\phi_0} \right|^2) \right). \quad (2.126)$$

Il ne reste donc plus qu'à minimiser cette fonction et déterminer la *vev* de x . Deux options peuvent être envisagées:

- Imposer $B = 0$, soit la condition $\sigma^2 = \frac{q_0}{8\pi^4 \delta_{GS} \delta}$. Les *vevs* de s , ϕ_0 , ϕ_m , τ correspondent dans ce cas à des directions plates du potentiel où la constante cosmologique est nulle. Il nous faut alors supposer que x et donc M est stabilisé après la brisure électrofaible.
- Tolérer une constante cosmologique non nulle et chercher le minimum local de $B_0(x)$. On montre facilement que la condition de minimisation est

$$\delta \frac{\partial K_{M\overline{M}}}{\partial x} = 1 + \frac{2\delta^2 K_{M\overline{M}}}{3 + \delta x}. \quad (2.127)$$

Certaines formes du potentiel de Kähler $\hat{K}$ satisfont cette équation. Par exemple, pour

$$\hat{K}(m) = \frac{3}{a} \ln \left(1 + \frac{a}{6} m^2 \right), \quad (2.128)$$

B_0 admet un minimum tel que

$$\delta B_0|_{min} \approx \frac{1}{2a} - \delta^2. \quad (2.129)$$

et

$$s \approx \frac{\sigma}{\delta^2}. \quad (2.130)$$

Nous avons représenté la dépendance en (s, x) du potentiel scalaire correspondant sur la figure (2.1). Notons que contrairement au scénario hétérotique basé sur la condensation de jaugino **multiple** il n'y a pas de barrière séparant le minimum et les grandes valeurs du dilaton, ce qui concède à ce potentiel un certain intérêt cosmologique.

Stabilisation avec symétrie modulaire

La partie perturbative du superpotentiel utilisée dans le paragraphe précédent brise l'invariance modulaire. Le poids modulaire des X_m est $n_{X_m} = (2/q_m)(q_0 - q_m)$. Nous souhaitons reproduire la minimisation du potentiel scalaire dans le cas où la symétrie modulaire est respectée. Construisons pour cela les invariants modulaires (sans dimension) suivants:

$$\tilde{X}_m = X_m W_{np}^{-l} \quad l = \frac{2}{3} \frac{(q_m - q_0)}{q_m}. \quad (2.131)$$

et écrivons l'expression du superpotentiel la plus générale compatible avec l'invariance modulaire et la symétrie $U(1)_X$

$$W = W_{np} f(\tilde{X}_m), \quad (2.132)$$

où f est une fonction quelconque des invariants $\tilde{X}_m$. Par exemple, le cas le plus simple est celui où il n'y a qu'un seul invariant $\tilde{X}_1 = \phi_1 \phi_0^2 W_{np}^{-1}$. Le superpotentiel $W =$

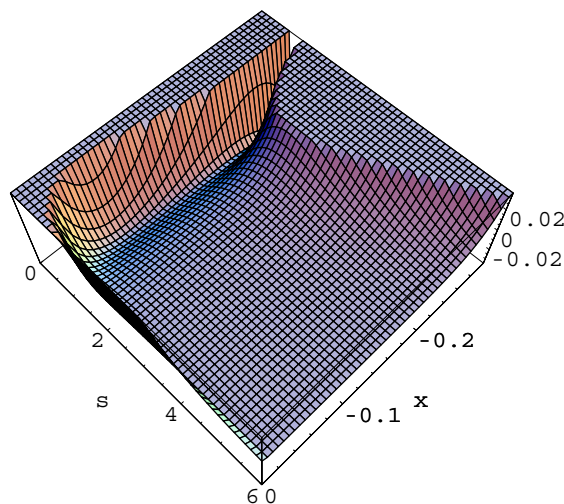


Figure 2.1: Potentiel V_F dans le plan (s, x) où $s = S + \overline{S}$ et $x = \frac{\partial \hat{K}}{\partial M} \sim m$ pour de faibles valeurs de x . Remarquons l'existence d'une vallée près de $x = 0$. Si la valeur initiale de m est au point fixe de l'orientifold $m = 0$, le dilaton situé initialement vers de grandes valeurs peut glisser le long de cette vallée vers son minimum.

$W_p + W_{np}$ avec $W_p = \phi_1 \phi_0^2$ peut alors s'écrire sous la forme (2.132) avec $f(\tilde{X}_1) = 1 + \tilde{X}_1$. Avec cette nouvelle expression pour le superpotentiel, W_S/W que nous noterons Δ_S prend la forme

$$\frac{W_S}{W} = \Delta_S = -\frac{8\pi^2}{N_c - 1} \left(1 + \sum_{m=1} \frac{2}{3} \Delta_m \left(\frac{q_0}{q_m} - 1 \right) \right). \quad (2.133)$$

où

$$\Delta_m = \frac{\tilde{X}_m f_m}{f} \quad \text{et} \quad f_m = \frac{\partial f}{\partial \tilde{X}_m} \quad (2.134)$$

En utilisant ces notations B s'exprime maintenant:

$$\begin{aligned} B = & \delta B_0 + |1 - s \Delta_S|^2 + \hat{A} |B_0 + \sigma \Delta_S|^2 + \sum_m \frac{4q_0^2}{q_m^2} \left| \frac{\Delta_m}{\hat{\phi}_m} \right|^2 \\ & + \frac{4}{(N_c - 1)^2} \frac{|(N_c + l - 1) \sum_m \Delta_m - 1|^2}{\frac{1}{2} |\delta_{GS}^X x| - \sum_m \frac{q_m}{q_0} \left| \hat{\phi}_m \right|^2} \end{aligned} \quad (2.135)$$

Nous allons pour simplifier calculer le potentiel scalaire dans le cas où ϕ_0 et ϕ_1 dominant. Après avoir utilisé $D_X = 0$, B est une fonction des quatre variables indépendantes

$s, \Delta_1, \hat{\phi}_1, x$. La minimisation par rapport aux trois premières de ces variables donne:

$$\frac{\partial B}{\partial s} = 0 \Rightarrow s = \frac{1}{\Delta_S} \quad (2.136)$$

$$\frac{\partial B}{\partial \hat{\phi}_1} = 0 \Rightarrow \frac{F^0}{\phi_0} = r \frac{F^1}{\phi_1}, \quad r = \pm \frac{q_0}{q_1} \quad (2.137)$$

$$\frac{\partial B}{\partial \Delta_1} = 0 \Rightarrow F^M = - \frac{F^0}{\phi_0} \frac{(3N_c - 1 + 2r)}{8\pi^2 \sigma (1 + r)} \quad (2.138)$$

Remarquons que les *vev* des champs auxiliaires satisfont le même type de relation que dans le cas où la symétrie modulaire est brisée et garantissent aussi la réalité des termes $\mathcal{A}_{ijk}$. Comme précédemment, nous pouvons réécrire B en fonction de x uniquement (*cf* article VI) et le problème de la stabilisation du dilaton et des autres champs scalaires se réduit au problème de la stabilisation de x .

En conclusion, nous avons montré qu'il est possible de stabiliser le dilaton avec **une seule** condensation de jaugino et donné un exemple de potentiel de Kähler permettant cette stabilisation. On peut alors parler de *Kähler stabilization* tout en nuancant le sens de cette appellation, son utilisation courante faisant référence au mécanisme de stabilisation par les corrections **non** perturbatives du potentiel de Kähler dans la corde hétérotique.

Résumé

Pour clore cette section, résumons une dernière fois les raisons pour lesquelles ce mécanisme de stabilisation est propre aux modèles de cordes de type I et ne peut s'appliquer dans le cas hétérotique. Puisque le point important est l'expression de la fonction cinétique de jauge $f_g = S + \sigma M$ on peut être tenté de se demander pourquoi le module T ne pourrait pas, dans la corde hétérotique, jouer le rôle que tient M dans la corde de type I. En effet, nous avons d'après (2.102) $f_h = S + \varsigma \ln \eta(T)^2$ et dans la limite des grands T

$$\eta(T) = e^{-\pi T/12} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-2\pi n T}) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} e^{-\pi T/12} \quad (2.139)$$

ainsi f_h devient une combinaison linéaire de S et T : $f \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} S - \varsigma \frac{\pi T}{6}$. Il y a deux raisons principales pour lesquelles cette fonction cinétique de jauge ne peut mener à une stabilisation: la première vient du fait que le potentiel de Kähler dépend de façon très différente de T et de M . Le terme dominant de $\hat{K}(m)$ est $\sim m^2$ et la dépendance en T est $-3 \ln(T + \bar{T})$. Dans le potentiel scalaire, $K_T \sim -\frac{1}{T + \bar{T}}$ a tendance à pousser T vers de grandes valeurs alors que $K_M \sim m$ dans les modèles de type I tend à stabiliser m vers de petites valeurs de l'ordre de δ . La deuxième raison est liée à la forme du terme de Fayet–Iliopoulos ξ (reliée aussi à la forme de potentiel de Kähler); dans les modèles de type I, $\xi_I^2 \propto m$ alors que $\xi_{het}^2 \propto 1/s$ et non $T + \bar{T}$ comme le voudrait l'échange $M \leftrightarrow T$.

2.3 CP et saveurs

Une fois les *vevs* des champs auxiliaires connues, il est possible de calculer les termes de brisure douce exactement sans avoir à introduire d'angle de goldstino arbitraire. Notre préoccupation suivante est de regarder les propriétés sous CP de ces termes ainsi que leur structure de saveur. Afin de motiver cette étude nous commençons par définir les problèmes posés par la violation de la symétrie CP et par les processus avec changement de saveurs dans les modèles supersymétriques.

2.3.1 Violation de CP et problème des saveurs en supersymétrie

La violation de CP est un domaine de la physique des particules qui pourrait jouer un rôle très important dans la recherche de nouvelle physique. Au problème de “CP fort” présenté dans l'introduction générale de cette thèse s'ajoute un nouveau problème lié à CP lorsque nous travaillons dans les modèles supersymétriques. Les termes de brisure douce du Modèle Standard Supersymétrique Minimal introduisent en effet un grand nombre de nouveaux paramètres dont un certain nombre de phases. Si nous donnons à ces phases des valeurs arbitraires, elles vont généralement produire de nouvelles manifestations observables de violation de CP. En particulier, elles sont à l'origine de moments dipolaires électriques beaucoup plus élevés que ce qui est permis par l'expérience (*cf* figure (2.2)). Tel est le *problème de CP supersymétrique*. Un second problème apparaissant de manière générique dans les modèles supersymétriques et déjà mentionné précédemment concerne les courants neutres avec changement de saveur (*FCNCs*). Un exemple de diagramme supersymétrique responsable d'un tel processus est donné dans la figure (2.3). Supprimer ces processus nécessite une structure bien particulière pour les termes de masse des scalaires et les couplages triscallaires. Comprendre cette structure constitue le *problème supersymétrique des saveurs*.

Afin d'éliminer les courants neutres avec changement de saveur, une des hypothèses suivantes est généralement utilisée:

- Les masses des scalaires $\tilde{m}_{i\bar{j}}$ et les couplages triscallaires $\mathcal{A}_{ijk}$ sont universels.
- Les masses des quarks et des squarks peuvent être diagonalisées dans une même base, ce qui est le cas dans certaines théories de saveur contrôlées par des symétries horizontales.
- Les squarks des deux premières familles sont beaucoup plus lourds que les squarks de la troisième famille. Les limites expérimentales les plus sévères imposées sur les processus avec changement de saveur concernent en effet surtout les deux premières familles alors que la brisure électrofaible induite par les corrections radiatives fait plutôt intervenir la troisième famille; il est donc a priori possible d'imposer une telle hiérarchie entre les familles sans *fine tuning* abusif.

Nous allons par la suite nous concentrer sur la première hypothèse, l'universalité. Celle-ci n'est cependant pas suffisante pour supprimer un certain nombre d'autres processus prédits a priori par le MSSM et non observés expérimentalement, par exemple les

contributions supersymétriques aux moments dipolaires électriques. Pour cette raison, de nouvelles hypothèses doivent être introduites. Deux attitudes sont possibles:

- Supposer que CP est une symétrie approximative de la théorie [80]. Cette hypothèse est motivée par le fait que dans la plupart des compactifications des théories de cordes, CP est une symétrie, qui doit être brisée spontanément [81,82]. Si la transmission de la brisure de CP au secteur observable est telle que toutes les phases sont petites (correspondant à certaines propriétés du superpotentiel), cela donne lieu à une théorie où CP est presque une symétrie. Les prochaines mesures de la violation de CP dans le système des mésons B devraient permettre de trancher sur la validité de cette hypothèse.
- Une alternative est de supposer que les phases sont d'ordre 1 mais que le schéma de brisure de supersymétrie interdit en quelque sorte à ces phases de s'exprimer. Un exemple bien connu est celui où la brisure de supersymétrie est dominée par le champ auxiliaire du dilaton (*cf* section 2.1.4)

En résumé, il semble difficile de résoudre les problèmes supersymétriques de CP et des saveurs sans traiter à la fois l'origine de la brisure spontanée de CP et le mécanisme de brisure de supersymétrie.

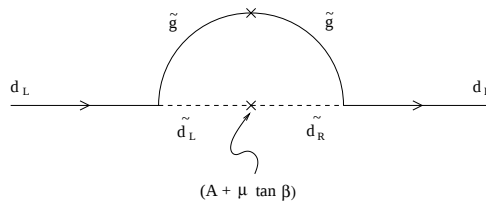


Figure 2.2: Contribution supersymétrique au moment dipolaire électrique du neutron.

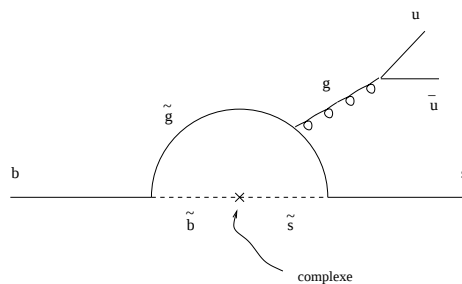


Figure 2.3: Contribution supersymétrique à la désintégration du méson $B \rightarrow K_s \pi^0$

2.3.2 Violation spontanée de CP

Dans la plupart des compactifications des théories de cordes, CP est une symétrie. Celle-ci doit donc être brisée pour rendre compte du caractère complexe de la matrice CKM. Dans cette section, nous allons montrer comment CP peut être facilement

brisée spontanément par le minimum du potentiel scalaire de notre modèle. L'idée est d'utiliser un mécanisme du type Froggatt–Nielsen [83] pour introduire la violation de CP dans les couplages de Yukawa. Rappelons que pour engendrer une phase *physique* il est nécessaire d'utiliser au moins deux champs de Froggatt–Nielsen, $\langle \phi_0 \rangle = \langle |\phi_0| \rangle e^{i\langle \theta_0 \rangle}$ et $\langle \phi_1 \rangle = \langle |\phi_1| \rangle e^{i\langle \theta_1 \rangle}$. Ecrivons par exemple les couplages de Yukawa de la forme:

$$\left(\frac{\langle \phi_0 \rangle}{M_s} \right)^{n_{ij}} H_u Q_L^i \overline{U}_R^j + \left(\frac{\langle \phi_1 \rangle}{M_s} \right)^{n_{kl}} H_d Q_L^k \overline{D}_R^l \quad (2.140)$$

Il est toujours possible d'éliminer la phase du premier terme par la transformation

$$\phi_0 \rightarrow \phi_0 e^{iq_0 \lambda} \quad \text{tel que} \quad q_0 \lambda = -\langle \theta_0 \rangle \quad (2.141)$$

Sous cette transformation, la phase du deuxième terme devient

$$\left(\frac{\langle |\phi_1| \rangle}{M_s} \right)^{n_{kl}} e^{in_{kl}(-\frac{q_1}{q_0}\langle \theta_0 \rangle + \langle \theta_1 \rangle)} H_d Q_L^k \overline{D}_R^l \quad (2.142)$$

Elle est proportionnelle à la phase de l'invariant sous $U(1)_X$, $X = \phi_1 \phi_0^{-q_0/q_1} / M_s^{1-q_0/q_1}$, $\theta_X = (\theta_1 - \frac{q_1}{q_0}\theta_0)$. Il est donc équivalent pour engendrer une phase observable dans les couplages de Yukawa de donner une phase à l'invariant X . Nous écrivons les couplages de Yukawa sous la forme:

$$Y_{ijk} = \left(\frac{\phi_0}{M_s} \right)^{q_{ijk}/q_0} g_{ijk}(X_m) \quad (2.143)$$

où q_{ijk} est la charge $U(1)_X$ du couplage de Yukawa et g_{ijk} est une fonction quelconque des X_m . Il est facile de voir comment la minimisation peut donner une *vev* complexe aux X_m . La *vev* de X_m est déterminée par l'équation (2.123c)

$$\frac{X_m}{W} \frac{\partial W_p}{\partial X_m} = \frac{\sigma B_0}{\sigma^2 + \lambda^2} \frac{q_m^2}{8\pi^2 q_0^2} \epsilon_m \quad (2.144)$$

Le second membre est négligeable dans la limite où $\epsilon_m \ll 1$ et l'équation de X_m se réduit à

$$\frac{\partial W_p}{\partial X_m} \approx 0 \quad (2.145)$$

Cette équation peut facilement mener à des solutions complexes pour X_m . Il suffit par exemple que f soit un polynôme d'ordre 2 en X_m . La valeur exacte de $\arg(X_m)$ dépend des paramètres du superpotentiel. Le même type d'analyse s'applique dans le cas invariant sous la symétrie modulaire; on écrit

$$Y_{ijk} = g_{ijk}(\tilde{X}_m) \left(\frac{\phi_0}{M_s} \right)^{q_{ijk}/q_0} \left(\frac{W_{np}}{M_s^3} \right)^{-(n_{ijk} + q_{ijk}/q_0)/3} \quad (2.146)$$

où n_{ijk} est le poids modulaire de Y_{ijk} . Notons que cette expression pour Y_{ijk} dépend de tous les champs sauf des modules T . Revenons au cas simple où il n'y a qu'un seul invariant $\tilde{X}$. La *vev* de $\tilde{X}$ est déterminée par l'équation

$$\Delta_1 = \frac{\tilde{X} f'}{f} = -\frac{\Delta_S}{8\pi^2} \frac{1}{1 + \rho r} \quad (2.147)$$

Le second membre étant fixé après stabilisation de x , nous obtenons l'équation de $\tilde{X}$

$$\tilde{X} \frac{\partial f}{\partial \tilde{X}} = \text{cst} \times f \quad (2.148)$$

Comme précédemment, si f est un polynôme d'ordre 2 en $\tilde{X}$, cela suffit pour engendrer une phase pour $\tilde{X}$.

2.3.3 Termes *soft*

Une fois que nous avons introduit des phases dans les Yukawa, l'étape suivante consiste à vérifier que ces phases ne vont pas se manifester dans les couplages triscalaire

$$(\mathcal{A}_{ijk})_{\text{ren}} = \langle F^\rho \rangle (K_\rho + \partial_\rho \ln Y_{ijk} - \partial_\rho \ln (\mathcal{Z}_i \mathcal{Z}_j \mathcal{Z}_k)) \quad (2.149)$$

Le terme potentiellement dangereux dans cette expression est le second terme; Y_{ijk} étant complexe, on s'attend *a priori* à ce que $\partial_\rho \ln Y_{ijk}$ le soit aussi. Il est important dans cette expression de sommer toutes les contributions (même si $F^m \ll F^0$, $F^m \partial_m$ est du même ordre de grandeur que $F^0 \partial_0$). En raison de la relation dynamique (2.125) des compensations se produisent et

$$F^\rho \partial_\rho X = 0 \quad (2.150)$$

ce qui garantit la réalité des termes $\mathcal{A}_{ijk}$. Au final:

$$F^\rho \partial_\rho \ln Y_{ijk} = \frac{q_{ijk}}{q_0} \frac{F^0}{\phi_0} \propto q_{ijk} \quad (2.151)$$

Un résultat équivalent se produit dans le cas invariant modulaire en raison des relations (2.137) et (2.138)⁽²⁰⁾.

Notons que la partie non universelle dans l'expression de $\mathcal{A}_{ijk}$ est de la forme

$$F^\rho \partial_\rho \ln (\mathcal{Z}_i \mathcal{Z}_j \mathcal{Z}_k) \propto (\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k) \quad (2.152)$$

où

$$\alpha_i = -\tau \partial_T \ln \mathcal{Z}_i = \left(1, \frac{1}{2}, 0\right) \text{ pour } (C_l^9, C^{95_l}, C_{m \neq l}^{5_l}, C^{5_l 5_m}, C_l^{5_l}) \text{ respectivement.}$$

Il est donc possible de choisir les champs du secteur visible de telle sorte que les $\mathcal{A}_{ijk}$ soient universels.

Finalement, deux situations peuvent être considérées selon l'ordre de grandeur de la phase de X (ou $\tilde{X}$):

⁽²⁰⁾ $F^\rho \partial_\rho \ln Y_{ijk} = \frac{F^0}{\phi_0(1+r)} \left(\frac{r q_{ijk}}{q_0} - n_{ijk} \right)$

- $\arg X \sim \mathcal{O}(1)$: dans ce cas, la phase de la matrice CKM est maximale tandis que les phases dans les termes *soft* sont supprimées.
- $\arg X \ll 1$: cette situation correspond à l'hypothèse "CP approximative". Or, dans ce scénario, la phase de la matrice CKM est insuffisante pour expliquer la valeur du paramètre ε_K mesuré dans le système $K^0 \bar{K}^0$. Il faut supposer que d'autres phases contribuent à ε_K . Dans notre modèle, cela ne peut être envisagé que dans la limite où les effets non renormalisables dans le potentiel de Kähler ne sont plus négligeables, ce qui détruirait alors la structure *no scale* (2.108) et donc le mécanisme de suppression des phases dans les termes $\mathcal{A}_{ijk}$.

La publication VI reproduit en détail les résultats pour les autres termes *soft*: les masses des jauginos associés respectivement aux D9 et D5 branes ainsi que les masses scalaires des cinq types de champs de matière $C_i^9, C^{95_i}, C_{j \neq i}^{5_i}, C^{5_i 5_j}$ et $C_i^{5_i}$. Y sont aussi discutés: les différentes échelles du modèle, le cas d'une compactification anisotrope, l'effet des termes non renormalisables et les contraintes qu'ils imposent sur les *vevs* des modules T_i et sur la nature des champs du secteur visible.

Bibliographie du chapitre II

- [1] L. J. Dixon and J. A. Harvey, *String theories in ten-dimensions without space-time supersymmetry*, Nucl. Phys. **B274** (1986) 93–105.
- [2] L. Alvarez-Gaume, P. Ginsparg, G. Moore, and C. Vafa, *An $O(16) \times O(16)$ heterotic string*, Phys. Lett. **B171** (1986) 155.
- [3] A. Sagnotti, *Some properties of open string theories*, hep-th/9509080.
- [4] A. Sagnotti, *Surprises in open-string perturbation theory*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **56B** (1997) 332–343, hep-th/9702093.
- [5] I. Antoniadis, E. Dudas, and A. Sagnotti, *Brane supersymmetry breaking*, Phys. Lett. **B464** (1999) 38–45, hep-th/9908023.
- [6] G. Aldazabal and A. M. Uranga, *Tachyon-free non-supersymmetric type IIB orientifolds via brane-antibrane systems*, JHEP **10** (1999) 024, hep-th/9908072.
- [7] A. Font, L. E. Ibanez, D. Lust, and F. Quevedo, *Strong – weak coupling duality and nonperturbative effects in string theory*, Phys. Lett. **B249** (1990) 35–43.
- [8] A. Sen, *Strong – weak coupling duality in four-dimensional string theory*, Int. J. Mod. Phys. **A9** (1994) 3707–3750, hep-th/9402002.
- [9] J. H. Schwarz, *Evidence for nonperturbative string symmetries*, Lett. Math. Phys. **34** (1995) 309–317, hep-th/9411178.
- [10] C. M. Hull and P. K. Townsend, *Unity of superstring dualities*, Nucl. Phys. **B438** (1995) 109–137, hep-th/9410167.
- [11] E. Witten, *String theory dynamics in various dimensions*, Nucl. Phys. **B443** (1995) 85–126, hep-th/9503124.
- [12] J. H. Schwarz, *Lectures on superstring and M theory dualities*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **55B** (1997) 1, hep-th/9607201.
- [13] M. J. Duff, *M theory (the theory formerly known as strings)*, Int. J. Mod. Phys. **A11** (1996) 5623–5642, hep-th/9608117.
- [14] P. K. Townsend, *Four lectures on M-theory*, hep-th/9612121.
- [15] I. Antoniadis, E. Dudas, and A. Sagnotti, *Supersymmetry breaking, open strings and M-theory*, Nucl. Phys. **B544** (1999) 469, hep-th/9807011.
- [16] I. Antoniadis, G. D’Appollonio, E. Dudas, and A. Sagnotti, *Partial breaking of supersymmetry, open strings and M-theory*, Nucl. Phys. **B553** (1999) 133, hep-th/9812118.
- [17] C. Bachas, *A way to break supersymmetry*, hep-th/9503030.

- [18] M. Bianchi and Y. S. Stanev, *Open strings on the Neveu–Schwarz pentabrane*, Nucl. Phys. **B523** (1998) 193–210, [hep-th/9711069](#).
- [19] G. Aldazabal, L. E. Ibanez, and F. Quevedo, *Standard-like models with broken supersymmetry from type I string vacua*, JHEP **01** (2000) 031, [hep-th/9909172](#).
- [20] G. Aldazabal, L. E. Ibanez, and F. Quevedo, *A D-brane alternative to the MSSM*, JHEP **02** (2000) 015, [hep-ph/0001083](#).
- [21] G. Aldazabal, L. E. Ibanez, F. Quevedo, and A. M. Uranga, *D-branes at singularities: A bottom-up approach to the string embedding of the standard model*, JHEP **08** (2000) 002, [hep-th/0005067](#).
- [22] C. Angelantonj, I. Antoniadis, G. D’Appollonio, E. Dudas, and A. Sagnotti, *Type I vacua with brane supersymmetry breaking*, Nucl. Phys. **B572** (2000) 36–70, [hep-th/9911081](#).
- [23] C. Angelantonj, R. Blumenhagen, and M. R. Gaberdiel, *Asymmetric orientifolds, brane supersymmetry breaking and non-BPS branes*, Nucl. Phys. **B589** (2000) 545–576, [hep-th/0006033](#).
- [24] I. Antoniadis and A. Sagnotti, *Mass scales, supersymmetry breaking and open strings*, Class. Quant. Grav. **17** (2000) 939–950, [hep-th/9911205](#).
- [25] E. Dudas, *Theory and phenomenology of type I strings and M-theory*, Class. Quant. Grav. **17** (2000) R41–R116, [hep-ph/0006190](#).
- [26] R. Rohm, *Spontaneous supersymmetry breaking in supersymmetric string theories*, Nucl. Phys. **B237** (1984) 553.
- [27] C. Kounnas and M. Porrati, *Spontaneous supersymmetry breaking in string theory*, Nucl. Phys. **B310** (1988) 355.
- [28] S. Ferrara, C. Kounnas, M. Porrati, and F. Zwirner, *Superstrings with spontaneously broken supersymmetry and their effective theories*, Nucl. Phys. **B318** (1989) 75.
- [29] C. Kounnas and B. Rostand, *Coordinate dependent compactifications and discrete symmetries*, Nucl. Phys. **B341** (1990) 641–665.
- [30] E. Kiritsis and C. Kounnas, *Perturbative and non-perturbative partial supersymmetry breaking: $N = 4 \rightarrow N = 2 \rightarrow N = 1$* , Nucl. Phys. **B503** (1997) 117, [hep-th/9703059](#).
- [31] I. Antoniadis, C. Bachas, D. C. Lewellen, and T. N. Tomaras, *On supersymmetry breaking in superstrings*, Phys. Lett. **B207** (1988) 441.
- [32] I. Antoniadis, *A Possible new dimension at a few TeV*, Phys. Lett. **B246** (1990) 377–384.

- [33] I. Antoniadis, K. Benakli, and M. Quiros, *Production of Kaluza–Klein states at future colliders*, Phys. Lett. **B331** (1994) 313–320, [hep-ph/9403290](#).
- [34] H. P. Nilles, *Dynamically broken supergravity and the hierarchy problem*, Phys. Lett. **B115** (1982) 193.
- [35] S. Ferrara, L. Girardello, and H. P. Nilles, *Breakdown of local supersymmetry through gauge fermion condensates*, Phys. Lett. **B125** (1983) 457.
- [36] J. P. Derendinger, L. E. Ibanez, and H. P. Nilles, *on the low-energy $d = 4, N = 1$ supergravity theory extracted for the $d = 10, N = 1$ superstring*, Phys. Lett. **B155** (1985) 65.
- [37] M. Dine, R. Rohm, N. Seiberg, and E. Witten, *Gluino condensation in superstring models*, Phys. Lett. **B156** (1985) 55.
- [38] P. Horava and E. Witten, *Heterotic and type I string dynamics from eleven dimensions*, Nucl. Phys. **B460** (1996) 506–524, [hep-th/9510209](#).
- [39] V. S. Kaplunovsky and J. Louis, *Model independent analysis of soft terms in effective supergravity and in string theory*, Phys. Lett. **B306** (1993) 269–275, [hep-th/9303040](#).
- [40] E. Cremmer *et al.*, *Spontaneous symmetry breaking and higgs effect in supergravity without cosmological constant*, Nucl. Phys. **B147** (1979) 105.
- [41] J. A. Bagger, *Coupling the gauge invariant supersymmetric nonlinear sigma model to supergravity*, Nucl. Phys. **B211** (1983) 302.
- [42] S. K. Soni and H. A. Weldon, *Analysis of the Supersymmetry Breaking Induced by $\mathcal{N} = 1$ Supergravity Theories*, Phys. Lett. **126B** (1983) 215.
- [43] R. Barbieri, S. Ferrara, and C. A. Savoy, *Gauge models with spontaneously broken local supersymmetry*, Phys. Lett. **B119** (1982) 343.
- [44] L. Hall, J. Lykken, and S. Weinberg, *Supergravity as the messenger of supersymmetry breaking*, Phys. Rev. **D27** (1983) 2359–2378.
- [45] S. Ferrara, C. Kounnas, and F. Zwirner, *Mass formulae and natural hierarchy in string effective supergravities*, Nucl. Phys. **B429** (1994) 589–625, [hep-th/9405188](#).
- [46] A. Brignole, L. E. Ibanez, and C. Munoz, *Towards a theory of soft terms for the supersymmetric Standard Model*, Nucl. Phys. **B422** (1994) 125–171, [hep-ph/9308271](#).
- [47] S. Dimopoulos and H. Georgi, *Softly broken supersymmetry and $su(5)$* , Nucl. Phys. **B193** (1981) 150.

- [48] T. R. Taylor, G. Veneziano, and S. Yankielowicz, *Supersymmetry QCD and its massless limit: an effective Lagrangian analysis*, Nucl. Phys. **B218** (1983) 493.
- [49] I. Affleck, M. Dine, and N. Seiberg, *Dynamical supersymmetry breaking in four dimensions and its phenomenological implications*, Nucl. Phys. **B256** (1985) 557.
- [50] B. de Carlos, J. A. Casas, and C. Munoz, *Supersymmetry breaking and determination of the unification gauge coupling constant in string theories*, Nucl. Phys. **B399** (1993) 623–653, hep-th/9204012.
- [51] N. V. Krasnikov, *On supersymmetry breaking in superstring theories*, Phys. Lett. **B193** (1987) 37.
- [52] M. Dine and Y. Shirman, *Remarks on the racetrack scheme*, Phys. Rev. **D63** (2001) 046005, hep-th/9906246.
- [53] E. Dudas and C. Grojean, *Four-dimensional M-theory and supersymmetry breaking*, Nucl. Phys. **B507** (1997) 553–570, hep-th/9704177.
- [54] A. Sagnotti, *Open strings and their symmetry groups*,. Talk presented at the Cargese Summer Institute on Non- Perturbative Methods in Field Theory, Cargese, France, Jul 16-30, 1987.
- [55] G. Pradisi and A. Sagnotti, *Open string orbifolds*, Phys. Lett. **B216** (1989) 59.
- [56] P. Horava, *Strings on world sheet orbifolds*, Nucl. Phys. **B327** (1989) 461.
- [57] P. Horava, *Background duality of open string models*, Phys. Lett. **B231** (1989) 251.
- [58] M. Bianchi, G. Pradisi, and A. Sagnotti, *Toroidal compactification and symmetry breaking in open string theories*, Nucl. Phys. **B376** (1992) 365–386.
- [59] M. Bianchi and A. Sagnotti, *On the systematics of open string theories*, Phys. Lett. **B247** (1990) 517–524.
- [60] M. Bianchi and A. Sagnotti, *Twist symmetry and open string Wilson lines*, Nucl. Phys. **B361** (1991) 519–538.
- [61] J. Polchinski, *Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges*, Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 4724–4727, hep-th/9510017.
- [62] E. G. Gimon and J. Polchinski, *Consistency Conditions for Orientifolds and D-Manifolds*, Phys. Rev. **D54** (1996) 1667–1676, hep-th/9601038.
- [63] L. E. Ibanez, *New perspectives in string phenomenology from dualities*, hep-ph/9804236.

- [64] C. Angelantonj, M. Bianchi, G. Pradisi, A. Sagnotti, and Y. S. Stanev, *Chiral asymmetry in four-dimensional open-string vacua*, Phys. Lett. **B385** (1996) 96–102, [hep-th/9606169](#).
- [65] M. Berkooz and R. G. Leigh, *A $D = 4, N = 1$ orbifold of type I strings*, Nucl. Phys. **B483** (1997) 187–208, [hep-th/9605049](#).
- [66] Z. Kakushadze, *Aspects of $N = 1$ type I-heterotic duality in four dimensions*, Nucl. Phys. **B512** (1998) 221, [hep-th/9704059](#).
- [67] Z. Kakushadze and G. Shiu, *A chiral $N = 1$ type I vacuum in four dimensions and its heterotic dual*, Phys. Rev. **D56** (1997) 3686–3697, [hep-th/9705163](#).
- [68] Z. Kakushadze and G. Shiu, *4D chiral $N = 1$ type I vacua with and without D5-branes*, Nucl. Phys. **B520** (1998) 75, [hep-th/9706051](#).
- [69] J. D. Lykken, *Weak Scale Superstrings*, Phys. Rev. **D54** (1996) 3693–3697, [hep-th/9603133](#).
- [70] L. E. Ibanez, C. Munoz, and S. Rigolin, *Aspects of type I string phenomenology*, Nucl. Phys. **B553** (1999) 43–80, [hep-ph/9812397](#).
- [71] L. E. Ibanez, R. Rabadan, and A. M. Uranga, *Anomalous $U(1)$'s in type I and type IIB $D = 4, N = 1$ string vacua*, Nucl. Phys. **B542** (1999) 112, [hep-th/9808139](#).
- [72] A. Sagnotti, *A Note on the Green-Schwarz mechanism in open string theories*, Phys. Lett. **B294** (1992) 196–203, [hep-th/9210127](#).
- [73] L. E. Ibanez, R. Rabadan, and A. M. Uranga, *Sigma-model anomalies in compact $D = 4, N = 1$ type IIB orientifolds and Fayet-Iliopoulos terms*, Nucl. Phys. **B576** (2000) 285, [hep-th/9905098](#).
- [74] J. P. Derendinger, S. Ferrara, C. Kounnas, and F. Zwirner, *On loop corrections to string effective field theories: Field dependent gauge couplings and sigma model anomalies*, Nucl. Phys. **B372** (1992) 145–188.
- [75] G. L. Cardoso and B. A. Ovrut, *A Green-Schwarz mechanism for $D = 4, N=1$ supergravity anomalies*, Nucl. Phys. **B369** (1992) 351–372.
- [76] L. J. Dixon, V. Kaplunovsky, and J. Louis, *Moduli dependence of string loop corrections to gauge coupling constants*, Nucl. Phys. **B355** (1991) 649–688.
- [77] J. Polchinski and E. Witten, *Evidence for heterotic – type I string duality*, Nucl. Phys. **B460** (1996) 525–540, [hep-th/9510169](#).
- [78] Z. Lalak, S. Lavignac, and H. P. Nilles, *Target-space duality in heterotic and type I effective Lagrangians*, Nucl. Phys. **B576** (2000) 399–429, [hep-th/9912206](#).

- [79] I. Antoniadis, C. Bachas, and E. Dudas, *Gauge couplings in four-dimensional type I string orbifolds*, Nucl. Phys. **B560** (1999) 93–134, [hep-th/9906039](#).
- [80] G. Eyal and Y. Nir, *Approximate CP in supersymmetric models*, Nucl. Phys. **B528** (1998) 21, [hep-ph/9801411](#).
- [81] M. Dine, R. G. Leigh, and D. A. MacIntire, *Of CP and other gauge symmetries in string theory*, Phys. Rev. Lett. **69** (1992) 2030–2032, [hep-th/9205011](#).
- [82] K. woon Choi, D. B. Kaplan, and A. E. Nelson, *Is CP a gauge symmetry?*, Nucl. Phys. **B391** (1993) 515–530, [hep-ph/9205202](#).
- [83] C. D. Froggatt and H. B. Nielsen, *Hierarchy of quark masses, Cabibbo angles and CP violation*, Nucl. Phys. **B147** (1979) 277.

Chapitre 3

Univers branaire et localisation de la gravité

La seconde *révolution des cordes*, liée à l'avènement des dualités survenu ces dernières années, a profondément enrichi le spectre des travaux en théorie des cordes et offre de nouvelles directions de recherches phénoménologiques. Elle a en particulier stimulé l'émergence des modèles d'*univers branaires* dans lesquels les champs de jauge du Modèle Standard sont confinés sur une hypersurface plongée dans un espace plus grand tandis que la gravité, qui par définition décrit la dynamique de l'espace-temps, est libre de se propager dans toutes les dimensions.

Dans la première section de ce chapitre, nous expliquons comment ces nouvelles constructions ont permis de reformuler le problème de hiérarchie de jauge en termes géométriques. L'accent est mis sur le modèle 5-dimensionnel de Randall–Sundrum qui propose une solution au problème de hiérarchie mais aussi un mécanisme de localisation de la gravité tout en autorisant une taille infinie pour la cinquième dimension. Nous nous intéressons par la suite (section 3.2) aux lois de la cosmologie de ce modèle. Enfin, la dernière section est consacrée à un certain nombre de questions ouvertes posées par le modèle de Randall–Sundrum.

3.1 Problème de hiérarchie et géométrie de l'espace transverse

Nous avons présenté dans l'introduction de cette thèse le problème de hiérarchie de jauge comme une des motivations majeure pour rechercher une physique au-delà du Modèle Standard. Ce problème comporte deux aspects: un premier aspect est la déstabilisation du potentiel scalaire du champ de Higgs due aux corrections quantiques quadratiques par rapport au *cut off* Λ de la théorie ($\delta m^2 \propto \Lambda^2$ où m est le paramètre de masse du champ de Higgs). La solution usuelle pour remédier à ce problème est d'introduire la supersymétrie. Ainsi, dans le Modèle Standard Supersymétrique Minimal, il n'y a pas de correction quantique quadratique et l'échelle électrofaible est stabilisée.

Le deuxième aspect est relié à la valeur du *cut off*. Pour une théorie décrivant la gravitation, la valeur naturelle pour Λ est l'échelle de Planck $M_P \sim 10^{19}$ GeV. Dans ce cas, le problème de hiérarchie devient: quelle est l'origine du rapport 10^{16} entre l'échelle de brisure électrofaible est l'échelle de Planck? Comme nous l'avons vu dans la section 2.2.2 du deuxième chapitre, dans une théorie de supercordes, l'échelle de Planck à quatre dimensions peut être reliée à l'échelle fondamentale des supercordes, M_s . Dans la théorie hétérotique, la relation perturbative est du type $M_P \sim g^{-2} M_s$. Demander une échelle fondamentale de l'ordre de l'échelle électrofaible nécessite une constante de couplage g excessivement faible⁽¹⁾. Par contre, dans la théorie de type I , nous avons $M_P^2 \sim M_s^{n+2} R_\perp^n / v_\parallel \alpha_p^2$ (cf équation (2.84)) où n est le nombre de dimensions transverses à la brane, $R_\perp$ la taille des dimensions transverses et $v_\parallel$ le volume longitudinal en unités de l'échelle des cordes. Rappelons aussi que les contraintes qui pèsent sur $R_\perp$ sont liées au comportement de la gravité alors que $R_\parallel$ est contraint par les interactions de jauge. Si $v_\parallel \sim \mathcal{O}(1)$ alors

$$M_P^2 \sim M_s^{n+2} R_\perp^n \quad (3.1)$$

Dans l'un ou l'autre cas, résoudre le problème de hiérarchie consiste à expliquer le lien entre l'échelle électrofaible M_{EF} , l'échelle de Planck quadri-dimensionnelle M_P et l'échelle des cordes M_s , autrement dit expliquer la valeur de la constante de couplage g et/ou la valeur du rayon $R_\perp$.

3.1.1 Reformulation de problème de hiérarchie en termes géométriques

Il est intéressant de remarquer que la relation (3.1) peut être obtenue à partir de l'action définissant la constante gravitationnelle d'un univers $4 + n$ -dimensionnel [3]:

$$(16\pi^2 G_{4+n})^{-1} \int d^{4+n}x \mathcal{R} = (16\pi^2 G_{4+n})^{-1} R_\perp^n \int d^4x \mathcal{R} + \dots \quad (3.2)$$

En définissant la masse de Planck à $4 + n$ dimensions $M_{4+n}^{-(n+2)} = G_{4+n}$, nous obtenons

$$M_P^2 \sim M_{4+n}^{n+2} R_\perp^n \quad (3.3)$$

Ainsi, M_s peut être interprétée comme la masse de Planck de l'espace à $4+n$ dimensions. Le potentiel gravitationnel créé par une masse ponctuelle située à l'origine des $3 + n$ dimensions spatiales est de la forme (solution de l'équation de Poisson à $3 + n$ dimensions):

$$V(r) \propto \begin{cases} G_{4+n} \frac{m}{r^{n+1}} & \text{si } r \ll R_\perp \\ \frac{G_{4+n}}{R_\perp^n} \frac{m}{r} \sim G_4 \frac{m}{r} & \text{si } r \gg R_\perp \end{cases} \quad (3.4)$$

On retrouve le potentiel newtonien dans la limite $r \gg R_\perp$. La loi de Newton étant bien testée jusqu'à des échelles millimétriques, cela donne la contrainte $R_\perp \lesssim \text{mm}$.

⁽¹⁾pour d'autres modèles avec une très faible constante de couplage voir [1, 2]

La relation (3.3) est à la base du modèle de Arkani-Hamed, Dimopoulos et Dvali (appelé ADD par la suite) [3]. Ces auteurs proposent de résoudre le problème de hiérarchie sans prêter attention au secteur de jauge et sans faire appel à la supersymétrie mais seulement en regardant la géométrie de l'espace-temps complet. Ils stipulent que l'échelle fondamentale M_{4+n} est en fait l'échelle électrofaible $M_{4+n} \sim \text{TeV}$ tandis que l'échelle de Planck mesurée à quatre dimensions n'est qu'une échelle *effective* reflétant l'existence de n dimensions supplémentaires de grande taille. Dit autrement, la petitesse de la constante de couplage gravitationnelle n'est qu'une conséquence d'un large volume transverse à notre univers quadri-dimensionnel. Il a ensuite été réalisé [4] qu'une telle relation émergeait naturellement à partir de l'action effective des cordes de type I (*cf* eq.(3.1)).

La question suivante est celle de la taille requise pour le rayon $R_\perp$. En imposant $M_s \sim 1 \text{ TeV}$ dans (3.1), nous obtenons

$$R_\perp \sim 10^{\frac{32-3n}{n}} \text{ GeV}^{-1} \sim 10^{\frac{32}{n}} 10^{-17} \text{ cm}. \quad (3.5)$$

Si notre univers est une brane de co-dimension 1 alors $R_\perp \sim 10^{15} \text{ cm}$. Il est clair que cette situation est exclue car elle implique une modification des lois de la gravité newtonienne à des échelles où celle-ci est parfaitement testée (échelles de l'ordre de la taille du système solaire). Le cas $n = 2$ est par contre envisageable⁽²⁾ car il se situe à la limite expérimentale $R_\perp \sim 1 \text{ mm}$ des tests de la gravité à courte distance [12] (*cf* [13] pour une revue du statut expérimental).

Dans ce scénario, le second⁽³⁾ problème de hiérarchie n'est pas résolu mais seulement reformulé dans l'espace de Fourier dual. Pour être résolu, il faudrait que l'inverse du rayon $R_\perp$ n'introduise pas une échelle supplémentaire, or, ici, une nouvelle échelle apparaît: $R_\perp^{-1} \sim 10^{-13} \text{ TeV}$ ⁽⁴⁾, soit toujours un rapport 10^{16} entre M_{EF} et $R_\perp^{-1}$. Expliquer la valeur M_{EF}/M_P correspond maintenant à comprendre la stabilisation de la valeur de $R_\perp$.

Nous avons jusqu'à présent supposé que l'espace-temps était plat et la métrique factorisable c'est à dire que l'espace-temps complet était un produit de l'espace-temps 4D de Minkowski avec un espace compact. Cette analyse ne prend pas en compte l'effet de la densité d'énergie de la brane sur la géométrie. Comment la situation est-elle modifiée lorsque l'espace-temps est courbé? Cette question a été abordée par Randall et Sundrum [14, 15] qui étudient un univers à cinq dimensions courbé par la présence d'une 3-brane. Mentionnons que cette question n'est pas nouvelle. Elle avait été étudiée par Rubakov et Shaposhnikov dès 1983 [16] (*cf* [17] pour une revue

⁽²⁾ Bien qu'une échelle de Planck à six dimensions $M_{4+2} \sim \text{TeV}$ ait été exclue par des contraintes de nature cosmologique et astrophysique [5–9], cela n'exclut pas encore $M_s \sim \text{TeV}$ en raison du facteur de constante de couplage α_p entre M_{4+2} et M_s (*cf* 2.84). D'autre part, les limites expérimentales ont récemment été repoussées [10] et ont permis de vérifier la loi de Newton jusqu'à des distances de 200 microns. Par contre, $M_{4+2} \sim 30 \text{ TeV}$, $n = 2$, correspondant à $R_\perp \sim 1 - 10 \mu\text{m}$, n'est pas exclu et a stimulé un certain nombre de recherches expérimentales pour tester la gravité à ces distances [11].

⁽³⁾ Le premier problème de hiérarchie, celui de la stabilité du potentiel scalaire par rapport aux corrections quantiques, est résolu si $n > 1$.

⁽⁴⁾ dans le "meilleur" des cas ($n = 6$), le rapport $M_{EF}/R_\perp^{-1}$ est de l'ordre de 10^5 .

historique). Des mécanismes de localisation en théories des champs avaient été proposés bien avant la découverte des D-branes. Dans ces modèles, notre univers se manifeste à travers une physique quadri-dimensionnelle malgré la présence d'autres dimensions non nécessairement compactes.

3.1.2 Modèle de Randall–Sundrum

L'action de Randall et Sundrum décrit un univers à cinq dimensions baigné par une constante cosmologique négative $\Lambda_{bulk}^{(5)}$ à l'origine d'une géométrie anti-de Sitter. Une 3-brane est localisée au point $y = 0$ sur l'axe de la cinquième dimension. L'action correspondante ne comporte qu'un terme de courbure et deux termes de “constantes cosmologiques” :

$$S_{RS} = \int d^5x \sqrt{g} \left(\frac{\mathcal{R}}{2\kappa_{5D}^2} - \Lambda_{bk} - \Lambda_{br} \delta(\sqrt{g_{55}}y) \right) \quad (3.6)$$

où $[\kappa_{5D}^2] = -3$, $[\Lambda_{bk}] = 5$ et $[\Lambda_{br}] = 4$. Λ_{br} est un terme de constante cosmologique sur la brane. Il est en fait plus précis de parler de *tension* de la brane car Λ_{br} n'est pas une constante cosmologique dans le sens où elle n'est pas observable (de même pour Λ_{bk}), comme nous le verrons plus loin. La modélisation de la densité d'énergie de la brane par une fonction delta n'est pas cruciale. Il est en effet possible d'introduire des modèles où la brane possède une épaisseur; cela ne change pas fondamentalement les résultats [18, 19]. Le point important est l'existence d'une densité d'énergie-source *localisée* en une région de l'axe y . L'ansatz le plus général pour une métrique statique qui soit compatible avec l'invariance de Poincaré dans l'espace longitudinal à quatre dimensions est de la forme

$$ds^2 = a^2(y) \eta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu + dy^2 \quad (3.7)$$

Cette métrique dépend de la coordonnée transverse y , elle n'est plus factorisable, on parle de géométrie “voilée” (*warped geometry* en anglais). Randall et Sundrum cherchent la solution des équations d'Einstein $G_{MN} = \kappa_{5D}^2 T_{MN}$ correspondant au tenseur énergie-impulsion

$$T_N^M = -\Lambda_{bk} \delta_N^M - \Lambda_{br} \delta(y) \delta_\mu^M \delta^\nu_N \delta_\nu^\mu ; \quad \Lambda_{bk} < 0, \quad \Lambda_{br} > 0 \quad (3.8)$$

et invariante sous la symétrie $\mathbb{Z}_2$ $y \leftrightarrow -y$. Cette solution s'écrit

$$ds^2 = e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu + dy^2 \quad (3.9)$$

Apparaît une échelle caractéristique, k , définie par l'inverse du rayon de l'espace AdS:

$$k = R_{AdS}^{-1} = \sqrt{-\frac{\kappa_{5D}^2 \Lambda_{bk}}{6}} \quad (3.10)$$

⁽⁵⁾L'appellation *bulk* correspond à l'espace de plongement de la brane.

En outre, la résolution de la singularité au niveau de la position de la brane en $y = 0$ impose la condition:

$$\Lambda_{br}^2 = -\frac{6\Lambda_{bk}}{\kappa_{5D}^2} \quad (3.11)$$

Cette condition est nécessaire pour assurer l'invariance de Poincaré sur la brane. Rappelons qu'en l'absence de constante cosmologique négative dans le *bulk*, l'univers 4D serait un espace de Sitter.

Une des spécificités de cette solution est qu'elle admet une masse de Planck effective à quatre dimensions **finie**, même en présence d'une cinquième dimension infinie [15, 20]⁽⁶⁾. La masse de Planck effective à quatre dimensions est définie en intégrant le terme de courbure le long de la cinquième dimension, par analogie avec la définition usuelle dans les théories de Kaluza–Klein. Cette définition n'est pas évidente ici mais sera justifiée *a posteriori*:

$$\int d^4x dy \sqrt{g_{5D}} \frac{\mathcal{R}_{5D}}{2\kappa_{5D}^2} = \int d^4x \sqrt{g_{4D}} \mathcal{R}_{4D} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{e^{-2k|y|}}{2\kappa_{5D}^2} \quad (3.12)$$

D'où

$$\frac{1}{2\kappa_{4D}^2} = \frac{1}{2\kappa_{5D}^2} \cdot \frac{1}{k} \sim (10^{19} GeV)^2 \quad (3.13)$$

Montrons maintenant en quoi cette géométrie apporte une solution au problème de hiérarchie.

Solution au problème de hiérarchie

Supposons l'existence d'une seconde brane située à une certaine distance y sur l'axe de la cinquième dimension (nous supposons en outre que la densité d'énergie associée à cette brane est faible comparée à Λ_{br} et modifie peu la géométrie) et écrivons l'action quadri-dimensionnelle comprenant le terme cinétique et le terme de masse d'un champ de matière quelconque localisé sur cette brane:

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{g} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m_0^2 \phi^2) \Big|_y &= \int d^4x \sqrt{\eta} e^{-4k|y|} (e^{2k|y|} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m_0^2 \phi^2) \Big|_y \\ &= \int d^4x \sqrt{\eta} (\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \hat{\phi} \partial_\nu \hat{\phi} - m_0^2 e^{-2k|y|} \hat{\phi}^2) \Big|_y \end{aligned} \quad (3.14)$$

où nous avons redéfini les champs $\hat{\phi} = e^{-k|y|} \phi$, qui sont les champs physiques se couplant à la métrique d'Einstein sans le facteur conforme. Leur terme de masse s'écrit alors

$$m_{phys}^2(y) = m_0^2 e^{-2k|y|} \quad (3.15)$$

Ainsi, les masses des champs vivant sur une 3-brane située en y dépendent de la métrique 5D de telle sorte que leurs valeurs physiques diffèrent très fortement des

⁽⁶⁾ Insistons sur le fait que le volume est fini en raison de la courbure de l'espace.

paramètres de masse fondamentaux m_0 sans avoir à invoquer un grand rayon de compactification. Si l'échelle du paramètre de masse du lagrangien m_0 est l'échelle de Planck, il est possible d'obtenir $m_{phys}(y) \sim \text{TeV}$ avec $|y| \sim 30k^{-1}$. C'est finalement k qui fixe la hiérarchie. Or k dépend de la tension (positive) de la brane: $k = \kappa_{5D}^2 \Lambda_{br}/6$. Si l'échelle fondamentale est l'échelle de Planck $m_0 \sim M_P \sim \kappa_{4D}^{-1} \sim \Lambda_{br}^{1/4}$ et si $\kappa_{5D}^{-2/3} \sim M_P$ alors $kM_P^{-1} \sim \mathcal{O}(1)$ soit $|y| \sim 30M_P^{-1}$. On peut considérer que $|y|^{-1}$ n'introduit pas de nouvelle échelle (mais seulement un facteur 30). Ici, la hiérarchie n'est pas transférée dans la taille du *bulk*.

En résumé, rappelons que dans le modèle ADD, l'échelle fondamentale est choisie de l'ordre de l'échelle électrofaible. Randall et Sundrum ont montré qu'il n'était pas nécessaire de faire ce choix pour expliquer l'échelle de masse des particules. De plus, la masse de Planck à quatre dimensions est du même ordre que la masse de Planck à cinq dimensions. Celle-ci est déterminée par la courbure plutôt que par la taille du *bulk*. Cette courbure n'est pas en conflit avec l'invariance de Poincaré à quatre dimensions. Une autre différence avec ADD (où au moins deux dimensions transverses à la brane sont requises) est lié au fait que le mécanisme de Randall–Sundrum semble propre aux branes de co-dimension 1. Nous reviendrons sur ce point par la suite. Enfin, en plus d'apporter une solution au problème de hiérarchie, la géométrie de Randall–Sundrum possède la propriété de reproduire les lois de la gravité newtonienne quadri-dimensionnelle même en présence d'une cinquième dimension infinie.

Compactification *versus* localisation

Afin d'étudier le comportement du graviton dans cette géométrie introduisons une perturbation $h_{\mu\nu}(x, y)$ dans la métrique (3.7):

$$ds^2 = (e^{-2k|y|}\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x, y)) dx^\mu \otimes dx^\nu + dy^2 \quad (3.16)$$

Après linéarisation des équations d'Einstein par rapport à la perturbation, avec le choix de jauge $h_\mu^\mu = 0$ et $\partial_\mu h_\nu^\mu = 0$, on obtient une équation d'onde de la forme

$$\left[-\frac{m^2}{2} e^{2k|y|} - \frac{1}{2} \partial_y \partial_y - 2k\delta(y) + 2k^2 \right] \psi(y) = 0 \quad (3.17)$$

où nous avons décomposé $h_{\mu\nu}(x, y) = e^{ip \cdot x} \psi(y)$ et où $m^2 = p_\mu p^\mu$ est la masse quadri-dimensionnelle du graviton. Il est utile d'effectuer le changement de variable:

$$k|z| = e^{k|y|} - 1 \quad (3.18)$$

L'équation (3.17) s'écrit alors

$$\left(-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + V(z) \right) \hat{\psi}(z) = \frac{m^2}{2} \hat{\psi}(z) \quad (3.19)$$

avec

$$V(z) = \frac{15}{8} k^2 \frac{1}{(k|z| + 1)^2} - \frac{3}{2} k\delta(z) \quad (3.20)$$

Cette équation n'est rien d'autre qu'une équation de Schrödinger dont les valeurs propres donnent les différents modes massifs du graviton. Randall et Sundrum ont montré que le mode de masse nul, $\tilde{h}^{(0)}$, était associé à un potentiel ayant la forme d'un volcan avec un puits infiniment profond à l'origine permettant de piéger le graviton au niveau de la brane en $y = 0$. Cet état propre est un état normalisable reproduisant le comportement du graviton quadri-dimensionnel. Sa contribution au potentiel gravitationnel reproduit en effet une loi en $1/r$. L'existence de cet état lié est cohérent avec le fait que la masse de Planck à quatre dimensions soit finie. Il existe en plus un continuum d'états massifs, $\tilde{h}^{(m)}$, qui apportent des corrections non newtoniennes mais qui sont supprimées par des puissances de la masse de Planck⁽⁷⁾.

En résumé, l'expression pour le potentiel gravitationnel engendré par une source ponctuelle statique m_* est de la forme⁽⁸⁾

$$V(r) = -\frac{\kappa_{5D}^2 m_* k}{r} \left(1 + \int dm \left| \frac{\tilde{h}^{(m)}(0)}{\tilde{h}^{(0)}(0)} \right|^2 e^{-mr} \right) \quad (3.21)$$

$$= -\frac{\kappa_{4D}^2 m_*}{r} \left(1 + \frac{\text{cste}}{M_P^2 r^2} \right) \quad (3.22)$$

On retrouve donc le potentiel newtonien sous la condition $\kappa_{4D}^2 = k\kappa_{5D}^2$, qui n'est rien d'autre que la relation (3.13); cela constitue la première justification annoncée de notre définition de la masse de Planck à quatre dimensions. Après avoir testé le comportement newtonien de la gravité 4D dans le modèle de Randall et Sundrum, il reste à vérifier d'autres manifestations de la relativité générale bien établies expérimentalement. Il a été montré que la structure du propagateur du graviton possède les bonnes propriétés permettant de reproduire par exemple l'effet de déviation des rayons lumineux par la matière [27] (*cf* aussi [28]). Un autre aspect important est d'étudier les lois cosmologiques de ce modèle; ce qui permet d'étudier des échelles d'énergie non balayées par les tests de la loi de Newton qui s'étendent sur des distances depuis le millimètre jusqu'à des échelles de l'ordre de 10^{24} m (mouvement des galaxies). La cosmologie permet de compléter le spectre d'énergie à partir de 10^{-4} eV, l'échelle millimétrique correspondant au rayonnement fossile, jusqu'au MeV, l'échelle de la nucléosynthèse primordiale.

Dans les publications II et III, nous nous sommes attachés à étudier les lois cosmologiques du modèle de Randall–Sundrum. Il n'est en effet pas du tout évident *a priori* (*cf* [29]) que les lois d'expansion des univers branaires suivent la loi usuelle quadri-dimensionnelle de Friedmann reliant la densité d'énergie ρ et le taux d'expansion

⁽⁷⁾ Ce mécanisme de localisation du graviton peut être comparé avec les mécanismes plus anciens de localisation des champs de matière sur des défauts topologiques ne faisant pas appel à la théorie des cordes ou à l'existence de D-branes [21–23]; voir aussi plus récemment [24, 25] ainsi que [26] pour un mécanisme de localisation de champs de jauge.

⁽⁸⁾ Bien que le graviton soit piégé sur la brane située en $y = 0$, la gravité 4-dimensionnelle sera ressentie par tout observateur vivant sur une autre brane, quelle que soit la position de celle-ci sur l'axe de la cinquième dimension [20].

H (paramètre de Hubble) de l'univers:

$$H^2 \sim \frac{\rho}{M_P^2} \quad (3.23)$$

La loi de Friedmann est vérifiée jusqu'à l'époque de la nucléosynthèse primordiale⁽⁹⁾ ($t \sim 1$ seconde après le Big-Bang), elle constitue une contrainte robuste permettant de discriminer les différents modèles cosmologiques. L'étude des lois d'expansion est ainsi un moyen complémentaire très utile pour tester les modèles d'univers branaires.

3.2 Cosmologie branaire

Avant de poursuivre notre analyse à cinq dimensions, rappelons quelques points importants sur les lois d'expansion de l'univers quadri-dimensionnel.

3.2.1 Taux d'expansion de l'univers quadri-dimensionnel

Le modèle standard cosmologique repose sur la métrique non statique de Friedmann–Robertson–Walker. C'est la métrique d'un espace homogène et isotrope (à symétrie spatiale maximale):

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (3.24)$$

où

$$k = \begin{cases} -1 & \text{univers hyperbolique infini} \\ 0 & \text{univers plat} \\ +1 & \text{univers sphérique fini} \end{cases} \quad (3.25)$$

Nous nous plaçons dans le cas $k = 0$ tel que

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 dx^i dx^j \delta_{ij} \quad (3.26)$$

La matière de l'univers est modélisée par un fluide parfait homogène isotrope dont la densité d'énergie est notée ρ et la pression p . Si nous ajoutons une composante de constante cosmologique, le tenseur énergie-impulsion s'écrit

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho + \Lambda, a(t)^2(p - \Lambda), a(t)^2(p - \Lambda), a(t)^2(p - \Lambda)) \quad (3.27)$$

⁽⁹⁾Comme nous l'avons évoqué dans la section 1.1.1 du premier chapitre, le calcul des abondances de éléments créés lors de la nucléosynthèse primordiale dépendent très sensiblement du taux d'expansion de l'univers. Celui-ci détermine en effet les températures de découplage de chacune des espèces présentes dans le plasma primordial. La comparaison avec les mesures des abondances des éléments a permis de tester la loi d'expansion, au moins jusqu'à une échelle d'énergie de l'ordre du MeV, et plus généralement la théorie de la nucléosynthèse primordiale, un des plus gros succès du *modèle standard cosmologique*.

et les équations d'Einstein (en notant $\dot{a} = da/dt$):

$$G_{00} = \kappa_{4D}^2 T_{00} \Rightarrow \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\rho + \Lambda}{3m_P^2} \quad (3.28)$$

$$G_{ii} = \kappa_{4D}^2 T_{ii} \Rightarrow 2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -\frac{p + \Lambda}{m_P^2} \quad (3.29)$$

En combinant ces équations on obtient une relation du type

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\rho - 3p + 4\Lambda}{6m_P^2} \quad (3.30)$$

qui sera utile par la suite. L'équation (3.28) n'est rien d'autre que la loi de Friedmann. En définissant le facteur de Hubble, $H = \dot{a}/a$, elle se réécrit:

$$H^2 = \frac{\rho + \Lambda}{3m_P^2} \quad (3.31)$$

Comment cette relation est-elle modifiée en présence de dimensions supplémentaires? D'après [29], le facteur de Hubble décrivant l'expansion de notre univers représenté par une 3-brane plongée dans un espace à cinq dimensions, au lieu d'être proportionnel à la racine carrée de la densité d'énergie, est proportionnel à la densité d'énergie, et ce, indépendamment de la taille de la cinquième dimension. Une telle loi est incompatible avec l'évolution récente de l'univers ($t > 1$ seconde). L'objet de nos travaux fut de chercher à réconcilier l'existence de dimensions supplémentaires transverses à notre univers avec la cosmologie standard.

3.2.2 Loi de Friedmann à cinq dimensions

Commençons par écrire la métrique dépendante du temps la plus générale à cinq dimensions:

$$ds^2 = -n^2(t, y)dt^2 + a^2(t, y)dx^i dx^j \delta_{ij} + b^2(t, y)dy^2, \quad (3.32)$$

Les tenseurs d'Einstein s'écrivent ($a' = \partial a / \partial y$)

$$G_{00} = 3 \left(\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{n^2}{b^2} \frac{a''}{a} - \frac{n^2}{b^2} \left(\frac{a'}{a} \right)^2 + \frac{n^2}{b^2} \frac{a'b'}{ab} \right) \quad (3.33)$$

$$G_{ij} = \delta_{ij} \left(-2 \frac{a^2}{n^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}\dot{n}}{an} - \frac{n^2}{b^2} \frac{a'n'}{an} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{n^2}{b^2} \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{n^2}{b^2} \frac{a''}{a} + \frac{n^2}{b^2} \frac{a'b'}{ab} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} \right) + \frac{a^2}{b^2} \frac{n''}{n} - \frac{a^2}{b^2} \frac{b'n'}{bn} - \frac{a^2}{n^2} \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{a^2}{n^2} \frac{\dot{b}\dot{n}}{bn} \right) \quad (3.34)$$

$$G_{yy} = 3 \left(\left(\frac{a'}{a} \right)^2 - \frac{b^2}{n^2} \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{b^2}{n^2} \frac{\dot{a}\dot{n}}{an} + \frac{a'n'}{an} - \frac{b^2}{n^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right) \quad (3.35)$$

$$G_{0y} = 3 \left(\frac{\dot{a}n'}{an} + \frac{\dot{b}a'}{ba} - \frac{\dot{a}'}{a} \right) \quad (3.36)$$

Nous souhaitons généraliser la solution de Randall–Sundrum au cas non statique et calculer le taux d'expansion de la brane située en $y = 0$. Le tenseur énergie-impulsion comporte donc le terme de constante cosmologique Λ_{bk} et la tension de la brane Λ_{br} auxquels nous ajoutons les perturbations ρ et p décrivant la matière sur la brane à l'origine de la dynamique d'expansion.

$$T_{00} = -g_{00} (\Lambda_{bk} + \delta(\sqrt{g_{yy}}y)(\Lambda_{br} + \rho)) \quad (3.37)$$

$$T_{ii} = -g_{ii} (\Lambda_{bk} + \delta(\sqrt{g_{yy}}y)(\Lambda_{br} - p)) \quad (3.38)$$

$$T_{yy} = -g_{yy}\Lambda_{bk} \quad (3.39)$$

Nous résolvons les équations d'Einstein en utilisant l'ansatz suivant (solution invariante sous la symétrie $\mathbb{Z}_2$):

$$\begin{aligned} a(t, y) &= a_0(t) \exp\left(\frac{1}{2}A|y| + \frac{1}{2}A_2y^2 + \dots\right) \\ b(t, y) &= b_0 \exp\left(\frac{1}{2}B|y| + \frac{1}{2}B_2y^2 + \dots\right) \\ n(t, y) &= \exp\left(\frac{1}{2}\mathcal{N}|y| + \frac{1}{2}\mathcal{N}_2y^2 + \dots\right) \end{aligned} \quad (3.40)$$

où A , B , $\mathcal{N}$, A_2 , B_2 , $\mathcal{N}_2$ sont des fonctions du temps à déterminer. Nous avons fait le choix de jauge $n(t, y = 0) = 1$. Nous avons de plus imposé le fait que b_0 est une constante car nous cherchons une solution où la masse de Planck effective 4D ne varie pas dans le temps.

La présence de la brane est à l'origine d'une discontinuité de la métrique en $y = 0$, se traduisant par des singularités $\delta(y)$ dans les deux équations (3.33) et (3.34) qui comportent les termes de dérivées secondes a'' et n'' . La première étape de la résolution consiste à identifier ces fonctions delta avec celles présentes dans le tenseur énergie-impulsion, ce qui permet de déterminer les fonctions A et $\mathcal{N}$:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{3}b_0M^{-3}(\rho + \Lambda); \\ \mathcal{N} &= b_0M^{-3}\left(p + \frac{2}{3}\rho - \frac{1}{3}\Lambda\right). \end{aligned} \quad (3.41)$$

où M est la masse de Planck à cinq dimensions définie par $\kappa_{5D}^2 = M^{-3}$. Cette identification est toute la particularité de la résolution des équations d'Einstein à cinq dimensions. Elle élimine en effet des équations régulières les termes linéaires par rapport à la densité d'énergie sur la brane (qui formaient le second membre de la loi de Friedmann à quatre dimensions, cf (3.28)). Il ne reste plus que des termes quadratiques par rapport à la densité d'énergie. Nous nous concentrons par la suite sur les équations d'Einstein évaluées en $y = 0$. Il n'est en effet pas nécessaire de résoudre globalement les équations pour déterminer le taux d'expansion de la brane. Un point important à noter est l'absence de dérivée seconde dans la composante G_{yy} (3.35) du tenseur d'Einstein. L'équation d'Einstein $G_{yy} = \kappa_{5D}^2 T_{yy}$ évaluée en $y = 0$ donne:

$$\left(\frac{\dot{a}_0}{a_0}\right)^2 + \frac{\ddot{a}_0}{a_0} = \frac{1}{36M^6}(\Lambda_{br} + \rho)(2\Lambda_{br} - \rho - 3p) + \frac{\Lambda_{bk}}{3M^3} \quad (3.42)$$

Remarquons que dans le cas où $\Lambda_{br} = 0$, nous obtenons

$$\left(\frac{\dot{a}_0}{a_0}\right)^2 + \frac{\ddot{a}_0}{a_0} = -\frac{\rho(\rho + 3p)}{36M^6} + \frac{\Lambda_{bk}}{3M^3} \quad (3.43)$$

qui, comparé à (3.30) dont le second membre est linéaire et non quadratique par rapport à la densité d'énergie, montre bien le caractère non standard de cette équation. Le terme de tension Λ_{br} est donc crucial pour rétablir un comportement du type (3.28). Développons (3.42):

$$\left(\frac{\dot{a}_0}{a_0}\right)^2 + \frac{\ddot{a}_0}{a_0} = \frac{\Lambda_{br}^2}{18M^6} + \frac{\Lambda_{bk}}{3M^3} + \frac{\Lambda_{br}}{36M^6}(\rho - 3p) - \frac{\rho(\rho + 3p)}{36M^6} \quad (3.44)$$

Les deux premiers termes s'annulent en raison de la relation-clé assurant la solution de Randall-Sundrum (3.11). Le terme linéaire en ρ et p peut être identifié avec le second membre de (3.30) de façon à reproduire le comportement standard, ce qui donne la condition

$$\Lambda_{br} = \frac{6M^6}{M_P^2} \quad (3.45)$$

Cette relation est la deuxième vérification *a posteriori* de la définition de la masse de Planck quadri-dimensionnelle. Elle est en effet équivalente à (3.13) lorsque nous utilisons la définition de k (3.10). Nous trouvons alors

$$\left(\frac{\dot{a}_0}{a_0}\right)^2 + \frac{\ddot{a}_0}{a_0} = \frac{\rho - 3p}{6M_P^2} - \frac{\rho(\rho + 3p)}{36M^6} \quad (3.46)$$

On montre facilement que la solution correspondante pour le facteur de Hubble est

$$H^2 = \frac{\rho}{3M_P^2} \left(1 + \rho \frac{M_P^2}{12M^6}\right) + \frac{\mathcal{C}}{a_0^4} \quad (3.47)$$

ce qui est la loi de Friedmann usuelle, avec en plus deux termes correctifs. Cette expression est obtenue en demandant la compatibilité de (3.46) avec la relation

$$\dot{\rho} + 3\rho(1 + \omega)H = 0 \quad (3.48)$$

qui vient de l'équation d'Einstein $G_{0y} = \kappa_{5D}^2 T_{0y}$ et reproduit la loi de conservation du tenseur énergie-impulsion quadri-dimensionnel $D^\nu T_{\mu\nu} = 0$. ω est le paramètre d'état du "fluide cosmique" défini par l'équation d'état: $p = \omega\rho$. Pour de la matière non relativiste, $\omega = 0$, pour de la matière relativiste $\omega = 1/3$ et pour une constante cosmologique, $\omega = -1$. Cherchons H^2 sous la forme

$$H^2 = f(\rho) \quad (3.49)$$

Nous obtenons facilement l'équation différentielle pour $f(\rho)$:

$$-\frac{3}{2}f'(1 + \omega)\rho + 2f = \frac{\rho(1 - 3\omega)}{6M_P^2} - \frac{\rho^2(1 + 3\omega)}{36M^6} \quad (3.50)$$

qui n'est valide que si ω est indépendant du temps, ce qui est le cas des composantes ordinaires de la densité d'énergie de l'univers responsable de l'expansion⁽¹⁰⁾. Une solution particulière correspond à

$$f(\rho) = \frac{\rho}{3M_P^2} \left(1 + \frac{\rho M_p^2}{12M^6} \right) \quad (3.51)$$

D'autre part, la solution de l'équation homogène s'écrit

$$f(\rho) = \mathcal{C} \rho^{4/(3(1+\omega))} \quad (3.52)$$

qui n'est rien d'autre que le terme en $\mathcal{C}/a_0^4$, d'où la solution (3.47).

Le terme quadratique par rapport à la densité d'énergie doit être négligeable au moins jusqu'à l'époque de la nucléosynthèse primordiale, ce qui se traduit par la condition

$$M^6 \gg \frac{\rho_{nucl} M_P^2}{12} \quad (3.53)$$

Sachant que $\rho_{nucl} \sim 0.1 \text{ MeV}^4$, cette condition s'écrit $M \gg 10 \text{ TeV}$. Le terme en $\mathcal{C}/a_0^4$ est un terme de radiation sur la brane. La résolution des équations ne nous dit rien sur la valeur de $\mathcal{C}$ (constante d'intégration). Seules les observations peuvent la contraindre.

Remarquons que nous n'avons pas eu besoin de chercher la solution globale des équations d'Einstein pour déterminer le facteur de Hubble sur la brane. Cependant, la solution globale, si elle est formulée dans un système de coordonnées approprié, permet de comprendre physiquement la signification de la constante $\mathcal{C}$. Il a ainsi été montré que dans un système de coordonnées bien choisi, la géométrie associée à la solution globale est celle d'un trou noir AdS-Schwarzschild et la constante $\mathcal{C}$ peut être interprétée physiquement comme la masse du trou noir [30,31].

Nous avons calculé le taux d'expansion sur la brane située en $y = 0$. Or, sur cette brane, le problème de hiérarchie n'est pas résolu. Si nous voulons une solution au problème de hiérarchie, il faudrait calculer le taux d'expansion sur une brane située à une certaine distance de la brane localisée en $y = 0$. Nous avons montré que dans une configuration où la cinquième dimension est compacte et où une deuxième brane est placée en $y = 1/2$ (nous travaillons dans l'intervalle $y \in [-1/2, +1/2]$), le taux d'expansion sur cette deuxième brane (de tension négative) est

$$H^2 = -\frac{\rho_{1/2}}{3M_P^2} \left(1 - \rho_{1/2} \frac{M_P^2}{12M^6} \right) \quad (3.54)$$

Cette équation n'est cohérente que dans le cas où $\rho_{1/2} < 0$. Une densité d'énergie négative ne peut décrire la matière de notre brane. Pour cette raison, cette solution ne peut être retenue. Pour pallier à ce problème, il faut garder à l'esprit que ce résultat est une conséquence du fait que nous avons pris un rayon compact, comme suggéré par le premier article de Randall et Sundrum, et d'autre part, nous avons forcé la

⁽¹⁰⁾Le cas où ω est dépendant du temps définit une composante de *quintessence*

stabilisation de la distance entre les deux branes ($b_0 = \text{cste}$). Nous expliquerons un peu plus loin comment il est possible de trouver des solutions compatibles à la fois avec la cosmologie standard et la solution au problème de hiérarchie en prenant en compte ces deux observations.

3.2.3 Généralisation à N dimensions

Le mécanisme de localisation de la gravité proposé par Randall–Sundrum ne s’applique qu’aux objets étendus (branes) de co-dimension 1. Cela peut se voir facilement à partir des expressions du tenseur d’Einstein. Dans le cas $n = 1$, G_{00} et G_{ii} présentent des termes de dérivées seconde des fonctions $a(t, y)$ et $n(t, y)$ par rapport à y . Par contre, la dérivée seconde de $b(t, y)$ n’apparaît nulle part. De plus, dans G_{yy} et G_{0y} , il n’y a aucune dérivée seconde. Cette structure permet d’identifier facilement les singularités en $\delta(y)$ et mène à une équation de la forme $a'/a = -\Lambda_{br}/M^3$ à l’origine du facteur conforme exponentiel. A $4 + n$ dimensions, pour une métrique de la forme

$$ds^2 = -n^2(t, y)dt \otimes dt + a^2(t, y)\delta_{ij}dx^i \otimes dx^j + b^2(t, y)\eta_{IJ}(y)dy^I \otimes dy^J \quad (3.55)$$

G_{00} et G_{ij} font intervenir le laplacien de b et G_{IJ} comporte les laplaciens de a , b et n . L’identification des singularités est un peu plus compliquée mais on peut néanmoins déterminer l’expression des fonctions a , b et n et constater qu’elles varient beaucoup moins rapidement en fonction de y_I que dans le cas $n = 1$ ⁽¹¹⁾ et ne peuvent mener à une localisation. En résumé, le pouvoir d’attraction de la brane est dilué par la présence des autres dimensions et insuffisant pour piéger le graviton. Des solutions ont cependant été trouvées pour lesquelles les dimensions “en trop” sont compactifiées [32–35].

Une façon naturelle de généraliser la solution de Randall–Sundrum à un espace à $4 + n$ dimensions est de considérer notre univers situé à l’intersection de branes de codimension 1 [36]. L’intersection de $n - 1$ branes de dimension $n + 2$ forme bien un espace à 3 dimensions. Chacune des $(n + 2)$ -brane localise la gravité. Notre univers, situé à leur intersection, est caractérisé par une gravité quadri-dimensionnelle. L’action correspondante s’écrit:

$$S = \int d^4x d^n y \sqrt{|g|} \left(\frac{\mathcal{R}}{2\kappa^2} - \Lambda_{bk} - \sum_{i=1}^n \sigma_i \delta(y_i \sqrt{g_{ii}}) \right), \quad (3.56)$$

où $\kappa^2 = M^{N+2}$ est le couplage gravitationnel à $4 + n$ dimensions et les σ_i sont les tensions (positives) des branes en intersection. Dans l’article IV, nous cherchons la solution des équations d’Einstein satisfaisant l’ansatz conforme:

$$ds^2 = a^{-2}(\tau, y_i) \left(-d\tau^2 + \sum_{i=1}^3 dx_i^2 + \sum_{j=1}^n dy_j^2 \right) \quad (3.57)$$

⁽¹¹⁾ Les fonctions de Green sont croissantes et linéaires pour une codimension $n = 1$, logarithmiques pour $n = 2$ et décroissantes pour $n > 2$

On montre facilement qu'elle s'écrit

$$a(\tau, y_i) = \left(H\tau + \sum_i k_i |y_i| \right)^{-1} \quad (3.58)$$

$$\text{avec } k_i = \frac{\kappa^2 \sigma_i}{2(n+2)} \text{ et } H^2 = \frac{2\kappa^2 \Lambda_b}{(n+2)(n+3)} + \sum_i k_i^2. \quad (3.59)$$

Le cas $H^2 = 0$ correspond à la généralisation de la solution de Randall–Sundrum à $4 + n$ dimensions obtenu par [36] avec une relation de *fine-tuning* équivalente entre la constante cosmologique dans le *bulk* et les tensions des branes. Nous nous sommes placés dans cette situation et avons ajouté une petite perturbation $\sigma_i \rightarrow \sigma_i + V_i(t)$ à l'origine de la dynamique d'expansion. Nous avons pu vérifier que le taux d'expansion se comportait bien comme

$$H \cong \left(\sum_i \frac{\kappa^4 \sigma_i V_i}{2(n+2)^2} \right)^{1/2}. \quad (3.60)$$

soit une loi de type Friedmann $H \sim \sqrt{V_i}$.

3.2.4 Réconcilier loi de Friedmann et solution au problème de hiérarchie

La configuration compacte avec une brane en $y = 0$, caractérisée par l'échelle de Planck, et une brane en $y = 1/2$, apporte une solution au problème de hiérarchie *i.e.* l'échelle physique sur la brane en $y = 1/2$ est exponentiellement atténuée par rapport à l'échelle de Planck. Néanmoins, le calcul du taux d'expansion sur la seconde brane nous a signalé que la densité d'énergie responsable de l'expansion sur la seconde brane devait être négative en raison de la symétrie Z_2 . Nous cherchons maintenant une configuration qui apporte à la fois une solution au problème de hiérarchie et qui suive les lois d'expansion standard. Il suffit pour cela de décompactifier la cinquième dimension. Nous avons par exemple proposé la solution (correspondant à l'ansatz conforme (3.57) dans le cas $n = 1$):

$$a(\tau, y) = \begin{cases} H\tau + k_P |y - y_P|, & y < y_T \\ H\tau + k_T |y - y_T| + k_P |y_P - y_T|, & y \geq y_T \end{cases} \quad (3.61)$$

où y_P est la position de la brane responsable de la localisation de la gravité et y_T celle d'une brane caractérisée par l'échelle électrofaible. La constante cosmologique Λ_{bk} est alors discontinue en y_T . Le taux d'expansion associé à cette solution s'écrit:

$$H^2 \cong \frac{\kappa^4}{18} \sigma_P V_P \cong -\frac{\kappa^4}{18} \frac{\sigma_P^2}{\sigma_T} V_T \quad (3.62)$$

avec la relation entre les densités d'énergie sur les deux branes

$$V_T \cong -\frac{\sigma_P}{\sigma_T} V_P \quad (3.63)$$

Pour avoir une solution au problème de hiérarchie, la tension de la brane ‘P’ doit être positive, ce qui implique $V_P > 0$ ($H^2 > 0$) et finalement $\sigma_T V_T < 0$. Cette situation diffère du cas compact où une tension négative sur la deuxième brane entraîne une densité d’énergie négative. Nous pouvons ici avoir $\sigma_T < 0$ mais $V_T > 0$; il suffit de vérifier $-\sigma_P < 2 < \sigma_T < 0$ et le taux d’expansion $H \sim \sqrt{V_i}/M_P$ est compatible avec une solution au problème de hiérarchie. Notons que cette solution peut être généralisée à n dimensions supplémentaires en suivant la procédure exposée dans la section précédente. Elle n’est cependant pas adaptée à la cosmologie récente. Elle décrit en effet l’inflation de toutes les dimensions, non seulement la brane mais aussi le *bulk*. La masse de Planck effective à 4D calculée sur la brane en y_P est indépendante du temps. Ce n’est pas le cas de la deuxième brane. Etant données les contraintes observationnelles sur la variation temporelle de la constante de Newton, nous ne pouvons pas accepter que les dimensions transverses à notre brane soient en expansion. Ces résultats posent un certain nombre de questions:

- Comment expliquer la relation (3.63) entre les densités d’énergie sur les deux branes?
- Comment garantir une loi d’expansion correcte sur la brane tout en conservant une masse de Planck effective indépendante du temps *i.e.* des dimensions transverses à la brane statiques?

3.2.5 Stabilisation de la cinquième dimension

Dans l’article II, nous avons imposé $b = b_0 = \text{cste}$, ce qui entraîne une relation entre les densités d’énergie sur les deux branes ρ_0 et $\rho_{1/2}$ et en particulier le fait que $\rho_{1/2} < 0$. Cette relation non naturelle est une conséquence de la surdétermination de notre système d’équations. Elle peut s’expliquer par le fait que nous n’avons pas traité le problème de la stabilisation de la distance entre les deux branes et forcé artificiellement la stabilité du rayon de la cinquième dimension [37]. Elle permet d’éviter que les deux branes ne s’éloignent infiniment (le radion n’est statique que pour des valeurs corrélées des densités d’énergie). *A contrario*, en présence d’un mécanisme de stabilisation, cette contrainte disparaît. Elle est remplacée par une équation indiquant comment est stabilisé le radion, autrement dit comment il acquiert une valeur décalée par rapport à son minimum en raison de la présence de matière sur les branes. Le radion peut être stabilisé en introduisant une composante T_{yy} dépendante de y , par exemple avec un champ scalaire dans le *bulk* [38, 39]. En conclusion, le problème de la stabilisation est un problème-clé qui permet de comprendre le *fine-tuning* entre les densités d’énergie des différentes branes et au final de réconcilier dans le modèle de Randall–Sundrum la solution au problème de hiérarchie avec une cosmologie standard.

3.3 Questions ouvertes

3.3.1 Origine du *fine-tuning* entre les ‘constantes cosmologiques’

Le modèle de Randall–Sundrum repose sur la condition (3.11) reliant la constante cosmologique dans le *bulk* avec la tension sur la brane. L’interprétation de ce *fine-tuning* reste une question ouverte. Dans la publication II, nous avons remarqué que cette relation garantissait l’annulation de l’énergie du vide à cinq dimensions:

$$\left. \begin{array}{l} \Lambda_0 = 6kM^3, \\ \Lambda_{bk} = -6k^2M^3 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{g_0}\Lambda_0 + \sqrt{g_*}\Lambda_* + \int_{-y_*}^{+y_*} dy \sqrt{g} \left(\Lambda_{bk} - \frac{M^3}{2}\mathcal{R} \right) = 0 \quad (3.64)$$

L’action de Randall–Sundrum ne comporte que des termes de constantes cosmologiques, introduits de manière *ad hoc* et donc *a priori* indépendants. Une description plus réaliste doit prendre en compte la dynamique des champs vivant dans le *bulk* et interagissant avec la brane. Dans IV, nous nous sommes placés dans une théorie de supergravité prenant en compte les degrés de liberté bosoniques⁽¹²⁾ fondamentaux vivant dans le *bulk*. Notre objectif était de savoir si l’action de Randall–Sundrum pouvait être interprétée comme un cas particulier d’action effective dérivant de la description d’une *p*-brane couplant au secteur bosonique de la supergravité à dix dimensions. Autrement dit, nous avons recherché les conditions portant sur les paramètres de notre lagrangien de départ, sous lesquelles des termes de constantes cosmologiques pouvaient apparaître.

3.3.2 Peut-on reproduire l’action effective de Randall–Sundrum à partir d’une théorie plus fondamentale?

Notre point de départ est l’action de supergravité à dix dimensions. Les degrés de liberté bosoniques du secteur gravitationnel sont: la métrique $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$, le dilaton Φ , les formes différentielles $A_{\hat{\mu}_1 \dots \hat{\mu}_{p+1}}$:

$$\mathcal{S}_{eff} = \int d^D x \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2\kappa^2} \mathcal{R} - \frac{1}{2} \partial_{\hat{\mu}} \Phi \partial^{\hat{\mu}} \Phi - \frac{1}{(p+2)!} e^{\alpha_p \Phi} F_{\hat{\sigma}_1 \dots \hat{\sigma}_{p+2}} F^{\hat{\sigma}_1 \dots \hat{\sigma}_{p+2}} \right) \quad (3.65)$$

où $F_{\hat{\mu}_1 \dots \hat{\mu}_{p+2}} = (p+2) \partial_{[\hat{\mu}_1} A_{\hat{\mu}_2 \dots \hat{\mu}_{p+2}]}$ est le tenseur de champ associé à la $p+1$ -forme différentielle A et α_p est le couplage du dilaton avec la forme différentielle. On ajoute à cette action celle décrivant la dynamique d’un objet étendu à p dimensions, la *p*-brane, qui se couple à la $p+1$ -forme *via* le couplage de Wess–Zumino $\mathcal{A}_{WZ}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_P = M^{p+1} \int d^{p+1} \xi \left(-\frac{1}{2} \sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \partial_a X^{\hat{\mu}} \partial_b X^{\hat{\nu}} g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(X) e^{-\alpha_p \Phi/p+1} + \frac{p-1}{2} \sqrt{|\gamma|} \right. \\ \left. + \frac{\mathcal{A}_{WZ}}{(p+1)!} \epsilon^{a_1 \dots a_{p+1}} \partial_{a_1} X^{\hat{\mu}_1} \dots \partial_{a_{p+1}} X^{\hat{\mu}_{p+1}} A_{\hat{\mu}_1 \dots \hat{\mu}_{p+1}} \right). \quad (3.66) \end{aligned}$$

Nous cherchons les valeurs des champs de masse nulle de la théorie considérée respectant:

⁽¹²⁾L’invariance de Lorentz sur le volume d’univers de la *p*-brane impose à tous les champs fermioniques d’être nuls.

- l'invariance de Poincaré sur le volume d'univers de la brane
- l'isotropie de l'espace transverse à la brane.

Il est bien connu⁽¹³⁾ que les solutions des équations du mouvement pour la métrique, le dilaton, les formes différentielles et les coordonnées de plongement de la brane peuvent s'exprimer en termes d'une seule fonction harmonique $H(y)$. Nous pouvons alors réécrire, dans le cas où il n'y a qu'une seule dimension transverse, les équations d'Einstein sous la forme

$$G^{\mu\nu} = -\frac{\kappa^2}{\mathcal{A}_{WZ}^2} \left(1 - \frac{\alpha_p^2}{2\mathcal{A}_{WZ}^2} \right) H^{-2(n_y+1)} (H')^2 g^{\mu\nu} - \kappa^2 M^{p+1} H^{-(1+n_x(p+1))} e^{-\alpha_p \phi_\infty/2} \frac{\delta(y)}{\sqrt{g_{yy}}} g^{\mu\nu} ; \quad (3.67)$$

$$G^{yy} = -\frac{\kappa^2}{\mathcal{A}_{WZ}^2} \left(1 + \frac{\alpha_p^2}{2\mathcal{A}_{WZ}^2} \right) H^{-2(n_y+1)} (H')^2 g^{yy} . \quad (3.68)$$

où

$$n_x = \frac{2\kappa^2}{p\mathcal{A}_{WZ}^2} \quad \text{et} \quad n_y = \frac{2(p+1)\kappa^2}{p\mathcal{A}_{WZ}^2} \quad (3.69)$$

La résolution implique aussi la condition

$$\mathcal{A}_{WZ}^2 = -2\kappa^2 \frac{p+1}{p} + \frac{\alpha_p^2}{2} , \quad (3.70)$$

Comparons (3.67) et (3.68) aux équations de Randall–Sundrum:

$$G^{\mu\nu} = -\kappa^2 \left(\Lambda_{bk}^\circ + \Lambda_{br}^\circ \frac{\delta(y)}{\sqrt{g_{yy}}} \right) g^{\mu\nu} ; \quad (3.71)$$

$$G^{yy} = -\kappa^2 \Lambda_{bk}^\circ g^{yy} . \quad (3.72)$$

Nous retrouvons donc la solution de Randall–Sundrum dans le cas où $n_y = (p+1)n_x = -1$, ce qui correspond à la limite de découplage du dilaton $\alpha_p = 0$. Dans cette limite, nous pouvons donc calculer les valeurs des constantes cosmologiques sur la brane et dans le *bulk* :

$$\Lambda_{bk}^\circ = -\frac{p+1}{8p} M^{p+2} e^{-\alpha_p \phi_\infty} \quad \text{et} \quad \Lambda_{br}^\circ = M^{p+1} e^{-\alpha_p \phi_\infty/2} . \quad (3.73)$$

Ainsi, dans notre approche, des termes de constantes cosmologiques apparaissent dans la limite de découplage du dilaton et peuvent être exprimés en fonction de la masse de Planck à dix ou onze dimensions. Cependant, ces résultats ne correspondent pas à une situation physique acceptable. En effet, pour une brane de codimension 1, une

⁽¹³⁾ cf par exemple la revue [40]

constante de couplage nulle pour le dilaton correspond à un couplage de Wess–Zumino imaginaire. Ce problème est spécifique au cas où il n’y a qu’une seule dimension transverse et peut être évité en introduisant dans le lagrangien des termes obtenus par compactification. La généralisation au cas où il y a plus d’une dimension transverse est assez immédiate: il est possible d’identifier les termes de constantes cosmologiques dans la limite de découplage du dilaton, qui cette fois-ci correspond bien à une charge électrique réelle. En revanche, le facteur conforme s’écrit $\exp(+cst|y|)$ où $cst > 0$, ce qui ne permet pas de résoudre le problème de hiérarchie et confirme la difficulté à généraliser le mécanisme de Randall–Sundrum à des branes de co-dimension supérieure à 1. Enfin, dans le cas où le dilaton ne découple pas, la constante cosmologique dans le *bulk* est remplacée par une fonction non triviale de y . Insistons sur le fait qu’il est de toute façon nécessaire de compléter l’action de Randall–Sundrum pour stabiliser la distance entre les branes.

3.3.3 Problème de la constante cosmologique

Le modèle de Randall–Sundrum est un exemple de construction où la constante cosmologique associée à notre univers quadri-dimensionnel (la tension de la 3-brane) n’est pas observable. Elle est en effet compensée par la constante cosmologique de l’univers 5-dimensionnel, ce qui permet de trouver une solution plate pour la métrique induite sur la brane. Ce mécanisme est à l’origine de propositions récentes pour reformuler le problème de la constante cosmologique dans le contexte des univers branaires. Il avait déjà été proposé par Rubakov et Shaposhnikov en 1983 [41].

Résumons brièvement l’idée générale: à quatre dimensions, les différentes contributions à l’énergie du vide, venant des boucles gravitationnelles $\mathcal{O}(M_P^4)$, de la brisure électrofaible $\mathcal{O}(10^{-64}M_P^4)$, de la brisure de la symétrie chirale $\mathcal{O}(10^{-76}M_P^4)$, doivent être ajustées finement pour annuler la constante cosmologique (les observations cosmologiques indiquent $\mathcal{O}(10^{-120}M_P^4)$). En revanche, en présence de dimensions supplémentaires, l’énergie du vide quadri-dimensionnelle n’implique pas nécessairement l’existence d’une constante cosmologique mais peut à la place courber l’espace-temps dans le *bulk* tout en maintenant un univers plat à quatre dimensions. C’est le cas dans le modèle de Randall–Sundrum où la tension de la brane, aussi élevée soit-elle, $\mathcal{O}(M_P^4)$, n’est pas observable car elle est compensée par la courbure du *bulk*. La résolution du problème de la constante cosmologique revient donc à expliquer pourquoi la densité d’énergie du vide de notre brane n’induit pas de courbure sur notre brane. Cela demande de trouver un mécanisme d’ajustement naturel entre la densité d’énergie sur la brane et l’énergie du *bulk* et de comprendre pourquoi il mène préférentiellement à une géométrie exactement plate sur la brane. Ce mécanisme nécessite l’introduction d’une composante dynamique dans le *bulk* (tenseur énergie-impulsion T_{yy} non constant). Des exemples ont été proposés récemment [42, 43] où cet ajustement est réalisé par l’intermédiaire d’un champ scalaire dans le *bulk*. Malheureusement, le prix à payer est l’existence d’une singularité dans la cinquième dimension à une distance finie de la brane. Finalement, il a été montré ultérieurement que ce mécanisme ne fait que déplacer le problème de *fine-tuning* [44–46] et n’échappe pas au *no-go theorem* de Weinberg [47].

Cependant, cette singularité est inhérente à une composante dynamique donnée par un champ scalaire. Il existe d'autres propositions dans lesquelles la composante dynamique est un champ de jauge [48]; dans ce cas, la singularité n'est pas pathologique car elle est cachée par l'horizon d'un trou noir.

Bibliographie du chapitre III

- [1] I. Antoniadis and B. Pioline, *Low-scale closed strings and their duals*, Nucl. Phys. **B550** (1999) 41, [hep-th/9902055](#).
- [2] I. Antoniadis, S. Dimopoulos, and A. Givon, *Little string theory at a TeV*, [hep-th/0103033](#).
- [3] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. Dvali, *The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter*, Phys. Lett. **B429** (1998) 263, [hep-ph/9803315](#).
- [4] I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. Dvali, *New dimensions at a millimeter to a Fermi and superstrings at a TeV*, Phys. Lett. **B436** (1998) 257–263, [hep-ph/9804398](#).
- [5] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. Dvali, *Phenomenology, astrophysics and cosmology of theories with sub-millimeter dimensions and TeV scale quantum gravity*, Phys. Rev. **D59** (1999) 086004, [hep-ph/9807344](#).
- [6] S. Cullen and M. Perelstein, *SN1987A constraints on large compact dimensions*, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 268–271, [hep-ph/9903422](#).
- [7] V. Barger, T. Han, C. Kao, and R. J. Zhang, *Astrophysical constraints on large extra dimensions*, Phys. Lett. **B461** (1999) 34–42, [hep-ph/9905474](#).
- [8] C. Hanhart, D. R. Phillips, S. Reddy, and M. J. Savage, *Extra dimensions, SN1987a, and nucleon nucleon scattering data*, Nucl. Phys. **B595** (2001) 335–359, [nucl-th/0007016](#).
- [9] S. Hannestad and G. Raffelt, *New supernova limit on large extra dimensions*, [hep-ph/0103201](#).
- [10] C. D. Hoyle *et al.*, *Sub-millimeter tests of the gravitational inverse-square law: A search for 'large' extra dimensions*, Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 1418–1421, [hep-ph/0011014](#).
- [11] J. C. Long, A. B. Churnside, and J. C. Price, *Gravitational experiment below 1-millimeter and comment on shielded Casimir backgrounds for experiments in the micron regime*, [hep-ph/0009062](#).
- [12] Y. Su *et al.*, *New tests of the universality of free fall*, Phys. Rev. **D50** (1994) 3614.
- [13] J. C. Long, H. W. Chan, and J. C. Price, *Experimental status of gravitational-strength forces in the sub-centimeter regime*, Nucl. Phys. **B539** (1999) 23–34, [hep-ph/9805217](#).
- [14] L. Randall and R. Sundrum, *A large mass hierarchy from a small extra dimension*, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 3370–3373, [hep-ph/9905221](#).

- [15] L. Randall and R. Sundrum, *An alternative to compactification*, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 4690–4693, [hep-th/9906064](#).
- [16] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, *Do we live inside a domain wall?*, Phys. Lett. **B125** (1983) 136.
- [17] M. Visser, *An exotic class of Kaluza-Klein models*, Phys. Lett. **B159** (1985) 22, [hep-th/9910093](#).
- [18] M. Gremm, *Four-dimensional gravity on a thick domain wall*, Phys. Lett. **B478** (2000) 434, [hep-th/9912060](#).
- [19] M. Gremm, *Thick domain walls and singular spaces*, Phys. Rev. **D62** (2000) 044017, [hep-th/0002040](#).
- [20] J. Lykken and L. Randall, *The shape of gravity*, JHEP **06** (2000) 014, [hep-th/9908076](#).
- [21] R. Jackiw and C. Rebbi, *Solitons with fermion number 1/2*, Phys. Rev. **D13** (1976) 3398–3409.
- [22] R. Jackiw and P. Rossi, *Zero modes of the vortex - fermion system*, Nucl. Phys. **B190** (1981) 681.
- [23] G. 't Hooft, *Computation of the quantum effects due to a four- dimensional pseudoparticle*, Phys. Rev. **D14** (1976) 3432–3450.
- [24] M. V. Libanov and S. V. Troitsky, *Three fermionic generations on a topological defect in extra dimensions*, Nucl. Phys. **B599** (2001) 319–333, [hep-ph/0011095](#).
- [25] J. M. Frere, M. V. Libanov, and S. V. Troitsky, *Three generations on a local vortex in extra dimensions*, [hep-ph/0012306](#).
- [26] G. Dvali and M. Shifman, *Domain walls in strongly coupled theories*, Phys. Lett. **B396** (1997) 64–69, [hep-th/9612128](#).
- [27] J. Garriga and T. Tanaka, *Gravity in the brane-world*, Phys. Rev. Lett. **84** (2000) 2778–2781, [hep-th/9911055](#).
- [28] S. B. Giddings, E. Katz, and L. Randall, *Linearized gravity in brane backgrounds*, JHEP **03** (2000) 023, [hep-th/0002091](#).
- [29] P. Binetruy, C. Deffayet, and D. Langlois, *Non-conventional cosmology from a brane-universe*, Nucl. Phys. **B565** (2000) 269, [hep-th/9905012](#).
- [30] P. Kraus, *Dynamics of anti-de Sitter domain walls*, JHEP **12** (1999) 011, [hep-th/9910149](#).

- [31] P. Bowcock, C. Charmousis, and R. Gregory, *General brane cosmologies and their global spacetime structure*, Class. Quant. Grav. **17** (2000) 4745–4764, hep-th/0007177.
- [32] T. Gherghetta and M. Shaposhnikov, *Localizing gravity on a string-like defect in six dimensions*, Phys. Rev. Lett. **85** (2000) 240–243, hep-th/0004014.
- [33] T. Gherghetta, E. Roessl, and M. Shaposhnikov, *Living inside a hedgehog: Higher-dimensional solutions that localize gravity*, Phys. Lett. **B491** (2000) 353–361, hep-th/0006251.
- [34] S. L. Dubovsky, V. A. Rubakov, and P. G. Tinyakov, *Is the electric charge conserved in brane world?*, JHEP **08** (2000) 041, hep-ph/0007179.
- [35] E. Ponton and E. Poppitz, *Gravity localization on string-like defects in codimension two and the AdS/CFT correspondence*, JHEP **02** (2001) 042, hep-th/0012033.
- [36] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, and N. Kaloper, *Infinitely large new dimensions*, Phys. Rev. Lett. **84** (2000) 586–589, hep-th/9907209.
- [37] C. Csaki, M. Graesser, L. Randall, and J. Terning, *Cosmology of brane models with radion stabilization*, Phys. Rev. **D62** (2000) 045015, hep-ph/9911406.
- [38] W. D. Goldberger and M. B. Wise, *Bulk fields in the Randall-Sundrum compactification scenario*, Phys. Rev. **D60** (1999) 107505, hep-ph/9907218.
- [39] W. D. Goldberger and M. B. Wise, *Modulus stabilization with bulk fields*, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 4922–4925, hep-ph/9907447.
- [40] M. J. Duff, R. R. Khuri, and J. X. Lu, *String solitons*, Phys. Rept. **259** (1995) 213–326, hep-th/9412184.
- [41] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, *Extra space-time dimensions: towards a solution to the cosmological constant problem*, Phys. Lett. **B125** (1983) 139.
- [42] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, N. Kaloper, and R. Sundrum, *A small cosmological constant from a large extra dimension*, Phys. Lett. **B480** (2000) 193–199, hep-th/0001197.
- [43] S. Kachru, M. Schulz, and E. Silverstein, *Self-tuning flat domain walls in 5d gravity and string theory*, Phys. Rev. **D62** (2000) 045021, hep-th/0001206.
- [44] S. Forste, Z. Lalak, S. Lavignac, and H. P. Nilles, *A comment on self-tuning and vanishing cosmological constant in the brane world*, Phys. Lett. **B481** (2000) 360, hep-th/0002164.
- [45] S. Forste, Z. Lalak, S. Lavignac, and H. P. Nilles, *The cosmological constant problem from a brane-world perspective*, JHEP **09** (2000) 034, hep-th/0006139.

- [46] C. Csaki, J. Erlich, C. Grojean, and T. Hollowood, *General properties of the self-tuning domain wall approach to the cosmological constant problem*, Nucl. Phys. **B584** (2000) 359–386, [hep-th/0004133](#).
- [47] S. Weinberg, *The cosmological constant problem*, Rev. Mod. Phys. **61** (1989) 1–23.
- [48] C. Csaki, J. Erlich, and C. Grojean, *Gravitational Lorentz violations and adjustment of the cosmological constant in asymmetrically warped spacetimes*, [hep-th/0012143](#).

Publication I

Was the Electroweak Phase Transition Preceded by a Color-Broken Phase?

McGill 99-01
hep-ph/9902220

Was the Electroweak Phase Transition Preceded by a Color-Broken Phase?

J.M. Cline^a G.D. Moore^a and G. Servant^{a,b}

^a Dept. of Physics, McGill University, 3600 University St.
Montreal, Qc H3A 2T8 Canada

^b Service de physique théorique du CEA Saclay
91191 Gif sur Yvette cédex, France

Abstract

It has been suggested, in connection with electroweak baryogenesis in the Minimal Supersymmetric Standard Model (MSSM), that the right-handed top squark has a negative mass squared parameter, such that its field could condense prior to the electroweak phase transition (EWPT). Thus color and electric charge could have been broken just before the EWPT. Here we investigate whether the tunneling rate from the color-broken vacuum can ever be large enough for the EWPT to occur in this case. We find that, even when all parameters are adjusted to their most favorable values, the nucleation rate is many orders of magnitude too small. We conclude that, without additional physics beyond the MSSM, the answer to our title question is “no.” This gives constraints in the plane of the light stop mass versus parameters related to stop mixing. However it may be possible to get color breaking in extended models, such as those with R -parity violation.

PACS: 11.30.Fs, 12.60Jv

Keywords: Electroweak baryogenesis, Phase transition

1 Introduction

The baryon asymmetry of the universe (the excess of baryons over antibaryons) is a very interesting puzzle, and it is exciting that its resolution may involve only electroweak physics which is either known or testable at colliders in the near future. This is because electroweak physics has the potential for satisfying all three of Sakharov's conditions [1] for baryogenesis. The first, baryon number nonconservation, occurs because of the anomaly and the topological structure of the vacuum in the $SU(2)$ sector of the electroweak theory [2]; further, baryon number violation becomes quite efficient at high temperatures, $T > 100$ GeV [3]. The second condition, CP violation, is present but insufficient in the minimal standard model [4]; however, there are new sources in some extended models which allow for enough baryon production.

The third condition is that baryon number violating processes are out of thermal equilibrium, at the moment of baryogenesis. Electroweak physics can assure this as temperatures fall through the $T \sim 100$ GeV range if the Higgs field gains a large condensate at a first order phase transition. To avoid the relaxation of baryon number back to zero in the broken phase, the Higgs condensate h must satisfy $h/T \gtrsim 1.1$ [5]. Such a strong phase transition is not guaranteed, but it depends on the exact values of masses and couplings. In the standard model it does not occur; with the current bound on the Higgs mass, $m_H > 95.5$ GeV [6], there is no phase transition at all [7]. However, in the minimal supersymmetric standard model (MSSM), if the mostly right-handed scalar top quark (henceforth stop) is sufficiently light, then the phase transition can be strong enough [8]. (A light left-handed stop is disfavored by its contribution to the precision electroweak rho parameter.) For this to occur, the right stop mass parameter m_U^2 must be negative. If mixing between right and left stops is negligible, the mass of the light squark satisfies $m_t^2 = m_t^2 + m_U^2$ at tree level, so the lightest squark is lighter than the top quark. If the left-handed stop is sufficiently heavy, $m_Q \gtrsim 1$ TeV, then its radiative correction to the Higgs boson mass is large enough to satisfy the experimental limit on m_h even though the other top squark contributes negligibly to m_h . This appears to be the scenario for electroweak baryogenesis requiring the least additional physics.

If m_U^2 is sufficiently negative (at tree level, if $m_U^2 < -(g_s^2/6y_t^2)m_H^2$), then there is a second, metastable minimum of the electroweak potential, in which the stop field but not the Higgs field condenses, and charge and color, but not $SU(2)_{\text{weak}}$, are broken. At very high temperatures the only minimum of the free energy is the symmetry restored one, but if m_U^2 is negative enough, this charge and color breaking (CCB) minimum might become metastable at a higher temperature than the conventional electroweak (EW) minimum. This opens a qualitatively new scenario, first discussed by Kusenko, Langacker and Segre [9], and more recently by Bödeker, John, Laine, and Schmidt [10], and Quiros *et al.* [11]. The universe begins at high temperatures in the symmetric phase. As it cools, at some temperature T_{c1} the color breaking minimum appears, and shortly thereafter, at $T_{\text{nuc}1}$, the universe converts to this phase via a bubble-nucleation-driven first order phase transition. Later, at a temperature T_{c2} , the electroweak minimum becomes energetically competitive with the symmetric

phase, and at T_{c3} its free energy equals that of the color breaking minimum. Finally, at some lower temperature⁽¹⁾ $T_{\text{nuc}3}$, the free energy difference between the minima becomes sufficient to allow nucleation of bubbles of the EW phase out of the CCB phase, and electroweak symmetry is broken and color symmetry restored.⁽²⁾ Baryogenesis could occur in this transition, which can be very strong. It also has a novel and rich phenomenology; $SU(3)_{\text{color}}$ is broken to $SU(2)$ in the color-breaking phase, and numerous mass eigenstates differ between the phases. The implications for baryogenesis have not been studied in detail, although they could be very interesting.

But before studying them, we should first ascertain whether this sequence of phase transitions can actually occur. With the current, very weak bounds on the physical stop mass, there is no problem making m_U^2 negative enough; and there is a range of m_U^2 values where color breaking would occur at a higher temperature, but the global vacuum minimum would be the EW one. But this does not guarantee that the phase transition would have occurred cosmologically. For the case of the conventional electroweak phase transition, or the transition to the color breaking phase mentioned above, there is always a temperature where bubble nucleation becomes efficient, simply because the symmetric phase eventually becomes spinodally unstable: the field can roll down instead of tunneling. On the other hand, for the CCB to EW phase transition, both minima remain metastable down to $T = 0$. It may be that, at some temperature, tunneling out of the CCB phase occurs relatively quickly. But it is also possible that the CCB phase may satisfy Yoda's principle; "Once you start down that dark path, forever will it dominate your destiny." This paper attempts to determine whether the nucleation rate is ever fast enough for escape from the CCB minimum.

The efficiency of nucleation of the stable phase is controlled by the action of the lowest saddle point configuration interpolating between the two minima, in the Euclidean path integral with periodic time of period $1/T$ [12]. At low temperature the time direction can be approximated to be infinite, which allows one to recover the results of Coleman and Callan [13]; in this limit the critical action has the form $S = C/g^2$ and the tunneling rate is therefore $\sim \exp(-C/g^2)$, where g^2 characterizes the coupling constants of the theory and C is a real number which depends on the shape of the effective potential. At high temperature, the saddle point solution does not vary in the (very short) Euclidean time direction at all, so the action is $S = E/T \sim m/g^2 T$, with $m \sim gh$ a characteristic mass scale in the problem and h the separation of the minima in field space. This leads to a nucleation rate with the parametric form $\exp(-C'h/gT)$, where C' is another function of the shape of the potential.

If the two minima are nearly degenerate, then C' is numerically large and C is even larger. If one minimum is almost spinodally unstable, C and C' can be small. However

⁽¹⁾We denote by $T_{\text{nuc}2}$ the temperature of nucleation of electroweak bubbles from the symmetric phase, in the case that color breaking does not occur first.

⁽²⁾To be precise, a local, gauge symmetry is never "broken" in the sense of not being a symmetry of the ground state, and no gauge invariant operator unambiguously distinguishes the phases. In fact, for some values of the couplings, the electroweak "symmetric" and "broken" phases are not distinct at all, and there is no phase transition as the temperature is lowered [7]. However, for the case at hand the symmetry restored and broken phases have a good operational definition, in terms of gauge invariant order parameters like $H^\dagger H$, and there is no problem in distinguishing them.

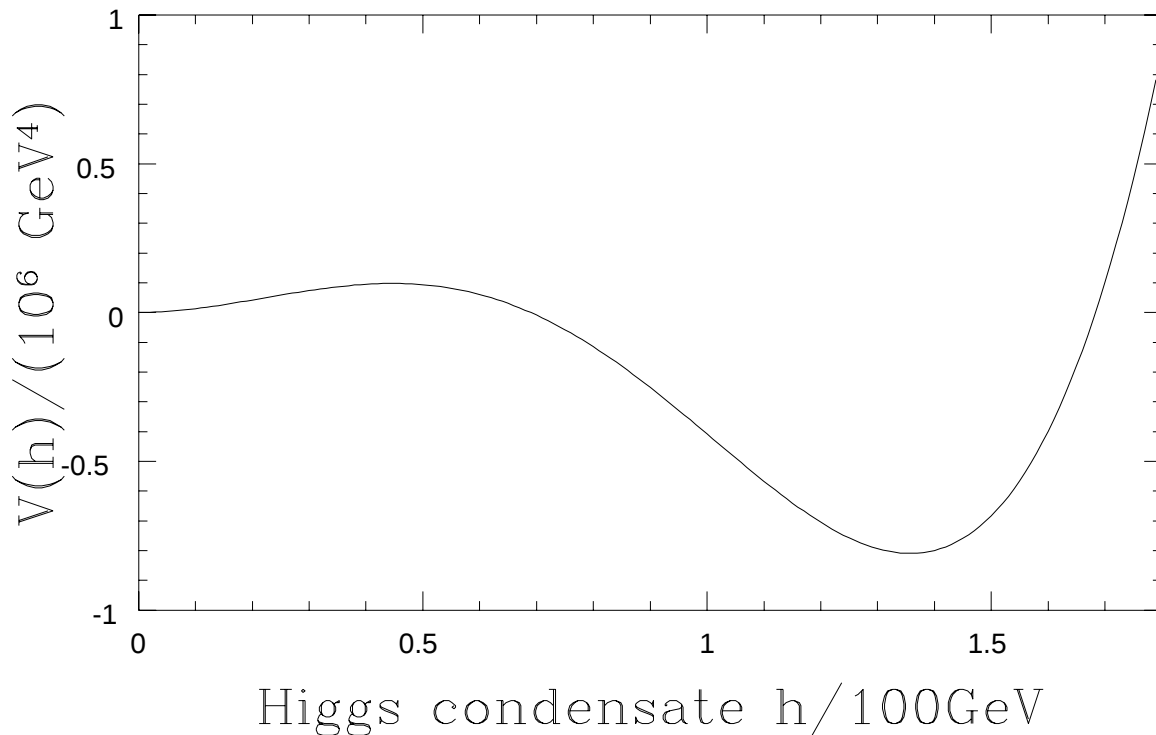


Figure 1: The effective potential at the nucleation temperature for the electroweak phase transition, in the standard scenario where color breaking never occurs. The barrier between phases is small compared to the difference in depths of the phases.

the potential must come fairly close to spinodal before C' becomes as small as $O(1)$, which means that in practice nucleation is very slow except near a spinodal point.⁽³⁾ Figure 1 illustrates this point by showing the shape of the potential for the Higgs field at the temperature $T_{\text{nuc}2}$ where the Higgs phase nucleates out of the symmetric phase, at a value of parameters for which color breaking does not occur. One notices that the height ϵ of the “bump” separating the two phases is small compared to the free energy difference ΔV between them. This is typical, and the value of $\epsilon/\Delta V$ required to make the phase transition complete is even smaller if the strength of the transition (measured by $\langle h \rangle/T$) is increased.

The tunneling rate from the CCB to the EW minimum behaves similarly, but unlike the pure electroweak transition, its bump height ϵ need not go to zero. Moreover the phase transition is strong; $\langle h \rangle/T$ becomes quite large by the time the critical temperature for this second transition is reached. This requires a very small $\epsilon/\Delta V$, and we are right to wonder whether that will be achieved. Hence, our aim must be to determine not *when* the CCB phase tunnels to the EW phase, but whether it can ever do so, on cosmologically relevant time scales. In Section 2 we make some rough estimates to determine what region of parameter space has the fastest tunneling rate.

⁽³⁾One could imagine models with extra physics, for instance cosmic strings coupling either to the Higgs or stop fields, in which the phase transition could be stimulated by “nucleation sites;” here we will consider only the case with no additional exotic physics.

The construction of the finite temperature effective potential is discussed in Section 3. The details of how we compute the tunneling rate follow in Section 4, while the technical details of the calculation of the critical bubble shape and action are postponed to Appendix A, and the renormalization group analysis needed to find the couplings of the tree level potential is described in Appendix B. We conclude that the nucleation is too slow for EW bubbles ever to percolate, for any physically allowed values of the MSSM couplings.

2 Rough estimates and the choice of parameters

Before constructing the full effective potential, it is useful to discuss a rough approximation which can give much analytic insight into the dependence of the tunneling rate on the many unknown parameters of the MSSM. For this purpose, the most important terms in the approximate potential are those which determine the critical temperatures $T_{c1} - T_{c3}$, as well as the height of the barrier between the color-broken and electroweak phases. These are precisely the quadratic and quartic couplings that appear in the zero-temperature effective potential, but with coefficients that now depend on temperature. A more accurate approximation would require the temperature-induced cubic terms as well, but these are not necessary for the analysis of this section. Only in the following section will we present the full effective potential with all terms included.

2.1 Preferred values of the couplings

At tree level and in the absence of squark mixing, and assuming the A^0 boson mass is large so that only one linear combination of the two Higgs doublets is light, the effective potential for the MSSM is

$$V(h, s) = -\frac{\mu_h^2}{2}h^2 - \frac{\mu_s^2}{2}s^2 + \frac{\lambda_h}{4}h^4 + \frac{\lambda_s}{4}s^4 + \frac{\lambda_y}{4}h^2s^2. \quad (1)$$

Here h denotes the Higgs condensate and s the right stop condensate, both normalized as real fields. The coupling between the h and s fields is written as λ_y because of its relation to the top quark Yukawa coupling y : $\lambda_y = y^2 \sin^2 \beta$, where β is defined by the ratio of the two Higgs field VEV's, $\tan \beta = \langle H_2 \rangle / \langle H_1 \rangle$. At leading order in couplings, and in the high temperature expansion, the thermal corrections to this potential take the form of an irrelevant additive constant, plus thermal corrections to the mass parameters,

$$\mu_h^2(T) = \mu_h^2 - c_h T^2, \quad \mu_s^2(T) = \mu_s^2 - c_s T^2. \quad (2)$$

The values of c_h and c_s depend on which degrees of freedom are light, as well as their couplings.

Presently we will relate the masses and couplings of our approximate potential to the parameters of the MSSM. First, however, we would like to show how the tunneling rate depends on the μ_i^2 and λ_i . The goal is to identify those values which give the

maximum tunneling rate, which in turn will help us choose the parameters of the MSSM which are most favorable to tunneling out of the CCB phase.

First we consider the locations and depths of the two minima. The Higgs and stop minima, h_0 and s_0 , are characterized by

$$h_0^2 = \frac{\mu_h^2}{\lambda_h}, \quad s_0^2 = \frac{\mu_s^2}{\lambda_s}, \quad (3)$$

$$V(h_0, 0) = -\frac{\mu_h^4}{4\lambda_h}, \quad V(0, s_0) = -\frac{\mu_s^4}{4\lambda_s}. \quad (4)$$

Therefore a minimum is deeper if the relevant μ^2 is larger and the relevant λ is smaller. Since the best case for tunneling is when the CCB minimum is as shallow as possible compared to the EW one, tunneling prefers small λ_h and μ_s^2 but large λ_s and μ_h^2 .

Next we examine the critical temperatures. At tree level, the temperatures T_{c1} , T_{c2} where the symmetric phase destabilizes in favor of the CCB or EW phase, respectively, are

$$T_{c1}^2 = \frac{\mu_s^2}{c_s}, \quad T_{c2}^2 = \frac{\mu_h^2}{c_h}. \quad (5)$$

We require $T_{c1} \geq T_{c2}$ to get the right sequence of symmetry breakings. A large value for T_{c1} conflicts with the need to minimize μ_s^2 , so the optimal choice is for the phase transition temperatures to be almost the same, $T_{c1} \simeq T_{c2}$. The ratio μ_s^2/μ_h^2 equals c_s/c_h in this case; so tunneling is favored by a small thermal correction to the stop mass, c_s , but a large thermal correction to the Higgs mass, c_h .

We should also consider the size of the barrier between the minima. It is highest for large values of λ_y , because the large positive $s^2 h^2$ term in the potential prevents the two fields from simultaneously having large expectation values. To see this, let us find the saddle point of the potential between the two minima. Fixing $s^2/h^2 = R$, then minimizing V with respect to s^2 at fixed R , gives

$$\begin{aligned} R &\equiv \frac{s^2}{h^2} = \frac{2\mu_s^2\lambda_h - \mu_h^2\lambda_y}{2\lambda_s\mu_h^2 - \lambda_y\mu_s^2} \\ \Rightarrow V(R) &= -\frac{1}{4} \frac{(\mu_h^2 + R\mu_s^2)^2}{\lambda_h + R\lambda_y + R^2\lambda_s}. \end{aligned} \quad (6)$$

The saddle point is the maximum of $V(R)$ over positive values of R . Such a saddle exists if the inequalities

$$\frac{\lambda_y}{2\lambda_h} > \frac{\mu_s^2}{\mu_h^2} > \frac{2\lambda_s}{\lambda_y} \quad (7)$$

hold; if not then either the CCB or the EW “minimum” is not a local minimum but a saddle point. This does not happen for any physically allowed parameters which give $T_{c1} > T_{c2}$, so in practice there is always a saddle. Its depth is

$$V(\text{saddle point}) = -\frac{\mu_s^2\mu_h^2\lambda_y - \mu_h^4\lambda_s - \mu_s^4\lambda_h}{\lambda_y^2 - 4\lambda_s\lambda_h}. \quad (8)$$

The inequalities (7) imply that both numerator and denominator of Eq. (8) are positive, so that its overall value is negative. If we hold λ_h , λ_s , μ_s^2 , and μ_h^2 fixed, the saddle energy is lower for smaller values of λ_y , rising to zero as $\lambda_y \rightarrow \infty$.

Thus we can summarize our study of the simplified effective potential by the observation that tunneling is easiest to achieve for small λ_h , large λ_s , small λ_y , and large c_h/c_s .

2.2 Relation to MSSM parameters

Next we will examine the physical bounds on these variables and consider the choices for SUSY breaking masses and other MSSM parameters which optimize tunneling from the CCB phase.

We begin with λ_y . By introducing mixing between the left- and right-handed stops, it is possible to tune λ_y to any desired value smaller than its zero-mixing value, which at tree level is $y^2 = 2m_t^2/h_0^2$. This is true no matter how heavy the heavy (left) stop is. To see this, consider the tree level potential for the h and s fields, but also allowing for a left stop condensate Q . The terms in the potential which depend on the Q field are

$$V(h, s, l) = -\frac{\mu_h^2}{2}h^2 - \frac{\mu_s^2}{2}s^2 + \frac{m_Q^2}{2}Q^2 + \frac{y \sin \beta \tilde{A}}{\sqrt{2}}shQ + (Q^4 \text{ and } Q^2h^2, Q^2s^2 \text{ terms}). \quad (9)$$

Here $\sin \beta \tilde{A} = \mu \cos \beta + A_t \sin \beta$ is the trilinear coupling between the right stop, left stop, and Higgs fields, which is a free parameter in the MSSM. The potential is minimized with respect to Q at fixed s and h by $Q = (-y \sin \beta \tilde{A}/m_Q^2 \sqrt{2})sh$, up to corrections suppressed by powers of h^2/m_Q^2 or s^2/m_Q^2 . At this field value the Q dependent contributions sum to $(-y^2 \sin^2 \beta \tilde{A}^2/4m_Q^2)s^2h^2$. This is equivalent to a shift in the value of λ_y ,

$$\lambda_y(\text{effective}) = y^2 \sin^2 \beta \left(1 - \frac{\tilde{A}^2}{m_Q^2} \right) + \frac{1}{3}g'^2 \cos 2\beta. \quad (10)$$

This shift can also be understood as a consequence of the diagram shown in Figure 2. If we allow $\tilde{A}^2/m_Q^2$ to be of order unity the effect is significant, while the corrections of order h^2/m_Q^2 or s^2/m_Q^2 which we neglected only give high dimension operators suppressed by powers of m_Q^2 . We ignore them in what follows.

The reduction of λ_y is the only tree level effect of squark mixing, apart from the small nonrenormalizable operators. By varying $\tilde{A}^2/m_Q^2$ we can therefore tune λ_y to be any value lower than its zero-mixing value. However, there is an experimental constraint; a top squark lighter than 85 GeV is ruled out [6]. This puts an upper bound on the permissible value of $\tilde{A}^2/m_Q^2$.

Although we concluded the previous subsection by saying that making λ_y small should be advantageous for tunneling, doing so also has a cost; by diminishing the coupling between the Higgs and stop fields, it also reduces c_h , more so than c_s . This

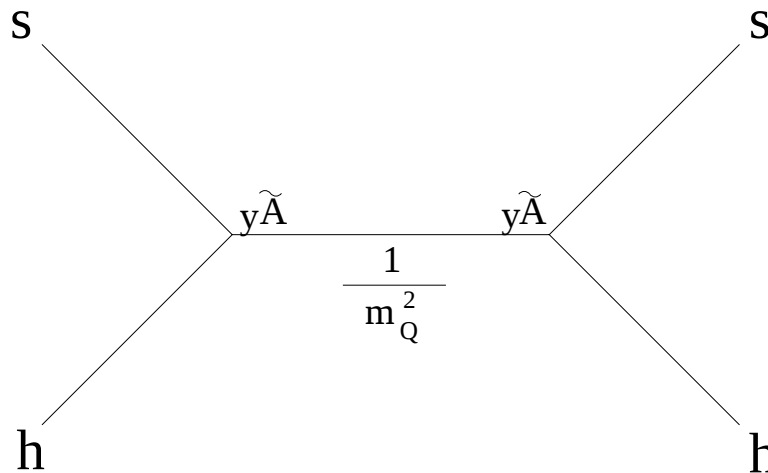


Figure 2: A tree level correction caused by a heavy left stop at nonzero mixing. It effectively lowers the quartic coupling between the Higgs and stop fields.

is because a triplet (N_c) of thermal squarks contribute to c_h via the λ_y interaction, whereas only a doublet of thermal Higgs bosons contribute to c_s by the same interaction. Moreover c_s is already larger than c_h , so the fractional change to c_h is even worse. This shift in the thermal masses goes in the wrong direction so far as the CCB to electroweak tunneling is concerned. Additionally, a nonzero value of $\tilde{A}$ changes other radiative corrections. Because of these complications, we do not try to predict the optimum value of $\tilde{A}$; rather we will treat $\tilde{A}^2/m_Q^2$ as a free parameter and search for the most favorable value, within the range permitted by the experimental bound on the physical squark mass.

Next consider λ_s , λ_h , c_s , and c_h . In the supersymmetric limit the quartic couplings are given in terms of the gauge couplings (g' , g , g_s) and β :

$$\lambda_h = \left(\frac{g^2 + g'^2}{8} \right) \cos^2 2\beta, \quad \lambda_s = \frac{g_s^2}{6} + \frac{2g'^2}{9}, \quad (11)$$

but both relations, as well as Eq. (10), are violated below the mass thresholds of heavy particles. The most important corrections are those which involve g_s and y . We will systematically include all such corrections to λ_h , λ_y , and λ_s . However we will be less careful with the much smaller corrections of order g^4 and will drop the bottom and tau Yukawa couplings altogether.

Among the particles assumed to be heavy, whose loop effects change the tree level relations (11), the squarks of the first two generations and the right sbottom are important because of their strong interactions. Above their mass threshold they make the running coupling $g_s^2(\bar{\mu})$ larger in the ultraviolet, but they also make $\lambda_s(\bar{\mu})$ run faster in the same direction; thus their absence, when the renormalization scale falls below their mass threshold, causes the infrared value of λ_s to be larger than its supersymmetric

value; at one loop the difference is

$$\delta \left(\frac{6\lambda_s}{g_s^2} - 1 \right)_{\text{squarks}} = \frac{2}{3} \times \frac{g_s^2}{16\pi^2} \sum \left(\ln \frac{m_{\tilde{q}}}{\mu} + O(1) \right). \quad (12)$$

The term denoted by “ $O(1)$ ” is actually zero in the $\overline{\text{DR}}$ renormalization scheme, which we use, so we shall henceforth drop it. The sum is over flavors and chiralities, 9 in all. The heavier these squarks are, the easier is the nucleation; hence we take them to have masses of 10 TeV, since larger values may not be consistent with low-energy SUSY from the standpoint of naturalness. Since g_s^2 runs significantly between 10 TeV and the electroweak scale, a renormalization group analysis is indispensable for determining the correct relation between λ_s and g_s^2 . In fact we will perform a renormalization group analysis for all the scalar couplings, but in this section we just present the one loop results to see which way couplings are modified, so we can choose the optimal parameter values.

Continuing the analysis of λ_s/g_s^2 , we next consider the effects of gluino loops, such as the diagrams in Figure 3. These correct λ_s , and also contribute to the light squark thermal mass coefficient c_s if the gluino is not heavy compared to the weak scale. The latter contribution is a function of $m_{\tilde{g}}/T$:

$$\delta(c_s)_{\text{gluino}} = \frac{g_s^2}{9} \left[\frac{\pi^2}{12} \int_{m_{\tilde{g}}/T}^{\infty} \frac{\sqrt{x^2 - (m_{\tilde{g}}/T)^2}}{e^x + 1} dx \right]. \quad (13)$$

The term in brackets goes to 1 at small m/T and behaves like $e^{-m/T}$ for large m/T . In the former case, the correction to c_s is quite large and tends to inhibit tunneling from the CCB vacuum. Thus we should try to suppress this thermal mass by taking the gluino to be heavy. However, the gluino also shifts $6\lambda_s/g_s^2$,

$$\delta \left(\frac{6\lambda_s}{g_s^2} - 1 \right)_{\text{gluino}} = -\frac{68}{3} \times \frac{g_s^2}{16\pi^2} \ln \frac{m_{\tilde{g}}}{\mu}. \quad (14)$$

The shift is large and unfavorable for tunneling; it is minimized by making the gluino light. The best value for $m_{\tilde{g}}$ is around 600 GeV, which is as small as it can be while still avoiding a substantial correction to the thermal stop mass. Later we will show numerically that this value really is optimal.

Similarly, Higgsino ($\tilde{h}$) loops shift the stop quartic coupling and thermal mass through the diagrams of Figure 4. The correction to the thermal mass, for Higgsinos that are light enough to be present in the thermal background, is

$$\delta(c_s)_{\text{Higgsino}} = \frac{y^2}{12}. \quad (15)$$

Since we want to minimize c_s , this gives some preference for a heavy Higgsino. However, the shift in λ_s/g_s^2 has the form

$$\delta \left(\frac{6\lambda_s}{g_s^2} - 1 \right)_{\text{Higgsino}} = \frac{-24y^4 + 8y^2 g_s^2}{16\pi^2 g_s^2} \ln \frac{m_{\tilde{h}}}{\mu}. \quad (16)$$

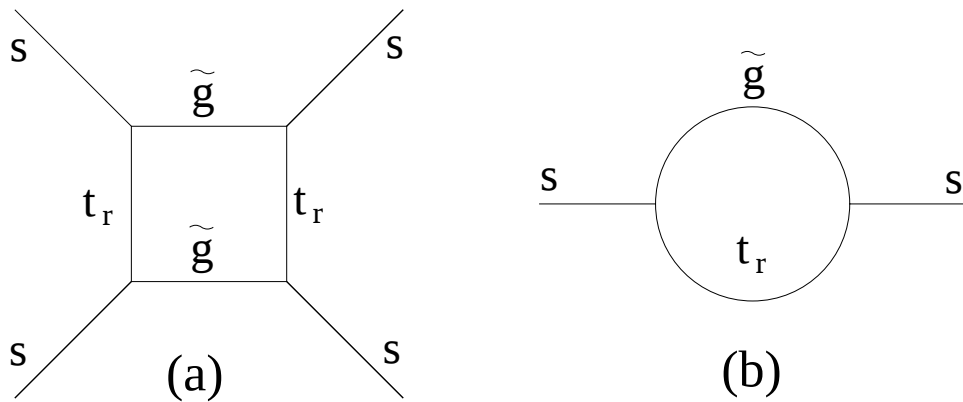


Figure 3: Gluino loop contributions to (a) the quartic coupling λ_s and (b) the light squark thermal mass and wave function renormalization.

Since the coefficient is negative, the need to maximize λ_s makes this favor lighter Higgsinos. We infer that, like gluinos, the Higgsino should also be of intermediate weight for fastest tunneling.

It remains to determine $\tan\beta$, the mass of the heavy Higgs bosons m_{A^0} , and the mass m_Q of the third generation left squark doublet, including the left stop. The contribution of the heavy Higgs bosons to c_h turns out to be negative, and there is a positive contribution to c_s due to their Yukawa coupling, which is however suppressed by $\cos^2\beta$. For these reasons it is best to make them heavy. They also give radiative corrections which make λ_s larger as m_{A^0} becomes heavier. The form is complicated because there is another trilinear coupling between the heavy Higgs, the right stop, and the left stop. To avoid this complication and because a heavy m_{A^0} is preferred anyway, we take the A^0 mass to be degenerate with the left stop squark mass.

Now consider m_Q and $\tan\beta$. We want $\tan\beta$ to be small to minimize λ_h , and for the same reason it would be advantageous to make m_Q light. However this desire is constrained by the need to make the physical Higgs boson heavier than the limit from

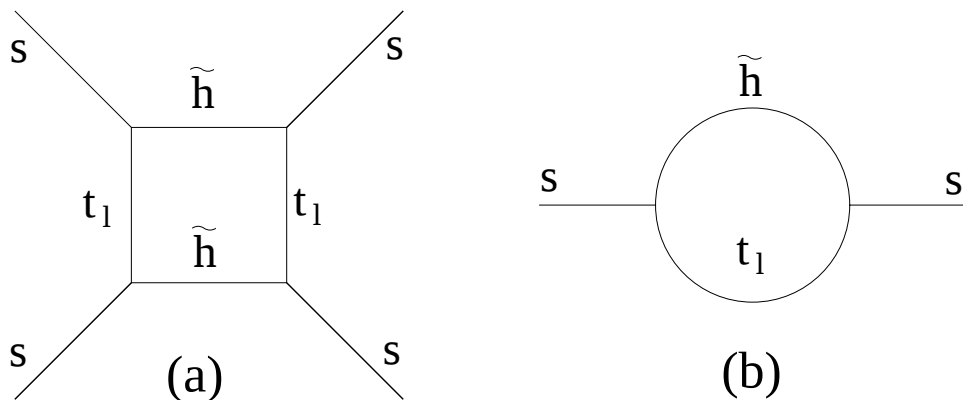


Figure 4: Higgsino loop contributions to (a) the quartic coupling λ_s and (b) the light squark thermal mass and wave function renormalization.

direct experimental searches: $m_h > 95.5$ GeV for a standard-model-like Higgs boson, to which the MSSM Higgs boson reverts in the limit of large m_{A^0} [6]. m_h can be made sufficiently heavy either by making $\tan\beta$ or m_Q large. The question is therefore which parameter does less harm to the phase transition if it is increased. To answer this, we must consider the radiative corrections from the heavy squark to each coupling (assuming $m_{A^0} = m_Q$):

$$\delta\left(\frac{6\lambda_s}{g_s^2} - 1\right)_{\text{left stop}} = \frac{1}{16\pi^2 g_s^2} \left(12y^4 \left[1 + 2\frac{\tilde{A}^2}{m_Q^2} - \frac{\tilde{A}^4}{m_Q^4} \right] - 8y^2 g_s^2 + (4/3)g_s^4 \right) \ln \frac{m_Q}{\bar{\mu}} \quad (17)$$

$$\delta(\lambda_h)_{\text{left stop}} = \frac{1}{16\pi^2} \left(3y^4 \sin^4 \beta \left[1 + 2\frac{\tilde{A}^2}{m_Q^2} - \frac{\tilde{A}^4}{m_Q^4} \right] - 12y^2 \lambda_h \sin^2 \beta \right) \ln \frac{m_Q}{m_t} \quad (18)$$

The contribution to λ_s is positive and therefore favorable to nucleation. The best combination is therefore to make $\tan\beta$ small and m_Q just large enough to satisfy the Higgs mass limit; this maximizes λ_s over parameter values where λ_h is at its experimental lower limit. As the expressions show, the contribution to λ_h is larger if there is mixing. We either take $\tan\beta = 2.5$ and fix m_Q to be the minimum value needed to satisfy the limit on the Higgs mass, or if the resulting value of m_Q exceeds 10 TeV, we take $m_Q = 10$ TeV and $\tan\beta$ the smallest value which satisfies the Higgs mass bound. Using the one loop expressions above, the value of m_Q need never be 10 TeV, but in a renormalization group analysis, because $y(\bar{\mu})$ is less than the tree value for large $\bar{\mu}$, the squark mass must be heavier.

Finally we must choose masses for the Wino, the Bino, and the sleptons. For simplicity we omit the sleptons altogether, since their contributions are small. We cannot do the same for the Wino and the Bino because the lightest supersymmetric partner must be neutral; something needs to be lighter than the right stop. Since the Higgsino has already been designated as moderately heavy, some linear combination of the neutral Wino and Bino must be the lightest supersymmetric particle. We have chosen to make the Winos light; but we have also checked that our results are quite insensitive to the values of the neutralino masses.

This completes our discussion of the choice of parameters. We have analytically predicted the most favorable range for every parameter except the mixing parameter $\tilde{A}^2/m_Q^2$, which must therefore be varied to find the optimal value for tunneling. Of course, we will also verify the predictions of this section by varying each parameter from its optimal value.

It is not clear whether any of our choices can be motivated by a specific model of supersymmetry breaking. But this is not the point; we want to identify the optimal values of all MSSM parameters to obtain the largest possible tunneling rate. Since the rate turns out to be too small, any further restrictions on the space of SUSY parameters from model building considerations will only strengthen our conclusions.

3 The Effective Potential

Here we discuss the effective potential we use, paying particular attention to the choice for scalar couplings and to the rather complicated mass matrices which occur when there are two condensates. The first step is to find the mass eigenvalues of all particles which run in loops, as a function of the arbitrary background fields whose effective potential is sought. In the present case, we must find the masses as functions of h and s , the Higgs and squark fields. This task is complicated by the large degree of mixing between many different flavor eigenstates when both fields are nonzero, but since we will numerically diagonalize all mass matrices, this is not a problem in practice.

Once the mass eigenvalues are known, the one-loop potential can be expressed as

$$V_{\text{eff}}(h, s) = V_{\text{tree}} + V_{\text{c.t.}} + V_{1,\text{vac}} + V_{1,\text{therm}}. \quad (19)$$

Here V_{tree} is the tree-level potential, Eq. (1), with couplings and masses to be specified presently in great detail, $V_{\text{c.t.}}$ is a counterterm potential which could be considered part of V_{vac} but is kept separate for convenience, and the remaining terms are the one-loop vacuum and thermal contributions. The vacuum part is the Coleman-Weinberg potential at a renormalization scale $\bar{\mu}$,

$$V_{1,\text{vac}}(h, s) = \frac{1}{64\pi^2} \sum_i \pm m_i^4(h, s) \left(\ln \frac{m_i^2(h, s)}{\bar{\mu}^2} - \frac{3}{2} \right), \quad (20)$$

with $\pm$ being $+$ for bosons and $-$ for fermions in the sum over species. Each real scalar or physical gauge boson polarization, and each helicity of a Weyl fermion counts as one state. The constant $3/2$ would be $5/6$ for gauge boson contributions in the $\overline{\text{MS}}$ scheme, but in $\overline{\text{DR}}$, which we adopt, all particles have $3/2$. The thermal part of the potential, before resummation of thermal masses, is given by

$$V_{1,\text{therm}}(h, s) = \frac{T^4}{(2\pi)^3} \sum_i \pm \int d^3p \ln \left(1 \mp e^{-\sqrt{p^2 + m_i^2(h, s)}/T} \right). \quad (21)$$

This is sometimes approximated by its high-temperature expansion, but we also need the correct values at low temperatures. A convenient analytic form which is accurate at both high and low T is given in ref. [14]. To improve convergence of the perturbation expansion at finite temperature, it is important to resum the thermal masses of the particles by replacing m_i^2 with $m_i^2 + c_i T^2$ in Eq. (21). The form $c_i T^2$ is only valid in the high temperature limit, so we will instead use a more exact determination, to be described below, for the thermal masses of the Higgs and squark fields.

3.1 Definition of V_{tree} and V_{ct}

To fully define V_{eff} , we must specify the masses and couplings in V_{tree} , and which particles appear in the sum over species of the one-loop part. The two questions are related, since the loop effects of any particles not explicitly appearing in the sums

should be directly incorporated into the couplings of V_{tree} . We have chosen to exclude the following particles from the sum over species: first and second generation squarks, the left-handed stop and sbottom, and the heavy Higgs bosons. Sleptons are entirely omitted, and light quarks and leptons are counted only insofar as they affect the thermal (Debye) mass coefficients c_i . All other particles appear in the summations: the gauge bosons, gauginos, neutralinos, Higgsinos, top quark, right-handed stop, and light Higgs boson. In addition, the color-component of the left-handed bottom quark in the color-breaking direction mixes with the charged Higgsino $\tilde{h}_2^+$ in the presence of the squark condensate, so it must also be included. The decision as to whether to include particles explicitly is based upon how large a contribution they make to $V_{1,\text{therm}}$, which contains terms of the form Tm_i^3 at high temperatures. Such a dependence on the fields cannot be reproduced by the quadratic and quartic terms in V_{tree} . On the other hand, particles with masses much greater than T are negligible in $V_{1,\text{therm}}$, and their contributions to $V_{1,\text{vac}}$ can be expressed as purely quadratic and quartic terms for field values much less than the large masses.

Our choice for V_{tree} is as follows. For the quartic scalar couplings λ_h , λ_s , and λ_t , we use their values at the $\overline{\text{DR}}$ renormalization point $\bar{\mu}$, in the effective theory in which all heavy squarks and the gluino and Higgsino have been integrated out. These are determined by a renormalization group (RG) analysis, which can be found in Appendix B. Applying an RG analysis is important to get accurate values of the scalar couplings because α_s is not very small and because we have taken some masses to be very large, leading to large hierarchies and large logarithms. The difference between performing the RG analysis and simply enforcing the SUSY relations between couplings at the scale $\bar{\mu}$ is of order a 20% shift in scalar self-couplings, and the difference between doing an RG analysis and a simple one-loop match is smaller but still not negligible.

The result of the analysis is that the coupling λ_y is substantially lower than its tree value, $\lambda_y(\bar{\mu}) \simeq 0.71$ rather than 1; this is partly because of the QCD correction between the Yukawa coupling and the top quark mass and partly because of a large downward correction from the gluino. The value of λ_s is surprisingly close to its SUSY value using g_s^2 at the Z pole; typically $\lambda_s \simeq 0.24$. This is because of an approximate cancellation between positive contributions from the gluino and Higgsino, which are naturally large, and negative contributions from the heavy squarks which we have enhanced by choosing these squarks to be extremely heavy. The Higgs coupling λ_h is expected to receive large radiative corrections, but they are not as large as usually expected, because of the threshold correction to the Yukawa coupling and because the Yukawa coupling gets weaker in the UV. As a result the left stop must be very heavy and $\tan\beta$ must be about 3 to reach the experimental limit on the Higgs mass, unless there is mixing.

Note that both the correction to λ_y and the slower running of λ_h are bad for the “usual” scenario in which only the electroweak phase transition occurs. The lower λ_y weakens the electroweak phase transition, narrowing the permitted range of parameters; and the smaller corrections to λ_h require a larger hierarchy between the left and right stop masses to satisfy the experimental Higgs mass limit, which increases the amount of tuning needed in setting the SUSY breaking parameters.

Having chosen the scalar self-couplings in the tree potential, we now specify the mass parameters. The value of μ_h^2 is chosen so the minimum of the tree potential occurs at $v = 246$ GeV, and μ_s^2 is an input variable.

Next we consider the counterterm potential, $V_{\text{c.t.}}$. The tree and one loop effective potentials just described double-count the influence of any heavy particle left out of part of the RG evolution but included in Eq. (20), which in our case means the gluinos and the Higgsinos. Hence we need to subtract off the extra contribution to the quartic coupling. Also, Eq. (20) generates potentially large finite corrections to the Higgs and squark masses, and we must include counterterms to absorb these. The full counterterm contribution is then

$$V_{\text{c.t.}} = -\frac{1}{2}\delta\mu_h h^2 - \frac{1}{2}\delta\mu_s s^2 - \frac{\delta\lambda_s}{4}s^4 - \frac{\delta\lambda_h}{4}s^2 h^2, \quad (22)$$

$$\delta\lambda_s = -\frac{44}{9}g_s^4 \log \frac{m_{\tilde{g}}}{\bar{\mu}} - 4y^4 \log \frac{m_{\tilde{h}}}{\bar{\mu}}, \quad (23)$$

$$\delta\lambda_y = -\frac{32}{3}g_s^2 y^2 \sin^2 \beta \log \frac{m_{\tilde{g}}}{\bar{\mu}} - 4y^4 \sin^2 \beta \log \frac{m_{\tilde{h}}}{\bar{\mu}}. \quad (24)$$

The coefficients in Eq. (24) come from Eq. (20) and the expression for the fermion mass matrix, to follow in Eqs. (30) and (32) below.

The Higgs mass counterterm is fixed by the condition that the tree-level minimum of the vacuum potential should not be shifted,

$$-\delta\mu_h v + \frac{\partial V_{1,\text{vac}}}{\partial h}(v, 0) = 0. \quad (25)$$

For the squark mass term, we choose the corresponding mass counterterm $\delta\mu_s$ to cancel the one-loop contribution to the curvature at the symmetric point:

$$-\delta\mu_s + \frac{\partial^2 V_{1,\text{vac}}}{\partial s^2}(0, 0) = 0, \quad (26)$$

so the parameter μ_s retains its interpretation as the negative curvature of the potential at the origin.

3.2 Field-dependent masses

We are now ready to turn our attention to the one-loop contributions. The main challenge here is to find the mass eigenstates in the regions where $h \neq 0$ and $s \neq 0$, where the mass matrices can become rather large due to mixing between states which remain separate in the more familiar situation where $s = 0$. The simplest example is the Higgs boson, h , and the squark component in the color-breaking direction, s . Their 2×2 mass matrix is

$$\mathcal{M}_{h,s}^2 = \begin{pmatrix} \lambda_h(3h^2 - v^2) + \frac{1}{2}\lambda_y s^2 & \lambda_y h s \\ \lambda_y h s & -\mu_s^2 + 3\lambda_s s^2 + \frac{1}{2}\lambda_y h^2 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Next in complexity are the gauge bosons. Because both s and h carry hypercharge, there is mixing between the three kinds of gauge bosons when both fields are nonzero. Take the color-breaking direction to be $a = 3$ in the fundamental representation of $SU(3)$ with color indices a . Then the mixing takes place between the B , W_3 , and A_8 gauge bosons (each having three polarization states), with mass matrix

$$\mathcal{M}_{g.b.}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} g'^2 h^2 + \frac{4}{9} g'^2 s^2 & -\frac{1}{4} g g' h^2 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} g' g_s s^2 \\ -\frac{1}{4} g g' h^2 & \frac{1}{4} g^2 h^2 & 0 \\ -\frac{2}{3\sqrt{3}} g' g_s s^2 & 0 & \frac{1}{3} g_s^2 s^2 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

In fact only two of the eigenvalues of (28) are nonzero, since there is still one linear combination of generators which gives an unbroken $U(1)$ symmetry, even when both VEV's are present. There is also an unbroken $SU(2)$ generated by A_1, A_2, A_3 , so these gluons remain massless. The four gluons A_4 - A_7 remain unmixed, but get a mass

$$m_g = \frac{1}{4} g_s^2 s^2. \quad (29)$$

The most baroque sector is that of the fermions. When $s \neq 0$, there is mixing between the charginos and the component of the left-handed bottom quark in the color breaking direction, b_L^3 . There is also mixing between top quarks, five of the gluinos, and all the neutralinos. These can be described by 5×5 and 15×15 Majorana mass matrices. The chargino- b_L mass matrix, in the basis $\widetilde{W}^-, \widetilde{W}^+, \tilde{h}_1^-, \tilde{h}_2^+, b_L^3$, is

$$\mathcal{M}_{\chi^\pm, b_L} = \begin{pmatrix} 0 & m_2 & 0 & \sqrt{2} \eta_2 & \\ m_2 & 0 & \sqrt{2} \eta_1 & 0 & \\ 0 & \sqrt{2} \eta_1 & 0 & \mu & \\ \sqrt{2} \eta_2 & 0 & \mu & 0 & -\frac{y}{\sqrt{2}} s \\ & & & -\frac{y}{\sqrt{2}} s & 0 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

where we define

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{1}{2} g h \cos \beta; & \eta_2 &= \frac{1}{2} g h \sin \beta; \\ \eta'_1 &= \frac{1}{2} g' h \cos \beta; & \eta'_2 &= \frac{1}{2} g' h \sin \beta. \end{aligned} \quad (31)$$

The spectrum is that of two Dirac fermions and one massless one. For the top-gluino-neutralino mass matrix we have, in the basis $t_L, t_R^c, \tilde{g}, \tilde{B}, \widetilde{W}^0, \tilde{h}_1^0, \tilde{h}_2^0$,

$$\mathcal{M}_{t, \tilde{g}, \chi^0} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{y \sin \beta}{\sqrt{2}} h \mathbf{1} & 0 & 0 & & \frac{y}{\sqrt{2}} s \delta_a^3 \\ \frac{y \sin \beta}{\sqrt{2}} h \mathbf{1} & 0 & X & -\frac{2}{3} g' s \delta_a^3 & & \\ 0 & X^T & \mathcal{M}_3 & 0 & & \\ 0 & -\frac{2}{3} g' s \delta_a^3 & 0 & m_1 & 0 & -\eta'_1 & \eta'_2 \\ & & & 0 & m_2 & \eta_1 & -\eta_2 \\ & & & -\eta'_1 & \eta_1 & 0 & -\mu \\ \frac{y}{\sqrt{2}} s \delta_a^3 & & & \eta'_2 & -\eta_2 & -\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

where $\mathbf{1}$ is the unit matrix in color space, δ_a^3 projects onto the color breaking direction, and the submatrices for the gluinos and gluino- t_R mixing are given by

$$\mathcal{M}_3 = m_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}; \quad X = \frac{1}{\sqrt{2}} g_s s \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2/3} \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Finally, let us mention the scalars which remain unmixed: the 3 Higgs and 5 right stop Goldstone bosons, with respective masses (in Landau gauge, used throughout)

$$m_{\chi_h}^2 = \lambda_h(h^2 - v^2) + \frac{1}{2} \lambda_y s^2, \quad (34)$$

$$m_{\chi_s}^2 = \lambda_s s^2 - \mu_s^2 + \frac{1}{2} \lambda_y h^2. \quad (35)$$

Also because we work in Landau gauge, the ghosts are massless and do not contribute to the one loop effective potential. This completes the list of all particles appearing in the sums for the one-loop potential.

In computing the above masses, we evaluate the gauge, Yukawa, and scalar couplings at a common renormalization point $\bar{\mu}$, in the six quark plus right squark scheme, so the gluino, Higgsino, and heavy squarks are treated as integrated out. The scalar couplings are then the same as the ones appearing in the tree potential. The value of $\bar{\mu}$ is a parameter of our effective potential. The $\bar{\mu}$ dependence should formally be a two loop effect. However this does not guarantee it to be as small as might be expected. The thermal contributions are formally a one loop effect, but because the theory has scalar masses which are unprotected from large radiative corrections (in the absence of SUSY, which thermal effects break), the thermal potential can correct mass parameters at order 1. The $\bar{\mu}$ dependence of the thermal part is only down by one loop, so c_h and c_s depend on $\bar{\mu}$ at one loop. Varying $\bar{\mu}$ gives a good indication of the sensitivity of our results to two loop thermal effects, in particular the two loop effects which fix the one loop renormalization scale of c_s and c_h .

3.3 Thermal masses

To complete our construction of the effective potential, we need to determine the thermal masses $\Pi_i(T)$ which are resummed in $V_{1,\text{therm}}(m_i^2)$ by replacing m_i^2 with $m_i^2 + \Pi_i$. In the high-temperature limit, these thermal self-energies, of the form $\Pi_i = c_i T^2$, have all been computed in ref. [15], which shows the separate contribution to each c_i coming from every possible particle in the spectrum of the MSSM. One should omit the contributions from any states that are much heavier than the temperature. For those which may be on the borderline for thermal decoupling, say particle j , we can flag their contributions by multiplying them with a coefficient θ_j , in the notation of [15].

Thus, with the spectrum we have assumed, the thermal mass coefficients for the longitudinal components of the U(1), SU(2) and SU(3) gauge bosons (B , W , A) are,

respectively,

$$c_B = \frac{g'^2}{18}(41 + 3\theta_{\tilde{h}}) \quad (36)$$

$$c_W = \frac{g^2}{6}(11 + 2\theta_{\tilde{W}} + \theta_{\tilde{h}}) \quad (37)$$

$$c_A = \frac{g_s^2}{6}(13 + 3\theta_{\tilde{g}}), \quad (38)$$

while the transverse components remain massless at this order in the couplings. The θ_j functions interpolate between 1 and 0 as the mass of particle j goes from zero to infinity. The expression for a fermion is the bracketed part of Eq. (13), and the expression for bosons is similar but with the replacements $\exp(x) + 1 \rightarrow \exp(x) - 1$ and $12 \rightarrow 6$. We evaluate the Debye masses at $h = s = 0$.

However for the Higgs bosons and stops, there is an added complication; the Higgs and stop fields themselves give a contribution to the thermal masses, which are thermal mass dependent. We self-consistently determine Π_h and Π_s so that they really represent the curvature of $V_{1,\text{therm}}$ at the origin of field space, by defining

$$\Pi_h = \frac{\partial^2}{\partial h^2} V_{1,\text{therm}}(m_i^2(h, s) + \Pi_i) \Big|_{h=s=0}, \quad (39)$$

$$\Pi_s = \frac{\partial^2}{\partial s^2} V_{1,\text{therm}}(m_i^2(h, s) + \Pi_i) \Big|_{h=s=0}. \quad (40)$$

These relations are recursive, so they cannot be solved analytically, but they converge very quickly on iteration. The same thermal mass values also apply to the respective Goldstone modes of the Higgs boson and the stop.

The fermions' behavior is infrared-safe and there is no need to perform any mass resummation for them.

3.4 Two-loop effects

We have also considered the effect of including finite-temperature two-loop contributions to the effective potential. There are many such diagrams, which either have the topology of a figure eight (8) or the setting sun ($\ominus$). In the latter, the trilinear vertex could come from a quartic coupling expanded around the arbitrary background Higgs or squark field VEV's, or it could represent cubic couplings involving gauge bosons or gauge bosons and matter fields.

We have simplified the computation of the two-loop diagrams by ignoring the g' coupling, which eliminates mixing between the gluon A_8 and the B and W_3 gauge bosons. We also work only to leading order in the high temperature expansion and treat only degrees of freedom which are light and therefore influence the strengths of the phase transitions out of the symmetric phase. This is appropriate if our main goal is to understand these transitions more accurately, and it allows us to use the expressions derived in [10]. However this procedure makes two errors: it does not completely account for two-loop corrections to c_s and c_h , and it becomes less accurate

at lower temperatures and larger field values, where the CCB to EW transition may occur. We can compensate for the first problem by seeing how large a correction to c_s must be by artificially inserting a shift δc_s “by hand,” but the second error is more problematic. However, in this regime the two-loop effects are substantially smaller than the one-loop effects, which we are treating carefully; and in any case the form of the two-loop contributions are not known beyond leading order in the high temperature expansion so it is difficult for us to do better.

Because of these limitations in the two-loop formulas, we consider their effects to be indicative of what one might expect from a more careful treatment, but not necessarily quantitatively accurate. The good news is that the two-loop effects tend to make the tunneling from CCB to electroweak phases more difficult, thus strengthening our conclusions. It seems likely that the result of a more accurate two-loop treatment would be somewhere in between those of the one-loop potential and the high- T expansion of the two-loop potential.

4 Bubble nucleation from CCB phase

In this section we will first discuss how to compute bubble nucleation rates. Then we discuss the two problems we need to apply it to: the problem of getting into the CCB phase without getting into the EW phase first; and the problem of getting out of the CCB phase to the EW phase.

4.1 Nucleation rates

To compute the rate of bubble nucleation at one loop, one should first find the saddle point of the approximate effective action

$$S = \int_0^{1/T} d\tau \int d^3x \left[\frac{1}{2} ((\partial_\tau h)^2 + (\partial_i h)^2 + (\partial_\tau s)^2 + (\partial_i s)^2) + V_{1 \text{ loop, thermal}}(h, s) \right]. \quad (41)$$

After finding the saddle point, one should next compute the one-loop fluctuation determinant about this saddle point, subtracting out those effects already included by using the one-loop effective potential. By incorporating one-loop, thermal effects into the effective potential, and then subtracting them off from the fluctuation determinant, one automatically includes the dominant effects in the saddle action. The fluctuation determinant then serves to fix the wave function normalization and account for small additional $O(\alpha_s)$ corrections which can be roughly thought of as higher derivative corrections.

We will make one simplification and one approximation. The simplification is that, at reasonably large temperatures, the saddle solution does not vary in the (Euclidean) time direction, so the τ integral can be performed immediately, $\int_0^{1/T} d\tau = 1/T$, and $\exp(-S)$ becomes $\exp(-E/T)$. This simplification is strictly correct down to a temperature $T \sim \omega_-/2\pi$, with ω_- the unstable frequency of the saddlepoint. Parametrically

$\omega_- \sim m_W$ but numerically it is smaller, and the thermal treatment works down to $T < 5$ GeV in our case. We can probe its breakdown by computing the vacuum action, in which $\int_0^{1/T} d\tau$ is approximated by $\int_{-\infty}^{\infty} d\tau$. We find in practice that the tunneling rate has always peaked at temperatures well above the temperature where the thermal treatment breaks down, so we are not missing anything by making this simplification.

The approximation we make is that, rather than computing the full fluctuation determinant, we approximate its effect by the use of the one loop thermal effective potential and by a choice of wave function for the h and s fields such that the curvatures of the potential at the EW minimum are the physical masses. This leaves an $O(\alpha_s)$ error in the determined exponent, from the field dependence of the wave function and from higher derivative corrections. The error is small when the phase transition is strong, which indeed is the case, as we will discuss below. Our procedure also eliminates renormalization point dependence at the one loop level.

We use the full one loop effective potential including all SUSY partners which give vacuum radiative corrections involving strong or Yukawa couplings. We do not use a high temperature expansion or dimensional reduction. This avoidance of the high T expansion is appropriate because nucleation from the CCB to the EW minimum is most likely at a temperature well below the CCB phase transition temperature, as will be shown; hence, the field condensates are large and the temperature is moderate where the nucleation is most likely to occur. Since the high T approximation is an expansion in $yh/2\pi T$ or $g_s s/2\pi T$, its convergence is not very good in the relevant regime. In contrast, the loop counting parameter for perturbation theory is $g_s^2 T/4\pi g_s s$ or $y^2 T/4\pi y h$, which is small. Two-loop effects are therefore not expected to be very large. Because the two-loop contributions to the effective potential have been calculated only at leading order in the high T expansion, including them might not really improve the accuracy of the calculation of the CCB to EW tunneling action. On the other hand, the transition from the symmetric to the CCB phase occurs at a higher temperature, so neglect of the two loop thermal effects may not be such a good approximation there: we make an error in the determination of the phase transition temperature where the s condensate forms. But what really matters is the error in the temperature *difference* between the CCB and EW phase transition temperatures, and we will study how important such an error is in due course.

Superficially, it may seem that we have made contradictory approximations: the effective potential should not rely upon a large T expansion, while the bubble nucleation treatment can do so. But the two statements are actually compatible; the high temperature approximation for bubble nucleation has a much wider range of validity than the high T expansion of the effective potential. This is because the thermal tunneling treatment depends on ω_- , which though parametrically of order m_W is numerically smaller. Also and more importantly, the thermal tunneling treatment remains strictly valid until $T \sim \omega_-/2\pi$, while the high T expansion ceases to converge at $T \sim m_t/\pi$ but starts getting large high order corrections well before then.

If we wanted to perform a complete two loop calculation we would need not only the one loop fluctuation determinant, but also the two loop analog. There are serious technical obstacles to setting up such a calculation, and we are not aware of any work

in the literature which performs such a calculation for any nontrivial saddle point in a field theory. It is an assumption, perhaps justified, that the most important two loop effects can be incorporated by using the two loop effective potential. This is what we do to compare the one and two loop tunneling rates; the “two loop” results discussed below still do not include even the one loop fluctuation determinant.

4.2 Getting into the CCB phase: choice of μ_s^2

As pointed out in Section 2, we need a large enough value of μ_s^2 (the negative stop mass term) to get into the CCB phase before the electroweak phase transition; but too large a value prohibits nucleation from the CCB to the EW phase. So what value of μ_s^2 should we use? Since we are trying to see if nucleation from the CCB to the EW minimum is ever possible, we should use the lowest permissible value, that is the lowest value for which the symmetric to CCB transition happens before the symmetric to EW transition can occur.

At this point it is important to distinguish between the critical temperature T_c and the nucleation temperature T_{nuc} for a phase transition. The critical temperature for the symmetric to CCB phase transition, T_{c1} , is the temperature where the free energies of the CCB phase and of the symmetric phase are equal. However, the phase transition does not begin until the CCB phase is favorable enough so that copious bubbles of the CCB phase form. Roughly, this occurs when the tunneling action of a critical bubble of the CCB phase is small enough to put one bubble in each Hubble volume in one Hubble time, $E_{\text{crit}}/T \simeq 4 \log(T/H)$, with H the Hubble constant. At the electroweak epoch, $4 \log(T/H) \simeq 145$.

It is convenient to define, not a nucleation temperature, but a nucleation temperature range, where the upper edge of the range is the temperature where there will be one bubble nucleation per horizon volume and the lower edge is where the phase transition will complete and the old phase will be completely eaten up. These differ because the phase transition takes much less than one Hubble time to occur. If we define $f = T dE_{\text{crit}}/dT$, then $(1/f) \sim 10^{-4}$ characterizes what fraction of a Hubble time it takes for the nucleation rate to change significantly. The upper edge of the nucleation temperature range occurs when $E/T = 4 \log(T/H) - \log(f) \simeq 140$. The single power of $1/f$ is because there is much less than a Hubble time in which to put one bubble per horizon volume. The lower edge of the nucleation temperature range, where the phase transition completes, is where $E/T = 4 \log(T/H) - 4 \log(f) \simeq 110$. The four powers of $1/f$ are because the bubbles must nucleate close enough together to merge in $1/f$ of a Hubble time; so there is one power of $1/f$ for each space dimension and for time.

The criterion for the symmetric to CCB transition to occur first is that the lower edge of the symmetric to CCB nucleation band be at a higher temperature than the lower edge of the symmetric to EW nucleation temperature band. That is, the symmetric to CCB transition must complete before one electroweak bubble per horizon nucleates out of the symmetric phase. We illustrate this in Figure 5, which shows qualitatively how the two critical temperatures, T_{ci} , and the corresponding bubble

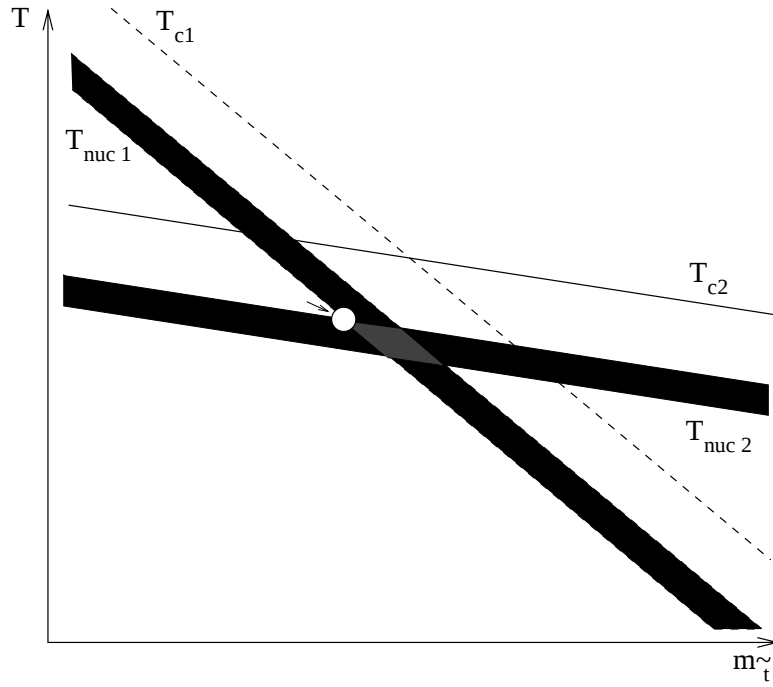


Figure 5: Schematic dependence of critical and bubble nucleation temperatures for the two competing phase transitions (symmetric to CCB and symmetric to electroweak) as a function of squark mass.

nucleation temperatures, $T_{\text{nuc } i}$, depend on the right top squark mass $m_{\tilde{t}}$. The temperature for the transition to color breaking (1) depends much more strongly on $m_{\tilde{t}}$ than that for the electroweak transition (2). The open circle in the figure marks the region where the symmetric to CCB transition completes just before nucleation of EW bubbles; it is the optimal point. This choice yields the most shallow possible CCB minimum and thus the greatest probability of being able to make the subsequent transition from CCB to EW phases. The position of the circle illustrates how we choose $m_{\tilde{t}}$ once the other parameters of the MSSM have been specified.

What if we pushed $m_{\tilde{t}}$ a little higher? Then the universe would pass through the diamond in Figure 5, where the nucleation temperature bands overlap. In this case several bubbles of EW phase would nucleate per Hubble volume before the CCB transition completed. If the CCB minimum is deeper at the double nucleation temperature, these bubbles would be absorbed by the CCB phase. But if, as may be the case, the electroweak minimum were the deeper one already at this temperature, then these EW bubbles could continue to expand and eat up the CCB phase. In this case we can get the phenomenology of EW bubbles expanding into a CCB phase, without any CCB to EW bubble nucleations ever occurring. However, this only happens for a very narrow range of values for μ_s^2 , and it also depends on the EW minimum being the deeper one, which is not always the case. This scenario is cosmologically viable and would be quite interesting, but it is highly fine tuned. We will not address it further since the question we want to answer is whether we can get into our EW vacuum after an epoch in which

all of space is in the CCB phase.

4.3 CCB to EW transition

Next, let us establish the criterion for judging whether bubble nucleations are efficient enough to get us out of the CCB phase. A rough, conservative requirement is that the nucleation barrier has to be low enough to allow one critical bubble of EW phase per horizon volume per Hubble time, $E/T \simeq 4 \ln(T/H)$. As long as the universe is dominated by the energy density of the plasma, $H \sim T^2/m_{\text{pl}}$. However, at low temperatures the energy density is dominated by the vacuum energy of the CCB phase⁽⁴⁾, which is of order m_W^4 . Thus the Hubble constant never gets parametrically smaller than m_W^2/m_{pl} . If we remain in the CCB vacuum when its vacuum energy becomes dominant then the universe begins to inflate. If the nucleation rate continues to be too small at this point, the model is unacceptable for the same reason that old inflation is [16]. Hence a generous criterion is that CCB to EW nucleation never takes place if E/T remains greater than⁽⁵⁾ $4 \ln(m_{\text{pl}}/m_W) + 4 \ln 10 \simeq 170$, where the extra term $4 \ln 10$ is a cushion to insure that our conclusions will be robust.

It is easy to see that nucleation from the CCB to the EW phase can never occur *immediately* after the CCB phase transition. We already arranged for the symmetric to EW transition to be slower than the symmetric to CCB transition; the CCB to EW transition will be even slower for two reasons:

1. The separation in field space between EW and CCB minima is larger than that between symmetric and EW minima;
2. the CCB minimum is necessarily deeper than the symmetric one at T_{nuc1} , so the potential difference between the CCB and EW minima is smaller than between symmetric and EW.

Both of these factors make the CCB $\rightarrow$ EW transition slower than the symmetric $\rightarrow$ EW one. Therefore if the temperature T_{nuc3} exists, where the CCB phase nucleates copious bubbles of EW phase, it must be considerably below T_{nuc1} . The CCB and EW minima become ever deeper and the squark and Higgs condensate values become larger as T falls, so the separation of the minima becomes larger. This is why the high T expansion is not necessarily reliable at T_{nuc3} , whereas perturbation theory is *more* reliable than at the previous phase transition.

We can summarize our procedure as follows. The vacuum theory retains one free parameter we have not yet fixed, $\tilde{A}$ the mixing parameter. We examine values from zero mixing up to the largest $\tilde{A}$ that is compatible with the experimental lower limit on the stop mass. At each value we find the m_Q which gives $m_H(\text{physical}) = 95 \text{ GeV}$ and the smallest μ_s^2 for which the CCB transition happens before the EW one. Then we compute the tunneling action from the CCB to the EW minimum for a range of

⁽⁴⁾unless the CCB phase vacuum energy is negative, but then tunneling out of it would be impossible.

⁽⁵⁾We are also assuming that there are no big surprises waiting for us in the fluctuation determinant; but this seems likely, see [17].

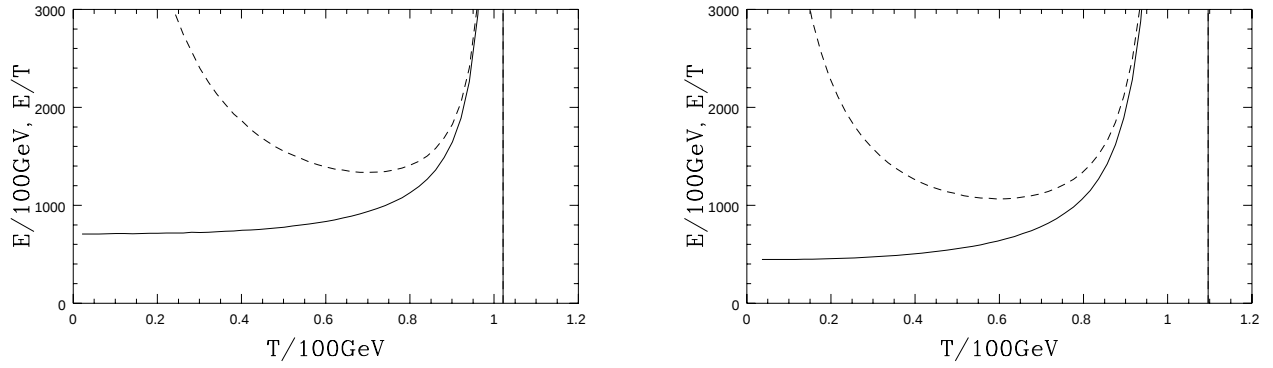


Figure 6: E in units of 100 GeV (solid line) and E/T (dotted line) as a function of temperature, for the critical bubble mediating the CCB to EW phase transition. The left-hand figure is for the case of no mixing and the right-hand figure is maximal mixing, so the right stop mass is 90 GeV. The vertical bar is T_{nuc1} .

temperatures between T_{nuc1} and 5 GeV, as well as the vacuum ($T = 0$) tunneling action. The bubble action is determined using a new and very efficient algorithm presented in Appendix A. We confirm that tunneling is always inefficient at T_{nuc1} ; its rate usually peaks at some intermediate temperature, roughly $(2/3)T_{\text{nuc1}}$. We also confirm that vacuum tunneling is always extremely inefficient, so much so that typically the thermal tunneling treatment gives the larger (hence correct) value for the rate down to temperatures as low as 3 GeV.

5 Results and Conclusions

In this section we present our results for the energy E of the bubble solutions which interpolate between the CCB and EW vacua, and show that E/T is always larger than the value needed for the phase transition to complete. We will then discuss what kind of new physics might be able to change this conclusion, and the constraints on the MSSM which our analysis implies.

5.1 Results

Using the one loop effective potential with a renormalization point $\bar{\mu} = 150$ GeV intermediate between the top and right stop masses, and at zero squark mixing $\tilde{A} = 0$, we find that the minimum value of E/T over temperatures is 1340, giving a tunneling rate per unit volume of order $T^4 \exp(-1340)$, which is drastically smaller than the required value of $T^4 \exp(-170)$. The physical stop mass in this zero-mixing case is 126 GeV, which is lower than might be expected because of the large downward radiative corrections to λ_y .

Mixing between the left and right stops helps but only weakly; mixing maximally so that the stop mass saturates its experimental bound reduces E/T to 990, which is still far too large to allow the phase transition to complete. The dependence of the tunneling

energy on temperature is shown for each of these cases in Figure 6. The energy of the critical bubble is large at high temperatures and falls monotonically as the temperature is reduced. Likewise the tunneling action is large immediately after the symmetric to CCB transition; in fact, at zero mixing, there is a range of temperatures immediately below T_{nuc1} for which tunneling to the EW minimum is kinematically forbidden. We illustrate the potential as a function of Higgs and squark fields, both at T_{nuc1} and the temperature where E/T is minimized, in Figures 7 and 8.

To verify the arguments of section 2.2, we have also checked that our choice of particle masses is optimal. In particular, if the Higgsino or gluino are allowed to be lighter it makes the transition much harder, and if the gluino is heavier the minimum E/T also rises quickly because of the large correction to λ_s . This behavior is shown in Figure 9. Making the Higgsino heavier has a less dramatic effect, but it is also unfavorable to tunneling. To see whether the assumptions about the other particle masses are important, we have pushed the superheavy squark mass scale all the way to 10^{10} GeV, and the left stop mass as high as 20 TeV, obtaining a minimum value of $E/T = 1010$ in the zero-mixing limit. This demonstrates that the choice of masses for the very heavy scale particles have no qualitative effect on our conclusions.

We have also checked the robustness of our results with respect to changing the renormalization point. The primary effect of varying $\bar{\mu}$ is to change the thermal contributions to the effective potential, as we have discussed. Setting $\bar{\mu} = 90$ GeV raises the minimum E/T without mixing to 1490; choosing $\bar{\mu} = 500$ GeV lowers E/T to 970 at zero mixing, or 840 at maximal mixing. All of these values are still far from that needed for bubble nucleation. Varying the renormalization point roughly accounts for the uncertainty in c_s and c_h from two loop effects. The results from the recent paper by Losada [18] show that the best value for the renormalization point is a few times T , which is within the range we check here; however we were not able to use the explicit expressions from that paper because it makes different assumptions about what degrees of freedom are heavy. It also uses the high temperature approximation, which as we have stressed is not entirely reliable in the present context.

Another important check is to see how two loop thermal effects change our answers. It has already been observed in previous work that they strengthen the phase transition from the symmetric to the CCB phase [10]. This makes getting out of the CCB phase much harder, both because it increases the required value of μ_s^2 , and because it makes the CCB minimum deep already at a higher temperature. As a result, we find that without mixing, the minimum value of E/T increases to 3000. Even adding “by hand” a 20% downward contribution to c_s , the action remains too high, with a minimum E/T of 1220. In fact, getting the minimum E/T down to 170 requires a “by hand” reduction to c_s of 45%, which two loop effects beyond our leading log treatment cannot possibly provide.

Also, mixing no longer helps when the two loop effects are included. This is because mixing weakens the electroweak transition substantially, since the strength of the latter is set mostly by the coupling of the Higgs to the stop, λ_y ; but mixing has little effect on the CCB transition, since its strength comes mainly from gluonic diagrams and not from diagrams involving λ_y . The two loop effects enhance the CCB transition, and if

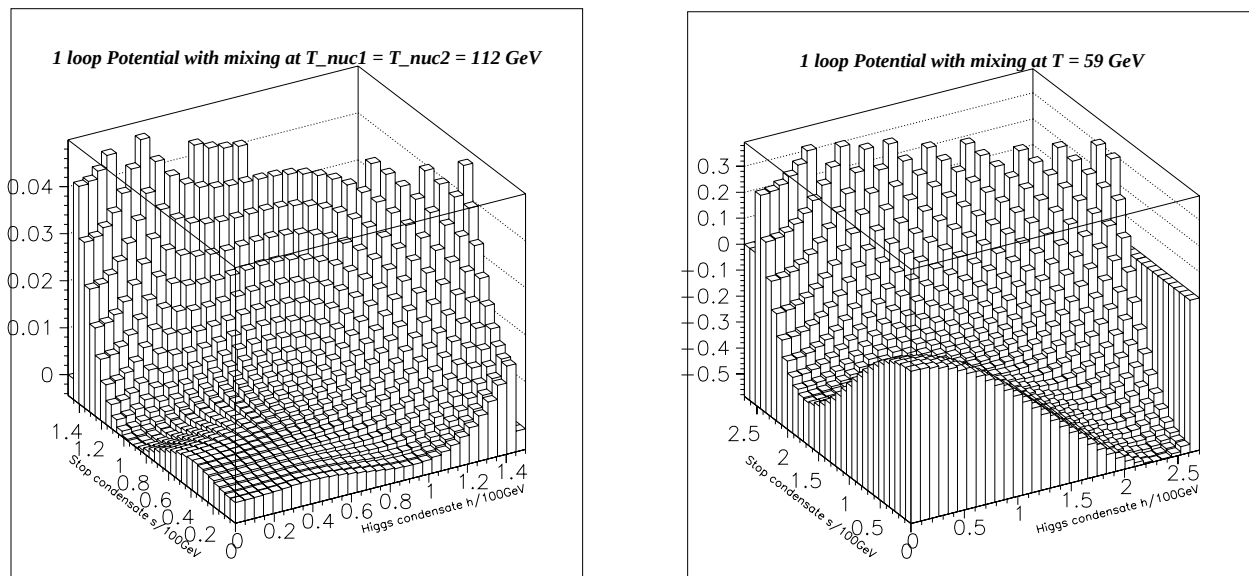


Figure 7: The potential one loop potential, with squark mixing, at T_{nuc1} (left) and at T which minimizes E/T (right). Although the CCB minimum near vacuum becomes quite shallow, it is still not shallow enough to allow efficient nucleation. Note scales; the vertical scales are in units of $(100 \text{ GeV})^4$.

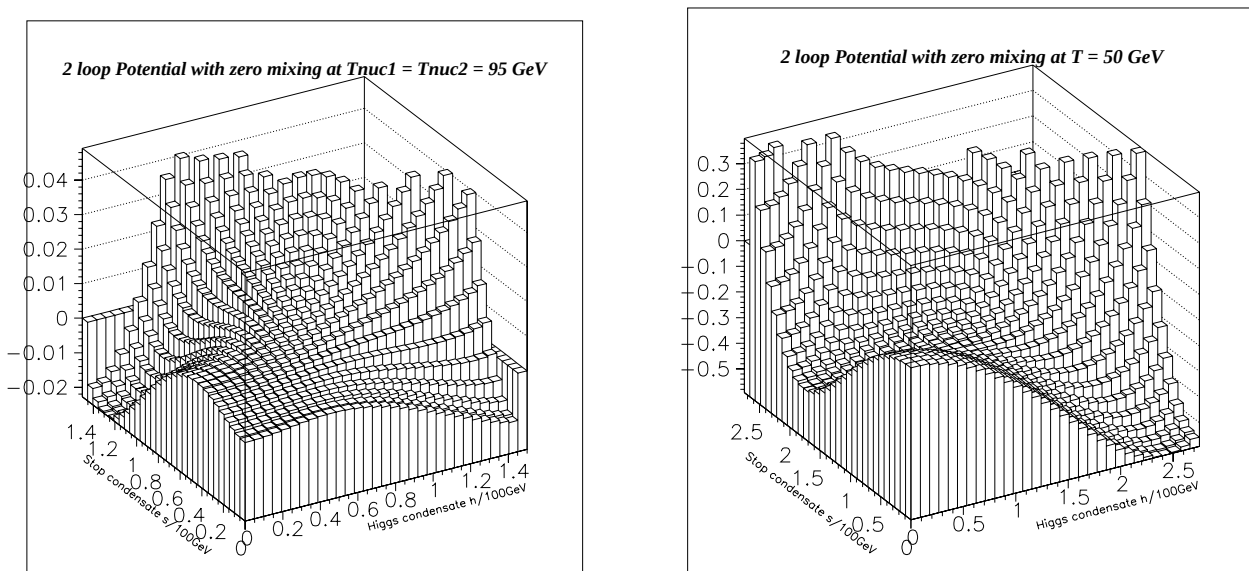


Figure 8: This figure is the same as Figure 7 except that there is maximal allowed mixing and two loop effects are included in the effective potential. The CCB transition is stronger, so the CCB minimum is deeper and harder to get out of.

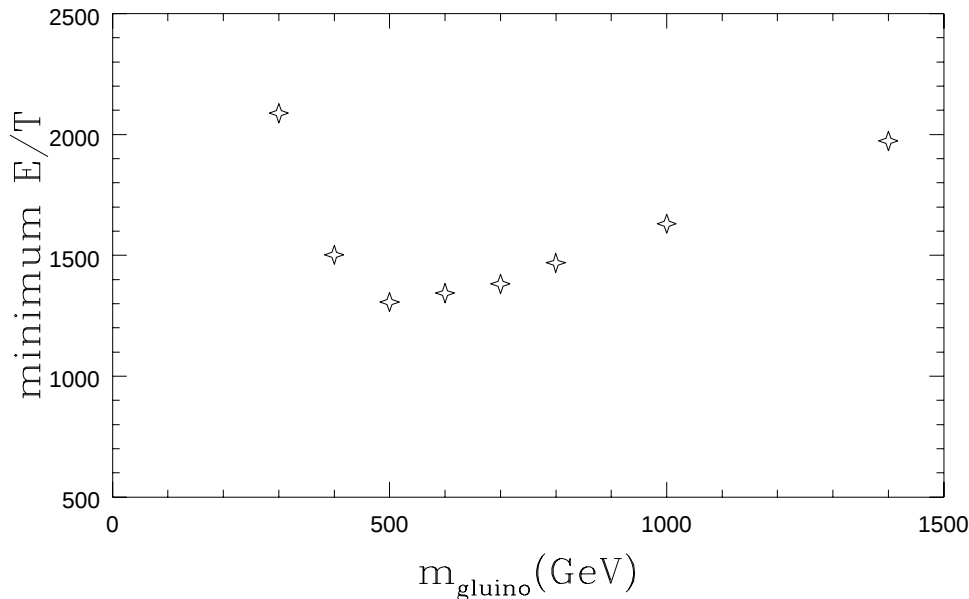


Figure 9: Minimum value of the bubble action, E/T , as a function of the gluino mass, using the one loop potential and at zero mixing.

it is very strong and the EW transition is weak, it is more difficult to get out of the CCB minimum. We illustrate this in Figure 8, which is the same as Figure 7 except that it is for maximal mixing and including the two loop effects.

We might also ask, how essential are the experimental bounds on the Higgs and stop masses to our result? The bound on the Higgs mass turns out to be inessential; allowing m_h to go down to 65 GeV still gives a minimum $E/T = 660$, using the one loop potential with mixing, the most favorable combination. However, the bound on the stop mass is essential. If the mixing is large enough, and hence λ_y small enough, then the second inequality in Eq. (7) will be violated, and the CCB “minimum” will actually be a saddle. However, at high temperatures there may still be a CCB minimum. In this case the universe can go into the CCB minimum safely, because at some temperature the CCB minimum becomes spinodally unstable, and nucleation of EW bubbles is guaranteed to be efficient just above the spinodal temperature. The required value for the stop mass is about 60 GeV using the one loop potential and about 50 GeV using the two loop potential.

The fact that color breaking is ruled out allows us to exclude some parameter values in the MSSM, namely those for which the color breaking nucleation temperature T_{nuc1} is greater than that of the electroweak transition, T_{nuc2} . This condition involves many unknown quantities, such as $\tan \beta$, the Higgs boson mass m_h , the left stop mass m_Q , and the stop mixing parameter $\tilde{A}$. We have illustrated the constraint by fixing $\tan \beta = 3.2$, while varying $\tilde{A}/m_Q$ and m_Q in such a way as to keep m_h fixed at 95 GeV, and fixing $\tan \beta = 7.5$ and keeping $m_h = 105$ GeV. The excluded region is a stop mass less than some value which depends on $\tilde{A}/m_Q$, shown in Figure 10. These are relevant variables because for any value of $m_{\tilde{t}}$, one can always avoid the color breaking transition by

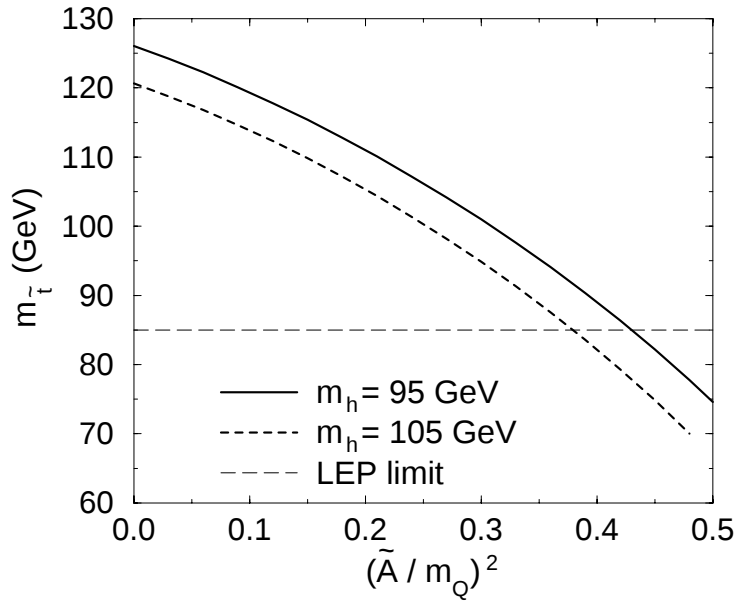


Figure 10: Our upper limit on the physical stop mass as a function of $(\tilde{A}/m_Q)^2$, for two values of the light Higgs boson mass, using the one-loop effective potential. The region $m_{\tilde{t}} < 85$ GeV is separately excluded by accelerator search limits.

making the bare stop mass parameter less negative (*i.e.*, letting μ_s^2 be smaller), while increasing $\tilde{A}/m_Q$. Decreasing μ_s^2 increases $m_{\tilde{t}}$ while increasing $\tilde{A}/m_Q$ does the opposite, so one can keep $m_{\tilde{t}}$ fixed by adjusting the two. To get m_h large enough, both $\tilde{A}$ and m_Q take values in the TeV. We find that the limiting curves are quite insensitive to the gluino mass.

5.2 Is there a way out?

The most efficient way of evading our negative result is to find some new physics that decreases the thermal contributions to the right-handed stop Debye mass. Although no such effects are present within the MSSM, one can imagine loopholes in extended models, such as those without R -parity. Here we give just one example.

In the absence of R -parity, the superpotential includes the baryon number violating terms

$$y'_{ijk} \epsilon^{abc} U_i^a D_j^b D_k^c, \quad (42)$$

involving the right-handed up (U) and down (D) squark fields of generation i, j, k and color a, b, c , with y'_{ijk} antisymmetric under $j \leftrightarrow k$. It is possible for y'_{332} to be large, if other R -parity violating couplings are sufficiently small, without violating any experimental constraints. Associated with the above coupling, one anticipates soft SUSY-breaking terms in the potential of the form

$$y'_{332} A' \tilde{t}_R^3 (\tilde{b}_R^1 \tilde{s}_R^2 - \tilde{b}_R^2 \tilde{s}_R^1). \quad (43)$$

When the stop condenses, $\tilde{t}_R^3 = s$, it induces mixing between the bottom and strange squarks, giving a mass matrix of the form

$$\begin{pmatrix} m_{\tilde{s}}^2 & \pm y' A' s \\ \pm y' A' s & m_{\tilde{b}}^2 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Let us consider the situation where there is a hierarchy between the strange and bottom squark diagonal masses, $m_{\tilde{b}}^2 \gg m_{\tilde{s}}^2$. The lighter squark gets a negative correction to its mass eigenvalue from the mixing,

$$m_{\tilde{s}}^2 \rightarrow m_{\tilde{s}}^2 - \frac{(y' A' s)^2}{m_{\tilde{b}}^2} \quad (45)$$

which makes a negative contribution to the stop thermal mass ($c_s T^2$) from the one-loop finite temperature potential,

$$\delta c_s = -\frac{(y' A')^2}{6 m_{\tilde{b}}^2}. \quad (46)$$

Although the heavier squark would make an equal and opposite Contribution, it is suppressed if $m_{\tilde{b}} \gg T$. The shift δc_s could conceivably be large enough to reduce c_s by the 45% needed in order to make the CCB to electroweak transition occur.

Another way of thinking of this is that the trilinear term has induced a negative quartic coupling between the strange and stop squarks, analogous to the negative contribution $\tilde{A}$ made to λ_y . A negative coupling between scalars leads to negative thermal masses, which is the physics of thermal symmetry non-restoration. However, for this to work it is essential that there are very large R parity violating effects involving rather light squarks. It is also a little dangerous to induce such a negative effective quartic coupling; it means that there is a very deep extra minimum of the potential in which the right stop, right scalar strange quark, and right scalar bottom quark carry condensates. It is necessary that the universe never nucleates into this minimum, and it may be more problematic to explain the approximate vanishing of the cosmological constant if “our” electroweak minimum is not the global one.

5.3 Conclusions

The phenomenology of electroweak bubbles, in which the Higgs field has a condensate, expanding into a charge and color broken phase where the right stop has a condensate, is potentially rich, and it could be very interesting for baryogenesis. Unfortunately, unless there is new physics beyond the MSSM, this scenario cannot arise by nucleation of EW bubbles out of the CCB phase. We have mentioned R -parity violating interactions as one example of such new physics. Another could be the existence of cosmic strings which induce a Higgs field condensate along their cores. Such defects would act like impurities in a solid state system, providing sites for the accelerated nucleation of the electroweak bubbles. The CCB phase can also appear if both phases nucleate out of the symmetric one simultaneously, coexisting for a brief period before the true vacuum

state (hopefully electroweak) takes over by squeezing out the CCB bubbles. This latter possibility occurs for such a narrow range of parameter values that we do not consider it to be very compelling.

Thus in the context of the MSSM and barring any additional physics, we conclude that cosmology with a stop squark condensate just before the electroweak phase transition is ruled out. Under these assumptions we can exclude MSSM parameter values, such as those shown in Figure 10, which lead to a CCB phase transition temperature higher than the EW phase transition temperature.

A Saddle point search algorithms

In this section we will describe two algorithms we use for finding critical bubble actions. One is a general purpose saddle point finding algorithm, mentioned also in the appendix of [19]. The other is special to finding critical bubbles. The second algorithm is highly efficient and to our knowledge it has not appeared previously in the literature.

A.1 General saddlepoint finding algorithm

We want to find a saddle point of a real valued function $H(q_\alpha)$, where q_α are the set of real degrees of freedom (or other continuous variables) on which H depends. In our particular case, the q_α are the values of the Higgs and stop fields on a discrete set of points representing radii from $r = 0$ out to some $r_{\max}$. The Hamiltonian we want to discretize is

$$H = 4\pi \int r^2 dr \left[\frac{1}{2}(\partial_r h)^2 + \frac{1}{2}(\partial_r s)^2 + V(h, s) \right], \quad (47)$$

where h and s are the Higgs and stop condensates in the real field normalization and $V(s, h)$ is the thermal effective potential. An explicit numerical implementation of H for the present purposes would be to discretize the radius to integer multiples of a discrete spacing Δ and approximate the energy as

$$\frac{H}{4\pi} = \sum_{i=0}^{i_{\max}-1} \frac{i^2 + i}{2} \Delta \left((h(i+1) - h(i))^2 + (s(i+1) - s(i))^2 \right) + \sum_{i=1}^{i_{\max}} i^2 \Delta^3 V(s, h), \quad (48)$$

This form for the potential is not essential to the algorithm, though; all we need is for H to depend on a finite number of coordinates and to possess first derivatives which are easy to evaluate numerically.

If we were looking for a minimum of H , we could do so by using the “gradient descent” algorithm; pick a starting guess $q_\alpha(0)$ for the fields, evaluate the set of derivatives

$$G_\alpha(0) \equiv c_\alpha \left. \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \right|_{q=q(0)}, \quad (49)$$

which comprise the gradient of H , and update the fields using

$$q_\alpha(1) = q_\alpha(0) - \Delta_\tau c_\alpha G_\alpha. \quad (50)$$

Here Δ_τ is the quenching step length and must be chosen small enough to make the algorithm stable, and the coefficients c_α represent a choice of the metric on the space q_α , which should be such that the limiting Δ_τ to give stability is approximately the same for excitations involving any q_α ; typically $c_\alpha \sim \partial^2 H / \partial q_\alpha^2$. Then we define $q_\alpha(n)$ to be the n th iterate of the procedure. This algorithm converges to a minimum.

The usual approach in the literature to find a saddle point is to derive from H equations of motion $E_\alpha = \partial H / \partial q_\alpha$, and then to define $H' = \sum_\alpha d_\alpha E_\alpha^2$, with d_α some positive coefficients. A saddle point of H is a minimum of H' , and one can use gradient descent or any other minimum seeking algorithm. However this approach can be inefficient if the saddle point has a very small unstable frequency, and it is also quite cumbersome because H' is more complicated than H ; for instance, if H contains terms with two derivatives, H' has terms with four.

We have therefore devised instead an algorithm which deals directly with H , and converges rapidly to the desired saddle point. A single iteration of the procedure requires doing the following:

1. Perform N steps of the gradient descent algorithm, with step size Δ_τ .
2. Perform one step of gradient descent with step size $-N\Delta_\tau$. Because of the sign, this is actually a “gradient ascent” step, rather than descent.
3. By examining G_α before and after, optimize the value of N .

On a “straight slope,” this algorithm does nothing, because the gradient ascent step undoes the gradient descent steps. However, when the second derivatives of H do not vanish, N forward steps are not equivalent to one backward step of N times the length. This is because each forward step starts where the last one stopped. On a concave surface, gradient descent moves towards a stationary point. As the slope becomes smaller, the size of the gradient descent steps becomes smaller. The backward step is then N times as long as the smallest step, and the final configuration is closer to the bottom than the starting one. We illustrate this in Figure 11. On the other hand, on a convex surface, gradient descent moves away from the stationary point, and each step is larger than the previous one. The backward step is N times as large as the largest forward step, and overshoots the starting point. Unless N is too large and it overshoots too much, the algorithm again lands closer to the stationary point. It is to avoid the problem of overshooting in the case where $N\Delta_\tau$ is too large that the third step, optimizing N , is necessary.

Since H is defined in a high dimensional space it is not true that one or the other of the two circumstances mentioned above pertain. Close to an extremum, though, H is approximately a quadratic form in the q_α , $H \sim H_{\alpha\beta} \delta q_\alpha \delta q_\beta / 2$, and the above arguments apply separately for each eigenvector of $H_{\alpha\beta}$. More generally, unless $N\Delta_\tau$ is very large, the algorithm will always go uphill along directions with negative curvature

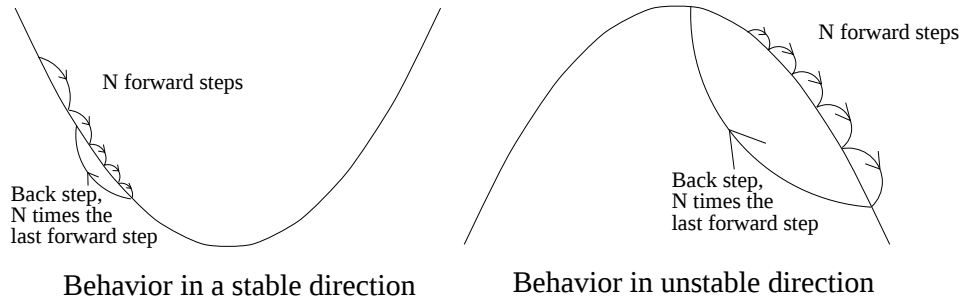


Figure 11: Cartoon showing how the saddle seeking algorithm works. When an extremum is a minimum, gradient descent steps go towards it, and the backwards step is smaller than the series of forward steps. When it is a maximum, the gradient descent moves away, but the backwards step is larger and overshoots, landing closer to the extremum.

and downhill along directions with positive curvature, which will lead it towards a region with smaller gradients, and hence towards some extremum.

Now we will describe the procedure for optimizing N . First, one notices that if the departure from the saddle point is predominantly in convex (stable) directions then we get closer to the minimum fastest simply by using gradient descent without backward steps. It is also easy to tell if this is the case; when it is, $\sum_{\alpha} G_{\alpha} G_{\alpha}$ diminishes with each forward step. For this reason, and because the unstable frequency of a critical bubble is typically lower than any of the stable frequencies, we will concentrate on the case where almost all that is left is departure from the saddle in the unstable direction. One iteration of the algorithm multiplies the departure from the saddle in the unstable direction by $(1 - x) \exp(x)$, where $x = N \Delta_{\tau} \omega_{-}^2$ and ω_{-} is the unstable frequency of the saddle point. The algorithm overshoots if $x > 1$ and it is unstable if $x > 1.278$. However, we can measure the extent of overshoot or undershoot by comparing the gradient after an iteration of the algorithm, $G_{\alpha}(\text{after})$, with the gradient before, $G_{\alpha}(\text{before})$. Our indicator of whether N is too large is

$$\frac{\sum_{\alpha} G_{\alpha}(\text{after}) G_{\alpha}(\text{before})}{\sum_{\alpha} G_{\alpha}(\text{before})^2}; \quad (51)$$

if this is positive, we can safely increase N , and if it is negative we must reduce N . If there are no remaining excitations in stable directions then the value of the indicator will be $(1 - x) \exp(x)$, which makes it easy to choose a new value of N which will make x very close to 1. When $x = 1$, the algorithm “steps back” just the right distance and lands on the saddle point. It is also possible to determine the unstable frequency from the value of $N \Delta_{\tau}$ which worked optimally.

As with any saddle point finding algorithm it is still necessary to feed in a good starting guess so that the algorithm finds the right extremum of the action. Here we have little new to say. Our approach has been to define a few-parameter *Ansatz* for a path in field space between the EW and CCB vacua, and to use a shooting algorithm to find the action for each value of the parameters. Then we minimize the action over

the parameters in the *Ansatz*. All that is necessary is that the starting guess not be terribly bad, although in practice the saddle finding algorithm converges faster if the starting guess is better.

A.2 Efficient algorithm just for multi-field critical bubbles

Now we describe a much more efficient algorithm, which is however special to the problem of determining critical bubble configurations and actions in theories with more than one field. The general problem is to find the lowest saddle point of the Hamiltonian

$$H = 4\pi \int r^2 dr \left(\sum_i \frac{(\partial_r f_i(r))^2}{2} + V(f_i(r)) \right), \quad (52)$$

where f_i represent several fields which may all have condensates, and the boundary conditions are that the f_i start at $r = 0$ near the true minimum and approach their false vacuum values at large r . Although we have in mind a numerical implementation involving discretization of r , we use the simpler continuum notation.

The problem reduces to the one field case if we consider a restricted set of configurations in which the fields always lie along a one dimensional trajectory through field space. That is, we choose a curve in the space of $\{f_1, \dots, f_n\}$, parameterized by a path length l , $f_i = f_i(l)$. By path length we mean that l is chosen so that

$$\sum_i \left(\frac{df_i(l)}{dl} \right)^2 = 1. \quad (53)$$

Then we require that the fields $f_i(r)$ can be written as $f_i(l(r))$. This is the same as making all of the fields dependent on the value of one field. For this restricted set of configurations, the Hamiltonian is

$$H(\text{restricted}) = 4\pi \int r^2 dr \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dl}{dr} \right)^2 + V(f_i(l(r))) \right]. \quad (54)$$

The standard shooting algorithm finds the saddle point on this restricted class of configurations, and its action is an upper bound for the true saddlepoint action. The “only” remaining problem is to find the minimum over all choices of paths in field space.

This is where the gradient descent algorithm comes in. If our choice of path is imperfect, the shooting algorithm gives a bubble configuration which is not a true saddle point. So, lifting the requirement that the fields lie on any prescribed path in field space, gradient descent will lead to a lower energy configuration which must, at least initially, be following a “better” path through field space, meaning one which will give a lower saddle point energy. This leads to the following algorithm. First, we choose some “reasonable” path through field space. We evaluate the potential at a series of points along it and define the potential to be the spline interpolation of those points. Then we iterate the following procedure:

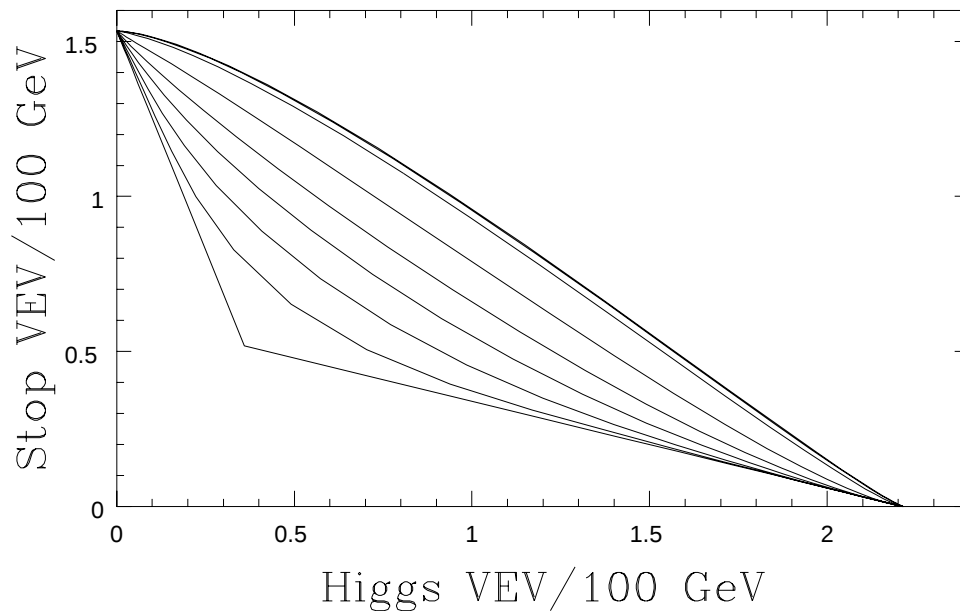


Figure 12: An example of how the second algorithm converges to the right line through field space. The starting guess for the line through field space is the leftmost one with a sharp angle, and each line in the series represents the result of one more iteration of the algorithm. The algorithm converges quickly to the right line through field space.

1. Find the saddle point solution for the particular path through field space by the standard “shooting” algorithm;
2. Apply a reasonably short amount of gradient descent cooling to the resulting configuration, making no requirements that the fields remain on any trajectory in field space;
3. Use the $f_i(r)$ after the gradient descent to define a new choice for a path through field space. In practice we know f_i at a discrete set of radii r , so we take the path to be the series of straight line segments joining the points $f_i(r_{\text{known}})$, and the potential to be the spline interpolation of $V(f_i(r))$.

We illustrate how the iteration converges to the “right” path through field space in Figure 12, which shows a series of paths in field space from iterations of the above algorithm. In our case there are only two fields, but the algorithm generalizes immediately to many fields.

Apart from step size errors, the algorithm converges to a saddle point configuration with only one unstable direction. This is because the shooting procedure only allows one unstable mode, associated with variations in dependence of the fields on the radius while staying on the same path, and the gradient descent algorithm does not tolerate any unstable modes for which the fields leave the path. There is no guarantee that we will find the lowest action; if there are several saddlepoint solutions with only one unstable direction, the one we find depends on the basin of attraction in which the

starting guess for a path lies. This is a general problem with any saddle point seeking algorithm. However we have not found it to be a problem in practice.

We have compared this algorithm with the one described in the last subsection. They converge to the same solutions and give the same saddle point energy to about 1% accuracy for the step size we use. It is easier to make the general algorithm give higher accuracy; one recomputes the action with half the step size and extrapolates to zero step size assuming $O(\Delta^2)$ errors. This leaves a very small $O(\Delta^4)$ error which in practice can be made of order 10^{-4} quite easily. We have been less successful bringing the errors of the algorithm presented here below $O(\Delta^2)$. However, the algorithm efficiency is drastically better, especially when the saddle point action is large; and since we are neglecting corrections (such as vacuum two-loop contributions to V , field dependent wave function corrections, and higher derivative corrections) which enter at the 1% level we see little point in pursuing numerical accuracy further.

B Renormalization Group choice of couplings

Here we discuss the renormalization group analysis, used to determine the scalar couplings at a renormalization point $\bar{\mu}$. To begin with, we need values for the strong and Yukawa couplings. We take the value of the strong coupling in the five quark scheme at the Z pole, $\alpha_s(91 \text{ GeV}, \overline{\text{MS}}) = 0.118$, and convert it to $\overline{\text{DR}}$ in the six quark plus right squark scheme using the relation [20]

$$g_s^2(M_Z, \overline{\text{DR}}, 6 \text{ quark} + \text{right squark}) = \frac{\alpha_s(M_Z, \overline{\text{MS}}, 5 \text{ quark})}{1 - \Delta\alpha_s}, \quad (55)$$

$$\Delta\alpha_s = \frac{\alpha_s}{2\pi} \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \ln \frac{m_t}{m_Z} - \frac{1}{6} \ln \frac{m_s}{m_Z} \right], \quad (56)$$

which coincidentally gives almost the same value. We run this to the top mass using the one loop beta function, to be given shortly. We also determine the Yukawa coupling at $\bar{\mu} = m_t$ from the expression [20]

$$\frac{y \sin \beta(\overline{\text{DR}}, \bar{\mu} = m_t)}{\sqrt{2}} = \frac{m_t}{v} \left(1 - \frac{5g_s^2}{12\pi^2} \right). \quad (57)$$

In $\overline{\text{MS}}$ the 5 would be a 4. We define β so that $\sin \beta$ is the overlap between the light and up-type (H_2) Higgs eigenstates using the wave functions at the renormalization point set by the heavy Higgs field threshold; below the threshold only the combination $y \sin \beta$, which is the coupling of the light Higgs to the top quark, appears. The exception is the top-stop-Higgsino coupling, which we approximate to be $1/\sin \beta$ times the Higgs-top-top coupling.

We run g_s^2 and y^2 to the ultraviolet using one loop beta functions, including only strong and Yukawa contributions in the beta functions, and putting each heavy particle into loops after crossing its threshold. At the energy scale of the heaviest particle, we

relate λ_s and λ_h to the gauge couplings using the SUSY relations, given in the main text in Eq. (11); similarly

$$\lambda_y(\bar{\mu} = UV) = y^2 - \frac{1}{3}g'^2 \quad (58)$$

fixes λ_y above all thresholds. These SUSY relations hold at this UV scale, although if we had used $\overline{\text{MS}}$ there would be nonlogarithmic one loop corrections. Then we run all 5 couplings back down to the infrared, switching to the effective theory without a heavy particle when we cross its mass threshold. We allow ourselves the approximation that the Yukawa-like couplings of gluinos and Higgsinos equal the respective strong and Yukawa couplings. Although these relationships are actually broken below heavy particle thresholds we believe that this produces only a small error. We also systematically drop electroweak contributions to the beta functions.

The procedure is possible because the strong and Yukawa beta functions do not depend on the scalar self-couplings; otherwise we would have to seek UV values of g_s^2 and y^2 which would “hit” the appropriate IR values. The procedure is necessary because our choices for particle masses lead to large logarithms like $\log(m_Q/m_t) \simeq 4$, which makes it important to include, for instance, two-loop $\log^2$ contributions. The difference between performing the renormalization group analysis and simply enforcing the SUSY relations between the couplings at our infrared renormalization point is a shift of order 20% in λ_s and λ_y , and of course a larger shift in λ_h , which has a small SUSY value at low $\tan\beta$ but large radiative corrections from the Yukawa coupling. The residual two loop and electroweak errors left out from our analysis should be of order a few percent.

Now we present the complete expressions for the beta functions. The simplest is the strong beta function,

$$\beta_{g_s^2} = \frac{g_s^4}{16\pi^2} \left\{ -\frac{41}{3} + 4 \theta(\bar{\mu} - m_{\tilde{g}}) + \frac{2}{3} \theta(\bar{\mu} - m_Q) + 3 \theta(\bar{\mu} - m_{\text{heavy}}) \right\}. \quad (59)$$

Here $-41/3$ is the value in the six quark standard model plus right stop, and the θ functions turn on each particle's contribution as $\bar{\mu}$ passes its mass threshold; the sum of the terms is -6 , which is the correct expression in the full SUSY theory.

The expressions for the other couplings are less elegant; for the Yukawa coupling we have

$$\begin{aligned} \beta_{y^2} = \frac{y^2}{16\pi^2} & \left[9y^2 \sin^2 \beta - 16g_s^2 + 9y^2 \cos^2 \beta \theta(\bar{\mu} - m_{A^0}) + \right. \\ & \left. + \left(2y^2 + \frac{8}{3}g_s^2 \right) \theta(\bar{\mu} - m_Q) + y^2 \theta(\bar{\mu} - m_{\tilde{h}}) + \frac{8}{3} g_s^2 \theta(\bar{\mu} - m_{\tilde{g}}) \right], \quad (60) \end{aligned}$$

where the dependence on m_{A^0} is because we actually change what we mean when we cross its threshold. Above the A^0 threshold, the Yukawa coupling is the coupling of the up-type (H_2) Higgs field to the tops; below, $y^2 \sin^2 \beta$ is the coupling of the light Higgs

field to the tops. The expression below all mass thresholds agrees with the standard model value and the result above thresholds agrees with the MSSM result.

The expressions for the scalars are even more complicated. For the squark self-coupling, and using SUSY relations for its couplings via D terms to other squarks (which are heavy, so the SUSY relations hold when it matters), we have

$$\begin{aligned} \beta_{\lambda_s} = & \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{13}{6}g_s^4 - 16g_s^2\lambda_s + 28\lambda_s^2 + 2\lambda_y^2 + \frac{3}{2}g_s^4\theta(\bar{\mu} - m_{\text{heavy}}) + \right. \\ & + \left(\frac{1}{3}g_s^4 - \frac{4}{3}g_s^2y^2 + 2y^4 \right) \theta(\bar{\mu} - m_Q) + \left(\frac{32}{3}g_s^2\lambda_s - \frac{44}{9}g_s^4 \right) \theta(\bar{\mu} - m_{\tilde{g}}) \\ & \left. + (8y^2\lambda_s - 4y^4)\theta(\bar{\mu} - m_{\tilde{h}}) \right], \end{aligned} \quad (61)$$

where the reader should be cautious because the meaning of λ_y in this expression changes at m_{A^0} and m_Q ; at m_{A^0} it goes from being the coupling between the up-type Higgs and stop to that of the light Higgs and stop, and at m_Q it is modified by mixing, reducing it by a factor of $1 - (\tilde{A}^2/m_Q^2)$. As previously noted we assume $m_{A^0} = m_Q$ for simplicity.

To match λ_y across the m_Q threshold, we require that $m_{A^0} = m_Q$. There are two threshold effects; first, the coupling of the light Higgs below the threshold is $\sin^2\beta$ times the coupling of the up type Higgs to the stop, plus $\cos^2\beta$ times the coupling of the down type Higgs to the stop, which is $g'^2/3$. Also, there is the mixing induced by the diagram in Figure 2. The matching condition across the threshold is therefore

$$\lambda_y(\text{below}) = \lambda_y(\text{above}) \sin^2\beta + \frac{g'^2}{3} \cos^2\beta - y^2 \sin^2\beta \frac{\tilde{A}^2}{m_Q^2}. \quad (62)$$

The expression for the beta function of λ_y , valid both above and below the m_{A^0} threshold, is

$$\begin{aligned} \beta_{\lambda_y} = & \frac{1}{16\pi^2} \left[6\lambda_y y^2 \sin^2\beta + (4\lambda_y + 12\lambda_h + 16\lambda_s - 8g_s^2)\lambda_y + 2y^4\theta(\bar{\mu} - m_Q) + \right. \\ & \left(6y^2\lambda_y - \frac{32}{3}g_s^2 - 4y^4 \right) \cos^2\beta\theta(\bar{\mu} - m_{A^0}) + (4y^2\lambda_y - 4y^4 \sin^2\beta)\theta(\bar{\mu} - m_{\tilde{h}}) \\ & \left. + \left(\frac{16}{3}g_s^2\lambda_y - \frac{32}{3}g_s^2y^2 \sin^2\beta \right) \theta(\bar{\mu} - m_{\tilde{g}}) \right]. \end{aligned} \quad (63)$$

Including λ_h effects in the beta function for λ_y is slightly inconsistent because λ_h is largely an electroweak effect and the canceling electroweak effect required by SUSY is missing since we ignore electroweak couplings. However the error this causes is negligible because $3\lambda_s\lambda_h/(4\pi^2)$ is numerically very small compared to λ_y .

Lastly there is the beta function for λ_h . It barely runs above m_Q , so we enforce its SUSY relation there, choosing the value just below to be $(g^2 + g'^2) \cos^2(2\beta)/8$. Below

both m_Q and m_{A^0} thresholds, we run it using the beta function

$$\beta_{\lambda_h} = \frac{1}{16\pi^2} \left[3\lambda_y^2 - 6y^4 \sin^4 \beta + 12y^2 \lambda_h \sin^2 \beta \right]. \quad (64)$$

The electroweak correction to λ_h from the very heavy squarks is not entirely negligible, because of the large log and because λ_h is not very big; it shifts the final value of λ_h by about 5% of the SUSY value. We have neglected this effect in our work, as part of consistently dropping electroweak radiative corrections, which is reasonable because the Yukawa type corrections to λ_h are of order 1.

References

- [1] A. Sakharov, JETP Lett. **6**, 24 (1967).
- [2] G. t'Hooft, Phys. Rev. Lett. **37**, 8 (1976).
- [3] V. Kuzmin, V. Rubakov, and M. Shaposhnikov, Phys. Lett. **D 30**, 36 (1985); P. Arnold and L. McLerran, Phys. Rev. **D 36**, 581 (1987); J. Ambjørn and A. Krasnitz, Phys. Lett. **B 362**, 97 (1995); G. D. Moore, C. Hu, and B. Müller, Phys. Rev. **D 58**, 045001 (1998).
- [4] M. Gavela, P. Hernandez, J. Orloff, and O. Pene, Nucl. Phys. **B 430** (1994) 345; M. Gavela, P. Hernandez, J. Orloff, O. Pene, and C. Quimbay, Nucl. Phys. **B 430** (1994) 382.
- [5] G. D. Moore, MCGILL-98/7, hep-ph/9805264.
- [6] R. Clare, L3 report to LEPC, <http://l3www.cern.ch/conferences/talks98.html>
- [7] K. Kajantie, M. Laine, K. Rummukainen, and M. Shaposhnikov, Phys. Rev. Lett. **77**, 2887 (1996); M. Gürtler, E. Ilgenfritz, and A. Schiller, Phys. Rev. **D 56**, 3888 (1997); K. Rummukainen, M. Tsypin, K. Kajantie, M. Laine, and M. Shaposhnikov, Nucl. Phys. **B532**, 283 (1998); F. Csikor, Z. Fodor, and J. Heitger, Phys. Rev. Lett. **82**, 21 (1999);
- [8] J. R. Espinosa, Nucl. Phys. **B 475** 273, (1996); B. de Carlos and J. R. Espinosa, Nucl. Phys. **B 503**, 24 (1997); M. Carena, M. Quirós, and C.E.M. Wagner, Nucl. Phys. **B 524**, 3 (1998); D. Bödeker, P. John, M. Laine and M.G. Schmidt, Nucl. Phys. **B497**, 387 (1997); J. Cline and G. D. Moore, Phys. Rev. Lett. **81**, 3315-3318 (1998), hep-ph/9806354; M. Losada, hep-ph/9806519; M. Laine and K. Rummukainen, hep-lat/9804019; Phys. Rev. Lett. **80**, 5259 (1998).
- [9] A. Kusenko, P. Langacker and G. Segre, Phys. Rev. **D54**, 5824 (1996).
- [10] D. Bödeker, P. John, M. Laine and M.G. Schmidt, Nucl. Phys. **B497**, 387 (1997).

- [11] M. Carena, M. Quirós, and C.E.M. Wagner, Nucl. Phys. **B 524**, 3 (1998).
- [12] I. Affleck, Phys. Rev. Lett. **46**, 388 (1981).
- [13] S. Coleman, Phys. Rev. **D 15**, 2929 (1977); C. Callan and S. Coleman, Phys. Rev. **D 16**, 1762 (1977).
- [14] J. Cline and P.-A. Lemieux, Phys. Rev. **D55**, 3873 (1997).
- [15] D. Comelli and J. Espinosa, Phys. Rev. **D 55**, 6253 (1997).
- [16] A. Guth and E. Weinberg, Nucl. Phys. **B 212**, 321 (1983).
- [17] J. Baacke, Phys. Rev. **D 52**, 6760 (1995).
- [18] M. Losada, Nucl. Phys. **B 537**, 3 (1999), hep-ph/9806519.
- [19] J. Cline, J. Espinosa, G. D. Moore, and A. Riotto, CERN-TH-98-306, hep-ph/9810261.
- [20] D. Pierce, J. Bagger, K. Matchev, and R. Zhang, Nucl. Phys. **B 491**, 3 (1997).

Publication II

Cosmological Expansion in the Presence of an Extra Dimension

McGill 99-25
Saclay T99/065
hep-ph/9906523

Cosmological Expansion in the Presence of an Extra Dimension

J. Cline^{a,b}, C. Grojean^b and G. Servant^{a,b}

^a Physics Department, McGill University,
3600 University Street, Montréal, Québec, Canada H3A 2T8

^b Service de Physique Théorique, CEA-Saclay
F-91191 Gif/Yvette Cedex, France

Abstract

It has recently been pointed out that global solutions of Einstein's equations for a 3-brane universe embedded in 4 spatial dimensions give rise to a Friedmann equation of the form $H \propto \rho$ on the brane, instead of the usual $H \propto \sqrt{\rho}$, which is inconsistent with cosmological observations. We remedy this problem by adding cosmological constants to the brane and the bulk, as in the recent scenario of Randall and Sundrum. Our observation allows for normal expansion during nucleosynthesis, but faster than normal expansion in the very early universe, which could be helpful for electroweak baryogenesis, for example.

PACS: 98.80.Cq, 11.10.Kk, 11.25.Mj.

Keywords: Brane cosmology, Extra dimensions

During the past year, much has been written about the possibility of having compactified extra dimensions with large radii [1]. In the original proposal, M_P was related to the radius b_0 of the N compact dimensions by $M_P^2 = M^2(Mb_0)^N$, where M is the new fundamental quantum gravity scale, which could in principle be as low as 1 TeV. If so, this would be a partial solution of the hierarchy problem, *i.e.*, why the weak scale, M_W , is 17 orders of magnitude smaller than the Planck scale, M_P : it is because b_0 is, for some reason, much larger than M^{-1} . If $b_0 \gg M_P^{-1}$, as is necessary if $M \sim M_W$, the particles and fields of the standard model must be restricted to stay on a 3-dimensional slice (brane) of the full $N + 3$ spatial dimensions; otherwise particle propagation in the new dimensions would already have been seen in accelerator experiments. But even with the restriction of the brane, the idea implies many possibly observable effects at accelerators. It also poses severe challenges for cosmology. In this letter we will address one of the cosmological problems, and comment upon an unexpected connection to the question of precisely how the hierarchy problem is solved using the extra dimensions.

Our starting point is the observation recently made by Binétruy, Deffayet and Langlois [2,3] that the Friedmann equation for the Hubble expansion rate of our 3D universe is modified, even at very low temperatures, by the presence of an extra dimension, y , compactified on a circle or an orbifold. Allowing for the possibility of a cosmological constant Λ_b in the full 4 spatial dimensions, called the bulk, the new Friedmann equation for the scale factor a of our brane is [2, 4]

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \left(\frac{\rho_t}{6M^3}\right)^2 + \frac{\Lambda_b}{6M^3}, \quad (1)$$

instead of the usual relation, $H = \sqrt{\rho_t/3M_P^2}$. ρ_t is the total (vacuum plus matter) energy density on the brane. This expression is derived, as will be explained below, from the 5D action

$$\mathcal{S} = \int d^4x dy \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2} M^3 \mathcal{R} - \Lambda_b + \mathcal{L}_{\text{brane}} \right) \quad (2)$$

where the action, $\mathcal{L}_{\text{brane}}$, for the matter living on the brane results in a stress-energy tensor parametrized as $T_\nu^\mu = \delta(by) \text{diag}(-\rho_t, p_t, p_t, p_t, 0)$. An interesting aspect of this result is that fact that, in order to find consistent global solutions to the Einstein equations in the $(4+1)$ -D spacetime, it is necessary to add a second brane [7], a mirror of our own, having equal and opposite energy density. This topology can be motivated from string theory. In the Hořava–Witten picture [5] of the nonperturbative regime of the $E_8 \times E_8$ string theory, the string coupling is interpreted as an eleventh compact dimension with a $\mathbb{Z}_2$ symmetry that truncates the spectrum in order to keep only sixteen supercharges in 10D, *i.e.*, an $\mathcal{N} = 1$ supersymmetry in 4D after compactification on a Calabi-Yau manifold. There is good evidence [6] that over a wide range of energies the theory behaves like a 5D theory compactified on a $\mathbb{Z}_2$ orbifold with two 3-branes, viewed as the remnants of the 10D hypersurfaces where the E_8 gauge groups were living. The two 3-branes can also be seen as D3-branes of the type I string theory [1].

Naively, one would expect that at distances much bigger than the size of the fifth dimension, the effects of the extra compact dimension become small corrections to the

usual 4D equations; thus when $H^{-1} \gg b_0$, one should recover the standard cosmology. However the presence of the mirror brane contradicts this logic. Let us choose the range of the compact coordinate to be $y \in [-1/2, +1/2]$. The solutions of the Einstein equations for the scale factor $a(y)$ behave [2,3] like $a_0(1+A|y|/2)$, with $A \sim \rho_t$. Because the points $y = \pm 1/2$ are identified, the derivative is discontinuous at this point, and $a''/a = A(\delta(y) - \delta(y - 1/2))$. The Einstein equations identify the delta functions with the energy densities of the two respective branes. In the limit as $b_0 \rightarrow 0$, the two branes overlap, and their energy densities cancel to first order in ρ_t because they are equal and opposite. Therefore only terms of order $(a'/a)^2 \sim A^2 \sim \rho_t^2$ survive, even at arbitrarily late times in cosmological history. The resulting expansion rate (1) is probably incompatible with big bang nucleosynthesis, which is extremely sensitive to how the Hubble rate varies with the the energy density, hence temperature. Even if one tunes M so that the altered expansion rate (1) still gives the correct helium, it is likely that the other elements will come out wrong, since their rates of production depend quite differently on the temperature.

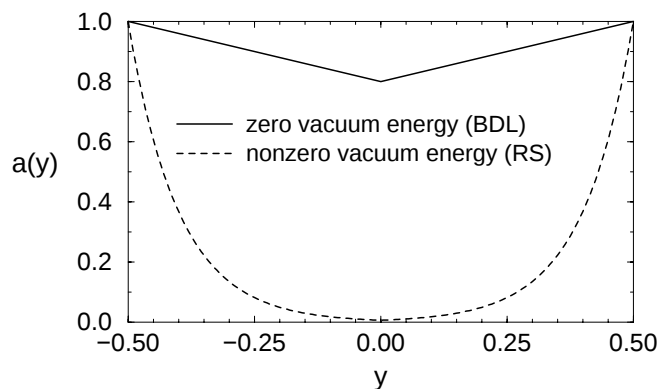


Figure 1. Qualitative dependence of the 3D scale factor $a(y)$ on the compact dimension y in the solutions of: (solid line) ref. [2], with vanishing bulk cosmological constant; and (dashed line) ref. [8], with Λ_b given by eq. (3). $a(0)$ is nonzero but exponentially small in the latter.

From eq. (1), one can imagine a very simple escape from this dilemma [9]. Suppose there is a cosmological constant Λ localized on our brane (and correspondingly $-\Lambda$ on the mirror brane, although this value will be corrected by terms of order ρ in the presence of matter on the branes), so that $\rho_t = \Lambda + \rho$, where ρ now denotes the energy density of normal matter or radiation on the brane, as opposed to vacuum energy. One can choose Λ_b to exactly cancel the Λ^2 terms in eq. (1), and furthermore fix the value of Λ in terms of M and M_P :

$$\Lambda_b = -\frac{\Lambda^2}{6M^3}; \quad (3)$$

$$\Lambda = \pm 6\frac{M^6}{M_P^2}, \quad (4)$$

where $\pm$ refers to the two respective branes. Condition (3) insures the cancellation of the effect of Λ_b by Λ^2 in (1), whereas (4) adjusts the overall rate of expansion to agree

with the usual result. The new Friedmann equation then becomes the conventional one, plus a correction which is quadratic in the density:

$$H^2 = \pm \frac{\rho_{\pm}}{3M_P^2} \left(1 \pm \rho_{\pm} \frac{M_P^2}{12M^6} \right) \quad (5)$$

We have distinguished the values of ρ on the two branes by the subscript to emphasize that they need not—in fact, cannot—be the same. The brane with the positive solution has a rate of expansion that is consistent with all current cosmological observations as long as the normal rate has been recovered by the epoch of nucleosynthesis, which will be true if $0 < \rho_+ \lesssim 0.1 (1 \text{ MeV})^4 \ll \Lambda$. One thus finds the constraint that

$$M \gtrsim 10 \text{ TeV}, \quad (6)$$

which is not much more severe than other accelerator and astrophysical limits that have recently been placed on the new gravity scale. The other brane must have $\rho_- \leq 0$, since otherwise $H^2 < 0$, which has no solution.

The condition (3) is precisely what is needed to get a static universe in the case of vanishing ρ : the negative cosmological constant in the bulk cancels the positive Λ^2 from either brane. The solutions to the Einstein equations in this case were recently studied by Randall and Sundrum (RS) [8], but for very different reasons: they found that the weak scale hierarchy problem is naturally solved on one of the branes, even if $M \sim M_P$, and $b_0 \sim 50M_P^{-1}$. This comes about because the metric tensor has an exponential dependence on the coordinate of the compact 5th dimension (see Figure 1). Using the line element

$$ds^2 = -n^2(t, y)dt^2 + a^2(t, y)\delta_{ij}dx^i dx^j + b(t, y)^2 dy^2, \quad (7)$$

it is straightforward to verify the time-independent solution

$$a(y) = n(y) = a_0 e^{-k|y|}; \quad k = \frac{b_0 \Lambda}{6M^3}; \quad b(y) = b_0; \quad (8)$$

One then observes that, even if all mass parameters in the Lagrangians for matter on the branes are of the order M_P , the physical masses on the brane at $y = 1/2$ are suppressed by the factor $e^{-k/2}$, which can be of order M_W/M_P with only a moderate hierarchy between b_0 and $M_P^{-1} \sim M^{-1}$. Since $g_{\mu\nu}$ enters differently in the kinetic than the mass terms for a scalar field, once the kinetic terms are canonically normalized, masses get multiplied by $a(1/2) \sim e^{-k/2}$. This idea therefore appears to be a much more natural solution to the hierarchy problem than the original proposal, which required $b_0 M$ to be of order $(M_P/M)^{2/N}$, where N is the number of extradimensions.

We now see that the static solution of RS is the starting point for our idea, which is to recover the normal expansion of the 3D universe by perturbing large, balancing cosmological constants in the bulk and the branes by a small density of matter or radiation on the branes. Intuitively, it is clear that solutions with nonvanishing ρ must exist, but we will now take some time to demonstrate this explicitly, in the vicinity of

our brane. We were not able to find global solutions in closed form once matter with an arbitrary equation of state $p = \omega\rho$ was introduced. However, we are really most interested in the expansion rate on our own brane, so it suffices to solve the Einstein equations in that region. To simplify the appearance of the solutions, we will translate the y coordinate by $y \rightarrow y + 1/2$, so that the brane which we inhabit is located at $y = 0$.

We must solve the Einstein equations for the metric (7), now allowing for time dependence in a , b and n . It is always possible to chose a gauge so that $n(t, 0)$ is constant at $y = 0$, without introducing g_{05} elements in the metric. We will make this choice, and drop all terms involving $\dot{n}$ since they are not relevant for the solution in the immediate vicinity of the brane. With this simplification, the 5D Einstein equations, $G_{\mu\nu} = M^{-3}T_{\mu\nu}$, become [2]

$$\frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \right) = \frac{n^2}{b^2} \left(\frac{a''}{a} + \frac{a'}{a} \left(\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b} \right) \right) + \frac{1}{3M^3} T_{00}, \quad (9)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 2\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} = -\frac{n^2}{a^2 M^3} T_{ii} + \frac{n^2}{b^2} \left\{ 2\frac{a''}{a} \right. \quad (10)$$

$$\left. + \frac{n''}{n} \frac{a'}{a} \left(\frac{a'}{a} + 2\frac{n'}{n} \right) - \frac{b'}{b} \left(\frac{n'}{n} + 2\frac{a'}{a} \right) \right\} \quad (11)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{n^2}{b^2} \frac{a'}{a} \left(\frac{a'}{a} + \frac{n'}{n} \right) - \frac{n^2}{3b^2 M^3} T_{55} \quad (12)$$

$$\frac{n'}{n} \frac{\dot{a}}{a} + \frac{a'}{a} \frac{\dot{b}}{b} - \frac{\dot{a}'}{a} = \frac{1}{3M^3} T_{05} = 0 \quad (13)$$

in the vicinity of $y = 0$. Close to our brane, the nonzero elements of the 5D stress-energy tensor are

$$\begin{aligned} T_{00} &= n^2(\rho + \Lambda)\delta(by) + n^2(\Lambda_b + V(b)); \\ T_{ii} &= a^2(p - \Lambda)\delta(by) - a^2(\Lambda_b + V(b)); \\ T_{55} &= -b^2(\Lambda_b + V(b) + V'(b)/b) \end{aligned} \quad (14)$$

where $\delta(by) = b^{-1}\delta(y)$ is the generally covariant form of the delta function. There are also source terms proportional to $b^{-1}\delta(y - 1/2)$ at the mirror brane, but these will not directly concern us in what follows. The terms involving $V(b)$ would result if there is a potential that stabilizes the compact dimension. Their presence does not qualitatively change any of our conclusions, so we set $V(b)$ to zero in what follows.

The generalization of the static solution (8) can be parametrized as

$$\begin{aligned} a(t, y) &= a_0(t) \exp(\tfrac{1}{2}A|y| + \tfrac{1}{2}A_2y^2 + \cdots) \\ b(t, y) &= b_0 \exp(\tfrac{1}{2}B|y| + \tfrac{1}{2}B_2y^2 + \cdots) \\ n(t, y) &= \exp(\tfrac{1}{2}\mathcal{N}|y| + \tfrac{1}{2}\mathcal{N}_2y^2 + \cdots) \end{aligned} \quad (15)$$

By our choice of gauge for time, there is no $n_0(t)$ function. We have not assumed separability of the solution here, since the coefficients $A, B, \mathcal{N}$, *etc.*, need not be static;

however we will see that their time-dependence arises entirely from that of ρ and p . The fact that b_0 is constant in time is not obvious, but will be proven to be consistent with eqs. (9-13).

As in ref. [2], the linear-in- $|y|$ coefficients, A and $\mathcal{N}$, are determined by the singular parts of eqs. (9) and (11), *i.e.*, those involving the delta functions and second spatial derivatives. One finds that

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{3}b_0 M^{-3}(\rho + \Lambda); \\ \mathcal{N} &= b_0 M^{-3}(p + \frac{2}{3}\rho - \frac{1}{3}\Lambda). \end{aligned} \quad (16)$$

Therefore, to obtain solutions that are growing in the direction of the mirror brane, as are needed to solve the hierarchy problem on our own, *we would have to chose* $\Lambda < 0$ *here*, about which we shall say more below. The analogous coefficient B is not determined in this way because b'' appears nowhere in the Einstein equations. But it is constrained by eq. (13). Inserting the ansatz (15) in this equation, and taking $\omega = p/\rho$ to be constant (which is a weak restriction since p and ρ refer only to the matter and radiation), one can eventually show that

$$B = \frac{b_0}{M^3} \left(\rho + p - \Lambda(1 + \omega) \ln \left(1 + \frac{\rho}{\Lambda} \right) \right) + \mathcal{O}(A_2, \mathcal{N}_2). \quad (17)$$

and that it is consistent to take $\dot{b}_0 = 0$. Thus the scale factor of the compact dimension, although it expands inside the bulk, is strictly constant on our brane. Eq. (17) is not a complete specification for B since A_2 and $\mathcal{N}_2$ are not yet known, but in fact we will never need B for determining the Friedmann equation on our brane.

It remains to satisfy the nonsingular parts of the other Einstein equations, (9 – 12), near $y = 0$. The knowledge of A and $\mathcal{N}$ is all that is needed to specify eq. (12) at $y = 0$ because no second derivatives appear. One obtains

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}_0}{a_0} \right)^2 + \frac{\ddot{a}_0}{a_0} &= \frac{1}{36M^6}(\Lambda + \rho)(2\Lambda - \rho - 3p) + \frac{\Lambda_b}{3M^3} \\ &= \frac{\rho - 3p}{6M_p^2} - \frac{\rho(\rho + 3p)}{36M^6}, \end{aligned} \quad (18)$$

where the second equation follows from using our previous determination of Λ and Λ_b , eqs. (3–4). The leading term reproduces the usual prediction of general relativity, and the second term corresponds to the quadratic correction in eq. (5). Indeed, in light of the energy conservation law on the brane, $\dot{\rho} = -3H(\rho + p)$, which is true regardless of the extra dimension [2], (5) is the only relation consistent with (18) when $\omega = p/\rho$ is assumed to be constant.

In contrast to the new Einstein equation (12) associated with the 5th dimension, the G_{00} and G_{ii} equations (9) and (11) depend on the quadratic coefficients A_2 and $\mathcal{N}_2$ at $y = 0$, because of the presence of a'' and n'' . With two equations in two unknowns, it is always possible to find values of A_2 and $\mathcal{N}_2$ such that the resulting equations for $a_0(t)$ are consistent with (5) and (18). Therefore eqs. (9) and (11) add no new information

on the brane, although they would be necessary if one wanted to deduce the full y dependence of the solutions in the bulk.

In the above derivation, it was shown that the brane whose masses are small by the RS mechanism must have $\Lambda < 0$. Unfortunately, we already saw in eq. (5) that the brane with negative Λ must have an energy density $\rho_- \leq 0$, which is not the case in our universe. This would appear to be a serious problem for the RS idea. However, see the “Note added,” below.

The conditions (3-4) for the brane and bulk cosmological constants look strange at first, so some words of motivation are in order. Although when $\rho = 0$, $\Lambda_+ = -\Lambda_-$ on the two branes, when $\rho \neq 0$, a global solution to the Einstein equations is needed in order to derive the exact relation between Λ_+ and Λ_- when $\rho \neq 0$, since it involves all the coefficients of the expansion (15) [10]:

$$\frac{b_+(\Lambda_+ + \rho_+)}{A/2} = -\frac{b_-(\Lambda_- + \rho_-)}{A/2 + A_2 y_- + \dots} \quad (19)$$

In addition to this topological relation derived from the spacetime geometry, there is also a relation involving Λ_b . We argue that the latter is a stringent consistency condition similar to the global tadpole cancellation in string theory (see for instance [11]):

$$\frac{\sqrt{g}}{b}\Lambda_{|+} + \frac{\sqrt{g}}{b}\Lambda_{|-} + \int_{-1/2}^{1/2} dy \sqrt{g} (\Lambda_b - \frac{1}{2}M^3\mathcal{R}) = 0 \quad (20)$$

i.e. the global effective cosmological constant must vanish. In the solution of RS, this condition reduces to $\Lambda_0^2 + 6M^3\Lambda_b = 0$, which is the relation they needed to obtain a global solution to Einstein equations.

The condition (20) can be understood if the cosmological constants are viewed as an effective description of the Ramond–Ramond fields of the underlying string theory: for instance the value of the $(p+1)$ -form to which a p -brane is coupled is reinterpreted as a cosmological constant on the p -brane. The condition (20) will now be necessary to cancel the UV divergences of the string theory. The connection between the phenomenological scenario of RS and string theory has recently been examined by Verlinde [12] and his analysis concludes that the exponential dependence of the metric in the compact direction is identified with the renormalization group scale when using the AdS/CFT correspondence, which also corroborates the stringy origin of the RS mechanism.

Since the normal expansion rate of the universe is only known to have held between nucleosynthesis and the present epoch (as was stressed in reference [13]) it would be interesting if the quadratic corrections to the new Friedmann equation (5) started to become important above temperatures of several MeV. In the most natural version of the RS scenario, M and M_P are of the same order, so the corrections become important only at the Planck scale. However it is still a logical possibility to imagine that the fundamental scale M is much smaller than M_P . In this case one recovers the Arkani-Hamed *et al.* result that $M_P^2 = M^3 b_0$, which combined with the gravitational tests that restrict $b_0 \lesssim 1$ mm, gives the constraint $M > 10^8$ GeV. With such a large value of M ,

departure from normal expansion occurs only above temperatures $T \gtrsim 1$ TeV, which is not far above the electroweak scale. An intriguing possibility would be to increase the rate of expansion during the electroweak phase transition. If this occurred, standard model sphaleron interactions could easily be out of equilibrium in the broken phase [13], making electroweak baryogenesis more feasible.

We thank Emilian Dudas, Nemanja Kaloper, Guy Moore, Burt Ovrut, and Carlos Savoy for useful discussions. JC thanks the CEA Saclay theory group for their kind hospitality. As we were submitting this work, ref. [14] appeared, which reached conclusions similar to ours.

Note added: After acceptance of this work, we discovered [15] that the problem of the wrong-sign expansion rate at the second brane can be solved if the extra dimension is taken to be noncompact, as suggested by ref. [16]. Ref. [15] shows that by considering multiple intersecting branes, the whole construction can be extended to any number of extra dimensions.

References

- [1] I. Antoniadis, Phys. Lett. B246 (1990) 377; N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, Phys. Lett. B429 (1998) 263; Phys. Rev. D59 (1999) 086004; I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, Phys. Lett. B436 (1998) 257.; K.R. Dienes, E. Dudas, T. Gerghetta, Phys. Lett. B436 (1998) 55.
- [2] P. Binétruy, C. Deffayet, D. Langlois, hep-th/9905012
- [3] Related global solutions of the 5D Einstein equations recently appeared in A. Lukas, B.A. Ovrut, D. Waldram, hep-th/9711027, hep-th/9902071, N. Kaloper, A. Linde, Phys. Rev. D59 (1999), and T. Nihei, hep-ph/9905487.
- [4] N. Kaloper, hep-th/9905210.
- [5] P. Hořava, E. Witten, Nucl. Phys. B460 (1996) 506 and Nucl. Phys. B475 (1996) 94.
- [6] I. Antoniadis, M. Quirós, Phys. Lett. B392 (1997) 61; E. Dudas, C. Grojean, Nucl. Phys. B507 (1997) 553.
- [7] or possibly several branes, or some other kind of negative energy density distributed in the bulk.
- [8] L. Randall, R. Sundrum, hep-ph/9905221.
- [9] We would like to acknowledge Guy Moore for pointing out this key idea to us, before ref. [8] appeared.

- [10] For the compact slice of AdS-space corresponding to the solution of RS, b is constant and the exponential in the expression of a is limited to the linear term; in this case, the relation (19) simplifies and gives $\Lambda_+ = -\Lambda_-$.
- [11] J. Polchinski, E. Witten, Nucl. Phys. B460 (1996) 525.
- [12] H. Verlinde, hep-th/9906182. See also A. Kehagias hep-th/9906204.
- [13] M. Joyce, T. Prokopec, Phys. Rev. D57 (1998) 6022.
- [14] C. Csaki, M. Graesser, C. Kolda, J. Terning, hep-ph/9906513
- [15] J. Cline C. Grojean, G. Servant, hep-ph/9909496 (1999).
- [16] L. Randall, R. Sundrum, hep-th/9906064;
J. Lykken and L. Randall, hep-th/9908076.

Publication III

Inflating Intersecting Branes and Remarks on the Hierarchy Problem

McGill 99-30
LBNL 44307
UCB-PTH-99/45
Saclay T99/108
hep-ph/9909496

Inflating Intersecting Branes and Remarks on the Hierarchy Problem

J. Cline^a, C. Grojean^{b,c} and G. Servant^{a,d}

^a Physics Department, McGill University,
3600 University Street, Montréal, Québec, Canada H3A 2T8

^b Department of Physics, University of California, Berkeley, CA 94720

^c Theoretical Physics Group, Lawrence Berkeley National Laboratory, Berkeley, CA
94720

^d Service de Physique Théorique, CEA-Saclay
F-91191 Gif/Yvette Cedex, France

Abstract

We generalize solutions of Einstein's equations for intersecting branes in higher dimensional spacetimes to the nonstatic case, modeling an expanding universe. The relation between the Hubble rate, the brane tensions, and the bulk cosmological constant is similar to the case of a single 3-brane in a 5-dimensional spacetime. However, because the bulk inflates as well as the branes, this class of solutions suffers from Newton's constant tending toward zero on the TeV brane, where the Randall-Sundrum mechanism should solve the weak scale hierarchy problem. The strength of gravity remains constant on the Planck brane, however.

PACS: 98.80.Cq, 11.10.Kk, 11.25.Mj.

Keywords: Brane Cosmology, Extra dimensions

Although the possibility of extra spatial dimensions is an old idea, it has received more attention lately because of a new twist: perhaps our universe looks 4-dimensional not because of the smallness of the extra dimensions, but because we are trapped on a 3D slice (a 3-brane) [1–3]. This simple variation has created a wealth of potential new physics signals and hints of solutions to long-standing puzzles.

At first sight, the brane universe scenario poses a new problem: if one embeds a 3-brane with tension (energy density) σ in an empty $(4+1)$ -D spacetime, the space in the 3-brane inflates with a Hubble constant given by [4–7]

$$H^2 = \left(\frac{\kappa^2 \sigma}{6} \right)^2 \quad (1)$$

Here κ^2 is the analog of $8\pi G_N = M_P^{-2}$ (where M_P is the Planck mass) in $(4+1)$ -D gravity. The linear dependence $H \sim \sigma$ is contrary to the usual Friedmann equation which gives $H \sim \sqrt{\sigma}$. If one tries to model normal cosmology on such a brane universe by replacing the constant tension σ with an energy density ρ which decreases with the expansion, then H varies with time and is given by $1/4t$ instead of $1/2t$ in a radiation dominated era. This corresponds to a scale factor growing like $t^{1/4}$ rather than the usual $t^{1/2}$. It is likely that such a radical change to the expansion rate can be ruled out using primordial big bang nucleosynthesis [5].

However, one can to a good approximation recover the usual rate of expansion by keeping a nonzero value for the constant part of the brane tension, and canceling its inflationary effect by adding a negative cosmological constant Λ_b in the bulk (the full 5 spatial dimensions) [8,9]. Letting ρ denote the time-varying part of the energy density on the brane, eq. (1) is modified to read

$$H^2 = \frac{\kappa^4(\sigma + \rho)^2}{36} + \frac{\kappa^2 \Lambda_b}{6}. \quad (2)$$

By tuning the value of Λ_b to

$$\Lambda_b = -\kappa^2 \sigma^2 / 6, \quad (3)$$

the quadratic term in Λ gets canceled, so that the universe is static when $\rho = 0$, as expected. Further tuning σ to the value

$$\sigma = \frac{6}{\kappa^4 M_P^2}, \quad (4)$$

one finds that the leading correction to H^2 for $\rho \ll \sigma$ agrees exactly with the usual Friedmann equation. Only for $\rho \gtrsim \sigma$ does the unusual $H \sim \rho$ behavior start to reappear.

In addition to solving the problem of cosmological expansion, the relation (3) has another possible benefit: it might afford a solution to the hierarchy problem, *i.e.*, the question of why the weak scale M_W is so much smaller than M_P [3,10,11]⁽¹⁾. Randall

⁽¹⁾The question of the gauge coupling unification has also been addressed in [12]

and Sundrum noticed that the solution for the metric on the 4D space is exponentially suppressed away from the 3-brane, in the direction y of the 5th dimension:

$$\begin{aligned} ds^2 &= a^2(y) \left(-d\tau^2 + \sum_{i=1}^3 dx_i^2 \right) + b^2 dy^2; \\ a(y) &= \exp(-\kappa^2 b \Lambda |y|/6) \end{aligned} \quad (5)$$

At a given distance y_T from the brane at $y = 0$ (called the “Planck brane”), $a(y_T)$ is exponentially small. If there was another brane located at y_T , dubbed the “TeV brane,” any particles constrained to exist there would have their masses renormalized by the factor $a(y_T)$. Thus even if all mass parameters in the fundamental Lagrangian were of order M_P , physical masses at position y_T could easily be of order M_W or 1 TeV with only a moderately large value of y_T . The function $a(y)$ can be interpreted as the wave function of the graviton, showing that gravity is trapped near the brane at $y = 0$. Because of this trapping, the usual gravitational force law $F \sim 1/r^2$ is obeyed at distances $r \gg 6M^3/b\Lambda$, even if the extra dimension is infinite in size. It is not obvious whether this happy state of affairs is compatible with getting the correct rate of expansion on the brane at y_T , but we shall show that it is in fact possible to have both.

An obvious question is whether these ideas can be extended to larger numbers (N) of extra dimensions, since it is possible that qualitatively new effects might emerge. Thus far no solutions have been constructed for a single 3-brane in $N > 1$ spatial dimensions. However it is straightforward to do so for a brane with $(3 + N - 1)$ spatial dimensions (in other words, with codimension 1). Moreover, by taking the intersection of N such branes, one can single out a 3D region of space which might be identified with a universe like ours, and this kind of solution has also been constructed, in the static case [13, 14]. The static solutions manifest the phenomenon of gravitational trapping and the potential for solving the hierarchy problem analogous to the $N = 1$ case. Here we wish to consider the generalization to dynamical (expanding or contracting) solutions. We shall see that an expression similar to (2) obtains for the Hubble rate in the intersecting brane model.

To specify the solutions, we consider the case of N extra dimensions with coordinates y_i , and N orthogonally intersecting $(3 + N)$ -branes located at $y_i = 0$, respectively. The action is

$$S = \int d^4x d^N y \sqrt{|g|} \left(\frac{\mathcal{R}}{2\kappa^2} - \Lambda_b - \sum_{i=1}^N \sigma_i \delta(y_i \sqrt{g_{ii}}) \right), \quad (6)$$

where κ^2 is related to the N -dimensional gravity scale M by $\kappa^{-2} = M^{N+2}$. Similarly to ref. [13], we take the conformally flat ansatz

$$ds^2 = a^2(\tau, y_i) \left(-d\tau^2 + \sum_{i=1}^3 dx_i^2 + \sum_{j=1}^N dy_j^2 \right) \quad (7)$$

for which the Einstein tensor in $d = 4 + N$ dimensions has the form

$$G_{\mu\nu} = (N + 2) \left(a \nabla_\mu \nabla_\nu a^{-1} - \eta_{\mu\nu} \left(a \nabla^2 a^{-1} - \frac{N + 3}{2} (a \nabla a^{-1})^2 \right) \right). \quad (8)$$

The gradients are simple partial derivatives, using the Minkowski metric $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$: $\nabla^2 = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$. If the respective branes have tensions σ_i , the stress-energy tensor is given by

$$T_{\mu\nu} = -a^2 \left(\Lambda_b \eta_{\mu\nu} + \sum_{i=1}^N (\eta_{\mu\nu} - \delta_{\mu, y_i} \delta_{\nu, y_i}) \sigma_i \delta(a y_i) \right) \quad (9)$$

Each brane contribution looks like a bulk cosmological term, except in the entry corresponding to y_i which is zero for the i th brane.

A solution to the $(4 + N)$ dimensional Einstein equations, $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} = \kappa^2 T_{\mu\nu}$, is given by

$$a(\tau, y_i) = \left(-H\tau + \sum_i k_i |y_i| \right)^{-1}. \quad (10)$$

For the case $N = 1$, that is, a single 3-brane, this solution belongs to a general class of solutions constructed by ref. [15] in models that generalize the RS scenario. This solution was also found (for $N = 1$) by ref. [16].

It is easy to show that the equations are satisfied provided that

$$k_i = \frac{\kappa^2 \sigma_i}{2(N + 2)} \quad (11)$$

and the Hubble constant is given by

$$H^2 = \frac{2\kappa^2 \Lambda_b}{(N + 2)(N + 3)} + \sum_i k_i^2. \quad (12)$$

In particular, the static case where $H = 0$ is recovered if Λ_b satisfies

$$\Lambda_b = -\frac{(N + 3)}{8(N + 2)} \kappa^2 \sum_i \sigma_i^2. \quad (13)$$

One can see that this agrees with the previous result (3) in the case of one extra dimension.

Our solution differs from previous ones, such as refs. [7, 17], by allowing the extra dimensions to inflate simultaneously with the 3D universe. The inflation of the bulk causes gravity to become increasingly weaker on the TeV brane, as discussed below, so this kind of solution is not of direct interest for late-time cosmology, but might be applicable during an inflationary phase.

To see that H is indeed the Hubble parameter, one can transform from the conformal time coordinate τ to FRW time t , in which the g_{00} element of the metric is -1 : $dt = \pm a(\tau, y_i) d\tau$, $t = \pm H^{-1} \ln(a)$. This implies $a(\tau(t), y_i) = \exp(\pm Ht)$. Choosing the upper sign gives the line element

$$ds^2 = - \left(dt + H^{-1} e^{Ht} \sum_{i=1}^N k_i \text{sign}(y_i) dy_i \right)^2 + e^{2Ht} (d\vec{x}^2 + d\vec{y}^2) . \quad (14)$$

The 4D part of the metric has the usual form for an inflationary solution with expansion rate H . The range of the τ coordinate is $\tau \in (-\infty, \sum_i k_i |y_i|/H)$, corresponding to $t \in (-\infty, +\infty)$. As $\tau \rightarrow 0$ the volume of intersection region grows without bound.

To construct a realistic inflationary scenario, one should replace the constants σ_i with time-varying energy densities:

$$\sigma_i \rightarrow \sigma_i + V_i(t) \quad (15)$$

Here it is envisioned that the σ_i and Λ_b satisfy the condition (13) which ensures that the expansion will stop when the perturbations V_i settle to their minimum values, presumed to be $V_i(\infty) = 0$. The V_i should thus be regarded as potentials of scalar fields. The solution we have obtained is not exact for time-dependent V_i 's, but in the limit where they are changing adiabatically with time, it gives the correct instantaneous rate of expansion. Linearizing in these perturbations gives an expansion rate of

$$H \cong \left(\sum_i \frac{\kappa^4 \sigma_i V_i}{2(N+2)^2} \right)^{1/2} . \quad (16)$$

In our approach, V_i represents the energy per unit $(N+2)$ -D volume on the i th brane. We note that the 3-D intersection of all N branes has a vanishing $(N+2)$ -D volume in the limit of zero brane thickness, $\Delta = 0$. Since the total energy density is the sum of the individual brane contributions, the 3-D energy density in the region of intersection of all N branes is zero if $\Delta = 0$. For example in the case $N = 2$, the total energy density would be proportional to $\delta(y_1) + \delta(y_2)$, which has vanishing support at the point $y_1 = y_2 = 0$. To remedy this we must assume that $\Delta \neq 0$. Then the delta functions are replaced by top-hat functions of width Δ . In the $N = 2$ case it is clear that if V_i is the 4-D spatial energy density, then in the intersection region the 3-D energy density is $(V_1 + V_2)\Delta$. For N extra dimensions this generalizes to

$$\rho = \sum_i V_i \Delta^{N-1}, \quad (17)$$

and the usual rate of expansion, $H = (\rho/3M_P^2)^{1/2}$, can be obtained by setting

$$\sigma_i = \frac{2(N+2)^2 \Delta^{N-1}}{3\kappa^4 M_P^2} \quad (18)$$

in agreement with the value (4) in the $N = 1$ case. In terms of the fundamental gravity scale M , defined by $\kappa^2 = M^{-(2+N)}$, it seems reasonable to imagine a brane thickness on the order of $\Delta \sim M^{-1}$, so that $\sigma_i \sim M^{N+5}/M_P^2$. This construction leaves unanswered the question of why the matter we see in our universe, if the latter is the intersection of several branes, is constrained to stay in that region. The problem obviously does not arise in nonintersecting brane scenarios. For instance, in the case of one extra dimension compactified on $S^1/\mathbb{Z}_2$, the two branes localized on the fixed points do not interact provided they correspond to different gauge groups. The standard model resides on the positive tension brane, whose matter is neutral under the hidden sector of the other, negative tension brane. However in the present proposal, for $N > 1$ matter lives in higher $(N+2)$ -dimensional branes. One is left not only with the question of how the matter which we see is prevented from moving out of the intersection point in a direction along one of the branes, but also why it does not seem to interact with similar matter in the branes but located away from the intersection point.

We have argued that an observer at the intersection of N branes in $4+N$ dimensions will experience a rate of cosmological expansion in accord with the usual Friedmann equation, $H \propto \sqrt{V_T}$, provided that the conditions (18), (13) are satisfied, and that the apparent 3D energy density is small compared to that coming from the brane tensions, $\rho \ll \sigma_i \Delta^{N-1}$. However for this observer there is no immediate solution to the weak scale hierarchy problem. Only for a 3-brane which is located some distance away from the intersection region are masses suppressed by the geometrical factor $a(y_i)$. A potential problem is whether the Hubble rate will be correct when measured on this “TeV brane,” which presumably should have a smaller tension than the “Planck brane” intersection region, so as not to significantly perturb the geometry induced by the Planck brane. One might expect the expansion of the universe to be controlled by the large energy density on the Planck brane, rather than the small one on the TeV brane. An observer on the latter might find his universe expanding at a rate that was not directly correlated with the local energy density.

To investigate this question we will consider the simplest case, that of $N = 1$. The extension of our previous solution to incorporate a Planck brane and a TeV brane, having respective positions $y = y_P$, $y = y_T$ and tensions σ_P , σ_T , is

$$a(\tau, y) = \begin{cases} -H\tau + k_P|y - y_P|, & y < y_T \\ -H\tau + k_T|y - y_T| + k_P|y_P - y_T|, & y \geq y_T \end{cases} \quad (19)$$

This is a generalization of the static solution found in ref. [17]. By computing the $G_{\mu\nu}$ for this metric one finds that it solves the Einstein equations if

$$k_P = \frac{\kappa^2}{6}\sigma_P; \quad k_T = \frac{\kappa^2}{6}(\sigma_P + 2\sigma_T), \quad (20)$$

and if Λ_b changes discontinuously at the interface provided by the TeV brane,

$$\Lambda_T - \Lambda_P \equiv \Lambda_b \Big|_{y=y_T-\epsilon}^{y=y_T+\epsilon} = -\frac{2\kappa^2}{3}\sigma_T(\sigma_T + \sigma_P) \quad (21)$$

The Hubble rate is given by

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{\kappa^4 \sigma_P^2}{36} + \frac{\kappa^2 \Lambda_P}{6} \\ &= \frac{\kappa^4 (\sigma_P + 2\sigma_T)^2}{36} + \frac{\kappa^2 \Lambda_T}{6} \end{aligned} \quad (22)$$

Let us first construct the static configuration where $H = 0$. The term $H\tau$ can be replaced by a constant in eq. (19) to maintain the regularity of the solutions. The bulk cosmological constants in the two regions $y < y_T$ and $y > y_T$ are related to the brane tensions by

$$\begin{aligned} \Lambda_P &= -\frac{\kappa^2}{6} \sigma_P^2; \\ \Lambda_T &= -\frac{\kappa^2}{6} (\sigma_P + 2\sigma_T)^2. \end{aligned} \quad (23)$$

To get expanding solutions, we now perturb around the static case by adding small energy densities V_P and V_T to the branes, and linearizing. Eq. (22) becomes

$$H^2 \cong \frac{\kappa^4}{18} \sigma_P V_P \quad (24)$$

$$\cong \frac{\kappa^4}{18} (\sigma_P + 2\sigma_T) (V_P + 2V_T) \quad (25)$$

The fact that eqs. (24) and (25) must agree implies that the perturbations on the two branes are proportional,

$$V_T = -\frac{\sigma_T}{2\sigma_T + \sigma_P} V_P \cong -\frac{\sigma_T}{\sigma_P} V_P, \quad (26)$$

so that an observer on the TeV brane would relate the expansion rate to his local energy density by

$$H^2 = -\frac{\kappa^4}{18} \frac{\sigma_P}{\sigma_T} (2\sigma_T + \sigma_P) V_T \cong -\frac{\kappa^4}{18} \frac{\sigma_P^2}{\sigma_T} V_T \quad (27)$$

Now the Planck brane tension σ_P must be positive to ensure that $a(y)$ is decreasing away from $y = y_P$, as is needed to solve the hierarchy problem; then eq. (24) implies $V_P > 0$ as well. From (27) it follows that σ_T and V_T must have the opposite sign. This is an improvement over the original Randall-Sundrum proposal, where the extra dimension being compactified on a circle led to the topological restriction that $\sigma_T = -\sigma_P$, hence the conclusion that V_T had to be negative. In the present realization we can take σ_T negative but smaller in magnitude than $\sigma_P/2$, leading to the conclusion that $V_T > 0$. Since we would like V_T to represent the energy driving cosmological expansion as seen on the TeV brane, this is encouraging.

In the above construction, we observe that it is not after all necessary to assume that $\sigma_T \ll \sigma_P$, as might be suggested by the names “TeV” and “Planck” for the two

branes. All that is really needed is to have $-\sigma_P/2 < \sigma_T < 0$. As long as this is true, all the quantities σ_P , σ_T , Λ_P and Λ_T can be of order M_P to the appropriate power. Then the expansion rate goes like $H \sim \sqrt{V_i}/M_P$ in terms of the excess energy density on either brane, as desired. Moreover it looks straightforward to generalize this construction to higher dimensions. Then different N -dimensional hypercubic regions would have different values of the bulk cosmological constant, changing discontinuously at the interfaces where the analogues of the TeV brane are located.

In the original version [2] of large extra dimensions, inflation of the latter was associated with time variation of Newton's constant, since the largeness of the Planck mass was linked to the size of the extra dimensions. It can be seen that inflation of the bulk actually has no effect on Newton's constant on the Planck brane, but it does cause the strength of gravity to decrease on the TeV brane. Ref. [13] showed that the relationship between the fundamental gravity scale and the observed Planck mass is

$$M_P^2 = M^{N+2} \int d^N y a^{2+N}(y_i) \quad (28)$$

in the static case. This comes from integrating $\sqrt{g}\mathcal{R}$ over the extra dimensions to find the effective 4D action, and using the scaling property of the Ricci scalar under conformal transformations of the metric. Applying this to our dynamical solution gives

$$M_P^2 = \frac{2^N M^{N+2}}{(N+1)! \prod_i k_i} a^2(\tau, 0). \quad (29)$$

Recall that $a^2(\tau, 0) = (H\tau)^{-2} = \exp(2Ht)$. Let us now compare this to the physical mass of a particle trapped on a brane located at position $y = y_T$ in the bulk, using the case of $N = 1$ extra dimensions to illustrate. As first noted by Randall and Sundrum [3], the physical mass (m_p) of a particle on such a brane is related to the mass parameter in the Lagrangian, m_0 , by $m_p = a(\tau, y_T)m_0$. Therefore the ratio of particle masses on the TeV brane to the Planck mass scales like

$$\frac{m_p}{M_P} \sim \frac{a(\tau, y_T)}{a(\tau, 0)} = \frac{1}{(1 - k|y_T|/H\tau)} \quad (30)$$

which tends to zero as the universe expands (τ approaches zero from below). Translated to FRW time, this says that $m_p/M_P \sim e^{-Ht} \sim 1/a(t)$. If such a redshifting of the strength of gravity were occurring today, it would have been observed by lunar laser ranging experiments [20], which obtain the much more stringent limit $\dot{G}/G < (1.25 \times 10^{11} \text{y})^{-1}$. That is, $\dot{G}/G$ is observed to be much less than the present Hubble constant, in contradiction to the kind of time-dependence given by (30). On the other hand at the Planck brane, $y = 0$, (30) is constant, so time variation of Newton's constant would not be observed there.

One possibly annoying feature of our construction is the negative tension attributed to the TeV brane. Such a brane might be unstable to crinkling up into something with an infinite volume since, in the absence of some stabilizing mechanism, this would minimize the energy. However in a superstring context such a negative brane could

be realized at an orientifold, which removes the unstable mode [18]. It is also possible to arrange for positive tension TeV branes; as pointed out in ref. [19], in solutions with several parallel branes in $N = 1$, the signs of the tensions alternate. Thus one could create a positive tension TeV brane if desired. However a negative tension brane between the TeV and Planck branes is still required, so it is not clear whether this would be an improvement.

To demonstrate this is a straightforward generalization of our previous solution. If we add a third brane at $y = y_{T'} > y_T$ with tension $\sigma_{T'}$, then we have the previous relations, and in addition

$$\begin{aligned} k_{T'} &= \frac{\kappa^2}{6}(\sigma_P + 2(\sigma_T + \sigma_{T'})), \\ \Lambda_{T'} &= -\frac{\kappa^2}{6}(\sigma_P + 2(\sigma_T + \sigma_{T'}))^2, \end{aligned} \quad (31)$$

in order to maintain the static condition. If we now add excess energies V_P , V_T and $V_{T'}$ to the respective branes, it is straightforward to show that in terms of $V_{T'}$ the expansion rate is given by

$$H^2 = -\frac{\kappa^4}{18} \frac{1}{\sigma_{T'}} (2\sigma_T + \sigma_P) (2(\sigma_T + \sigma_{T'}) + \sigma_P) V_{T'} \quad (32)$$

If $\sigma_{T'} > 0$ and $V_{T'} > 0$, then σ_T must be in the range $-\sigma_P/2 - \sigma_{T'} < \sigma_T < -\sigma_P/2$, showing that the middle brane has negative tension, although the outer ones have positive tension.

A final mystery is the question of why the time-dependent parts of the energy densities of the two branes should be proportional to each other. A priori one would think that they are parallel universes which could have arbitrarily different sources of stress-energy. Whether this is an artifact of having a simple ansatz for the solutions, or there is some deeper reason, is not obvious (but see “Note Added,” below).

In summary, we have found expanding global solutions for a $(4 + N)$ dimensional universe, in which the intersection of N orthogonal branes of codimension one plays the role of a 4D universe. The rate of expansion can be made to agree with the Friedmann equation if the brane tensions σ are balanced against a negative bulk cosmological constant Λ_b in a particular way. Both quantities can be of order M_P to the appropriate power, so only a tuning of their relative values is necessary; the magnitudes of Λ_b and σ are natural. An energy density ρ which is in excess of these particular values for the brane tensions is what appears to drive the expansion of the universe, at the expected rate $H \sim \sqrt{\rho}/M_P$. Furthermore it is possible to introduce extra branes whose physical masses are exponentially suppressed by the distance from the primary brane, thereby possibly solving the weak scale hierarchy problem on the extra branes, while maintaining the correct rate of cosmological expansion. However, this combination of two virtues seems to come always at the expense of introducing some negative tension branes. Our solutions are not suitable for late-time cosmology on the TeV brane because the inflating bulk causes gravity to decouple there. On the Planck brane this

is not a problem, but new long-range forces due to exchange of the massless excitation associated with the expansion of the bulk would be [21].

Note Added: After this paper was completed, ref. [22] observed that the fine-tuned relationship between energy densities on the two branes is always a consequence of demanding a static bulk, even in the absence of a mechanism for stabilizing the bulk. It is interesting to note that such a relation is also required in our solutions, even though the bulk is not stable, but inflating. In our case, the relationship must therefore come from the coincidence that the bulk is inflating at exactly the same rate as the branes.

Acknowledgements

C.G. is grateful to the financial support of the Service de Physique Théorique, CEA Saclay where this work has been initiated. This work was supported in part by the Director, Office of Energy Research, Office of High Energy and Nuclear Physics, Division of High Energy Physics of the U.S. Department of Energy under Contract DE-AC03-76SF00098 and in part by the National Science Foundation under grants PHY-95-14797.

References

- [1] V.A. Rubakov and M.E. Shaposhnikov, *Phys. Lett.* **B125** (1983) 136;
M. Visser, *Phys. Lett.* **B159** (1985) 22;
G. Dvali and M. Shifman, *Phys. Lett.* **B396** (1997) 64;
M. Gogberashvili, *Mod. Phys. Lett.* **A14** (1999) 2025 and hep-ph/9908347
- [2] I. Antoniadis, *Phys. Lett.* **B246** (1990) 377;
I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, *Phys. Lett.* **B436** (1998) 257;
K.R. Dienes, E. Dudas, T. Gherghetta, *Phys. Lett.* **B436** (1998) 55.
- [3] L. Randall and R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 3370 and hep-ph/9906064.
- [4] A. Lukas, B.A. Ovrut, D. Waldram, *Phys. Rev.* **D60** (1999) 086001.
- [5] P. Binétruy, C. Deffayet, D. Langlois, hep-th/9905012.
- [6] N. Kaloper, *Phys. Rev.* **D60** (1999) 123506.
- [7] T. Nihei, *Phys. Lett.* **B465** (1999) 81.
- [8] C. Csáki, M. Graesser, C. Kolda, J. Terning, *Phys. Lett.* **B462** (1999) 34.
- [9] J. Cline C. Grojean, G. Servant, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 4245.
- [10] M. Gogberashvili, hep-ph/9812296.

- [11] J. Lykken and L. Randall, hep-th/9908076.
- [12] K.R. Dienes, E. Dudas and T. Gherghetta, hep-ph/9908530.
- [13] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali and N. Kaloper, hep-th/9907209.
- [14] C. Csáki and Y. Shirman, hep-th/9908186;
A.E. Nelson, hep-th/9909001.
- [15] A. Chamblin and H.S. Reall, hep-th/9903225
- [16] H.B. Kim and H.D. Kim, hep-th/9909053.
- [17] H. Hatanaka, M. Sakamoto, M. Tachibana and K. Takenaga, hep-th/9909076.
- [18] H. Verlinde, hep-th/9906182;
A. Kehagias, hep-th/9906204.
- [19] I. Oda, hep-th/9908104.
- [20] J.G. Williams, X.X. Newhall and J.O. Dickey, Phys. Rev. **D53**, 6730 (1996).
- [21] W. Goldberger and M. Wise, hep-ph/9911457.
- [22] C. Csáki, M. Graesser, L. Randall, J. Terning, hep-ph/9911406.

Publication IV

Supergravity Inspired Warped Compactifications and Effective Cosmological Constants

LBNL 44356
 UCB-PTH-99/49
 McGill 99-32
 Saclay T99/112
 hep-th/9910081

Supergravity Inspired Warped Compactifications and Effective Cosmological Constants

C. Grojean^{a,b}, J. Cline^c and G. Servant^d

^a Department of Physics, University of California, Berkeley, CA 94720

^b Theoretical Physics Group, Lawrence Berkeley National Laboratory, Berkeley, CA 94720

^c Physics Department, McGill University, Montréal, Québec, Canada H3A 2T8

^d CEA-SACLAY, Service de Physique Théorique, F-91191 Gif-sur-Yvette, France

Abstract

We propose a supergravity derivation of the Randall–Sundrum action as an effective description of the dynamics of a brane coupled to the bulk through gravity only. The cosmological constants in the bulk and on the brane, which appear at the classical level when solving the supergravity equations of motion, are related to physical quantities like the brane electric charge and thus inherit some of their physical properties. The most appealing property is their quantization: in $d_\perp$ extra dimensions, Λ_{brane} goes like $1/N$ and Λ_{bulk} like $N^{2/(d_\perp-2)}$. This supergravity origin also explains the apparent fine-tuning required in the Randall–Sundrum scenario. In our approach, the cosmological constants are derived parameters and cannot be chosen arbitrarily; instead they are determined by the underlying supersymmetric Lagrangian. D3-branes of type *IIB* superstring theory provide an explicit realization of our construction.

PACS: 04.50.+h 04.65.+e 11.10.Kl 98.80.Cq

Keywords: brane universe, cosmological constant, gauge hierarchy.

1 Introduction

The coexistence of two hierarchical scales in particle physics is probably the most challenging puzzle to solve before hoping to construct a quantum theory of gravity. When the Schwarzschild radius ($R_{\text{sch}} = 2\mathcal{G}_N m/c^2$) of a system of mass m becomes of the same order as its Compton length ($\Lambda_C = \hbar/mc$), a quantum mechanical extension of general relativity is surely needed. Therefore the natural scale of quantum gravity is the Planck mass, $\sqrt{\hbar c^5/\mathcal{G}_N} \sim 10^{19}$ GeV. Understanding how, in such a theory, the tiny electroweak scale observed in experimental particle physics can arise and be stabilized against radiative corrections constitutes the so-called ‘gauge hierarchy problem’. In low energy supersymmetry [1], this vast disparity in scales can be protected from quantum destabilization. However a more fundamental explanation is certainly to be found in string theory and its latest developments. String theory relates the string scale to two other fundamental scales, namely the GUT scale connected to gauge interactions, and the Planck scale connected to the gravitational interaction. The link between these two is the geometry of extra dimensions, which can lower both scales [2] down to the TeV range [3] and thus partially answer the gauge hierarchy problem, or at least translate it into geometrical terms.

Subsequent to studies of thin shells in general relativity [4] and their revival in a M -theory context [5–7], Randall and Sundrum (RS) have recently proposed [8] a new phenomenological mechanism for solving the gauge hierarchy problem, without requiring the extra dimension to be particularly large or small—in fact it could be non-compact. An exponential hierarchy is generated by the localization of gravity near a self-gravitating brane with positive tension, obtained by solving Einstein equations. The solution is a nonfactorizable metric, *i.e.*, a metric with an exponentially decaying warp factor [9] along the single extra dimension. Restricting the Standard Model to a second parallel brane with negative tension at some distance in this transverse dimension, the electroweak scale in our world then follows from a redshifting of the Planck scale on the second brane. Since the exponential suppression by the redshift factor does not require an unnaturally large interbrane separation, the hierarchy problem can be explained without fine tuning, and without requiring any special size for the extra dimensions.

The cosmological implications of this scenario have been studied [10, 11], with emphasis on the danger of placing the Standard Model on a brane with negative tension since, for instance, the Friedmann equation governing the expansion of the universe appears with a wrong sign. A similar difficulty is also faced [12] when trying to reproduce the unification of gauge couplings. The original scenario can be modified [8, 12, 13] by maximizing the warp factor on the Standard Model brane, which can be achieved if its tension is taken positive. The two former problems are overcome but the electroweak scale seems now difficult to accommodate. More recently it has been shown that the correct cosmological expansion can be obtained if the second brane tension is negative, but not too much so [14]. Thus the RS scenario remains attractive, especially with regard to the possibility of an infinite extra dimension probed only by gravity. It is appealing that, despite a continuous Kaluza–Klein spectrum without any mass gap,

Newton’s law of gravity is still reproduced [8, 13, 15] within the current experimental precision. Ref. [16] also proposed explicit models where a mass gap separates the ‘massless graviton’ from its KK excitations while the Yukawa type deviations from the 4D Newton law remain compatible with experimental bounds.

Although the gravity localization mechanism seems to be specific to codimension one branes, several works [15, 17] have managed to extend it by considering many intersecting codimension one branes.⁽¹⁾ Oda and Hatanaka *et al.* [19] also obtain solutions with a more involved content of branes with a single one extra-dimension. In this context also, cosmological expansion can be reconciled with the solution to the weak scale hierarchy problem [14].

Undoubtedly, the localization of gravity by the RS mechanism has rich phenomenological and cosmological consequences [10–15, 19–22]; but at the present stage it seems lacking in generality, and it suffers from apparently *ad hoc* fine-tunings required between the cosmological constants in the bulk and on the branes, in order to obtain a solution to Einstein equations. Verlinde [23] has reexamined the RS scenario in superstring language and shown that the warp factor can be interpreted as a renormalization group scaling. In the context of the AdS/CFT correspondence, the extra dimension plays the role of the energy scale.

In this paper, we offer a derivation of the effective action used by RS, starting from a more fundamental, string-inspired origin. Recent works [5, 7, 24, 25] have studied the dynamics of a supersymmetric brane-universe; here we propose an explicit embedding of the RS model in supergravity theories and examine its physical implications, following refs. [16, 26], which have previously addressed this question at a more formal level. Our starting point will be the bosonic action of supergravity theories in ten or eleven dimensions. We emphasize that, instead of neglecting various fields specific to these actions like the dilaton and some n -differential forms, taking them into account can lead to an effective description in terms of cosmological constants. Using p -brane solutions, we construct such a description for codimension one branes, which allows us to identify the effective cosmological constants with physical quantities like the electric charge carried by the brane and its mass density on the worldvolume. Since the electric charge of a p -brane obeys a generalized Dirac quantization rule, we are led to the interesting conclusion that the cosmological constants are also quantized.

The advantage of this approach is that we derive the stress-energy tensor $T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$, which is needed to solve the Einstein equations, starting from an action for fundamental fields, rather than putting it in by hand. Thus our $T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ is on the same footing as the Einstein tensor itself, from the point of view of fundamentality, since it follows from a symmetry principle: namely, supersymmetry fixes the form of $T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ and constrains the values of the couplings appearing therein. Moreover we are able to generalize the procedure to higher codimension brane-universes (*e.g.*, 3-branes embedded in more than one extra dimension), providing some of the first such solutions. In this case the bulk energy is no longer a cosmological “constant,” but depends on the distance from the brane.

⁽¹⁾See also ref. [18] for a recent construction of warped compactification in two transverse dimensions.

2 Brane cosmological constant as a warp in an anti-de Sitter bulk

We begin with a review of the model studied by Randall and Sundrum [8]. This model is a particular case of the ones proposed by Chamblin and Reall [6], in which a scalar field was coupling a dynamical brane to an embedding bulk. Here we consider the restricted scenario of a static brane embedded in a spacetime curved by a bulk cosmological constant Λ_b . The physics of this model is governed by the following action:

$$\mathcal{S}_{RS} = \int d^{p+1}x d^{d_\perp}y \sqrt{|g|} \left(\frac{\mathcal{R}}{2\kappa^2} - \Lambda_b - \Lambda \delta^{d_\perp}(\sqrt{|g_\perp|} y) \right), \quad (1)$$

where $y^I = 0$ is the location of the brane in the transverse (extra dimensional) subspace and $g_\perp$ is the determinant of the metric, assumed to be factorizable, in this subspace. The Einstein equations derived from (1) when the transverse space is flat are (Greek indices denote longitudinal coordinates, $\mu = 0 \dots p-1$ and Latin indices are coordinates transverse to the brane, $I = 1 \dots d_\perp$):

$$G_{\mu\nu} = -\kappa^2 \left(\Lambda_b + \Lambda \delta^{d_\perp}(\sqrt{|g_\perp|} y) \right) g_{\mu\nu}; \quad (2)$$

$$G_{IJ} = -\kappa^2 \Lambda_b g_{IJ}. \quad (3)$$

Randall and Sundrum solved these equations in the case of a codimension one brane. With the ansatz

$$ds^2 = a^2(y) dx^\mu \otimes dx^\nu \eta_{\mu\nu} + b^2(y) dy \otimes dy, \quad (4)$$

the Einstein equations reduce to

$$p \frac{a''}{a} + \frac{p(p-1)}{2} \left(\frac{a'}{a} \right)^2 - p \frac{a'}{a} \frac{b'}{b} = -\kappa^2 (\Lambda_b + \Lambda \delta(|b|y)) b^2; \quad (5)$$

$$\frac{p(p+1)}{2} \left(\frac{a'}{a} \right)^2 = -\kappa^2 \Lambda_b b^2, \quad (6)$$

where primes denote derivatives with respect to the transverse coordinate y . For this system of equations to admit a solution that matches the singular terms, a fine-tuning between Λ_b and Λ is necessary:

$$\Lambda_b = -\frac{p+1}{8p} \kappa^2 \Lambda^2. \quad (7)$$

A general solution then takes the form:

$$a(y) = f(|y|) \quad \text{and} \quad b(y) = \mathcal{N} \frac{f'(|y|)}{f(|y|)}, \quad (8)$$

where f is a regular function and the constant $\mathcal{N}$ is related to the brane cosmological constant by: $|\mathcal{N}| = -2p\epsilon/(\kappa^2\Lambda)$, ϵ being the sign of $f'(0)/f(0)$. A particular class of solution that will play an important role in our analysis corresponds to:

$$a(y) = (l + |y|/R)^{n_a} \quad \text{and} \quad b(y) = \frac{n_a \mathcal{N} R^{-1}}{l + |y|/R}, \quad (9)$$

where R and l are two positive constants. An appropriate change of coordinates brings this solution to the form proposed by Randall and Sundrum [8]: defining $X^\mu = l^{n_a} x^\mu$ and $Y = \text{sgn}(y)n_a \mathcal{N} \ln(1 + |y|/(Rl))$, the metric reads:

$$ds^2 = e^{2 \text{sgn}(n_a)|Y/\mathcal{N}|} dX^2 + dY^2. \quad (10)$$

If the brane located at the origin is identified as the “Planck brane” of Lykken–Randall [13], an electroweak scale will be generated on the “TeV brane” if and only if the power n_a is negative, which corresponds to a positive cosmological constant on the Planck brane.⁽²⁾ Another motivation for requiring $n_a < 0$ comes from computing the four-dimensional effective Planck mass, $M_{Pl}^2 = M^3 \int dy a^2 |b|$, which is finite for $n_a < 0$ but diverges for $n_a > 0$.

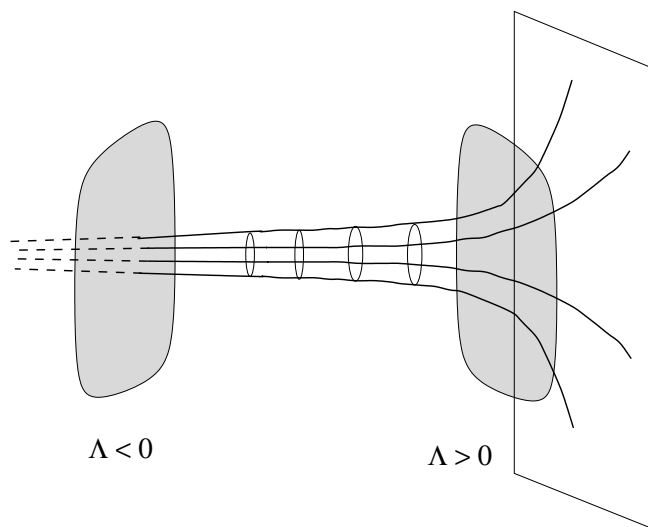


Figure 1. The boundary of an anti-de Sitter of dimension $p+2$ space is topologically $S^1 \times S^p$. In the system of coordinates x^μ and r , this boundary is located at $r = 0$ and $r = \infty$: the piece at infinity is a $p+1$ -dimensional Minkowskian space, while the horizon at $r = 0$ corresponds to the union of a point and $\mathbb{R} \times S^p$. A codimension one brane embedded in this AdS space acts as a warp in the sense that it cuts a part of the bulk: a brane with a positive cosmological constant cuts the vicinity of the boundary located at the infinity, while a brane with a negative cosmological constant removes the horizon at the origin.

⁽²⁾ This connection between the signs of n_a and Λ is specific to one transverse dimension. In section 4, we will see that we can have $n_a > 0$ whereas $\Lambda > 0$. In any case, the discussion about the hierarchy problem deals with the sign of n_a only.

We can make another diffeomorphism that clarifies the geometry of the solution. Defining $r = R_0(l + |y|/R)^{n_a}$, with $R_0 = |\mathcal{N}R|$, we now obtain:

$$ds^2 = \left(\frac{r}{R_0}\right)^2 dx^2 + \left(\frac{R_0}{r}\right)^2 dr^2, \quad (11)$$

where we see that the geometry of the bulk corresponds to an anti-de Sitter space of radius R_0 , or at least a slice of an anti-de Sitter space, since the variable r ranges only over a part of $\mathbb{R}$. Indeed, for $n_a > 0$, the range of variation of r is restricted to $[l^{n_a}, +\infty)$, while for $n_a < 0$ this range becomes $[0, l^{n_a}]$. Although in both cases the whole AdS space is covered in the limit $l \rightarrow 0$, it is interesting to note which part is cut when $l \neq 0$. As we will argue in the appendix, the boundary of an anti-de Sitter space of dimension $p + 2$ space is topologically $S^1 \times S^p$, and in the system of coordinates x^μ and r , this boundary is located at $r = 0$ and $r = \infty$: the piece at infinity is a $p + 1$ -dimensional Minkowskian space, while the horizon at $r = 0$ corresponds to the union of a point and $\mathbb{R} \times S^p$. So the $n_a < 0$ case, which corresponds to a positive cosmological constant Λ on the brane, removes the part at infinity, while the $n_a > 0$ case, *i.e.* $\Lambda < 0$, cuts the horizon at the origin. Note that in the AdS/CFT correspondence [27], a superconformal theory describes the dynamics of a brane near the horizon of an AdS space while this dynamics should become free near infinity [28].

As presented, the model studied by Randall and Sundrum leaves one wondering whether it can be derived from some more fundamental starting point. In particular, the *ad hoc* fine-tuning between the cosmological constants is rather mysterious and begs for a better understanding. One suggestion is that this relation might arise from the requirement that tadpole amplitudes are zero in the underlying string theory [11]. (See also ref. [29] for recent progress in this direction). Here we will see the cosmological constants as effective parameters which cannot be chosen arbitrarily, so the fine-tuning problem is ameliorated. The aim of this work is to motivate the RS model from a supersymmetry/superstring framework.

3 Effective cosmological constants from dynamics of codimension one branes

In this section, we would like to show that the theory derived from the action (1) can be seen as an effective description of a brane of codimension one, *i.e.*, of an extended object with p spatial dimensions embedded in a $(p + 2)$ dimensional spacetime.

The dynamics of an object extended in p spatial directions is governed by the generalization of the Nambu–Goto action⁽³⁾ [30]:

$$\mathcal{S}_{NG} = -M_b^{p+1} \int d^{p+1}\xi \sqrt{\left| \det \left(\frac{\partial X^{\hat{\mu}}}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^{\hat{\nu}}}{\partial \xi^b} g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \right) \right|}, \quad (1)$$

⁽³⁾Concerning the indices, our conventions will be the following: hatted Greek indices are spacetime indices ($\hat{\mu} = 0 \dots D - 1$) while Latin indices are worldvolume indices ($a = 0 \dots p$).

where $X^{\hat{\mu}}(\xi^a)$ are the coordinates in the embedding spacetime of a point on the brane characterized by its worldvolume coordinates ξ^a ; M_b is the scale mass in so-called “ p -brane units” which is simply related to the Planck scale, M , in the embedding spacetime; see below eq. (5). This action is known [31] to be equivalent to:

$$\mathcal{S}_P = M_b^{p+1} \int d^{p+1}\xi \left(-\frac{1}{2} \sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \partial_a X^{\hat{\mu}} \partial_b X_{\hat{\mu}} + \frac{p-1}{2} \sqrt{|\gamma|} \right), \quad (2)$$

where γ_{ab} is an auxiliary field that gives the metric on the worldvolume.

Superbranes have been constructed [32] as classical solutions of supergravity theories in ten or eleven dimensions: they are BPS objects, since they preserve half of the supersymmetries; they have a Poincaré invariance on their worldvolume universe and also a rotational invariance in the transverse space. A p -brane is therefore coupled to the low-energy effective theory of superstrings. Below the fundamental energy scale, identified as the energy of the first massive excitations of the string, the theory can be described by supergravity theories whose bosonic spectrum contains the metric, a scalar field (the dilaton) and numerous differential forms. The bosonic effective action, in supergravity units, takes the general form ($\kappa^2 = M^{2-D}$):

$$\mathcal{S}_{eff} = \int d^D x \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2\kappa^2} \mathcal{R} - \frac{1}{2} \partial_{\hat{\mu}} \Phi \partial^{\hat{\mu}} \Phi - \frac{1}{(p+2)!} e^{\alpha_p \Phi} F_{\hat{\sigma}_1 \dots \hat{\sigma}_{p+2}} F^{\hat{\sigma}_1 \dots \hat{\sigma}_{p+2}} \right), \quad (3)$$

where $F_{\hat{\mu}_1 \dots \hat{\mu}_{p+2}} = (p+2) \partial_{[\hat{\mu}_1} A_{\hat{\mu}_2 \dots \hat{\mu}_{p+2}]}$ is the field strength of the $(p+1)$ -differential form A , whose coupling to the dilaton is measured by the coefficient α_p . The coefficient α_p is explicitly determined by a string computation: the coupling of the dilaton to differential forms from the Ramond-Ramond sector appears at one loop and thus $\alpha_p^{RR} = (3-p)/2$ in supergravity units, while the Neveu-Schwarz–Neveu-Schwarz two-form couples at tree level, so $\alpha_1^{NS} = -1$. In some cases, we can also add a Chern–Simons term ($A \wedge F \wedge F$) to the action, but it does not have any effect on the classical solutions.

The p -brane couples to a $(p+1)$ -differential form, which results in the addition of a Wess–Zumino term to the free action (2):

$$\mathcal{S}_P = M_b^{p+1} \int d^{p+1}\xi \left(-\frac{1}{2} \sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \partial_a X^{\hat{\mu}} \partial_b X_{\hat{\mu}} g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(X) e^{\beta_p \Phi} + \frac{p-1}{2} \sqrt{|\gamma|} \right. \\ \left. + \frac{\mathcal{A}_{WZ}}{(p+1)!} \epsilon^{a_1 \dots a_{p+1}} \partial_{a_1} X^{\hat{\mu}_1} \dots \partial_{a_{p+1}} X^{\hat{\mu}_{p+1}} A_{\hat{\mu}_1 \dots \hat{\mu}_{p+1}} \right). \quad (4)$$

The functions $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ and $e^{\beta_p \Phi}$ implicitly depend on worldvolume coordinates ξ through their dependence in the embedding coordinates X . The coefficient β_p defines the “ p -brane units;” it is fixed [33] by requiring the same scaling behavior for $\mathcal{S}_{eff}$ and $\mathcal{S}_P$, which leads to

$$\beta_p = -\frac{\alpha_p}{p+1}. \quad (5)$$

The relation between M_b and M then follows from the value of this coupling to the dilaton: $M_b = e^{\beta \phi_{\infty}/(p+1)} M$, ϕ_{∞} being the vacuum expectation value of the dilaton.

To proceed, we must now relax some of the constraints imposed by supersymmetry, while still maintaining the form of the action. For example in string theories, the values of p and D are related to one another in order to have supersymmetry on the worldvolume universe [34]. Also, as just mentioned, the coupling to the dilaton is fixed. By relaxing these constraints, we give up any claim that the following construction is a direct consequence of string theory. On the other hand it might be hoped that our results will persist in a realistic low energy limit of string theory, which includes the effects of supersymmetry breaking. In what follows, we will elucidate how the various fields, which play a crucial role for the existence of branes in supergravity, can give rise to an effective stress-energy tensor which resembles the cosmological constant terms needed for the Randall–Sundrum scenario.

The equations of motion derived from $\mathcal{S}_{eff} + \mathcal{S}_P$ are

$$G_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \kappa^2 \partial_{\hat{\mu}} \Phi \partial_{\hat{\nu}} \Phi + \frac{2\kappa^2}{(p+1)!} e^{\alpha_p \Phi} F_{\hat{\mu}\hat{\sigma}_1 \dots \hat{\sigma}_{p+1}} F_{\hat{\nu}}^{\hat{\sigma}_1 \dots \hat{\sigma}_{p+1}} \\ + \frac{1}{2} \left(-\kappa^2 \partial_{\hat{\sigma}} \Phi \partial^{\hat{\sigma}} \Phi - \frac{2\kappa^2}{(p+2)!} e^{\alpha_p \Phi} F_{\hat{\sigma}_1 \dots \hat{\sigma}_{p+2}} F^{\hat{\sigma}_1 \dots \hat{\sigma}_{p+2}} \right) g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + T_{\hat{\mu}\hat{\nu}} ; \quad (6)$$

$$D_{\hat{\mu}} D^{\hat{\mu}} \Phi = \frac{\alpha_p}{(p+2)!} e^{\alpha_p \Phi} F_{\hat{\sigma}_1 \dots \hat{\sigma}_{p+2}} F^{\hat{\sigma}_1 \dots \hat{\sigma}_{p+2}} + T_{\Phi} ; \quad (7)$$

$$\partial_{\hat{\mu}_0} \left(\sqrt{|g|} e^{\alpha_p \Phi} F^{\hat{\mu}_0 \dots \hat{\mu}_{p+1}} \right) = J^{\hat{\mu}_1 \dots \hat{\mu}_{p+1}} ; \quad (8)$$

$$\gamma_{ab} = \partial_a X^{\hat{\mu}} \partial_b X^{\hat{\nu}} g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} e^{\beta_p \Phi} ; \quad (9)$$

$$\partial_a \left(\sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \partial_b X^{\hat{\nu}} g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} e^{\beta_p \Phi} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \partial_a X^{\hat{\sigma}_1} \partial_b X^{\hat{\sigma}_2} \partial_{\hat{\mu}} (g_{\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2} e^{\beta_p \Phi}) \\ - \frac{\mathcal{A}_{WZ}}{(p+1)!} \epsilon^{a_1 \dots a_{p+1}} \partial_{a_1} X^{\hat{\sigma}_1} \dots \partial_{a_{p+1}} X^{\hat{\sigma}_{p+1}} F_{\hat{\mu}\hat{\sigma}_1 \dots \hat{\sigma}_{p+1}} . \quad (10)$$

The stress-energy tensor $T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ of the brane is given by

$$T_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = -\frac{M^{p+1}}{\kappa^2} \int d^{p+1} \xi \sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \partial_a X^{\hat{\mu}'} \partial_b X^{\hat{\nu}'} g_{\hat{\mu}' \hat{\mu}} g_{\hat{\nu}' \hat{\nu}} e^{\beta_p \Phi} \frac{\delta^D(x - X(\xi))}{\sqrt{|g|}} . \quad (11)$$

The electric current created by the brane is

$$J^{\hat{\mu}_1 \dots \hat{\mu}_{p+1}} = -\frac{\mathcal{A}_{WZ}}{2} M^{p+1} \int d^{p+1} \xi \epsilon^{a_1 \dots a_{p+1}} \\ \partial_{a_1} X^{\hat{\mu}_1} \dots \partial_{a_{p+1}} X^{\hat{\mu}_{p+1}} \delta^D(x - X(\xi)) . \quad (12)$$

And the source current for the dilaton equation is

$$T_{\Phi} = \frac{\beta_p M^{p+1}}{2} \int d^{p+1} \xi \sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \partial_a X^{\hat{\mu}} \partial_b X^{\hat{\nu}} g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} e^{\beta_p \Phi} \frac{\delta^D(x - X(\xi))}{\sqrt{|g|}} . \quad (13)$$

We will solve these equations in the case of a codimension one brane and we will see in the next section how the analysis can be extended to higher codimension. First

we choose a system of spacetime coordinates related to the brane:

$$\begin{aligned} \text{worldvolume coordinates: } & x^\mu \quad \mu = 0 \dots p ; \\ \text{transverse coordinate: } & y , \end{aligned}$$

in the physical gauge where $X^\mu(\xi) = \xi$.

We are looking for a solution with a Poincaré invariance in $(p+1)$ dimensions, so that we can make the following ansatz for the metric:

$$ds^2 = e^{2A(y)} dx^\mu \otimes dx^\nu \eta_{\mu\nu} + e^{2B(y)} dy \otimes dy . \quad (14)$$

The nonvanishing components of the $(p+1)$ -differential form that couples to the p -brane are

$$A_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} = -\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} \frac{1}{\mathcal{A}_{WZ}} e^{C(y)} , \quad (15)$$

where $\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}}$ is the antisymmetric tensor normalized to ± 1 .

It is well known that (see for instance [33] for a review), corresponding to the ansatz (14–15), the solutions of eqs (6–10) can be expressed in terms of a harmonic function $H(y)$:

$$ds^2 = H^{2n_x} dx^\mu \otimes dx^\nu \eta_{\mu\nu} + H^{2n_y} dy \otimes dy ; \quad (16)$$

$$e^\Phi = H^{n_\Phi} e^{\phi_\infty} \quad (\phi_\infty \text{ is the value of } \Phi \text{ at infinity}) ; \quad (17)$$

$$F_{y\mu_1 \dots \mu_{p+1}} = \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} \frac{1}{\mathcal{A}_{WZ}} e^{-\alpha_p \phi_\infty / 2} \frac{dH^{-1}}{dy} ; \quad (18)$$

where the powers are given by

$$n_x = \frac{2\kappa^2}{p \mathcal{A}_{WZ}^2} \quad n_y = \frac{2(p+1)\kappa^2}{p \mathcal{A}_{WZ}^2} \quad n_\Phi = \frac{\alpha}{\mathcal{A}_{WZ}^2} . \quad (19)$$

Provided that the coefficient of the Wess–Zumino term is related to the coupling to the dilaton by

$$\mathcal{A}_{WZ}^2 = -2\kappa^2 \frac{p+1}{p} + \frac{\alpha^2}{2} , \quad (20)$$

the whole set of equations of motion is now equivalent to Poisson’s equation,

$$\frac{d^2 H}{dy^2} = -\frac{1}{2} \mathcal{A}_{WZ}^2 M^{p+1} e^{-\alpha \phi_\infty / 2} \delta(y) , \quad (21)$$

the solution of which reads

$$H(y) = 1 - \frac{1}{4} \mathcal{A}_{WZ}^2 M^{p+1} e^{-\alpha \phi_\infty / 2} |y| . \quad (22)$$

We have normalized $H(y)$ so as to obtain a flat Minkowski space in the vicinity of the brane. At this stage, it is worth noticing that the derivation follows directly from the

bosonic equations (6-10) and no supersymmetric argument has been used. The full supergravity equations also include a Killing spinor equation that can be consistently solved, provided that the coupling of the differential form to the dilaton takes its stringy value. This promotes the bosonic solution to a BPS one.

It is interesting to substitute this solution back into the Einstein equations (6) to obtain:

$$G^{\mu\nu} = -\frac{\kappa^2}{\mathcal{A}_{WZ}^2} \left(1 - \frac{\alpha^2}{2\mathcal{A}_{WZ}^2}\right) H^{-2(n_y+1)} (H')^2 g^{\mu\nu} - M H^{-(1+n_x(p+1))} e^{-\alpha\phi_\infty/2} \frac{\delta(y)}{\sqrt{g_{yy}}} g^{\mu\nu} ; \quad (23)$$

$$G^{yy} = -\frac{\kappa^2}{\mathcal{A}_{WZ}^2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{2\mathcal{A}_{WZ}^2}\right) H^{-2(n_y+1)} (H')^2 g^{yy} . \quad (24)$$

In the limit of decoupling between the brane and the dilaton, *i.e.*, $\alpha = 0$, which also corresponds to $n_y = (p+1)n_x = -1$ using the constraint (20), the Einstein tensor involves two constants Λ_b° and Λ° :

$$G^{\mu\nu} = -\kappa^2 \left(\Lambda_b^\circ + \Lambda^\circ \frac{\delta(y)}{\sqrt{g_{yy}}} \right) g^{\mu\nu} ; \quad (25)$$

$$G^{yy} = -\kappa^2 \Lambda_b^\circ g^{yy} . \quad (26)$$

If we keep the factors $\alpha\phi_\infty$ fixed (since ϕ_∞ could go to infinity as $\alpha \rightarrow 0$), these constants are given by

$$\Lambda_b^\circ = -\frac{p+1}{8p} M^{p+2} e^{-\alpha\phi_\infty} \quad \text{and} \quad \Lambda^\circ = M^{p+1} e^{-\alpha\phi_\infty/2} . \quad (27)$$

They can be interpreted as effective cosmological constants since the metric (16) is a solution to the Einstein equations derived from the RS action (1).

The expression of the cosmological constants in terms of supergravity quantities may give some insight into the origin of the apparently *ad hoc* fine-tuning (7) of the RS mechanism: here the cosmological constants are no longer fundamental parameters and the fine-tuning problem appears in a different way; in the present language it is a consequence of taking the limit where the dilaton decouples from the brane. Of course this represents just one point in the full parameter space. The more general solution, when the dilaton does not decouple, is a bulk energy density which depends on y , rather than a cosmological constant term. Regardless of this difference, one can still obtain an exponentially decaying warp factor, as long as n_x remains negative. The new insight, then, is that the original RS solution is only the simplest possibility within a whole class of solutions which can solve the hierarchy problem.

Furthermore, our approach links the energy densities of the brane and bulk to physical quantities like the charge associated to the electric current (12). Not only is such a charge conserved, but it also obeys Dirac's quantization rule [35]: solutions exist where the fiducial value of the electric charge is multiplied by an integer and these can

be interpreted as a superposition of N parallel branes. Since in such a configuration the electric field strength is multiplied by a factor N , the RS effective cosmological constants depend on N : Λ goes like Λ^o/N and Λ_b like Λ_b^o/N^2 . Therefore the effective cosmological constants are quantized.

A serious shortcoming with the above solution is that the dilaton decoupling regime requires a purely imaginary Wess–Zumino term (see eq. (20)), which implies an imaginary hence unphysical value for the electric charge. Therefore this solution is still just a tantalizing hint at a stringy origin for the RS proposal. To be more convincing, it is essential to overcome this problem. In the next section, we will address this issue by going to a higher number of extra dimensions, in the space transverse to the brane. It may happen that the compactification of some of these extra dimensions can be crucial, requiring a more complete analysis involving some interacting moduli fields in gauged supergravity theories⁽⁴⁾. The problem should also be reconsidered in a more complicated version [36] of ten dimensional *IIA* supergravity including mass terms since a codimension one supersymmetric object, the D-8 brane, has been constructed by Bergshoeff *et al.* [37]. This subject was partially addressed in the recent references [38].

When the dilaton coupling is turned on, the cosmological ‘constant’ in the bulk will now have a dependence on the transverse distance r . Apart from the shortcoming of not quite reproducing the RS picture, this solution does have an interesting feature regarding the cosmological constant on the brane in the physical regime where the Wess–Zumino coupling $\mathcal{A}_{WZ}$ is real: it provides an example of a negative tension brane. For $n_x > 0$, as is the case when $\mathcal{A}_{WZ}^2 > 0$, the discontinuity in the derivative of the warp factor is positive, which through the Einstein equation (5) implies that $\Lambda < 0$. This is noteworthy because negative tension branes play a prominent role in the RS solution. In the original proposal, which resembles the Hořava–Witten compactification of $d = 11$ supergravity, the TeV brane was required to have negative tension. To get correct cosmological expansion on the TeV brane in the case where the extra dimension is noncompact, it was shown [14] that negative tension branes must exist. Since this situation seems rather exotic, it is reassuring to find a model in which it arises.

In summary, our study of codimension one branes suggests that the cosmological constants introduced by Randall and Sundrum are an effective description of the dynamics of a more complicated set of fields governing the physics of a brane that couples to the bulk through gravitational interactions only. Thus those effective cosmological constants inherit some physical properties of the brane, an intriguing one being their quantization. We point out that the solution (16) belongs to the general class of solutions (9) for codimension one branes. Since the exponent n_x is negative, it follows from the general discussion of section 2 that this field configuration can solve the gauge hierarchy problem in the manner proposed by Lykken and Randall [13]. Namely, physical particle masses will be exponentially suppressed on any test-brane (“TeV brane”) placed sufficiently far from the “Planck brane” featured in our solution.

⁽⁴⁾This question has been recently addressed by Behrndt and Cvetič [25]. See also ref. [5] for an earlier discussion.

4 Generalization to higher codimension brane-universe

We would now like to generalize the previous results to the case of a brane-universe of codimension greater than one. Requiring rotational invariance in the transverse space, the ansatz for the metric and for the $(p+1)$ -differential form will be a function only of the distance r in the transverse space:

$$r = \sqrt{y^I y^J \delta_{IJ}} . \quad (1)$$

The solutions (6–10) take the same form, but the powers are now given by:

$$n_x = -\frac{2(d_\perp - 2)\kappa^2}{(p + d_\perp - 1)\mathcal{A}_{WZ}^2} \quad n_y = \frac{2(p+1)\kappa^2}{(p + d_\perp - 1)\mathcal{A}_{WZ}^2} \quad n_\Phi = \frac{\alpha}{\mathcal{A}_{WZ}^2} , \quad (2)$$

and the relation between the Wess–Zumino coupling and the dilaton coupling becomes:

$$\mathcal{A}_{WZ}^2 = 2\kappa^2 \frac{(p+1)(d_\perp - 2)}{(p + d_\perp - 1)} + \frac{\alpha^2}{2} . \quad (3)$$

The function H is harmonic in the transverse space:

$$\Delta_\perp H \equiv \delta^{IJ} \frac{\partial^2 H}{\partial y^I \partial y^J} = -\frac{1}{2} \mathcal{A}_{WZ}^2 M^{p+1} e^{-\alpha\phi_\infty/2} \delta^{d_\perp}(y) , \quad (4)$$

A particular solution is

$$H = l + \frac{\mathcal{A}_{WZ}^2 M^{p+1}}{2(d_\perp - 2)\Omega_{d_\perp-1}} e^{-\alpha\phi_\infty/2} \frac{1}{r^{d_\perp-2}} \quad (5)$$

where $\Omega_{d_\perp-1}$ is the volume of $S^{d_\perp-1}$, and l is an arbitrary constant which we will set to zero in order to obtain cosmological constants in our results. (When $d_\perp = 1$ the sphere degenerates into two points, giving $\Omega_0 = 2$.) The case of a brane of codimension two involves logarithmic behavior, and we will not specify it in the following. As before, when the dilaton decouples from the brane, the geometry can be derived from effective cosmological constants, as we will now demonstrate. The components of the Einstein tensor associated with the solution (5) are

$$G^{\mu\nu} = -\frac{\kappa^2}{\mathcal{A}_{WZ}^2} \left(1 - \frac{\alpha^2}{2\mathcal{A}_{WZ}^2} \right) H^{-2(n_y+1)} (H')^2 g^{\mu\nu} - M^{2-d_\perp} H^{-(1+n_x(p+1))} e^{-\alpha\phi_\infty/2} \frac{\delta^{d_\perp}(y)}{\sqrt{g_\perp}} g^{\mu\nu} ; \quad (6)$$

$$G^{IJ} = -\frac{\kappa^2}{\mathcal{A}_{WZ}^2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{2\mathcal{A}_{WZ}^2} \right) \left(2\frac{y^I y^J}{r^2} e^{-2B} - g^{IJ} \right) H^{-2(n_y+1)} (H')^2 . \quad (7)$$

When the dilaton decouples, $\alpha = 0$, implying $n_x = -1/(p+1)$ and $n_y = 1/(d_\perp - 2)$. The metric can then be written as:

$$ds^2 = \left(\frac{r}{R_0} \right)^{2(d_\perp-2)/(p+1)} dx^\mu \otimes dx^\nu \eta_{\mu\nu} + \left(\frac{R_0}{r} \right)^2 dy^I \otimes dy^J \delta_{IJ} . \quad (8)$$

with

$$R_0 M = \left(\frac{p+1}{(p+d_\perp-1)\Omega_{d_\perp-1}} \right)^{1/(d_\perp-2)} e^{-\alpha\phi_\infty/(2d_\perp-4)} . \quad (9)$$

This is the geometry of $AdS_{p+2} \times S^{d_\perp-1}$; R_0 is the radius of the sphere and it is related to the radius of the AdS space by $R_0 = R_{AdS}(d_\perp-2)/(p+1)$. The expression of the Einstein tensor simplifies to:

$$G^{\mu\nu} = -\kappa^2 \left(\Lambda_b^\circ + \Lambda^\circ \frac{\delta^{d_\perp}(y)}{\sqrt{g_\perp}} \right) g^{\mu\nu} ; \quad (10)$$

$$G^{IJ} = -\kappa^2 \Lambda_b^\circ \left(2 \frac{y^I y^J}{R_0^2} - g^{IJ} \right) ; \quad (11)$$

where the constants Λ_b° and Λ° are given by:

$$\begin{aligned} \Lambda^\circ &= M^{p+1} e^{-\alpha\phi_\infty/2} ; \\ \Lambda_b^\circ &= \frac{d_\perp-2}{2} \left(\frac{p+d_\perp-1}{p+1} \right)^{d_\perp/(d_\perp-2)} \Omega_{d_\perp-1}^{2/(d_\perp-2)} M^{p+d_\perp+1} e^{\alpha\phi_\infty/(d_\perp-2)} . \end{aligned} \quad (12)$$

What allows us to interpret them as effective cosmological constants is the fact that the metric (8) is actually a solution to the Einstein equations derived from a generalized RS action:

$$\mathcal{S} = \int d^{p+1}x d^{d_\perp}y \sqrt{|g|} \left(\frac{\mathcal{R}}{2\kappa^2} - \Lambda_b \left(g_\perp \left(\frac{r}{R_0} \right)^{2d_\perp} \right)^{-1} \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 - \Lambda \frac{\delta^{d_\perp}(y)}{\sqrt{g_\perp}} \right) ; \quad (13)$$

where R is defined by $R^2 = y^I y^J g_{IJ}$. It is noteworthy that when the metric in the transverse space is integrated out, this action reduces to the one introduced by RS.

In the expression (12), we notice that even if the power $n_a = (d_\perp-2)/(p+1)$ is positive, the cosmological constant on the brane is positive. This would not be the case with only one extra dimension, but when $d_\perp > 1$ the extra transverse dimensions that live on the sphere also contribute to the singularity in the Einstein tensor and modify the singularity coming from the AdS part of the space. Nevertheless, our discussion of the hierarchy problem is unaffected by the spherical extra dimensions and thus a positive power n_a is undesirable as regards the gauge hierarchy problem, since it implies that the integral for the 4D effective Planck mass diverges. However a positive power n_a naturally generates a gauge coupling unification along the lines of the scenario proposed in [12].

Just as in the case of codimension one, the expression for the effective cosmological constants in terms of supergravity quantities leads to their quantization in multibrane configurations: the electric field-strength increases by a factor N , Λ goes to Λ°/N and Λ_b goes to $\Lambda_b^\circ N^{2/(d_\perp-2)}$.

Not only does going to higher codimension brane-universes cure the problem of the imaginary Wess–Zumino term, but they can also be more easily embedded in a

superstring framework. Indeed, a D-3 brane in type *IIB* theory does not couple to the dilaton and thus provides an explicit realization of our construction. In this context it would be interesting to incorporate in the field theoretical analysis of RS some stringy corrections to the supergravity action, like quadratic terms in curvature, for instance, since they can modify the spectrum of the Kaluza–Klein graviton’s excitations.

5 Discussion

In this work we have presented solutions to the coupled equations for branes in $d_\perp$ extra dimensions and the low energy bosonic states of supergravity or superstring theories. The goal was to reproduce the effective stress-energy tensor needed for the Randall–Sundrum solution which uses gravitational trapping to solve the weak scale hierarchy problem. Let us summarize the results.

Decoupled dilaton regime

Regardless of the dimensionality of the transverse space, we find that the stress-energy tensor takes a simple form only in the limit that the dilaton field decouples from the brane. Then there are three cases:

$d_\perp = 1$. It is necessary to go to an unphysical value of the Wess-Zumino coupling, $\mathcal{A}_{WZ}^2 < 0$, to obtain a solution, which does however then yield exactly the bulk and brane cosmological constants needed for the RS proposal.

$d_\perp = 2$. This appears to be an uninteresting case, because $\mathcal{A}_{WZ}$ is forced to vanish, leading to trivial solutions.

$d_\perp > 2$. We now find solutions with positive Λ_b and physically acceptable values $\mathcal{A}_{WZ}^2 > 0$ for the Wess-Zumino coupling. The bulk energy term looks conventional (constant) in the brane components of $T_{\mu\nu}$, but it has a mild dependence on the bulk coordinates in the transverse components, T_{IJ} . The warp factor $a(Y)$ goes like $\exp(+\text{const}|Y|)$ in coordinates where Y represents the physical distance from the brane in the bulk ($\text{const} > 0$). Therefore the solution cannot be advocated to explain the hierarchy between the Planck and electroweak scales. This is in qualitative agreement with the $d_\perp = 2$ solution recently found in ref. [18]. It would therefore appear that the RS solution to the hierarchy problem works only in the case of a single extra dimension⁽⁵⁾, or in the case of several intersecting branes of codimension one. On the other hand, as shown in ref. [12], despite infinitely large extra dimensions, gauge coupling unification can naturally arise as a result of the anomaly associated with the rescaling of the wave functions on the brane. Moreover the presence of the spherical extra dimensions can help to cure some phenomenological puzzles which occur when there is only one transverse dimension, such as electroweak symmetry breaking and obtaining small enough neutrino masses [12].

⁽⁵⁾Numerical solutions which we have found in the case of $d_\perp = 2$ also support this conclusion.

Coupled dilaton regime

It is interesting to also consider the solutions where the dilaton does not decouple from the brane. The bulk energy is no longer constant in these solutions, so the resulting stress-energy tensor does not have the simple form proposed by RS. Nevertheless, these solutions are equally acceptable and may have interesting physical consequences.

$d_{\perp} = 1$. It is now possible to have a real-valued Wess-Zumino coupling, in which case $n_x > 0$. As explained in section 3, this implies that the brane has a negative energy density, which is somewhat surprising, since pure scalar field domain wall configurations always have positive tension. Since the TeV brane in the RS proposal tends to have negative tension, it may be relevant to explore the properties of such configurations.

$d_{\perp} = 2$. The solutions are no longer trivial, but have a logarithmic dependence on the bulk coordinate. We have not studied this special case in detail.

$d_{\perp} > 2$. The term in $T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ which looked like a bulk cosmological constant when the dilaton coupling vanished now has nontrivial spatial dependence in the bulk. Such behavior has recently been proposed as a condition for avoiding the generic problem of the incorrect Friedmann equation for the expansion of the brane [39]. In the latter, complicated and *a priori* unmotivated expressions for the dependence of T_{55} on y were derived using the requirement of correct cosmological expansion. Although we have not yet found inflationary solutions in the present supergravity context, it would be interesting to do so in order to check whether the y dependence of T_{55} advocated in ref. [39] can be justified by the presence of nontrivial dilaton fields.

Appendix: the boundary of an anti-de Sitter space

An anti-de Sitter space of dimension $p + 2$ can be seen as a hypersurface embedded in a flat space of signature $(2, p + 1)$. Let $x^{\hat{\mu}}$, $\hat{\mu} = 0 \dots p + 2$, be some coordinate system in this embedding space. The anti-de Sitter space of radius R is defined by the equation:

$$x^{\hat{\mu}} x_{\hat{\mu}} \equiv -x^0 x^0 + x^1 x^1 + \dots x^{p+1} x^{p+1} - x^{p+2} x^{p+2} = -R^2 \quad (\text{A.1})$$

and the metric on AdS is the embedding metric. In a convenient system of coordinates defined by

$$X^{\mu} = \frac{R}{x^{p+1} + x^{p+2}} x^{\mu}, \quad \mu = 0 \dots p, \quad \text{and} \quad r = x^{p+1} + x^{p+2}, \quad (\text{A.2})$$

the embedding metric factorizes:

$$ds^2 = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \eta_{\mu\nu} dX^{\mu} \otimes dX^{\nu} + \left(\frac{R}{r}\right)^2 dr \otimes dr. \quad (\text{A.3})$$

The boundary of AdS is the set of points that satisfies equation (A.1) at the infinity of the flat space. More precisely, we can rescale the coordinates $x^{\hat{\mu}} \rightarrow x'^{\hat{\mu}} = \lambda x^{\hat{\mu}}$ and consider the limit $\lambda \rightarrow \infty$. The boundary is thus defined by the projective equations

$$-x'^0 x'^0 + x'^1 x'^1 + \dots + x'^{p+1} x'^{p+1} - x'^{p+2} x'^{p+2} = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$x'^{\hat{\mu}} \sim \rho x'^{\hat{\mu}} \quad \text{with } \rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (\text{A.5})$$

which clearly describe $S^1 \times S^p$. In the system of coordinates (A.2), the set of solutions to the boundary equations has two disconnected pieces: the first one is associated with $r' \neq 0$, which is sent to $r = \infty$ by the rescaling, and it corresponds to a Minkowski space of dimension $p+1$ spanned by $x^0 \dots x^p$; the second piece is associated with $r' = 0$, *i.e.* $r = 0$, and corresponds to the union of a point and $\mathbb{R} \times S^p$.

Acknowledgements

C.G. would like to thank E. Dudas and J. Mourad for stimulating discussions and is grateful to the Service de Physique Théorique, CEA Saclay where this work was initiated. This work was supported in part by the Director, Office of Energy Research, Office of High Energy and Nuclear Physics, Division of High Energy Physics of the U.S. Department of Energy under Contract DE-AC03-76SF00098 and in part by the National Science Foundation under grant PHY-95-14797.

References

- [1] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B188** (1981) 513.
- [2] I. Antoniadis, *Phys. Lett.* **B246** (1990) 377;
E. Witten, *Nucl. Phys.* **B471** (1996) 135;
J.D. Lykken, *Phys. Rev.* **D54** (1996) 3693.
- [3] I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, *Phys. Lett.* **B436** (1998) 257;
K.R. Dienes, E. Dudas and T. Gherghetta, *Phys. Lett.* **B436** (1998) 55.
- [4] W. Israel, *Nuovo Cim.* **44B** (1966) 1;
V.A. Rubakov and M.E. Shaposhnikov, *Phys. Lett.* **125B** (1983) 139;
A. Vilenkin, *Phys. Lett.* **133B** (1983) 177;
J. Ipser and P. Sikivie, *Phys. Rev.* **D30** (1984) 712.
- [5] A. Lukas, B.A. Ovrut, K.S. Stelle and D. Waldram, *Phys. Rev.* **D59** (1999) 086001;
A. Lukas, B.A. Ovrut and D. Waldram, hep-th/9902071.
- [6] H.A. Chamblin and H.S. Reall, hep-th/9903225.
- [7] P. Binétruy, C. Deffayet, D. Langlois, hep-th/9905012.
- [8] L. Randall and R. Sundrum, hep-ph/9905221 and hep-ph/9906064.
- [9] M. Gogberashvili, hep-ph/9812296, hep-ph/9812365 and hep-ph/9904383.
- [10] C. Csaki, M. Graesser, C. Kolda and J. Terning, hep-ph/9906513.
- [11] J.M. Cline, C. Grojean and G. Servant, hep-ph/9906523.

- [12] K.R. Dienes, E. Dudas and T. Gherghetta, hep-ph/9908530.
- [13] J. Lykken and L. Randall, hep-th/9908076.
- [14] J. Cline, C. Grojean and G. Servant, hep-ph/9909496.
- [15] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali and N. Kaloper, hep-th/9907209.
- [16] A. Brandhuber and K. Sfetsos, hep-th/9908116.
- [17] C. Csaki and Y. Shirman, hep-th/9908186;
A.E. Nelson, hep-th/9909001.
- [18] A. Chodos and E. Poppitz, hep-th/9909199.
- [19] I. Oda, hep-th/9908104 and hep-th/9909048;
H. Hatanaka, M. Sakamoto, M. Tachibana and K. Takenaga, hep-th/9909076.
- [20] W.D. Goldberger and M.B. Wise, hep-ph/9907218 and hep-ph/9908447.
- [21] T. Nihei, hep-ph/9905487;
N. Kaloper, hep-th/9905210;
D.J. Chung and K. Freese, hep-ph/9906542 and hep-ph/9910235;
P.J. Steinhardt, hep-th/9907080;
H.B. Kim and H.D. Kim, hep-th/9909053;
L. Mersini, hep-ph/9909494.
- [22] T. Li, hep-th/9908174;
J. Lykken and S. Nandi, hep-ph/9908505;
H. Davoudiasl, J.L. Hewett and T.G. Rizzo, hep-ph/9909255;
E. Halyo, hep-th/9909127;
P. Kanti, I.I. Kogan, K.A. Olive and M. Pospelov, hep-ph/9909481.
- [23] H. Verlinde, hep-th/9906182.
- [24] A. Chamblin and G.W. Gibbons, hep-th/9909130;
O. DeWolfe, D.Z. Freedman, S.S. Gubser and A. Karch, hep-th/9909134.
- [25] K. Behrndt and M. Cvetič, hep-th/9909058.
- [26] A. Kehagias, hep-th/9906204.
- [27] J. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231.
- [28] C. Grojean and J. Mourad, hep-th/9903164, to appear in *Nucl. Phys.* **B**.
- [29] U. Ellwanger, hep-th/9909103.
- [30] T. Goto, *Prog. Theor. Phys.* **46** (1971) 1560 .

- [31] S. Deser and B. Zumino, *Phys. Lett.* **65B** (1976) 369;
 L. Brink, P. Di Vecchia and P. Howe, *Phys. Lett.* **65B** (1976) 471;
 A.M. Polyakov, *Phys. Lett.* **103B** (1981) 207.
- [32] P.K. Townsend, *Phys. Lett.* **202B** (1988) 53;
 A. Dabholkar, G. Gibbons, J.A. Harvey and F. Ruiz Ruiz, *Nucl. Phys.* **B340**
 (1990) 33;
 A. Strominger, *Nucl. Phys.* **B343** (1990) 167;
 M.J. Duff and K.S. Stelle, *Phys. Lett.* **B253** (1991) 113.
- [33] M.J. Duff, R.R. Khuri and J.X. Lu, *Phys. Rept.* **259** (1995) 213.
- [34] A. Achucarro, J.M. Evans, P.K. Townsend and D.L. Wiltshire, *Phys. Lett.* **198B**
 (1987) 441;
 M.J. Duff and J.X. Lu, *Nucl. Phys.* **B390** (1993) 276.
- [35] R.I. Nepomechie, *Phys. Rev.* **D31** (1985) 1921;
 C. Teitelboim, *Phys. Lett.* **167B** (1986) 69 and *Phys. Lett.* **167B** (1986) 63.
- [36] L.J. Romans, *Phys. Lett.* **169B** (1986) 374.
- [37] E. Bergshoeff, M. de Roo, M.B. Green, G. Papadopoulos and P.K. Townsend,
Nucl. Phys. **B470** (1996) 113.
- [38] D. Brecher and M.J. Perry, hep-th/9908018;
 A. Chamblin, M.J. Perry and H.S. Reall, *JHEP* **09** (1999) 014.
- [39] P. Kanti, I.I. Kogan, K.A. Olive and M. Pospelov, hep-ph/9909481.

Publication V

Dilaton Stabilization in Effective Type I String Models

Saclay T00/118
hep-th/0009089
September 2000

Dilaton Stabilization in Effective Type I String Models

S.A. Abel and G. Servant

^a LPT, Université Paris-Sud, Orsay, 91405, France

^b CEA-SACLAY, Service de Physique Théorique, F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex,
France

Abstract

We show that the dilaton and T -moduli can be stabilized by a single gaugino condensation mechanism in the four-dimensional effective field theory derived from Type IIB orientifolds. A crucial role is played by the mixing of the blowing-up modes M_k with the T -moduli in the Kähler metric, and by the presence of the M_k in the gauge kinetic functions. Supersymmetry breaking in these models is dominated by the auxiliary fields of the T moduli, and phenomenologically interesting patterns can emerge.

PACS: 11.25.Mj, 04.65.+e, 12.60.-i.

Keywords: Type I string; Phenomenology; Supergravity; Dilaton stabilization.

1 Introduction

Understanding how the dilaton gets a phenomenologically consistent expectation value is one of the major problems of string-derived effective field theories. Perhaps the most promising approach to dilaton stabilization is gaugino condensation in some hidden gauge group, leading to the dynamical generation of a non-perturbative dilaton-dependent superpotential. In heterotic string theories, however, the simplest resulting scalar potentials do not stabilize the dilaton. Instead it runs away either to infinite values where the coupling is weak, or to zero where the coupling becomes strong and perturbative control is lost.

Attempts have been made to circumvent this problem by having a gauge group with several factors, and multiple gaugino condensation. In this case, several exponential terms have to conspire to produce a minimum in the potential at finite dilaton values. These are the so-called ‘race-track’ models. To be realistic, race-track models require that the gauge coupling at the string scale be compatible with estimates based on renormalization group evolution of the Standard Model gauge couplings. The vacuum expectation value of the dilaton is then constrained to be $\langle Re(S) \rangle \sim 2 \sim g_{GUT}^{-2}$, which requires some degree of fine-tuning [1, 2].

In this paper we examine dilaton stabilization from gaugino condensation in effective theories of type I strings derived from type IIB orientifolds. We find a picture that is radically different from heterotic strings and in particular find that the dilaton can be stabilized with only one condensing gauge group. The novel feature of type I strings which allows us to do this is the existence of twisted moduli, M_k , associated with fixed points. These not only modify the Kähler metric but also appear in the gauge kinetic functions, and consequently in the superpotential that is generated by gaugino condensation. As we shall see, it is the mixing of these new fields with the moduli in the Kähler metric which generically leads to a simple stabilization.

After briefly presenting relevant aspects of Type I models, we discuss in section 3 gaugino condensation and the dynamical superpotential that we will use in our study⁽¹⁾. Section 4 previews the general features of the resulting scalar potentials in heterotic and type I models in order to explain why dilaton stabilization is considerably easier in the latter. In section 5 we give an explicit computation of the scalar potential in type I and describe a local minimum where the dilaton may be trapped. In section 6 we discuss the resulting soft breaking terms.

2 Preliminaries; Structure of Type I Models

Type I string theories have interesting phenomenological properties which have been investigated (using type IIB orientifolds) in refs. [3–6]. For example, their brane structure allows the fundamental scale to be essentially a free parameter, and in addition the visible gauge couplings are no longer tied to the vacuum expectation value of the

⁽¹⁾we understand that gaugino condensation in type I theories has been considered by Aldazabal, Font, Ibanez and Quevedo (unpublished).

dilaton but can instead be determined by the twisted moduli fields. (Consequently the problem of stabilizing the dilaton and moduli is more democratic than in the heterotic case.)

In this paper we will be concerned with the effective scalar potential of type I models and the important aspects are therefore the gauge couplings and the Kähler potential which we now review. The reader is referred to ref. [7] for details on the construction; ref. [4] for a broad phenomenological outline, including the effect of choosing different fundamental scales; ref. [8,9] for discussions of supersymmetry breaking and phenomenology with an intermediate fundamental scale; ref. [10] for some other aspects of type I models.

Type I models constructed from type IIB orientifolds include different types of D-branes on which open strings can be attached in various ways. Supersymmetric models either have just D9 branes or D9 and D5 branes (by T-dualizing with respect to the three complex dimensions it is sometimes useful to exchange D9-branes with D3-branes and D5-branes with D7-branes). There are three classes of moduli fields that we need to consider: the complex dilaton S , the untwisted moduli T_i associated with the size and shape of the extra dimensions and the twisted moduli M_k associated with the fixed points of the underlying orbifold. In contrast with the Green–Schwarz mechanism of heterotic compactifications, the complex dilaton does not generically play any role in U(1) anomaly cancellation of $D = 4$, $N = 1$ type IIB orientifolds. Instead, only the twisted moduli M_k participate in the generalized Green–Schwarz mechanism [11,12]. Moreover, they induce a Fayet–Iliopoulos term which is determined by the VEVs of the M_k fields and which can therefore be zero. (In the heterotic case the FI term is given by the complex dilaton and is therefore constrained by the gauge couplings.)

In the gauge sector, gauge groups and charged chiral fields will depend on the type and location of D-branes present in the vacuum. One can generally consider the case with one set of 9-branes and three sets of 5_i -branes ($i = 1, 2, 3$). There are gauge groups G_9, G_{5_i} associated with each, and four types of charged matter fields; C_i^9 (i labels the three complex dimensions) comes from open strings starting and ending on the 9-branes; $C_i^{5_j}$ from open strings starting and ending on the same 5_i -branes; $C^{5_i 5_j}$ from open strings starting and ending on different sets of 5_i -branes; $C^{9 5_i}$ from open strings with one end on the 9-branes and the other end on the 5_i -branes.

The gauge kinetic functions for a Z_N orientifold model differ from the heterotic case. Firstly there is no Kac–Moody coefficient multiplying the S -field dependence. In addition the blowing-up modes appear linearly, and for G_{5_i} , the S -field is replaced by the T_i -fields. For the D9-branes, the gauge kinetic function is [12,13]

$$f_{9a} = S + \sum_k \sigma_a^k M_k, \quad (1)$$

whereas for the D5-branes

$$f_{5_i a} = T_i + \sum_k \sigma_{ia}^k M_k, \quad (2)$$

where σ_a^k are model dependent coefficients and k runs over the different twisted sectors. The gauge coupling is given by $\text{Re} f_a = 1/g_a^2$.

To describe the Kähler potential, we will henceforth work with the overall modulus, taking $T_i = T$. At one-loop level the Kähler potential for arbitrary numbers of M_k fields has the form [5],

$$K = -\ln s - 3 \ln \tau + \hat{K}(m_k), \quad (3)$$

where

$$s = S + \bar{S}; \quad \tau = T + \bar{T} - \sum_n |\phi_n|^2; \quad m_k = M_k + \bar{M}_k - \delta_k \ln \tau, \quad (4)$$

We have introduced generic fields ϕ to represent some linear combination of the C_i^9 or C_i^{5j} fields which will later condense. (Formally, our choice of putting the ϕ fields in a single τ corresponds to the linear combination $\phi_n = \frac{1}{\sqrt{3}}(C_{1n}^9 + C_{2n}^9 + C_{3n}^9)$. However it turns out that the minimization of the potential is independent of the particular linear combination to high order – see later.) They are singlets under the gauge group of the visible sectors but charged under the anomalous $U(1)_X$ and will appear in the dynamical superpotential. The first two terms are similar to the usual no-scale models [14] where the T and ϕ -dependence appears in the combination τ only. Giving a VEV to m_k takes us away from the orientifold point. The $\delta_k \ln \tau$ term is a correction whose general form can be deduced from the one loop expression for the gauge coupling [13, 15] (and δ_k may be related to the Green–Schwarz coefficients associated with $SL(2, R)$ anomaly cancellation [15].) There may also be dilaton dependent corrections to m_k but their precise form is unclear (although various symmetry arguments have been put forward for them [15]) so we shall omit them, assuming that they are negligible. (Note that the corrections in m_k depend on the tree-level expression for K . In contrast with previous work, we do not expand it by assuming small ϕ_n , but instead retain the full no-scale structure, τ .) For the moment we will also omit the various charged visible matter fields because they do not condense but will return to them later when we compute their soft masses.

All that we currently know about the form of $\hat{K}$ is that it is an even function of m_k thanks to the orbifold symmetry, and that the leading term in an expansion about the orientifold point, $m_k = 0$, is quadratic, $\frac{1}{2} \sum_k m_k^2$. Later we accommodate our ignorance by working with the parameter $x_k = \partial \hat{K} / \partial M_k$ where near the orientifold point $x_k \approx m_k$.

3 Gaugino condensation in heterotic and type I

In the heterotic string, a non-perturbative superpotential for the fields S and T can be generated by hidden sector gaugino condensation with gauge group $SU(N_c)$ and with extra ‘matter’ in fundamental representations. We shall consider only one flavour of quarks Q in the fundamental of $SU(N_c)$ and antiquarks $\tilde{Q}$ in the antifundamental of $SU(N_c)$. Below the scale $\Lambda = e^{-f/2\beta}$, where β is the one-loop beta function coefficient of the hidden gauge group, the appropriate degree of freedom is the meson $Q\tilde{Q}$. It is usual to treat the composite superfield, $\phi_2 = \sqrt{Q\tilde{Q}}$, as the relevant superfield appearing in

the Kähler potential, and (for convenience) we will include it in τ . In addition to ϕ_2 it will be necessary in both the heterotic and type I cases to include a field ϕ_1 of charge q_1 in order to generate a perturbative mass term for ϕ_2 .

The non-perturbative contribution to the superpotential can be fixed uniquely by considering global symmetries and reads [16]

$$W_{np} = \left(\frac{\Lambda^{3N_c-1}}{\phi_2^2 h(T)} \right)^{\frac{1}{N_c-1}} \quad (5)$$

where $h(T)$ is a product of Dedekind eta functions resulting from a one-loop correction to f (which gives W the required modular weight, -3) and $\Lambda \sim e^{-k_N S/2\beta}$. (This is in the so-called ‘truncated’ approximation; see ref. [17] for recent developments.) Here $\beta = (3N_c - 1)/16\pi^2$ and k_N is the Kac–Moody level of the hidden gauge group. Note that we have not yet ‘integrated out’ any fields except the gaugino condensate.

In the heterotic string, the mixed $U(1)_X \times [SU(N_c)]^2$ anomaly under the transformation

$$A_\mu^X(x) \rightarrow A_\mu^X(x) + \partial_\mu \alpha \quad (6)$$

is cancelled by the transformation

$$S \rightarrow S + \frac{i}{2} \delta_{GS} \alpha. \quad (7)$$

With one flavour, the anomaly is given by

$$C_{N_c} = \frac{q_2}{2\pi^2} = k_N \delta_{GS}, \quad (8)$$

where $q_2 = \frac{q+\tilde{q}}{2}$, is the $U(1)_X$ charge of ϕ_2 , and one can check that the total W_{np} is invariant.

The extension to type I models is straightforward. Again we consider the gauge group $SU(N_c)$ with one flavour of quarks $\mathcal{Q}$ in the fundamental of $SU(N_c)$ and anti-quarks $\tilde{\mathcal{Q}}$ in the antifundamental of $SU(N_c)$, which together form a composite meson field, ϕ_2 . Assuming that the $SU(N_c)$ resides on a D9-brane we now have $\Lambda = e^{-f_9/2\beta}$, where f_9 is given by eq.(1). W_{np} is fixed uniquely by global symmetries and reads

$$W_{np} = \left(\frac{\Lambda^{3N_c-1}}{\phi_2^2} \right)^{\frac{1}{N_c-1}}. \quad (9)$$

There is no T -dependence in this expression since there is no T -dependence in the one-loop expression for the gauge kinetic function f in the type I case. (If there exists a modular symmetry, the requisite modular weight of W must therefore come entirely from transformations of M .) The mixed anomaly under the $U(1)_X$ gauge transformation is cancelled by a transformation of the M_k . Assuming only one $M_k = M$ we have

$$M \rightarrow M + i \frac{\delta_{GS}}{2} \alpha \quad (10)$$

where $\delta_{GS} = \frac{C_{N_c}}{\sigma_{N_c}} = \frac{C_X}{\sigma_X}$. The C_N 's are the mixed anomaly $U(1)_X \times [G_N]^2$ coefficients. Under $U(1)_X$, Λ has charge $q_\Lambda = \frac{\sigma_{N_c}}{2\beta} \frac{\delta_{GS}}{2} = \frac{C_{N_c}}{4\beta}$ and in our case $C_{N_c} = \frac{q_2}{2\pi^2}$ so that $q_\Lambda = \frac{2q_2}{(3N_c-1)}$ and again we see that W_{np} is $U(1)_X$ invariant as required.

4 Preview; heterotic versus Type I

Before presenting our results in detail, let us discuss in general terms why dilaton stabilization is difficult in the heterotic string, but can work in type I theories. We first review the situation for heterotic strings in the case where there is one condensing gauge group. We then preview the results (to be derived in later sections) for the scalar potential of effective type I theories, and highlight the new features that make a stabilization with a single gaugino condensate possible.

The heterotic case

Consider the effective theory for heterotic strings with $\delta_{GS} = 0$ (so that $q_2 = 0$);

$$K = -\ln s - 3 \ln \tau, \quad (11)$$

where τ is as defined above, and includes hidden sector fields, ϕ_n . The F -part of the supergravity scalar potential is given by

$$\begin{aligned} V_F &= e^G (-3 + G_\alpha K^{\alpha\bar{\beta}} G_{\bar{\beta}}) \\ &= \frac{1}{s\tau^3} \left(|sW_S - W|^2 + \frac{\tau}{3} |W_n + \bar{\phi}_n W_T|^2 + \frac{1}{3} |\tau W_T - 3W|^2 - 3|W|^2 \right), \end{aligned} \quad (12)$$

where

$$G = K + \ln |W|^2, \quad (13)$$

and subscripts indicate differentiation. If W does not depend on S or T then

$$V_F \sim \frac{|W|^2}{s\tau^3} \quad (14)$$

and obviously neither S nor T are stabilized.

In order to attempt a stabilization we invoke a non-perturbative superpotential as described in the previous section. We also add an additional field, ϕ_1 (which for this example we take to have zero charge under $U(1)_X$), which generates a mass term for the mesons. The effective superpotential contains a perturbative piece, so that we can write

$$W = W_p + W_{np}, \quad (15)$$

where W_p includes a mass term for ϕ_2 ; for example

$$W_p = a\phi_1\phi_2^2 + b\phi_1^3. \quad (16)$$

(Note that more general functions of these invariants are possible but we restrict ourselves to the linear case here.) We also assume that the fields are uncharged under all other symmetries so that we can ignore the D -terms for this example.

Now let us look at the minimization of the scalar potential in eq.(12). The usual assumption to make is that at the minimum the VEVs of all the ϕ_n are much smaller than any of the moduli. The potential is therefore dominated by the $|W_n|^2$ terms and setting $W_n = 0$ determines ϕ_1 and ϕ_2 in terms of Λ . For any reasonable value of s , the third term (involving W_T) fixes the VEV of the T modulus to a value close to $T = 1.2$, upto modular transformations. After these minimizations the effective superpotential is

$$W_{eff} \sim \frac{e^{\frac{-3k_N s}{2\beta}}}{\eta(T)^6}. \quad (17)$$

This is the effective potential after ‘integrating out’ the mesons and the ϕ_1 field, and is often the starting point for studies of dilaton stabilization.

The remaining dilaton dependence in the scalar potential can then be written,

$$V_F \sim \frac{e^{-2\Delta s}}{s}(g + (1 + \Delta s)^2) \quad (18)$$

where $\Delta = -W_S/W = \frac{3k_N}{2\beta}$ is a *positive* constant, and g is independent of s . The point to appreciate here (because it will contrast with the type I case) is that Δ is fixed as soon as we eliminate the ϕ_n fields using the $W_n = 0$ constraint.

Defining $y = \Delta s$, the minimization condition is

$$(1 + y)(1 + g) + y^2 + y^3 = 0. \quad (19)$$

This leads to the following situations (see figure 1): If $g \geq -1$ there are no positive solutions. If $g < -1$, there is one positive solution to this equation which is a maximum, with the potential running to zero at infinite s and $-\infty$ at $s = 0$. In all cases there is no minimum at positive and finite s .

As mentioned in the introduction, ‘race-track’ models get around this problem by considered several asymptotically free gauge groups (see for example reference ref. [1]). W can then be a sum of exponentials which can conspire to give rise to a local minimum with non vanishing gauge coupling. There are two other approaches that have been taken in the context of heterotic string theory. The first also requires several group factors, but assumes that one of them is not asymptotically free; *i.e.* it has negative β . This contribution to the superpotential removes the minimum at $s \rightarrow \infty$,

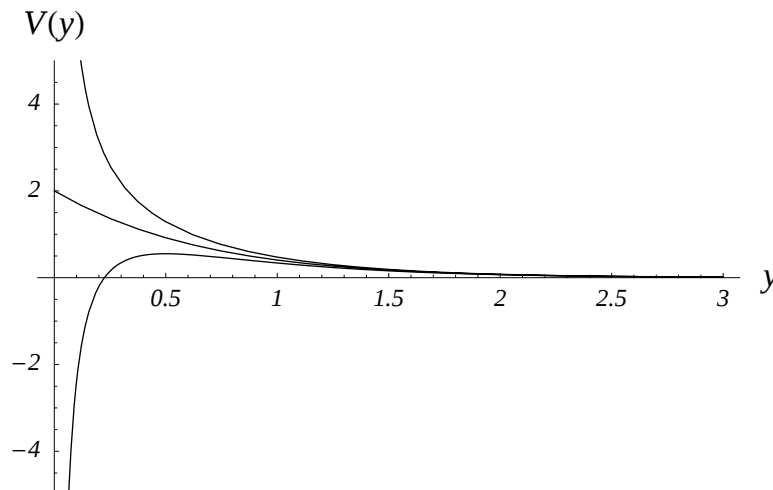


Figure 1: F -part of simple heterotic-type potentials (see expression(18)). y is proportional to the real part of the dilaton.

and the stabilization occurs rather more naturally [18]. The second approach [19] is to assume that the Kähler potential receives non-perturbative corrections of the form $e^{-1/g} \sim e^{-\sqrt{\text{Re}S}}$ as first conjectured by Shenker [20] ⁽²⁾. We should mention at this point a completely different way of generating a non perturbative superpotential for S which was noted in ref. [22]. By compactification of M-theory using a Scherk–Schwarz mechanism, the authors obtained a superpotential linear in S whose minimization in the absence of matter gives $S = 1$.

The type I case

We now contrast the above with the general situation that we will find in type I theories in the following sections. We will consider the scalar potential with a Kähler potential given by eq.(3) and with only one m_k which we call m . We will assume a single gaugino condensate in a hidden sector living on a D9-brane which generates a W_{np} as described in the previous section. The superpotential may be written

$$W = W_p(\phi_1, \phi_2) + W_{np}(\phi_2, S, M). \quad (20)$$

There are two important differences with respect to the heterotic case. The first is that there are no factors of $\eta(T)$ appearing in the superpotential, and therefore W does not necessarily depend on T if the condensing group lives on the D9-brane. The

⁽²⁾Note that this “Kähler stabilization” would not be possible in type I models where the divergence of perturbation theory in open strings indicates only e^{-1/g^2} terms [21].

second difference is that W_{np} depends on the gauge kinetic function $f_9 = S + \sigma M$ and therefore includes both S and M .

We will find F -term contributions of the form

$$V_F = e^G B \quad (21)$$

where

$$B = g(m) + |1 + s\Delta|^2 + \frac{\tau}{3} \left| \frac{W_n}{W} \right|^2 + |B_0(m) - \sigma\Delta|^2, \quad (22)$$

g and B_0 are functions of m only, and where we have assumed W is independent of T .

The most important aspect of this expression is that Δ appears twice because W_{np} is a function of f_9 and hence

$$\frac{W_M}{W} = \sigma \frac{W_S}{W} = -\sigma\Delta. \quad (23)$$

Now let us demonstrate the existence of a minimum when both $g(m)$ and B_0/σ are small and negative. Provided g is small enough (which we check is always the case) or zero, we can neglect the e^G prefactor and discuss the minimization of B . For a given m , the minimum of B is close to where the squared terms all vanish. However, gauge invariance of W tells us that

$$q_n \phi_n \frac{W_n}{W} - \frac{\delta_{GS_k}}{2} \sigma \Delta = 0, \quad (24)$$

and so $W_n = 0$ cannot be satisfied at the same time as $B_0(m) - \sigma\Delta = 0$ if $B_0 \neq 0$.

We therefore have a different option to the heterotic case. To simplify the discussion in this section, suppose that

$$\sqrt{\frac{\tau}{3}} \left| \frac{1}{W} \frac{\partial W_{np}}{\partial \phi_2} \right| \ll |\sigma\Delta|, |s\Delta|. \quad (25)$$

In this case it is clear that the minimum will be near

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_p}{\partial \phi_n} &= 0 \\ B_0(m) - \sigma\Delta &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Eq.(25) is easily satisfied if the additional D_X terms in the potential generate a large VEV for $\phi_2/\sqrt{\tau}$ whilst the VEVs of the $\phi_{n \neq 2}$ remain small. If the ϕ_n fields are charged under $U(1)_X$, setting $D_X = 0$ gives

$$\frac{q_2 |\phi_2|^2}{\tau} \approx \frac{|\delta_{GS} K'|}{6} \approx \frac{|\delta_{GS} m|}{6}. \quad (27)$$

The nett result of eq.(25) is a lower bound on the Fayet-Illiopoulos term, so that m cannot be zero.

We stress that the main difference with the heterotic case is that here Δ is fixed by eq.(26) rather than being fixed (implicitly) by $W_2 = 0$. Indeed, we find

$$\Delta = \frac{B_0}{\sigma} ; s = -\frac{\sigma}{B_0} , \quad (28)$$

provided that B_0/σ is negative, thereby fixing both the ϕ_2 condensate and the dilaton. Note that the minimum at $s \rightarrow \infty$ still exists, but if for example $g(m)$ is small and negative the minimum at finite s is lower. Indeed we can eliminate Δ to find

$$B = g + \frac{(\sigma + B_0 s)^2}{(\sigma^2 + s^2)} . \quad (29)$$

A typical potential (with $g(m) = 0$) is plotted in fig.(2) (including the $1/s$ prefactor from e^K). (When $g < 0$ the minimum is at negative values of V .)

Since $\phi_2/\sqrt{\tau}$ is already fixed by the D_X term the remaining task is of course to show that $g(m)$ can actually have a minimum at small negative values, and that at this point B_0/σ is indeed negative. One of the main results of the explicit discussion in the sections which follow is the condition on $\hat{K}$ required to form a minimum for m close to $m = 0$ with small and negative cosmological constant. We also discuss a different possibility which is reminiscent of the ‘no-scale’ models. We can tune the cosmological constant to be exactly zero by fine-tuning σ . In this case the value of m is undetermined and instead negative $\delta_{GS}m$ values parameterize a flat direction with stabilized dilaton VEV.

The detailed discussion in the following sections will demonstrate that the behaviour we have outlined above is very general. Indeed we find that the dilaton is stabilized even when the inequality in eq.(25) is not satisfied, and hence the only requirement is that W is a function of f_9 and that $B_0/\sigma < 0$. Finally we consider the pattern of supersymmetry breaking which emerges.

5 Minimization of the SUGRA Scalar Potential

We now compute the scalar potential using the Kähler (3) and the superpotential (20). We get the following for the first derivative of the Kähler potential:

$$K_\alpha = \left(-\frac{1}{s}, -\frac{(3 + \delta.x)}{\tau}, x_k, \bar{\phi}_n \frac{(3 + \delta.x)}{\tau} \right) . \quad (30)$$

Here we have introduced $x_k = \partial \hat{K} / \partial M_k$, and have defined a dot product, $\delta.x \equiv \sum \delta_k x_k$. In the small m_k limit we have $x_k \approx m_k$. The fact that the K_n terms are $-\bar{\phi}_n \times K_T$ (which is really a result of the ‘no-scale’ structure) will make the scalar potential simplify dramatically. Differentiating again we get

$$K_{\alpha\bar{\beta}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s^2} & 0 \\ 0 & K_{a\bar{b}} \end{pmatrix} .$$

To express $K_{a\bar{b}}$ we define

$$\begin{aligned} J_{kk'} &= \frac{\partial^2 \hat{K}}{\partial M_k \partial \bar{M}_{k'}} \\ A_{kk'} &= (J^{-1})_{kk'}(3 + \delta.x) + \delta_k \delta_{k'} \\ C &= (3 + \delta.x) + \delta.J.\delta \\ \delta.J.\delta &= \delta_k J_{kk'} \delta_{k'} \end{aligned} \quad (31)$$

and then have

$$K_{a\bar{b}} = \begin{pmatrix} \frac{C}{\tau^2} & -\frac{(\delta.J)_k}{\tau} & -\phi_m \frac{C}{\tau^2} \\ -\frac{(\delta.J)_{k'}}{\tau} & J_{kk'} & \frac{\phi_m (\delta.J)_{k'}}{\tau} \\ -\bar{\phi}_n \frac{C}{\tau^2} & \frac{\bar{\phi}_n (\delta.J)_{k'}}{\tau} & \bar{\phi}_n \phi_m \frac{C}{\tau^2} + \frac{(3 + \delta.x) \delta_{nm}}{\tau} \end{pmatrix}.$$

The inverse of this matrix is

$$K^{\bar{\beta}\alpha} = \begin{pmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & K^{\bar{b}a} \end{pmatrix},$$

where

$$K^{\bar{b}a} = \frac{1}{(3 + \delta.x)} \begin{pmatrix} \tau^2 + \tau \sum_n |\phi_n|^2 & \delta_k \tau & \phi_m \tau \\ \delta_{k'} \tau & A_{kk'} & 0 \\ \bar{\phi}_n \tau & 0 & \delta_{nm} \tau \end{pmatrix}.$$

We have made no approximations to get this result. Notice that there is no mixing between the M_k and the ϕ_n fields.

The F -part of the scalar potential is given by

$$V_F = e^G (-3 + G_\alpha K^{\alpha\bar{\beta}} G_{\bar{\beta}}) = e^G B, \quad (32)$$

where the reduced Planck mass is set to one, and where, assuming that the superpotential does not depend on T (*i.e.* the hidden sector group is on a D9-brane),

$$\begin{aligned} B &= -3 + s^2 |G_S|^2 + K_T K^{T\bar{T}} K_{\bar{T}} \\ &\quad + 2\text{Re} \left(K_T K^{T\bar{k}} G_{\bar{k}} + K_T K^{T\bar{n}} G_{\bar{n}} \right) \\ &\quad + G_{k'} K^{k'\bar{k}} G_{\bar{k}} + G_n K^{n\bar{m}} G_{\bar{m}}. \end{aligned} \quad (33)$$

Inserting the expressions for $K^{\alpha\bar{\beta}}$ and completing the squares gives

$$\begin{aligned} B &= \delta.x - (\delta.A^{-1}.\delta)(3 + \delta.x) + s^2 |G_S|^2 \\ &\quad + \sum_n \left| \phi_n \sqrt{\frac{(3 + \delta.x)}{\tau}} - G_{\bar{n}} \sqrt{\frac{\tau}{(3 + \delta.x)}} \right|^2 \\ &\quad + \sum_k \left| (\delta.A^{-\frac{1}{2}})_k \sqrt{(3 + \delta.x)} - \frac{(G.A^{\frac{1}{2}})_k}{\sqrt{(3 + \delta.x)}} \right|^2 \end{aligned} \quad (34)$$

where $(G.A^{\frac{1}{2}})_k = G_{k'}(A^{\frac{1}{2}})_{kk'}$ and $(\delta.A^{-\frac{1}{2}})_k = \delta_{k'}(A^{-\frac{1}{2}})_{kk'}$. Substituting for K_T , $G_n = K_n + W_n/W$, and $G_k = x_k + W_k/W$ we finally get

$$B = \delta.B_0 + s^2|G_S|^2 + \frac{\tau}{(3 + \delta.x)} \sum_n \left| \frac{W_n}{W} \right|^2 + \sum_{k,k'} \left(B_{0k} + \frac{W_k}{W} \right) \frac{A_{kk'}}{(3 + \delta.x)} \left(B_{0k'} + \frac{\overline{W}_{k'}}{W} \right), \quad (35)$$

where we have defined

$$B_{0k} = x_k - (A^{-1}.\delta)_k (3 + \delta.x). \quad (36)$$

This form of potential is obviously similar to the no-scale result, but there is a difference. Here part of the contribution to B (*i.e.* the B_{0k} functions) can be negative and we can (at least formally) have unbroken supersymmetry at finite values of parameters. To find the global minimum we set all the squares to zero which gives us

$$B = \delta_k x_k - \frac{\delta_k \delta_{k'}}{(J^{-1})_{kk'} + \frac{\delta_k \delta_{k'}}{(3 + \delta.x)}}. \quad (37)$$

This function always has a minimum of $B = -3$ at $\delta.x = -3$. Such large values of x_k are almost certainly unphysical because x_k (or m_k) describe the blowing up of the fixed points, and hence the orbifold ‘approximation’ must break down.

We will mostly consider (for simplicity) only one M_k field which we call M (it is easy to generalize to any number) in which case

$$B = \delta B_0 + \left| 1 - s \frac{W_S}{W} \right|^2 + \frac{\tau}{(3 + \delta x)} \left| \frac{W_n}{W} \right|^2 + \frac{A}{(3 + \delta x)} \left| B_0 + \frac{W_M}{W} \right|^2. \quad (38)$$

As well as this F -term contribution to the potential we have the D -term contribution

$$V_D = \frac{g_X^2}{2} |D_X|^2, \quad (39)$$

where

$$\begin{aligned} D_X &= \sum_n q_n K_n \phi_n + \delta_{GS_k} \frac{x_k}{2} \\ &= \frac{(3 + \delta.x)}{\tau} q_n |\phi_n|^2 + \delta_{GS_k} \frac{x_k}{2}. \end{aligned} \quad (40)$$

The Fayet–Iliopoulos term,

$$\xi^2 = \frac{1}{2} \delta_{GS_k} x_k, \quad (41)$$

is given by m_k not S and so can be zero.

We now minimize the potential assuming that the final cosmological constant is small or zero (we will show this is possible later on) so that we can ignore the first term in

$$V'_F = G' e^G B + e^G B'.$$

Assume that $\langle W \rangle \sim m_W$ (as phenomenology demands) so that we can impose the constraint $\langle D_X \rangle \approx 0$;

$$q_2 |\phi_2|^2 + \sum_{n \neq 2} q_n |\phi_n|^2 = \frac{|\delta_{GS} x|}{2} \frac{\tau}{(3 + \delta x)} M_P^2. \quad (42)$$

For definiteness we will take $q_2 > 0$, $q_{n \neq 2} \leq 0$, and here we are anticipating the fact that $\langle \delta_{GS} x \rangle$ will eventually be negative (see the end of this section). On the other hand, the perturbative part of the superpotential involves $\phi_{n \neq 2}$ and in order to make $\langle W \rangle \sim m_W$ we typically require $|\phi_{n \neq 2}|^2 \ll |\phi_2|^2$ and hence

$$q_2 \frac{|\phi_2|^2}{\tau} \approx \frac{|\delta_{GS} x|}{2(3 + \delta x)} M_P^2. \quad (43)$$

As in the heterotic case, because of the smallness of $\phi_{n \neq 2}$ we can impose $W_{n \neq 2} = 0$, and since W_{np} only involves ϕ_2 gauge invariance of W_p then tells us that

$$\sum_n q_n W_{pn} \phi_n = 0 = W_{p2}. \quad (44)$$

Let us briefly digress to discuss an explicit example of superpotential. Consider a perturbative superpotential W_p containing ϕ_2 and two other fields $\phi_{1,3}$;

$$W = a \phi_3 (\phi_1 \phi_2) + b (\phi_1 \phi_2)^2 + \frac{c}{3} \phi_3^3 + W_{np} \quad (45)$$

Here we have taken ϕ_3 to be a singlet, whilst $q_1 = -q_2$. Then we have

$$W_1 = a \phi_2 \phi_3 + 2b \phi_1 \phi_2^2 \quad (46)$$

$$W_2 = a \phi_1 \phi_3 + 2b \phi_1^2 \phi_2 + \partial_2 W_{np} = \frac{\phi_1}{\phi_2} W_1 - \frac{2}{N_c - 1} \frac{W_{np}}{\phi_2} \quad (47)$$

$$W_3 = a \phi_1 \phi_2 + c \phi_3^2, \quad (48)$$

and the solution to $W_1 = W_{p2} = W_3 = 0$ is

$$\langle \phi_1 \phi_2 \rangle = -\frac{a^3}{4b^2 c} \quad (49)$$

$$\langle \phi_3 \rangle = \frac{a^2}{2bc} \quad (50)$$

so that

$$\langle W_p \rangle = \frac{-a^6}{48b^3 c^2} \quad (51)$$

The condition $m_{3/2} \sim m_W$ implies $\frac{a^6}{48b^3c^2} \sim 10^{-16}$. Since b is dimensionful, it seems natural to associated the suppression with a large non-renormalizable term (coming from a low fundamental scale) giving a large b ; *i.e.* $b \sim 10^5/M_P$. As promised, since q_1 is negative, imposing the $D_X = 0$ condition then requires ϕ_2 to be many orders of magnitude larger than ϕ_1 , for any reasonable value of τ .

Returning now to our general discussion, we introduce the variable $\Delta = -\frac{W_S}{W}$ and rewrite B in the $\partial_n W_p = 0$ directions:

$$\begin{aligned} B &= \delta B_0 + |1 + s\Delta|^2 + \frac{A}{(3 + \delta x)} |B_0 - \sigma\Delta|^2 + \frac{\tau}{(3 + \delta x)} \left| \frac{\partial_2 W_{np}}{W} \right|^2 \\ &= \delta B_0 + |1 + s\Delta|^2 + \frac{A}{(3 + \delta x)} |B_0 - \sigma\Delta|^2 + \frac{q_2}{8\pi^4 |\delta_{GS} x|} \Delta^2, \end{aligned} \quad (52)$$

where we have used

$$\frac{\partial_2 W_{np}}{W} = -\frac{\Delta}{4\pi^2 \phi_2}. \quad (53)$$

Note that B_0 only depends on x . Minimizing with respect to s and Δ gives

$$\begin{aligned} s &= -\frac{1}{\Delta} \\ \Delta &= \frac{\sigma B_0}{\sigma^2 + \lambda^2}; 0, \end{aligned} \quad (54)$$

where we have defined

$$\lambda^2 = \frac{(3 + \delta x)}{A} \frac{q_2}{8\pi^4 |\delta_{GS} x|}. \quad (55)$$

Note that the first solution always requires $B_0 \sigma < 0$. The VEVs of ϕ_2 and τ are determined by eqs.(9) and (43) to be

$$\phi_2^2 \approx \left(\frac{8\pi^2}{\Delta(N_c - 1)\langle W \rangle} \right)^{N_c - 1} e^{-8\pi^2 S} \quad \text{and} \quad \tau \approx \frac{2q_2 |\phi_2|^2 (3 + \delta x)}{|\delta_{GS} x|}, \quad (56)$$

so that, at this stage, x is the only parameter remaining unfixed. Since $\langle W \rangle \sim e^{-4\pi^2}$ in natural units, we can have virtually any value of ϕ_2 , with $\phi_2 \sim 1$ corresponding to $N_c - 1 \approx s$.

The remaining potential is given by

$$\begin{aligned} B &= B_0 \left(\delta + \frac{A}{(3 + \delta x)} \frac{\lambda^2 B_0}{\sigma^2 + \lambda^2} \right) \\ &= B_0 \frac{\delta}{\sigma^2 + \lambda^2} \left(\sigma^2 - \frac{q_2}{8\pi^4 \delta_{GS} \delta} \right). \end{aligned} \quad (57)$$

There are now two options that one can consider in treating the remaining x degree of freedom, and we now describe each of them in turn.

The ‘no-scale’ case

The first option is to set the cosmological constant to be exactly zero. As we have seen, B_0 must be non-zero to stabilize the dilaton, so instead we tune the parameter σ ;

$$\sigma^2 = \frac{q_2}{8\pi^4 \delta \delta_{GS}}. \quad (58)$$

We should bear in mind that, since σ depends on the particle content, it is not a continuous parameter, and the constraint can only be approximately satisfied by for example choosing N_c . For the particular value of σ in eq.(58), the m dependent VEVs we have found for ϕ_1 , ϕ_2 , τ and s correspond to a flat direction in the parameter m with zero cosmological constant. For generic small values of x with $\delta_{GS}x < 0$ the dilaton is stabilized at

$$\begin{aligned} B_0(0) &\approx -\delta^2 \\ s &\approx \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{\sigma \delta^2}. \end{aligned} \quad (59)$$

As $m \rightarrow 0$, λ dominates and the dilaton VEV diverges. In figure (2), we plot the potential including the $1/s$ prefactor from e^G , with $\Delta = -1/s$ and imposing the cosmological constant condition. A natural possibility (which we will not explore here) is that x and therefore m can be fixed (with $\delta_{GS}x < 0$), as in the conventional ‘no-scale’ models, by minimizing the potential after radiatively induced electroweak symmetry breaking.

The minimized $B_0(x)$ case

The second option is to tolerate a small but negative cosmological constant which as we shall now see allows a suitable local minimum in x . If we assume that $\lambda^2 \ll \sigma^2$ then we may simply minimize δB_0 which is given by

$$\delta B_0 = \delta x - \frac{(3 + \delta x)}{\frac{(3 + \delta x)}{\delta^2 J} + 1}. \quad (60)$$

In the case that $\sigma = \beta/2$ the assumption is true for large N_c . B_0 is minimized where either $(3 + \delta x) = 0$ (*i.e.* the unbroken supersymmetry minimum) or

$$1 + \frac{2\delta^2 J}{(3 + \delta x)} - \delta J_x = 0. \quad (61)$$

This can be satisfied for small x by functions J that vary sufficiently fast close to $x = 0$. For small x the extremum is always at

$$x \approx \frac{1}{a\delta}, \quad (62)$$

where $J = 1 + a\frac{x^2}{2} + \dots$. The sign of B_{xx} is the same as that of $-J_{xx}$. In other words for positive a we get a maximum at small values of x with $\delta_{GS}x > 0$ and for negative a we get a minimum at small values of x with $\delta_{GS}x < 0$.

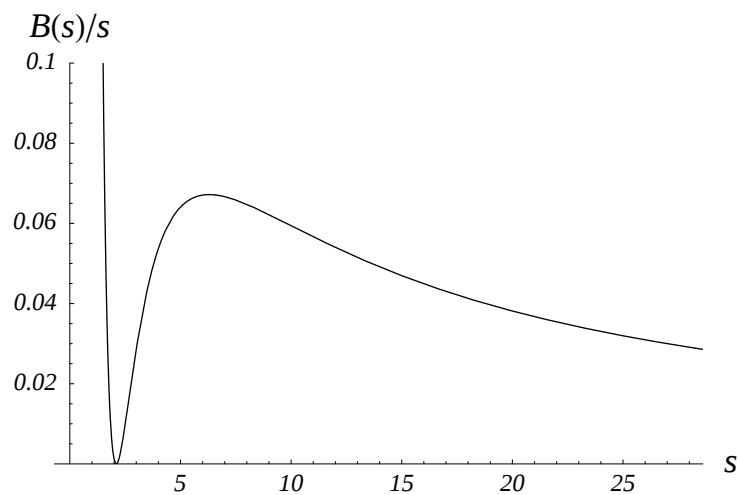


Figure 2: Effective potential $B(s)/s$ with the cosmological constant set to zero; $s = S + \bar{S}$

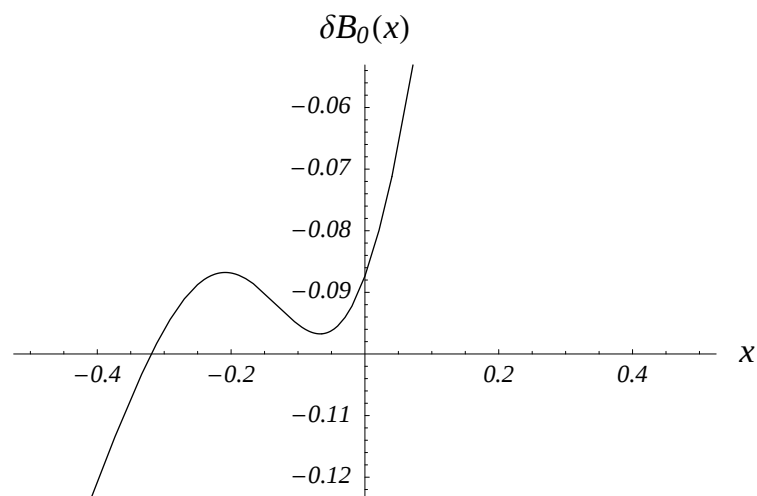


Figure 3: The function $\delta B_0(x)$ for $J = e^{ax^2/2}$ where $a = -60$.

We plot $B_0(x)$ in figure (3) for $J = e^{ax^2/2}$ where $a = -60$ and $\delta = 0.3$ (a large but realistic value according to ref. [13]). Any function J that falls off sufficiently fast will form a minimum, the important feature being the coefficient of x^2 in J or, since we are at small $x \sim m$, the value of $a = K''''$ at $m = 0$ (where primes denotes differentiation with respect to m). A perhaps more realistic example is

$$\hat{K}(m) = \frac{3}{a} \ln \left(1 + \frac{a}{6} m^2 \right). \quad (63)$$

The minimum in B_0 is found at

$$\delta B_0|_{min} \approx \frac{1}{2a} - \delta^2. \quad (64)$$

In other words, since a is negative to form a minimum, the condition that $B_0\sigma < 0$ to stabilize the dilaton requires $\sigma\delta > 0$.

All fields, including the m field, can be stabilized with small negative cosmological constant provided we have a large negative value for $K''''(0)$. Plugging our expressions for σ and B_0 back into the solutions for s in eq.(54), we have

$$s \approx \frac{\sigma}{\delta^2}. \quad (65)$$

To summarize, in both cases the dilaton is stabilized primarily because of the M/T mixing. Without this mixing (*i.e.* setting $\delta = 0$) we find only the runaway solution. The second important factor is that the gauge kinetic functions involve a linear combination of S and M , described by the σ coefficient which, like δ , is model-dependent. We need a particular sign of σ in order to have a minimum other than the usual runaway minimum.

We also note that in the minimization there was an interesting interplay between the D -terms and the F -terms. This is similar to the D -term mediation of supersymmetry breaking described in ref. [23], except here different terms are set to zero at the minimum. (In the present case we have $W_1 \approx 0$ and $W_2 \neq 0$ whereas in ref. [23] the minimization is at $W_2 \approx 0$ and $W_1 \neq 0$.) In order to achieve this we *a priori* need to choose a perturbative superpotential, W_p , which gets a non-zero expectation value.

6 Supersymmetry breaking terms

Since we have control over the VEVs of all the fields, it is now possible to write the complete expressions for supersymmetry breaking without having to define an arbitrary goldstino angle. Again we will consider only one M_k field for simplicity. The supersymmetry breaking effects are carried by the auxiliary fields F^α

$$F^\alpha = e^{G/2} G^{\alpha\bar{\beta}} G_{\bar{\beta}}. \quad (66)$$

At the minimum,

$$\begin{aligned}
G_{\overline{S}} &= 0 \\
G_{\overline{M}} &= x - B_0 \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \lambda^2} \\
G_{\overline{n}} &= \frac{(3 + \delta x)}{\tau} \phi_n \quad n = 1, 3 \\
G_{\overline{2}} &= \frac{(3 + \delta x)}{\tau} \phi_2 - \frac{\Delta}{4\pi^2 \phi_2}.
\end{aligned} \tag{67}$$

Defining

$$\omega = \frac{\Delta}{4\pi^2(3 + \delta x)}, \tag{68}$$

this gives

$$F^\alpha = (0, F^T, F^M, F^i) \tag{69}$$

where

$$\begin{aligned}
F^T &= e^{G/2} \tau \left(\frac{\delta^2}{A} - 1 - \omega \right) \\
F^M &= e^{G/2} \frac{\lambda^2}{\sigma^2 + \lambda^2} \left(\frac{A}{(3 + \delta x)} x - \delta \right) \\
F^1 &= F^3 = 0 \\
F^2 &= -e^{G/2} \frac{\tau}{\phi_2} \omega.
\end{aligned} \tag{70}$$

The gaugino masses are given by

$$M_a = \frac{1}{2} (Re(f_a))^{-1} F^\alpha \partial_\alpha f_a \tag{71}$$

where f_a is the gauge kinetic function for the gauge group. For gauge groups that live on the D9-brane we have $f_a = S + \sigma_a M$ so that

$$M_9 = \frac{1}{2} m_{3/2} \frac{\sigma_a \lambda^2}{\sigma^2 + \lambda^2} \frac{\left(\frac{A}{(3 + \delta x)} x - \delta \right)}{Re(S + \sigma_a M)} \tag{72}$$

where the VEVs of S and M can be deduced from the expressions above. These relatively small D9 gaugino mass terms arise solely due to the non-zero value F^M in a manner suggested in ref. [8].

We shall present the remaining supersymmetry breaking in the limit where $\lambda^2 \ll \sigma^2$, allowing us to drop terms of order λ^2/σ^2 and to set $F^M = 0$. Consider the supersymmetry breaking for visible sector fields, C_α , which occur in the same no-scale structure as the ϕ_1, ϕ_2 fields (*i.e.* they are C_i^9 or C_i^{5j} fields). As usual, we expand the Kähler

potential around $C_\alpha = 0$ in a basis in which the Kähler metric is diagonal in the matter fields;

$$K = K_0 + \mathcal{Z}_\alpha |C_\alpha|^2 + \dots \quad (73)$$

The expressions for the scalar masses (where $m_{3/2} = e^{G/2}$) are

$$m_\alpha^2 = m_{3/2}^2 + V_0 - F^{\bar{\sigma}} F^\rho \partial_{\bar{\sigma}} \partial_\rho \ln \mathcal{Z}_\alpha. \quad (74)$$

Substituting the Kähler potential we get

$$\begin{aligned} |F^T|^2 \partial_T \partial_{\bar{T}} \ln \mathcal{Z}_\alpha &\approx \frac{A^2 (1 + \omega - \frac{\delta^2}{A})^2}{(A - \delta^2)^2} m_{3/2}^2 \\ F^{\bar{T}} F^2 \partial_{\bar{T}} \partial_2 \ln \mathcal{Z}_\alpha &\approx -\frac{A^2 \omega}{(A - \delta^2)^2} (1 + \omega - \frac{\delta^2}{A}) m_{3/2}^2 \\ |F^2|^2 \partial_2 \partial_{\bar{2}} \ln \mathcal{Z}_\alpha &\approx \frac{A^2 \omega^2}{(A - \delta^2)^2} m_{3/2}^2, \end{aligned} \quad (75)$$

where we have used eq.(61). Hence we find

$$m_{\alpha,9}^2 = V_0 \approx 0. \quad (76)$$

This is a small negative mass-squared term of order $-\delta^2$. However eq.(61) is not true for the ‘no-scale’ case, and also relies on our assumption that $\lambda^2 \ll \sigma^2$. If either of these conditions are not satisfied then we can get nett positive mass squared terms of order $\delta^2 m_{3/2}^2$.

Finally the A -terms for a Yukawa coupling $C_\alpha C_\beta C_\sigma$ are given by

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta\gamma} &= F^\rho (K_\rho + \partial_\rho \ln Y_{\alpha\beta\gamma} - \partial_\rho \ln (\mathcal{Z}_\alpha \mathcal{Z}_\beta \mathcal{Z}_\gamma)) \\ &= m_{3/2} \left(-\delta x + 3 \frac{\delta^2 J}{3 + \delta x} \right) (-1 + \omega) \\ &\approx 0. \end{aligned} \quad (77)$$

where we have assumed that $\partial_T Y_{\alpha\beta\gamma} = \partial_2 Y_{\alpha\beta\gamma} = 0$.

So, for the fields and gauge groups associated with the D9-branes, the soft breaking terms are suppressed by powers of δ^2 . However, supersymmetry breaking can be more interesting for the fields living on the D5-branes. In general the Kähler potential is of the form [4]

$$\begin{aligned} K &= -\ln \left(s - \sum_i |C_i^{5_i}|^2 \right) - \sum_i \ln \left(\tau - |C_i^9|^2 - \sum_{j \neq k \neq i=1}^3 |C_j^{5_k}|^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j \neq k \neq i=1}^3 \frac{|C_j^{5_k}|^2}{s^{1/2} \tau^{1/2}} + \sum_{i=1}^3 \frac{|C_i^{95_i}|^2}{\tau}, \end{aligned} \quad (78)$$

where again we have assumed degenerate moduli fields ($T_i = T_j = T_k = T$). (As we mentioned in the introduction, our choice of putting the ϕ_n fields in a single τ formally corresponds to the linear combination $\phi_n = \frac{1}{\sqrt{3}}(C_{1n}^9 + C_{2n}^9 + C_{3n}^9)$. However, once we have imposed $D_X = 0$, the VEVs of ϕ_n and τ indicate that the Kähler potential we have been using throughout is equivalent to the above upto order $(\delta_{GS}x)^2$, independently of the particular linear combination.). This gives us the following supersymmetry breaking pattern.

Mass-squareds;

$$\begin{aligned} C_i^9, C_{j \neq i}^{5i}, C^{95i} &: m_\alpha^2 = m_{\alpha,9}^2 \approx 0 \\ C^{5i5j} &: m_\alpha^2 \approx \frac{1}{2}m_{3/2}^2 \\ C_i^{5i} &: m_\alpha^2 \approx m_{3/2}^2. \end{aligned} \quad (79)$$

Gaugino Masses;

$$\begin{aligned} M_9 &\approx 0 \\ M_{5i\ a} &\approx -\frac{1}{2}m_{3/2} \frac{\tau}{\text{Re}(T + \sigma_a M)}. \end{aligned} \quad (80)$$

A-terms;

$$A_{\alpha\beta\gamma} \approx m_{3/2} (3 - (\alpha + \beta + \gamma)) \quad (81)$$

where

$$\alpha = -\tau \partial_T \ln \mathcal{Z}_\alpha = \left(1, \frac{1}{2}, 0\right) \quad \text{for} \quad (C_i^9 C^{95i} C_{j \neq i}^{5i}, C^{5i5j}, C_i^{5i}) \quad \text{respectively,} \quad (82)$$

so that, for example, a coupling between $C_i^9 C^{5i5j} C_i^{5i}$ would give $A = 3/2 m_{3/2}$. Note the usual sum-rule relating A-terms and mass-squareds [4];

$$m_\alpha^2 + m_\beta^2 + m_\sigma^2 = A_{\alpha\beta\gamma}. \quad (83)$$

To conclude, while the auxiliary fields F^2 can be larger than F^T , under the simplifying assumptions we have made, the soft masses and A-terms are independent of F_2 . In addition the supersymmetry breaking shows a rather interesting structure which may allow us to realise of a number of suggestions that have been put forward as solutions to the supersymmetric flavour and CP problems. For example it might be possible to make the first and second generations of squarks heavy [24] (of order a few TeV) if they are C_i^{5i} fields whilst the 3rd generation is a $C_{j \neq i}^{5i}$ field. Alternatively, if the higgs plus first generation particles are $C_{i \neq j}^{5i}$ fields, one would have an interesting non-universal structure for the A-terms [25], and a suppression of contributions to electric dipole moments, in a manner similar to that described in ref. [26].

7 Conclusion

In this paper we considered gaugino condensation in 4D effective theories of type I strings, and discussed its effect on dilaton stabilization and the structure of soft breaking terms. Our main observation was that dilaton stabilization is possible with only one gaugino condensate. An important role is played by the twisted (M) moduli fields which are a novel feature of these models. These fields enter in two important ways;

- First they contribute a new term to the Kähler potential, which includes, at the one-loop level, a mixing with the T -moduli. This mixing is one essential feature preventing the dilaton running away to infinity as in the heterotic case.
- The other crucial ingredient comes from the tree level M -dependence in the gauge kinetic functions. This leads to some unusual properties of the non-perturbative dynamics of these gauge theories. In particular the M field appears in the condensation scale and it is this, combined with the M/T mixing in the Kähler metric, that can stabilize the dilaton.

We found that dilaton stabilization occurs quite generally with two possible outcomes. In the first we set the cosmological constant to be exactly zero and all fields except the M field are fixed. The M field then parameterizes the supersymmetry breaking in a way which is reminiscent of ‘no-scale’ models. The second possibility is to tolerate a small negative cosmological constant. In this case we showed that certain types of M dependent terms in the Kähler potential can lead to a stabilization of all fields including the M field itself. (The latter is stabilized at values close to the orbifold point.) Although there is still some ignorance about the precise form of the M dependence in the Kähler potential, we were able to derive the general conditions required to develop a minimum for M ; namely that $\partial^4 K / \partial M^4$ must be large and negative.

The issues we have presented here certainly deserve further investigation. For example, the phenomenological possibilities of the resulting supersymmetry breaking patterns seem promising and we briefly mentioned some potential avenues of exploration. Furthermore, in this paper we have made only the simplest (in a sense, minimal) assumption, that the condensing gauge group lives on a D9-brane. It would be interesting to consider cases in which the gauge groups and mesons are assigned differently. In addition we have not touched upon the question of fundamental scales; it may be interesting to re-examine ideas such as ‘mirage unification’, in which the apparent unification of couplings is partly explained by the VEV of M [27]. Consistent mirage unification would directly relate the unification scale to the parameters in the theory (*i.e.* δ and σ) that determine $\langle M \rangle$.

Acknowledgements

We would like to thank Emilian Dudas, Shaaban Khalil, Stéphane Lavignac, Fernando Quevedo, Carlos Savoy for enlightening discussions and suggestions, and for generous support.

References

- [1] B. de Carlos, J. A. Casas and C. Muñoz, Phys. Lett. **B299** (1993) 234 ;
- [2] M. Dine and Y. Shirman, hep-th/9906246.
- [3] G. Aldazabal, L. E. Ibáñez, F. Quevedo and A. Uranga, hep-th/0005067.
- [4] L. E. Ibáñez, C. Muñoz and S. Rigolin, Nucl. Phys. **B553** (43) 1999 [[hep-ph/9812397].
- [5] G. Aldazabal, A. Font, L. E. Ibáñez and G. Violero, Nucl. Phys. **B536** (1998) 29 .
- [6] G. Aldazabal, L. E. Ibáñez and F. Quevedo, JHEP 0001 (2000) 031, [hep-th/9909172]; hep-ph/0001083.
- [7] A. Sagnotti, in Cargese 87, *Strings on Orbifolds*, ed. G. Mack et al. (Pergamon Press, 1988) p. 521; P. Horava, Nucl. Phys. **B327** (1989) 461 ; Phys. Lett. **B231** (1989) 251 ; J. Dai, R. Leigh and J. Polchinski, Mod.Phys.Lett. A4 (1989) 2073; R. Leigh, Mod.Phys.Lett. A4 (1989) 2767; G. Pradisi and A. Sagnotti, Phys. Lett. **B216** (1989) 59 ; M. Bianchi and A. Sagnotti, Phys. Lett. **B247** (1990) 517 ; E. Gimon and J. Polchinski, Phys. Rev. **D54** (1996) 1667 , [hep-th/9601038]; E. Gimon and C. Johnson, Nucl. Phys. **B477** (1996) 715 , [hep-th/9604129]; A. Dabholkar and J. Park, Nucl. Phys. **B477** (1996) 701 , [hep-th/9604178].
- [8] K. Benakli, Phys. Lett. **B475** (2000) 77, [hep-ph/9911517]; S. A. Abel, B. C. Allanach, F. Quevedo, L. Ibáñez and M. Klein, hep-ph/0005260.
- [9] D. Bailin, G. V. Kraniotis and A. Love, hep-ph/0007206; E. Gabrielli, S. Khalil, C. Muñoz and E. Torrente-Lujan, hep-ph/0006266;
- [10] S. A. Abel and B. C. Allanach, JHEP **0007** (2000) 037 [hep-ph/9909448]; L. Everett, G. L. Kane and S. F. King, JHEP **0008** (2000) 012, [hep-ph/0005204]; M. Brhlik, L. Everett, G. L. Kane and J. Lykken, Phys. Rev. **D62** (2000) 035005, [hep-ph/9908326]; M. Brhlik, L. Everett, G. L. Kane, S. F. King and O. Lebedev, Phys. Rev. Lett. **84** (2000) 3041, [hep-ph/9909480].
- [11] A. Sagnotti, Phys. Lett. **B294** (1992) 196 , [hep-th/9210127]; A. Sagnotti, hep-th/9302099; S. Ferrara, F. Ricciioni and A. Sagnotti, Nucl. Phys. **B519** (1998) 115 , [hep-th/9711059]; L. E. Ibáñez, R. Rabadan and A. M. Uranga, Nucl. Phys. **B542** (1999) 112 , [hep-th/9808139].
- [12] L. E. Ibáñez, R. Rabadan and A. Uranga, hep-th/9905098.
- [13] I. Antoniadis, C. Bachas and E. Dudas, Nucl. Phys. **B560** (1999) 93 .
- [14] A. B. Lahanas and D. V. Nanopoulos, Phys. Rept. **145** (1987) 1.

- [15] Z. Lalak, S. Lavignac and H. P. Nilles, Nucl. Phys. **B576** (2000) 399, [hep-th/9912206]; Nucl. Phys. **B559** (1999) 48, [hep-th/9903160].
- [16] G. Veneziano and S. Yankielowicz, Phys. Lett. **B113** (1982) 231; T. R. Taylor, G. Veneziano and S. Yankielowicz, Nucl. Phys. **B218** (1983) 493; I. Affleck, M. Dine and N. Seiberg, Nucl. Phys. **B256** (1985) 557; C. P. Burgess, J. P. Derendinger, F. Quevedo and M. Quiros, Annals Phys. **250** (1996) 193, [hep-th/9505171].
- [17] T. Dent, JHEP **0008** (2000) 013, [hep-th/0006101].
- [18] C. P. Burgess, A. de la Macorra, I. Maksymyk and F. Quevedo, Phys. Lett. **B410** (1997) 181, [hep-th/9707062].
- [19] T. Banks and M. Dine, Nucl. Phys. **B479** (96) 173 ; P. Binétruy, M. K. Gaillard and Y. Wu, Nucl. Phys. **B481** (1996) 109, [hep-th/9605170]; Nucl. Phys. **B493** (1997) 27, [hep-th/9611149]; Phys. Lett. **B412** (1997) 288, [hep-th/9702105]; J. A. Casas, Phys. Lett. **B384** (1996) 103, [hep-th/9605180]; T. Barreiro, B. de Carlos and E. J. Copeland, Phys. Rev. **D57** (1998) 7354, [hep-ph/9712443].
- [20] S. H. Shenker, RU-90-47 *Presented at the Cargese Workshop on Random Surfaces, Quantum Gravity and Strings, Cargese, France, May 28 - Jun 1, 1990.*
- [21] F. Quevedo , private communication.
- [22] E. Dudas and C. Grojean, Nucl. Phys. **B507** (1997) 553, [hep-th/9704177].
- [23] P. Binétruy and E. Dudas, Phys. Lett. **B389** (1996) 503, [hep-th/9607172].
- [24] S. Dimopoulos and G. F. Giudice, Phys. Lett. **B357** (1995) 573, [hep-ph/9507282].
- [25] S. A. Abel and S. Khalil, in preparation.
- [26] S. A. Abel and J. M. Frère, Phys. Rev. **D55** (1997) 1623, [hep-ph/9608251]; S. Khalil, T. Kobayashi and A. Masiero, Phys. Rev. **D60** (1999) 075003, [hep-ph/9903544]; S. Khalil, T. Kobayashi and O. Vives, Nucl. Phys. **B580** (2000) 275 [hep-ph/0003086]; S. Khalil and T. Kobayashi, Phys. Lett. **B460** (1999) 341, [hep-ph/9906374].
- [27] L. E. Ibáñez, hep-ph/9905349.

Publication VI

CP and Flavour in effective Type I String Models

Saclay T00/179
hep-th/0105262

CP and Flavour in effective Type I String Models

S.A. Abel^{a,b} and G. Servant^c^a CPES, University of Sussex, Falmer, Brighton BN1 9RH, UK^b CPT, Durham University, South Road, Durham DH1 3LE, UK^c CEA-SACLAY, SPHT, F-91191 Gif-sur-Yvette Cédex, France

Abstract

Effective type I string models allow stabilization of the dilaton and moduli fields with only a single gaugino condensate. We show that, as well as breaking supersymmetry, the stabilization can spontaneously break CP. We find that this source of CP violation hints strongly at being a natural solution to the supersymmetric CP and flavour problems. Even though the CP violation generates physical phases in the Yukawa couplings, all the supersymmetry breaking terms are found to be automatically real and given by the $U(1)$ charges of the associated Yukawa couplings. These can be chosen to have a structure (degenerate or non-universal) which suppresses FCNCs and EDMs. We examine the phenomenological implications, including the generation of the μ -term, and the effect of higher order terms.

PACS: 11.25.Mj, 04.65.+e, 11.30.Er, 12.60.Jv.

Keywords: Superstring models, Symmetry breaking, Soft terms, CP violation, Flavour.

1 Introduction

Flavour and CP are especially problematic in supersymmetry because a *generic* choice of parameters violates experimental bounds on, for instance, $b \rightarrow s\gamma$ and neutron electric dipole moments (EDMs). These two aspects of supersymmetry are known generically as the SUSY flavour and CP problems, and they are probably the most useful tools for probing the underlying theory. In this paper we present a dynamical solution to these problems, which emerges in the light of recent progress on dilaton stabilization in effective models of type I string [1].

Since the importance of dilaton stabilization may be less than transparent, let us begin by discussing the canonical example of a ‘dynamical’ solution to the SUSY flavour and CP problems, dilaton domination. The idea is illustrated schematically in fig.(1a). Supersymmetry breaking is described by the *vevs* of the auxilliary (F) fields. Together they describe a vector whose length is determined by the requirement that the cosmological constant be zero. Its direction however is determined by whatever dynamics breaks supersymmetry. Dilaton domination asserts that it is aligned with the dilaton. Since the dilaton couples equally to all fields, the resulting SUSY breaking terms in the visible sector are very constrained and indeed one finds a suppression of EDMs and FCNCs.

The assumptions underlying dilaton domination are rather more brutal than they might at first appear, since there are more fields than just the dilaton and moduli involved in Planck scale physics. For example, any superfield whose scalar component gets a *vev* at a high scale can also be involved in transmitting supersymmetry breaking. In particular this is likely to be the case for the very fields that are responsible for flavour structure and CP violation in the first place. Thus one has to assume that, either the spontaneous breaking of CP and flavour does not contribute significantly to supersymmetry breaking thereby affecting the dynamics (*e.g.* the goldstino angle in the case of dilaton domination), or that the alignment of the goldstino with the dilaton is true *a posteriori*.

Clearly, a credible ‘dynamical’ solution requires a full determination of the goldstino direction, and that in turn requires a specific model of dilaton and moduli stabilization and spontaneous CP violation. Without all of these ingredients, we think that any dynamical solutions to the SUSY flavour and CP problems will be at best incomplete. To put it more bluntly; can one really trust a dynamical solution to the SUSY CP problem that does not explain the origin of CP violation?

These considerations suggest the approach that we will follow in this paper, which is to avoid tackling flavour and CP head on, but rather to begin by attacking the most difficult part of the problem, namely dilaton stabilization. Our starting point will be the dilaton stabilization scheme found in ref. [1] in effective type I models. As we shall see, this scheme includes a rather generic way to spontaneously break CP. This gives us the required complete dynamical picture of dilaton and moduli *vevs*, supersymmetry breaking *and* CP breaking.

Anomalous $U(1)$ ’s play a central role in the stabilization, and consequently the supersymmetry breaking picture which emerges bears some resemblance to the anoma-

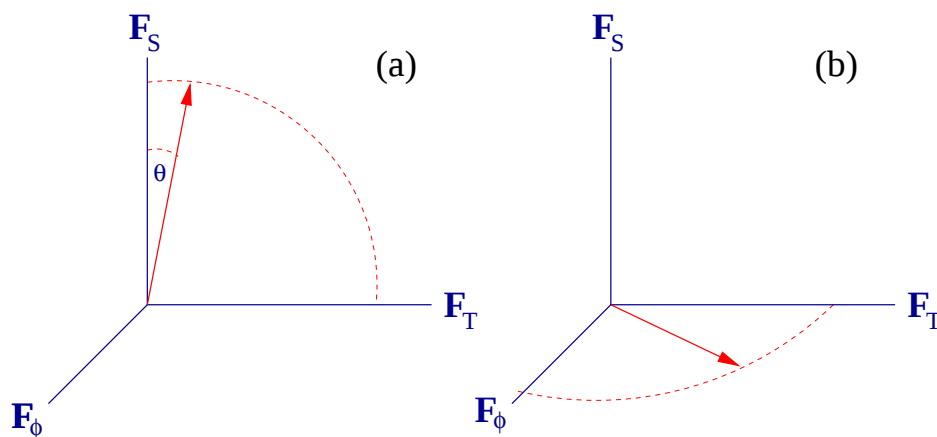


Figure 1: *Supersymmetry breaking dynamics leads to non-zero vevs of auxilliary fields of the dilaton, moduli, and any other fields, such as Froggatt-Nielsen fields, that get vevs at high scales. Their relative sizes can be expressed with ‘goldstino’ angles. (a) shows schematically the dilaton domination scenario. (b) shows effective type I models with supersymmetry broken by a condensing D9-brane gauge group, and with stabilized dilaton and moduli fields. The full dynamical calculation relates the F -terms and completely determines the goldstino angles.*

lous $U(1)$ mediation models of refs. [2], although the F -terms are the dominant source of supersymmetry breaking in the case we examine, rather than the D terms. The picture of supersymmetry breaking that eventually emerges is shown in fig.(1b). The dilaton auxilliary field is zero so supersymmetry breaking is *not* dilaton dominated. Nevertheless the goldstino direction is determined by the choice of $U(1)$ charges. An appropriate choice gives soft terms that are degenerate providing a leading order suppression of FCNCs that depends only on the charge assignments, and is otherwise independent of the form of Yukawa couplings. In addition, independently of the charge assignments, the soft terms are guaranteed to be real even though the Yukawa couplings can have maximal CP violation, thereby suppressing EDMs. There can, however, be a higher order parametrically small breaking of CP in the soft terms as well. If the CP phase in the CKM matrix happens to be small, this is an explicit manifestation of the approximate CP idea [3].

We stress that we will not make any ad-hoc assumptions about the dilaton or moduli stabilization, or the CP violation which we will treat completely. Moreover, the suppression of FCNCs and EDMs is extremely general, requires no assumptions about the hidden sector particle content and only very mild assumptions about the hidden sector superpotential. Consequently the SUSY breaking in the visible sector can be much more general than the dilaton domination pattern.

We begin in the following section by recapitulating the supergravity scalar potential obtained in ref. [1] and showing how it stabilizes the dilaton and moduli. Here we will discuss the role of modular invariance in the non-perturbative superpotential, and also

demonstrate why a similar stabilization mechanism cannot work in the heterotic string. In section III, we present our model for generating Yukawa hierarchies and see how CP can be spontaneously broken. In section IV, we discuss the condensation and string scales allowed by our model. Section V is devoted to the computation of the SUSY breaking terms and we show how CP violation is naturally suppressed in the latter even though it appears in the Yukawa couplings. In section VI we address the problem of the generation of the μ -term and the implications of higher order corrections for the susy flavour and CP problems. We will find that only a mild tuning of couplings can potentially solves these problems. We summarize our results in section VII.

2 Stabilization with and without modular invariance

In this section we discuss the main features of the dilaton stabilization mechanism derived in ref. [1] in the context of effective type IIB orientifold models. We first introduce the effective models, discuss the role of modular invariance in the effective potential, and state the two main assumptions that lead to a stabilization of the dilaton and moduli. We then consider theories both with and without modular invariance. The first case was discussed in ref. [1], and we shall briefly recap the results and generalize them. We then consider models in which the superpotential is constrained by modular symmetries. The modular invariant case has the advantage that the Kähler potential can be adjusted to give a vanishing cosmological constant at the (local) minimum. We also discuss why a similar minimization cannot be achieved in the heterotic string.

2.1 Effective models and modular invariance

Our starting point is the effective theory of $D = 4$, $N = 1$ type IIB orientifolds. The important features are as follows:

As well as the matter fields, the models contain a complex dilaton S , untwisted moduli T_i associated with the size and shape of the extra dimensions and complex superfields M_k associated with the fixed points (labelled by k) of the underlying orbifold. An important property of these models is that the M_k superfields appear linearly in the gauge kinetic functions. For gauge groups living on a D9-brane

$$f_{9a} = S + \sum_k \sigma_a^k M_k, \quad (1)$$

whereas for the D5-branes

$$f_{5i a} = T_i + \sum_k \sigma_{ia}^k M_k, \quad (2)$$

where σ_a^k are calculable model dependent coefficients and k runs over the different twisted sectors. In most of what follows we will consider only one degenerate value

for the M_k superfields which we will denote M (it is straightforward to generalize). The M_k superfields participate in the generalized Green–Schwarz mechanism for the cancellation of $U(1)_X$ anomalies. This contrasts with heterotic models where the dilaton plays this role. Under a $U(1)$ transformation through a phase α , the M_k fields transform linearly,

$$M_k \rightarrow M_k + i \frac{\delta_{GS}}{2} \alpha. \quad (3)$$

Type IIB orientifold / heterotic duality has been used to argue that there is also a σ -model invariance under $SL(2, \mathbf{Z})$ transformations of the T_i ;

$$T_i \rightarrow \frac{a_i T_i - i b_i}{i c_i T_i + d_i} \quad ; \quad \phi_n \rightarrow \phi_n \prod_{i=1}^3 (i c_i T_i + d_i)^{n_i} \quad (4)$$

where $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathcal{Z}$ and n_n^i are modular weights of the ϕ_n with respect to the i th complex direction. These symmetries are broken by the presence of D5-branes, as is obvious from the expressions for f_{5i} . However, one expects a remnant of them to survive in directions that are orthogonal to the D5 branes, and again it is the M_k fields that shift to cancel any σ -gauge anomalies [4]⁽¹⁾;

$$M_k \rightarrow M_k + \sum_i \delta_k^i \ln(i c_i T_i + d_i). \quad (5)$$

In order to cancel $\sigma - F_a$ anomalies, denoted C_a^i , we require

$$\sum_k \sigma_{ia}^k \delta_k^i = C_a^i, \quad (6)$$

for any preserved modular symmetries. The anomalous $U(1)$'s and modular symmetries will be important constraints on the possible form of the superpotential.

When taking into account the presence of $D5$ branes in the vacuum, there are four types of charged matter fields: C_i^9 (i labels the three complex dimensions) comes from open strings starting and ending on the 9-branes; C_i^{5j} from open strings starting and ending on the same 5_i -branes; $C^{5_i 5_j}$ from open strings starting and ending on different sets of 5_i -branes; $C^{9 5_i}$ from open strings with one end on the 9-branes and the other end on the 5_i -branes. The Kähler potential for the S, T_i and C fields is of the general form [6]:

$$K = -\ln \left(S + \bar{S} - \sum_i |C_i^{5_i}|^2 \right) - \sum_i \ln \left(T_i + \bar{T}_i - |C_i^9|^2 - \sum_{j \neq k \neq i=1}^3 |C_j^{5_k}|^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{j \neq k \neq i=1}^3 \left(\frac{|C^{5_j 5_k}|^2}{(S + \bar{S})^{1/2} (T_i + \bar{T}_i)^{1/2}} + \frac{|C^{9 5_i}|^2}{(T_j + \bar{T}_j)^{1/2} (T_k + \bar{T}_k)^{1/2}} \right). \quad (7)$$

⁽¹⁾For further work on the cancellation of $SL(2, \mathbf{Z})$ /gauge/gravitational anomalies in orientifold models at string level see [5].

We will only consider C_i^9 because they correspond to the fields which will later condense. K can be rewritten at one loop:

$$K = -\ln s - 3 \ln \tau + \hat{K}(m), \quad (8)$$

where

$$s = S + \overline{S}; \quad \tau = T + \overline{T} - \sum_n |\phi_n|^2; \quad m = M + \overline{M} - \delta \ln \tau. \quad (9)$$

We have introduced generic fields ϕ_n to represent matter fields C_i^9 and for the moment consider only the overall moduli, taking $T_i = T$, $M_k = M$ and $\delta_k^i = \delta$ leaving the more general case for later. We shall express all quantities including the string scale (M_s) in natural units where $M_P = 1$ and for later convenience define fields scaled in string units with a tilde – for example $\tilde{\phi} = \phi/M_s$. The first two terms have the usual “no-scale” structure with the T and ϕ_n -dependence appearing in the combination τ only. All M dependence appears in the modular invariant combination, m , and giving a *vev* to m takes us away from the orientifold point. The $\delta \ln \tau$ correction can be deduced from the one loop expression for the gauge coupling and depends on the tree-level expression for K . Although it is currently unclear what the precise form of the m -dependence in the Kähler potential should be, we know that $\hat{K}$ is an even function of m thanks to the orbifold symmetry, and that the leading term in an expansion about the orientifold point, $m = 0$, is quadratic, $\hat{K} = \frac{1}{2}m^2 + \dots$. We will accommodate the uncertainty in the form of $\hat{K}$ by working with the parameter $x = \partial \hat{K} / \partial M$ where near the orientifold point $x \approx m$.

2.2 Two assumptions for stabilization

This completes the general overview of the type I models that will form the basis for our discussion. In order to stabilize the dilaton, we now augment them with two mild assumptions about the superpotential:

- Our first assumption is that there is a non-perturbative contribution to the superpotential, W_{np} , which is generated by hidden sector gaugino condensation with single gauge group $SU(N_c)$ residing on a D9-brane and with extra (anti)quarks ($\overline{Q}$) Q in the (anti)fundamental representation of $SU(N_c)$. Below the scale $\Lambda = M_s e^{-f_9/2\beta}$, where $\beta = \frac{3N_c-1}{16\pi^2}$, $\overline{Q}$ and Q form a composite meson field, $\phi_0 = \sqrt{Q\overline{Q}}$. W_{np} is fixed uniquely by global symmetries and reads

$$W_{np} = \left(\frac{\Lambda^{3N_c-1}}{\phi_0^2} \right)^{\frac{1}{N_c-1}}. \quad (10)$$

There is no T -dependence in this expression since there is no T -dependence in the one-loop expression for the gauge kinetic function f_9 in the type I case. Note that the superpotential is also invariant under the $U(1)_X$ symmetry, and

has the correct modular behaviour. For example, the lagrangian is invariant under overall modular transformations if the combination $G = K + \ln |W|^2$ is invariant, which implies that W_{np} has weight -3 . In models where there are no D5-branes, this is the case and the necessary modular weight is provided by ϕ_0 and the transformation of M ; Z_3 and Z_7 orientifolds have $f_9 = S \pm \beta M$ with our definitions⁽²⁾, and under an $SL(2, \mathcal{Z})$ transformation $M \rightarrow M \pm 2 \ln(icT + d)$ [4]. Thus both Λ and ϕ_0 have weight -1 , and W_{np} has overall weight -3 as required. This is also true when there are N_m mesons, in which case it is $\det(\tilde{Q}Q)$ (with weight $-2N_m$) that appears in the denominator. As we mentioned above, the T_i modular symmetries are broken by the presence of D5_i-branes, but are expected to be preserved along the directions without them.

- The second assumption is that, as well as the MSSM, the superpotential contains additional pieces involving the remaining fields $\phi_{m=1,\dots,N}$. In particular the extra terms should generate a perturbative mass term for ϕ_0 (e.g. $\phi_1 \phi_0^2$). The ϕ_m and ϕ_0 are charged under the anomalous $U(1)_X$ with charges $q_{m,0}$, so that the perturbative piece of the hidden sector superpotential can always be written in terms of the m invariants of $U(1)_X$ which we can choose arbitrarily to be $X_m = \phi_m^{-2q_0/q_m} \phi_0^2$.

2.3 The general form of the scalar potential

In type I models, the Kähler metric can be inverted without approximation, and the resulting scalar potential takes the form [1]

$$V_F = e^G B, \quad (11)$$

where

$$\begin{aligned} G &= K + \ln |W|^2 \\ B &= \delta B_0 + \left| 1 - s \frac{W_S}{W} \right|^2 + \frac{\tau}{(3 + \delta x)} \sum_n \left| \frac{W_n}{W} \right|^2 + \hat{A} \left| B_0 + \sigma \frac{W_S}{W} \right|^2 \\ B_0 &= x - \frac{\delta}{\hat{A}} \\ \hat{A} &= \frac{1}{\hat{K}_{M\overline{M}}} + \frac{\delta^2}{3 + \delta x}, \end{aligned} \quad (12)$$

and where subscripts denote differentiation, and it is convenient to define $x = K_M$. The potential can be expressed more concisely in terms of the auxilliary fields,

$$F^\alpha = e^{-G/2} G^{\alpha\overline{\beta}} G_{\overline{\beta}}. \quad (13)$$

⁽²⁾Note that we are using the definition $Re(f) = 1/g^2$, and the conventions of ref. [7] in which $\beta = (3N_c - 1)/16\pi^2$.

The F -terms that we need are

$$\begin{aligned}
 F^S &= e^{G/2} \cdot s \left(s \frac{\overline{W}_S}{\overline{W}} - 1 \right) \\
 F^M &= e^{G/2} \cdot \hat{A} \left(B_0 + \sigma \frac{\overline{W}_S}{\overline{W}} \right) \\
 F^0 &= \phi_0 e^{G/2} \cdot \frac{1}{|\hat{\phi}_0|^2} \left(2 \sum_m \frac{X_m \overline{W}_{X_m}}{\overline{W}} + \frac{1}{4\pi^2} \frac{\overline{W}_S}{\overline{W}} \right) \\
 F^m &= \phi_m e^{G/2} \cdot \frac{-2q_0}{q_m |\hat{\phi}_m|^2} \frac{X_m \overline{W}_{X_m}}{\overline{W}}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Above and henceforth, we denote canonically normalized fields with a hat;

$$\hat{\phi}_n = \sqrt{\frac{(3 + \delta x)}{\tau}} \phi_n ; \quad \hat{F}^n = \sqrt{\frac{(3 + \delta x)}{\tau}} F^n ; \quad \hat{F}^S = \frac{1}{s} F^S ; \quad \hat{F}^M = \frac{F^M}{\sqrt{\hat{A}}}. \tag{15}$$

In terms of the canonically normalized auxilliary fields we have

$$V_F = e^G \delta B_0 + |\hat{F}^S|^2 + |\hat{F}^M|^2 + \sum_{n=0} |\hat{F}^n|^2. \tag{16}$$

This form is reminiscent of the no-scale models, however the potential is not positive definite since the functions B_0 can be negative for finite values of x . Indeed, when $\hat{F}^{S,M,n} = 0$, supersymmetry is restored where $3 + \delta x = 0$. Here we find the global minimum with $V_F = -3e^G$.

In addition to the F -term contribution, there is an important D -term contribution coming from the anomalous $U(1)$, which takes the form

$$V_D = \frac{g_X^2}{2} D_X^2, \tag{17}$$

where

$$D_X = q_n |\hat{\phi}_n|^2 - \delta_{GS} \frac{x}{2}. \tag{18}$$

The Fayet–Iliopoulos term,

$$\xi^2 = \frac{1}{2} \delta_{GS} x, \tag{19}$$

is given by m as opposed to S and so can be zero [4, 8].

Before tackling the stabilization in detail, let us first highlight the general features of the potential that make it possible. The important aspect of the V_F contribution to the potential is that W_S/W appears *twice*, both in $\hat{F}^M$ and $\hat{F}^S$, due to the M contribution to the gauge kinetic function. In previous work, the assumption has usually been that integrating out the mesons leads to $W \sim e^{-8\pi^2 S/\beta}$ so that W_S/W inevitably ends up

being a *negative* constant. In the present type I case however, we leave W_S/W as a fully dynamical variable and, by employing an additional perturbative contribution to the superpotential, set its *vev* to be *positive* thanks to the F^M contribution. The dilaton then trivially finds its minimum where $\hat{F}^S = 0$. The D -term contribution is important because it forces a local minimum at a finite value of x , where supersymmetry is broken. There is thus an interesting interplay between the F and D -term contributions.

2.4 Stabilization without modular invariance

In ref. [1] it was shown that our two assumptions can lead to a natural stabilization of the dilaton. In that example, which we shall now briefly recap, the superpotential is of the form

$$W = W_{np} + W_p, \quad (20)$$

where the perturbative part of the superpotential, $W_p(X_m)$, is some function of gauge invariants.

Let us first assume that $x = K_M$ has a non-zero value and determine the corresponding *vevs* of all the other fields. This will lead to a potential purely in x , whose minimization we shall consider at the end. The D -term clearly dominates the potential in any reasonable model (with $e^G \sim m_W^2$), so we begin the minimization by as usual imposing $D_X = 0$;

$$\sum_n q_n |\hat{\phi}_n|^2 = \frac{|\delta_{GS}x|}{2}, \quad (21)$$

where we have anticipated that $\langle \delta_{GS}x \rangle$ will eventually be positive. This equation determines τ in terms of the other fields, since it does not appear elsewhere in the potential. For definiteness we will take $q_0 > 0$.

The minimization of V_F is equivalent to minimizing B if the final cosmological constant is small or zero as we must check at the end. The independent variables are s , $\phi_{m>0}$ and ϕ_0 , but things simplify greatly if we can trade them; ϕ_m for X_m , and ϕ_0 for W_S/W . We can do this if, defining

$$\rho_m = \frac{q_m |\phi_m|^2}{q_0 |\phi_0|^2}, \quad (22)$$

the solutions satisfy $\rho_m \ll 1$. We shall see shortly how this can be achieved.

Minimization under this approximation gives simple but non-trivial relations between the auxilliary fields;

$$\begin{aligned} F^0 &= \frac{q_0 \phi_0}{q_m \phi_m} F^m = -4\pi^2 \sigma \phi_0 F^M = \frac{e^{G/2}}{s} \frac{q_0 \phi_0}{2\pi^2 |\delta_{GS}.x|} \\ F^S &= 0, \end{aligned} \quad (23)$$

to leading order in ρ_m . These dynamical relations will be important in determining the behaviour of the soft terms. In particular they ensure nice properties such as reality

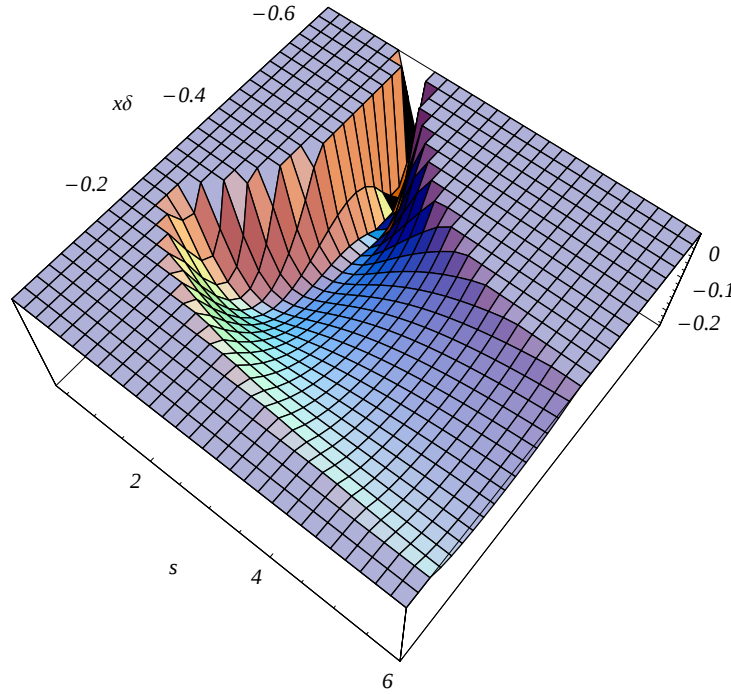


Figure 2: *The F -part of the potential (11) in the plane (s, x) where $s = S + \bar{S}$ and $x = \frac{\partial \hat{K}}{\partial M} \sim m$ at small m . The valley approaches $x = 0$ at large dilaton values. Thus, starting at the orientifold point $m = 0$, the field can roll down this valley from large s values to its minimum.*

of A -terms. Note that without W_{np} the minimizations separate and we trivially find $F_n = 0$. Thus supersymmetry is always unbroken before condensation.

The resulting expression for the stabilized dilaton is

$$s(x) = -\frac{\sigma^2 + \lambda^2}{\sigma B_0} + \mathcal{O}(\rho_m), \quad (24)$$

where we have defined

$$\lambda^2 = \frac{1}{\hat{A}} \cdot \frac{q_0}{8\pi^4 |\delta_{GS} x|}. \quad (25)$$

The remaining equations, determining the *vevs* of ϕ_0 and ϕ_m respectively, can be written in terms of $s(x)$;

$$\begin{aligned} \frac{W_S}{W} &= \frac{1}{s} \\ X_m \frac{W_{X_m}}{W} &= \frac{q_m \rho_m}{q_0 8\pi^2 s} + \mathcal{O}(\rho_m^2). \end{aligned} \quad (26)$$

The first requirement for this solution, and our assumption, to be consistent, is that the perturbative superpotential has couplings such that $\partial W_p / \partial X_m \approx 0$ gives $\langle W_p \rangle \neq 0$, and the assumed $\rho_m \ll 1$. The second requirement is of course that s is positive (and hence that $B_0(x)/\sigma$ is negative) for the particular value of x .

On examining the remaining x -dependent potential, we find that a minimum can develop where all of these conditions are satisfied; assuming that we have chosen parameters such that $\rho_m \ll 1$, the potential is given by

$$B = B_0 \frac{\delta}{\sigma^2 + \lambda^2} (\sigma^2 - \sigma_0^2) , \quad (27)$$

where σ_0^2 is a constant; $\sigma_0^2 = \frac{q_0}{8\pi^4 \delta_{GS} \delta}$. Two options can now be considered for determining the value of x ;

- The no-scale option: Set the cosmological constant to be exactly zero. As we have seen, σB_0 must be non-zero and negative to stabilize the dilaton. However we can make the potential completely flat by choosing $\sigma = \sigma_0$. The x dependent *vevs* for ϕ_m , ϕ_0 , τ and s then correspond to a flat direction with zero cosmological constant. A natural possibility is that x and therefore M can be fixed by minimizing the potential after radiatively induced electroweak symmetry breaking.
- The Kähler stabilization option: particular forms of $\hat{K}$ can give a local minimum in the function $B_0(x)$ with a small but negative cosmological constant of order $-\delta^2$. The minimization condition is found to be

$$\delta \frac{\partial K_{M\overline{M}}}{\partial x} = 1 + \frac{2\delta^2 K_{M\overline{M}}}{3 + \delta x} . \quad (28)$$

For example when

$$\hat{K}(m) = \frac{3}{a} \ln \left(1 + \frac{a}{6} m^2 \right) , \quad (29)$$

the minimum in δB_0 is at $\delta x < 0$, and gives a cosmological constant

$$\delta B_0|_{min} \approx \frac{1}{2a} - \delta^2 . \quad (30)$$

In conjunction with the $D = 0$ condition, this implies that $\delta_{GS} \delta q_0 > 0$. The dilaton *vev* is

$$s \approx \frac{\sigma}{\delta^2} , \quad (31)$$

so that we require negative σ . The potential in this case is shown in fig.2 where we have eliminated τ and ϕ_n and show the dependence on s and x for $K_{M\overline{M}} = e^{-60x^2}$. In particular (as an aside) note that there is no barrier between large dilaton values and the minimum. This contrasts with the multiple gaugino condensate scenario, which has a barrier and hence an ‘initial value’ problem for the dilaton. Finally, note that the imaginary axionic components of S , T and M are not fixed by the above but will be fixed separately by the Peccei-Quinn mechanism.

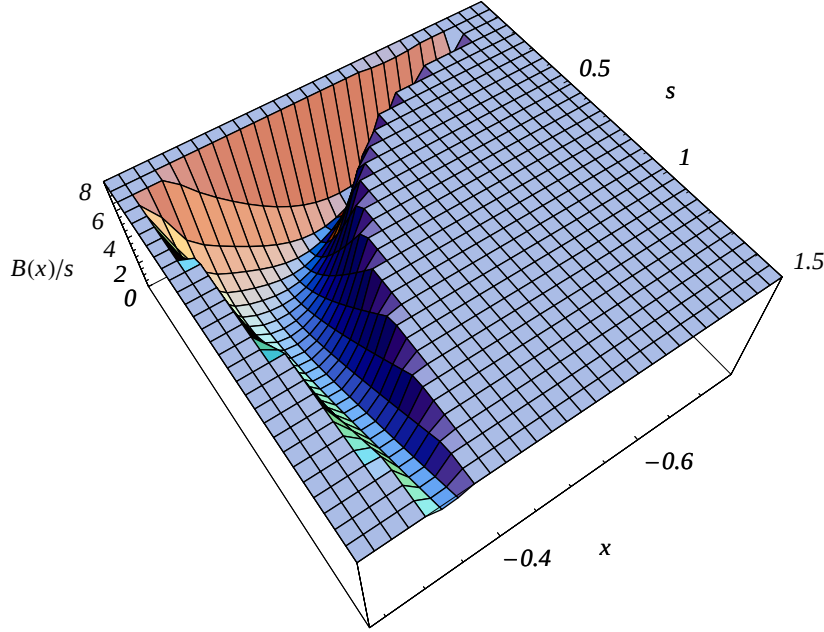


Figure 3: *The F -part of the potential (11) for the modular invariant case in the plane (s, x) , where $s = S + \bar{S}$ and $x = \frac{\partial \hat{K}}{\partial M} \sim m$. The local minimum has zero cosmological constant. The global supersymmetric minimum is now located outside the diagram towards its top left (it was on the top right of the previous graph).*

We repeat that the remaining fields (S, T, ϕ_0) are all fixed as long as x is fixed by one of the above mechanisms. The virtue of this set-up is therefore that the problem of dilaton/moduli stabilization is reduced to stabilizing one of the blowing up modes at a non-zero value. The m dependence in the Kähler potential which brings this about is unknown, however the set of dynamical relations between the auxiliary fields is already very restrictive and, as we shall see in section 5, hints strongly at a solution to the SUSY flavour and CP problems.

2.5 Stabilization with modular invariance

The stabilization above is quite appealing, but an important aspect is that W_p necessarily breaks any modular invariance if $\langle W_p \rangle$ is to be non-zero. One might therefore wonder how general this mechanism is, and in particular, if it can work in models that retain some or all of the initial modular invariance. In this subsection we shall

show that this is indeed the case. In such models, the superpotential is necessarily very different from that in eq.(20), however the same stabilization mechanism can be employed.

In order to include modular invariance, let us return to the superpotential, which is now required to have the correct weight. We will consider the case of invariance under overall modular transformations (involving T), for which the non-perturbative contribution W_{np} in eq.(10) has to have weight -3. This is the case if the GS terms obey

$$\delta\sigma = -2\beta. \quad (32)$$

In addition $U(1)_X$ invariance of W_{np} requires

$$\delta_{GS}\sigma = \frac{q_0}{2\pi^2}. \quad (33)$$

As we saw, both of these relations are obeyed in Z_3 and Z_7 orientifold models.

To construct the rest of the superpotential, we begin by forming gauge and modular invariant (and dimensionless) combinations of fields using the appropriate power of W_{np} . These we shall denote $\tilde{X}_m$;

$$\tilde{X}_m = \frac{X_m}{M_s^{2(1-q_0/q_m)}} \left(\frac{W_{np}}{M_s^3} \right)^{(2q_0-2q_m)/3q_m}. \quad (34)$$

We can now write the most general expression for the superpotential as

$$W = W_{np} \times f(\tilde{X}_m), \quad (35)$$

where f is any function of the invariants. The most trivial possibility with only one invariant, $\tilde{X}$, is $f = 1 + \tilde{X}$ in which case the superpotential is again just the sum of a nonperturbative and perturbative part

$$W = W_p + W_{np}. \quad (36)$$

(We can of course express any perturbative contribution in terms of $\tilde{X}_m$; for example $\phi_2\phi_0^2 + \phi_2\phi_1^2 = W_{np}(\tilde{X}_2 + \tilde{X}_2/\tilde{X}_1)$ and so on.) However in what follows, and in particular in order to spontaneously break CP, we will leave the expressions in the general form of eq.(35).

The imposition of modular invariance has removed one of our degrees of freedom since *a priori* eq.(35) gives

$$\frac{W_S}{W} = -\frac{8\pi^2}{N_c - 1} \left(1 + \sum_{m=1} \frac{2}{3} \frac{\tilde{X}_m f_m}{f} \left(\frac{q_0}{q_m} - 1 \right) \right). \quad (37)$$

Therefore, the simplest case we can consider now has ϕ_0 plus one other field (which we shall take to be ϕ_1) getting large *vevs*. If this is the case, we can eliminate $\hat{\phi}_0$

using the D -term constraint, and then minimize in s , $\hat{\phi}_1$ and $\tilde{X}_m$ independently. These minimizations again relate the $vevs$ of the auxilliary fields;

$$\begin{aligned} F^1 &= \frac{1}{p} \frac{\phi_0}{\phi_1} F^0 \\ F^M &= -\frac{F^0}{8\pi^2 \sigma \phi_0} \frac{3N_c - 1 + 2p}{1 + p} \\ F^S &= 0 \\ F^{m>1} &= 0, \end{aligned} \quad (38)$$

where $p = \pm \sqrt{q_0/q_1}$, upto corrections of order $\rho_{m>1}$. In order for these relations to be consistent, the charge q_1 must have the same sign as q_0 , and again we must check later on that we end up with $\langle W_S/W \rangle > 0$. Eqs.(38a,b) imply that $F^\rho \partial_\rho g(\tilde{X}_1) = 0$ for any function $g(\tilde{X}_1)$. As in the non-modular invariant case, this will give nice phenomenological properties such as reality of A -terms.

Note that summing the last two equations and using $F_S = 0$ gives the constraint in eq.(37). Inserting these solutions back into V_F , we now find the x dependent potential to be

$$B = B_0 \frac{\delta}{\sigma^2 + \lambda^2} \left(\sigma^2 - \sigma_0^2 + \frac{2C_0 \sigma_0^2}{x} - \frac{C_0^2 \sigma_0^2}{x B_0(x)} \right), \quad (39)$$

where now

$$\begin{aligned} \sigma_0^2 &= \frac{q_0}{32\pi^4 \delta_{GS} \delta} \frac{(3N_c - 1 + 2p)^2}{(1 + p)^2} \\ &= \sigma^2 \frac{(3N_c - 1 + 2p)^2}{(1 + p)^2 (3N_c - 1)}. \end{aligned} \quad (40)$$

The resulting expression for the stabilized dilaton is

$$s(x) = -\frac{\sigma^2 + \lambda^2}{\sigma B_0 + \lambda^2 C_0} + \mathcal{O}(\rho_{m>1}), \quad (41)$$

where we have defined

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \frac{1}{\hat{A}} \cdot \frac{q_0}{32\pi^4 |\delta_{GS} x|} \frac{(3N_c - 1 + 2p)^2}{(1 + p)^2} \\ C_0 &= \frac{24\pi^2}{3N_c - 1 + 2p}. \end{aligned} \quad (42)$$

The remaining equations can again be written in terms of $s(x)$;

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1} &= \frac{2(p^2 - 1)}{3p(8\pi^2 s + N_c - 1)} - \frac{1}{p} \\ X_1 \frac{f_{X_1}}{f} &= \frac{3}{2(p^2 - 1)} \left(1 + \frac{N_c - 1}{8\pi^2 s} \right) \\ X_{m>1} \frac{f_{X_m}}{f} &= 0. \end{aligned} \quad (43)$$

The minimization of this potential is rather more involved than that of the previous subsection, and we have to be careful to ensure that both s and $K_{M\overline{M}}$ are positive, and also that $K_{M\overline{M}}(0) = 1$. We have identified four possibilities;

- Minimization with a large positive cosmological constant; this happens quite readily for arbitrary M dependence in the Kähler potential, due to the $1/x$ terms in eq.(39).
- Minimization at $s = \infty$ corresponding to $V_F = 0$.
- The no-scale option; in this case we now have to tune away the $1/x$ dependence in eq.(39) and the cosmological constant. The simplest way to do this is to set $\sigma^2 - \sigma_0^2 = \sigma_0^2(2C_0 - C_0^2/B_0)/x$ and then work backwards to find the required function $K_{M\overline{M}}(x)$. Note that $\sigma_0 = \sigma$ is satisfied for $\frac{q_0}{q_1} = \frac{3N_c-1}{2}$, however this choice leads to negative s .
- A minimum in x at zero cosmological constant; the simplest way to find these is to ‘perturb’ away from a no-scale solution.

An example of the 4th case is shown in fig.3 where we plot B/s with all fields eliminated except x and s . In this rather simplified case (with only one meson and one additional field) imposing a zero cosmological constant forces rather extreme choices of parameters in order to get a minimum at small x ; in the example shown we have taken $q = 1/3$, $\delta = 7.6$, $N_c = 5$ and $p = -3.4$. (The remaining parameters σ and δ_{GS} are fixed by eq.(32) and (33).) The form of the potential is similar to that in fig.2, however passing over the barrier and continuing to large x takes us to the no-scale case, and unbroken supersymmetry is now found at smaller (but finite) value of x . In addition, there is now a barrier between this minimum and the orbifold point. The minimum is at $\frac{dB_0}{dx} \approx 0$ as previously, so that eq.(28) still applies.

2.6 Relation to the heterotic string

To complete this discussion we should relate this stabilization picture to that in heterotic strings where dilaton stabilization appears to be much more difficult. In particular, in the heterotic case the gauge kinetic function at one loop goes like $f_a = k_a S - \frac{3}{8\pi^2} c_a \ln \eta(T)^2$ where T is again the overall modulus, c_a is determined by a string computation and $\eta(T) = e^{-\pi T/12} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-2\pi n T})$ is the Dedekind η function. At large values of T , $\eta(T) \sim e^{-\pi T/12}$ so that $f_a \sim k_a S + \frac{3c_a}{48\pi} T$ and one might wonder why a stabilization is not possible in this case as well, simply by replacing M with T .

There are two reasons. The first is the different form of the Kähler potential. In the present case the leading term goes as $m^2 = (M + \overline{M})^2$ as opposed to $-3 \log(T + \overline{T})$ in the heterotic case. Thus in the scalar potential we have $K_M \sim m$ tending to stabilize $\langle m \rangle$ at small values, as opposed to the heterotic case which has $K_T \sim -\frac{1}{T+\overline{T}}$ tending to push $\langle T \rangle$ to large values. The type I stabilization therefore occurs only where $\langle m \rangle$ is small, of order δ , and in this region the above approximation does not hold.

The second reason is that the stabilization relies heavily on the presence in the potential of anomalous $U(1)$ D -terms. In type I strings these contain a Fayet-Iliopoulos term that is proportional to m . Thus equating m in type I with $T + \bar{T}$ in the heterotic string, would require the heterotic Fayet-Iliopoulos term to go like $\sim (T + \bar{T})$ rather than $1/(S + \bar{S})$ as is actually the case.

3 Generating CP and flavour structure in Yukawas

In the previous section we saw how dilaton and moduli stabilization can occur in type I models assuming a single condensing gauge group and an anomalous $U(1)$. In following sections we shall show that the distribution of supersymmetry breaking amongst the different fields is such that SUSY contributions to flavour and CP violating processes are naturally suppressed. First however, we need a working model of flavour and CP violation.

The possibilities for generating flavour structure are restricted, since our guiding principle is to determine *all* contributions to SUSY breaking, and hence all the goldstino angles. So, we cannot simply insert an additional Froggatt-Nielsen field without going back to consider the additional contribution to SUSY breaking when it gets a VEV. Our Froggatt-Nielsen fields can therefore only be the ϕ_n , and we will henceforth assume that it is these fields that play a role in generating Yukawa hierarchies by getting vacuum expectation values.

There are many ways in which the required flavour structure could arise, but in order to have a working example, consider the case with only one extra field ϕ_1 with charge $2q_1 = -q_0$, so that we have just one relevant invariant $X = \phi_1 \phi_0^2$. In the case without modular invariance, the most general form of Yukawa coupling can be written

$$Y_{\alpha\beta\gamma} = \tilde{\phi}_0^{q_{\alpha\beta\gamma}/q_0} g_{\alpha\beta\gamma}(\tilde{X}) \quad (44)$$

where $q_{\alpha\beta\gamma}$ is the $U(1)$ charge of the Yukawa coupling, and $g_{\alpha\beta\gamma}$ is any function of $\tilde{X}$. In eq.(44), for the case without modular invariance, the tilde's imply multiplication by powers of M_s to make dimensionless quantities.

We will see in the following sections that suppression of SUSY flavour-changing processes depends on choosing degenerate charges. We therefore propose that the $U(1)$ charges of the first and second generation charges are degenerate since these generations give rise to the most restrictive flavour changing processes. If $|\langle \tilde{X} \rangle| \ll 1$, we can choose charges such that the Yukawa couplings take the form

$$Y_{U_{ij}} \langle h_2^0 \rangle \approx \begin{pmatrix} m_c & m_c & 0 \\ m_c & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix} + \mathcal{O}(m_t \tilde{X} + \dots),$$

and similar for down and lepton Yukawas, where m_c and m_t are functions of ϕ_0 only. For the canonically normalized top quark, we find a mass term

$$\hat{m}_t = \langle h_2^0 \rangle \tilde{\phi}_0^{-(q_{H_2} + q_{t_L} + q_{t_R})/q_0} \sqrt{\tau^{n_{H_2} + n_{t_L} + n_{t_R}}}, \quad (45)$$

where n_α are the weights of the fields. The D -term constraint imposes $|\phi_0^2| \sim |\delta_{GS}x|\tau M_P^2$ so that we can rewrite the top mass as

$$\langle h_2^0 \rangle \sqrt{|\delta_{GS}x|^{-(q_{H_2}+q_{t_L}+q_{t_R})/q_0}} \sqrt{\tau^{n_{H_2}+n_{t_L}+n_{t_R}-(q_{H_2}+q_{t_L}+q_{t_R})/q_0}} \left(\frac{M_P}{M_s}\right)^{-(n_{H_2}+n_{t_L}+n_{t_R})} \quad (46)$$

In order to avoid very large values (coming from a large $\langle \tau \rangle$) we impose

$$n_{H_2} + n_{t_L} + n_{t_R} = \frac{q_{H_2} + q_{t_L} + q_{t_R}}{q_0}, \quad (47)$$

and in order to have a large top mass we require $(q_{H_2} + q_{t_L} + q_{t_R})/q_0 \approx 0$. Imposing also that $n_{H_2} + n_{c_L} + n_{c_R} = (q_{H_2} + q_{c_L} + q_{c_R})/q_0$, we find that

$$\hat{m}_c = \hat{m}_t \sqrt{|\delta_{GS}x|^{(q_{t_L}+q_{t_R}-q_{c_L}-q_{c_R})/q_0}} \left(\frac{M_P}{M_s}\right)^{n_{t_L}-n_{c_L}+n_{t_R}-n_{c_R}} \quad (48)$$

At leading order the Yukawa couplings have an accidental $U(2)$ symmetry and hence a zero eigenvalue. The higher order terms in $\tilde{X}$ will generally break this symmetry and give masses to the first generation. Thus, we require

$$|\langle \tilde{X} \rangle| \sim \frac{m_u}{m_t}. \quad (49)$$

Such values of $|\langle \tilde{X} \rangle|$, and also CP violating phases of order 1, can quite easily be generated during the minimization. The $\tilde{X}$ dependent perturbative part of the superpotential can be any function of $\tilde{X}$ but as a rather trivial example consider the case without modular invariance, with

$$W_p = (a\tilde{X} + \frac{b}{2}\tilde{X}^2 + \frac{c}{3}\tilde{X}^3)M_s^3. \quad (50)$$

In this expression we assume that non-renormalizable interactions between the fields are suppressed by powers of M_s so that (since $\tilde{X} = X/M_s^3$) a, b, c are of order one. Recall that our approximations required $|\phi_1| \ll |\phi_0|$ so that, as we saw above, the minimum is close to $\partial W_p / \partial \tilde{X} = 0$. The D -term constraint imposes $|\phi_0^2| \sim |\delta_{GS}x|\tau$ and so provided $\tau \gg |\delta_{GS}x|^{-1}$ (which is the case) we can check that, for the desired value of $\tilde{X}$, this approximation is good. It is now trivial to choose couplings to give the desired $\langle \tilde{X} \rangle \sim m_u/m_t$.

The physically observable CP violation depends only on the phase of $\tilde{X}$. To see this, suppose for example that the explicit form of the Yukawa couplings is

$$\left(\frac{\langle \phi_0 \rangle}{M_s}\right)^{n_{ij}} H_2 Q_i U_j^c + \left(\frac{\langle \phi_1 \rangle}{M_s}\right)^{n_{kl}} H_1 Q_k D_l^c. \quad (51)$$

One of the phases can always be R -rotated away, and the remaining phase, $\theta = (\theta_1 - \frac{q_1}{q_0}\theta_0)$, is nothing other than the phase of X . (In general one needs at least two Froggatt–Nielsen fields to generate CP violation.) Therefore, generating a physically measurable

spontaneous breaking of CP in the Yukawa couplings is equivalent to giving a phase to the gauge invariant X , i.e. by choosing $b^2 - 4ac < 0$.

A similar situation applies in the modular invariant case. Explicitly, the Yukawa couplings are

$$Y_{\alpha\beta\gamma} = g_{\alpha\beta\gamma}(\tilde{X}) \left(\frac{\phi_0}{M_s} \right)^{q_{\alpha\beta\gamma}/q_0} \left(\frac{W_{np}}{M_s^3} \right)^{-(n_{\alpha\beta\gamma} + q_{\alpha\beta\gamma}/q_0)/3} \quad (52)$$

where $n_{\alpha\beta\gamma}$ is the modular weight of $Y_{\alpha\beta\gamma}$. The *vev* of $\tilde{X}$ is given by the equation (43b) with the RHS being fixed by the stabilization of s , so that we get the following equation for $\tilde{X}$;

$$\tilde{X} \frac{\partial f}{\partial \tilde{X}} + \text{const} f = 0 \quad (53)$$

Now f needs only be a polynomial of second order in $\tilde{X}$ in order to generate a phase for $\tilde{X}$.

Notice that the CP violation does not involve the T moduli (or S in the non-modular invariant case), and these fields do not contribute further to it. In this respect the only role that moduli play is to transmit CP violation to the soft SUSY breaking terms.

As we stressed, this is one of many possibilities for generating flavour structure with degenerate $U(1)$ charges. An alternative is of course to rely solely on the weights of the fields (and hence powers of τ) to generate small effective micro-Yukawa couplings, as suggested in ref. [6]. In the modular invariant case, we will see later that even with different n_α the SUSY breaking A -terms can be degenerate.

4 Scales

Before presenting the soft-supersymmetry breaking terms, we should also briefly discuss the scales of the moduli and dilaton *vevs*. In particular, since all supersymmetry breaking is determined, we find quite interesting consistency conditions on the string scale.

4.1 Scales with degenerate T_i moduli

The moduli and dilaton of the effective 4-dimansional model are related to the compactification radii and string couplings as follows (see ref. [6]);

$$t_i = T_i + \bar{T}_i = \frac{4}{\lambda_I} (R_i M_s)^2 \quad (54)$$

$$s = S + \bar{S} = \frac{4}{\lambda_I} \prod_i (R_i M_s)^2 \quad (55)$$

For the moment we continue to consider the degenerate case where $T_1 = T_2 = T_3 = T$ so that

$$s = \tau (R M_s)^4, \quad (56)$$

where we have used $|\phi_0|^2/\tau \ll 1$ (since $\delta_{GS}x \ll 1$ in the D -term equation) to write $t \sim \tau$.

Our first concern is the compatibility between our solutions for s and τ (which fix the gauge coupling) and realistic gauge coupling values around $\alpha_U \sim 1/24$. According to

$$\alpha_p = (4\pi \text{Re } f_p)^{-1}, \quad (57)$$

this translates into:

- 1) $s \sim 4$ if the Standard Model is embedded inside D9-branes.
- 2) $\tau \sim 4$ if the Standard Model is embedded inside D5-branes.

On the other hand, the relationship between the string and Planck scales,

$$M_s^{7-p} = \frac{\alpha_p}{\sqrt{2}} R^{p-6} M_P, \quad (58)$$

reads (using equations (56) and (57)),

$$\frac{M_s}{M_P} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \frac{1}{s} \left(\frac{s}{\tau}\right)^{3/4}, \quad (59)$$

which gives us the supersymmetry breaking scale,

$$\begin{aligned} m_{3/2} &= |W| \frac{8\pi}{\sqrt{s\tau^3} M_P^2} e^{\hat{K}/2} \\ &\approx 64\pi^3 M_s^2 |W| / M_P^4. \end{aligned} \quad (60)$$

What values for M_s are favoured by our model? For the moment, we are ignoring the question of the relation between the string and unification scales but will come back to this point later. Concentrating on the modular invariant case, we can make a crude initial estimate of allowed values for M_s , by using $\langle W \rangle \sim M_s^3$ in eq.(60) (assuming for the moment that $\langle f \rangle$ in eq.(35) is of order one). By implementing the phenomenological requirement $m_{3/2} \sim m_W$ we get $M_s \sim 2 \cdot 10^{15}$ GeV which corresponds to $\tau \sim 10^4$ if $s \sim \mathcal{O}(1)$. Remarkably this is close to the conventional GUT scale, and can be increased by the required order of magnitude with almost no tuning of $\langle f \rangle$ as we shall shortly see.

An intermediate string scale, $M_s \sim 10^{12}$ GeV, corresponds to $\tau \sim 10^8$ and requires $\langle f \rangle \gg 1$ ⁽³⁾. Thus our crude estimate requires some improvement in order to treat more general choices of M_s , and also to estimate the required tuning. Inserting the full expression for W into eq.(60) we find

$$\begin{aligned} M_s &\sim M_P \left(\frac{e^{\frac{2\pi}{(N_c-1)\alpha_9}} m_W}{64\pi^3 \langle f \rangle M_P} \right)^{\frac{3(N_c-1)}{5(3N_c-1)}} \\ &\sim 2 \cdot 10^{15} \text{ GeV}, \end{aligned} \quad (61)$$

⁽³⁾We should point out that we expect our estimates to be most reliable when the field theory approximation is valid and extraneous string theory effects can be integrated out; this is guaranteed if $\phi_0 < \sqrt{\tau} M_s$ or, because of the D -term constraint, $M_s > |\delta_{GS}x| M_P$, implying a string scale that is within a few (say 4) orders of magnitude of the Planck scale.

where the final approximation is valid for large values of N_c and $s \sim 1$. In order to get $M_s \sim M_{GUT} \approx 2 \cdot 10^{16}$ GeV (*i.e.* the conventional MSSM GUT scale), we can for example choose $N_c = 3$ or 4 and $s \sim 1/2$ with $\langle f \rangle = 0.01$. Thus almost no fine tuning of $\langle f \rangle$ is required. It is however difficult to obtain an intermediate scale string scale. In this simplified case (with only one condensing $SU(N_c)$ meson, we need extremely large values of $\langle f \rangle > 10^8$, which will require a significant amount of fine-tuning.

There is an additional fine-tuning associated with a particular choice of M_s . In order to show where it occurs, let us now see how a particular value of τ (*i.e.* M_s) is accommodated by adjusting the couplings in f . First, the *vevs* of $\delta_{GS}x$ and s are fixed completely independently via eqs.(28) and (41) respectively. Our choice of τ , *does* constrain ϕ_0 , ϕ_1 however, which now follow directly from the D -term constraint and eq.(43a). For example, for an intermediate string scale with $q_0 = 1/2$ and $\delta_{GS}x = 0.01$ we have $\phi_0 \sim 10^3$ in *Planck* units. This is alright however, since the τ dependence cancels in the canonically normalized field which, since τ is dominant, is approximately given by $\hat{\phi}_0 = \phi_0/\sqrt{\tau}$, and therefore its *vev* is always $\approx \sqrt{\delta_{GS}x/2}$. The *vevs* of $\tilde{X}_{m>1}$ and hence $\phi_{m>1}$ are now determined by eq.(43c); they depend on the couplings in f , but if they are similar then $\tilde{X}_{m>1} \sim 1$ and $\phi_m^{2q_0} \sim M_s^{2(q_0-q_m)} \phi_0^{2q_m}$. When $q_m < q_0$ we therefore naturally get $\rho_{m>1} \ll 1$ which, recall, was one of the assumptions that went into the derivation of eq.(43). Finally we are left with eq.(43b) which over-determines the required *vev* of ϕ_1 and which is clearly independent of the overall $\langle f \rangle$. At this point we have to satisfy this equation by adjusting the couplings within f , and this is where we must pay the fine-tuning price for our choice of τ (or M_s).

4.2 Scales with independent T_i moduli

In the previous subsection, we found that a dilaton *vev* of order 1 and large degenerate moduli *vevs* can explain the weak scale. These large *vevs* can be fixed with only a modest adjustment of couplings, and this also allows us to equate the string scale with the conventional GUT scale or with the intermediate scale. However, the assumption of degenerate moduli fields is rather restrictive. In particular phenomenology may not be consistent with matter fields living on a D9-brane, and if all the moduli are large then the gauge couplings on the 5-branes are all extremely weak. In addition, stabilization usually requires $\langle s \rangle \lesssim 1$. In the degenerate moduli case therefore, there may be no candidate gauge couplings for the Standard Model. We can remedy this by assuming an anisotropic compactification scheme and this is the issue we discuss now.

The Kähler potential for independent moduli, T_i , is

$$K = -\ln s - \sum_i \ln \tau_i + \hat{K}(m_i), \quad (62)$$

where

$$\tau_i = T_i + \overline{T}_i - \sum_i |C_i^9|^2; \quad m_i = M + \overline{M} - \delta_i \ln \tau_i. \quad (63)$$

As shown in the appendix, it is still possible to compute exactly the inverse Kähler metric and hence the scalar potential. The final form is similar to the degenerate case, with the different moduli contributing separately. In general the three $C_{i=1,2,3}^9$ transform differently with respect to the gauge group attached to the D9-brane. We can for example specify that only the C_1^9 condenses so that the D-term,

$$\sum_i q_i |C_i^9|^2 \frac{(1 + \delta_i x)}{\tau_i} = \frac{|\delta_{GS} x|}{2}, \quad (64)$$

reduces to

$$|\phi_0|^2 \frac{(1 + \delta x)}{\tau_1} = \frac{|\delta_{GS} x|}{2q_0}. \quad (65)$$

From the form of scalar potential found in the appendix, we see that the minimization fixes s , C_1^9 , x and τ_1 precisely as before. The two remaining flat directions (corresponding to the *vevs* of τ_2 and τ_3) must be fixed by some other part of the theory. (We shall comment on this presently.)

The string scale and Planck scale are related by

$$\frac{M_s}{M_P} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}(s\tau_1\tau_2\tau_3)^{1/4}}. \quad (66)$$

The gravitino mass is given by the same expression (60) as in the degenerate case (with the obvious replacement of independent radii). Repeating the previous analysis but now using eq.(66) gives the following expression for M_s :

$$M_s \sim M_P \left(\frac{e^{\frac{2\pi}{(N_c-1)\alpha_9}} m_W}{64\pi^3 \langle f \rangle M_P} \right)^{\frac{N_c-1}{5N_c-3}}. \quad (67)$$

Large N_c gives $M_s = 2.10^{15}$ GeV, and for $N_c = 3, 4$, this expression is compatible with $s \sim 1/4$ and $M_s \sim M_{GUT}$ just as before. Now however, we also have the freedom to choose $\tau_1 \sim 4$ (*i.e.* an embedding of the Standard Model gauge group inside $D5_1$ branes) since, according to eq.(66), the relation between the string scale and τ_1 involves the product $\tau_2\tau_3$ which is not fixed by the minimization and can be tuned instead (for instance $\tau_2\tau_3 \sim 10^{12}$) to give $M_s \sim 2.10^{16}$ GeV.

We can also consider the complementary scheme, in which the Standard Model gauge groups come from the two remaining 5-branes and therefore $\tau_2 \sim \tau_3 \sim 4$. In this case we can only adjust τ_1 in order to change M_s . The only difference is therefore the relation in eq.(66) which requires τ_1 to provide the volume factor relating M_s to M_P by itself. For large N_c the relation is unchanged;

$$M_s \sim M_P \left(\frac{e^{\frac{2\pi}{(N_c-1)\alpha_9}} m_W}{64\pi^3 \langle f \rangle M_P} \right)^{\frac{N_c-1}{5N_c-1}} \quad (68)$$

To conclude, our point in this subsection has not been to make any accurate estimate of parameters, but to show that with reasonable assumptions phenomenologically realistic values of supersymmetry breaking, string scales and couplings are possible. We have also highlighted where it is possible to adjust parameters in order to get the correct size of supersymmetry breaking in the visible sector and have found that the fine-tuning of couplings is relatively mild.

In the following section we examine the supersymmetry breaking and show that the structure of the model prevents the CP violating phases entering into the soft-supersymmetry breaking even for an arbitrary numbers of fields, and for the most general Yukawa couplings. Before we continue, we should repeat that we will make no additional assumptions, beyond what is necessary to stabilize the dilaton, apart from the very general one that CP is spontaneously broken when f gets a vev , and that these fields enter the Yukawa coupling in some way.

5 Structure of SUSY breaking terms

As mentioned in the previous section, our main aim is to be able to generate complex Yukawa couplings by spontaneously breaking CP, and to ensure that this does not lead to dangerous CP violation in soft masses and in particular in trilinear couplings between the scalars. As we have seen, spontaneous breaking of CP can be driven by $U(1)$ and SUSY breaking (and can occur at different scales), if the $U(1)$ invariants X_m get complex $vevs$. Before canonical normalization of the fields, the Yukawa couplings do not depend on moduli in these models [6] and can be written

$$Y_{\alpha\beta\gamma} = \left(\frac{\phi_0}{M_s}\right)^{\frac{q_{\alpha\beta\gamma}}{q_0}} g_{\alpha\beta\gamma}(\tilde{X}_m) \times \begin{cases} 1 & \text{without modular invariance} \\ W_{np}^{-(n_{\alpha\beta\gamma} + q_{\alpha\beta\gamma}/q_0)/3} & \text{with modular invariance} \end{cases} \quad (69)$$

where $g_{\alpha\beta\gamma}$ is an arbitrary function of the $U(1)$ invariants X_m and $q_{\alpha\beta\gamma}$ is the charge of the Yukawa. The phase of ϕ_0 can always be rotated away. However, if the $vevs$ of the X_m acquire phases, they will induce CP violation in the CKM matrix. The minimization conditions in eq.(26b,43b), can easily lead to complex $\langle X_m \rangle$ as we saw in section 3. We now show that this phase in the Yukawa coupling does not feed into the A -terms and that the EDMs can therefore be suppressed.

Since we have control over the $vevs$ of all the fields, it is possible to write the complete expressions for supersymmetry breaking without having to define an arbitrary goldstino angle. We first present the results in the case of an isotropic compactification for convenience. We have just concluded that such situation does not lead to realistic predictions however the analysis will appear to be very similar in the (physically relevant) anisotropic case.

The supersymmetry breaking effects are carried by the auxiliary fields F^α which satisfy the dynamical relations given by (23) and (38). In addition, there is the contri-

bution of

$$F^T = f_T(\tau, x) + \frac{\delta\tau}{(3 + \delta x)\hat{A}} F^M + \bar{\phi}_n F^n \quad \text{with} \quad f_T(\tau, x) = -\frac{e^{G/2}\tau}{3 + \delta x} (3 + \delta B_0) \quad (70)$$

To include the possibility of fields in 9-branes or 5-branes, we will now use the general Kähler potential (7) (with degenerate T_i) since visible fields may correspond to any of the four types of C fields. As usual, we expand the Kähler potential around $C_\alpha = 0$ in a basis in which the Kähler metric is diagonal in the matter fields;

$$K = K_0 + \mathcal{Z}_\alpha |C_\alpha|^2 + \dots \quad (71)$$

We have:

$$\mathcal{Z}_\alpha = \begin{cases} s^{-1} & : C_i^{5_i} \\ \tau^{-1}(3 + \delta x) & : C_i^9 C^{95_i} \\ 1/2\tau^{-1/2}s^{-1/2} & : C^{5_i 5_j} \\ 1/2\tau^{-1} & : C^{95_i} \end{cases} \quad (72)$$

Expressions for gaugino masses, scalar masses (where $m_{3/2} = e^{G/2}$) and A -terms for a Yukawa coupling $C_\alpha C_\beta C_\sigma$ are given respectively by

$$M_a = \frac{1}{2} (Re(f_a))^{-1} F^\alpha \partial_\alpha f_a \quad (73)$$

$$m_\alpha^2 = m_{3/2}^2 + V_0 - F^\sigma F^\rho \partial_\sigma \partial_\rho \ln \mathcal{Z}_\alpha \quad (74)$$

$$A_{\alpha\beta\gamma} = F^\rho (K_\rho + \partial_\rho \ln Y_{\alpha\beta\gamma} - \partial_\rho \ln (\mathcal{Z}_\alpha \mathcal{Z}_\beta \mathcal{Z}_\gamma)) \quad (75)$$

Gaugino Masses;

For gauge groups that live on the D9-brane the gauge kinetic function is $f_a = S + \sigma_a M$ so that

$$M_9 \approx \frac{\sigma_9 F^M}{s} \quad (76)$$

These relatively small $D9$ gaugino mass terms arise solely due to the non-zero value F^M in a manner suggested in ref. [9]. For gauginos associated with $D5$ branes we find

$$M_{5_i a} \approx \frac{F^{T_i}}{\tau_i} + \frac{\sigma_i}{\sigma_9} \frac{s}{\tau_i} M_9 \quad (77)$$

Mass-squareds;

Because of the *no scale* structure of the Kähler potential as well as $F^S = 0$ we have

$$F^\sigma F^\rho \partial_\sigma \partial_\rho \ln \mathcal{Z}_\alpha = \left| f_T + \frac{\delta\tau}{(3 + \delta x)\hat{A}} \right|^2 \partial_\tau^2 \ln \mathcal{Z}_\alpha = \frac{\alpha m_{3/2}^2}{(3 + \delta x)^2} \left| 3 - \delta \frac{\delta \bar{W}_M}{\bar{W}} \right|^2 \quad (78)$$

so that

$$m_\alpha^2 = m_{3/2}^2 \left[1 - \frac{\alpha}{(3 + \delta x)^2} \left(3 - \frac{\delta \sigma}{s} \right)^2 \right] + V_0 \quad (79)$$

where

$$\alpha = -\tau \partial_T \ln \mathcal{Z}_\alpha = \left(1, \frac{1}{2}, 0 \right) \quad \text{for} \quad (C_i^9 C^{95_i} C_{j \neq i}^{5_i}, C^{5_i 5_j}, C_i^{5_i}) \quad \text{respectively.} \quad (80)$$

Generally, $\delta \sigma \ll 1$ leading to

$$m_\alpha^2 \approx m_{3/2}^2 (1 - \alpha) + V_0. \quad (81)$$

Note that in the case without modular invariance we found $V_0 \approx -\delta^2$ leading to $m_{\alpha=1}^2 \approx -\delta^2$. However this tachyonic mass-squared is cancelled by additional D -term contributions as we shall shortly see.

A-terms;

The general expression is found to be

$$A_{\alpha\beta\gamma} = 3m_{3/2} + xF^M - \frac{m_{3/2}}{3 + \delta x} \left(3 - \frac{\delta \sigma}{s} \right) (\alpha + \beta + \gamma) + F^\rho \partial_\rho \ln Y_{\alpha\beta\gamma}. \quad (82)$$

We will concentrate on the last term in (82) since at first sight there seems to be a danger that it strongly violates CP. However, it is important to take account of all contributions here because, although $F^m \ll F^0$, the $F^m \partial_m$ are of the same order as $F^0 \partial_0$. Once we include all terms, a cancellation takes place. Indeed it is clear from eq.(23a) and (38a,b) that the final piece of the A -term simply counts the $U(1)$ charge of the Yukawa coupling since

$$F^\rho \partial_\rho \ln Y_{\alpha\beta\gamma} = \frac{F^0}{q_0 \phi_0} \sum_n q_n \phi_n \partial_n \ln Y_{\alpha\beta\gamma} = \frac{F^0}{\phi_0} \frac{q_{\alpha\beta\gamma}}{q_0} \quad (83)$$

and in the modular invariant case

$$F^\rho \partial_\rho \ln Y_{\alpha\beta\gamma} = \frac{F^0}{\phi_0} \frac{1}{1+p} \left[p \frac{q_{\alpha\beta\gamma}}{q_0} - \alpha - \beta - \gamma \right]. \quad (84)$$

The A -terms are automatically real in both cases. Note that in the modular invariant case there is a choice of parameters for which the dependence on the weights of the fields cancels. Thus, as we mentioned above, flavour hierarchies could be generated entirely by the weights, with $U(1)$ charges and hence A -terms remaining completely degenerate.

D-term contributions;

Finally we need to consider the D -term *vevs*, which do not vanish precisely but generally get a *vev* of order m_W^2 . Indeed we can develop the potential in $\hat{\phi}_0$ around the minimum;

$$V = \frac{g^2}{2} D^2 + m_{\phi_0}^2 |\hat{\phi}_0|^2 + \dots \quad (85)$$

where the hat stands for the canonically normalized field, $\hat{\phi}_0 = \phi_0 \frac{3+\delta x}{\tau}$. Minimizing in $\hat{\phi}_0$ gives

$$\langle D \rangle = -\frac{m_{\phi_0}^2}{q_0 g^2}, \quad (86)$$

Thus, although the approximation $\langle D \rangle = 0$ is very accurate for determining the *vevs* of fields (*i.e.* $\hat{\phi}_0$ is only shifted by $\mathcal{O}(m_W)$ from the naive $\langle D \rangle = 0$ value), eq.(86) gives an additional degenerate contribution to the mass squareds of

$$\Delta m_\alpha^2 = g^2 q_\alpha \langle D \rangle = \frac{q_\alpha}{q_0} m_{\phi_0}^2. \quad (87)$$

This is precisely the sort of contribution that the anomalous $U(1)$ mediation idea hopes to take advantage of in order to solve the SUSY flavour problem. In the present case however, the contribution is likely to be small because the F -term contribution to the mass-squared of ϕ_0 is given by $m_{\phi_0}^2 \approx -\delta^2$, and therefore $\Delta m_\alpha^2 \approx \delta^2$. Thus the D -term contribution is as small as other degenerate contributions that we have, upto this point, been neglecting.

If the assignment of fields is such that the meson field had a different modular weight, α , then the D -term contribution could be more important. It seems likely therefore that there exist cases (like ϕ_0 not corresponding to C_i^9) in which a significant proportion of the supersymmetry breaking is mediated by the anomalous $U(1)$.

To summarize, the interesting feature we find is that the complex X_m -dependent pieces cancel at zeroth order in $|\phi_{m>1}/\phi_0|^2$ so that the phase of $A_{\alpha\beta\gamma}$ is naturally suppressed by powers of $|\phi_{m>1}/\phi_0|^2$. This result applies for any number of ϕ fields provided that one of them dominates the D -term (two of them in the modular invariant case). Indeed, the structure of $A_{\alpha\beta\gamma}$ does not depend on how many other condensing matter fields there are, what their charge is or what their Yukawa couplings are. Therefore, degeneracy and reality of A terms is a general feature of our model with the main assumption being that one condensate dominates the D -term in the non-modular invariant case (and two condensates in the invariant case). It is this assumption that forces the minimization condition to be $W_{\tilde{X}_m} \sim 0$ leading to the dynamical F -term relations in (23a).

We now turn to the anisotropic compactifications. The structure of soft terms can still be predicted if we assume that the stabilization of the τ_2 and τ_3 moduli happens at a lower scale. Note that there is no reason for *all* the moduli (or indeed any other hidden

fields) to be equally involved in generating and communicating the soft terms, and in breaking CP. If the condensing mesons couple only to τ_1 as we assume here, then τ_2 and τ_3 do not need to play any role in these processes, and if their stabilization happens at a lower scale their effect will be negligible. As a specific example, if these fields are fixed by gaugino condensation taking place on the $D5_2$ and $D5_3$ -branes (possibly in conjunction with additional anomalous $U(1)$'s), then the relevant nonperturbative T -dependent contributions in the superpotential must obey $e^{-4\pi^2\tau_i} \ll e^{-4\pi^2s}$ since phenomenology requires $\tau_2 \sim \tau_3 \gg 1$. Therefore phenomenology dictates that any T dependence in the superpotential be exponentially suppressed so it is consistent to treat the stabilization of S , τ_1 and ϕ_n separately from that of the remaining moduli.

Under this general assumption, the most general expressions for F -terms, including arbitrary anomalous $U(1)$, are as follows;

$$\begin{aligned}
F^S &= 0 \\
F^{T_1} &= \frac{\overline{\phi}_0}{\phi_0} F^0 - \frac{e^{G/2}\tau_1}{1 + \Delta^1.x} \left[1 - \overline{\phi}_m \frac{\overline{W}}{W} - \frac{\Delta^1\sigma}{s} \right] \\
F^{T_{j=2,3}} &= -\frac{e^{G/2}\tau_j}{1 + \Delta^j.x} \left(1 - \frac{\Delta^1.\sigma}{s} \right) \\
F^{M_k} &= \begin{cases} -\frac{F^0}{4\pi^2\sigma_k\phi_0} & \text{without mod. inv.} \\ -\frac{F^0}{8\pi^2\sigma_k\phi_0} \frac{(3N_c-1+2p)}{(1+p)} & \text{with mod. inv.} \end{cases} \\
F^{m_1} &= \begin{cases} \frac{q_m\phi_m}{q_0\phi_0} F^0 & \text{without mod. inv.} \\ \frac{\phi_m}{p\phi_0} F^0 & \text{with mod. inv.} \end{cases} \\
F^{m_{j=2,3}} &= 0,
\end{aligned} \tag{88}$$

where m_i labels fields coupling to τ_i in the Kähler potential, and where Δ_k^i is as defined in the appendix. Note that each F^{T_i} contributes equally to the supersymmetry breaking even though the τ_i may be very different. Inserting these expressions into the equations for the soft terms in the simpler non-modular invariant case gives

$$\begin{aligned}
m_\alpha^2 &= m_{3/2}^2(1 - \alpha) \\
A_{\alpha\beta\gamma} &= m_{3/2} \left(1 - \frac{\delta\sigma}{s} \right) \left[1 - (\alpha + \beta + \gamma) - \frac{1}{2\pi^2 s |\delta_{GS}x|} (q_{\alpha\beta\gamma} + \mathcal{O} \left| \frac{\phi_m}{\phi_0} \right|^2) \right], \tag{89}
\end{aligned}$$

where α , β , γ are now the sum of the weights (*e.g.* $\alpha = \sum_i \alpha_i$), and where here we only show the A -term for Yukawa couplings between fields that couple to the same τ_i . Again we see that the soft terms can be degenerate and that the A -terms are real.

6 Further phenomenological issues

In the previous sections we proposed a mechanism for spontaneously breaking CP in effective type I models with a stabilized dilaton. We found that, if there is no $\tilde{X}$ dependant terms in the Kähler potential, then it predicts real supersymmetry breaking terms irrespective of the superpotential. In addition, the susy breaking is controlled by $U(1)$ charges, so that a particular choice can give universality in the susy breaking as well. This looks like a good start for solving the susy CP and flavour problems, however there are a number of issues which remain. In particular, $\tilde{X}$ dependant terms in the Kähler potential might spoil these nice properties, and in addition we have still to control CP violation in the μ and B terms.

Therefore, we cannot yet claim to have a complete solution to the CP and flavour problems. But, guided by these aspects and by the need to preserve the suppression of CP violation and FCNCs, we will in this section reconsider some of the general ideas outlined in the introduction, and determine which of them (if any) can be implemented in this framework.

6.1 The generation of μ and B and approximate CP

Phenomenologically viable supersymmetric models require a higgs coupling $W_\mu = \mu H_1 H_2$ and its corresponding soft-breaking term $V_B = \mu B h_1 h_2 + h.c.$, with $\mu \sim 1\text{TeV}$. Generating a μ -term of the right scale is an important problem in supersymmetry, but it is likely to be especially difficult in any ‘large dimension’ model. Moreover the μ -term is central to the susy CP problem since electric dipole moments often constrain the phase of μ even more strongly than those of the A -terms [10]. This is because the magnitude of the μ -term is dominant in the mSUGRA models that are most frequently considered. (It is customary to rotate away the phase of μB since it appears in the higgs potential.) There are a number of ways to generate μ -terms and here we shall briefly recap them, and outline what they imply for our would-be solution to the flavour and CP problems. (See ref. [11] for a full review.)

Non-renormalizable terms and the Giudice-Masiero mechanism

One possibility for generating the μ -term is to add non-renormalizable terms [12]. In conventional supergravity, where we have $\langle |W| \rangle \sim m_{3/2} M_P^2$, we can simply add the term $|W| H_1 H_2 / M_P^2$ to the superpotential which guarantees a μ -term of the right order [12, 13]. This term is equivalent at leading order to adding $H_1 H_2 + h.c.$ to the Kähler potential as can be seen by making a Kähler transformation in the supergravity theory to transform one into the other; $K \rightarrow K + M_P^2 (F + \overline{F})$, $W \rightarrow W e^F$ where $F = H_1 H_2 / M_P^2$ [13, 14]. Adding a $H_1 H_2$ term in the Kähler potential is the Giudice-Masieron mechanism, and such terms appear in some heterotic string compactifications. The nett result in either case is an additional mass term for the Higgs of order m_W .

In the present case (and in any model with large volume factors) we have to be careful about scales, and also about canonically normalizing the higgs fields. Indeed,

if we add an additional term

$$W_\mu = \mu H_1 H_2 \quad (90)$$

to the supotential, then the contribution to the mass squared of the canonically normalized higgs fields is

$$m_\mu^2 = m_{3/2}^2 \frac{\mu^2 M_P^4}{|W|^2} \Pi_i \langle T_i + \bar{T}_i \rangle^{\alpha_i + \beta_i}, \quad (91)$$

where α_i, β_i are the weights of the two higgses with respect to T_i (which can be 0, $\frac{1}{2}$, 1). Requiring that the μ -term eventually generates a Higgs mass term of order m_W determines the magnitude of μ ;

$$\mu = \frac{|W|}{M_P^2 \Pi_i \langle T_i + \bar{T}_i \rangle^{\frac{\alpha_i + \beta_i}{2}}}. \quad (92)$$

The notation is a little sloppy but hopefully clear; the $T_i + \bar{T}_i$ factors coming from the Kähler metric and the canonical normalization are the eventual T_i *vevs* (not the fields themselves). Notice that, even if the normalization factors $\langle T_i + \bar{T}_i \rangle^{\alpha_i + \beta_i}$ are of order one, the mass scale required for μ is very different from the usual $\mu \sim m_W$. For example, if $M_s \sim 10^{16}$ GeV then we would require $\mu \sim 10^{10}$ GeV.

The equivalent term in the Kähler potential is found by performing the Kähler transformation $K \rightarrow K + M_P^2(F + \bar{F})$; $W \rightarrow W e^{-F}$ with $F = \mu H_1 H_2 / |W|$ giving the term

$$K_\mu = \hat{H}_1 \hat{H}_2. \quad (93)$$

This term is the canonically normalized Giudice-Masiero term and adding a term like this to the Kähler potential seems to be the most attractive way to guarantee higgs mass terms of the right order.

Despite this we must still pay attention to possible non-renormalizable terms in the superpotential because as we have seen, the required μ term is proportional to $|W| \sim M_s^3$, whereas in general we would expect the leading terms to be $\mu \propto M_s$, and therefore much larger. In general therefore, we have to prevent lower order terms from contributing significantly. The relevant effective non-renormalizable terms become important at the string scale and one does not expect additional volume factors to appear in the higher order diagrams. The most general expressions for them are therefore of the form

$$W_\mu = g_W(\tilde{X}) \tilde{\phi}_0^{-\frac{(q_{H_1} + q_{H_2})}{q_0}} M_s H_1 H_2, \quad (94)$$

where $g_W(\tilde{X})$ is an arbitrary function with a *vev* of $\mathcal{O}(1)$. Since $\phi_0 \sim \sqrt{\tau_1 |\delta_{GSx}|} M_P$, these μ -terms will be many orders of magnitude larger than the required value in eq.(92). The simplest way to forbid these terms is to choose $(q_{H_1} + q_{H_2})/q_0 \notin 0 \cup \mathbb{Z}_-$, so that there are no invariant operators with positive integer powers of ϕ_0 .

Remaining contributions to μ are then suppressed by powers of $\langle\phi_1\rangle$ and may themselves lead to a phenomenologically desirable μ . Consider, for example,

$$X = \phi_0^2 \phi_1^{\frac{-2q_0}{q_1}}$$

with $(q_{H_1} + q_{H_2})/q_0 > 0$. In this case the leading contribution to μ is

$$g_W(\tilde{X}) \tilde{\phi}_1^{-\frac{(q_{H_1}+q_{H_2})}{q_1}} M_s H_1 H_2. \quad (95)$$

We have already seen that $\tilde{\phi}_1 \ll 1$ to get the correct value of $m_{3/2}$, and it is possible to choose charges so that the value of μ in eq(92) results. For example, if the higgs fields couple to the same T_i as the mesons, then $X \sim M_s^3$ and $\phi_0 \sim \sqrt{|\delta_{GSx}|/\alpha_X} M_P$ so that $\tilde{\phi}_1 |\delta_{GSx}| \sim \alpha_X M_s^2/M_P^2$, and the generated μ is

$$\mu_{eff} = M_s \left(\frac{M_P^2 |\delta_{GSx}|}{M_s^2 \alpha_X} \right)^{-\frac{q_{H_1}+q_{H_2}}{2q_0}}. \quad (96)$$

This should be compared with the required μ in eq.(92) which we can write as

$$\mu = \frac{|W|\alpha_X}{M_P^2} \sim M_s |\delta_{GSx}| \cdot \frac{M_s^2 \alpha_X}{M_P^2 |\delta_{GSx}|}. \quad (97)$$

The two are of the same order when

$$q_{H_1} + q_{H_2} - 2q_0 = 0, \quad (98)$$

and thus for any combination of charges satisfying this condition we can expect a μ -term of the correct order to be generated by non-renormalizable terms. If this combination of charges is negative then the μ term will again be too large, if it is positive then we must rely on the Giudice-Masiero mechanism for generating the correct term.

Once we have generated a μ -term of the correct order, we automatically have a supersymmetry breaking B -term of order $m_{3/2}$, and it is simple to show that the phase of this term vanishes in the same way as it does for the A -terms. The phase of μ must be small even if the phase of $\tilde{X}$ is maximal because our model favours $|\tilde{X}| \sim m_u/m_t$ so that $g_W(\tilde{X}) \sim 1 + d\tilde{X}$ at leading order.

An additional singlet

We should briefly mention the second idea for generating an effective μ term. It is often referred to as the Next-to-MSSM (NMSSM), and relies on an additional gauge singlet which acquires a vev of $\mathcal{O}(1\text{TeV})$ thanks to the higgs superpotential [15],

$$W_S = \kappa S^3 + \lambda S H_1 H_2. \quad (99)$$

The resulting phenomenology is similar to that of the usual MSSM [15]. In this original version of the NMSSM, the superpotential has a global Z_3 symmetry (under which the

fields are all rotated by a phase $e^{i\pi/3}$). This protects the singlet against destabilizing divergences or non-renormalizable terms which would otherwise generally drive it to $\langle S \rangle \sim M_s$ [16, 17].

The class of models under investigation clearly includes the NMSSM. One of the invariants X_m can play the role of the NMSSM singlet, S . Again a Z_3 symmetry can prevent the vev of this singlet being driven to M_s by destabilizing divergences or non-renormalizable terms, and again one expects that when Z_3 symmetry is broken by the electroweak phase transition, the invariant acquires a vev of order 1TeV. The analysis of the A -terms is unchanged, and there is no further contribution to CP violation, so that the EDMs are protected. From this point of view additional singlets with $vevs$ protected by discrete symmetries are beneficial and seem natural, however these models have other serious difficulties. The Z_3 symmetry implies that the breaking of electroweak symmetry gives cosmological domain walls with a typical mass per unit area of m_W^3 [18]. One possible way to avoid destabilizing divergences and yet break the Z_3 symmetry in the global theory is to impose instead an R -symmetry in the model [17]. There has been recent interest in this idea although we will not pursue it here [19]. (For other aspects of these models and other ideas see ref. [11] and references therein.)

6.2 Higher order corrections in the Kähler potential

We now turn to the question of higher order corrections which may destroy the attractive properties of the soft breaking terms that we have found at leading order. As we have seen, these properties are independent of the form of the superpotential to all orders. Therefore, the most dangerous terms are those coming from higher order contributions in the Kähler potential. For example, the Kähler potential can take the form

$$K_i^j = (\delta_j^i + K_j^{(1)i}(X, X^+)) \hat{\phi}_i \hat{\phi}^j + \text{h.c.} \quad (100)$$

where $K_j^{(1)i}$ are some functions of the invariants. These higher order terms in eq.(100) are generally flavour changing and, because of the phase of $\langle X \rangle$, they will also contribute to CP violating observables such as the ε and ε' parameters of the kaon system. We can estimate the constraint on these terms from the fact that the additional contribution to the Kähler potential will cause a mass splitting in the squark mass-squareds of order,

$$\delta_{ij}^f = \frac{m_i^2 - m_j^2}{m_i^2 + m_j^2} \approx K_j^{(1)i}, \quad (101)$$

where f is the squark label. The bounds on these parameters have been widely studied in the literature, and they are particularly strong for the 1st and 2nd generation mixing, and for the combination $\delta_{12}^f = \sqrt{(\delta_{LL}^f)_{12}(\delta_{RR}^f)_{12}}$. From ΔM_K and ε_K one finds that [20]

$$Re[\delta_{12}^f] \lesssim 6 \cdot 10^{-3} \left(\frac{m_{\tilde{d}}}{1\text{TeV}} \right) \quad , \quad Im[\delta_{12}^f] \lesssim 5 \cdot 10^{-4} \left(\frac{m_{\tilde{d}}}{1\text{TeV}} \right) . \quad (102)$$

The most direct way to satisfy these constraints is to tune $\langle |X| \rangle$ to be small. As we discussed earlier this means tuning the parameters in the perturbative superpotential and will still be compatible with setting $M_s = M_{GUT}$ if we choose the rank of the condensing hidden gauge group, N_c , correctly.

More dangerous higher order corrections come from terms of the form

$$\mathcal{C} \frac{|\hat{\phi}_0|^2}{M_s^2} \hat{\phi}_i \hat{\phi}^j \sim \mathcal{C} |\delta_{GS} x| \frac{M_P^2}{M_s^2} \hat{\phi}_i \hat{\phi}^j \quad (103)$$

where $\mathcal{C}$ represents some coupling factor between $|\hat{\phi}_0|^2$ and the $\hat{\phi}_i$'s. To forbid these requires $\mathcal{C} \ll \frac{M_s^2/M_P^2}{|\delta_{GS} x|} \sim 10^{-6}/|\delta_{GS} x|$. We reasonably expect $|\delta_{GS} x| \sim 10^{-3}$ so that the constraint becomes $\mathcal{C} \ll 10^{-3}$. We recall that ϕ_0 corresponds either to C_i^9 or $C_j^{5_k}$ fields. Also, tree level interactions between C fields are described by the superpotential [6,21]

$$W_9 = C_1^9 C_2^9 C_3^9 + C^{5_1 5_2} C^{5_3 5_1} C^{5_2 5_3} + \sum_{i=1}^3 C_i^9 C^{95_i} C^{95_i} \quad (104)$$

$$W_5 = \sum_{i=1}^3 (C_1^{5_i} C_2^{5_i} C_3^{5_i} + C_i^{5_i} C^{95_i} C^{95_i}) \\ + \sum_{i \neq j \neq k=1}^3 \left(C_j^{5_i} C^{5_i 5_k} C^{5_i 5_k} + \frac{1}{2} C^{5_j 5_k} C^{95_j} C^{95_k} \right) \quad (105)$$

To suppress the interactions (103), we see from (104) that visible fields should not be C_i^9 nor C^{95_i} if ϕ_0 is associated with C_i^9 . However, they can be any other C fields, in which case the interactions (103) will come from loop diagrams and we expect them to be suppressed and obey the constraint $\mathcal{C} \ll 10^{-3}$. Similarly if ϕ_0 is associated with $C_j^{5_k}$. In this case, visible fields should not be $C_j^{5_k}$ nor $C^{5_i 5_j}$ according to (105).

6.3 Relating CP violation and flavour changing

Finally we remark on another scheme for addressing the susy CP problem, which is to associate CP violation with flavour violation. This idea arises naturally when the Yukawa couplings are associated with adjoint fields that acquire *vevs* [22] and the resulting couplings are hermitian in flavour space. Such a scheme can be incorporated into the present framework by putting the X fields into the adjoint representation of a horizontal flavour symmetry. Note that a requirement for this to work is that the supersymmetry breaking dynamics do not contribute further to CP violation [22], as is indeed the case here. (The role of the F -term *vevs* is merely one of transmitting the CP violation to the visible sectors.)

It is clear, since we have been careful to maintain complete control over the dynamics of dilaton stabilization and over the spontaneous breaking of CP, that this idea goes through unchanged. In particular, we diagonalize the Kähler metric in eq.(100) by making unitary transformations. However the A -terms and Yukawa couplings are

hermitian. Diagonalization of the Yukawas therefore also involves a unitary transformation and the A -terms remain hermitian with real diagonal components. This scheme keeps CP violation out of the μ -term and the flavour diagonal A -terms, and the contribution to EDMs is automatically suppressed; CP violation is always, as observed in nature, associated with flavour changing.

7 Summary

We have studied supersymmetry breaking by a single gaugino condensation in the context of type IIB orientifolds. While there does not yet exist any realistic particle spectrum in the simplest constructions [6], our goal was to bring out some phenomenological features that are expected to be typical of these theories. We found that it is possible to stabilize the dilaton and moduli fields at *vevs* which are in agreement with both realistic gauge couplings and an electroweak supersymmetry breaking scale. It also predicts a string scale close to the conventional unification scale M_{GUT} . The stabilization utilizes an anomalous $U(1)$ symmetry and relies heavily on the presence of twisted moduli fields, M , that appear in the Kähler potential. In addition to these nice properties the stabilization incorporates spontaneous CP breaking leading to complex Yukawa couplings and a CP violating phase in the CKM matrix. In contrast, soft-masses, and the A and B -terms are guaranteed to be real at leading order, and depend only on the choice of $U(1)$ charges, hinting strongly at a possible solution to the susy flavour and CP problems. Suppressing the higher order contributions to CP and flavour changing requires some constraints on the $U(1)$ charges and this favours some non-universality in the supersymmetry breaking.

We should emphasize the major role played by the anomalous $U(1)$ in our analysis. First it generates an M -dependent Fayet–Iliopoulos term and consequently fixes the *vev* of the meson via the D -term equation. Second, it plays a role in spontaneous CP violation; the size of the phase in the CKM matrix is given by the phase of the $U(1)$ invariants. This depends on the couplings between the non-renormalizable interactions in the perturbative superpotential. Finally the $U(1)$ symmetry governs the flavour structure on two levels: not only does the $U(1)$ charge determine the A -terms, but also it is useful to produce a Froggatt–Nielsen like hierarchy in the quark mass matrix. The relation between charges, soft-terms and Yukawa couplings is similar to that of ref. [23] and the phenomenological consequences are expected to be the same. One particularly interesting conclusion is therefore that the *vev* of the $U(1)$ invariants determines both the Yukawa hierarchy and the string scale. Our final picture is the following:

- if $\arg(\tilde{X}) \sim \mathcal{O}(1)$, we have maximal CP violation in the CKM matrix, however the soft terms are real. Also, the phase of μ is small because $|\tilde{X}| < 1$. We can choose charges such that A -terms are universal and then FCNCs and EDMs are both suppressed at leading order. However, avoiding FCNCs at higher order requires some non-universality in the A -terms.
- if $\arg(\tilde{X})$ is small, this is a natural scenario for approximate CP [3]. Now the non-

universality is required to account for the observed value of ε_K and ε'_K through supersymmetric diagrams.

These two possibilities for solving the susy flavour and CP problems are already well-known general ideas in the literature. However, here they are the outcome of the specific dynamics of dilaton and moduli stabilization leading to dynamical relations between the auxilliary fields.

Acknowledgements

We are very grateful to Carlos Savoy for helpful collaboration and wish to thank Stéphane Lavignac for enlightening discussions. SAA is supported by a PPARC Opportunity Grant.

Appendix: Inverse Kähler metric and scalar potential in the case $T_1 \neq T_2 \neq T_3$

In [1], we detailed the computation of the inverse Kähler metric and the scalar potential in the case where all moduli T_i are assumed to be degenerate *i.e.* $T_1 = T_2 = T_3 = T$. In this appendix we relax this assumption and expose the results in the most general case. It appears that the potential can still be expressed in a simple form similar to the degenerate case.

For independent T_i , the Kähler potential is:

$$K = -\ln s - \sum_{i=1}^3 \ln \tau_i + \hat{K}(m_k), \quad (106)$$

where

$$\tau_i = T_i + \bar{T}_i - |\phi_i|^2; \quad m_k = M_k + \bar{M}_k - \sum_i \Delta_k^i \ln \tau_i. \quad (107)$$

From the Kähler equation (7), we have only kept the C_i^9 matter fields (for convenience, C_i^9 are denoted ϕ_i) since only the fields charged under the D9-brane gauge groups will condense. Note that $\phi_i = \phi_{in}$ are vectors, so that we are allowing for the most general case. Note that we changed the notation δ to Δ since it now carries two indices and could be confused with the Kronecker symbol.

We get the following for the first derivative of the Kähler potential:

$$K_\alpha = \left(-\frac{1}{s}, -\frac{(1 + \Delta^i \cdot x)}{\tau_i}, x_k, \bar{\phi}_i \frac{(1 + \Delta^i \cdot x)}{\tau_i} \right). \quad (108)$$

Here we have introduced $x_k = \partial \hat{K} / \partial M_k$, and have defined a dot product, $\Delta^i \cdot x \equiv \sum_k \Delta_k^i x_k$. Differentiating again we get

$$K_{\alpha\bar{\beta}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s^2} & 0 \\ 0 & K_{a\bar{b}} \end{pmatrix}.$$

To express $K_{a\bar{b}}$ and its inverse we define

$$\begin{aligned}
J_{kk'} &= \frac{\partial^2 \hat{K}}{\partial M_k \partial \bar{M}_{k'}} \\
A_{kk'} &= (J^{-1})_{kk'} + \sum_i \Delta_k^i \frac{1}{(1 + \Delta^i \cdot x)} \Delta_{k'}^i \\
\mathcal{C}_{ij} &= \delta_{ij} \frac{1 + \Delta^i \cdot x}{\tau_i^2} + \frac{\Delta^i \cdot J \cdot \Delta^j}{\tau_i \tau_j} \\
\Delta^i \cdot J \cdot \Delta^j &= \Delta_k^i J_{kk'} \Delta_{k'}^j
\end{aligned} \tag{109}$$

and then have

$$\begin{aligned}
K_{a\bar{b}} &= \begin{pmatrix} K_{T_i \bar{T}_j} & K_{T_i \bar{M}_k} & K_{T_i \bar{\phi}_{j'}} \\ K_{M_{k'} \bar{T}_j} & K_{M_{k'} \bar{M}_k} & K_{M_{k'} \bar{\phi}_{j'}} \\ K_{\phi_{i'} \bar{T}_j} & K_{\phi_{i'} \bar{M}_k} & K_{\phi_{i'} \bar{\phi}_{j'}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{ij} & -\frac{(\Delta^i \cdot J)_k}{\tau_i} & -\phi_{j'} \mathcal{C}_{ij'} \\ -\frac{(\Delta^j \cdot J)_{k'}}{\tau_j} & J_{k'k} & \phi_{j'} \frac{(\Delta^{j'} \cdot J)_{k'}}{\tau_{j'}} \\ -\bar{\phi}_{i'} \mathcal{C}_{i'j} & \bar{\phi}_{i'} \frac{(\Delta^{i'} \cdot J)_k}{\tau_{i'}} & \bar{\phi}_{i'} \phi_{j'} \mathcal{C}_{i'j'} + \delta_{i'j'} \frac{1 + \Delta^{i'} \cdot x}{\tau_{i'}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

The inverse of this matrix is

$$\begin{aligned}
K^{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & K^{\alpha b} \end{pmatrix} \\
K^{\alpha b} &= \begin{pmatrix} K^{\bar{T}_i T_j} & K^{\bar{T}_i M_k} & K^{\bar{T}_i \phi_{j'}} \\ K^{\bar{M}_{k'} T_j} & K^{\bar{M}_{k'} M_k} & K^{\bar{M}_{k'} \phi_{j'}} \\ K^{\bar{\phi}_{i'} T_j} & K^{\bar{\phi}_{i'} M_k} & K^{\bar{\phi}_{i'} \phi_{j'}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{(\tau_i^2 + \tau_i |\phi_i|^2) \delta_{ij}}{(1 + \Delta^i \cdot x)} & \frac{\tau_j \Delta_k^j}{(1 + \Delta_j \cdot x)} & \frac{\phi_i \tau_i}{(1 + \Delta^i \cdot x)} \delta_{ij'} \\ \frac{\tau_j \Delta_k^j}{(1 + \Delta_j \cdot x)} & A_{k'k} & 0 \\ \frac{\phi_{i'} \tau_{i'}}{(1 + \Delta_{i'} \cdot x)} \delta_{i'j} & 0 & \frac{\tau_{i'}}{(1 + \Delta^{i'} \cdot x)} \delta_{i'j'} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

The hidden sector group being on a D9-brane, the superpotential does not depend on the T_i . One can easily check that the F -part of the scalar potential,

$$V_F = e^G (-3 + G_\alpha K^{\alpha\bar{\beta}} G_{\bar{\beta}}) = e^G B \quad \text{where} \quad G = K + \ln |W|^2 \tag{110}$$

may be written as:

$$V_F = e^G \left(\Delta \cdot B_0 + s^2 |G_S|^2 + \sum_{i=1}^3 \frac{\tau_i}{(1 + \Delta^i \cdot x)} \left| \frac{W_{\phi_i}}{W} \right|^2 + \sum_{kk'} (B_{0,k} + \frac{W_k}{W}) A_{kk'} (B_{0,k'} + \frac{W_{k'}}{W}) \right) \tag{111}$$

where we have defined

$$\Delta.B_0 \equiv \sum_k \Delta_k B_{0,k}, \quad \Delta_k = \sum_i \Delta_k^i \quad (112)$$

$$B_{0,k} = x_k - (A^{-1})_{kk'} \Delta_{k'} \quad (113)$$

Like in the degenerate case, the dilaton is fixed because x_k and $B_{0,k}$ get a *vev*. There is also the D -term contribution,

$$V_D = \frac{g_X^2}{2} |D_X|^2, \quad (114)$$

where

$$D_X = \sum_i q_i |\phi_i|^2 \frac{(1 + \Delta^i . x)}{\tau_i} + \delta_{GS_k} \frac{x_k}{2} \quad (115)$$

We see that if one field dominates, for example ϕ_2 , then the D -term equation $D_X = 0$ does fix the ratio $|\phi_2|^2/\tau_2$ in terms of x . One can also assume that C_1^9 and C_3^9 are not charged under $U(1)_X$. While our model loses some predictability (the string scale will remain a free parameter with τ_1 and τ_3), one advantage is that the dilaton and twisted moduli (and therefore the gauge couplings on the $D9$ -brane) are fixed whatever the values of τ_1 and τ_3 .

References

- [1] S. A. Abel and G. Servant, Nucl. Phys. B **597** (2001) 3, [hep-th/0009089].
- [2] P. Binétruy and E. Dudas, Phys. Lett. **B389** (1996) 503, [hep-th/9607172];
G. Dvali and A. Pomarol, Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 3728 [hep-ph/9607383].
- [3] G. Eyal and Y. Nir, Nucl. Phys. B **528** (1998) 21, [hep-ph/9801411]; M. Dine,
E. Kramer, Y. Nir and D. Shadmi, [hep-ph/0101092]
- [4] L. E. Ibanez, R. Rabadan and A. M. Uranga, Nucl. Phys. B **576** (2000) 285,
[hep-th/9905098];
- [5] C. A. Scrucca and M. Serone, JHEP **9912** (1999) 024 [hep-th/9912108], JHEP
0007 (2000) 025 [hep-th/0006201].
- [6] G. Aldazabal, A. Font, L. E. Ibanez and G. Violero, Nucl. Phys. B **536** (1998)
29, [hep-th/9804026]; L. E. Ibanez, C. Munoz and S. Rigolin, Nucl. Phys. B **553**
(1999) 43, [hep-ph/9812397].
- [7] B. de Carlos, J. A. Casas and C. Munoz, Nucl. Phys. B **399** (1993) 623 [hep-
th/9204012].

- [8] L. E. Ibanez, R. Rabadan and A. M. Uranga, Nucl. Phys. B **542** (1999) 112, [hep-th/9808139]; E. Poppitz, Nucl. Phys. B **542** (1999) 31, [hep-th/9810010]; L. E. Ibanez and F. Quevedo, JHEP**9910** (1999) 001, [hep-ph/9908305].
- [9] K. Benakli, Phys. Lett. **B475** (2000) 77, [hep-ph/9911517]; S. A. Abel, B. C. Allanach, F. Quevedo, L. Ibáñez and M. Klein, hep-ph/0005260.
- [10] T. Falk and K. A. Olive, Phys. Lett. B **375** (1996) 196, [hep-ph/9602299]; T. Falk and K. A. Olive, Phys. Lett. B **439** (1998) 71, [hep-ph/9806236]; A. Bartl, T. Gajdosik, W. Porod, P. Stockinger and H. Stremnitzer, Phys. Rev. D **60** (1999) 073003, [hep-ph/9903402]; T. Falk, K. A. Olive, M. Pospelov and R. Roiban, Nucl. Phys. B **560** (1999) 3, [hep-ph/9904393].
- [11] N. Polonsky, hep-ph/9911329.
- [12] J. A. Casas and C. Munoz, Phys. Lett. B **306** (1993) 288, [hep-ph/9302227].
- [13] J. E. Kim and H. P. Nilles, Mod. Phys. Lett. A **9** (1994) 3575 [hep-ph/9406296].
- [14] G. F. Giudice and A. Masiero, Phys. Lett. B **206** (1988) 480.
- [15] A selection of relevant papers: P. Fayet, Nucl. Phys. B **90** (1975) 104; U. Ellwanger, M. Rausch de Traubenberg and C. A. Savoy, Phys. Lett. B **315** (1993) 331, [hep-ph/9307322]; T. Elliott, S. F. King and P. L. White, Phys. Rev. D **49** (1994) 2435, [hep-ph/9308309]; U. Ellwanger, M. Rausch de Traubenberg and C. A. Savoy, Z. Phys. C **67** (1995) 665, [hep-ph/9502206]; Nucl. Phys. B **492** (1997) 21, [hep-ph/9611251].
- [16] J. Bagger, E. Poppitz and L. Randall, Nucl. Phys. B **455** (1995) 59, [hep-ph/9505244].
- [17] S. A. Abel, Nucl. Phys. B **480** (1996) 55, [hep-ph/9609323];
- [18] S. A. Abel, S. Sarkar and P. L. White, Nucl. Phys. B **454** (1995) 663, [hep-ph/9506359].
- [19] C. Panagiotakopoulos and K. Tamvakis, Phys. Lett. B **446** (1999) 224, [hep-ph/9809475]; Phys. Lett. B **469** (1999) 145, [hep-ph/9908351]; C. Panagiotakopoulos and A. Pilaftsis, Phys. Rev. D **63** (2001) 055003, [hep-ph/0008268]; A. Dedes, C. Hugonie, S. Moretti and K. Tamvakis, Phys. Rev. D **63** (2001) 055009, [hep-ph/0009125]; G. C. Branco, F. Kruger, J. C. Romao and A. Teixeira, hep-ph/0012318.
- [20] F. Gabbiani, E. Gabrielli, A. Masiero and L. Silvestrini, Nucl. Phys. B **477** (1996) 321, [hep-ph/9604387].
- [21] M. Berkooz and R. G. Leigh, Nucl. Phys. B **483** (1997) 187 [hep-th/9605049].

- [22] A. Masiero and T. Yanagida, hep-ph/9812225; S. Abel, D. Bailin, S. Khalil and O. Lebedev, hep-ph/0012145.
- [23] E. Dudas, S. Pokorski and C. A. Savoy, Phys. Lett. B **369** (1996) 255, [hep-ph/9509410].

Résumé

Le Modèle Standard de la physique des particules a été remarquablement testé auprès des grands accélérateurs jusqu'à une énergie de l'ordre du TeV. Malgré ses succès, un grand nombre de problèmes restent sans solution. Par exemple, le Modèle Standard ne permet pas d'expliquer l'origine de la prépondérance de la matière sur l'antimatière, ni l'origine du rapport 10^{16} entre l'échelle de brisure électrofaible et l'échelle de Planck. Les interactions électrofaibles et fortes ne sont pas unifiées et de plus, la gravité est absente. Cette thèse s'intéresse à différents aspects phénoménologiques des théories d'extension du Modèle Standard. Le premier chapitre porte sur la baryogénèse électrofaible dans le Modèle Standard Supersymétrique Minimal et plus spécifiquement sur la dynamique de la transition de phase électrofaible. Le deuxième chapitre est consacré au problème de la brisure spontanée de la supergravité dans les théories de cordes effectives, les seules théories offrant l'espoir d'une description unifiée des interactions gravitationnelles avec les autres forces fondamentales. Enfin, le dernier chapitre discute un certain nombre de modèles phénoménologiques utilisant les propriétés des branes et la présence de dimensions supplémentaires afin de reformuler le problème de hiérarchie de jauge en termes géométriques.

Etudes phénoménologiques au-delà du Modèle Standard

Résumé

Le Modèle Standard de la physique des particules a été remarquablement testé auprès des grands accélérateurs jusqu'à une énergie de l'ordre du TeV. Malgré ses succès, un grand nombre de problèmes restent sans solution. Par exemple, le Modèle Standard ne permet pas d'expliquer l'origine de la prépondérance de la matière sur l'antimatière, ni l'origine du rapport 10^{16} entre l'échelle de brisure électrofaible et l'échelle de Planck. Les interactions électrofaibles et fortes ne sont pas unifiées et de plus, la gravité est absente. Cette thèse s'intéresse à différents aspects phénoménologiques des théories d'extension du Modèle Standard. Le premier chapitre porte sur la baryogénèse électrofaible dans le Modèle Standard Supersymétrique Minimal et plus spécifiquement sur la dynamique de la transition de phase électrofaible. Le deuxième chapitre est consacré au problème de la brisure spontanée de la supergravité dans les théories de cordes effectives, les seules théories offrant l'espoir d'une description unifiée des interactions gravitationnelles avec les autres forces fondamentales. Enfin, le dernier chapitre discute un certain nombre de modèles phénoménologiques utilisant les propriétés des branes et la présence de dimensions supplémentaires afin de reformuler le problème de hiérarchie de jauge en termes géométriques.

Mots-clés

Baryogénèse, Brisure de Supersymétrie, Supercordes, Branes,
Problème de Hiérarchie, Violation de CP.