



ÉCOLE POLYTECHNIQUE

THESE

présentée pour obtenir le grade de

**Docteur de l'École Polytechnique**

**Spécialité Physique Théorique**

par

GUILLAUME DE SMEDT

Sujet :

**Systèmes hors d'équilibre :  
persistance  
et  
métastabilité**

Soutenue le 11 septembre 2002 à l'École Polytechnique  
devant la Commission d'examen :

Messieurs	Alan BRAY	
	Sylvio FRANZ	Rapporteur
	Claude GODRÈCHE	Directeur de thèse
	Jean-Marc LUCK	Directeur de thèse
	Satya MAJUMDAR	Rapporteur
	Marc MÉZARD	Président

# Remerciements

---

Mes premiers remerciements vont naturellement à Jean-Marc Luck et Claude Godrèche  
Claude Godrèche et Jean-Marc Luck

C'est sous leur direction bicéphale et éclairée que j'ai effectué mes premiers pas dans le monde de la recherche. A leurs qualités tant scientifiques qu'humaines je dois beaucoup, aussi bien sur le plan professionnel que personnel : ce que j'ai appris avec eux m'accompagnera encore longtemps, même dans des domaines *a priori* éloignés de la physique théorique.

En la personne de Jean-Paul Blaizot, je voudrais remercier l'ensemble du Service de Physique Théorique de m'avoir accueilli pendant ces trois années. La présence en ce lieu, ainsi qu'au Service de Physique de l'Etat Condensé voisin, de nombreux physiciens de talent rend l'atmosphère studieuse et stimulante.

Je souhaite remercier le personnel administratif, et plus précisément Sylvie Zaffanella, ainsi que le service informatique, pour leur efficacité et pour leur travail, discret mais ô combien important, qui rend le notre plus aisé.

Je remercie chaleureusement Marc Mézard qui, quelques années après m'avoir donné mes premiers cours de physique statistique théorique, m'a fait l'honneur de présider mon jury.

Silvio Franz et Satya Majumdar ont accepté d'être les rapporteurs de ma thèse : je les en remercie. Une large part de ma connaissance des problèmes de persistance vient d'une fréquentation assidue de travaux de Satya; Silvio, pour sa part, a largement contribué, par ses travaux, questions et remarques, à éclairer mon point de vue sur les questions de métastabilité dans les systèmes vitreux.

Je remercie Alan Bray, dont le nom peut être associé aussi bien à la persistance qu'à l'étude des états métastables, d'avoir accepté de participer au jury.

Les remarques de Riwal et Kirone m'ont beaucoup aidé lors de la préparation de la présentation orale, et je voudrais leur faire part ici de ma reconnaissance.

Il est difficile - et forcément réducteur - d'essayer de rendre à chacun ce que l'on doit : je voudrais avoir ici une pensée pour tous ceux que je n'ai pas mentionnés, parce qu'il n'ont pas eu une influence directe sur mon travail de recherche mais qui, par leur soutien, leur intérêt pour mon travail ou tout simplement leur présence à mes côtés

apporte à la vie les petits grains de sel si indispensables...

# Table des matières

---

<b>1</b>	<b>Persistence et temps d'occupation</b>	<b>1</b>
1.1	Historique . . . . .	1
1.2	Modèles physiques . . . . .	2
1.2.1	Le modèle d'Ising ferromagnétique . . . . .	2
1.2.2	L'équation de la diffusion . . . . .	5
1.2.3	Des modèles physique aux processus gaussiens . . . . .	6
1.3	Observables et problèmes . . . . .	8
1.3.1	L'exposant $\theta$ . . . . .	8
1.3.2	Aimantation locale, temps d'occupation . . . . .	8
1.3.3	Temps du dernier zéro . . . . .	8
1.4	Quelques méthodes de résolution . . . . .	9
1.4.1	Méthodes exactes . . . . .	9
1.4.2	Le moment d'ordre 2 de l'aimantation locale . . . . .	10
1.4.3	Simulations numériques . . . . .	11
1.4.4	Méthodes approchées . . . . .	12
1.5	Un cas exactement résolu : le modèle de Potts . . . . .	16
1.6	Simplification : processus aléatoires . . . . .	17
1.6.1	Le mouvement brownien . . . . .	17
1.6.2	Extensions du mouvement brownien . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Processus de renouvellement</b>	<b>21</b>
2.1	Introduction, motivation . . . . .	21
2.2	Processus de renouvellement . . . . .	21
2.2.1	Définitions et notations . . . . .	21
2.2.2	Méthode . . . . .	23
2.2.3	Résultats : lois limites (universelles) . . . . .	25
2.3	Application : déformation du mouvement brownien . . . . .	27
2.3.1	Le processus . . . . .	27
2.3.2	Résolution du modèle . . . . .	28
2.4	Retour sur les intervalles indépendants . . . . .	29
2.5	Extensions possibles de processus de renouvellement . . . . .	34
2.6	Article 1 : Statistique du temps d'occupation d'une classe de processus gaussiens markoviens . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Accélération aléatoire</b>	<b>59</b>
3.1	Introduction . . . . .	59
3.1.1	Le modèle . . . . .	60

3.1.2	Résultats généraux . . . . .	60
3.1.3	Identités de récurrence . . . . .	60
3.2	Probabilité de persistance . . . . .	62
3.3	Statistique des passages par zéro . . . . .	63
3.3.1	Problème d'effondrement inélastique . . . . .	65
3.4	Temps de dernier passage . . . . .	65
3.5	Une approche par les équations de Fokker-Planck . . . . .	66
3.6	Temps d'occupation . . . . .	66
3.6.1	Tentative analytique . . . . .	67
3.6.2	Approximations . . . . .	69
3.7	Extension : dérivée n-ième . . . . .	74
3.7.1	Généralités . . . . .	74
3.7.2	Le cas $n = 3$ . . . . .	75
3.8	Article 2 : Survie partielle et effondrement inélastique d'une particule accélérée aléatoirement . . . . .	76
<b>4</b>	<b>De la persistance aux états métastables</b>	<b>83</b>
4.1	Introduction . . . . .	83
4.2	Phénomènes de blocage dynamique . . . . .	84
4.2.1	Grandes dimensions . . . . .	84
4.2.2	Désordre . . . . .	84
4.3	Réseau sous-jacent . . . . .	85
4.4	Conservation du paramètre d'ordre . . . . .	86
4.5	Température finie . . . . .	86
4.5.1	Comparaison de systèmes . . . . .	87
4.5.2	Persistance par bloc . . . . .	87
4.5.3	Temps d'occupation . . . . .	87
4.6	Persistance et états bloqués . . . . .	87
<b>5</b>	<b>Etats métastables : quelques résultats exacts en dimension 1</b>	<b>91</b>
5.1	Etats métastables en champ moyen . . . . .	91
5.2	Dynamique lente et statistique des états métastables . . . . .	93
5.2.1	Verres de spins en champ moyen . . . . .	94
5.2.2	Verres structuraux . . . . .	95
5.3	Statistique des états métastables . . . . .	95
5.3.1	Entropie <i>a priori</i> . . . . .	96
5.3.2	Milieux granulaires : hypothèse d'Edwards . . . . .	96
5.3.3	Test en champ moyen : le modèle <i>p</i> -spin . . . . .	98
5.3.4	Test en dimension finie . . . . .	98
5.4	Modèles unidimensionnels . . . . .	99
5.4.1	Introduction, motivation . . . . .	99
5.4.2	Définition des modèles . . . . .	99
5.4.3	Résolution . . . . .	101
5.4.4	Conclusions . . . . .	103
5.5	Modèles de déposition . . . . .	105
5.6	Article 3 : Etats métastables de systèmes de spins unidimensionnels . . . . .	106

<b>6</b>	<b>Modèle de Kawasaki unidimensionnel</b>	<b>125</b>
6.1	Introduction . . . . .	125
6.2	Dynamique de température nulle . . . . .	127
6.3	Dynamique de basse température . . . . .	136
6.4	Article 4 : Etats métastable de la chaîne d'Ising-Kawasaki . . . . .	138

## Annexe

<b>A</b>	<b>Statistique du nombre de particules déposées</b>	<b>151</b>
A.1	Modèles de déposition irréversible . . . . .	151
A.2	Condition initiale : amas vide . . . . .	152
A.3	Passage à une condition initiale aléatoire . . . . .	153
<b>B</b>	<b>Loi de Gumbel</b>	<b>157</b>

# Préambule

---

Les travaux présentés dans cette thèse concernent divers problèmes de dynamique stochastique en lien avec la physique statistique de systèmes hors d'équilibre. Les deux parties sont assez largement indépendantes, bien qu'elles puissent être envisagées sur le même plan dans la perspective des systèmes de spins d'Ising pour la dynamique de température nulle - systèmes qui sont à la base de modèles de systèmes très divers.

Dans la première partie (chapitres 1 à 3) nous nous intéressons à la persistance, entendue comme un ensemble de questions relatives à la statistique des retournements d'un spin et à celle de la moyenne temporelle de l'aimantation locale. Le **chapitre 1** expose en détail les différents modèles, ainsi que le passage à l'étude des questions de persistance pour des processus aléatoires généraux. Les différentes observables y sont introduites. Dans ce cadre, le problème se ramène à des questions classiques de probabilité : statistique des retours successifs à l'origine du processus - ce qui peut être vue comme cas particulier de probabilités de survie généralisées - et distribution du temps d'occupation (temps passé dans le demi-plan positif). Parmi les processus aléatoires, le mouvement brownien reproduit assez adéquatement la phénoménologie observée : décroissance algébrique de la probabilité de persistance et forme en  $\cup$  de la densité du temps d'occupation. De plus il est possible pour ce processus d'obtenir explicitement un grand nombre de résultats exacts, qui nous servent ensuite de point de départ pour nos travaux.

Ainsi le **chapitre 2** traite-t-il de la persistance pour une famille de processus gaussiens markoviens non stationnaires définie par une équation de type Langevin dépendant d'un paramètre, généralisant le mouvement brownien. Pour cet ensemble de processus le paramètre se trouve en fait être l'exposant de persistance. Le problème est alors l'étude de l'aimantation locale. Notre méthode repose sur une étude de la persistance pour des processus de renouvellement : ceci nous permet, à l'aide d'égalités pour les lois limites et de considérations de symétrie, de retrouver des équations de récurrence pour les moments du temps d'occupation et d'écrire une équation intégrale pour la densité de probabilité de cette variable. Nous retrouvons alors le comportement attendu dans la région de persistance, et nous obtenons d'autre part des résultats exacts lorsque le paramètre tend vers l'infini. Quelques extensions en direction du mouvement brownien fractionnaire sont finalement présentées.

Dans le **chapitre 3** nous étudions le mouvement d'une particule soumise à une force aléatoire gaussienne non corrélée, en dimension 1. Dans la droite ligne de divers travaux probabilistes, nous déterminons la statistique des temps de passage par zéro du processus aléatoire correspondant. Ces résultats nous servent ensuite dans l'étude du

mouvement de la particule en présence d'un mur à l'origine, sur lequel soit la particule est absorbée (avec une certaine probabilité) soit la particule rebondit inélastiquement. Dans le premier cas la queue de distribution de la probabilité de survie est calculée exactement - en particulier l'exposant correspondant, qui ne dépend pas des conditions initiales. Dans le second cas, nous montrons l'existence d'une transition d'effondrement pour une certaine gamme de coefficients de restitution, et calculons exactement l'exposant de la distribution du temps d'effondrement dans ce cas. Le problème du temps d'occupation s'avère ardu pour ce processus. Malgré nos efforts - en partie présentés - nous ne sommes pas parvenus à en déterminer la distribution. Nous sommes cependant parvenus à reformuler le problème en termes d'équations fonctionnelles couplées.

Le **chapitre 4** est un chapitre de transition entre les deux grandes parties. Nous revenons aux systèmes de spins d'Ising munis d'une dynamique de température nulle. En fonction des détails du système - désordre, contraintes cinétiques, conservation du paramètre d'ordre, topologie du réseau - des comportements très divers apparaissent et le phénomène de persistance discuté dans les premiers chapitres se trouve replacé dans un contexte plus large. En particulier, pour un certain nombre de systèmes la dynamique converge vers une configuration gelée : l'étude de la structure de ces configurations, ainsi que des dynamiques y amenant constitue l'essentiel des deux derniers chapitres.

Dans le **chapitre 5** est abordée l'étude des configurations bloquées atteintes par la dynamique de température nulle, dans un cadre développé à l'origine dans le contexte des systèmes granulaires, et qui se trouve aussi utile pour modéliser certains aspects des systèmes vitreux. La question est de savoir s'il est possible d'utiliser un formalisme de type thermodynamique à la Edwards dont les micro-états seraient les configurations bloquées. Notre contribution essentielle consiste en l'étude de divers systèmes unidimensionnels - chaînes paramagnétiques à dynamique contrainte, chaînes ferromagnétiques - à paramètre d'ordre conservé ou non - munies d'une dynamique excluant les mouvements de diffusion, pour lequel la mesure statique sur les configurations gelées dérivée d'une hypothèse d'ensemble thermodynamique est comparée à la mesure induite sur cet ensemble par la dynamique ; ceci nous permet de mettre en évidence des différences qualitatives entre les deux ensembles. Tous les modèles, malgré leur diversité, ont en commun d'avoir une dynamique strictement irréversible, ce qui permet de les traiter dans le cadre unique des modèles de déposition.

Finalement, ce mémoire s'achève (**chapitre 6**) sur l'étude du modèle d'Ising unidimensionnel pour la dynamique de Kawasaki à température nulle, qui prolonge les travaux du chapitre précédent. Si l'analyse exacte dans l'ensemble statique reste possible, il n'en est pas de même pour la dynamique. Celle-ci n'étant plus soluble analytiquement, nous avons recours aux simulations numériques, qui sont interprétées à l'aide d'un modèle de pièges.

La plupart de ces travaux ont fait l'objet d'articles :

- G. De Smedt, C. Godrèche, J.M. Luck *Statistics of the occupation time for a class of Gaussian Markov processes*, J. Phys. A : Math. Gen. **34** (2001) 1247-1269

- G. De Smedt, C. Godrèche, J.M. Luck *Partial survival and inelastic collapse for a randomly accelerated particle*, Europhys. Lett. **53** (2001) 438-443
- G. De Smedt, C. Godrèche, J.M. Luck *Jamming, freezing and metastability in one-dimensional spin systems*, Eur. Phys. J. B **27** (2002) 363-380
- G. De Smedt, C. Godrèche, J.M. Luck *Metastable states of Ising chain with zero-temperature Kawasaki dynamics* soumis à J. Phys. A : Math. Gen. début octobre 2002.



# Persistence et temps d'occupation

---

## 1.1 Historique

L'étude de la persistence en physique statistique trouve son origine dans des expériences de figures de souffle pratiquées à Saclay au début des années 90 [130]. Il s'agissait d'étudier un mécanisme de stérilisation de surface par la condensation de gouttes de vapeur, et plus précisément de tester l'efficacité d'un tel procédé. La question posée était : quelle est la fraction  $R(t)$  du substrat qui n'a *jamais* été mouillée jusqu'au temps  $t$ . La surprise fut de constater que cette quantité décroissait algébriquement avec un exposant  $\theta$  - et que le procédé n'était donc pas efficace. Ceci marquait cependant l'émergence de l'étude de l'exposant de persistence. Très vite, il a été remarqué que cette question était intéressante à poser à une classe plus vaste de systèmes hors d'équilibre, les systèmes de marche vers l'ordre par croissance de domaines, dont l'archétype est le système ferromagnétique refroidi de sa phase paramagnétique dans la phase ordonnée. Pour ces systèmes l'exposant  $\theta$  fut étudié dans divers modèles comme le modèle d'Ising dynamique ou l'équation de la diffusion, avec plus ou moins de succès. Pour ce type de modèles la persistence est une probabilité de premier passage d'une interface : c'est donc, d'une certaine manière, une mesure de la relaxation d'un système par diffusion de défauts, et donc une mesure de l'oubli de la condition initiale. Une des généralisations possibles de cette probabilité de persistence est le problème de la persistence de phase : combien de temps un point donné du substrat a-t-il passé dans la phase liquide ? Cette question est beaucoup plus générale que la simple question de la persistence, qu'elle contient comme cas limite. Etonnement, ce temps d'occupation a une loi qui rappelle beaucoup la célèbre loi de l'arcsinus pour la fraction du temps passé dans le demi-plan positif par un mouvement brownien [112]. Cette analogie nous servira de guide tout au long des études qui suivent.

Les questions liées à la persistence sont des questions générales, en rapport direct avec la nature stochastique des systèmes étudiés (pour une revue concise, voir [118]). Les réponses apportées peuvent non seulement éclairer des questions d'ordre théorique, comme celle des classes d'universalité pour des systèmes hors d'équilibre ou de l'ergodicité, mais aussi d'ordre plus pratique - par exemple, la question du temps d'occupation peut être intéressante pour des problèmes d'atomes froids [6]. Par ailleurs la persistence a été mesurée expérimentalement dans différents systèmes autres que les figures de souffle [130] : cristaux liquides [189], mousse de savon [180] et diffusion unidimensionnelle de xénon [187].

## 1.2 Modèles physiques

Les propriétés de persistance<sup>1</sup> sont des propriétés très générales des processus aléatoires considérés. Ainsi, il est possible d'en trouver des applications plus ou moins directes dans de très nombreux domaines, aussi bien en physique qu'en mathématiques. Néanmoins, bien que les travaux présentés dans cette thèse soient parfois assez généraux, il semble utile de garder à l'esprit les problèmes et modèles de physique statistique qui ont initialement motivé ces études. Comme on l'a vu dans l'introduction de ce chapitre, l'intérêt porté à la persistance en physique statistique vient de l'étude de modèles de croissance de domaines par séparation de phase (voir [18] pour une revue et [38] pour une introduction). Parmi ces modèles, deux méritent plus particulièrement que l'on s'y arrête quelques instants vu le rôle majeur qu'ils jouent en physique statistique. Ils sont présentés ainsi que la phénoménologie observée dans la suite de cette section.

### 1.2.1 Le modèle d'Ising ferromagnétique

Le modèle d'Ising est d'une certaine manière l'archétype du modèle en physique statistique [87]. Introduit originellement pour expliquer la transition de phase ferromagnétique, ses applications sont aujourd'hui multiples (jusqu'à la modélisation des marchés financiers!). Sa simplicité permet de mener à bien un certain nombre de calculs analytiques, même s'il n'est exactement résolu qu'en dimensions 1 et 2.

Dans la version usuelle du modèle d'Ising ferromagnétique, chaque spin interagit avec ses plus proches voisins sur un réseau hypercubique en dimension  $d$  et l'interaction est ferromagnétique, c'est à dire que deux spins voisins tendent à s'aligner l'un avec l'autre. Le hamiltonien est  $\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j$  où la somme porte uniquement sur les paires de plus proches voisins.  $J$  mesure la force de l'interaction, et on peut prendre  $J = 1$  sans perte de généralité.

Il existe principalement deux dynamiques dont on peut munir le modèle d'Ising ainsi défini :

#### Dynamique de Glauber [73]

La première dynamique est une dynamique stochastique où le paramètre d'ordre (l'aimantation du système) n'est pas conservé. Elle a été introduite par Glauber, et peut être implémentée de diverses manières<sup>2</sup>. La formulation "bain thermique" consiste à mettre à jour chaque spin avec une probabilité

$$\mathbb{P}[S_i(t + dt) = +1] = \frac{1}{2} (1 + \tanh \beta h_i(t)),$$

<sup>1</sup>Nous désignerons ainsi dans ce mémoire les diverses variables aléatoires reliées aux questions de persistance (plus particulièrement les probabilités de survie, les temps d'occupation, le temps du dernier zéro, la statistique du nombre de zéros).

<sup>2</sup>Bien que les algorithmes ne soient pas complètement équivalents, ces distinctions ne sont pas importantes ici.

où  $h_i(t)$  est le champ local au site  $i$  au temps  $t$  ( $h_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S_i} = J \sum_{j(i)} S_j$ , où la somme porte sur les sites voisins du site  $i$ ) et  $\beta$  l'inverse de la température. La formulation "Métropolis" consiste à choisir un spin aléatoirement<sup>3</sup> et à proposer de le retourner. Ce retournement engendre une variation  $\Delta \mathcal{H}$  de l'énergie du système, et le retournement est accepté avec un taux 1 si  $\Delta \mathcal{H} \leq 0$  et  $e^{-\beta \Delta \mathcal{H}}$  sinon. Avec ces deux implémentations le système thermalise avec son environnement local.

### Dynamique de Kawasaki [93]

Il existe une autre dynamique stochastique, dans laquelle cette fois-ci le paramètre d'ordre local est conservé. Il s'agit d'une dynamique d'échange, c'est à dire que le système s'équilibre *via* l'échange de spins voisins antiparallèles avec des taux donnés par exemple par la règle de Métropolis. Bien que très importante, par exemple pour la modélisation de la séparation de phase par diffusion de particules dans un alliage binaire, nous laisserons cette dynamique de côté pour le moment, car son étude soulève des problèmes bien plus complexes que celle de Glauber. Nous aurons l'occasion d'en étudier certains aspects dans la deuxième partie de ce mémoire (chapitre 6).

### Persistence

Bien que l'on puisse étudier le modèle d'Ising dynamique en dimension  $d$  quelconque, nous avons ici principalement en tête les versions  $d = 1$  et  $d = 2$  du modèle. En grande dimension certains comportements différents apparaissent sur lesquels nous aurons l'occasion de revenir plus loin (chapitre 4, p. 84).

On considère un système de spins d'Ising placés aux noeuds d'un réseau unidimensionnel ou carré. La condition initiale est choisie homogène et complètement désordonnée (correspondant à l'état d'équilibre de température infinie), c'est à dire que chaque spin vaut  $\pm 1$  avec probabilité  $\frac{1}{2}$  indépendamment des autres spins. A l'instant  $t = 0$  on fait subir au système une trempe à la température  $T = 0$ . Le système commence alors à s'ordonner localement et on voit apparaître des domaines de spins  $+1$  et des domaines de spins  $-1$  dont la taille croît au cours du temps. La taille typique des domaines est  $L(t) \sim t^{1/z}$  avec l'exposant dynamique  $z = 2$  caractéristique des systèmes à paramètre d'ordre non conservé [18] et le système est statistiquement auto-similaire : si on regarde le système à deux temps différents, la distribution des domaines est la même modulo un changement de l'échelle spatiale. L'étude de la persistance consiste à particulariser un spin, par exemple le spin situé à l'origine, et à étudier la dynamique du point de vue de celui-ci. Puisque le système est à température nulle il n'y a pas de mouvements thermiques, c'est à dire que les seuls mouvements autorisés sont ceux tels que  $\Delta \mathcal{H} \leq 0$  : les seuls retournements que l'on observe sont ceux dus au passage d'une interface séparant un domaine de spins  $+1$  d'un domaine de spins  $-1$ . On peut montrer [143] que le spin à l'origine, en dimension 1 et 2 et à la limite thermodynamique, se retourne une infinité de fois, c'est à dire que le système ne s'équilibre jamais. Bien entendu, la taille des domaines augmentant le nombre d'interfaces diminue et la dynamique se ralentit :

<sup>3</sup>Dans une définition rigoureuse chaque spin est muni d'une horloge poissonnienne : à chaque fois que celle-ci sonne, on propose au spin correspondant un retournement.

le spin à l'origine se retourne de moins en moins souvent. Les questions que l'on se pose alors sont : quelle est la probabilité que ce spin ne se soit jamais retourné avant l'instant  $t$ ? à quel instant avant le temps  $t$  ce spin s'est-il retourné pour la dernière fois? combien de fois ce spin s'est-il retourné entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ ? combien de temps ce spin a-t-il passé dans la phase  $+1$  entre  $0$  et  $t$ ?

On observe numériquement que le temps moyen entre deux retournements est infini, et il est possible de quantifier ce phénomène plus précisément : la probabilité que le spin à l'origine ne se soit pas retourné entre  $0$  et  $t$  décroît algébriquement avec un exposant  $\theta < 1$  :

$$p_0(t) = \mathbb{P} [S_0(\tau) = S_0(0), \forall \tau \in [0, t]] \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} t^{-\theta} \quad (1.1)$$

Nous verrons plus loin que le calcul exact de l'exposant  $\theta$  même en dimension 1 est très difficile (voir section (1.5)). Il vaut  $\frac{3}{8}$  et n'est pas relié aux autres exposants dynamiques gouvernant la croissance de la longueur caractéristique ( $z$ ) et la décroissance de la fonction d'autocorrélation ( $\lambda$ ). Cette difficulté provient du fait que la persistance est, d'une certaine manière, une quantité à une infinité de temps<sup>4</sup> qui fait intervenir toute l'histoire du système entre  $0$  et  $t$ .

La question de la persistance peut se reformuler par la question suivante : quelle est la probabilité pour le spin à l'origine de n'avoir pas changé de phase entre  $0$  et  $t$ ? Celle-ci se prête bien à la généralisation immédiate [57] consistant à se demander combien de temps le spin à l'origine a passé dans la phase d'aimantation positive. On introduit ici deux variables aléatoires qui seront omniprésentes dans la première partie de ce mémoire, qui sont le temps d'occupation, noté  $T_t^+$  (ou  $T^+$  lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté) et l'aimantation locale  $M_t$  (ou  $M$ ), définies par :

$$\begin{aligned} T_t^+ &= \int_0^t \Theta(S_0(\tau)) d\tau \\ M_t &= t^{-1} \int_0^t S_0(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

où  $\Theta$  est la fonction de Heavyside. Notons que l'on a introduit une normalisation dans la définition de  $M_t$ . Ces deux quantités sont bien entendu reliées entre elles par :

$$M_t = 2t^{-1}T_t^+ - 1$$

qui s'obtient en introduisant  $T_t^-$ , qui est le temps d'occupation de la phase  $-1$  entre  $0$  et  $t$  et en remarquant que  $T^+ + T^- = t$  et  $tM_t = T^+ - T^-$ .

La normalisation de  $M_t$  n'est pas anodine : on constate en effet que c'est cette variable aléatoire qui possède une loi limite aux temps longs (voir figure (1.1)). Cette loi limite possède la forme typique des lois en  $\cup$  qui n'est pas sans rappeler la loi de l'arcsinus observée pour le temps d'occupation de  $[0, +\infty[$  par un mouvement brownien.

<sup>4</sup>Au sens où l'on peut parler par exemple de quantité à deux temps en parlant de la fonction d'autocorrélation  $\langle S_0(t_1)S_0(t_2) \rangle$ .

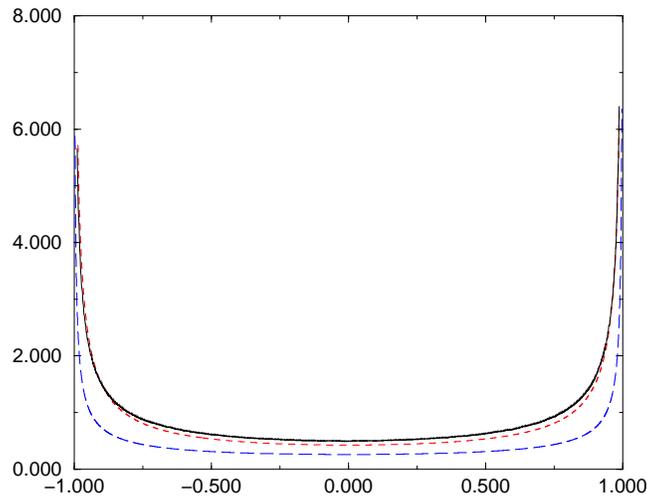


FIG. 1.1 – En trait plein : loi de l’aimantation locale pour le modèle d’Ising unidimensionnel ( $N = 2.10^3$  spins,  $10^4$  échantillons). On a en outre représenté deux approximations. Tirets courts : loi de Lamperti (équation (2.14) p. 25, chapitre 2) d’exposant  $\frac{3}{8}$  ; tirets longs : loi bêta (équation 2.15 p. 25, avec le changement de variable  $m = 2x - 1$ ) d’exposant  $\frac{3}{8}$  :  $f_\beta(m) = B(\frac{1}{2}, \frac{3}{8})^{-1} (1 - m^2)^{-\frac{5}{8}}$ .

### 1.2.2 L’équation de la diffusion

Il est possible de penser à des simplifications du modèle d’Ising. Ainsi, la croissance de domaines peut être modélisée en considérant des ‘spins’  $S_i$  correspondant au signe d’un champ diffusif. Plus précisément, on pose

$$S(\mathbf{x}, t) = \text{sign}(\Phi(\mathbf{x}, t))$$

où le champ  $\Phi(x, t)$  évolue selon l’équation de la diffusion usuelle :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \Delta \Phi \quad (1.2)$$

avec des conditions initiales  $\Phi(\mathbf{x}, 0)$  gaussiennes non corrélées :

$$\begin{aligned} \langle \Phi(\mathbf{x}, 0) \rangle &= 0 \\ \langle \Phi(\mathbf{x}, 0) \Phi(\mathbf{x}', 0) \rangle &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{aligned}$$

L’évolution du système est ici complètement déterministe : tout l’aléatoire est dans les conditions initiales. Celles-ci étant données il est aisé d’exprimer le champ diffusif en tout point à tout instant à l’aide de la fonction de Green :

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \int d^d \mathbf{x}' \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}{4t}} \Phi(\mathbf{x}', 0) \quad (1.3)$$

Les domaines de ‘spins’  $\pm 1$  croissent avec une longueur caractéristique  $L(t) \sim t^{\frac{1}{2}}$ . Pour les conditions initiales gaussiennes et spatialement décorréélées le champ est à tout instant un champ gaussien de moyenne nulle et de corrélateur :

$$\langle \Phi(\mathbf{0}, t_1) \Phi(\mathbf{0}, t_2) \rangle = \left( \frac{2\sqrt{t_1 t_2}}{t_1 + t_2} \right)^{\frac{d}{2}} \quad (1.4)$$

On observe de nouveau, comme pour le modèle d'Ising, une courbe en  $\cup$  pour le temps d'occupation de la phase  $+1$ , avec une divergence algébrique aux bords qui redonne l'exposant gouvernant la probabilité aux temps longs que le signe du champ diffusif en un point de l'espace n'ait pas changé entre  $0$  et  $t$ .

Il est intéressant de s'intéresser plus précisément - c'est ce que nous ferons tout au long de ce mémoire - au processus normalisé  $\hat{\Phi}(\mathbf{0}, t) = \frac{\Phi(\mathbf{0}, t)}{\sqrt{\langle \Phi(\mathbf{0}, t)^2 \rangle}}$ , dont la fonction de corrélation ne dépend plus, comme pour le modèle d'Ising, que du rapport des deux temps ( $t_1 < t_2$ ) :

$$\langle \hat{\Phi}(\mathbf{0}, t_1) \hat{\Phi}(\mathbf{0}, t_2) \rangle = g\left(x = \frac{t_1}{t_2}\right) = \left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)^{\frac{d}{2}}, \quad (1.5)$$

ce qui permet de définir la fonction d'échelle  $g(x)$ .

Bien que l'équation de la diffusion soit étudiée depuis longtemps, aussi bien en physique qu'en mathématiques, il existe très peu de résultats concernant la distribution des changements de signe du champ diffusif en un point de l'espace. Une des difficultés majeures vient du fait que, bien que le champ  $\{\Phi(\mathbf{x}, t)\}_{\mathbf{x}}$  soit markovien, le processus stochastique qui nous intéresse,  $\phi(t) = \Phi(\mathbf{0}, t)$  (par homogénéité du système le choix du point à l'origine n'a pas d'importance pour la généralité du propos) ne l'est plus lorsqu'on a intégré sur tous les autres degrés de liberté.

### 1.2.3 Des modèles physique aux processus gaussiens

Malgré son apparente simplicité, la résolution analytique des questions relatives à la persistance pour l'équation de la diffusion semble hors d'atteinte. Il est intéressant de remarquer [124] que si l'on fait le changement de variable temporel  $T = \ln t$  pour le processus normalisé  $\hat{\Phi}(\mathbf{0}, t)$  on se ramène, du fait de l'invariance d'échelle (1.5), à l'étude d'un processus gaussien stationnaire de corrélateur

$$C(T) = \left(\cosh\left(\frac{T}{2}\right)\right)^{-\frac{d}{2}}$$

Cela invite à prendre un peu de recul et à se poser plus généralement la question suivante : étant donné un processus gaussien de moyenne nulle stationnaire, donc entièrement déterminé par sa fonction de corrélation  $C(T)$ , quelle est la distribution de ses zéros - et en particulier du premier ? Que peut-on dire du temps d'occupation (ou de l'aimantation locale) si on définit comme pour l'équation de la diffusion le 'spin' du processus comme étant son signe ? Malgré l'importance pratique que peut avoir une telle question, on ne sait répondre en toute généralité.

Il existe néanmoins quelques résultats [131, 132], qui sont essentiellement des inégalités [168]. De celles-ci on peut aisément voir que dans la plupart des cas qui nous intéressent<sup>5</sup> la probabilité de persistance décroît exponentiellement avec le temps  $T$ ,

<sup>5</sup>Essentiellement, la fonction  $C(T)$  se comporte asymptotiquement comme  $e^{-\lambda T}$ , traduisant le fait que pour le processus original on avait une décroissance algébrique des corrélations spin-spin.

c'est à dire algébriquement dans le temps 'original'  $t$ .

Parmi les quantités que l'on sait calculer et qui seront d'une importance cruciale pour nous se trouve la fonction de corrélation signe-signe (i.e. 'spin-spin'). Cette fonction de corrélation se calcule par l'évaluation d'une intégrale gaussienne à deux dimensions et on obtient, pour un processus gaussien normalisé ( $C(T=0) = 1$ ) :

$$\langle S(T_1)S(T_2) \rangle = \frac{2}{\pi} \arcsin(C(T_2 - T_1)) \quad (1.6)$$

Pour une vision historique des travaux sur ce sujet, et plus généralement sur les problèmes de premier passage d'un processus aléatoire par une valeur donnée, on peut se reporter aux revues sur le sujet [16, 1], qui fournissent une introduction très complète à la bibliographie sur la question. Une revue récente sur les applications en physique est [152].

### Processus réguliers

Parmi les processus gaussiens stationnaires il est nécessaire de distinguer deux grandes classes de processus. Cette distinction, basée sur la régularité - ou non - des trajectoires des processus considérés, est directement reliée à la densité de zéros du processus. Au voisinage de  $T \sim 0$  on a, en toute généralité :

$$C(T) \underset{T \rightarrow 0}{\approx} 1 - A|T|^\alpha \quad (1.7)$$

Si  $\alpha = 2$  le processus est dit régulier. On peut alors montrer que la densité de zéros est finie et vaut [155] :

$$\rho = \frac{\sqrt{-C''(0)}}{\pi} \quad (1.8)$$

Si par contre  $\alpha < 2$ , c'est à dire si la dérivée seconde en 0 n'existe pas, la densité de zéros du processus est infinie. Cela signifie que chaque fois que le processus passe par 0 il y passe une infinité de fois. Ceci est bien connu pour le mouvement brownien, qui correspond après normalisation et passage au langage des processus gaussiens stationnaires au processus gaussien stationnaire de corrélateur

$$C(T) = e^{-\frac{|T|}{2}} \underset{T \rightarrow 0}{\approx} 1 - \frac{1}{2}|T|$$

Nous essayerons dans la suite de ce mémoire de garder à l'esprit cette reformulation des questions en termes de processus gaussiens stationnaires. Cependant, attendu que les systèmes physiques sous-jacents sont des systèmes pour lesquels l'invariance d'échelle joue un rôle majeur, nous nous attacherons à travailler avec les fonctions d'échelle, c'est à dire avec les fonctions :

$$g\left(x = \frac{t_1}{t_2}\right) = \langle \hat{x}_{t_1} \hat{x}_{t_2} \rangle \quad (1.9)$$

où  $\hat{x}_t$  est un processus stochastique autosimilaire normalisé. On notera  $h(x)$  la fonction d'échelle du processus  $\text{sign}(\hat{x}_t)$ , qui est égale à  $\frac{2}{\pi} \text{Arcsin}[g(x)]$  si le processus est gaussien.

## 1.3 Observables et problèmes

Avant d'aller plus avant et de nous tourner vers différentes méthodes pour "attaquer" la persistance, arrêtons-nous un instant pour faire un point et définir clairement les observables que nous allons étudier.

### 1.3.1 L'exposant $\theta$

Pour la plupart des systèmes présentant de l'autosimilarité statistique, la probabilité de persistance décroît en loi de puissance avec un exposant  $\theta$ . Notons à ce propos que pour certains modèles, comme par exemple l'équation de Ginzburg-Landau dépendant du temps en dimension 1, la persistance ne décroît pas algébriquement, mais que l'on retrouve une telle décroissance si on exprime le temps en termes de l'échelle naturelle, qui est  $L(t)$ , et que l'on définit l'exposant  $\theta$  comme  $p_0(t) \sim L(t)^{-\theta}$  [20].

Le calcul de cet exposant a fait l'objet de nombreux travaux, tant analytiques - exacts ou approchés - que numériques. En effet, l'intérêt des physiciens pour les exposants ne semble pas baisser, ce qui est plus que normal : de nombreuses idées venues de l'étude des phénomènes critiques se sont révélées très intéressantes pour l'étude des systèmes dynamiques (en physique statistique), en particulier la possibilité de ranger les systèmes dans des classes d'universalité dynamiques [85]. La question de l'universalité de l'exposant de persistance reste en grande partie un problème ouvert.

Plus généralement on peut se poser, pour les systèmes physiques comme pour les processus aléatoires, la question de la distribution du nombre de zéros entre deux temps  $t_1$  et  $t_2$ .

### 1.3.2 Aimantation locale, temps d'occupation

L'aimantation locale, ou de manière équivalente le temps d'occupation, est une quantité plus générale que la simple probabilité de persistance, et on s'attend à ce qu'elle soit plus difficile à déterminer, mais aussi plus universelle. En effet, on peut voir  $T_t^+$  comme une somme de variables aléatoires (corrélées), et on sait que des sommes de variables aléatoires, regardées à la bonne échelle, peuvent avoir des propriétés indépendantes des détails de la distribution des variables qui les composent, l'exemple classique étant le théorème central limite<sup>6</sup>. Nous nous attacherons tout particulièrement à l'étude de cette quantité dans les prochains chapitres. D'un point de vue plus pratique, le temps d'occupation s'est révélé intéressant pour caractériser la morphologie des surfaces grandissantes [182].

### 1.3.3 Temps du dernier zéro

L'étude de cette variable aléatoire (notée  $t_N$ ) - qui est d'une certaine manière l'équivalent de la persistance (quand ce spin se retournera-t-il ?) mais lorsqu'on regarde vers le passé (quand ce spin s'est-il retourné pour la dernière fois ?) - est motivée par plusieurs raisons. D'une part, comme la persistance, cette variable permet de caractériser le comportement temporel d'un système : ainsi pour le modèle d'Ising en basse dimension ce temps se comporte comme le temps d'observation lui-même, ce qui est une

<sup>6</sup>qui ici ne s'applique pas, puisque nous avons affaire à des variables aléatoires fortement corrélées. Ce sont d'ailleurs ces corrélations qui rendent le problème si difficile.

marque du vieillissement. D'autre part, si on revient au mouvement brownien, qui sous-tend d'une certaine manière notre approche des problèmes de persistance, le temps du dernier zéro  $t_N$  avant le temps  $t$  suit une loi qui est de nouveau, comme pour  $T_t^+$ , la loi de l'arcsinus. De plus, des raisons pratiques plaident en la faveur de l'étude de  $t_N$  : il est plus simple à déterminer que le temps d'occupation, et il apparaît de manière récurrente dans les équations de l'approximation des intervalles indépendants (1.23) à (1.25).

## 1.4 Quelques méthodes de résolution

Nous présentons dans cette section quelques méthodes permettant d'aborder les questions de persistance pour un processus aléatoire. Il n'est pas question d'essayer d'être exhaustif, mais de présenter rapidement diverses méthodes que nous retrouverons tout au long de ce mémoire.

### 1.4.1 Méthodes exactes

Il existe quelques méthodes systématiques, qui permettent dans certains cas d'écrire des équations. Il est malencontreusement assez rare que ces méthodes permettent d'aller plus loin sans faire d'approximation.

#### Equation backward

Si un processus aléatoire est donné par une équation de Fokker-Planck, la probabilité d'être au point  $x$  à l'instant  $t$  sans être encore passé par zéro (dont l'intégrale spatiale donne la probabilité de persistance au temps  $t$ ) vérifie une équation du même type, l'équation *backward* [156]. Le problème se trouve alors ramené à résoudre une équation aux dérivées partielles avec des conditions aux limites absorbantes. Dans les "bons" cas il est possible de résoudre cette équation exactement, par exemple dans le cas du mouvement brownien (en utilisant par exemple la méthode des images<sup>7</sup>). Il arrive néanmoins aussi dans certains cas que l'on puisse utiliser cette méthode pour déterminer l'exposant de persistance sans pour autant savoir résoudre explicitement l'équation : nous reverrons cette méthode pour la détermination de  $\theta$  dans le problème de l'accélération aléatoire (voir chapitre 3). Il est plus aisé d'expliquer cette méthode sur un cas simple, le mouvement brownien. La probabilité d'être en  $x$  au temps  $t$  sans avoir été absorbé en 0 vérifie l'équation de la diffusion :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (1.10)$$

avec la condition  $p(0, t) = 0$ . Bien entendu, cette équation se résout exactement en passant en transformée de Laplace, mais si on ne cherche que l'exposant on peut l'obtenir par un raisonnement bien plus élémentaire : aux temps longs on s'attend à ce que le

<sup>7</sup>La méthode des images permet de ne compter que les chemins qui ne passent pas par 0, et donc de prendre correctement en compte la condition au bord absorbante. Cette méthode peut être étendue très simplement pour déterminer par exemple la distribution du temps de dernier passage d'un processus gaussien markovien.

système soit invariant d'échelle :  $p(x, t) = p(\frac{t}{x^2})$  et à ce que cette quantité décroisse algébriquement en  $t^{-\theta}$ , donc que  $p(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\approx} t^{-\theta} x^{2\theta}$ . En reportant dans l'équation (1.10) et en prenant la limite des temps longs, ce qui annule le membre de gauche, il vient  $\theta(2\theta - 1) = 0$ , d'où on déduit  $\theta = \frac{1}{2}$ .

### Temps d'occupation : méthode de Kac

Pour calculer la distribution du temps d'occupation il est parfois possible d'utiliser une formule due à Kac et connue sous le nom de *formule de Feynman-Kac* ([91, 92], pour une introduction à son utilisation en physique statistique voir [140]). Il s'agit d'une formule générale pour l'étude des fonctionnelles additives du mouvement brownien (qui s'écrivent sous la forme  $A_t = \int_0^t ds V(B_s)$  avec  $V$  une fonction positive et  $B_s$  un mouvement brownien), qui permet d'écrire une équation différentielle pour la double transformée de Laplace par rapport à  $t$  et à  $A_t$  de la densité  $\mathbb{P}[B_t = x, A_t = a] = f(x; t, a)$ . Si on prend pour  $V$  la fonction indicatrice de  $[0, +\infty[$ , cette méthode redonne la loi de l'arcsinus pour la distribution de  $\frac{T^+}{t}$ . Cette méthode a ensuite été étendue [44] pour traiter le problème du temps d'occupation de domaines bornés par des processus de Markov.

#### 1.4.2 Le moment d'ordre 2 de l'aimantation locale

Si la distribution complète de l'aimantation locale est la plupart du temps inaccessible analytiquement, il est souvent assez simple de déterminer exactement le premier moment non nul : il suffit de connaître le corrélateur spin-spin. Supposons en effet que la fonction d'autocorrélation du spin soit donnée par une fonction  $h(x)$  où  $x (< 1)$  désigne le rapport des 2 temps. Il vient [57] :

$$\begin{aligned} \langle M_t^2 \rangle &= t^{-2} \int_0^t d\tau_1 \int_0^t d\tau_2 \langle S_0(\tau_1) S_0(\tau_2) \rangle \\ &= 2t^{-2} \int_0^t d\tau_2 \int_0^{\tau_2} d\tau_1 \langle S_0(\tau_1) S_0(\tau_2) \rangle \\ &= 2t^{-2} \int_0^t d\tau_2 \tau_2 \int_0^1 dx h(x) \\ \langle M_t^2 \rangle &= \int_0^1 dx h(x) \end{aligned}$$

Ainsi, pour un processus gaussien invariant d'échelle (stationnaire en temps logarithmique) normalisé de fonction d'échelle  $g(x)$  (comme par exemple 1.5) on peut calculer exactement :

$$\langle M_t^2 \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^1 dx \operatorname{Arcsin} g(x)$$

De même pour le modèle d'Ising, où le corrélateur spin-spin est connu exactement [19, 77] et vérifie bien une forme d'échelle ( $t_1 < t_2$ ) :

$$\langle S_0(t_1) S_0(t_2) \rangle = h\left(x = \frac{t_1}{t_2}\right) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arcsin} \left( \sqrt{\frac{2x}{1+x}} \right), \quad (1.11)$$

le calcul est possible exactement :

$$\langle M^2 \rangle_{\text{Ising}} = 2 - \sqrt{2} = 0.58578643.. \quad (1.12)$$

Remarquons que la forme du corrélateur spin-spin du modèle d'Ising 1d est très semblable à celle que prendrait la fonction à deux points du signe d'un processus gaussien normalisé invariant d'échelle de fonction de corrélation

$$g(x) = \sqrt{\frac{2x}{1+x}}$$

Ceci permet d'interpréter les éventuels résultats généraux pour les processus gaussiens comme des approximations (malheureusement non contrôlées) pour le modèle d'Ising.

Le moment d'ordre 2 est le seul pour lequel on dispose de résultats exacts. Dès le moment d'ordre 4  $\langle M^4 \rangle$  on se heurte à des difficultés analytiques. En particulier il n'existe pas de formule générale pour le moment d'ordre 4 du processus signe d'un processus gaussien en fonction du corrélateur de celui-ci [133].

### 1.4.3 Simulations numériques

Les calculs analytiques, tant pour les systèmes réalistes que pour les processus aléatoires, se révèlent très difficiles. Pour progresser quelque peu dans le calcul des exposants ou des distributions de probabilité, il est naturel de penser aux simulations numériques. On ne trouvera pas dans ce mémoire de "grosses" simulations numériques, mais l'outil informatique reste nécessairement omniprésent. Il est d'ailleurs plus adéquat de parler de méthodes numériques, les simulations proprement dites n'en formant qu'une partie. Celles-ci peuvent être de plusieurs types. Il peut s'agir de simulations directes du modèle ou du processus. Ainsi l'équation de la diffusion peut-elle être étudiée soit en discrétisant l'équation (1.2), soit en étudiant directement le processus gaussien centré de corrélateur donné par (1.4). On peut aussi dans certains cas passer par la simulation d'une marche aléatoire, comme par exemple pour étudier sa primitive (chapitre 3). L'utilisation de l'outil informatique est aussi très utile pour résoudre numériquement des équations transcendantes (1.18) ou calculer des intégrales multiples. Ainsi pour le calcul du moment d'ordre 4 d'un processus gaussien autosimilaire il est possible de ne pas passer par la simulation directe du signal mais d'utiliser la forme intégrale

$$\langle M^4 \rangle = \frac{1}{t^4} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \int_0^t dt_3 \int_0^t dt_4 \langle S_{t_1} S_{t_2} S_{t_3} S_{t_4} \rangle,$$

que l'on simplifie en utilisant l'invariance d'échelle.

Pour conclure cette brève section sur les simulations numériques, mentionnons une difficulté un peu subtile de celles-ci, qui tient au très bon accord numérique de certaines approximations. On pense ici plus précisément à l'équation de la diffusion, pour laquelle l'approximation par une loi bêta d'exposant  $\theta$  calculé à l'aide du moment d'ordre 2 de  $M_t$  est très bonne : si l'on veut discriminer numériquement les courbes, il faut des schémas numériques très puissants. D'une certaine manière, l'information "pertinente", c'est à dire celle qui va au-delà de la première approximation, est cachée dans les décimales lointaines.

### 1.4.4 Méthodes approchées

Les méthodes systématiques étant la plupart du temps soit inappropriées soit beaucoup trop difficiles à mettre en oeuvre, de nombreuses méthodes approchées ont été développées, les plus anciennes remontant aux années 40 et 50 [154, 155, 114], et les plus récentes à ces dernières années. Ce sont ces dernières que nous présentons brièvement ci-après.

#### L'hypothèse des intervalles indépendants

Il s'agit d'une méthode d'approximation développée [124] pour calculer l'exposant de persistance des processus gaussiens réguliers et plus particulièrement pour l'équation de la diffusion. Elle a ensuite été étendue [57, 56] pour permettre le calcul des moments de l'aimantation locale. Il est possible, pour un processus gaussien invariant d'échelle (normalisé) de fonction de corrélation  $\langle x_{t_1} x_{t_2} \rangle = g(\frac{t_1}{t_2})$  (pour  $t_1 < t_2$ ), de se ramener en passant en temps logarithmique  $T = \ln t$  à l'étude d'un processus gaussien stationnaire (voir section 1.2.3) de fonction d'autocorrélation  $C(T) = g(e^{-T})$ . Si on note  $T_n = \ln t_n$  le temps du  $n$ -ième zéro en temps logarithmique, l'approximation des intervalles indépendants consiste à supposer que les intervalles de temps  $l_n = T_n - T_{n-1}$  entre deux zéros successifs en temps logarithmique sont indépendants et distribués selon la même loi  $f(l)$ . Ceci permet de calculer le corrélateur signe-signe du processus. Comme celui-ci est connu par ailleurs (1.6) on obtient une expression pour  $f(l)$ . Le processus ponctuel des passages par zéro en temps logarithmique est, sous l'hypothèse d'indépendance, un processus de renouvellement et la probabilité  $p_n(T)$  d'observer exactement  $n$  zéros en un temps  $T$  est donnée dans l'espace de Laplace par (voir chapitre 2) :

$$\begin{aligned}\hat{p}_n(s) &= \hat{f}^{n-1}(s) \frac{1 - \hat{f}(s)}{s \langle l \rangle} \quad (n > 0) \\ \hat{p}_0(s) &= \frac{1}{s} - \frac{1 - \hat{f}(s)}{s^2 \langle l \rangle}\end{aligned}$$

L'apparition dans ces formules de  $\langle l \rangle = \rho^{-1}$  montre que cette méthode d'approximation ne s'applique donc *a priori* qu'aux processus gaussiens stationnaires que nous avons définis comme réguliers. En notant que

$$\langle \text{sign}X(0) \text{sign}X(T) \rangle = A(T) = \frac{2}{\pi} \text{Arcsin}(C(T)) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n p_n(T) \quad (1.13)$$

il vient :

$$\hat{f}(s) = \frac{1 - \langle l \rangle s(1 - s\hat{A}(s))/2}{1 + \langle l \rangle s(1 - s\hat{A}(s))/2} \quad (1.14)$$

Une intégration par parties permet d'écrire :

$$\hat{A}(s) = \frac{1}{s} \left( 1 - \hat{I}(s) \right) \quad (1.15)$$

avec :

$$\hat{I}(s) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} dT e^{-sT} \frac{C'(T)}{\sqrt{1 - C^2(T)}} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 dx x^s \frac{g'(x)}{\sqrt{1 - g^2(x)}} \quad (1.16)$$

Finalement (1.14) se réécrit :

$$\hat{f}(s) = \frac{1 - s \langle l \rangle \hat{I}(s)/2}{1 + s \langle l \rangle \hat{I}(s)/2} \quad (1.17)$$

L'exposant de persistance du processus initial donne en temps logarithmique la décroissance exponentielle de  $f(T)$  pour  $T$  grand, et s'obtient donc en trouvant le premier pôle à gauche de l'origine de  $\hat{f}(s)$ , c'est à dire en résolvant l'équation :

$$1 - \frac{\theta}{2} \langle l \rangle \hat{I}(-\theta) = 0 \quad (1.18)$$

Cette équation, bien que dans le cadre d'une approximation visant à 'découper' l'histoire du processus en morceaux indépendants, fait encore intervenir toute la structure analytique du corrélateur : c'est un indicateur de la difficulté du problème.

Le problème majeur de cette approximation est l'absence de contrôle de la précision : ainsi, dans le cas de l'équation de la diffusion l'exposant de persistance  $\theta_{\text{IIA}}$  est très proche de l'exposant mesuré numériquement en discrétisant l'équation (1.2), alors que dans le cas de l'accélération aléatoire  $\theta_{\text{IIA}}$  diffère du résultat exact de 6%.

Ce formalisme permet de plus d'étudier la distribution de l'aimantation locale [57]. Dans le cas général on obtient des équations qu'on ne sait résoudre que dans des conditions très particulières. Néanmoins une analyse locale de celles-ci permet de déterminer le comportement asymptotique des moments de  $M$ . L'hypothèse des intervalles indépendants, en ramenant le problème à un processus de renouvellement, permet d'exprimer aisément la transformée de Laplace de la distribution du temps d'attente résiduel<sup>8</sup>  $B_T = T - T_N$  (voir chapitre 2), c'est à dire du temps écoulé depuis le dernier zéro<sup>9</sup> :

$$\hat{\rho}_{B_T}(s) = \frac{1 - \hat{f}(s)}{s \langle l \rangle} \quad (1.20)$$

L'aimantation locale au temps  $t$  s'écrit :

$$M_t = \frac{1}{t} \int_0^t du \sigma_u = \pm \frac{t - t_N - (t_N - t_{N-1}) + \dots}{t} = \pm(1 - 2\xi) \quad (1.21)$$

avec :

$$\xi = \frac{t_N}{t} - \frac{t_{N-1}}{t} + \dots = e^{-B_T} (1 - e^{-T_N} + e^{-T_N - T_{N-1}} - \dots) = e^{-B_T} X_N \quad (1.22)$$

et où le signe  $\pm$  dans (1.21) dépend du signe de  $\sigma_t$ . La variable  $X_n$  est une variable de Kesten [96, 97, 184, 45] qui vérifie l'équation de récurrence  $X_N = 1 - e^{-T_N} X_{N-1}$  (où

<sup>8</sup> *backward recurrence time*

<sup>9</sup>  $B_T = -\ln \frac{t_N}{t}$ , et donc la transformée de Laplace de  $B_T$  donne exactement les moments généralisés de la variable aléatoire  $\frac{t_N}{t}$  :

$$\hat{\rho}_{B_T}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sb} \rho_{B_T}(b) db = \left\langle \left( \frac{t_N}{t} \right)^s \right\rangle \quad (1.19)$$

l'indice est lui-même une variable aléatoire et porte la dépendance en temps). Dans la limite  $T \rightarrow +\infty$  on a  $N_t \rightarrow +\infty$  et les lois limites cherchées vérifient le système d'équations :

$$M \stackrel{d}{=} \pm(1 - 2\xi) \quad (1.23)$$

$$\xi \stackrel{d}{=} e^{-B} X \quad (1.24)$$

$$X \stackrel{d}{=} 1 - e^{-T} X \quad (1.25)$$

Ces équations sont à la base de la détermination des moments  $\langle M^{2n} \rangle$  de l'aimantation locale. On ne sait pas, dans le cas général, les résoudre. Le seul cas où une résolution explicite est possible est le cas où  $\rho(l)$  est une distribution exponentielle  $\rho(l) = \theta e^{-\theta l}$ . L'aimantation locale est alors [57] une loi bêta sur  $[-1, 1]$  :

$$f_\beta(x) = B^{-1} \left( \frac{1}{2}, \theta \right) (1 - x^2)^{\theta-1} \quad (1.26)$$

Notons que dans le cas de l'équation de diffusion la loi bêta est une très bonne approximation de la loi de  $M$  mesurée numériquement.

Dans le cas général les équations (1.23) à (1.25) permettent de calculer les moments de  $X$  à partir de ceux de la distribution  $f(l)$ . Ces moments  $\langle X^k \rangle$  sont ensuite injectés dans l'équation pour les moments de  $\xi$ . Les moments de  $M$  s'expriment alors simplement, à l'aide de la formule du binôme de Newton, en terme des  $\langle \xi^k \rangle$ . En utilisant l'équation (1.14) on peut tout réexprimer en termes des  $\hat{A}(k)$  (ou des  $\hat{I}(k)$ ) pour obtenir les formules :

$$\begin{aligned} \langle M^2 \rangle &= \hat{A}(1) &= 1 - \hat{I}(1) \\ \langle M^4 \rangle_{\text{IIA}} &= 1 - \frac{(1-3\hat{A}(1)+4\hat{A}(2))(1-3\hat{A}(3))}{1-2\hat{A}(2)} &= 1 + 2\hat{I}(3) - 3\frac{\hat{I}(1)\hat{I}(3)}{\hat{I}(2)} \end{aligned} \quad (1.27)$$

La première ligne est vraie dès que le corrélateur original ne dépend que du rapport des deux temps et n'est donc pas spécifique de l'approximation. Il est intéressant de constater dès maintenant que  $\langle l \rangle$  n'apparaît plus dans les formules pour les moments de  $M$  (et il n'apparaît à aucun ordre). Ceci est le signe que l'approximation des intervalles indépendants peut s'appliquer à des processus non réguliers, pour lesquels  $\langle l \rangle = 0$ . Nous reviendrons sur l'approximation des intervalles indépendants dans le prochain chapitre, après avoir justement étudié un processus non régulier pour lequel les moments prédits par les intervalles indépendants sont en fait exacts.

### Développement en série perturbative

L'approximation des intervalles indépendants ne s'appliquant pas aux processus non réguliers, les auteurs de [123, 167, 148] ont développé une méthode s'appliquant aux processus *proches* du<sup>10</sup> processus gaussien markovien stationnaire. Celui-ci a pour corrélateur

$$C(T) = e^{-\lambda|T|} \underset{T \rightarrow 0}{\approx} 1 - \lambda|T| \quad (1.28)$$

<sup>10</sup>Celui-ci est unique à des transformations d'échelle près (théorème de Doob).

et n'est donc pas régulier. La probabilité de persistance pour ce processus est connue exactement (on peut l'obtenir par la méthode des images [64]) et vaut

$$p_0(T) = \frac{2}{\pi} \text{Arcsin}(e^{-\lambda|T|}) \underset{T \rightarrow \infty}{\sim} e^{-\lambda T},$$

et donc  $\theta = \lambda$ . Un processus *proche* de celui-ci est un processus gaussien stationnaire tel que son corrélateur s'écrit :

$$C(T) = e^{-\lambda|T|} + \varepsilon \Phi(T) \quad (1.29)$$

Le terme  $\varepsilon \Phi(T)$  est alors traité comme une perturbation. En remarquant que l'on peut exprimer le calcul de la probabilité de persistance en termes d'une théorie des champs et que le processus gaussien markovien stationnaire correspond au champ libre, un calcul perturbatif donne au premier ordre :

$$\theta = \lambda \left( 1 - \varepsilon \frac{2\lambda}{\pi} \int_0^{+\infty} dT \Phi(T) [1 - e^{-2\lambda T}]^{-\frac{3}{2}} \right) \quad (1.30)$$

Cette approche consistant à étudier des propriétés de persistance en passant par une formulation de type quantique a été utilisé récemment pour déterminer les fonctions de grande déviation de plusieurs fonctionnelles de processus gaussiens markoviens [120].

Le calcul perturbatif (1.30) a été utilisé [83] pour calculer l'exposant de persistance de l'équation de diffusion dans la limite  $d \rightarrow 0$  : dans cette limite, le processus correctement renormalisé et en temps logarithmique peut être vu comme une perturbation autour du processus gaussien markovien stationnaire de  $\lambda = \frac{1}{4}$ . Il vient :

$$\theta(d) = \frac{d}{4} - 0.12065..d^{\frac{3}{2}}$$

Le calcul, très long et difficile, du second ordre de cette théorie perturbative pour l'équation de la diffusion a fait l'objet d'une partie du travail de thèse de Deloubrière [47].

On peut en outre remarquer [48] que ce calcul infirme l'hypothèse de [147] : dans ce travail, les auteurs font l'hypothèse que la loi de  $M_t$  pour l'équation de la diffusion est une loi bêta en toute dimension. Il suffit alors de calculer  $\langle M^2 \rangle$  pour obtenir l'exposant  $\theta$ . Or lorsque  $d \rightarrow 0$  on a :

$$\langle M^2 \rangle = 1 - A\sqrt{d}, \quad A = \frac{2}{\pi} \int_0^1 dx \sqrt{\ln \left( \frac{1+x}{\sqrt{x}} \right)} = 0.208322..$$

ce qui donne pour  $\theta = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\langle M^2 \rangle} - 1 \right)$  :

$$\theta(d) \underset{d \rightarrow 0}{=} \frac{A}{2} \sqrt{d} + \frac{A^2}{2} d + \dots$$

### Probabilité de survie généralisée

Pour un processus aléatoire la probabilité de persistance au temps  $t$  est la probabilité de survie du processus si on considère que celui-ci est "tué" à chaque fois qu'il passe par

l'origine. Il est intéressant de généraliser cette probabilité en permettant au processus de survivre, avec une probabilité  $p$ , à chacun de ses passages en 0 [127]. Si  $p_n(t)$  est la probabilité que le processus libre soit passé  $n$  fois par l'origine en un temps  $t$ , la probabilité que le processus avec le mur partiellement absorbant en 0 a survécu au temps  $t$  est simplement donné par :

$$G(t, p) = \sum_{n=0}^{+\infty} p^n p_n(t) \quad (1.31)$$

Pour les processus qui nous intéressent, c'est à dire ceux qui sont invariants d'échelle, cette probabilité de survie décroît en général algébriquement :

$$G(t, p) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^{-\theta(p)} \quad (1.32)$$

définissant ainsi un ensemble continu d'exposants de survie. Cette quantité donne accès (chapitre 3, section 3.3) à la statistique du nombre de zéros du processus. Elle permet de plus de mettre l'exposant de persistance usuel  $\theta(p=0)$  sur le même plan que l'exposant de Fisher-Huse gouvernant la décroissance aux temps longs de la fonction d'autocorrélation du spin (du processus signe dans le cas de l'étude de processus aléatoires) que l'on trouve pour  $p = -1$ . Finalement, cette probabilité de survie a été utilisée comme point de départ d'une théorie perturbative [127] pour le calcul de l'exposant de persistance de processus gaussiens réguliers. Néanmoins ce développement perturbatif requiert le calcul des moments du nombre de retours à l'origine, et ce calcul est en général très difficile.

## 1.5 Un cas exactement résolu : le modèle de Potts

Il est important d'avoir des résultats exacts, d'une part pour leur intérêt propre lorsqu'il s'agit comme ici de la solution à un modèle physique, et d'autre part afin de pouvoir tester les diverses approximations proposées. L'étude de la persistance a jusqu'ici remporté son plus grand succès avec le calcul par Derrida, Hakim et Pasquier [53] de l'exposant  $\theta(q)$  pour le modèle de Potts unidimensionnel à  $q$  couleurs avec la dynamique de Glauber de température nulle. Il est intéressant de remarquer que leur approche est totalement différente de toutes les méthodes - exactes ou approchées - présentées ci-dessus. La méthode consiste à traduire le modèle en termes de marcheurs aléatoires qui coalescent<sup>11</sup> lorsqu'ils se rencontrent. Les auteurs de [53] commencent par remarquer que la valeur du spin à l'origine à un temps  $t_1 \in [0, t]$  est égale à la valeur du spin dans la condition initiale situé sur le site où arrive un marcheur aléatoire émis de l'origine à l'instant  $t_1$  et qui remonte le temps. Si l'on désire comparer la valeur du spin à l'origine à 2 temps différents  $t_1 < t_2 \in [0, t]$ , il suffit de suivre les deux marcheurs correspondants, en tenant compte du fait qu'il s'agit de marcheurs coalescents : le problème se ramène à calculer la probabilité que les deux marcheurs se rencontrent. En généralisant ce raisonnement à  $2n$  marcheurs, ils parviennent à calculer la probabilité que le spin à l'origine d'une chaîne semi-infinie<sup>12</sup> ait la même valeur à  $2n$  temps intermédiaires. En prenant finalement la limite  $2n \rightarrow +\infty$  de telle sorte que les instants

<sup>11</sup>Un point subtil de la méthode est que cette traduction en termes d'un processus de réaction-diffusion n'est pas celle qui est habituellement faite, où les marcheurs sont les parois de domaines.

<sup>12</sup>Sur une chaîne semi-infinie les marcheurs sont ordonnés à tous les temps et cela permet d'utiliser une décomposition en pfaffiens de la probabilité qu'aucune paire de marcheurs ne coalesce parmi  $2n$ .

intermédiaires forment une suite dense d'instants entre 0 et  $t$ , ils en déduisent la probabilité de persistance pour la demi-chaine, et finalement pour la chaine complète. Le résultat est : la probabilité que partant d'une condition initiale complètement aléatoire le spin à l'origine d'un modèle de Potts unidimensionnel n'a jamais changé de couleur entre les instants 0 et  $t$  décroît algébriquement aux temps longs avec un exposant :

$$\theta(q) = -\frac{1}{8} + \frac{2}{\pi^2} \left[ \cos^{-1} \left( \frac{2-q}{q\sqrt{2}} \right) \right]^2 \quad (1.33)$$

Alors que pour tout nombre de couleurs  $q$  l'exposant dynamique  $z$  prend la valeur habituelle des systèmes à paramètre d'ordre non conservé  $z = 2$  [18], l'exposant de persistance donné par (1.33) a une structure très compliquée et n'est pas relié à  $z$ . L'exposant (1.33) ne prend une valeur rationnelle que dans le cas  $q = 2$ , c'est à dire dans le cas de la chaine d'Ising usuelle (les parois de domaines s'annihilent lorsqu'ils se rencontrent) et vaut alors  $\frac{3}{8}$ , et dans le cas  $q = +\infty$  (les parois coalescent) où il vaut 1.

Le travail requis pour déterminer  $\theta(q)$  en dimension 1 illustre bien la difficulté du problème. Jusqu'à maintenant il n'existe aucun résultat analytique exact - excepté le calcul de  $\langle M^2 \rangle$  - concernant la distribution de l'aimantation locale ; on dispose cependant d'approximations qui sont, numériquement au moins, très proches de la loi exacte (figure 1.1).

## 1.6 Simplification : processus aléatoires

### 1.6.1 Le mouvement brownien

Il n'est pas nécessaire de rappeler trop longuement le rôle central qu'a joué et que joue encore le mouvement brownien - ou sa régularisation sur réseau, la marche aléatoire - dans des domaines très divers aussi bien en physique qu'en mathématiques, et principalement en théorie des processus aléatoires.

Du point de vue de la probabilité de persistance et des temps d'occupation il s'agit du système modèle par excellence : d'une part il permet de comprendre l'apparition des lois en  $\cup$  pour les temps d'occupation et pour le temps du dernier passage par zéro, et d'autre part il permet de faire des calculs exacts et complets. Ainsi il est possible d'obtenir les distributions complètes des observables, et ce par toutes les méthodes analytiques connues (méthode des images, méthode de Kac, énumération de chemins pour la marche aléatoire). C'est donc non seulement un laboratoire pour tester de nouvelles idées et analyser les différents concepts, mais aussi un point de départ naturel. En effet, l'étude analytique des systèmes physiques, ou même simplement des processus gaussiens, se révèle extrêmement complexe. Il est donc légitime de commencer par simplifier le problème et d'essayer de déterminer les comportements génériques (universels) pour des systèmes modèles, en oubliant temporairement les motivations physiques. En suivant la même idée que celle qui peut mener du modèle d'Ising à l'équation de la diffusion - donc à l'étude d'un processus gaussien invariant d'échelle (et qui peut être rendu stationnaire) particulier - et de celle-ci à l'étude des processus gaussiens invariants d'échelle généraux (quitte à ensuite se restreindre à l'étude de processus particuliers pour lesquels on peut calculer certaines observables), nous

commençons par chercher des processus aléatoires généraux pour lesquels l'étude de la persistance est possible. Une large part de ce mémoire est consacrée à l'étude de tels processus stochastiques : les résultats généraux pouvant être envisagés à la fois comme une contribution, par l'étude de systèmes modèles, à la physique hors d'équilibre et comme l'étude de processus dont l'utilité en physique peut dépasser le cadre (lui-même fluctuant) de la physique statistique hors d'équilibre.

### 1.6.2 Extensions du mouvement brownien

Une des idées principales qui a guidé nos premières études de processus aléatoires était que si pour le mouvement brownien<sup>13</sup>, "on connaît tout" il est peut-être possible de généraliser ou de déformer, d'une manière à préciser, celui-ci et de voir si l'on comprend comment se déforment les distributions de probabilité - comment se généralisent les lois de l'arcsinus - ou au moins l'exposant de persistance.

En effet, de nombreuses définitions du mouvement brownien sont possibles, et suivant les aspects de celui-ci que l'on privilégie il est possible de le voir comme cas particulier de classes de processus aléatoires plus généraux. On peut par exemple vouloir conserver certains caractères (gaussien, markovien, à accroissements indépendants) ou simplement se baser sur une analogie formelle. Nous montrons ci-dessous quelques-unes de ces généralisations. Certaines seront traitées de manière approfondie dans les chapitres suivants, alors que d'autres seront à peine évoquées. Bien entendu, nous nous intéresserons exclusivement à des processus présentant une invariance d'échelle.

#### Théorème central limite

Par le théorème central limite le mouvement brownien peut être défini comme limite continue d'une marche aléatoire discrète symétrique. Or il est possible de généraliser le théorème central limite [17, 74, 112] : le mouvement brownien apparaît dans ce cas comme élément particulier d'une classe plus large de processus, les processus aléatoires  $\alpha$ -stables auto-similaires d'exposant  $H$  et à incréments indépendants [112, 159]. Pour le mouvement brownien  $(\alpha, H) = (2, \frac{1}{2})$ . L'indice de stabilité  $\alpha$  est dans l'intervalle  $]0, 2]$ ; pour  $\alpha < 2$  on obtient les processus de Lévy, dont la variance est infinie, ainsi que la moyenne si  $\alpha < 1$ , alors que pour  $\alpha = 2$  on retrouve la famille des processus gaussiens. La généralisation de la loi de l'arcsinus à certains de ces processus est étudiée dans [72], et on trouve des lois bêta.

A ce type de généralisation nous rattachons celle obtenue en généralisant directement la marche aléatoire sous-jacente, par exemple en étudiant des marches aléatoires en temps continu [142, 100].

Une autre manière de généraliser consiste à conserver le caractère gaussien ( $\alpha = 2$ ) en laissant par contre l'exposant  $H$  varier dans  $]0, 1[$ . Dans ce cas le processus obtenu est le mouvement brownien fractionnaire d'exposant  $H$  [129]. Nous verrons celui-ci réapparaître au prochain chapitre.

<sup>13</sup>Lorsque nous ne précisons pas il s'agit du mouvement brownien unidimensionnel.

## Equation de Langevin

Le mouvement brownien peut aussi être vu comme la solution de l'équation stochastique (équation de Langevin) :

$$\frac{dx}{dt} = \eta_t \quad (1.34)$$

où le membre de droite est un bruit blanc gaussien  $\langle \eta_t \rangle = 0$ ,  $\langle \eta_{t_1} \eta_{t_2} \rangle = \delta(t_1 - t_2)$ . Dans ce cas la généralisation consiste à considérer la dérivée  $n$ -ième dans le membre de gauche : on obtient alors une famille de processus gaussiens indexée par l'entier  $n^{14}$ . Le cas particulier  $n = 2$ , correspondant à un marcheur dont l'accélération (et non plus la vitesse) est aléatoire, fera l'objet du chapitre 3.

## Equation de Fokker-Planck

Dans le même ordre d'idée d'analogie formelle, on peut envisager de généraliser l'équation de Fokker-planck pour la densité de probabilité de présence du mouvement brownien (1.10). Une manière de faire ceci est de considérer l'équation de la diffusion fractionnaire :

$$\frac{\partial^\alpha p(x, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} \quad (1.35)$$

avec la condition initiale  $p(x, 0) = \delta(x)$  et les conditions aux bords  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x, t) = 0$ . L'action de l'opérateur fractionnaire  $\frac{\partial^\alpha(\cdot)}{\partial t^\alpha}$  sur une fonction  $f$  est définie comme une transformée intégrale (ou une transformée algébrique dans l'espace de Laplace ; voir [135] pour les détails techniques). Pour  $\alpha \in [0, 1]$  la fonction de Green de l'équation (1.35) est une densité de probabilité [160]. On peut donc se poser la question de la persistance pour le processus sous-jacent. Ce modèle est en fait lié à des modèles de marches aléatoires en temps continu, et nous n'y reviendrons pas dans la suite. Mentionnons juste que l'on montre à l'aide de la méthode des images que l'exposant de persistance vaut  $\theta = \frac{\alpha}{2}$  qui est, comme nous le verrons, le résultat attendu pour les marches aléatoires correspondantes (voir p. 71).

## Processus gaussien markovien

Le mouvement brownien  $x_t$ , ou plus précisément le mouvement brownien normalisé  $\hat{x}_t$ , est un processus gaussien markovien de corrélateur

$$\langle \hat{x}_{t_1} \hat{x}_{t_2} \rangle = \sqrt{x}; \quad x = \frac{t_1}{t_2}; \quad t_1 < t_2 \quad (1.36)$$

Au chapitre suivant (chapitre 2) nous étudierons une classe de processus gaussiens markoviens dont la fonction  $g(x)$  est une loi de puissance  $g(x) = x^\alpha$ , dont le cas  $\alpha = \frac{1}{2}$  redonne le mouvement brownien. Nous verrons que cette classe de processus peut aussi être définie en rendant le bruit dans l'équation (1.34) dépendant du temps.

<sup>14</sup>Nous verrons que  $n$  peut être étendu à tout  $\mathbb{R}$ .

## Processus de renouvellement

Une des caractéristique du mouvement brownien<sup>15</sup> est que les intervalles de temps entre deux passages successifs par zéro sont indépendants et distribués identiquement. C'est à dire que le processus ponctuel (sur  $\mathbb{R}$ ) associé est un processus de renouvellement. Or ce sont ces variables, les temps entre deux zéros, qui jouent un rôle essentiel pour la distribution du temps d'occupation. En oubliant le mouvement brownien lui-même et en ne gardant que la trace de ses passages par zéros, on voit naturellement apparaître une nouvelle généralisation du problème : étant donnée la distribution des temps entre deux zéros (d'un processus dont je n'ai pas besoin de connaître autre chose), que puis-je dire de la distribution du temps d'occupation et des autres observables? Cette question fait l'objet de la première partie du prochain chapitre (chapitre 2).

## En dimension supérieure

Une autre généralisation naturelle du mouvement brownien unidimensionnel est bien entendu le mouvement brownien en dimension supérieure. Les questions de persistance et de temps d'occupation se généralisent, et on observe la même phénoménologie si l'on étudie le temps d'occupation de domaines invariants d'échelle, comme des cônes dans  $\mathbb{R}^d$ . Cette question a fait l'objet de nombreuses études mathématiques (voir par exemple [136]). Si les exposants gouvernant le temps de première sortie d'un cône dans  $\mathbb{R}^d$  sont connus et reliés aux valeurs propres du Laplacien sur la sphère unité, il existe beaucoup moins de résultats concernant les temps d'occupation. Les seuls résultats sont des résultats asymptotiques, qui montrent qu'on retrouve l'exposant de persistance comme exposant au bord de la distribution limite de  $\frac{T^+}{t}$ . Il est aussi intéressant de noter que même dans le cas d'un quadrant en dimension 2, les seuls résultats connus semblent être des résultats "négatifs". Les auteurs de [13] ont en effet montré que la loi du temps d'occupation d'un quadrant par un mouvement brownien bidimensionnel n'est pas une loi béta (d'exposant<sup>16</sup>  $\frac{1}{4}$ ) en calculant le moment d'ordre 2, qui vaut  $\frac{5}{32} - \frac{1}{8\pi^2}$ , contre  $\frac{5}{32}$  pour la loi béta.

<sup>15</sup>Ou, si l'on préfère, de la marche aléatoire sur réseau qui le régularise à courte distance afin de penser aux passages par zéros comme des points bien distincts les uns des autres.

<sup>16</sup>Pour un cône d'angle  $\alpha$  l'exposant est  $\frac{\pi}{2(2\pi-\alpha)}$ .

# CHAPITRE 2

## Processus de renouvellement

---

### 2.1 Introduction, motivation

La distribution du temps d'occupation d'un processus aléatoire est déterminée par la distribution des temps de retour à l'origine du processus, qui eux-mêmes en général dépendent de manière compliquée du processus lui-même. Ainsi, même dans le cas *a priori* simple du processus gaussien stationnaire centré - donc qui est entièrement déterminé par sa fonction d'autocorrélation - la distribution des zéros du processus est un problème qui n'a reçu de solution que dans quelques rares cas particuliers. Il est donc légitime de se poser une question plus simple, telle que : "étant donnés les zéros du processus, que peut-on dire de la distribution du temps d'occupation ?". Si on suppose de plus que les intervalles entre deux zéros sont indépendants on se ramène à l'étude des processus de renouvellement. Dans la première partie de ce chapitre nous présentons des résultats très généraux sur les processus de renouvellement, en mettant en évidence l'universalité de ces résultats au sens où les distributions des temps d'occupation, ainsi que celles d'un certain nombre d'autres observables telles que les temps du dernier zéro ou la statistique du nombre de zéros, ne dépendent pas du détail de la distribution des intervalles. Nous montrons ensuite comment ces idées de renouvellement peuvent, de manière plus ou moins directe, inspirer notre manière d'étudier des processus aléatoires plus complexes.

### 2.2 Processus de renouvellement

L'idée d'étudier la persistance pour des processus de renouvellement est tout à fait naturelle : c'est exactement le chemin suivi par l'approximation des intervalles indépendants, mais dans ce cas le processus de renouvellement étudié n'était pas le système initial mais le système regardé en temps logarithmique. Malgré le grand nombre d'études des processus de renouvellement par les probabilistes [174, 34, 35], il existe assez peu de publications les étudiant sous l'angle des problèmes de temps d'occupation (voir cependant [64, 60, 108] et plus récemment [5, 79]). Nous suivons dans cette section la publication [79] et renvoyons à celle-ci pour les détails techniques.

#### 2.2.1 Définitions et notations

Un processus de renouvellement est défini par la donnée de la distribution des intervalles entre deux points consécutifs. Ces points sont considérés comme étant les zéros avec changement de signe d'un processus  $x_t$  (qu'il n'est pas nécessaire d'essayer

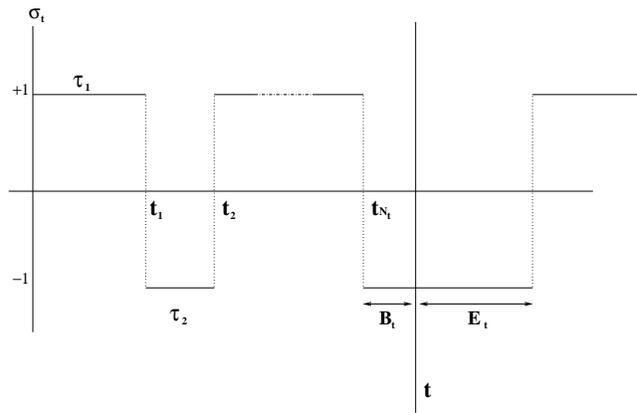


FIG. 2.1 – Représentation d'un processus de renouvellement.

d'expliciter), c'est à dire les points où le processus signe associé,  $\sigma_t = \text{signe}(x_t)$ , bascule entre les valeurs  $\pm 1$ . Si  $t_k$  désigne le temps du  $k$ -ième zéro, ces intervalles sont les variables  $\tau_1 = t_1$ ,  $\tau_2 = t_2 - t_1$ ,  $\dots$ . On suppose que celles-ci sont indépendantes et identiquement distribuées selon une densité  $\rho(\tau)$ . On supposera de plus qu'il y a un zéro en  $t = 0$ . Les observables étudiées sont :

- Le nombre de zéros  $N_t$  entre les instants 0 et  $t$ , ou plus généralement le nombre de zéros entre deux instants  $t$  et  $t + t'$  :  $N(t, t + t') = N_{t+t'} - N_t$ .

- Le temps du dernier zéro avant  $t$  :

$$t_{N_t} = \tau_1 + \dots + \tau_{t_{N_t}} \quad (2.1)$$

- Le temps *backward recurrence time*  $B_t$ , qui est le temps écoulé depuis le dernier zéro<sup>1</sup> et le temps d'attente résiduel  $E_t$  :

$$\begin{aligned} B_t &= t - t_{N_t} \\ E_t &= t_{N_t+1} - t \end{aligned}$$

- Les temps d'occupation  $T_t^+$  et  $T_t^-$ , qui sont respectivement les temps passés par le processus dans le demi-plan positif et négatif jusqu'au temps  $t$  :

$$T_t^\pm = \int_0^t dt' \frac{1 \pm \sigma_t}{2} \quad (2.2)$$

- La fonction d'autocorrélation du processus  $\sigma_t$  :

$$A(t, t + t') = \langle \sigma_t \sigma_{t+t'} \rangle \quad (2.3)$$

Dans ce qui suit seule intervient la queue de la distribution  $\rho(\tau)$ , qui donne la probabilité de persistance aux temps longs :

$$p_0(t) = \int_t^{+\infty} d\tau \rho(\tau) \quad (2.4)$$

<sup>1</sup>Qui chez certains auteurs s'appelle l'âge du système [67].

Dans ces modèles l'exposant de persistance est trivial : c'est une des données du problème, et pourtant le calcul du temps d'occupation est quant à lui non trivial. Il existe d'ailleurs un certain nombre de modèles, parmi lesquels le mouvement brownien fractionnaire, dont on connaît l'exposant de persistance sans avoir de résultats sur le temps d'occupation.

Les deux cas intéressants sont a) celui où  $\rho(\tau)$  est une loi étroite (les deux premiers moments  $\langle \tau \rangle$  et  $\langle \tau^2 \rangle$  sont finis) et b) celui où  $\rho(\tau)$  est une loi large, dont la queue de distribution décroît en loi de puissance avec un exposant  $\theta$  :

$$\int_t^{+\infty} d\tau \rho(\tau) \underset{t \rightarrow +\infty}{\approx} \left( \frac{\tau_0}{t} \right)^\theta \quad (0 < \theta < 2) \quad (2.5)$$

où  $\tau_0$  est un temps microscopique. Ce cas se subdivise lui-même en deux sous-cas selon la place de  $\theta$  par rapport à 1 : si  $1 < \theta < 2$  le premier moment  $\langle \tau \rangle$  est fini et la variance est infinie, alors que si  $\theta < 1$  le temps moyen entre deux zéros est infini. Par exemple  $\theta = \frac{1}{2}$  redonne le cas bien connu des retours à l'origine d'un marcheur brownien. Ces trois cas - qui ne dépendent que de la queue de distribution de  $\rho(\tau)$  - sont les trois cas pertinents du point de vue de la recherche de lois limites pour les observables définies ci-dessus. Ceci est bien connu pour le marcheur brownien : par exemple, la loi de l'arcsinus pour le temps d'occupation ne dépend pas du détail de la régularisation, et en particulier ne dépend pas du fait que la distribution des retours à l'origine d'un mouvement brownien est singulière aux temps courts, mais uniquement de la décroissance lente aux temps longs.

### 2.2.2 Méthode

Du fait de l'indépendance *a priori* des variables  $\tau_k$  entre elles, il est intéressant de travailler avec un formalisme basé sur l'utilisation de transformées de Laplace (simples ou multiples). Cela permet de plus dans certains cas de déterminer directement, en prenant les limites adéquates, les fonctions d'échelle. Pour une distribution  $\rho(\tau)$  étroite on a dans l'espace de Laplace :

$$\mathcal{L}_\tau \rho(\tau) = \hat{\rho}(s) \underset{s \rightarrow 0}{=} 1 - \langle \tau \rangle s + \frac{1}{2} \langle \tau^2 \rangle s^2 + \dots, \quad (2.6)$$

alors que pour une loi large il vient de (2.5) :

$$\hat{\rho}(s) = \begin{cases} 1 - as^\theta & (\theta < 1) \\ 1 - \langle \tau \rangle s + as^\theta & (1 < \theta < 2) \end{cases} \quad (2.7)$$

Les calculs détaillés des lois limites (dont certaines sont rappelées ci-dessous) des observables peuvent être trouvés dans [79].

De manière générale, les observables dont on cherche à déterminer les lois limites sont, à  $t$  fixé, des fonctions de  $t$  et des  $\tau_1, \dots, \tau_{N_t}$ , où l'indice  $N_t$  est lui-même une variable aléatoire dépendant de  $t$  et non indépendante de la distribution des  $\tau$ . Il est donc nécessaire de mener les calculs minutieusement.

Soit en toute généralité  $Y_N$  une fonction de  $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N\}$ , et donc de  $N_t$  aussi. La première étape consiste à calculer la loi jointe

$$\begin{aligned} f_{Y_N, N}(t; y; n) &= \frac{d}{dy} \mathbb{P}[Y_N < y; N_t = n] \\ &= \langle \delta(y - Y_n) I(t_n \leq t < t_{n+1}) \rangle \end{aligned}$$

où  $I(\dots)$  désigne la fonction caractéristique de l'événement considéré. La deuxième étape consiste à passer à la double transformée de Laplace par rapport à  $t$  et à  $y$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{t,y} f_{Y_N, N}(s; u; n) &= \left\langle e^{-uY_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} dt e^{-st} \right\rangle \\ &= \frac{1}{s} \left\langle e^{-uY_n(\tau_1, \dots, \tau_n)} e^{-s\tau_1 - \dots - s\tau_n} (1 - e^{-s\tau_{n+1}}) \right\rangle \end{aligned}$$

On utilise ensuite l'indépendance des  $\tau_k$  pour essayer de factoriser cette moyenne<sup>2</sup>. La loi marginale de  $Y_N$  cherchée s'obtient finalement en sommant la loi jointe sur  $n$  :

$$f_{Y_N}(t; y) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_{Y_N, N}(t; y; n) \quad (2.8)$$

En guise d'illustration, choisissons  $Y_N = t_N$ , le temps du dernier zéro. La méthode exposée ci-dessus conduit à :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{t,y} f_{t_N, N}(s; u; n) &= \left\langle e^{-ut_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} dt e^{-st} \right\rangle \\ &= \hat{\rho}(s+u)^n \frac{1 - \hat{\rho}(s)}{s} \quad (n \geq 0) \\ \mathcal{L}_{t,y} f_{t_N}(s; u) &= \frac{1}{1 - \hat{\rho}(s+u)} \frac{1 - \hat{\rho}(s)}{s} \end{aligned}$$

Dans le cas  $\theta < 1$  la variable d'échelle est  $x = \frac{t_N}{t}$  et dans la limite  $t, t_N \rightarrow +\infty$  avec  $x$  fixé, c'est à dire pour  $s$  et  $u$  petits et de même ordre :

$$\hat{f}_{t_N}(s; u) \approx \frac{1}{s} s^\theta (s+u)^{-\theta} \quad (2.9)$$

qui s'inverse en une loi bêta :

$$f_{t^{-1}t_N}(x) = \frac{\sin \pi \theta}{\pi} x^{\theta-1} (1-x)^{-\theta} = \beta_{\theta, 1-\theta}(x) \quad (0 < x < 1) \quad (2.10)$$

<sup>2</sup>Les  $\tau_k$  ne sont pas *stricto sensu* indépendants : ils sont contraints par  $\sum_{i=1}^N \tau_i \leq t$  et il faut en conséquence faire un peu attention au cours des calculs.

### 2.2.3 Résultats : lois limites (universelles)

Le cas qui nous intéresse plus particulièrement est celui où  $\theta < 1$ , puisque c'est cette classe de processus de renouvellement qui reproduit en partie la phénoménologie observée dans les systèmes hors d'équilibre où le retour à l'équilibre s'opère *via* la croissance de domaines (loi entre deux retournements large, aimantation locale distribuée en  $\cup$ ). Le cas  $1 < \theta < 2$  est néanmoins intéressant au regard de ce qui se passe dans le modèle d'Ising bidimensionnel exactement à la température critique : la fonction de corrélation est alors [78]

$$\langle \sigma_t \sigma_{t+t'} \rangle_{\text{Ising}} \sim t^{-\frac{\beta}{\nu z_c}} g_{\text{Ising}} \left( \frac{t}{t+t'} \right) \quad (2.11)$$

de la même forme que celle observée dans le cas intermédiaire  $1 < \theta < 2$  pour un processus de renouvellement [79] :

$$\langle \sigma_t \sigma_{t+t'} \rangle_{\text{renouv}} \sim t^{-(\theta-1)} g_{\text{renouv}} \left( \frac{t}{t+t'} \right) \quad (2.12)$$

Néanmoins, seule la forme est bien reproduite et le modèle reste trop grossier pour reproduire adéquatement la dynamique critique.

De même le cas  $0 < \theta < 1$  est plus à prendre comme un cas d'école permettant d'explicitier clairement les différents concepts mis en jeu que comme un véritable modèle physique. Le résultat principal de l'étude des processus de renouvellement est la loi limite pour le temps d'occupation. Cette loi, qui apparaît déjà dans [108] et quelques années plus tard dans [5] est :

$$\lim f_{t^{-1}T^\pm}(x) \frac{\sin \pi \theta}{\pi} \frac{x^{\theta-1}(1-x)^{\theta-1}}{x^{2\theta} + 2 \cos \pi \theta x^\theta (1-x)^\theta + (1-x)^{2\theta}} \quad (2.13)$$

ou de manière équivalente pour l'aimantation locale  $M = 2t^{-1}T^+ - 1$  :

$$f_M(x) = \frac{2 \sin \pi \theta}{\pi} \frac{(1-x^2)^{\theta-1}}{(1+x)^{2\theta} + 2 \cos \pi \theta (1-x^2)^\theta + (1-x)^{2\theta}} \quad (2.14)$$

Cette loi est, comme attendu, divergente aux bords de son support avec un exposant égal à l'exposant  $\theta$ . En cela elle ressemble à la loi bêta

$$f_{t^{-1}T^+}^\beta(x) = 2^{2\theta-1} B^{-1} \left( \frac{1}{2}, \theta \right) x^{\theta-1} (1-x)^{\theta-1}, \quad (2.15)$$

qui est la loi que nous avons jusqu'ici prise comme loi de référence. Cependant, à la différence de cette dernière qui garde la même forme en  $\cup$  sur tout l'intervalle  $\theta \in ]0, 1[$ , en particulier la valeur moyenne  $\frac{1}{2}$  étant aussi la valeur la moins probable, la distribution (2.13) a une forme différente selon la position de  $\theta$  par rapport à  $\theta_c \approx 0.59..$ , où  $\theta_c$  est la solution de  $\theta = \cos \left( \frac{\pi \theta}{2} \right)$ . Pour  $\theta < \theta_c$  la distribution (2.13) a une forme en  $\cup$  et est numériquement très proche d'une loi bêta de même exposant (2.15). Par contre lorsque  $\theta > \theta_c$  on commence à voir "pousser" un maximum local en  $x = \frac{1}{2}$  (et la valeur moyenne n'est plus la valeur la moins probable). Cet effet, annonçant la loi des

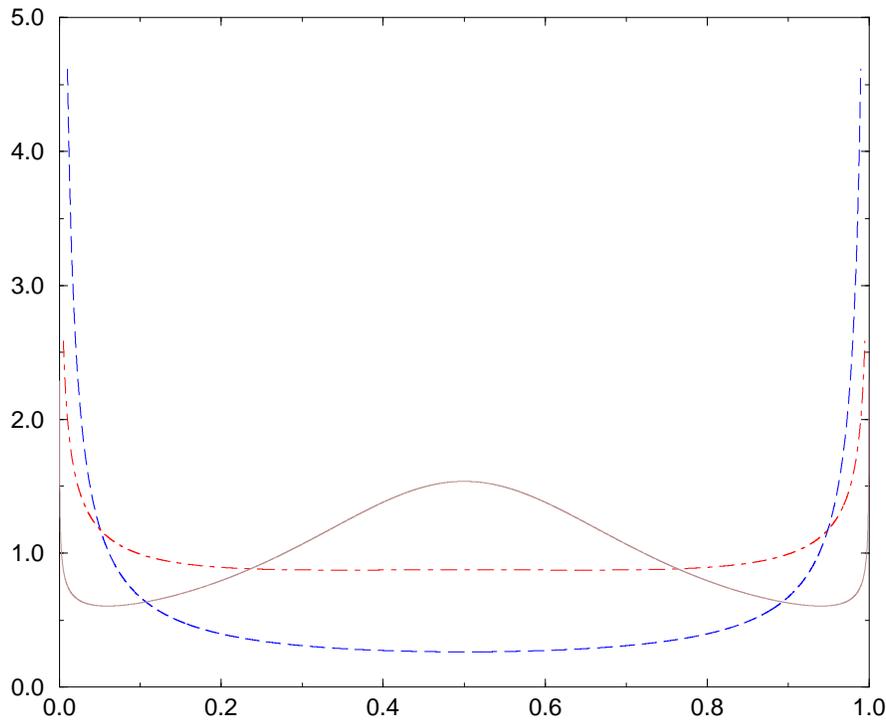


FIG. 2.2 – Densité de probabilité de la loi de Lamperti (équation 2.13) pour  $\theta = 0.25$  (tirets),  $\theta = 0.60$  (trait-point) et  $\theta = 0.75$  (trait plein).

grands nombres observée pour le temps d'occupation des processus de renouvellement à  $\theta > 1$  (lorsque  $\langle \tau \rangle$  commence à exister) est aussi observé pour l'équation de la diffusion en grande dimension [146]. En effet il a été montré [124, 52] que pour l'équation de la diffusion  $\theta(d) \underset{d \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{d}$ . Il existe donc une dimension critique au delà de laquelle  $\theta > 1$ . En calculant numériquement cette dimension, les auteurs de [146] se sont rendus compte de l'existence de 2 dimensions jouant un rôle particulier,  $d_1 \approx 26$  et  $d_2 \approx 46$ . Pour  $d < d_1$  la distribution du temps d'occupation est purement en  $\cup$  et pour  $d > d_2$  purement en  $\cap$  ( $d_2$  est la solution de l'équation  $\theta(d_2) = 1$ ). Par contre il existe tout un régime  $d_1 < d < d_2$  dans lequel la distribution de  $t^{-1}T^+$  diverge certes aux bords, mais présente en outre 3 extrema locaux (2 minima et un maximum en  $\frac{1}{2}$ ), de manière analogue à ce qui est observé pour la loi (2.13) pour  $\theta_c < \theta < 1$ .

En ce qui concerne la loi limite de  $H = \frac{tN}{t}$ , un modèle simple basé sur les processus de renouvellement ne peut reproduire le comportement de cette observable dans un système "réaliste" de manière correcte. En effet la loi de  $H$  code des informations différentes aux deux bornes de son support. Plus précisément le bord  $x \sim 0$  est relié à la persistance aux temps longs et est donc bien décrit par les processus de renouvellement. Par contre le comportement au bord  $x \sim 1$  est lié à la densité de zéros du processus et à la persistance aux temps courts, qui sont des quantités non prises en compte par le

modèle.

## 2.3 Application : déformation du mouvement brownien

La distribution de l'aimantation locale d'un processus aléatoire contient l'exposant de persistance comme exposant de divergence aux bords, mais l'étude des processus de renouvellement montre clairement que la connaissance de la probabilité de persistance ne rend pas pour autant triviale la détermination de  $f_M^3$ . Le processus étudié dans cette section en est une illustration : en ajoutant un degré de difficulté par rapport aux processus de renouvellement, il n'est plus possible de mener jusqu'au bout les calculs précédents pour l'aimantation locale, et ce bien que l'exposant de persistance puisse encore quasiment être considéré comme une donnée du problème. De plus l'étude de ce processus amène un autre éclairage sur l'approximation des intervalles indépendants.

Cette section suit la trame de l'article [171] que nous avons consacré à ce problème, reproduit à la suite de ce chapitre. Nous y renvoyons pour les détails techniques.

### 2.3.1 Le processus

Le processus aléatoire que nous étudions ici a deux origines distinctes et indépendantes : il a d'une part été introduit comme approximation du mouvement brownien fractionnaire [129] d'abord par erreur [117] puis en toute connaissance de cause [163] et d'autre part il apparaît comme gouvernant pour une valeur particulière du paramètre l'évolution temporelle de l'aimantation totale d'une chaîne d'Ising unidimensionnelle soumise à la dynamique de température nulle [121], après une trempe depuis un état totalement désordonné. Il est donné très simplement par une équation de Langevin :

$$\frac{dy_t}{dt} = \sqrt{2\alpha} t^{\alpha-\frac{1}{2}} \eta_t, \quad (2.16)$$

où  $\alpha$  est un paramètre positif et  $\eta_t$  un bruit blanc gaussien :  $\langle \eta_t \rangle = 0$  et  $\langle \eta_{t_1} \eta_{t_2} \rangle = \delta(t_2 - t_1)$ .

La première chose à remarquer est que ce processus est une déformation du mouvement brownien usuel. Le changement algébrique de temps :

$$t' = t^{2\alpha} \quad (2.17)$$

définit un processus  $y_{t'}$  qui vérifie l'équation de Langevin :

$$\frac{dy_{t'}}{dt'} = \zeta_{t'} \quad (2.18)$$

où  $\zeta_{t'}$  est un bruit blanc gaussien : le processus  $y(t')$  est donc un mouvement brownien. Cette remarque permet de calculer aisément l'exposant de persistance : dans le "*temps brownien*"<sup>4</sup> la probabilité que le processus ne soit pas passé par zéro décroît asymptotiquement en  $t'^{-\frac{1}{2}}$ , donc cette quantité décroît en  $t^{-\alpha}$  pour le processus original, c'est à

<sup>3</sup>Et c'est, d'une certaine manière, heureux : il existe de nombreux modèles très différents qui possèdent le même exposant  $\theta$ .

<sup>4</sup>Dans toute cette section les quantités désignées avec un "prime" (') se rapportent aux quantités correspondantes regardées dans le temps  $t'$ .

dire  $\theta = \alpha$ . Comme dans le cas des processus de renouvellement - bien que de manière un peu différente - la persistance apparaît comme le seul paramètre du problème.

Le processus ainsi défini est gaussien markovien, de propagateur ( $t_2 > t_1$ ) :

$$\mathbb{P}[x_2, t_2 | x_1, t_1] = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2^{2\alpha} - t_1^{2\alpha})}} e^{-\frac{(x_2 - x_1)^2}{2(t_2^{2\alpha} - t_1^{2\alpha})}} \quad (2.19)$$

Sa fonction d'autocorrélation est :

$$\langle x_{t_1} x_{t_2} \rangle = \min(t_1^{2\alpha}, t_2^{2\alpha}) \quad (2.20)$$

Le corrélateur du processus normalisé  $\hat{x}_t = x_t / \sqrt{\langle x_t^2 \rangle}$ , dont les propriétés de persistance sont les mêmes, permet de définir la fonction d'échelle  $g$ , qui est une pure loi de puissance :

$$\langle \hat{x}_{t_1} \hat{x}_{t_2} \rangle = g\left(\frac{t_1}{t_2}\right) = g(x) = x^\alpha \quad (2.21)$$

En temps logarithmique il s'agit du processus gaussien stationnaire autour duquel a été développée une théorie de perturbations (voir chapitre 1) : il ne s'agit donc pas d'un processus régulier<sup>5</sup>.

### 2.3.2 Résolution du modèle

L'étude initiale de l'aimantation locale pour ce processus [54] montre qu'il est possible d'obtenir des équations de récurrence pour les moments successifs de  $M$ , et ce par deux méthodes indépendantes : d'une part par une adaptation de la méthode de Kac (voir chapitre 1 section 1.4.1) qui exploite le caractère markovien et d'autre part en appliquant "naïvement" les formules pour les moments de  $M$  calculés dans le cadre de l'approximation des intervalles indépendants (1.27). En effet ces formules, comme nous l'avons déjà noté, ne dépendent pas de  $\langle l \rangle$ . La comparaison *a posteriori* des résultats des deux méthodes montrent que ceux-ci sont identiques, et donc en particulier que l'approximation des intervalles indépendants n'est pas, pour ce processus markovien, une approximation. Néanmoins, cette méthode n'est pas vraiment naturelle, l'utilisation de l'approximation des intervalles indépendants n'étant *a priori* pas licite pour ce processus.

Il se trouve en fait que la transformation algébrique du temps (2.17) permet une compréhension plus fine des propriétés de persistance du modèle, bien au-delà du simple calcul de l'exposant de persistance, en mettant en évidence la structure sous-jacente de renouvellement. En effet, dans le temps  $t'$ , le processus est un mouvement brownien, donc le processus ponctuel associé aux changements de signe est un processus de renouvellement, c'est à dire que les temps entre les zéros du processus  $y_{t'}$  sont indépendants entre eux et identiquement distribués. L'idée consiste alors à écrire des équations en distribution strictement similaires à celles écrites dans l'approximation des intervalles indépendants (1.23) à (1.25) :

$$M \stackrel{d}{=} \pm(1 - 2\xi) \quad (2.22)$$

<sup>5</sup>Le nombre moyen de zéros du processus (2.16) entre 0 et  $t$  se comporte comme  $\langle N_t \rangle \approx 2\pi^{-\frac{1}{2}} t^\alpha$  comme on peut le voir en passant en *temps brownien*. Il en résulte que  $\langle l \rangle$  s'annule asymptotiquement.

$$\xi \stackrel{d}{=} HX \quad (2.23)$$

$$X \stackrel{d}{=} 1 - FX \quad (2.24)$$

où on a noté :

$$\begin{aligned} H &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t_N}{t}, & F &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t_{N-1}}{t_N}, \\ X &= \lim_{t \rightarrow \infty} X_N, & \xi &= \lim_{t \rightarrow \infty} \xi_t, & M &= \lim_{t \rightarrow \infty} M_t. \end{aligned}$$

les variables possédant une loi limite lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Les calculs complets peuvent être trouvés dans l'article [171]. La méthode consiste à déterminer en premier lieu la loi de  $H$  à partir de celle de  $H'$ , qui n'est autre que la loi de l'arcsinus ((2.10) pour  $\theta = \frac{1}{2}$ ). L'égalité  $H = (H')^{\frac{1}{2\alpha}}$  permet de déterminer :

$$f_H(x) = \frac{2\alpha x^{\alpha-1}}{\pi \sqrt{1-x^{2\alpha}}} \quad (2.25)$$

De même l'étude de la variable aléatoire  $\frac{t'_{N-1}}{t'_N}$  permet en revenant dans le temps original d'exprimer les moments aux temps longs de  $\frac{t_{N-1}}{t_N}$ . Une fois ceux-ci connus les équations (2.22) à (2.24) donnent des équations de récurrence pour les moments de  $X$ , puis de  $M$ , qui sont les mêmes que celles de [54]. Il est en outre possible, en utilisant certaines symétries des distributions de  $X$  et de  $\xi$  de réexprimer les équations de récurrence sous la forme d'une équation intégrale, qui peut ensuite s'étudier d'une part dans la région de persistance ( $M \rightarrow \pm 1$ ) afin de comparer l'amplitude de  $f_M$  aux bords à l'amplitude d'une loi béta, et d'autre part pour  $\alpha \rightarrow +\infty$ . A ce jour cependant les équations de récurrence pour les moments  $\langle M^{2k} \rangle$ , qui font intervenir des objets combinatoires intéressants, ne sont pas résolues.

## 2.4 Retour sur les intervalles indépendants

Un des enseignements de l'étude du processus (2.16) est que l'approximation des intervalles indépendants peut faire des prédictions même pour des processus non réguliers, si l'on prend convenablement la limite  $\langle l \rangle \rightarrow 0$ . Ici les résultats obtenus sont, du fait du caractère markovien du processus, exacts. Il est intéressant de revenir quelque temps sur cette approximation (nous reprenons les notations de la section 1.4.4, p. 12). Dans le cadre de l'approximation des intervalles indépendants on a, en utilisant les équations (1.17) et (1.20) :

$$\left\langle \left( \frac{t_N}{t} \right)^s \right\rangle = \hat{\rho}_{B_T}(s) = \frac{\hat{I}(s)}{1 + \langle l \rangle \frac{s}{2} \hat{I}(s)} \quad (2.26)$$

Dans le cas d'un processus régulier, on retrouve l'exposant de persistance en cherchant les zéros du dénominateur, ce qui redonne l'équation (1.18). Si le processus n'est pas régulier, il est tentant de prendre dans cette expression la limite  $\langle l \rangle \rightarrow 0$ , qui donne directement :

$$\left\langle \left( \frac{t_N}{t} \right)^s \right\rangle = \hat{I}(s) \quad (2.27)$$

L'intérêt de prendre la limite sur cette quantité est l'obtention d'une limite non triviale, ce qui ne serait pas le cas si on prenait la limite directement dans l'expression de  $\hat{f}(s)$  (1.14). On obtient alors directement une prédiction pour la densité de probabilité de la variable  $H = \frac{t_N}{t}$  :

$$f_H(x) = \frac{2}{\pi} \frac{g'(x)}{\sqrt{1-g(x)^2}} \quad (2.28)$$

où  $g$  est la fonction d'échelle du corrélateur du processus auto-similaire étudié. Dans le cas du processus (2.16)  $g(x) = x^\alpha$  et on retrouve la loi (2.25), qui est exacte. Quelle est la validité d'une telle prédiction ? Pour  $x \sim 0$ , on a  $f_H(x) \sim \frac{2}{\pi} g'(x)$  : si  $g$  se comporte localement en loi de puissance avec un exposant  $\alpha$  cela prédit un exposant de persistance identique, ce que l'on sait être faux en général,  $\theta$  dépendant *a priori* de tout le corrélateur. Par contre, pour  $x \sim 1$  il semble que l'on puisse obtenir des prédictions qui peuvent être raisonnables, puisqu'on regarde alors une quantité locale dans le temps.

La limite  $x \rightarrow 1$  correspond à la limite  $s \rightarrow +\infty$  dans l'expression (2.26) ( $s$  est alors une variable de Laplace conjuguée de  $1-x$ ). La première étape consiste à déterminer le comportement asymptotique de  $\hat{I}(s)$ . Dans le cas général la fonction d'échelle  $g$  se comporte, lorsque  $x \rightarrow 1^-$ , comme :

$$g(x) = 1 - A(1-x)^\alpha \quad (2.29)$$

Dans le cas d'un processus régulier  $\alpha = 2$  et le coefficient  $A = -\frac{g''(1)}{2}$  est directement lié à la densité  $\rho = \frac{\sqrt{-g''(1)}}{\pi}$  par  $\pi\rho = \sqrt{2A}$ . Quand  $s \rightarrow +\infty$  l'intégrale définissant  $\hat{I}(s)$  est dominée par le comportement de l'intégrand au voisinage de 1. Il vient :

$$\begin{aligned} \hat{I}(s) &\underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \int_0^1 dx \frac{\alpha A (1-x)^{\alpha-1}}{\sqrt{2A} (1-x)^{\frac{\alpha}{2}}} \\ \hat{I}(s) &\underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha \sqrt{2A}}{\pi} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) s^{-\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

Dans le cas régulier cela donne, en utilisant  $\langle l \rangle \rho = 1$  et l'équation (2.26) :

$$\left\langle \left( \frac{t_N}{t} \right)^s \right\rangle \underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\rho}{s} \quad (2.30)$$

c'est à dire, en inversant la transformée de Laplace, que  $f_H(x)$  a une valeur finie égale à  $\rho$  en  $x = 1$  :

$$f_H(1) = \rho$$

Dans le cas d'un processus non régulier il vient :

$$f_H(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{=} \frac{\alpha \sqrt{2A}}{\pi} (1-x)^{\frac{\alpha}{2}-1} \quad (2.31)$$

Ces résultats peuvent être testés soit exactement pour les processus dont on connaît le comportement de  $f_H(x \sim 1)$ , comme par exemple le processus étudié dans ce chapitre ou l'accélération aléatoire (voir section 3.4, p. 65), soit numériquement. Ainsi on vérifie que pour l'équation de la diffusion  $f_H(x)$  est bien finie au bord droit de son support, alors que pour le modèle d'Ising unidimensionnel, qui n'est pas régulier, on s'attend à une divergence.

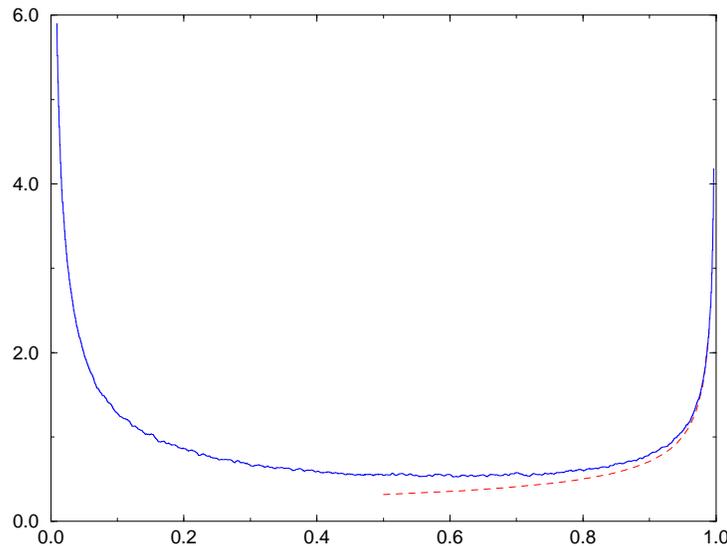


FIG. 2.3 – Histogramme de la variable  $\frac{t_N}{t}$  pour le modèle d'Ising unidimensionnel. En trait plein : simulation numérique ( $10^4$  spins,  $10^3$  échantillons), en pointillés : prédiction analytique 2.32. Le bord gauche de la distribution diverge avec l'exposant  $\theta = \frac{3}{8}$ .

### Modèle d'Ising

En utilisant l'approximation gaussienne (voir remarque dans la sous-section 1.4.2, p. 10)  $g(x) = \sqrt{\frac{2x}{1+x}}$  la prédiction

$$f_{H,\text{Ising}}(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{=} \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (2.32)$$

est en très bon accord avec les simulations. Le comportement algébrique se comprend bien en observant que la distribution autour de  $x = 1$  est donnée par les parois de domaines qui sont passées par l'origine à l'instant  $t_N$  (pour  $t_N \sim t$  cela arrive avec une probabilité  $t^{-\frac{1}{2}}$ ) et qui ne sont pas ensuite repassées entre  $t_N$  et  $t$  (probabilité  $(t - t_N)^{-\frac{1}{2}}$ , puisque les interfaces diffusent). Les auteurs de [67] ont ajusté leurs données en supposant que  $f_H$  est donnée par une loi bêta sur tout  $]0, 1[$  afin de reproduire aussi l'exposant de persistance :

$$f_{H,\beta}(x) = \mathcal{B}x^{-\frac{5}{8}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$$

où  $\mathcal{B} = \frac{\Gamma(\frac{7}{8})}{\Gamma(\frac{3}{8})\Gamma(\frac{1}{2})} = 0.259349..$  est à comparer à  $\frac{1}{\pi\sqrt{2}} = 0.225079..$  Leur approche présente cependant l'intérêt de proposer une forme pour la distribution entière, alors que (2.32) ne devient exacte qu'au voisinage de 1.

Ce retour aux intervalles indépendants (pour les processus non réguliers) est un bon moment pour évaluer les premiers moments de l'aimantation locale du modèle d'Ising par cette approximation :

$$\begin{aligned} \langle M^2 \rangle_{\text{IIA}} &= 2 - \sqrt{2} \\ \langle M^4 \rangle_{\text{IIA}} &= \frac{19\sqrt{2} - 25}{4} = 0.467514.. \\ \langle M^6 \rangle_{\text{IIA}} &= \frac{348873 - 246261\sqrt{2}}{1504} = 0.403826.. \end{aligned}$$

## Le mouvement brownien fractionnaire

Le mouvement brownien fractionnaire a été initialement introduit par Lévy [112] comme une généralisation à un paramètre du mouvement brownien basée sur l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville :

$$x_H(t) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} \eta(s) ds \quad (2.33)$$

où  $\eta(s)$  est un bruit blanc gaussien de largeur 1. Ce processus est gaussien autosimilaire, et redonne le mouvement brownien usuel comme intégrale d'un bruit blanc pour  $H = \frac{1}{2}$ . On calcule aisément la variance ainsi que celle des incréments :

$$\begin{aligned} \langle x_H^2(t) \rangle &= \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})^2} \frac{t^{2H}}{2H} \\ \langle (x_H(t+T) - x_H(t))^2 \rangle &= \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})^2} \left( \frac{1}{2H} + \int_0^{\frac{t}{T}} du \left[ (1+u)^{H-\frac{1}{2}} - u^{H-\frac{1}{2}} \right]^2 \right) T^{2H} \end{aligned}$$

Les incréments ne sont pas stationnaires, sauf dans la limite  $t \gg T$ . Pour cette raison Mandelbrot et Van Ness [129] ont modifié cette définition en étendant l'intégrale sur  $]-\infty, t]$ , et en modifiant le noyau en conséquence pour rendre l'intégrale convergente :

$$x_H(t) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \left[ \int_{-\infty}^0 \left( (t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} \right) \eta(s) ds + \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} \eta(s) ds \right] \quad (2.34)$$

Pour ce processus les incréments sont maintenant stationnaires :

$$\langle (x_H(t+T) - x_H(t))^2 \rangle = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})^2} \left( \frac{1}{2H} + \int_0^\infty du \left[ (1+u)^{H-\frac{1}{2}} - u^{H-\frac{1}{2}} \right]^2 \right) T^{2H}$$

Nous ne considérerons dans la suite que la définition (2.34). Le mouvement brownien fractionnaire a été largement utilisé dans des domaines divers tels que l'étude de séries temporelles hydrologiques ou financières [128], la description de phénomènes de diffusion anormale, l'étude des corrélations à longue portée dans les chaînes d'ADN ou encore en traitement de l'image. Il est en outre apparu dans le cadre de l'étude de la persistance spatiale d'interfaces fluctuantes [101, 102].

L'exposant de persistance est connu pour ce processus. Le calcul repose sur la structure fractale de l'ensemble des zéros du processus et l'invariance par translation des incréments [55, 101], et donne  $\theta = 1 - H$ . Notons que le calcul perturbatif [167] au premier ordre autour du mouvement brownien  $H = \frac{1}{2}$  est en accord avec ce résultat.

Il ne semble par contre pas exister de résultats généraux ni pour le temps d'occupation ni pour le temps du dernier zéro. Le seul résultat existant paraît être celui de [138], qui montre analytiquement que l'on retrouve l'exposant de persistance  $1 - H$  comme singularité au bord des distributions du temps d'occupation et du dernier zéro. Dans cette perspective il est intéressant d'avoir des résultats sur des processus approchés ou

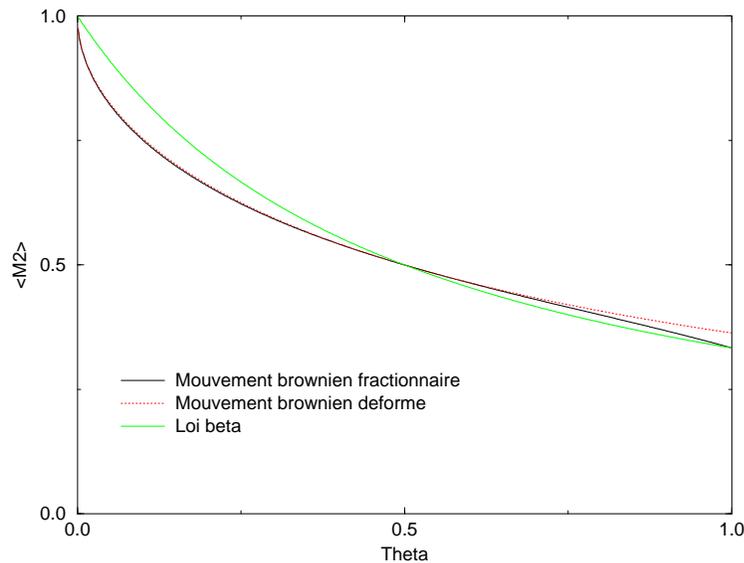


FIG. 2.4 – Comparaison de  $\langle M^2 \rangle$  en fonction de  $\theta$  entre le mouvement brownien fractionnaire, le mouvement brownien en temps algébrique et la loi bêta. Les 3 courbes coïncident naturellement pour  $\theta = \frac{1}{2}$  : dans ce cas  $M$  suit la loi de l'arc sinus. En  $\theta = 1$  on a  $\langle M^2 \rangle_{\text{MBF}} = \langle M^2 \rangle_{\beta} = \frac{1}{3}$  et  $\langle M^2 \rangle_{\text{MBdeforme}} = 1 - \frac{2}{\pi} = 0.3633..$

des approximations du processus lui-même. Le processus étudié précédemment (2.16) possède en effet la représentation intégrale suivante :

$$x_{\alpha}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})} \int_0^t s^{\alpha - \frac{1}{2}} \eta(s) ds \quad (2.35)$$

et peut être vu comme une approximation markovienne du mouvement brownien fractionnaire. Nous réalisons l'identification entre les deux processus *via* l'exposant de persistance en identifiant  $\alpha = 1 - H$ .

La fonction d'échelle du corrélateur à deux temps du processus (2.34), normalisé par son écart-type,

$$g(x) = \frac{x^{2H} + 1 - (1 - x)^{2H}}{2x^H} \quad (2.36)$$

permet de calculer le moment d'ordre 2 de l'aimantation locale  $\langle M^2 \rangle_{\text{MBF}} = \int_0^1 g(x) dx$ , qui est très proche, au moins pour  $H > \frac{1}{2}$  de la valeur correspondante pour le processus (2.35). En particulier on a des comportements très semblables aux bords :

$$\begin{aligned} \langle M^2 \rangle &\underset{\theta \rightarrow 0}{\approx} 1 - 0.812\sqrt{\theta} \quad \text{MBF} \\ \langle M^2 \rangle &\underset{\theta \rightarrow 0}{\approx} 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\theta} \end{aligned}$$

avec  $\sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0.79788\dots$

## 2.5 Extensions possibles de processus de renouvellement

Nous avons vu dans ce chapitre que la structure en processus de renouvellement permet de mener à bien un certain nombre de calculs exacts, en particulier la détermination des lois limites universelles pour le temps d'occupation. Le seul paramètre important est l'exposant  $\theta$ , qui détermine trois grandes classes de comportements. Lorsque celui-ci devient inférieur à 1, le temps moyen entre deux zéros (ou retournements) devient infini et la loi limite de  $\frac{T^+}{t}$  commence à diverger aux bornes de son support. Bien que trop simples du point de vue de la physique, les processus de renouvellement permettent de mieux comprendre les phénomènes de persistance dans des modèles plus complexes comme par exemple le modèle d'Ising. On peut penser à ce propos à une généralisation simple des processus de renouvellement pour étudier un système dans lequel un spin peut prendre  $q$  états : tant que les temps entre deux changements d'état sont des variables aléatoires i.i.d. se trouvant dans le bassin d'attraction d'une loi large d'exposant  $\theta < 1$ , la même phénoménologie de loi en  $\cup$  est observée, mais la loi de  $\frac{T^+}{t}$  n'est plus symétrique par rapport à  $\frac{1}{2}$  si  $q > 2$  : le bord  $q \sim 0$  a simplement une amplitude  $q - 1$  fois plus importante que le bord  $x \sim 0$ .

Dans un système réaliste, les  $\tau_k$  ne sont pas des variables i.i.d. En règle générale, ils dépendent explicitement de  $k$  et sont corrélés entre eux<sup>6</sup>. Il serait utile de disposer d'un modèle incorporant des corrélations entre les  $\tau_k$  et pour lequel on continue à savoir faire un certain nombre de calculs exacts. L'étude du processus (2.16) peut être vue comme un pas dans ce sens. Cette étude montre combien peu il suffit de déformer le mouvement brownien pour que l'étude du temps d'occupation devienne difficile et que certaines distributions de probabilité ne soient plus calculables.

## 2.6 Article 1 : Statistique du temps d'occupation d'une classe de processus gaussiens markoviens

---

<sup>6</sup>De plus, leur obtention à partir de la donnée du processus (par exemple par la donnée de la fonction à deux points pour un processus gaussien) est en général un problème qui déjà est insoluble, puisque plus difficile que la "simple" détermination de l'exposant de persistance.

## Statistics of the occupation time for a class of Gaussian Markov processes

G De Smedt<sup>1</sup>, C Godrèche<sup>2</sup> and J M Luck<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Service de Physique Théorique, CEA Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France

<sup>2</sup> Service de Physique de l'État Condensé, CEA Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France

E-mail: desmedt@spht.saclay.cea.fr, godreche@spec.saclay.cea.fr and luck@spht.saclay.cea.fr

Received 4 October 2000

### Abstract

We revisit the work of Dhar and Majumdar (1999 *Phys. Rev. E* **59** 6413) on the limiting distribution of the temporal mean  $M_t = t^{-1} \int_0^t du \text{sign } y_u$ , for a Gaussian Markovian process  $y_t$  depending on a parameter  $\alpha$ , which can be interpreted as Brownian motion in the time scale  $t' = t^{2\alpha}$ . This quantity, the mean 'magnetization', is simply related to the occupation time of the process, that is the length of time spent on one side of the origin up to time  $t$ . Using the fact that the intervals between sign changes of the process form a renewal process on the time scale  $t'$ , we determine recursively the moments of the mean magnetization. We also find an integral equation for the distribution of  $M_t$ . This allows a local analysis of this distribution in the persistence region ( $M_t \rightarrow \pm 1$ ), as well as its asymptotic analysis in the regime where  $\alpha$  is large. Finally, we put the results thus found in perspective with those obtained by Dhar and Majumdar by another method, based on a formalism due to Kac.

PACS numbers: 0250E, 0250G, 0540

### 1. Introduction

Consider the stochastic process  $y_t$  defined by the Langevin equation

$$\frac{dy_t}{dt} = \sqrt{2\alpha} t^{\alpha-1/2} \eta_t \quad (1.1)$$

where  $\alpha$  is a positive parameter, and  $\eta_t$  is a Gaussian white noise such that  $\langle \eta_t \rangle = 0$  and  $\langle \eta_{t_1} \eta_{t_2} \rangle = \delta(t_2 - t_1)$ . In the new time scale

$$t' = t^{2\alpha}$$

this process satisfies the usual Langevin equation for one-dimensional Brownian motion,

$$\frac{dy_{t'}}{dt'} = \zeta_{t'}$$

where  $\zeta_{t'}$  is still a Gaussian white noise, with  $\langle \zeta_{t'} \rangle = 0$  and  $\langle \zeta_{t'} \zeta_{t'_2} \rangle = \delta(t'_2 - t'_1)$ . The process defined by (1.1) is a simple example of subordinated Brownian motion [1]. As for Brownian motion itself, it is Gaussian, Markovian and non-stationary.

This process appears in various situations of physical interest. For instance, it is described in [2] as a Markovian approximation to fractional Brownian motion. It also appears in [3] for the special case  $\alpha = \frac{1}{4}$ , as describing the time evolution of the total magnetization of a Glauber chain undergoing phase ordering.

Dhar and Majumdar [4] raised the question of computing the distribution of the occupation time of this process, that is the length of time spent by the process on one side of the origin up to time  $t$ ,

$$T_t^\pm = \int_0^t du \frac{1 \pm \sigma_u}{2} \quad (1.2)$$

where  $\sigma_t = \text{sign } y_t$ , or equivalently of

$$M_t = \frac{1}{t} \int_0^t du \sigma_u \quad (1.3)$$

where  $M_t$ , the temporal mean of  $\sigma_t$ , is hereafter referred to as the ‘mean magnetization’ by analogy with physical situations where  $\sigma_t$  represents a spin. The distribution of the occupation time bears information on the statistics of persistent events of the process beyond that contained in the persistence exponent [5–11]. This exponent governs the decay  $\sim t^{-\theta}$  of the survival probability of the process, that is the probability that the process did not cross the origin up to time  $t$ . Actually, for the present case, the determination of  $\theta$  is trivial, as shown by simple reasoning [4]: the probability for the Brownian process  $y_{t'}$  not to change sign up to time  $t'$  is known to decay as  $(t')^{-1/2}$ , hence for the original process it decays as  $t^{-\alpha}$ . This shows that  $\theta = \alpha$ .

When  $\alpha = \frac{1}{2}$ , the distribution of the fraction of time spent on one side of the origin by a random walker, or by Brownian motion, is given, in the long-time regime, by the arcsine law [1, 12]. In contrast, when  $\alpha \neq \frac{1}{2}$ , the explicit determination of this distribution, or equivalently of the distribution of  $M_t$ , seems very difficult. However, as shown in [4], in the long-time regime, the computation of the asymptotic moments  $\langle M_t^k \rangle$  can be done recursively, using two different methods, yielding the same results. The first method relies on a formalism due to Kac [13], while the second one originates from [5].

The method used in [5] can be applied to any (smooth) process for which the intervals of time between sign changes are independent, when taken on a logarithmic scale, with finite (i.e. non-zero) mean  $\bar{\ell}$ . It eventually leads to a recursive determination of the moments of  $M_t$ , as  $t \rightarrow \infty$  (see equation (3.9) below).

Dhar and Majumdar make the observation that, since relations (3.9) are independent of  $\bar{\ell}$ , they can be applied to the determination of the moments of  $M_t$  for the process (1.1). Comparing the resulting expressions of the moments thus obtained to those derived by their alternative method shows that this is indeed the case.

However, it is not obvious to understand why relations (3.9) hold for the (non-smooth) process (1.1), since the assumptions made in order to derive them do not hold for such a process. In particular, while, for the class of models with independent time intervals on a logarithmic scale, and finite  $\bar{\ell}$  (for which the method of [5] has been devised), it is natural to work in a logarithmic time scale, since the mean number of sign changes between 0 and  $t$  scales as  $\langle N_t \rangle \approx (\ln t)/\bar{\ell}$ , this is not so in the present case, since  $\bar{\ell}$  vanishes asymptotically, and the mean number of sign changes scales as  $\langle N_t \rangle \approx 2\pi^{-1/2} t^\alpha$  [11]. The validity of relations (3.9) for the process (1.1) therefore requires an explanation.

In this paper, we revisit and extend the study done in [4].

We first give a new derivation of the asymptotic expressions of the moments  $\langle M_t^k \rangle$ . We start from the same premise as in [5], and then follow another route—more adapted to the process under study—because of the difficulties encountered in applying the step-by-step method of [5] to the present case (sections 2-5). We then identify the symmetry properties of the distributions of the random variables that appear in the computations, and derive a functional integral equation, the solution of which yields the distribution of  $M_t$  (section 6). This approach is first checked on the case  $\alpha = \frac{1}{2}$  (section 7). It is then successively applied to the study of the local behaviour of this distribution in the persistence region, for general  $\alpha$  (section 8), and to the large- $\alpha$  regime (section 9).

We finally discuss some aspects of [4]. We explain why a formal application of the method of [5] to the present case is only heuristic, and give a new interpretation of the results obtained in [4] with the method of Kac, in light of the present work (section 10).

## 2. Observables of interest

Changes of sign of the process  $y_t$  (or zero crossings) occur at discrete instants of time  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ , once the process is suitably regularized at short times. We assume that the process starts at the origin, so that  $t_0 = 0$  is also a sign change. Let  $N_t$  be the number of sign changes which occurred between 0 and  $t$ , i.e.  $N_t$  is the random variable for the largest  $n$  for which  $t_n \leq t$ .

In the scale  $t'$ , where the process is (regularized) Brownian motion, sign changes occur at the instants of time<sup>3</sup>  $t'_n = (t_n)^{2\alpha}$ , and  $N_{t'} \equiv N_t$  is the random variable for the largest  $n$  for which  $t'_n \leq t'$ . The intervals of time between sign changes are denoted by  $\tau'_n = t'_n - t'_{n-1}$ . These are independent, identically distributed random variables, with a probability density function  $\rho(\tau')$ . For large values of  $\tau'$ ,  $\rho(\tau')$  decays proportionally to  $(\tau')^{-3/2}$ . This behaviour is independent of the regularizing procedure, while its prefactor just reflects the choice of time units. The density  $\rho(\tau')$  is therefore in the basin of attraction of a Lévy law of index  $\frac{1}{2}$ . We choose units so that we have in Laplace space

$$\mathcal{L}_{\tau'} \rho(\tau') = \hat{\rho}(s) = \left( e^{-s\tau'} \right)_{s \rightarrow 0} \approx 1 - \sqrt{s}. \quad (2.1)$$

The process formed by the independent intervals of time  $\tau'_1, \tau'_2, \dots$ , is known as a renewal process. In the original scale  $t$ , the intervals of time  $\tau_n = t_n - t_{n-1}$  are *not* independent.

We denote by  $t_N$  the instant of the last change of sign of the process before time  $t$ . This random variable depends implicitly on time  $t$  through  $N_t$ . In the scale  $t'$ , we have  $t'_N = (t_N)^{2\alpha}$ .

The occupation times  $T_t^+$  and  $T_t^-$  (see equation (1.2)) are the lengths of time spent by the sign process  $\sigma_t$  in the + and - states, respectively, up to time  $t$ , hence  $t = T_t^+ + T_t^-$ . They are simply related to the mean magnetization (1.3) by

$$tM_t = T_t^+ - T_t^- = 2T_t^+ - t = t - 2T_t^-.$$

Assume that  $y_t > 0$  at  $t = 0^+$ , i.e.  $\sigma_{t=0} = +1$ . Then

$$tM_t = \begin{cases} -(t - t_N) + (t_N - t_{N-1}) - \dots & \text{if } N_t = 2k + 1 \text{ (i.e. } \sigma_t = -1) \\ (t - t_N) - (t_N - t_{N-1}) + \dots & \text{if } N_t = 2k \text{ (i.e. } \sigma_t = +1). \end{cases}$$

The converse holds if  $\sigma_{t=0} = -1$ . Hence we have, with equal probabilities,

$$M_t = \pm(1 - 2\xi_t) \quad (2.2)$$

<sup>3</sup> Hereafter we denote by a prime any temporal variable in this scale.

where

$$\xi_t = \frac{1}{t}(t_N - t_{N-1} + \dots)$$

is the fraction of time spent in the state + if  $\sigma_t = -1$ , and conversely. The latter formula can be rewritten as

$$\xi_t = \frac{t_N}{t} X_N \quad (2.3)$$

where the  $X_N$  obey the recursion

$$X_N = 1 - \frac{t_{N-1}}{t_N} X_{N-1} \quad (2.4)$$

with  $X_1 = 1$ . Both random variables  $X_N$  and  $t_{N-1}/t_N$  depend implicitly on time  $t$  through  $N_t$ .

For instance, if  $\sigma_{t=0} = +1$  and  $N_t = 4$ , then

$$\begin{aligned} M_t &= \frac{1}{t}((t - t_4) - (t_4 - t_3) + (t_3 - t_2) - (t_2 - t_1) + t_1) \\ &= 1 - 2\xi_t \end{aligned}$$

where  $\xi_t = (t_4 - t_3 + t_2 - t_1)/t = t_4 X_4/t$ , with

$$X_4 = 1 - \frac{t_3}{t_4} \left( 1 - \frac{t_2}{t_3} \left( 1 - \frac{t_1}{t_2} \right) \right).$$

### 3. Methods of solution

Equations (2.2)–(2.4) contain in essence the solution to the problem posed, namely the determination of the limiting distribution of the mean magnetization  $M_t$  for  $t \rightarrow \infty$ . Unfortunately, no explicit solution can be attained in general.

However, from (2.2)–(2.4), one can obtain recursively the moments of  $M_t$ , in the long-time limit. This can be done either along the lines of [5], as done in [4], or by the method of this paper. In this section, we explain the difficulty encountered when applying the method of [5] to the process (1.1), in order to justify the more lengthy path we have adopted for the derivation of the moments. We shall return to the comparison between the two methods in section 10.

#### 3.1. General framework

Assume that, in the long-time regime, the dimensionless random variables  $t_N/t$ ,  $t_{N-1}/t_N$ ,  $X_N$ ,  $\xi_t$ , and  $M_t$  possess a limiting joint distribution. Define

$$\begin{aligned} H &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t_N}{t} & F &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t_{N-1}}{t_N} \\ X &= \lim_{t \rightarrow \infty} X_N & \xi &= \lim_{t \rightarrow \infty} \xi_t & M &= \lim_{t \rightarrow \infty} M_t. \end{aligned}$$

Then the equations to be solved are:

$$X = 1 - FX \quad (3.1)$$

$$\xi = HX \quad (3.2)$$

$$M = \pm(1 - 2\xi). \quad (3.3)$$

These equalities hold in distribution, and the random variables entering them are not independent *a priori*. Equation (3.1) is to be understood as the fixed-point equation

corresponding to the recursion (2.4), while (3.2) and (3.3) correspond to (2.3) and (2.2), respectively.

Assume that the distribution of the random variable  $F$  is given, and that  $F$  is independent of  $X$ . Even so, solving (3.1) is difficult in general [14–17]. However, obtaining the moments of  $X$  recursively is easier. If, furthermore,  $H$  and  $X$  are independent and the moments of  $H$  are known, then (3.2) and (3.3) determine the moments of  $M$ .

### 3.2. The diffusion equation: a reminder

Such a situation arises precisely in the example treated in [5]: the process  $y_t$  is the diffusing field at a fixed point of space, evolving from random initial conditions, and the so-called independent-interval approximation is used [18, 19]. In the long-time regime, the process is stationary in the logarithmic time scale  $T = \ln t$ . Consequently, the autocorrelation function of the sign process,  $A(|\Delta T|) = \langle \sigma_T \sigma_{T+\Delta T} \rangle$ , only depends on the difference of logarithmic times [18, 19].

Consider the intervals of time  $\ell_N$  between successive sign changes of the process in the logarithmic time scale,  $\ell_N = T_N - T_{N-1}$ , or

$$e^{-\ell_N} = \frac{t_{N-1}}{t_N}. \quad (3.4)$$

The independent-interval approximation consists in considering the intervals  $\ell_N$  as independent, and thus defining a renewal process. The distribution of the random variable  $\ell_N$  can then be derived, in Laplace space, from knowledge of the correlation function  $A(|\Delta T|)$ . This distribution is found to be independent of time, because the process is stationary in logarithmic time. Its average,  $\langle \ell_N \rangle = \bar{\ell}$ , is some time-independent positive number. Explicitly,

$$\hat{f}_{\ell_N}(s) = \langle e^{-s\ell_N} \rangle = \langle F^s \rangle = \frac{1 - \bar{\ell}g(s)}{1 + \bar{\ell}g(s)} \quad (3.5)$$

with

$$g(s) = \frac{1}{2}s(1 - s\hat{A}(s)) \quad (3.6)$$

where  $\hat{A}(s)$  is the Laplace transform of  $A(T)$ . In particular, the moments

$$f_k = \langle F^k \rangle = \left\langle \left( \frac{t_{N-1}}{t_N} \right)^k \right\rangle = \langle e^{-k\ell_N} \rangle = \hat{f}_{\ell_N}(k) \quad (3.7)$$

are independent of time. Thus from (3.1) the moments of  $X$  are determined recursively in terms of the  $f_k$  (see (A.18)).

In the long-time regime, the distribution of the backward recurrence time of the process in the logarithmic scale,  $\lambda = T - T_N$ , is also independent of time. This logarithmic recurrence time is related to the random variable  $H$  by

$$e^{-\lambda} = \frac{t_N}{t} = H.$$

Its distribution in Laplace space reads

$$\hat{f}_\lambda(s) = \langle e^{-s\lambda} \rangle = \langle H^s \rangle = \frac{2g(s)}{s(1 + \bar{\ell}g(s))}. \quad (3.8)$$

The random variables  $X$  and  $H$  (or  $\lambda$ ) are independent. Hence (3.2) and (3.3) determine the moments of  $M$ . A remarkable fact is that the moments thus obtained, which are functions of

the  $f_k$  and of  $\bar{\ell}$ , become independent of  $\bar{\ell}$  when the  $f_k$  are expressed in terms of the  $\hat{A}(k) \equiv \hat{A}_k$ , using equations (3.5)–(3.7). Thus [5]

$$\begin{aligned} \langle M^2 \rangle &= \hat{A}_1 \\ \langle M^4 \rangle &= 1 - \frac{(1 - 3\hat{A}_1 + 4\hat{A}_2)(1 - 3\hat{A}_3)}{1 - 2\hat{A}_2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

and so on.

More generally, the method used in [5] can be applied to any process for which the intervals of time between sign changes are independent, when taken on a logarithmic scale. It eventually leads to a recursive determination of the moments of  $M$ , resulting in (3.9).

### 3.3. The case of the process (1.1)

The situation for the process (1.1) is more difficult because, in the limit  $t \rightarrow \infty$ ,  $t_{N-1}/t_N \rightarrow F = 1$ . Hence (3.1) no longer determines  $X$ , and furthermore  $\langle \ell_N \rangle \rightarrow 0$ . Now, for the class of models with independent time intervals  $\ell_N$  on a logarithmic scale, and finite (i.e. non-zero)  $\langle \ell_N \rangle = \bar{\ell}$ , for which the method of [5], sketched above, has been devised, the mean number of sign changes between 0 and  $t$  scales as  $\langle N_t \rangle \approx (\ln t)/\bar{\ell}$ . So, in contrast, in the present case there is no obvious reason to work with this logarithmic time scale, since  $\langle \ell_N \rangle$  vanishes asymptotically, and the mean number of sign changes scales as  $\langle N_t \rangle \approx 2\pi^{-1/2}t^\alpha$  [11].

On the other hand, if time is kept finite, then the time intervals  $\ell_N$  are not independent and the process (1.1) is not stationary, again precluding the application of the method of [5].

A way out of this is to formally apply this method to the process (1.1), without paying attention to the difficulties mentioned above, and taking advantage of the fact that the moments  $\langle M^k \rangle$ , given by (3.9), are independent of  $\bar{\ell}$ , and therefore (hopefully) insensitive to the fact that  $\langle \ell_N \rangle \rightarrow 0$ . This approach, which is the one followed by Dhar and Majumdar [4], is, however, only heuristic, as discussed further in section 10.

Our approach relies instead on the fact that the time intervals  $\tau'_n$  between two sign changes of the process (1.1) form a renewal process (the  $\tau'_n$  are independent, identically distributed random variables with density  $\rho(\tau')$ , given by (2.1) for large  $\tau'$ ). This is a fundamental property of the process (1.1), and, in particular, of Brownian motion if  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

This property allows us to determine the limiting distribution  $f_H$  of  $H$  when  $t \rightarrow \infty$ , and the moments  $f_{k,t}$  of the random variable  $t_{N-1}/t_N$ , which are now time dependent. We also find the explicit time-dependent expression of  $\langle \ell_N \rangle$ . Using the original equation (2.4), instead of (3.1), and equations (3.2) and (3.3), we eventually recover the expressions (3.9) of the  $\langle M^k \rangle$ , thus extending their range of applicability.

We then establish an integral equation for  $f_X$ , and study its consequences.

## 4. Distribution of $t_N/t$

Using the independence of the  $\tau'_1, \tau'_2, \dots$ , we first determine the distribution of the random variable  $t'_N$ , from which we then deduce that of  $t_N$ . The method used below is borrowed from [11], where a thorough study of the statistics of the occupation time of renewal processes can be found.

We denote by  $f'_{t'_N, N}$  the joint probability density of the random variables  $t'_N$  and  $N_t$ . It reads

$$\begin{aligned} f'_{t'_N, N}(t'; y, n) &= \frac{d}{dy} \mathcal{P}(t'_N < y, N_t = n) \\ &= \langle \delta(y - t'_N) I(t'_n < t' < t'_{n+1}) \rangle \end{aligned}$$

where  $I(t'_n < t' < t'_{n+1}) = 1$  if the event inside the parentheses occurs, and 0 if not. The brackets denote the average over  $\tau'_1, \tau'_2, \dots$ . Summing over  $n$  gives the distribution of  $t'_N$ ,

$$f_{t'_N}(t'; y) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{t'_N, N}(t'; y, n) = \langle \delta(y - t'_N) \rangle.$$

In Laplace space, where  $s$  is conjugate to  $t'$  and  $u$  to  $y$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{t', y} f_{t'_N, N}(t'; y, n) &= \hat{f}_{t'_N, N}(s; u, n) = \left\langle e^{-ut'_n} \int_{t'_n}^{t'_{n+1}} dt' e^{-st'} \right\rangle \\ &= \left\langle e^{-ut'_n} e^{-st'_n} \frac{1 - e^{-s\tau'_{n+1}}}{s} \right\rangle \\ &= \hat{\rho}(s + u)^n \frac{1 - \hat{\rho}(s)}{s} \quad (n \geq 0). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Note that setting  $u = 0$  in (4.1) gives the distribution of  $N_{t'}$ . We finally obtain

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{t', y} f_{t'_N}(t'; y) &= \mathcal{L}_{t'} \langle e^{-ut'_N} \rangle = \hat{f}_{t'_N}(s; u) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}_{t'_N, N}(s; u, n) = \frac{1}{1 - \hat{\rho}(s + u)} \frac{1 - \hat{\rho}(s)}{s}. \end{aligned}$$

In the long-time regime, i.e. for  $s$  and  $u$  simultaneously small, we obtain the scaling form

$$\hat{f}_{t'_N}(s; u) \approx \frac{1}{\sqrt{s(s + u)}}$$

which yields

$$f_{t'_N}(t'; y) \underset{t' \rightarrow \infty}{\approx} \frac{1}{\pi \sqrt{y(t' - y)}}.$$

Consequently, the random variable  $H' = \lim_{t' \rightarrow \infty} t'^{-1} t'_N$  possesses the limiting distribution

$$f_{H'}(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}} \tag{4.2}$$

which is the arcsine law on  $[0, 1]$ .

Using the equality  $t_N/t = (t'_N/t')^{1/2\alpha}$ , this last result yields immediately the distribution of

$$H = \lim_{t \rightarrow \infty} t_N/t = (H')^{1/2\alpha}$$

which reads

$$f_H(x) = \frac{2\alpha x^{\alpha-1}}{\pi \sqrt{1-x^{2\alpha}}} = \frac{2\alpha}{\pi x \sqrt{x^{-2\alpha} - 1}}. \tag{4.3}$$

This is the main result of this section. Let us define

$$h(s, \alpha) = \langle H^s \rangle = \frac{1}{\pi} B\left(\frac{s}{2\alpha} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2\alpha} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2\alpha} + 1\right)} \tag{4.4}$$

where  $B(a, b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$  is the beta function. For integer values of  $s$ , equation (4.4) gives the moments of  $f_H$ , denoted by

$$h_k^{(\alpha)} = h(k, \alpha) = \langle H^k \rangle.$$

In the particular case  $\alpha = \frac{1}{2}$ , corresponding to Brownian motion, the distribution of  $H \equiv H'$  is the arcsine law (4.2), with moments

$$h_k^{(1/2)} = \frac{1}{\pi} B\left(k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} = \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2}. \quad (4.5)$$

## 5. Determination of the moments

In order to obtain recursion relations for the moments of the random variable  $X$ , we proceed in two steps. We first compute the moments of  $t'_{N-1}/t'_N$ , from which we deduce those of  $t_{N-1}/t_N$ . The recursion relations for the  $\langle X^k \rangle$  then emerge from (2.4). Equations (3.2) and (3.3) finally determine the moments of  $M$ .

### 5.1. Moments of $t_{N-1}/t_N$

We first determine the probability density function of the joint variables  $t'_{N-1}$  and  $t'_N$ . In Laplace space, we have

$$\begin{aligned} \hat{f}_{t'_{N-1}, t'_N, N}(s; u, v, n) &= \left\langle e^{-ut'_{N-1}} e^{-vt'_N} \int_{t'_n}^{t'_{n+1}} dt' e^{-st'} \right\rangle \\ &= \begin{cases} \hat{\rho}(s+u+v)^{n-1} \hat{\rho}(s+v) \frac{1-\hat{\rho}(s)}{s} & (n \geq 1) \\ \frac{1-\hat{\rho}(s)}{s} & (n = 0). \end{cases} \end{aligned}$$

Summing over  $n$  gives

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{t'} \left( e^{-ut'_{N-1}} e^{-vt'_N} \right) &= \hat{f}_{t'_{N-1}, t'_N}(s; u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}_{t'_{N-1}, t'_N, N}(s; u, v, n) \\ &= \frac{1-\hat{\rho}(s)}{s} \left( 1 + \frac{\hat{\rho}(s+v)}{1-\hat{\rho}(s+u+v)} \right) \end{aligned} \quad (5.1)$$

so that, in particular,  $\hat{f}_{t'_{N-1}, t'_N}(s; u=0, v=0) = 1/s$ .

The first moment of the random variable  $t'_{N-1}/t'_N$  is obtained by considering

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{t'} \left\langle \frac{t'_{N-1}}{t'_N} \right\rangle &= \int_0^{\infty} dv \left( -\frac{d}{du} \right)_{u=0} \mathcal{L}'_{t'} \left\langle e^{-ut'_{N-1}} e^{-vt'_N} \right\rangle \\ &= \frac{\hat{\rho}(s)}{s} + \frac{1-\hat{\rho}(s)}{s} \ln(1-\hat{\rho}(s)) \\ &\underset{s \rightarrow 0}{\approx} \frac{1}{s} + \frac{\ln s}{2\sqrt{s}} \end{aligned}$$

which leads to

$$\left\langle \frac{t'_{N-1}}{t'_N} \right\rangle_{t' \rightarrow \infty} \approx 1 - \frac{\ln t'}{2\sqrt{\pi t'}} \quad (5.2)$$

omitting the finite parts of the logarithms.

This computation generalizes to higher-order moments, using the asymptotic form (2.1) in (5.1). We have

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{t'} \left\langle \left( \frac{t'_{N-1}}{t'_N} \right)^k \right\rangle &= \left( \int_0^\infty dv \right)^k \left( -\frac{d}{du} \right)_{u=0}^k \mathcal{L}'_{t'} \left\langle e^{-ut'_{N-1}} e^{-vt'_N} \right\rangle \\ &\approx_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} + kh_k^{(1/2)} \frac{\ln s}{\sqrt{s}} \end{aligned}$$

which leads to

$$\left\langle \left( \frac{t'_{N-1}}{t'_N} \right)^k \right\rangle_{t' \rightarrow \infty} \approx 1 - kh_k^{(1/2)} \frac{\ln t'}{\sqrt{\pi t'}} \quad (5.3)$$

where  $h_k^{(1/2)}$  is given by equation (4.5). In particular, since  $h_1^{(1/2)} = \frac{1}{2}$ , equation (5.2) is recovered.

The result (5.3) can be extended to non-integer values of  $k$ . We thus have (see (3.4))

$$\langle \ell'_N \rangle = - \left\langle \ln \frac{t'_{N-1}}{t'_N} \right\rangle = \lim_{k \rightarrow 0} \left\langle \frac{1 - (t'_{N-1}/t'_N)^k}{k} \right\rangle \approx_{t' \rightarrow \infty} \frac{\ln t'}{\sqrt{\pi t'}}$$

as  $\lim_{k \rightarrow 0} h_k^{(1/2)} = 1$ . Equation (5.3) can thus be rewritten as

$$\left\langle \left( \frac{t'_{N-1}}{t'_N} \right)^k \right\rangle_{t' \rightarrow \infty} \approx 1 - kh_k^{(1/2)} \langle \ell'_N \rangle. \quad (5.4)$$

As announced above, when  $t \rightarrow \infty$ , the random variable  $t'_{N-1}/t'_N$  converges to 1, in law.

The moments  $f_{k,t}$  of  $t_{N-1}/t_N$  are obtained from (5.4) as

$$f_{k,t} = \left\langle \left( \frac{t_{N-1}}{t_N} \right)^k \right\rangle = \left\langle \left( \frac{t'_{N-1}}{t'_N} \right)^{k/2\alpha} \right\rangle_{t' \rightarrow \infty} \approx 1 - \frac{k}{2\alpha} h_k^{(\alpha)} \langle \ell'_N \rangle$$

because  $h(k/2\alpha, \frac{1}{2}) = h(k, \alpha) \equiv h_k^{(\alpha)}$ . On the other hand,

$$\bar{\ell}_t = \langle \ell_N \rangle = - \left\langle \ln \frac{t_{N-1}}{t_N} \right\rangle = \frac{1}{2\alpha} \langle \ell'_N \rangle \approx_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t}{\sqrt{\pi} t^\alpha}$$

hence finally

$$f_{k,t} \underset{t \rightarrow \infty}{\approx} 1 - kh_k^{(\alpha)} \bar{\ell}_t. \quad (5.5)$$

### 5.2. Moments of $X$

From the recursion relation (2.4), we have

$$\langle X_N^k \rangle = \left\langle \left( 1 - \frac{t_{N-1}}{t_N} X_{N-1} \right)^k \right\rangle. \quad (5.6)$$

In the long-time regime, there is an asymptotic decoupling of the variables  $X_{N-1}$  and  $t_{N-1}/t_N$ , so that it is legitimate to take  $X_N \rightarrow X$ , while keeping the leading time dependence of  $f_{k,t}$ , given by (5.5). This procedure can be justified along the lines of [11]. Consider first the simple situation  $\alpha = \frac{1}{2}$ . The difference between unity and  $t_{N-1}/t_N$ , which gives rise to the result (5.5), is proportional to the interval  $\tau_N = t_N - t_{N-1}$ . This quantity has been shown in [11] to be, asymptotically for large  $t$ , independent of  $t_N$ , and distributed according to the *a priori* law  $\rho(\tau)$ . A similar decoupling takes place asymptotically for generic  $\alpha$ .

Denoting the moments  $\langle X^k \rangle$  by  $x_k$ , we obtain

$$x_k = \mathcal{B}(f_{k,t} x_k) \quad (5.7)$$

with  $x_0 = f_{0,t} = 1$ , and where we have introduced the notation  $\mathcal{B}$  for the linear binomial operator

$$\mathcal{B}(x_k) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j x_j. \quad (5.8)$$

As shown in the appendix, equation (5.7) implies the following recursion relations, according to the parity of  $k$ :

$$x_k(1 + f_{k,t}) = \mathcal{B}(x_k(1 + f_{k,t})) \quad (k \text{ odd}) \quad (5.9)$$

$$x_k(1 - f_{k,t}) = -\mathcal{B}(x_k(1 - f_{k,t})) \quad (k \text{ even}). \quad (5.10)$$

Using the expression (5.5) of  $f_{k,t}$ , we obtain, in the limit  $t \rightarrow \infty$ , where  $\bar{\ell}_t \rightarrow 0$ ,

$$x_k = \mathcal{B}(x_k) \quad (k \text{ odd}) \quad (5.11)$$

$$kh_k^{(\alpha)} x_k = -\mathcal{B}(kh_k^{(\alpha)} x_k) \quad (k \text{ even}). \quad (5.12)$$

These relations, which can be rewritten as

$$x_k = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} (-1)^j x_j \quad (k \text{ odd}) \quad (5.13)$$

$$x_k = -\frac{1}{2kh_k^{(\alpha)}} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} (-1)^j j h_j^{(\alpha)} x_j \quad (k \text{ even}) \quad (5.14)$$

determine the stationary values of the  $x_k$  recursively. We thus obtain

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = \frac{h_1^{(\alpha)}}{4h_2^{(\alpha)}} \quad x_3 = -\frac{1}{4} + \frac{3h_1^{(\alpha)}}{8h_2^{(\alpha)}}$$

$$x_4 = -\frac{h_1^{(\alpha)} + 3h_3^{(\alpha)}}{8h_4^{(\alpha)}} + \frac{9h_1^{(\alpha)}h_3^{(\alpha)}}{16h_2^{(\alpha)}h_4^{(\alpha)}} \dots$$

### 5.3. Moments of $M$

For reasons similar to those exposed below equation (5.6), the random variables  $H$  and  $X$  (defined in the limit  $t \rightarrow \infty$ ) are independent. Thus, by (3.2) we have

$$\langle \xi^k \rangle = h_k^{(\alpha)} x_k \quad (5.15)$$

which, together with equation (3.1), leads to a determination of the even moments of the mean magnetization  $M$  in terms of the  $x_k$ :

$$\langle M^k \rangle = \langle (1 - 2\xi)^k \rangle = \mathcal{B}(2^k h_k^{(\alpha)} x_k) \quad (k \text{ even}). \quad (5.16)$$

Thus, finally we obtain

$$\begin{aligned} \langle M^2 \rangle &= 1 - h_1^{(\alpha)} \\ \langle M^4 \rangle &= 1 + 2h_3^{(\alpha)} - \frac{3h_1^{(\alpha)}h_3^{(\alpha)}}{h_2^{(\alpha)}} \\ \langle M^6 \rangle &= 1 - 5h_1^{(\alpha)} - 10h_3^{(\alpha)} - 16h_5^{(\alpha)} + \frac{h_1^{(\alpha)}(15h_3^{(\alpha)} + 20h_5^{(\alpha)})}{h_2^{(\alpha)}} \\ &\quad + \frac{(10h_1^{(\alpha)} + 30h_3^{(\alpha)})h_5^{(\alpha)}}{h_4^{(\alpha)}} - \frac{45h_1^{(\alpha)}h_3^{(\alpha)}h_5^{(\alpha)}}{h_2^{(\alpha)}h_4^{(\alpha)}} \end{aligned} \tag{5.17}$$

and so on.

For instance, if  $\alpha = \frac{1}{2}$ , corresponding to Brownian motion, the successive even moments of  $M$  are equal to  $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{5}{16}, \frac{35}{128}, \dots$ , i.e.

$$\langle M^{2j} \rangle = \frac{(2j)!}{2^{2j}(j!)^2} = h_j^{(1/2)}$$

which are the even moments of the arcsine law on  $[-1, 1]$  (see (7.2) below).

### 6. An integral equation for the determination of $f_M$

The recursion relation (5.11) expresses a symmetry property of the distribution  $f_X$ :

$$f_X(x) = f_X(1 - x) \tag{6.1}$$

(see the appendix). This is also obvious from (3.1), since formally  $F = 1$  in the present case.

The recursion relation (5.12), which can be rewritten as

$$k \langle \xi^k \rangle = -\mathcal{B}(k \langle \xi^k \rangle) \quad (k \text{ even}) \tag{6.2}$$

expresses a symmetry property of the distribution  $f_\xi$ , as we now show. First, it is easy to prove that

$$\mathcal{B}(k \langle \xi^k \rangle) = -k \langle \xi(1 - \xi)^{k-1} \rangle.$$

Therefore, equation (6.2) yields

$$\langle \xi^k \rangle = \langle \xi(1 - \xi)^{k-1} \rangle \quad (k \text{ even})$$

which is equivalent to the following symmetry property:

$$\xi f_\xi(\xi) = (1 - \xi) f_\xi(1 - \xi) \tag{6.3}$$

or

$$\phi(\xi) = \phi(1 - \xi) \tag{6.4}$$

introducing the function

$$\phi(\xi) = \xi f_\xi(\xi). \tag{6.5}$$

On the other hand, as a consequence of (3.2) and of the independence of  $H$  and  $X$ , the distribution  $f_\xi$  is equal to the convolution of  $f_H$ , given by (4.3), and of  $f_X$ :

$$f_\xi(\xi) = \int_\xi^1 \frac{dx}{x} f_X(x) f_H\left(\frac{\xi}{x}\right) = \frac{2\alpha}{\pi} \xi^{\alpha-1} \int_\xi^1 dx \frac{f_X(x)}{\sqrt{x^{2\alpha} - \xi^{2\alpha}}} \tag{6.6}$$

hence

$$\phi(\xi) = \frac{2\alpha}{\pi} \xi^\alpha \int_\xi^1 dx \frac{f_X(x)}{\sqrt{x^{2\alpha} - \xi^{2\alpha}}}. \quad (6.7)$$

In summary, two conditions determine the distribution  $f_X(x)$ : it obeys the symmetry property (6.1), and the function  $\phi(\xi)$ , given by (6.7), obeys the symmetry property (6.4).

Once the probability density  $f_X$  is known,  $f_\xi$  is given by (6.6). Finally, equations (3.3), (6.5) and (6.4) imply

$$f_M(m) = \frac{1}{1-m^2} \phi\left(\frac{1 \pm m}{2}\right). \quad (6.8)$$

We explore the consequences of this general set-up in the next three sections.

### 7. The case $\alpha = \frac{1}{2}$

This situation corresponds to Brownian motion. It is easy to check that the uniform distribution on  $[0, 1]$ ,

$$f_X(x) = 1 \quad (7.1)$$

solves the problem. Indeed, equations (6.6) and (6.7) yield

$$\phi(\xi) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\xi(1-\xi)} \quad f_\xi(\xi) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}}$$

which satisfy (6.3) and (6.4). Finally, by (6.8), the limiting distribution of  $M_t$  is obtained:

$$f_M(m) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-m^2}} \quad (7.2)$$

which is the arcsine law on  $[-1, 1]$ .

All of these results can be derived by more direct means, using the fact that in the present case the time intervals  $\tau_1, \tau_2, \dots$  between sign changes define a renewal process [11].

### 8. Local analysis in the persistence region

The persistence region is defined by the condition  $M \rightarrow \pm 1$ , i.e.  $\xi \rightarrow 0$  or  $\xi \rightarrow 1$ .

Considering (6.6) for  $\xi \rightarrow 0$  yields at once

$$f_\xi(\xi) \underset{\xi \rightarrow 0}{\approx} \frac{2\alpha}{\pi} \langle X^{-\alpha} \rangle \xi^{\alpha-1} \quad (8.1)$$

provided the average  $\langle X^{-\alpha} \rangle$  is convergent (see the comment below equation (9.12)). Consequently, using (6.5) and (6.8), we obtain

$$f_M(m) \underset{m \rightarrow \pm 1}{\approx} C(1-m^2)^{\alpha-1} \quad (8.2)$$

with

$$C = \frac{2^{1-2\alpha} \alpha}{\pi} \langle X^{-\alpha} \rangle. \quad (8.3)$$

The behaviour of the distribution  $f_X(x)$  as  $x \rightarrow 0$  can be determined as well. Assuming  $f_X(x) \approx Ax^\gamma$  ( $x \rightarrow 0$ ), and using (6.1), we obtain

$$\phi(\xi) \underset{\xi \rightarrow 1}{\approx} A \frac{\sqrt{2\alpha}}{\pi} \int_0^{\bar{\xi}} d\bar{x} \frac{\bar{x}^\gamma}{\sqrt{\bar{\xi} - \bar{x}}} = A \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma + \frac{3}{2})} \bar{\xi}^{\gamma+1/2}$$

with  $\bar{\xi} = 1 - \xi$ ,  $\bar{x} = 1 - x$ . An identification with (8.1), using again (6.5) and (6.3), yields the values of  $\gamma$  and  $A$ , hence

$$f_X(x) \underset{x \rightarrow 0}{\approx} \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})} (X^{-\alpha}) x^{\alpha-1/2}. \tag{8.4}$$

Let us compare the singular behaviour (8.2) of  $f_M$  in the persistence region with the beta law on  $[-1, 1]$  of the same index:

$$f_M^{\text{beta}}(m) = C^{\text{beta}} (1 - m^2)^{\alpha-1} \tag{8.5}$$

where

$$C^{\text{beta}} = \frac{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha)}. \tag{8.6}$$

A measure of the difference between the two distributions is provided by the enhancement factor

$$E = \frac{C}{C^{\text{beta}}}. \tag{8.7}$$

For  $\alpha = \frac{1}{2}$ , the distribution  $f_M(m)$  is the arcsine law (7.2), which is a beta law. Equation (7.1) yields  $\langle X^{-1/2} \rangle = 2$ , so that  $C = C^{\text{beta}} = 1/\pi$ , and  $E = 1$ . The estimate (8.4) also agrees with (7.1).

For  $\alpha \neq \frac{1}{2}$ , the distribution  $f_M(m)$  is no longer a beta law, so that the enhancement factor  $E$  is non-trivial.

**9. Asymptotic analysis for large values of  $\alpha$**

For large values of  $\alpha$ , the distributions  $f_X(x)$ ,  $f_\xi(\xi)$  and  $f_M(m)$  are expected to share, at least qualitatively, some resemblance with the beta law (8.5). This observation suggests setting

$$f_X(x) \underset{\alpha \gg 1}{\sim} \exp(-\alpha S(x)) \tag{9.1}$$

with

$$S(x) = S(1 - x) \tag{9.2}$$

as a consequence of (6.1). The function  $S(x)$  is expected to be regular, and positive, with a minimum at  $S(\frac{1}{2}) = 0$ , just as its counterpart

$$S^{\text{beta}}(x) = -\ln(4x(1 - x)) \tag{9.3}$$

associated with the beta law (8.5).

With these hypotheses,  $\phi(\xi)$ , given by (6.7), can be estimated as follows. Setting  $x = \xi + \varepsilon$  with  $\varepsilon \ll 1$ , we have  $f_X(x) \approx e^{-\alpha S(\xi) - \alpha \varepsilon S'(\xi)}$  and  $x^{2\alpha} - \xi^{2\alpha} \approx \xi^{2\alpha} (e^{2\alpha\varepsilon/\xi} - 1)$ . The change of integration variable from  $x$  to  $z = 2\alpha\varepsilon/\xi$  yields

$$\phi(\xi) \underset{\alpha \gg 1}{\approx} P(\xi) f_X(\xi) \tag{9.4}$$

with

$$P(\xi) = \frac{\xi}{\pi} \int_0^\infty dz \frac{e^{-\xi S'(\xi)z/2}}{\sqrt{e^z - 1}}.$$

Setting  $y = e^{-z}$ , and returning to the variable  $x$ , we finally obtain

$$P(x) = \frac{x}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}xS'(x)\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}xS'(x)\right)} \quad (9.5)$$

provided the arguments of both Gamma functions are positive (this will indeed be the case). Note that (9.5) no longer involves the parameter  $\alpha$ .

Omitting again pre-exponential factors, equation (9.4) implies

$$f_M(m) \underset{\alpha \gg 1}{\sim} \exp\left(-\alpha S\left(\frac{1 \pm m}{2}\right)\right). \quad (9.6)$$

In the regime of large  $\alpha$ , the three distributions of interest are therefore given by a single function  $S(x)$ . The problem then amounts to finding  $S(x)$ , with the symmetry property (9.2), and such that the corresponding function  $P(x)$ , given by (9.5), obeys

$$P(x) = P(1 - x) \quad (9.7)$$

as a consequence of (6.4). The function  $S(x)$  is entirely determined by the above conditions. This property is more evident in the present regime than in the general case of section 6, because (9.5) is explicit, while (6.7) is an integral relationship.

Let us first investigate the behaviour of  $S(x)$  for  $x \rightarrow \frac{1}{2}$ , i.e.  $m \rightarrow 0$ , corresponding to the centre of the distributions. Inserting the expansion

$$S(x) = c_2 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + c_4 \left(x - \frac{1}{2}\right)^4 + \dots$$

in (9.5), (9.7), and expanding the Gamma functions accordingly, we obtain

$$c_2 = \frac{2}{\ln 2} \quad c_4 = \frac{4}{3 \ln 2} + \frac{\pi^2}{3(\ln 2)^3} - \frac{\zeta(3)}{(\ln 2)^4} \dots \quad (9.8)$$

and

$$P(x) = \frac{1}{2} + \left(\frac{\pi^2}{12(\ln 2)^2} - 3\right) \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \dots$$

To leading order, keeping only the quadratic term in  $S(x)$ , we find that the bulk of the distributions are given asymptotically by narrow Gaussians for  $\alpha$  large, namely

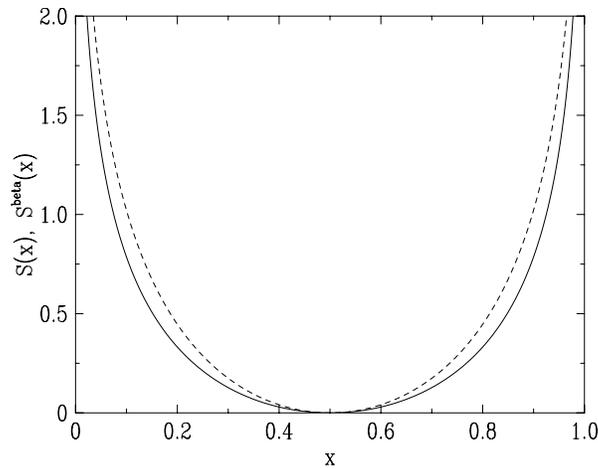
$$f_X(x) \underset{\alpha \gg 1}{\sim} f_\xi(x) \underset{\alpha \gg 1}{\sim} \exp\left(-\frac{2\alpha}{\ln 2} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right) \quad f_M(m) \underset{\alpha \gg 1}{\sim} \exp\left(-\frac{\alpha}{2 \ln 2} m^2\right).$$

The latter result is in agreement with the expressions (5.17) of the moments of  $M$ , which behave as  $\langle M^2 \rangle \approx (\ln 2)/\alpha$ ,  $\langle M^4 \rangle \approx 3(\ln 2)^2/\alpha^2$ , and so on, for  $\alpha \gg 1$ .

It is also worthwhile noticing that the beta law (8.5) and (9.3) also becomes a narrow Gaussian for  $\alpha$  large. We have  $S^{\text{beta}}(x) \approx 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$  and  $f_M^{\text{beta}}(m) \approx e^{-\alpha m^2}$ , so that the beta law misses a finite factor  $2 \ln 2 \approx 1.3862$  in the variance of the mean magnetization.

The expression (9.8) of the subleading amplitude  $c_4$ , involving Riemann's zeta function, shows, however, that the function  $S(x)$  is altogether non-trivial.

Let us now turn to the behaviour of  $S(x)$  deep in the tails of the distributions, i.e. for  $x \rightarrow 0$  or  $1$ , or  $m \rightarrow \pm 1$ , corresponding to the persistence region. The general result (8.2)



**Figure 1.** Plot of the function  $S(x)$  characterizing the limiting distributions of the variables  $X$  and  $\xi$  and of the mean magnetization  $M$  in the large- $\alpha$  region, against  $x$  (full curve), compared with the function  $S^{\text{beta}}(x)$  associated with the beta law (broken curve).

shows that  $S(x) \approx -\ln x$  has a logarithmic divergence as  $x \rightarrow 0$ . Consequently, the Gamma function in the numerator of expression (9.5) for  $P(x)$  becomes singular, as its argument goes to zero. Furthermore, in the same expression for  $P(1-x)$ , the arguments of both Gamma functions tend to infinity. A careful treatment of (9.5) yields the more complete expansions as  $x \rightarrow 0$ ,

$$S(x) = -\ln x + S_0 + 2\sqrt{\frac{2x}{\pi}} + \dots \quad P(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}} + \dots \quad (9.9)$$

while the constant  $S_0$  cannot be predicted by this local analysis. The square-root behaviour of  $P(x)$  and its prefactor agree with the general results (8.1) and (8.4).

We have determined numerically the solution of (9.5) and (9.7) over the whole range  $0 < x < \frac{1}{2}$ , thus obtaining accurate values of  $S(x)$ . This approach yields, in particular,  $S_0 \approx -2.0410$ . Figure 1 shows a plot of the function  $S(x)$  thus obtained, compared with  $S^{\text{beta}}(x)$ .

As the amplitude  $C^{\text{beta}}$  of the beta law (8.5) remains of the order of unity, within exponential accuracy, the result (9.9) for  $S(x)$  implies that the amplitude  $C$  of the power law (8.2) in the persistence region, and the enhancement factor  $E$  defined in (8.7), blow up exponentially, as

$$C \underset{\alpha \gg 1}{\sim} E \underset{\alpha \gg 1}{\sim} \exp(G\alpha) \quad (9.10)$$

with

$$G = \lim_{x \rightarrow 0} (S^{\text{beta}}(x) - S(x)) = -S_0 - 2 \ln 2 \approx 0.6547. \quad (9.11)$$

In order to test the relevance of this large- $\alpha$  approach, we have evaluated  $E$  numerically for various values of the parameter  $\alpha$ , and compared the results with the exponential law (9.10) predicted for large  $\alpha$ . The computation of  $E$  can be done in (at least) two different ways.

The first method consists in directly evaluating the limit

$$E = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle M^{2n} \rangle}{\langle M^{2n} \rangle^{\text{beta}}}.$$

The moments of the beta law (8.5) read

$$\langle M^{2n} \rangle^{\text{beta}} = \frac{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2}) \Gamma(n + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(n + \alpha + \frac{1}{2})}$$

while the true moments  $\langle M^{2n} \rangle$  are determined from (5.13), (5.14) and (5.16), up to some maximal order, typically  $n_{\max} = 100\text{--}150$ , beyond which the numerical accuracy rapidly deteriorates, because the computation of  $\langle M^{2n} \rangle$  involves alternating sums.

The second method consists in combining (8.3) and (8.6), thus giving

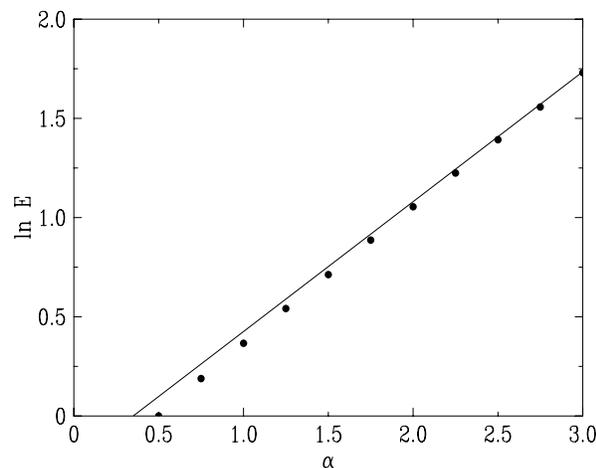
$$E = \frac{2^{1-2\alpha} \Gamma(\alpha + 1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + \frac{1}{2})} \langle X^{-\alpha} \rangle$$

and in evaluating  $\langle X^{-\alpha} \rangle$  as

$$\langle X^{-\alpha} \rangle = \langle (1 - X)^{-\alpha} \rangle = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n + \alpha)}{n!} x_n. \quad (9.12)$$

The behaviour (8.4) implies that the  $x_n$  decay as  $n^{-\alpha-1/2}$ , so that the term of order  $n$  in the above sum decays as  $n^{-3/2}$ . Hence this sum is convergent, and truncating it at some order  $n_{\max}$  brings a correction proportional to  $n_{\max}^{-1/2}$ . The  $x_n$  are again determined from (5.13) and (5.14). A linear extrapolation in  $n_{\max}^{-1/2}$  of the results of both schemes turns out to yield consistent results. We have, for instance,  $E \approx 1.443$  for  $\alpha = 1$ .

Figure 2 shows our numerical results for the enhancement factor  $E$ , for values of  $\alpha$  up to 3. The comparison with the exponential law (9.10) is convincing, in spite of the moderate values of  $\alpha$  used.



**Figure 2.** Logarithmic plot of the enhancement factor  $E$  in the persistence region, against  $\alpha$ , evaluated numerically as described in the text (symbols). The straight line has the theoretical slope  $G$  of (9.11).

**10. Revisiting the work of Dhar and Majumdar**

*10.1. Using the method of section 3.2*

Let us first show that the expressions (5.17) for the even moments of  $M$  are the same as those obtained by using (3.9), with the expression of  $\hat{A}(s)$  appropriate to the process (1.1), as done in [4].

The autocorrelation  $A(|\Delta T|) = \langle \sigma_T \sigma_{T+\Delta T} \rangle$  of the sign process  $\sigma_t$  in the logarithmic time scale  $T = \ln t$  reads  $A(T) = (2/\pi) \arcsin(e^{-\alpha|T|})$  [4], with the Laplace transform

$$\hat{A}(s) = \frac{1}{s} \left[ 1 - \frac{1}{\pi} B \left( \frac{s}{2\alpha} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right]. \tag{10.1}$$

We note that  $\hat{A}(s)$  is related to  $h(s, \alpha)$ , defined in (4.4), by

$$h(s, \alpha) = 1 - s\hat{A}(s) \tag{10.2}$$

where the right-hand side is equal to  $2g(s)/s$  by (3.6). Using this identity, it is easy to check that the moments (3.9) obtained by the method of section 3.2, with  $\hat{A}_k$  given by (10.1) for  $s = k$  integer, are identical to the moments (5.17) obtained by the method of this paper.

It is, however, not possible to identify the intermediate results of both methods, as can be seen by comparing, respectively, equation (5.5) to equations (3.7) and (3.5), and equation (4.4) to equation (3.8). This demonstrates the formal character of the application of the method of section 3.2 to the process (1.1). (See also the discussion in section 3.3.)

*10.2. Comments on the results obtained using Kac's formalism*

A first comment is that the recursion relations for the coefficients  $c_k$  appearing in equations (14) of [4] can be easily recognized to be identical to the recursion relations (5.13) and (5.14) for  $x_k$ , by noting the correspondences

$$c_k = \frac{2^k}{k! D_{-k/\alpha}(0)} x_k \tag{10.3}$$

$$\frac{D_{-k/\alpha+1}(0)}{D_{-k/\alpha}(0)} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha} \frac{kh_k^{(\alpha)}}{2}.$$

The second comment concerns the continuity conditions expressed in equations (13) of [4]. Using (10.3), these conditions yield, with the notation of this paper,

$$\langle e^{a(2X-1)} \rangle = \langle e^{a(1-2X)} \rangle$$

$$\langle \xi e^{a(2\xi-1)} \rangle = \langle \xi e^{a(1-2\xi)} \rangle.$$

These equations hold for  $a$  arbitrary, hence they are equivalent to (6.1) and (6.3), respectively.

**11. Summary and discussion**

In this paper we have revisited and extended the work of Dhar and Majumdar [4]. Besides providing a new recursive determination of the moments of the mean magnetization  $M$ , the present study leads to a functional integral equation for the distribution of the latter quantity. This framework allows a local analysis of this distribution, and of other relevant quantities, in the persistence region ( $M_t \rightarrow \pm 1$ ), as well as a detailed investigation of the regime where  $\alpha$  is large.

tel-00001795, version 1 - 8 Oct 2002

This paper casts new light on the status of the expressions (3.9) for the moments of  $M$ . The method recalled in section 3.2, which leads to these relations, can be applied to any smooth process for which the intervals of time  $\ell_N$  between sign changes are independent, on a logarithmic scale. For this class of processes  $\langle \ell_N \rangle = \bar{\ell}$  is finite (i.e. non-zero), and the mean number of sign changes between 0 and  $t$  scales as  $\langle N_t \rangle \approx (\ln t)/\bar{\ell}$ .

Relations (3.9) are also verified for the class of processes considered in this work. This was observed in [4] (by comparing the expressions thus found with those obtained by another method, based on a formalism due to Kac), and justified by the absence of  $\bar{\ell}$  in equations (3.9). Yet, as discussed in section 3.3, in the present case there is no obvious reason to work with a logarithmic time scale, since  $\langle \ell_N \rangle$  vanishes asymptotically, and the mean number of sign changes scales as  $\langle N_t \rangle \approx 2\pi^{-1/2}t^\alpha$  [11]. (See also the discussion in section 10.1.)

Most of the effort of this paper was to provide a new derivation of (3.9) for the class of processes (1.1). Our approach relies on the fact that the time intervals  $\tau'_n$  between two sign changes of the process (1.1) form a renewal process (the  $\tau'_n$  are independent, identically distributed random variables). The derivation proceeds in two steps. First, relations (5.17) for the  $\langle M^k \rangle$  are obtained; then, using (10.2), equations (5.17) yield (3.9). This extends the range of applicability of relations (3.9). Note that for diffusion (in the independent-interval approximation) (see section 3.2), relations (3.9) hold but neither (5.17) nor (10.2) do.

We conclude by making a few additional comments.

In passing, let us mention another equivalent formulation of (10.2), namely that the two-time autocorrelation of the sign process reads, with  $t < t'$ ,

$$C(t, t') = \int_0^{t/t'} dx f_H(x). \quad (11.1)$$

Another situation where (3.9), (5.17) and (10.2) or (11.1) hold is for the renewal processes considered in [11] (provided  $\theta < 1$ ), which are yet another deformation of Brownian motion.

Note that the first relation of (3.9),  $\langle M^2 \rangle = \hat{A}_1$ , holds whenever the two-time autocorrelation function is a scaling function of the ratio of the two times [5], while the first relation of (5.17),  $\langle M^2 \rangle = 1 - \langle H \rangle$ , does not hold in general. For instance, for the random acceleration problem, using results of [20], we find  $\langle M^2 \rangle = 3\sqrt{3}/\pi - 1 \approx 0.653\,986$  and  $1 - \langle H \rangle \approx 0.791\,335$ .

This work also underlines the importance of the random variables  $X$  and  $H$ . The distribution of the latter is known exactly in the present case. This quantity, which is a natural one to consider for Brownian motion [1], and more generally for renewal processes [11], also appears in the context of phase ordering [21].

As mentioned in the introduction, the process (1.1) has been proposed [2] as a Markovian approximation to fractional Brownian motion. Let us compare the expressions of  $\langle M^2 \rangle$  for these two processes. For the present model we have (see (5.17))

$$\langle M^2 \rangle = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2\alpha} + 1\right)} \quad (11.2)$$

while for fractional Brownian motion, with Hölder index  $0 < h < 1$ , we have

$$\langle M^2 \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^1 dx \arcsin \frac{x^{2h} + 1 - (1-x)^{2h}}{2x^h}. \quad (11.3)$$

The correspondence between the two processes is made by identifying their persistence exponents:  $\theta = \alpha = 1 - h$ . For  $\theta = \frac{1}{2}$ , we have  $\langle M^2 \rangle = \frac{1}{2}$  in both cases. For  $\theta = 1$ , (11.2) yields  $\langle M^2 \rangle = 1 - 2/\pi \approx 0.363\,380$ , while (11.3) yields  $\langle M^2 \rangle = \frac{1}{3}$ . For  $\theta \rightarrow 0$ , we

have  $\langle M^2 \rangle = 1 - c\sqrt{\theta}$ , with (11.2) yielding  $c = \sqrt{2/\pi} \approx 0.797\,885$ , and (11.3) yielding  $c \approx 0.812\,233$ . The distributions of the mean magnetization for the two processes are therefore expected to be rather similar (for  $0 < \theta < 1$ ).

Finally, let us comment on the changes in behaviour induced by letting the persistence exponent  $\alpha$  vary, and compare the present process with other ones in this respect. The distribution of  $M$  shows a change in shape as  $\alpha$  increases, the most probable value of the mean magnetization shifting from the edges to the centre [4]. More precisely, as shown in section 8, as long as  $\alpha < 1$ ,  $f_M(m)$  diverges at  $m \rightarrow \pm 1$ , while for  $\alpha > 1$  it vanishes at these points (see equation (8.2)). However, for any arbitrary value of  $\alpha$  the magnetization  $M$  remains distributed.

This behaviour is actually generic, whenever the two-time autocorrelation function of the process is asymptotically a function of the ratio of the two-time variables [5]. In particular, this is so for diffusion. In the independent-interval approximation the persistence exponent  $\theta(D) \approx 0.1454\sqrt{D}$  increases without bound when the dimension of space  $D$  is large [18, 19]. As originally noted in [5], as long as  $\theta < 1$  the density  $f_M(m)$  diverges at the edges, while it vanishes there if  $\theta > 1$ . This was also emphasized in [9], on the basis of scaling arguments, and was recently confirmed by direct numerical computations [22].

In contrast, there are other processes for which the change in behaviour at  $\theta = 1$  is more radical. For fractional Brownian motion,  $\theta = 1$  appears as a maximum persistence exponent. For the renewal processes considered in [11], the mean magnetization possesses a non-trivial asymptotic distribution only if  $\theta < 1$ .

**Appendix. Properties of the binomial operator  $\mathcal{B}$**

The aim of this appendix is to prove the following property, used in section 5.2. Assume that the sequence  $x_k$  satisfies

$$x_k = \mathcal{B}(f_k x_k) \tag{A.1}$$

with  $x_0 = f_0 = 1$ , and where  $\mathcal{B}(x_k) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j x_j$  (see (5.8)). Then

$$x_k(1 + f_k) = \mathcal{B}(x_k(1 + f_k)) \quad (k \text{ odd}) \tag{A.2}$$

$$x_k(1 - f_k) = -\mathcal{B}(x_k(1 - f_k)) \quad (k \text{ even}) \tag{A.3}$$

which are, respectively, equations (5.9) and (5.10) in the text.

*A.1. Basic properties*

In order to prove (A.2) and (A.3) we need the following auxiliary properties.

First,  $\mathcal{B}$  is its own inverse:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}^{-1}. \tag{A.4}$$

A combinatorial proof of this result can be found in [23]. An alternative proof is obtained by noting that the action of  $\mathcal{B}$  on exponential sequences  $x_k = y^k$  reads

$$\mathcal{B}(y^k) = (1 - y)^k. \tag{A.5}$$

This relation is invariant in the change of  $y$  to  $1 - y$ , hence (A.4) follows.

Then, we have the properties

$$x_k = \mathcal{B}(x_k) \quad \text{for } k \text{ even} \quad \text{implies} \quad x_k = \mathcal{B}(x_k) \quad \text{for all } k \quad (\text{A.6})$$

$$x_k = \mathcal{B}(x_k) \quad \text{for } k \text{ odd} \quad \text{implies} \quad x_k = \mathcal{B}(x_k) \quad \text{for all } k \quad (\text{A.7})$$

$$x_k = -\mathcal{B}(x_k) \quad \text{for } k \text{ even} \quad \text{implies} \quad x_k = -\mathcal{B}(x_k) \quad \text{for all } k \quad (\text{A.8})$$

$$x_k = -\mathcal{B}(x_k) \quad \text{for } k \text{ odd} \quad \text{implies} \quad x_k = -\mathcal{B}(x_k) \quad \text{for all } k. \quad (\text{A.9})$$

Before giving the proofs, let us make explicit the meaning of (A.6)–(A.9).

Let us take the example of (A.6). By hypothesis, the sequence  $x_k$  satisfies the condition  $x_k = \mathcal{B}(x_k)$  for  $k$  even, with  $x_0$  arbitrary, which is equivalent to saying that

$$\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} (-1)^j x_j = 0 \quad (k \text{ even}). \quad (\text{A.10})$$

This recursion determines  $x_k$  for  $k$  odd in terms of the  $x_\ell$  with  $\ell = 0, \dots, k-1$  even:

$$x_1 = \frac{1}{2}x_0 \quad x_3 = \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_0 \quad x_5 = \frac{5}{2}x_4 - \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_0 \dots$$

The property (A.6) states that  $x_k = \mathcal{B}(x_k)$  for  $k$  odd, or equivalently,

$$2x_k = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} (-1)^j x_j \quad (k \text{ odd})$$

which provides an infinite number of consistency relations amongst the  $x_k$  satisfying (A.10).

Similarly, taking the example of (A.8), by hypothesis we have  $x_k = -\mathcal{B}(x_k)$  for  $k$  even, with  $x_0 = 0$ , which is equivalent to

$$2x_k = -\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} (-1)^j x_j \quad (k \text{ even}). \quad (\text{A.11})$$

This recursion determines  $x_k$  for  $k$  even in terms of the  $x_\ell$  with  $\ell = 1, \dots, k-1$  odd:

$$x_2 = x_1 \quad x_4 = 2x_3 - x_1 \quad x_6 = 3x_5 - 5x_3 + 3x_1 \dots$$

The property (A.8) states that  $x_k = -\mathcal{B}(x_k)$  for  $k$  odd, or equivalently,

$$\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} (-1)^j x_j = 0 \quad (k \text{ odd})$$

which provides an infinite number of consistency relations amongst the  $x_k$  satisfying (A.11).

We now prove the properties (A.6)–(A.9). In order to do so, let us define, for a given sequence  $x_k$ , the Laurent series

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} \quad G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}(x_k) z^{-k}.$$

We assume that these series are convergent for  $|z|$  larger than some radius  $R$ . This happens, for example, if the  $x_k$  are bounded.

The functions  $F(z)$  and  $G(z)$  are related to each other by

$$F(z) = \frac{z}{z-1} G(1-z) \quad (\text{A.12})$$

$$G(z) = \frac{z}{z-1} F(1-z) \quad (\text{A.13})$$

as we now show. We have

$$x_k = \oint \frac{dy}{2\pi iy} y^k F(y)$$

hence, using (A.5),

$$B(x_k) = \oint \frac{dy}{2\pi iy} (1-y)^k F(y)$$

so that

$$G(z) = \oint \frac{dy}{2\pi iy} \frac{z}{y+z-1} F(y).$$

This integral is equal to the contribution of the pole at  $y = 1 - z$ , yielding (A.13), from which (A.12) follows. The symmetric form of the formulae (A.12) and (A.13) is due to the property (A.4).

**Proof of (A.6) and (A.7).** The hypothesis in (A.6) implies  $F(z) + F(-z) = G(z) + G(-z)$ , i.e.

$$\Phi(z) = -\Phi(-z) \tag{A.14}$$

with, using (A.13),

$$\Phi(z) = F(z) - G(z) = F(z) - \frac{z}{z-1} F(1-z).$$

Therefore,  $(z-1)\Phi(z) + z\Phi(1-z) = 0$ , which can be rewritten, using (A.14), as

$$\frac{\Phi(z)}{z} = \frac{\Phi(z-1)}{z-1}.$$

The function  $\Phi(z)/z$  is thus periodic, with unit period, and decaying at infinity, as we have  $\Phi(z)/z \approx (x_0 - 2x_1)/z^2$  *a priori*. We conclude that  $\Phi(z) = 0$  identically, that is  $F(z) = G(z)$ , implying the property (A.6).

For the case where the  $x_k = \langle X^k \rangle$  are the moments of a random variable  $X$ , with density  $f_X$  on  $[0, 1]$ , an alternative proof of (A.6) is as follows. The hypothesis in (A.6) expresses the property

$$\langle X^k \rangle = \langle (1-X)^k \rangle \quad (k \text{ even}).$$

As both random variables  $X$  and  $1-X$  are positive, this last condition is sufficient to imply  $f_X(x) = f_X(1-x)$ , hence  $\langle X^k \rangle = \langle (1-X)^k \rangle$  for all  $k$ , which proves (A.6).

The proof of the second property, (A.7), is very similar. The hypothesis in (A.7) implies

$$\frac{\Phi(z)}{z} = -\frac{\Phi(z-1)}{z-1}.$$

The function  $\Phi(z)/z$  is therefore periodic, with period two, and decaying at infinity, hence  $\Phi(z) = 0$  identically.  $\square$

**Proof of (A.8) and (A.9).** The hypothesis in (A.8) implies  $F(z) + F(-z) = -(G(z) + G(-z))$ , i.e.

$$\Psi(z) = -\Psi(-z) \tag{A.15}$$

with, using (A.13),

$$\Psi(z) = F(z) + G(z) = F(z) + \frac{z}{z-1} F(1-z).$$

Therefore,  $(z-1)\Psi(z) - z\Psi(1-z) = 0$ , which can be rewritten, using (A.15), as

$$\frac{\Psi(z)}{z} = -\frac{\Psi(z-1)}{z-1}.$$

The function  $\Psi(z)/z$  is thus again periodic, with period two, and decaying at infinity, hence identically zero. The proof of the fourth property, (A.9), is very similar.  $\square$

### A.2. Proofs of equations (A.2) and (A.3)

Equation (A.1) implies the relations

$$x_k(1+f_k) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} (-1)^j f_j x_j \quad (k \text{ odd}) \quad (\text{A.16})$$

$$x_k(1-f_k) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} (-1)^j f_j x_j \quad (k \text{ even}) \quad (\text{A.17})$$

which determines the  $x_k$  recursively. We have thus

$$x_1 = \frac{1}{1+f_1} \quad x_2 = \frac{1-f_1}{(1+f_1)(1-f_2)} \quad \dots \quad (\text{A.18})$$

Since the operator  $\mathcal{B}$  is its own inverse, (A.1) is equivalent to  $f_k x_k = \mathcal{B}(x_k)$ , which itself implies

$$x_k(1+f_k) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} (-1)^j x_j \quad (k \text{ odd}) \quad (\text{A.19})$$

$$x_k(f_k-1) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} (-1)^j x_j \quad (k \text{ even}). \quad (\text{A.20})$$

Comparing (A.16) and (A.19) shows that

$$\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} (-1)^j x_j (1-f_j) = 0 \quad (k \text{ odd})$$

hence, using the property (A.9),

$$x_k(1-f_k) = -\mathcal{B}(x_k(1-f_k)) \quad (k \text{ even})$$

which is equation (A.3). Similarly, comparing (A.17) and (A.20) shows that

$$\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} (-1)^j x_j (1+f_j) = 0 \quad (k \text{ even})$$

or, using the property (A.6),

$$x_k(1+f_k) = \mathcal{B}(x_k(1+f_k)) \quad (k \text{ odd})$$

which is equation (A.2).

**References**

- [1] Feller W 1968 *An Introduction to Probability Theory and its Applications* vols 1 and 2 (New York: Wiley)
- [2] Sebastian K L 1995 *J. Phys. A: Math. Gen.* **28** 4305 and references therein
- [3] Majumdar S N, Bray A J, Cornell S J and Sire C 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 3704
- [4] Dhar A and Majumdar S N 1999 *Phys. Rev. E* **59** 6413
- [5] Dornic I and Godrèche C 1998 *J. Phys. A: Math. Gen.* **31** 5413
- [6] Baldassarri A, Bouchaud J P, Dornic I and Godrèche C 1999 *Phys. Rev. E* **59** R20
- [7] Drouffe J M and Godrèche C 1998 *J. Phys. A: Math. Gen.* **31** 9801
- [8] Godrèche C 1999 *Self-Similar Systems* ed V B Priezzhev and V P Spiridonov (Dubna: Joint Institute for Nuclear Research)
- [9] Newman T J and Toroczkai Z 1998 *Phys. Rev. E* **58** R2685
- [10] Toroczkai Z, Newman T J and Das S Sarma 1999 *Phys. Rev. E* **60** R1115
- [11] Godrèche C and Luck J M 2000 *Preprint* cond-mat/0010428
- [12] Lévy P 1939 *Compos. Math.* **7** 283
- [13] Kac M 1949 *Trans. Am. Math. Soc.* **65** 1
- [14] Kesten H 1973 *Acta Math.* **131** 208
- [15] Kesten H, Kozlov M V and Spitzer F 1975 *Compos. Math.* **30** 145
- [16] Vervaat W 1979 *Adv. Appl. Probab.* **11** 50
- [17] de Calan C, Luck J M, Nieuwenhuizen Th M and Petritis D 1985 *J. Phys. A: Math. Gen.* **18** 501
- [18] Majumdar S N, Sire C, Bray A J and Cornell S J 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 2867
- [19] Derrida B, Hakim V and Zeitak R 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 2871
- [20] De Smedt G, Godrèche C and Luck J M 2000 *Preprint* cond-mat/0009001 (*Europhys. Lett.* at press)
- [21] Frachebourg L, Krapivsky P L and Redner S 1997 *Phys. Rev. E* **55** 6684
- [22] Newman T J and Loinaz W 2000 *Preprint* cond-mat/0009365
- [23] Graham R L, Knuth D E and Patashnik O 1994 *Concrete Mathematics* (Reading, MA: Addison-Wesley)



# CHAPITRE 3

## Accélération aléatoire

---

### 3.1 Introduction

On peut définir le mouvement brownien comme représentant la position d'un marcheur dont la vitesse est aléatoire, ce qui s'écrit sous la forme de l'équation de Langevin :

$$\frac{dx}{dt} = \eta_t \quad (3.1)$$

où  $\eta_t$  est un bruit blanc gaussien  $\langle \eta_t \rangle = 0$ ,  $\langle \eta_{t_1} \eta_{t_2} \rangle = \delta(t_2 - t_1)$ .

Cette écriture se prête bien à généralisation. Ce chapitre est consacré à l'étude des propriétés de persistance du processus représentant la position d'un marcheur dont l'accélération est aléatoire, ou, de manière équivalente, à la position d'un marcheur soumis à une force aléatoire dynamique (non gelée). Ceci peut s'écrire sous la forme d'une équation de type Langevin<sup>1</sup> :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \eta_t \quad (3.2)$$

où  $\eta_t$  est toujours un bruit blanc gaussien. Ce processus, *l'accélération aléatoire*, est donc l'intégrale du mouvement brownien, c'est à dire l'aire sous la courbe du mouvement brownien. Ce processus apparaît dans un article de Kolmogorov en 1934 [99], mais il faut attendre le papier de Mc Kean [94] pour commencer à obtenir des résultats analytiques sur la statistique des passages par l'origine. En physique, ce processus a réapparu dans les années 90 dans des problèmes liés à l'équation de Burgers avec des conditions initiales aléatoires [166, 183], et de manière totalement indépendante dans l'étude de certains polymères : il a été remarqué que la fonction de partition d'un polymère semi-flexible vérifie une équation qui se trouve être l'équation de Fokker-Planck du processus (3.2) étudié dans ce chapitre [23].

Plus récemment certains auteurs ont étudié ce processus pour l'étude de systèmes granulaires, dans le cadre de travaux sur les transitions d'effondrement par collisions inélastiques [134, 33] ou sur des modèles d'avalanche par décrochage [161]. Pour notre part nous nous sommes initialement intéressés aux propriétés de persistance de ce processus en tant que généralisation du mouvement brownien : c'est un degré de plus dans la complexité, tout en restant "attaquable" analytiquement. L'étude, dans un

---

<sup>1</sup>Il s'agit en fait de l'équation de Langevin originale pour le mouvement brownien sans terme de friction.

cadre plus mathématique, de diverses propriétés de ce processus vu comme primitive du mouvement brownien fait l'objet depuis plusieurs années des travaux d'un probabiliste français [104, 106, 107].

### 3.1.1 Le modèle

Nous prendrons comme définition du modèle l'équation de type Langevin (3.2) avec dans l'étude qui suit comme condition initiale  $x_0 = 0$  et  $\dot{x}_0 = v_0$ .

Notre approche [170] s'inscrit dans la lignée de celle de Mc Kean, Goldman, Lachal [94, 80, 107]. Elle est largement différente de celle de Burkhardt [23, 24], qui travaille à partir d'une formulation en termes d'équations de Fokker-Planck. Dans une certaine mesure les idées sous-jacentes, qui exploitent largement l'indépendance des excursions du mouvement brownien entre elles et la structure de type renouvellement qui en découle, ainsi que des propriétés d'invariance d'échelle du mouvement brownien, sont plus proches de l'approche de Sinai [165], qui a étudié la version discrète du modèle.

### 3.1.2 Résultats généraux

Le processus défini par (3.2) est un processus gaussien, de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation (pour  $t_1 < t_2$ ) :

$$C(t_1, t_2) = \langle x_{t_1} x_{t_2} \rangle = \frac{1}{2} t_1^2 t_2 - \frac{1}{6} t_1^3 \quad (3.3)$$

Le processus (3.2) n'est pas markovien :  $x_{t+dt}$  dépend et de  $x_t$  et de  $x_{t-dt}$ . On peut néanmoins remédier à ceci en étudiant le processus bidimensionnel  $(x_t, v_t)$ , dont l'évolution temporelle est donnée par :

$$\frac{dv_t}{dt} = \eta_t, \quad \frac{dx_t}{dt} = v_t \quad (3.4)$$

qui est markovien, puisque pour connaître  $(x_{t+dt}, v_{t+dt})$  il suffit de connaître ce qui se passe au temps  $t$  (le bruit blanc étant sans mémoire). On a donc :

$$v_t = v_0 + B_t, \quad x_t = x_0 + v_0 t + \int_0^t du B_u \quad (3.5)$$

où  $B_t$  est l'intégrale du bruit blanc  $\eta_t$ , donc un mouvement brownien.

Le processus bidimensionnel est gaussien markovien, de probabilité de transition :

$$p(t; x, v; x_0, v_0) = \frac{\sqrt{3}}{\pi t^2} \exp \left( -\frac{6}{t^3} (x - x_0 - v_0 t)^2 + \frac{6}{t^2} (x - x_0 - v_0 t)(v - v_0) - \frac{2}{t} (v - v_0)^2 \right) \quad (3.6)$$

### 3.1.3 Identités de récurrence

L'intérêt majeur de passer à l'étude des variables aléatoires jointes  $(x_t, v_t)$  est que lorsque l'on arrive, à un instant  $t_1$ , en 0 (i.e.  $x_{t_1} = 0$ ), le processus  $(x_t, v_t)_{t>t_1}$  est

distribué comme le processus initial, à un changement de conditions initiales près. C'est à dire que, d'une certaine manière, le processus *recommence de nouveau* [94] :

$$(x_t, v_t)_{\{t \geq t_1; x_0, v_0\}} \stackrel{d}{=} (x_t, v_t)_{\{t \geq 0, x_0 = x_{t_1} = 0, v_0 = v_{t_1}\}} \quad (3.7)$$

où  $\stackrel{d}{=}$  signifie l'égalité en distribution.

En utilisant les propriétés d'invariance d'échelle du mouvement brownien  $B_t$  on obtient aisément des relations de récurrence entre les couples de variables aléatoires  $(t_n, |v_{t_n}|)$ , où  $t_n$  désigne comme dans les chapitres précédents le temps du nième retour à l'origine du processus  $x_t$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} t_1(v_0) &= \min(t > 0, x_t = 0 \mid x(t=0) = 0, v(t=0) = v_0) \\ t_1(v_0) &= \min(t > 0, v_0 t + \int_0^t B_s ds = 0) \\ &= v_0^2 \min(t > 0, \pm t + \int_0^t B_s ds = 0) \\ &\stackrel{d}{=} v_0^2 t_1(v_0 = 1) \end{aligned}$$

Il s'ensuit, en utilisant la propriété de renouvellement (3.7) que

$$t_n \stackrel{d}{=} v_{t_{n-1}}^2 t_1(v_0 = 1) \quad (3.8)$$

De la même manière on a :

$$v_{t_1(v_0)} \stackrel{d}{=} v_0 v_{t_1(v_0=1)} \quad (3.9)$$

On a donc, en notant  $a = v_{t_1(v_0=1)}$  le temps de premier passage par 0 pour des conditions initiales  $(0, 1)$  et  $b = |v_{t_1(v_0=1)}|$  la valeur absolue de la vitesse à cet instant, les équations de récurrence suivantes :

$$|v_{t_n}| = |v_0| b_1 b_2 \dots b_n \quad (3.10)$$

$$t_n - t_{n-1} = v_0^2 (b_1 b_2 \dots b_{n-1})^2 a_n \quad (3.11)$$

$$(3.12)$$

où les couples  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots$  sont indépendants et de même loi jointe que  $(a, b)$  (voir [94] et ci-dessous pour l'obtention de ce résultat) :

$$f_{a,b}(a, b) = \frac{b}{\pi \sqrt{3} a^2} e^{-\frac{2}{a}(1-b+b^2)} \operatorname{erf} \left( \sqrt{\frac{6b}{a}} \right) \quad (3.13)$$

On peut donc, pour le processus (3.2), écrire explicitement les variables  $\tau_n = t_n - t_{n-1}$  séparant deux zéros successifs du processus. Cela va nous permettre de déterminer exactement la statistique des zéros de (3.2). Il reste cependant à déterminer préalablement la distribution du temps de premier retour à l'origine, c'est à dire la probabilité de persistance.

### 3.2 Probabilité de persistance

L'exposant de persistance pour l'accélération aléatoire se trouve déjà, de manière implicite, dans les travaux de Mc Kean [94] et de ses successeurs [186, 80]. Plus près de nous il a été calculé par Sinai [165] dans le cas discret et par Burkhardt [23] dans le cas continu. Pour ce processus on a  $\theta = \frac{1}{4}$ .

Ce résultat peut se retrouver par un argument d'échelle assez simple [75] : en un temps  $t$  un marcheur brownien revient  $n_t = \sqrt{t}$  fois à l'origine. Or l'intégrale du mouvement brownien au temps  $t$  peut être vu comme une marche aléatoire symétrique de  $n_t$  pas : sa probabilité de survie se comporte en  $n_t^{-\frac{1}{2}}$ , donc en  $t^{-\frac{1}{4}}$ . C'est essentiellement cet argument (non rigoureux mais qui fonctionne ici parce que les excursions du mouvement brownien sont indépendantes) qui est mis en forme rigoureusement par Sinai [165] (voir aussi [162]).

Pour le processus continu, on peut calculer toute la distribution du temps de premier retour à l'origine (qui est la loi marginale de (3.13) en intégrant sur la variable  $b$ ). Le calcul est assez fastidieux [94]. Nous en traçons uniquement les grandes lignes. Lors du calcul de la loi jointe (3.13) on écrit une équation intégrale exprimant que la probabilité d'être en 0 au temps  $t$  peut s'écrire comme une intégrale de la probabilité d'être passé en 0 pour la première fois au temps  $t_1$  et d'y être revenu en un temps  $t - t_1$ . Dans le cas qui nous intéresse il faut aussi tenir compte des vitesses, et l'intégrale sur le temps de premier passage s'accompagne d'une intégrale sur la vitesse à cet instant.

On a (on suppose  $v_0 > 0$  sans perte de généralité et  $x_0 = 0$ ) :

$$p(t; 0, v; 0, v_0) = \int_0^{+\infty} dw \int_0^t d\tau p(t - \tau; 0, v; 0, -w) f_{(t_1, |v_{t_1})}[t_1 = \tau, |v_{t_1}| = w | 0, v_0] \quad (3.14)$$

Les probabilités de présence s'exprime aisément (voir (3.6)). La transformée de Laplace de  $p(t; 0, v; 0, v_0)$  s'écrit ([10];  $K_\gamma$  désigne la fonction de Bessel modifiée) :

$$\hat{p}(s; 0, v; 0, v_0) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \sqrt{s} \frac{K_{-1} \left( 2\sqrt{2s(v^2 + vv_0 + v_0^2)} \right)}{\sqrt{2(v^2 + vv_0 + v_0^2)}} \quad (3.15)$$

On fait donc une transformée de Laplace de l'équation (3.14) par rapport à  $t$  pour enlever l'intégrale temporelle. On obtient une équation intégrale qui se résoud en multipliant à droite et à gauche par  $K_\gamma(v\sqrt{8s})$  et en intégrant sur  $v$ . Après simplification l'équation intégrale qui subsiste s'inverse à l'aide de la transformée de Kontorovitch-Lebedev [10] et il vient finalement :

$$\hat{f}_{(t_1, |v_{t_1})}[s, w | 0, v_0] = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} d\gamma \frac{K_{i\gamma}(v_0\sqrt{8s})}{2v_0 \cosh(\frac{\pi\gamma}{3})} K_{i\gamma}(w\sqrt{8s}) \gamma \sinh(\pi\gamma) \quad (3.16)$$

qui peut se simplifier pour donner (pour  $v_0 = 1$ ) la loi (3.13). En insérant la représentation intégrale de la fonction de Bessel :

$$K_{i\gamma}(z) = \int_0^{+\infty} du \cos(\gamma u) e^{-z \cosh u}$$

dans (3.16) on trouve après quelques calculs :

$$\hat{f}_{t_1}(s|0, v_0) = \frac{1}{\pi v_0 \sqrt{8s}} \int_0^{+\infty} d\gamma \gamma \sinh\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right) \frac{K_{i\gamma}(v_0 \sqrt{8s})}{2 \cosh \frac{\pi\gamma}{3}} \quad (3.17)$$

On peut ensuite déduire la probabilité de persistance de la densité de probabilité du temps de premier passage par l'origine :

$$p_0(t|0, v_0) = 1 - \int_0^t f_{t_1}(u|0, v_0) du \quad (3.18)$$

Soit, dans l'espace de Laplace :  $\hat{p}_0(s) = \frac{1}{s}(1 - \hat{f}_{t_1}(s|0, v_0))$ . La transformée (3.17) ne s'inverse pas, mais on peut cependant en faire une étude asymptotique pour  $s \rightarrow 0$  afin d'en déduire le comportement aux temps longs de la probabilité de persistance. Nous ne faisons pas le calcul ici : il est plus économique de le faire dans un cas plus général.

### 3.3 Statistique des passages par zéro

Nous étudions ici la distribution des zéros du processus. L'approche utilisée est celle de la *survie partielle* que nous avons mentionnée dans l'introduction (p. 15) : chaque fois que le processus passe par 0 il est "tué" avec probabilité  $1 - p$  et il "survit" avec probabilité  $p$ . Utilisant les résultats ci-dessus (3.10, 3.17), nous déterminons la probabilité que le processus ait survécu jusqu'au temps  $t$ . Celle-ci est simplement donnée par la fonction génératrice :

$$G(t, p) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n p_n(t) \quad (3.19)$$

où nous avons noté  $p_n(t)$  la probabilité que le processus passe exactement  $n$  fois par 0 entre les instants 0 et  $t$ . Cette quantité décroît algébriquement pour  $t \rightarrow +\infty$  :

$$G(t, p) \underset{t \rightarrow \infty}{\approx} A(p) t^{-\theta(p)}, \quad (3.20)$$

Cette décroissance algébrique définit l'exposant de persistance généralisé  $\theta(p)$ , qui redonne l'exposant de persistance usuel pour  $p = 0$ . Notons que en posant  $p = \exp(z)$ , la fonction

$$\ln G(t, p) = \ln \langle \exp(z N_t) \rangle \quad (3.21)$$

est la fonction génératrice, pour la variable  $z$ , des cumulants du nombre  $N_t$  de passages par 0 entre les instants 0 et  $t$ .

Il nous faut préalablement évaluer (3.19). On a :

$$p_n(t) = \mathbb{P}[t_n \leq t < t_{n+1}] \quad (3.22)$$

Soit en transformée de Laplace :

$$\hat{p}_n(s) = \frac{\hat{f}_{t_n}(s) - \hat{f}_{t_{n+1}}(s)}{s} \quad (3.23)$$

Or la distribution  $\hat{f}_{t_n}(s)$  se calcule simplement à l'aide des identités de récurrence et de la loi jointe de  $(a, b)$  [107] :

$$\hat{f}_{t_n}(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\gamma \frac{\gamma \sinh \pi\gamma/2}{(2 \cosh \pi\gamma/3)^n} \frac{K_{i\gamma}(v_0\sqrt{8s})}{v_0\sqrt{8s}} \quad (3.24)$$

La somme sur  $n \geq 0$  dans (3.19) est alors une série géométrique. On obtient :

$$\hat{G}(s, p) = \frac{1}{s} \left( 1 - (1-p) \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\gamma \frac{\gamma \sinh \pi\gamma/2}{2 \cosh \pi\gamma/3 - p} \frac{K_{i\gamma}(v_0\sqrt{8s})}{v_0\sqrt{8s}} \right). \quad (3.25)$$

L'étude asymptotique pour  $s \rightarrow 0$  s'effectue comme suit. On utilise la représentation intégrale :

$$K_{i\gamma}(x) \sinh \frac{\pi\gamma}{2} = \int_0^\infty du \sin(\gamma u) \sin(x \sinh u) \quad (x > 0), \quad (3.26)$$

et l'intégrale :

$$\int_0^\infty d\gamma \frac{\gamma \sin(\gamma u)}{2 \cosh(\pi\gamma/3) - p} = -\frac{3}{\sqrt{4-p^2}} \frac{d \sinh(2(1-\theta(p))u)}{\sinh 3u}, \quad (3.27)$$

avec

$$\theta(p) = \frac{1}{4} - \frac{3}{2\pi} \arcsin \frac{p}{2} \quad (3.28)$$

L'étude asymptotique mène alors à [170] :

$$G(t, p) \underset{t \rightarrow \infty}{\approx} \frac{3}{2\sqrt{\pi} \theta(p) \Gamma(\theta(p) + \frac{1}{2})} \frac{1-p}{\sqrt{4-p^2}} \left( \frac{v_0^2}{2t} \right)^{\theta(p)}. \quad (3.29)$$

Pour  $p = 0$  on trouve la probabilité de persistance usuelle :

$$G(t, 0) = p_0(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\approx} \frac{3}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{3}{4})} \left( \frac{v_0^2}{2t} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (3.30)$$

On retrouve l'exposant  $\theta = \frac{1}{4}$  et le préfacteur exact, qui dépend de la condition initiale ( $x_0 = 0, v_0$ ) ( $v_0$  fixe l'échelle de temps).

On déduit aussi de l'expression (3.29) les premiers cumulants de  $N_t$  :

$$\begin{aligned} \langle N_t \rangle &\underset{t \rightarrow \infty}{\approx} \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \left( \ln \frac{t}{2v_0^2} - \gamma_E \right) + \frac{1}{6}, \\ \langle N_t^2 \rangle - \langle N_t \rangle^2 &\underset{t \rightarrow \infty}{\approx} \frac{2\sqrt{3}}{3\pi} \left( \ln \frac{t}{2v_0^2} - \gamma_E \right) + \frac{11}{72}, \end{aligned}$$

où  $\gamma_E$  désigne la constante d'Euler. On peut voir assez aisément que tous les cumulants sont proportionnels, dans la limites des temps longs, à  $\ln t$ . On retrouve ici, pour  $\langle N_t \rangle$ , la densité de zéros du processus regardé sur une échelle de temps logarithmique.

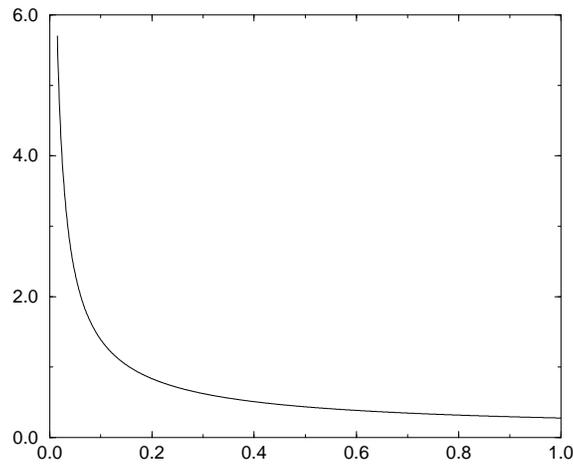


FIG. 3.1 – Densité de probabilité de la variable  $\frac{t_N}{t}$  pour l'accélération aléatoire. On retrouve la forme attendue pour un processus gaussien auto-similaire régulier.

### 3.3.1 Problème d'effondrement inélastique

Alors que nous avons étudié ce modèle pour ses propriétés de persistance, dans le but de trouver des résultats exacts pour un processus plus complexe que le mouvement brownien, il nous est apparu que ces résultats sur la statistique des passages à l'origine du processus permettait de résoudre un modèle proposé [33] pour expliquer certaines propriétés de *clustering* de milieux granulaires [88, 134]. Dans ce modèle on considère des particules soumises à une force aléatoire fluctuante et qui subissent entre elles des collisions inélastiques de coefficient de restitution  $r$ . Dans le modèle le plus simple on considère deux telles particules dans un espace unidimensionnel : en travaillant dans le repère du centre de masse, on peut donc se ramener à étudier une seule particule. Cette particule est soumise à une force aléatoire, que l'on prendra être un bruit blanc gaussien, et on modélise l'influence de l'autre particule en plaçant à l'origine des coordonnées un mur sur lequel la particule subit des collisions inélastiques, de coefficient de restitution  $r$ . Il apparaît alors qu'il existe une valeur critique  $r_c$  du paramètre  $r$  en dessous de laquelle on observe une transition d'effondrement, c'est à dire que la particule va se coller au mur sans pouvoir s'en échapper et ce bien qu'on lui fournisse continuellement de l'énergie *via* la force aléatoire. Pour les détails techniques, nous renvoyons à la publication que nous avons consacrée à ce problème (et qui reprend une partie des résultats de la section précédente), reproduite ci-après.

## 3.4 Temps de dernier passage

En exploitant la structure markovienne du processus bidimensionnel (3.4), Lachal [105] a obtenu par une méthode généralisant la méthode des images la loi des temps résiduels *forward* et *backward*, dont on peut en particulier tirer une expression explicite pour la loi de  $\frac{t_N}{t}$  [170]. Celle-ci a bien le comportement attendu : elle diverge en  $x \sim 0$  avec un exposant  $\theta - 1 = -\frac{3}{4}$  et prend la valeur finie  $\rho = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} = 0.275664$  en  $x = 1$  (figure 3.1).

### 3.5 Une approche par les équations de Fokker-Planck

Il n'est pas possible de discuter des propriétés de persistance du problème de l'accélération aléatoire sans mentionner le travail de Burkhardt [23, 25, 24] sur le même problème par une méthode radicalement différente consistant à étudier l'équation de Fokker-Planck associée au processus bidimensionnel (3.5). Il a été amené à s'intéresser à ce problème par l'étude des polymères semi-flexibles : il se trouve en effet que la fonction de partition d'un polymère semi-flexible confiné selon un axe (polymère semi-flexible dirigé) vérifie une équation d'évolution qui n'est autre que l'équation de Fokker-Planck pour la densité de probabilité de (3.5) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{P}[x, v; x_0, v_0; t] = \frac{\partial^2}{\partial v^2} \mathbb{P}[x, v; x_0, v_0; t] - v \frac{\partial}{\partial x} \mathbb{P}[x, v; x_0, v_0; t] \quad (3.31)$$

avec les conditions initiales  $\mathbb{P}[x, v; x_0, v_0; 0] = \delta(x - x_0)\delta(v - v_0)$ .

La solution dans le cas libre (sans mur absorbant) est essentiellement le propagateur (3.6). Burkhardt parvient ensuite à obtenir une solution avec les conditions absorbantes, dont il tire une expression pour la probabilité de persistance. Il réussit finalement à en extraire l'exposant  $\theta$ . Suite à des raffinements de la méthode il a en outre obtenu les exposants  $\theta(p)$  de survie partielle et  $\Phi(r)$  du problème de collision inélastique. La méthode raffinée est essentiellement une application subtile de la méthode présentée au chapitre 1 p. 9. La probabilité de survie vérifie l'équation *backward*, et les modèles étudiés (survie partielle, collision inélastique) se traduisent, dans ce langage d'équations différentielles, par des conditions aux limites qui sont invariantes, ainsi que l'équation elle-même, dans la transformation d'échelle suivante :

$$x \rightarrow \lambda^3 x, v \rightarrow \lambda v, t \rightarrow \lambda^2 t$$

En écrivant la décroissance algébrique aux temps longs de la probabilité de survie on obtient une équation différentielle connue (équation de Kummer) dans laquelle l'exposant apparaît comme un coefficient. Sa valeur est ensuite déterminée en comparant la solution de l'équation aux conditions aux bords. Il retrouve ainsi quasiment sans calcul les différents exposants de survie du problème d'accélération aléatoire.

### 3.6 Temps d'occupation

Nous avons vu que pour ce processus il est possible d'aller très loin dans les résultats exacts concernant la probabilité de persistance, et plus généralement concernant les probabilités de survie avec des conditions aux limites plus générales. Il est même possible d'obtenir des résultats sur la distribution des temps entre deux zéros consécutifs, ou encore sur le temps de dernier passage en zéro. Il est donc naturel de se poser ensuite la question du temps d'occupation.

La première remarque consiste à voir que nous n'avons pas affaire à un processus de renouvellement : dans la terminologie du chapitre 2 les  $\tau_n$ , c'est à dire les temps entre deux zéros consécutifs, ne sont pas des variables aléatoires i.i.d., puisque  $\tau_n$  dépend ici explicitement de l'indice  $n$ . Néanmoins la structure du problème n'est pas si éloignée,

et il sera intéressant de comparer la loi de l'aimantation locale du processus à une loi de Lamperti d'indice  $\frac{1}{4}$ . Cette comparaison sera en fait numérique, puisque nous ne sommes pas parvenus à obtenir analytiquement la loi de l'aimantation. Nous présentons d'abord notre tentative de calcul exact utilisant la méthode de Kac - tentative infructueuse jusqu'à présent, sinon pour souligner la difficulté du problème. Nous présentons ensuite quelques calculs numériques basés sur des approximations du processus réel par des processus plus simples.

### 3.6.1 Tentative analytique

Nous avons essayé de déterminer la distribution de  $S_t = tM_t$  par la méthode de Kac, c'est à dire en partant de l'équation différentielle vérifiée par la double transformée de Laplace<sup>2</sup>  $Q(s, \sigma; x, v)$  de  $\mathbb{P}[t; m; x, v]$ . Cette méthode n'a pas donné de résultats, malgré le fait que les calculs peuvent être menés relativement loin. Il a semblé intéressant de reproduire ici le "squelette" des calculs : ceux-ci peuvent éventuellement servir de base de départ pour un calcul ultérieur.

L'équation de départ est :

$$((s + \sigma \text{sign}(x))Q(s, \sigma; x, v) = \partial_{vv}Q - v\partial_x Q + \delta(x)\delta(v) \quad (3.32)$$

On considère les transformées de Laplace  $\int_0^{+\infty} dx e^{-\xi x}(\cdot)$  (resp.  $\int_{-\infty}^0 dx e^{\xi x}(\cdot)$ ) pour l'équation lorsque  $x > 0$  (resp.  $x < 0$ ). Il vient, en notant  $\mu_{\pm} = \sqrt{s \pm \sigma}$  :

$$\begin{aligned} [-\partial_{vv} + (\mu_+^2 + v\xi)] \hat{Q}^+(s, \sigma; \xi, v) &= vQ(s, \sigma; x = 0^+, v) \quad (x > 0) \\ [-\partial_{vv} + (\mu_-^2 - v\xi)] \hat{Q}^-(s, \sigma; \xi, v) &= -vQ(s, \sigma; x = 0^-, v) \quad (x < 0) \end{aligned}$$

Il suffit de résoudre l'équation pour  $x > 0$  : la solution de l'équation pour  $x < 0$  s'en déduit alors par symétrie  $(\sigma, v) \rightarrow (-\sigma, -v)$ . On détermine la fonction de Green  $G$  de l'opérateur  $[-\frac{d^2}{dv^2} + (\mu_+^2 + v\xi)]$ . Celle-ci s'exprime à l'aide des fonctions d'Airy Ai et Bi. Les conditions de symétrie et de comportement à l'infini déterminent complètement la fonction  $G$  et on obtient après quelques calculs :

$$\hat{Q}^+(s, \sigma; \xi, v) = \frac{\pi}{\xi^{\frac{1}{3}}} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_0 v_0 Q(s, \sigma; x = 0^+, v_0) \text{Ai} \left( \frac{\mu_+^2 + v > \xi}{\xi^{\frac{2}{3}}} \right) \text{Bi} \left( \frac{\mu_+^2 + v < \xi}{\xi^{\frac{2}{3}}} \right) \quad (3.33)$$

où on a noté  $v_> = \text{Max}(v, v_0)$  et  $v_< = \text{Min}(v, v_0)$ . On en déduit alors  $\hat{Q}^-(s, \sigma; \xi, v) = \hat{Q}^+(s, -\sigma; \xi, -v)$  :

$$\hat{Q}^-(s, \sigma; \xi, v) = -\frac{\pi}{\xi^{\frac{1}{3}}} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_0 v_0 Q(s, \sigma; x = 0^-, v_0) \text{Ai} \left( \frac{\mu_-^2 - v < \xi}{\xi^{\frac{2}{3}}} \right) \text{Bi} \left( \frac{\mu_-^2 - v > \xi}{\xi^{\frac{2}{3}}} \right) \quad (3.34)$$

On écrit ensuite les conditions de raccordement des solutions de l'équation (3.32). Il vient

$$vQ(s, \sigma; x = 0^+, v) - vQ(s, \sigma; x = 0^-, v) = \delta(v)$$

<sup>2</sup> $s$  (resp.  $\sigma$ ) est la variable de Laplace associée à  $t$  (resp.  $S_t$ ).

On fait alors l'hypothèse que la somme de ces deux fonctions est une fonction régulière  $\gamma(v)$  (la dépendance en  $s$  et  $\sigma$  a été omise pour ne pas alourdir les expressions) :

$$vQ(s, \sigma; x = 0^+, v) + vQ(s, \sigma; x = 0^-, v) = \gamma(v)$$

Or la fonction que l'on cherche *in fine* est la fonction

$$Q(s, \sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dv Q(s, \sigma; x, v)$$

c'est à dire la double transformée de Laplace de la densité de probabilité de la variable  $m_t$ . L'intégrale sur  $x$  revient à prendre (séparément selon que  $x > 0$  ou  $x < 0$ ) la limite  $\xi \rightarrow 0$ . On détermine par un calcul sans difficulté :

$$\begin{aligned} \hat{Q}^+(s, \sigma; \xi = 0, v) &= \frac{e^{-\mu_+|v|}}{4\mu_+} + \frac{1}{4\mu_+} \int_{-\infty}^{+\infty} dv' \gamma(v') e^{-\mu_+|v-v'|} \\ \hat{Q}^-(s, \sigma; \xi = 0, v) &= \frac{e^{-\mu_-|v|}}{4\mu_-} + \frac{1}{4\mu_-} \int_{-\infty}^{+\infty} dv' \gamma(v') e^{-\mu_-|v-v'|} \end{aligned}$$

dont on peut ensuite déduire l'expression de la fonction  $Q$  en fonction de  $\gamma(v)$  :

$$Q(s, \sigma) = \frac{s - \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} dv \gamma(v)}{s^2 - \sigma^2} \quad (3.35)$$

Il reste à déterminer la fonction inconnue  $\gamma$  (ou sa transformée de Fourier  $\hat{\gamma}$  en 0). Pour essayer de trouver des équations permettant cette détermination nous écrivons l'annulation pour  $v \rightarrow \pm\infty$  des fonctions  $\hat{Q}^+$  et  $\hat{Q}^-$ . L'annulation des amplitudes donne le système d'équations :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dv Q(s, \sigma, x = 0^+, v) \text{Ai} \left( \frac{\mu_+^2 + v\xi}{\xi^{\frac{2}{3}}} \right) &= 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} dv Q(s, \sigma, x = 0^-, v) \text{Ai} \left( \frac{\mu_-^2 - v\xi}{\xi^{\frac{2}{3}}} \right) &= 0 \end{aligned}$$

qui se traduisent par des équations faisant directement intervenir  $\gamma$  :

$$\begin{aligned} \text{Ai} \left( \xi^{-\frac{2}{3}} \mu_+^2 \right) + \int_{-\infty}^{+\infty} dv \gamma(v) \text{Ai} \left( \xi^{-\frac{2}{3}} \mu_+^2 + v\xi^{\frac{1}{3}} \right) &= 0 \\ \text{Ai} \left( \xi^{-\frac{2}{3}} \mu_-^2 \right) - \int_{-\infty}^{+\infty} dv \gamma(v) \text{Ai} \left( \xi^{-\frac{2}{3}} \mu_-^2 - v\xi^{\frac{1}{3}} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Ces équations se transforment de nouveau en utilisant une représentation intégrale de la fonction Ai et la transformée de Fourier de  $\gamma(v)$  :

$$\begin{aligned} \text{Ai}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{i\left(\frac{z^3}{3} + xz\right)} \\ \hat{\gamma}(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dv \gamma(v) e^{ikv} \end{aligned}$$

On procède alors à un changement de fonction en utilisant les propriétés d'échelle du système ( $v$  est un mouvement brownien) : on pose  $\gamma(v) = \sqrt{sh}(v\sqrt{s})$ , soit  $\hat{\gamma}(k) = \hat{h}\left(\frac{k}{\sqrt{s}}\right)$ ,  $\sigma = ys$ ,  $t = \frac{\lambda\theta}{s}$  et  $\xi = \lambda^{-1}s^{\frac{3}{2}}$ . On passe finalement en variable complexe  $x = i\theta$ , et on obtient deux équations intégrales :

$$\int dx e^{\lambda\left(\frac{x^3}{3} - (1+y)x\right)} (1 + \hat{h}(x)) = 0 \quad (3.36)$$

$$\int dx e^{\lambda\left(\frac{x^3}{3} - (1-y)x\right)} (1 - \hat{h}(x)) = 0 \quad (3.37)$$

Celles-ci sont valables pour tout  $\lambda$ . La dernière étape consiste à transformer ces équations intégrales en équations fonctionnelles. On travaille avec (3.36), les opérations étant similaires pour (3.37). On effectue un changement de variable rendant l'argument de l'exponentielle pair. L'annulation de l'intégrale signifie alors que la fonction  $1 + \hat{h}(x)$  multipliée par le jacobien du changement de variable est, dans les nouvelles variables, impaire. On montre alors que la fonction  $\hat{h}$  vérifie :

$$\frac{1 + \hat{h}(x)}{x^2 - (1+y)} = \frac{1 + \hat{h}(x_1)}{x_1^2 - (1+y)} \quad (3.38)$$

où  $x$  et  $x_1$  sont sur une même ellipse :  $x^2 + xx_1 + x_1^2 = 3(1+y)$ . De (3.37) se déduit une équation fonctionnelle analogue :

$$\frac{1 - \hat{h}(x)}{x^2 - (1-y)} = \frac{1 - \hat{h}(x_2)}{x_2^2 - (1-y)} \quad (3.39)$$

avec  $x^2 + xx_2 + x_2^2 = 3(1-y)$ .

Cette réécriture du problème en termes d'un couple d'équations fonctionnelles est le seul progrès que nous ayons pu faire jusqu'à aujourd'hui. Rien cependant n'exclut que ce problème puisse trouver une solution, permettant ensuite de déterminer complètement la forme d'échelle de la double transformée de Laplace de la densité de  $S_t$  :

$$\mathcal{Q}(s, \sigma) = \frac{1}{s} \frac{1 - y\hat{h}(0, y)}{1 - y^2}, \quad y = \frac{\sigma}{s}$$

### 3.6.2 Approximations

L'approche analytique n'ayant pas abouti, il est nécessaire de se tourner vers des méthodes approchées pour étudier l'aimantation locale. Le processus étudié est un processus régulier - au sens où le processus gaussien stationnaire en temps logarithmique associé a une densité de zéros finie  $\rho = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$  - l'approximation des intervalles indépendants s'applique donc. Il est aussi possible d'approximer directement le processus en considérant des processus plus simples.

#### Intervalles indépendants

La fonction de corrélation du processus normalisé est :

$$\langle \hat{x}_s \hat{x}_t \rangle = \frac{3}{2} \sqrt{x} - \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} = g(x) \quad (3.40)$$

Le passage en temps logarithmique donne donc comme attendu un processus gaussien stationnaire. L'approximation des intervalles indépendants donne un exposant de persistance

$$\theta_{IIA} = 0.2647 \quad (3.41)$$

Cet exemple illustre le problème majeur de cette approximation, qui est de n'être pas contrôlée : alors que les résultats pour l'équation de la diffusion sont très bons, elle donne ici un exposant qui diffère d'environ 6% de l'exposant exact. Pour les premiers moments de l'aimantation on trouve :

$$\begin{aligned} \langle M^2 \rangle &= \frac{3\sqrt{3}}{\pi} - 1 = 0.6539866.. \quad (\text{exact}) \\ \langle M^4 \rangle_{IIA} &= 0.5559165.. \end{aligned}$$

### Modèles approchés : processus "bâtons"

Au chapitre 2, lors de l'étude des processus de renouvellement, nous avons constaté que pour trouver la loi de l'arcsinus du temps d'occupation il est possible d'oublier la structure fine du mouvement brownien. Une idée pour étudier la distribution du temps d'occupation de l'accélération aléatoire consiste à approcher le processus (3.2) par un processus plus simple<sup>3</sup>. Lors d'une excursion de durée  $\tau$  du mouvement brownien, l'aire entre la courbe et l'axe temporel se comporte typiquement comme  $\tau^{\frac{3}{2}}$ . L'idée est alors de considérer un processus *bâtons* représentant la trajectoire d'un marcheur fictif. Celle-ci est associée à une réalisation du mouvement brownien dont on ne retient que le processus ponctuel des zéros sous la forme des temps inter-arrivées  $\{\tau_i\}$ ; le marcheur se déplace ballistiquement dans le plan  $(t, x)$  entre les positions successives  $(0, 0), (t_1, X_1), \dots, (t_k, X_k)$  avec  $t_k = t_{k-1} + \tau_k$  et  $X_k = X_{k-1} \pm \beta_k$ , où  $\beta_k = \tau_k^{\frac{3}{2}}$ .

L'intérêt de cette méthode se révèle tout de suite lorsqu'on compare les distributions du temps d'occupation : celle du processus *bâtons* s'avère bien plus proche de celle de l'accélération aléatoire que la loi de Lamperti ou que la loi bêta. Malheureusement, du fait du couplage entre la distribution des pas et celle des temps de vol du marcheur fictif nous ne sommes pas parvenus à faire des calculs analytiques.

Notons que l'on peut généraliser quelque peu le modèle *bâtons* en prenant des  $\beta_k = \tau_k^\alpha$  et en considérant diverses distributions pour les  $\tau_k$ . En particulier pour  $\alpha = 1$  le marcheur est l'intégrale d'un processus de renouvellement. Il est intéressant de constater que lorsque les  $\tau$  et les  $\beta$  ont des lois larges (si  $\tau$  suit une loi large d'exposant  $\theta \in ]0, 1[$ , la loi de  $\beta$  décroît asymptotiquement en  $\beta^{-(1+\frac{\theta}{\alpha})}$ , et est donc une loi large pour  $\alpha > \theta$ ) la distribution du temps d'occupation dépend très peu du paramètre  $\alpha$ . Il semble donc que si la valeur de l'exposant aux bords est entièrement déterminée par la distribution des  $\tau$ , la forme de la distribution est liée à l'existence de corrélations, sans que la forme exacte de celles-ci joue un rôle majeur. Par contre, dès que les pas ne suivent plus une loi large ( $\alpha < \theta$ ) ou que l'on découple les  $\tau$  et les  $\beta$  on retrouve une

<sup>3</sup>Il faut bien noter que cette approche s'inscrit complètement dans l'idée qu'il y a une forme d'universalité des lois limites.

loi de Lamperti. Si les  $\tau$  ont une loi étroite on trouve une loi de l'arcsinus (le marcheur fictif "renormalise" sur une marche aléatoire usuelle).

### Intégrale d'un processus de renouvellement

Une manière d'essayer de comprendre plus quantitativement pourquoi la distribution du temps d'occupation de l'intégrale d'un processus de renouvellement d'exposant  $\frac{1}{2}$  est proche de celle de l'accélération aléatoire consiste à comparer les processus. On connaît la densité de probabilité de l'intégrale d'un processus de renouvellement : si on note  $S_t$  la position au temps  $t$  d'un tel processus, on a  $S_t = tM_t$  où  $M_t$  a une loi donnée par la loi de Lamperti (2.14). Les calculs de [79] se généralisent (si l'on fait de nouveau l'hypothèse que les formules asymptotiques sont toujours valables) et on calcule aisément la fonction à deux points  $\langle S_{t_1} S_{t_2} \rangle$ . De nouveau on a affaire à un processus invariant d'échelle et la fonction d'autocorrélation du processus normalisé  $\hat{S}_{t_1} = \frac{S_{t_1}}{t_1 \sqrt{\langle M^2 \rangle}}$  ne dépend que du rapport des deux temps (et de  $\theta$ ) :

$$G_\theta(x) = x + \frac{1}{1-\theta} \frac{\Gamma(1+\theta)}{2\pi\theta^2(1+\theta)\Gamma(\theta)^2} \{ \pi\theta(\theta^2 - \theta - 2)x\Gamma(\theta) - 2x^\theta\Gamma(\theta-1) {}_2F_1[\theta-1, \theta; \theta+2; x] \sin \pi\theta \}$$

qui dans le cas  $\theta = \frac{1}{2}$  se simplifie un peu :

$$G_{\frac{1}{2}}(x) = -\frac{x}{2} + \frac{16\sqrt{x}}{3\pi} {}_2F_1\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{5}{2}; x\right] \quad (3.42)$$

Or si l'on compare ce corrélateur à l'équation (3.40) on constate que les deux fonctions sont (numériquement) très proches l'une de l'autre. Cet argument est cependant à prendre avec circonspection : l'accélération aléatoire est un processus gaussien, alors que  $S_t$  ne l'est évidemment pas<sup>4</sup>.

### Marches découplées

Il est possible de simplifier un peu plus le modèle "bâtons", en considérant que le "marcheur" (fictif) ne se déplace pas avec une vitesse  $\pm 1$  mais saute instantanément d'une position à l'autre. On se trouve alors dans le cadre des marches aléatoires en temps continu [17, 142, 86] couplées, mais on ne sait pas plus faire les calculs que précédemment. Le seul cas que l'on sait traiter analytiquement est celui des marches aléatoires en temps continu découplées à nombre de pas fixé (ce qui constitue une simplification supplémentaire par rapport au cas où on travaille à temps fixé). L'exposant de persistance ne dépend alors que de la distribution des temps d'attente, et il est facile de montrer qu'il vaut  $\frac{1}{2}$  si on a affaire à une loi étroite et  $\frac{\theta}{2}$  si on a affaire à une loi large d'exposant  $\theta$ . Nous détaillons ce calcul, qui repose en partie sur le théorème de Sparre-Andersen [2, 3], qui a joué un rôle important dans la compréhension des mécanismes permettant d'obtenir des lois universelles pour les temps d'occupation (voir par exemple [76]), et sur des propriétés de convolution de la loi de Lamperti.

<sup>4</sup>En particulier la connaissance du corrélateur ne nous apprend rien sur la fonction de corrélation signe-signe de l'intégrale d'un processus de renouvellement.

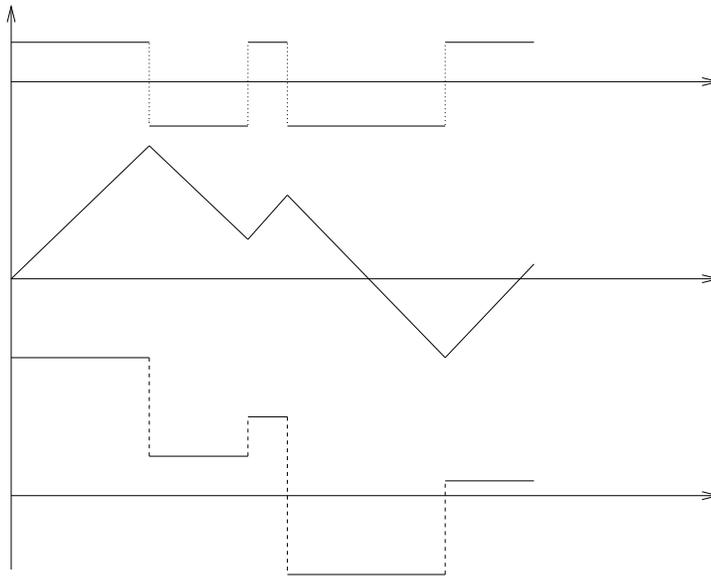


FIG. 3.2 – En haut : processus de renouvellement. Au milieu : intégrale du processus de renouvellement (processus *bâton* couplé). En bas : simplification du processus bâton : marche aléatoire en temps continue couplée .

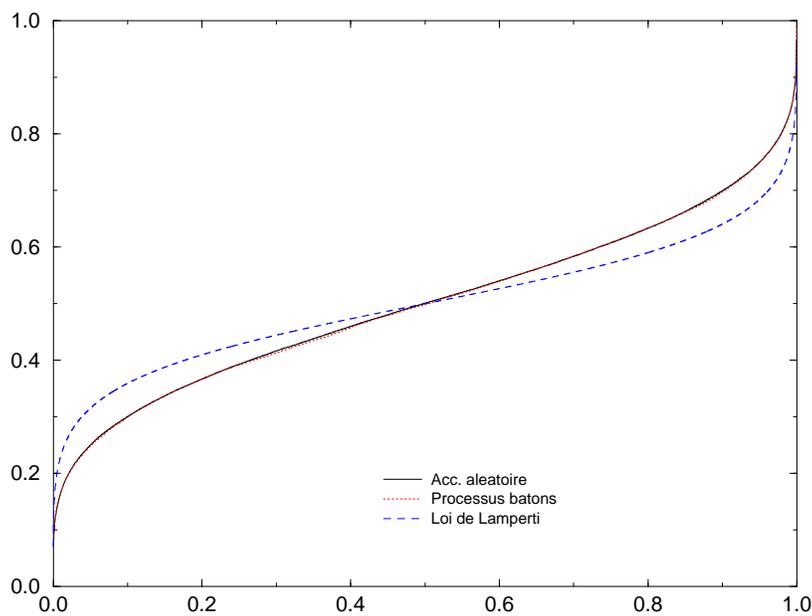


FIG. 3.3 – Fonctions de répartition de l'aimantation locale pour l'accélération aléatoire (trait plein), le processus bâtons défini dans le texte avec  $\beta = \tau^{\frac{3}{2}}$  (pointillés) et la loi de Lamperti  $\theta = \frac{1}{4}$  (tirets). Les 2 premières courbes sont très proches numériquement.

On note  $p_{nk}$  la probabilité que exactement  $k$  sommes partielles  $\sum_{i=1}^k \beta_i$  soient positives parmi les  $n$  premières. Afin d'éviter le cas où ces sommes partielles peuvent s'annuler on considère une distribution continue : ainsi la probabilité de cet évènement est nulle. Les  $\beta_k$  étant des variables aléatoires i.i.d. symétriques, on peut leur appliquer les résultats de Sparre-Andersen [2, 3] :

$$p_{nk} \approx \frac{1}{n} p\left(y = \frac{k}{n}\right) \quad (3.43)$$

où  $p$  est la loi de l'arcsinus

$$p(y) = \frac{1}{\pi \sqrt{y(1-y)}}$$

Les variables  $\tau_i$  sont i.i.d. et échangeables. On a donc que  $\frac{T_n^+}{t_n}$  est distribué comme  $\frac{\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_k}{\tau_1 + \dots + \tau_n}$  avec probabilité  $p_{nk}$  si  $k > 0$  et comme  $\delta(x)$  si  $k = 0$ . On a donc pour la densité :

$$\rho_{\frac{T_n^+}{t_n}}(x) = \sum_{k=0}^n p_{nk} \left\langle \delta\left(\frac{\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_k}{\tau_1 + \dots + \tau_n} - x\right) \right\rangle_{\{\tau_i\}}$$

On note  $F(x; k, n)$  la moyenne ci-dessus. On prend pour la distribution des  $\tau$  une loi de Lévy  $L_\theta(\tau)$ . En utilisant la stabilité des lois de Lévy on montre que le calcul de  $F(x; k, n)$  se ramène au calcul de la distribution du rapport de deux lois de Lévy indépendantes de même exposant et de paramètres d'échelle respectifs  $k$  et  $n - k$ . en notant  $r = \frac{k}{n-k}$  on obtient (voir par exemple [5]) :

$$F(x; k, n) = \frac{\sin(\pi\theta)}{\pi} r \frac{(x(1-x))^{\theta-1}}{r^2 x^{2\theta} + 2r \cos(\pi\theta)(x(1-x))^\theta + (1-x)^{2\theta}}$$

On remarque que cette loi de Lamperti a une forme d'échelle  $F(x; k, n) = F(x; y = \frac{k}{n})$  avec

$$F(x; y) = \frac{\sin(\pi\theta)}{\pi} \frac{y}{1-y} \frac{(x(1-x))^{\theta-1}}{\left(\frac{y}{1-y}\right)^2 x^{2\theta} + 2\left(\frac{y}{1-y}\right) \cos(\pi\theta)(x(1-x))^\theta + (1-x)^{2\theta}}$$

Donc il vient :

$$\rho_{\frac{T_n^+}{t_n}}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n} p(y) F(x; y)$$

Soit à la limite  $n \rightarrow \infty$

$$\rho_{\frac{T_n^+}{t_n}}(x) = \int_0^1 dy p(y) F(x; y)$$

avec  $F(x; y)$  une loi de Lamperti de paramètres  $\theta$  et  $1 - y$ . On en déduit les moments de  $\frac{T_n^+}{t_n}$ .

$$\left\langle \left(\frac{T_n^+}{t_n}\right)^k \right\rangle \equiv (-)^k C_k = \int_0^1 dy p(y) \int_0^1 dx x^k F(x; y)$$

Utilisant les résultats connus sur les lois de Lamperti [108], on a

$$\int_0^1 dx x^k F(x; y) = (-)^k c_k(\theta, 1 - y)$$

d'où

$$C_k = \int_0^1 p(y) c_k(\theta, 1-y)$$

On introduit la série génératrice  $G(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \lambda^k$ . Il vient finalement :

$$G(\lambda) = \int_0^1 dy \frac{1}{\pi \sqrt{y(1-y)}} \frac{(1+\lambda)^{\theta-1} + \frac{y}{1-y}}{(1+\lambda)^{\theta} + \frac{y}{1-y}}$$

Cette intégrale se calcule et :

$$G(\lambda) = \frac{(1+\lambda)^{\frac{\theta}{2}-1} + 1}{(1+\lambda)^{\frac{\theta}{2}} + 1}$$

qui est la fonction génératrice des moments d'une loi de Lamperti de paramètres  $\delta = \frac{\theta}{2}$  et  $\alpha = \frac{1}{2}$  [108].

## Récapitulatif

Comme on le constate en regardant le tableau ci-dessous, la moindre approximation "raisonnable" donne, au moins au niveau des premiers moments, des résultats satisfaisants. Bien entendu, ni la loi bêta ni la loi de Lamperti ne peuvent être vraiment correctes, puisqu'elles supposent un découplage entre les  $\tau_k$ , alors qu'on sait ici exactement comment ces variables sont couplées.

	IIA	simulation directe	simulation MC	bâtons $\beta = \tau^{\frac{3}{2}}$	loi bêta ( $\frac{1}{4}$ )	loi Lamperti ( $\frac{1}{4}$ )
$\langle M^2 \rangle$	0.65398..	0.6552	0.653	0.658	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$
$\langle M^4 \rangle$	0.5591..	0.558	0.550	0.562	$\frac{4}{7} = 0.5714..$	$\frac{43}{64} = 0.6718..$

TAB. 3.1 – IIA : par l'approximation des intervalles indépendants ( $\langle M^2 \rangle$  est un résultat exact), simulation directe : en simulant la marche aléatoire sous-jacente, MC : calcul de type Monte Carlo des intégrales multiples sur la fonction de corrélation, bâtons : simulation du processus bâtons couplés, loi bêta et loi de Lamperti : prédictions des approximations naturelles.

## 3.7 Extension : dérivée n-ième

### 3.7.1 Généralités

Nous sommes venus à l'étude du processus d'accélération aléatoire (3.2) par le biais de la généralisation de l'équation de Langevin du mouvement brownien. Cette généralisation peut se poursuivre, et il est possible de se poser des questions relatives aux propriétés de persistance de la famille de processus aléatoires définis par l'équation de Langevin généralisée :

$$\frac{d^n x_t}{dt^n} = \eta_t \quad (3.44)$$

La famille de processus ainsi définie, *a priori* indexée par un entier  $n$ , est une famille de processus aléatoires gaussiens, dont la fonction de corrélation se calcule. Pour le processus normalisé la fonction d'échelle est :

$$g_n(x) = (2n - 1)\sqrt{x} \int_0^1 (1 - \xi)^{n-1} (1 - x\xi)^{n-1} d\xi \quad (3.45)$$

Notons qu'il est alors possible de considérer le paramètre  $n$  non plus comme un paramètre entier mais comme un paramètre réel, et d'étudier la famille de processus gaussiens de corrélateur donné par l'équation ci-dessus. Cette famille de processus est aussi apparue dans l'étude de propriétés de persistance spatiale d'interfaces [102], et on peut noter deux points :

- Pour  $n \rightarrow +\infty$  on retrouve le corrélateur de l'équation de la diffusion bidimensionnelle. Néanmoins il est peu probable que l'étude pour  $n$  quelconque soit le chemin qui mène à la détermination de l'exposant de persistance  $\theta_{\text{Diff2D}}$ .
- Pour  $n < \frac{3}{2}$  le processus est non régulier, et pour  $n \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$  le corrélateur s'identifie au corrélateur du mouvement brownien fractionnaire de Lévy (2.33) pour  $H = n - \frac{1}{2}$ .

### 3.7.2 Le cas $n = 3$

Pour  $n \geq 3$ , la valeur de l'exposant de persistance n'est pas connue analytiquement (pour une étude récente, voir [162]). Pour  $n = 3$  il est possible d'envisager l'utilisation du même type de méthode que pour  $n = 2$ , mais il faut ici considérer un processus tridimensionnel  $(x, v, a)$  pour se ramener à un processus markovien<sup>5</sup>. De plus il est assez peu probable qu'il existe une transformation intégrale analogue à la transformation de Kontorovitch-Lebedev pour inverser l'équation de renouvellement (3.14). Par contre il peut être judicieux d'essayer de généraliser la méthode de Burkhardt consistant à écrire l'équation *backward* pour la probabilité  $Q(x, v, a; t)$  d'avoir survécu (n'être pas passé par 0) jusqu'au temps  $t$  en étant parti de  $(x, v, a)$ . L'équation *backward* est :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x} - a \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial a^2} \right) Q(x, v, a; t) = 0 \quad (3.47)$$

Elle est invariante sous la transformation  $a \rightarrow \lambda a$ ,  $v \rightarrow \lambda^3 v$ ,  $x \rightarrow \lambda^5 x$ ,  $t \rightarrow \lambda^2 t$ , donc

$$Q(x, v, a; t) = Q(\lambda^5 x, \lambda^3 v, \lambda a; \lambda^2 t) = \mathcal{Q}(a^5 x^{-1}, a^3 v^{-1}, a^2 t^{-1})$$

En insérant la décroissance asymptotique  $Q \sim t^{-\theta_3}$  on peut exprimer  $Q$  en termes d'une fonction de 2 variables :  $Q(x, v, a; t) = G(a^5 x^{-1}, a^3 v^{-1}) a^{\theta_3} t^{-\theta_3}$ . En reportant cette

<sup>5</sup>L'équation d'évolution devient

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_t \\ v_t \\ a_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_t \\ a_t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \eta_t \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

forme dans l'équation (3.47) et en introduisant les variables  $U = vx^{\frac{3}{5}}$  et  $W = ax^{-\frac{1}{5}}$  il vient<sup>6</sup> :

$$\frac{2\theta_3}{5}G - \frac{3}{5}U \frac{\partial G}{\partial U} - \frac{1}{5}W \frac{\partial G}{\partial W} + \frac{W}{U} \frac{\partial G}{\partial U} + \frac{1}{U} \frac{\partial^2 G}{\partial W^2} = 0 \quad (3.48)$$

L'exposant cherché apparaît comme un des coefficients de l'équation. Celle-ci ne s'intègre pas, mais l'exposant  $\theta_3$  peut-être vu comme une valeur propre d'un système différentiel. Une méthode consiste à discrétiser l'équation et à chercher les valeurs propres du système matriciel qui apparaît alors. En jouant sur la taille du système et sur le pas de discrétisation, et en faisant ensuite des moyennes on peut trouver<sup>7</sup> un exposant du bon ordre de grandeur (entre  $\theta_2 = \frac{1}{4}$  correspondant à  $n = 2$  et  $\theta_{\text{Diff2D}} = 0.1875..$  pour  $n = \infty$ ). Il est même possible - mais sans précision sur la méthode - de trouver  $\theta \approx 0.21, 0.22$ , valeur à comparer aux valeurs données dans la littérature : les résultats numériques les plus récents [162] donnent  $\theta_{\text{Num}} = 0.220 \pm 0.001$ .

### 3.8 Article 2 : Survie partielle et effondrement inélastique d'une particule accélérée aléatoirement

<sup>6</sup>On ne garde que les termes dominants lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .

<sup>7</sup>Jean-Marc Luck, communication privée. La méthode lui est due.

EUROPHYSICS LETTERS

15 February 2001

*Europhys. Lett.*, **53** (4), pp. 438–443 (2001)

## Partial survival and inelastic collapse for a randomly accelerated particle

G. DE SMEDT<sup>1</sup>, C. GODRÈCHE<sup>2</sup> and J. M. LUCK<sup>1</sup><sup>1</sup> *Service de Physique Théorique, CEA Saclay - 91191 Gif-sur-Yvette cedex, France*<sup>2</sup> *Service de Physique de l'État Condensé, CEA Saclay  
91191 Gif-sur-Yvette cedex, France*

(received 13 September 2000; accepted in final form 11 December 2000)

PACS. 05.40.-a – Fluctuation phenomena, random processes, noise and Brownian motion.

PACS. 02.50.Ey – Stochastic processes.

PACS. 05.20.-y – Classical statistical mechanics.

**Abstract.** – We present an exact derivation of the survival probability of a randomly accelerated particle subject to partial absorption at the origin. We determine the persistence exponent and the amplitude associated to the decay of the survival probability at large times. For the problem of inelastic reflection at the origin, with coefficient of restitution  $r$ , we give a new derivation of the condition for inelastic collapse,  $r < r_c = e^{-\pi/\sqrt{3}}$ , and determine the persistence exponent exactly.

Consider a randomly accelerated particle, obeying the stochastic equation of motion

$$\frac{d^2x_t}{dt^2} = \eta_t, \quad (1)$$

where  $\eta_t$  is Gaussian white noise with zero average,  $\langle \eta_t \rangle = 0$ , and correlator  $\langle \eta_t \eta_{t'} \rangle = \delta(t - t')$ . This is the original Langevin equation with no damping force. The joint random variables  $(x_t, v_t)$  evolve in time as

$$\frac{dv_t}{dt} = \eta_t, \quad \frac{dx_t}{dt} = v_t,$$

with initial conditions  $(x_0, v_0)$ . Therefore

$$v_t = v_0 + W_t, \quad x_t = x_0 + v_0 t + \int_0^t du W_u,$$

where  $W_t$  is the integral of the noise, or Brownian motion, hence the process  $x_t$  is usually referred to as the integral of Brownian motion.

The statistics of the times of first passage by the origin, and of related quantities, for a particle obeying (1) has been the subject of a long series of works, and is by now well understood [1–5].

More recently, a number of studies have been devoted to survival problems for a randomly accelerated particle, with particular choices of the boundary conditions at the origin, motivated by situations of physical interest.

In the partial survival problem, the particle is absorbed with probability  $1-p$  when crossing the origin, and survives with probability  $p$  [6]. One is interested in the survival probability, that is the probability for a particle obeying (1) not to be absorbed at the origin up to time  $t$ . This reads

$$G(t, p) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n p_n(t),$$

where  $p_n(t)$  is the probability of the occurrence of  $n$  zero crossings between 0 and  $t$ . At large times, the survival probability decays as

$$G(t, p) \underset{t \rightarrow \infty}{\approx} A(p) t^{-\phi(p)}, \quad (2)$$

defining the persistence exponent  $\phi(p)$  [6] and the amplitude  $A(p)$ . Very recently, by an approach based on Fokker-Planck equations, Burkhardt obtained the exact result [7, 8]

$$\phi(p) = \frac{1}{4} - \frac{3}{2\pi} \arcsin \frac{p}{2}, \quad i.e. \quad p = 2 \sin \left[ \frac{\pi}{6} (1 - 4\phi) \right]. \quad (3)$$

He also obtained the persistence exponent  $\Theta(r)$  for the inelastic collapse problem, where the particle rebounds inelastically at the origin, with coefficient of restitution  $r < 1$ , *i.e.*, the velocities  $v_i$  just before and  $v_f$  just after the collision obey  $v_f = -rv_i$  [9]. The result is [7]

$$r^{2\Theta(r)} = 2 \sin \left[ \frac{\pi}{6} (1 - 4\Theta(r)) \right]. \quad (4)$$

Hence the two exponents are related by

$$\Theta(r) = \phi \left( r^{2\Theta(r)} \right),$$

as conjectured in ref. [10].

In this work we first give an alternative derivation of (3). We then obtain an analytical prediction for the amplitude  $A(p)$  of the power law (2) [11]. Finally we show that the inelastic collapse time is a Kesten variable [12–15], which leads naturally to a new derivation both of the condition for inelastic collapse,  $r < r_c = e^{-\pi/\sqrt{3}}$ , and of (4). Our approach relies on the statistics of the successive times of passage by the origin of a randomly accelerated particle. We use the framework of ideas and results contained in the classical work of McKean [1], complemented by subsequent studies by Lachal [5].

We begin by the partial survival problem. Consider a particle starting from the origin with initial speed  $v_0$ . By definition,

$$p_n(t) = \mathcal{P}(t_n < t < t_{n+1}),$$

where  $t_n$  is the time of occurrence of the  $n$ -th zero crossing, with probability density  $f_{t_n}(t)$ . Hence, in Laplace space,

$$\hat{p}_n(s) = \frac{\hat{f}_{t_n}(s) - \hat{f}_{t_{n+1}}(s)}{s},$$

where [5]

$$\hat{f}_{t_n}(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\gamma \frac{\gamma \sinh(\pi\gamma/2)}{(2 \cosh(\pi\gamma/3))^n} \frac{K_{i\gamma}(v_0\sqrt{8s})}{v_0\sqrt{8s}},$$

in which  $K_{i\gamma}$  is the modified Bessel function. After summation over  $n \geq 0$ , we find

$$\hat{G}(s, p) = \frac{1}{s} \left( 1 - (1-p) \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\gamma \frac{\gamma \sinh(\pi\gamma/2)}{2 \cosh(\pi\gamma/3) - p} \frac{K_{i\gamma}(v_0\sqrt{8s})}{v_0\sqrt{8s}} \right). \quad (5)$$

We now have to extract the singular behavior of this expression as  $s \rightarrow 0$ , corresponding to the decay of  $G(t, p)$  at large  $t$ . To this end we use the integral representation

$$K_{i\gamma}(x) \sinh \frac{\pi\gamma}{2} = \int_0^\infty du \sin(\gamma u) \sin(x \sinh u) \quad (x > 0),$$

and the integral

$$\int_0^\infty d\gamma \frac{\gamma \sin(\gamma u)}{2 \cosh(\pi\gamma/3) - p} = -\frac{3}{\sqrt{4-p^2}} \frac{d}{du} \frac{\sinh(2(1-\phi)u)}{\sinh 3u},$$

where  $\phi$  stands for precisely the function of  $p$  defined in (3). After an integration by parts, (5) becomes

$$\hat{G}(s, p) = \frac{I(0) - I(s)}{s I(0)},$$

where

$$I(s) = \int_0^\infty du \cosh u \frac{\sinh(2(1-\phi)u)}{\sinh 3u} \cos(v_0\sqrt{8s} \sinh u), \quad I(0) = \frac{\pi\sqrt{4-p^2}}{6(1-p)}.$$

The behavior of the difference  $I(0) - I(s)$  for  $s \rightarrow 0$  is dominated by large values of  $u$ . At exponential order, setting  $y = \exp[u]$ , we obtain

$$I(0) - I(s) \approx \frac{1}{2} \int_0^\infty dy y^{-2\phi-1} [1 - \cos(v_0\sqrt{2s} y)] = \frac{\Gamma(1-2\phi)}{4\phi} \cos \pi\phi (2v_0^2 s)^\phi,$$

leading to the result [11]

$$G(t, p) \underset{t \rightarrow \infty}{\approx} \frac{3}{2\sqrt{\pi} \phi \Gamma(\phi + \frac{1}{2})} \frac{1-p}{\sqrt{4-p^2}} \left( \frac{v_0^2}{2t} \right)^\phi. \quad (6)$$

For  $p = 0$ , this expression reads

$$G(t, 0) = p_0(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\approx} \frac{3}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{3}{4})} \left( \frac{v_0^2}{2t} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

The persistence exponent of a free randomly accelerated particle,  $\phi = \frac{1}{4}$  [3, 7] (see also [2]), is thus recovered. For  $p = 1$ , the exponent  $\phi = 0$ , and the right-hand side of (6) equals unity, in agreement with the identity  $G(t, 1) = 1$ .

The result obtained, eq. (6), allows the determination of the successive cumulants of the number  $N_t$  of zero crossings between times 0 and  $t$ . Indeed, setting  $p = \exp[z]$ , the generating function of these cumulants is given by  $\ln G(t, p) = \ln \langle \exp[z N_t] \rangle$ . Expanding (6) as a power series in  $z$ , we thus obtain,  $\gamma_E$  being Euler's constant,

$$\langle N_t \rangle \underset{t \rightarrow \infty}{\approx} \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \left( \ln \frac{t}{2v_0^2} - \gamma_E \right) + \frac{1}{6}, \quad \langle N_t^2 \rangle - \langle N_t \rangle^2 \underset{t \rightarrow \infty}{\approx} \frac{2\sqrt{3}}{3\pi} \left( \ln \frac{t}{2v_0^2} - \gamma_E \right) + \frac{11}{72}, \quad (7)$$

and so on. The mean density of zero crossings in logarithmic time is thus equal to  $\sqrt{3}/(2\pi)$  [6].

We now turn to the inelastic collapse problem. We consider again a particle starting from the origin with initial speed  $v_0$ .

Following ref. [9], we note that eq. (1) is invariant under the change of scale:  $x \rightarrow r^{-3}x$ ,  $t \rightarrow r^{-2}t$ , which implies the rescaling  $v \rightarrow r^{-1}v$  of the velocity. Hence, performing this change of scale immediately after each collision compensates the reduction of speed due to inelastic reflection. One can therefore express the elapsed time  $t_I$  in the inelastic problem in terms of the elapsed time  $t$  of a randomly accelerated particle, elastically reflected when reaching the origin, as [9]

$$t_I = t_1 + r^2(t_2 - t_1) + r^4(t_3 - t_2) + \dots + r^{2N_t}(t - t_{N_t}) = \int_0^t du r^{2N_u},$$

where  $N_t$ , the number of crossings between 0 and  $t$ , and  $t_n$ , the time of occurrence of the  $n$ -th crossing, pertain to the elastic problem. According to ref. [9], the sum on the right-hand side converges if  $r < r_c = e^{-\pi/\sqrt{3}} \approx 0.163$ , demonstrating the inelastic collapse of the particle after the finite time

$$c = \lim_{t \rightarrow \infty} t_I = t_1 + r^2(t_2 - t_1) + r^4(t_3 - t_2) + \dots = \int_0^\infty du r^{2N_u}. \quad (8)$$

As first observed in numerical simulations [10], the tail probability of the collapse time  $c$  decays asymptotically as

$$\mathcal{P}(c > \tau) \underset{\tau \rightarrow \infty}{\sim} \tau^{-\Theta(r)}, \quad (9)$$

defining the persistence exponent  $\Theta(r)$ , the analytical expression of which is given by (4) [7].

We now present new derivations of these results.

As shown by McKean [1], a simple consequence of the scaling properties of Brownian motion, and of the Markovian character of the couple  $(x_t, v_t)$ , is the existence of the identities (in distribution)

$$\begin{aligned} t_n &= t_{n-1} + u_{n-1}^2 a, \\ u_n &= u_{n-1} b, \end{aligned}$$

where  $u_n = |v_{t_n}|$ ,  $a = t_1/v_0^2$ ,  $b = u_1/|v_0|$ . Hence

$$\begin{aligned} u_n &= |v_0| b_1 b_2 \dots b_n, \\ t_n - t_{n-1} &= v_0^2 (b_1 b_2 \dots b_{n-1})^2 a_n, \end{aligned}$$

in which the couples  $(a_1, b_1)$ ,  $(a_2, b_2)$ , etc. are independent, with common density [1]

$$f_{a,b}(a, b) = \frac{b}{\pi\sqrt{3}a^2} e^{-\frac{2}{3}(1-b+b^2)} \operatorname{erf} \sqrt{\frac{6b}{a}}.$$

Integrating upon  $a$  yields the marginal distribution [1, 9]

$$f_b(b) = \frac{3}{2\pi} \frac{b^{\frac{3}{2}}}{1+b^3}. \quad (10)$$

The expression of  $c$  given by (8) can now be rewritten as

$$c = v_0^2 (a_1 + r^2 b_1^2 a_2 + r^4 b_1^2 b_2^2 a_3 + \dots), \quad (11)$$

hence (in distribution)

$$c = v_0^2 a + r^2 b^2 c. \quad (12)$$

This is the fundamental equation for the determination of the distribution of the collapse time  $c$ . The class of problems represented by eqs. (11) and (12) has been investigated extensively (for a review see, *e.g.*, [12]). In the present case, simple arguments lead to the following results, starting from (12). (For a more rigorous treatment, see [13].)

The probability density of the random variable  $c$  obeys the integral equation

$$\begin{aligned} f_c(c) &= \int da db f_{a,b}(a,b) \int du f_c(u) \delta(c - v_0^2 a - r^2 b^2 u) \\ &= \int da db f_{a,b}(a,b) \frac{1}{r^2 b^2} f_c\left(\frac{c - v_0^2 a}{r^2 b^2}\right). \end{aligned} \quad (13)$$

Inserting in the last expression a power law of the form  $f_c(c) \sim c^{-(1+\Theta)}$  for  $c \rightarrow \infty$ , the powers of  $c$  on both sides cancel out, and we are left with the condition

$$g(\Theta) = \langle (r^2 b^2)^\Theta \rangle = 1, \quad (14)$$

which determines the exponent  $\Theta(r)$ . Equation (10) yields

$$\langle b^{s-1} \rangle = \frac{1}{2 \cos(\pi s/3)},$$

hence

$$g(\Theta) = \frac{r^{2\Theta}}{2 \sin\left[\frac{\pi}{6}(1 - 4\Theta)\right]}, \quad (15)$$

so that (14) is equivalent to (4).

The function  $g(\Theta)$  is convex, *i.e.*,  $g''(\Theta) > 0$ , and  $g(0) = 1$ . Therefore (14) leads to an acceptable solution for the exponent  $\Theta$  (*i.e.*, a positive one), as long as

$$g'(0) = \langle \ln(r^2 b^2) \rangle < 0. \quad (16)$$

If this condition is fulfilled, then the infinite sum (11) converges with probability 1, *i.e.*, the collapse time  $c$  is finite, which is the condition for inelastic collapse. Equation (15) yields  $g'(0) = 2(\ln r + \pi/\sqrt{3})$ , so that (16) is equivalent to  $r < r_c = e^{-\pi/\sqrt{3}}$ .

Let us remark that, in the derivation of (14), we implicitly assumed that the argument of  $f_c$  in (13) was dominated by  $c$ . This is justified provided that  $\langle (v_0^2 a)^\Theta \rangle \equiv \langle (t_1)^\Theta \rangle$  be finite, which actually holds since  $\Theta(r) < \frac{1}{4}$  for  $r > 0$ , as can be seen from (15).

Contrary to the partial survival problem (see (6)), determining the amplitude of the power law (9) for the distribution of  $c$  is, in general, a very difficult task [12, 14, 15].

Besides persistence exponents, the limiting distributions of observables such as the occupation time  $\int_0^t du (1 + \text{sign } x_u)/2$  of the process (1), or the instant  $t_N$  of last visit of the particle to the origin, before time  $t$ , are also of interest. For the case of a particle leaving the origin with zero initial speed, Lachal [16] found

$$F(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{P}\left(\frac{t_N}{t} < x\right) = \frac{3}{2\pi^2} \int_0^\infty dz \frac{e^{2z}}{z} K_0(4z x^{-\frac{1}{2}}) \text{erf } \sqrt{6z}.$$

Using the integral representation

$$K_0(x) = \int_0^\infty du e^{-x \cosh u},$$

a simple computation leads to the density

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{x^{-\frac{3}{4}}}{\pi^2} \int_0^\infty du \frac{\cosh u}{(2 \cosh u - x^{\frac{1}{2}})\sqrt{x^{\frac{1}{2}} + \cosh u}},$$

which diverges as  $f(x) \approx Ax^{-\frac{3}{4}}$ , with  $A = 3^{\frac{3}{2}}\pi^{-\frac{5}{2}}(\Gamma(\frac{1}{4}))^2/16 \approx 0.224$ , as  $x \rightarrow 0$ , and takes the finite value  $f(1) = \sqrt{3}/(2\pi)$ , at  $x = 1$ . This value coincides with the mean density of zero crossings in logarithmic time, as expected.

Determining the limiting distribution of the occupation time of the process (1) remains an open problem.

In conclusion, the approach presented here brings, on the problems of partial survival and inelastic collapse of a randomly accelerated particle, a viewpoint complementary to that of refs. [6–10].

\* \* \*

We are indebted to A. J. BRAY for having aroused our interest in this problem, and to T. W. BURKHARDT for stimulating discussions.

#### REFERENCES

- [1] MCKEAN H. P., *J. Math. Kyoto Univ.*, **2** (1963) 227.
- [2] GOLDMAN M., *Ann. Math. Stat.*, **42** (1971) 2150.
- [3] SINAI Y. G., *Theor. Math. Phys.*, **90** (1992) 219.
- [4] BURKHARDT T. W., *J. Phys. A*, **26** (1993) L1157.
- [5] LACHAL A., *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **33** (1997) 1.
- [6] MAJUMDAR S. N. and BRAY A. J., *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998) 2626.
- [7] BURKHARDT T. W., to be published in *Phys. Rev. E*, Vol. **63**.
- [8] BURKHARDT T. W., *J. Phys. A*, **33** (2000) L429.
- [9] CORNELL S. J., SWIFT M. R. and BRAY A. J., *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998) 1142.
- [10] SWIFT M. R. and BRAY A. J., *Phys. Rev. E*, **59** (1999) R4721.
- [11] The same result has been arrived at independently by T. W. Burkhardt, B. Derrida and G. Eilenberger (BURKHARDT T. W., private communication).
- [12] VERVAAT W., *Adv. Appl. Prob.*, **11** (1979) 50.
- [13] KESTEN H., *Acta Math.*, **131** (1973) 208.
- [14] DERRIDA B. and HILHORST H., *J. Phys. A*, **16** (1983) 2641.
- [15] DE CALAN C., LUCK J. M., NIEUWENHUIZEN TH. M. and PETRITIS D., *J. Phys. A*, **18** (1985) 501.
- [16] LACHAL A., *Stoch. Proc. Appl.*, **49** (1994) 57.

# CHAPITRE 4

## De la persistance aux états métastables

---

Ce court chapitre vise à faire le lien entre les problèmes de persistance étudiés dans les premiers chapitres de ce mémoire et l'étude des états métastables, qui occupe l'essentiel de la fin de ce mémoire. Cette transition nous permettra d'évoquer la question de la persistance à température finie.

### 4.1 Introduction

Pour le modèle d'Ising ferromagnétique en dimension  $D = 1$  ou  $D = 2$  sur le réseau carré, à température nulle et à la limite thermodynamique, pour la dynamique de Glauber, chaque spin se retourne une infinité de fois. Ceci nous a permis de définir une loi limite non triviale pour l'aimantation locale  $M_t$ , c'est à dire pour la limite aux temps longs de la moyenne temporelle de l'aimantation en un site donné. Ceci étant acquis, il est alors possible de se poser la question de la décroissance algébrique de la probabilité de persistance, question suivie idéalement de la détermination analytique de l'exposant  $\theta$ , et de la loi limite  $f_M$ . Or cette situation est loin d'être générique, et il apparaît qu'il suffit de modifier très légèrement le modèle de spins d'Ising considéré - toujours pour la température nulle - pour que soit modifié en profondeur le comportement dynamique du système. En particulier, on voit apparaître des configurations gelées, c'est à dire que le système évolue vers une configuration dont la dynamique ne lui permet plus de s'échapper. Cette question de la stabilité du comportement persistant d'un système vis à vis des détails du modèle pose la question de l'universalité de la persistance - avant même que ne se pose la question de l'universalité de l'exposant lui-même.

Après une exposition des principaux cas où ce phénomène de blocage, de brisure forte d'ergodicité, a lieu, nous verrons rapidement comment il est possible de restaurer une partie de l'universalité en passant à  $T > 0$ , ainsi que les problèmes que pose ce passage à une température finie.

Nous nous attacherons ensuite à comprendre quelles sont les nouvelles questions que pose l'émergence de structures dynamiquement gelées. Cette nouvelle perspective nous mènera alors naturellement à l'étude des états métastables.

## 4.2 Phénomènes de blocage dynamique

L'apparition de configurations - entièrement ou en partie seulement - gelées est une conséquence directe de la température nulle : en effet, il arrive que le système se trouve en un point de l'espace des phases qu'il ne peut quitter qu'en franchissant une barrière d'énergie. Or à  $T = 0$  tout mouvement engendrant une variation positive d'énergie est interdit, puisqu'il n'y a pas de fluctuations thermiques. Par exemple, ceci n'arrive pas dans le cas du modèle d'Ising unidimensionnel parce qu'il existe toujours des mouvements à coût énergétique nul - les mouvements de diffusion des parois de domaines - qui permettent au système de continuer à évoluer<sup>1</sup>.

### 4.2.1 Grandes dimensions

Les simulations du modèle d'Ising sur réseau hypercubique [178] montrent que lorsque la dimension croît la persistance cesse de décroître algébriquement mais au contraire semble converger vers une valeur finie  $p_0(\infty)$ , ce qui signifie qu'une fraction des spins ne se retournent jamais. Ceci peut s'expliquer par l'existence, dès la dimension 2 et pour des systèmes de taille finie, de configurations dans lesquelles le système reste indéfiniment [175, 176]. Il est fort probable que cet effet joue un rôle important en grande dimension, où les systèmes simulés sont nécessairement de petite taille. On peut se poser la question de savoir si cet arrêt de la dynamique apparaît si la dynamique est définie *a priori* sur un système de taille infinie.

### 4.2.2 Désordre

L'introduction de désordre peut modifier de manière très importante le comportement d'un système. Du point de vue de la persistance les systèmes désordonnés ont été assez peu étudiés (voir cependant [66, 119], et ci-dessous).

### Modèles unidimensionnels

Suivant le type de désordre, on n'observe pas la même phénoménologie [143]. Le cas le plus simple pour le voir est le cas unidimensionnel : dans le cas de la chaîne d'Ising, si tous les couplages ont la même amplitude, le système est en fait équivalent à la chaîne ferromagnétique usuelle par invariance de jauge ; si par contre les couplages sont des variables aléatoires à distribution continue, chaque spin se retourne un nombre fini de fois avant de s'arrêter, c'est à dire que pour tout  $i$  la limite  $S_i(t \rightarrow \infty)$  existe. Si les couplages sont des variables aléatoires discrètes pouvant prendre plusieurs valeurs différentes, la situation est intermédiaire et certains spins s'arrêtent tandis que d'autres continuent à se retourner indéfiniment.

### En dimension supérieure

Certains modèles désordonnés en dimension supérieure ont été étudiés numériquement. Ainsi l'auteur de [90, 89] s'est intéressé au modèle d'Ising ferromagnétique  $2D$

<sup>1</sup>Nous aurons d'ailleurs l'occasion au chapitre prochain de constater que lorsqu'on interdit ces mouvements, le système s'arrête dans un état métastable [172].

dilué, c'est à dire que deux spins voisins sur le réseau carré bidimensionnel sont en interaction ferromagnétique (avec un couplage d'amplitude  $J$ ) avec probabilité  $p$ . Selon qu'on est dans le cas pur  $p = 1$ , pour lequel on retrouve le système usuel, avec une probabilité de persistance qui décroît en  $p_0(t) \sim t^{-\theta}$ , avec  $\theta \approx 0.22$ , ou dans le cas dilué  $p < 1$ , les résultats sont très différents. Dans le cas faiblement dilué  $p$  proche de 1 [90] l'auteur identifie trois régimes temporels successifs distincts : dans le premier le système se comporte comme le système pur et "ne voit pas" les défauts, dans le second la persistance décroît comme une puissance de  $\ln t$  et finalement le système s'arrête. Dans le cas fortement dilué [89] une fraction macroscopique  $p_0(\infty)$  des spins ne se retourne jamais, et  $p_0(t) - p_0(\infty)$  décroît exponentiellement vers 0.

Dans [153] les auteurs étudient la dynamique de température nulle du verre de spin  $\pm J$  en dimensions  $D = 2$  et  $D = 3$ . Ils observent qu'une fraction macroscopique des spins gèle, alors que la fraction complémentaire est constituée de spins qui se retournent une infinité de fois, avec des temps entre deux retournements successifs qui suivent une loi large, ce qui permet de définir un exposant  $\theta$  pour ce système - en soustrayant correctement la fraction de spins gelés aux temps longs - , qui vaut 0.64 en dimension 2 et 0.46 en dimension 3. Notons que les auteurs mentionnent qu'ils ont en outre vérifié que la loi de l'aimantation locale pouvait être interpolée par une loi bêta d'exposant  $\theta$ , ce qui permet de confirmer la valeur numérique de l'exposant<sup>2</sup>.

Une grande diversité de comportements alternatifs à la persistance usuelle - telle que définie dans le chapitre 1 - est donc observée.

### 4.3 Réseau sous-jacent

Dans le cadre de l'étude des phénomènes critiques statiques, le modèle d'Ising bidimensionnel a les mêmes propriétés universelles - en particulier les mêmes exposants - qu'il soit étudié sur un réseau carré ou sur un réseau triangulaire, ou hexagonal. Il n'en est plus de même ici : le réseau sous-jacent peut, toujours à cause de la dynamique de température nulle, jouer un rôle très important dans la dynamique. Ainsi, lorsque l'on place un système de spins d'Ising ferromagnétique, sans désordre ni dilution, sur un réseau tel que chaque spin a un nombre impair de voisins, la dynamique de Glauber s'arrête et le système se gèle. Sur un tel réseau, aucun spin ne peut être soumis à un champ local nul - qui permet les mouvements de diffusion - et donc chaque spin finit par être aligné sur son champ local : une telle configuration est dynamiquement stable, puisqu'on ne peut en sortir qu'en franchissant une barrière énergétique.

Notons que cette dépendance dans le réseau sous-jacent est un phénomène qui est connu depuis plusieurs années pour le modèle de Potts [158] lorsque le nombre  $q$  de couleurs est trop grand ( $q \geq d + 1$ ) pour certains réseaux : sur le réseau carré avec des interactions plus proches voisins apparaissent des structures gelées, alors que ce n'est pas le cas sur le réseau triangulaire ou sur le réseau carré avec des interactions à distance 1 (plus proches voisins) et 2. Du point de vue de la persistance, on retrouve

<sup>2</sup>Il n'est bien entendu pas question d'affirmer sur la base d'une proximité numérique qu'il s'agit réellement d'une loi bêta.

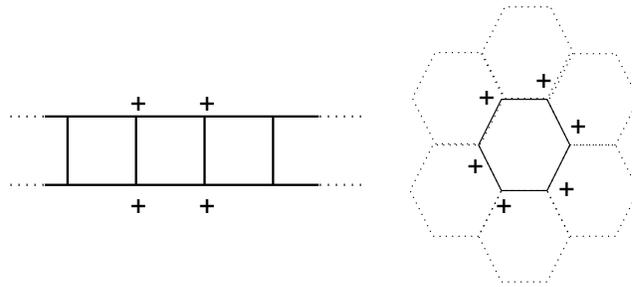


FIG. 4.1 – Deux exemples de systèmes non désordonnés qui se bloquent à  $T = 0$  pour la dynamique de Glauber : le modèle quasi-1D (à gauche) et le modèle 2D sur réseau hexagonal (à droite). En l'absence d'excitations thermiques aucun des spins représentés ne peut se retourner, quelle que soit l'orientation des voisins non représentés.

bien entendu les mêmes observations [51].

#### 4.4 Conservation du paramètre d'ordre

Une question naturelle, que nous avons déjà mentionnée, consiste à savoir ce qu'il advient de la persistance lorsque le paramètre d'ordre du système est conservé. Le système modèle pour ce type de système est le modèle de Kawasaki [93]. La dynamique n'est plus une dynamique de retournement mais une dynamique d'échange : l'aimantation est donc conservée localement. Cette dynamique entraîne que ce système, lui aussi, gèle à  $T = 0$ .

Du point de vue des propriétés dynamiques de systèmes de spins d'Ising à température nulle, la décroissance algébrique de la persistance apparaît plus comme un cas particulier d'un ensemble plus vaste de phénomènes, avec une phénoménologie variée, que comme le comportement générique. Néanmoins, il s'agit dans la plupart des cas - le modèle de Kawasaki, qui est un peu à part, sera étudié dans le chapitre 6 - d'un artefact de la température nulle, et on s'attend à ce que la température finie restaure, en même temps que l'ergodicité, une certaine forme d'universalité, en particulier que les propriétés aux temps longs ne dépendent plus de la topologie du réseau.

#### 4.5 Température finie

La question de la persistance à température finie est naturelle, non seulement pour essayer de répondre aux problèmes évoqués ci-dessus, mais surtout pour étudier l'universalité de la persistance. Cette question peut se formuler très simplement - et c'est dans ce cadre que nous la présentons - en termes du modèle d'Ising bidimensionnel, puisque  $D = 2$  est la dimension la plus basse pour laquelle la température critique  $T_c$  est strictement positive. Les exposants  $z$  et  $\lambda$ , gouvernant respectivement la loi de croissance de la taille des domaines  $L(t)$  et la décroissance de la fonction d'autocorrélation  $\langle S_i(0)S_i(t) \rangle$  sont, dans la phase de basse température, donnés par le point fixe  $T = 0$ . En est-il de même pour la persistance ?

Lorsqu'on veut se poser la question de la persistance pour une température non nulle un premier problème apparaît, qui est celui de la définition même de la persistance à  $T > 0$ . Lorsque la température est nulle un spin ne se retourne que lorsqu'il voit passer une interface entre un domaine de spins  $+1$  et un domaine de spins  $-1$ ; en particulier les domaines sont bien définis comme ensembles connexes de spins de même orientation, ce qui n'est plus le cas à  $T > 0$ . En effet, les fluctuations thermiques autorisent alors le retournement d'un spin même si ce n'est pas énergétiquement favorable, et la probabilité de persistance décroît exponentiellement : si l'on s'en tient à la probabilité de persistance, il n'y a plus d'exposant  $\theta$ . Trois approches différentes ont été développées pour répondre à cette question, et toutes trois sont en accord avec l'idée que l'exposant de persistance correctement défini est identique dans toute la phase basse température  $T < T_c$ .

#### 4.5.1 Comparaison de systèmes

La première méthode (historiquement) est celle de [50]. Elle consiste à comparer le système "vrai" avec un système préparé dans un état complètement ordonné en faisant évoluer les deux systèmes avec les mêmes nombres aléatoires. Les retournements de spins dans le système ordonné étant nécessairement des retournements thermiques, il est possible de discriminer, dans le système "vrai", entre les retournements thermiques, qui ne font pas changer un spin de phase, et les retournements dûs au passage d'une interface, qui sont ceux que l'on veut prendre en compte dans l'étude de la persistance. Cette méthode, simple à mettre en oeuvre, pose néanmoins plusieurs problèmes pointés par [84], en particulier une dépendance importante dans l'algorithme utilisé.

#### 4.5.2 Persistance par bloc

En se fondant sur des idées de groupe de renormalisation, les auteurs de [39, 40] étudient non plus la persistance d'un spin unique mais celle d'un spin agrégé par une procédure de renormalisation "à la Wilson". Cette procédure permet de distinguer à grande échelle les phases ordonnées, les fluctuations thermiques étant évacuées.

#### 4.5.3 Temps d'occupation

L'idée principale de [58, 59] consiste à regarder l'aimantation locale plutôt que la probabilité de persistance seule. Nous avons eu l'occasion de voir que cette quantité permet de définir l'exposant de persistance comme exposant de divergence aux bords du support de la loi de  $M_t$ . Or l'étude de  $M_t$  pour le modèle d'Ising 2D sur réseau carré permet de distinguer trois régimes, correspondant aux trois points fixes  $T < T_c$ ,  $T = T_c$  et  $T > T_c$ . En particulier, pour la phase de basse température  $T < T_c$  on observe comme à  $T = 0$  une loi en  $\cup$ , mais celle-ci a pour support  $[-m_{\text{eq}}(T), m_{\text{eq}}(T)]$  où  $m_{\text{eq}}(T)$  est l'aimantation d'équilibre, et le même exposant aux bords pour tout  $T < T_c$ . Plus encore, il semble que la loi complète de  $M_t/m_{\text{eq}}$  soit indépendante de  $T$ .

## 4.6 Persistance et états bloqués

Nous laissons de côté le problème - important - de l'universalité de la persistance pour revenir au cas  $T = 0$ . Du point de vue de l'étude de systèmes de spins d'Ising

dynamiques à température nulle, la persistance doit être appréhendée dans un contexte plus large, qui prend en compte la possibilité d'arrêt de la dynamique pour certains systèmes. Afin d'avoir une vision unifiée, les auteurs de [145] ont proposé une classification des modèles en trois grands types distincts :  $\mathcal{I}$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{M}$ . Les modèles de type  $\mathcal{I}$  sont ceux pour lesquels chaque spin se retourne (avec probabilité 1) une infinité de fois : ce sont les modèles pour lesquels la persistance vue comme probabilité de non-retournement d'un spin a véritablement un sens ; le modèle d'Ising ferromagnétique en dimension 1 et 2 est de ce type, ainsi que le modèle dilué pour la dilution maximale (où les spins sont tous indépendants les uns des autres). Les modèles de type  $\mathcal{F}$  sont ceux dans lesquels au contraire chaque spin se retourne un nombre fini de fois ; le modèle bidimensionnel sur réseau hexagonal<sup>3</sup>, le modèle quasi-1D, la chaîne d'Ising avec couplages aléatoires gaussiens ou la chaîne ferromagnétique d'Ising-Kawasaki sont de ce type. La dernière catégorie, le type  $\mathcal{M}$ , est intermédiaire : une partie des spins se retournent un nombre fini de fois avant de s'arrêter dans une position figée alors que la fraction complémentaire continue de se retourner indéfiniment. Parmi ces systèmes se trouve en particulier le verre de spin  $\pm J$  en dimension 2 et 3 sur réseau carré.

Cette classification, qui est une classification de température nulle, est en grande partie conditionnée par l'existence - ou non - de mouvements d'énergie nulle, qui eux-mêmes peuvent être de différentes sortes : on peut avoir affaire à des spins isolés (cas du modèle d'Ising ferromagnétique dilué en champ nul) dont le retournement n'a aucun impact sur le comportement du système, ou bien à des mouvements de diffusion de parois de domaines (cas du modèle d'Ising ferromagnétique complet en  $D = 1$  ou  $2$ ), qui permettent la fusion de domaines. De même, diverses raisons peuvent être la cause de l'inexistence de tels mouvements, comme par exemple des contraintes géométriques dues au réseau, ou bien des contraintes dynamiques : nous verrons par exemple dans le prochain chapitre que le modèle d'Ising unidimensionnel, qui pour la dynamique complète de Glauber est de type  $\mathcal{I}$ , devient de type  $\mathcal{F}$  lorsqu'on interdit explicitement les mouvements diffusifs, et voit alors ses propriétés changer énormément.

Ainsi, avant même de poser la question de la persistance à température nulle, il est nécessaire de définir précisément le système étudié, puis de déterminer à quel type de modèle on a affaire, ce qui peut en soi constituer un problème non trivial. Les questions intéressantes ne sont ensuite pas les mêmes selon le type de modèle envisagé. Pour les systèmes de type  $\mathcal{I}$ , les questions de persistance sont celles du chapitre 1. Pour les modèles de type  $\mathcal{M}$  on peut se poser les mêmes questions en se restreignant aux spins qui se retournent indéfiniment [153]. Quant aux modèles de type  $\mathcal{F}$ , ils soulèvent de nouvelles questions concernant d'une part la dynamique :

- Quelle est la fraction  $p_0(\infty)$  des spins qui ne se retourne pas ? Plus généralement, quelle est la distribution du nombre de retournements ?
- Comment le système relaxe-t-il dans cet état bloqué, c'est à dire comment se comporte le système avant l'arrêt de la dynamique ?

<sup>3</sup>On peut montrer par exemple pour ce modèle que chaque spin se retourne au plus 8 fois [26].

- Combien de temps un système de ce type met-il pour atteindre un état bloqué ? Comment ce temps de blocage varie-t-il avec la taille du système ?

et d'autre part la structure de l'état final  $\{S_i(\infty)\}$  lui-même, ainsi que sa dépendance en l'état initial :

- Combien y a-t-il de configurations gelées en tout ? Combien y en a-t-il d'énergie donnée ? Combien d'entre elles sont-elles accessibles à partir d'une configuration initiale donnée ?
- Les configurations bloquées sont-elles équivalentes ?
- Que peut-on dire de leur structure ? Des corrélations spin-spin ? De la taille des domaines ?

Ces questions, auxquelles nous sommes naturellement arrivé par le biais de l'étude de la persistance, sont en fait aussi au coeur d'un domaine légèrement différent, qui traite de la dynamique vitreuse et de la relaxation lente. Elles seront étudiées pour divers "modèles-jouets" dans le chapitre 5, ainsi que pour le modèle de Kawasaki dans le chapitre 6.



## CHAPITRE 5

# Etats métastables : quelques résultats exacts en dimension 1

---

Ce chapitre présente nos travaux [172] sur la dynamique de température nulle de certains modèles de spins unidimensionnels. Si ceux-ci peuvent être vus dans la perspective directe du chapitre précédent, il s'insèrent aussi naturellement dans le cadre plus large de travaux récents sur la dynamique lente des systèmes vitreux et granulaires. D'autre part, ils constituent une contribution à l'étude des modèles de déposition sur substrat désordonné.

### 5.1 Etats métastables en champ moyen

Les systèmes physiques intéressants ne sont pas, nous l'avons vu dans les premiers chapitres de ce mémoire, tous à l'équilibre. Un grand nombre d'entre eux, qui vont nous intéresser ici, sont dans des situations de quasi-équilibre et n'évoluent pas sur une échelle de temps long. Cette situation se rencontre fréquemment dans la nature. Par exemple, dans les conditions de pression et de température usuelles dans l'atmosphère, l'hydrogène est, du point de vue nucléaire, métastable par rapport à la formation d'hélium. Mais pour observer une telle réaction (pour une mole de matière) il faudrait attendre environ  $10^{1000}$  années, soit infiniment plus longtemps que l'âge de l'univers : il est légitime de considérer l'hydrogène comme un état stable de la matière.

Les états métastables sont bien décrits par la théorie de Landau : ce sont les minima du potentiel thermodynamique. Une fois le minimum pertinent identifié, on peut appliquer les concepts de la thermodynamique - par exemple dans le cas de l'hydrogène en excluant la formation d'hélium, ou dans le cas des verres en excluant explicitement l'état cristallin.

Pour un système ferromagnétique le potentiel thermodynamique [109] est l'énergie libre

$$F(M) = aM^2 + bM^4 - HM,$$

où  $H$  est le champ appliqué et  $a$  est proportionnel à  $T - T_c$ . Les états d'équilibre sont à chercher parmi les zéros de  $\frac{\partial F}{\partial M}$ . Ces solutions sont tracées, pour une température  $T < T_c$  fixée, sur la figure 5.1. Les états d'équilibre 'vrais' sont les arcs  $(AD)$  et  $(A'D')$  où l'aimantation est alignée sur le champ appliqué, mais on peut les prolonger jusqu'en  $B$  ( $B'$ ) : on reste sur une ligne de minima locaux. Les arcs  $(AB)$  et  $(A'B')$  sont les états

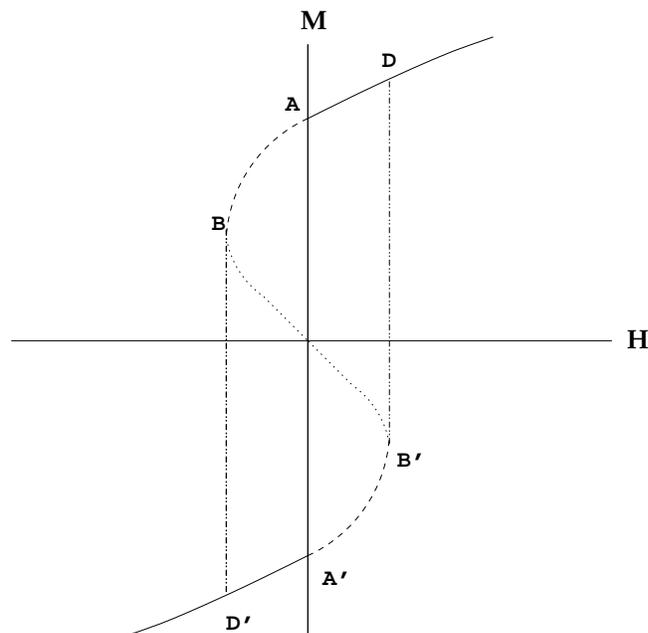


FIG. 5.1 – Isotherme d'un modèle ferromagnétique dans la théorie de Landau, en dessous de la température de Curie. Traits continus : états d'équilibre stables ; tirets : états métastables ; pointillés : états instables.

métastables. L'arc  $(BB')$  par contre est constitué des états instables, correspondant à un maximum de  $F(M)$  (la dérivée seconde est négative).

En champ moyen, les états métastables sont bien définis, c'est à dire qu'on peut leur associer de 'vrais' états thermodynamiques : le système ne peut en sortir, et le formalisme de l'équilibre s'applique. Mathématiquement, l'existence des états métastables en champ moyen est due à la possibilité de prolonger analytiquement l'énergie libre au delà du point  $A$  sur l'arc  $(AB)$ . En dimension finie, le modèle principal est le modèle phénoménologique de la gouttelette : le système peut, à l'instar d'une vapeur surrefroidie, voir apparaître des gouttelettes de phase stable. Un examen attentif de l'énergie de telles gouttelettes montre qu'il existe un rayon critique, en dessous duquel elles ne sont pas favorisées énergétiquement, mais au dessus duquel il leur est favorable de croître : le système est envahi par la phase stable (dans la représentation de la figure 5.2, la formation d'une gouttelette critique correspond à l'arrivée au sommet). Dans le modèle de la gouttelette critique, une singularité essentielle se développe en  $H = 0$  [110, 65] qui empêche le prolongement : on ne peut plus rigoureusement parler d'états métastables.

Il existe un autre cas dans lequel les états métastables sont bien définis : lorsqu'on étudie un système à température strictement nulle (cas qui est apparu naturellement au chapitre précédent). Le système peut alors être piégé dans un minimum local du potentiel et y rester localisé indéfiniment même en l'absence de barrières infinies. Ceci peut se représenter schématiquement comme sur la figure 5.2.

Notons que si la notion de 'minimum du potentiel' peut être définie sans ambiguïté indépendamment de la dynamique dans le cas d'une fonction potentiel dépendant de variables continues, il n'en est pas de même pour des systèmes de spins discrets. Dans

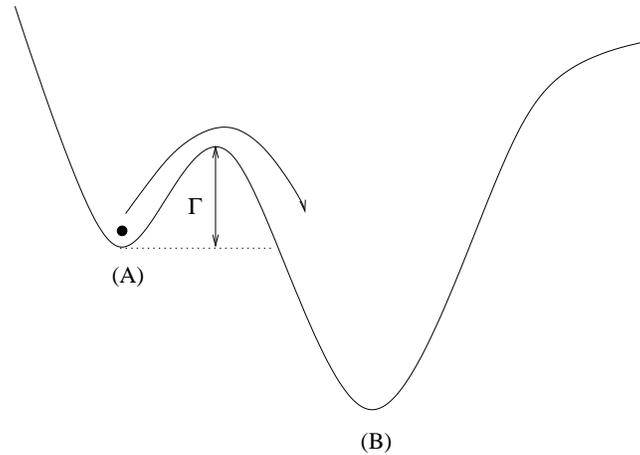


FIG. 5.2 – Représentation schématique d'un processus activé. L'état (A) est un état métastable : pour s'en échapper la particule doit passer la barrière d'énergie  $\Gamma$ . Le temps avant qu'un tel événement se produise est proportionnel à  $e^{\frac{\Gamma}{kT}}$ . Ce temps diverge véritablement lorsque  $\Gamma = \infty$  (champ moyen à la limite thermodynamique) ou  $T = 0$ . Dans les autres cas l'existence de processus activés peut permettre le franchissement, et l'état (A) doit être défini relativement à cette échelle de temps.

ce cas, il est préférable de parler de configuration stable pour la dynamique dont on a muni le système : les minima locaux de l'énergie sont les configurations telles qu'aucun mouvement autorisé n'abaisse l'énergie. Ainsi, les configurations stables ne sont pas les mêmes selon qu'on autorise ou non plusieurs retournements simultanés de spins [144, 15].

La description des états métastables au-delà des cas particuliers que sont le champ moyen et la température nulle nécessite de dépasser une description statique des états métastables, et de prendre en compte les aspects dynamiques intrinsèques à ces états. L'idée principale, consistant à définir un tel état relativement à une échelle de temps, semble intuitivement claire, mais sa formalisation rigoureuse, si l'on veut prendre en compte les phénomènes dynamiques, reste un sujet de recherche actif [71, 14].

## 5.2 Dynamique lente et statistique des états métastables

Dans les dernières décennies, les états métastables ont fait l'objet d'un intérêt très important de la part de physiciens étudiant des systèmes très divers, que l'on peut regrouper génériquement - et sans discuter ici de la pertinence de cette appellation - sous le terme de 'systèmes vitreux', comme par exemple les verres de spin, les verres structuraux, les colloïdes condensés, les polymères ou encore, dans une certaine mesure, les milieux granulaires. Ces systèmes ont des propriétés qui peuvent être très différentes, mais partagent aussi un certain nombre de caractéristiques communes permettant la circulation d'idées et de concepts ou de techniques de calcul d'un domaine à l'autre. C'est sur ce point que la présentation qui suit veut mettre l'accent. Pour cette raison, on essaiera au maximum d'utiliser un langage commun, qui pourra parfois sembler un peu abusif. Le but est de montrer comment des systèmes dont la diversité ne fait pas de doute peuvent être, sous certains aspects du moins, étudiés par le biais d'un nombre

restreint de concepts.

En particulier, ces différents systèmes sont caractérisés par la divergence, à basse température (ou haute densité), de leur temps de relaxation : si on les refroidit brutalement à suffisamment basse température, ils tombent hors d'équilibre. Si on les refroidit à température strictement nulle, ils s'arrêtent rapidement dans un état métastable d'énergie supérieure à celle du fondamental, et ne peuvent atteindre l'équilibre.

### 5.2.1 Verres de spins en champ moyen

L'étude des verres de spin en champ moyen a largement contribué à l'émergence d'une image de l'espace des phases vu comme paysage accidenté, divisé en de nombreuses vallées séparées par des barrières. Cette image, malgré son caractère parfois peu rigoureux, a beaucoup aidé à la compréhension de nombreux aspects tant statiques que dynamiques des systèmes complexes.

Deux grandes classes de modèles de verres de spin en champ moyen peuvent être distinguées, selon que la transition statique est continue ou discontinue, dont les 'prototypes' sont respectivement le modèle de Sherrington-Kirkpatrick [164] (SK) et le modèle  $p$ -spin [36]. Pour ce modèle de nombreux résultats analytiques sont disponibles. Son hamiltonien est

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{p!} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} J_{i_1, i_2, \dots, i_p} S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_p} \quad (5.1)$$

où les couplages  $J_{i_1, i_2, \dots, i_p}$  sont des variables aléatoires indépendantes gaussiennes de variance  $\frac{p!}{2N^{p-1}}$  ( $N$  est la taille du système), les spins sont des variables continues contraintes par  $\sum_i S_i^2 = N$ , et  $p \geq 3$ <sup>1</sup>. Un des intérêts de cette classe de systèmes à transition discontinue est qu'elle présente de fortes similarités avec les verres structuraux [98], ce qui permet d'envisager d'utiliser des techniques développées originellement pour les verres de spin pour l'étude de la transition vitreuse. Ces deux classes de modèles ont des propriétés statiques et dynamiques très différentes.

#### Statique

Pour le modèle SK, la transition statique est une transition de brisure complète de la symétrie des répliques [137]. Pour  $T < T_C$ , la mesure de Gibbs est répartie sur de nombreux états<sup>2</sup> séparés par des barrières de toutes tailles (certaines pouvant être infinies), et l'ergodicité est brisée. La même solution peut être retrouvée par le biais des équations TAP [181].

Pour les modèles à transition discontinue, la transition correspond à un pas de brisure de symétrie des répliques. Pour  $T < T_C$ , seul un petit nombre d'états purs existent.

#### Dynamique

Le modèle SK a un comportement attendu, avec une transition dynamique (divergence du temps de relaxation) à une température  $T_D$  coïncidant avec  $T_C$ . La dynamique

<sup>1</sup>Pour  $p = 2$  on retrouve le modèle SK. Pour  $p \rightarrow \infty$  on retrouve le modèle à énergie aléatoire [49].

<sup>2</sup>Nombreux signifie ici en nombre exponentiellement grand dans la taille du système.

dans la phase de basse température montre du vieillissement [42]. De plus les observables à un temps, telle l'énergie, convergent vers leur valeur d'équilibre.

Il n'en est pas de même du modèle  $p$ -spin, qui possède une transition dynamique à une température  $T_D > T_C$ . La phase intermédiaire  $T_C < T < T_D$  est très complexe : alors que thermodynamiquement le système est dans la phase paramagnétique, l'espace des phases est scindé en un nombre exponentiellement grand de vallées distinctes, correspondant aux solutions des équations TAP du modèle [37]. La densité d'énergie de ces solutions prend ses valeurs dans un intervalle fini  $[f_{\min}, f_{\text{seuil}}]$ , et les états d'équilibre ne correspondent pas aux solutions à  $f_{\min}$ . La présence d'un nombre exponentiellement grand de solutions oblige à prendre en compte un terme entropique supplémentaire, et les états d'équilibre sont obtenus en minimisant une densité d'énergie libre généralisée. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce terme entropique plus loin. Lorsqu'on refroidit brutalement un tel système en-dessous de  $T_D$  et qu'on le laisse relaxer, le système n'atteint jamais son énergie d'équilibre :  $E(t)$  décroît vers une énergie limite  $E_{\text{seuil}} = E_{\text{eq}}(T_D) > E_{\text{eq}}(T)$  [68].

### 5.2.2 Verres structuraux

Dans le cadre de l'étude des verres structuraux une image assez similaire a été développée. De nombreuses études visent en effet à décrire les verres par le biais de l'étude de la structure géométrique et topologique de la surface d'énergie potentielle [81]. En particulier, une décomposition de cette hypersurface en bassins a été proposée [179] : à chaque point est associé le minimum atteint par une dynamique de descente de gradient - donc une dynamique de température nulle - en partant de ce point, l'ensemble des points menant à un même minimum formant un bassin appelé dans ce contexte une structure inhérente. La dynamique est ensuite décomposée en une partie rapide (mouvement intra-bassin) et une partie lente (mouvement inter-bassin). L'approche par les structures inhérentes est intéressante en cela qu'elle ne repose pas sur une image champ moyen.

Plus généralement, l'idée que la structure géométrique de l'espace des états - et ce malgré la difficulté qu'il peut y avoir à définir correctement ce qu'est un état - contient une large part de l'information sur la dynamique a largement inspiré nombre d'études sur la statistique des points stationnaires entendus comme extrema du potentiel [103, 22, 4, 28]. Alors que dans le cas du ferromagnétique ceux-ci pouvaient être de deux sortes uniquement (minimum ou maximum), la situation est plus riche dans le cas des systèmes vitreux du fait de la grande dimension de l'espace de configuration, et les points stationnaires peuvent être classés suivant le nombre de directions instables (données par les valeurs propres de la hessienne, pour les systèmes continus). En étudiant la distribution statistique des différents types de points stationnaires en fonction de divers paramètres (énergie, overlap avec des configurations fixées), on obtient une image fine de l'espace dans lequel se déplace le point représentatif du système.

## 5.3 Statistique des états métastables

Nous présentons ici l'entropie *a priori*, ainsi que l'hypothèse dite d'Edwards, qui vise à donner une formulation thermodynamique des milieux granulaires. Cette hypo-

thèse est en fait présentée dans un cadre un peu plus général, puisque les idées qui la sous-tendent peuvent être utilisées pour essayer de mieux comprendre, plus généralement, les systèmes dont l'espace des phases contient un grand nombre de configurations métastables.

### 5.3.1 Entropie *a priori*

Pour les systèmes 'vitreux' on a génériquement un nombre exponentiellement grand d'états métastables d'énergie  $E$  :

$$\mathcal{N}(E; N) \sim e^{NS_{\text{ap}}(E)}, \quad (5.2)$$

ce qui permet de définir une fonction de type entropie,  $S_{\text{ap}}(E)$ . Celle-ci est appelée dans le contexte des verres de spin entropie configurationnelle ou complexité, et dans le contexte des milieux granulaires entropie d'Edwards. Afin de garder des notations cohérentes avec [172] et avec les questions soulevées dans la suite de ce chapitre, nous la notons  $S_{\text{ap}}$  pour 'entropie *a priori*', afin de bien marquer le fait qu'elle résulte d'un comptage purement combinatoire des états métastables : tous les états métastables de même énergie  $E$  sont considérés comme étant équivalents entre eux, et sont comptés avec le même poids.

Cette fonction entropie code une partie importante de la structure de l'espace des phases à basse température, et son calcul est en général difficile.

### 5.3.2 Milieux granulaires : hypothèse d'Edwards

Une fonction entropie similaire est apparue dans le cadre de l'étude des milieux granulaires. Ceux-ci présentent un certain nombre de points communs avec les verres. En particulier, comme il est bien connu, par exemple par l'expérience hebdomadaire de rangement de grains alimentaires - tels le riz ou le café - divers dans des bocaux, les systèmes granulaires possèdent de nombreux états bloqués (ceux-ci sont définis comme les états où le mouvement d'un grain engendre un coût énergétique). En l'absence de forçage extérieur, un système granulaire tend à s'arrêter très rapidement dans un état gelé ; la taille macroscopique des grains rend l'agitation thermique complètement négligeable devant les autres forces en jeu : un système granulaire se comporte de manière effective comme un système de température nulle. Plus précisément, il n'existe pas de 'température' naturelle pour ce type de système. Une possibilité pour essayer de définir une température consiste à "mimer" l'agitation thermique en injectant de l'énergie. Parmi les sources d'injection proposées, citons celle qui consiste à 'taper' le système. Cette dynamique consiste en une succession de cycles tape-relaxation : on tape le système (en le faisant vibrer par exemple), ce qui lui injecte de l'énergie cinétique, et on laisse ensuite le système relaxer. Les frottements entre les grains dissipent rapidement l'énergie injectée, et le système s'arrête de nouveau dans un état bloqué. On recommence alors un cycle. La dynamique effective qui en résulte peut dépendre de nombreux paramètres - fréquence, amplitude des vibrations ou des secousses - ainsi que de la manière de taper<sup>3</sup>. Dans la plupart des expériences, on observe soit une

<sup>3</sup>On discutera plus loin des différentes manières de taper un système et de l'influence que cela peut avoir.

compaction très lente (le système est dans un état de quasi-équilibre et ses propriétés changent très lentement avec le temps), soit un état stationnaire hors d'équilibre, c'est à dire que les observables à un temps ne dépendent plus de  $t$  et que les observables à deux temps comme les fonctions de corrélation dépendent uniquement de la différence des temps.

Plaçons-nous pour plus de simplicité dans le cas stationnaire. Le système visite des états bloqués d'énergie<sup>4</sup> (moyenne) constante, et ressemble beaucoup à un système usuel de physique statistique visitant des micro-états situés sur une même surface isoénergie. En se basant sur cette analogie, ainsi que sur l'existence d'un nombre exponentiellement grand d'états bloqués<sup>5</sup>, Edwards et ses collaborateurs ont proposé une hypothèse [61] permettant de construire un formalisme thermodynamique pour les milieux granulaires. Cette hypothèse, qui repose sur l'idée naturelle que les états métastables sont les configurations pertinentes pour la description de l'état stationnaire, s'énonce en disant que pour une situation atteinte dynamiquement, les observables physiques peuvent être obtenues en faisant une moyenne sur les états bloqués avec *une mesure plate*. En d'autres termes, cela consiste à dire qu'il existe un formalisme thermodynamique, dont l'ensemble des micro-états est celui des configurations gelées, et que cet ensemble permet une description adéquate de la dynamique hors d'équilibre. En particulier, on peut définir une température *a priori*  $T_{\text{ap}}$  (plus généralement, à toute observable que l'on fixe, le formalisme associe un multiplicateur de Lagrange qui est 'l'inverse d'une température'. Dans le cas précis des milieux granulaires, si on prend comme 'énergie' la densité du système, la 'température'  $T_{\text{ap}}$  est une quantité intensive qu'Edwards et ses collaborateurs ont appelé 'compactivité') :

$$\frac{1}{T_{\text{ap}}} = \left. \frac{\partial S_{\text{ap}}}{\partial E} \right|_{E_{\text{dyn}}} \quad (5.3)$$

où  $E_{\text{dyn}}$  est l'énergie (importée de la dynamique) dans l'état stationnaire. La question qui se pose ensuite - outre les calculs eux-mêmes dans l'ensemble *a priori* - est celle du sens à donner à cette température *a priori*.

Notons en outre que cette hypothèse peut être vue elle-même comme un principe d'information minimale : ne connaissant rien sur la structure des états bloqués atteints dynamiquement, la seule hypothèse raisonnable que l'on puisse faire est celle d'une distribution uniforme.

Cette hypothèse a, en plus de l'intérêt théorique qu'il y a à avoir une description thermodynamique de ces systèmes, un caractère pratique non négligeable. En effet, elle permet de remplacer les moyennes dynamiques, auxquelles il est difficile d'accéder, par des moyennes d'ensemble, avec les contraintes adéquates. Les seules quantités qu'il faut importer de la dynamique elle-même sont les valeurs des observables fixées, comme par

<sup>4</sup>Pour un milieu granulaire, il est préférable de parler de densité. Nous persistons néanmoins dans l'utilisation du terme 'énergie' pour désigner une observable typique du système, afin de faire plus facilement le lien avec les modèles de spins étudiés ci-après, et plus généralement d'avoir une présentation mettant plus en avant le caractère général de la démarche que les systèmes auxquels elle peut s'appliquer.

<sup>5</sup>Ceci peut être considéré comme une hypothèse : nous savons que dans le cas des verres de spin par exemple le calcul du nombre d'états bloqués est souvent une première étape non triviale.

exemple l'énergie.

S'agit-il d'une 'bonne hypothèse' au sens où elle fournit une description juste - au moins de manière approchée - de la dynamique? Et si oui, quel est le sens à donner aux observables thermodynamiques qui apparaissent naturellement?

### 5.3.3 Test en champ moyen : le modèle $p$ -spin

Une partie des réponses à cette question est venue de l'étude - menée indépendamment des préoccupations de la physique des milieux granulaires - des modèles de verres de spin en champ moyen à transition discontinue (section 5.2.1). La structure de l'espace des phases du modèle  $p$ -spin est en grande partie connue, en particulier la phase  $T \in [T_C, T_D]$ . Au-delà de l'étude par les répliques, qui prévoit un état paramagnétique (le paramètre d'ordre de Parisi  $P(q)$  est un pic  $\delta(q)$ ), l'étude précise de la structure géométrique de l'espace des phases [27] montre l'existence d'un nombre exponentiellement grand d'états métastables (qui peuvent être identifiés aux solutions TAP [68, 9]). Cela permet de définir  $S_{\text{ap}}$  (la complexité) comme indiqué ci-dessus, et par suite  $T_{\text{ap}}$ .

La dynamique hors d'équilibre est en partie soluble analytiquement [41]. L'étude des violations du théorème fluctuation-dissipation dans le régime de vieillissement à basse température a mis en évidence [41] l'apparition d'une température  $T_{\text{dyn}}$  différente de la température 'réelle' du bain thermique. Cette température effective correspond aux modes lents du système (réarrangements structuraux).

Ces deux analyses du problème - résolution de la dynamique hors d'équilibre et énumération du nombre des minima du potentiel - donnent en fait les mêmes résultats :  $T_{\text{ap}}$  (avec  $E_{\text{dyn}} = E_{\text{seuil}}$ ) coïncide avec  $T_{\text{dyn}}$  obtenue dans la limite de température nulle (pour le bain extérieur). Mieux, si on importe de la dynamique dans l'étude *a priori* l'énergie  $E(t)$ , cela permet de reproduire les autres observables macroscopiques [139, 157].

### 5.3.4 Test en dimension finie

Afin d'aller au-delà du champ moyen, l'hypothèse d'Edwards a été testée, essentiellement numériquement, dans des modèles sur réseau. Les auteurs de [7, 8] étudient en particulier un modèle de gaz sur réseau à trois dimensions (le modèle de Kob-Andersen). Dans celui-ci, des contraintes sont imposées à la dynamique, et une particule ne peut bouger d'un site à un site voisin que si le nombre de voisins qu'elle a avant le mouvement et après le mouvement est inférieur à une valeur fixée : à cause de ces contraintes, le système peut, pour une densité suffisamment élevée, être empêché de bouger. Les résultats (figures 2 et 3 de [7]) montrent un accord très bon entre les observables calculées avec la mesure d'Edwards et celles mesurées dynamiquement, c'est à dire en prenant les configurations bloquées avec le poids que leur donne la dynamique. Il est en outre possible de définir une température dynamique dans le modèle KA par le biais d'une relation de type fluctuation-dissipation : cette température coïncide avec  $T_{\text{ap}}$  calculée 'statiquement'. Les mêmes auteurs [8] ont aussi testé l'hypothèse d'Edwards pour le modèle d'Ising en champ aléatoire à 3 dimensions. Dans ce cas, les résultats ne sont absolument pas en accord. En particulier, la mesure d'Edwards est dominée par des

configurations d'aimantation non nulle, alors que les configurations bloquées atteintes dynamiquement ont une aimantation essentiellement nulle.

La dynamique de *tapping* a été étudiée par divers auteurs [46, 12], pour des modèles de spins d'Ising (verres de spin et ferromagnétiques) sur des graphes réguliers en basse dimension ou aléatoires. Certains de ces modèles sont les modèles contraints étudiés ci-après. L'accord numérique avec les prédictions *a priori* est généralement assez bon, mais dépend d'une part de la manière dont l'énergie est injectée dans le système<sup>6</sup>, et d'autre part du nombre d'observables fixées [111]. Néanmoins aucun de ces modèles ne réalise un accord parfait avec la mesure *a priori*.

## 5.4 Modèles unidimensionnels

Cette section est consacrée à la présentation de l'article [172], reproduit à la suite de ce chapitre. Les détails techniques peuvent y être trouvés, ainsi que dans l'appendice A. Nous présentons en toute généralité les méthodes employées, ainsi que les principaux résultats.

### 5.4.1 Introduction, motivation

Comme nous l'avons exposé au chapitre 4, certains systèmes de spins d'Ising possèdent, pour la dynamique de température nulle, de nombreux états métastables. Cette propriété en fait de 'bons' candidats pour tester les idées liées à la statistique de ces états, d'autant plus que certains des modèles étudiés ici ont été originellement introduit comme modèles de basse dimension pour reproduire la phénoménologie de la transition vitreuse. Cette étude constitue un test de l'hypothèse d'ensemble *a priori* en comparant diverses observables calculées dans l'ensemble des configurations bloquées avec une mesure plate (en fixant ou non l'énergie) et dans l'ensemble des configurations bloquées atteintes dynamiquement. Pour cela, nous explicitons la structure de l'ensemble *a priori* d'une part, et nous résolvons explicitement la dynamique de température nulle de ces modèles d'autre part, ce qui permet de déterminer la structure des états bloqués dynamiques en prenant la limite  $t \rightarrow \infty$ . En particulier nous comparons analytiquement les fonctions entropie dynamique et *a priori* exactes.

### 5.4.2 Définition des modèles

Les modèles étudiés sont des chaînes de spins d'Ising sans désordre, de deux types : paramagnétiques et ferromagnétiques. Leurs propriétés d'équilibre sont donc soit triviales (chaînes de spins indépendants) soit connues (chaîne d'Ising usuelle). L'intérêt (du point de vue qui nous occupe ici) réside dans la dynamique : ces modèles sont munis de règles dynamiques qui engendrent, malgré l'absence de désordre, un grand nombre d'états métastables.

---

<sup>6</sup>Deux mécanismes d'injection sont introduits dans [12] : d'une part un *tapping* aléatoire, qui consiste à retourner avec une certaine probabilité un spin indépendamment de toute autre considération, et un *tapping* thermique, consistant à faire un pas Monte Carlo à température finie. En particulier, le *tapping* thermique respecte d'éventuelles contraintes cinétiques.

## Chaînes paramagnétiques

Il s'agit de la version unidimensionnelle d'un ensemble de modèles de spins d'Ising sur réseau sans désordre introduits initialement [69] pour fournir un système modèle de spins d'Ising de la transition vitreuse, suivant des idées générales de [149] sur les modèles à dynamique hiérarchique. Le ralentissement à basse température provient de contraintes imposées à la dynamique : les mouvements autorisés d'un degré de liberté sont conditionnés par l'état de ses voisins sur le réseau ; ces contraintes permettent de modéliser le caractère coopératif des réarrangements structuraux observés dans les systèmes vitreux. Dans ces systèmes les mouvements d'une particule sont empêchés par l'encombrement des particules voisines : celles-ci doivent préalablement avoir bougé pour que la particule puisse à son tour se déplacer.

Le hamiltonien de ces modèles est simplement donné par :

$$\mathcal{H} = - \sum_{1 \leq j \leq N} S_j$$

La dynamique est une dynamique à un retournement de spin donnée par les taux :

$$\mathcal{W}(S_j \rightarrow -S_j) = \underbrace{\min(1, e^{-2\beta S_j})}_{\text{Métropolis}} \underbrace{\mathcal{W}_0(S_{j-1}, S_{j+1})}_{\text{Contrainte cinétique}} \quad (5.4)$$

et la contrainte dynamique s'exprime en fonction de l'environnement local du spin  $S_j$  :

$$\mathcal{W}_0(S_{j-1}, S_{j+1}) = a\tau_{j-1} + (1-a)\tau_{j+1}, \quad \tau_j = \frac{1 - S_j}{2} \quad (5.5)$$

Dans la limite de température nulle le premier terme de  $\mathcal{W}$  vaut 1 pour la transition  $\downarrow \rightarrow \uparrow$  et 0 sinon. La contrainte cinétique interdit néanmoins de tels retournements si les deux voisins du spin considéré pointent vers le haut. Le paramètre  $a$  code l'asymétrie de la dynamique. Lorsque  $a = \frac{1}{2}$  on obtient le modèle symétrique, et lorsque  $a = 0$  ou 1 le modèle complètement asymétrique.

## Chaînes ferromagnétiques

L'autre classe de systèmes étudiés est constituée de chaînes de spins avec des interactions ferromagnétiques. Deux types de dynamiques sont envisagées, l'une de type "Glauber", et la seconde de type "Kawasaki". Pour la dynamique de Glauber usuelle à  $T = 0$ , il est connu (chapitre 1) que le système n'a pas d'états métastables, et relaxe vers l'équilibre par croissance de domaines. Dans le cadre de l'étude de l'hypothèse d'Edwards, une modification de cette dynamique (ci-dessous dénommée dynamique de Glauber modifiée) a été proposée [46], consistant à interdire les mouvements de diffusion des parois de domaines, c'est à dire à n'autoriser que les mouvements tels que l'énergie décroît strictement. Dans ces conditions, la dynamique cesse dès que chaque spin est aligné avec au moins un de ces voisins. La dynamique de ce modèle a en grande partie été résolue exactement [150].

Pour la dynamique de Kawasaki usuelle de température nulle, le système s'arrête dans un état métastable. Néanmoins, l'étude de cette dynamique, même à  $T = 0$ , est un

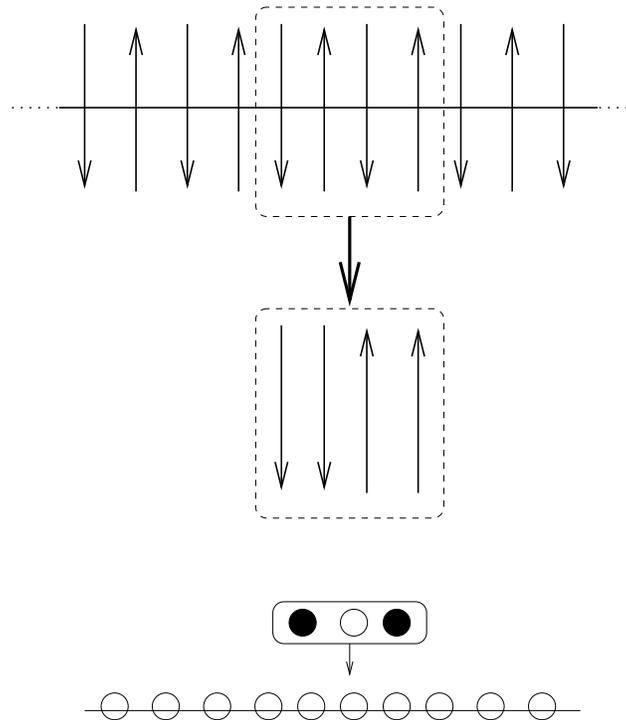


FIG. 5.3 – Dynamique de Kawasaki modifiée. En haut : dans l'espace réel les deux spins au centre du quadruplet encadré peuvent s'échanger : la variation d'énergie est  $\Delta\mathcal{H} = -4J$ . Les amas situés à gauche et à droite de ces spins évoluent ensuite indépendamment. En bas : représentation, dans l'espace dual des liens, du même événement en termes de la déposition d'un trimère creux.

problème pour lequel peu de résultats exacts existent (voir chapitre 6). Par contre, il est possible de considérer aussi une dynamique de Kawasaki modifiée [151] : l'interdiction des mouvements de diffusion rend le modèle soluble pour la géométrie unidimensionnelle [151] et sur l'arbre de Bethe [122] pour des conditions initiales complètement déterminées ou complètement aléatoires, ainsi que pour des conditions initiales plus générales [113]. Notons que ce modèle est un des rares modèles avec une dynamique locale conservant le paramètre d'ordre qui soit soluble, ce qui le rend l'obtention de résultats exacts intéressant.

### 5.4.3 Résolution

L'étude procède en deux étapes. Dans un premier temps, les calculs sont effectués dans l'ensemble *a priori* : la structure des états bloqués est identifiée, puis ils sont comptés avec la mesure plate, ce qui permet la détermination de  $S_{\text{ap}}$ . On calcule ensuite avec cette mesure les corrélations spatiales. Dans un deuxième temps les mêmes quantités sont calculées pour la mesure induite par la dynamique sur l'ensemble des états bloqués.

### Ensemble *a priori*

La donnée de la dynamique contrainte permet pour chaque modèle d'identifier la structure géométrique des configurations bloquées. Le caractère unidimensionnel des systèmes, ainsi que la courte portée des interactions (ferromagnétiques ou induites par les contraintes) permet l'utilisation d'un formalisme de matrice de transfert (pour des exemples détaillés, voir [172] reproduit à la section 5.6 de ce chapitre, ou le chapitre 6, p. 128). Le passage d'une chaîne de taille  $N$  à une chaîne de taille  $N + 1$  est codée par une matrice  $\mathcal{T}(\beta)$  dont la taille dépend de la portée des contraintes et d'éventuelles symétries (elle dépend de combien de sites précédents il faut regarder pour déterminer les choix possibles pour le site  $N + 1$ ). Cette matrice dépend aussi du multiplicateur de Lagrange  $\beta$  permettant de fixer l'énergie (ou l'aimantation).

On détermine le spectre de  $\mathcal{T}(\beta)$ . La plus grande valeur propre  $\lambda_+(\beta)$  donne le comportement de la fonction de partition pour  $N \rightarrow \infty$  :

$$Z_N(\beta) \sim e^{N \ln \lambda_+(\beta)}$$

Appliquant le formalisme thermodynamique usuel, on peut en déduire l'énergie ainsi que l'entropie *a priori* :

$$E = -\lambda_+^{-1} \frac{d\lambda_+}{d\beta}, \quad S_{\text{ap}} = \ln \lambda_+ - \beta \lambda_+^{-1} \frac{d\lambda_+}{d\beta}$$

L'entropie  $S_{\text{ap}}$  atteint son maximum pour  $E = E^*$ , correspondant à l'énergie des états bloqués qui dominent la mesure *a priori*. La probabilité qu'une configuration bloquée ait une énergie  $E$  s'en déduit alors simplement :

$$\mathbb{P}_{\text{ap}}[E; N] \sim e^{-N(S_{\text{ap}}^* - S_{\text{ap}}(E))} = e^{-N\Sigma_{\text{ap}}(E)}, \quad S_{\text{ap}}^* = S_{\text{ap}}(E^*) \quad (5.6)$$

Ce formalisme permet ensuite de calculer exactement les corrélations à deux points le long de la chaîne. Ce calcul nécessite l'introduction de l'opérateur (diagonal) de spin et fait intervenir les autres valeurs propres de  $\mathcal{T}$ , ainsi que les vecteurs propres à droite et à gauche (la matrice n'étant pas symétrique). Pour tous les modèles étudiés les corrélations dans l'ensemble *a priori* décroissent exponentiellement avec la distance, avec des oscillations.

### Dynamique

La seconde étape consiste à résoudre exactement la dynamique en fonction de la condition initiale : on détermine ainsi exactement l'ensemble des configurations bloquées atteintes par la dynamique. La dépendance en la condition initiale, qui est pour ces modèles très importante, marque clairement l'absence d'ergodicité des dynamiques étudiées. La comparaison avec l'ensemble *a priori* s'effectue en partant d'une condition initiale complètement désordonnée (distribution uniforme sur les  $2^N$  configurations possibles) : si les états métastables sont équivalents, la mesure induite par la dynamique doit rester plate.

La méthode de résolution repose de manière cruciale sur une caractéristique commune des systèmes étudiés : leur dynamique est complètement irréversible, ce qui implique en particulier que chaque spin se retourne au plus une seule fois. Cela permet de réexprimer chacune des histoires en termes d'un modèle de déposition, soit complètement aléatoire, soit avec des effets coopératifs [62]. Pour les systèmes paramagnétiques on associe à un spin  $-1$  un site vide ( $\circ$ ) et à un site  $+1$  un site plein ( $\bullet$ ), tandis que pour les chaînes ferromagnétiques il est nécessaire de passer en représentation de liens : à un lien frustré ( $+-$  ou  $-+$ ) est associé sur le réseau dual un site vide, et à un lien satisfait ( $++$  ou  $--$ ) un site plein. Seuls les amas de sites vides sont susceptibles de réagir, et deux amas vides séparés par au moins un site plein n'interagissent pas. Au cours de la dynamique, certains sites vides sont remplis par déposition d'objets - monomères avec effets coopératifs (modèles paramagnétiques), dimères (dynamique de Glauber modifiée) ou trimères creux (dynamique de Kawasaki modifiée, voir figure 5.3) - ce qui conduit au découplage successifs d'amas vides. Cette propriété est exploitée pour déterminer la distribution de l'énergie (ou de l'aimantation) finale  $\mathbb{P}_{\text{dyn}}[E; N] \sim \exp(-N\Sigma_{\text{dyn}}(E; N))$ . Celle-ci est essentiellement la distribution du nombre de particules dans la configuration finale. Pour un amas initialement vide ce nombre coïncide avec le nombre de particules déposées. Il est ensuite nécessaire, pour traiter le cas d'une condition initiale aléatoire, de prendre en compte la distribution à  $t = 0$  (voir appendice A).

Le calcul des corrélations fait intervenir la densité de certains motifs, et nécessite en particulier de connaître la fonction à 1 amas (probabilité d'observer un amas vide de taille au moins  $l$ ) et la fonction à 2 amas (probabilité d'observer 2 amas vides de tailles respectives au moins  $m$  et  $n$  séparés de  $k$  sites). Du fait de l'irréversibilité complète de la dynamique, il est possible d'écrire des équations d'évolution pour ces fonctions, en regardant comment les motifs concernés peuvent apparaître ou disparaître au cours de la dynamique. Ces équations peuvent ensuite être résolues exactement (plus ou moins explicitement) pour donner le comportement des corrélations. A la limite  $t \rightarrow \infty$ , on obtient les corrélations dans les configurations métastables atteintes dynamiquement.

Il est en outre possible, en regardant précisément comment se comporte le système juste avant d'atteindre l'état bloqué, de déterminer le comportement du temps de gel  $\tau_{\text{gel}}(N)$ . Celui-ci augmente logarithmiquement avec la taille du système :

$$\tau_{\text{gel}}(N) = \ln \alpha N + \zeta_N, \quad (5.7)$$

où les fluctuations  $\zeta_N$  sont finies et convergent à la limite thermodynamique vers une variable de Gumbel [82], et  $\alpha$  dépend explicitement du modèle et de la condition initiale.

#### 5.4.4 Conclusions

Les résultats obtenus sont, pour les différents modèles, qualitativement semblables. Le calcul exact de  $\Sigma_{\text{ap}}(E)$  et  $\Sigma_{\text{dyn}}(E)$  montre que malgré des similitudes - en particulier le comportement gaussien autour de la valeur la plus probable - l'approche *a priori* ne parvient pas à prédire la valeur dynamique de l'énergie : la dynamique s'arrête génériquement à une énergie pour laquelle le nombre d'états métastables n'est pas maximal.

L'idée est alors de fixer l'énergie, c'est à dire de travailler dans l'ensemble contraint. La question est de tester si les configurations bloquées atteintes dynamiquement après une trempe sont des configurations bloquées typiques d'énergie  $E_{\text{dyn}}$ . Plus généralement, est-ce qu'en fixant un certain nombre d'observables à leur valeur dynamique l'hypothèse d'Edwards devient de plus en plus juste, ou au moins une meilleure approximation ? Le calcul analytique des corrélations dans l'ensemble *a priori* et dans l'ensemble dynamique permet de répondre clairement par la négative, en mettant en évidence une différence qualitative. Alors que les corrélations dans l'ensemble thermodynamique décroissent exponentiellement, les corrélations dynamiques décroissent beaucoup plus vite, typiquement en  $\frac{1}{n!}$ . Cette décroissance super-exponentielle est due au découplage définitif de deux sites dès qu'ils sont séparés par un site plein, et est un phénomène purement dynamique<sup>7</sup>. Nous pensons que si on fixe d'autres observables en plus de l'énergie - on peut penser par exemple à fixer les  $K$  premières corrélations spatiales - l'accord va être bien entendu meilleur, mais on retrouvera finalement une décroissance différente selon qu'on est dans l'ensemble *a priori* ou dans l'ensemble dynamique. Plus généralement, cela semble dire qu'une modulation locale de la mesure *a priori* ne permet pas, tant qu'on garde un formalisme micro-canonique, de reproduire la dynamique.

Bien entendu, notre étude porte sur des modèles particuliers, dans le cas limite de la dynamique de température strictement nulle. Ces modèles ont été étudiés pour la dynamique de *tapping* [12, 111] avec une intensité finie, et les résultats obtenus sont alors en bien meilleur accord. Du point de vue de ces travaux, notre étude correspond à un *tapping* aléatoire d'intensité infinie. Il serait intéressant de décrire la dynamique de *tapping* analytiquement [21, 111] - la dynamique de température nulle correspondant à la partie relaxation du cycle - mais la prise en compte du mécanisme d'injection d'énergie est difficile, puisqu'il introduit des corrélations entre les domaines (ce qui permet au système de mieux 'thermaliser' dans l'ensemble *a priori* contraint).

De la même manière que se pose la question du passage à une intensité de *tapping* finie, il est légitime de se demander dans quelle mesure les points absorbants de la dynamique de température nulle permettent de comprendre la dynamique de très basse température. Pour les modèles contraints, dont la dynamique dépend d'un paramètre  $a$ , nous avons vu que non seulement les configurations bloquées sont les mêmes (spins  $-1$  isolés), mais aussi que la mesure induite par la dynamique de température nulle sur cet ensemble de configurations ne dépend pas non plus de  $a$ . Or il est connu que dans la limite de température  $T \rightarrow 0$  les modèles symétrique ( $a = \frac{1}{2}$ ) et antisymétrique ( $a = 0$  ou  $1$ ) ont des comportements très différents [63]. Ceci s'explique par le fait que les contraintes (5.5) dans le modèle antisymétrique sont bien plus difficiles à satisfaire que dans le modèle symétrique. La différence entre  $\Sigma_{\text{ap}}$  et  $\Sigma_{\text{dyn}}$  montre que la dynamique de basse température ne saurait être adéquatement reproduite en ne tenant pas compte du poids dynamique des configurations bloquées. Cependant, même la connaissance de cet ensemble dynamique ne suffit pas : dès que la température n'est plus strictement nulle des échelles de temps différentes selon la valeur de  $a$ , correspondant aux processus activés, apparaissent - alors qu'à  $T = 0$  ces échelles de temps étaient toutes renvoyées

<sup>7</sup> Ainsi, étant donnée une configuration bloquée il est possible de savoir, en calculant les corrélations, si celle-ci provient d'un tirage dans l'ensemble *a priori* (contraint ou non) ou si elle résulte d'une évolution dynamique.

à l'infini. Ici se retrouve la difficulté d'une définition dynamique des états métastables.

## 5.5 Modèles de déposition

Les modèles présentés ci-dessus peuvent être vus comme des modèles de déposition séquentielle irréversible. Historiquement, ces modèles ont été étudiés pour modéliser l'attachement de groupements chimiques sur des chaînes polymériques<sup>8</sup>. Ils ont ensuite été généralisés à des substrats de dimension supérieure (essentiellement  $d = 2$ ) pour décrire des processus de croissances de surface. Certains de ces modèles ont en outre été étudiés récemment pour décrire la compaction de milieux granulaires. Une revue très complète sur ces modèles de déposition, avec un accent mis sur les méthodes analytiques, se trouve dans [62].

La traduction en termes de modèles de déposition irréversible nous a permis de donner un traitement unifié des différents systèmes, et d'utiliser des idées et des techniques développées pour ce type de problèmes. Inversement, il est possible de se poser, pour les modèles de déposition, les questions que nous nous sommes originellement posées sur les états métastables de systèmes de spins. Par exemple, si de nombreux travaux analytiques ont été consacrés à l'étude de la densité finale, peu s'intéressent aux fluctuations, et moins encore aux fonctions de grandes déviations codant les probabilités des événements rares [29].

La question de la comparaison des ensembles dynamique et *a priori* est abordée dans quelques travaux. La différence entre la densité moyenne d'un état atteint dynamiquement et celle résultant d'une énumération *a priori* de toutes les configurations gelées est mentionnée pour la déposition de dimères [95]. Il est notable que les auteurs de cette publication précisent que leur motivation vient de l'étude des réactions à l'intérieur d'étoiles denses, ce qui montre l'extrême diversité des phénomènes physiques que des modèles simples peuvent aider à étudier. La question plus générale de savoir si l'ensemble des configurations bloquées atteintes dynamiquement par un modèle de déposition peut être considéré comme un ensemble thermodynamique remonte aux années 60 [185]. Plus récemment, l'auteur de [190] s'est intéressé à la manière dont l'état final d'un modèle de déposition irréversible garde la trace de son histoire temporelle, en regardant la distribution de l'espace vacant à côté d'une particule dans l'état final (espace qui est nécessairement plus petit que le plus petit objet déposé) : celui-ci dépend de l'instant où la particule a été déposée, alors que dans un ensemble *a priori* toutes les particules sont équivalentes entre elles. Cette mémoire de la totalité de l'histoire du processus ne peut être reproduite par une approche purement statique.

La question de la dépendance dans la condition initiale, qui marque une forme de brisure d'ergodicité (savoir si le système reste, dans l'espace des phases, dans des régions qui sont au moins en partie déterminées par le point de départ) est une question classique des systèmes désordonnés [144]. Dans le langage des modèles de déposition cette question est celle de la déposition sur un substrat initialement désordonné. Outre

---

<sup>8</sup>Il s'agit d'un exemple remarquable de modèles pour lesquels le cas unidimensionnel peut être réaliste.

son intérêt théorique, cette question peut avoir un intérêt pratique non négligeable, les substrats expérimentaux n'étant jamais complètement purs. Assez peu de travaux semblent cependant s'être intéressés à cet aspect des modèles de déposition [29, 11].

## **5.6 Article 3 : Etats métastables de systèmes de spins unidimensionnels**

## Jamming, freezing and metastability in one-dimensional spin systems

G. De Smedt<sup>1</sup>, C. Godrèche<sup>2</sup>, and J.M. Luck<sup>1,a</sup><sup>1</sup> Service de Physique Théorique<sup>b</sup>, CEA Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France<sup>2</sup> Service de Physique de l'État Condensé, CEA Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France

Received 26 February 2002

Published online 6 June 2002 – © EDP Sciences, Società Italiana di Fisica, Springer-Verlag 2002

**Abstract.** We consider in parallel three one-dimensional spin models with kinetic constraints: the paramagnetic constrained Ising chain, the ferromagnetic Ising chain with constrained Glauber dynamics, and the same chain with constrained Kawasaki dynamics. At zero temperature the dynamics of these models is fully irreversible, leading to an exponentially large number of blocked states. Using a mapping of these spin systems onto sequential adsorption models of, respectively, monomers, dimers, and hollow trimers, we present exact results on the statistics of blocked states. We determine the distribution of their energy or magnetization, and in particular the large-deviation function describing its exponentially small tails. The spin and energy correlation functions are also determined. The comparison with an approach based on *a priori* statistics reveals systematic discrepancies with the Edwards hypothesis, concerning in particular the fall-off of correlations.

**PACS.** 05.70.Ln Nonequilibrium and irreversible thermodynamics – 64.60.My Metastable phases – 68.43.Fg Adsorbate structure (binding sites, geometry) – 68.43.Mn Adsorption/desorption kinetics

### 1 Introduction

In a great variety of systems, such as structural glasses, spin glasses, and granular materials, the dynamics at low temperature or high density is so slow that the system falls out of equilibrium [1]. For long, glassy dynamics has been described as a slow motion in a complex energy (or free energy) landscape [2], with many valleys separated by barriers. Several approaches have been proposed in order to make this heuristic picture more precise. Valleys thus appear under various names (and with various definitions) in different contexts: metastable states, TAP states [3], pure states [4], inherent structures [5], quasi-states [6]. From a dynamical viewpoint these concepts are not equivalent [7]. Metastability is indeed unambiguously defined for mean-field models only, where metastable states have infinite lifetimes, as barrier heights diverge with the system size. For finite-dimensional systems with short-range interactions, barrier heights and valley lifetimes are always finite at finite temperature, so that metastability becomes a matter of time scales [8].

Once these valleys are appropriately defined, one can estimate their number at fixed energy (or free energy) density  $E$ . This number generically grows exponentially with

the system size, as

$$\mathcal{N}(N) \sim \exp(NS_{\text{ap}}(E)), \quad (1.1)$$

where  $S_{\text{ap}}(E)$  is the configurational entropy or complexity. The subscript 'ap' (*a priori*) refers to the fact that, when counting valleys, each of them appears with the same weight. In this *a priori* ensemble, valleys are *combinatorially* equivalent.

In contrast, a key question concerns the *dynamical* weight of each individual valley. Do all the valleys play a similar role in the dynamics? This question arises for instance when a system is instantaneously quenched into the glassy phase, starting from a disordered configuration. Assuming this initial configuration is chosen at random, does the system sample all the possible valleys with a given final energy  $E$  with equal statistical weights, *i.e.*, with a uniform or flat measure, or, to the contrary, does the size of the attraction basin of each valley really matter? The same question is also relevant in another situation commonly referred to as tapping [9–11]. Under tapping a granular material continuously jumps from a blocked configuration to a nearby one. Does the non-equilibrium steady state thus obtained admit a statistical description in terms of a flat ensemble of blocked configurations?

The answer to this question for the first situation (relaxational or aging dynamics) is positive at least in some mean-field models, where valleys are known to be explored

<sup>a</sup> e-mail: luck@spht.saclay.cea.fr<sup>b</sup> URA 2306 of CNRS

with a flat measure [6]. The concept of ergodicity, and the resulting thermodynamical construction, therefore hold, as in equilibrium situations, up to the replacement of configurations by valleys. The configurational temperature  $T_{\text{ap}}$ , defined by

$$\frac{1}{T_{\text{ap}}} = \frac{dS_{\text{ap}}}{dE}, \quad (1.2)$$

has a thermodynamical meaning. It also coincides with the effective temperature involved in the generalized fluctuation-dissipation formula in the appropriate temporal regime.

Besides the mean-field geometry, another physical situation where metastable states are unambiguously defined is the zero-temperature limit, where no barrier can be crossed at all. Valleys are just blocked configurations under the chosen dynamics. For instance, for an Ising model with single-spin dynamics, a valley is a configuration where each spin is aligned with its local field, provided the latter is non-zero.

In the context of granular materials, Edwards [12] proposed to describe the slow compaction dynamics by means of a flat ensemble average over all the blocked configurations of the grains with prescribed density. Extending the range of application of this idea, the so-called Edwards hypothesis consists in assuming that all the valleys with a given energy density are equivalent. This hypothesis has two consequences. First, the value of an observable can be obtained by a flat average over the *a priori* ensemble, or Edwards ensemble, of all those valleys. Second, the temperature  $T_{\text{ap}}$  of (1.2), also known as the Edwards temperature, has the usual thermodynamical meaning of a temperature.

The present paper is devoted to the analytical study of the zero-temperature dynamics of simple one-dimensional systems with kinetic constraints. Kinetically constrained models have been the subject of numerous investigations [13–26]. Here we specialize to Ising chains without frustration nor quenched disorder, namely paramagnetic chains (CIC) [14–17] (Sect. 2) and ferromagnetic chains [18–22] (Sects. 3 and 4). The common feature of all these models is the irreversible nature of their zero-temperature dynamics: each spin flips at most once in the whole history of the system.

The central goal of this paper is to obtain exact results on the statistics of the blocked configurations reached by these systems, pursuing the efforts made by the authors of some recent works [18–26]. Thus doing we are able to critically revisit the questions raised above. In the derivation of these results we will take advantage of the fact that the zero-temperature dynamics of these models can be rephrased in terms of random sequential adsorption (RSA) or cooperative sequential adsorption (CSA) [27], for which analytical techniques are available in one dimension. A blocked configuration thus appears as a jammed state of the corresponding RSA or CSA model. The Edwards hypothesis is, in this specific context, akin to the question raised long ago [28] whether RSA configurations are equilibrated or not. Our results confirm that

the answer is negative. A more extensive discussion will be given in Section 5.

## 2 Constrained Ising chain

### 2.1 Definition of the model

Constrained Ising chains (CIC) [14–17] are among the simplest examples of kinetically constrained models [13]. Although they have trivial equilibrium properties, the presence of kinetic constraints leads to slow dynamics at low temperature, and to metastability at zero temperature.

Consider a paramagnetic Ising chain, made of independent spins  $\sigma_n = \pm 1$ , submitted to a positive unit magnetic field. This model has a Hamiltonian

$$\mathcal{H} = - \sum_n \sigma_n, \quad (2.1)$$

with a unique ordered ground state, where all the spins are up ( $\sigma_n = +1$ ).

Kinetic constraints are introduced as follows. Consider single-spin-flip dynamics with rates

$$W(\sigma_n \rightarrow -\sigma_n) = \min(1, e^{-2\beta\sigma_n}) W_0(\sigma_{n-1}, \sigma_{n+1}).$$

The first factor in the right side is the Metropolis acceptance rate, ensuring detailed balance with respect to the Hamiltonian  $\mathcal{H}$  at temperature  $T = 1/\beta$ . The second factor imposes a kinetic constraint: the flipping rate of a spin  $\sigma_n$  depends on its environment, *i.e.*, on the value of its neighbors  $\sigma_{n-1}$  and  $\sigma_{n+1}$ . Let us make the choice [23]

$$W_0(\sigma_{n-1}, \sigma_{n+1}) = a\tau_{n-1} + (1-a)\tau_{n+1}, \quad (2.2)$$

with the notation

$$\tau_n = \frac{1 - \sigma_n}{2}.$$

The parameter  $0 \leq a \leq 1$  allows to interpolate between known limiting cases. For  $a = 1/2$ , the constraint factor is  $(\tau_{n-1} + \tau_{n+1})/2$ , *i.e.*, half the number of neighboring down spins. The symmetrically constrained chain (SCIC) [14, 15] is thus obtained. For  $a = 0$ , the constraint factor is  $\tau_{n+1}$ : the spin  $\sigma_n$  can only flip if its right neighbor is down. The right asymmetrically constrained chain (ACIC) [16, 17] is thus recovered. Similarly, the left ACIC is obtained for  $a = 1$ .

At zero temperature, the dynamics of the CIC simplifies drastically. An initially up spin ( $\sigma_n = +1$ ) remains up forever, while a down spin ( $\sigma_n = -1$ ) can flip at most once, according to stochastic rules depending on its two neighbors:

$$\begin{cases} - - - \rightarrow - + - & (\text{rate } 1), \\ - - + \rightarrow - + + & (\text{rate } a), \\ + - - \rightarrow + + - & (\text{rate } 1 - a). \end{cases} \quad (2.3)$$

For a finite chain of  $N$  spins, the dynamics stops after a finite jamming time  $T_N$ , which depends both on the

initial configuration and on the history of the chain. The jamming time will be shown to grow as  $T_N \approx \ln N$ , up to finite fluctuations given by extreme-value statistics. The system is thus left after a finite time  $T_N$  in a jammed or blocked state. This state, which is an attractor for the dynamics, is a spin configuration where each down spin is isolated, *i.e.*, surrounded by two up spins. The blocked configuration thus obtained depends on the parameter  $a$ , on the initial configuration of the chain, and on its whole stochastic history.

The problem may be equivalently described as an irreversible process of particle adsorption. Consider indeed down spins as representing empty sites ( $\circ$ ), and up spins as representing occupied sites ( $\bullet$ ):

$$\begin{cases} \sigma = -1 \iff \tau = 1 \iff \circ, \\ \sigma = +1 \iff \tau = 0 \iff \bullet. \end{cases}$$

The zero-temperature dynamics of the CIC thus maps onto a problem of particle adsorption, where individual particles (monomers) are irreversibly deposited according to:

$$\begin{cases} \circ \circ \circ \rightarrow \circ \bullet \circ \text{ (rate 1),} \\ \circ \circ \bullet \rightarrow \circ \bullet \bullet \text{ (rate } a), \\ \bullet \circ \circ \rightarrow \bullet \bullet \circ \text{ (rate } 1 - a). \end{cases}$$

The deposition rate at site  $n$  depends on the occupation state of both neighboring sites. We are thus facing a cooperative sequential adsorption (CSA) model [27]. The limit (jamming) coverage of this model is related to the mean magnetization per spin  $M(\infty)$  in the blocked configurations by

$$\mathcal{P}_\infty(\bullet) = 1 - \langle \tau \rangle_\infty = \frac{1 + M(\infty)}{2}.$$

In the following, we will use the language of spins, magnetization, spin correlations, and so on, leaving the picture of particle deposition for illustrative purposes only.

### 2.2 A priori statistics

We have shown that the attractors of the zero-temperature dynamics of the CIC, for any value of the parameter  $a$ , are the spin configurations where each down spin is isolated, *i.e.*, surrounded by two up spins.

A natural statistical description of these attractors is provided by the *a priori* ensemble, or Edwards ensemble, as explained in the Introduction, where all the blocked spin configurations are taken with equal weights.

For a finite chain of  $N$  spins, consider the restricted ensemble of blocked configurations for which exactly  $n$  spins are down. Their magnetization  $M$  is such that  $NM = N - 2n$ , with  $0 \leq n \leq N/2$ , hence  $0 \leq M \leq 1$ . The number of such configurations reads

$$\mathcal{N}(N, n) = \binom{N - n + 1}{n}. \tag{2.4}$$

Indeed this is the number of ways of inserting  $n$  down spins in the  $N - n + 1$  spaces made available by the presence of  $N - n$  up spins, with at most one down spin per space. This number grows exponentially, according to (1.1), where the *a priori* entropy reads [23,25,18]

$$S_{\text{ap}}(M) = -M \ln(2M) + \frac{1 + M}{2} \ln(1 + M) - \frac{1 - M}{2} \ln(1 - M). \tag{2.5}$$

One can also consider the full (or unrestricted) ensemble of all the blocked configurations, irrespective of their magnetization. The number  $\mathcal{N}(N)$  of such configurations can be determined as follows. For a chain of  $N \geq 3$  spins, a configuration either ends with  $(+-)$  (there are  $\mathcal{N}(N - 2)$  such configurations) or with  $(+)$  (there are  $\mathcal{N}(N - 1)$  such configurations). We thus obtain the recursion relation  $\mathcal{N}(N) = \mathcal{N}(N - 1) + \mathcal{N}(N - 2)$ , with  $\mathcal{N}(1) = 2$ ,  $\mathcal{N}(2) = 3$ , hence

$$\mathcal{N}(N) = F_{N+2},$$

where  $F_N$  are the Fibonacci numbers. This expression is also equal to the sum of (2.4) for  $n$  ranging from 0 to  $N/2$ . It grows as  $\mathcal{N}(N) \sim \exp(NS_{\text{ap}}^*)$ , with

$$S_{\text{ap}}^* = \ln \Phi = 0.481212, \tag{2.6}$$

where  $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$  is the golden mean. The result (2.6) is the maximum value of the function  $S_{\text{ap}}(M)$  (2.5). This maximum is reached for

$$M^* = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.447214, \tag{2.7}$$

which is therefore the typical *a priori* magnetization of a blocked configuration.

The distribution of the number  $n$  of down spins in the *a priori* ensemble is given by

$$P_n = \frac{\mathcal{N}(N, n)}{\mathcal{N}(N)}.$$

For a large sample ( $N \gg 1$ ), the probability density of the magnetization  $M$  is therefore given by an exponential estimate of the form

$$f(M) \sim \exp(-N \Sigma_{\text{ap}}(M)), \tag{2.8}$$

with

$$\Sigma_{\text{ap}}(M) = S_{\text{ap}}^* - S_{\text{ap}}(M). \tag{2.9}$$

The result (2.8) has the form of large-deviation estimates in probability theory, which hold *e.g.* for the arithmetic mean of  $N$  independent random variables. The large-deviation function (or entropy function)  $\Sigma_{\text{ap}}(M)$  will be plotted in Figure 4. It vanishes quadratically near  $M = M^*$  as

$$\Sigma_{\text{ap}}(M) \approx c(M - M^*)^2, \quad c = \frac{5\sqrt{5}}{8}.$$

The bulk of the *a priori* distribution of  $M$  is therefore asymptotically a narrow Gaussian around  $M^*$ , with a scaled variance given by  $N \text{Var} M \approx 1/(2c) = 4\sqrt{5}/25 = 0.357771$ .

The *a priori* entropy can alternatively be evaluated by the transfer-matrix method [29]. For a finite chain of  $N$  spins, we introduce the characteristic function of the magnetization

$$Z_N(\beta) = \sum_{\mathcal{C}} e^{\beta NM(\mathcal{C})},$$

where the sum runs over all the blocked configurations  $\mathcal{C}$ . Note that  $NM(\mathcal{C})$  is the opposite of the total energy of the configuration, according to the Hamiltonian (2.1), so that  $Z_N(\beta)$  coincides with the usual partition function of the model, at a fictitious inverse temperature  $\beta$ .

The partition functions  $Z_N^\pm$  of a finite chain of  $N$  spins, labeled by the prescribed value  $\sigma_N = \pm 1$  of the last spin, obey the recursion

$$\begin{pmatrix} Z_{N+1}^+ \\ Z_{N+1}^- \end{pmatrix} = \mathcal{T} \begin{pmatrix} Z_N^+ \\ Z_N^- \end{pmatrix},$$

where the  $2 \times 2$  transfer matrix

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} e^\beta & e^\beta \\ e^{-\beta} & 0 \end{pmatrix}$$

has eigenvalues

$$\lambda_\pm(\beta) = \frac{e^\beta \pm \sqrt{4 + e^{2\beta}}}{2}.$$

The entropy  $S_{\text{ap}}(M)$  is then given by a Legendre transform. We have indeed

$$Z_N(\beta) \sim \int e^{N(S_{\text{ap}}(M) + \beta M)} dM \sim e^{N \ln \lambda_+(\beta)}.$$

Evaluating the integral by the steepest-descent method yields the ‘thermodynamical’ relationships

$$\ln \lambda_+(\beta) - S_{\text{ap}}(M) = \beta M, \quad M = \frac{d \ln \lambda_+}{d\beta}, \quad \beta = -\frac{dS_{\text{ap}}}{dM}, \quad (2.10)$$

which yield in the present case

$$M = \frac{e^\beta}{\sqrt{4 + e^{2\beta}}}, \quad e^\beta = \frac{2M}{\sqrt{1 - M^2}},$$

and allow to recover (2.5).

The spin correlation function  $C_n = \langle \sigma_0 \sigma_n \rangle$  can also be evaluated in the *a priori* ensemble at fixed magnetization by the transfer-matrix method [29]. We have, for  $n \geq 0$  in the bulk of an infinitely long chain,

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{\langle L_+ | \mathcal{S} \mathcal{T}^n \mathcal{S} | R_+ \rangle}{\lambda_+^n} \\ &= (\langle L_+ | \mathcal{S} | R_+ \rangle)^2 + \langle L_+ | \mathcal{S} | R_- \rangle \langle L_- | \mathcal{S} | R_+ \rangle \left( \frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^n. \end{aligned}$$

In this expression,  $\mathcal{S} = \text{diag}(+1, -1)$  is the spin operator, while

$$\langle L_\pm | = \frac{1}{\lambda_\pm^2 + 1} (\lambda_\pm e^\beta), \quad |R_\pm \rangle = \begin{pmatrix} e^\beta \lambda_\pm \\ 1 \end{pmatrix}$$

are the left and right eigenvectors of  $\mathcal{T}$  associated with the eigenvalues  $\lambda_\pm$ . We have consistently  $M = \langle L_+ | \mathcal{S} | R_+ \rangle$ . After some algebra we obtain the following expression, involving only the magnetization  $M$  [18]:

$$C_n^{\text{conn}} = C_n - M^2 = (1 - M^2) \left( -\frac{1 - M}{1 + M} \right)^n. \quad (2.11)$$

The connected correlation function thus exhibits an exponential decay, modulated by an oscillating sign.

The full ensemble of blocked configurations is obtained by setting  $\beta = 0$  in the above results, which indeed corresponds to taking a flat average over all blocked configurations. This prescription amounts to replacing the magnetization  $M$  by its typical value  $M^*$  (2.7). We thus obtain in particular

$$C_n^{\text{conn}} = C_n - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \left( -\frac{1}{\phi^2} \right)^n. \quad (2.12)$$

We end up by mentioning that the blocked spin configurations considered so far are the degenerate ground states of the antiferromagnetic Ising chain in a constant magnetic field  $h = 2J > 0$  [30], whose Hamiltonian reads

$$\mathcal{H} = J \sum_n \sigma_n \sigma_{n+1} - 2J \sum_n \sigma_n.$$

As a consequence, the above expressions are exact results for the latter model at equilibrium at zero temperature. This is one of the simplest models with a non-zero entropy at zero temperature, given by (2.6).

### 2.3 Dynamics of cluster densities and magnetization

We now turn to the exact analysis of the zero-temperature dynamics of the CIC, starting with the mean cluster densities and magnetization.

We consider an uncorrelated magnetized initial state, given by

$$\begin{cases} \sigma_n(0) = -1, \tau_n(0) = 1 (\circ) \text{ with prob. } p, \\ \sigma_n(0) = +1, \tau_n(0) = 0 (\bullet) \text{ with prob. } 1 - p, \end{cases} \quad (2.13)$$

so that the mean initial magnetization reads  $M(0) = 1 - 2p$ .

For  $p \leq 1/2$ , the initial state (2.13) is the equilibrium state of the Ising chain with Hamiltonian (2.1) at inverse temperature

$$\beta_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - p}{p}. \quad (2.14)$$

In particular, a random (unmagnetized) initial configuration, *i.e.*,  $p = 1/2$ , corresponds to infinite temperature, *i.e.*,  $\beta_0 = 0$ .

It is a common feature of one-dimensional RSA and similar problems [27] that the densities of certain patterns, including active clusters, obey closed rate equations. Consider clusters of exactly  $\ell \geq 1$  consecutive down spins. Their density per unit length at time  $t$  reads

$$p_\ell(t) = \langle (1 - \tau_0)\tau_1 \dots \tau_\ell(1 - \tau_{\ell+1}) \rangle_t = \mathcal{P}_t \left( \underbrace{\bullet \circ \dots \circ \bullet}_\ell \right), \quad (2.15)$$

and the mean magnetization of the chain is given by

$$M(t) = 1 - 2 \sum_{\ell \geq 1} \ell p_\ell(t). \quad (2.16)$$

Because zero-temperature dynamics is fully irreversible, the densities  $p_\ell(t)$  obey rate equations, which can be derived as follows. Clusters of length  $\ell = 1$  are inactive. Consider a cluster of length  $\ell \geq 2$ , renumbering its sites as  $n = 1, \dots, \ell$ . The spin  $\sigma_n$  can flip from down to up, at a rate given by (2.3), thus generating one or two smaller clusters of the following length

$$\begin{cases} n = 1 & \text{(rate } 1 - a), \\ \text{one cluster: } \ell_1 = \ell - 1, \\ 2 \leq n \leq \ell - 1 & \text{(rate } 1), \\ \text{two clusters: } \ell_1 = n - 1, \ell_2 = \ell - n, \\ n = \ell & \text{(rate } a), \\ \text{one cluster: } \ell_1 = \ell - 1. \end{cases} \quad (2.17)$$

Gathering the contributions of all these events, we obtain the rate equations

$$\frac{dp_\ell(t)}{dt} = -(\ell - 1)p_\ell(t) + p_{\ell+1}(t) + 2 \sum_{k \geq \ell+2} p_k(t) \quad (2.18)$$

for  $\ell \geq 1$ , irrespective of the value of the asymmetry parameter  $a$ . The initial state (2.13) yields  $p_\ell(0) = (1-p)^2 p^\ell$ .

A simple way of solving the rate equations (2.18) consists in making the ansatz

$$p_\ell(t) = a(t) z(t)^\ell \quad (2.19)$$

for  $\ell \geq 1$ . We obtain successively  $dz(t)/dt = -z(t)$ , with  $z(0) = p$ , hence

$$z(t) = pe^{-t}, \quad (2.20)$$

and  $da(t)/dt = a(t)(1 + z(t)^2)/(1 - z(t))$ , with  $a(0) = (1 - p)^2$ , hence

$$a(t) = e^t(1 - pe^{-t})^2 \exp(p(e^{-t} - 1)),$$

so that finally

$$p_\ell(t) = (1 - pe^{-t})^2 \exp(p(e^{-t} - 1)) p^\ell e^{-(\ell-1)t}. \quad (2.21)$$

As expected, only inactive clusters of length  $\ell = 1$  survive in the final states, and their density reads

$$p_1(\infty) = pe^{-p}.$$

**Table 1.** Mean value and limit scaled variance of the final energy: comparison of the exact dynamical results for a random initial condition ( $p = 1/2$ ) with the prediction of the full *a priori* ensemble.

Model	$E$	$E^*$	$N \text{ Var } E$	$N \text{ Var } E$
	dynamical	<i>a priori</i>	dynamical	<i>a priori</i>
CIC	-0.393469	-0.447214	0.258456	0.357771
Glauber	-0.632121	-0.447214	0.406006	0.357771
Kawasaki	-0.274087	-0.236840	0.459839	0.527638

Equation (2.16) yields

$$M(t) = 1 - 2p \exp(p(e^{-t} - 1)), \quad (2.22)$$

and especially

$$M(\infty) = 1 - 2pe^{-p}. \quad (2.23)$$

The mean final magnetization of the blocked states reached by the dynamics thus depends on the parameter  $p$  characterizing the initial state. This non-trivial dependence demonstrates that the dynamics is not ergodic. For an initial state close to the ground-state ( $p \rightarrow 0$ , *i.e.*,  $M(0) \rightarrow 1$ ), the behavior  $M(\infty) \approx M(0) + 2p^2$  is easily explained in terms of clusters of two down spins: the density of these clusters scales as  $p^2$ , and only one of the two spins will flip. For a random (unmagnetized) initial configuration ( $p = 1/2$ , *i.e.*,  $M(0) = 0$ ), we have

$$M(\infty)_{p=1/2} = 1 - e^{-1/2} = 0.393469. \quad (2.24)$$

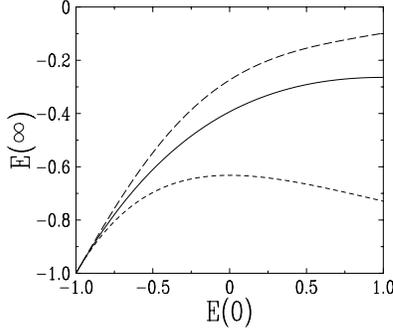
As this number is the final magnetization of a typical initial state, it is natural to compare it to the prediction (2.7) of the *a priori* ensemble. This comparison will be presented in Table 1. Finally, for the ordered initial state where all spins are down ( $p = 1$ , *i.e.*,  $M(0) = -1$ ), we have the smallest possible value of the final magnetization:

$$M(\infty)_{p=1} = 1 - 2e^{-1} = 0.264241. \quad (2.25)$$

Figure 1 shows a plot of the final energy  $E(\infty) = -M(\infty)$  against the initial one,  $E(0) = -M(0)$ , for the present model, as well as for the ferromagnetic chain with constrained Glauber and Kawasaki dynamics (see Sects. 3 and 4).

To close up, we present an analysis of the distribution of the jamming time  $T_N$  of a large but finite system of  $N$  spins, a question which does not seem to have been considered in previous works on RSA. Equation (2.21) shows that the late stages of the dynamics are governed by an exponentially small density of surviving clusters made of two down spins,  $p_2(t) \approx \alpha e^{-t}$ , with  $\alpha = p^2 e^{-p}$ . The dynamics can therefore be effectively described by a collection of  $\alpha N$  such clusters, each cluster decaying exponentially with unit rate, when a down spin flips. The jamming time  $T_N$  is the largest of the decay times of those clusters. For a large sample, it is therefore distributed according to extreme-value statistics [31]. Setting

$$T_N = \ln(\alpha N) + X_N, \quad (2.26)$$



**Fig. 1.** Plot of the final energy  $E(\infty)$  against the initial energy  $E(0)$ . Full line: CIC (2.23). Dashed line: ferromagnetic chain with constrained Glauber dynamics (3.7). Long-dashed line: ferromagnetic chain with constrained Kawasaki dynamics (4.5).

we find that the fluctuation  $X_N$  remains of order unity, and that it is asymptotically distributed according to the Gumbel law

$$f(X) = \exp(-X - e^{-X}). \quad (2.27)$$

We have checked this prediction by a numerical simulation. Figure 2 shows a histogram of the observed jamming time  $T_N$  for  $10^6$  samples of  $N = 1000$  spins, starting with a random initial configuration. The bin size is  $\Delta T = 1/10$ . An excellent agreement is found with the limit law (2.27), with  $p = 1/2$ , hence  $\alpha = e^{-1/2}/4 = 0.151633$ .

## 2.4 Spin correlations

The time-dependent spin correlation function reads

$$C_n(t) = \langle \sigma_0 \sigma_n \rangle_t = \langle (1 - 2\tau_0)(1 - 2\tau_n) \rangle_t = 1 - 4c_1(t) + 4d_{1,n-1,1}(t), \quad (2.28)$$

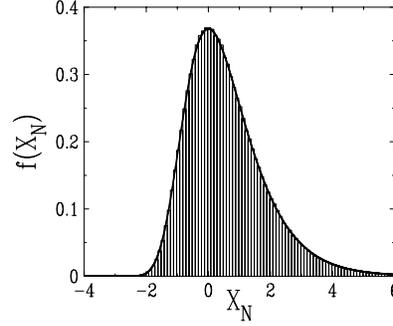
where we have introduced the one-cluster function  $c_n(t)$  and the two-cluster function  $d_{m,k,n}(t)$ , defined as

$$c_n(t) = \langle \tau_1 \dots \tau_n \rangle_t = \mathcal{P}_t \left( \underbrace{\circ \dots \circ}_n \right), \quad (2.29)$$

$$d_{m,k,n}(t) = \langle \tau_1 \dots \tau_m \tau_{m+k+1} \dots \tau_{m+k+n} \rangle_t = \mathcal{P}_t \left( \underbrace{\circ \dots \circ}_m \underbrace{\dots \circ \dots \circ}_k \underbrace{\circ \dots \circ}_n \right). \quad (2.30)$$

The one-cluster function is the probability that the sites  $1, \dots, n$  belong to a cluster of at least  $n$  consecutive down spins. It is therefore directly related to  $p_n(t)$  defined in (2.15) by

$$p_n(t) = c_n(t) - 2c_{n+1}(t) + c_{n+2}(t). \quad (2.31)$$



**Fig. 2.** Distribution of the jamming time  $T_N$  of CIC samples of  $N = 1000$  spins, against  $X_N$  defined in (2.26). Histogram: numerical data ( $p = 1/2$ ). Thick line: limit Gumbel law (2.27).

Equation (2.19) then yields

$$c_n(t) = A(t) z(t)^n, \quad (2.32)$$

with (2.20) and

$$A(t) = \frac{a(t)}{(1 - pe^{-t})^2} = e^t \exp(p(e^{-t} - 1)). \quad (2.33)$$

This result can be alternatively recovered by deriving rate equations for the one-cluster function itself. As a consequence of (2.2), each variable  $\tau_2, \dots, \tau_{n-1}$  entering the definition (2.29) can flip from 1 to 0 with rate  $c_n(t)$  per unit time, while the rate for the first variable  $\tau_1$  is  $ac_n(t) + (1-a)c_{n+1}(t)$ , and the rate for the last variable  $\tau_n$  is  $ac_{n+1}(t) + (1-a)c_n(t)$ . Gathering all the contributions, we obtain the equation

$$\frac{dc_n(t)}{dt} = -(n-1)c_n(t) - c_{n+1}(t), \quad (2.34)$$

whose solution coincides with (2.32, 2.33).

A similar analysis yields the following rate equations for the two-cluster function:

$$\begin{aligned} \frac{dd_{m,k,n}(t)}{dt} = & -(m+n-2)d_{m,k,n}(t) \\ & -a(d_{m+1,k,n}(t) + d_{m,k-1,n+1}(t)) \\ & -(1-a)(d_{m+1,k-1,n}(t) + d_{m,k,n+1}(t)) \end{aligned} \quad (2.35)$$

for  $m, k, n \geq 1$ , with initial conditions  $d_{m,k,n}(0) = p^{m+n}$ , and boundary values  $d_{m,0,n}(t) = c_{m+n}(t)$ . The rate equations (2.35) are solved by the ansatz

$$d_{m,k,n}(t) = B_k(t) z(t)^{m+n}, \quad (2.36)$$

provided the amplitudes  $B_k(t)$  obey

$$\frac{dB_k(t)}{dt} = (2 - z(t))B_k(t) - z(t)B_{k-1}(t) \quad (2.37)$$

for  $k \geq 1$ , irrespective of the value of  $a$ , with the initial condition  $B_k(0) = 1$ , and the boundary value  $B_0(t) = A(t)$  (2.33).

In order to solve (2.37), we introduce the generating series

$$\mathcal{B}(x, t) = \sum_{k \geq 1} B_k(t) x^k, \quad (2.38)$$

which obeys the differential equation

$$\frac{d\mathcal{B}(x, t)}{dt} = (2 - (x + 1)z(t))\mathcal{B}(x, t) - xz(t)A(t),$$

considering  $x$  as a parameter, with initial condition  $\mathcal{B}(x, 0) = x/(1 - x)$ . This equation can be solved by ‘varying the constant’:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(x, t) &= e^{2t} \exp(p(e^{-t} - 1)) \\ &\times \left[ \left( \frac{1}{px} + \frac{1}{1-x} \right) \exp(px(e^{-t} - 1)) - \frac{1}{px} - e^{-t} \right]. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Inserting (2.32) and (2.36) into (2.28), we obtain

$$C_n(t) = 1 - 4p \exp(p(e^{-t} - 1)) + 4p^2 e^{-2t} B_{n-1}(t).$$

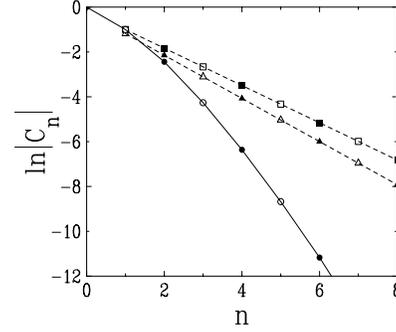
Finally, expanding (2.39) and using (2.22), we obtain the expression of the connected spin correlation function:

$$\begin{aligned} C_n^{\text{conn}}(t) &= C_n(t) - M(t)^2 \\ &= 4p \exp(p(e^{-t} - 1)) \\ &\times \left( (1-p) \frac{(p(e^{-t} - 1))^n}{n!} - p \sum_{m \geq n+1} \frac{(p(e^{-t} - 1))^m}{m!} \right). \end{aligned}$$

As a consequence, in the blocked states, the correlation function reads

$$\begin{aligned} C_n^{\text{conn}}(\infty) &= C_n(\infty) - M(\infty)^2 = 4pe^{-p} \\ &\times \left( (1-p) \frac{(-p)^n}{n!} - p \sum_{m \geq n+1} \frac{(-p)^m}{m!} \right). \end{aligned} \quad (2.40)$$

The first term in the above expressions is the leading one, implying that the connected correlation function has a factorial asymptotic decay of the form  $(p(1 - e^{-t}))^n/n!$ , modulated by an oscillating sign, for any value of  $p$  and any time  $t$ . This super-exponential fall-off is a characteristic feature of irreversible processes such as RSA [27]. This behavior is entirely missed by the *a priori* approach (2.11, 2.12), where correlations fall off exponentially, as they generically do in equilibrium systems. Figure 3 shows a logarithmic plot of  $(-1)^n C_n^{\text{conn}}(\infty)$  against  $n$ , for a random initial configuration ( $p = 1/2$ ), together with both predictions of the *a priori* approach, *i.e.*, the full ensemble (2.12), and the restricted ensemble (2.11) where the exact magnetization (2.24) is imposed. Both predictions appear as straight lines on the plot. The exact value of  $C_1^{\text{conn}}(\infty)$  is correctly reproduced in the restricted *a priori* ensemble.



**Fig. 3.** Connected spin correlation function in the final states of the CIC. Full (open) symbols show positive (negative) correlations. Circles and full line: logarithm of  $(-1)^n$  times the connected correlation  $C_n^{\text{conn}}(\infty)$  (2.40) for  $p = 1/2$ , against  $n$ . Squares and dashed line: prediction (2.11, 2.24) of the restricted *a priori* ensemble. Triangles and dashed line: prediction (2.12) of the full *a priori* ensemble.

## 2.5 Distribution of final magnetization and dynamical entropy

We finally determine the full distribution of the number of spin flips and of the final magnetization, for a given finite sample. This problem was tackled long ago by a somewhat similar approach [32] in the case of dimer deposition, without consideration of the dynamical entropy, though.

### Single active cluster

We consider first the case of a single active cluster of size  $\ell \geq 2$ , with free boundary conditions, with all spins being initially down. In the language of deposition, this corresponds to an initially empty cluster. We are interested in the distribution of the number  $\nu_\ell$  of spin flips (*i.e.*, deposited particles) during the history of this cluster, until it reaches a blocked configuration. The final magnetization  $M_\ell$  of the cluster is such that

$$\ell M_\ell = \sum_{n=1}^{\ell} \sigma_n(\infty) = 2\nu_\ell - \ell.$$

Because of the irreversible character of the dynamics, every spin flip replaces the cluster where it takes place by one or two smaller clusters, according to (2.17). In the generic case, two clusters of lengths  $\ell_1$  and  $\ell_2$  are generated, and their subsequent histories are independent. We have therefore

$$\nu_\ell = 1 + \nu_{\ell_1} + \nu_{\ell_2}, \quad (2.41)$$

where  $\nu_{\ell_1}$  and  $\nu_{\ell_2}$  are independent random variables, whose distribution is to be determined, while  $\ell_1 = n - 1$  and  $\ell_2 = \ell - n$ , with the breaking point  $n$  being uniform in the range  $2 \leq n \leq \ell - 1$ . For  $n = 1$  or  $n = \ell$ , only one cluster is generated, and (2.41) is changed accordingly. Finally, we set  $\nu_0 = 0$ , which necessarily holds, and  $\nu_1 = 0$ ,

which contains the gist of the kinetic constraint in the CIC model. Let

$$\phi_\ell(\lambda) = \langle e^{\lambda \nu_\ell} \rangle \quad (2.42)$$

be the characteristic function of the distribution of  $\nu_\ell$ . Equation (2.41) implies

$$(\ell - 1)\phi_\ell(\lambda) = e^\lambda \sum_{k=1}^{\ell-1} \phi_k(\lambda)\phi_{\ell-k-1}(\lambda)$$

for  $\ell \geq 2$ , with  $\phi_0(\lambda) = \phi_1(\lambda) = 1$ . These quadratic recursion relations can be solved by introducing the generating series

$$\Phi(x, \lambda) = \sum_{\ell \geq 0} \phi_\ell(\lambda) x^\ell, \quad (2.43)$$

which obeys

$$x \frac{d\Phi(x, \lambda)}{dx} = (\Phi(x, \lambda) - 1)(1 + x e^\lambda \Phi(x, \lambda)), \quad (2.44)$$

with  $\Phi(x, \lambda) = 1 + x + \dots$  as  $x \rightarrow 0$ .

The quadratic differential equation (2.44) has an obvious solution  $\Phi(x, \lambda) = 1$ . Setting  $\Phi(x, \lambda) = 1 + 1/u(x, \lambda)$ , we obtain a linear equation

$$x \frac{du(x, \lambda)}{dx} + (1 + x e^\lambda)u(x, \lambda) = -x e^\lambda,$$

which can be solved by ‘varying the constant’. This yields

$$\Phi(x, \lambda) = \frac{\exp(x e^\lambda) + e^\lambda - 1}{(1 - x e^\lambda) \exp(x e^\lambda) + e^\lambda - 1}. \quad (2.45)$$

This expression formally contains the distribution of the number  $\nu_\ell$  of spin flips.

First, by expanding (2.45) around  $\lambda = 0$ , we obtain generating series for the successive moments of  $\nu_\ell$ . The first of these series,

$$\sum_{\ell \geq 0} \langle \nu_\ell \rangle x^\ell = \frac{x(1 - e^{-x})}{(1 - x)^2},$$

can be inverted explicitly, yielding

$$\langle \nu_\ell \rangle = (1 - e^{-1})\ell - e^{-1} + (\ell + 1) \sum_{m \geq \ell+2} \frac{(-1)^m}{m!}. \quad (2.46)$$

The mean number of spin flips therefore grows linearly with the cluster size  $\ell$ , with a coefficient  $F_1 = 1 - e^{-1} = 0.632120$ , in agreement with (2.25). The constant  $-e^{-1}$  can be viewed as the contribution of the free ends of the cluster, while the last term falls off factorially, with an oscillating sign, as  $(-1)^\ell / (\ell + 1)!$ , just like the connected spin correlation (2.40) for  $p = 1$ .

Then, by inverting the generating series (2.43), we obtain the exponential estimate

$$\phi_\ell(\lambda) \sim e^{\ell F(\lambda)}, \quad (2.47)$$

where  $x_c(\lambda) = \exp(-F(\lambda))$  is the zero of the denominator of (2.45). As a consequence, all the cumulants of  $\nu_\ell$  grow linearly with the size  $\ell$  of the cluster, as

$$\langle\langle \nu_\ell^k \rangle\rangle \approx F_k \ell,$$

with

$$F(\lambda) = \sum_{k \geq 1} \frac{F_k \lambda^k}{k!}, \quad F_k = \left( \frac{d^k F}{d\lambda^k} \right)_{\lambda=0}.$$

We recover the above result  $\langle \nu_\ell \rangle \approx F_1 \ell$ , whereas  $\text{Var } \nu_\ell \approx F_2 \ell$ , with  $F_2 = 3e^{-2} - e^{-1} = 0.038126$ . The bulk of the distribution of  $\nu_\ell$  is therefore a Gaussian of the form

$$P(\nu_\ell) \approx (2\pi F_2 \ell)^{-1/2} \exp\left(-\frac{(\nu_\ell - F_1 \ell)^2}{2F_2 \ell}\right). \quad (2.48)$$

In order to investigate the tails of the distribution of  $\nu_\ell$  for  $\ell$  large, we set

$$\xi = \frac{\nu_\ell}{\ell} = \frac{1 + M_\ell}{2}.$$

An inverse Laplace transform of (2.42), using (2.47), yields

$$P(\nu_\ell) \sim \int \frac{d\lambda}{2\pi i} e^{\ell(F(\lambda) - \lambda \xi)}.$$

Evaluating this integral by the saddle-point method, we obtain an exponential estimate similar to (2.8):

$$P(\nu_\ell) \sim \exp(-\ell \Sigma(\xi)), \quad (2.49)$$

where the functions  $F(\lambda)$  and  $\Sigma(\xi)$  are related to each other by a Legendre transform:

$$F(\lambda) + \Sigma(\xi) = \lambda \xi, \quad \lambda = \frac{d\Sigma}{d\xi}, \quad \xi = \frac{dF}{d\lambda}.$$

The function  $\Sigma(\xi)$  is the large-deviation function (or entropy function) of the quantity  $\nu_\ell$ . This is a positive, convex function of  $\xi$ , which vanishes quadratically around  $\langle \xi \rangle = F_1$ , as

$$\Sigma(\xi) \approx \frac{(\xi - F_1)^2}{2F_2},$$

in agreement with the Gaussian law (2.48).

Coming back to the language of the magnetization  $M$ , the above functions have the following parametric form, in terms of  $z = x_c(\lambda)e^\lambda$ :

$$\begin{aligned} F &= \ln(1 - (1 - z)e^z) - \ln z, \\ \lambda &= \ln(1 - (1 - z)e^z), \\ \Sigma &= \ln z - \frac{1 - (1 - z)e^z}{z^2 e^z} \ln(1 - (1 - z)e^z), \\ M &= 1 - 2 \frac{1 - (1 - z)e^z}{z^2 e^z}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

### Uncorrelated initial state

We now investigate the distribution of the final magnetization  $M_N$  for a finite chain of  $N$  spins, with an initial state of the form (2.13). This magnetization is given by

$$NM_N = 2\nu + NM_N(0) = 2\nu + \sum_{n=1}^N \sigma_n(0), \quad (2.51)$$

where  $M_N(0)$  is the initial magnetization and  $\nu$  is the number of spin flips during the history of the system. The final magnetization  $M_N$  is therefore random in two respects, as it depends both on the initial spin configuration and on the numbers of spin flips during the history of each cluster.

We again introduce the characteristic function

$$\psi_N(\lambda) = \langle \exp(\lambda NM_N) \rangle = \left\langle \exp \left( 2\lambda\nu + \lambda \sum_{n=1}^N \sigma_n(0) \right) \right\rangle, \quad (2.52)$$

as well as the generating series

$$\Psi(x, \lambda) = \sum_{N \geq 1} \psi_N(\lambda) x^N.$$

The brackets in the right-hand side of (2.52) involve:

- (i) averaging over stochastic histories with a fixed initial configuration;
- (ii) averaging over the distribution (2.13) of initial configurations.

The outcome after (i) is that the right-hand side of (2.52) is a multiplicative cluster quantity of the type investigated in Appendix A, where the contributions of clusters of up and down spins read

$$f_L = e^{\lambda L}, \quad g_L = e^{-\lambda L} \phi_L(2\lambda). \quad (2.53)$$

Step (ii) can now be performed. The generating series corresponding to (2.53) are

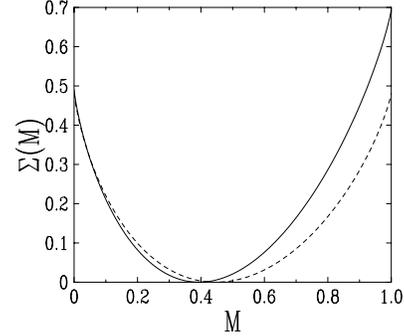
$$f(x) = \frac{x e^\lambda}{1 - x e^\lambda}, \quad g(x) = \Phi(x e^{-\lambda}, 2\lambda) - 1. \quad (2.54)$$

Using (2.45) and (A.1), we obtain

$$\Psi(x, \lambda) = \frac{x e^\lambda (\exp(p x e^\lambda) + (1-p)(e^{2\lambda} - 1))}{(1 - x e^\lambda) \exp(p x e^\lambda) + (1 - (1-p)x e^\lambda)(e^{2\lambda} - 1)}. \quad (2.55)$$

This expression provides the distribution of the final magnetization, for any system size  $N$  and any value of the parameter  $p$  characterizing the initial state.

By expanding (2.55) around  $\lambda = 0$ , we obtain generating series for the moments of  $NM_N$ . The first of these series yields an expression similar to (2.46) for  $N(M_N)$ , with a leading term, linear in  $N$ , in agreement with the expression (2.23) of  $M(\infty)$ , a constant boundary term,



**Fig. 4.** Full line: plot of the dynamical entropy of the CIC, given by  $\Sigma_{1/2}(M)$  (2.56), against magnetization  $M$ . Dashed line: prediction (2.5), (2.9) of the *a priori* approach.

and an oscillating, factorially decaying correction. Similarly, we find

$$N \text{Var } M \approx 4pe^{-p}((2p^2 - p + 2)e^{-p} - 1).$$

For a random initial configuration ( $p = 1/2$ ), we have therefore  $N \text{Var } M \approx 4e^{-1} - 2e^{-1/2} = 0.258456$ .

Table 1 provides a comparison between exact dynamical results for a random initial state ( $p = 1/2$ ) and prediction of the full *a priori* ensemble, concerning the main characteristics (mean value and scaled variance) of the final energy of the three models considered in this work.

The tails of the distribution of  $M_N$  are again described by an exponential estimate of the form (2.8):

$$P(M_N) \sim \exp(-N \Sigma_p(M_N)),$$

where the large-deviation function  $\Sigma_p(M)$  reads, in parametric form:

$$\begin{aligned} \Sigma_p &= \ln z - \frac{(1 - (1-p)z)(1 - (1-p)z - (1-z)e^{pz})}{pz^2(2-p - (1-p)z)e^{pz}} \\ &\quad \times \ln \frac{1 - (1-p)z - (1-z)e^{pz}}{1 - (1-p)z}, \\ M &= 1 - 2 \frac{(1 - (1-p)z)(1 - (1-p)z - (1-z)e^{pz})}{pz^2(2-p - (1-p)z)e^{pz}}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

This function has finite limits

$$\Sigma_p(0) = -\frac{1}{2} \ln \frac{p(2-p)}{2}, \quad \Sigma_p(1) = -\ln(1-p),$$

at the minimum magnetization  $M = 0$ , corresponding to  $z = 0$ , and at the ground-state magnetization  $M = 1$ , corresponding to  $z = 1/(1-p)$ . Furthermore, the result (2.50) is recovered by setting  $p = 1$  in (2.56), as it should be.

Figure 4 shows a plot of the *dynamical entropy*, defined as being the large-deviation function  $\Sigma_p(M)$  of (2.56) for a random initial configuration, *i.e.*,  $p = 1/2$ , against the magnetization  $M$  of the final state. The

endpoint values read  $\Sigma_{1/2}(0) = \ln(8/3)/2 = 0.490415$  and  $\Sigma_{1/2}(1) = \ln 2 = 0.693147$ . The prediction (2.9) of the *a priori* approach is plotted for comparison. The functions  $\Sigma_{1/2}(M)$  and  $\Sigma_{\text{ap}}(M)$  respectively vanish for  $M(\infty)$  (2.24) and  $M^*$  (2.7). These numbers are listed in Table 1, together with the corresponding limit scaled variances.

### 3 Constrained Glauber dynamics

#### 3.1 Definition of the model

We now consider a ferromagnetic Ising chain with Glauber dynamics (non-conserved order parameter) in the presence of kinetic constraints. The Hamiltonian of the chain, with unit exchange constant, reads

$$\mathcal{H} = - \sum_n \sigma_n \sigma_{n+1} = - \sum_n s_n, \quad (3.1)$$

where we have introduced the energy (bond) variables  $s_n = \sigma_n \sigma_{n+1}$ .

We consider single spin-flip (Glauber) dynamics, assuming that the flipping rate only depends on the energy difference between the configurations after and before the proposed move, *i.e.*,

$$W(\sigma_n \rightarrow -\sigma_n) = \mathcal{W}_{\delta\mathcal{H}},$$

with

$$\delta\mathcal{H} = 2(\sigma_{n-1} + \sigma_{n+1})\sigma_n = 2(s_{n-1} + s_n) \in \{-4, 0, 4\}.$$

The requirement that the dynamics obeys detailed balance with respect to the Hamiltonian (3.1) at temperature  $T = 1/\beta$  yields a single condition:

$$\frac{\mathcal{W}_4}{\mathcal{W}_{-4}} = e^{-4\beta}.$$

Choosing time units such that  $\mathcal{W}_{-4} = 1$ , we have  $\mathcal{W}_4 = e^{-4\beta}$ . We restrict ourselves to zero-temperature dynamics, so that  $\mathcal{W}_4 = 0$ . The rate  $\mathcal{W}_0$ , corresponding to diffusive rearrangements at constant energy, remains a free parameter. The zero-temperature limits of the Metropolis and heat-bath rules respectively correspond to  $\mathcal{W}_0 = 1$  and  $\mathcal{W}_0 = 1/2$ . Here we choose

$$\mathcal{W}_0 = 0, \quad (3.2)$$

so that only spin flips which lower the energy are allowed. The condition (3.2) defines the constrained Glauber dynamics already considered in [18,19]. The possible spin moves are flips of isolated spins:

$$-+- \rightarrow ---, \quad +-+ \rightarrow +++ \quad (3.3)$$

Each move suppresses two consecutive unsatisfied bonds:  $s_{n-1} = s_n = -1 \rightarrow s_{n-1} = s_n = +1$ . The system eventually reaches a blocked state, where there is no isolated

spin. Equivalently, each unsatisfied bond (or domain wall) is isolated. Our aim is again to provide a statistical description of the blocked states reached in this way.

We recast the problem in terms of deposition, where empty sites represent unsatisfied bonds, while occupied sites represent satisfied bonds:

$$\begin{cases} s_n = \sigma_n \sigma_{n+1} = -1 \iff \circ, \\ s_n = \sigma_n \sigma_{n+1} = +1 \iff \bullet. \end{cases} \quad (3.4)$$

The moves (3.3) read

$$\circ\circ \rightarrow \bullet\bullet,$$

so that the dynamics is equivalent to the RSA of dimers, considered long ago [33,32].

The blocked states are the spin configurations where unsatisfied bonds are isolated. These blocked configurations are therefore formally equivalent to those of the CIC of Section 2, up to the replacement of the spins  $\sigma_n$  by the energy variables  $s_n$ . The Hamiltonians (2.1) and (3.1) are also equivalent, up to the replacement  $\sigma_n \rightarrow s_n$ . As a consequence, the entropy  $S_{\text{ap}}(E)$  of the *a priori* ensemble at fixed energy  $E$  is still given by (2.5), up to the replacement of  $M$  by  $-E$ .

#### 3.2 Dynamics of cluster densities and energy

We again consider an initial state similar to (2.13), with  $\sigma_0(0) = \pm 1$  at random, while each energy variable is drawn from the binary distribution

$$\begin{cases} s_n(0) = -1 & (\circ) & \text{with prob. } p, \\ s_n(0) = +1 & (\bullet) & \text{with prob. } 1-p. \end{cases} \quad (3.5)$$

The parameter  $p$  is related to the initial energy  $E(0) = -1 + 2p$ , and (2.14) still holds.

The dynamics of the cluster densities and energy can be investigated by the method of Section 2.3. The densities  $p_\ell(t)$  of clusters of exactly  $\ell$  consecutive unsatisfied bonds (empty sites) obey linear equations similar to (2.18):

$$\frac{dp_\ell(t)}{dt} = -(\ell-1)p_\ell(t) + 2 \sum_{k \geq \ell+2} p_k(t)$$

for  $\ell \geq 1$ , with  $p_\ell(0) = (1-p)^2 p^\ell$ , and the energy reads

$$E(t) = -1 + 2 \sum_{\ell \geq 1} \ell p_\ell(t). \quad (3.6)$$

The ansatz (2.19) again holds, yielding the solution

$$p_\ell(t) = (1-pe^{-t})^2 \exp(2p(e^{-t}-1)) p^\ell e^{-(\ell-1)t}$$

and

$$E(t) = -1 + 2p \exp(2p(e^{-t}-1)).$$

Again, only inactive clusters of length  $\ell = 1$  survive in the blocked states:

$$p_1(\infty) = pe^{-2p},$$

so that

$$E(\infty) = -1 + 2pe^{-2p}. \quad (3.7)$$

This result [18, 19] was shown in Figure 1.

For an initial state close to the ferromagnetic ground-state ( $E(0) \rightarrow -1$ , *i.e.*,  $p \rightarrow 0$ ), the behavior  $E(\infty) \approx E(0) - 4p^2$  is easily explained in terms of clusters of two unsatisfied bonds. The energy of blocked states then increases monotonically against  $p$ , up to the maximum value

$$E(\infty)_{p=1/2} = -1 + e^{-1} = -0.632121,$$

corresponding to a random initial configuration ( $p = 1/2$ , *i.e.*,  $E(0) = 0$ ), and then decreases monotonically against  $p$ , down to the value

$$E(\infty)_{p=1} = -1 + 2e^{-2} = -0.729329,$$

corresponding to the antiferromagnetically ordered initial state ( $p = 1$ ).

### 3.3 Spin and energy correlations

In the present context, it is natural to consider the spin (site) and energy (bond) correlation functions

$$C_n(t) = \langle \sigma_0 \sigma_n \rangle_t, \quad \Gamma_n(t) = \langle s_0 s_n \rangle_t = \langle \sigma_0 \sigma_1 \sigma_n \sigma_{n+1} \rangle_t.$$

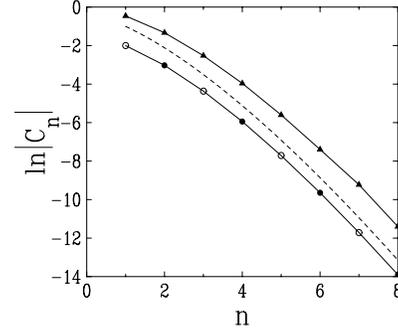
The energy correlation function  $\Gamma_n(t)$  can be evaluated analytically, using the method of Section 2.4. We introduce variables  $\tau_n = (1 - s_n)/2$ , and consider the one-cluster function  $c_n(t)$  and the two-cluster function  $d_{m,k,n}(t)$ , defined in (2.29) and (2.30). These functions obey rate equations similar to (2.34) and (2.35):

$$\begin{aligned} \frac{dc_n(t)}{dt} &= -(n-1)c_n(t) - 2c_{n+1}(t), \\ \frac{dd_{m,k,n}(t)}{dt} &= -(m+n-2)d_{m,k,n}(t) - d_{m+1,k,n}(t) \\ &\quad - d_{m+1,k-1,n}(t) - d_{m,k-1,n+1}(t) \\ &\quad - d_{m,k,n+1}(t). \end{aligned}$$

After some algebra we are left with the following expression for the connected energy correlation function  $\Gamma_n^{\text{conn}}(\infty)$ :

$$\begin{aligned} \Gamma_n^{\text{conn}}(\infty) &= \Gamma_n(\infty) - E(\infty)^2 = 2pe^{-2p} \\ &\times \left( (1-2p) \frac{(-2p)^n}{n!} - 2p \sum_{m \geq n+1} \frac{(-2p)^m}{m!} \right), \quad (3.8) \end{aligned}$$

which closely resembles (2.40). For  $p \neq 1/2$ , the first term is leading, hence  $\Gamma_n^{\text{conn}}(\infty) \sim (-2p)^n/n!$ . For  $p = 1/2$ ,



**Fig. 5.** Spin and energy correlation function in the blocked states of the ferromagnetic chain with constrained Glauber dynamics. Full (open) symbols show positive (negative) correlations. Circles and full line: logarithm of  $(-1)^n$  times the connected energy correlation  $\Gamma_n^{\text{conn}}(\infty)$  (3.8) for  $p = 1/2$ , against  $n$ . Triangles and full line: logarithm of the full spin correlation function  $C_n(\infty)$ , against  $n$ , measured in a numerical simulation. Dashed line: logarithm of asymptotic behavior  $1/(n+1)!$ , up to a multiplicative constant, meant as a guide to the eye.

$\Gamma_n^{\text{conn}}(\infty) \sim (-1)^n/(n+1)!$ . Figure 5 shows a logarithmic plot of both correlation functions, against  $n$ , for a random initial configuration ( $p = 1/2$ ). The circles show  $(-1)^n \Gamma_n^{\text{conn}}(\infty)$ , as given by the analytical result (3.8). The triangles show the full spin correlation function  $C_n(\infty)$ , measured in a numerical simulation. For each sample, starting in a random initial configuration, the constrained dynamics is run until a blocked state is reached. The correlation function  $C_n(\infty)$  is found to be positive and to decay monotonically to zero as a function of the distance  $n$ . The data shown correspond to a total of  $10^{10}$  blocked spins. Both correlations are observed to fall off as  $1/(n+1)!$

### 3.4 Distribution of final energy and dynamical entropy

We now investigate the distribution of the number of spin flips and of the final energy, using the method of Section 2.5.

We consider first the case of a single cluster of size  $\ell \geq 2$ , whose initial configuration is antiferromagnetically ordered, *i.e.*, made of unsatisfied bonds. Let  $\nu_\ell$  be the number of spin flips during the history of this cluster. Equation (2.41) is replaced by

$$\nu_\ell = 2 + \nu_{\ell_1} + \nu_{\ell_2},$$

where  $\ell_1 = n - 1$  and  $\ell_2 = \ell - n - 1$ , and the breaking point  $n$  is uniform in the range  $1 \leq n \leq \ell - 1$ . Hence equation (2.44) for the generating series  $\Phi(x, \lambda)$  is replaced by

$$x \frac{d\Phi(x, \lambda)}{dx} = (xe^\lambda \Phi(x, \lambda))^2 + \Phi(x, \lambda) - 1. \quad (3.9)$$

This is a Riccati equation, which can be solved by linearization [34]. Setting

$$\frac{1}{\Phi(x, \lambda)} = 1 - \frac{x}{u(x, \lambda)} \frac{du(x, \lambda)}{dx}$$

yields

$$\frac{d^2 u(x, \lambda)}{dx^2} = e^{2\lambda} u(x, \lambda),$$

so that a basis of solutions reads  $\exp(\pm x e^\lambda)$ . We thus obtain the closed-form expression

$$\Phi(x, \lambda) = \frac{(e^\lambda + 1) \exp(2x e^\lambda) + e^\lambda - 1}{(e^\lambda + 1)(1 - x e^\lambda) \exp(2x e^\lambda) + (e^\lambda - 1)(1 + x e^\lambda)}.$$

We now consider the final total energy  $NE_N$  of a finite chain of  $N$  spins, with the initial state (3.5). Equation (2.51) is replaced by

$$NE_N = NE_N(0) - 2\nu,$$

where  $E_N(0)$  is the initial energy and  $\nu$  is the number of spin flips. Equations (2.54) and (2.55) are replaced by

$$f(x) = \frac{x e^{-\lambda}}{1 - x e^{-\lambda}}, \quad g(x) = \Phi(x e^\lambda, -2\lambda) - 1$$

and

$$\Psi(x, \lambda) = \frac{x ((e^{2\lambda} + 1) \exp(2px e^{-\lambda}) + (2p - 1)(e^{2\lambda} - 1))}{(e^{2\lambda} + 1)(e^\lambda - x) \exp(2px e^{-\lambda}) + (-e^\lambda + (1 - 2p)x)(e^{2\lambda} - 1)}.$$

This last expression contains the distribution of the final energy of a system of size  $N$ , as a function of the parameter  $p$  characterizing the initial state. In particular, the mean energy is found to agree with the expression (3.7) of  $E(\infty)$ , while its scaled variance reads

$$N \text{Var } E \approx 4p(4p^2 - p + 1)e^{-4p}.$$

For a random initial configuration ( $p = 1/2$ ), we have therefore  $N \text{Var } E \approx 3e^{-2} = 0.406006$ .

The tails of the distribution of  $E_N$  are again given by an estimate similar to (2.8):

$$P(E_N) \sim \exp(-N \Sigma_p(E_N)),$$

where the large-deviation function  $\Sigma_p(E)$  reads, in parametric form:

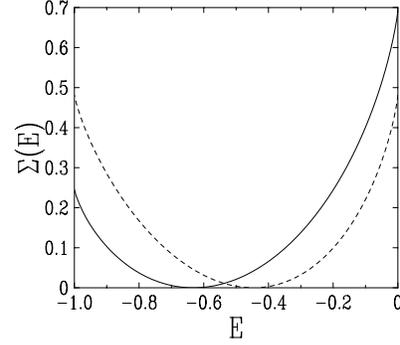
$$\begin{aligned} \Sigma_p &= \ln z + \frac{(1 + (2p - 1)z)^2 - (z - 1)^2 e^{4pz}}{4pz^2 e^{2pz} (2(1 - p) + (2p - 1)z)} \\ &\quad \times \ln \frac{1 + (2p - 1)z + (1 - z)e^{2pz}}{1 + (2p - 1)z - (1 - z)e^{2pz}}, \\ E &= -1 + \frac{(1 + (2p - 1)z)^2 - (z - 1)^2 e^{4pz}}{2pz^2 e^{2pz} (2(1 - p) + (2p - 1)z)}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

This function has finite limits

$$\Sigma_p(-1) = \ln z_c(p), \quad \Sigma_p(0) = -\frac{1}{2} \ln(p(1 - p)),$$

at the ground-state energy  $E = -1$ , corresponding to  $z = z_c(p)$ , with

$$1 + (2p - 1)z_c + (1 - z_c)e^{2pz_c} = 0, \quad (3.11)$$



**Fig. 6.** Full line: plot of the dynamical entropy of the ferromagnetic chain with constrained Glauber dynamics, given by  $\Sigma_{1/2}(E)$  (3.10), against energy  $E$ . Dashed line: prediction (2.5, 2.9) of the *a priori* approach.

and at the maximum energy  $E = 0$ , corresponding to  $z \rightarrow 0$ . Figure 6 shows a plot of the dynamical entropy  $\Sigma_{1/2}(E)$ , as given by (3.10), against the energy  $E$  of the final state. The prediction of the *a priori* approach is plotted for comparison. The endpoint values of the dynamical entropy are  $\Sigma_{1/2}(-1) = \ln z_c(1/2) = 0.245660$  and  $\Sigma_{1/2}(0) = \ln 2 = 0.693147$ .

## 4 Constrained Kawasaki dynamics

### 4.1 Definition of the model

We finally investigate a ferromagnetic Ising chain with conserved dynamics at zero temperature, in the presence of kinetic constraints.

Consider the ferromagnetic chain with Hamiltonian (3.1), but now with Kawasaki dynamics, where only pairs of opposite spins ( $s_n = \sigma_n \sigma_{n+1} = -1$ ) may be flipped, so that the magnetization is locally conserved. The flipping rates are again assumed to depend only on the energy difference involved, which now reads

$$\delta\mathcal{H} = 2(\sigma_{n-1}\sigma_n + \sigma_{n+1}\sigma_{n+2}) = 2(s_{n-1} + s_{n+1}) \in \{-4, 0, 4\}.$$

We make the choice (3.2), defining thus a model with constrained Kawasaki dynamics, already considered in [20–22]. The possible spin moves are

$$- + - + \rightarrow - - + +, \quad + - + - \rightarrow + + - -. \quad (4.1)$$

Each move suppresses two unsatisfied bonds:  $s_{n-1} = s_{n+1} = -1 \rightarrow s_{n-1} = s_{n+1} = +1$ . The system eventually reaches a blocked state, where the spin patterns  $- + - +$  and  $- + - +$  are absent. Equivalently, there are at most two consecutive unsatisfied bonds.

Considering unsatisfied bonds as empty and satisfied bonds as occupied, as in (3.4), the moves (4.1) read

$$\circ \circ \circ \rightarrow \bullet \circ \bullet,$$

so that the dynamics is equivalent to the random deposition of hollow trimers, a case of RSA that seems not to have been studied so far.

**4.2 A priori statistics**

We consider the restricted *a priori* ensemble of blocked configurations with energy  $E$ . The entropy  $S_{\text{ap}}(E)$  of this ensemble can again be evaluated by means of the transfer-matrix formalism. The partition functions of a finite chain of  $N$  spins, now labeled by the prescribed values of its last two bonds ( $\circ$  or  $\bullet$ ), obey the recursion

$$\begin{pmatrix} Z_{N+1}^{\bullet\bullet} \\ Z_{N+1}^{\bullet\circ} \\ Z_{N+1}^{\circ\bullet} \\ Z_{N+1}^{\circ\circ} \end{pmatrix} = \mathcal{T} \begin{pmatrix} Z_N^{\bullet\bullet} \\ Z_N^{\bullet\circ} \\ Z_N^{\circ\bullet} \\ Z_N^{\circ\circ} \end{pmatrix},$$

where the  $4 \times 4$  transfer matrix

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} e^\beta & 0 & e^\beta & 0 \\ e^{-\beta} & 0 & e^{-\beta} & 0 \\ 0 & e^\beta & 0 & e^\beta \\ 0 & e^{-\beta} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

has a reducible characteristic polynomial,  $\lambda P_3(\lambda)$ , with  $P_3(\lambda) = \lambda^3 - e^\beta \lambda^2 - \lambda - e^{-\beta}$ . Thermodynamic quantities are still given by (2.10) in terms of the largest root  $\lambda_+$  of  $P_3$ , *i.e.*, in parametric form:

$$z = e^\beta \lambda_+, \quad \lambda_+^2 = \frac{z^2 + z + 1}{z}, \quad e^{2\beta} = \frac{z^3}{z^2 + z + 1},$$

hence

$$E = \frac{1 - z^2}{z^2 + 2z + 3},$$

$$S_{\text{ap}} = \frac{(z^2 + z + 1) \ln(z^2 + z + 1) - z(2z + 1) \ln z}{z^2 + 2z + 3}. \quad (4.2)$$

The entropy of the full *a priori* ensemble of blocked states, irrespective of their energy, is equal to the maximum value of the entropy  $S_{\text{ap}}(E)$ , corresponding to  $\beta = 0$ , where we have  $z^3 - z^2 - z - 1 = 0$ , hence  $z = z_0 = 1.839287$  and

$$S_{\text{ap}}^* = \ln z_0 = 0.609378, \quad E^* = \frac{1 - z_0^2}{z_0^2 + 2z_0 + 3} = -0.236840.$$

The difference  $\Sigma_{\text{ap}}(E) = S_{\text{ap}}^* - S_{\text{ap}}(E)$ , introduced in (2.9), to be plotted in Figure 8, vanishes quadratically as

$$\Sigma_{\text{ap}}(E) \approx c(E - E^*)^2, \quad c = \frac{(z_0^2 + 2z_0 + 3)^2}{8z_0^4(z_0^2 + 4z_0 + 1)} = 0.947620,$$

so that  $N \text{Var } E \approx 1/(2c) = 0.527638$ .

**4.3 Dynamics of cluster densities and energy**

We again consider an initial state of the form (3.5). The densities  $p_\ell(t)$  obey linear equations similar to (2.18):

$$\frac{dp_\ell(t)}{dt} = -(\ell - 2)p_\ell(t) + 2 \sum_{k \geq \ell+3} p_k(t)$$

for  $\ell \geq 2$ , with  $p_\ell(0) = (1 - p)^2 p^\ell$ . The ansatz (2.19) yields the solution

$$p_\ell(t) = (1 - pe^{-t})^2 \exp\left(2p(e^{-t} - 1) + p^2(e^{-2t} - 1)\right) \times p^\ell e^{-(\ell-2)t}. \quad (4.3)$$

The dynamical equation for  $\ell = 1$ ,

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = p_3(t) + \sum_{k \geq 4} kp_k(t),$$

is special, because any move generates an isolated unsatisfied bond. Using (4.3), we get

$$p_1(t) = p + p^2(pe^{-t} - 2) \exp\left(2p(e^{-t} - 1) + p^2(e^{-2t} - 1)\right) - 2p^2 e^{-(1+p)^2} \int_{1+pe^{-t}}^{1+p} e^{y^2} dy. \quad (4.4)$$

Equation (3.6) then yields

$$E(t) = -1 + 2p - 4p^2 e^{-(1+p)^2} \int_{1+pe^{-t}}^{1+p} e^{y^2} dy.$$

Only inactive clusters of one or two unsatisfied bonds survive in the final states:

$$p_1(\infty) = p - 2p^2 e^{-2p-p^2} - 2p^2 e^{-(1+p)^2} \int_1^{1+p} e^{y^2} dy,$$

$$p_2(\infty) = p^2 e^{-2p-p^2},$$

so that

$$E(\infty) = -1 + 2p - 4p^2 e^{-(1+p)^2} \int_1^{1+p} e^{y^2} dy. \quad (4.5)$$

This result was shown in Figure 1.

For an initial state close to the ferromagnetic ground-state ( $E(0) \rightarrow -1$ , *i.e.*,  $p \rightarrow 0$ ), the behavior  $E(\infty) \approx E(0) - 4p^3$  is easily explained in terms of clusters of three unsatisfied bonds. The energy of blocked states then increases monotonically against  $p$ , to the maximum value

$$E(\infty)_{p=1} = 1 - 4e^{-4} \int_1^2 e^{y^2} dy = -0.098204,$$

corresponding to the antiferromagnetically ordered initial state ( $p = 1$ ). For a random initial configuration ( $p = 1/2$ ), we have

$$E(\infty)_{p=1/2} = -e^{-9/4} \int_1^{3/2} e^{y^2} dy = -0.274087.$$

The last two results are already in [20, 22].

tel-00001795, version 1 - 8 Oct 2002

#### 4.4 Spin and energy correlations

The energy correlation function  $\Gamma_n(\infty)$  can be evaluated analytically, similarly to Sections 2.4 and 3.3. In the present situation final results are, however, less explicit.

We consider the one-cluster function  $c_n(t)$  and the two-cluster function  $d_{m,k,n}(t)$ , defined in (2.29, 2.30). The rate equations obeyed by these functions, and the way to solve them, are similar to (2.34, 2.35).

The one-cluster function obeys

$$\begin{aligned}\frac{dc_n(t)}{dt} &= -(n-2)c_n(t) - 2c_{n+1}(t) - 2c_{n+2}(t) \quad (n \geq 2), \\ \frac{dc_1(t)}{dt} &= -2c_3(t),\end{aligned}$$

hence

$$\begin{aligned}c_n(t) &= \exp\left(2p(e^{-t}-1) + p^2(e^{-2t}-1)\right) \\ &\quad \times p^n e^{-(n-2)t} \quad (n \geq 2), \\ c_1(t) &= p - 2p^2 e^{-(1+p)^2} \int_{1+pe^{-t}}^{1+p} e^{y^2} dy,\end{aligned}$$

so that

$$\begin{aligned}c_1(\infty) &= p - 2p^2 e^{-(1+p)^2} \int_1^{1+p} e^{y^2} dy, \\ c_2(\infty) &= p^2 e^{-2p-p^2},\end{aligned}\quad (4.6)$$

in agreement with (2.31, 4.3), and (4.4).

The two-cluster function obeys

$$\begin{aligned}\frac{dd_{m,k,n}(t)}{dt} &= -(m-2)d_{\underline{m},k,n}(t) - (n-2)d_{m,k,\underline{n}}(t) \\ &\quad - d_{\underline{m+1},k,n}(t) - d_{\underline{m+1},k-1,n}(t) \\ &\quad - d_{\underline{m},k-1,\underline{n+1}}(t) - d_{\underline{m},k,\underline{n+1}}(t) \\ &\quad - d_{\underline{m+2},k,n}(t) - d_{\underline{m+2},k-2,n}(t) \\ &\quad - d_{\underline{m},k-2,\underline{n+2}}(t) - d_{\underline{m},k,\underline{n+2}}(t).\end{aligned}\quad (4.7)$$

Besides the conventions of Section 2.4, only some of the terms are present in the right-hand side for either  $m$  or  $n = 1$  or  $2$ , namely those for which the underlined index is greater than 2. Furthermore, for  $k = 1$  the sum  $d_{\underline{m+2},k-2,n}(t) + d_{\underline{m},k-2,\underline{n+2}}(t)$  is replaced by  $c_{m+n+1}(t)$ . As in previous cases, we look for a solution to (4.7) of the form

$$\begin{aligned}d_{m,k,n}(t) &= A_k(t)z(t)^{m+n} \quad (m, n \geq 2), \\ d_{m,k,1}(t) &= B_k(t)z(t)^m \quad (m \geq 2), \\ d_{1,k,1}(t) &= D_k(t),\end{aligned}$$

where  $z(t)$  has been introduced in (2.20). The procedure then consists in introducing generating series  $\mathcal{A}(x, t)$ ,  $\mathcal{B}(x, t)$ ,  $\mathcal{D}(x, t)$ , similar to (2.38), writing differential equations obeyed by these functions, and solving the latter equations. This requires some lengthy and tedious algebra.

The energy correlation function  $\Gamma_n$  in the blocked states is still given by (2.28) in terms of  $c_1(\infty)$  and

$d_{1,n-1,1}(\infty)$ , so that the function of most interest is  $\mathcal{D}(x, \infty)$ , for which we are left with the expression

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(x, \infty) &= \frac{p^2}{1-x} - p^3(x+2)e^{-(1+p)^2} \int_1^{1+p} e^{y^2} dy \\ &\quad - \frac{2p^3}{1-x} \sqrt{2(x^2+1)} \exp\left(-\frac{(x+1+p(x^2+1))^2}{2(x^2+1)}\right) \\ &\quad \times \int_{b(0)}^{b(1)} e^{y^2} dy + \frac{p^3}{x^2} \sqrt{2(x^2+1)} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{(x+1+p(x^2+1))^2}{2(x^2+1)}\right) \\ &\quad \times \int_0^1 R(x, u) du \int_{b(0)}^{b(u)} e^{y^2} dy,\end{aligned}\quad (4.8)$$

with the notations

$$\begin{aligned}R(x, u) &= \frac{x^2+1}{1-x}(1-x+px(1-x)+2p^2x^2) \\ &\quad \times \exp\left(p(x+1)(u-1) + \frac{p^2}{2}(x^2+1)(u^2-1)\right) \\ &\quad - (1-x^2+px(1-2x-x^2)u) \\ &\quad \times \exp\left(p(1-x)(u-1) + \frac{p^2}{2}(1-x^2)(u^2-1)\right) \\ &\quad + (x^2+1) \int_{1+pxu}^{1+px} e^{-y^2} dy \\ &\quad \times \exp\left(1+p(x-1+(x+1)u)\right) \\ &\quad + \frac{p^2}{2}(x^2-1+(x^2+1)u^2)\end{aligned}$$

and

$$b(u) = \frac{x+1+p(x^2+1)u}{\sqrt{2(x^2+1)}}.$$

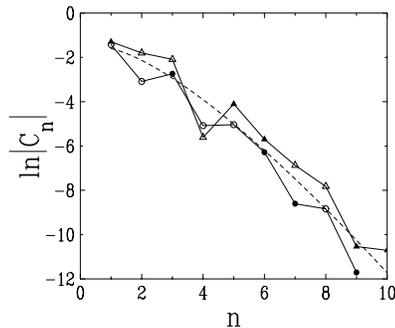
The function  $\mathcal{D}(x, \infty)$  has a simple pole at  $x = 1$ , with residue  $-c_1(\infty)^2$ , where  $c_1(\infty)$  has been evaluated in (4.6), so that the  $d_{1,k,1}(\infty)$  converge to  $c_1(\infty)^2$  as the distance  $k$  becomes infinitely large, as it should. The fall-off of the difference  $d_{1,k,1}(\infty) - c_1(\infty)^2$ , and that of the connected correlation function  $\Gamma_n^{\text{conn}}(\infty)$ , are related to the behavior of  $\mathcal{D}(x, \infty)$  as  $|x|$  is large. The result (4.8) leads to the estimate

$$\mathcal{D}(x, \infty) \sim \exp(2px - p^2x^2),$$

with exponential accuracy. The results summarized in Appendix B then imply

$$\Gamma_n^{\text{conn}}(\infty) \sim \frac{p^n}{(n/2)!} \cos\left(\frac{n\pi}{2} - \sqrt{2n}\right). \quad (4.9)$$

The result (4.8) does not however lead to any useful expression for  $\Gamma_n$ , even for  $n = 1$ . Figure 7 shows a logarithmic plot of the spin and energy correlation functions



**Fig. 7.** Spin (site) and energy (bond) correlation functions in the blocked states of the ferromagnetic chain with constrained Kawasaki dynamics, measured in a numerical simulation. Full (open) symbols show positive (negative) correlations. Circles and full line: logarithm of the absolute value of the connected energy correlation  $\Gamma_n^{\text{conn}}(\infty)$ . Triangles and full line: logarithm of the absolute value of the full spin correlation  $C_n(\infty)$ . Dashed line: logarithm of asymptotic behavior  $1/(2^n(n/2)!)$  up to a multiplicative constant, meant as a guide to the eye.

against  $n$ , as measured in a numerical simulation for a random initial condition ( $p = 1/2$ ). The data shown correspond to a total of  $5 \times 10^{10}$  spins. Both the full spin correlation  $C_n(\infty)$  and the connected energy correlation  $\Gamma_n^{\text{conn}}(\infty) = \Gamma_n(\infty) - E(\infty)^2$  are found to agree with the asymptotic result (4.9). The absolute value of the data follows the predicted fall-off, shown as a dashed line, while the signs roughly follow the predicted pattern (+ + --), up to more and more seldom mistakes.

#### 4.5 Distribution of final energy and dynamical entropy

We end up with the distribution of the final energy of a finite sample. This analysis will follow the lines of Sections 2.5 and 3.4, the main difference being that (4.10) will have to be solved numerically.

We consider first the case of a single cluster of size  $\ell \geq 2$ , whose initial configuration is only made of unsatisfied bonds. Let  $\nu_\ell$  be the number of spin flips of this cluster. Equation (2.41) is replaced by

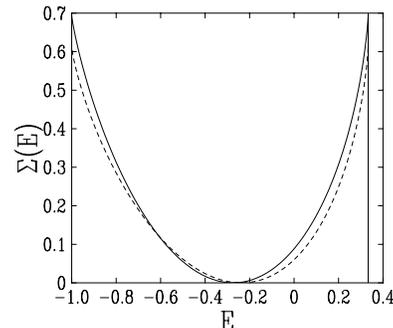
$$\nu_\ell = 2 + \nu_{\ell_1} + \nu_{\ell_2},$$

where  $\ell_1 = n - 1$  and  $\ell_2 = \ell - n - 2$ , and the breaking point  $n$  is uniform in the range  $1 \leq n \leq \ell - 2$ . Hence equation (2.44) for the generating series  $\Phi(x, \lambda)$  is replaced by

$$x \frac{d\Phi(x, \lambda)}{dx} = x^3 e^{2\lambda} \Phi(x, \lambda)^2 + 2\Phi(x, \lambda) - x - 2. \quad (4.10)$$

In contrast with (2.44) and (3.9), we have not been able to solve the Riccati equation (4.10) analytically.

We now consider the final total energy  $NE_N$  of a finite chain of  $N$  spins, with the initial state (3.5). The tails of



**Fig. 8.** Full line: plot of the dynamical entropy of the ferromagnetic chain with constrained Kawasaki dynamics, against energy  $E$ . Data are obtained by solving numerically (4.10, 4.11), and (4.12), for  $p = 1/2$ . Dashed line: prediction (4.2) of the *a priori* approach.

the distribution of  $E_N$  are again given by an estimate similar to (2.8),

$$P(E_N) \sim \exp(-N \Sigma_p(E_N)),$$

where the large-deviation function  $\Sigma_p(E)$  reads, in parametric form,

$$E = -\frac{1}{x_c} \frac{dx_c}{d\lambda}, \quad \Sigma_p = \ln x_c - \frac{\lambda}{x_c} \frac{dx_c}{d\lambda}, \quad (4.11)$$

and  $x_c(\lambda) = \exp(-F(\lambda))$  is the real positive solution of

$$\Phi(px_c e^\lambda, -2\lambda) = \frac{e^\lambda}{(1-p)x_c}. \quad (4.12)$$

The function  $\Sigma_p(E)$  can be evaluated analytically in some regimes. Skipping any detail, we mention that the limits

$$\Sigma_p(-1) = -\ln(1-p), \quad \Sigma_p(1/3) = -\frac{1}{3} \ln(p^2(1-p)),$$

at the ground-state energy  $E = -1$  and at the maximum energy  $E = 1/3$  can be determined exactly. Moreover, the solution to (4.10) can be expanded as a power series  $\Phi(x, \lambda) = 1/(1-x) + \lambda\Phi_1(x) + \lambda^2\Phi_2(x) + \dots$ . We thus recover the mean energy  $E(\infty)$  (4.5), and obtain the following expression for the scaled energy variance:

$$\begin{aligned} N \text{Var } E &\approx 2p(1-p)(1-4p^2) + 4(1-p)^2 B(p) \\ &\quad - 4(1-p)^2(3-4p+4p^3)A(p) \\ &\quad - 2(1-p)^3(5-7p+4p^3)A(p)^2, \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} A(p) &= \frac{2p^2}{(1-p)^2} e^{-(1+p)^2} \int_1^{1+p} e^{y^2} dy = \frac{2p-1-E(\infty)}{2(1-p)^2}, \\ B(p) &= \frac{p^2}{(1-p)^2} e^{-(1+p)^2} \int_1^{1+p} e^{y^2} ((y-2)A(y-1)-2)^2 dy. \end{aligned}$$

Figure 8 shows a plot of the dynamical entropy  $\Sigma_{1/2}(E)$  obtained by solving numerically (4.10, 4.11, 4.12). The prediction (4.2) of the *a priori* approach is shown for comparison. For  $p = 1/2$ , we have  $\Sigma_{1/2}(-1) = \Sigma_{1/2}(1/3) = \ln 2 = 0.693147$  and  $N \text{Var } E \approx 0.459839$ .

## 5 Discussion

We have presented a parallel study of the zero-temperature dynamics of three one-dimensional Ising models with kinetic constraints, to which a number of previous studies have already been devoted: paramagnetic CIC models [14–17] (Sect. 2), ferromagnetic chain with constrained Glauber dynamics [18,19] (Sect. 3), ferromagnetic chain with constrained Kawasaki dynamics [20–22] (Sect. 4).

The common characteristic feature of these models is that their zero-temperature dynamics is fully irreversible: each spin can flip at most once during its whole history. As shown in the present work, these stochastic dynamical systems can be mapped onto models of irreversible deposition [27]: CSA of monomers ( $\bullet$ ) for paramagnetic CIC models, RSA of dimers ( $\bullet\bullet$ ) for the ferromagnetic chain with constrained Glauber dynamics, RSA of hollow trimers ( $\bullet\bullet\bullet$ ) for the ferromagnetic chain with constrained Kawasaki dynamics. This exact mapping onto RSA or CSA models allows the analytical determination of many physical quantities. Assuming an uncorrelated initial state with prescribed energy (or magnetization), we have obtained exact results for the three models, and compared them to the predictions of the *a priori* approach, testing thus the so-called Edwards hypothesis in this particular zero-temperature framework.

We have first shown that the jamming time grows logarithmically with the system size, up to finite fluctuations given by extreme-value statistics. The result (2.26, 2.27), established for the CIC, also holds quantitatively for the ferromagnetic chain with constrained Glauber and Kawasaki dynamics, with respectively  $\alpha = p^2 e^{-2p}$  and  $\alpha = p^3 e^{-2p-p^2}$ .

There is a complete lack of ergodicity in these irreversible models. The mean final energy indeed bears a non-trivial dependence on the initial condition, as depicted in Figure 1. For a random initial configuration, the comparison of the exact dynamical results for the average and variance of the final energy with the prediction of the *a priori* (Edwards) approach reveals systematic differences, which have either sign, and an absolute value ranging up to some 20 percent (see Tab. 1).

The two-point spin (site) and energy (bond) correlation function in the final states has also been evaluated, either by analytical means or by accurate numerical simulations. Connected correlations fall off factorially (see Figs. 3, 5, 7), often with an oscillating sign. A super-exponential fall-off of correlations is indeed known to be generically obeyed in RSA models. Such a feature cannot be reproduced by an *a priori* ensemble, where correlations generically decay exponentially, with a finite correlation length, related to the first two eigenvalues of the transfer matrix.

We have also determined the distribution of the energy of the final states beyond the Gaussian approximation. Such a problem seems to have been tackled only once in the RSA literature [32]. We thus obtain large-deviation estimates for the exponentially small tails of the distribution. The corresponding dynamical entropy depends on

the initial energy (or magnetization). The comparison of the result for a random initial configuration ( $p = 1/2$ ) with the *a priori* approach again shows differences at a quantitative level (see Figs. 4, 6, 8).

The results obtained so far invalidate the Edwards hypothesis in the present situation of fully irreversible zero-temperature dynamics. There are indeed systematic differences between the exact dynamical expressions and the predictions of the *a priori* approach, and even qualitative discrepancies, such as the super-exponential fall-off of correlations.

The present work also questions the existence of any simple relationship between the landscape of metastable states and the slow dynamics just above the dynamical phase transition. Indeed, on the one hand, all the results on the zero-temperature dynamics of the CIC are independent of the parameter  $a$ , which interpolates between the ACIC for  $a = 0$  or  $a = 1$  and the SCIC for  $a = 1/2$ . On the other hand, these limiting cases are known to have different kinds of slow dynamics in the presence of activated processes, at low temperature. For instance, the relaxation time to equilibrium diverges as  $\tau_{\text{eq}} \sim \exp(2\beta)$  for the SCIC [15], and as  $\tau_{\text{eq}} \sim \exp(\beta^2/(\ln 2))$  for the ACIC [17].

In spite of its specificity, the present approach may also shed some new light on other quantities and/or other situations of interest. One example is the size distribution of ordered clusters, which has been recently shown to be a useful tool to test the Edwards hypothesis in spin models under tapping [25]. In the present context the exact determination of the density  $f_\ell(\infty)$  of clusters of  $\ell$  occupied sites in the final states would require a lengthy calculation. However its exponential fall off for a large cluster size is related to the ground-state dynamical entropy as  $f_\ell(\infty) \sim \exp(-\ell \Sigma_p(E = -1))$ . We thus obtain the simple estimate  $f_\ell(\infty) \sim (1-p)^\ell$ , both for CIC and constrained Kawasaki dynamics, expressing that the long ordered clusters in the final state have to be already present in the initial state, while the result  $f_\ell(\infty) \sim z_c(p)^{-\ell}$  (see (3.11)) for constrained Glauber dynamics is non-trivial.

Finally, the present situation of a quench from a disordered initial configuration (infinite initial temperature) can be viewed as the relaxation part of a cycle of random tapping with infinitely high intensity. It would also be desirable to extend at least some of our results to the more realistic situation of a finite tapping intensity.

Interesting discussions with Silvio Franz are gratefully acknowledged.

## Appendix A: Averaging a multiplicative cluster function

Consider a finite chain of  $N$  spins  $\sigma_n = \pm 1$ , numbered  $n = 1, \dots, N$ . The chain is naturally partitioned into clusters of parallel spins. Let  $M$  be the number of clusters, and  $L_1, L_2, \dots, L_M$  be the lengths of the clusters, with  $L_1 + \dots + L_M = N$ . Assume  $\sigma_1 = +1$ . We have  $\sigma_n = +1$  for

$n = 1, \dots, L_1$ , then  $\sigma_n = -1$  for  $n = L_1 + 1, \dots, L_1 + L_2$ , leads to and so on.

A multiplicative cluster function is a quantity of the form

$$q_N = \begin{cases} f_{L_1} g_{L_2} f_{L_3} \cdots & \text{if } \sigma_1 = +1, \\ g_{L_1} f_{L_2} g_{L_3} \cdots & \text{if } \sigma_1 = -1, \end{cases}$$

where each cluster of  $L$  up spins brings a factor  $f_L$ , and each cluster of  $L$  down spins brings a factor  $g_L$ .

Averaging a quantity such as  $q_N$  over a state of the form (2.13) amounts to summing the contributions of all the partitions of  $N$  into cluster lengths  $\{L_k, k = 1, \dots, M\}$ , with the *a priori* weight

$$W(\{L_k\}) = \begin{cases} (1-p)^{L_1} p^{L_2} (1-p)^{L_3} \cdots & \text{if } \sigma_1 = +1, \\ p^{L_1} (1-p)^{L_2} p^{L_3} \cdots & \text{if } \sigma_1 = -1. \end{cases}$$

In order to perform this summation, we introduce the generating series

$$f(x) = \sum_{L \geq 1} f_L x^L, \quad g(x) = \sum_{L \geq 1} g_L x^L, \quad Q(x) = \sum_{N \geq 1} \langle q_N \rangle x^N.$$

If  $\sigma_1 = +1$ , we have

$$\begin{aligned} Q(x) &= \sum_{L_1, L_2, L_3, \dots} f_{L_1} ((1-p)x)^{L_1} g_{L_2} (px)^{L_2} \\ &\quad \times f_{L_3} ((1-p)x)^{L_3} \dots \\ &= f((1-p)x) + f((1-p)x)g(px) \\ &\quad + f((1-p)x)g(px)f((1-p)x) + \dots, \end{aligned}$$

where the successive terms are the contributions of the partitions of the chain into  $M = 1, 2, 3, \dots$  clusters. Adding the contribution of the sector  $\sigma_1 = -1$ , and summing up the geometrical series, we obtain the result

$$Q(x) = \frac{f((1-p)x) + g(px) + 2f((1-p)x)g(px)}{1 - f((1-p)x)g(px)}, \quad (\text{A.1})$$

which interpolates between  $Q(x) = f(x)$  at  $p = 0$  and  $Q(x) = g(x)$  at  $p = 1$ .

### Appendix B: Expanding $\exp(ax - bx^2)$ as a power series

This appendix is devoted to the power-series expansion

$$\exp(ax - bx^2) = \sum_{n \geq 0} f_n(a, b) x^n.$$

An identification with the generating series of Hermite polynomials [35]:

$$\sum_{n \geq 0} H_n(z) \frac{x^n}{n!} = \exp(2zx - x^2)$$

$$f_n(a, b) = \frac{b^{n/2}}{n!} H_n\left(\frac{a}{2\sqrt{b}}\right).$$

We are mostly interested in the asymptotic behavior of the coefficients  $f_n(a, b)$  as  $n$  gets large, for fixed  $a$  and  $b$ . The asymptotic expansion of Hermite polynomials [35] yields

$$f_n(a, b) \approx \frac{b^{n/2}}{(n/2)!} \exp\left(\frac{a^2}{8b}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2} - a\sqrt{\frac{n}{2b}}\right). \quad (\text{B.1})$$

The above estimate becomes exact for any finite  $n$  in the simple situation where  $a = 0$ , where one has straightforwardly

$$f_{2k}(0, b) = \frac{(-b)^k}{k!}, \quad f_{2k+1}(0, b) = 0.$$

For generic values of  $a$ , the signs of the coefficients  $f_n(a, b)$  are given by the cosine function in (B.1). They oscillate according to the four-periodic pattern  $(+ + - -)$ , except for ‘mistakes’ which take place more and more seldomly, for  $n \approx k^2 \mu$ , with

$$\mu = \frac{\pi^2 b}{2a^2}.$$

For  $a > 0$ , mistakes are isolated  $+$  or  $-$  signs. For  $a < 0$ , they consist of three consecutive  $+++$  or  $---$  signs.

### References

1. C.A. Angell, *Science* **267**, 1924 (1995)
2. M. Goldstein, *J. Chem. Phys.* **51**, 3728 (1969)
3. D.J. Thouless, P.W. Anderson, R.G. Palmer, *Phil. Mag.* **35**, 593 (1977)
4. T.R. Kirkpatrick, P.G. Wolynes, *Phys. Rev. A* **35**, 3072 (1987); T.R. Kirkpatrick, D. Thirumalai, *Phys. Rev. B* **36**, 5388 (1987); T.R. Kirkpatrick, P.G. Wolynes, *Phys. Rev. B* **36**, 8552 (1987); D. Thirumalai, T.R. Kirkpatrick, *Phys. Rev. B* **38**, 4881 (1988)
5. F.H. Stillinger, T.A. Weber, *Phys. Rev. A* **25**, 978 (1982); *Science* **225**, 983 (1984)
6. S. Franz, M.A. Virasoro, *J. Phys. A* **33**, 891 (2000)
7. G. Biroli, R. Monasson, *Europhys. Lett.* **50**, 155 (2000); G. Biroli, J. Kurchan, *Phys. Rev. E* **64**, 016101 (2001)
8. B. Gaveau, L.S. Schulman, *J. Math. Phys.* **39**, 1517 (1998)
9. A. Mehta, G.C. Barker, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 394 (1991)
10. A. Barrat, J. Kurchan, V. Loreto, M. Sellitto, *Phys. Rev. E* **63**, 051301 (2001)
11. J. Berg, A. Mehta, *Europhys. Lett.* **56**, 784 (2001); *Adv. Complex Syst.* **4**, 309 (2001)
12. S.F. Edwards, in *Granular Matter: An Interdisciplinary Approach*, edited by A. Mehta (Springer, New York, 1994)
13. For a review, see: *Workshop on glassy behaviour of kinetically constrained models*, *J. Phys. Cond. Matt.* **14**, 1381 (2002)
14. G.H. Fredrickson, H.C. Andersen, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 1244 (1984); *J. Chem. Phys.* **83**, 5822 (1985); G.H. Fredrickson, S.A. Brawer, *J. Chem. Phys.* **84**, 3351 (1986)

15. J. Reiter, J. Jäckle, *Physica A* **215**, 311 (1995); M. Schultz, S. Trimper, *J. Stat. Phys.* **94**, 173 (1999)
16. J. Jäckle, S. Eisinger, *Z. Phys. B* **84**, 115 (1991); S. Eisinger, J. Jäckle, *J. Stat. Phys.* **73**, 643 (1993)
17. F. Mauch, J. Jäckle, *Physica A* **262**, 98 (1999); P. Sollich, M.R. Evans, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3238 (1999)
18. D.S. Dean, A. Lefèvre, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5639 (2001); A. Lefèvre, D.S. Dean, *J. Phys. A* **34**, L213 (2001)
19. A. Prados, J.J. Brey, *J. Phys. A* **34**, L453 (2001)
20. V. Privman, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 3686 (1992)
21. J.C. Lin, P.L. Taylor, *Phys. Rev. E* **48**, 4305 (1993)
22. P.L. Krapivsky, *J. Stat. Phys.* **74**, 1211 (1994)
23. A. Crisanti, F. Ritort, A. Rocco, M. Sellitto, *J. Chem. Phys.* **113**, 10615 (2000)
24. A. Buhot, J.P. Garrahan, *Phys. Rev. E* **64**, 021505 (2001)
25. J. Berg, S. Franz, M. Sellitto, *Eur. Phys. J. B* **26**, 349 (2002)
26. A. Lefèvre, preprint cond-mat/0202376
27. For a comprehensive review, see: J.W. Evans, *Rev. Mod. Phys.* **65**, 1281 (1993)
28. B. Widom, *J. Chem. Phys.* **44**, 3888 (1966)
29. For reviews, see: A. Crisanti, G. Paladin, A. Vulpiani, *Products of Random Matrices in Statistical Physics* (Springer, Berlin, 1992); J.M. Luck, *Systèmes désordonnés unidimensionnels* (Collection Aléa, Saclay, 1992)
30. G. André, R. Bidaux, J.P. Carton, R. Conte, L. de Seze, *J. Phys. France* **40**, 479 (1979)
31. E.J. Gumbel, *Statistics of Extremes* (Columbia University Press, 1958)
32. E.R. Cohen, H. Reiss, *J. Chem. Phys.* **38**, 680 (1963)
33. P.J. Flory, *J. Am. Chem. Soc.* **61**, 1518 (1939)
34. D. Zwillinger, *Handbook of Differential Equations*, 2nd edn (Academic, New-York, 1992)
35. *Higher Transcendental Functions (The Bateman Manuscript Project)*, edited by A. Erdélyi (McGraw-Hill, New-York, 1953)

# CHAPITRE 6

## Modèle de Kawasaki unidimensionnel

---

Dans ce chapitre on étudie plus en détail le modèle de Kawasaki unidimensionnel, essentiellement la dynamique de température nulle. Ceci prolonge, pour un modèle plus riche, les travaux du chapitre précédent. La plupart des résultats sont obtenus numériquement ; quelques arguments analytiques, basés sur une représentation en ‘modèle de pièges’ du système, sont présentés. L’hypothèse *a priori* est présentée en détail, et comparée avec les données numériques. Analogies et différences avec les modèles précédents sont pointées. Quelques résultats sur la dynamique de basse température dans le régime d’échelle sont ensuite présentés.

### 6.1 Introduction

Le modèle de Kawasaki unidimensionnel est une chaîne de spins d’Ising ferromagnétique, avec le hamiltonien usuel  $\mathcal{H} = -J \sum_i S_i S_{i+1}$ . L’amplitude de l’interaction  $J > 0$  peut être absorbée dans une redéfinition de la température. Les propriétés d’équilibre du système à température  $T = \beta^{-1}$  sont données par la fonction de partition usuelle  $Z_N = (2 \cosh \beta)^N$ , d’où l’on déduit la fonction de corrélation spatiale à deux points  $\langle S_i S_j \rangle = \tanh^{|i-j|} \beta = e^{-\frac{|i-j|}{\xi}}$ .  $\xi$  est la longueur de corrélation à l’équilibre, donnée par :

$$\xi = \frac{1}{\ln(\tanh \beta)} \underset{T \rightarrow 0}{\sim} e^{2\beta} \quad (6.1)$$

On munit ce modèle d’une dynamique d’échange : deux spins voisins antiparallèles peuvent être échangés (c’est à dire retournés simultanément  $\uparrow\downarrow \rightarrow \downarrow\uparrow$ ). Ainsi l’aimantation est-elle conservée localement. Le retournement d’une paire de spins  $S_i$  et  $S_{i+1}$  (tels que  $S_i S_{i+1} = -1$ ) engendre une variation d’énergie

$$\delta\mathcal{H} = 2S_i (S_{i-1} - S_{i+2}) \in \{-4, 0, 4\}$$

On choisit des taux de transition qui ne dépendent que de  $\delta\mathcal{H}$  et qui sont donnés par :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\mathcal{H}=4} &= e^{-4\beta} \\ \mathcal{W}_{\mathcal{H}=0} &= \mathcal{W}_0 \\ \mathcal{W}_{\mathcal{H}=-4} &= 1 \end{aligned}$$

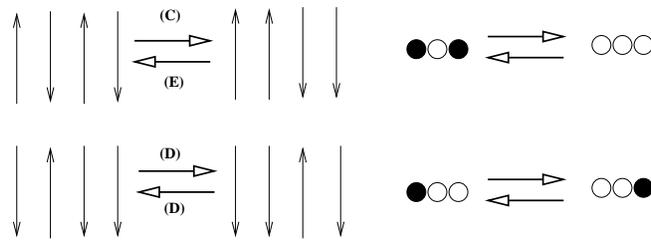


FIG. 6.1 – Les différents mouvements permis par la dynamique de Kawasaki sur une chaîne d’Ising. (E) : évaporation (taux  $\mathcal{W}_4$ ); (C) : condensation (taux  $\mathcal{W}_{-4}$ ); (D) : diffusion (taux  $\mathcal{W}_0$ ). On a indiqué à droite la représentation dans l’espace des liens : processus de déposition avec désorption (si  $T > 0$ ) et diffusion de dimères (dès que  $\mathcal{W}_0 > 0$ ).

Remarquons que la conservation du paramètre d’ordre permet de particulariser<sup>1</sup> les spins et de suivre le mouvement d’un spin donné au cours du temps, par exemple en s’intéressant à son déplacement  $r(t)$ . Par symétrie, celui-ci est nul en moyenne, mais il s’est avéré intéressant de considérer les fluctuations  $\langle r^2(t) \rangle$  de cette variable.

Lorsque  $T$  tend vers 0 la fonction de corrélation diverge : si on refroidit brutalement le système depuis un point de haute température (configuration désordonnée), les domaines de spins  $+1$  et de spins  $-1$  sont très petits par rapport à la taille des amas à l’équilibre à cette température. Si on suit l’évolution de la taille moyenne  $L(t)$  des amas, on observe trois régimes distincts (figure 6.2).

- Dans un premier temps, le système se bloque rapidement (temps  $\tau_{\text{gel}}$ ) dans un état métastable de température nulle. Jusqu’au temps  $\tau_1$ , il ne se passe plus rien : tout se passe comme si la température était réellement nulle et le système complètement gelé. La prochaine section est consacrée à l’étude de la dynamique de température nulle.
- Au temps  $\tau_1 \sim \xi^2$  les processus activés (mouvements d’évaporation) commencent à jouer un rôle : le système se met à relaxer vers l’équilibre par croissance de domaines. Celle-ci est néanmoins moins rapide que dans le cas de la dynamique de Glauber, du fait de la conservation du paramètre d’ordre : les spins ne peuvent bouger indépendamment les uns des autres, et la croissance des domaines se fait par évaporation d’un spin d’une paroi (taux  $\mathcal{W}_4$ ), puis la diffusion de celui-ci à travers l’amas de spins opposés. Ce régime de croissance de domaines dans la limite de température nulle fait l’objet de la section 6.3.
- Au temps  $\tau_{\text{eq}} \sim \xi^5$  le système a atteint l’équilibre et la taille moyenne des amas sature à sa valeur d’équilibre  $L_{\text{eq}} = \xi$ .

S’il existe une littérature relativement abondante sur les systèmes à paramètre d’ordre conservé, les publications étudiant directement le modèle de Kawasaki (discret avec des interactions à courte portée) sont assez rares. La référence essentielle est [32]. On trouvera aussi des simulations intéressantes dans [70] pour la dynamique de basse

<sup>1</sup>Littéralement : de considérer les spins comme des particules.

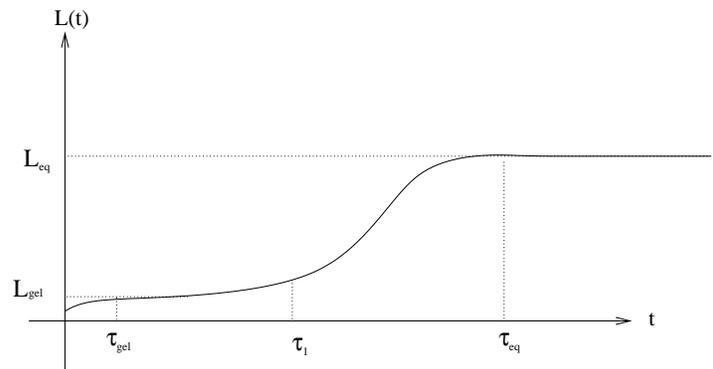


FIG. 6.2 – Taille moyenne des amas du modèle de Kawasaki en fonction du temps après une trempe à basse température  $T_f \gtrsim 0$ .

température.

## 6.2 Dynamique de température nulle

*Les résultats présentés ci-dessous feront l'objet d'une publication, dont on trouvera la prépublication à la fin de ce chapitre [173].*

### Influence de $\mathcal{W}_0$

Lorsque  $\mathcal{W}_0 = 0$ , la dynamique se ramène à la dynamique de Kawasaki modifiée [151] étudiée au chapitre précédent, dont nous avons vu qu'elle est exactement soluble. Dès que les mouvements de diffusion des spins isolés sont autorisés ( $\mathcal{W}_0 > 0$ ) un certain nombre de propriétés changent radicalement. En particulier le modèle n'est plus soluble : la hiérarchie d'équations pour les fonctions de corrélation, par exemple, ne se ferme pas. Du point de vue des modèles de déposition, on n'a plus l'indépendance des amas à cause des mécanismes de diffusion, et les méthodes exposées précédemment ne sont plus valables.

En théorie, les mouvements de diffusion sont susceptibles de traverser le système dans son intégralité, contrairement aux systèmes de spins du chapitre 5, qui se scindaient en amas indépendants. Dans la pratique toutefois, les spins dans la chaîne de Kawasaki ne parcourent pas une grande distance.

Une des modifications importantes du système qui intervient dès que  $\mathcal{W}_0 > 0$  est le changement de structure des configurations métastables à  $T = 0$ . En effet, pour la dynamique modifiée un état bloqué consiste en une suite de spins telle que les motifs  $+ - + -$  et  $- + - +$  n'apparaissent pas. Pour la dynamique complète, il faut que les motifs  $+ - +$  et  $- + -$  n'apparaissent pas : de tels spins sont susceptibles de diffuser (le système n'est pas encore bloqué) et de condenser sur un autre amas. Les configurations métastables sont, pour  $\mathcal{W}_0 > 0$ , les configurations telles que tous les amas ont une taille supérieure à 2.

Il existe donc une différence qualitative entre le cas  $\mathcal{W}_0 = 0$  et le cas  $\mathcal{W}_0 > 0$ . Dans ce dernier cas une seconde échelle de temps apparaît, correspondant à la diffusion des

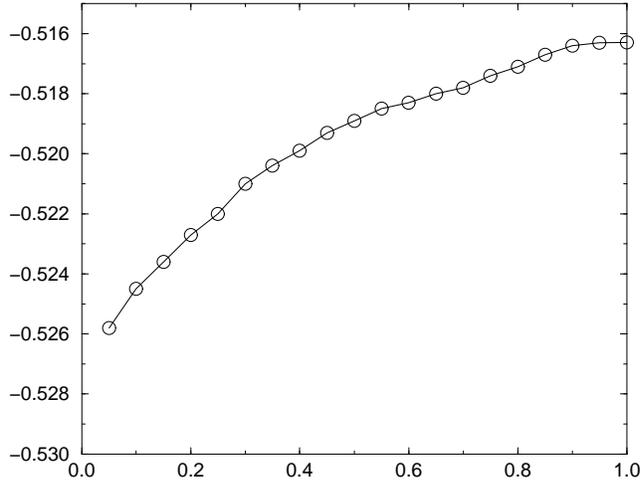


FIG. 6.3 – Énergie finale en fonction du taux de transition  $\mathcal{W}_0$  correspondant aux mouvements de diffusion.

spins libres : les mouvements rapides (condensation) ont lieu à une échelle de temps microscopique, alors que les mouvements lents (diffusion) ont lieu à l'échelle  $\mathcal{W}_0^{-1}$ . Dans la limite  $\mathcal{W}_0 \rightarrow 0$  on observe un découplage entre ces deux types de mouvements.

Si on regarde l'énergie finale atteinte dynamiquement, on constate un saut entre  $\lim_{t \rightarrow \infty} E_f(t; \mathcal{W}_0 = 0) = -0.274$  et la valeur limite  $\lim_{\mathcal{W}_0 \rightarrow 0} E_f(\infty; \mathcal{W}_0) \approx -0.52$ , significatif du fait que les limites  $t \rightarrow \infty$  et  $\mathcal{W}_0 \rightarrow 0$  ne commutent pas. Par contre, l'influence de  $\mathcal{W}_0 > 0$  est faible sur les valeurs finales des observables (de l'ordre de 1% pour  $E(\infty)$  ou pour  $\langle r^2 \rangle$ ). La convergence vers ces valeurs dépend quant à elle de  $\mathcal{W}_0$  par le biais de l'échelle de temps lente introduite.

### Approche *a priori*

Les configurations bloquées du modèle de Kawasaki sont celles formées d'amas de taille au moins 2. En termes des variables de liens, cela signifie que les liens  $\tau_i = S_i S_{i+1}$  frustrés sont isolés. Remarquons que certains calculs ne sont pas à refaire : ces états bloqués s'identifient aux configurations bloquées des modèles paramagnétiques du chapitre précédent, en identifiant les liens aux spins et  $E_{\text{Kawasaki}} = -M_{\text{Para}}$ . Le nombre total de configurations métastables se comporte donc comme  $\mathcal{N}(N) \sim \exp(NS_{\text{ap}}^*)$  avec  $S_{\text{ap}}^* = \ln \Phi = 0.481212$  ( $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  est le nombre d'or). Le nombre de configurations métastables de densité d'énergie  $E$  se comporte quant à lui comme  $\mathcal{N}(E; N) \sim \exp(NS_{\text{ap}}(E))$ , où la fonction entropie *a priori* est donnée par l'expression ( $-1 \leq E \leq 0$ ) :

$$S_{\text{ap}}(E) = E \ln(-2E) + \frac{1-E}{2} \ln(1-E) - \frac{1+E}{2} \ln(1+E) \quad (6.2)$$

On en déduit alors la probabilité qu'un état bloqué dans l'ensemble *a priori* ait une densité d'énergie  $E$  :

$$\mathbb{P}[E; N] \sim e^{-N\Sigma(E)}, \quad \Sigma(E) = S_{\text{ap}}^* - S_{\text{ap}}(E) \quad (6.3)$$

Cette probabilité prend une forme gaussienne au voisinage de  $E = E^* = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ . Tous les cumulants de  $NE$  sont proportionnels à  $N$ . Les trois premiers sont donnés par :

$$\langle E \rangle_c = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad N \langle E^2 \rangle_c = \frac{4\sqrt{5}}{25}, \quad N^2 \langle E^3 \rangle_c = \frac{12\sqrt{5}}{125}$$

La fonction de corrélation connexe de liens  $\Gamma_n = \langle \tau_0 \tau_n \rangle_{\text{conn}}$  s'obtient de même [172] :

$$\Gamma_n = (1 - E^2) \left( -\frac{1 + E}{1 - E} \right)^n \quad (6.4)$$

La représentation en variables de liens se prête bien au calcul de la distribution de la taille des amas (à la limite thermodynamique). En effet, à un amas de spins de taille exactement  $L$  correspond un amas de  $L - 1$  liens satisfaits bordé par deux liens frustrés. Cette distribution est une pure exponentielle :

$$\rho(L; E) = \frac{1 - E^2}{4E^2} \left( \frac{1 - E}{-2E} \right)^{-L}, \quad L \geq 2 \quad (6.5)$$

Il est intéressant d'avoir aussi la fonction de corrélation de spin  $C_l = \langle S_i S_{i+l} \rangle$ . Le calcul de celle-ci nécessite de travailler dans l'espace des spins. On utilise un formalisme de matrice de transfert. La fonction de partition d'une chaîne de  $N$  spins se terminant par  $(\alpha) = (S_{N-1}, S_N)$  est  $Z_N^{(\alpha)}$ , et on passe à  $Z_{N+1}$  par la matrice de transfert  $\mathcal{T}$  :

$$\begin{pmatrix} Z_{N+1}^{(++)} \\ Z_{N+1}^{(+-)} \\ Z_{N+1}^{(-+)} \\ Z_{N+1}^{(--)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & a & 0 \\ a^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{-1} \\ 0 & a & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_N^{(++)} \\ Z_N^{(+-)} \\ Z_N^{(-+)} \\ Z_N^{(--)} \end{pmatrix}, \quad a = e^\beta$$

de valeurs propres

$$\lambda_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{4 + a^2}}{2}, \quad \lambda_{3,4} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

et de vecteurs propres à droite et à gauche respectifs :

$$|R_{1,2}\rangle = \begin{pmatrix} \lambda_{1,2} \\ a^{-1} \\ a^{-1} \\ \lambda_{1,2} \end{pmatrix}, \quad |R_{3,4}\rangle = \begin{pmatrix} \lambda_{3,4} \\ a^{-1} \\ -a^{-1} \\ -\lambda_{3,4} \end{pmatrix}$$

$$\langle L_{1,2}| = \frac{1}{2(1 + \lambda_{1,2}^2)} (\lambda_{1,2}; \quad a; \quad a; \quad \lambda_{1,2}) \quad , \quad \langle L_{3,4}| = \frac{1}{2(\lambda_{3,4}^2 - 1)} (\lambda_{3,4}; \quad -a; \quad a; \quad -\lambda_{3,4})$$

Introduisons l'opérateur de spin  $\Sigma = \text{Diag}(1, -1, 1, -1)$  (représentant  $S_N$ ). La fonction de corrélation  $C_l = \langle S_i S_{i+l} \rangle$  peut s'exprimer comme une trace :

$$C_l = \frac{1}{Z_N} \text{Tr} (\mathcal{T}^{N-l} \Sigma \mathcal{T}^l \Sigma), \quad (6.6)$$

A la limite thermodynamique et loin des bords de la chaîne ( $N \rightarrow \infty$  à  $l$  fixé),  $\mathcal{T}^N$  devient le projecteur sur l'espace propre associé à  $\lambda_1$  et on obtient :

$$C_l = \sum_{\alpha} \langle L_1 | \Sigma | R_{\alpha} \rangle \langle L_{\alpha} | \Sigma | R_1 \rangle (\lambda_1^{-1} \lambda_{\alpha})^{|\alpha|} \quad (6.7)$$

Les calculs des éléments de matrice nécessaires sont sans difficulté et la fonction à deux points s'écrit finalement en fonction du spectre de  $\mathcal{T}$  :

$$C_l = \frac{\lambda_1^{-|l|}}{1 + \lambda_1^2} \left( \frac{(\lambda_1 \lambda_3)^2 - 1}{\lambda_3^2 - 1} \lambda_3^{|l|} + \frac{(\lambda_1 \lambda_4)^2 - 1}{\lambda_4^2 - 1} \lambda_4^{|l|} \right) \quad (6.8)$$

où les valeurs propres s'expriment en fonction de la densité d'énergie  $E = -\frac{d \ln \lambda_1}{d\beta}$  :

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{1-E}{1+E}}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{\frac{1+E}{1-E}}$$

$$\lambda_3 = \frac{-E + \sqrt{2E^2 - 1}}{\sqrt{1-E^2}}, \quad \lambda_4 = \frac{-E - \sqrt{2E^2 - 1}}{\sqrt{1-E^2}}$$

On peut vérifier que l'on retrouve bien  $C_{l=0}(E) = 1$ ,  $C_{l=1}(E) = -E$ .

On observe une transition pour  $E = E_a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  : à ce point tout le spectre de  $\mathcal{T}$  devient réel et la structure des corrélations changent. Pour  $E \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ , c'est à dire dans le secteur qui nous intéresse plus particulièrement, celles-ci sont exponentiellement décroissantes avec une modulation oscillante. L'expression (6.8) se simplifie en :

$$C_l(E) = \lambda_1(E)^{-|l|} \left( \cos(|l|\theta(E)) - \frac{E}{\tan \theta(E)} \sin(|l|\theta(E)) \right) \quad (6.9)$$

avec

$$\theta(E) = \arctan \left( \frac{\sqrt{1-2E^2}}{-E} \right)$$

Lorsqu'on ne contraint pas l'énergie à une valeur fixée, c'est à dire lorsqu'on travaille dans l'ensemble *a priori* complet, la fonction à deux points se réduit à :

$$C_l^* = \Phi^{-l} \left( \cos \left( \frac{\pi l}{3} \right) + \frac{1}{\sqrt{15}} \sin \left( \frac{\pi l}{3} \right) \right)$$

Lorsque  $-1 \leq E \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $C_l$  n'oscille plus ; à  $l$  grand le deuxième terme de (6.8) est exponentiellement petit devant le premier.

### Comparaison avec la dynamique

La comparaison des observables calculées dans l'ensemble *a priori* avec les mêmes observables mesurées dans les configurations atteintes dynamiquement est nécessairement numérique. L'approche *a priori* ne reproduit pas la valeur correcte de l'énergie finale  $E_{\text{dyn}}(\infty) \approx -0.516$  : les configurations bloquées atteintes dynamiquement ont une énergie typique qui n'est pas celle des états qui dominent la mesure *a priori*. On peut aussi noter que les configurations bloquées sont les mêmes pour tout  $\mathcal{W}_0 \in ]0, 1]$ , alors

que les quantités dynamiques en dépendent (en particulier l'énergie finale). La variance de  $E$  est du bon ordre de grandeur :  $N\text{Var}(E_{\text{dyn}}) = 0.346$ , pour  $N\text{Var}(E_{\text{ap}}) = 0.357\dots$  Il est difficile d'aller numériquement au-delà de l'approximation gaussienne, puisque si  $N$  est grand les écarts à la gaussienne sont exponentiellement écrasés et si  $N$  est trop petit on obtient trop peu de valeurs, du fait du caractère discret des énergies possibles (figure 6.5).

La distribution de la taille des amas est qualitativement correcte, sauf pour les petits amas où des déviations sont observées par rapport à un comportement purement exponentiel tel que celui prédit par l'approche *a priori* (6.5). De telles déviations ont été observées dans d'autres modèles [12], et sont la marque de corrélations dynamiques. Pour les grands amas, on retrouve un comportement purement exponentiel (figure 6.4).

Le point essentiel est que, contrairement à ce que l'on observe dans les modèles à dynamique complètement irréversible étudiés précédemment, les corrélations dynamiques semblent ici décroître exponentiellement, avec des oscillations : l'approche *a priori* est pour le modèle de Kawasaki complet qualitativement exacte pour les corrélations. Ceci vient de la possibilité pour un spin de se retourner plusieurs fois : le système - malgré le fait qu'il continue à s'arrêter rapidement - 'thermalise', d'une certaine manière, mieux. Lorsqu'on fixe l'énergie, l'accord est bien entendu meilleur : cela revient à fixer non seulement  $C_1 = -E$ , mais aussi  $C_2 = 2C_1 - 1$  (cette règle<sup>2</sup> se vérifie aisément dans l'ensemble *a priori*).

Il existe une autre règle de somme. L'aimantation par spin  $M = N^{-1} \sum_i S_i$  est conservée exactement. Il en est donc de même de  $M^2$ , qui est égal à sa moyenne  $\langle M^2 \rangle$ . Or  $M^2 = N^{-2} \sum_{(i,j)} S_i S_j = N^{-1} \sum_l C_l$ , d'où se déduit la conservation de  $\sum_l C_l$ . Pour une condition initiale complètement désordonnée,  $C_l(t=0) = \delta_{l,0}$ , soit  $\sum_l C_l = 1 = 1 + 2 \sum_{l \geq 1} C_l$  par parité de  $C_l$ , d'où  $\sum_{l \geq 1} C_l = 0$ . Cela implique en particulier que les vraies corrélations doivent prendre des valeurs positives et négatives. Cette identité est vérifiée dans les simulations (pour les données numériques de la figure 6.6 par exemple,  $\sum_{l \geq 1} C_l \approx 10^{-4}$ ). Par contre dans l'ensemble *a priori* on calcule aisément :

$$\sum_{l \geq 1} C_l(E) = \frac{E^2 - 1 - 2E}{2(1 + E)} \neq 0,$$

sauf pour  $E = 1 - \sqrt{2} = -0.414214$ .

La transition à  $E_a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  dans l'ensemble *a priori* semble n'être qu'un artefact du calcul statique et n'est pas observée dans les simulations. Si on part d'une condition initiale d'énergie  $E_0$  suffisamment basse (correspondant à une trempe depuis un état d'équilibre à une température  $T$  finie) légèrement supérieure à  $E_a$ , le système va se bloquer à une énergie  $E(\infty) < E_a$  et rien de particulier ne se passe pour  $E = E_a$ .

<sup>2</sup>Celle-ci découle uniquement de l'absence du motif  $\infty$  dans les configurations bloquées (en repré-

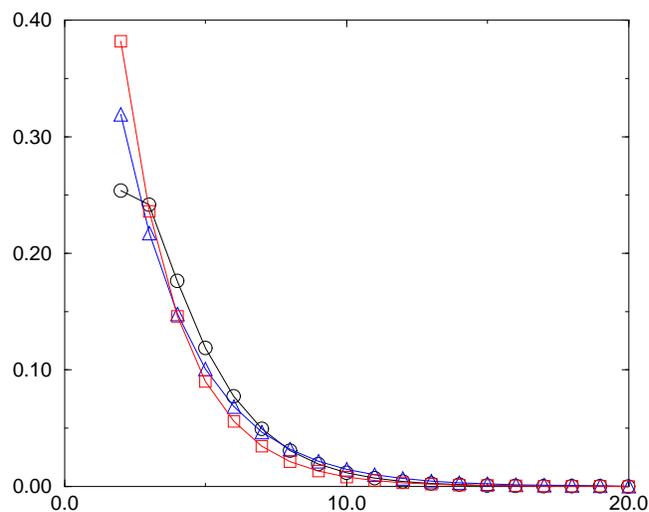


FIG. 6.4 – Comparaison des distributions de taille d’amas de spins.  $\circ$  : configurations atteintes dynamiquement,  $\square$  : ensemble *a priori* complet,  $\triangle$  : ensemble *a priori* contraint par  $E_{\text{dyn}}$ . Les distributions *a priori* sont de pures exponentielles (6.5), alors que la distribution dynamique présente des déviations pour les petits amas. La queue de distribution par contre décroît bien en  $e^{-\frac{l}{l_{\text{eff}}}}$  avec  $l_{\text{eff}} \approx 1.96$ .

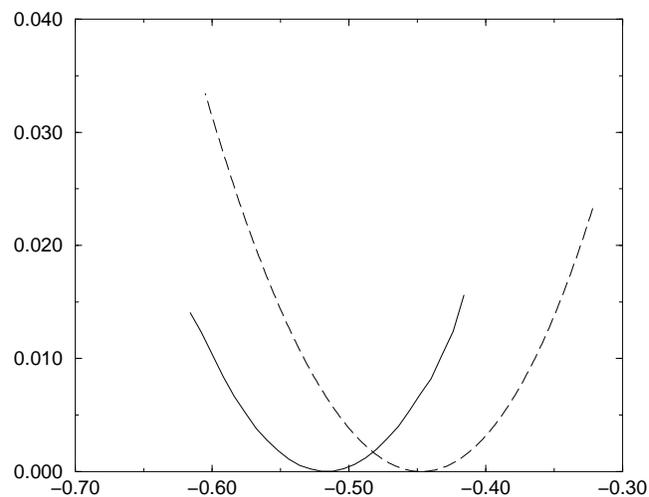


FIG. 6.5 – Comparaison de l’entropie dynamique (trait plein) avec l’entropie *a priori* (tirets).

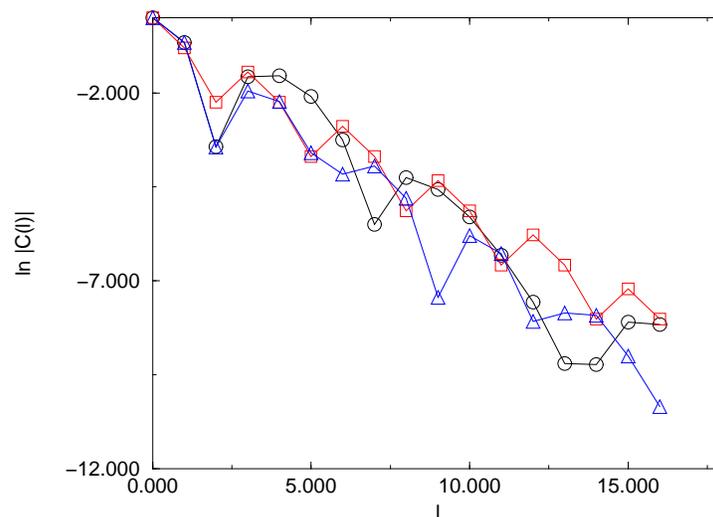


FIG. 6.6 – Comparaison de la fonction de corrélation à deux points dans les configurations bloquées.  $\circ$  : dynamique,  $\square$  : ensemble *a priori* complet,  $\triangle$  : ensemble *a priori* contraint ( $E = E_{\text{dyn}}$ ). Les corrélations dynamiques décroissent exponentiellement avec des oscillations. On peut estimer numériquement que  $C_{\text{dyn}}(l) \sim e^{-\frac{l}{l_{\text{eff}}}} * f(l)$  avec  $l_{\text{eff}} \approx 1.79$ .

### Statistique du temps de gel

Pour un système de taille finie, la dynamique s'arrête en un temps fini. Pour les modèles du chapitre 5, le temps de gel  $\tau_{\text{gel}}(N)$  était contrôlé par la décroissance exponentielle du nombre d'amas de taille minimale susceptibles de réagir. Ici, les choses sont un peu plus complexes. On s'attend plutôt à ce que  $\tau_{\text{gel}}(N)$  soit contrôlé par les spins libres aux temps longs. Plus précisément,  $t = \tau_{\text{gel}}(N)$  lorsque le dernier spin diffusif est absorbé par un amas : ceci suggère que la distribution de  $\tau_{\text{gel}}(N)$  va être de nouveau déterminée par un argument de statistique des extrêmes. À l'appui de cette idée, la mesure de la distribution, pour chaque spin, de  $t_N/\tau_{\text{gel}}$  (temps du dernier retournement sur le temps de gel) montre que peu de spins se retournent juste avant que le système s'arrête (figure 6.7).

L'évolution temporelle de la densité de spins libres peut-être étudiée dans le cadre d'un modèle de pièges [32] : la densité de spins diffusifs est donnée, aux temps longs, par la probabilité de survie d'un marcheur brownien sur la droite absorbé sur des pièges. On suppose que la distance  $l$  entre deux pièges consécutifs (i.e. la taille des amas) est distribuée exponentiellement :  $\rho(l) \sim e^{-\frac{l}{l_{\text{eff}}}}$ , où  $l_{\text{eff}}$  est la taille moyenne des amas. La probabilité de survie d'un marcheur brownien sur un amas de taille  $l$  s'obtient en résolvant l'équation de la diffusion sur cet amas avec des conditions absorbantes aux bords. En première approximation on ne garde que la première harmonique :  $S_l(t) \sim e^{-\frac{\pi^2 \nu \nu_0}{l^2} t}$ . La probabilité de survie complète s'obtient en prenant en compte la contribution de tous les amas :  $S(t) \sim \sum_l e^{-\frac{l}{l_{\text{eff}}}} e^{-\frac{\pi^2 \nu \nu_0}{l^2} t}$ . On extrait la contribution

---

sentation de liens) :  $C_2$  dépend de la densité des motifs à deux liens, qui sont  $\bullet\bullet$ ,  $\circ\bullet$  et  $\bullet\circ$ , et est donc directement relié à  $C_1$ .

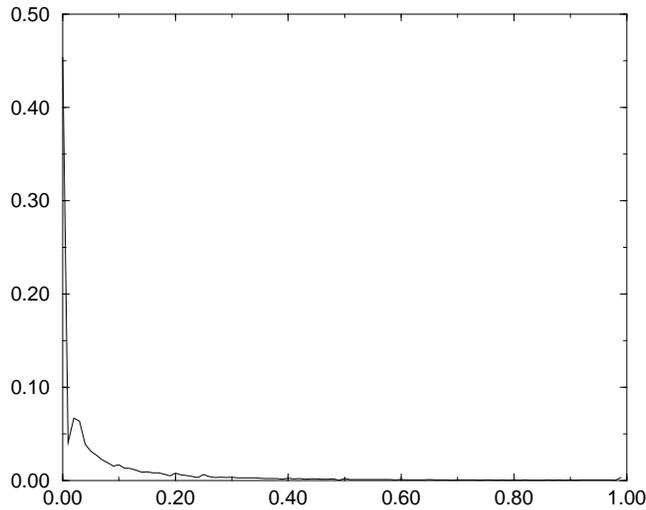


FIG. 6.7 – Distribution du temps du dernier retournement rapporté au temps de gel de l'échantillon. La majorité des spins ne bougent plus après une courte fraction du temps total de la réalisation. La valeur en 0 redonne la fraction de spins qui ne se retournent jamais  $p_0(\infty)$ . Le poids au voisinage de 1 est donné non seulement par le dernier spin qui se retourne, mais aussi par les retournements des spins passifs bordant l'amas où il condense.

principale à l'aide de la méthode du col. Il vient :

$$S(t) \sim e^{-ct^{\frac{1}{3}}}, \quad c = 3 \left( \frac{\pi^2 \mathcal{W}_0}{4l_{\text{eff}}^2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (6.10)$$

Introduisons un 'temps effectif'  $t_{\text{eff}} = ct^{\frac{1}{3}}$ . Dans ce temps effectif, la densité de spins diffusifs décroît en  $e^{-t_{\text{eff}}}$ . On peut considérer que l'on a un ensemble de marcheurs qui, dans le temps effectif, disparaissent exponentiellement avec taux 1 ; le temps de gel étant donné par le temps de dernière disparition. On en déduit alors que

$$\tau_{\text{gel,eff}} = c\tau_{\text{gel}}^{\frac{1}{3}} = \ln N + \zeta_N \quad (+K) \quad (6.11)$$

où  $K$  est une éventuelle 'constante' additive venant d'un préfacteur<sup>3</sup> dans  $S(t)$  et  $\zeta_N$  converge lorsque  $N$  tend vers l'infini vers une variable de Gumbel. Ce modèle simple prévoit donc la forme suivante :

$$\tau_{\text{gel}}^{\frac{1}{3}}(N) = A(\ln N + \zeta_N) + K' \quad (6.12)$$

Nous avons testé cette prédiction numériquement. L'étude de la variable aléatoire  $X_N = \tau_{\text{gel}}^{\frac{1}{3}}$  pour différentes tailles est compatible avec une dépendance linéaire en  $\ln N$ , avec une pente qui tend vers  $A \sim 0.4$  pour  $N$  grand. Les fluctuations sont entièrement (au moins pour  $N$  grand) contenues dans la variable  $\zeta_N$ . La mesure de la variance de  $X_N$  pour différents  $N$  montre que celle-ci semble converger vers une valeur d'ordre 0.26. Ceci est compatible avec une loi de Gumbel : la variance de  $A\zeta$  est  $A^2 \frac{\pi^2}{6} \approx 0.263..$  (avec  $A = 0.4$ ). De la valeur numérique de  $A$  on peut tirer une évaluation de la longueur

<sup>3</sup>Dans un 'vrai' modèle de pièges ce préfacteur dépend du temps (en  $\sqrt{t}$ ) [116].

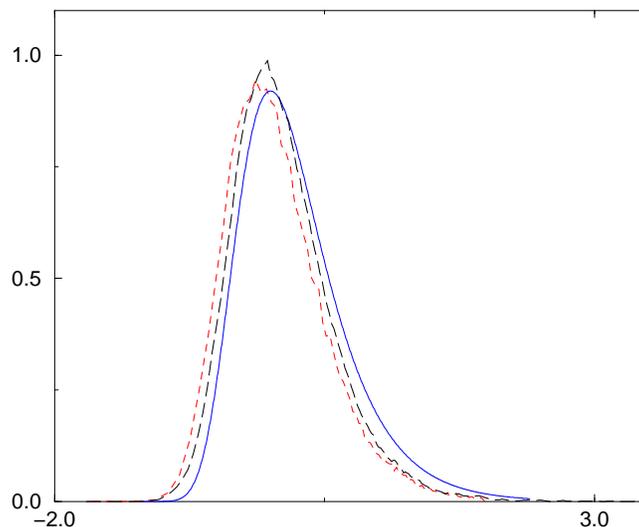


FIG. 6.8 – Densité de probabilité de  $\tau_{\text{gel}}^{\frac{1}{3}}(N) - A \ln N - K'$  pour  $N = 250$  (pointillés courts) et  $N = 1600$  (pointillés longs). En trait plein, densité de probabilité de la variable  $A\zeta$ . On a pris  $A = 0.4$ .  $K'$  peut être évaluée à partir de  $\left\langle \tau_{\text{gel}}^{\frac{1}{3}}(N) - A \ln N - A\zeta \right\rangle$ . Ici  $K' \approx 0.45$ .

effective des amas en utilisant  $A = c^{-1}$ , d'où on déduit (pour  $\mathcal{W}_0 = 1$ ) :

$$l_{\text{eff}} = \left[ \frac{\pi^2}{4} (3A)^3 \right]^{\frac{1}{2}} \approx 2.06,$$

qui est bien de l'ordre de grandeur attendu.

Le comportement  $A \sim \mathcal{W}_0^{-\frac{1}{3}}$  est vérifié numériquement, ce qui est cohérent avec le fait que lorsque  $\mathcal{W}_0 \ll 1$  l'échelle de temps longue est  $\mathcal{W}_0 t$ .

### Statistique du nombre de retournements

Les modèles de spins étudiés au chapitre 5 étaient caractérisés, entre autres, par le fait que chaque spin se retournait au plus une fois. Pour le modèle de Kawasaki complet, les retournements multiples sont autorisés, et on a une distribution du nombre des retournements (figure 6.9). Celle-ci décroît rapidement, c'est à dire qu'il est rare qu'un spin se retourne beaucoup. De plus cette distribution dépend peu de la taille de l'échantillon, ce qui renforce l'idée que la dynamique est très locale (ceci se voit aussi sur le déplacement carré moyen,  $\langle r^2 \rangle$ , qui est d'ordre 1). On peut aussi noter que les retournements un nombre pair de fois sont favorisés : cela s'explique par les retournements des spins 'passifs', qui se retournent deux fois lorsqu'ils voient passer un spin diffusif.

Une des questions reliées au nombre de retournements est celle de la probabilité de non-retournement, c'est à dire la probabilité de persistance  $p_0(t)$ . Celle-ci tend vers une valeur limite  $p_0(\infty)$  qui dépend faiblement de  $\mathcal{W}_0$ , et qui vaut  $p_0(\infty; \mathcal{W}_0 = 1) \approx 0.44$ . Notons que cette observable n'est pas reliée simplement, même en partant de la configuration complètement antiferromagnétique, à la valeur de l'énergie finale. La

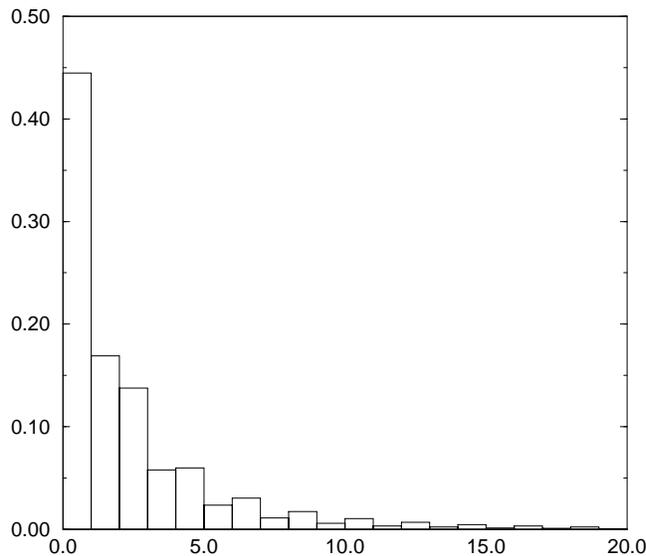


FIG. 6.9 – Histogramme du nombre de retournements par spin pour la dynamique de température nulle ( $\mathcal{W}_0 = 1$ ).

convergence de  $p_0(t) - p_0(\infty)$  vers 0 est compatible (bien que les données soient assez peu précises) avec une décroissance en exponentielle étirée en  $e^{-ct^{\frac{1}{3}}}$ . Une telle décroissance peut de nouveau s'expliquer par l'argument de piégeage : un spin qui ne s'est pas retourné aux temps longs et qui se retournera est un spin passif dans un grand amas contenant un spin diffusif.

### 6.3 Dynamique de basse température

*Nous présentons dans cette section quelques travaux en cours, afin d'indiquer la perspective dans laquelle se poursuit l'étude du modèle de Kawasaki [169].*

Lorsque la température n'est plus strictement nulle, deux nouvelles échelles de temps apparaissent : celle où il faut tenir compte des processus activés (d'évaporation), et le temps d'équilibration. Ces deux temps se comportent respectivement comme  $\mathcal{W}_4^{-1} = \xi^2$  et  $\xi^5$ . Si la première échelle de temps est naturelle, la relation  $\tau_{\text{eq}} \sim \xi^5$  peut sembler moins intuitive. Cette dépendance peut se retrouver de diverses manières, comme par exemple des arguments de groupe de renormalisation [43]. Elle découle en fait tout naturellement du comportement du système dans le régime de marche vers l'équilibre par croissance de domaines. Dans celui-ci la taille moyenne des amas pour  $t \in [\tau_1, \tau_{\text{eq}}]^4$  croît comme :

$$L(t) = L_0 + \mathcal{F}\left(\frac{t}{\xi^2}\right), \quad (6.13)$$

avec  $\mathcal{F}(x) \sim x^{\frac{1}{3}}$  lorsque  $x \gg 1$ . Admettons (pour le moment) cette forme d'échelle. Alors, pour  $t = \tau_{\text{eq}}$ ,  $L(\tau_{\text{eq}}) = L_{\text{eq}} \sim \xi$ , d'où l'on déduit que  $\tau_{\text{eq}} \sim \xi^5$ .

<sup>4</sup>Bien entendu, le système ne saurait être à l'équilibre sans que des processus activés aient eu lieu, ce qui impose  $\tau_{\text{eq}} > \tau_1$ .

Il n'existe pas de démonstration rigoureuse de la formule (6.13). Bien que la croissance se fasse en loi de puissance avec un exposant  $\frac{1}{3}$  typique des systèmes à paramètre d'ordre conservé [18], les arguments usuels ne s'appliquent pas, du fait de la dimension 1 (l'énergie de surface d'un domaine ne dépend pas du volume - la taille - du domaine). A la place on a l'argument suivant [31, 32] : un spin s'évapore d'une interface (taux  $\mathcal{W}_4$ ). Il diffuse ensuite dans le domaine adjacent, jusqu'à ce qu'il recondense sur une paroi. La probabilité qu'il condense sur une interface autre que celle où il a été émis est  $\sim \frac{1}{L}$ , où  $L$  est la taille de l'amas à traverser. Il faut  $\sim L^2$  processus de ce type pour annihiler un domaine de taille  $L$ , si bien que le temps de disparition d'un tel domaine est d'ordre  $\sim \xi^2 L^3$ , d'où se déduit la forme (6.13). Cet argument est, d'une certaine manière, un argument champ moyen, puisqu'on ne tient pas compte des fluctuations de la taille des amas. Il n'est plus valable lorsque les domaines ont une taille telle qu'un second monomère est émis avant que le premier ait recondensé : il faut alors tenir compte de mécanismes conduisant à la création de domaines, qui compensent les mécanismes de disparition. Ceci est la marque que le système a atteint l'équilibre.

Il existe très peu de résultats exacts sur la dynamique de basse température du modèle de Kawasaki, même en dimension 1. L'argument présenté ci-dessus est à l'origine d'un modèle effectif [32] de diffusion de domaines qui permet d'obtenir certains résultats analytiques. Dans ce modèle effectif, le temps est renormalisé d'un facteur  $\mathcal{W}_4^{-1}$ , si bien que les mouvements de diffusion ont lieu instantanément. L'intérêt de ce modèle est que dans la limite  $T \rightarrow 0$ , le système effectif, contrairement au système réel, ne gèle pas, et on observe de la croissance de domaines (indéfiniment puisque dans cette limite  $\xi \rightarrow \infty$ , et le temps de relaxation devient infini).

Les résultats numériques qui suivent ne proviennent pas de l'étude du modèle effectif, mais au contraire de l'étude numérique directe de quelques observables dans le régime de croissance de domaines. La différence majeure avec le modèle effectif est la prise en compte explicite des mouvements diffusifs. Une telle étude du système réel pourrait permettre ensuite une comparaison avec le modèle effectif.

Par conservation du paramètre d'ordre local, chaque spin peut être considéré comme une particule qui ne disparaît pas, et suivi au cours du temps. A  $T = \infty$  le modèle obtenu est le modèle d'exclusion symétrique [177] : cette identification de la phase haute température, dans laquelle les spins sont indépendants (du point de vue des interactions ferromagnétiques), avec un modèle non-trivial illustre la difficulté du problème. Comme annoncé dans l'introduction de ce chapitre, nous avons étudié le déplacement  $r(t)$  d'un spin. Par symétrie  $\langle r \rangle = 0$ . Par contre pour les fluctuations on obtient, dans le régime  $t \in [\tau_1, \tau_{\text{eq}}]$  :

$$\langle r^2 \rangle \sim r_0 + A \left( \frac{t}{\xi^2} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (6.14)$$

Cette loi d'échelle est aussi présente dans la kurtosis :

$$\text{Bin}(t) = \frac{\langle r^4 \rangle}{\langle r^2 \rangle^2} \sim 3 + C \left( \frac{t}{\xi^2} \right)^{-\frac{2}{3}} \quad (6.15)$$

La convergence vers 3 du rapport de Binder semble indiquer que  $r(t)$  devient, aux

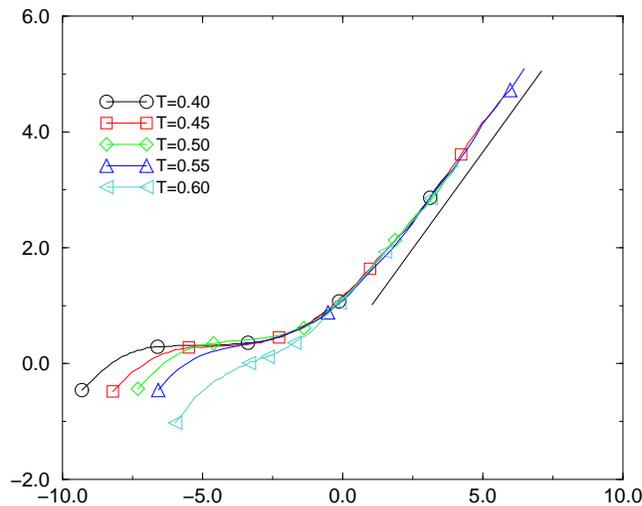


FIG. 6.10 – Effet cage pour le modèle de Kawasaki : tracé, en log-log, du déplacement carré moyen  $\langle r^2 \rangle$  en fonction du temps renormalisé  $\frac{t}{\xi^2}$  (pour 5 températures différentes). La droite-guide a une pente  $\frac{2}{3}$ .

temps longs dans le régime d'échelle, gaussien, mais nous n'avons pas véritablement d'argument pour expliquer ce comportement.

Dans le temps renormalisé  $\frac{t}{\xi^2}$  on observe, pour les observables ci-dessus, un comportement de *coarsening* classique. Cependant, il ne s'agit pas d'un modèle de croissance de domaines usuel. La fonction d'autocorrélation à deux temps  $C(t, s)$  décroît, comme attendu dans un modèle de croissance de domaines, en puissance du rapport des deux temps [125, 126], mais avec un exposant qui dépend du premier temps. Ainsi,  $C(t, 0) \sim \frac{1}{L(t)} \sim t^{-\frac{1}{3}}$ , tandis que  $C(t, s) \sim \left(\frac{t}{s}\right)^{-\frac{\lambda}{3}}$  si  $t$  et  $s$  sont dans la région d'échelle ( $t \geq s \gg \xi^2$ ). Des arguments généraux montrent que  $\lambda \geq \frac{3}{2}$  [188], et des simulations récentes [30, 115] semblent indiquer qu'en fait cette borne inférieure est saturée asymptotiquement.

## 6.4 Article 4 : Etats métastable de la chaîne d'Ising-Kawasaki

# Metastable states of the Ising chain with Kawasaki dynamics

G. De Smedt<sup>a,1</sup>, C. Godrèche<sup>b,2</sup>, and J.M. Luck<sup>a,3</sup>

<sup>a</sup>Service de Physique Théorique<sup>4</sup>, CEA Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette cedex, France

<sup>b</sup>Service de Physique de l'État Condensé, CEA Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette cedex, France

## Abstract

We consider the ferromagnetic Ising chain with zero-temperature Kawasaki dynamics, where diffusion processes are allowed with a variable rate  $W_0$ . For  $W_0 = 0$ , the fully irreversible constrained Kawasaki dynamics is recovered. For  $W_0 > 0$ , although dynamics is partly reversible, the system still reaches a blocked configuration. We present a detailed investigation of various features of the blocked configurations reached by the dynamics (statistics of energy, spin correlations, distribution of domain sizes). The numerical data are systematically compared with the predictions of an a priori approach à la Edwards.

To be submitted for publication to the Journal of Physics A  
P.A.C.S.: 05.70.Ln, 64.60.My, 75.40.Gb.

<sup>1</sup>desmedt@spht.saclay.cea.fr

<sup>2</sup>godreche@spec.saclay.cea.fr

<sup>3</sup>luck@spht.saclay.cea.fr

<sup>4</sup>URA 2306 of CNRS

## 1 Introduction

Glassy dynamics is often described as motion in a complex energy landscape [1], with many valleys separated by barriers. Valleys have been given several definitions [2, 3, 4, 5], which are not equivalent from a dynamical viewpoint [6]. One common feature of all these approaches is the exponential growth of the number of valleys with the system size, as

$$\mathcal{N}(N) \sim \exp(NS_{\text{ap}}(E)),$$

where  $S_{\text{ap}}(E)$  is the ‘a priori’ configurational entropy, or complexity.

As valleys are so numerous, an important issue concerns the possibility of giving an a priori statistical description of them. In other words, the key question is as follows. Assuming the system starts in a random initial configuration, does it sample all the possible valleys with equal statistical weights, i.e., with a uniform or flat measure, or, to the contrary, does the size of the attraction basin of each valley, or any other hidden feature, matter? The assumption that an a priori statistical description with a flat measure holds is referred to as the Edwards hypothesis, as it was first formulated by Edwards [7], in the context of granular materials.

One-dimensional spin systems at zero temperature provide an adequate setting for investigating the dynamical role of valleys, and especially for testing the Edwards hypothesis. Indeed the blocked configurations reached by zero-temperature dynamics are truly metastable states with infinite lifetimes. In an earlier work [8] we have addressed this question for paramagnetic and ferromagnetic Ising chains with various kinds of fully irreversible zero-temperature dynamics, where each spin may flip at most once before a blocked state is reached. These dynamical models can be exactly mapped onto random sequential addition problems [9], for which analytical tools are available.

In the present work we pursue the investigation of metastable states in Ising chains, by considering the richer situation of zero-temperature Kawasaki or spin-exchange dynamics [10], where diffusion processes are allowed with a variable rate  $W_0$  [11]. For the constrained dynamics ( $W_0 = 0$ ) [12], only irreversible condensation processes are present. This is one of the models investigated in detail previously [8]. For the full dynamics ( $W_0 > 0$ ), diffusion processes are allowed. The dynamics is therefore partly reversible, and each spin only flips a finite number of times, before the system reaches a blocked state after a finite time. The statistics of this blocking time is studied in Section 2. Our main goal is then again to test the Edwards hypothesis, i.e., to evaluate various observables in the blocked configurations reached by the dynamics, starting from a random non-magnetized initial configuration. We shall systematically compare the data of extensive numerical simulations, presented in Section 4, with the predictions of the a priori approach à la Edwards, derived in Section 3. Finally, various features of persistence, concerning the distribution of the number of flips of a given spin, are discussed in Section 5.

To be more specific, we consider a ferromagnetic chain of Ising spins  $\sigma_n = \pm 1$ , whose Hamiltonian reads

$$\mathcal{H} = -\sum_n \sigma_n \sigma_{n+1}. \quad (1.1)$$

In Kawasaki or spin-exchange dynamics [10], only pairs of opposite spins may be flipped ( $+- \leftrightarrow -+$ ), so that the magnetization is locally conserved.

For simplicity, we limit ourselves to Monte-Carlo dynamics, with random sequential updating, and we assume that the flipping rate only depends on the energy difference  $\delta\mathcal{H}$  involved in the proposed move. Any given pair of opposite spins thus has a probability  $W_{\delta\mathcal{H}}$  of flipping per unit time, with

$$\delta\mathcal{H} = 2(\sigma_{n-1}\sigma_n + \sigma_{n+1}\sigma_{n+2}) \in \{-4, 0, 4\}.$$

The requirement of detailed balance with respect to the Hamiltonian (1.1) at temperature  $T = 1/\beta$  yields a single condition,

$$\frac{W_4}{W_{-4}} = e^{-4\beta},$$

upon the rates  $W_4, W_0, W_{-4}$ .

We furthermore restrict ourselves to zero-temperature dynamics, so that  $W_4 = 0$ . We choose time units such that  $W_{-4} = 1$ , keeping  $W_0$  as a free parameter. The allowed moves and the corresponding rates are listed in Table 1. The zero-temperature limits of the Metropolis and heat-bath rules respectively correspond to  $W_0 = 1$  and  $W_0 = 1/2$ . Hereafter we focus our attention on the range  $0 \leq W_0 \leq 1$ .

$\delta\mathcal{H}$	type	name	rate	moves
-4	irreversible	condensation	1	$-+--+ \rightarrow -+++$ $+-+-+ \rightarrow +++-$
0	reversible	diffusion	$W_0$	$++-+ \leftrightarrow +-++$ $-+-+ \leftrightarrow -+--$

Table 1: Allowed moves in zero-temperature Kawasaki dynamics.

## 2 Statistics of blocking time

For the constrained dynamics ( $W_0 = 0$ ), it has been shown [8] that a finite system consisting of  $N$  spins reaches a blocked configuration after a finite blocking time  $T_N \sim \ln N$ , which appears as the jamming time of the equivalent problem of random sequential adsorption of hollow trimers. The blocked configurations are characterized by the property that the spin patterns  $+-+-$  and  $-+--$  are absent. Equivalently, there are at most two consecutive unsatisfied bonds.

For the full zero-temperature dynamics ( $W_0 > 0$ ), as anticipated in the Introduction, the system still gets trapped in a blocked configuration. The reason is that the novel mechanism is the diffusive motion of free  $+$  spins in domains of  $-$  spins, and vice-versa. Each free spin will eventually be annihilated, by meeting either another free spin or one of the boundaries of the domain. Blocked configurations of full Kawasaki dynamics are therefore characterized by the property that the patterns  $+-+$  and  $-+-$  are absent. Equivalently, isolated spins are absent, or unsatisfied bonds are isolated.

In order to understand the statistics of the blocking time  $T_N$ , we consider first the regime  $W_0 \ll 1$ , where the time scales of condensation and diffusion are well separated, as already observed in Ref. [11]. The fast part of the dynamics, which occurs with unit rate, is identical to the constrained dynamics considered in Ref. [8, 12]. For intermediate times of order  $1 \ll t \ll 1/W_0$ , the system is therefore approximately left in one of the final configurations of the constrained dynamics. The slow, diffusive part of the dynamics then takes place at rate  $W_0 \ll 1$ . The late stages of the dynamics are governed by large domains, on which a single free spin diffuses. We assume that such large domains, made of  $L \gg 1$  spins, occur with an exponentially small probability

$$f_{\text{dif}}(L) \sim \exp(-L/\xi_{\text{dif}}),$$

where  $\xi_{\text{dif}}$  is the relevant characteristic length. The spin diffusion constant reads  $D = W_0$  in our units. For a random initial point, the survival probability is known [13, 14] to decay as  $S(t; L) \approx (8L/\pi^2) \exp(-(\pi/L)^2 W_0 t)$ . The mean density of free spins at time  $t$  can therefore be estimated as

$$S(t) \approx \sum_L f_{\text{dif}}(L) S(t; L) \sim \int_0^\infty \exp\left(-\frac{L}{\xi_{\text{dif}}} - \frac{\pi^2 W_0 t}{L^2}\right) L dL. \quad (2.1)$$

Evaluating the integral by the method of steepest descent, we thus obtain the following estimate for the density of free spins:

$$S(t) \sim t^{1/2} \exp\left(-\frac{(W_0 t)^{1/3}}{A_{\text{dif}}}\right), \quad (2.2)$$

with

$$A_{\text{dif}} = \left(\frac{4\xi_{\text{dif}}^2}{27\pi^2}\right)^{1/3}. \quad (2.3)$$

The result (2.2) exhibits a stretched exponential decay. This behavior, already emphasized in Ref. [11], is a general characteristic feature of diffusion processes in the presence of random traps [13, 14]. The exponent  $1/3$  is related to the one-dimensional geometry; it would read  $d/(d+2)$  for trapping problems in higher spatial dimension  $d$ . The above result should hold for the late stages ( $W_0 t \gg 1$ ) of the full Kawasaki dynamics, for any finite value of  $W_0$ . The characteristic length  $\xi_{\text{dif}}$  is expected to depend smoothly on  $W_0$ .

For a finite system of  $N$  spins, the last free spin will be annihilated at a time  $T_N$  such that  $NS(T_N) \sim 1$ , hence  $(W_0 T_N)^{1/3} \sim A_{\text{dif}} \ln N$ . More precisely, as the histories of the

free spins diffusing on different domains are statistically independent, it can be argued along the lines of [8] that  $T_N$  is given according to extreme-value statistics [15] as

$$(W_0 T_N)^{1/3} \approx A_{\text{dif}} \left( \ln(N(\ln N)^{3/2}) + b + X_N \right). \quad (2.4)$$

In this expression, the factor  $(\ln N)^{3/2}$  takes account of the  $t^{1/2}$  prefactor in the survival probability (2.2), while the effective constant  $b$  encompasses all subleading effects that have been neglected, and the random variable  $X_N$  is distributed according to the Gumbel law

$$f(X) = \exp(-X - e^{-X}). \quad (2.5)$$

These predictions have been checked against extensive numerical simulations, performed according to the zero-temperature Kawasaki dynamics summarized in Table 1, with random sequential updates and periodic boundary conditions, starting from a random initial configuration with zero magnetization. The dynamics is run until the system gets trapped in a blocked configuration. The blocking time  $T_N$  is recorded for each sample. This measurement has been performed for many samples ( $10^8$  spins in total for each value of  $W_0$  and of  $N$ ). The mean  $\langle (W_0 T_N)^{1/3} \rangle$  is found to follow an almost perfect linear law when plotted against  $\ln(N(\ln N)^{3/2})$ , at least for  $N$  ranging from 50 to 3200, whereas the same data plotted against  $\ln N$  are bent in a significant way. Using (2.3), the slope of the latter plot yields the value of the characteristic length  $\xi_{\text{dif}}$ , which is plotted in Figure 1, against the rate  $W_0$ . The error on this estimate, containing a systematic and a statistical part, is roughly comparable to the symbol size. The length  $\xi_{\text{dif}}$  exhibits a rather weak dependence on  $W_0$ , decreasing from  $\xi_{\text{dif}} = 1.77$  in the  $W_0 \rightarrow 0$  limit to  $\xi_{\text{dif}} = 1.61$  for  $W_0 = 1$ .

Another confirmation of the above picture is provided by Figure 2, showing a histogram plot of the variable  $X_N$  defined by (2.4), for 125,000 samples of size  $N = 800$ , with  $W_0 = 1$ . The parameter  $A_{\text{dif}} = 0.339$ , i.e.,  $\xi_{\text{dif}} = 1.61$ , is taken from the data of Figure 1, while the constant  $b$  is chosen by fitting the average  $\langle X_N \rangle$ . A convincing agreement is found with the limit law (2.5).

### 3 Blocked states: a priori ensemble

As already stated, the blocked states of the full zero-temperature Kawasaki dynamics are the configurations where isolated spins are absent, or equivalently unsatisfied bonds are isolated.

This section is devoted to the statistical description of these configurations provided by the a priori ensemble, or Edwards ensemble, where all the blocked configurations are taken with equal weights. We shall distinguish the *full* ensemble of all the blocked configurations, irrespective of their energy, the *restricted* ensemble of blocked configurations with prescribed energy density  $E$ , and the *canonical* ensemble of blocked configurations, obtained by fixing the parameter  $\beta$  conjugate to the energy density  $E$  (see below).

5

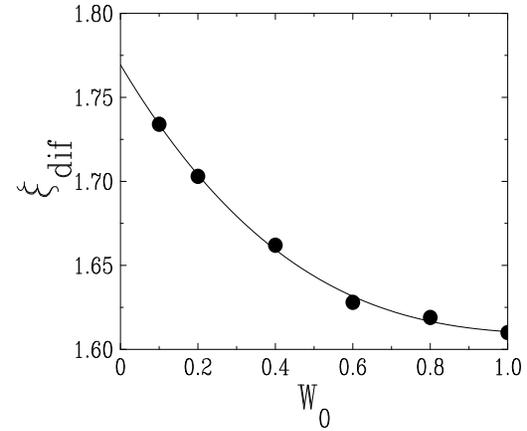


Figure 1: Plot of the characteristic length  $\xi_{\text{dif}}$ , extracted from the size dependence of  $\langle (W_0 T_N)^{1/3} \rangle$ , against the rate  $W_0$ . Symbols: numerical data. Errors are comparable to the symbol size. Line: third-degree polynomial fit.

#### 3.1 Statistics of energy and configurational entropy

For a finite chain of  $N$  spins, we first investigate the number  $\mathcal{N}(N, E)$  of blocked configurations with prescribed energy density  $E$ .

The number  $\mathcal{N}(N, E)$  can be evaluated by an elementary combinatorial reasoning [8]. For the sake of generality, we prefer to resort to the transfer-matrix formalism. We introduce the partition function  $Z_N(\beta)$ , defined as a sum over all the blocked configurations  $\mathcal{C} = \{\sigma_n\}$  of the Boltzmann weight associated with the Hamiltonian (1.1). We have

$$Z_N(\beta) = \sum_{\mathcal{C}} e^{-\beta \mathcal{H}(\mathcal{C})} \approx \int \mathcal{N}(N, E) e^{-\beta N E} dE. \quad (3.1)$$

In this framework, the parameter  $\beta$  can be positive or negative, and it is not related to physical temperature. The transfer matrix is then a very useful tool. Indeed the partition functions  $Z_N^\alpha$ , labeled by the prescribed value  $\alpha = (\sigma_{N-1}, \sigma_N)$  of the last two spins, obey the recursion relation

$$\begin{pmatrix} Z_{N+1}^{++} \\ Z_{N+1}^{+-} \\ Z_{N+1}^{-+} \\ Z_{N+1}^{--} \end{pmatrix} = \mathcal{T} \begin{pmatrix} Z_N^{++} \\ Z_N^{+-} \\ Z_N^{-+} \\ Z_N^{--} \end{pmatrix},$$

6

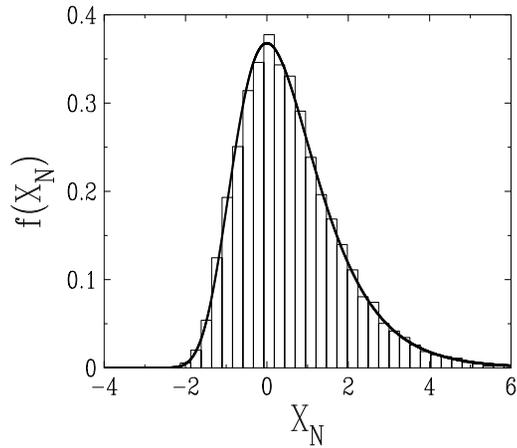


Figure 2: Distribution of the variable  $X_N$  defined by (2.4). Histogram: numerical data for  $N = 800$  (see text). hick line: limit Gumbel law (2.5).

where the  $4 \times 4$  transfer matrix  $\mathcal{T}$  reads

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} e^\beta & 0 & e^\beta & 0 \\ e^{-\beta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\beta} \\ 0 & e^\beta & 0 & e^\beta \end{pmatrix}.$$

The characteristic polynomial of  $\mathcal{T}$  factors as  $\det(\lambda\mathbf{1} - \mathcal{T}) = (\lambda^2 - e^\beta\lambda - 1)(\lambda^2 - e^\beta\lambda + 1)$ . The first (resp. the second) factor yields eigenvalues  $\lambda_1, \lambda_2$  (resp.  $\lambda_3, \lambda_4$ ), with

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( e^\beta \pm \sqrt{e^{2\beta} + 4} \right), \quad \lambda_{3,4} = \frac{1}{2} \left( e^\beta \pm \sqrt{e^{2\beta} - 4} \right).$$

The left and right eigenvectors  $\langle L_a |$  and  $| R_a \rangle$  are even (resp. odd) for  $a = 1, 2$  (resp.  $a = 3, 4$ ) under the spin symmetry  $+\leftrightarrow -$ . We assume that they are normalized so that  $\langle L_a | R_b \rangle = \delta_{ab}$ . Their explicit expressions will not be needed hereafter.

For large  $N$ , we have  $Z_N(\beta) \sim \lambda_1^N$ , as  $\lambda_1$  is the largest eigenvalue. Equation (3.1) then implies

$$\mathcal{N}(N, E) \sim \exp(NS_{\text{ap}}(E)), \quad (3.2)$$

where the a priori entropy  $S_{\text{ap}}(E)$ , also known as the configurational entropy, is related

to  $\ln \lambda_1(\beta)$  by a Legendre transform:

$$S_{\text{ap}}(E) - \ln \lambda_1(\beta) = \beta E, \quad E = -\frac{d \ln \lambda_1}{d\beta}, \quad \beta = \frac{dS_{\text{ap}}}{dE}.$$

Explicitly, we have

$$E = -\frac{e^\beta}{\sqrt{e^{2\beta} + 4}}, \quad e^\beta = \frac{-2E}{\sqrt{1 - E^2}}, \quad (3.3)$$

and the a priori entropy reads

$$S_{\text{ap}}(E) = E \ln(-2E) + \frac{1-E}{2} \ln(1-E) - \frac{1+E}{2} \ln(1+E).$$

The entropy is non-zero for  $-1 \leq E \leq 0$ . It takes its maximal value

$$S^* = \ln \Phi = 0.481212,$$

where  $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$  is the golden mean, for

$$E^* = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -0.447214, \quad (3.4)$$

corresponding to  $\beta = 0$ . Equation (3.4) therefore yields the typical a priori energy density of a blocked configuration.

The result (3.2) can be recast as follows. Consider the full ensemble of all the blocked configurations, irrespective of their energy. The probability of observing, in that a priori ensemble, a blocked configuration with energy density  $E$  reads

$$P_{\text{ap}}(E) \sim \exp(-N\Sigma_{\text{ap}}(E)), \quad \Sigma_{\text{ap}}(E) = S^* - S_{\text{ap}}(E). \quad (3.5)$$

The function  $\Sigma_{\text{ap}}(E)$  vanishes quadratically as

$$\Sigma_{\text{ap}}(E) \approx c(E - E^*)^2, \quad c = \frac{5\sqrt{5}}{8}.$$

The bulk of the a priori distribution of  $E$  is therefore a narrow Gaussian around  $E^*$ , whose rescaled variance asymptotically reads

$$N \text{Var} E = N(\langle E^2 \rangle - E^{*2}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2c} = \frac{4\sqrt{5}}{25} = 0.357771.$$

The above results also allow to determine the higher cumulants of the energy in the canonical ensemble (at fixed parameter  $\beta$ ). One has indeed

$$\frac{1}{N} \ln \langle e^{sNE} \rangle_\beta = \frac{1}{N} \ln \frac{Z_N(\beta - s)}{Z_N(\beta)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \ln \frac{\lambda_1(\beta - s)}{\lambda_1(\beta)}.$$

By expanding this result as a power series in  $s$ , we obtain explicit expressions for the cumulants  $\langle\langle E^k \rangle\rangle$  as a function of  $\beta$ .

As far as mean quantities are concerned, the microcanonical or restricted ensemble (fixed energy density  $E$ ) and the canonical one (fixed conjugate parameter  $\beta$ ) are equivalent. It is therefore justified to recast canonical results in terms of the prescribed value  $E$  of the mean energy, using (3.3). Generalizing this equivalence prescription to the cumulants of the energy, we obtain

$$\begin{aligned} N \text{Var } E = N \langle\langle E^2 \rangle\rangle &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} -E(1 - E^2), \\ N^2 \langle\langle E^3 \rangle\rangle &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} -E(1 - E^2)(3E^2 - 1), \\ N^3 \langle\langle E^4 \rangle\rangle &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} -E(1 - E^2)(15E^4 - 12E^2 + 1). \end{aligned} \quad (3.6)$$

The energy cumulants are definitely not mean quantities. The results (3.6) can however be given the following interpretation. Fixing  $\beta$  amounts to fixing the extensive part  $NE$  of the energy, while the equivalence prescription is a natural Ansatz to describe the fluctuations of the subextensive part.

### 3.2 Spin correlation function

The spin correlation function  $C_n = \langle \sigma_0 \sigma_n \rangle$  in the canonical a priori ensemble can also be evaluated by the transfer-matrix method. In the bulk of an infinitely long chain, and for  $n \geq 0$ , we have

$$C_n = \frac{\langle L_1 | S T^n S | R_1 \rangle}{\lambda_1^n} = \sum_a \langle L_1 | S | R_a \rangle \langle L_a | S | R_1 \rangle \left( \frac{\lambda_a}{\lambda_1} \right)^n, \quad (3.7)$$

where

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

is the spin operator.

Because of symmetry, only the eigenvectors with  $a = 3, 4$  contribute to the above sum. The values  $C_0 = 1$  and  $C_1 = -E$  are sufficient to determine the combinations of matrix elements entering (3.7), without knowing the eigenvectors explicitly. The following alternative reasoning can also be used. Any linear combination  $C_n$  of  $(\lambda_3/\lambda_1)^n$  and  $(\lambda_4/\lambda_1)^n$  can be shown to obey the three-term recursion relation

$$(1 - E)C_{n+2} + 2EC_{n+1} + (1 + E)C_n = 0.$$

The initial values  $C_0 = 1$  and  $C_1 = -E$  are therefore again sufficient to determine the correlation function for all values of the distance  $n$ .

For  $-1/\sqrt{2} \leq E \leq 0$ , which contains the range of final energies reached by the dynamics,  $\lambda_{3,4} = \exp(\pm iQ)$  are complex numbers with unit modulus, with

$$\tan Q = \frac{\sqrt{1 - 2E^2}}{-E} \quad (0 \leq Q \leq \pi/2). \quad (3.8)$$

We are thus led to the expression

$$C_n = \left( \frac{1 + E}{1 - E} \right)^{n/2} \left( \cos nQ + \frac{E^2}{\sqrt{1 - 2E^2}} \sin nQ \right), \quad (3.9)$$

for  $n \geq 0$ . In the a priori ensemble, the spin correlation function therefore exhibits an exponential decay, of the form  $\exp(-n/\xi_{\text{spin}})$ , modulated by oscillations at wavevector  $Q$ . Both the correlation length

$$\xi_{\text{spin}} = \frac{2}{\ln \frac{1 - E}{1 + E}} \quad (3.10)$$

and the wavevector  $Q$ , given by (3.8), depend continuously on energy.

We finally quote for further reference the value of the reduced susceptibility

$$\hat{\chi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n. \quad (3.11)$$

After some algebra, we obtain the simple result

$$\hat{\chi} = \frac{-E(1 - E)}{1 + E}. \quad (3.12)$$

### 3.3 Distribution of domain sizes

The distribution of domain sizes in the a priori ensemble can also be evaluated by the transfer-matrix method. Let  $\rho(\ell)$  be the density of domains consisting of exactly  $\ell$  consecutive parallel spins, with  $\ell \geq 2$ . This quantity admits an expression similar to the middle side of (3.7), namely

$$\rho(\ell) = \frac{\langle L_1 | \mathcal{P} e^{(\ell-2)\beta} | R_1 \rangle}{\lambda_1^\ell},$$

where

$$\mathcal{P} = |+-\rangle \langle -+| + |-+\rangle \langle +-| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

is the appropriate boundary operator. The explicit expression of the matrix element is not needed, as it can be fixed by normalization. The probability distribution  $f(\ell)$  of domain sizes indeed reads  $f(\ell) = \rho(\ell)/\rho$ , where

$$\rho = \sum_{\ell=2}^{\infty} \rho(\ell) = \frac{1}{\langle \ell \rangle} = \frac{1 + E}{2} \quad (3.13)$$

is the total density of domains (or equivalently, of domain walls). We thus obtain the exponential (or geometrical) probability distribution

$$f(\ell) = \frac{1 - E^2}{4E^2} \left( \frac{-2E}{1 - E} \right)^\ell \quad (3.14)$$

for  $\ell \geq 2$ . The corresponding characteristic length

$$\xi_{\text{dom}} = \frac{1}{\ln \frac{1-E}{-2E}} \quad (3.15)$$

is in general different from the spin correlation length  $\xi_{\text{spin}}$  of (3.10), except for the typical value of energy (3.4), where  $\xi_{\text{spin}} = \xi_{\text{dom}} = 1/S^*$ .

The mean of the domain size distribution (3.14) agrees with (3.13), while its variance reads

$$\text{Var } \ell = \sum_{\ell=2}^{\infty} \ell^2 f(\ell) - \langle \ell \rangle^2 = \frac{-2E(1-E)}{(1+E)^2}.$$

Consider now a large sample of  $N$  spins, in the canonical a priori ensemble (fixed parameter  $\beta$ ). The number  $M$  of domains in the sample is such that  $N = \ell_1 + \dots + \ell_M$  is the sum of  $M$  independent variables distributed according to  $f(\ell)$ , neglecting boundary effects. The expected number of domains and its variance are given by

$$\frac{\langle M \rangle}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\langle \ell \rangle} = \frac{1+E}{2}, \quad \frac{\text{Var } M}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{\text{Var } \ell}{\langle \ell \rangle^3} = \frac{-E(1-E^2)}{4}. \quad (3.16)$$

One has therefore

$$N \text{Var } E = \frac{4 \text{Var } M}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{4 \text{Var } \ell}{\langle \ell \rangle^3}, \quad (3.17)$$

so that the second result of (3.16) agrees with expression (3.6) for  $N \text{Var } E$ .

## 4 Blocked states: numerical results

In this section we compare the predictions of the a priori ensemble derived in Section 3 to the results of extensive numerical simulations concerning various features of the blocked spin configurations reached by the dynamics. We have used the zero-temperature Kawasaki dynamics summarized in Table 1, with random sequential updates, starting from a random non-magnetized initial configuration.

### 4.1 Mean energy

The first quantity to look at is the mean energy  $E$  of the blocked spin configurations reached by the dynamics.

Let us start with a reminder on the constrained dynamics ( $W_0 = 0$ ). For a random initial configuration, the two kinds of allowed defects, namely isolated unsatisfied bonds (domain walls) and domains of two unsatisfied bond (isolated spins) respectively occur with the following densities in blocked configurations [8, 12]:

$$p_1 = \frac{1}{2} \left( 1 - c^{-5/4} - c^{-9/4} \int_1^{3/2} e^{y^2} dy \right) = 0.219704, \quad p_2 = \frac{e^{-5/4}}{4} = 0.071626,$$

so that the mean energy of blocked configurations reads

$$E_0 = -1 + 2p_1 + 4p_2 = -c^{-9/4} \int_1^{3/2} e^{y^2} dy = -0.274087. \quad (4.1)$$

For the full dynamics ( $W_0 \neq 0$ ), the mean energy  $E$  of blocked states is expected to be below this number. Indeed the diffusive moves can only help relaxing more efficiently the energy excess of the disordered initial state.

Figure 3 shows a plot of the mean final energy  $E$  against the diffusive rate  $W_0$ . Each data point corresponds to  $10^8$  spins in total. We have checked that no appreciable size dependence is to be observed. The final energy is found to be well below (4.1), and below the typical a priori value (3.4). It only exhibits a very weak dependence on the rate  $W_0$ , increasing from the extrapolated minimum value

$$E(0) = -0.5279 \quad (4.2)$$

in the  $W_0 \rightarrow 0$  limit to the maximum value

$$E(1) = -0.51633 \quad (4.3)$$

for  $W_0 = 1$ .

The regime  $W_0 \ll 1$  again deserves some more attention. The mean energy has a discontinuity at  $W_0 = 0$ . Indeed the  $W_0 \rightarrow 0$  limit of the energy,  $E(0)$  given by (4.2), is different from that of the constrained dynamics,  $E_0$  given by (4.1). This discontinuity can be analyzed as follows. In the diffusive part of the dynamics, free spins annihilate by meeting either each other or domain walls. The collision of a single free spin with a domain wall relaxes 4 units of energy, while the coalescence between  $n \geq 2$  spins within a domain relaxes  $4(n-1)$  units of energy, i.e.,  $4(n-1)/n$  per spin. If all the free spins were annihilating in meeting domain walls, the final energy would assume the minimum value  $E = E_0 - 4p_2$ . The efficiency of the diffusive relaxation mechanism can be characterized by the ratio

$$\eta = \frac{E_0 - E(0)}{4p_2} = 1 - \sum_{n \geq 2} \frac{\Pi_n}{n},$$

where  $\Pi_n$  is the probability that a given free spin gets annihilated in a coalescence of  $n \geq 2$  spins. The extrapolated value (4.2) of the final energy yields a rather high efficiency:  $\eta = 0.886$ .

In view of the weak dependence of the final energy against the diffusive rate  $W_0$  (see Figure 3), hereafter we restrict the numerical analysis to the case of zero-temperature Metropolis dynamics ( $W_0 = 1$ ).

### 4.2 Higher cumulants of energy

We now turn to the statistics of the energy of the blocked configurations, besides its mean value studied above. In analogy with the a priori estimate (3.5), the final energy

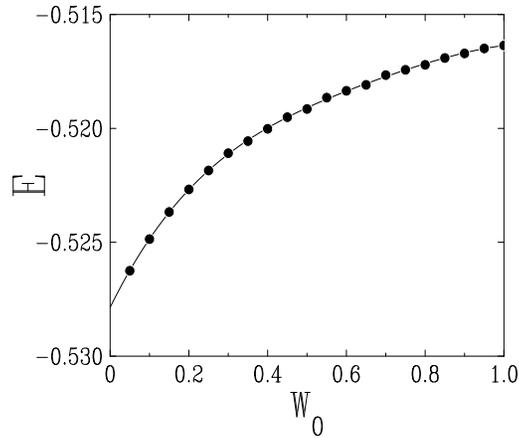


Figure 3: Plot of the mean final energy  $E$  against the rate  $W_0$ . Symbols: numerical data. Statistical errors are smaller than the symbol size. Line: fifth-degree polynomial fit, yielding the extrapolated value (4.2) in the  $W_0 \rightarrow 0$  limit.

is expected to obey a large-deviation formula of the type

$$P(E) \sim \exp(-N\Sigma(E)),$$

with  $\Sigma(E)$  being the dynamical entropy. This formula implies that the cumulants of the energy scale as  $\langle\langle E^k \rangle\rangle \sim 1/N^{k-1}$ , just as in usual equilibrium situations.

Instead of measuring the whole function  $\Sigma(E)$ , which would require a quite extensive numerical effort, we have measured the first four cumulants of the energy of the blocked configurations. Table 2 gives the measured values of the scaled energy cumulants for  $W_0 = 1$  and a random initial configuration. For comparison we also list the predictions of the full a priori ensemble (3.6) for  $E = E^*$  of (3.4), and of the restricted a priori ensemble, obtained by inserting in (3.6) the observed value (4.3) of the mean energy. The simulations have been performed on samples of various sizes ranging from  $N = 50$  to 200, having  $10^{10}$  spins in total. No systematic size dependence is observed. Statistical errors can be estimated to be of the order of one unit of the least significant digit. Both a priori schemes perform very unequally in predicting the energy cumulants. The variance is rather accurately predicted by both schemes, which perform equally poorly for the third cumulant, while the restricted scheme is definitely better for the fourth cumulant.

scaled cumulant	numerical data	full a priori	restricted a priori
$\langle\langle E \rangle\rangle = E$	-0.51633	-0.44721	-0.51633
$N\langle\langle E^2 \rangle\rangle = N \text{Var } E$	0.3446	0.35777	0.37868
$N^2\langle\langle E^3 \rangle\rangle$	0.031	-0.14311	-0.07582
$N^3\langle\langle E^4 \rangle\rangle$	-0.46	-0.28622	-0.42906

Table 2: First four scaled cumulants of the energy of the blocked configurations. Comparison between numerical results and predictions of the full and restricted a priori ensembles (see text).

### 4.3 Spin correlation function

We now turn to the spin correlation function  $C_n = \langle\sigma_0\sigma_n\rangle$  in the blocked configurations. This quantity has two remarkable properties. First, since isolated spins are not allowed in blocked configurations, we have  $C_1 = 1 - 2\rho = -E$  and  $C_2 = 1 - 4\rho$ , where the density of domain walls  $\rho$  has been given in (3.13), hence

$$C_2 = 2C_1 - 1. \quad (4.4)$$

Second, the magnetization  $M = \sum_n \sigma_n$  is conserved in Kawasaki dynamics. Furthermore, for a homogeneous non-magnetized state, we have  $\langle M^2 \rangle = N\hat{\chi}$ , with the definition (3.11). The quantity  $\hat{\chi}$  therefore has the same value in the initial and final configurations, i.e., for a random initial state,

$$\hat{\chi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n = 1. \quad (4.5)$$

Figure 4 shows a comparison between numerical data (circles and full line), corresponding to  $3 \cdot 10^9$  spins in total, and the prediction (3.9) of the restricted a priori ensemble at the observed mean energy (4.3) (triangles and dashed line). The a priori prediction and numerical data coincide both for  $n = 1$  (by construction, as  $E$  has been imposed) and for  $n = 2$  (as a consequence of (4.4)). For larger distances, the spin correlations oscillate in sign and fall off exponentially, in qualitative agreement with the a priori prediction. Both the period of oscillations and the decay length are observed to be slightly larger than those of the a priori ensemble. These observations remain however at a qualitative level.

We also notice that the a priori ensemble fails to reproduce the identity (4.5). Indeed  $\hat{\chi}$  of (3.12) equals unity for  $E = 1 - \sqrt{2} = -0.414214$ , a value which neither agrees with the most probable a priori energy  $E^*$  of (3.4), nor with the observed mean energy (4.3). Conversely, the prediction for the correlation function of the restricted a priori ensemble at energy (4.3), plotted in Figure 4, has  $\hat{\chi} = 1.6192$ , which is significantly different from unity.

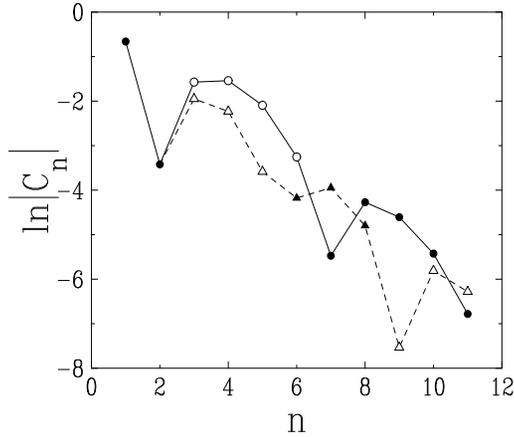


Figure 4: Logarithmic plot of the absolute value of the spin correlation function  $|C_n|$ , against distance  $n$ . Full (open) symbols show positive (negative) correlations. Circles and full line: numerical data. Statistical errors are smaller than the symbol size. Triangles and dashed line: prediction (3.9) of restricted a priori ensemble at energy (4.3).

#### 4.4 Distribution of domain sizes

Another characteristic feature of blocked states is the distribution of domain sizes. As isolated spins are absent, domains of consecutive parallel spins have at least size two. The distribution  $f(\ell)$  of domain sizes is defined as being the probability that a given domain exactly consists of  $\ell$  spins, with  $\ell \geq 2$ .

We have determined this probability distribution by means of extensive numerical simulations, with a random initial state. Figure 5 shows our data corresponding to  $3 \cdot 10^9$  spins in total. The observed distribution is not exponential, at variance with the prediction (3.14) of the a priori ensemble. The full line suggests an exponential asymptotic fall-off of the distribution, with a characteristic length  $\xi_{\text{dom}} = 1.75$ . The prediction (3.14) of the restricted a priori ensemble at the observed mean energy (4.3), is shown as a straight dashed line whose inverse slope is the prediction  $\xi_{\text{dom}} = 2.603$  (3.15) of the a priori approach. Domain sizes which are neither statistically independent nor exponentially distributed have also been observed recently [16] in spin chains undergoing tapping dynamics.

Another noticeable difference with the a priori prediction is that the sizes of successive domains in the final states of the dynamics are not independent. Indeed, if they were

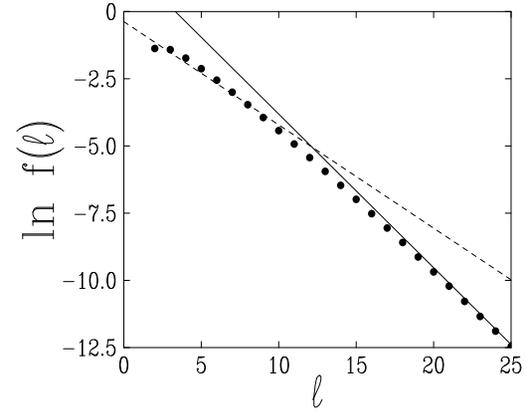


Figure 5: Logarithmic plot of the probability distribution  $f(\ell)$  against domain size  $\ell$ . Circles: numerical data. Statistical errors are much smaller than the symbol size. Dashed straight line: prediction (3.14) of a priori ensemble at energy (4.3). Full straight line: guide to the eye with inverse slope  $\xi_{\text{dom}} = 1.75$ .

so, the relation (3.17) would hold, while the data yield  $4 \text{Var } \ell / \langle \ell \rangle^3 = 0.2790$ , a number significantly below the observed variance  $N \text{Var } E = 0.3446$ , listed in Table 2. Hence domain sizes exhibit a weak but definite positive correlation.

## 5 Features of persistence

We now turn to features related to persistence [17], i.e., the whole history of a single given spin, say  $\sigma_0$ , the spin situated at the origin. In the present context, the central quantity is  $\nu$ , the total number of times  $\sigma_0$  flips during the history of the sample, before a blocked configuration is reached. The number  $\nu$  of spin flips is finite with unit probability in the limit of a large system. Zero-temperature Kawasaki dynamics is therefore of type  $\mathcal{F}$  in the classification of [18]. Furthermore  $\nu$  is random, as it depends both on the initial configuration and on the history of the system. We are therefore interested in the distribution  $g(\nu)$  of the number of flips, which is expected to have a well-behaved limit when  $\sigma_0$  is deep inside a large enough sample.

Before we present numerical data, we first predict the main salient features of the distribution  $g(\nu)$ , following the lines of section 2. Consider again a large domain of  $L \gg 1$  spins, containing the origin 0, on which a single free spin diffuses. The spin  $\sigma_0$

flips twice each time the free spin traverses the origin. We are thus led to the following effective problem.

Consider a random walker in the interval  $-L_1 < n < L_2$ , with absorbing boundaries at  $n = -L_1$  and  $n = L_2$ . The walker starts from the origin ( $n = 0$ ). The probability that the walker returns to the origin before being absorbed by either boundary reads

$$p_{\text{ret}}(L_1, L_2) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right). \quad (5.1)$$

Indeed, if the walker's first jump is to the right (resp. to the left), we are facing a case of the celebrated gambler's ruin problem [19], where  $0 \leq n \leq L_2$  (resp.  $0 \leq -n \leq L_1$ ) is the gambler's wealth. The ruin probability reads  $p_{\text{ret}} = 1 - 1/L_2$  (resp.  $p_{\text{ret}} = 1 - 1/L_1$ ). The expression (5.1) is the arithmetical mean of both probabilities.

The probability that  $\sigma_0$  flips an even number  $\nu = 2k$  of times therefore approximately reads  $g(2k; L_1, L_2) \sim p_{\text{ret}}(L_1, L_2)^k$ , so that the distribution of the number of flips can be estimated for  $\nu \gg 1$ , in analogy with (2.1), as

$$g(2k) \approx \sum_{L_1, L_2} g(2k; L_1, L_2) f_{\text{dif}}(L_1 + L_2) \sim \left( \int_0^\infty \exp\left(-\frac{L}{\xi_{\text{dif}}} - \frac{k}{2L}\right) dL \right)^2.$$

The integral entering this expression close resembles that entering (2.1). For  $\nu = 2k \gg 1$ , it is legitimate to use the steepest-descent method. The saddle point lies at  $L_c = \sqrt{k\xi_{\text{dif}}/2}$ . We thus obtain the stretched exponential law

$$g(2k) \sim \sqrt{k} \exp\left(-2\sqrt{\frac{2k}{\xi_{\text{dif}}}}\right) \quad (5.2)$$

for the distribution of the number of spin flips, provided  $\nu = 2k$  is a large even number.

The occurrence of odd numbers  $\nu = 2k + 1$  of spin flips can also be explained in the above framework, if the spin  $\sigma_0$  is either situated at an endpoint of a domain, or involved in a coalescence event between two free spins. Both effects are expected to scale as the inverse of the domain size  $L$ . This leads us to predict that odd values of  $\nu$  are suppressed by a factor of order  $1/L_c$ , i.e.,

$$\frac{g(2k+1)}{g(2k)} \approx \frac{a}{\sqrt{k\xi_{\text{dif}}}}. \quad (5.3)$$

Figure 6 shows a logarithmic plot of our data for the distribution  $g(\nu)$  of the number of flips. The simulations again concern samples of various sizes having  $2 \cdot 10^{10}$  spins in total. Even numbers of spin flips  $\nu = 2k$  (full symbols) are clearly more frequent than the neighboring odd numbers  $\nu = 2k + 1$  (open symbols). This is especially so for large values of  $k$ . From a quantitative viewpoint, the full lines on Figure 6 show a common fit of the numerical data for  $\nu > 10$  according to the asymptotic predictions (5.2), (5.3). We thus obtain  $2/\sqrt{\xi_{\text{dif}}} \approx 1.55$ , in agreement with the data of Figure 1,  $\xi_{\text{dif}} \approx 1.61$ , i.e.,  $2/\sqrt{\xi_{\text{dif}}} \approx 1.57$ . We also obtain  $a \approx 1.5$ , albeit with a large uncertainty.

17

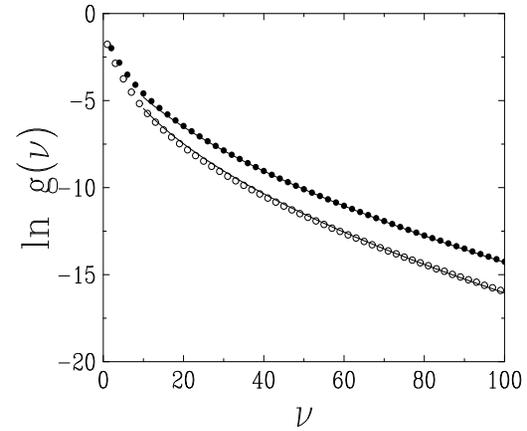


Figure 6: Logarithmic plot of the distribution  $g(\nu)$  of number of flips. Full symbols: data for  $\nu = 2k$  even. Open symbols: data for  $\nu = 2k + 1$  odd. Statistical errors are much smaller than the symbol size. Full lines: common fit described in the text.

Besides the above analysis of the regime of large numbers of spin flips, due to long surviving free spins, our data yield yet other interesting information. The persistence probability, i.e., the probability for a spin to never flip, has the following non-trivial asymptotic limit for infinitely long times:

$$P_0 = g(0) = 0.44739.$$

The probability that a spin flips an even or an odd number of times reads

$$P_{\text{even}} = \sum_{k \geq 0} g(2k) = 0.72302, \quad P_{\text{odd}} = \sum_{k \geq 0} g(2k + 1) = 1 - P_{\text{even}} = 0.27698.$$

These figures can be related to the overlap between a random initial configuration and the corresponding final one. We have indeed

$$Q = \langle \sigma_0(0)\sigma_0(\infty) \rangle = \sum_{\nu \geq 0} (-1)^\nu g(\nu) = P_{\text{even}} - P_{\text{odd}} = 0.44604.$$

The mean number of spin flips reads

$$\langle \nu \rangle = \sum_{\nu \geq 0} \nu g(\nu) = 2.06916.$$

18

This quantity can be used to determine the fractions  $f_{\text{cond}}$  of condensation moves and  $f_{\text{dif}}$  of diffusive moves in a typical history, starting from a random initial configuration. Indeed, on the one hand, a condensation move lowers the total energy by four units, while a diffusive move leaves it unchanged (see Table 1). On the other hand, any move involves exactly two spin flips. We have therefore, using (4.3),

$$f_{\text{cond}} = 1 - f_{\text{dif}} = -\frac{E}{2\langle\nu\rangle} = 0.12477.$$

To close up, let us compare the above results to the case of constrained Kawasaki dynamics ( $W_0 = 0$ ) [8, 12], where only condensation moves are allowed. In this situation, the above quantities can be simply related to the final energy  $E_0$  of (4.1). Indeed every spin flips at most once, so that only  $g(0) = P_0$  and  $g(1) = 1 - P_0$  are non-zero, and  $f_{\text{cond}} = 1$ . Starting again from a random configuration, we are left with

$$2(1 - P_0) = 1 - Q = 2\langle\nu\rangle = -E_0 = 0.274087.$$

## 6 Discussion

First, let us emphasize that such a seemingly simple model as the ferromagnetic Ising chain can be equipped with four different kinds of zero-temperature Monte-Carlo dynamics, summarized in Table 3. Only full Glauber dynamics is a bona fide coarsening dynamics, obeying dynamical scaling with a typical domain size growing as  $L(t) \sim \sqrt{t}$ . With the three other dynamics, the system is left in a metastable configuration after a relatively short blocking time. The constrained Glauber and Kawasaki dynamics have been investigated in our previous work [8]. Each spin may flip at most once before a global blocked state is reached. The blocking time scales with the number of spins as  $\ln N$ . These models can be exactly mapped onto the random sequential addition problem of dimers and hollow trimers, respectively, hence allowing an analytical treatment.

conserved magnetization	diffusive moves	dynamics	behavior
NO	YES	full Glauber [20]	coarsening [21]
NO	NO	constrained Glauber [22]	metastability [8]
YES	YES	full Kawasaki [10]	metastability [this work]
YES	NO	constrained Kawasaki [23]	metastability [8]

Table 3: The four different kinds of zero-temperature Monte-Carlo dynamics of the ferromagnetic Ising chain, with their dynamical behavior, and appropriate references.

The last case not considered so far from the viewpoint of metastability, full Kawasaki dynamics, has been the subject of this work. Because of the diffusive moves, the dynamics

is only partly irreversible, and the number of flips of a given spin, although finite with probability one, has an unbounded support. The blocking time now grows as  $(\ln N)^3$ . This novel feature makes the Kawasaki problem both richer and closer to more realistic situations. On the other hand, analytical tools are no more available, so that we have had recourse to numerical simulations.

The present work demonstrates that there is no good a priori statistical description of the metastable states reached by Kawasaki dynamics. In other words, the Edwards hypothesis is again invalidated, at least as an exact prescription. Systematic differences are indeed observed between numerical results and a priori predictions, especially in the pattern of spin correlations (Figure 4) and in the distribution of domain sizes (Figure 5). The latter are neither statistically independent nor exponentially distributed.

We also want to underline that the effective trapping description of the late stages of the zero-temperature Kawasaki dynamics, already emphasized in Ref. [11], appears to yield quantitative predictions for several novel physical quantities, including the statistics of the blocking time ((2.4), (2.5), Figure 2), and the distribution of the number of spin flips ((5.2), (5.3), Figure 6).

### Acknowledgements

Interesting discussions with Silvio Franz are gratefully acknowledged.

## References

- [1] M. Goldstein, J. Chem. Phys. **51**, 3728 (1969).
- [2] D.J. Thouless, P.W. Anderson, and R.G. Palmer, Phil. Mag. **35**, 593 (1977).
- [3] T.R. Kirkpatrick and P.G. Wolynes, Phys. Rev. A **35**, 3072 (1987); T.R. Kirkpatrick and D. Thirumalai, Phys. Rev. B **36**, 5388 (1987); T.R. Kirkpatrick and P.G. Wolynes, Phys. Rev. B **36**, 8552 (1987); D. Thirumalai and T.R. Kirkpatrick, Phys. Rev. B **38**, 4881 (1988).
- [4] F.H. Stillinger and T.A. Weber, Phys. Rev. A **25**, 978 (1982); Science **225**, 983 (1984).
- [5] S. Franz and M.A. Virasoro, J. Phys. A **33**, 891 (2000).
- [6] G. Biroli and R. Monasson, Europhys. Lett. **50**, 155 (2000); G. Biroli and J. Kurchan, Phys. Rev. E **64**, 016101 (2001).
- [7] S.F. Edwards, in *Granular Matter: An Interdisciplinary Approach*, ed. A. Mehta (Springer, New York, 1994).
- [8] G. De Smedt, C. Godrèche, and J.M. Luck, Eur. Phys. J. B **27**, 363 (2002).
- [9] For a review, see: J.W. Evans, Rev. Mod. Phys. **65**, 1281 (1993).
- [10] K. Kawasaki, Phys. Rev. **145**, 224 (1966).
- [11] S.J. Cornell, K. Kaski, and R.B. Stinchcombe, Phys. Rev. B **44**, 12263 (1991).
- [12] V. Privman, Phys. Rev. Lett. **69**, 3686 (1992); J.C. Lin and P.L. Taylor, Phys. Rev. E **48**, 4305 (1993); P.L. Krapivsky, J. Stat. Phys. **74**, 1211 (1994).
- [13] M.D. Donsker and S.R.S. Varadhan, Commun. Pure Appl. Math. **28**, 525 (1975); **32**, 721 (1979).
- [14] P. Grassberger and I. Procaccia, J. Chem. Phys. **77**, 6281 (1982); J.W. Haus and K.W. Kehr, Phys. Rep. **150**, 263 (1987); J.M. Luck, *Systèmes désordonnés unidimensionnels* (Collection Aléa, Saclay, 1992).
- [15] E.J. Gumbel, *Statistics of Extremes* (Columbia University Press, 1958).
- [16] J. Berg S. Franz, and M. Sellitto, Eur. Phys. J. B **26**, 349 (2002).
- [17] For a review, see: S.N. Majumdar, Curr. Sci. **77**, 370 (1999).
- [18] C.M. Newman and D.L. Stein, Physica A **279**, 159 (2000).

- [19] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, in 2 volumes (Wiley, New-York, 1966).
- [20] R.J. Glauber, J. Math. Phys. **4**, 294 (1963).
- [21] A.J. Bray, Adv. Phys. **43**, 357 (1994).
- [22] D.S. Dean and A. Lefèvre, Phys. Rev. Lett. **86**, 5639 (2001); A. Lefèvre and D.S. Dean, J. Phys. A **34**, L213 (2001); A. Prados and J.J. Brey, J. Phys. A **34**, L453 (2001).
- [23] V. Privman, Phys. Rev. Lett. **69**, 3686 (1992); J.C. Lin and P.L. Taylor, Phys. Rev. E **48**, 4305 (1993); P.L. Krapivsky, J. Stat. Phys. **74**, 1211 (1994).



# ANNEXE A

## Statistique du nombre de particules déposées

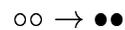
---

Dans cet appendice est exposée la méthode générale utilisée dans [172] et dans le chapitre 5 pour déterminer la statistique de l'aimantation des états métastables atteints par la dynamique dans les différents modèles étudiés. Nous utilisons ici, entre autres pour montrer la généralité des méthodes analytiques employées, le langage des modèles de déposition irréversible [62]. L'irréversibilité, c'est à dire l'absence de processus de désorption ou de diffusion des particules déposées, est l'élément essentiel permettant une résolution analytique. Cette méthode laisse de côté la dynamique proprement dite pour s'attacher à une description statistique de l'état final atteint.

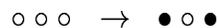
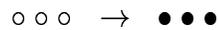
### A.1 Modèles de déposition irréversible

La méthode est générale ; elle peut s'appliquer par exemple aux modèles de déposition suivants :

- Dimères :



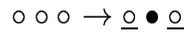
- Trimères ("pleins" ou "creux") :



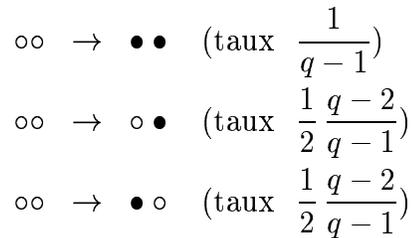
- Déposition coopérative de monomères :



- Déposition de monomères avec exclusion des plus proches voisins [141], c'est à dire qu'on ne peut plus déposer de particules sur un site adjacent à un site rempli :



- Déposition compétitive de monomères et de dimères. Pour certains taux bien choisis, ce modèle correspond à la dynamique de température nulle du modèle de Potts lorsqu'on interdit la diffusion des parois de domaines (équivalent à ce qui est fait dans [172] pour la dynamique de Glauber et la dynamique de Kawasaki) :



## A.2 Condition initiale : amas vide

La première étape consiste à résoudre le problème pour un amas initialement vide de taille finie  $N$ . On suppose en outre que l'amas est bordé par deux sites pleins. On note  $\nu_L$  la variable aléatoire "nombre de particules déposées dans l'état final". La déposition étant irréversible elle scinde l'amas en deux sous-amas de taille moindre qui évoluent ensuite indépendamment, et on a la relation de récursion suivante :

$$\nu_L = \delta\nu + \nu_{L_1} + \nu_{L_2} \quad (\text{A.1})$$

où  $\delta\nu$  est le nombre de particules déposées dans un évènement (par exemple,  $\delta\nu = 2$  pour la déposition d'un dimère). De l'équation (A.1) se déduit alors immédiatement une équation de récurrence pour la fonction caractéristique :

$$\phi_L(\lambda) = \langle e^{\lambda\nu_L} \rangle,$$

équation qui par l'introduction de la fonction génératrice :

$$\Phi(x, \lambda) = \sum_{L \geq 0} \phi_L(\lambda) x^L$$

se transforme en une équation différentielle de Riccati. Dans certains cas cette équation se résout exactement. Dans tous les cas on peut considérer un développement perturbatif autour de  $\lambda = 0$  :

$$\phi_L(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow 0}{\simeq} 1 + \lambda \langle \nu_L \rangle + \frac{\lambda^2}{2!} \langle \nu_L^2 \rangle + \dots$$

pour obtenir :

$$\Phi(x, \lambda) = \frac{1}{1-x} + \sum_{k \geq 1} \frac{\lambda^k}{k!} F_k(x) \quad (\text{A.2})$$

où  $F_k(x)$  est la fonction génératrice de  $\langle \nu_L^k \rangle$ . En insérant ce développement dans l'équation différentielle et en développant l'équation autour de  $\lambda = 0$  on obtient deux équations différentielles linéaires pour  $F_1(x)$  et  $F_2(x)$ , ce qui permet ensuite de déterminer la moyenne et la variance de  $\nu_L$ .

Dans les cas où la fonction  $\Phi(x, \lambda)$  s'obtient explicitement, on peut de plus avoir accès aux queues de la distribution de  $\nu_L$  pour un amas de taille  $L$  grande. D'une part on a :

$$\phi_L(\lambda) \sim \left( \frac{1}{x_c(\lambda)} \right)^L = e^{-LF(\lambda)}$$

où  $x_c(\lambda) = e^{-F(\lambda)}$  est le pôle de  $\Phi(x, \lambda)$ . D'autre part en posant :

$$\mathbb{P}[\nu_L = L\xi] \underset{L \rightarrow \infty}{\simeq} e^{-L\Sigma(\xi)}$$

et en utilisant :

$$\phi_L(\lambda) = \int \mathbb{P}[\nu_L = L\xi] e^{\lambda L\xi} L d\xi,$$

on détermine par une méthode du col la fonction de grandes déviations  $\Sigma(\xi)$ , qui est reliée à la fonction  $F(\lambda)$  par une transformation de Legendre :

$$F(\lambda) + \Sigma(\xi) = \lambda\xi, \quad \lambda = \frac{d\Sigma}{d\xi}, \quad \xi = \frac{dF}{d\lambda}.$$

### A.3 Passage à une condition initiale aléatoire

Connaissant la fonction  $\Phi(x, \lambda)$ , et donc la statistique de  $\nu_L$  pour un amas initialement vide de dimension  $L$ , il est possible d'obtenir des résultats analogues pour la statistique du nombre  $\omega_N$  de particules dans l'état final (bloqué) sur un amas initialement désordonné de taille  $N$ , c'est à dire qu'on prend en compte le fait que le nombre initial de particules est distribué. La configuration initiale s'écrit comme une suite de  $M$  amas vides et pleins qui alternent, de taille  $L_1 \geq 1, L_2 \geq 1, \dots$  de sites vides ou pleins, avec la contrainte  $\sum_{1 \leq i \leq M} L_i = N$ . On considère deux types de conditions initiales :

- Condition initiale de Bernoulli : chaque site de la configuration initiale est vide avec une probabilité  $\mathbb{P}[S_i = \circ] = p$  et rempli avec la probabilité complémentaire  $\mathbb{P}[S_i = \bullet] = 1 - p$ . Une configuration  $\{L_k\}_{1 \leq k \leq M}$  vient avec un poids :

$$W\{L_k\} = \begin{cases} (1-p)^{L_1} p^{L_2} (1-p)^{L_3} \dots & \text{si } S_1 = \bullet, \\ p^{L_1} (1-p)^{L_2} p^{L_3} \dots & \text{si } S_1 = \circ, \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

- Condition initiale markovienne : le premier site de la chaîne est vide (resp. plein) avec probabilité  $\frac{1}{2}$  ( $\frac{1}{2}$ ), et les sites suivants ( $i \geq 2$ ) sont déterminés comme suit :

$$\mathbb{P}[S_i = S_{i-1}] = \varepsilon, \quad \mathbb{P}[S_i = -S_{i-1}] = 1 - \varepsilon$$

ce qui donne un poids :

$$W\{L_k\} = \frac{1}{2} \varepsilon^{L_1-1} (1 - \varepsilon) \varepsilon^{L_2-1} (1 - \varepsilon) \cdots \quad (\text{A.4})$$

Pour une condition initiale fixée la fonction caractéristique de  $\omega_N$  se factorise :

$$\psi_N(\lambda) = \langle e^{\lambda \omega_N} \rangle = \prod_i \langle e^{\lambda \nu_{L_i}} \rangle$$

Chacun des facteurs  $\langle e^{\lambda \nu_{L_i}} \rangle$  est, à condition initiale fixée, connu. Si on est sur un amas de  $\bullet$  il vaut  $e^{\lambda L_i}$ , et  $\phi_{L_i}$  par l'étude précédente si on est sur un amas de  $\circ$ . Il reste à moyenner sur la distribution initiale.

On est donc amené à déterminer la distribution d'une quantité multiplicative sur les amas (c'est à dire que chaque amas apporte une contribution multiplicative). Il est plus intéressant de traiter le cas général : soit  $Q_N$  une telle fonction multiplicative sur les amas, c'est à dire telle qu'un amas de sites pleins de taille  $L$  amène un facteur  $f(L)$  et un amas de sites vides un facteur  $g(L)$  :

$$Q_N = \begin{cases} f(L_1) g(L_2) f(L_3) \cdots & \text{si } S_1 = \bullet, \\ g(L_1) f(L_2) g(L_3) \cdots & \text{si } S_1 = \circ, \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

On introduit les fonctions caractéristiques

$$f(z) = \sum_{L \geq 1} f(L) z^L, \quad g(z) = \sum_{L \geq 1} g(L) z^L, \quad Q(z) = \sum_{N \geq 1} Q_N z^N$$

La fonction caractéristique  $Q(z)$  se resomme avec les poids respectifs des conditions initiales :

- Pour la condition initiale Bernoulli :

$$Q(z) = \frac{f((1-p)z) + g(pz) + 2g(pz)f((1-p)z)}{1 - g(pz)f((1-p)z)} \quad (\text{A.6})$$

- Pour la condition initiale markovienne :

$$Q(z) = \frac{2(1-\varepsilon)f(\varepsilon z)g(\varepsilon z) + \varepsilon(f(\varepsilon z) + g(\varepsilon z))}{2(\varepsilon^2 - (1-\varepsilon)^2 f(\varepsilon z)g(\varepsilon z))} \quad (\text{A.7})$$

Il suffit ensuite d'appliquer ces formules à  $Q_N = \langle e^{\lambda \omega_N} \rangle$  avec  $f(L) = e^{\lambda L}$ , soit  $f(z) = \frac{ze^\lambda}{1-ze^\lambda}$  et  $g(L) = \phi_L(\lambda)$ , soit  $g(z) = \Phi(z, \lambda) - 1$  (la somme définissant  $g(z)$  commence à 1) pour obtenir  $\Psi(z, \lambda) = \sum_{N \geq 1} \psi_N(\lambda) z^N + 1$  :

$$\Psi(z, \lambda) = \frac{\Phi(pz, \lambda)}{1 - (1-p)ze^\lambda \Phi(pz, \lambda)} \quad (\text{Bernoulli})$$

$$\Psi(z, \lambda) = \frac{1 - 2\varepsilon + \Phi(\varepsilon z, \lambda) (2z\varepsilon^2 e^\lambda - 1 - z\varepsilon e^\lambda)}{2((1-\varepsilon)^2 ze^\lambda \Phi(\varepsilon z, \lambda) + 2\varepsilon ze^\lambda - \varepsilon - ze^\lambda)} \quad (\text{Markov})$$

Le développement autour de  $\lambda = 0$  permet d'obtenir les fonctions génératrices des moments de  $\omega_N$  en terme des fonctions  $F_k(z)$ , et l'étude des singularités la fonction de grandes déviations.



# ANNEXE B

## Loi de Gumbel

---

Soit  $N$  variables aléatoires  $\tau_1, \tau_2 \cdots \tau_N$ , indépendantes, distribuées selon une loi exponentielle de taux 1 :  $\rho(\tau) = e^{-\tau}$ . On veut déterminer la distribution de

$$T_N = \max_{1 \leq i \leq N} (\tau_i).$$

La fonction de répartition de  $T_N$  est  $F(t_m) = \mathbb{P}[T_N \leq t_m] = (1 - e^{-t_m})^N$  (tous les  $\tau_i$  sont inférieurs à  $t_m$ ). La densité de probabilité s'en déduit immédiatement :

$$\rho_{T_N}(t_m) = N e^{-t_m} (1 - e^{-t_m})^N$$

Cette distribution atteint son maximum pour  $T^*(N)$  tel que  $\frac{d\rho_{T_N}(t)}{dt}|_{T^*(N)} = 0$ , soit  $T^*(N) = \ln N$ .

L'étude des fluctuations peut se faire comme suit :

$$\mathbb{P}[T_N - \ln N \leq x] = (1 - e^{-x - \ln N})^N = \left(1 - \frac{1}{N} e^{-x}\right)^N \rightarrow e^{-e^{-x}},$$

ce qui montre que  $T_N - \ln N$  converge en distribution vers une variable aléatoire  $\xi$ , dite variable de Gumbel[82], de fonction de répartition (et de densité) :

$$\mathbb{P}[\xi \leq x] = e^{-e^{-x}}, \quad \rho_\xi(x) = e^{-x-e^{-x}} \quad (\text{B.1})$$

La fonction génératrice des moments de  $\xi$  est  $\langle e^{s\xi} \rangle = \sum_{k \geq 0} \langle \xi^k \rangle \frac{s^k}{k!} = \Gamma(1 - s)$ , d'où peuvent se déduire ensuite les premiers cumulants :

$$\langle \xi \rangle = \gamma = 0.5772156\dots, \quad \text{var}(\xi) = \frac{\pi^2}{6} = 1.644934\dots$$

Notons que la valeur moyenne n'est pas la valeur la plus probable, qui vaut 0.

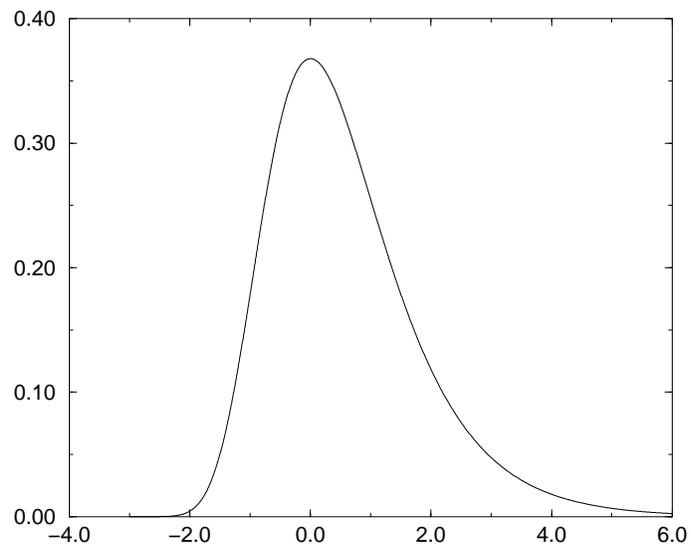


FIG. B.1 – Densité de probabilité de la variable  $\zeta$ .

# Bibliographie

---

- [1] J. Abrahams. A survey of recent progress on level-crossing problems for random processes. *in Communications and Networks. A survey of recent advances.* Springer Verlag, New-York, 1986.
- [2] E. Sparre Andersen. On the fluctuations of sums of random variables (I). *Math. Scand.*, 1 :263–285, 1953.
- [3] E. Sparre Andersen. On the fluctuations of sums of random variables (II). *Math. Scand.*, 2 :195–223, 1954.
- [4] L. Angelini, R. Di Leonardo, G. Parisi, G. Ruocco. Topological description of the aging dynamics in simple glasses. *Phys. Rev. Lett.*, 87 :055502, 2001.
- [5] A. Baldassarri, J.P.Bouchaud, I.Dornic, C.Godrèche. Generalized persistence exponents : an exactly soluble model. *Phys. Rev. E*, 59 :R20, 1999.
- [6] F. Bardou, J.P. Bouchaud, A. Aspect, C. Cohen-Tannoudji. *Lévy statistics and laser cooling.* Cambridge University Press, 2002.
- [7] A. Barrat, J. Kurchan, V. Loreto, M. Sellitto. Edwards' measure for powders and glasses. *Phys. Rev. Lett.*, 85 :5034, 2000.
- [8] A. Barrat, J. Kurchan, V. Loreto, M. Sellitto. Edwards' measure : a thermodynamic construction for dense granular media and glasses. *Phys. Rev. E*, 63 :051301, 2001.
- [9] A. Barrat, R. Burioni, M. Mézard. Dynamics within metastable states in a mean-field spin-glass. *Journ. Phys. A : Math. Gen.*, 29 :L81, 1996.
- [10] BATEMAN Manuscript Project (A. Erdélyi ed.). *Table of Integral Transforms vol.1& 2.* Mc Graw-Hill, 1954.
- [11] E. Ben-Naim, P.L. Krapivsky. On irreversible deposition on disordered substrates. *Journ. Phys. A : Math. Gen.*, 27 :3575–3577, 1994.
- [12] J. Berg, S. Franz, M. Sellitto. Testing the Edwards hypothesis in spin systems under tapping dynamics. *Eur. Phys. J. B*, 26 :349–359, 2002.
- [13] N.H. Bingham, R.A. Doney. On higher dimensional analogues of the arcsine law. *J. Appl. Prob.*, 25 :120–131, 1988.
- [14] G. Biroli, J. Kurchan. Metastable states in glassy systems. *Phys. Rev. E*, 64 :016101, 2001.
- [15] G. Biroli, R. Monasson. From inherent structures to pure states : some simple remarks and examples. *Europhys. Lett.*, 50 :155, 2000.
- [16] I.F. Blake, W.C. Lindsey. Level-crossing problems for random processes. *IEEE Trans. Inform. Theory*, IT-19 :295–315, 1973.

- [17] J.P. Bouchaud, A.Georges. Anomalous diffusion in disordered media : statistical mechanisms, models and physical applications. *Phys.Rep.*, 195 :127–293, 1990.
- [18] A.J. Bray. Theory of phase ordering kinetics. *Adv. Phys.*, 43 :357, 1994.
- [19] A.J. Bray. Phase-ordering dynamics in one dimension. in *Non-equilibrium statistical mechanics in one dimension*, (V. Privman ed.), Cambridge University Press, 1997.
- [20] A.J. Bray, B. Derrida, C. Godrèche. Non-trivial algebraic decay in a soluble model of coarsening. *Europhys. Lett.*, 27 :175–180, 1994.
- [21] J.J. Brey, A. Prados, B. Sanchez-Rey. Thermodynamic description in a simple model for granular compaction. *Physica A*, 275 :310–324, 2000.
- [22] K. Broderix, K.K. Bhattacharya, A. Cavagna, A. Zippelius, I. Giardina. Energy landscape of a Lennard-Jones liquid : statistics of stationary points. *Phys. Rev. Lett.*, 85 :5360–5363, 2000.
- [23] T.W. Burkhardt. Free energy of a semiflexible polymer confined along an axis. *Journ. Phys. A : Math. Gen.*, 28 :L629–L635, 1995.
- [24] T.W. Burkhardt. Dynamics of absorption of a randomly accelerated particle. *Journ. Phys. A : Math. Gen.*, 33 :L429–L432, 2000.
- [25] T.W. Burkhardt, J. Franklin, R.R. Gawronski. Statistics of a confined, randomly accelerated particle with inelastic boundary conditions. *Phys. Rev. E*, 61 :2376–2381, 2000.
- [26] F. Camia, C.M. Newman, V. Sidoravicius. Approach to fixation for zero-temperature stochastic Ising models on the hexagonal lattice. *A paraître dans "In and out of equilibrium : probability with a physics flavor", Progress in Probability, Birkhauser.*
- [27] A. Cavagna, I. Giardina, G. Parisi. An investigation of the hidden structure of states in a mean-field spin-glass model. *Journ. Phys. A : Math. Gen.*, 30 :7021–7038, 1997.
- [28] A. Cavagna, I. Giardina, G. Parisi. Role of saddles in mean-field dynamics above the glass transition. *Journ. Phys. A : Math. Gen.*, 34 :5317–5326, 2001.
- [29] E.R. Cohen, H. Reiss. Kinetics of reactant isolation. I. One-dimensional problems. *J. Chem. Phys.*, 38 :680–691, 1963.
- [30] F. Corberi, C. Castellano, E. Lippiello, M. Zannetti. Universality of the off-equilibrium response function in the kinetic Ising chain. *Prépublication.*
- [31] R. Cordery, S. Sarker, J. Tobochnik. Physics of the dynamical critical exponent in one dimension. *Phys. Rev. B*, 24 :5402–5403, 1981.
- [32] S.J. Cornell, K. Kaski, R.B. Stinchcombe. Domain scaling and glassy dynamics in a one-dimensional Kawasaki Ising model. *Phys. Rev. B*, 44 :12263–12274, 1991.
- [33] S.J. Cornell, M.R. Swift, A.J. Bray. Inelastic collapse of a randomly forced particle. *Phys. Rev. Lett.*, 81 :1142, 1998.
- [34] D.R. Cox. *Renewal theory*. Methuen, London, 1962.
- [35] D.R. Cox, H.D. Miller. *The theory of stochastic processes*. Chapman & Hall, London, 1965.

- [36] A. Crisanti, H.-J. Sommers. The spherical  $p$ -spin interaction spin glass model : the statics. *Z. Physik*, B87 :341, 1992.
- [37] A. Crisanti, H.-J. Sommers. Thouless-Anderson-Palmer approach to the spherical  $p$ -spin spin glass model. *J. Phys. I (France)*, 5 :805, 1995.
- [38] S. Cueille. *Dynamique des systèmes hors d'équilibre : cinématique de l'agrégation et probabilité de persistance*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1998.
- [39] S. Cueille, C. Sire. Spin block persistence at finite temperature. *Journ. Phys. A : Math. Gen.*, 30 :L791, 1997.
- [40] S. Cueille, C. Sire. Block persistence. *Eur. Phys. J. B*, 7 :111, 1999.
- [41] L.F. Cugliandolo, J. Kurchan. Analytical solution of the off-equilibrium dynamics of a long-range spin-glass model. *Phys. Rev. Lett.*, 71 :173, 1993.
- [42] L.F. Cugliandolo, J. Kurchan. On the out of equilibrium relaxation of the Sherrington-Kirkpatrick model. *Journ. Phys. A : Math. Gen.*, 27 :5749, 1994.
- [43] J.M. Nunes da Silva, E.J.S. Lage. Kawasaki dynamics in the Ising chain : a renormalisation group treatment. *J. Phys. C : Solid State Phys.*, 21 :2225–2228, 1988.
- [44] D.A. Darling, M. Kac. On occupation times for Markov processes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 84 :444–458, 1957.
- [45] C. de Calan, J.M. Luck, Th. Nieuwenhuizen, D. Petritis. On the distribution of a random variable occurring in 1d disordered systems. *Journ. Phys. A : Math. Gen.*, 18 :501, 1985.
- [46] D.S. Dean, A. Lefèvre. Tapping spin glasses. *Phys. Rev. Lett.*, 86 :5639–5642, 2001.
- [47] O. Deloubrière. *Problèmes stochastiques associés à l'équation de Langevin : persistance et processus de réaction-diffusion*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, 2001.
- [48] O. Deloubrière, H.J. Hilhorst, C. Godrèche. *Non publié*.
- [49] B. Derrida. Random-energy model : an exactly solvable model of disordered systems. *Phys. Rev. B*, 24 :2613, 1981.
- [50] B. Derrida. How to extract information from simulations of coarsening at finite temperature. *Phys. Rev. E*, 55 :3705–3707, 1997.
- [51] B. Derrida, P.M.C. de Oliveira, D. Stauffer. Stable spins in the zero-temperature spinodal decomposition of 2d Potts models. *Physica A*, 224 :604–613, 1996.
- [52] B. Derrida, V. Hakim, R. Zeitak. Persistent spins in the linear diffusion approximation of phase ordering and zeros of stationary Gaussian processes. *Phys. Rev. Lett.*, 77 :2871, 1996.
- [53] B. Derrida, V. Hakim, V. Pasquier. Exact exponent for the number of persistent spins in the zero-temperature dynamics of the one-dimensional Potts model. *Journ. Stat. Phys.*, 85 :763, 1996.
- [54] A. Dhar, S.N. Majumdar. Residence time distribution for a class of Gaussian Markov process. *Phys. Rev. E*, 59 :6413, 1999.

- [55] M. Ding, W. Yang. Distribution of the first return time in fractional Brownian motion and its application to the study of on-off intermittency. *Phys. Rev. E*, 52 :207, 1995.
- [56] I. Dornic. *Statistique des événements persistants dans la dynamique de croissance de domaines*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1998.
- [57] I. Dornic, C. Godrèche. Large deviations and nontrivial exponents in coarsening systems. *Journ. Phys. A : Math. Gen.*, 31 :5413, 1998.
- [58] J.M. Drouffe, C. Godrèche. Stationary definition of persistence for finite-temperature phase-ordering. *Journ. Phys. A : Math. Gen.*, 31 :9801–9807, 1998.
- [59] J.M. Drouffe, C. Godrèche. Temporal correlations and persistence in the kinetic Ising model : the role of temperature. *Eur. Phys. J. B*, 20 :281–288, 2001.
- [60] E.B. Dynkin. Some limit theorems for sums of independent random variables with infinite mathematical expectation. *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Math.*, 19 :247, 1955.
- [61] S. Edwards. The role of entropy in the specification of a powder. *in Granular matter, an interdisciplinary approach (A. Mehta ed.)* Springer, New-York, 1994.
- [62] J.W. Evans. Random and cooperative sequential adsorption. *Rev. Mod. Phys.*, 65 :1281, 1993.
- [63] M.R. Evans. Anomalous coarsening and glassy dynamics. *J. Phys. Cond. Mat.*, 14 :1397, 2002.
- [64] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, vol. 1 & 2*. Wiley, New-York, 1968, 1971.
- [65] M.E. Fisher. Theory of the condensation and the critical point. *Physics*, 3 :255–283, 1967.
- [66] D.S. Fisher, P. Le Doussal, C. Monthus. Random walks, reaction-diffusion, and nonequilibrium dynamics of spin chains in one-dimensional random environments. *Phys. Rev. Lett.*, 80 :3539–3542, 1998.
- [67] L. Frachebourg, P.L. Krapivsky, S. Redner. Aging and its distribution in coarsening systems. *Phys. Rev. E*, 55 :6684, 1997.
- [68] S. Franz, G. Parisi. Recipes for metastable states in spin-glasses. *J. Phys. I*, 5 :1401, 1995.
- [69] G.H. Fredrickson, H.C. Andersen. Kinetic Ising model of the glass transition. *Phys. Rev. Lett.*, 53 :1244, 1984.
- [70] B.D. Gaulin. Kinetics of spinodal decomposition in one dimension. *Phys. Rev. B*, 38 :7184–7187, 1988.
- [71] B. Gaveau, L.S. Schulman. Master equation based formulation of non equilibrium statistical mechanics. *J. Math. Phys.*, 37 :3897–3932, 1996.
- [72] R.K. Getoor, M.J. Shape. On the arcsine law for Levy processes. *J. Appl. Prob.*, 31 :76–89, 1994.
- [73] R.J. Glauber. Time-dependent statistics of the Ising model. *J. Math. Phys.*, 4 :294–307, 1963.
- [74] B. Gnedenko, A. Kolmogorov. *Limit distributions for sums of independent random variables*. Addison Wesley, 1954.

- [75] C. Godrèche. *Communication privée*.
- [76] C. Godrèche. *From random walk to phase ordering*, in *Self-similar systems*. ed. by V.B. Priezzhev, V.P. Spiridonov (Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia), 1999.
- [77] C. Godrèche, J.M. Luck. Response of non-equilibrium systems at criticality : exact results for the Glauber-Ising chain. *Journ. Phys. A : Math. Gen.*, 33 :1151–1169, 2000.
- [78] C. Godrèche, J.M. Luck. Response of non-equilibrium systems at criticality : ferromagnetic models in dimension two and above. *Journ. Phys. A : Math. Gen.*, 33 :9141–9164, 2000.
- [79] C. Godrèche, J.M. Luck. Statistics of the occupation time of renewal processes. *Journ. Stat. Phys.*, 104 :489–524, 2001.
- [80] M. Goldman. On the first passage of integrated Wiener process. *Ann. Math. Stat.*, 42 :2150–2155, 1971.
- [81] M. Goldstein. Viscous liquid and the glass transition : a potential energy barrier picture. *J. Chem. Phys.*, 51 :3728–3739, 1969.
- [82] E.J. Gumbel. *Statistics of Extremes*. Columbia University Press, 1958.
- [83] H.J. Hilhorst. Persistence exponent of the diffusion equation in  $\varepsilon$  dimension. *Physica A*, 277 :124, 2000.
- [84] H. Hinrichsen, M. Antoni. Identification of domain walls in coarsening systems at finite temperature. *Phys. Rev. E*, 57 :2650–2655, 1998.
- [85] P.C. Hohenberg, B.I. Halperin. Theory of dynamic critical phenomena. *Rev. Mod. Phys.*, 49 :435–479, 1977.
- [86] B.D. Hughes. *Random walks and random environments, Vol.1 : random walks*. Clarendon Press, Oxford, 1996.
- [87] E. Ising. Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus. *Z. Physik*, 31 :253, 1925.
- [88] H.M. Jaeger, S. Nagel, R.P. Behringer. Granular solids, liquids and gases. *Rev. Mod. Phys.*, 68 :1259–1273, 1996.
- [89] S. Jain. Persistence in the zero-temperature dynamics of the diluted Ising ferromagnet in two dimensions. *Phys. Rev. E*, 60 :R2445–R2447, 1999.
- [90] S. Jain. Zero-temperature dynamics of the weakly-disordered Ising model. *Phys. Rev. E*, 59 :R2493–R2496, 1999.
- [91] M. Kac. On distributions of certain Wiener functionals. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 65 :1–13, 1947.
- [92] M. Kac. On some connections between probability theory and differential and integral equations. *Proc. Second Berkeley Symp. Math. Stat.* (J. Neyman ed.), Univ. of California Press, pages 189–215, 1951.
- [93] K. Kawasaki. Diffusion constants near the critical point for time-dependent Ising models. I. *Phys. Rev.*, 145 :224, 1966.
- [94] H.P. Mc Kean. A winding problem for a resonator driven by a white noise. *J. Math. Kyoto Univ.*, 2 :227–235, 1963.

- [95] V.M. Kenkre, H.M. Van Horn. Annihilations of stationary particles on a lattice. *Phys. Rev. A*, 23 :3200–3206, 1981.
- [96] H. Kesten. Random difference equation and renewal theory for products of random matrices. *Acta Math.*, 131 :208, 1973.
- [97] H. Kesten, M.V. Kozlov, F. Spitzer. A limit law for random walk in a random environment. *Compos. Math*, 30 :145, 1975.
- [98] T.R. Kirkpatrick, D. Thirumalai. Dynamics of the structural glass transition and the p-spin-interaction spin-glass model. *Phys. Rev. Lett.*, 58 :2091–2094, 1987.
- [99] A.N. Kolmogorov. Zufällige Bewegungen. *Ann. Math. II*, 35 :116–117, 1934.
- [100] M. Kotulski. Asymptotic distribution of the continuous time random walk : a probabilistic approach. *Journ. Stat. Phys.*, 81 :777–792, 1995.
- [101] J. Krug. Persistence of non-Markovian processes related to fractional Brownian motion. *Markov Proc. Relat. Fields*, 4 :509–516, 1998.
- [102] J. Krug, H. Kallabis, S.N. Majumdar, S.J. Cornell, A.J. Bray, C. Sire. Persistence exponents for fluctuating interfaces. *Phys. Rev. E*, 56 :2702, 1997.
- [103] J. Kurchan, L. Laloux. Phase space geometry and slow dynamics. *Journ. Phys. A : Math. Gen.*, 29 :1929–1948, 1996.
- [104] A. Lachal. *Etude des trajectoires de la primitive du mouvement brownien*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard - Lyon 1, 1992.
- [105] A. Lachal. Dernier instant de passage pour l'intégrale du mouvement brownien. *Stoch. Proc. Applic.*, 49 :57–64, 1994.
- [106] A. Lachal. *Etude probabiliste et analytique d'une classe de fonctionnelles rattachées à la primitive du mouvement brownien*. Habilitation à diriger des recherches, Université Claude Bernard - Lyon 1, 1995.
- [107] A. Lachal. Les temps de passage successifs de l'intégrale du mouvement brownien. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 33 :1–36, 1997.
- [108] J. Lamperti. An occupation time theorem for a class of stochastic processes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 88 :380–387, 1958.
- [109] L. Landau, E. Lifshitz. *Physique statistique*. Editions Mir, Moscou, 1967.
- [110] J.S. Langer. Theory of the condensation point. *Ann. Phys.*, 41 :108–157, 1967.
- [111] A. Lefèvre. Edwards measure and the steady state regime of a model with kinetic constraints under tapping. *prépublication*.
- [112] P. Lévy. *Théorie de l'addition des variables aléatoires*. Gauthier Villars, Paris, 1954.
- [113] J.C. Lin, P.L. Taylor. Exact solution of a phase-separation model with conserved-order-parameter dynamics and arbitrary initial concentration. *Phys. Rev. E*, 48 :4305–4308, 1993.
- [114] M.S. Longuet-Higgins. On the intervals between successive zeros of a random function. *Proc. Roy. Soc.*, A246 :99–118, 1958.
- [115] J.M. Luck. Communication privée.
- [116] J.M. Luck. *Systèmes désordonnés unidimensionnels*. Aléa Saclay, C. Godrèche éd., 1992.

- [117] C. Maccone. Eigenfunctions expansion for fractional Brownian motion. *Il Nuovo Cimento*, 61B :229–248, 1981.
- [118] S.N. Majumdar. Persistence in non-equilibrium systems. *Curr. Sci.*, 77 :370, 1999.
- [119] S.N. Majumdar, A. Comtet. The local and the occupation time of a particle diffusing in a random medium. *Prépublication*.
- [120] S.N. Majumdar, A.J. Bray. Large deviation functions for cooling and heating degree days. *Prépublication*.
- [121] S.N. Majumdar, A.J. Bray, S.J. Cornell, C. Sire. Global persistence exponent for critical dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 77 :3704, 1996.
- [122] S.N. Majumdar, C. Sire. Phase separation model with conserved order parameter on the Bethe lattice. *Phys. Rev. Lett.*, 70 :4022–4025, 1993.
- [123] S.N. Majumdar, C. Sire. Survival probability of a Gaussian non-Markovian process : application to the  $T = 0$  dynamics of Ising model. *Phys. Rev. Lett.*, 77 :1420, 1996.
- [124] S.N. Majumdar, C. Sire, A.J. Bray, S.J. Cornell. Non trivial exponent in simple diffusion. *Phys. Rev. Lett.*, 77 :2867, 1996.
- [125] S.N. Majumdar, D.A. Huse. Growth of long-range correlations after a quench in conserved-order-parameter systems. *Phys. Rev. Lett.*, 73 :182–185, 1994.
- [126] S.N. Majumdar, D.A. Huse. Growth of long-range correlations after a quench in phase-ordering systems. *Phys. Rev. E*, 52 :270–284, 1995.
- [127] S.N. Majumdar, S.J. Cornell. Survival probability of a mobile particle in a fluctuating field. *Phys. Rev. E*, 57 :3757, 1998.
- [128] B. Mandelbrot. *Fractals and scaling in finance ; discontinuity, concentration, risk*. Berlin : Springer, 1997.
- [129] B.B. Mandelbrot, J.W. van Ness. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Rev.*, 10 :422, 1968.
- [130] M. Marcos-Martin, D. Beysens, J.P. Bouchaud, C. Godrèche, I. Yekutieli. Self-diffusion and 'visited' surface in the droplet condensation probleme (breath figures). *Physica A*, 214 :396–412, 1995.
- [131] J.A. McFadden. The axis crossing intervals of random functions (part I). *IRE Trans. Inform. Theory*, IT-2 :146–150, 1956.
- [132] J.A. McFadden. The axis crossing intervals of random functions (part II). *IRE Trans. Inform. Theory*, IT-284 :14–24, 1958.
- [133] J.A. McFadden. The fourth product moment of infinitely clipped noise. *IRE Trans. Inform. Theory*, IT-4 :159–162, 1958.
- [134] S. McNamara, W.R. Young. Inelastic collapse and clumping in a one-dimensional granular medium. *Phys. Fluids A*, 4 :496–504, 1992.
- [135] R. Metzler, J. Klafter. The random walk's guide to anomalous diffusion : a fractional dynamic approach. *Phys. Rep.*, 339 :1–77, 2000.
- [136] T. Meyre. Etude asymptotique du temps passé par le mouvement brownien dans un cône. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 27 :107–124, 1991.

- [137] M. Mézard, G. Parisi, M.A. Virasoro. *Spin glass theory and beyond*. World Scientific, 1987.
- [138] G.M. Molchan. Maximum of a fractional Brownian motion : probabilities of small values. *Commun. Math. Phys.*, 205 :97–111, 1999.
- [139] R. Monasson. Structural glass transition and the entropy of the metastable states. *Phys. Rev. Lett.*, 75 :2847, 1995.
- [140] C. Monthus. *Etude de quelques fonctionnelles du mouvement brownien et de certaines propriétés de la diffusion unidimensionnelle en milieu aléatoire*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, 1995.
- [141] C. Monthus, H.J. Hilhorst. The pair correlation function in a randomly sequentially filled one-dimensional lattice. *Physica A*, 175 :263–274, 1991.
- [142] E.W. Montroll, M.F. Schlesinger. On the wonderful world of random walks. *Studies in statistical mechanics*, 11 :1, 1984.
- [143] S. Nanda, C.M. Newman, D.L. Stein. Dynamics of Ising spin systems at zero temperature. in *On Dobrushin's way (from probability theory to statistical physics)*, R. Minlos, S. Schlosman and Y. Suhov, eds. *Amer. Math. Soc. Trans.*, 198 :183–194, 2000.
- [144] C.M. Newman, D.L. Stein. Metastable states in spin glasses and disordered ferromagnets. *Phys. Rev. E*, 60 :5244–5260, 1999.
- [145] C.M. Newman, D.L. Stein. Zero-temperature dynamics of Ising spin systems following a deep quench : results and open problems. *Physica A*, 279 :159–168, 2000.
- [146] T.J. Newman, W. Loinaz. Critical dimensions of the diffusion equation. *Phys. Rev. Lett.*, 86 :2712–2715, 2001.
- [147] T.J. Newman, Z. Toroczai. Diffusive persistence and the sign-time distribution. *Phys. Rev. E*, 59 :R2685–R2688, 1998.
- [148] K. Oerding, S.J. Cornell, A.J. Bray. Non-Markovian persistence and non-equilibrium critical dynamics. *Phys. Rev. E*, 56 :R25, 1997.
- [149] R.G. Palmer, D.L. Stein, E. Abrahams, P.W. Anderson. Models of hierarchically constrained dynamics for glassy relaxation. *Phys. Rev. Lett.*, 53 :958–961, 1984.
- [150] A. Prados, J.J. Brey. Analytical solution of a one-dimensional Ising model with zero temperature dynamics. *Journ. Phys. A : Math. Gen.*, 34 :L453–L459, 2001.
- [151] V. Privman. Exact solution of a phase separation model with conserved order parameter dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 69 :3686, 1992.
- [152] S. Redner. *A guide to first-passage processes*. Cambridge University Press, 2001.
- [153] F. Ricci-Tersenghi, R. Zecchina. Glassy dynamics near zero temperature. *Phys. Rev. E*, 62 :R7567–R7570, 2000.
- [154] S.O. Rice. The mathematical analysis of random noise. *Bell Syst. Tech. J*, 23 :282–332, 1944.
- [155] S.O. Rice. The mathematical analysis of random noise. *Bell Syst. Tech. J*, 24 :46–156, 1945.
- [156] H. Risken. *The Fokker-Planck equation : method of solutions and applications*. Berlin : Springer, 1989.

- [157] M.A. Virasoro S. Franz. Quasi-equilibrium interpretation of aging dynamics. *Journ. Phys. A : Math. Gen.*, 33 :891–905, 2000.
- [158] P.S. Sahni, D.J. Srolovitz, G.S. Grest, M.P. Anderson, S.A. Safran. Kinetics of ordering in two dimensions. II. Quenched systems. *Phys. Rev. B*, 28 :2705–2717, 1983.
- [159] G. Samorodnitsky, M.S. Taqqu. *Stable non-Gaussian random processes*. Chapman & Hall, New-York, 1994.
- [160] W.R. Schneider, W. Wyss. Fractional diffusion and wave equations. *J. Math. Phys.*, 30 :134, 1989.
- [161] J.M. Schwarz, D.S. Fisher. Depinning with dynamics stress overshoots : mean-field theory. *Phys. Rev. Lett.*, 87 :096107, 2001.
- [162] J.M. Schwarz, R. Maimon. First passage exponent for higher-order random walks : using Lévy flights. *Phys. Rev. E*, 64 :016120, 2001.
- [163] K.L. Sebastian. Path integral representation for fractional Brownian motion. *Journ. Phys. A : Math. Gen.*, 28 :4305, 1995.
- [164] D. Sherrington, S. Kirkpatrick. Solvable model of a spin-glass. *Phys. Rev. Lett.*, 35 :1792–1796, 1975.
- [165] Y.G. Sinai. Distribution of some functionals of the integral of a random walk. *Theor. Math. Phys.*, 90 :219, 1992.
- [166] Y.G. Sinai. Statistics of shocks in inviscid Burgers equation. *Comm. Math. Phys.*, 148 :601–622, 1992.
- [167] C. Sire, S.N. Majumdar, A. Rudinger. New analytical results on random walk persistence. *Phys. Rev. E*, 61 :1258, 2000.
- [168] D. Slepian. The one-sided barrier problem for Gaussian noise. *Bell Syst. Tech. J.*, 41 :463–501, 1961.
- [169] G. De Smedt, C. Godrèche, J.M. Luck. Travail en cours.
- [170] G. De Smedt, C. Godrèche, J.M. Luck. Partial survival and inelastic collapse for a randomly accelerated particle. *Europhys. Lett.*, 53 :438–443, 2001.
- [171] G. De Smedt, C. Godrèche, J.M. Luck. Statistics of the occupation time for a class of Gaussian Markov processes. *Journ. Phys. A : Math. Gen.*, 34 :1247–1269, 2001.
- [172] G. De Smedt, C. Godrèche, J.M. Luck. Jamming, freezing and metastability in one-dimensional spin systems. *Eur. Phys. J. B*, 27 :363–380, 2002.
- [173] G. De Smedt, C. Godrèche, J.M. Luck. Metastable states of Ising chain with zero-temperature Kawasaki dynamics. *prépublication soumise à J. Phys. A*, 2002.
- [174] W.L. Smith. Renewal theory and its ramifications. *J. Roy. Soc. B*, 20 :243–284, 1958.
- [175] V. Spirin, P.L. Krapivsky, S. Redner. Fate of zero-temperature Ising ferromagnets. *Phys. Rev. E*, 63 :036118, 2001.
- [176] V. Spirin, P.L. Krapivsky, S. Redner. Freezing in Ising ferromagnets. *Phys. Rev. E*, 65 :016119, 2002.
- [177] F. Spitzer. Interaction of Markov processes. *Adv. Math.*, 5 :246, 1970.

- [178] D. Stauffer. Ising spinodal decomposition at  $t = 0$  in one to five dimensions. *Journ. Phys. A : Math. Gen.*, 27 :5029–5032, 1994.
- [179] F.H. Stillinger, T. A. Weber. Hidden structure in liquid. *Phys. Rev. A*, 25 :978–989, 1982.
- [180] W.Y. Tam, R. Zeitak, K.Y. Szeto, J. Stavans. First-passage exponent in two-dimensional soap froth. *Phys. Rev. Lett.*, 78 :1588–1591, 1997.
- [181] D.J. Thouless, P.W. Anderson, R.G. Palmer. Solution of ‘solvable model of a spin glass’. *Philos. Mag.*, 35 :593–601, 1977.
- [182] Z. Toroczkai, T.J. Newman, S. Das Sarma. Sign-time distribution for interface growth. *Phys. Rev. E*, 60 :R1115–R1118, 1999.
- [183] M. Vergassola, B. Dubrulle, U. Frisch, A. Nollez. Burger’s equation, devil staircases and the mass distribution for large scale structure. *Astron. Astrophys.*, 289 :325–356, 1994.
- [184] W. Vervaat. On a stochastic difference equation and a representation of non-negative infinitely divisible random variables. *Adv. Appl. Prob.*, 11 :50, 1979.
- [185] B. Widom. Random sequential addition of hard spheres to a volume. *J. Chem. Phys.*, 44 :3888–3894, 1966.
- [186] E. Wong. Some result concerning the zero-crossing of Gaussian noise. *SIAM J. Appl. Math.*, 14 :1246–1254, 1966.
- [187] G.P. Wong, R.W. Mair, R.L. Walsworth. Measurement of persistence in 1D diffusion. *Phys. Rev. Lett.*, 86 :4156–4159, 2001.
- [188] C. Yeung, M. Rao, R.C. Desai. Bounds on the decay of the autocorrelation in phase ordering dynamics. *Phys. Rev. E*, 53 :3073–3077, 1996.
- [189] B. Yurke, A.N. Pargellis, S.N. Majumdar, C. Sire. Experimental measurement of the persistence exponent of the planar Ising model. *Phys. Rev. E*, 56 :R40, 1997.
- [190] R.M. Ziff. Traces of the arrival history in the jammed state of random sequential adsorption. *Journ. Phys. A : Math. Gen.*, 27 :L657–L662, 1994.

## Résumé

Ce travail de thèse comporte deux parties largement indépendantes, qui s'intéressent chacune à un aspect de la physique des systèmes hors d'équilibre. Dans la première partie, nous étudions la statistique des événements persistants, qui permettent de caractériser le comportement temporel de nombreux systèmes, en particulier les systèmes de marche vers l'ordre par croissance de domaines. Notre axe d'étude consiste à reformuler le problème en termes de probabilités de premier retour et de distributions du temps d'occupation de processus stochastiques. Nous obtenons des résultats exacts pour une classe de processus gaussiens markoviens, ainsi que pour une particule soumise à une accélération aléatoire.

La généralisation de ces questions à des systèmes avec des contraintes géométriques ou cinétiques nous permet ensuite d'aborder la seconde partie. Celle-ci est consacrée à l'étude des états métastables dans différents modèles unidimensionnels de spins d'Ising à température nulle. Nous comparons la structure de l'ensemble des configurations gelées atteintes dynamiquement depuis une condition initiale désordonnée avec celle de l'ensemble 'thermodynamique' à la Edwards associé.

## Summary

This thesis is made of two independent parts, dealing with different aspects of the physics of out of equilibrium systems. In the first part, we study the statistics of persistent events, that characterize the temporal behavior of many systems such as coarsening systems. Our approach consists in rephrasing the problem in terms of first return probabilities and occupation time distributions. More precisely, we obtain exact results for a class of Gaussian Markov processes and for the random acceleration problem.

Generalizing these concepts to systems with kinetic or geometrical constraints allows us to move to the second part of this thesis. It deals with the study of metastable states in one dimensional Ising models at zero temperature. We compare the structure of the ensemble of frozen configurations reached dynamically from a disordered initial condition to that of the associated 'thermodynamical' ensemble *à la Edwards*.