

UNIVERSITE PARIS XI
CEA / SPHT

SERVICE DE PHYSIQUE THÉORIQUE

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : Cosmologie

présentée par :

Tristan BRUNIER

Recherche de signatures
d'une physique non-standard
dans les relevés cosmologiques

Sous la direction de Francis Bernardeau

soutenance ayant eu lieu le 27 octobre 2006 devant le jury composé de :

Prof. Francis BERNARDEAU
Prof. David LANGLOIS
Prof. Renaud PARENTANI
Prof. Jean-Loup PUGET
Dr. Jean-Philippe UZAN

Directeur de thèse
Rapporteur
Rapporteur
Président
Examineur

Remerciements

Je tiens à remercier Francis Bernardeau d'avoir accepté de m'initier au métier de chercheur. C'est dans un climat chaleureux qu'il a su aiguiller mes travaux de recherches en me faisant part de ses remarques et raisonnements, toujours pertinents. Je lui suis aussi particulièrement reconnaissant de la grande liberté d'initiative et de la confiance qu'il m'a accordées tout au long de mes trois années de thèse.

Un grand merci également à Jean-Philippe Uzan pour son dynamisme, sa disponibilité et son insatiable soif de comprendre et de transmettre.

J'ai eu la chance de travailler dans un laboratoire exceptionnel à tous égards et je remercie les directeurs successifs du S.Ph.T., messieurs Blaizot et Orland, de m'y avoir accueilli. La diversité des thématiques abordées ainsi que le niveau scientifique remarquable de l'ensemble de ses chercheurs contribuent grandement au dynamisme du S.Ph.T. . La qualité des conditions de travail doit aussi beaucoup à la compétence et à la gentillesse du personnel administratif et informatique et je tiens à saluer particulièrement Sylvie Zaffanella, Bruno Savelli, Anne-Marie Arnold et Oliver Croquin. Je remercie les chercheurs du S.Ph.T. avec lesquels nous avons discuté, de thèmes scientifiques ou non, et qui ont contribué à me rendre la vie au laboratoire plus agréable. Je pense notamment à Philippe Brax, Patrick Valageas, Christophe Grosjean, Géraldine Servant, Stéphane Lavignac, Marc Chemtob, Vincent Pasquier, Pierre Vanhove, Olivier Golinelli, Olivier Parcollet, Jean-Marc Luck, Jean-Yves Ollitrault. Je tiens à adresser un remerciement tout particulier à Kirone Mallick et sa gentillesse ineffable. C'est avec plaisir que j'ai partagé son bureau, son exceptionnelle culture, scientifique (mais pas seulement), ainsi que ses conversations attendrissantes avec Gabi.

Je voudrais remercier les thésards et postdocs du S.Ph.T. pour leur bonne humeur et leur convivialité. Les « anciens » : Gerhard Götz dont j'ai apprécié la rigueur et l'amitié, Nicolas Châtillon et son humour si particulier, Jérôme Rech et sa bonhomie, Stéphane Coulomb et son calme communicatif, Gregory Soyez, Cyrille Marquet. Filipe Moura ne manquait pas de participer aux discussions polémiques que nous avions régulièrement. Les « plus récents » : Pierre Hosteins et sa curiosité sans fin, Alexeï Andrianov ou la force tranquille, Cédric Delaunay et ses raisonnements pertinents, Nicolas Orantin, le héros des matrices, Cristian Vergu et Constantin Candu, prêts à discuter de sciences sans trêve, Loïc Esteve et son vocabulaire souvent très recherché. Je leur souhaite à tous bon courage pour la suite. Merci aussi aux bus du CEA qui nous ont permis, le temps d'un aller-retour au réfectoire, de disserter sur de si nombreux sujets.

J'ai eu la chance de collaborer avec Richard Woodard et Vakif Onemli. Je garde un très bon souvenir de cette collaboration. Je remercie Richard pour toute la pa-

tience et l'énergie dont il a fait preuve en répondant à mes innombrables questions et Vakif pour son calme, sa gentillesse et pour toutes les discussions agréables (scientifiques ou non) que nous avons eues. J'ai rencontré également lors de ma thèse de nombreuses personnes de grande valeur avec lesquelles j'ai interagi avec plaisir : Christos Charmousis, Renaud Parentani, Martin Bucher, Julien Serreau, Patrick Peter, Alain Riazuelo, Gilles Esposito-Farèse, Joseph Silk, Simon Prunet, Julien Lesgourgues, Rachel Jeannerot, Marieke Postma, Roberto Trotta et Karim Benabed. Je suis également reconnaissant à Jonathan Rocher, Carlo Schmid, Robin Zegers, Julien Larena, Matthieu Tristram, Jean-François Dufaux, Christophe Ringeval pour les éclairages qu'ils ont pu m'apporter.

Enfin, je remercie David Langlois et Renaud Parentani d'avoir accepté la lourde charge de rapporteurs ainsi que Jean-Loup Puget, Jean-Philippe Uzan et Francis Bernardeau, qui, en acceptant de faire partie du jury, ont cautionné le contenu scientifique de cette thèse.

Je tiens également à saluer le dynamisme et la compétence des personnes que j'ai eu la chance de croiser en monitorat. J'ai apprécié la gentillesse et le professionnalisme de Jérôme Leygnier, l'énergie et les bonnes idées de Daniel Comparat et Christophe Balland, et le travail commun réalisé avec Emmanuelle Peter et Nicolas Flagey. Je n'oublie pas Jean Rémond, l'homme providentiel. C'est avec plaisir que j'ai fait partie d'une autre équipe pédagogique très soudée et particulièrement sympathique encadrée par Renaud Parentani. Merci à Pierre Hosteins, Benoît Fauqué, Aurélien Gautreau, Cyprien Morize, Chloe Papineau et surtout à Olivier Guyétand, dont je salue l'investissement conséquent.

Ce travail de thèse n'aurait bien évidemment pas été possible sans la qualité des enseignements que j'ai reçus tout au long de mon parcours. Il serait bien long de citer tous les professeurs qui ont contribué à ma formation mais je suis particulièrement reconnaissant à René-Jean Champeau, pour son humanité et ses grandes qualités de pédagogue, et à Jihad Mourad, Pierre Binetruy et Bertrand Delamotte qui, tous trois, m'ont transmis les rudiments de la théorie des champs. Je garde bien sûr un très bon souvenir du DEA CPM dont Yves Charon a su faire un pôle d'excellence et d'ouverture, avec toute la volonté et le dynamisme qui le caractérisent, dans la vie comme sur les courts de tennis.

Je remercie aussi mes amis qui m'ont rendu ces trois années plus agréables en les ponctuant de soirées formidables. Je m'excuse auprès de ceux que j'ai délaissés pour les exigences de la science. Un grand merci au chaleureux « Club des Cachanais » : Franck, Lionel, Ewoke, Krack, Camarade Binôme, Juju, Laurent, Brassens, Vincent D., Sandra, Robin et Mireille, Michaël, Olivier Marnette, sans oublier leurs moitiés à part entière. Merci aussi aux amis de plus longue date : Olive, Ganar, Marianne

et Julien, Jooles et Delphine, le groupe Kwak, Nico B., l'hardi Ardi, Seb, Quent, Kindie, Nico Sto, Alex, Lionel qui peuvent être assurés de mon amitié. J'ai aussi une pensée pour Fanny, Elise et Alexandre avec lesquels j'ai passé de très bons moments.

Je suis reconnaissant à Claude et Agnès qui m'ont su m'entourer avec douceur. Mais je n'aurais rien fait de tout cela sans les valeurs que m'ont transmises mes parents, dans l'amour et la compréhension la plus subtile. Je leur dois une grande part de ce que je suis aujourd'hui. Un grand coucou à ma soeur Livia que j'aime tendrement même si je ne l'exprime que trop peu souvent.

Enfin, j'adresse mes dernières pensées à la femme qui illumine mon coeur chaque jour et qui a le don de construire, au quotidien, des autoroutes de bonheur. Merci infiniment.

Signatures d'une physique non-standard dans les relevés cosmologiques

Tristan Brunier

Résumé

Ce mémoire de thèse a pour objet l'étude de l'origine des grandes structures de l'univers et des signatures observables correspondantes. Il décrit l'évolution classique des perturbations puis les mécanismes quantiques les ayant générées.

L'évolution classique des inhomogénéités est décrite à l'aide de la théorie des perturbations cosmologiques. L'accent est mis sur les non-linéarités au deuxième ordre, susceptibles de révéler des effets fins, présents initialement ou induits par l'évolution.

Ces outils sont utilisés afin de relier la structure des inhomogénéités à celle des anisotropies de température et de polarisation du fond diffus cosmologique. Ils permettent une nouvelle interprétation physique du comportement des spectres de puissance, y compris aux grands ordres. L'effet d'une anisotropie dipolaire, d'origine statistique ou expérimentale, est examiné ainsi que le comportement de fluctuations de température non-gaussiennes d'origine primordiale.

Nous étudions par la suite les propriétés de champs quantiques en espace-temps courbe, en nous concentrant sur un espace de de Sitter. En particulier, nous caractérisons les effets de la renormalisation sur la masse des champs.

Les notions développées sont alors appliquées aux fluctuations quantiques pendant l'inflation. Les signatures spécifiques de certains modèles d'inflation montrent, en particulier, que des fluctuations non-gaussiennes peuvent naître des interactions entre plusieurs champs scalaires. Ces non-gaussianités sont caractérisées puis nous vérifions que les modèles proposés sont viables en calculant les corrections radiatives à la masse des champs.

Signatures of non-standard physics in cosmological surveys

Tristan Brunier

Abstract

This report focuses on the origin of large-scale structures of the universe and the corresponding observable signatures. We examine classical evolution of perturbations before studying quantum mechanisms which gave rise to them.

The classical evolution of inhomogeneities is described with the theory of cosmological perturbations. Special attention is paid to second-order non-linearities, which are likely to show up tiny effects, set up initially or induced by the evolution.

These tools are used to connect the structure of inhomogeneities to that of anisotropies of temperature and polarization of the cosmic microwave background. They allow a new physical interpretation of the power spectra behaviors, including high order effects. The effect induced by a dipolar anisotropy, of statistical or experimental nature, is examined as well as the behavior of non-Gaussian temperature fluctuations of primordial origin.

We then explore the properties of quantum fields in curved spacetime, focusing on de Sitter space. In particular, we characterize the consequence of renormalization on the field masses.

We finally apply these concepts to quantum fluctuations during inflation. We study the specific signatures of some inflationary models and show that non-Gaussian fluctuations may arise from interactions between several fields. These non-Gaussianities are characterized and we check that these models survive radiative corrections to field masses.

Table des matières

Introduction	13
1 Le scénario du Big-Bang chaud	17
1.1 L'univers observable	18
1.2 Modélisation de l'univers	21
1.3 Histoire de l'univers	28
1.4 Conclusions	37
2 Perturbations cosmologiques	39
2.1 Description des perturbations	41
2.2 Transformation de jauge	44
2.3 Quantités invariantes de jauge	49
2.4 Équations d'Einstein	55
2.5 Équations de conservation	60
2.6 Évolution des perturbations	62
2.7 Conclusions	70
3 Fond diffus cosmologique	71
3.1 Équation de Boltzmann libre	73
3.2 Décomposition du contraste de température	79
3.3 Terme de collision et polarisation	86
3.4 Interprétation	94
3.5 Spectre de puissance	104
3.6 Modulation dipolaire (article)	112
3.7 Fonctions de corrélation d'ordre plus élevé (article)	128
3.8 Conclusions	158
4 Théorie quantique des champs en espace-temps courbe	159
4.1 Généralités	161
4.2 Équations du mouvement	164
4.3 Quantification des champs	168
4.4 Développement adiabatique	173
4.5 Divergences et renormalisation de la théorie libre	176

4.6	Théorie quantique des champs en interaction	178
4.7	Application à un espace de de Sitter	185
4.8	Corrections radiatives à la masse d'un champ scalaire en de Sitter (article)	193
4.9	Conclusions	223
5	Inflation	225
5.1	Motivations	227
5.2	Mécanisme inflationnaire : évolution homogène	232
5.3	Évolution des perturbations	234
5.4	Nature quantique des fluctuations	236
5.5	Interprétation	244
5.6	Quelques réalisations explicites	247
5.7	Modèles à plusieurs champs scalaires	251
5.8	Non-gaussianités	255
5.9	Fonctions de corrélation d'un champ scalaire dans un espace de de Sitter (article)	268
5.10	Corrections radiatives à la masse des champs scalaires (article)	276
5.11	Effets de taille finie	294
5.12	Conclusions	295
A	Quantités géométriques perturbées	299
A.1	Généralités sur les perturbations de métrique	299
A.2	Perturbations au deuxième ordre	300
A.3	Perturbations dans un espace à symétrie maximale	301
A.4	Perturbations dans un espace FLRW	302
A.5	Tenseur énergie-impulsion	309
B	Transformation de jauge	311
B.1	Transformations de la métrique	311
B.2	Tenseur énergie-impulsion	313
C	Formalisme 3+1	315
C.1	Forme de la métrique	315
C.2	Interprétation géométrique	316
C.3	Équations d'évolution	316
C.4	Décomposition des perturbations	317
D	Opérateur de Liouville	319
D.1	Feuilletage 3+1	319
D.2	Opérateur de Liouville	320
D.3	Développement au deuxième ordre	320

E	Systèmes de coordonnées en de Sitter	323
E.1	Feuilletage euclidien	324
E.2	Feuilletage sphérique	324
E.3	Feuilletage hyperbolique	325
E.4	Feuilletage statique	325

Introduction

D'où venons-nous et où allons-nous? Voilà les questions les plus simples et les plus fondamentales que l'homme est en mesure de se poser. Les réponses que nous pouvons apporter à ces interrogations permettent de donner un "sens", à quelque niveau que ce soit. Mais ces réponses ne sont jamais définitives; toujours remises en question, elles sous-tendent une quête sans fin.

Le développement particulièrement impressionnant des sciences, notamment au cours du XXème siècle, nous apporte des éléments de réponses à l'échelle de l'univers observable. D'un côté, la cosmologie, entrée dans une ère de précision marquée par la mission *WMAP* et la future mission *Planck Surveyor*, semble converger vers un modèle concordant - *Modèle Standard de la cosmologie* - proposant une description fine des grandes structures de l'univers et de leur évolution. D'autre part, la physique des particules, après avoir posé un jalon relativement solide, le fameux *Modèle Standard de la physique des particules*, est à l'aube d'une nouvelle phase d'exploration de l'infiniment petit et l'infiniment "énergétique", que le *Large Hadron Collider* inaugurera aux alentours de 2008 et dont les résultats seront affinés, quelques années plus tard, par le *Linear Collider*.

La richesse de la science actuelle et future réside dans la quête de l'unité, réunissant les deux Modèles Standards, *i.e.* l'infiniment petit et l'infiniment grand. L'étude de la physique des particules en accélérateurs nous donne aujourd'hui accès à des énergies de l'ordre du TeV. La cosmologie, quant à elle, s'appuie sur le modèle du Big Bang chaud selon lequel l'univers, initialement chaud et dense, se refroidit au cours de son expansion. Observer le passé de l'univers revient donc à sonder des énergies plus élevées qu'aujourd'hui, comprises entre 10^{-4} eV et l'énergie de Planck 10^{19} GeV. Nous ne pouvons malheureusement pas décrire avec certitude les phénomènes impliquant des énergies supérieures à l'énergie de Planck, qui constitue un "horizon" au-delà duquel une nouvelle physique, unifiant mécanique quantique et relativité générale et dont nous ne possédons pas encore les clés, intervient. Indéniablement, la cosmologie offre une gamme d'énergie bien plus vaste que toute expérience terrestre. La contre-partie vient du fait que nous n'observons qu'un unique univers : contrairement aux expériences en laboratoire, nous n'avons aucun contrôle sur le processus d'évolution, l' "expérience", qui, pour des raisons évidentes, ne peut être reproduite.

L'introduction du paradigme inflationnaire dans les années 1980 constitue un pas

fondamental vers l'unité de la physique des particules et de la relativité générale. Le modèle de l'inflation prend en considération les phénomènes quantiques qui ont nécessairement présidés à la densité d'énergie quelques instants après le temps de Planck. En effet, à ces échelles d'énergie, l'univers, excessivement chaud et dense, est le siège de mécanismes quantiques violents et ne peut être décrit uniquement par la physique classique. Au-delà de la résolution de paradoxes inhérents au modèle du Big Bang chaud, le mécanisme de l'inflation, fondé sur l'évolution d'un champ scalaire dans un environnement gravitationnel, accorde une origine quantique aux inhomogénéités de notre univers. Notre interprétation des observations macroscopiques en a été profondément bouleversée, reposant désormais sur une description microscopique de la parcelle d'univers dont nous sommes issus. L'étude des grandes structures actuelles nous donne ainsi des indications sur les fluctuations quantiques primordiales. Afin d'établir un modèle robuste, il est indispensable de comprendre à la fois les phénomènes quantiques en champ gravitationnel fort et l'évolution gravitationnelle des structures.

Ce mémoire s'attache à décrire chacun de ces deux aspects. Bien qu'il ne prétende à l'exhaustivité sur aucun de ces sujets, tous deux complexes, l'accent est mis sur les points principaux nécessaires à la compréhension des phénomènes mis en jeu. Certaines parties proposent une interprétation nouvelle ou la mise en évidence de mécanismes particuliers, d'autres constituent des travaux originaux, publiés dans des revues spécialisées, d'autres, enfin, reprennent des résultats établis. Les premiers chapitres constituent une description de quelques outils propres à la cosmologie. Les chapitres suivants présentent et appliquent certaines notions de théorie quantique des champs, fondement de notre interprétation microscopique du monde.

Aux échelles cosmologiques observables, l'univers nous apparaît quasiment homogène et isotrope. Cette propriété, érigée en principe, nous permet de décrire son évolution à l'aide d'un modèle, proposé et étudié au début du XXème siècle par Friedman, Lemaître, Robertson et Walker. De façon générale en physique, imposer des symétries particulières à l'objet d'étude facilite grandement la modélisation. De façon étonnante, cette modélisation permet de rendre compte des principales étapes de l'histoire thermique de l'univers. Le chapitre d'introduction est consacré à la description de l'univers homogène et de son évolution.

Cependant, nos observations "proches" mettent en évidence des structures (galaxies, amas de galaxies, super-amas,...) qui brisent l'homogénéité de l'espace. Bien évidemment, cette brisure de symétrie est d'autant moins importante que les échelles concernées sont grandes. Rendre compte de l'existence de telles structures et de leur évolution requiert une modélisation plus fine que celle d'un univers homogène et isotrope : il est indispensable de décrire les perturbations cosmologiques. Bien que, dans la plupart des domaines de la physique, la définition de grandeurs perturbées soit relativement aisée, la notion de perturbations en relativité générale est plus délicate à traiter. Nous n'avons en effet accès qu'à un unique univers, ce qui soulève l'épineuse question du choix de la grandeur de référence, par rapport à laquelle

une perturbation se définit. Une fois ce problème résolu, nous devons faire face à l'invariance de la relativité générale sous les changements de coordonnées. En effet, les quantités perturbées ne possèdent une interprétation physique claire que dans un système de coordonnées donné, qui correspond à ce que l'on appelle un choix de jauge. Tout changement de coordonnées est, par conséquent, susceptible de modifier la signification d'une grandeur perturbée. Nous abordons ces difficultés dans le chapitre 2 qui traite de la théorie des perturbations cosmologiques.

Afin de tester un modèle, nous devons nous appuyer sur des observations. Parmi les observables de choix qui nous renseignent à la fois sur la genèse et l'évolution des inhomogénéités, les anisotropies de température du fond diffus cosmologique figurent en bonne place. Environ 400 000 ans après le temps de Planck, l'univers passe d'un état fortement ionisé, au point de piéger la lumière elle-même, à un état quasiment neutre permettant la libre propagation des photons. L'univers, précédemment opaque, devient alors transparent à la lumière. Cette transition a pour effet de produire un rayonnement quasiment isotrope, présent dans tout l'espace, que nous détectons sous la forme d'un bain de photons appelé *rayonnement fossile* ou *fond diffus cosmologique*. Dans un univers parfaitement homogène et isotrope, ce *rayonnement de fond cosmologique* est lui-même isotrope. Mais les inhomogénéités présentes depuis l'émission des photons jusqu'à leur réception génèrent de légères anisotropies dont la distribution dépend de nombreux autres facteurs et, en particulier, de la physique de l'univers primordial. Le chapitre 3 a donc pour objet de traiter précisément la statistique et l'évolution de ces anisotropies. Nous nous intéresserons non seulement aux fluctuations d'énergie des photons mais aussi à leur polarisation.

Les relevés cosmologiques, dont l'étude du fond diffus cosmologique est un exemple, nous renseignent sur les premiers instants de l'univers, au cours desquels les inhomogénéités sont nées de fluctuations quantiques. Dès lors, une description précise et cohérente de la mécanique quantique dans un espace-temps courbe apparaît fondamentale à la compréhension de l'univers primordial. Nous savons cependant que mécanique quantique et relativité générale ne pas conciliables au-delà de l'échelle de Planck. C'est pour cette raison que nous n'appliquerons qu'un formalisme effectif, dans lequel la géométrie n'est pas quantifiée, mais susceptible de fournir de bonnes indications sur les processus physiques à ces échelles d'énergie. Nous décrivons les outils, les concepts et les difficultés d'un tel traitement dans le chapitre 4. Une attention toute particulière est portée à un espace-temps donné, l'espace de de Sitter, qui modélise, en très bonne approximation, la phase d'expansion accélérée qu'a vraisemblablement connue l'univers primordial, et qui, en raison de ses très nombreuses symétries, propose une extension naturelle des concepts établis dans un espace-temps plat.

Enfin, nous appliquerons, dans le dernier chapitre, ces notions dans un cadre plus phénoménologique destiné à décrire en détail le mécanisme de l'inflation. Bien que relativement bien vérifiées, les prédictions de l'inflation restent peu contraignantes, de sorte que de nombreux modèles différents parviennent à s'accorder aux

observations. Seule une caractérisation précise de la distribution des inhomogénéités primordiales semble en mesure de discriminer certains modèles. En première approximation, cette distribution semble s'apparenter à une gaussienne, les mesures actuelles n'ayant pas encore mis en évidence une quelconque déviation à la gaussianité. Cependant, bien que faibles, les effets non-linéaires, propres à la gravitation et à la relativité d'Einstein, doivent nécessairement mettre en défaut l'hypothèse d'une distribution gaussienne des premières inhomogénéités. En vue de l'observation future de ces *non-gaussianités*, il semble impératif de mettre en relief les signatures spécifiques de différents modèles d'inflation afin d'en limiter le nombre. Seule une telle démarche, fondée à la fois sur des prédictions théoriques claires et des observations extrêmement précises, peut nous permettre d'affiner encore notre compréhension des premiers instants.

CHAPITRE 1

Le scénario du Big-Bang chaud

Sommaire

1.1	L'univers observable	18
1.1.1	Un univers homogène et isotrope	18
1.1.2	Un univers inhomogène et anisotrope	19
1.2	Modélisation de l'univers	21
1.2.1	Géométrie	21
1.2.2	Matière	23
1.2.3	Conséquences	23
1.3	Histoire de l'univers	28
1.3.1	L'univers primordial	29
1.3.2	De 100 MeV à l'équivalence	32
1.3.3	De l'ère de la matière à nos jours	34
1.4	Conclusions	37

La cosmologie est la science qui a pour objet l'étude de l'univers aux très grandes échelles, supérieures aux échelles galactiques. En ce sens, elle est complémentaire de l'astrophysique et de l'astronomie, dont les domaines d'étude s'appliquent aux structures galactiques et infra-galactiques.

Du fait de la vitesse finie de la lumière, regarder un objet lointain, c'est également observer un rayonnement émis lorsque la source était plus jeune. Par conséquent, l'examen des grandes structures de l'univers est indissociable de l'étude de leur évolution et de l'histoire de l'univers.

1.1 L'univers observable

Contrairement aux autres domaines de la physique, fondés sur des expériences reproductibles, la cosmologie n'est fondée que sur l'observation d'un unique univers dont on ne peut modifier les paramètres. La démarche du cosmologiste est donc similaire à celle d'un détective : il s'agit de reconstituer, par simple déduction, les différentes séquences d'une scène qui a déjà eu lieu. Il s'appuie donc sur des observations rigoureuses qu'il associe aux "mobiles" des différents intervenants, c'est-à-dire aux principes physiques sous-jacents qui régissent leur dynamique. Il construit dès lors un cadre d'interprétation, un modèle, sur lequel il base son interprétation.

Dans un premier temps, nous présentons le statut observationnel actuel de la cosmologie avant de détailler, par la suite, la structure mathématique qui permet de rendre compte des faits observés.

1.1.1 Un univers homogène et isotrope

Les premières observations du ciel s'appliquaient à déterminer la position exacte des étoiles, appartenant à notre galaxie, et à les regrouper en constellations. L'invention de la lunette astronomique par Galilée et le développement ultérieur des instruments d'optique ont grandement contribué aux observations des objets de notre système solaire et, plus largement, de notre galaxie. Dans les années 1920, l'étude des spectres d'objets mal résolus, appelés *nébuleuses*, révèle un décalage systématique vers le rouge [Slipher, 1915]. E. Hubble identifie par la suite ces nébuleuses comme étant des objets extra-galactiques (en fait d'autres galaxies) et propose alors une loi phénoménologique qui relie le décalage vers le rouge à la distance des objets lointains [Hubble, 1929]. Parallèlement à ces observations, Lemaître et Friedman proposent des modèles cosmologiques viables reposant sur les bases encore neuves de la relativité générale (voir par exemple [Einstein, 1917]). Ils parviennent à expliquer les observations de Slipher et Hubble à l'aide d'un modèle d'univers homogène et isotrope en expansion et établissent *le modèle du Big-Bang chaud*¹. Selon ce modèle, l'univers, au cours de son expansion, se refroidit, ce qui est équivalent à considérer qu'il était plus chaud et plus dense par le passé. Cette simple assertion conduit Gamov et Alpher [Gamov, 1946] [Alpher *et al.*, 1948] [Alpher & Herman, 1948] à formuler, quelques années plus tard, deux prédictions majeures :

- i) lorsque la densité d'énergie est suffisamment grande, pour une température de l'ordre de grandeur des énergies de liaison atomiques, tous les atomes sont ionisés et les interactions électromagnétiques sont telles que la lumière est piégée. Lorsque les atomes se "recombinent", les photons se propagent librement et forment un rayonnement de fond isotrope. Leur énergie doit alors se répartir

¹L'appellation "Big-Bang" fut introduite par Fred Hoyle qui, opposant farouche au modèle d'expansion cosmologique, cherchait à discréditer un tel modèle en l'affublant d'un nom jugé péjoratif.

suivant une loi de type *corps noir* dont la température caractéristique décroît avec l'expansion.

- ii) lorsque la densité d'énergie est telle que la température est de l'ordre des énergies de liaison nucléaires, les atomes ne peuvent pas se former et l'univers est principalement constitué de nucléons - protons et neutrons - à l'état libre. Lorsque la température chute, les éléments atomiques les plus légers sont synthétisés : c'est la *nucléosynthèse primordiale*. Il est alors possible de prédire l'abondance relative des ces éléments.

Le modèle du Big-Bang chaud s'est imposé définitivement lorsque ces deux prédictions ont été confirmées par les observations : le rayonnement fossile ou *fond diffus cosmologique* est mis en évidence en 1965 [Penzias & Wilson, 1965] [Dicke *et al.*, 1965] tandis que les observations de plus en plus précises des milieux galactiques et extra-galactiques confirment les prédictions de la nucléosynthèse primordiale.

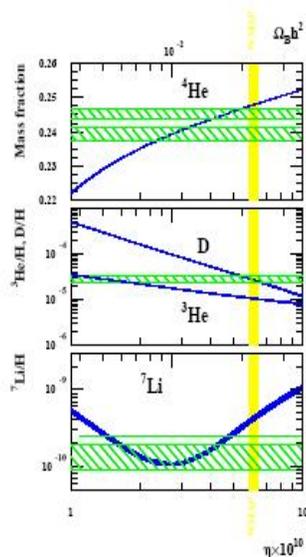


FIG. 1.1 – Prédications des modèles de nucléosynthèse primordiale (courbes bleues) et mesures de l'abondance relative des éléments légers (courbes vertes). Un léger désaccord subsiste avec les données de WMAP (courbe jaune). Courbe tirée de [Coc *et al.*, 2004].

1.1.2 Un univers inhomogène et anisotrope

La science en général cherche à simplifier son objet d'étude en le modélisant. Bien que l'approximation d'un univers homogène et isotrope permette d'établir un modèle particulièrement robuste, elle ne permet pas de rendre compte de l'ensemble des structures observées.

La matière visible semble se répartir en structures complexes multi-échelles : les galaxies, constituées d'environ 10^{12} étoiles, s'assemblent en amas de galaxies sous la forme de filaments ou de murs qui, eux-mêmes, s'assemblent en amas d'amas - ou *super-amas*. La gravitation étant la seule force qui ne soit pas écrantée à grande distance², c'est elle qui génère une telle distribution de matière (voir figure 1.2).

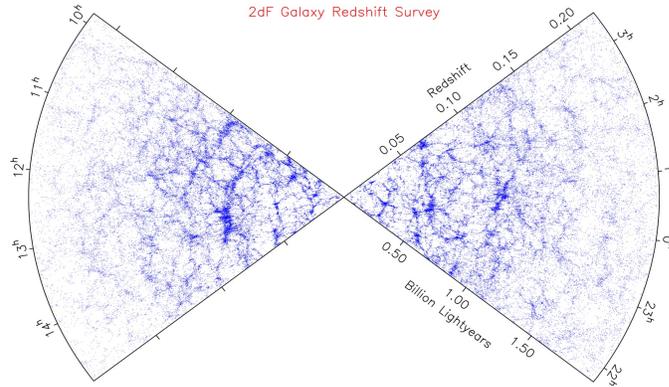


FIG. 1.2 – Distribution de matière mise en évidence par l'expérience 2dF. Issu de [2dF Galaxy Redshift Survey,].

L'étude des courbes de rotation des galaxies révèle une anomalie : tout se passe comme si les galaxies étaient constituées d'une matière non visible, répartie sous la forme d'un halo sphérique, la *matière noire* - par opposition à la matière *baryonique*³. Par ailleurs, la formation des structures observées n'est effectivement bien modélisée qu'en présence d'une part importante de matière noire. La première indication en faveur de l'existence de la matière noire est présentée par Zwicky dès 1930 [Zwicky, 1937].

D'autre part, le rayonnement électromagnétique, dominé par le fond diffus cosmologique, contribue, lui aussi, à la densité d'énergie de l'univers. Bien qu'isotrope en première approximation, ce rayonnement présente des anisotropies relatives de l'ordre de 10^{-5} (voir figure 1.3). L'étude de ces anisotropies, objet du chapitre 3, fournit de précieuses informations sur le contenu en matière et en énergie de l'univers.

Enfin, l'explosion des supernovae de type Ia, sortes de chandelles standards, nous permet de contraindre fortement la loi de Hubble aux très grandes échelles. Leur examen récent a montré que la principale composante énergétique de l'univers devait être attribuée à une *énergie sombre*, induisant une phase d'expansion accélérée de l'univers [Riess *et al.*, 1998] [Perlmutter *et al.*, 1999].

Toutes les observations actuelles semblent converger vers un modèle concordant, que l'étude des inhomogénéités et des anisotropies permet d'affiner (voir figure 1.4).

²Il n'existe pas de masse négative.

³Cet adjectif est particulièrement mal choisi puisque la matière "baryonique" est formée de baryons et de leptons.

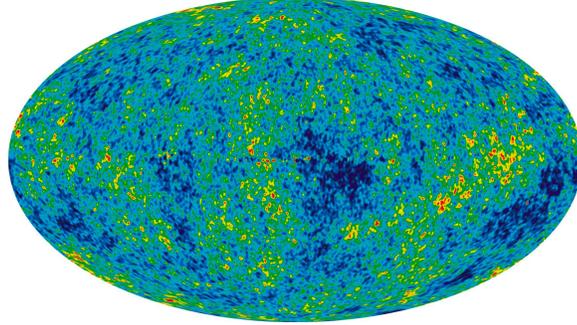


FIG. 1.3 – Anisotropies de température observées sur le ciel par la mission WMAP [The Wilkinson Microwave Anisotropy Probe,] (les fluctuations de température dans le plan galactique ont été déterminées par interpolation).

1.2 Modélisation de l'univers

Nous avons vu que la description d'un univers homogène et isotrope permettait de rendre compte du comportement global de l'espace-temps. Aux très grandes échelles, les observations semblent montrer que cette approximation est particulièrement bien vérifiée. Cette partie présente la modélisation de l'univers par un espace homogène et isotrope de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) [Friedman, 1922] [Friedman, 1924] [Lemaître, 1927] [Robertson, 1935] [Walker, 1936]. La description de l'évolution d'un tel espace requiert un traitement adapté à la fois de la géométrie et de la matière.

1.2.1 Géométrie

Métrique de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker

Nous supposons que l'espace-temps peut être représenté à l'aide d'une métrique $g_{\mu\nu}$ à quatre dimensions telle que l'élément de longueur invariant soit de la forme

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \omega_{ij} dx^i dx^j, \quad (1.1)$$

où ω_{ij} est la métrique des sections spatiales. Ces dernières sont maximales symétriques, de sorte que l'élément de longueur *spatial* s'écrit

$$\begin{aligned} dl^2 = \omega_{ij} dx^i dx^j &= \frac{dr^2}{1 - \mathcal{K}r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \\ &= d\chi^2 + f_{\mathcal{K}}^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Le paramètre dimensionné \mathcal{K} est relié à la courbure intrinsèque ${}^{(3)}R$ des sections spatiales puisque ${}^{(3)}R = D(D - 1)\mathcal{K}$ où D est la dimension de l'espace ($D = 3$ dans

notre cas). La fonction $f_{\mathcal{K}}(\xi)$ est donnée par

$$f_{\mathcal{K}}(\xi) = \begin{cases} \mathcal{K}^{-1/2} \sin(\chi\sqrt{\mathcal{K}}) & \text{si } \mathcal{K} > 0, \\ \chi & \text{si } \mathcal{K} = 0, \\ (-\mathcal{K})^{-1/2} \sinh(\chi\sqrt{-\mathcal{K}}) & \text{si } \mathcal{K} < 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Le temps t est appelé *temps cosmique* : c'est le temps mesuré par un observateur comobile, *i.e.* tel que ses coordonnées spatiales *comobiles* x^i soient constantes. Le facteur $a(t)$, appelé *facteur d'échelle* n'est fonction que du temps : le rapport $a(t_f)/a(t_i)$ indique dans quelle proportion l'espace s'est dilaté entre les instants t_i et t_f . Nous définissons les *coordonnées physiques* spatiales d'un observateur par $r^i = a(t)x^i$. Nous pouvons également décrire un événement à l'aide des coordonnées conformes. En effet, en introduisant le *temps conforme* η tel que $cdt = ad\eta$, l'invariant ds^2 prend la forme

$$ds^2 = a^2(\eta) [d\eta^2 - \omega_{ij}dx^i dx^j] . \quad (1.4)$$

Dans toute la suite, nous adopterons les conventions telles qu'un point représente une dérivation par rapport au temps cosmique tandis qu'un prime représente une dérivation par rapport au temps conforme.

Équations d'Einstein

La dynamique de l'univers est essentiellement régie par la gravitation, seule interaction connue qui puisse agir sur de grandes distances sans être écrantée. Plusieurs théories de la gravitation peuvent être envisagées. Bien que la mécanique newtonienne soit valable, en bonne approximation, aux petites échelles, nous utiliserons son extension, plus complète, à savoir la relativité générale d'Einstein, que nous supposerons valide à nos échelles d'énergie. Les équations d'Einstein prennent alors la forme

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad \text{avec} \quad \kappa = \frac{8\pi G}{c^4} . \quad (1.5)$$

Ici, $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ est le tenseur d'Einstein décrivant la géométrie, $T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion de la matière et Λ est la constante cosmologique. Le tenseur $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci dont la trace est le scalaire de courbure, noté $R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$. Les équations d'Einstein couplent donc les évolutions de la géométrie et de la matière.

Toutes les équations d'Einstein ne sont pas indépendantes puisque les identités de Bianchi assurent la conservation du tenseur d'Einstein ou, de façon équivalente, celle du tenseur énergie impulsion

$$D_{\mu}T^{\mu\nu} = 0 . \quad (1.6)$$

Ici, D_{μ} représente la dérivée covariante par rapport à la métrique FLRW. La forme des équations de conservation qui en découlent peut se révéler particulièrement utile.

1.2.2 Matière

En cosmologie, les échelles observées sont suffisamment grandes⁴ et les densités suffisamment faibles⁵ pour que la matière puisse être assimilée à un fluide. Dans un univers homogène et isotrope, ce fluide ne peut se comporter, pour des raisons de symétries, que comme un fluide parfait de sorte que son tenseur énergie-impulsion prenne la forme

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u_\mu u_\nu - \frac{P}{c^2} g_{\mu\nu} . \quad (1.7)$$

La vitesse moyenne du fluide u^μ , normalisée telle que $u^\mu u_\mu = c^2$, est nécessairement celle d'un observateur comobile et ne possède donc aucune composante spatiale $u^\mu = \delta_0^\mu$. La quantité ρ représente la densité d'énergie transportée par le fluide et P sa pression. Notons que, dans un espace homogène et isotrope, ces deux variables ne dépendent que du temps.

Afin de caractériser entièrement le fluide, nous devons imposer une équation d'état généralement choisie sous la forme⁶

$$\frac{P}{c^2} = w\rho . \quad (1.8)$$

La matière non-relativiste sous forme de poussières possède une pression négligeable aux grandes échelles de sorte que $w = 0$. La matière relativiste, telle que la radiation, est définie par $w = 1/3$ (voir par exemple [Diu *et al.*, 1989]). Dans ce qui suit, nous adoptons le système d'unité dans lequel $c = \hbar = 1$.

1.2.3 Conséquences

Cette partie a pour but de déterminer les principales conséquences propres à la modélisation précédente. Nous présentons successivement la loi de Hubble, les lois d'évolution des densités d'énergie, la notion d'horizon ainsi que les équations d'Einstein qui, appliquées à un espace homogène et isotrope, sont appelées équations de Friedman.

Loi de Hubble

La forme de la métrique (1.1) impose que deux observateurs comobiles, situés en x_1 et x_2 sont séparés par une distance physique dépendante du temps

⁴Le libre parcours moyen des particules doit être inférieur aux distances considérées de sorte que les propriétés de la matière puissent être lissées.

⁵La pression est alors elle-même faible et l'approximation fluide est valable.

⁶Une équation d'état linéaire est particulièrement simple à décrire et suffit à rendre compte des observations. Ce n'est cependant pas une forme générale et d'autres relations peuvent être étudiées. Par exemple, un gaz de Chaplygin possède une équation d'état de la forme $P/c^2 = \rho^{-1}$.

$d(t) = a(t)(x_2 - x_1)$. La vitesse à laquelle ils s'éloignent l'un de l'autre

$$v(t) = \dot{d}(t) = \frac{\dot{a}}{a} d(t) = H(t) d(t) \quad (1.9)$$

est alors proportionnelle à leur distance. Le facteur de proportionnalité est appelé *paramètre de Hubble* et vaut $H(t) = \dot{a}/a$.

Si l'un des observateurs émet un signal lumineux à la fréquence ν_e , l'autre observateur en mouvement à la vitesse v , recevra un signal à la fréquence ν_0 telle que

$$\frac{\nu_0 - \nu_e}{\nu_e} = -\frac{v}{c}. \quad (1.10)$$

En première approximation, le décalage vers le rouge, induit par effet Doppler, est proportionnel à la vitesse, elle-même proportionnelle à la distance entre les observateurs. Nous retrouvons, de fait, la loi de Hubble. Bien évidemment, la relation de proportionnalité (1.9) n'est valide que si l'on néglige la dépendance temporelle du paramètre de Hubble, ce qui n'est vrai que dans un petit domaine.

Cet effet Doppler peut se ré-écrire, pour deux observateurs infiniment proches et une fréquence rapide de l'onde, sous la forme

$$\frac{\dot{\nu}}{\nu} = -\frac{\dot{a}}{a}, \quad (1.11)$$

qui montre que la fréquence d'une onde décroît en a^{-1} . Nous définissons alors le *décalage spectral vers le rouge* z par

$$1 + z = \frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{1}{a}. \quad (1.12)$$

Il est alors particulièrement commode, pour des raisons observationnelles, de situer la date d'un événement passé en terme de décalage vers le rouge.

Évolution des densités d'énergie

La modélisation de l'univers observable par une métrique de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker permet de déterminer le comportement des densités d'énergie de différents fluides en fonction du facteur d'échelle.

Les équations de conservation du tenseur énergie-impulsion fournissent l'équation de continuité suivante :

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0. \quad (1.13)$$

Notons que cette équation de conservation s'applique non seulement au fluide cosmologique mais également, lorsque plusieurs fluides coexistent, à tout fluide particulier qui n'interagit que gravitationnellement avec son environnement. Il suffit alors de se donner l'équation d'état du fluide $P(\rho)$ pour en déduire l'évolution de la densité

d'énergie en fonction du facteur d'échelle. Pour de la poussière, $P = 0$ et la densité d'énergie varie comme $\rho \propto a^{-3}$. Ce comportement s'explique par un effet de dilution : dans un volume physique, qui croît comme a^3 , le nombre de particules est conservé. Leur densité numérique et donc leur densité d'énergie (principalement leur énergie de masse) décroît donc en a^{-3} . La matière relativiste, quant à elle, possède une pression donnée par $P = \rho/3$ ce qui implique une variation de la densité d'énergie en $\rho \propto a^{-4}$. Cette dépendance temporelle s'explique aisément car, à l'effet de dilution précédent, s'ajoute l'effet du décalage vers le rouge. L'énergie, proportionnelle à la fréquence et non plus à la masse, décroît alors en a^{-1} alors que le volume croît comme a^3 .

Cette différence de comportement entre la poussière et la matière relativiste montre que, dans un passé suffisamment lointain, la densité d'énergie était dominée par la radiation. L'*équivalence* est définie comme la date t_{eq} à laquelle les densités d'énergie sont égales

$$\rho_\gamma(t_{\text{eq}}) = \rho_m(t_{\text{eq}}) , \quad (1.14)$$

les indices m et γ étant respectivement associés à la matière et à la radiation.

Plus généralement, pour un fluide d'équation d'état constante $P = w\rho$, la densité d'énergie varie comme $\rho \propto a^{-3(1+w)}$.

La valeur $w = -1$ est particulièrement intéressante puisqu'elle correspond à une densité d'énergie constante ρ_Λ . Le tenseur énergie-impulsion s'apparente alors à un terme de constante cosmologique $T_{\mu\nu} = \rho_\Lambda g_{\mu\nu}$. Nous en déduisons que la constante cosmologique s'interprète de deux manières, suivant qu'elle appartient au terme géométrique ou au terme de matière. Nous choisirons, dans toute la suite, de l'intégrer au tenseur énergie-impulsion en posant $\rho_\Lambda = \Lambda/8\pi G$. Notons que les premiers instants de l'univers, $a \rightarrow 0$, n'ont pas pu être dominés par une pure constante cosmologique en présence de matière ou de radiation. Néanmoins, sous certaines conditions, un champ scalaire (fondamental ou composite) peut vérifier approximativement l'équation d'état d'une constante cosmologique tout en dominant la densité d'énergie dans l'univers primordial (voir chapitre 5).

De façon générale, les conditions de conservation d'énergie imposent une contrainte sur l'équation d'état de la forme $|P| \leq \rho$.

Enfin, nous pouvons définir la vitesse du son dans un fluide parfait par

$$c_s^2 = \frac{\dot{P}}{\dot{\rho}} . \quad (1.15)$$

Nous en déduisons la relation entre le paramètre w et la vitesse du son

$$\dot{w} = 3H(1+w)(w - c_s^2) . \quad (1.16)$$

Un fluide d'équation d'état constante vérifie donc $w = c_s^2$.

Notions d'horizon

La notion d'horizon est centrale en cosmologie puisqu'il faut comparer la vitesse de propagation d'un signal à la vitesse d'expansion de l'univers. On distingue, en général, deux types d'horizons : *l'horizon des particules* et *l'horizon des événements*.

L'horizon des particules est le lieu formé par l'ensemble des événements ayant déjà été observés par un observateur à la date t . Sa dimension comobile est exprimée sous la forme de l'intégrale

$$D_H^p = \int_{t_i}^t \frac{dt}{a(t)}, \quad (1.17)$$

où t_i est un instant initial pouvant valoir 0 ou $-\infty$ en fonction du contexte. L'intégrale n'est finie que pour une expansion suffisamment lente, par exemple $a \propto t^n$ avec $n < 1$.

L'horizon des événements est le lieu formé par l'ensemble des événements qui ont été, sont ou seront observables par un observateur donné. Sa taille comobile caractéristique est déterminée par la distance maximale parcourue par un signal lumineux émis en χ_0 à la date t_0

$$D_H(t_0) = \int_{\chi_0}^{\chi} d\chi' = \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{a(t)} = \int_{\eta_0}^{\eta_{\max}} d\eta. \quad (1.18)$$

Cette distance est finie si l'intégrale converge. Pour une expansion en loi de puissance, $a(t) \propto t^n$, la convergence est assurée par une expansion suffisamment rapide, caractérisée par la condition $n > 1$.

À titre illustratif, nous pouvons déterminer la taille de l'horizon des événements associé à une phase d'expansion de de Sitter. Une expansion de de Sitter est induite par une densité d'énergie constante, comme par exemple une constante cosmologique, ce qui impose un paramètre de Hubble constant, c'est-à-dire une expansion exponentielle $a(t) = a_0 e^{Ht}$ de l'univers. Dans ce cas, la taille de l'horizon comobile décroît avec l'instant t_0 et vaut $D_H(t_0) = [a(t_0)H]^{-1}$. La taille physique de l'horizon des événements est donc constante, de valeur $a(t_0)D_H = H^{-1}$.

Équations de Friedman

L'application des équations d'Einstein dans un espace FLRW fournit les équations de Friedman

$$H^2 + \frac{\mathcal{K}}{a^2} = \frac{\kappa}{3} \sum_i \rho_i, \quad (1.19)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 + \frac{\mathcal{K}}{a^2} = -\kappa \sum_i P_i, \quad (1.20)$$

qui se ré-écrivent en temps conforme

$$\mathcal{H}^2 + \mathcal{K} = \frac{\kappa}{3} a^2 \sum_i \rho_i, \quad (1.21)$$

$$2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 = -\kappa a^2 \sum_i P_i, \quad (1.22)$$

où le paramètre de Hubble conforme vaut $\mathcal{H} = a'/a$. Nous avons décomposé la densité d'énergie totale (respectivement la pression totale) en la somme des densités d'énergie (respectivement des pressions) particulières de chacun des fluides

$$\begin{aligned} \rho_{\text{tot}} &= \sum_i \rho_i, \\ P_{\text{tot}} &= \sum_i P_i = \sum_i w_i \rho_i. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Remarquons que la courbure semble se comporter comme un fluide d'équation d'état $P = -\rho/3$, avec $\rho = -3\mathcal{K}/(\kappa a^2)$, et peut, par conséquent, être incorporée aux éléments du tenseur énergie-impulsion⁷. En combinant les équations de Friedman, nous obtenons l'équation de Raychauduri

$$\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{2} \sum_i \left(\frac{1}{3} + w_i \right) \rho_i, \quad (1.24)$$

qui exprime l'évolution de l'accélération du facteur d'échelle. L'expansion est dite *accélérée* lorsque $\ddot{a} > 0$, c'est à dire lorsque l'équation d'état du fluide cosmologique est telle que $P_{\text{tot}} < -\rho_{\text{tot}}/3$.

Lorsque l'univers est dominé par un fluide d'équation d'état constante $P = w\rho$, les équations d'Einstein permettent de déterminer le comportement du facteur d'échelle avec le temps

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3(1+w)}}, \quad (1.25)$$

soit, en temps conforme

$$a(\eta) \propto \eta^{\frac{2}{1+3w}}. \quad (1.26)$$

Néanmoins, l'équation d'état du fluide cosmologique est en général dépendante du temps puisque chaque fluide - possédant sa propre équation d'état - contribue en rapport de sa densité d'énergie, qui dépend du temps.

Afin de travailler avec des quantités adimensionnées, il est utile de normaliser la première équation de Friedman par la *densité critique*, dépendante du temps

$$\rho_c = \frac{3H^2}{\kappa} \quad (1.27)$$

⁷La densité d'énergie associée à la courbure peut prendre des valeurs négatives et conduire à une recontraction de l'univers.

de sorte que l'équation (1.19) s'écrive sous la forme

$$\sum_i \Omega_i = 1 \quad \text{avec} \quad \Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}. \quad (1.28)$$

Notons que nous avons absorbé le paramètre de courbure $\Omega_K = -\mathcal{K}/(a^2 H^2)$ dans la somme.

Si H_0 et Ω_i^0 sont respectivement le paramètre de Hubble et les *paramètres cosmologiques* mesurés aujourd'hui, nous obtenons

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \sum_i \Omega_i^0 (1+z)^{3(1+w_i)}. \quad (1.29)$$

La dynamique de l'univers ne dépend donc que des paramètres cosmologiques et du paramètre de Hubble mesurés aujourd'hui ainsi que des différentes équations d'état des fluides. La figure 1.4 indique les contraintes observationnelles sur les paramètres cosmologiques.

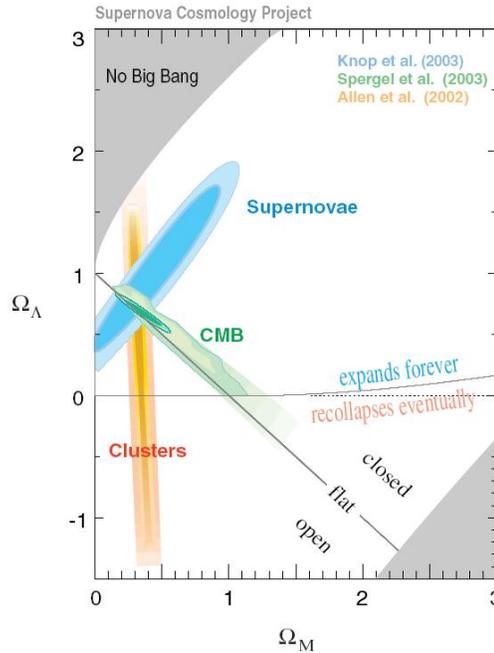


FIG. 1.4 – Contraintes sur le contenu énergétique de l'univers obtenues à partir de diverses fenêtres observationnelles. Figure extraite de [SCPwebsite,].

1.3 Histoire de l'univers

Nous sommes désormais en mesure de proposer un scénario pour l'évolution de l'univers. Compte-tenu des différents comportements des densités d'énergie de cha-

cun des fluides présentés, nous nous attendons à ce que l'univers soit dominé successivement par la radiation, la matière, la courbure puis la constante cosmologique. Néanmoins, il s'avère que les premiers instants semblent être dominés par un champ scalaire dont l'équation d'état se rapproche de celle d'une constante cosmologique (voir chapitre 5) tandis que la courbure est négligeable, *i.e.* la densité d'énergie est proche de la densité critique.

Nous proposons dans ce qui suit un tour d'horizon de l'histoire de l'univers depuis les premiers instants accessibles jusqu'à nos jours. De plus amples détails peuvent être trouvés dans [Kolb & Turner, 1990] [Padmanabhan, 1993] [Peebles, 1993] [Peacock, 1998].

1.3.1 L'univers primordial

Ne possédant pas les outils adaptés, nous ne pouvons pas décrire la physique lorsque l'énergie caractéristique de l'univers est supérieure à l'énergie de Planck. À ces échelles d'énergie, nos modèles de physique microscopique cessent d'être valides au profit d'une théorie qui reste encore à établir.

Lorsque la densité d'énergie est comprise entre 10^{72} GeV⁴ et 10^{40} GeV⁴, l'univers connaît vraisemblablement une phase d'expansion accélérée, appelée *inflation*. Cette phase est introduite afin de résoudre certains paradoxes inhérents au modèle du Big-Bang chaud et que nous exposons dans le chapitre 5. Alors que le facteur d'échelle croît quasiment exponentiellement, les fluctuations quantiques, dont la faible amplitude n'est cependant pas négligeable, sèment les germes des premières inhomogénéités. L'origine à la fois de l'expansion accélérée et des inhomogénéités est alors attribuée à un champ scalaire, composite ou élémentaire⁸.

Il n'est pas non plus exclu qu'à ces échelles d'énergie se produisent une ou plusieurs transitions de phase, similaires à celles subies par un corps pur que l'on refroidit. Une telle transition de phase pourrait être induite, par exemple, par la brisure d'un groupe de symétrie associé à la physique des particules. Un tel mécanisme pourrait être responsable de la formation de *défauts topologiques* (voir encadré page 30).

⁸Notons qu'aucun champ scalaire élémentaire n'a encore été mis en évidence bien que de forts soupçons reposent sur le boson de Higgs.

Mécanisme de formation de défauts topologiques

Prenons l'exemple illustratif de la brisure d'un groupe de jauge abélien $U(1)$. Nous considérons donc un champ scalaire complexe φ ainsi qu'un champ de jauge vectoriel A^μ dont la dynamique est régie par le lagrangien suivant

$$\mathcal{L} = \mathcal{D}_\mu \varphi \mathcal{D}^\mu \varphi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - V(\varphi) . \quad (1.30)$$

La dérivée covariante est définie par

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu , \quad (1.31)$$

où e est la constante de couplage du champ scalaire avec le champ électromagnétique A_μ . Le terme cinétique pour le champ de jauge fait intervenir la forme antisymétrique

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \quad (1.32)$$

Le potentiel du champ scalaire est un potentiel de Higgs de sorte que

$$V(\varphi) = \frac{\mu^2}{2} |\varphi|^2 + \frac{\lambda}{4} |\varphi|^4 , \quad (1.33)$$

avec $\lambda > 0$. Le signe du terme de masse dépend de la température T : il est positif lorsque la température est supérieure à une température critique T_c , caractéristique de la transition de phase, et négatif sinon de sorte que $\mu^2 \propto T - T_c$. Ainsi, pour des températures suffisamment élevées, le potentiel atteint son minimum nul pour $\varphi = 0$. Lorsque la température est inférieure à la température de transition, les minima du potentiel, de valeur $-\mu^4/(2\lambda)$, sont définis par les valeurs du champ telles que $|\varphi| = \sqrt{-\mu^2/\lambda}$ et présentent une dégénérescence, on parle de *brisure de symétrie*. La phase du champ prend alors des valeurs différentes en différents points de l'espace et varie sur des distances de l'ordre de la longueur de corrélation.

De ce fait, certaines configurations sont susceptibles de présenter des singularités, des *défauts topologiques*. En particulier, dans le cas de la brisure d'un groupe de jauge $U(1)$, il est possible de trouver des chemins fermés le long desquels la phase varie continûment de θ à $\theta + 2n\pi$. En cherchant à contracter cette boucle sur elle-même, nous voyons que la phase est mal définie en un point qu'elle encercle, à moins que le champ ne prenne une valeur nulle, correspondant ainsi à un maximum local du potentiel, donc de la densité d'énergie. L'ensemble de ces singularités constitue une *corde cosmique*, propre à la brisure d'un groupe de jauge $U(1)$.

Bien qu'aucun défaut topologique n'ait encore été identifié comme tel, il est possible que de tels mécanismes aient joué un rôle dans la formation des structures, générant naturellement des inhomogénéités primordiales. Les observations du fond diffus cosmologique contraignent cependant les défauts topologiques à jouer un rôle relativement mineur dans la genèse des perturbations de densité primordiales.

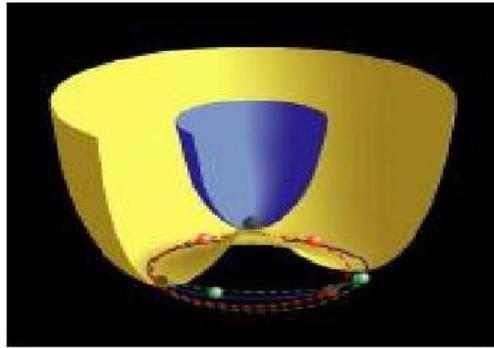


FIG. 1.5 – Potentiel de Higgs pour un champ scalaire complexe. Lorsque la température est suffisamment élevée, le minimum du potentiel est obtenu pour une valeur nulle du champ (en bleu sur la figure). À plus basse température, les minima du potentiel sont dégénérés (potentiel représenté en jaune) et la phase du champ peut prendre différentes valeurs. Un tel mécanisme peut être responsable de la formation de défauts topologiques. Cette figure provient de [Rocher, 2005].

Parallèlement à cela, plusieurs mécanismes doivent intervenir dans l'univers primordial. Afin d'expliquer la prédominance de la densité d'énergie des baryons sur celle de l'anti-matière associée dans l'univers actuel, il faut invoquer un processus susceptible de générer une asymétrie entre la matière et l'antimatière : la *baryogénèse* (voir par exemple [Riotto & Trodden, 1999]). Cette asymétrie pourrait être liée à une brisure de symétrie de même type que celle exposée dans le paragraphe précédent. Certains modèles de baryogénèse expliquent l'asymétrie entre baryons et anti-baryons à l'aide d'un mécanisme de *leptogénèse*, indispensable pour expliquer l'asymétrie électron-positrons.

La fin de l'inflation est caractérisée par une phase de *réchauffement* au cours de laquelle la densité d'énergie considérable contenue dans le vide est convertie en particules relativistes, dont les produits de la désintégration constituent les particules actuellement observées. La température est alors supérieure à 10^{10} GeV. En supposant que la matière relativiste évolue par la suite en équilibre thermique, nous pouvons définir une température thermodynamique T telle que la densité d'énergie

prenne la forme

$$\rho = \frac{\pi^2}{30} N(T) (k_B T)^4 . \quad (1.34)$$

La fonction $N(T)$ caractérise le nombre de degrés de liberté, c'est-à-dire le nombre d'états d'hélicité, des particules relativistes

$$N(T) = \sum_{\text{baryons}} g_B + \frac{7}{8} \sum_{\text{fermions}} g_F . \quad (1.35)$$

Un facteur $N(T)$ constant caractérise une évolution adiabatique pendant laquelle la température décroît en $T \propto a^{-1}$. Au cours du refroidissement de l'univers, lorsque l'énergie de certaines particules avoisine leur énergie de masse, ces dernières, devenue non-relativistes, ne contribuent plus au facteur $N(T)$ et la température chute brutalement d'un saut discret.

Enfin, lorsque les taux de collision de certains processus, qui traduisent l'efficacité de la thermalisation des particules, sont trop faibles pour compenser la dilution des espèces due à l'expansion, certaines particules se découplent des autres. Elles évoluent alors indépendamment et conservent par la suite leur distribution au moment du découplage, si ces particules sont stables et si aucun apport d'énergie n'intervient ultérieurement. Cette distribution est en général celle d'un corps noir.

Ce mécanisme de découplage s'applique à de nombreuses espèces au cours de l'évolution de l'univers. Les gravitons, du fait de leurs faibles interactions, ont dû se découpler très tôt, fournissant ainsi un *rayonnement de fond d'ondes gravitationnelles* encore à détecter mais qui apparaît déjà comme le plus ancien des rayonnements. Une autre espèce dont le découplage est précoce est formée par la matière noire dont les particules doivent être, en majeure partie, non-relativistes afin d'expliquer la dynamique des galaxies. Cette *matière noire froide* constitue environ un tiers de la densité totale d'énergie. Plus tard, les neutrinos puis les photons, après leur découplage respectif, forment des rayonnements de fond distribués suivant une loi de corps noir.

1.3.2 De 100 MeV à l'équivalence

Lorsque la température atteint une centaine de MeV, le plasma quarks-gluons se condense en nucléons - protons et neutrons. L'énergie de cette transition est légèrement inférieure à l'énergie de masse des nucléons en raison des interactions encore importantes avec les autres espèces. En-deçà de ces énergies, notre description microscopique de la matière, établie par des expériences en accélérateurs de particules, s'applique parfaitement et notre compréhension de l'évolution thermique de l'univers s'affine.

Pour des températures de l'ordre d'une dizaine de MeV, les seules particules encore en interaction sont les photons, les neutrinos, les électrons et positrons ainsi que les protons et les neutrons.

Ce sont les neutrinos, qui ne sont soumis qu'à l'interaction faible, qui se découplent les premiers vers 1 MeV, c'est-à-dire pour un décalage vers le rouge de l'ordre de $z_\nu \simeq 3.10^9$. Les neutrinos forment vraisemblablement aujourd'hui un rayonnement de corps noir à la température d'environ 1,95 eV (voir par exemple [Kolb & Turner, 1990]).

Lorsque la température atteint 511 keV, c'est-à-dire l'énergie de masse des électrons et de leurs antiparticules, les positrons, l'annihilation de ces particules n'est plus compensée par des créations de paires de particules. Une telle annihilation s'accompagne de l'émission de photons γ et réchauffe légèrement le fluide de photons par rapport au fluide de neutrinos, déjà découplés. Le fait que nous observions aujourd'hui un monde encore constitué d'électrons et non de positrons provient d'une légère asymétrie matière-antimatière dont le mécanisme n'est pas tout à fait élucidé.

Les nucléons peuvent s'agencer en noyaux atomiques lorsque, vers une centaine de keV, la température descend sous les énergies de liaison typiques dans les noyaux. Les noyaux les plus légers sont alors formés pendant une phase que l'on appelle *nucléosynthèse primordiale* et caractérisée par un décalage spectral vers le rouge de l'ordre de $z_{\text{nucl}} \simeq 3.10^8$. L'abondance des éléments légers ainsi formés dépend de nombreux paramètres parmi lesquels la durée de vie du neutron ou le rapport des densités de baryons et de photons. Ce dernier paramètre agit notamment sur le moment exact du début de la nucléosynthèse puisqu'une densité élevée de photons correspond, en raison des interactions, à une nucléosynthèse tardive⁹. La prédiction des abondances relatives des éléments légers puis sa vérification expérimentale précise en font l'un des piliers du modèle du Big-Bang chaud et contraint sévèrement la plupart des scénarii exotiques.

Lorsque la température décroît encore, seuls les photons et les baryons non-relativistes sont couplés et soumis aux forces opposées que sont la gravitation et la pression de radiation. Il en résulte un phénomène d'oscillation du plasma.

La densité d'énergie de la radiation diminuant plus vite - d'un facteur $a(t)$ - que celle de la matière non-relativiste, nous définissons l'*équivalence* par la date où ces deux densités d'énergie sont égales, soit

$$\Omega_{\text{rad}}^0(1 + z_{\text{eq}}) = \Omega_m^0, \quad (1.36)$$

⁹C'est ce qui explique que la nucléosynthèse se produise à des énergies de l'ordre de 100 keV et non du MeV.

ce qui correspond approximativement à un décalage spectral $z_{\text{eq}} \sim 10^4$. La détermination exacte de cette date dépend en particulier de la densité de matière noire et de neutrinos.

1.3.3 De l'ère de la matière à nos jours

Après l'équivalence, lorsque la température chute sous les énergies de liaison atomiques, les électrons libres peuvent s'assembler aux noyaux légers afin de constituer des atomes neutres. Cette phase est appelée *recombinaison* bien qu'il ne s'agisse à proprement parler que d'une combinaison. La température est alors trop faible pour ioniser à nouveau ces atomes. Bien que l'énergie de liaison d'un atome d'hydrogène soit de l'ordre de 13,6 eV, la recombinaison n'a lieu qu'à des énergies de l'ordre de 0,2 eV (soit environ 3300 K) en raison de la forte densité de photons, qui a pour effet d'augmenter considérablement le taux de collisions. La température de la recombinaison correspond à un décalage vers le rouge de l'ordre de $z_{\text{rec}} \simeq 1200$.

Après la recombinaison, le taux de collisions impliquant les photons chute brutalement puisqu'ils ne peuvent interagir avec les atomes désormais neutres. Les photons se découplent alors de la matière baryonique à $z_{\text{dec}} \simeq 1100$, l'univers est *transparent* aux photons qui se propagent librement et constituent un rayonnement électromagnétique de fond, un bain thermique désigné sous les différentes appellations *fond diffus cosmologique*, *rayonnement fossile* ou *CMB*¹⁰. Le lieu des points où les photons ont diffusé sur les électrons pour la dernière fois forme approximativement une coquille sphérique autour de nous, d'épaisseur très faible, appelée *surface de dernière diffusion*. Ce fond diffus cosmologique est quasiment isotrope et représente la plus ancienne image électromagnétique de l'univers que l'on puisse observer.

Fond diffus cosmologique

Concentrons-nous davantage sur ce rayonnement fossile que nous étudierons en détail dans le chapitre 3. Le rayonnement de fond cosmologique se présente sous la forme d'un corps noir quasi-parfait, à condition que le plasma soit thermalisé au moment du découplage, ce qui est vérifié en très bonne approximation. L'expansion de l'univers ne modifie pas la forme de la distribution énergétique des photons mais contraint sa température moyenne à décroître comme a^{-1} .

En revanche, nous nous attendons à ce que le rayonnement de fond ne soit pas parfaitement isotrope.

Pour des raisons cinématiques, tout d'abord, nous ne sommes pas au repos par rapport au fluide de photons. Il faut, par exemple, prendre en compte les mouvements

¹⁰ *Cosmic Microwave Background.*

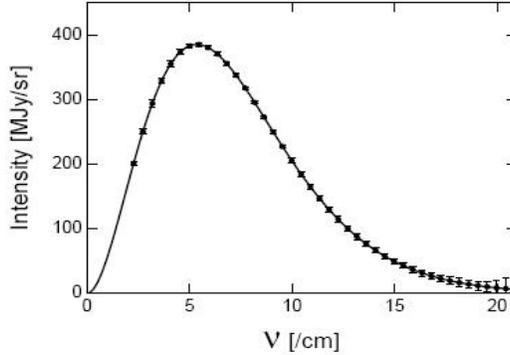


FIG. 1.6 – Intensité du rayonnement fossile en fonction de la fréquence. Les mesures ont été effectuées par l’expérience FIRAS embarquée sur le satellite COBE. La courbe obtenue s’identifie parfaitement à celle d’un corps noir : les barres d’erreur correspondent à 400σ . Cette figure est extraite de [Smooot, 1997].

de rotation de la Terre, du Système Solaire et de la Voie Lactée, qui, par effet Doppler, contribuent à une anisotropie dipolaire.

D’autre part, les photons, sensibles aux interactions électromagnétiques, nous parviennent vraisemblablement après avoir subi, le long de leur trajet, des diffusions avec la matière baryonique ionisée. Sur leur parcours jusqu’à nous, les photons traversent parfois des gaz relativement chauds qui contiennent de la matière ionisée. Les contributions les plus importantes proviennent des effets *Sunyaev-Zel’dovich thermique et cinétique*, qui déforment le spectre de corps noir tout en induisant des écarts à l’isotropie du rayonnement [Zel’dovich *et al.*, 1969] [Zel’dovich & Sunyaev, 1969]. L’effet Sunyaev-Zel’dovich thermique consiste en un réchauffement du gaz de photons par un gaz d’électrons chauds, au repos dans le référentiel lié au CMB. Quant à l’effet Sunyaev-Zel’dovich cinétique, il caractérise un réchauffement lié à l’interaction avec des électrons relativiste, en mouvement par rapport au fluide de photons.

Enfin, il existe d’autres effets contribuant à la distribution des photons du fond diffus cosmologique. L’effet *free-free* en est un exemple et correspond à la diffusion d’électrons libres sur des particules chargées résultant en l’émission de photons.

Si l’on désire examiner les phénomènes physiques intervenant *avant* la surface de dernière diffusion, il est par conséquent indispensable de s’affranchir de ces effets en les prenant en compte précisément.

Formation des structures

Au cours de l’évolution ultérieure de l’univers, la densité d’énergie associée à la radiation devient négligeable devant celle de la matière. La pression de radiation ne compense plus les effets gravitationnels et les structures peuvent s’accréter. Des observations récentes semblent mettre en évidence des oscillations “acoustiques” pré-

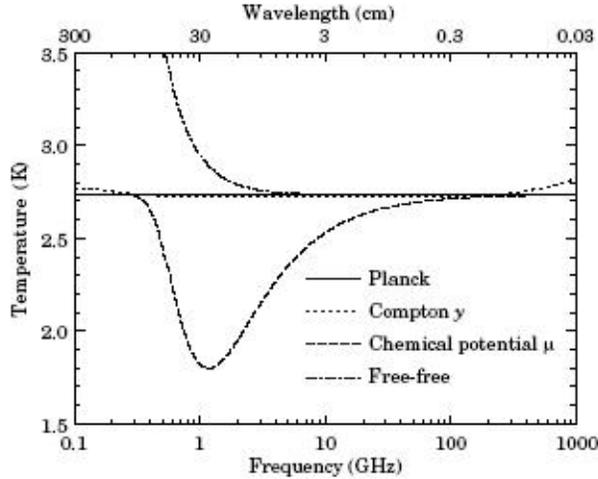


FIG. 1.7 – Distorsions spectrales attendues par rapport à une distribution de type corps noir. Figure issue de [Smoother, 1997].

sentes dans la distribution de matière et attribuées aux oscillations du plasma avant le découplage des photons.

La distribution des structures dépend principalement des perturbations de densité primordiales générées pendant la phase d'inflation. Ce n'est qu'à partir de ces germes initiaux que la matière s'accrète dans les puits de potentiel. Les outils nécessaires à la description d'un tel mécanisme font intervenir la gravitation jusqu'à ce que, aux petites échelles, les effets de la pression ne soient plus négligeables.

L'effondrement des structures sur elles-mêmes s'accompagne de la formation d'étoiles. Bien qu'au niveau cosmologique, les échelles stellaires soient négligeables, elles contribuent de façon particulièrement importante à plusieurs aspects de la cosmologie. Les étoiles, fonctionnant sur le principe de la fusion nucléaire, permettent la synthèse de noyaux de plus en plus lourds. En particulier, les premières étoiles, dites de *Population III*, modifient les abondances relatives des éléments légers prédites par la nucléosynthèse primordiale. On parle alors de *nucléosynthèse stellaire*. D'autre part, à cette formation de structures s'associe un rayonnement qui peut posséder une composante relativement énergétique. Il est probable qu'un tel rayonnement ait réionisé, dans une période récente, l'univers initialement neutre, contribuant à ce que l'on appelle la *ré-ionisation*. La matière baryonique de l'univers actuel est alors majoritairement sous forme ionisée. La date exacte de ce processus n'est pas connue précisément. Les études des relevés cosmologiques - notamment l'application du test de Gunn-Peterson aux spectres d'émission des quasars¹¹ et les anisotropies du fond

¹¹Le rayonnement des quasars, dont les plus lointains se situent à un décalage spectral $z \sim 6$,

diffus cosmologique¹² - et la compréhension de la physique stellaire doivent être combinées afin d’obtenir une contrainte “raisonnable” sur la date de la réionisation, aujourd’hui estimée à un décalage vers le rouge¹³ $6 < z_{\text{reion}} < 17$.

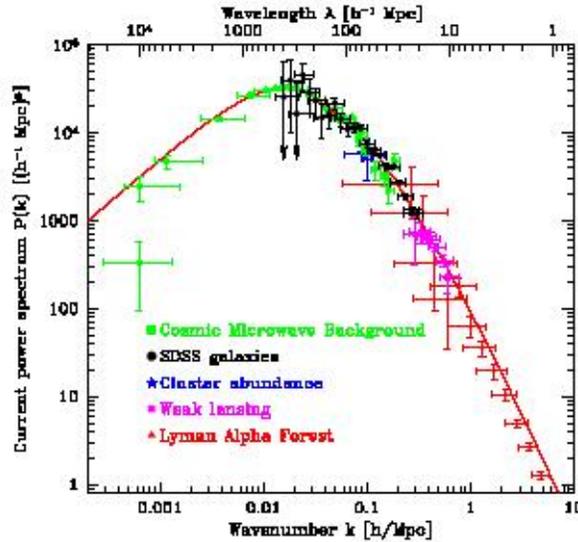


FIG. 1.8 – Spectre de puissance pour la matière mesuré par plusieurs expériences. Figure extraite de [Tegmark *et al.*, 2004].

1.4 Conclusions

Nous avons présenté les principaux éléments sur lesquels se fonde le scénario du Big-Bang chaud. L’hypothèse d’homogénéité et d’isotropie de l’espace induit une description mathématique relativement simple de la structure de l’univers et de son évolution. Nous avons ainsi pu reconstruire l’histoire supposée de notre univers.

Outre l’évolution globale d’un univers homogène, nous cherchons également à comprendre la genèse et l’évolution des structures. Leur origine provient vraisem-

est particulièrement intense et présente un spectre quasiment continu. En nous parvenant, il traverse le milieu extra-galactique, essentiellement constitué d’hydrogène, et est absorbé en excitant les transitions atomiques Lyman- α de l’hydrogène neutre. Le décalage de ces raies d’absorption induit par l’expansion nous permet de sonder la proportion d’hydrogène neutre jusqu’à un décalage spectral de $z \sim 6$.

¹²Les corrélations entre la température du fond diffus cosmologique et sa polarisation, sensible aux anisotropies quadrupolaires (voir chapitre 3) permettent de contraindre les dates auxquelles la réionisation a pu avoir lieu.

¹³La limite basse est déterminée par le test de Gunn-Peterson sur l’émission des quasars. Les résultats de la première année d’acquisition de WMAP ont fourni une valeur particulièrement élevée du décalage vers le rouge $z_{\text{reion}} \simeq 17$, revue à la baisse $z_{\text{reion}} \simeq 11$ dans les données de la troisième année.

blement de mécanismes quantiques ayant eu lieu pendant l'inflation (voir les chapitres 4 et 5). D'autre part, afin de déterminer l'évolution de ces structures, nous devons interpréter les résultats issus des relevés cosmologiques à l'aide d'un formalisme approprié, décrivant des inhomogénéités dans un espace de fond homogène et isotrope. Ce formalisme, la théorie des perturbations cosmologiques, est présenté dans le chapitre suivant. Le chapitre 3, quant à lui, a pour objet l'étude d'un relevé cosmologique particulier, celle du fond diffus cosmologique.

CHAPITRE 2

Perturbations cosmologiques

Sommaire

2.1	Description des perturbations	41
2.1.1	Description de la géométrie	41
2.1.2	Description de la matière	42
2.2	Transformation de jauge	44
2.2.1	Changement de coordonnées	44
2.2.2	Le problème de jauge	45
2.2.3	Lois de transformation générales	46
2.2.4	Transformation des perturbations de métrique	47
2.2.5	Transformation des perturbations de la matière	48
2.3	Quantités invariantes de jauge	49
2.3.1	Invariance de jauge au premier ordre	50
2.3.2	Invariance de jauge au deuxième ordre	51
2.3.3	Invariance de jauge à tout ordre	54
2.3.4	Bilan	55
2.4	Équations d'Einstein	55
2.4.1	Équations d'Einstein au premier ordre	56
2.4.2	Équations d'Einstein au deuxième ordre	58
2.5	Équations de conservation	60
2.5.1	Équations de conservation au premier ordre	60
2.5.2	Équations de conservation au second ordre	62
2.6	Évolution des perturbations	62

2.6.1	Modes vectoriels	62
2.6.2	Modes tensoriels	63
2.6.3	Modes scalaires	63
2.7	Conclusions	70

Le principe cosmologique postule que l'univers est homogène et isotrope aux grandes échelles. Bien que ce postulat permette de rendre compte des grandes étapes de l'histoire thermique de l'univers, l'homogénéité de l'espace n'est, à l'évidence, qu'approchée, ne serait-ce qu'à l'échelle des galaxies ou des amas de galaxies. La précision et l'interprétation des observations actuelles - et futures - requiert une profonde compréhension des perturbations cosmologiques au point que la description des inhomogénéités et de leur évolution est aujourd'hui une pierre angulaire de la cosmologie moderne.

La liberté dans le choix du système de coordonnées - caractéristique intrinsèque de la relativité générale - confère aux perturbations cosmologiques des propriétés différentes des perturbations "usuelles", définies, par exemple, en théorie des champs. En particulier, la valeur et la signification des quantités perturbées dépend du système de coordonnées choisi.

Les perturbations cosmologiques sont principalement étudiées à l'aide de deux techniques principales.

L'approche covariante permet, indépendamment de tout système de coordonnées, de définir des quantités "perturbées", c'est à dire des quantités nulles dans un espace-temps idéalisé, mais non nulles dans l'espace-temps étudié. Ce formalisme est développé, en particulier, dans les travaux de Hawking [Hawking, 1966], Ellis et ses collaborateurs [Ellis & van Elst, 1998] [Ellis & Bruni, 1989] [Ellis *et al.*, 1989] [Dunsby *et al.*, 1992] [Bruni *et al.*, 1992] ainsi que dans ceux de Langlois et Vernizzi [Langlois & Vernizzi, 2005] [Langlois & Vernizzi, 2006].

De façon complémentaire, l'approche perturbative, initialement explorée dans [Lifshitz, 1946] [Lifshitz & Khalatnikov, 1963], requiert l'introduction d'un système de coordonnées particulier. L'interprétation physique des perturbations de métrique dépend alors d'un "choix de jauge" [Bardeen, 1980]. Les perturbations cosmologiques à l'ordre linéaire sont principalement traitées dans les articles de revue suivants [Kodama & Sasaki, 1984] [Mukhanov *et al.*, 1992] [Durrer, 1994] [Liddle & Lyth, 1993] [Stewart, 1990] et [Giovannini, 2005]. Récemment, de nombreux travaux concernant l'étude des perturbations cosmologiques au deuxième ordre ont été publiés (voir en particulier l'article de revue [Bartolo *et al.*, 2004]).

Dans ce chapitre, nous adopterons principalement une approche perturbative. Nous nous intéresserons à la description des perturbations de métrique ainsi qu'à la construction de quantités invariantes de jauge, c'est à dire indépendantes du système de coordonnées, jusqu'au deuxième ordre en puissance des perturbations. Nous présenterons ensuite les équations d'évolution de ces perturbations. Nous discuterons alors la forme de leurs solutions et rendrons compte de l'évolution des inhomogénéités.

tés pendant les ères de domination de la radiation et de la matière.

2.1 Description des perturbations

2.1.1 Description de la géométrie

Nous cherchons à décrire les perturbations au “voisinage” d’une métrique de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker. La métrique non perturbée s’écrit, en temps conforme :

$$ds^2 = a(\eta)^2 [d\eta^2 - \omega_{ij} dx^i dx^j] , \quad (2.1)$$

où ω_{ij} correspond à la métrique spatiale.

La métrique perturbée la plus générale, quant à elle, s’écrit sous la forme

$$\begin{aligned} ds^2 &= (\bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu \\ &= a(\eta)^2 [(1 + 2\phi) d\eta^2 - B_i d\eta dx^i - (\omega_{ij} - h_{ij}) dx^i dx^j] , \end{aligned} \quad (2.2)$$

où la perturbation de métrique $\delta g_{\mu\nu}$ se décompose en puissances d’un infiniment petit sous la forme $\delta g_{\mu\nu} = \delta^{(1)} g_{\mu\nu} + \delta^{(2)} g_{\mu\nu} + \dots$

Bien que les indices de la métrique perturbée $\delta g_{\mu\nu}$ soient montés ou descendus à l’aide de la métrique complète $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$, nous imposerons que ceux des quantités B_i et h_{ij} soient montés et descendus à l’aide de la métrique spatiale non perturbée¹ ω_{ij} . Dans la suite, nous désignerons par ∇_i la dérivée covariante associée à ω_{ij} et par D_μ (respectivement \bar{D}_μ) la dérivée covariante associée à la métrique perturbée $\bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ (respectivement $\bar{g}_{\mu\nu}$).

Les perturbations de métrique peuvent être décomposées en composantes scalaires, vectorielles et tensorielles. Ainsi nous écrirons B_i comme la somme d’un terme potentiel $\nabla_i B$ et d’un terme rotationnel² \bar{B}_i tel que $\nabla_i \bar{B}^i = 0$. Nous décomposons le tenseur h_{ij} de façon similaire de sorte que

$$B_i = \nabla_i B + \bar{B}_i , \quad (2.3)$$

$$h_{ij} = 2\psi \omega_{ij} - 2\nabla_i \nabla_j E - 2\nabla_{(i} \bar{E}_{j)} - 2\bar{\bar{E}}_{ij} , \quad (2.4)$$

où nous avons utilisé la convention de symétrisation $2\nabla_{(i} \bar{E}_{j)} = \nabla_i \bar{E}_j + \nabla_j \bar{E}_i$.

La métrique perturbée est décrite par dix degrés de liberté³. En effet, les quantités A , B , C et E forment quatre degrés de liberté décrivant les perturbations scalaires ; \bar{B}_i et \bar{E}_i sont des perturbations vectorielles (de divergences nulles) représentant quatre degrés de liberté ; $\bar{\bar{E}}_{ij}$ est une perturbation tensorielle (symétrique, de

¹La métrique inverse se décompose alors en puissances des quantités perturbées. Notons que les grandeurs ϕ , ψ , B_i et h_{ij} peuvent également être décomposées ordre par ordre en puissances d’un infiniment petit de sorte que, par exemple, $\phi = \phi^{(1)} + \phi^{(2)} + \dots$

²Notons que la quantité scalaire B n’est alors définie qu’à un terme rotationnel près.

³C’est le nombre de degrés de liberté d’un tenseur symétrique à deux indices à quatre dimensions.

trace et de divergence nulles) possédant deux degrés de liberté. Une telle décomposition nous sera utile par la suite lorsque nous écrirons les équations d'évolution des perturbations à l'ordre linéaire. En effet, ces différents modes évoluent de manière indépendante à l'ordre linéaire [Kodama & Sasaki, 1984].

2.1.2 Description de la matière

Les échelles étudiées en cosmologie permettent en général de décrire la matière en terme de fluides. Bien que les fluides relativistes, dont le libre parcours moyen est grand, soient décrits de façon adéquate par une théorie cinétique (voir chapitre 3), la plupart des autres fluides, quant à eux, peuvent en bonne approximation être décrits par des quantités macroscopiques⁴. Notons qu'il est toujours possible de relier la description microscopique de la matière à une approche macroscopique à l'aide d'un tenseur énergie-impulsion associé à chaque fluide [Uzan, 1998]. Dans la suite de ce chapitre, nous décrirons la matière à l'aide d'un tel tenseur.

Le tenseur énergie-impulsion le plus général s'écrit sous la forme

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu - u_\alpha u^\alpha P g_{\mu\nu} + 2u_{(\mu} q_{\nu)} + \Pi_{\mu\nu} , \quad (2.5)$$

où ρ , P , q_μ et $\Pi_{\mu\nu}$ sont respectivement *la densité d'énergie*, *la pression*, *le vecteur flux de chaleur* et *le tenseur de pression anisotrope* du fluide tandis que u^μ est la quadri-vitesse d'un observateur comobile. Le flux de chaleur peut être pris orthogonal à la vitesse⁵ ($u^\mu q_\mu = 0$), le tenseur de pression anisotrope peut être pris sans trace⁶ ($\Pi_\mu{}^\mu = 0$) et orthogonal à la quadri-vitesse⁷ ($u^\mu \Pi_{\mu\nu} = 0$). Notons que le flux de chaleur traduit une interaction non gravitationnelle avec un autre fluide⁸; nous le négligerons par la suite. Nous en déduisons donc les expressions suivantes

$$\rho = u^\mu u^\nu T_{\mu\nu} , \quad (2.6)$$

$$P = \frac{1}{3} \perp^{\mu\nu} T_{\mu\nu} , \quad (2.7)$$

$$q_\mu = -\perp_\mu{}^\nu T_{\nu\kappa} u^\kappa , \quad (2.8)$$

$$\Pi_{\mu\nu} = \perp_\mu{}^\alpha \perp_\nu{}^\beta T_{\alpha\beta} - P \perp_{\mu\nu} , \quad (2.9)$$

où le projecteur orthogonal à la vitesse vaut $\perp_{\mu\nu} \equiv -u^\alpha u_\alpha (g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu)$.

Nous décomposons les différents paramètres du tenseur énergie-impulsion en une partie homogène décrivant un fluide parfait et une partie perturbée de la manière

⁴Dans le cas d'interactions importantes qui conduisent à un système hors équilibre, comme par exemple dans le cas d'un effondrement gravitationnel, il devient nécessaire d'introduire une description microscopique *via* une équation de Boltzmann.

⁵Dans le cas contraire, le flux de chaleur contribuerait à la densité d'énergie.

⁶Dans le cas contraire, la pression anisotrope contribuerait à la pression "isotrope".

⁷Dans le cas contraire, la pression anisotrope contribuerait à la densité d'énergie.

⁸C'est par exemple le cas de la diffusion Compton qui couple non gravitationnellement les photons et les baryons.

suivante

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho, \quad (2.10)$$

$$P = P_0 + \delta P, \quad (2.11)$$

$$u^\mu = \frac{1}{a} \delta_0^\mu (1 + v^0) + \frac{1}{a} \delta_i^\mu v^i. \quad (2.12)$$

La pression anisotrope $\Pi_{\mu\nu}$ est nulle pour un fluide parfait : nous la considèrerons comme une perturbation. Nous définissons également *le contraste de densité* comme la perturbation de densité normalisée à la densité d'énergie moyenne :

$$\delta = \frac{\delta\rho}{\rho_0}. \quad (2.13)$$

Remarquons que les composantes v^0 et v^i de la quadri-vitesse ne sont pas indépendantes en raison de la normalisation $(\bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu})u^\mu u^\nu = 1$. Nous pouvons alors exprimer la perturbation de vitesse v^0 en fonction de v^i

$$v^0 = -\phi + \frac{3}{2}\phi^2 + v_i B^i + \frac{1}{2}v_i v^i. \quad (2.14)$$

Nous en déduisons également les composantes covariantes de la vitesse

$$u_\mu = a\delta_\mu^0 \left(1 + \phi - \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{2}v_i v^i \right) + a\delta_\mu^i (-B_i - v_i + \phi B_i + h_{ij}v^j). \quad (2.15)$$

Au premier ordre dans les perturbations, la composante temporelle de la quadri-vitesse s'identifie à la normale aux hypersurfaces de genre temps (voir annexe C). Ce n'est cependant plus le cas aux deuxième ordre.

Afin de décrire la dynamique du fluide, nous devons préciser son équation d'état. Nous supposons que l'équation d'état prend la forme générale $P_0 = w \rho_0$. Les perturbations de densité et de pression sont reliées par

$$\delta P = c_s^2 \delta\rho + w \rho_0 \Gamma, \quad (2.16)$$

où c_s représente la vitesse du son dans le fluide, définie par

$$c_s^2 = \frac{P'_0}{\rho'_0} = \left(\frac{\delta P}{\delta\rho} \right)_S, \quad (2.17)$$

et où Γ représente donc les perturbations d'entropie.

Enfin, la décomposition des perturbations en modes scalaires, vectoriels et tensoriels nous sera utile lorsque nous décrirons l'évolution des perturbations au premier ordre. Nous poserons donc

$$v^i = \nabla^i v + \bar{v}^i, \quad (2.18)$$

avec $\nabla_i \bar{v}^i = 0$. De façon similaire, la pression anisotrope se décompose⁹ en

$$\Pi_{ij} = \left(\nabla_i \nabla_j - \frac{1}{3} \omega_{ij} \nabla^k \nabla_k \right) \Pi + \nabla_{(i} \bar{\Pi}_{j)} + \bar{\bar{\Pi}}_{ij} . \quad (2.19)$$

La partie vectorielle est sans divergence ($\nabla_i \bar{\Pi}^i = 0$) tandis que la composante tensorielle ne possède ni trace ($\omega_{ij} \bar{\bar{\Pi}}^{ij} = 0$), ni divergence ($\nabla_i \bar{\bar{\Pi}}^{ij}$). Il est plus commode d'introduire la pression anisotrope $\pi_{\mu\nu}$ normalisée à la pression telle que

$$\Pi_{\mu\nu} = w \rho_0 \pi_{\mu\nu} . \quad (2.20)$$

Par abus de langage, cette quantité réduite est désignée par le terme de pression anisotrope.

2.2 Transformation de jauge

2.2.1 Changement de coordonnées

Réalisons un changement de coordonnées sur la variété non-perturbée de la forme

$$\begin{aligned} \eta &\mapsto \tilde{\eta} = \eta , \\ x^i &\mapsto \tilde{x}^i = x^i - \xi^i(\eta, x^i) . \end{aligned}$$

Ce changement de coordonnées induit donc

$$d\eta = d\tilde{\eta} , \quad (2.21)$$

$$dx^i = d\tilde{x}^i + \xi^i d\tilde{\eta} + \nabla_j \xi^i [d\tilde{x}^j + \xi'^j d\tilde{\eta} + \nabla_k \xi^k (d\tilde{x}^k + \dots)] . \quad (2.22)$$

À l'ordre linéaire dans le paramètre ξ^i , nous obtenons alors, à partir de (2.1),

$$ds^2 = a(\tilde{\eta})^2 [d\tilde{\eta}^2 - 2\omega_{ij} \xi'^j d\tilde{x}^i d\tilde{\eta} - (\omega_{ij} + 2\omega_{jk} \nabla_i \xi^k) d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j] . \quad (2.23)$$

Les nouveaux termes $2\omega_{ij} \xi'^j$ et $2\omega_{jk} \nabla_i \xi^k$ apparaissent comme des perturbations de métrique bien que l'espace-temps soit resté identique à lui-même : seul le choix de coordonnées a été modifié et la métrique (2.23) décrit un espace-temps non-perturbé. Nous voyons bien sur cet exemple que les modes de perturbations introduits dans (2.2) ne sont pas tous physiques : certaines quantités perturbées peuvent être interprétées comme un choix du système de coordonnées. Ainsi, l'invariance sous les changements de coordonnées induit des degrés de liberté non-physiques : par analogie avec la théorie des champs, nous parlons d'un *choix de jauge* lorsque nous fixons le système de coordonnées.

⁹Nous nous limitons ici et dans la suite à une description au premier ordre de la pression anisotrope. Au deuxième ordre, il n'est plus possible de négliger les composantes $\Pi_{0\mu}$ et Π_{00} .

2.2.2 Le problème de jauge

Dans cette partie nous formalisons la définition des quantités perturbées avant d'étudier, dans les parties suivantes, leurs lois de transformations sous les transformations de jauge.

Soit une variété de fond notée \mathcal{M}_0 et une variété "perturbée" \mathcal{M} par rapport à \mathcal{M}_0 : nous avons alors réalisé une identification point par point de \mathcal{M}_0 vers \mathcal{M} . Physiquement, \mathcal{M} correspond à la variété physique qui décrit notre univers tandis que \mathcal{M}_0 correspond à une variété idéalisée (homogène et isotrope par exemple). D'un point de vue mathématique, nous considérons un difféomorphisme bijectif ϕ de \mathcal{M}_0 dans \mathcal{M} tel que tout point x de \mathcal{M} soit associé à tout point x_0 de \mathcal{M}_0 :

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{M}_0 &\longrightarrow \mathcal{M} \\ x_0 &\longmapsto x = \phi(x_0) . \end{aligned} \quad (2.24)$$

Soit ${}^{(0)}Q(x_0)$ une quantité de référence définie sur \mathcal{M}_0 . Cette quantité peut être scalaire, vectorielle ou tensorielle. Nous définissons une quantité équivalente sur \mathcal{M} par $Q(\phi(x_0))$. Nous avons donc associé deux quantités définies sur des variétés différentes à l'aide d'un difféomorphisme. La perturbation de la quantité Q peut alors être définie par la différence

$$\delta Q_\phi(x_0) \equiv Q(\phi(x_0)) - {}^{(0)}Q(x_0). \quad (2.25)$$

Effectuons un changement de coordonnées sur \mathcal{M} à l'aide d'un difféomorphisme f tel que

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ x &\longmapsto x' . \end{aligned} \quad (2.26)$$

Dans ces conditions, les quantités définies sur \mathcal{M} se transforment de façon covariante et la perturbation prend la valeur

$$\widetilde{\delta Q}_\phi(x_0) \equiv \widetilde{Q}((f \circ \phi)(x_0)) - {}^{(0)}Q(x_0). \quad (2.27)$$

Ainsi, le changement de coordonnées sur \mathcal{M} induit une nouvelle définition des quantités perturbées : celles-ci sont donc définies à *un choix de jauge* près. Ce choix de jauge correspond à un choix d'identification entre les deux variétés à l'aide d'un difféomorphisme ϕ ou $(f \circ \phi)$.

Ainsi, un choix de jauge peut être interprété comme un choix de coordonnées dans la variété perturbée ou comme une identification particulière entre la variété perturbée et la variété idéalisée de référence, ces deux approches étant équivalentes. Remarquons que le difféomorphisme défini par la relation (2.24) reliant \mathcal{M} et \mathcal{M}_0 est bijectif donc inversible. Le difféomorphisme ϕ^{-1} induit donc un processus de moyenne des quantités définies sur la variété perturbée \mathcal{M} . C'est sur cette interprétation qu'est fondée l'approche covariante : les grandeurs perturbées, définies dans l'espace perturbé, prennent une valeur nulle dans l'espace moyenné. Le choix de la jauge correspond alors à un choix d'identification entre les variétés.

2.2.3 Lois de transformation générales

Lorsqu'on s'intéresse à la dynamique des perturbations, plusieurs choix de jauge sont possibles. Afin de comparer des résultats obtenus dans des jauges différentes, il est essentiel de comprendre comment les quantités perturbées se transforment sous les changements de coordonnées.

Changement de coordonnées

Définissons pour cela un champ de vecteurs ξ^μ sur la variété perturbée \mathcal{M} . Ce champ de vecteurs est tangent en tous points aux courbes intégrales $\chi^\mu(\lambda)$ définies par

$$\frac{d\chi^\mu(\lambda)}{d\lambda} = \xi^\mu[\chi^\nu(\lambda)] , \quad (2.28)$$

où λ est un paramètre affine. Ce champ de vecteurs induit également un changement de coordonnées $x^\mu \mapsto \tilde{x}^\mu$ si l'on choisit les conditions initiale et finale telles que

$$\chi^\mu(\lambda = 0) = x^\mu \quad \text{et} \quad \chi^\mu(\lambda = 1) = \tilde{x}^\mu . \quad (2.29)$$

Connaissant les solutions générales de l'équation (2.28), nous obtenons la loi de transformation suivante pour les coordonnées

$$x^\mu \mapsto \tilde{x}^\mu = \chi^\mu(\lambda = 1) = e^{\xi^\nu \partial_\nu} x^\mu . \quad (2.30)$$

Conséquences sur les quantités perturbées

Sous un changement de système de coordonnées $x^\mu \mapsto \tilde{x}^\mu(x^\lambda)$, tout tenseur $T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}$ se transforme selon la loi

$$T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}(x^\tau) \mapsto \tilde{T}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}(\tilde{x}^\tau) = \frac{\partial \tilde{x}^{\alpha_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial \tilde{x}^{\alpha_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial \tilde{x}^{\beta_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial \tilde{x}^{\beta_q}} T^{\rho_1 \dots \rho_p}_{\sigma_1 \dots \sigma_q}(x^\tau) . \quad (2.31)$$

Nous cherchons alors à comparer les tenseurs T et \tilde{T} *au même point*. Au premier ordre en ξ , la différence entre les deux tenseurs s'exprime sous la forme d'une dérivée de Lie

$$\tilde{T}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}(x^\lambda) - T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}(x^\lambda) \equiv -\mathcal{L}_\xi (T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}) , \quad (2.32)$$

où la dérivée de Lie a pour expression

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi (T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}) &= (\bar{D}_{\beta_j} \xi^{\sigma_j}) T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \sigma_j \dots \beta_q} - (\bar{D}_{\sigma_i} \xi^{\alpha_i}) T^{\alpha_1 \dots \sigma_i \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} \\ &\quad + \xi^\mu \bar{D}_\mu T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} . \end{aligned} \quad (2.33)$$

Notons que la dérivée de Lie de tout tenseur peut indifféremment s'exprimer en fonction de dérivées covariantes perturbées, non-perturbées ou de dérivées partielles puisque les symboles de connexion se simplifient. Dans le cas d'un changement de jauge fini, induit par le champ de vecteurs ξ^μ , la relation (2.32) prend la forme générale

$$\tilde{T}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}(x^\tau) = e^{-\mathcal{L}_\xi} T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}(x^\tau) . \quad (2.34)$$

2.2.4 Transformation des perturbations de métrique

Transformation de jauge au premier ordre

Décomposons le champ de vecteurs ξ^μ en composantes scalaires et 3-vectorielles $\xi^\mu \equiv (T, \nabla^i L + \bar{L}^i)$, les indices spatiaux étant montés ou descendus à l'aide de la métrique spatiale non perturbée ω_{ij} . Lors d'une transformation de jauge au premier ordre dans le paramètre ξ^μ , le changement de coordonnées

$$x^\mu \mapsto \tilde{x}^\mu(x^\lambda) = x^\mu + \xi^\mu + o(\xi^\mu) \quad (2.35)$$

induit une modification de la métrique au premier ordre telle que

$$g_{\mu\nu} \mapsto \tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - 2\bar{D}_{(\mu}\xi_{\nu)} + o(\xi^\mu), \quad (2.36)$$

où nous avons supposé que ξ^μ était un infiniment petit du même ordre que les perturbations de métrique¹⁰.

En insérant la décomposition (2.2), nous obtenons les lois de transformation suivantes

$$\phi \mapsto \phi - T' - \mathcal{H}T, \quad (2.37)$$

$$B \mapsto B - L' + T, \quad (2.38)$$

$$\psi \mapsto \psi + \mathcal{H}T, \quad (2.39)$$

$$E \mapsto E - L, \quad (2.40)$$

$$\bar{B}_i \mapsto \bar{B}_i - \bar{L}'_i, \quad (2.41)$$

$$\bar{E}_i \mapsto \bar{E}_i - \bar{L}_i, \quad (2.42)$$

$$\bar{\bar{E}}_{ij} \mapsto \bar{\bar{E}}_{ij}. \quad (2.43)$$

Nous constatons qu'une transformation de jauge *au premier ordre* ne mélange pas les composantes scalaires, vectorielles et tensorielles¹¹. D'autre part, les perturbations scalaires (respectivement vectorielles) ne se mélangent pas non plus entre elles sous l'effet d'un changement de coordonnées. Notons enfin que la quantité tensorielle $\bar{\bar{E}}_{ij}$ reste inchangée sous une transformation de coordonnées : c'est une quantité invariante de jauge au premier ordre.

Transformation de jauge au deuxième ordre

De manière similaire, nous pouvons étendre les résultats précédents en étudiant les conséquences d'une transformation de jauge au deuxième ordre dans le paramètre ξ^μ . Le changement de coordonnées

$$x^\mu \mapsto \tilde{x}^\mu(x^\lambda) = x^\mu + \xi^\mu + \xi^\nu \partial_\nu \xi^\mu + o[(\xi^\mu)^2] \quad (2.44)$$

¹⁰Cette hypothèse est légitime puisque les composantes de ce champ de vecteurs contribuent aux perturbations de métrique.

¹¹C'est un résultat valable uniquement au premier ordre comme nous allons le vérifier par la suite.

induit une modification de la métrique au deuxième ordre telle que

$$g_{\mu\nu} \mapsto \tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - 2 [\bar{g}_{\lambda(\mu} + \delta g_{\lambda(\mu}] \bar{D}_{\nu)} \xi^\lambda - \xi^\lambda \bar{D}_\lambda \delta g_{\mu\nu} + \mathcal{L}_\xi \bar{D}_{(\mu} \xi_{\nu)} . \quad (2.45)$$

Les perturbations de métrique se transforment alors selon

$$\phi \mapsto \phi - (\xi^{0'} + \mathcal{H}\xi^0)(1 + 2\phi) - \xi^0 \phi' - \xi^i \nabla_i \phi + B_i \xi^{i'} + \frac{1}{2a^2} \mathcal{L}_\xi \bar{D}_0 \xi_0 , \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} B_i \mapsto & B_i + \nabla_i \xi^0 (1 + 2\phi) - \xi^{j'} [\omega_{ij} - h_{ij}] - (\xi^{0'} + 2\mathcal{H}\xi^0) B_i \\ & - \xi^0 B_i' - B_j \nabla_i \xi^j - \xi^j \nabla_j B_i - \frac{1}{a^2} \mathcal{L}_\xi \bar{D}_{(0} \xi_{i)} , \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} h_{ij} \mapsto & h_{ij} + 2B_{(i} \nabla_{j)} \xi^0 + 2\mathcal{H}\xi^0 [\omega_{ij} - h_{ij}] - \xi^0 h_{ij}' \\ & + 2 [\omega_{k(i} - h_{k(i)}] \nabla_{j)} \xi^k - \xi^k \nabla_k h_{ij} + \frac{1}{a^2} \mathcal{L}_\xi \bar{D}_{(i} \xi_{j)} . \end{aligned} \quad (2.48)$$

Ces lois de transformation sont explicitées pour l'ensemble des perturbations de métrique dans l'annexe B.1.

Il est important de remarquer qu'une transformation de jauge au deuxième ordre mélange les perturbations scalaires, vectorielles et tensorielles, ce qui complique l'étude de leur dynamique.

2.2.5 Transformation des perturbations de la matière

Transformation de jauge au premier ordre

De façon similaire, parmi les quantités qui décrivent la matière, ρ et P se transforment comme des scalaires, la quadri-vitesse u^μ comme un vecteur et la pression anisotrope comme un tenseur sous les transformations de jauge. Sous une transformation de jauge du premier ordre, les perturbations associées deviennent

$$\delta\rho \mapsto \delta\rho - \rho_0' T , \quad (2.49)$$

$$\delta P \mapsto \delta P - P_0' T , \quad (2.50)$$

$$v \mapsto v + L' , \quad (2.51)$$

$$\bar{v}_i \mapsto \bar{v}_i + \bar{L}'_i , \quad (2.52)$$

$$\Pi_{ij} \mapsto \Pi_{ij} . \quad (2.53)$$

Ici encore nous constatons qu'une transformation de jauge au premier ordre n'induit pas de mélange entre différents types (scalaires, vectoriels et tensoriels) de composantes.

Transformation de jauge au deuxième ordre

Au deuxième ordre dans les perturbations, la pression et la densité se transforment de la façon suivante

$$\begin{aligned} \delta\rho \longmapsto & \delta\rho - T\rho'_0 \left(1 + \frac{\delta\rho'}{\rho'_0}\right) - L^i \nabla_i \delta\rho \\ & + \frac{1}{2} T^2 \rho''_0 + \frac{1}{2} \rho'_0 (TT' + L^i \nabla_i T) , \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} \delta P \longmapsto & \delta P - TP'_0 \left(1 + \frac{\delta P'}{P'_0}\right) - L^i \nabla_i \delta P \\ & + \frac{1}{2} T^2 P''_0 + \frac{1}{2} P'_0 (TT' + L^i \nabla_i T) . \end{aligned} \quad (2.55)$$

La quadri-vitesse se transforme selon

$$\begin{aligned} v^i \longmapsto & v^i + (1 - \phi)L^i - T(v^i - \mathcal{H}v^i) - L^j \nabla_j v^i + v^j \nabla_j L^i \\ & + \frac{1}{2} T' L^i - \frac{1}{2} T L'^i + \frac{1}{2} L'^j \nabla_j L^i - \frac{1}{2} L^j \nabla_j L'^i + \mathcal{H} T L^i , \end{aligned} \quad (2.56)$$

tandis que la pression anisotrope se transforme selon

$$\Pi_{\mu\nu} \longmapsto \Pi_{\mu\nu} - \mathcal{L}_\xi \Pi_{\mu\nu} . \quad (2.57)$$

Les transformations de jauge au deuxième ordre mélangent les modes scalaires et vectoriels. Les quantités obtenues après transformation de jauge, bien que non-linéaires dans les perturbations, s'expriment néanmoins comme des combinaisons linéaires des perturbations du tenseur énergie-impulsion.

2.3 Quantités invariantes de jauge

Les perturbations de métrique sont décrites par dix degrés de liberté. Le champ de vecteurs induisant un changement de coordonnées possède quatre degrés de liberté. Il existe donc six degrés de liberté correspondant à de “véritables” perturbations de métrique. Dès lors, deux approches sont possibles : soit tous les degrés de libertés “spurieux” sont fixés par le choix d’une jauge, soit les degrés de liberté “significatifs” sont exprimés comme des combinaisons des perturbations qui restent inchangées lors d’une transformation de jauge. Dans les deux cas, l’interprétation physique des grandeurs étudiées requiert le choix d’un système de coordonnées particulier. Nous ne détaillerons pas ici les différents choix de jauge (voir par exemple [Peter & Uzan, 2005]) et nous nous attacherons à décrire les quantités invariantes de jauge.

2.3.1 Invariance de jauge au premier ordre

Au premier ordre dans les perturbations, les quantités invariantes de jauge sont des combinaisons *linéaires* des perturbations.

Perturbations de métrique

Concernant les seules perturbations de métrique, il n'existe que deux quantités scalaires indépendantes invariantes de jauge. Elles sont représentées, par exemple, par les potentiels de Bardeen [Bardeen, 1980] Φ et Ψ définis par

$$\Phi \equiv \phi + \mathcal{H}(B - E') + (B' - E''), \quad (2.58)$$

$$\Psi \equiv \psi - \mathcal{H}(B - E'). \quad (2.59)$$

L'unique mode de perturbation vectoriel invariant de jauge au premier ordre s'écrit

$$\bar{\Phi}_i = \bar{B}_i - \bar{E}'_i, \quad (2.60)$$

tandis que les perturbations tensorielles,

$$\bar{\bar{E}}_{ij}, \quad (2.61)$$

sont invariantes de jauge au premier ordre.

Perturbations du tenseur énergie-impulsion

Concernant les perturbations du tenseur énergie-impulsion, notons que le tenseur de pression anisotrope Π_{ij} est invariant de jauge au premier ordre. Cette propriété découle du lemme de Stewart-Walker [Stewart & Walker, 1974] en remarquant que la pression anisotrope est nulle dans l'espace de référence non-perturbé.

Autres quantités invariantes de jauge

Il est possible de définir des contrastes de densité (ou de pression) invariants de jauge. Bien qu'ils n'aient aucune signification physique particulière, ils s'interprètent comme des contrastes de densité lorsque le système de coordonnées est fixé. Ainsi

$$\delta^\flat \equiv \frac{\delta\rho^\flat}{\rho_0} = \frac{\delta\rho}{\rho_0} + \frac{\rho'_0}{\rho_0} \frac{\psi}{\mathcal{H}} = \frac{\delta\rho}{\rho_0} - 3(1+w)\psi, \quad (2.62)$$

$$\frac{\delta P^\flat}{P_0} = \frac{\delta P}{P_0} + \frac{P'_0}{P_0} \frac{\psi}{\mathcal{H}} = \frac{\delta P}{P_0} - 3\frac{c_s^2}{w}(1+w)\psi, \quad (2.63)$$

s'identifient respectivement aux contrastes de densité et de pression lorsque $\psi = 0$ (en jauge de feuilletage plat par exemple). De la même manière,

$$\delta^\sharp = \frac{\delta\rho}{\rho_0} + \frac{\rho'_0}{\rho_0} (B - E'), \quad (2.64)$$

$$\frac{\delta P^\sharp}{P_0} = \frac{\delta P}{P_0} + \frac{P'_0}{P_0} (B - E'), \quad (2.65)$$

s'identifient à leurs valeurs dans une jauge telle que $B - E' = 0$ (ce qui est le cas en jauge newtonienne ou en jauge de cisaillement nul) tandis que

$$\delta^\natural = \frac{\delta\rho}{\rho_0} + \frac{\rho'_0}{\rho_0} (B + v), \quad (2.66)$$

$$\frac{\delta P^\natural}{P_0} = \frac{\delta P}{P_0} + \frac{P'_0}{P_0} (B + v), \quad (2.67)$$

s'identifient à leurs valeurs dans une jauge telle que $B + v = 0$ comme par exemple la jauge comobile. De la même manière, les vitesses

$$V = v + E', \quad (2.68)$$

$$\bar{V}_i = \bar{v}_i + \bar{B}_i, \quad (2.69)$$

$$\bar{W}_i = \bar{v}_i + \bar{E}'_i, \quad (2.70)$$

sont invariantes de jauge au premier ordre. Notons que d'autres quantités, invariantes de jauge au premier ordre, peuvent être définies à partir des précédentes puisque toute combinaison linéaire de perturbations invariantes de jauge au premier ordre est également invariante de jauge au premier ordre. En particulier, la quantité¹² \mathcal{R} [Lyth, 1985]¹³ définie par

$$\mathcal{R} \equiv \Psi + \frac{2\Psi' + 2\mathcal{H}\Phi}{3\mathcal{H}(1+w)} = \Psi + \frac{\mathcal{H}^2 + \mathcal{K}}{\mathcal{H}} \frac{\Psi' + \mathcal{H}\Phi}{\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}' + \frac{3}{2}\mathcal{K}} \quad (2.71)$$

ainsi qu'une variable voisine [Bardeen *et al.*, 1983], correspondant à la perturbation de courbure sur des surfaces iso-densité,

$$\zeta_{\text{BST}} \equiv -\mathcal{H} \frac{\rho_0}{\rho'_0} \delta^b = \psi - \frac{\delta}{3(1+w)}, \quad (2.72)$$

sont invariantes de jauge au premier ordre.

2.3.2 Invariance de jauge au deuxième ordre

Nous avons vu que les transformations de jauge au deuxième ordre impliquaient de nombreux termes ainsi qu'un mélange entre les différentes perturbations. Il est donc mal-aisé d'extraire de ces lois de transformation des combinaisons, quadratiques au plus dans les perturbations, invariantes de jauge au deuxième ordre. Une méthode générale permettant de trouver de telles quantités a cependant été proposée dans [Malik & Wands, 2004] [Nakamura, 2003]. Nous en proposons une description dans la suite.

¹²La variable \mathcal{R} s'identifie à la perturbation de courbure perçue par un observateur comobile. En effet, les équations d'Einstein, notamment l'équation (2.104), permettent d'écrire $\mathcal{R} = \Psi - \mathcal{H}V$, où V est la perturbation scalaire de la vitesse invariante de jauge.

¹³Cette quantité était initialement notée ζ .

Développons le champ de vecteurs ξ^μ ainsi que les perturbations en puissances d'un infiniment petit ϵ . Nous obtenons alors

$$\xi^\mu = \epsilon \xi^{(1)\mu} + \frac{\epsilon^2}{2} \left(\xi^{(2)\mu} + \xi^{(1)\nu} \partial_\nu \xi^{(1)\mu} \right) + o(\epsilon^2) \quad (2.73)$$

et pour une perturbation δq quelconque

$$\delta q = \epsilon \delta^{(1)}q + \frac{\epsilon^2}{2} \delta^{(2)}q + o(\epsilon^2) . \quad (2.74)$$

D'après le lemme de Stewart-Walker [Stewart & Walker, 1974], une perturbation δq est invariante de jauge au deuxième ordre lorsque

- i) $\mathcal{L}_\xi \bar{q} = 0 \quad \forall \xi$,
- ii) $\mathcal{L}_\xi \delta^{(1)}q = 0 \quad \forall \xi$.

Fixons une jauge de sorte que les conditions i) et ii) soient satisfaites. Une valeur particulière est donc accordée à $\xi^{(1)}$ et $\xi^{(2)}$, qui s'expriment en fonction des quantités perturbées. Il suffit alors de remplacer ξ par son expression dans la loi de transformation d'une grandeur δQ , ordre par ordre en ϵ . Nous avons construit une quantité invariante de jauge δQ dont l'interprétation physique est immédiate¹⁴.

Perturbation de courbure sur des hypersurfaces iso-densité

Nous cherchons à généraliser la perturbation de courbure sur des hypersurfaces iso-densité ζ_{BST} au deuxième ordre, résultat initialement obtenu par [Malik & Wands, 2004]. Nous définissons donc

$$\zeta_{\text{MW}} = \tilde{\psi}|_\rho , \quad (2.75)$$

où $\tilde{\psi}|_\rho$ est la courbure des sections spatiales ψ obtenue après une transformation de jauge telle que

$$\delta^{(1)}\tilde{\rho} = 0 , \quad (2.76)$$

$$\delta^{(2)}\tilde{\rho} = 0 . \quad (2.77)$$

En utilisant les lois de transformation pour la densité d'énergie, nous obtenons les expressions suivantes, caractérisant une surface iso-densité

$$T^{(1)} = \frac{\delta^{(1)}\rho}{\rho'_0} , \quad (2.78)$$

$$T^{(2)} = \frac{1}{\rho'_0} \left(\delta^{(2)}\rho - \frac{\delta^{(1)}\rho \delta^{(1)}\rho'}{\rho'_0} - 2L^i \nabla_i \delta^{(1)}\rho \right) . \quad (2.79)$$

¹⁴C'est la valeur de δQ dans la jauge $\delta q = 0$.

Les composantes de L^i doivent être fixées au premier ordre. Nous choisissons une jauge dans laquelle¹⁵

$$\tilde{v}_i = 0, \quad (2.80)$$

c'est à dire

$$L_i^{(1)} = - \int^\eta v_i d\eta'. \quad (2.81)$$

La borne inférieure correspond à une condition initiale : c'est un degré de liberté fixant une hypersurface de référence. À l'aide de la transformation de jauge pour ψ induite par les relations (2.78), (2.79) et (2.81), la perturbation de courbure sur des hypersurfaces iso-densité s'écrit au deuxième ordre

$$\begin{aligned} \zeta_{MW} \equiv & \psi + \mathcal{H} \frac{\delta\rho}{\rho_0} - \mathcal{H} \frac{\delta\rho\delta\rho'}{\rho_0^2} \\ & - \frac{\delta\rho}{\rho_0'} (\psi' + 2\mathcal{H}\psi) + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta\rho}{\rho_0'} \right)^2 \left(\mathcal{H} \frac{\rho_0''}{\rho_0'} - \mathcal{H}' - 2\mathcal{H}^2 \right) \\ & + \left(\nabla_i \psi + \frac{\mathcal{H}}{\rho_0'} \nabla_i \delta\rho \right) \int^\eta v^i d\eta'. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Par définition, cette quantité est invariante de jauge.

Autres quantités invariantes de jauge au deuxième ordre

En procédant de la même manière, nous définissons la perturbation de densité sur les hypersurfaces de courbure constante

$$\begin{aligned} \delta\rho|_\psi \equiv & \delta\rho + \frac{\rho_0'}{\mathcal{H}} \psi + \frac{1}{2} \frac{\psi^2}{\mathcal{H}} \left(\frac{\rho_0''}{\mathcal{H}} + 2\rho_0' - \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2} \rho_0' \right) \\ & + \frac{\rho_0'}{\mathcal{H}} \psi \psi' + \frac{\psi}{\mathcal{H}} \delta\rho \\ & - (\nabla^i E + \bar{E}^i) \left(\nabla_i \delta\rho + \frac{\rho_0'}{\mathcal{H}} \nabla_i \psi \right). \end{aligned} \quad (2.83)$$

La perturbation de pression sur une surface iso-densité s'écrit

$$\begin{aligned} \delta P|_\rho \equiv & \delta P - \frac{P_0'}{\rho_0'} + P_0' \frac{\delta\rho}{\rho_0'} \left(\frac{\delta\rho'}{\rho_0'} - \frac{\delta P'}{P_0'} \right) \\ & + \frac{1}{2} P_0' \left(\frac{\delta\rho}{\rho_0'} \right)^2 \left(\frac{P_0''}{P_0'} - \frac{\rho_0''}{\rho_0'} \right) \\ & + \left(\nabla_i \delta P - \frac{P_0'}{\rho_0'} \nabla_i \delta\rho \right) \int^\eta v^i d\eta' \end{aligned} \quad (2.84)$$

¹⁵Ce choix est arbitraire car les hypersurfaces iso-densité ne fixent pas tous les degrés de liberté. Ainsi, il existe plusieurs manières de décrire les surfaces iso-densité et par conséquent plusieurs définitions de la courbure sur les hypersurfaces iso-densité. Cependant, notons que toutes ces définitions coïncident aux grandes échelles, lorsque les termes en gradients sont négligeables.

2.3.3 Invariance de jauge à tout ordre

Il peut être utile de généraliser les résultats précédents à tout ordre en perturbation. C'est l'approche suivie par [Langlois & Vernizzi, 2005] [Langlois & Vernizzi, 2006] [Lyth & Wands, 2003] [Rigopoulos, 2004] (en notant que ces deux derniers travaux s'intéressent exclusivement aux grandes échelles).

Considérons un espace-temps de métrique $g_{\mu\nu}$ contenant un fluide dont le tenseur énergie-impulsion s'écrit

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + P \perp_{\mu\nu} + 2q_{(\mu} u_{\nu)} + \Pi_{\mu\nu}. \quad (2.85)$$

La quadri-vitesse du fluide est définie par $u^\mu = dx^\mu/d\tau$, où τ est le temps propre le long des lignes de flot ; elle vérifie par ailleurs la normalisation $u^\mu u_\mu = 1$. Nous avons également introduit le projecteur orthogonal à la vitesse du fluide défini par

$$\perp^\mu{}_\nu = -(g^\mu{}_\nu - u^\mu u_\nu). \quad (2.86)$$

Ce projecteur satisfait

$$u_\mu \perp^\mu{}_\nu = 0 \quad \text{et} \quad \perp^\mu{}_\nu \perp^\nu{}_\sigma = \perp^\mu{}_\sigma. \quad (2.87)$$

Dans un espace de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) rempli d'un fluide parfait, le tenseur $\perp^\mu{}_\nu$ réalise une projection sur les sections spatiales. Nous le désignerons dans la suite par *projecteur spatial*.

Introduisons également le coefficient d'expansion

$$\Theta = -D_\mu u^\mu \quad (2.88)$$

qui s'identifie, à un facteur 3 près, au paramètre de Hubble dans un espace FLRW. En intégrant ce coefficient le long des lignes de flot, il est possible de définir un facteur d'expansion locale e^α avec

$$\alpha = \frac{1}{3} \int d\tau \Theta \iff \Theta = 3 \frac{d\alpha}{d\tau} \equiv 3u^\mu D_\mu \alpha. \quad (2.89)$$

Notons que α n'est défini qu'au choix d'une constante près, correspondant au choix de la borne inférieure pour chaque ligne de flot. Cet arbitraire revient à choisir une hypersurface de référence. Dans le cas d'un espace FLRW, ce choix est équivalent à choisir un facteur d'échelle initial a_0 .

Introduisons le gradient spatial ∇_μ défini par

$$\nabla_\mu f \equiv \perp_\mu{}^\nu D_\nu f \quad \text{et} \quad \nabla_\mu f_\lambda \equiv \perp_\mu{}^\nu \perp_\lambda{}^\sigma D_\nu f_\sigma. \quad (2.90)$$

Introduisons également les quantités *perturbées* suivantes

$$X_\mu \equiv \nabla_\mu \rho, \quad Y_\mu \equiv \nabla_\mu P, \quad Z_\mu \equiv \nabla_\mu \Theta, \quad W_\mu \equiv \nabla_\mu \alpha. \quad (2.91)$$

Dans un espace de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker contenant un fluide parfait, tous les gradients spatiaux sont nuls. C'est en ce sens que les grandeurs définies dans (2.91) sont des perturbations.

Nous pouvons dès lors introduire les quantités invariantes de jauge suivantes

$$\zeta_{\mu}^{\text{LV}} = \nabla_{\mu}\alpha - \frac{\dot{\alpha}}{\dot{\rho}}\nabla_{\mu}\rho \quad (2.92)$$

$$\mathcal{R}_{\mu}^{\text{LV}} = -\nabla_{\mu}\alpha, \quad (2.93)$$

qui sont respectivement la perturbation de courbure sur les hypersurfaces iso-densité et la perturbation de courbure comobile. Ces quantités sont naturellement invariantes de jauge puisqu'elles sont définies de façon covariante sur n'importe quel espace-temps perturbé.

De façon à comparer ces résultats avec les approches précédentes, il est nécessaire d'introduire un système de coordonnées. Nous obtenons alors la perturbation de courbure sur les hypersurfaces iso-densité définie de façon covariante en fonction de celle définie au deuxième ordre

$$\zeta^{\text{LV}} = \zeta_{MW}^{(2)} - \left(\zeta_{MW}^{(1)}\right)^2, \quad (2.94)$$

où nous avons introduit $\zeta_{\mu}^{\text{LV}} = \nabla_{\mu}\zeta^{\text{LV}}$.

2.3.4 Bilan

L'approche covariante, valable sur tout espace-temps, permet de définir des quantités invariantes de jauge à toute échelle, de façon particulièrement simple et naturelle. En ce sens, elle apparaît bien plus efficace qu'un traitement perturbatif qui n'est valable qu'autour d'un espace-temps de référence (espace de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker par exemple) et qui nécessite des calculs d'autant plus difficiles que l'on s'intéresse à des ordres de perturbation élevés. D'autre part, l'approche covariante permet de retrouver les résultats perturbatifs en introduisant un système de coordonnées particulier.

En revanche, bien que la recherche de quantités invariantes de jauge s'avère nécessaire, il n'en reste pas moins deux questions importantes à explorer : l'évolution des quantités invariantes de jauge ainsi que le lien avec les observables. Dans la suite de ce chapitre, nous abordons l'évolution des perturbations. Le lien avec les observables est un problème qui reste ouvert bien que certains résultats concernant les fluctuations de température du fond diffus cosmologique aient été récemment obtenus (voir [Bartolo *et al.*, 2006]).

2.4 Équations d'Einstein

Cette partie traite des équations d'évolution des perturbations obtenues à partir des équations d'Einstein. Les équations de conservation sont étudiées dans la partie

suivante.

Bien que l'étude des perturbations du premier ordre soit devenue standard, les expressions des équations d'Einstein à des ordres plus élevés apparaissent particulièrement complexes et leur interprétation en devient mal-aisée.

Deux approches équivalentes permettent d'obtenir les équations d'évolution des perturbations. La première consiste à calculer le tenseur d'Einstein perturbé. La seconde utilise une approche plus géométrique en terme d'hypersurfaces de genre espace dont on étudie l'évolution temporelle. Ce feuilletage 3 + 1 est utilisé notamment dans le formalisme ADM [Arnowitt *et al.*, 1962].

Utilisant un feuilletage 3 + 1, nous ré-écrivons la métrique sous la forme

$$ds^2 = N^2(x, t)d\eta^2 - \gamma_{ij} [N^i(x, t)d\eta + dx^i] [N^j(x, t)d\eta + dx^j] , \quad (2.95)$$

où la fonction N est appelée fonction de retard tandis que N_i est le vecteur déplacement. La métrique spatiale perturbée γ_{ij} permet de monter et descendre les indices du vecteur N^i . Nous obtenons alors aisément les composantes de la métrique inverse $g^{\mu\nu}$ (voir annexe C)

$$g^{00} = \frac{1}{N^2} , \quad (2.96)$$

$$g^{0i} = -\frac{N^i}{N^2} , \quad (2.97)$$

$$g^{ij} = -\gamma^{ij} + \frac{N^i N^j}{N^2} . \quad (2.98)$$

Par comparaison avec la forme de la métrique (2.2), nous obtenons

$$N = a e^\alpha , \quad (2.99)$$

$$N^i = a^2 \gamma^{ij} B_j , \quad (2.100)$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{2} \ln (1 + 2\phi + a^2 \gamma^{ij} B_i B_j) , \quad (2.101)$$

$$\gamma^{ij} = \frac{1}{a^2} (\omega^{ij} + h^{ij} + h^{ik} h_k^j + h^{ik} h_k^l h_l^j + \dots) . \quad (2.102)$$

Dans la suite, nous utilisons ces expressions ainsi que les résultats de l'annexe A afin d'établir les équations d'Einstein au premier et au second ordre.

2.4.1 Équations d'Einstein au premier ordre

Modes scalaires

Les équations d'Einstein au premier ordre fournissent quatre équations scalaires. Ces équations, qui correspondent respectivement à la composante 0-0, à la compo-

sante 0-i (en simplifiant¹⁶ par ∇_i), à la trace de la partie spatiale et à la partie sans trace de la partie spatiale (en simplifiant par $\nabla_i \nabla_j$) des équations d'Einstein, ont pour forme

$$\Delta \Psi + 3\mathcal{K}\Psi - 3\mathcal{H}\Psi' - 3\mathcal{H}^2\Phi = \frac{3}{2} \mathcal{H}^2 \sum_i \Omega_i \delta_i^\sharp, \quad (2.103)$$

$$\Psi' + \mathcal{H}\Phi = -\frac{3}{2} \mathcal{H}^2 \sum_i \Omega_i (1 + w_i) V_i, \quad (2.104)$$

$$\Psi - \Phi = 3\mathcal{H}^2 \sum_i \Omega_i w_i \pi_i, \quad (2.105)$$

$$\begin{aligned} \Psi'' + 2\mathcal{H}\Psi' - \mathcal{K}\Psi + \mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi &= \frac{3}{2} \mathcal{H}^2 \sum_i \Omega_i \\ &\left(w_i \Gamma_i + \frac{2}{3} w_i \Delta \pi_i + c_{s,i}^2 \delta_i^\sharp \right) \end{aligned} \quad (2.106)$$

Dans chacune de ces équations, nous avons décomposé les éléments du tenseur énergie-impulsion en une somme sur les différents fluides indicés par i .

L'équation de contrainte (2.105) nous indique qu'en l'absence de pression anisotrope, les potentiels de Bardeen sont égaux. Remarquons également que nous obtenons l'équivalent relativiste de l'équation de Poisson à partir des équations (2.103) et (2.104)

$$[\Delta + 3\mathcal{K}] \Psi = \frac{\kappa}{2} \rho_0 a^2 [\delta^\sharp - 3(1 + w) V] = \frac{3}{2} \mathcal{H}^2 \sum_i \Omega_i [\delta_i^\sharp - 3(1 + w_i) V_i]. \quad (2.107)$$

Cette équation diffère de son équivalent newtonien par les seuls termes de courbure et de vitesse. En jauge comobile, c'est-à-dire lorsque l'observateur suit le mouvement du fluide, la vitesse disparaît du membre de droite de l'équation de Poisson (2.107), ce qui se traduit, en terme de quantités invariantes de jauge, par

$$[\Delta + 3\mathcal{K}] \Psi = \frac{\kappa}{2} \rho_0 a^2 \delta^\sharp = \frac{3}{2} \mathcal{H}^2 \sum_i \Omega_i \delta_i^\sharp. \quad (2.108)$$

Du fait des identités de Bianchi, seules deux des quatre équations (2.103)-(2.106) sont indépendantes. Nous pouvons par exemple conserver l'équation de contrainte (2.105) et l'utiliser dans une combinaison des équations (2.106) et (2.103) afin d'obtenir une équation ne dépendant que d'un seul potentiel de Bardeen

$$\Psi'' - c_s^2 \Delta \Psi + 3\mathcal{H}(1 + c_s^2)\Psi' + [2\mathcal{H}' + (\mathcal{H}^2 - \mathcal{K})(1 + 3c_s^2)] \Psi = \Xi_\Psi, \quad (2.109)$$

¹⁶Cette opération n'est définie qu'à une constante près, qui correspondrait à un mode zéro. Dès lors que l'on considère des perturbations de valeur moyenne nulle, ce mode zéro peut être absorbé dans les équations du mouvement non-perturbées. En revanche, au sein d'un volume fini, le processus de moyenne doit être précisé.

où le terme de source est défini par

$$\Xi_{\Psi} = \kappa \rho_0 a^2 \left[\frac{1}{2} w \Gamma + \frac{1}{3} w \Delta \pi + 2\mathcal{H}' w \pi + 3\mathcal{H}^2 (1 - c_s^2) \pi \right] . \quad (2.110)$$

Remarquons que le terme de source Ξ_{Ψ} s'annule pour des perturbations adiabatiques et en l'absence de pression anisotrope.

Modes vectoriels

Les composantes 0-i et i-j des équations d'Einstein aboutissent à deux équations vectorielles

$$\Delta \bar{\Phi}_i + 2\mathcal{K} \bar{\Phi}_i = -6\mathcal{H}^2 \sum_f \Omega_f (1 + w_f) \bar{V}_{i,f} , \quad (2.111)$$

$$\bar{\Phi}'_i + 2\mathcal{H} \bar{\Phi}_i = 3\mathcal{H}^2 \sum_f \Omega_f w_f \bar{\pi}_{i,f} . \quad (2.112)$$

Ces deux équations forment un système lié du fait des identités de Bianchi et il est possible de n'en conserver qu'une seule. En particulier, l'équation (2.112) nous indique qu'en l'absence d'une composante vectorielle de la pression anisotrope, les perturbations vectorielles décroissent avec le facteur d'échelle.

Modes tensoriels

La composante i-j des équations d'Einstein fournit l'unique équation tensorielle

$$\bar{\bar{E}}''_{ij} + 2\mathcal{H} \bar{\bar{E}}'_{ij} + (2\mathcal{K} - \Delta) \bar{\bar{E}}_{ij} = 3\mathcal{H}^2 \sum_f \Omega_f w_f \bar{\bar{\pi}}_{ij,f} , \quad (2.113)$$

qui régit l'évolution des ondes gravitationnelles.

2.4.2 Équations d'Einstein au deuxième ordre

Les équations d'Einstein sont particulièrement difficiles à manier au deuxième ordre dans les perturbations sans fixer la jauge. Aussi, nous généralisons la définition des potentiels de Bardeen en fixant quatre degrés de liberté, à savoir

$$B = 0 \quad , \quad E = 0 \quad , \quad \bar{B}_i = 0 . \quad (2.114)$$

Dans la suite, nous négligerons les modes vectoriels¹⁷. La composante 0-0 des équations d'Einstein fournit

$$\begin{aligned}
& \kappa \rho_0 a^2 [(1 + 2\Phi)(1 + \delta^\sharp) + (1 + w)(V^i V_i)] \\
= & 2\Delta\Psi + 6\mathcal{K}\Psi - 6\mathcal{H}\Psi' + 6\mathcal{K}\Phi \\
& + 12\mathcal{K}\Psi^2 + 12\mathcal{K}\Phi\Psi + 4\mathcal{K}\bar{\bar{E}}_{ij}\bar{\bar{E}}^{ij} + 8\Psi\Delta\Psi + 4\Phi\Delta\Psi + 3\Psi'^2 \\
& - 12\mathcal{H}\Psi\Psi' + 3\nabla_i\Psi\nabla^i\Psi - 4\mathcal{H}\bar{\bar{E}}'_{ij}\bar{\bar{E}}^{ij} - \frac{1}{2}\bar{\bar{E}}'_{ij}\bar{\bar{E}}'^{ij} \\
& + 2\bar{\bar{E}}_{ij}\left[\Delta\bar{\bar{E}}^{ij} - \nabla_k\nabla^i\bar{\bar{E}}^{jk}\right] - 2\bar{\bar{E}}^{ij}\nabla_i\nabla_j\Psi - \nabla_k\bar{\bar{E}}^{il}\nabla_i\bar{\bar{E}}^k_l \\
& + \frac{3}{2}\nabla_i\bar{\bar{E}}_{jk}\nabla^i\bar{\bar{E}}^{jk} .
\end{aligned} \tag{2.115}$$

La composante 0-i donne

$$\begin{aligned}
& \kappa \rho_0 a^2 \left\{ -w\Gamma V_i + (1 + w) [-V_i - \Phi V_i + 2\Psi V_i - 2E_{ij}V^j] + (1 + c_s^2)\delta^\sharp V_i \right\} \\
= & 2\mathcal{H}\nabla_i\Phi + 2\nabla_i\Psi' - 4\mathcal{H}\Phi\nabla_i\Phi + 4\Psi\nabla_i\Psi' + 4\Psi'\nabla_i\Psi - 2\Psi'\nabla_i\Phi \\
& - \bar{\bar{E}}'_{ij}\nabla^j\Phi - \bar{\bar{E}}'_{ij}\nabla^j\Psi + 2\bar{\bar{E}}_{ij}\nabla^j\Psi' + \bar{\bar{E}}'_{jk}\nabla_i\bar{\bar{E}}^{jk} \\
& + 2\bar{\bar{E}}^{jk}\left[\nabla_i\bar{\bar{E}}'_{jk} - \nabla_j\bar{\bar{E}}'_{ik}\right] .
\end{aligned} \tag{2.116}$$

La composante proportionnelle à ω_{ij} s'écrit

$$\begin{aligned}
& \kappa \rho_0 a^2 [w(1 + \Gamma)(1 - 2\Psi) + c_s^2\delta^\sharp(1 - 2\Psi)] \\
= & -(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 + \mathcal{K}) + 2(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)(\Phi + \Psi) + 2\mathcal{H}\Phi' + \Delta\Phi + 2\Psi'' + 4\mathcal{H}\Psi' - \Delta\Psi \\
& - 4(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi^2 - \nabla_k\Phi\nabla^k\Phi - 8\mathcal{H}\Phi\Phi' - 2\Phi\Delta\Phi - 2\Psi\Delta\Psi \\
& - 8\mathcal{H}\Phi\Psi' - 4\mathcal{H}\Phi'\Psi - 2\Psi'\Phi' - 4\Phi\Psi'' \\
& - 4(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi\Psi - 2\nabla_k\Psi\nabla^k\Psi + \Psi'^2 - 2\bar{\bar{E}}^{kl}\nabla_k\nabla_l\Phi \\
& - 4\mathcal{K}\bar{\bar{E}}^{ij}\bar{\bar{E}}_{ij} + 2\bar{\bar{E}}^{ij}\bar{\bar{E}}''_{ij} + 4\mathcal{H}\bar{\bar{E}}^{ij}\bar{\bar{E}}'_{ij} + \frac{3}{2}\bar{\bar{E}}'^{ij}\bar{\bar{E}}'_{ij} - 2\bar{\bar{E}}^{ij}\Delta\bar{\bar{E}}_{ij} \\
& + \nabla_k\bar{\bar{E}}_{ij}\nabla_i\bar{\bar{E}}^{jk} - \frac{3}{2}\nabla_k\bar{\bar{E}}_{ij}\nabla^k\bar{\bar{E}}^{ij} + 2\bar{\bar{E}}^{ij}\nabla_k\nabla_i\bar{\bar{E}}_j^k .
\end{aligned} \tag{2.117}$$

¹⁷Nous verrons en étudiant les perturbations, que les modes vectoriels sont en général rapidement négligeables (voir page 63).

Enfin, la partie hors diagonale des équations d'Einstein fournit

$$\begin{aligned}
& \kappa \rho_0 a^2 \left[2w(1 + \Gamma) \bar{\bar{E}}_{ij} + 2c_s^2 \bar{\bar{E}}_{ij} \delta^\sharp + (1 + w) V_i V_j \right] \\
= & \nabla_i \nabla_j (\Psi - \Phi) + \bar{\bar{E}}''_{ij} + 2\mathcal{H} \bar{\bar{E}}'_{ij} - \Delta \bar{\bar{E}}_{ij} - 2(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 + 3\mathcal{K}) \bar{\bar{E}}_{ij} + 2\nabla_k \nabla_{(i} \bar{\bar{E}}_{j)k} \\
& + \nabla_i \Phi \nabla_j \Phi + 2\Phi \nabla_i \nabla_j \Phi - 2\nabla_{(i} \Phi \nabla_{j)} \Psi - 2\Phi \bar{\bar{E}}''_{ij} - 4\mathcal{H} \Phi \bar{\bar{E}}'_{ij} + 4\mathcal{H} \Phi' \bar{\bar{E}}_{ij} - \Phi' \bar{\bar{E}}'_{ij} \\
& + 4(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) \Phi \bar{\bar{E}}_{ij} + 2\bar{\bar{E}}_{ij} \Delta \Phi - \nabla_k \Phi \nabla^k \bar{\bar{E}}_{ij} + 2\nabla^k \Phi \nabla_{(i} \bar{\bar{E}}_{j)k} \\
& + 6\Psi'' \bar{\bar{E}}_{ij} - 12\mathcal{K} \Psi \bar{\bar{E}}_{ij} + 12\mathcal{H} \Psi' \bar{\bar{E}}_{ij} + \Psi' \bar{\bar{E}}'_{ij} - 2\Psi \Delta \bar{\bar{E}}_{ij} - 4\bar{\bar{E}}_{ij} \Delta \Psi + 4\Psi \nabla^k \nabla_{(i} \bar{\bar{E}}_{j)k} \\
& + 4\bar{\bar{E}}_{k(i} \nabla_{j)} \nabla^k \Psi - 3\nabla_k \Psi \nabla^k \bar{\bar{E}}_{ij} + 2\nabla_k \Psi \nabla_{(i} \bar{\bar{E}}_{j)k} + 2\Psi \nabla_i \nabla_j \Psi + 3\nabla_i \Psi \nabla_j \Psi \\
& - 2\bar{\bar{E}}'_{ik} \bar{\bar{E}}'_{j}{}^k + 2\bar{\bar{E}}^{kl} \nabla_k \nabla_l \bar{\bar{E}}_{ij} + 2\bar{\bar{E}}^{kl} \nabla_{(i} \nabla_{j)} \bar{\bar{E}}_{kl} - 4\bar{\bar{E}}^{kl} \nabla_k \nabla_{(i} \bar{\bar{E}}_{j)l} + \nabla_i \bar{\bar{E}}_{kl} \nabla_j \bar{\bar{E}}^{kl} .
\end{aligned} \tag{2.118}$$

Nous avons introduit la vitesse invariante de jauge $V_i = \nabla_i V + \bar{V}_i$.

Nous constatons qu'il n'est plus possible de décomposer les perturbations en modes scalaires, vectoriels ou tensoriels. Ces trois types de modes évoluent de façon couplée.

2.5 Équations de conservation

Dans cette partie, nous étudions les équations qui découlent de la conservation du tenseur énergie-impulsion total

$$D_\mu T^{\mu\nu} = 0 . \tag{2.119}$$

Lorsque l'on considère un mélange de fluides en interaction, le tenseur énergie-impulsion de chaque fluide n'est pas nécessairement conservé et satisfait à la relation générale

$$D_\mu T_\nu^{(a)} = Q_\nu^{(a)} , \tag{2.120}$$

où le terme de source vérifie

$$\sum_a Q_\nu^{(a)} = 0 , \tag{2.121}$$

la somme portant sur les différents fluides.

Nous ne nous intéresserons ici qu'au tenseur énergie-impulsion total. Les résultats obtenus s'appliqueront indépendamment à chaque fluide dans la mesure où les seules interactions entre fluides seront gravitationnelles.

2.5.1 Équations de conservation au premier ordre

Modes scalaires Les relations de conservation du tenseur énergie-impulsion total conduisent à une équation de conservation de la densité d'énergie

$$\delta'^\sharp + 3\mathcal{H}(c_s^2 - w)\delta^\sharp + (1 + w)\Delta V = -3\mathcal{H}w\Gamma + 3(1 + w)\Psi' , \tag{2.122}$$

et à l'équivalent relativiste de l'équation d'Euler

$$V' + \mathcal{H}(1 - 3c_s^2)V = -\frac{c_s^2}{1+w} \delta^\# - \Phi - \frac{w}{1+w} \left[\Gamma + \frac{2}{3} (\Delta + 3\mathcal{K}) \pi \right]. \quad (2.123)$$

Dans un espace statique, $\mathcal{H} = 0$, et pour un fluide non-relativiste, $w = c_s^2 = 0$, nous retrouvons les équations newtoniennes

$$\delta\rho' + \nabla(\rho\vec{v}') = 3\rho\Psi', \quad (2.124)$$

$$\vec{v}' = -\nabla\Phi - \frac{\nabla P}{\rho}, \quad (2.125)$$

où le terme de pression provient de $c_s^2\delta + w\Gamma$. Notons le terme gravitationnel présent dans l'équation de conservation de la masse. Ce terme disparaît si l'on se place en jauge de feuilletage plat¹⁸.

Le coefficient $1 + w$ devant le terme $\nabla_i V^i = \Delta V$ dans l'équation de conservation (2.122) indique que cette dernière fait intervenir le flux d'énergie total, proportionnel à $\rho + P$ et non le flux d'énergie de masse, proportionnel à ρ .

Le terme en $\mathcal{H}(1 - 3c_s^2)$ dans l'équation d'Euler traduit l'effet de l'expansion de l'univers. Notons en particulier que l'expansion agit différemment sur les particules relativistes et non-relativistes. Les particules non-relativistes voient leur vitesse décroître en a^{-1} tandis que la vitesse des particules relativistes¹⁹ reste constante (lorsque le second membre est nul, par exemple dans un espace homogène).

Enfin le terme gravitationnel $-\Phi$ apparaissant dans l'équation d'Euler s'apparente à son équivalent newtonien car nous avons choisi la jauge newtonienne. En jauge de feuilletage plat, en revanche, le terme de source gravitationnel devient $-\Phi - 3c_s^2\Psi$: l'effet de la gravitation est alors deux fois plus intense sur la matière relativiste que sur la matière non-relativiste²⁰.

Modes vectoriels La seule équation vectorielle est obtenue à partir de l'équation d'Euler

$$\bar{V}'_i + \mathcal{H}(1 - 3c_s^2)\bar{V}_i = -\frac{w}{2(1+w)} (\Delta + 2\mathcal{K}) \bar{\pi}_i. \quad (2.126)$$

Elle est similaire à l'équation d'Euler scalaire bien que le terme de gravité soit absent du terme de source : en jauge newtonienne, la vorticit   n'est pas généré par les potentiels de Bardeen.

¹⁸Il suffit alors de remplacer le contraste de densit   dans la jauge newtonienne $\delta^\#$ par son   quivalent dans la jauge de feuilletage plat δ^\flat .

¹⁹La vitesse des particules relativistes s'interpr  te comme une anisotropie dipolaire.

²⁰En effet, si la pression anisotrope est n  gligeable, $\Psi = \Phi$. Il suffit alors d'utiliser le fait que la vitesse du son pour la radiation vaut $c_s^2 = 1/3$ tandis qu'elle est quasiment nulle pour la mati  re non relativiste.

2.5.2 Équations de conservation au second ordre

Nous choisissons une jauge telle que $B = 0$, $E = 0$ et $\bar{B}_i = 0$, qui généralise la jauge newtonienne. Les équations de conservation s'écrivent alors

$$\begin{aligned}
& \delta^\sharp + [3\mathcal{H}(c_s^2 - w) + (1 + c_s^2)(\Delta V - 3\Psi')] \delta^\sharp + (1 + c_s^2)V_i \nabla^i \delta^\sharp \\
& + (1 + w)\Delta V + 3\mathcal{H}w\Gamma - 3(1 + w)\Psi' + w\Gamma(\Delta V - 3\Psi') + wV_i \nabla^i \Gamma \\
= & -\mathcal{H}(1 + w)(1 - 3c_s^2)V_i V^i - (1 + w) \left[2V_i V^i + 2V^i \nabla_i \Phi + \nabla_i V^i \Phi \right. \\
& \left. - 12\Psi\Psi' - 4\nabla_{(i} \bar{E}'_{j)} \nabla^{(i} \bar{E}^{j)} - 4\bar{\bar{E}}'_{ij} \bar{\bar{E}}^{ij} - 4\bar{\bar{E}}'_{ij} \nabla^{(i} \bar{E}^{j)} - 4\nabla_{(i} \bar{E}'_{j)} \bar{\bar{E}}^{ij} \right] \quad (2.127)
\end{aligned}$$

L'équation d'Euler au deuxième ordre devient

$$\begin{aligned}
& -\delta^\sharp(1 + c_s^2)V_i - c_s^2 \nabla_i \delta^\sharp - \delta^\sharp \left\{ (1 + c_s^2) [V'_i + \mathcal{H}(3w - 1)V_i - \nabla_i \Phi] + c_s^2 V'_i \right\} \\
& -w\Gamma' V_i - w\nabla_i \Gamma + \Gamma [3\mathcal{H}(1 + w)c_s^2 V_i - 4\mathcal{H}wV_i - w\nabla_i \Phi] \\
= & -(1 + w) \left\{ -V'_i - V_i \Delta V - V^j \nabla_j V_i - \nabla_i \Phi - \mathcal{H}V_i \right. \\
& \left. + 3\mathcal{H}c_s^2 [V_i + \Phi V_i - 2\Psi V_i + 2\nabla_{(i} \bar{E}_{j)} V^j + 2\bar{\bar{E}}_{ij} V^j] \right. \\
& \left. + \Phi' V_i + \mathcal{H}\Phi V_i + 2\Phi \nabla_i \Phi + 5\Psi' V_i - 2\nabla_{(i} \bar{E}'_{j)} V^j - 2\bar{\bar{E}}'_{ij} V^j \right. \\
& \left. + 2\Psi V'_i - 2\nabla_{(i} \bar{E}_{j)} V'^j - 2\bar{\bar{E}}_{ij} V'^j - 2\mathcal{H}\Psi V_i + 2\mathcal{H}\nabla_{(i} \bar{E}_{j)} V^j + 2\bar{\bar{E}}_{ij} V^j \right\} \quad (2.128)
\end{aligned}$$

où l'on a négligé la pression anisotrope.

Ici encore, les équations de conservation sont bien plus complexes au deuxième ordre qu'au premier ordre.

2.6 Évolution des perturbations

Nous utilisons dans cette partie les équations établies dans les parties précédentes afin de déterminer l'évolution des perturbations. Nous nous attachons principalement à décrire les résultats au premier ordre.

2.6.1 Modes vectoriels

En l'absence de pression anisotrope, l'équation (2.112) permet d'obtenir l'évolution temporelle des modes vectoriels

$$\bar{\Phi}_i \propto a^{-2}. \quad (2.129)$$

Les modes vectoriels sont donc en général négligeables²¹. L'équation d'Euler vectorielle (2.126) montre que, dans ces conditions, la vorticité décroît également rapidement pour un fluide non-relativiste²²

$$\bar{V}_i \propto a^{-(1-3c_s^2)}. \quad (2.130)$$

Dans toute la suite, non négligeons donc les modes vectoriels²³.

2.6.2 Modes tensoriels

L'évolution des modes tensoriels se déduit de l'équation (2.113). Dans un univers à sections spatiales plates et en l'absence de pression anisotrope, la transformée de Fourier de cette équation s'écrit

$$\bar{\bar{E}}_{ij}'' + 2\mathcal{H}\bar{\bar{E}}_{ij}' + k^2\bar{\bar{E}}_{ij} = 0, \quad (2.131)$$

où $k = 2\pi/\lambda$ est le module du vecteur d'onde associ e à la longueur d'onde λ . Cette équation peut également se mettre sous la forme

$$\frac{d^2\bar{\bar{E}}_{ij}}{dx^2} + \frac{2\nu}{x}\frac{d\bar{\bar{E}}_{ij}}{dx} + \bar{\bar{E}}_{ij} = 0, \quad (2.132)$$

où nous avons posé $a \propto \eta^\nu$ et $x = k|\eta|$. Les solutions de cette équation s'écrivent alors

$$\bar{\bar{E}}_{ij} = (k|\eta|)^{\frac{1}{2}-\nu} \left[\bar{\bar{A}}_{ij} J_{\nu-\frac{1}{2}}(k|\eta|) + \bar{\bar{B}}_{ij} N_{\nu-\frac{1}{2}}(k|\eta|) \right], \quad (2.133)$$

où $\bar{\bar{A}}_{ij}$ et $\bar{\bar{B}}_{ij}$ sont deux tenseurs constants, transverses et sans trace tandis que J_ν et N_ν sont les fonctions de Bessel et Neuman d'indice ν . Nous distinguons alors deux régimes particuliers :

- les modes de grande longueur d'onde, tels que $k\eta \ll 1$, sont "fig es". En effet, le terme proportionnel à k^2 peut alors être n eglig e devant les dérivées temporelles et les solutions constantes sont solutions de l'équation.
- les modes de petite longueur d'onde, appartenant à l'horizon causal défini par $k\eta \gg 1$, évoluent comme un oscillateur amorti, dont le coefficient d'amortissement, $2\mathcal{H}$, dépend du temps.

2.6.3 Modes scalaires

Dans toute cette partie nous supposerons que les sections spatiales sont plates, *i.e.* $\mathcal{K} = 0$.

²¹En l'absence de défauts topologiques ou de champ magnétique.

²²Lorsque l'univers est domin e par la radiation, la vorticité n'évolue pas et conserve donc sa valeur initiale acquise au début de la phase dominée par la radiation.

²³Si l'univers est en contraction, les modes vectoriels ont une amplitude croissante. Nous ne ferons cependant pas cette hypothèse ici.

Potentiel gravitationnel

Supposons que l'univers soit dominé par un fluide d'équation d'état constante $P = w\rho$. Le facteur d'échelle varie donc en $a \propto \eta^\nu$ avec $\nu = 2/(1 + 3w)$. En posant $x = k|\eta|$ et $f(x) = x^\nu \Psi$, nous pouvons ré-écrire l'équation d'évolution du potentiel gravitationnel (2.109)

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{2}{\nu} \frac{df}{dx} + \left[c_s^2 - \frac{\nu(\nu + 1)}{x^2} \right] f = \frac{x^\nu}{k^2} \Xi_\Psi . \quad (2.134)$$

En l'absence de source, les solutions de cette équation sont données en terme de fonctions de Bessel et Neuman sphériques

$$\Psi = x^{-\nu} \left[A j_{\nu+\frac{1}{2}}(c_s^2 x) + B n_{\nu+\frac{1}{2}}(c_s^2 x) \right] , \quad (2.135)$$

où

$$j_\mu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{\mu+\frac{1}{2}}(z) \quad \text{et} \quad n_\mu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} N_{\mu+\frac{1}{2}}(z)$$

À l'intérieur de l'horizon sonore, le potentiel prend la forme

$$\Psi = x^{-1-\nu} [B_1 \cos(kc_s \eta) + B_2 \sin(kc_s \eta)] \quad \text{pour} \quad kc_s \eta \gg 1 . \quad (2.136)$$

Le potentiel oscille donc autour d'une valeur nulle. L'amplitude des oscillations décroît en $a^{-\frac{\nu+1}{\nu}}$, ce qui, pour un univers dominé par la radiation dans lequel $\nu = 1$, conduit à une décroissance en a^{-2} de l'amplitude du potentiel gravitationnel. Aux petites échelles, le potentiel gravitationnel s'avère quasiment négligeable pendant l'ère de domination de la radiation. Dans un univers dominé par la matière, la vitesse du son est quasiment nulle. Seuls les modes de très petite longueur d'onde appartiennent à l'horizon sonore. Dans cette limite, il n'est plus possible de négliger les effets non-linéaires et/ou non-gravitationnel qui n'ont pas été pris en compte dans l'équation (2.109).

À l'extérieur de l'horizon sonore,

$$\Psi = A_+ + A_- x^{-1-2\nu} \quad \text{pour} \quad kc_s^2 \eta \ll 1 . \quad (2.137)$$

Le mode décroissant est rapidement négligeable et seul domine le terme constant.

Potentiel gravitationnel aux grandes échelles

Introduisons la fonction [Mukhanov *et al.*, 1992]

$$\theta = \frac{\mathcal{H}}{a} \left[\frac{3}{2(\mathcal{H}^2 - \mathcal{H} + \mathcal{K})} \right]^{\frac{1}{2}} , \quad (2.138)$$

et la variable réduite

$$u = \frac{2}{3} \frac{a^2 \theta}{\mathcal{H}} \Psi . \quad (2.139)$$

L'équation d'évolution pour le potentiel gravitationnel prend alors la forme canonique

$$u'' - c_s^2 \Delta u - \frac{\theta''}{\theta} u = \frac{2}{3} \frac{\theta}{\mathcal{H}} a^2 \Xi_\Psi , \quad (2.140)$$

le terme de source étant défini par l'équation (2.110).

Les solutions de l'équation homogène sont connues pour les modes de Fourier de grande longueur d'onde, *i.e.* $k^2 c_s^2 \theta / \theta'' \ll 1$ et sont de la forme

$$u(k, \eta) \approx A(k) \theta(\eta) + B(k) \theta(\eta) \int \frac{d\eta'}{\theta^2(\eta')} , \quad (2.141)$$

$A(k)$ et $B(k)$ étant des constantes d'intégration indépendantes du temps. Nous en déduisons alors l'expression du potentiel gravitationnel, aux grandes échelles, en l'absence de perturbations d'entropie et de pression anisotrope

$$\Psi \approx A_- \frac{\mathcal{H}}{a^2} + A_+ \frac{\mathcal{H}}{a^2} \int d\eta' a^2 (1 + w) . \quad (2.142)$$

Les constantes A_+ et A_- correspondent respectivement aux modes croissant et décroissant de la perturbation de courbure.

Lors d'une phase d'expansion induite par un fluide d'équation d'état $P = w\rho$ avec $w = cste$, le facteur d'échelle varie en $a \propto \eta^{\frac{2}{1+3w}}$ et le mode croissant du potentiel s'exprime simplement

$$\Psi \sim 2A_+ \frac{1+w}{5+3w} . \quad (2.143)$$

Ainsi, au moment de la transition entre les phases dominées par la radiation et la matière, le potentiel varie d'un facteur

$$\frac{\Psi(\eta \gg \eta_{\text{eq}})}{\Psi(\eta \ll \eta_{\text{eq}})} = \frac{9}{10} . \quad (2.144)$$

Ce résultat est bien entendu valable pour les seules grandes échelles, en l'absence de pression anisotrope et de perturbation d'entropie, à condition de pouvoir négliger le mode décroissant au moment de la transition.

Contraste de densité

À l'aide des deux équations de conservation scalaires (2.122) et (2.123), nous obtenons l'équation d'évolution du contraste de densité

$$\delta''^\# + \mathcal{H} [3(c_s^2 - w) + (1 - 3w)] \delta'^\# + [3\mathcal{H}'(c_s^2 - w) + 3\mathcal{H}(c_s^2)' + 12\mathcal{H}^2(c_s^2 - w)] \delta^\# - c_s^2 \Delta \delta^\# = 3w\Psi'' + \mathcal{H} [12w - 9c_s^2(1 + w)] \Psi' + (1 + w)\Delta\Phi + \Upsilon_\delta , \quad (2.145)$$

le terme de source Υ_δ traduisant l'effet de la pression anisotrope et des perturbations d'entropie

$$\begin{aligned} \Upsilon_\delta = & w \left[\Delta\Gamma + \frac{2}{3}\Delta\Delta\pi - 2(\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}')\Delta\pi \right] - 3\mathcal{H}w\Gamma' \\ & + [9\mathcal{H}^2c_s^2(1+w) - 3\mathcal{H}'w - 12\mathcal{H}^2w] \Gamma . \end{aligned} \quad (2.146)$$

Considérons un fluide dont l'équation d'état est de la forme $P = w\rho$ avec $w = cste$. La vitesse du son dans le fluide est donc également constante et donnée par $c_s^2 = w$. Dans ces conditions, l'équation d'évolution (2.145) prend la forme

$$\delta''^\# + \mathcal{H}(1 - 3c_s^2)\delta'^\# - c_s^2\Delta\delta^\# = (1+w)\Delta\Psi + 3w\Psi'' + 3\mathcal{H}w(1 - 3c_s^2)\Psi' + \Upsilon_\delta . \quad (2.147)$$

Le contraste de densité se comporte donc comme un oscillateur amorti forcé par un terme de source composé du potentiel gravitationnel d'un côté et des perturbations d'entropie et de la pression anisotrope de l'autre. Cependant, le coefficient d'amortissement dépend du fluide considéré et prend une valeur nulle pour un fluide relativiste.

Bien que les perturbations vectorielles ou tensorielles puissent être générées pendant certaines phases de l'évolution de l'univers, l'équation (2.145) montre que ce sont principalement les perturbations scalaires qui sont responsables de la formation des structures. En effet, les modes vectoriels sont généralement décroissants et deviennent vite négligeables dans l'ère de la matière. Les perturbations tensorielles de la métrique évoluent, quant à elles, indépendamment de la matière en l'absence de pression anisotrope. Seules les perturbations scalaires interviennent dans l'évolution du contraste de densité. Remarquons tout de même que ce résultat n'est valable qu'au premier ordre car, aux ordres plus élevés, les couplages entre les modes tensoriels et scalaires peuvent contribuer à la formation des structures.

Perturbations de radiation dans l'ère de domination de la radiation Dans l'ère de domination de la radiation, dans un univers à sections spatiales plates, le potentiel gravitationnel prend la forme (2.107)

$$\Delta\Psi \approx \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\Omega_\gamma\delta_\gamma^\#, \quad (2.148)$$

où $\delta_\gamma^\#$ est le contraste de densité de la radiation, dont la dynamique est régie par l'équation²⁴ (2.145).

Aux petites échelles, nous avons vu page 57 que l'amplitude du potentiel gravitationnel décroissait en $a^{-2} \sim \mathcal{H}^2$ dans l'ère de domination de la matière. L'équation de Poisson nous indique donc que le contraste de densité possède une amplitude

²⁴Nous nous sommes insidieusement placés dans la jauge comobile dans laquelle l'équation de Poisson prend une forme semblable à son équivalent non-relativiste

constante. De plus, les oscillations du potentiel forcent celles du contraste de densité.

En revanche, aux grandes échelles, le potentiel est “gelé”. L’équation de Poisson induit un comportement²⁵ en a^2 du contraste de densité de la radiation pour des modes super-Hubble

$$\delta_\gamma \sim a^2 \quad \text{pour } k\eta \ll 1. \quad (2.149)$$

En posant $w = c_s^{\gamma 2} = 1/3$ dans l’équation (2.145) et en négligeant le terme de source Υ , nous obtenons l’équation²⁶

$$\frac{d^2\delta_\gamma}{dx^2} + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)\delta_\gamma = 0, \quad (2.150)$$

avec $x = kc_s^\gamma \eta$. Le contraste de densité s’exprime comme une combinaison linéaire de fonctions de Bessel et de Neumann

$$\delta_\gamma^{\text{h}} = (k\eta c_s^\gamma)^{\frac{1}{2}} [A_+ J_\kappa(kc_s^\gamma \eta) + A_- N_\kappa(kc_s^\gamma \eta)] \quad \text{avec } \kappa = \frac{\sqrt{17}}{2}. \quad (2.151)$$

Dans la limite des petites longueurs d’onde, *i.e.* telles que $kc_s^\gamma \eta \gg 1$, nous retrouvons un comportement oscillant non-amorti

$$\delta_\gamma^{\text{h}} \propto A_+ \cos(kc_s^\gamma \eta) + A_- \sin(kc_s^\gamma \eta). \quad (2.152)$$

Ce résultat était attendu puisque l’équation d’évolution (2.145) est celle d’un oscillateur harmonique non-amorti. Il n’y a donc pas de mécanisme d’instabilité, du fait de la pression de radiation.

Perturbations de matière dans l’ère de domination de la radiation Utilisons à nouveau l’équation d’évolution du contraste de densité mais, cette fois-ci, appliquée à la matière

$$\delta_b^{\prime\prime\text{h}} + \mathcal{H}\delta_b^{\prime\text{h}} + k^2 c_s^{\text{b}2} \delta_b^{\text{h}} = -k^2 \Psi \approx \frac{3}{2} \mathcal{H}^2 \Omega_\gamma \delta_\gamma^{\text{h}}. \quad (2.153)$$

Nous avons noté c_s^{b} la vitesse du son associée à la matière et nous nous sommes placés dans la jauge comobile. La taille de l’horizon sonore du fluide est donnée par $c_s^{\text{b}} \eta$. La vitesse du son pour les baryons étant proche de zéro, la plupart des modes de Fourier sont hors de l’horizon sonore, $kc_s^{\text{b}} \eta \ll 1$. Dans ces conditions, le terme de source peut être négligé et les solutions s’expriment comme une combinaison linéaire d’un mode sous-dominant²⁷ constant et d’un mode croissant comme le logarithme du facteur d’échelle

$$\delta_b^{\text{h}} = C_-(k)a^0 + C_+(k)\ln(a) \quad \text{lorsque } kc_s^{\text{b}} \eta \ll 1. \quad (2.154)$$

Le mode croissant évolue peu pendant l’ère de domination de la radiation et les structures ne se forment que lentement.

²⁵Pendant l’ère de domination de la radiation, $\mathcal{H} = a^{-1}$ et la densité d’énergie de la radiation décroît comme a^{-4} .

²⁶En jauge comobile.

²⁷Nous le nommerons *mode décroissant* bien que le terme semble inapproprié ici.

Perturbations de matière dans l'ère de domination de la matière L'équation de continuité appliquée au fluide de matière pendant l'ère de la matière conduit à

$$\delta_m^{\ddagger}'' + 2\mathcal{H}\delta_m^{\ddagger}' + \left(k^2 c_s^{\text{b}2} - \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\Omega_m\right)\delta_m^{\ddagger} = 0, \quad (2.155)$$

où nous avons utilisé l'équation de Poisson. Nous voyons apparaître une instabilité lorsque le coefficient devant δ_m^{\ddagger} est négatif, c'est à dire pour des longueurs d'onde λ telles que

$$\lambda > \lambda_J = c_s^{\text{b}} \frac{\pi}{G\rho_m}. \quad (2.156)$$

La longueur caractéristique λ_J est appelée *longueur de Jeans* et traduit la compétition entre la pression et la gravité. Lorsque la gravité domine les effets de pression, cette dernière ne peut contrer l'effondrement gravitationnel. L'instabilité affecte alors les longueurs d'onde suffisamment grandes devant la longueur de Jeans. Les longueurs d'onde $\lambda > \lambda_J$ sont soumises à une évolution principalement gravitationnelle tandis que les modes de courte longueur d'onde, $\lambda < \lambda_J$, évoluent sous les effets de pression. En d'autres termes, sur les distances considérées, le temps de propagation d'une onde de pression τ_p est bien plus grand que celui d'un effet gravitationnel τ_g où

$$\tau_p = \frac{\lambda}{c_s} \quad \text{et} \quad \tau_g = \frac{1}{\sqrt{G\rho_m}}. \quad (2.157)$$

Au contraire, les modes de longueur d'onde petite devant la longueur de Jeans subissent des oscillations amorties : l'effondrement gravitationnel est compensé par les effets de pression. Contrairement aux résultats obtenus pour la radiation, dont la longueur de Jeans peut atteindre la taille de l'horizon²⁸, les modes de perturbations de matière aux échelles cosmologiques évoluent principalement gravitationnellement et la pression du fluide de baryons peut être négligée.

Alors, l'équation d'évolution du contraste de densité devient

$$\delta_m^{\ddagger}'' + 2\mathcal{H}\delta_m^{\ddagger}' - \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\Omega_m\delta_m^{\ddagger} = 0. \quad (2.158)$$

Nous pouvons obtenir des indications sur les solutions de cette équation qui, dans le cas général, peut se révéler difficile à résoudre. Décomposons le contraste de densité en une partie temporelle et une partie spatiale

$$\delta(\eta, \mathbf{x}) = D(\eta)\check{\delta}(\mathbf{x}), \quad (2.159)$$

où la fonction $D(\eta)$ est le *facteur de croissance*. Dans un univers plat dominé par la matière, le facteur de croissance se décompose en deux solutions, l'une croissante D_+ , l'autre décroissante D_- telles que

$$D_+ = a \quad \text{et} \quad D_- = a^{-\frac{3}{2}}. \quad (2.160)$$

²⁸La vitesse du son dans l'ère de la radiation est proche de celle de la lumière.

En présence d'autres fluides et dans un univers plat, l'évolution temporelle du mode dominant n'est plus proportionnelle au facteur d'échelle (pour une discussion détaillée, voir [Lahav *et al.*, 1991] [Carroll *et al.*, 1992] [Hamilton, 2001]).

Enfin, nous avons négligé l'effet des non-linéarités qui sont susceptibles de prendre de l'importance au cours de l'effondrement gravitationnel, lorsque le contraste de densité est de l'ordre de l'unité. Pour un traitement complet des effets non-linéaires, on consultera avec profit [Bernardeau *et al.*, 2002].

Perturbation de courbure sur les hypersurfaces iso-densité

Afin de déterminer l'évolution des modes scalaires ré-écrivons la quantité invariante de jauge ζ_{BST} définie par la relation (2.72) sous la forme

$$\zeta_{\text{BST}} = \Psi + \frac{2\mathcal{H}}{3(1+w)(\mathcal{H}^2 + \mathcal{K})} \left[\Psi' + \left(1 - \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{H}^2} - \frac{\Delta}{3\mathcal{H}^2} \right) \mathcal{H}\Psi \right] - \frac{2\mathcal{H}w}{1+w} \pi, \quad (2.161)$$

où nous avons utilisé les équations d'Einstein (2.103) et (2.105). En utilisant les équations de Friedman non perturbées et l'équation maîtresse régissant la dynamique du potentiel gravitationnel (2.109), nous obtenons

$$\zeta'_{\text{BST}} = -\frac{2\mathcal{H}}{3(1+w)(\mathcal{H}^2 + \mathcal{K})} \left[\frac{\mathcal{H}}{3} \frac{\Delta}{\mathcal{H}^2} (\Psi' + \mathcal{H}\Psi) \right] + \mathcal{S}_{\Psi}, \quad (2.162)$$

où le terme \mathcal{S}_{Ψ} s'exprime en fonction de la pression anisotrope du fluide et des perturbation d'entropie

$$\mathcal{S}_{\Psi} = \mathcal{H} \frac{w}{1+w} \Gamma + \frac{2\mathcal{H}}{3} \frac{w}{1+w} \Delta\pi - 2\mathcal{H}^2 \frac{w}{1+w} \pi' + 6\mathcal{H}^3 \frac{1-w}{1+w} \pi. \quad (2.163)$$

Ainsi lorsque la pression anisotrope du fluide est nulle, ζ_{BST} est une quantité conservée aux grandes échelles pour des perturbations adiabatiques.

Conservation de la perturbation de courbure Le résultat précédent est tout à fait général et ne nécessite pas l'utilisation des équations d'Einstein : il est valable pour toute théorie de la gravitation. Ce résultat a été initialement établi au premier ordre dans les perturbations dans [Wands *et al.*, 2000] où la conservation de ζ_{BST} a été démontrée à partir de la conservation du tenseur énergie-impulsion. Il a ensuite été généralisé à tout ordre dans les perturbations dans [Lyth & Wands, 2003] et [Langlois & Vernizzi, 2006].

2.7 Conclusions

Nous avons introduit dans ce chapitre les notions principales permettant l'étude des perturbations cosmologiques et leur évolution. Le traitement des perturbations en cosmologie est légèrement différent de celui adopté en théorie des champs du fait de l'invariance de la relativité générale sous les changements de coordonnées. Plusieurs approches peuvent alors être choisies selon que des quantités invariantes de jauge sont utilisées ou que la jauge est fixée par un choix approprié du système de coordonnées.

Nous avons obtenu des quantités invariantes de jauge au premier et au deuxième ordre en puissance des perturbations. Cependant, dès le deuxième ordre, les équations d'évolution deviennent non-linéaires et délicates à résoudre. L'approche covariante, plus élégante, permet de définir "naturellement" des grandeurs invariantes de jauge et d'étudier leur conservation.

Utilisant les équations d'évolution et de conservation au premier ordre, nous avons pu déterminer le comportement des perturbations des fluides de matière, relativiste ou non, pendant différentes phases de l'univers. Afin de valider notre approche, nous nous devons de comparer ces résultats aux données observationnelles accessibles. Autrement dit, nous devons relier les quantités invariantes de jauge, non-linéaires dans les perturbations, aux observables. En particulier, les anisotropies de température et de polarisation du fond diffus cosmologique constituent une observable de choix. Le chapitre suivant a donc pour objet de décrire le lien entre notre étude générale des perturbations et nos observations du rayonnement fossile.

CHAPITRE 3

Fond diffus cosmologique

Sommaire

3.1	Équation de Boltzmann libre	73
3.1.1	Opérateur de Liouville	73
3.1.2	Feuilletage 3+1	74
3.1.3	Équation de Boltzmann non-perturbée	75
3.1.4	Brillance	76
3.1.5	Contraste de température	77
3.1.6	Choix d'une jauge	78
3.2	Décomposition du contraste de température	79
3.2.1	Décomposition en moments	79
3.2.2	Équations de la hiérarchie	83
3.3	Terme de collision et polarisation	86
3.3.1	Diffusion Compton	87
3.3.2	Influence de la polarisation	89
3.3.3	Hiérarchie de Boltzmann pour la polarisation	91
3.4	Interprétation	94
3.4.1	Polarisation	94
3.4.2	Effet Sachs-Wolfe	96
3.4.3	Limite de couplage fort	101
3.5	Spectre de puissance	104
3.5.1	Développement en harmoniques sphériques	104
3.5.2	Approximation des coefficients $a_{\ell m}$	106

3.5.3	Caractéristiques du spectre de puissance	107
3.6	Modulation dipolaire (article)	112
3.6.1	Présentation de l'article	114
3.6.2	Article	115
3.7	Fonctions de corrélation d'ordre plus élevé (article) . . .	128
3.7.1	Présentation de l'article	128
3.7.2	Article	131
3.8	Conclusions	158

Le rayonnement de fond cosmologique - ou fond diffus cosmologique - a été prédit par Gamov [Gamov, 1946] avant d'être mis en évidence en 1965 par Penzias et Wilson [Penzias & Wilson, 1965]. Ce rayonnement de fond s'interprète comme un "bain" quasiment isotrope de photons, qui, émis au moment de la recombinaison entre électrons et noyaux atomiques, se sont propagés librement jusqu'à nous. L'énergie des photons au moment de leur émission est alors de l'ordre de grandeur des énergies de transitions atomiques, *i.e.* de quelques électron-Volts et se répartit suivant une distribution de type corps noir.

Deux effets principaux caractérisent l'évolution de ces photons depuis leur émission. Le premier est lié à l'expansion de l'univers qui décale l'énergie des photons vers le rouge tout en préservant la structure de corps noir de leur distribution énergétique. Bien que la température au moment de la dernière interaction des photons soit de l'ordre de 3.10^3 K, la température du fond diffus cosmologique est aujourd'hui mesurée à 2,725 K. Le second consiste à prendre en compte les inhomogénéités présentes à l'émission et sur le trajet des photons ainsi que les éventuelles interactions lumière-matière. Par conséquent, de légères anisotropies doivent affecter la distribution spatiale de l'énergie des photons [Sachs & Wolfe, 1967] voire la distribution spectrale du rayonnement [Sunyaev & Zel'dovich, 1980] [Hu & Silk, 1993].

Les anisotropies de température sont ainsi reliées aux perturbations de métrique et leur étude fournit de précieuses indications tant sur les inhomogénéités primordiales que sur leur évolution. À cet effet, nous nous proposons de décrire les outils nécessaires à la compréhension des anisotropies et de leur origine. Le fluide de photons étant relativiste, l'approche cinétique, fondée sur l'équation de Boltzmann, est la mieux adaptée à cette démarche. Cette méthode, initialement développée par [Peebles & Yu, 1970] a été étendue, par la suite, dans [Bond & Efstathiou, 1984] [Bond & Efstathiou, 1987] [Ma & Bertschinger, 1995] [Hu *et al.*, 1998]. Dans la première partie de ce chapitre, sont établies les équations d'évolution des anisotropies de température *au deuxième ordre dans les perturbations* et en l'absence d'interaction avec la matière. Incluant par la suite les effets collisionnels - au premier ordre, cette fois-ci - nous examinerons l'influence de la polarisation du rayonnement sur les fluctuations de température. Des compléments à ce sujet peuvent être trouvés dans [Seljak & Zaldarriaga, 1997] [Zaldarriaga & Seljak, 1997] [Kamionkowski *et al.*, 1997]. Enfin, nous proposerons une description

en terme de fluide afin d'interpréter plus aisément les propriétés du spectre de puissance pour la température.

3.1 Équation de Boltzmann libre

L'équation de Boltzmann, particulièrement adaptée à l'étude du fond diffus cosmologique, permet de comprendre l'évolution des systèmes hors équilibre. Pour un système décrit par une fonction de distribution f , elle est de la forme

$$\mathcal{L}[f] = C[f] , \quad (3.1)$$

où \mathcal{L} est un opérateur d'évolution "libre" - appelé *opérateur de Liouville* - tandis que $C[f]$ tient compte de l'ensemble des interactions du système. Dans un premier temps, nous ne nous intéresserons qu'à la partie libre de cette équation, *i.e.* $\mathcal{L}[f] = 0$, appelée *équation de Liouville*. Nous traiterons séparément le terme de collision $C[f]$.

3.1.1 Opérateur de Liouville

Lors de leur trajet jusqu'à nous, les photons suivent une trajectoire géodésique avant d'entrer en collision avec un électron ou un ion et d'être déviés sur une autre géodésique. Nous décrivons alors la statistique des photons à l'aide de leur fonction de distribution le long d'une géodésique.

Une géodésique $x^\mu(\lambda)$ repérée par le paramètre affine λ a pour vecteur tangent

$$p^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda} . \quad (3.2)$$

Ce vecteur tangent est transporté parallèlement à lui-même le long de la géodésique

$$p^\nu D_\nu p^\mu = 0 , \quad (3.3)$$

ce qui permet d'obtenir l'équation de la géodésique

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 ,$$

ou encore

$$\frac{dp^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu p^\alpha p^\beta = 0 .$$

La quantité dénotée p^μ est ici proportionnelle à l'impulsion des photons. Choisissons le paramètre affine tel que $dx^0 = p^0 d\lambda \equiv d\eta$. Dans ce cas,

$$k^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\eta} = \frac{p^\mu}{p^0}$$

s'identifie à l'impulsion du photon et l'équation de la géodésique devient

$$\frac{dp^\mu}{d\eta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{p^\alpha p^\beta}{p^0} = 0 . \quad (3.4)$$

Soit $f(x^\mu, p^\mu)$ la fonction densité de probabilité. L'opérateur de Liouville est donné par la dérivée totale de cette fonction de distribution le long d'une géodésique

$$\mathcal{L}[f] \equiv \frac{df}{d\eta} . \quad (3.5)$$

Utilisant le fait que f est une fonction de p^μ et x^μ , nous obtenons

$$\mathcal{L}[f] = \frac{dx^\mu}{d\eta} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + \frac{dp^\mu}{d\eta} \frac{\partial f}{\partial p^\mu} = \frac{p^\mu}{p^0} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{p^\alpha p^\beta}{p^0} \frac{\partial f}{\partial p^\mu} , \quad (3.6)$$

où la dernière égalité résulte de l'équation (3.4).

3.1.2 Feuilletage 3+1

Nous allons décomposer la quadri-impulsion des photons en une direction de propagation d'une part et, d'autre part, une énergie transportée perpendiculairement aux hypersurfaces de temps constant. Pour ce faire, nous écrivons la métrique sous la forme

$$ds^2 = N^2 d\eta^2 - \gamma_{ij}(N^i d\eta + dx^i)(N^j d\eta + dx^j) . \quad (3.7)$$

Le vecteur unitaire normal aux hypersurfaces de temps constant s'écrit

$$n_\mu \equiv N \partial_\eta = (N, 0, 0, 0) \quad \text{et} \quad n^\mu = g^{\mu\nu} n_\nu = \frac{1}{N} (1, -N^i) . \quad (3.8)$$

L'énergie \mathcal{E} et la direction de propagation des photons γ^μ sont alors définies par¹

$$\mathcal{E} = p^\mu n_\mu \quad \text{et} \quad \gamma^\mu = \frac{p^\mu}{\mathcal{E}} - n^\mu . \quad (3.9)$$

D'après le choix de ces définitions

$$\mathcal{E} = p^0 N , \quad \gamma^\mu n_\mu = 0 , \quad \gamma^\mu \gamma_\mu = -1 , \quad \gamma^0 = 0 . \quad (3.10)$$

Soulignons que nous n'avons introduit aucun degré de liberté supplémentaire puisque γ^μ , qui est un vecteur unitaire orthogonal à n_μ , possède deux degrés de liberté, l'énergie \mathcal{E} représente un degré de liberté et p^μ , qui est un quadri-vecteur de norme nulle,

¹Il aurait bien sûr été possible de définir ces quantités à l'aide d'un autre vecteur, par exemple le vecteur orthogonal aux hypersurfaces iso-densité. Ce choix ne devrait en revanche avoir aucune influence sur les observables.

contient trois degrés de liberté indépendants. Nous pouvons alors écrire l'impulsion des photons sous la forme

$$p^\mu = \mathcal{E}(n^\mu + \gamma^\mu) , \quad (3.11)$$

et substituer les variables p^μ par \mathcal{E} et γ^μ dans l'expression de l'opérateur de Liouville

$$\mathcal{L}[f] = \frac{df}{d\eta} = \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{p^i}{p^0} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{d\mathcal{E}}{d\eta} \frac{\partial f}{\partial \mathcal{E}} + \frac{d\gamma^\mu}{d\eta} \frac{\partial f}{\partial \gamma^\mu} . \quad (3.12)$$

En utilisant les résultats de l'annexe D.3, nous obtenons l'expression de l'opérateur de Liouville au deuxième ordre dans les perturbations

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f] = & \frac{\partial f}{\partial \eta} + [\tilde{\gamma}^i(1 + \phi) - B^i] \frac{\partial f}{\partial x^i} \\ & + E \frac{\partial f}{\partial E} \left\{ -\mathcal{H} - 2\mathcal{H}B_i B^i - \tilde{\gamma}^i [\nabla_i \phi + B^j \nabla_i B_j + 4\mathcal{H}\phi B_i] \right. \\ & \left. + \tilde{\gamma}^i \tilde{\gamma}^j \left[\frac{1}{2} h'_{ij} + \nabla_{(i} B_{j)} + 2\mathcal{H}\phi h_{ij} + \frac{1}{2} B^k (\nabla_i h_{jk} + \nabla_j h_{ik} - \nabla_k h_{ij}) \right] \right\} \\ & + \frac{\partial f}{\partial \tilde{\gamma}^i} \left\{ -\nabla^i \phi + \tilde{\gamma}^j [h'_j{}^i + \nabla^i B_j + {}^{(3)}\Gamma_{jk}^i B^k] \right. \\ & - \tilde{\gamma}^j \tilde{\gamma}^k [{}^{(3)}\Gamma_{jk}^i + {}^{(3)}\Gamma_{jk}^i \phi + \nabla_j \phi \delta_k^i] \\ & \left. - \tilde{\gamma}^i \tilde{\gamma}^j \tilde{\gamma}^k \left[\nabla_j B_k + \frac{1}{2} h'_{jk} \right] \right\} , \quad (3.13) \end{aligned}$$

avec

$$\tilde{\gamma}^\mu = a\gamma^\mu . \quad (3.14)$$

Les dérivées de la fonction de distribution par rapport à la position x^i et la direction de propagation γ^μ sont nulles dans l'espace homogène et isotrope de référence. Ce sont donc des infiniment petits du premier ordre : il suffit de développer leurs coefficients au premier ordre afin d'obtenir un résultat valide au deuxième ordre.

Dans la suite, nous dénoterons par $\bar{f}(\eta, \mathcal{E})$ la partie homogène de la fonction de distribution des photons et par $\delta f(x^\mu, \mathcal{E}, \gamma^\mu)$ sa partie perturbée.

3.1.3 Équation de Boltzmann non-perturbée

À l'ordre zéro, la fonction de distribution est homogène et peut donc s'écrire sous la forme $f(x^\mu, \mathcal{E}, \tilde{\gamma}^\mu) = \bar{f}(\eta, \mathcal{E})$. En insérant la définition de \mathcal{E} dans l'équation géodésique des photons, nous obtenons

$$\mathcal{E} \propto \frac{1}{a} , \quad (3.15)$$

résultat attendu puisque la fréquence des photons, proportionnelle à leur énergie, décroît, en raison de l'expansion, en a^{-1} . L'opérateur de Liouville prend la forme

$$\mathcal{L}[\bar{f}] = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \eta} - \mathcal{H}\mathcal{E} \frac{\partial \bar{f}}{\partial E}. \quad (3.16)$$

Supposons que la fonction de distribution des photons suive une loi de type “corps noir” caractérisée par une température $T(\eta)$ dépendante du temps

$$\bar{f}(\eta, \mathcal{E}) = \frac{1}{e^{\frac{\mathcal{E}}{T(\eta)}} - 1}. \quad (3.17)$$

Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, cette situation correspond en très bonne approximation au statut observationnel (voir la figure 1.6). En reportant cette forme dans l'équation de Boltzmann non-collisionnelle² ($C[f] = 0$), nous obtenons

$$\mathcal{L}[\bar{f}] = 0 \Rightarrow T \propto \frac{1}{a}. \quad (3.18)$$

La forme de la fonction de distribution n'est donc pas affectée par l'évolution cosmologique puisque le rapport \mathcal{E}/T est constant. Un corps noir reste donc un corps noir ! Cependant, la température de ce corps noir diminue au cours de l'expansion.

Bien que l'approximation à l'ordre zéro suffise à rendre compte de l'évolution homogène de la distribution des photons, les fluctuations de température, quant à elles, sont décrites par un développement perturbatif de l'équation de Liouville.

Nous étudions, dans la suite, l'équation de Boltzmann perturbée régissant l'évolution des fluctuations de température. Ces dernières peuvent être représentées par les perturbations de brillance ou par le contraste de température que nous introduisons ci-après.

3.1.4 Brillance

Nous définissons la brillance par

$$I(x^\mu, \tilde{\gamma}^\mu) = 4\pi \int_0^\infty d\mathcal{E} \mathcal{E}^3 f(x^\mu, \mathcal{E}, \tilde{\gamma}^\mu), \quad (3.19)$$

que nous décomposons en une partie non-perturbée $\bar{I}(\eta)$ et une partie perturbée $\delta I(x^\mu, \tilde{\gamma}^\mu)$ définies respectivement par

$$\bar{I}(\eta) = 4\pi \int_0^\infty d\mathcal{E} \mathcal{E}^3 \bar{f}(\eta, \mathcal{E}) \quad \text{et} \quad \delta I(x^\mu, \tilde{\gamma}^\mu) = 4\pi \int_0^\infty d\mathcal{E} \mathcal{E}^3 \delta f(x^\mu, \mathcal{E}, \tilde{\gamma}^\mu). \quad (3.20)$$

²Les termes de collision sont en général des infiniment petits au mieux du premier ordre.

La brillance $I(x^\mu, \tilde{\gamma}^\nu)$ représente la densité d'énergie émise au point x^μ transportée dans la direction $\tilde{\gamma}^\nu$ par unité d'angle solide. La densité d'énergie des photons au point x^μ est donc reliée à la brillance par

$$\rho_\gamma(x^\mu) = \int \frac{d\Omega}{4\pi} I(x^\mu, \tilde{\gamma}^\nu), \quad (3.21)$$

et se décompose, elle aussi, en une partie homogène et une partie perturbée.

L'équation d'évolution pour la brillance est obtenue après intégration de l'opérateur de Liouville par rapport à l'énergie

$$\begin{aligned} 4\pi \int d\mathcal{E} \mathcal{E}^3 \mathcal{L}[f] = & I' + [\tilde{\gamma}^i(1 + \phi) - B^i] \partial_i I \\ & - 4I \left\{ -\mathcal{H} - 2\mathcal{H}B_i B^i - \tilde{\gamma}^i [\nabla_i \phi + B^j \nabla_i B_j + 4\mathcal{H}\phi B_i] \right. \\ & \left. + \tilde{\gamma}^i \tilde{\gamma}^j \left[\frac{1}{2} h'_{ij} + \nabla_{(i} B_{j)} + 2\mathcal{H}\phi h_{ij} + \frac{1}{2} B^k (\nabla_i h_{jk} + \nabla_j h_{ik} - \nabla_k h_{ij}) \right] \right\} \\ & + \frac{\partial I}{\partial \tilde{\gamma}^i} \left\{ -\nabla^i \phi + \tilde{\gamma}^j [h_j^i + \nabla^i B_j + {}^{(3)}\Gamma_{jk}^i B^k] \right. \\ & - \tilde{\gamma}^j \tilde{\gamma}^k [{}^{(3)}\Gamma_{jk}^i + {}^{(3)}\Gamma_{jk}^i \phi + \nabla_j \phi \delta_k^i] \\ & \left. - \tilde{\gamma}^i \tilde{\gamma}^j \tilde{\gamma}^k \left[\nabla_j B_k + \frac{1}{2} h'_{jk} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

La partie homogène de la brillance vérifie

$$\bar{I}' + 4\mathcal{H}\bar{I} = 0 \quad (3.23)$$

et se comporte donc en $\bar{I} \propto a^{-4}$, c'est-à-dire en $\bar{I} \propto T^4(\eta)$: à l'ordre zéro, nous retrouvons la loi de Stephan-Boltzmann.

Il reste à décrire l'évolution de la partie perturbée de la brillance. À cette fin, nous définissons une quantité adimensionnée plus pertinente, *le contraste de température*. Les développements ultérieurs ont pour objet d'établir son évolution.

3.1.5 Contraste de température

Le contraste de température au point x^μ dans la direction γ^μ est une quantité sans dimension donnée par le rapport

$$\Theta(x^\mu, \tilde{\gamma}^\mu) = \frac{1}{4} \frac{\delta I}{\bar{I}}, \quad (3.24)$$

le facteur 1/4 provenant de la loi de Stephan-Boltzmann. L'équation d'évolution pour le contraste de température s'obtient aisément à partir de celle de la brillance (3.22)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\Theta] = & \Theta' + [\tilde{\gamma}^i(1 + \phi) - B^i] \partial_i \Theta \\
& - (1 + 4\Theta) \left\{ -2\mathcal{H}B_i B^i - \tilde{\gamma}^i [\nabla_i \phi + B^j \nabla_i B_j + 4\mathcal{H}\phi B_i] \right. \\
& \left. + \tilde{\gamma}^i \tilde{\gamma}^j \left[\frac{1}{2} h'_{ij} + \nabla_{(i} B_{j)} + 2\mathcal{H}\phi h_{ij} + \frac{1}{2} B^k (\nabla_i h_{jk} + \nabla_j h_{ik} - \nabla_k h_{ij}) \right] \right\} \\
& + \frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{\gamma}^i} \left\{ -\nabla^i \phi + \tilde{\gamma}^j \left[h'_j{}^i + \nabla^i B_j + {}^{(3)}\Gamma_{jk}^i B^k \right] \right. \\
& - \tilde{\gamma}^j \tilde{\gamma}^k \left[{}^{(3)}\Gamma_{jk}^i + {}^{(3)}\Gamma_{jk}^i \phi + \nabla_j \phi \delta_k^i \right] \\
& \left. - \tilde{\gamma}^i \tilde{\gamma}^j \tilde{\gamma}^k \left[\nabla_j B_k + \frac{1}{2} h'_{jk} \right] \right\}. \tag{3.25}
\end{aligned}$$

En ne conservant que les termes du premier ordre, l'opérateur de Liouville devient

$$\mathcal{L}[\Theta] = \Theta' + \gamma^i \partial_i \Theta - {}^{(3)}\Gamma_{jk}^i \tilde{\gamma}^j \tilde{\gamma}^k \frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{\gamma}^i} + \tilde{\gamma}^i \nabla_i \phi - \tilde{\gamma}^i \tilde{\gamma}^j \left[\frac{1}{2} h'_{ij} + \nabla_{(i} B_{j)} \right]. \tag{3.26}$$

Remarquons que le contraste de température n'est pas invariant de jauge et son interprétation physique n'a de sens qu'après avoir fixé une jauge. Les transformations du contraste de température sous les changements de coordonnées permettent de définir des quantités invariantes de jauge. Nous en expliquons le principe dans la partie suivante.

3.1.6 Choix d'une jauge

L'opérateur (3.25) qui, en l'absence de collision, régit l'évolution de la température n'est pas invariant de jauge. En effet, lors d'un changement de coordonnées induit par le vecteur ξ^μ , la position et la quadri-impulsion se transforment selon

$$x^\mu \longmapsto \tilde{x}^\mu = e^{\xi^\nu \partial_\nu} x^\mu = x^\mu + \xi^\mu + \frac{1}{2} \xi^\nu \partial_\nu \xi^\mu + o[(\xi^\mu)^2] \tag{3.27}$$

$$p^\mu \longmapsto \tilde{p}^\mu = \frac{d}{d\lambda} [e^{\xi^\nu \partial_\nu} x^\mu] = p^\mu + p^\nu \partial_\nu \xi^\mu + \frac{1}{2} p^\nu \partial_\nu [\xi^\kappa \partial_\kappa \xi^\mu] + o[(\xi^\mu)^2]. \tag{3.28}$$

Un tel changement de coordonnées induit une transformation de jauge pour $\delta f(x^\mu, p^\mu)$ de la forme

$$\delta f(x^\mu, p^\mu) \longmapsto \widetilde{\delta f}(x^\mu, p^\mu) = e^{-\mathcal{L}T\xi} \delta f(x^\mu, p^\mu), \tag{3.29}$$

où l'on a posé

$$T\xi \equiv (\xi^\mu, p^\nu \partial_\nu \xi^\mu), \tag{3.30}$$

dans la représentation $(\partial_\mu, \frac{\partial}{\partial p^\mu})$. Sous une transformation de jauge induite par le vecteur $\xi = (T, L^i)$, la fonction de distribution devient au premier ordre

$$\delta f \longmapsto \tilde{\delta} f = \delta f - T \bar{f}' - \tilde{\gamma}^i \partial_i T \mathcal{E} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \mathcal{E}} + o(\xi^\mu) . \quad (3.31)$$

Nous pouvons alors construire les quantités invariantes de jauge au premier ordre suivantes

$$\delta \mathcal{F} \equiv \delta f - \frac{\bar{f}}{\mathcal{H}} \psi - \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{H}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \mathcal{E}} \tilde{\gamma}^i \partial_i \psi , \quad (3.32)$$

$$\delta f^b \equiv \delta f - \frac{\bar{f}}{\mathcal{H}} \psi + \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{H}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \mathcal{E}} \tilde{\gamma}^i \partial_i (B - E') , \quad (3.33)$$

$$\delta f^\# \equiv \delta f + \frac{\bar{f}}{\mathcal{H}} (B - E') - \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{H}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \mathcal{E}} \tilde{\gamma}^i \partial_i \psi . \quad (3.34)$$

Dans la suite, nous travaillerons dans la jauge newtonienne définie par $B_i = E = 0$ dans laquelle les variables considérées s'identifient à leurs équivalents invariants de jauge. La version invariante de jauge de l'équation de Liouville prend la forme

$$\Theta' + \gamma^i \partial_i \Theta - {}^{(3)}\Gamma_{jk}^i \tilde{\gamma}^j \tilde{\gamma}^k \frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{\gamma}^i} + \left[-\Psi' + \tilde{\gamma}^i \nabla_i \Phi + \tilde{\gamma}^i \tilde{\gamma}^j \left(\bar{E}'_{ij} - \nabla_{(i} \bar{\Phi}_{j)} \right) \right] = 0 . \quad (3.35)$$

C'est l'équation maîtresse pour le contraste de température. Bien que les solutions exactes ne soient pas connues, nous pouvons extraire des solutions approchées à l'aide d'une décomposition judicieuse du contraste de température. Les développements suivants ont pour objet la détermination des telles solutions.

3.2 Décomposition du contraste de température

Afin de résoudre perturbativement l'équation de Liouville, nous décomposons le contraste de température en moments angulaires. Chacun de ces moments possède une partie scalaire, vectorielle et tensorielle, suivant le principe exposé dans le chapitre 2. La difficulté supplémentaire provient ici du fait que les parties tensorielles ne se limitent pas à des tenseurs d'ordre deux. Nous verrons cependant qu'il est possible de trouver une base de décomposition équivalente impliquant les harmoniques sphériques.

3.2.1 Décomposition en moments

Il est possible de résoudre perturbativement l'équation de Boltzmann (3.25) à l'aide d'une décomposition en moments. En effet, les solutions peuvent être caractérisées par leurs différents moments par rapport à la direction de propagation. Nous

introduisons ainsi

$$\Theta_0(x^\mu) = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \Theta(x^\mu, \tilde{\gamma}^\mu), \quad (3.36)$$

$$\Theta^i(x^\mu) = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \tilde{\gamma}^i \Theta(x^\mu, \tilde{\gamma}^\mu), \quad (3.37)$$

$$\Theta^{ij}(x^\mu) = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \left[\tilde{\gamma}^i \tilde{\gamma}^j - \frac{1}{3} \omega^{ij} \right] \Theta(x^\mu, \tilde{\gamma}^\mu), \quad (3.38)$$

...

Le contraste de température est une fonction de deux variables, la position x^μ et la direction de propagation $\tilde{\gamma}^\mu$, et traduit à la fois les défauts d'homogénéité et d'isotropie. La décomposition (3.36) nous permet d'étudier un nombre discret de fonctions à valeurs tensorielles.

Nous obtenons alors l'expression du contraste de température en fonction de ses différents moments

$$\Theta(x^\mu, \tilde{\gamma}^\mu) = \Theta_0(x^\mu) + \tilde{\gamma}^i \Theta_i(x^\mu) + \left[\tilde{\gamma}^i \tilde{\gamma}^j - \frac{1}{3} \omega^{ij} \right] \Theta_{ij}(x^\mu) + \dots \quad (3.39)$$

Ce développement est similaire à ceux utilisés en électromagnétisme afin de décrire les distributions de charges ou de courant [Jackson, 2001]. Les premiers termes correspondent alors à la structure grossière de la distribution, c'est-à-dire aux grandes échelles. Les tenseurs d'ordre élevés, quant à eux, décrivent les structures les plus fines, c'est-à-dire les petites échelles.

Interprétation macroscopique

Soulignons le lien entre cette décomposition et une description macroscopique en terme de fluide. En effet, le tenseur énergie-impulsion du fluide peut être obtenu par l'expression

$$T^{\mu\nu}(x^\alpha) = \int d\Omega d\mathcal{E} \mathcal{E} p^\mu p^\nu f(x^\alpha, p^\beta). \quad (3.40)$$

Utilisant la décomposition 3 + 1 de l'impulsion ainsi que les équations (2.6)-(2.9), nous en déduisons au premier ordre³

$$\rho(x^\mu) = \int \frac{d\Omega}{4\pi} I(x^\mu, \tilde{\gamma}^\mu), \quad (3.41)$$

$$\rho_0(1+w)v^i = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \tilde{\gamma}^i I(x^\mu, \tilde{\gamma}^\mu), \quad (3.42)$$

$$w\rho_0\pi^{ij} = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \left[\tilde{\gamma}^i \tilde{\gamma}^j - \frac{1}{3}\omega^{ij} \right] I(x^\mu, \tilde{\gamma}^\mu). \quad (3.43)$$

Ces relations permettent de relier les quantités définies microscopiquement aux grandeurs macroscopiques (pour une discussion détaillée, voir [Uzan, 1998]). Le terme Θ_0 représente le monopôle de la distribution et correspond au contraste de densité. Le terme dipolaire Θ^i est relié à la vitesse par $\Theta^i = (1+w)v^i$ tandis que le quadrupole Θ^{ij} correspond à la pression anisotrope du fluide. L'approche cinétique apparaît ici bien plus générale que l'approche fluide puisqu'elle permet de caractériser la distribution des photons au-delà de la pression anisotrope. Ces corrections s'appliquent au cas d'un fluide relativiste dont le libre parcours moyen est grand devant les échelles du problème.

Décomposition SVT⁴

De la même manière que nous avons décomposé les perturbations en partie scalaire, vectorielle et tensorielle, nous pouvons décomposer les moments définis par les relations (3.36)-(3.39) en partie scalaire, vectorielle et tensorielle.

Le monopôle Θ_0 est par définition une quantité scalaire.

Le dipôle Θ_i possède une partie scalaire $\Theta^{1,S}$ et une partie vectorielle $\Theta_i^{1,V}(x^\mu)$ définies par

$$\Theta_i(x^\mu) = \nabla_i \Theta^{1,S}(x^\mu) + \Theta_i^{1,V}(x^\mu), \quad (3.44)$$

la partie vectorielle étant transverse

$$\nabla_i \Theta^{i,1,V} = 0. \quad (3.45)$$

³Notons que la décomposition $I = \bar{I} + \delta I$ permet d'obtenir, au premier ordre, les relations suivantes

$$\begin{aligned} \rho_0(\eta) &= \int \frac{d\Omega}{4\pi} \bar{I}(\eta, \tilde{\gamma}^\mu), \\ \delta\rho(x^\mu) &= \int \frac{d\Omega}{4\pi} \delta I(x^\mu, \tilde{\gamma}^\mu), \\ v^i &= \frac{1}{\rho_0(1+w)} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \tilde{\gamma}^i \delta I(x^\mu, \tilde{\gamma}^\mu), \\ \pi^{ij} &= \frac{1}{w\rho_0} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \left[\tilde{\gamma}^i \tilde{\gamma}^j - \frac{1}{3}\omega^{ij} \right] \delta I(x^\mu, \tilde{\gamma}^\mu). \end{aligned}$$

⁴Le sigle SVT signifie Scalaire-Vecteur-Tenseur.

L'exposant 1 est ici rattaché aux quantités définies à partir du dipôle.

De façon similaire, la décomposition de la pression anisotrope (quadrupôle) fournit

$$\Theta_{ij}(x^\mu) = \left(\nabla_i \nabla_j - \frac{1}{3} \omega_{ij} \right) \Theta^{2,S}(x^\mu) + \nabla_{(i} \Theta_{j)}^{2,V}(x^\mu) + \Theta_{ij}^{2,T}(x^\mu), \quad (3.46)$$

où la partie vectorielle est transverse tandis que le tenseur symétrique $\Theta_{ij}^{2,T}$ est transverse et sans trace

$$\nabla_i \Theta^{i2,V} = 0, \quad (3.47)$$

$$\nabla_i \Theta^{ij2,T} = 0 \quad \text{et} \quad \Theta_i^{i2,T} = 0, \quad (3.48)$$

l'exposant 2 étant caractéristique du quadrupôle.

Cette procédure peut, bien évidemment, être généralisée à tout ordre

$$\begin{aligned} \Theta_{i_1 \dots i_n}(x^\mu) &= [\nabla_{i_1} \dots \nabla_{i_n} \Theta^{n,S}(x^\mu)]^{\text{STF}} + [\nabla_{i_1} \dots \nabla_{i_{n-1}} \Theta_{i_n}^{n,V}(x^\mu)]^{\text{STF}} \\ &+ [\nabla_{i_1} \dots \nabla_{i_{n-2}} \Theta_{i_{n-1} i_n}^{n,T}(x^\mu)]^{\text{STF}} + \dots, \end{aligned} \quad (3.49)$$

où la notation STF correspond à la partie symétrique sans trace⁵ (voir [Riazuelo, 2000] [Thorne, 1980] pour une description détaillée de la procédure à appliquer). Notons que cette décomposition n'est unique que si l'on impose que chaque terme soit symétrique et de trace nulle⁶.

Relation avec les harmoniques sphériques

Dans la suite, nous mettons en relief le lien entre une décomposition STF des perturbations scalaires, vectorielles et tensorielles du contraste de température et une décomposition en harmoniques sphériques. Pour ce faire, nous considérerons les transformées de Fourier des champs

$$\theta(\mathbf{k}, \eta, \tilde{\gamma}^\mu) = \int \frac{d\mathbf{x}}{(2\pi)^{3/2}} \theta(x^\mu, \tilde{\gamma}^\mu) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (3.50)$$

de sorte que les dérivées covariantes, en espace plat, soient colinéaires au vecteur \mathbf{k} . Les vecteurs transverses sont alors orthogonaux à \mathbf{k} . Si nous notons $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}/k$ le vecteur unitaire orienté suivant \mathbf{k} , les vecteurs unitaires \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 orthogonaux à \mathbf{k} forment une base orthonormée sur laquelle tout vecteur transverse peut être décomposé. Plus généralement, tout tenseur transverse peut être décomposé à partir de produits tensoriels de ces vecteurs. Nous introduisons également les combinaisons particulières $\mathbf{e}^\pm = (\mathbf{e}_1 \pm i \mathbf{e}_2)/\sqrt{2}$ vérifiant les relations $\mathbf{e}^\pm \cdot \mathbf{e}^\pm = 0$ et $\mathbf{e}^\pm \cdot \mathbf{e}^\mp = 1$.

⁵Le sigle STF est utilisé pour Symmetric TraceFree.

⁶La divergence et la trace des quantités non-scalaires doivent donc être nulles.

Tout vecteur transverse peut donc être décomposé sous la forme

$$\Theta_i^V(\mathbf{k}, \eta) = \Theta^{(+1)}(\mathbf{k}, \eta)e_i^+ + \Theta^{(-1)}(\mathbf{k}, \eta)e_i^- . \quad (3.51)$$

Nous pouvons dès lors obtenir la contribution du dipôle au contraste de température

$$\tilde{\gamma}^i \Theta_i(\mathbf{k}, \eta) = \tilde{\gamma}^i k_i \Theta^{1,S}(k, \eta) + \tilde{\gamma}^i e_i^{(\pm)} \Theta^{1,(\pm 1)}(\mathbf{k}, \eta) , \quad (3.52)$$

où les coefficients s'identifient aux premières harmoniques sphériques

$$\tilde{\gamma}^i k_i = k \cos(\theta) \propto Y_{10}(\mathbf{e}_3 \cdot \tilde{\gamma}) , \quad (3.53)$$

$$\tilde{\gamma}^i e_i^{(\pm)} = \pm \sin(\theta) e^{\pm i\varphi} \propto Y_{1\pm 1}(\mathbf{e}_3 \cdot \tilde{\gamma}) . \quad (3.54)$$

De la même manière, les composantes du quadropôle s'écrivent

$$k_{(i} \Theta_{j)}^{2,V}(\mathbf{k}, \eta) = \Theta^{(2,\pm 1)}(\mathbf{k}, \eta) e_i^\pm e_j^\pm , \quad (3.55)$$

$$\Theta_{ij}^{2,T}(\mathbf{k}, \eta) = \Theta^{2,(\pm 2)}(\mathbf{k}, \eta) e_i^\pm e_j^\pm , \quad (3.56)$$

et nous obtenons alors la contribution du quadropôle au contraste de température sous la forme

$$\begin{aligned} \left[\tilde{\gamma}^i \tilde{\gamma}^j - \frac{1}{3} \omega^{ij} \right] \Theta_{ij}(\mathbf{k}, \eta) = & \left[(\tilde{\gamma}^i k_i)(\tilde{\gamma}^j k_j) - \frac{1}{3} k^2 \right] \Theta^{2,S}(\mathbf{k}, \eta) \\ & + (\tilde{\gamma}^i k_i)(\tilde{\gamma}^j e_j^\pm) \Theta^{2,(\pm 1)}(\mathbf{k}, \eta) \\ & + (\tilde{\gamma}^i e_i^\pm)(\tilde{\gamma}^j e_j^\pm) \Theta^{2,(\pm 2)}(\mathbf{k}, \eta) . \end{aligned} \quad (3.57)$$

Les coefficients de ce développement sont reliés, ici encore, aux harmoniques sphériques

$$\left[(\tilde{\gamma}^i k_i)(\tilde{\gamma}^j k_j) - \frac{1}{3} k^2 \right] \propto 3 \cos^2(\theta) - 1 \propto Y_{20}(\mathbf{e}_3 \cdot \tilde{\gamma}) , \quad (3.58)$$

$$(\tilde{\gamma}^i k_i)(\tilde{\gamma}^j e_j^\pm) \propto \cos(\theta) \sin(\theta) e^{\pm i\varphi} \propto Y_{2\pm 1}(\mathbf{e}_3 \cdot \tilde{\gamma}) , \quad (3.59)$$

$$(\tilde{\gamma}^i e_i^\pm)(\tilde{\gamma}^j e_j^\pm) \propto \sin^2(\theta) e^{\pm 2i\varphi} \propto Y_{2\pm 2}(\mathbf{e}_3 \cdot \tilde{\gamma}) . \quad (3.60)$$

Cette décomposition peut être généralisée à tout ordre [Riazuelo, 2000] [Thorne, 1980] [Peter & Uzan, 2005]. Il est alors équivalent de décomposer le contraste de température en tenseurs d'ordre de plus en plus élevé ou d'utiliser une décomposition en harmoniques sphériques dans l'espace de Fourier. Dans la suite de ce chapitre, nous adoptons une décomposition en harmoniques sphériques.

3.2.2 Équations de la hiérarchie

Nous cherchons à déterminer les équations d'évolution de chacun des moments qui contribuent au contraste de température. Décomposons alors le contraste de

température en série d'harmoniques sphériques. Cette décomposition, particulièrement adaptée aux observations⁷, est l'équivalent d'une décomposition en série de Fourier transposée à une géométrie sphérique. À petite échelle, les termes des deux développements coïncident car la sphère peut, en très bonne approximation, être assimilée localement à son plan tangent.

Nous introduisons la base des fonctions

$$G_{\ell m}(\mathbf{x}, \tilde{\gamma}; \mathbf{k}) = (-i)^\ell \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_{\ell m}(\mathbf{k} \cdot \tilde{\gamma}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (3.61)$$

sur laquelle nous décomposerons le contraste de température. Remarquons que ces fonctions permettent d'extraire les modes de Fourier du contraste de température, lorsque les sections spatiales sont plates. Si les sections spatiales ne sont pas plates, l'exponentielle apparaissant dans la définition (3.61) n'est plus fonction propre du laplacien et doit être généralisée. Nous avons noté \mathbf{x} et \mathbf{k} les composantes spatiales de la position x^μ et de l'impulsion k^μ . Nous pouvons donc écrire

$$\Theta(x^\mu, \tilde{\gamma}^\mu) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_{\ell m} (2\ell+1) \Theta_\ell^{(m)}(\mathbf{k}, \eta) G_{\ell m}(\mathbf{x}, \tilde{\gamma}; \mathbf{k}) . \quad (3.62)$$

et réciproquement

$$\Theta_\ell^{(m)}(\mathbf{k}, \eta) = \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{d^2\Omega}{4\pi} \Theta(x^\mu, \tilde{\gamma}^\mu) \bar{G}_{\ell m}(\mathbf{x}, \tilde{\gamma}; \mathbf{k}) , \quad (3.63)$$

où $\bar{G}_{\ell m}$ désigne le complexe conjugué de $G_{\ell m}$.

Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, les termes $m = 0$ correspondent aux perturbations scalaires, les termes $m = \pm 1$ sont reliés aux perturbations vectorielles tandis que ceux tels que $m = \pm 2$ sont des perturbations tensorielles.

À l'aide de ce développement, nous sommes en mesure de ré-écrire l'équation de Boltzmann mode à mode

$$\Theta_\ell'^{(m)} + i\mathbf{k} \cdot \tilde{\gamma} \Theta_\ell^{(m)} = S_\ell^{(m)} , \quad (3.64)$$

où $S_\ell^{(m)}$ tient compte des effets gravitationnels au travers des perturbations de métrique

$$S_\ell^{(m)}(\mathbf{k}, \eta) = \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{d^2\Omega}{4\pi} S(x^\mu, \tilde{\gamma}^\mu) \bar{G}_{\ell m}(\mathbf{x}, \tilde{\gamma}; \mathbf{k}) , \quad (3.65)$$

avec

$$S(x^\mu, \tilde{\gamma}^\mu) = \Psi' - \tilde{\gamma}^i \nabla_i \Phi - \tilde{\gamma}^i \tilde{\gamma}^j \left(\bar{\bar{E}}'_{ij} - \nabla_{(i} \bar{\Phi}_{j)} \right) . \quad (3.66)$$

Le second terme de l'équation (3.64) peut être ré-écrit en remarquant que

$$\tilde{\gamma}^i k_i = k \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10}(\mathbf{k} \cdot \tilde{\gamma}) . \quad (3.67)$$

⁷Le ciel observé depuis la Terre présente en effet une symétrie sphérique!

Nous pouvons alors utiliser la formule d'addition des harmoniques sphériques. Afin d'alléger les notations, nous choisissons une base locale formée par les vecteurs $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ telle que le vecteur \mathbf{e}_3 coïncide avec la direction de propagation déterminée par \mathbf{k} . Dans ces conditions, la direction de propagation $(\mathbf{k}, \tilde{\gamma})$ coïncide avec la direction $(\mathbf{e}_3, \tilde{\gamma})$ et

$$\sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10}(\tilde{\gamma}) Y_{\ell m}(\tilde{\gamma}) = \frac{1}{\sqrt{2\ell+1}} \left[\frac{\kappa_{\ell,m}}{\sqrt{2\ell-1}} Y_{\ell-1,m}(\tilde{\gamma}) + \frac{\kappa_{\ell+1,m}}{\sqrt{2\ell+3}} Y_{\ell+1,m}(\tilde{\gamma}) \right], \quad (3.68)$$

où

$$\kappa_{\ell,m} = \sqrt{\ell^2 - m^2}. \quad (3.69)$$

L'équation de Boltzmann se met donc sous la forme

$$\Theta_{\ell}^{(m)'}(\mathbf{k}, \eta) = \frac{k}{2\ell+1} \left[\kappa_{\ell,m} \Theta_{\ell-1}^{(m)}(\mathbf{k}, \eta) - \kappa_{\ell+1,m} \Theta_{\ell+1}^{(m)}(\mathbf{k}, \eta) \right] + S_{\ell}^{(m)}(\mathbf{k}, \eta). \quad (3.70)$$

Nous obtenons ainsi une hiérarchie infinie d'équations différentielles couplées, appelée *hiérarchie de Boltzmann*. Afin de résoudre ce système, nous devons le tronquer à un multipôle ℓ_{\max} . La précision des solutions obtenues dépend directement la valeur de ℓ_{\max} .

Terme de source gravitationnelle

Nous exprimons ici les composantes du terme de source $S_{\ell}^{(m)}$ qui apparaît dans les équations de la hiérarchie (3.70).

Pour ce faire, nous décomposons le vecteur $\bar{\Phi}_i$ selon

$$\bar{\Phi}_i(\mathbf{k}, \eta) = i5\sqrt{3} \left[\bar{\Phi}^+(\mathbf{k}, \eta) e_i^+ + \bar{\Phi}^-(\mathbf{k}, \eta) e_i^- \right], \quad (3.71)$$

tandis que le tenseur \bar{E}_{ij} se décompose suivant les polarisations

$$\bar{E}_{ij}(\mathbf{k}, \eta) = -5\sqrt{\frac{3}{2}} \left[\bar{E}^+(\mathbf{k}, \eta) e_i^+ e_j^+ + \bar{E}^-(\mathbf{k}, \eta) e_i^- e_j^- \right]. \quad (3.72)$$

Les coefficients de normalisation sont choisis de manière à simplifier leurs contributions aux équations de la hiérarchie.

Ces définitions nous permettent d'écrire la transformée de Fourier du terme de source gravitationnel sous la forme

$$\begin{aligned} S(\mathbf{k}, \eta, \tilde{\gamma}^{\mu}) &= \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^{3/2}} S(x^{\mu}, \tilde{\gamma}^{\mu}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ &= \Psi' - ik\Phi \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10} - \sqrt{20\pi} E'^{\pm} Y_{2\pm 2} \mp \sqrt{20\pi} k \bar{\Phi}^{\pm} Y_{2\pm 1}, \end{aligned} \quad (3.73)$$

l'argument des harmoniques sphériques étant $(\mathbf{k} \cdot \tilde{\gamma})$ et où la sommation sur les polarisation \pm est implicite.

Comme attendu, les valeurs $m = 0, \pm 1$ et ± 2 sont respectivement associées aux perturbations scalaires, vectorielles et tensorielles. Les perturbations de métrique qui contribuent à un multipôle indicé par ℓ sont celles qui sont multipliées par ℓ facteurs $\tilde{\gamma}$ dans l'équation de Boltzmann pour le contraste de température (3.25). D'après l'équation obtenue au deuxième ordre dans les perturbations, il semble légitime de considérer des contributions gravitationnelles jusqu'aux multipôles⁸ indicés par $\ell = 3$.

Nous pouvons résumer les résultats obtenus en explicitant les équations de la hiérarchie pour les modes scalaires ($m = 0$)

$$\Theta_0^{(0)'}(\mathbf{k}, \eta) = -k\Theta_1^{(0)}(\mathbf{k}, \eta) + \Psi'(\mathbf{k}, \eta), \quad (3.74)$$

$$\Theta_1^{(0)'}(\mathbf{k}, \eta) = \frac{k}{3}\Theta_0^{(0)}(\mathbf{k}, \eta) - \frac{2k}{3}\Theta_2^{(0)}(\mathbf{k}, \eta) + \frac{k}{3}\Phi(\mathbf{k}, \eta), \quad (3.75)$$

$$\Theta_2^{(0)'}(\mathbf{k}, \eta) = \frac{2k}{5}\Theta_1^{(0)}(\mathbf{k}, \eta) - \frac{3k}{5}\Theta_3^{(0)}(\mathbf{k}, \eta), \quad (3.76)$$

...

aucune contribution du terme de source n'intervenant dans les équations suivantes. En ce qui concerne les modes vectoriels ($m = \pm 1$)

$$\Theta_1^{(\pm 1)'}(\mathbf{k}, \eta) = -\frac{k}{3}\Theta_2^{(\pm 1)}(\mathbf{k}, \eta), \quad (3.77)$$

$$\Theta_2^{(\pm 1)'}(\mathbf{k}, \eta) = \frac{k\sqrt{3}}{5}\Theta_1^{(\pm 1)}(\mathbf{k}, \eta) - \frac{2k\sqrt{2}}{5}\Theta_3^{(\pm 1)}(\mathbf{k}, \eta) \pm k\bar{\Phi}^\pm(\mathbf{k}, \eta), \quad (3.78)$$

...

la seule contribution gravitationnelle apparaît dans l'équation du quadrupôle. Enfin, pour les modes tensoriels ($m = 2$), la seule équation faisant intervenir les perturbations de métrique s'écrit

$$\Theta_2^{(\pm 2)'}(\mathbf{k}, \eta) = -\frac{k}{\sqrt{5}}\Theta_3^{(\pm 2)}(\mathbf{k}, \eta) + \bar{E}^\pm(\mathbf{k}, \eta). \quad (3.79)$$

3.3 Terme de collision et polarisation

Cette partie vise à calculer le terme de collision. Nous nous restreindrons cependant à un calcul du premier ordre. Une extension de ce calcul au deuxième ordre est proposée dans [Bartolo *et al.*, 2006].

⁸Notons toutefois qu'un traitement perturbatif, ordre par ordre dans les perturbations, doit alors être utilisé.

De façon générale, le terme de collision est donné par

$$C[f] = \frac{df_+}{d\eta} - \frac{df_-}{d\eta}, \quad (3.80)$$

où le premier terme correspond à la densité de particules qui entrent, par unité de temps, dans l'élément de volume de l'espace des phases considéré tandis que le second terme correspond à la contribution des particules qui en sortent.

3.3.1 Diffusion Compton

Expression du terme de collision

Les interactions subies par les photons sont principalement dues à la diffusion Compton avec la matière baryonique et en particulier avec les électrons. Ces réactions sont de la forme

$$\gamma(p) + e(q) \leftrightarrow \gamma(p') + e(q'), \quad (3.81)$$

où les quantités entre parenthèses représentent les impulsions des particules. Considérant l'espace-temps localement plat, le terme de collision prend la forme

$$\begin{aligned} C[f] = & \frac{1}{2E(p)} \int Dq Dq' Dp' (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + q - p' - q') |M|^2 \\ & \left\{ g(x^\mu, q^\mu) f(x^\mu, p^\mu) [1 + f(x^\mu, p^\mu)] \right. \\ & \left. - g(x^\mu, q^\mu) f(x^\mu, p^\mu) [1 + f(x^\mu, p^\mu)] \right\}, \end{aligned} \quad (3.82)$$

où l'on a noté $f(x^\mu, p^\mu)$ la fonction de distribution des photons, $g(x^\mu, q^\mu)$ celle des électrons, $|M|^2$ l'élément de matrice invariant de Lorentz et

$$Dq = \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E(q)}. \quad (3.83)$$

Nous avons négligé les facteurs de suppression de Pauli pour les électrons en supposant que la densité des électrons est faible. Nous supposons que les électrons ont une distribution de Maxwell-Boltzmann décrite par la température électronique T_e et centrée sur la vitesse moyenne du fluide de baryons v_b

$$g(x^\mu, p^\mu) = n_e \frac{(2\pi)^3}{[2\pi m_e T_e]^{\frac{3}{2}}} \exp \left[-\frac{(q - m_e v_b)^2}{2m_e T_e} \right]. \quad (3.84)$$

Dans cette expression, m_e est la masse des électrons, n_e est la densité numérique d'électrons libres. L'élément de matrice $|M|^2$ a été calculé pour la première fois par O. Klein et Y. Nishina [Klein & Nishina, 1929] et son expression est re-démontrée

dans tout bon livre de théorie des champs (voir par exemple [Peskin & Schroeder, 1996] [Weinberg, 1995] [Itzykson & Zuber, 1980])

$$|M|^2 = \frac{3\sigma_T}{8\pi} \left[\frac{E(p)}{E(p')} + \frac{E(p')}{E(p)} - 2 + 4|\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_f|^2 \right], \quad (3.85)$$

dans le référentiel où les électrons sont au repos⁹. Les vecteurs \mathbf{e}_i et \mathbf{e}_f correspondent respectivement à la polarisation initiale et finale des photons. La section efficace Thomson est donnée par

$$\sigma_T = \frac{e^4}{6\pi m_e^2}. \quad (3.86)$$

Approximations

En première approximation, nous considérerons que le transfert d'énergie dans le processus (3.81) est faible. Les différences $E(p') - E(p)$ et $E(q') - E(q)$ sont alors des infiniment petits. Nous utiliserons également l'approximation $E(q) \approx m_e \gg E(p)$ puisque les électrons sont non-relativistes et l'énergie des photons, de l'ordre de quelques électron-Volts est très petite devant l'énergie de masse des électrons.

Ne conservant que les infiniment petits du premier ordre (voir [Hu, 1995] pour une discussion détaillée) et en négligeant l'effet de la polarisation du rayonnement, nous obtenons

$$C[\delta f] = a\sigma_T n_e \left[\int \delta f \frac{d\Omega}{4\pi} - \delta f + 4\tilde{\gamma}_i (v_i^b - B^i) \int \tilde{f} \frac{d\Omega}{4\pi} + \frac{3}{4} \left(\tilde{\gamma}^i \tilde{\gamma}^j - \frac{1}{3} \omega^{ij} \right) \int \frac{d\Omega'}{4\pi} \delta f(\Omega') \left(\tilde{\gamma}'_i \tilde{\gamma}'_j - \frac{1}{3} \omega_{ij} \right) \right] \quad (3.87)$$

Le dernier terme s'apparente au tenseur de pression anisotrope du fluide de photons (voir l'équation (3.43)). Le terme de collision pour le contraste de température se ré-écrit alors sous la forme

$$C[\Theta] = a\sigma_T n_e \left[\Theta_0 - \Theta + \tilde{\gamma}^i v_i^b + \frac{1}{16} \Pi_{ij} \tilde{\gamma}^i \tilde{\gamma}^j \right]. \quad (3.88)$$

Cette expression ne prend cependant pas en compte la polarisation du rayonnement, dont dépend la section efficace de diffusion Compton. Nous étudions l'influence de la polarisation dans ce qui suit.

⁹Afin d'utiliser ces résultats dans un référentiel différent, il suffit d'appliquer une transformation de Lorentz. Des compléments à ce sujet peuvent être trouvés dans [White *et al.*, 1994].

3.3.2 Influence de la polarisation

Lorsque le transfert d'impulsion est faible, $E(p) \approx E(p')$ et la section efficace différentielle de diffusion devient

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3\sigma_T}{8\pi} |\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_f|^2. \quad (3.89)$$

Cette section efficace dépend donc des polarisations incidente et diffusée : la diffusion Compton modifie la polarisation de la lumière. En effet, supposons qu'un photon soit dévié par diffusion Thomson d'un angle β dans le référentiel de repos des électrons. Décomposons alors la polarisation incidente suivant deux axes, l'un noté \mathbf{u}_\perp , perpendiculaire au plan de diffusion, l'autre \mathbf{u}_\parallel appartenant au plan de diffusion. Le contraste de température suivant ces deux axes devient

$$\tilde{\Theta}_\perp = \frac{3\sigma_T}{8\pi} \Theta_\perp, \quad (3.90)$$

$$\tilde{\Theta}_\parallel = \frac{3\sigma_T}{8\pi} \cos^2(\beta) \Theta_\parallel, \quad (3.91)$$

les quantités caractérisées par un tilde étant définies après l'interaction. Si la radiation incidente n'est pas polarisée, $\Theta_\perp = \Theta_\parallel = \Theta/2$ et le contraste total après diffusion vaut

$$\tilde{\Theta} = \frac{3\sigma_T}{16\pi} [1 + \cos^2(\beta)] \Theta. \quad (3.92)$$

En revanche, si la radiation incidente est polarisée, nous pouvons décrire le contraste de température à l'aide des deux paramètres suivants

$$\Theta = \Theta_\parallel + \Theta_\perp, \quad (3.93)$$

$$Q = \Theta_\parallel - \Theta_\perp, \quad (3.94)$$

de manière à obtenir

$$\tilde{\Theta} = \frac{1}{2} [1 + \cos^2(\beta)] \Theta - \frac{1}{2} \sin^2(\beta) Q. \quad (3.95)$$

Un terme supplémentaire proportionnel à Q contribue à l'intensité diffusée. Ce terme est relié à la polarisation du rayonnement puisqu'il prend en compte la différence d'amplitude entre deux axes orthogonaux. Un traitement précis du fond diffus cosmologique nécessite donc la description de l'intensité et de la polarisation de l'onde¹⁰.

La description d'un rayonnement polarisé nécessite trois paramètres indépendants : l'intensité totale, le rapport des amplitudes de deux composantes orthogonales et leur déphasage relatif. Or nous n'avons introduit que deux paramètres. Les

¹⁰Négliger la polarisation du rayonnement revient à faire une erreur de l'ordre de 10% sur le contraste de température [Kaiser, 1983].

limites de notre approche sont manifestes si nous réalisons une rotation des axes de projection. Afin de décrire correctement la polarisation d'un rayonnement, nous introduisons les paramètres de Stokes initialement introduits par [Chandrasekhar, 1960]. La diffusion Thomson ne donnant naissance qu'à des polarisations rectilignes, nous n'utiliserons que les paramètres de Stokes notés Q et I (voir encadré page 90).

Description générale d'une onde électromagnétique dans le vide

Décrivons une onde électromagnétique de pulsation ω par deux composantes du champ électrique orthogonales entre elles et à la direction de propagation

$$E_{\parallel} = E_{0\parallel} \cos(\omega t - \varphi_{\parallel}) , \quad (3.96)$$

$$E_{\perp} = E_{0\perp} \cos(\omega t - \varphi_{\perp}) . \quad (3.97)$$

Nous définissons l'intensité du rayonnement sur chacune des directions de polarisation par

$$I_{\parallel} = \left\langle \frac{|E_{\parallel}|^2}{\mu_0 c} \right\rangle_T , \quad (3.98)$$

$$I_{\perp} = \left\langle \frac{|E_{\perp}|^2}{\mu_0 c} \right\rangle_T , \quad (3.99)$$

où le symbole $\langle \dots \rangle_T$ désigne une moyenne temporelle sur une durée T bien plus grande que la période de l'onde mais suffisamment faible pour que les phases φ_{\parallel} et φ_{\perp} et les amplitudes varient peu. Nous omettrons par la suite l'indice T . Il est possible de décrire la même onde en utilisant d'autres axes, notés par exemple \mathbf{u}_x et \mathbf{u}_y , tournés par rapport aux précédents d'un angle ψ autour de la direction de propagation.

Dans ces conditions, le champ électrique total se décompose selon

$$E_x = E_{\parallel} \cos \psi + E_{\perp} \sin \psi , \quad (3.100)$$

$$E_y = -E_{\parallel} \sin \psi + E_{\perp} \cos \psi . \quad (3.101)$$

Nous définissons également les intensités I_x et I_y sur chacun des axes et obtenons les relations suivantes

$$I_x + I_y = I_{\parallel} + I_{\perp} , \quad (3.102)$$

$$I_x - I_y = (I_{\parallel} - I_{\perp}) \cos(2\psi) + 2\sqrt{I_{\parallel} I_{\perp}} \sin(2\psi) \cos(\varphi_{\perp} - \varphi_{\parallel}) , \quad (3.103)$$

$$2\sqrt{I_x I_y} \cos(\varphi_x - \varphi_y) = (I_{\perp} - I_{\parallel}) \sin(2\psi) + 2\sqrt{I_{\parallel} I_{\perp}} \cos(2\psi) \cos(\varphi_{\perp} - \varphi_{\parallel}) , \quad (3.104)$$

où le terme $\sqrt{I_x I_y} \cos(\varphi_x - \varphi_y)$ correspond, à un facteur $2/(\mu_0 c)$ près, au terme de corrélation $\langle E_x E_y \rangle$.

La quantité Q introduite page 89 n'est donc définie qu'à un choix des axes près. Les relations de transformation (3.102)-(3.104) suggèrent d'utiliser les paramètres de Stokes initialement introduits par [Chandrasekhar, 1960] afin de décrire la polarisation du rayonnement

$$I = I_x + I_y, \quad (3.105)$$

$$Q = I_x - I_y, \quad (3.106)$$

$$U = 2\sqrt{I_x I_y} \cos(\varphi_y - \varphi_x). \quad (3.107)$$

Notons que toutes les informations sur la polarisation ne sont pas contenues dans ces paramètres. En particulier, le signe du déphasage, et par conséquent le caractère gauche ou droit d'une polarisation elliptique, n'est pas décrit. Par souci de complétude, le paramètre de Stokes

$$V = 2\sqrt{I_x I_y} \sin(\varphi_y - \varphi_x) \quad (3.108)$$

est introduit de manière à déterminer entièrement la polarisation du rayonnement^a. Cependant, nous ne l'utiliserons pas ici car seules les polarisations rectilignes sont induites par diffusion Thomson. En revanche, nous utiliserons les variables Q et U qui décrivent la différence de polarisation entre deux axes orthogonaux : Q est la différence des amplitudes entre les axes \mathbf{u}_x et \mathbf{u}_y tandis que U est la différence des amplitudes entre deux axes \mathbf{u}_X et \mathbf{u}_Y tournés de 45° par rapport aux précédents^b.

^aNotons que ce paramètre est relié aux précédents par la relation $Q^2 + U^2 + V^2 = I^2$.

^bPour le comprendre, il suffit d'utiliser la relation (3.103) avec $\psi = \pi/4$ qui fournit alors

$$I_X - I_Y = 2\sqrt{I_x I_y} \cos(\varphi_y - \varphi_x). \quad (3.109)$$

3.3.3 Hiérarchie de Boltzmann pour la polarisation

Évolution libre

Par analogie avec la définition du contraste de température, nous décrivons la polarisation du rayonnement à l'aide des paramètres de Stokes normalisés

$$\underline{Q} \equiv \frac{Q}{4I}, \quad (3.110)$$

$$\underline{U} \equiv \frac{U}{4I}, \quad (3.111)$$

et, en raison des lois de transformations (3.102)-(3.104) nous définissons les combinaisons

$$P_{\pm} = \underline{Q} \pm i\underline{U} . \quad (3.112)$$

Sous une rotation des axes d'un angle¹¹ ψ ,

$$P_{\pm} \rightarrow e^{\pm 2i\psi} P_{\pm} . \quad (3.113)$$

Nous omettrons le symbole souligné par la suite.

La base des harmoniques sphériques était appropriée pour décrire le comportement d'une quantité scalaire comme le contraste de température sur le ciel. Or, la polarisation possède une structure tensorielle et la base des simples harmoniques sphériques n'est pas adaptée à la description de la polarisation. Les variables P_{\pm} se transformant sous les rotations comme les harmoniques sphériques spinorielles ${}_{\pm 2}Y_{\ell m}$, nous allons décomposer les paramètres de Stokes sur la base des fonctions

$${}_{\pm 2}G_{\ell m}(\mathbf{x}, \tilde{\gamma}; \mathbf{k}) = (-i)^{\ell} \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell + 1}} {}_{\pm 2}Y_{\ell m}(\mathbf{k} \cdot \tilde{\gamma}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} , \quad (3.114)$$

de sorte que

$$(Q \pm iU)(\mathbf{x}, \tilde{\gamma}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_{\ell m} (2\ell + 1) \left(E_{\ell}^{(m)} \pm iB_{\ell}^{(m)} \right) (\eta, \mathbf{k}) {}_{\pm 2}G_{\ell m}(\mathbf{x}, \tilde{\gamma}; \mathbf{k}) . \quad (3.115)$$

Nous avons décomposé les variables P_{\pm} en deux catégories de multipôles : "électrique" $E_{\ell}^{(m)}$ et "magnétique" $B_{\ell}^{(m)}$. Cette appellation provient des propriétés de parité de ces champs multipolaires. Sous les transformations de parité, Q est invariant tandis que U se transforme en $-U$. Il est alors possible de montrer [Zaldarriaga & Seljak, 1997] que $E_{\ell}^{(m)}$ se transforme comme $(-1)^{\ell}$ sous les transformations de parité tandis que $B_{\ell}^{(m)}$ se transforme comme $(-1)^{\ell+1}$.

Reprenons alors l'équation de Boltzmann non-collisionnelle pour la fonction de distribution des photons polarisés, $f(x^{\mu}, p^{\mu}; \lambda)$, où λ est un paramètre décrivant la direction de polarisation. En utilisant la relation

$$\sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10}(\tilde{\gamma}) {}_sY_{\ell m}(\tilde{\gamma}) = \frac{1}{\sqrt{2\ell + 1}} \times \left[\frac{{}_s\kappa_{\ell m}}{\sqrt{2\ell - 1}} {}_sY_{\ell-1 m}(\tilde{\gamma}) - \sqrt{2\ell + 1} \frac{ms}{\ell(\ell + 1)} {}_sY_{\ell m}(\tilde{\gamma}) - \frac{{}_s\kappa_{\ell+1 m}}{\sqrt{2\ell + 3}} {}_sY_{\ell+1 m}(\tilde{\gamma}) \right] , \quad (3.116)$$

avec

$${}_s\kappa_{\ell m} = \frac{1}{\ell} \sqrt{(\ell^2 - m^2)(\ell^2 - s^2)} , \quad (3.117)$$

¹¹La différence de signe en comparaison des équations (3.102)-(3.104) provient du fait que nous effectuons ici une rotation du système physique en laissant les axes constants tandis que les transformations (3.102)-(3.104) sont induites par une rotation des axes. Cette différence entre rotation "active" et "passive" est particulièrement bien expliquée dans [Delamotte,].

nous obtenons alors la hiérarchie de Boltzmann pour la polarisation

$$E_\ell^{(m)'} = \frac{k}{2\ell+1} \left[{}_2\kappa_{\ell m} E_{\ell-1}^{(m)} - \frac{2m}{\ell(\ell+1)} B_\ell^{(m)} - {}_2\kappa_{\ell+1 m} E_{\ell+1}^{(m)} \right], \quad (3.118)$$

$$B_\ell^{(m)'} = \frac{k}{2\ell+1} \left[{}_2\kappa_{\ell m} B_{\ell-1}^{(m)} + \frac{2m}{\ell(\ell+1)} E_\ell^{(m)} - {}_2\kappa_{\ell+1 m} B_{\ell+1}^{(m)} \right]. \quad (3.119)$$

Contrairement aux équations pour le contraste de température, aucun terme de source gravitationnel n'intervient dans les équations pour la polarisation. Ceci vient du fait que la polarisation est générée à partir des anisotropies de température par diffusion Thomson. Au premier ordre dans les perturbations, aucun terme gravitationnel ne peut créer une polarisation du rayonnement. Bien évidemment, aux ordres supérieurs dans les perturbations, ceci n'est plus vrai et les couplages à la métrique induisent une faible polarisation du rayonnement. Nous examinons dans la partie suivante l'influence du terme de collision sur la polarisation.

Terme de collision

Nous avons vu que les fluctuations de température étaient en partie induites par la polarisation. Introduisons le vecteur

$$\mathbf{T} \equiv \begin{pmatrix} \Theta \\ Q + iU \\ Q - iU \end{pmatrix} \quad (3.120)$$

regroupant le contraste de température et les paramètres de Stokes. En utilisant l'expression de la section efficace de la diffusion Compton dans le référentiel de repos des électrons, nous obtenons le vecteur $\tilde{\mathbf{T}}$ après diffusion en fonction du vecteur \mathbf{T} incident¹²

$$\tilde{\mathbf{T}} = \frac{3\sigma_T}{16\pi} \begin{pmatrix} 1 + \cos^2(\beta) & -\frac{1}{2}\sin^2(\beta) & -\frac{1}{2}\sin^2(\beta) \\ -\sin^2(\beta) & \frac{1}{2}(1 + \cos\beta)^2 & \frac{1}{2}(1 - \cos\beta)^2 \\ -\sin^2(\beta) & \frac{1}{2}(1 - \cos\beta)^2 & \frac{1}{2}(1 + \cos\beta)^2 \end{pmatrix} \mathbf{T}. \quad (3.121)$$

Il faut décrire cette matrice de transfert dans le repère quelconque $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ avec $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$. Exprimée dans la base des harmoniques sphériques spinorielles, elle prend la forme

$$\mathcal{S}_T^m = \frac{\sigma_T}{4\pi} \begin{pmatrix} \bar{Y}_2^m Y_2^m & -\sqrt{\frac{3}{2}} Y_2^m {}_2\bar{Y}_2^m & -\sqrt{\frac{3}{2}} Y_2^m - {}_2\bar{Y}_2^m \\ -\sqrt{6} \bar{Y}_2^m {}_2Y_2^m & 3 {}_2\bar{Y}_2^m {}_2Y_2^m & 3 - {}_2\bar{Y}_2^m {}_2Y_2^m \\ -\sqrt{6} \bar{Y}_2^m - {}_2Y_2^m & 3 {}_2\bar{Y}_2^m - {}_2Y_2^m & 3 - {}_2\bar{Y}_2^m - {}_2Y_2^m \end{pmatrix}, \quad (3.122)$$

¹²Ce résultat diffère de l'expression obtenue dans [White & Hu, 1997] dont deux des composantes doivent être corrigées. Cette erreur ne modifie en rien les résultats suivants de cet article qui sont par ailleurs corrects.

où des barres représentent la conjugaison complexe des harmoniques sphériques dont les arguments sont les angles incidents. Toutes les autres harmoniques sphériques ont pour arguments les angles après la diffusion.

Le terme de collision pour le vecteur \mathbf{T} prend alors la forme

$$C[\mathbf{T}] = -\tau' \mathbf{T}(\mathbf{x}, \tilde{\gamma}) + \frac{\tau'}{10} \int d\Omega' \sum_m \mathcal{S}_T^m(\tilde{\gamma}', \tilde{\gamma}) \mathbf{T}(\mathbf{x}, \tilde{\gamma}') , \quad (3.123)$$

où $\tau' = n_e \sigma_T a$ représente le taux de collision par unité de temps conforme. Il faut également se placer dans le référentiel du centre de masse du fluide de baryons ce qui apporte une contribution Doppler au terme de collision pour la température uniquement

$$C[\Theta] = -\tau' \int \frac{d\Omega'}{4\pi} \Theta(\mathbf{x}, \tilde{\gamma}') - \tau' \tilde{\gamma} \cdot v_B . \quad (3.124)$$

L'intégration angulaire dans l'équation (3.123) fournit les termes de collisions suivants

$$C_\ell^{(m)}[\Theta] = -(1 - \delta_{\ell,0})\tau' \left[\Theta_\ell^{(m)} - \delta_{\ell,1} v_b^{(m)} \right] + \delta_{\ell,2} \frac{1}{10} \tau' \left[\Theta_2^{(m)} - \sqrt{6} E_2^{(m)} \right] \quad (3.125)$$

pour la température, et pour la polarisation

$$C_\ell^{(m)}[E] = -\tau' E_\ell^{(m)} + \delta_{\ell,2} \frac{\sqrt{6}}{10} \tau' \left[\Theta_2^{(m)} - \sqrt{6} E_2^{(m)} \right] , \quad (3.126)$$

$$C_\ell^{(m)}[B] = -\tau' B_\ell^{(m)} . \quad (3.127)$$

3.4 Interprétation

3.4.1 Polarisation

Les seuls termes de source pour la polarisation sont générés par les anisotropies quadrupolaires $\ell = 2$ de la température. Nous pouvons comprendre ce résultat à l'aide d'un raisonnement simple. Plaçons-nous dans le référentiel lié à l'électron sur lequel diffuse une onde électromagnétique. Singularisons deux directions incidentes orthogonales, portées par les vecteurs \mathbf{u}_x et \mathbf{u}_y , et une troisième direction \mathbf{u}_z , orthogonale aux deux autres, symbolisant la direction de propagation de l'onde transmise (voir figure 3.1). Supposons, de plus, que la radiation soit initialement non-polarisée.

Nous voyons alors qu'un rayonnement parfaitement isotrope ne peut pas contribuer à générer une polarisation. En effet, le champ électrique de l'onde incidente se propageant suivant l'axe \mathbf{u}_x peut être décomposé suivant les axes \mathbf{u}_y et \mathbf{u}_z . D'après l'expression de la section efficace Compton, l'onde diffusée, se propageant suivant

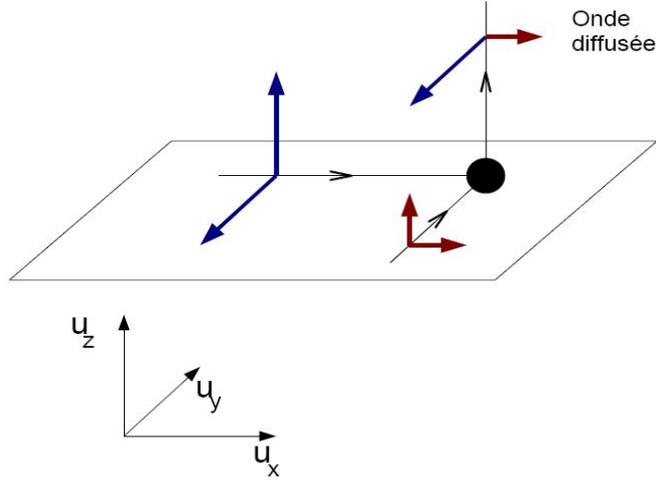


FIG. 3.1 – Effet d’une anisotropie quadrupolaire sur la polarisation. L’intensité de l’onde incidente suivant \mathbf{u}_x est plus grande que celle de l’onde se propageant selon \mathbf{u}_y . En nous intéressant à l’onde diffusée suivant \mathbf{u}_z , nous voyons que l’anisotropie quadrupolaire initiale résulte en une polarisation partielle suivant \mathbf{u}_y après l’interaction.

\mathbf{u}_z est donc polarisée suivant l’axe¹³ \mathbf{u}_y . De même une onde incidente se propageant orthogonalement à la première, *i.e.* selon \mathbf{u}_y , transmettra à l’onde diffusée sa polarisation suivant u_x .

Supposons que le rayonnement soit isotrope initialement. Les deux composantes du champ électrique diffusé auront alors la même amplitude n’induisant aucune polarisation. De la même manière, une anisotropie dipolaire ne génère pas de polarisation : les deux radiations incidentes ont sensiblement la même énergie et contribuent de façon équivalente à la polarisation. Remarquons qu’une anisotropie dipolaire correspond à une vitesse d’ensemble du fluide de photons qui peut être absorbée par un changement de référentiel d’étude. L’électron n’est alors plus au repos : une anisotropie dipolaire est équivalente à un effet Doppler¹⁴. En revanche, une anisotropie quadrupolaire génère une différence d’amplitude entre les deux ondes incidentes. Supposons que l’onde incidente se propageant suivant l’axe \mathbf{u}_x soit plus intense. Elle contribuera donc davantage à la polarisation de l’onde diffusée. Après diffusion, la composante sur \mathbf{u}_y du champ électrique possède une amplitude plus grande que celle sur \mathbf{u}_x : l’onde diffusée est alors légèrement polarisée.

Ce raisonnement met en lumière les résultats obtenus précédemment sur le terme

¹³C’est le même mécanisme qui est à l’origine de la polarisation de la lumière naturelle, après diffusion par l’atmosphère.

¹⁴En particulier, les observations du fond diffus cosmologique prennent en compte le mouvement de la Terre par rapport au mouvement d’un observateur comobile. L’effet Doppler qui en résulte induit une anisotropie de température dipolaire qui doit être soigneusement retranchée.

de collision : seuls les termes quadrupolaires, *i.e.* $\ell = 2$, couplent les anisotropies de température et de polarisation.

Notons que seuls les modes de polarisation E_2 (et non B_2) sont alors générés par le quadrupôle de température. À l'ordre linéaire, il ne pouvait pas en être autrement puisque Θ_2 et E_2 possèdent la même parité, contrairement aux modes B_2 . Cependant, d'autres couplages, par exemple entre le quadrupôle de température Θ_2 et les modes $B_{2\ell+1}$, auraient pu être générés.

Ainsi, puisqu'aucune perturbation n'induit de polarisation à l'ordre linéaire, les seuls termes de source pour les modes de polarisation E sont générés par les anisotropies quadrupolaires de température, qui peuvent être scalaires, vectorielles¹⁵ ou tensorielles. Les modes de polarisation E agissent alors comme une source pour les modes B , ce qui est visible sur l'équation (3.119). Notons au passage, que pour des raisons de parité, seuls les couplages entre E_ℓ et $B_{\ell'}$ avec $|\ell - \ell'|$ impair sont autorisés. Enfin, il est important de constater que seuls les modes tensoriels $m = \pm 2$ donneront naissance aux modes de polarisation B . En effet, les modes vectoriels décroissant rapidement, seuls les modes scalaires et tensoriels sont susceptibles d'induire des modes B . Mais les modes scalaires, indicés par $m = 0$, des modes E et B évoluent indépendamment ; le seul terme de mélange dans les équations (3.118) et (3.119) étant proportionnel à m . Les modes B ne peuvent donc être induits que par des ondes gravitationnelles et constituent, par conséquent, une fenêtre observationnelle de choix sur les ondes gravitationnelles primordiales générées pendant l'inflation. Malheureusement, bien que les modes E commencent à être étudiés précisément, les modes B n'ont toujours pas été observés [Page *et al.*, 2006]. En effet, n'étant générés que par les modes tensoriels, leur amplitude est faible et décroît rapidement lorsque l'on scrute des échelles de plus en plus petites.

Nous étudions dans les développements suivants les principales caractéristiques du fond diffus cosmologique ainsi que les effets physiques qui les ont générées.

3.4.2 Effet Sachs-Wolfe

L'équation d'évolution du contraste de température peut se mettre sous la forme

$$\frac{d(\Theta + \Phi)}{d\eta} = \Psi' + \Phi' + \tilde{\gamma}^i \tilde{\gamma}^j \nabla_i \bar{\Phi}_j - \tilde{\gamma}^i \tilde{\gamma}^j \bar{\bar{E}}_{ij}. \quad (3.128)$$

En intégrant le long de la ligne de visée,

$$\begin{aligned} \Theta(\mathbf{x}_0, \eta_0, \tilde{\gamma}) &= \Theta(\mathbf{x}_*, \eta_*, \tilde{\gamma}) + [\Phi(\mathbf{x}_*, \eta_*) - \Phi(\mathbf{x}_0, \eta_0)] \\ &\quad + \int d\eta \left[\Psi' + \Phi' + \tilde{\gamma}^i \tilde{\gamma}^j \nabla_i \bar{\Phi}_j - \tilde{\gamma}^i \tilde{\gamma}^j \bar{\bar{E}}_{ij} \right]. \end{aligned} \quad (3.129)$$

Les premiers termes correspondent à l'effet Sachs-Wolfe et indiquent que la température mesurée aujourd'hui est reliée à celle au point d'émission ainsi qu'à la

¹⁵Les modes vectoriels sont en général négligeables comme nous l'avons vu au chapitre précédent.

différence de potentiel entre les points d'émission et de réception. Les termes sous l'intégrale correspondent à l'effet Sachs-Wolfe intégré¹⁶ respectivement pour les parties scalaires, vectorielles et tensorielles. Leur contribution au contraste de température tient compte de l'évolution des perturbations de métrique le long de la ligne de visée. Cette expression a été établie par R. Sachs et A. Wolfe [Sachs & Wolfe, 1967] qui ont été parmi les premiers à comprendre l'influence des inhomogénéités sur la température du rayonnement de fond.

En général, les termes dus à l'effet Sachs-Wolfe intégré sont négligeables. En effet, les modes vectoriels et tensoriels sont faibles tandis que, pendant l'ère de domination de la matière, les potentiels gravitationnels sont approximativement constants de sorte que $\Psi \approx \Phi \approx 0$. Cette dernière assertion n'est plus valable dans l'ère de domination de l'énergie sombre pendant laquelle les potentiels décroissent. En négligeant les effets intégrés, nous voyons que le contraste de température n'est connu qu'à une constante près puisque l'équation (3.129) fait intervenir la combinaison $\Theta + \Phi$. La constante ajoutée au contraste de température est reliée au potentiel gravitationnel au niveau de l'observateur : aux grandes échelles, les fluctuations de température ne dépendent que de la différence de potentiel entre les points d'émission et de réception. Le contraste de température n'est donc connu qu'à un monopôle près.

Outre les effets Sachs-Wolfe, nous devons également prendre en compte un possible effet Doppler dû à la différence de vitesse entre les points d'émission et de réception. Un terme incluant la vitesse des baryons V_i^b de la forme

$$\Theta^D = \tilde{\gamma}^i V_i^b \quad (3.130)$$

doit donc être ajouté à l'équation (3.129).

Retour sur l'approximation fluide

Considérons les modes super-Hubble uniquement. D'après les équations de la hiérarchie précédemment établie, les termes multipolaires d'ordre ℓ sont de plus en plus petits lorsque ℓ croît puisque $\Theta_\ell \sim k\eta\Theta_{\ell-1}$. Aux grandes échelles, on peut donc considérer que l'approximation fluide suffit à décrire correctement la radiation. Ce résultat est conforme à l'intuition : en considérant de très grandes distances, tout se passe comme si le libre parcours moyen des photons était suffisamment petit pour que le fluide de photons soit à l'équilibre thermique.

Dans ces conditions, les deux premières équations de la hiérarchie fournissent les deux équations de conservation pour les photons. En effet, d'après les équations (3.41)-(3.43), nous obtenons, la densité et les contributions scalaires à la vitesse

¹⁶On sépare en général l'effet Sachs-Wolfe intégré en effet Sachs-Wolfe primitif et intégré. L'effet Sachs-Wolfe primitif correspond à la variation du potentiel gravitationnel au voisinage de la surface de dernière diffusion.

et à la pression anisotrope pour le fluide de photons

$$\delta_\gamma = 4\Theta_0, \quad (3.131)$$

$$\Delta V_\gamma = 3 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} k \Theta_1 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (3.132)$$

$$\nabla_i \nabla_j \pi^{ij} = \frac{2}{3} \Delta \Delta \pi = 4 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} k^2 \Theta_2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (3.133)$$

Notons que les moments d'ordre ℓ sont proportionnels à k^ℓ ce qui permet de négliger tous les multipôles au-delà du dipôle.

Il est indispensable de tenir compte de la matière au moment de la recombinaison et nous supposons dans un premier temps qu'elle n'interagit que gravitationnellement avec les photons¹⁷. En négligeant les perturbations d'entropie intrinsèque, nous obtenons les systèmes d'équations pour la matière

$$\delta_m^\# = -\Delta V_m^\# + 3\Psi', \quad (3.134)$$

$$V_m^\# + \mathcal{H}V_m^\# = -\Phi, \quad (3.135)$$

et pour la radiation

$$\delta_\gamma^\# = -\frac{4}{3}\Delta V_\gamma^\# + 4\Psi', \quad (3.136)$$

$$V_\gamma^\# = -\Phi - \frac{\delta_\gamma^\#}{4}. \quad (3.137)$$

Nous avons noté $\delta_m^\#$ le contraste de densité de la matière et $V_m^\#$ la vitesse du fluide de matière tandis que les grandeurs équivalentes pour la radiation sont reliées au monopôle et au dipôle $\delta_\gamma^\# = 4\Theta_0$ et $V_\gamma^\# = 4\Theta_1$, toutes les quantités étant évaluées dans la jauge newtonienne.

Les quatre équations (3.134)-(3.137) fournissent l'évolution des grandeurs fluides caractéristiques de la matière et de la radiation. Cependant, ces fluides interagissent gravitationnellement et ne sont pas complètement indépendants. Nous paramétrons alors le système d'équations, d'une part, par le contraste de densité et la vitesse du fluide de photons et, d'autre part, par les perturbations relatives d'entropie de mélange $S_{\gamma m}$ et de vitesse $V_{\gamma m}$ par

$$S_{\gamma m} = \frac{3}{4}\delta_\gamma^\# - \delta_m^\#, \quad (3.138)$$

$$V_{\gamma m} = V_\gamma^\# - V_m^\#. \quad (3.139)$$

Ces deux quantités sont invariantes de jauge au premier ordre.

¹⁷Nous n'avons d'ailleurs pas inclus de terme de collision dans l'équation de Boltzmann.

Intéressons-nous tout d'abord à la vitesse des fluides. À partir des équations (3.135) et (3.137), nous obtenons la loi d'évolution de la différence des vitesses

$$V'_{\gamma m} = V'_\gamma - V'_m = \mathcal{H}V_m^\# - \frac{\delta_\gamma^\#}{4}. \quad (3.140)$$

L'équation de Poisson en jauge newtonienne nous indique qu'aux grandes échelles et dans l'ère dominée par la radiation¹⁸, $\delta_\gamma^\# \sim 4\mathcal{H}V_\gamma^\#$. Dès lors, nous obtenons l'équation

$$V'_{\gamma m} + \mathcal{H}V_{\gamma m} = 0, \quad (3.141)$$

qui indique que les deux fluides tendent vers la même vitesse comme a^{-1} aux grandes échelles.

La dynamique pour la perturbation d'entropie de mélange est déduite de la différence pondérée des équations (3.134) et (3.136) de sorte que

$$S'_{\gamma m} = -\Delta V_{\gamma m}. \quad (3.142)$$

L'équation (3.142) indique que les perturbations d'entropie pour les modes super-Hubble sont constantes.

À présent que nous connaissons les comportement relatifs des deux fluides, il suffit de s'intéresser à la dynamique du fluide de photons. L'équation de continuité nous indique, qu'aux grandes échelles,

$$\begin{aligned} \delta_\gamma^\#(\eta, \mathbf{x}) &= 4[\Psi(\eta, \mathbf{x}) + f(\mathbf{x})] = \frac{4}{3}[\delta_m^\#(\eta, \mathbf{x}) + S_{\gamma m}(\mathbf{x})], \\ \text{ou encore } \Theta_0(\eta, \mathbf{x}) &= \Psi(\eta, \mathbf{x}) + f(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (3.143)$$

La fonction $f(\mathbf{x})$ est ici une fonction quelconque, indépendante du temps, fixée par les conditions initiales aux grandes échelles, à la fin de l'inflation.

Dans ce qui suit, nous explorons l'influence des conditions initiales adiabatiques pures et isocourbes pures sur le monopôle du contraste de température. Bien que non-mesurable directement, l'amplitude du monopôle contribue à la normalisation du spectre de puissance pour la température.

Conditions initiales adiabatiques

Les perturbations adiabatiques sont définies par $S_{\gamma m} = 0$. Dans ces conditions, le potentiel aux échelles super-Hubble est constant et l'équation (2.103) fournit

$$\delta_\gamma^\#(\eta_i, \mathbf{x}) = -2\Phi(\eta_i, \mathbf{x}) \quad \text{soit} \quad \Theta_0(\eta_i, \mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\Phi(\eta_i, \mathbf{x}). \quad (3.144)$$

¹⁸Nous avons négligé l'effet de la courbure des sections spatiales

L'instant η_i est choisi après l'inflation de sorte que la densité d'énergie soit effectivement dominée par la radiation. À l'aide de ces conditions initiales, nous pouvons fixer la constante qui apparaît dans l'équation (3.143), puisqu'aux grandes échelles

$$\Theta_0(\eta_i, \mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\Phi(\eta_i, \mathbf{x}) = \Psi(\eta_i, \mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) , \quad (3.145)$$

de sorte que $f(\mathbf{x}) = -\Psi(\eta_i, \mathbf{x}) - \frac{1}{2}\Phi(\eta_i, \mathbf{x})$. Le monopôle du contraste de température aujourd'hui, à $\eta = \eta_0$, s'exprime en fonction de celui au niveau de la surface de dernière diffusion, à la date $\eta = \eta_*$

$$\Theta_0(\eta_0, \mathbf{x}_0) + \Psi(\eta_0, \mathbf{x}_0) = \Theta_0(\eta_*, \mathbf{x}_*) + \Psi(\eta_*, \mathbf{x}_*) = 2\Psi(\eta_*, \mathbf{x}_*) + f(\mathbf{x}_*) . \quad (3.146)$$

Nous négligeons les effets de pression anisotrope pendant l'ère de domination de la radiation si bien que $\Phi = \Psi$. De plus, le potentiel au moment de la recombinaison est relié au potentiel après l'inflation par

$$\Psi(\eta_*, \mathbf{x}) \approx \frac{9}{10}\Psi(\eta_i, \mathbf{x}) . \quad (3.147)$$

Nous obtenons alors l'influence de l'effet Sachs-Wolfe pour des conditions initiales adiabatiques

$$\Theta_0(\eta_0, x_0) + \Psi(\eta_0, x_0) = \frac{1}{3}\Psi(x_*, \eta_*) . \quad (3.148)$$

Ce résultat n'est pas intuitif : les photons observés les plus énergétiques sont ceux qui appartiennent à un puits de potentiel ($\Psi > 0$) au moment de l'émission.

Conditions initiales isocourbes

Nous considérons ici des conditions initiales isocourbes. Comme leur nom l'indique, les perturbations dans les différents fluides se compensent de sorte qu'aucune perturbation gravitationnelle n'est générée, *i.e.* $\Psi(\eta_i, \mathbf{x}) = 0$. D'après l'équation d'Einstein (2.103), aux grandes échelles, $\Omega(\eta_i)\delta^\#(\eta_i, \mathbf{x}) \approx \Omega_\gamma(\eta_i)\delta_\gamma^\#(\eta_i, \mathbf{x}) \approx 0$, ce qui indique que le contraste de densité de matière est donné par $\delta_m^\#(\eta_i, \mathbf{x}) \approx -S_{\gamma m}$.

La constante $f(\mathbf{x})$ dans l'équation (3.143) peut être prise nulle puisque le potentiel est négligeable initialement. Nous obtenons alors,

$$\Theta_0 + \Psi(x_0, \eta_0) = \Theta_0(x_*, \eta_*) + \Psi(x_*, \eta_*) = 2\Psi(x_*, \eta_*) . \quad (3.149)$$

Les perturbations isocourbes contribuent différemment au monopôle. En revanche, à grande échelle, nous pouvons toujours considérer que le contraste de température est proportionnel au potentiel gravitationnel sur la surface de dernière diffusion, la constante de proportionnalité dépendant des conditions initiales.

Nous avons décrit l'influence des conditions initiales sur l'effet Sachs-Wolfe, c'est-à-dire sur les modes de grande longueur d'onde. Dans cette approximation,

le contraste de température est essentiellement défini par son terme monopolaire constant. Cet effet n'inclut que la contribution des perturbations gravitationnelles sur les fluctuations de température ; aux échelles considérées, le libre parcours moyen des photons est suffisamment faible pour que, sous l'influence des collisions, les fluides de photons et de baryons, soient approximativement à l'équilibre, leur dynamique étant principalement déterminée par le contraste de densité. Aux plus petites échelles, le traitement des perturbations gravitationnelles requiert des outils plus complets. En particulier, les effets de lentille gravitationnelle ne peuvent plus être négligés [Benabed, 2001].

Nous souhaitons à présent déterminer le comportement du contraste de température sur des distances inférieures à la taille de l'horizon. Afin d'appliquer à nouveau une description en terme de fluide, il est essentiel de considérer des échelles plus grandes que le libre parcours moyen des photons. À la limite où le taux de collisions τ' est grand, nous pouvons sonder des échelles relativement petites. L'approximation d'une limite infinie de l'épaisseur optique $\tau \rightarrow \infty$ est appelée *approximation de couplage fort*¹⁹.

3.4.3 Limite de couplage fort

Avant la recombinaison, la plupart des atomes sont ionisés et la densité électronique est suffisamment élevée pour considérer que la limite de couplage fort $\tau' = a\sigma_{\text{T}}n_e \rightarrow \infty$ est valide. Nous pouvons dès lors reprendre l'équation de Boltzmann afin d'identifier les grandeurs pertinentes lorsque l'épaisseur optique est infinie.

Les équations de la hiérarchie s'écrivent

$$\Theta_{\ell}^{(m)'} - \frac{k}{2\ell + 1} \left[\kappa_{\ell m} \Theta_{\ell-1}^{(m)} - \kappa_{\ell+1 m} \Theta_{\ell+1}^{(m)} \right] = S_{\ell}^{(m)} + \tau' \Theta_{\ell}^{(m)}. \quad (3.150)$$

Lorsque le libre parcours moyen des photons $1/\tau'$ est très petit devant la taille de l'horizon $\sim \eta$, la dérivée du multipôle $\Theta_{\ell}^{(m)}$ est négligeable devant le terme de collision. D'autre part, nous avons vu qu'en l'absence de collisions, $\Theta_{\ell+1}^{(m)} \sim k\eta\Theta_{\ell}^{(m)}$ ce qui signifie, que pour des longueurs d'onde proche de la taille de l'horizon, les multipôles d'ordre élevé sont rapidement négligeables. Enfin, afin de sonder des échelles suffisamment grandes, nous considérons la limite $k \ll \tau'$, ce qui permet d'obtenir, en négligeant les perturbations gravitationnelles, que $\Theta_{\ell}^{(m)} \sim k/\tau' \Theta_{\ell-1}^{(m)} \ll \Theta_{\ell-1}^{(m)}$. Nous retrouvons alors la limite de la partie précédente, dans laquelle l'approximation fluide est valable puisque seuls les premiers multipôles - monopôle, dipôle voire quadrupôle - ne sont pas négligeables. En revanche, la limite super-horizon n'est qu'un cas particulier d'une approximation moins restrictive : celle pour laquelle les modes étudiés ont une longueur d'onde supérieure au libre parcours moyen.

¹⁹En anglais, *tight coupling*.

En tenant compte du terme de collision, nous pouvons ré-écrire les équations de conservation pour les photons, en négligeant la pression anisotrope

$$\delta_\gamma^\# = -\frac{4}{3}\Delta V_\gamma + 4\Psi', \quad (3.151)$$

$$V_\gamma^\# = -\frac{1}{4}\delta_\gamma^\# - \Phi - \tau'(V_\gamma^\# - V_b^\#). \quad (3.152)$$

En présence d'interaction photons-baryons, les tenseurs énergie-impulsion de chacun des fluides ne sont pas conservés. En revanche, le tenseur énergie-impulsion total l'est. Afin de déterminer les équations de conservation pour les baryons en régime de couplage fort, il faut inclure un terme de source Q_b^ν tel que le tenseur énergie-impulsion des baryons satisfasse

$$\nabla_\mu T_b^{\mu\nu} = Q_b^\nu, \quad (3.153)$$

et où le terme de source pour les photons vaut

$$Q_\gamma^\nu = -Q_b^\nu. \quad (3.154)$$

Par une approche cinétique du fluide de baryons, il est possible de déterminer ce terme de source [Uzan, 1998] [Dodelson, 2003], ce que nous ne ferons pas ici. Remarquons simplement que l'équation d'Euler fait intervenir le flux d'énergie totale ($\rho + P$) du fluide transporté à la vitesse V^i commune aux deux fluides. Les équations d'Euler pour les baryons (3.135) et les photons (3.137) sont donc dans un rapport

$$R \equiv \frac{3}{4} \frac{\rho_b}{\rho_\gamma}. \quad (3.155)$$

En incluant le terme de collision, nous trouvons les équations de conservation des baryons au premier ordre

$$\delta_b^\# = -\Delta V_b^\# + 3\Psi', \quad (3.156)$$

$$V_b^\# + \mathcal{H}V_b^\# = -\Phi + \frac{\tau'}{R}(V_\gamma^\# - V_b^\#). \quad (3.157)$$

Développons les équations d'Euler des photons et des baryons en puissance du petit paramètre k/τ' . À l'ordre dominant, nous obtenons

$$V_b^\# = V_\gamma^\# \quad \text{et} \quad \delta_\gamma^\# = \frac{4}{3}\delta_b^\#. \quad (3.158)$$

Nous retrouvons le fait que les deux fluides possèdent la même vitesse et que les perturbations d'entropie de mélange sont constantes.

En combinant les équations de conservation pour les photons, nous obtenons

$$\delta_\gamma^{\prime\#} - \frac{1}{3}\Delta\delta_\gamma^\# = \frac{4}{3}\Delta\Phi + 4\Psi'' + \frac{4}{3}\tau'\Delta(V_\gamma^\# - V_m^\#). \quad (3.159)$$

Afin de se débarrasser du terme proportionnel à τ' , nous utilisons les équations de conservation du fluide de baryons. En imposant les conditions (3.158) valables à l'ordre dominant en k/τ' , nous obtenons alors l'équation d'évolution du contraste de densité du fluide de photons

$$\delta_\gamma'' + \frac{R'}{1+R}\delta_\gamma' - c_s^2\Delta\delta_\gamma = 4\Psi'' + 4\frac{R'}{1+R}\Psi' + \frac{4}{3}\Delta\Phi, \quad (3.160)$$

où la vitesse du son est donnée par

$$c_s^2 = \frac{1}{3} \frac{1}{1+R}. \quad (3.161)$$

À la limite où la densité de baryons s'annule, $R = 0$, et la vitesse du son est celle d'un fluide relativiste. Au contraire, lorsque le fluide n'est composé que de baryons, $R \rightarrow \infty$ et la vitesse du son s'annule.

L'équation (3.160) est l'équation d'un oscillateur amorti forcé par les potentiels gravitationnels. En régime libre, les contrastes de densité des fluides de photons et de baryons oscillent donc à une fréquence de l'ordre de kc_s , pour un mode k donné.

Effet Sachs-Wolfe

Supposons que les potentiels gravitationnels soient constants, ce qui est vérifié pendant l'ère de la matière ou à grande échelle dans l'ère de domination de la radiation. Nous négligeons par ailleurs toute dépendance temporelle du rapport des densités de baryons et de photons.

Les solutions de l'équation (3.160) s'écrivent alors

$$\begin{aligned} \Theta_0^{\text{eff}}(k\eta) &= \frac{\delta_\gamma^\#}{4} + \Phi = \Theta_0(k\eta) + \Phi \\ &= [\Theta_0^{\text{eff}}(0) + R\Phi] \cos(kc_s\eta) + \frac{\Theta_0^{\text{eff}'(0)}}{kc_s} \sin(kc_s\eta) - R\Phi. \end{aligned} \quad (3.162)$$

Le contraste de température oscille donc autour d'une valeur $-R\Phi$, non nulle en présence de baryons²⁰. Les constantes $\Theta_0^{\text{eff}}(0)$ et $\Theta_0^{\text{eff}'(0)}$ sont déterminées par les conditions initiales. Pour des conditions initiales adiabatiques, $\Theta_0^{\text{eff}}(0) = \Psi/3$ et $\Theta_0^{\text{eff}'(0)} = 0$, nous retrouvons l'effet Sachs-Wolfe. Les conditions initiales isocourbes sont caractérisées par la condition $\Theta_0^{\text{eff}}(0) = 0$ et $\Theta_0^{\text{eff}'(0)} \neq 0$.

Effet Doppler

L'effet Doppler s'interprète à partir de la vitesse du fluide de photons, qui, dans les mêmes hypothèses qu'au paragraphe précédent, s'apparente à la dérivée tempo-

²⁰En l'absence de baryons, $R = 0$ et les oscillations sont symétriques autour de zéro.

relle du contraste de température

$$\begin{aligned} k\Theta_1(k\eta) &= -\Theta_0^{\text{eff}'} + (\Psi' + \Phi') \\ &= -kc_s [\Theta_0^{\text{eff}}(0) + R\Phi] \sin(kc_s\eta) + \frac{\Theta_0^{\text{eff}'}(0)}{k} \cos(kc_s\eta) . \end{aligned} \quad (3.163)$$

Le terme de vitesse présente des oscillations en quadrature de phase par rapport au terme de densité. Quand $R \rightarrow 0$, l'amplitude des oscillations est la même que celle du terme Sachs-Wolfe, ce qui tend à limiter l'effet des oscillations du plasma. Notons que l'amplitude du terme Doppler est de l'ordre de kc_s celle du monopôle : le terme Doppler est donc d'autant plus faible que la densité de baryons est grande.

Nous ne détaillerons pas davantage les propriétés des premiers multipôles, qui sont examinés dans la littérature (voir par exemple [Dodelson, 2003] [Peter & Uzan, 2005]). En revanche, nous décrivons, dans ce qui suit, les caractéristiques du spectre de puissance.

3.5 Spectre de puissance

Nous avons précédemment décomposé le contraste de température $\Theta(x^\mu, \tilde{\gamma}^\mu)$ sur la base des $G_{\ell m}$ afin de définir les multipôles successifs $\Theta_\ell^{(m)}(\mathbf{k}, \eta)$. Parmi ces multipôles, le monopôle $\ell = 0$ et le dipôle $\ell = 1$ suffisent à rendre compte, grâce à l'approximation fluide, du comportement du contraste de température aux échelles supérieures au libre parcours moyen des photons.

Afin de caractériser la statistique des fluctuations de température (ou de la polarisation), nous cherchons à décrire leurs fonctions de corrélation sur le ciel. La valeur moyenne du contraste de température (ou des modes de polarisation) étant nulle par définition, la statistique des anisotropies de température (ou des modes de polarisation) est codée par les fonctions de corrélation à n points, $n \geq 2$. La plus simple d'entre elles, celle qui définit complètement une distribution gaussienne de moyenne nulle, est la fonction à deux points.

3.5.1 Développement en harmoniques sphériques

De façon à caractériser la statistique des anisotropies, nous réalisons une transformée de Fourier du contraste de température sur le ciel, adaptée à la géométrie sphérique, c'est-à-dire à dire une décomposition en harmoniques sphériques de la forme²¹

$$\Theta(x_0, \tilde{\gamma}) = \sum_{\ell m} a_{\ell m}(x_0) Y_{\ell m}(\tilde{\gamma}) , \quad (3.164)$$

²¹Remarquons que la condition de réalité du contraste de température impose $a_{\ell m}^* = (-1)^m a_{\ell -m}$.

où x_0 est la position de l'observateur. Inversement les coefficients $a_{\ell m}$ s'expriment en fonction du contraste de température

$$a_{\ell m}(x_0) = \int d^2\tilde{\gamma} \Theta(x_0, \tilde{\gamma}) Y_{\ell m}^*(\tilde{\gamma}) . \quad (3.165)$$

Dans la suite, nous omettrons les dépendances des grandeurs Θ et $a_{\ell m}$ avec x_0 .

Il est possible de relier les coefficients $a_{\ell m}$ aux multipôles introduits précédemment. Utilisant la décomposition (3.62) et la définition (3.165), nous obtenons

$$a_{\ell m} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^2\tilde{\gamma} \sum_{LM} (-i)^L \sqrt{4\pi(2L+1)} \Theta_L^{(M)}(\eta, \mathbf{k}) Y_{LM}(\mathbf{k} \cdot \tilde{\gamma}) Y_{\ell m}^*(\tilde{\gamma}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} . \quad (3.166)$$

De la même manière, nous décomposons la polarisation à l'aide des coefficients

$$\pm_2 a_{\ell m} = \int d^2\tilde{\gamma} (Q \pm iU)(x_0, \tilde{\gamma}) \pm_2 Y_{\ell m}^*(\tilde{\gamma}) , \quad (3.167)$$

et l'expression des coefficients $\pm_2 a_{\ell m}$ en fonction des grandeurs $E_{LM} \pm iB_{LM}$ est de la même forme que la relation (3.166) en remplaçant le produit $Y_{LM}(\mathbf{k} \cdot \tilde{\gamma}) \times Y_{\ell m}^*(\tilde{\gamma})$ par $\pm_2 Y_{LM}(\mathbf{k} \cdot \tilde{\gamma}) \times \pm_2 Y_{\ell m}^*(\tilde{\gamma})$.

Il est possible de ré-écrire l'équation (3.166) en exprimant le facteur exponentiel en fonction des harmoniques sphériques à l'aide de la formule de Rayleigh

$$\begin{aligned} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} &= \sum_{L'} i^{L'} \sqrt{\frac{4\pi}{(2L'+1)}} j_{L'}(kr) Y_{L'0}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \\ &= 4\pi \sum_{L'M'} i^{L'} j_{L'}(kr) Y_{L'M'}^*(\mathbf{k}) Y_{L'M'}(\mathbf{x}) , \end{aligned} \quad (3.168)$$

la dernière égalité provenant de la formule d'addition des harmoniques sphériques et où nous avons noté j_ν la fonction de Bessel sphérique d'ordre ν définie à partir de la fonction de Bessel du premier ordre J_ν par

$$j_\nu(z) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{\nu+\frac{1}{2}}(z) . \quad (3.169)$$

À l'aide d'un tel développement, les coefficients $a_{\ell m}$ s'expriment comme une combinaison linéaire des multipôles Θ_{LM} pondérée par des fonctions de Bessel. Nous ne traiterons pas le cas général ici mais nous nous intéresserons à la contribution des modes scalaires du monopôle et du dipôle. Comme nous l'avons vu, cette approximation est suffisante aux échelles suffisamment grandes.

3.5.2 Approximation des coefficients $a_{\ell m}$

Dans l'approximation fluide, le contraste de température vaut approximativement

$$\Theta(x, \tilde{\gamma}) \approx \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \left[\Theta_0(\eta, \mathbf{k}) - 3 \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \Theta_1(\eta, \mathbf{k}) (i\mathbf{k} \cdot \tilde{\gamma}) \right] e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (3.170)$$

La position \mathbf{x} correspond à la position de l'observateur par rapport au point d'émission, avant que les fluides de photons et de baryons ne soient découplés. Si $\Delta\eta$ est le temps conforme qui nous sépare de la surface de dernière diffusion, $\mathbf{x} = -\Delta\eta \tilde{\gamma}$. Nous obtenons alors, à l'aide du développement (3.168)

$$a_{\ell m} \approx 4\pi (-i)^\ell \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \left[\Theta_0(\eta, \mathbf{k}) j_\ell(k\Delta\eta) + 3\Theta_1(\eta, \mathbf{k}) \frac{d}{d\Delta\eta} j_\ell(k\Delta\eta) \right] Y_{\ell m}^*(\mathbf{k}). \quad (3.171)$$

La décomposition en harmoniques sphériques $Y_{\ell m}$ permet de sonder des échelles angulaires $\Delta\theta \sim 2\pi/\ell$. Les coefficients $a_{\ell m}$, induits essentiellement par le monopôle et le dipôle, mélangent les modes de vecteurs d'onde \mathbf{k} tels que $j_\ell(k\Delta\eta)$ ne soit pas négligeable. Or, les fonctions de Bessel sphériques $j_\ell(x)$ oscillent en fonction de x jusqu'à $x \sim \ell$, valeur à partir de laquelle elles deviennent négligeables. La projection des modes de fluctuations sur le ciel a donc pour effet de mélanger différents modes : à une échelle angulaire $\Delta\theta \sim 2\pi/\ell$ contribuent tous les modes de longueur d'onde λ supérieure à $\sim 2\pi\Delta\eta/\ell$.

Cet effet possède une interprétation physique transparente. Supposons que les fluctuations de température ne soient constituées que d'une anisotropie dipolaire, décrite par une onde plane de vecteur d'onde \mathbf{k} . Un observateur, recevant les photons émis par la surface de dernière diffusion, mesure le contraste de température dans une direction \hat{n} qui forme un angle θ avec la direction de propagation \mathbf{k} . Lorsque $\theta = 0$, l'observateur voit une fluctuation de longueur d'onde $\lambda_0 = 2\pi/k$ sous un angle $\Delta\theta \sim 2 \arccos(\lambda_0/\Delta\eta)$. En revanche, lorsque la direction d'observation est proche de $\theta = \pi/2$, les échelles angulaires sondées sont de l'ordre de $\Delta\theta \sim 2 \arcsin(\lambda_0/\Delta\eta)$. Compte-tenu de la condition²² $\lambda_0/\Delta\eta \ll 1$, les anisotropies en $\theta = \pi/2$ sont observées sur des échelles angulaires plus petites qu'en $\theta = 0$. Une telle anisotropie contribue alors à toutes les échelles angulaires plus grandes que $\Delta\theta \sim \lambda_0/\Delta\eta$, c'est à dire tous les multipôles ℓ tels que $\ell \leq 2\pi\Delta\eta/\lambda_0$. La figure 3.2 propose une interprétation graphique de ce phénomène.

²²Cette condition impose que les modes de fluctuations soient observables. Dans le cas contraire, les variations du contraste de température s'étendent sur de trop grandes échelles de sorte qu'elles ne contribuent qu'à la valeur moyenne de la température mesurée.

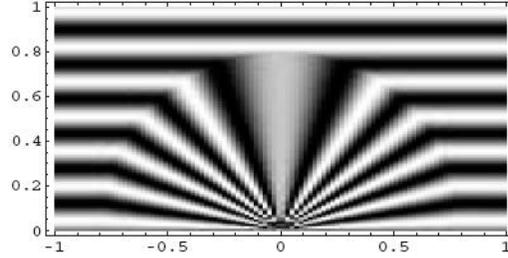


FIG. 3.2 – Projection d'une onde plane sur une sphère. Une fluctuation de longueur d'onde donnée contribue à de nombreuses échelles angulaires.

3.5.3 Caractéristiques du spectre de puissance

Nous sommes désormais en mesure de déterminer l'expression de la fonction à deux points du contraste de température, ou de façon équivalente celle des coefficients $a_{\ell m}$. Nous en discuterons le comportement par la suite.

Expression du spectre de puissance

La fonction à deux points du contraste de température est de la forme

$$\langle \theta(\tilde{\gamma}_1) \theta(\tilde{\gamma}_2) \rangle = \sum_{\ell, \ell', m, m'} \langle a_{\ell m} a_{\ell' m'} \rangle Y_{\ell m}(\tilde{\gamma}_1) Y_{\ell' m'}(\tilde{\gamma}_2), \quad (3.172)$$

où la moyenne $\langle \dots \rangle$ est une valeur moyenne d'ensemble.

En raison du postulat de l'isotropie statistique de l'espace, cette fonction à deux points ne dépend que de l'angle relatif $(\tilde{\gamma}_1 - \tilde{\gamma}_2)$. Ceci n'est possible que si l'on impose

$$\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'} \rangle = C_{\ell} (-1)^{\ell} \delta_{\ell \ell'} \delta_{m - m'}. \quad (3.173)$$

En effet, en utilisant la formule d'addition des harmoniques sphériques

$$\sum_m (-1)^{\ell} Y_{\ell m}(\tilde{\gamma}_1) Y_{\ell - m}(\tilde{\gamma}_2) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}} Y_{\ell 0}(\tilde{\gamma}_1 \cdot \tilde{\gamma}_2) = \frac{2\ell + 1}{4\pi} P_{\ell}(\tilde{\gamma}_1 \cdot \tilde{\gamma}_2), \quad (3.174)$$

nous pouvons reporter la forme (3.173) dans l'expression de la fonction à deux points pour obtenir

$$\langle \theta(\tilde{\gamma}_1) \theta(\tilde{\gamma}_2) \rangle = \sum_{\ell} \frac{2\ell + 1}{4\pi} C_{\ell} P_{\ell}(\tilde{\gamma}_1 \cdot \tilde{\gamma}_2), \quad (3.175)$$

où P_{ℓ} est le polynôme de Legendre d'ordre ℓ .

La fonction à deux points dans l'espace réel est caractérisée par son spectre de puissance C_ℓ , dans l'espace des harmoniques sphériques.

En nous plaçant dans l'approximation fluide, nous pouvons exprimer le spectre de puissance en fonction du monopôle et du dipôle. Pour ce faire, remarquons que le contraste de température peut s'interpréter comme une variable stochastique classique de sorte que sa transformée de Fourier

$$\Theta(\eta, \mathbf{k}, \tilde{\gamma}) = \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \Theta(x, \tilde{\gamma}) \quad (3.176)$$

puisse se décomposer sous la forme

$$\Theta(\eta, \mathbf{k}, \tilde{\gamma}) = \Theta(\eta, k, \tilde{\gamma}) \alpha(\mathbf{k}) , \quad (3.177)$$

où α est une variable aléatoire normalisée satisfaisant

$$\langle \alpha(\mathbf{k}) \alpha(\mathbf{k}') \rangle = \delta^D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') . \quad (3.178)$$

Nous obtenons alors, en ce qui concerne le contraste de température

$$C_\ell \approx 8 \int \frac{dk}{k} k^3 \left| \Theta_0(\eta, k) j_\ell(k\Delta\eta) + 3k\Theta_1(\eta, k) j'_\ell(k\Delta\eta) \right|^2 . \quad (3.179)$$

Variance cosmique

La valeur moyenne $\langle \dots \rangle$ est ici une moyenne statistique d'ensemble : c'est la valeur moyenne que l'on obtiendrait si l'on disposait de plusieurs univers ayant évolué légèrement différemment. Ne disposant que d'un unique univers observable, nous utiliserons donc l'hypothèse ergodique, remplaçant la valeur moyenne d'ensemble par une moyenne géométrique afin de comparer cette prédiction aux observations. Nous introduisons alors l'estimateur

$$\hat{C}_\ell = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} a_{\ell m}^* . \quad (3.180)$$

L'effet principal de cette distinction est d'introduire une "incertitude" intrinsèque aux observations, $\Delta\hat{C}_\ell$, appelée *variance cosmique*. Pour une distribution gaussienne des coefficients $a_{\ell m}$, elle donnée par

$$\frac{(\Delta\hat{C}_\ell)^2}{C_\ell^2} = \frac{2}{2\ell + 1} \quad (3.181)$$

où $(\Delta\hat{C}_\ell)^2 = \langle \hat{C}_\ell^2 \rangle - \langle \hat{C}_\ell \rangle^2$ est l'écart quadratique moyen de l'estimateur \hat{C}_ℓ . Nous voyons que la variance cosmique diminue lorsque l'indice ℓ augmente, c'est-à-dire

lorsque l'échelle angulaire diminue. Cela provient du fait que, pour ℓ fixé, les coefficients $a_{\ell m}$ représentent $2\ell + 1$ variables indépendantes dont nous déterminons la moyenne. Aux grandes échelles angulaires (ℓ petit), nous ne disposons que de quelques mesures et notre incertitude est relativement grande. Au contraire, nous pouvons sonder de très nombreuses zones de petite taille (ℓ grand) sur l'ensemble du ciel ce qui a pour conséquence de réduire la variance cosmique aux petites échelles.

Comportement du spectre de puissance pour la température

D'après l'expression (3.179), nous nous attendons à un comportement oscillant du spectre de puissance puisque le monopôle et le dipôle sont approximativement des fonctions oscillantes. Notons que ces deux fonctions sont en quadrature de phase. Le rapport de leurs amplitudes est de l'ordre de l'unité en l'absence de baryons. En supposant que pour des échelles intermédiaires, les fonctions de Bessel soient du même ordre de grandeur, nous voyons donc d'après la relation (3.179), qu'en l'absence de baryons, les oscillations se compensent et contribuent à un spectre de puissance constant.

Dans le cas général cependant, nous nous attendons à un succession d'oscillations, sous la forme de pics, appelés *pics Doppler*, bien que l'effet Doppler ne soit pas la contribution principale à ces oscillations. Nous pouvons estimer les positions des maxima du spectre de puissance. Pour des conditions initiales adiabatiques, le monopôle est maximum lorsque le terme en cosinus dans l'équation (3.162) est maximum, c'est-à-dire lorsque $kc_s\eta_* = p\pi$ est un multiple entier de π . Ici η_* est le temps conforme au moment du découplage. Le multipôle correspondant à une telle échelle est de l'ordre de $\ell \sim k\Delta\eta$. Nous en déduisons donc la position du premier pic

$$\ell \sim p\pi \frac{\Delta\eta}{c_s\eta_*} . \quad (3.182)$$

En considérant que²³ $\Delta\eta/\eta_* \sim 40$ radians, avec $c_s \approx 1/\sqrt{3}$, nous obtenons la position du premier maximum ℓ_1 , pour des conditions initiales adiabatiques

$$\ell_1 \sim 220 . \quad (3.183)$$

Du fait de la présence des baryons, nous voyons que les maxima du terme en cosinus dans l'équation (3.162) ne contribuent pas de la même façon au monopôle : la valeur du monopôle au niveau des pics "impairs" tels que $kc_s\eta_* = (2q + 1)\pi$ est plus grande, en valeur absolue, que celle correspondant aux pics "pairs" $kc_s\eta_* = 2q\pi$. Le spectre de puissance présente donc une alternance de pics, dont un sur deux est amplifié. L'amplitude d'un tel effet dépend de la quantité relative de baryons.

Outre l'influence du monopôle et du dipôle, l'effet Sachs-Wolfe intégré et celui des modes tensoriels contribuent également au spectre de puissance. L'effet Sachs-Wolfe

²³Voir le chapitre 5 pour une estimation détaillée.

intégré, généré par la variation des potentiels gravitationnels sur le trajet des photons, corrige légèrement le spectre aux grandes échelles et au voisinage du premier pic. D'autre part, comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, les ondes gravitationnelles sont négligeables aux petites échelles : elles affectent donc essentiellement les petits multipôles du spectre de puissance.

En-deçà d'une certaine échelle, le spectre de puissance est atténué exponentiellement. Il est possible de comprendre le phénomène physique sous-jacent en considérant que les photons ont connu, non pas une seule mais plusieurs diffusions successives. Ces diffusions multiples tendent à thermaliser le fluide de photons, réduisant considérablement les fluctuations de température. Cet effet local n'est pas visible aux grandes échelles puisque les propriétés physiques deux zones suffisamment éloignées ne sont pas affectées l'une par l'autre. Au contraire, lorsque l'on scrute des petites échelles, de l'ordre de grandeur du libre parcours moyen des photons, les fluctuations sont amorties. Le spectre de puissance n'est quasiment plus mesurable au delà du multipôle $\ell \sim 2000$: c'est *l'amortissement Silk* [Silk, 1968]. L'étude de plus petites échelles angulaires nécessite d'autres observables, déterminées par des relevés cosmologiques complémentaires s'appuyant par exemple sur le effets de lentille gravitationnelle ou le test de Gunn-Perterson.

La recombinaison et le découplage ne sont pas des phénomènes instantanés : les photons du fond diffus cosmologique ont été émis par une "coquille" d'épaisseur non-nulle, comparable au libre parcours moyen des photons. Nous observons donc des photons qui ont connu leur dernière diffusion à différents instants. Cet effet, distinct par son origine de l'amortissement Silk, contribue cependant au spectre de puissance de la même manière. Toutes les fluctuations sur des distances inférieures à la largeur de la surface dernière diffusion, sont atténuées exponentiellement.

Cette discussion permet de comprendre la forme du spectre présenté sur la figure 3.3.

Outre la fonction à deux points de la température, nous pouvons introduire les fonctions de corrélation à deux points pour les modes électriques et magnétiques de la polarisation ainsi que les corrélations croisées. Nous discutons, dans la partie suivante, de la forme des spectres de puissance pour la polarisation électrique et magnétique.

Comportement du spectre de puissance pour la polarisation

Comme nous l'avons vu, les modes E de la polarisation sont générés par les perturbations de métrique scalaires et tensorielles tandis que les modes B ne peuvent être induits que par des ondes gravitationnelles.

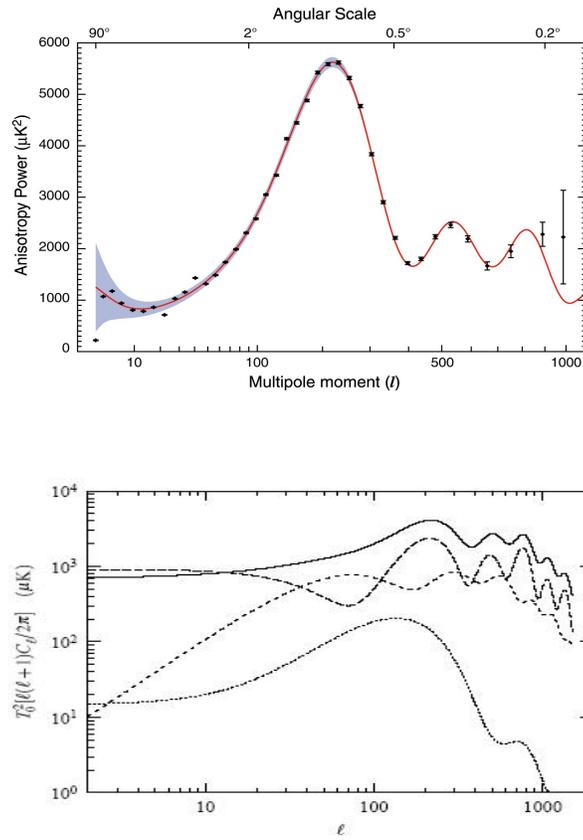


FIG. 3.3 – Spectre de puissance pour la température. En haut, les points de mesure semblent confirmer un modèle Λ CDM (courbe continue) $\Lambda = 0,7$, $h = 0,5$, $\Omega_b h^2 = 0,0125$ et $\Omega_{\text{tot}} = 1$. La zone grisée correspond à la variance cosmique. En bas, la contribution des modes scalaires au spectre de puissance est décomposée en une partie Sachs-Wolfe (tirets longs), Doppler (tirets courts) et en une partie Sachs-Wolfe intégré (pointillé) dans un modèle Λ CDM. Cette courbe est issue de [Riazuelo, 2000].

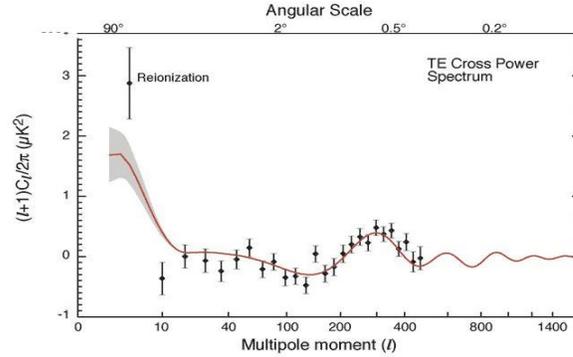


FIG. 3.4 – Corrélation température-polarisation électrique déterminée par l'expérience WMAP. Les points de mesures sont ajustés par un modèle Λ CDM. Les corrélations importantes aux grandes échelles angulaires suggèrent une phase de réionisation.

Les modes scalaires au niveau de la surface de dernière diffusion ne peuvent pas contribuer significativement aux modes E aux grandes échelles. En effet, la seule source scalaire pour la polarisation est le terme quadrupolaire de la température. Afin d'affecter les modes E de la polarisation, un photon doit donc avoir diffusé deux fois, ce qui n'est possible que sur de petites distances : la contribution scalaire au spectre de puissance de la polarisation est négligeable aux grandes échelles.

Notons cependant que notre raisonnement n'a pris en compte que les diffusion au voisinage de la recombinaison. L'effet plus tardif de la réionisation contribue fortement, au contraire, à la polarisation aux grandes échelles.

Les ondes gravitationnelles, quant à elles, contribuent davantage aux grandes échelles et sont supprimées aux petites échelles.

Les deux spectres de puissance présentent également des oscillations pour des modes sub-horizon au moment du découplage. Les oscillations du spectre de puissance pour les modes E sont déphasées par rapport à celles de la température, en raison de sa nature quadrupolaire, et en phase avec celles des modes B en raison de leur couplage mutuel. Les spectres de puissance de la polarisation sont représentés sur la figure 3.5.

3.6 Modulation dipolaire (article)

L'étude du spectre de puissance pour la température - et pour la polarisation - est particulièrement instructive. En supposant que la distribution des fluctuations

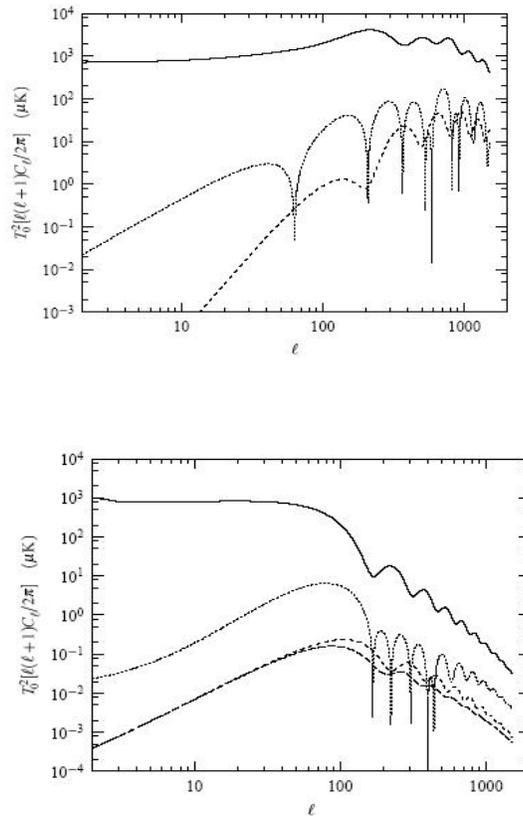


FIG. 3.5 – Spectres de puissance. En haut, contribution des modes scalaires. En bas, contribution des modes tensoriels. Les courbes en trait plein correspondent au spectre de puissance de la température. Les spectres de puissance pour la polarisation électrique et magnétique sont représentés en tirets courts et longs respectivement. La corrélation température-polarisation est représentée en pointillées. Toutes les courbes sont issues de [Riazuelo, 2000].

de température est de nature gaussienne²⁴, et *en imposant l'isotropie statistique de l'espace*, nous caractérisons entièrement le contraste de température par son spectre de puissance.

Ces deux hypothèses peuvent être remises en question : nous traitons, dans un premier temps, un cas où l'isotropie statistique n'est plus valide tandis que la partie 3.7 examine l'effet induit par des conditions initiales non-gaussiennes sur les fluctuations de température.

3.6.1 Présentation de l'article

De nombreuses études concernant la statistique des fluctuations de température ont souligné plusieurs anomalies pour le moins intrigantes. En particulier, les directions du quadrupôle et de l'octupôle, dont l'amplitude est particulièrement faible par rapport aux prédictions inflationnaires, semblent, de façon peu probable, alignées. Une asymétrie nord-sud dans les fluctuations de température a également été mise en évidence [Eriksen *et al.*, 2004].

Dans ces conditions, il semble assez naturel de remettre en cause l'isotropie statistique des fluctuations de température. Une telle anisotropie peut provenir de deux origines distinctes : l'une expérimentale, l'autre théorique. Sans chercher à en décrire l'origine, nous examinons, dans [Prunet *et al.*, 2005], les effets d'une modulation dipolaire, de source inconnue, sur la statistique des fluctuations de température, sous la forme

$$\Theta^{\text{obs}}(\tilde{\gamma}) = \Theta(\tilde{\gamma}) [1 + \epsilon_{-1}Y_{1,-1}(\tilde{\gamma}) + \epsilon_0Y_{1,0}(\tilde{\gamma}) + \epsilon_1Y_{1,1}(\tilde{\gamma})] . \quad (3.184)$$

Il suffit alors de déterminer les coefficients $\epsilon_{i=-1,0,1}$, à l'aide des données de la première année de WMAP, pour quantifier une telle modulation dipolaire.

Afin de contraindre ces paramètres, nous remarquons que l'expression (3.184) a pour effet de coupler les coefficients de la décomposition en harmoniques sphériques $a_{\ell m}$ et $a_{\ell' m'}$ avec $|\ell - \ell'| = 1$. Nous introduisons donc les fonctions de corrélation

$$D_{\ell m, m'} = \langle a_{\ell m}^{\text{obs}} a_{\ell+1 m'}^{\text{obs}*} \rangle , \quad (3.185)$$

dont les valeurs sont proportionnelles aux coefficients ϵ_i .

L'étape suivante consiste à déterminer un estimateur non-biaisé E_ℓ tel que

$$\langle E_{\ell, m'} \rangle = \sum_{m=-\ell}^{\ell} f(\ell, m, m') D_{\ell m} , \quad (3.186)$$

où $f(\ell, m, m')$ est une fonction permettant d'extraire une "valeur moyenne" sur l'ensemble des $2\ell+1$ valeurs de m . Mesuré à partir d'une réalisation donnée, le coefficient

²⁴Ce qui n'est plus exact au deuxième ordre dans les perturbations.

$E_{\ell m'}$ nous donne accès aux paramètres ϵ_i .

Bien évidemment, les données sont en général filtrées. En particulier, le disque galactique est coupé par l'application d'un masque de sorte que

$$\tilde{\Theta}^{\text{obs}}(\tilde{\gamma}) = W(\tilde{\gamma}) \Theta^{\text{obs}}(\tilde{\gamma}) \quad (3.187)$$

soit le contraste de température effectivement observé. L'effet de ce masque est d'introduire des couplages de modes qui ne concernent heureusement pas, dans le cas d'un masque simple, les couplages ℓ - $(\ell + 1)$.

Nous déterminons alors la valeur de $E_{\ell m'}$ à partir des données de WMAP. Afin d'estimer un écart-type, nous déterminons également la distribution des valeurs obtenues à partir de 1000 cartes simulées puis nous appliquons cette procédure à deux fréquences particulières, 70 GHz (Bande V) et 90 GHz (bande W). Une détection propre à la bande V, et absente de la bande W, semble révéler une contamination d'origine non-cosmologique, soit par une source galactique, soit par une source extra-galactique. Ce résultat semble confirmé puisque l'application du masque plus fin kP0, fourni par l'équipe de WMAP, réduit significativement les valeurs mesurées pour les paramètres ϵ_i .

Afin de contraindre l'origine de cette contamination, nous appliquons la même procédure à la demi-somme des bandes V et W et à leur demi-différence. Au calibrage près, la demi-différence, en excluant tout signal primordial, est susceptible de révéler une contamination d'origine galactique. En effet, la dépendance de signaux galactiques avec la fréquence est en général importante aux grandes échelles angulaires. Une contamination d'origine extragalactique, au contraire, intervient principalement aux petites échelles angulaires et s'avère difficilement discernable du bruit. L'absence de détection dans les données formées à partir de la demi-différence des bandes V et W ainsi que la présence d'un signal, dans la bande V, d'amplitude croissante avec l'ordre ℓ des multipôles semblent alors suggérer une contamination d'origine extra-galactique.

Bien que cette méthode présente de nombreux avantages vis à vis des sources de contamination des cartes de CMB, elle n'en fournit pas pour autant la localisation, qui doit être déterminée par d'autres méthodes (décomposition en ondelettes, par exemple). Les résultats obtenus nous assurent également qu'aucune modulation dipolaire d'origine cosmologique ne peut expliquer les asymétries observées dans la distribution des fluctuations de température.

3.6.2 Article

Constraints on mode couplings and modulation of the CMB with WMAP data

Simon Prunet*

Institut d'Astrophysique de Paris, 98 bis Boulevard Arago, 75014 Paris, France

Jean-Philippe Uzan†

*Laboratoire de Physique Théorique, CNRS-UMR 8627, Bâtiment 210, Université Paris XI, F-91405 Orsay Cedex, France,
and Institut d'Astrophysique de Paris, GReCO, CNRS-FRE 2435, 98 bis Boulevard Arago, 75014 Paris, France*

Francis Bernardeau‡ and Tristan Brunier§

*Service de Physique Théorique, CEA/DSM/SPHT, Unité de recherche associée au CNRS,
CEA/Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette cédex, France*

(Received 25 June 2004; published 12 April 2005)

We investigate a possible asymmetry in the statistical properties of the cosmic microwave background temperature field and to do so we construct an estimator aiming at detecting a dipolar modulation. Such a modulation is found to induce correlations between multipoles with $\Delta\ell = 1$. We proceed in two steps. First, assuming that the only possible contaminant comes from our galaxy, we build an estimator using an azimuthally symmetric galactic mask for which analytical construction is possible. Applying this estimator to the V and W bands of the Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) data, we found an apparent detection in the V band. Further investigation of the foregrounds and the use of the kp0 mask provided by the WMAP team shows that, when the main extragalactic sources are properly removed, no significant detection remains.

DOI: 10.1103/PhysRevD.71.083508

PACS numbers: 98.80.Es

I. INTRODUCTION

The Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) data [1,2] have raised a number of interrogations concerning the statistical properties of the temperature field. While these data globally confirm the standard inflationary paradigm [3] and the concordance cosmological model, they exhibit some intriguing anomalies, particularly concerning the large angular scales. In particular, a huge activity has been devoted to the study of the low value of the quadrupole and octopole [4–7] as well as their alignment [8,9], two effects that appear to be inconsistent with the standard cosmological model.

Besides, many authors have tried to test the statistical properties of the temperature field using various methods. For instance, it was investigated whether the coefficients $a_{\ell m}$ of the development of the temperature field on spherical harmonics were independent and Gaussian distributed. While, as expected from the standard inflationary picture, a χ^2 deviation from Gaussianity seems to be well constrained [10], there have been some claims that the distribution may not be isotropic [9,11–15] or Gaussian [16–19]. No real physical understanding of these measurements have been proposed yet and the origin of these possible features is still unknown. Some authors have argued in favor of systematic effects [13] while it was argued

[14,20] that foreground contamination may play an important role in these conclusions.

From a theoretical point of view, there are many reasons to look for (and/or constrain) a departure from Gaussianity and/or isotropy of the cosmic microwave background (CMB) temperature field. Mode correlation can be linked to non-Gaussianity, in particular, due to finite size effects [21–23] or to the existence of some nontrivial topology of the universe [24]. While in the latter case, one expects to have a complex correlation matrix of the $a_{\ell m}$, the former leads generically to a dipolar modulation of the CMB field [25]. Such a modulation induces, in particular, correlations between adjacent multipoles ($\Delta\ell = 1$). Similar correlations but with $\Delta\ell = 2$ may also be induced by a primordial magnetic field [26]. In each case, the physical model and its predictions indicate the type of correlations to look for and will drive the design of an adapted estimator.

Investigation of the correlation properties of $a_{\ell m}$ is thus important to correctly interpret previous observational results [9,11–15]. Two approaches are thus possible. Either one defines some general estimators and studies whether they agree with a Gaussian and isotropic distribution (top-down approach) or one sticks to a class of physical models and constructs an adapted estimator (bottom-up approach). In this article, we follow the second route and focus to the task of constraining a possible dipolar modulation of the CMB temperature field, that is, correlations between multipoles with $\Delta\ell = 1$.

In Sec. II, we start by some general considerations on the form of the correlation arising from a dipolar modulation. We then built an estimator, in Sec. III, adapted to these types of correlations. In particular, we cannot use full-sky

*Electronic address: prunet@iap.fr

†Electronic address: uzan@th.u-psud.fr, uzan@iap.fr

‡Electronic address: fbernard@spht.saclay.cea.fr

§Electronic address: brunier@spht.saclay.cea.fr

data and we will need to cut out some part of the sky. The effect of such a mask on the correlations will have to be taken into account and included in the construction of the estimator. We apply this estimator to the V and W bands of the WMAP data in Sec. IV. The V band exhibits an apparent detection. The interpretation of this result will require us to compare various masks and, in particular, to investigate the effect of point sources on the signal to conclude that they are most likely its cause.

II. GENERAL CONSIDERATIONS

As explained in the introduction, we focus on a possible dipolar modulation of the CMB signal. Thus, we assume that the observed temperature field can be modeled as

$$\Theta^{\text{obs}}(\vec{\gamma}) = \Theta(\vec{\gamma})[1 + \varepsilon_{-1}Y_{1,-1}(\vec{\gamma}) + \varepsilon_0Y_{1,0}(\vec{\gamma}) + \varepsilon_{+1}Y_{1,+1}(\vec{\gamma})] \quad (1)$$

where Θ is the genuine statistically isotropic field and where $(\varepsilon_{-1}, \varepsilon_0, \varepsilon_{+1})$ are three unknown parameters that characterize the direction of the modulation. The modulation has to be real so that ε_0 is real and $\varepsilon_{+1} = -\varepsilon_{-1}^* \equiv \varepsilon$.

As usual, we decompose the temperature fluctuation in spherical harmonics as

$$\Theta(\vec{\gamma}) = \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell, m}(\vec{\gamma}). \quad (2)$$

The coefficients $a_{\ell m}$ are thus given by

$$a_{\ell m} = \int d^2\vec{\gamma} \Theta(\vec{\gamma}) Y_{\ell, m}^*(\vec{\gamma}). \quad (3)$$

Θ^{obs} and $a_{\ell m}^{\text{obs}}$ are defined and related in the same way. Since Θ is supposed to be the primordial, Gaussian and statistically isotropic, temperature field, its correlation matrix reduces to

$$\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle = C_{\ell} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}. \quad (4)$$

A modulation of the form (1) implies that the coefficients $a_{\ell m}^{\text{obs}}$ develop correlations between multipoles with $\Delta\ell = 1$. Let us illustrate the origin of this correlation. From Eqs. (1) and (4), we deduce that

$$a_{\ell m}^{\text{obs}} = a_{\ell m} + \sum_{\ell'=2}^{\infty} \sum_{m'=-\ell'}^{\ell'} a_{\ell' m'} \sum_{i=-1}^{+1} \varepsilon_i \times \int d^2\vec{\gamma} Y_{\ell, m}^*(\vec{\gamma}) Y_{\ell', m'}(\vec{\gamma}) Y_{1, i}(\vec{\gamma}). \quad (5)$$

The integral can be easily computed by using the Gaunt formula [see Eq. (A7)] to get

$$a_{\ell m}^{\text{obs}} = a_{\ell m} + \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sum_i \varepsilon_i (-1)^m \sum_{LM} a_{LM} \sqrt{(2\ell+1)(2L+1)} \times \begin{pmatrix} \ell & L & 1 \\ -m & M & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell & L & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Because of the triangular inequality, the Wigner-3j symbols are nonzero only when $L = \ell \pm 1$ and $M = m - i$ so that $a_{\ell m}^{\text{obs}}$ is in fact a sum involving $a_{\ell m}$ and $a_{\ell \pm 1, m-i}$. It follows that it will develop $\ell - (\ell + 1)$ correlations that can be characterized by the two quantities

$$D_{\ell m}^{(0)} \equiv \langle a_{\ell m}^{\text{obs}} a_{\ell+1, m}^{\text{obs}*} \rangle, \quad (7)$$

$$D_{\ell m}^{(1)} \equiv \langle a_{\ell m}^{\text{obs}} a_{\ell+1, m+1}^{\text{obs}*} \rangle \quad (8)$$

which will be nonzero, respectively, as soon as ε_0 or ε are nonzero. Using the expression (6) and the property (4) of the primordial field, we deduce that

$$D_{\ell m}^{(0)} = \varepsilon_0 \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{\sqrt{(\ell+1)^2 - m^2}}{\sqrt{(2\ell+1)(2\ell+3)}} (C_{\ell} + C_{\ell+1}) \quad (9)$$

$$D_{\ell m}^{(1)} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{(\ell+2+m)(\ell+1+m)}{(2\ell+1)(2\ell+3)} [C_{\ell} + C_{\ell+1}] \frac{\varepsilon^*}{\sqrt{2}}. \quad (10)$$

Interestingly, these forms indicate how to sum the $D_{\ell m}$ in order to construct an estimator. This construction will be detailed in the following section.

III. MATHEMATICAL CONSTRUCTION OF THE ESTIMATOR

The previous analysis is illustrative but not suitable to be applied on real data. In particular these data will not be full sky and we have to take into account the effect of a mask (see, e.g., Ref. [27]). Such a mask, that arises, in particular, because of the galactic cut, will induce correlations in the coefficients $a_{\ell m}^{\text{obs}}$ that are described in Sec. III A. We design the mask in order to protect the correlations that originate from the modulation (Secs. III B and III C) and finish by presenting the construction of our estimator in the most general case (Sec. III D).

A. Mask effects

The temperature field is observed only on a fraction of the sky. We thus have to mask part of the map so that the temperature field is in fact given by

$$\Theta^{\text{obs}}(\vec{\gamma}) = \Theta(\vec{\gamma}) \left[1 + \sum_{i=-1}^1 \varepsilon_i Y_{1, i}(\vec{\gamma}) \right] W(\vec{\gamma}) \quad (11)$$

where $W(\vec{\gamma})$ is a window function, referred to as mask, indicating which part of the sky has been cut. We decompose $W(\vec{\gamma})$ in spherical harmonics as

$$W(\vec{\gamma}) = \sum_{\ell m} w_{\ell m} Y_{\ell m}(\vec{\gamma}). \quad (12)$$

$W(\vec{\gamma})$ being a real valued function, it implies that $w_{\ell m}^* = (-1)^m w_{\ell -m}$. We deduce from Eqs. (3) and (11) that

$$a_{\ell m}^{\text{obs}} = \tilde{a}_{\ell m} + \sum_i \varepsilon_i A_{\ell m}^{(i)} \quad (13)$$

where $\tilde{a}_{\ell m}$ are the coefficients of the masked primordial temperature field $\tilde{\Theta}(\vec{\gamma}) = \Theta(\vec{\gamma})W(\vec{\gamma})$,

$$\tilde{a}_{\ell m} = \sum_{\ell_1 m_1} a_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} w_{\ell_2 m_2} \int d^2 \vec{\gamma} Y_{\ell_1 m_1}(\vec{\gamma}) Y_{\ell_2 m_2}(\vec{\gamma}) Y_{\ell, m}^*(\vec{\gamma}) \quad (14)$$

and the effects of the modulation are encoded in the correction

$$A_{\ell m}^{(i)} = \sum_{\ell_1 m_1} a_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} w_{\ell_2 m_2} \times \int d^2 \vec{\gamma} Y_{\ell_1 m_1}(\vec{\gamma}) Y_{\ell_2 m_2}(\vec{\gamma}) Y_{i, \ell}(\vec{\gamma}) Y_{\ell, m}^*(\vec{\gamma}). \quad (15)$$

Interestingly, $\tilde{a}_{\ell m}$ can be shown to be obtained from $a_{\ell m}$ by the action of a kernel $K_{\ell m}^{\ell_1 m_1}$

$$\tilde{a}_{\ell m} = \sum_{\ell_1 m_1} a_{\ell_1 m_1} K_{\ell m}^{\ell_1 m_1}. \quad (16)$$

This kernel is defined by

$$K_{\ell m}^{\ell_1 m_1} \equiv \sum_{\ell_2 m_2} w_{\ell_2 m_2} \int d^2 \vec{\gamma} Y_{\ell_1 m_1}(\vec{\gamma}) Y_{\ell_2 m_2}(\vec{\gamma}) Y_{\ell, m}^*(\vec{\gamma})$$

and can be explicitly computed by using the integral (A7) to obtain

$$K_{\ell m}^{\ell_1 m_1} = (-1)^m \sum_{\ell_2 m_2} w_{\ell_2 m_2} \sqrt{\frac{(2\ell_1 + 1)(2\ell_2 + 1)(2\ell + 1)}{4\pi}} \times \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

The contribution arising from the modulation can be computed by using the integral (A7) to get

$$A_{\ell m}^{(i)} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} (-1)^m \sum_{LM} \tilde{a}_{LM} \sqrt{2\ell + 1} \sqrt{2L + 1} \times \begin{pmatrix} L & 1 & \ell \\ M & i & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & 1 & \ell \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

One can check that the relation (5) obtained without taking into account the effects of the mask still holds if one replaces $a_{\ell m}$ by $\tilde{a}_{\ell m}$. The complications arise from the fact that $\tilde{a}_{\ell m}$ does not satisfy the property (4) because of the action (16) of the kernel.

B. Choice of the mask and properties of the masked quantities

We now need to specify the form of the mask. First, let us note that when $W(\vec{\gamma}) = \text{constant}$ for all $\vec{\gamma}$ then one trivially recovers that $\tilde{a}_{\ell m} = a_{\ell m}$ because $W = w_{00} Y_{00}$ so that

$$K_{\ell m}^{\ell_1 m_1} = \frac{w_{00}}{\sqrt{4\pi}} \delta_{\ell \ell_1} \delta_{m m_1}.$$

Since we are looking for $\ell - (\ell + 1)$ correlations, we would like to design a mask that does not involve the same correlations for $\tilde{a}_{\ell m}$ and that is not m dependent. A solution is to impose that $W(\vec{\gamma})$ is a function of θ only and that it is north-south symmetric, that is,

$$W(\vec{\gamma}) = W(\theta), \quad W(\pi - \theta) = W(\theta). \quad (19)$$

Since $Y_{\ell 0}(\pi - \theta) = (-1)^\ell Y_{\ell 0}(\theta)$, these conditions imply that

$$W(\vec{\gamma}) = \sum_{\ell_2} w_{\ell_2} \frac{[1 + (-1)^{\ell_2}]}{2} Y_{\ell_2 0}(\theta) \equiv \sum_{\ell_2} \hat{w}_{\ell_2} Y_{\ell_2 0}(\theta). \quad (20)$$

The simplest example of such a mask is obtained by considering a function which is constant and vanishes on an equatorial strip of latitude $\theta_c \in [0, \pi/2]$. This implies that the multipoles of the mask are given by

$$w_0 = \sqrt{4\pi} \mu_c, \quad (21)$$

$$\hat{w}_\ell = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell + 1}} \frac{[1 + (-1)^\ell]}{2} [P_{\ell-1}(\mu_c) - P_{\ell+1}(\mu_c)] \quad (22)$$

where $\mu_c = \cos \theta_c$. In particular, it can be seen that when $\theta_c \rightarrow 0$, that is, when the size of the mask vanishes, this mask satisfies $w_\ell \rightarrow \sqrt{4\pi} \delta_{\ell 0}$ when $\mu_c \rightarrow 1$. The function w_ℓ is depicted in Fig. 1 for galactic cuts of 10, 20, and 30 degrees.

The results derived in the following sections are not dependent on the particular choice of the mask as long as it satisfies the symmetries (19) which ensure that the coefficients of the mask do not depend on m and vanish for ℓ odd [see Eq. (20)].

C. Properties of the $\tilde{a}_{\ell m}$

Whatever the choice of the mask, as long as it satisfies the properties (19), the general expression of the coefficients $\tilde{a}_{\ell m}$ of the decomposition of $\tilde{\Theta}$ are given by

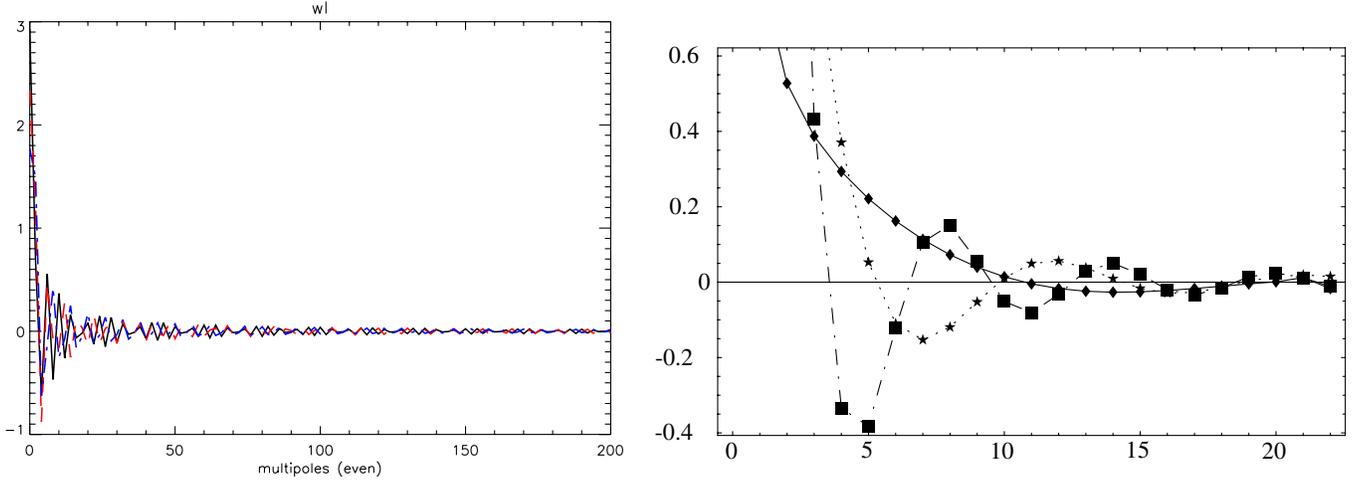


FIG. 1 (color online). (left) The coefficients of the decomposition of the mask function on spherical harmonics for different galactic cuts, $\mu_c = 10, 20,$ and 30 degrees (respectively, black solid, red dashed and blue dotted-dashed lines). Only the nonvanishing, that is, even, multipoles are plotted. (right) The ratio w_ℓ/w_0 decreases rapidly and becomes typically smaller than 0.1% for ℓ larger than 20 (solid line, 10 degrees; dotted line, 20 degrees; dashed-dotted line, 30 degrees).

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{\ell m} &= f_{\text{sky}} a_{\ell m} + (-1)^m \sqrt{2\ell + 1} \sum_{\ell_1} \sqrt{\frac{2\ell_1 + 1}{4\pi}} a_{\ell_1 m} \\ &\times \sum_{\ell_2 \neq 0} \sqrt{2\ell_2 + 1} \hat{w}_{\ell_2} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell \\ m & 0 & -m \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

with $f_{\text{sky}} \equiv w_0/\sqrt{4\pi}$ is the fraction of the sky that is covered. From this expression, we deduce that their 2-point function is given by

$$\begin{aligned} \langle \tilde{a}_{\ell m} \tilde{a}_{\ell' m'}^* \rangle &= \delta_{mm'} \left\{ C_\ell f_{\text{sky}}^2 \delta_{\ell\ell'} + f_{\text{sky}} [\mathcal{G}(\ell, \ell', m) C_\ell \right. \\ &+ \mathcal{G}(\ell', \ell, m) C_{\ell'}] \\ &+ \left. \sum_{\ell_1} C_{\ell_1} \mathcal{G}(\ell_1, \ell, m) \mathcal{G}(\ell_1, \ell', m) \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

where the function $\mathcal{G}(\ell, \ell', m)$ is defined by

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\ell, \ell', m) &= (-1)^m \sqrt{(2\ell + 1)(2\ell' + 1)} \sum_{\ell_2 \neq 0} \sqrt{\frac{2\ell_2 + 1}{4\pi}} \\ &\times \hat{w}_{\ell_2} \begin{pmatrix} \ell & \ell_2 & \ell' \\ m & 0 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell & \ell_2 & \ell' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (25)$$

It follows from Eq. (24) that there is no m coupling arising from the mask (because it has no azimuthal dependence) and we can define the correlation matrix of the masked temperature field as

$$\langle \tilde{a}_{\ell m} \tilde{a}_{\ell' m'}^* \rangle \equiv \tilde{C}_{\ell m} \delta_{mm'}. \quad (26)$$

The angular power spectrum of the mask field is then defined as

$$\tilde{C}_\ell = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \tilde{C}_{\ell m} \quad (27)$$

and is explicitly given in terms of the primordial angular power spectrum by

$$\begin{aligned} \tilde{C}_\ell &= C_\ell \left[f_{\text{sky}}^2 + 2 \frac{f_{\text{sky}}}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \mathcal{G}(\ell, \ell, m) \right] \\ &+ \sum_{\ell_1} \frac{C_{\ell_1}}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \mathcal{G}^2(\ell_1, \ell, m). \end{aligned} \quad (28)$$

Let us now turn to the ℓ - $(\ell + 1)$ correlators. The first term in Eq. (24) vanishes. Then, one can check that $\mathcal{G}(\ell, \ell + 1, m)$ vanishes because the triangular relation of the Wigner-3j symbols implies that $\ell_2 = \pm 1$ but for odd ℓ_2 , \hat{w}_{ℓ_2} vanish. To finish, the contribution of $\mathcal{G}(\ell_1, \ell, m) \mathcal{G}(\ell_1, \ell + 1, m)$ in the sum also vanishes because ℓ_2 is even and the sums $\ell_1 + \ell_2 + \ell + 1$ and $\ell_1 + \ell_2 + \ell$ have to be both even, which is impossible. In conclusion

$$\langle \tilde{a}_{\ell m} \tilde{a}_{\ell+1 m'}^* \rangle = 0. \quad (29)$$

As expected from our construction, the mask does not generate ℓ - $(\ell + 1)$ correlations.

To finish, let us stress that the mask will induce some ℓ - $\ell + 2$ correlations that can be characterized by introducing

$${}_2\tilde{C}_{\ell m} \equiv \langle \tilde{a}_{\ell m} \tilde{a}_{\ell+2m}^* \rangle, \quad {}_2\tilde{C}_\ell \equiv \frac{1}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} {}_2\tilde{C}_{\ell m}. \quad (30)$$

Indeed, when $W = \text{Id}$, ${}_2\tilde{C}_\ell = 0$.

D. General construction

Starting from the relation (13) and the expression (18), we deduce that the two quantities defined in Eqs. (7) and (8) generalize to

$$\begin{aligned} D_{\ell m}^{(i)} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \varepsilon_i^* \left\{ (-1)^{\ell+m+1+i} \sqrt{\ell+1} \begin{pmatrix} \ell & 1 & \ell+1 \\ m & i & -m-i \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \times [\tilde{C}_{\ell m} + \tilde{C}_{\ell+1m+i}] + (-1)^{\ell+m+i} \\ &\quad \times \sqrt{\ell} \begin{pmatrix} \ell-1 & 1 & \ell \\ m+i & -i & -m \end{pmatrix} {}_2\tilde{C}_{\ell-1m+i} \\ &\quad \left. + (-1)^{\ell+m+i} \sqrt{\ell+2} \begin{pmatrix} \ell+1 & 1 & \ell+2 \\ -m-i & i & m \end{pmatrix} {}_2\tilde{C}_{\ell m} \right\}, \end{aligned} \quad (31)$$

with $i = 0, 1$, when the mask effects are taken into account. This expression is defined for $m = -\ell \dots \ell$ even if ${}_2\tilde{C}_{\ell-1m+1}$ is not defined for $m = \ell$ and $m = \ell - 1$ and ${}_2\tilde{C}_{\ell-1m}$ for $m = \ell$ because the Wigner-3j symbols that multiply these terms strictly vanish. From this expression, we define

$$D_\ell^{(i)} \equiv \frac{\sum_{m=-\ell}^{\ell} (-1)^{\ell+m+1+i} \begin{pmatrix} \ell & 1 & \ell+1 \\ m & i & -m-i \end{pmatrix} D_{\ell m}^{(i)}}{\sum_{m=-\ell}^{\ell} (-1)^{\ell+m+1+i} \begin{pmatrix} \ell & 1 & \ell+1 \\ m & i & -m-i \end{pmatrix}}. \quad (32)$$

Now, it can be checked, after some algebra, that

$$D_\ell^{(i)} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \varepsilon_i^* [\hat{C}_\ell^{(i)} + 2{}_2\hat{C}_\ell^{(i)A} + 2{}_2\hat{C}_\ell^{(i)B}] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (33)$$

where the quantities $\hat{C}_\ell^{(i)}$, ${}_2\hat{C}_\ell^{(i)A}$ and ${}_2\hat{C}_\ell^{(i)B}$ have been defined by

$$\begin{aligned} \hat{C}_\ell^{(i)} &= \frac{1}{N_\ell^{(i)}} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \sqrt{\ell+1} \begin{pmatrix} \ell+1 & 1 & \ell \\ m & i & -m-i \end{pmatrix}^2 \\ &\quad \times [\tilde{C}_{\ell m} + \tilde{C}_{\ell+1m+i}] \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} {}_2\hat{C}_\ell^{(i)A} &= -\frac{1}{N_\ell^{(i)}} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \sqrt{\ell+2} \begin{pmatrix} \ell & 1 & \ell+1 \\ m & i & -m-i \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \ell+2 & 1 & \ell+1 \\ m & i & -m-i \end{pmatrix} {}_2\tilde{C}_{\ell m} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} {}_2\hat{C}_\ell^{(i)B} &= -\frac{1}{N_\ell^{(i)}} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \sqrt{\ell} \begin{pmatrix} \ell & 1 & \ell+1 \\ m & i & -m-i \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \ell-1 & 1 & \ell \\ m+i & -i & -m \end{pmatrix} {}_2\tilde{C}_{\ell m} \end{aligned} \quad (36)$$

with the coefficients $N_\ell^{(i)}$ given by

$$N_\ell^{(i)} = \sum_{m=-\ell}^{\ell} (-1)^{\ell+m+i} \begin{pmatrix} \ell & 1 & \ell+1 \\ m & i & -m-i \end{pmatrix}. \quad (37)$$

It follows from these results that we can consider the estimator

$$\begin{aligned} E_\ell^{(i)} &= \frac{1}{N_\ell^{(i)}} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \begin{pmatrix} \ell & 1 & \ell+1 \\ m & i & -m-i \end{pmatrix} \\ &\quad \times (-1)^{\ell+m+i} a_{\ell m}^{\text{obs}} a_{\ell+1m+i}^{\text{obs}*} \end{aligned} \quad (38)$$

that satisfies by construction

$$\langle E_\ell^{(i)} \rangle = D_\ell^{(i)}. \quad (39)$$

We will apply this estimator to the WMAP data in the following sections.

IV. DATA ANALYSIS

The proposed estimators have been implemented numerically, using the Healpix [28] package for the pixelization and the fast spherical harmonics transforms, and applied to the coadded data of the WMAP V and W bands (respectively, 70 and 90 GHz) where most of the signal is of cosmological origin. We implemented the estimators as described by Eqs. (33)–(38).

The quantities $\hat{C}_\ell^{(i)}$, ${}_2\hat{C}_\ell^{(i)A}$ and ${}_2\hat{C}_\ell^{(i)B}$ have been computed using the best fit lambda cold dark matter theoretical power spectrum of the WMAP data [29], and were not computed on the data itself to avoid ratios of random variables. To assess the statistical significance of the measured values of ε_i , we made 1000 simulations of WMAP data in each of the V and W bands according to a sky model with no modulation.

The results of the analysis of the V and W bands are summarized in Figs. 2–5. Figure 2 depicts the measurement of D_ℓ on the W band. We sum this measurement of two bands of ℓ (respectively, 20–100 and 100–300) and

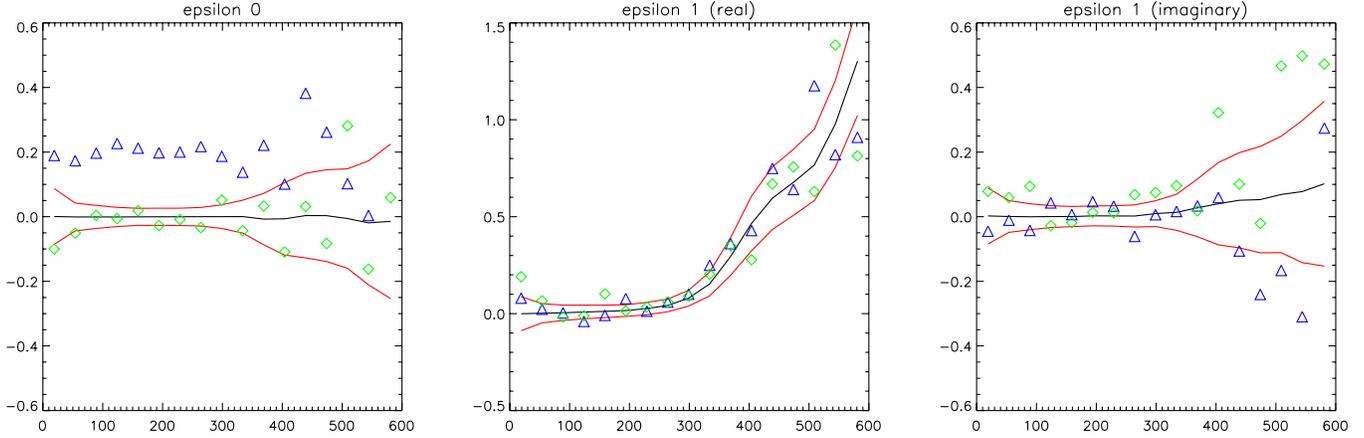


FIG. 2 (color online). D_ℓ measured on the WMAP data (W band) [green diamonds]. Blue triangles are the measurements on a simulated map with $\epsilon_0 = 0.2$ and the red (upper and lower solid) lines are 1σ error bars.

compare with 1000 simulated WMAP data. We perform the same tests on the V band (Figs. 4 and 5). The apparent detection in the V band without clear counterpart in the W band suggest a noncosmological contamination. Determining its origin requires more tests to be performed.

This contamination can be *a priori* from two possible sources, galactic or extragalactic. To check if the correlations detected in the V band are of galactic origin, we apply the same estimator to the half sum and half difference of

the V and W bands, that is,

$$S = \frac{W + V}{2}, \quad D = \frac{W - V}{2} \quad (40)$$

and repeat the whole procedure on 1000 simulations in each case, where the simulations contain only CMB and noise according to the WMAP specifications. The advantage of the half difference of the bands is that it should (up

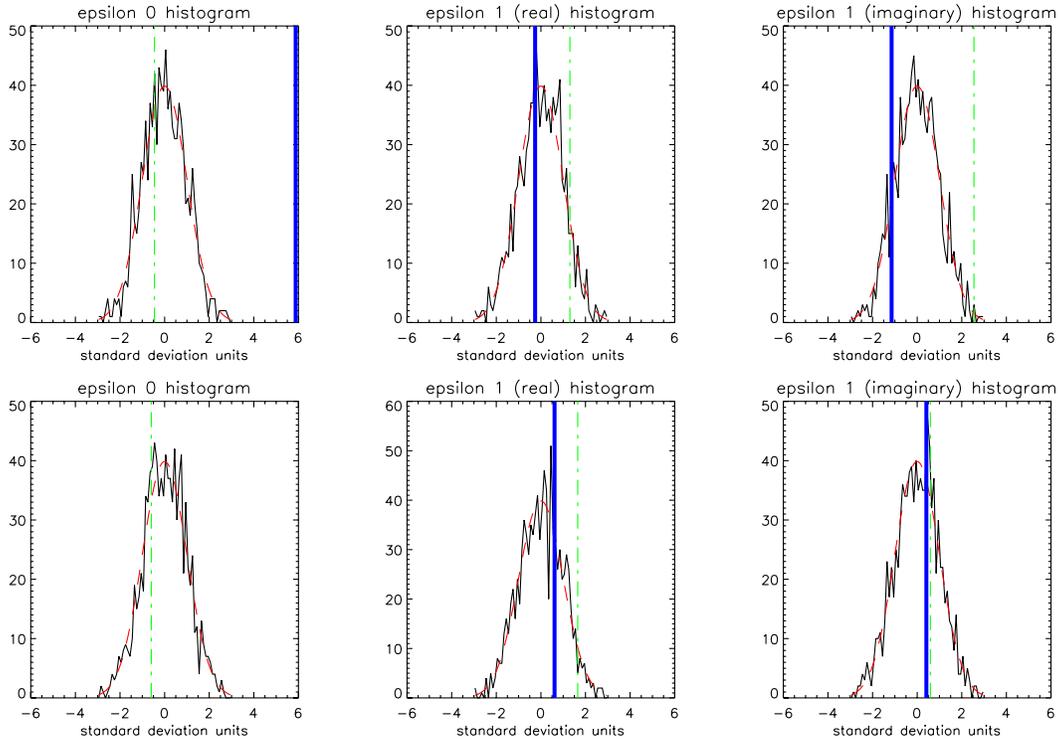


FIG. 3 (color online). Comparison of 1000 simulations with the WMAP data. We use the W band and sum the multipole between $\ell = 20$ and $\ell = 100$ (top panel) and between $\ell = 100$ and $\ell = 300$ (bottom panel). The color code is identical to the one of Fig. 2. The green (dotted-dashed) line is data, blue (wide solid) line is simulation.

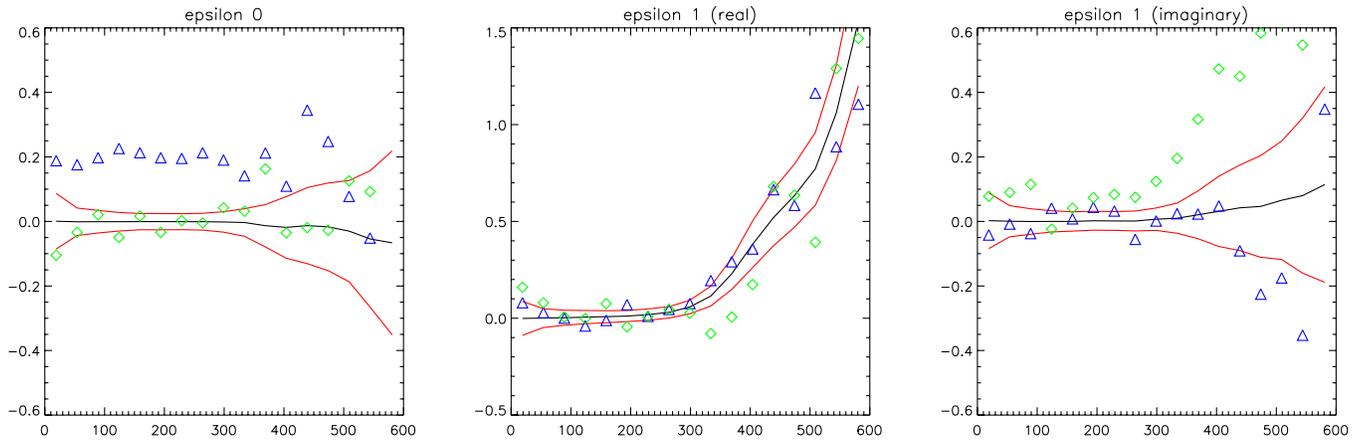


FIG. 4 (color online). D_ℓ measured on the WMAP data (V band) [green diamonds]. Blue triangles are the measurements on a simulated map with $\epsilon_0 = 0.2$ and the red (upper and lower solid) lines are 1σ error bars.

to calibration errors) eliminate the CMB signal completely at large scales, hence eliminating the main source of variance at these same scales, where the galactic signals are expected to dominate. Indeed, the power spectra of galactic emissions usually scale as $C_\ell \propto \ell^{-\alpha}$, with $2 \leq \alpha \leq 3$ (see,

e.g., Ref. [30]). The half sum results, summarized in Table I, are in between those of the V and W bands, which is coherent with the assumption of the detection being caused by a foreground source of electromagnetic spectrum different from the CMB fluctuations.

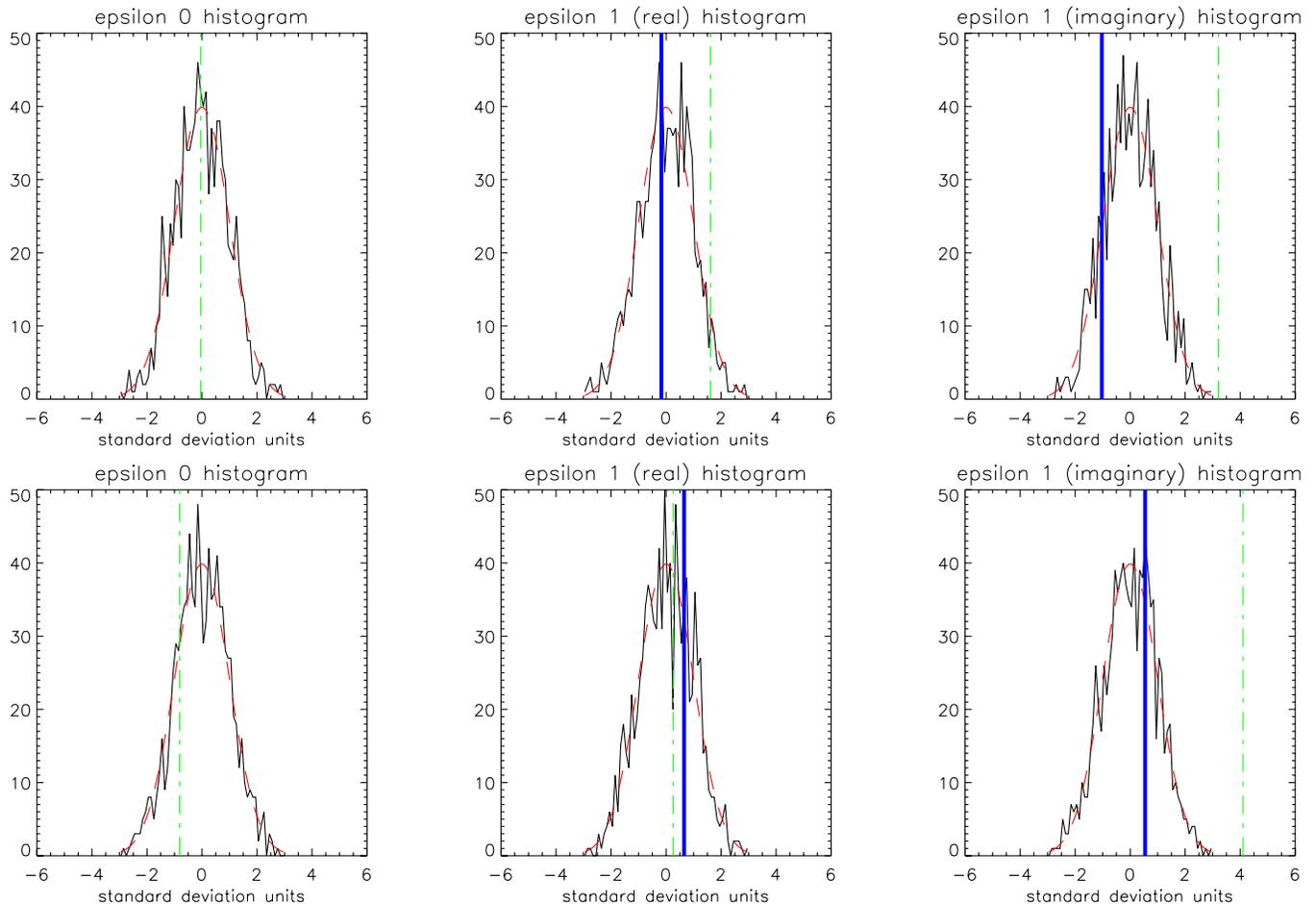


FIG. 5 (color online). Comparison of 1000 simulations with the WMAP data. We use the V band and sum the multipole between $\ell = 20$ and $\ell = 100$ (top panel) and between $\ell = 100$ and $\ell = 300$ (bottom panel).

TABLE I. Summary of the data analysis performed in this article. It concerns the two bands V and W, their half sum (S) and half difference (D). The band V has been analyzed with two masks to emphasize the effect of the point sources on the result.

	ε_0		$\text{Re}(\varepsilon)$		$\text{Im}(\varepsilon)$	
	Data	Test	Data	Test	Data	Test
W (20–100)	-0.45	5.87	1.30	-0.26	2.54	-1.14
W (100–300)	-0.60	16.9	1.65	0.61	0.59	0.41
V (20–100)	-0.04	6.00	1.61	-0.17	3.21	-1.03
V (100–300)	-0.81	17.9	0.25	0.65	4.10	0.54
V-kp0 (20–100)	-0.11	6.12	1.83	0.16	2.20	-0.42
V-kp0 (100–300)	-0.89	17.4	1.98	1.45	-0.22	0.18
S (20–100)	-0.24	6.71	1.52	0.40	2.85	-0.31
S (100–300)	-0.64	19.3	1.15	0.57	2.16	1.35
D (20–100)	-0.58	-0.74	-2.10	-1.49	3.73	-0.70
D (100–300)	-0.98	0.93	-0.44	0.69	2.67	-0.54

More importantly, the half difference results do not show a strong correlation detection at large angular scales, in contradiction with the assumption of the galactic foreground contamination being the source of the detected correlations in the V band.

However, this half difference test does not work that well if the source contaminants are of extragalactic origin, since the power spectra of extragalactic foregrounds resemble that of the noise. In this case, the contamination is expected to increase with increasing multipole number, which seems to be the case for the V band (see Figs. 4 and 5).

The difficulty of extragalactic point sources contamination is that these sources (quasars and active radio-galaxies) are distributed more or less uniformly across the sky, which renders their masking by an azimuthally symmetric sky cut impossible. However, the WMAP team provides with their data sets “tailor cuts” that blank out the resolved point sources of largest flux. Of course, the dipolar modulation estimators designed in the preceding sections do not apply *stricto sensu* to these arbitrary masks, but one can hope, given the small fraction of sky removed at high latitude, that the broken symmetry of the mask will be a small perturbation in the computation of the ε 's, so that the estimators keep their general validity, up to a possible small bias (see Fig. 6 for a comparison of the coefficients w_ℓ of the two masks).

This assumption can be checked on a simulated sky with a known dipolar modulation, where a WMAP V-band noise is added to the signal, together with the tailor mask. We chose the most conservative mask provided by the WMAP team (kp0) and applied it to a simulated sky of known modulation ($\varepsilon_0 = 0.2$) as described above, together with the V-band data. The results are shown in Figs. 7 and 8. Again, the estimators have been applied to 1000 simulations of the V band with no dipolar modulation, with the same kp0 mask applied, to estimate the statistics of the V-band data results.

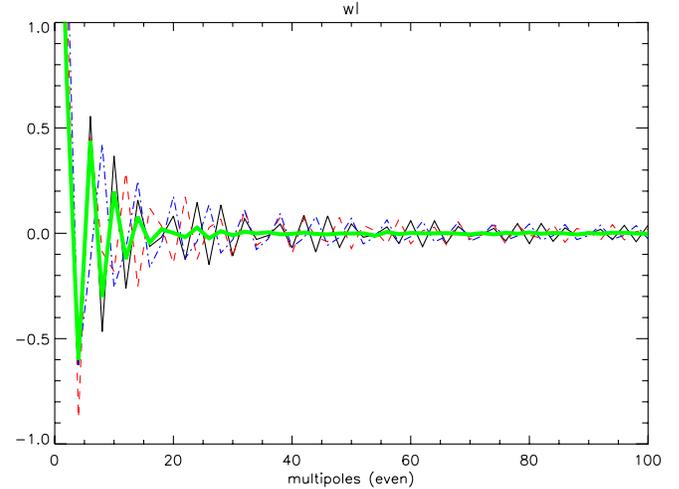


FIG. 6 (color online). The coefficients of the decomposition of the mask function on spherical harmonics for different galactic $\mu_c = 10, 20,$ and 30 degrees (respectively, black solid, red dashed and blue dotted-dashed lines) compared with the ones of the kp0 mask (green wide solid line).

Several observations can be made at this point. First, comparing these results with those obtained in the V band, but with the azimuthally symmetric 20° cut (Fig. 4), one can check that the estimators give very compatible results for the simulated dipolar modulation (blue triangles). This comforts our assumption that changing the cut sky to the kp0 mask is a small perturbation for the modulation estimators.

Secondly, comparing the same figures but this time looking at the data (green diamonds), one can see that in the case of the 20° cut there is a large trend at high ℓ 's in ε_1 that disappears when the kp0 cut is used. This is confirmed by the results of Table I where one can check that the tentative detections of statistical anisotropy in the V band using the simple cut become statistically insignificant when using the kp0 cut.

V. DISCUSSION AND CONCLUSIONS

In this article we have proposed an estimator designed to detect a possible modulation of the CMB temperature field, or equivalently $\Delta\ell = 1$ correlations. The effects of cutting part of the sky were discussed in detail and we applied this estimator to the V and W bands of the WMAP data.

The results of our analysis are summarized in Table I which gives the amplitude of the modulation coefficients on the WMAP data and a corresponding test case with $\varepsilon_0 = 0.2$, $\text{Re}(\varepsilon_1) = \text{Im}(\varepsilon_1) = 0$. All values are given in standard deviation units, estimated on 1000 (signal + noise) simulations in each case, with no modulations.

While the V band seems to exhibit a marginal detection, further tests such as the study of the half sum and difference of the two bands and the effect of point sources have

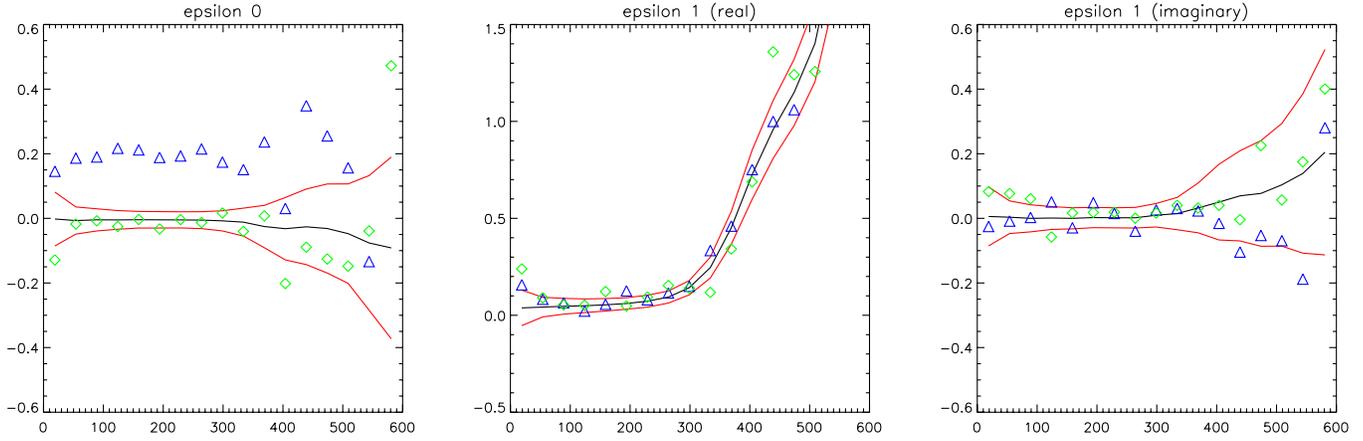


FIG. 7 (color online). D_ℓ measured on the WMAP data (V band) [green diamonds], using the tailor mask kp0 to blank the main point sources. Blue triangles are the measurements on a simulated map with $\epsilon_0 = 0.2$ and the red (upper and lower solid) lines are 1σ error bars.

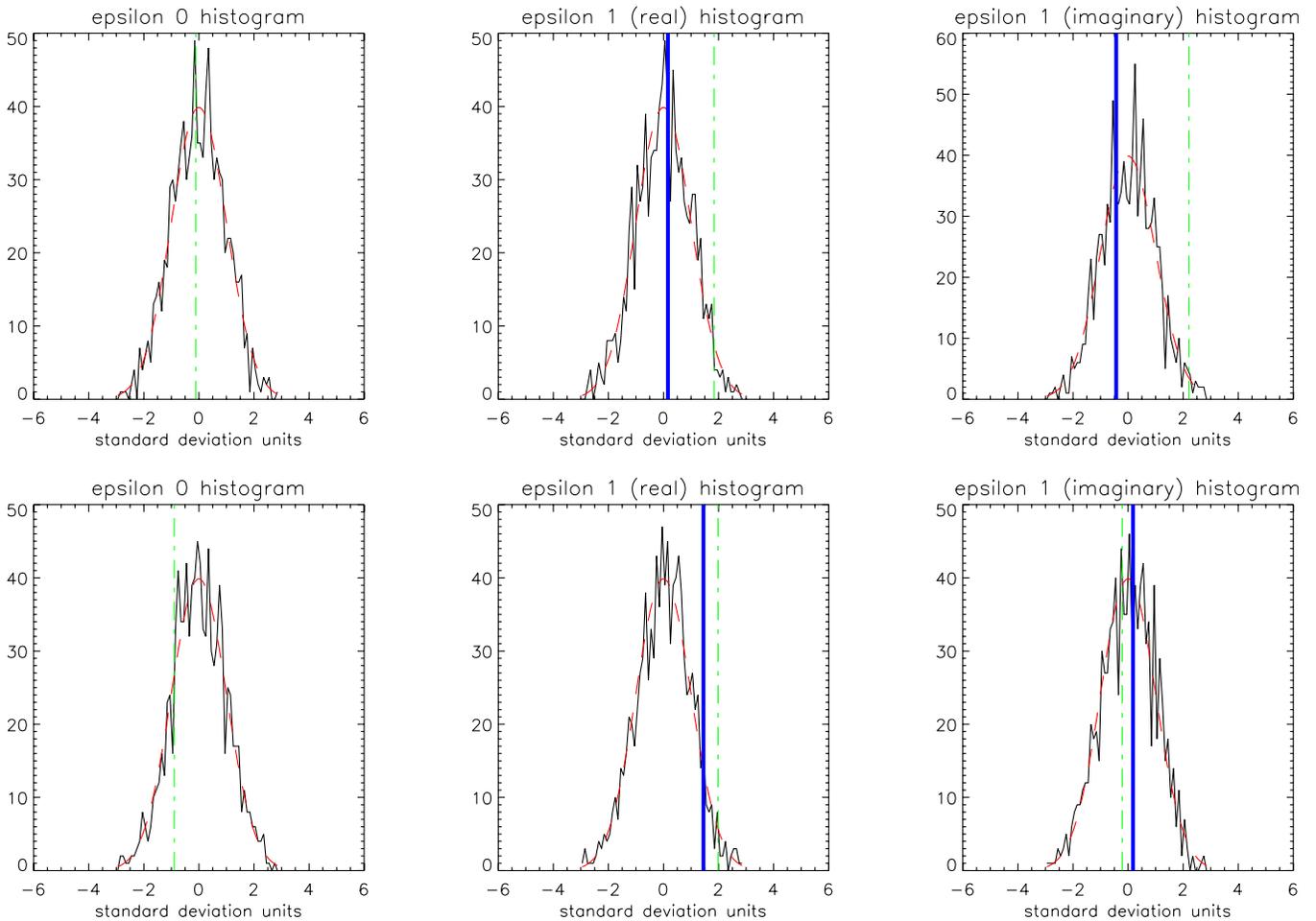


FIG. 8 (color online). Comparison of 1000 simulations with the WMAP data. We use the V band and sum the multipole between $\ell = 20$ and $\ell = 100$ (top panel) and between $\ell = 100$ and $\ell = 300$ (bottom panel) using the tailor mask kp0 to blank the main point sources.

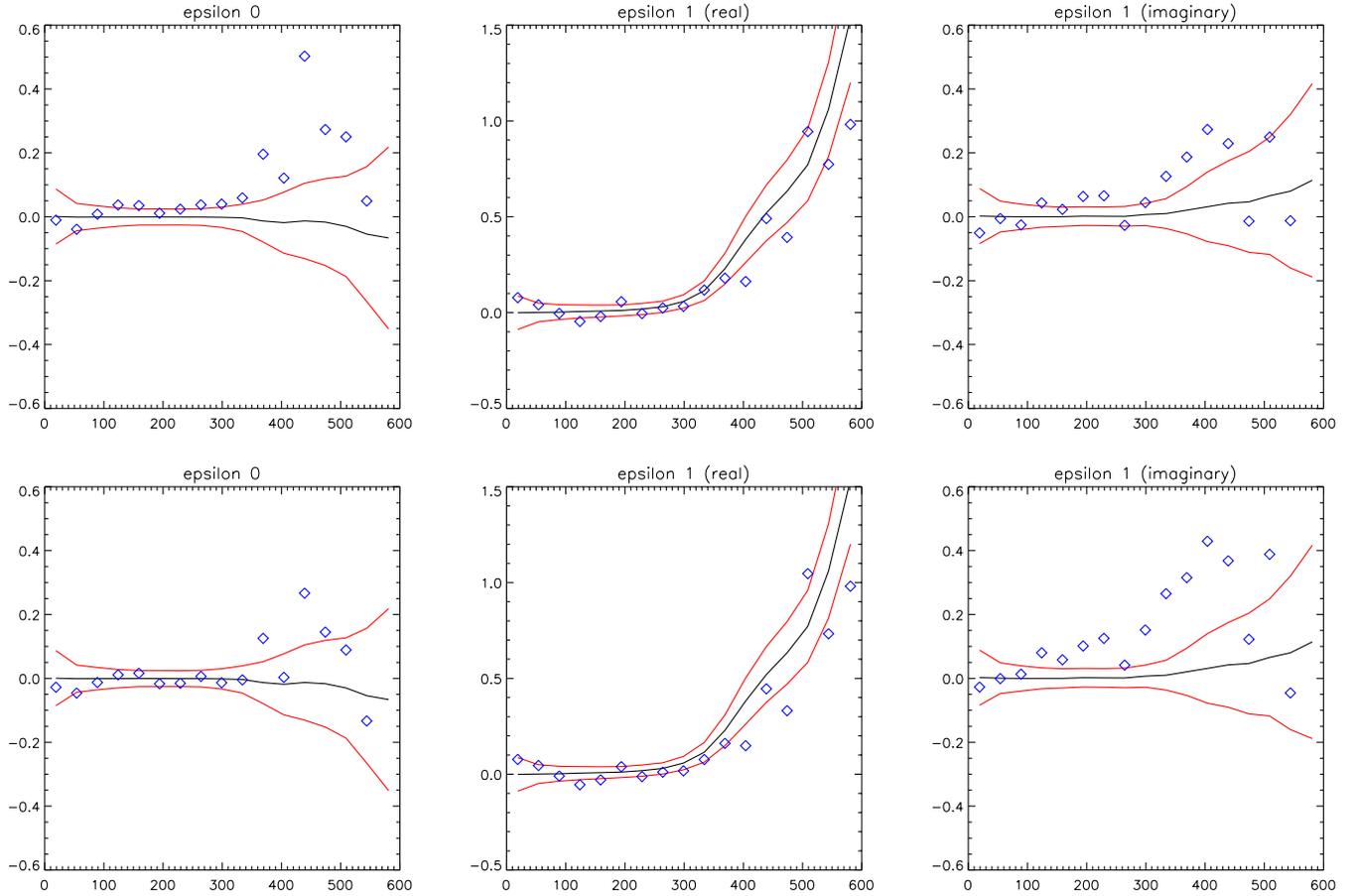


FIG. 9 (color online). The analysis of the simulated maps in which (top) the 208 resolved sources of the WMAP catalog have been added and (bottom) where the 700 point sources (resolved and unresolved) of the V band have been added. In both cases, the signal of $\text{Re}(\epsilon_1)$ is not affected while the signal of ϵ_0 and $\text{Im}(\epsilon_1)$ exhibit patterns that are similar to the ones obtained in our analysis of the V and W band on the same angular scales.

led us to conclude that this detection should be inferred to the effect of point sources contamination. In this analysis we have used the kp0 mask which does not satisfy the symmetries of the mask required for our estimator to be unbiased. Nevertheless, our estimator seems to be well suited for the analysis, even with the kp0 mask.

To back up this interpretation we have performed two last tests. First we added to a simulated CMB map without modulation and with noise the 208 sources resolved by the WMAP experiment and then smoothed with the correct beam. Second we added to the same simulation the 700 circular regions that are cut in the analysis of the V band in the WMAP analysis. As can be seen in Fig. 9, both simulations, while analyzed as the previous data with an azimuthal mask of 20 degrees, exhibit an excess of signal for ϵ_0 and $\text{Im}(\epsilon_1)$ in the same range of multipoles obtained on the analysis of the V and W bands (Figs. 2 and 4). Interestingly, the signal of $\text{Re}(\epsilon_1)$ is not affected and is identical to the one of Figs. 2 and 4. Indeed, the signals have not exactly the same amplitude as the ones obtained from the analysis

of the V band but they exhibit the same trend on the same scales. Also, it has to be stressed that with a cut of 20 degrees the Large Magellanic Cloud (galactic latitude of 20 degrees and more and longitude of 0 degrees) and a part of the H2 Ophiucus region should contribute and that we have not included them in the simulations. This could have enhanced the signal.

In conclusion, the set of analyses performed in our study tend to show that the $\Delta\ell = 1$ correlations that appeared in the analysis of the V and W bands of the WMAP data are due to foreground contaminations and most likely by point sources. The direction of the detected modulation will, in that interpretation, characterize the anisotropy of the distribution of these sources.

ACKNOWLEDGMENTS

Some of the results of this article have been derived using the HEALPix package [32]. We thank Y. Mellier and R. Stompfor for discussions.

APPENDIX: INTEGRALS OVER SPHERICAL HARMONICS

We have evaluated integrals over n spherical harmonics (see Ref. [31]). When $n = 1$ or 2, these integrals are trivial

$$\int d^2\vec{\gamma} Y_{\ell m} = \sqrt{4\pi} \delta_{\ell 0} \delta_{m 0} \quad (\text{A1})$$

$$\int d^2\vec{\gamma} Y_{\ell_1 m_1} Y_{\ell_2 m_2}^* = \delta_{\ell_1 \ell_2} \delta_{m_1 m_2}. \quad (\text{A2})$$

To go further, one solution is to use the decomposition of the product of two spherical harmonics as

$$Y_{\ell_1 m_1}(\vec{\gamma}) Y_{\ell_2 m_2}(\vec{\gamma}) = \sum_{LM} \sqrt{\frac{(2\ell_1 + 1)(2\ell_2 + 1)}{4\pi(2L + 1)}} \times C_{\ell_1 0 \ell_2 0}^{L0} C_{\ell_1 m_1 \ell_2 m_2}^{LM} Y_{LM}(\vec{\gamma}) \quad (\text{A3})$$

where the $C_{\ell_1 m_1 \ell_2 m_2}^{LM}$ are the Clebsch-Gordan coefficients that can be expressed in terms of Wigner-3j symbols as

$$C_{\ell_1 m_1 \ell_2 m_2}^{LM} = (-1)^{\ell_1 - \ell_2 + M} \sqrt{2L + 1} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & L \\ m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix}. \quad (\text{A4})$$

It is easy to generalize Eq. (A3) to a product of n spherical

harmonics

$$Y_{\ell_1 m_1} \dots Y_{\ell_n m_n} = \sum_{L_n M_n} \left[\sqrt{\frac{4\pi}{2L_n + 1}} \sum_{L_1 \dots L_{n-1} M_1 \dots M_{n-1}} \times \prod_{i=1}^n \left(\sqrt{\frac{2\ell_i + 1}{4\pi}} C_{L_{i-1} 0 \ell_i 0}^{L_i 0} C_{L_{i-1} M_{i-1} \ell_i m_i}^{L_i M_i} \right) \right] \times Y_{L_n M_n}. \quad (\text{A5})$$

We deduce, using Eq. (A5) and the integral (A2), that

$$\int d^2\vec{\gamma} Y_{\ell_1 m_1} Y_{\ell_2 m_2} Y_{\ell_3 m_3}^* = \sqrt{\frac{(2\ell_1 + 1)(2\ell_2 + 1)}{4\pi(2\ell_3 + 1)}} C_{\ell_1 0 \ell_2 0}^{\ell_3 0} C_{\ell_1 m_1 \ell_2 m_2}^{\ell_3 m_3} \quad (\text{A6})$$

$$\int d^2\vec{\gamma} Y_{\ell_1 m_1} Y_{\ell_2 m_2} Y_{\ell_3 m_3} Y_{\ell_4 m_4}^* = \sum_{LM} \sqrt{\frac{(2\ell_1 + 1)(2\ell_2 + 1)(2\ell_3 + 1)}{(4\pi)^2(2\ell_4 + 1)}} \times C_{\ell_1 0 \ell_2 0}^{L0} C_{L 0 \ell_3 0}^{L 0} C_{\ell_1 m_1 \ell_2 m_2}^{LM} C_{LM \ell_3 m_3}^{\ell_4 m_4}. \quad (\text{A7})$$

[1] C.L. Bennett *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **148**, 1 (2003).
 [2] D.N. Spergel *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **148**, 175 (2003).
 [3] H.V. Peiris *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **148**, 213 (2003).
 [4] M. Tegmark, A. de Oliveira-Costa, and A. Hamilton, *Phys. Rev. D* **68**, 123523 (2003).
 [5] J.-P. Uzan, U. Kirchner, and G.F.R. Ellis, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **344**, L65 (2003).
 [6] G. Efstathiou, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **343**, L95 (2003).
 [7] A. Slosar, U. Seljak, and A. Makarov, *Phys. Rev. D* **69**, 123003 (2004).
 [8] A. de Oliveira-Costa, M. Tegmark, M. Zaldarriaga, and A. Hamilton, *Phys. Rev. D* **69**, 063516 (2004).
 [9] D. Schwarz *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 221301 (2004).
 [10] E. Komatsu *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **148**, 119 (2003).
 [11] A. Hajian and T. Souradeep, *Astrophys. J.* **597**, L5 (2003).
 [12] C. J. Copi, D. Huterer, and G. Starkman, *Phys. Rev. D* **70**, 043515 (2004).
 [13] F. K. Hansen, P. Cabella, D. Marinucci, and N. Vittorio, *Astrophys. J.* **607**, L67 (2004).
 [14] H. K. Eriksen, D. I. Novikov, P. B. Lilje, A. J. Banday, and K. M. Gorski, *Astrophys. J.* **612**, 64 (2004).
 [15] H. K. Eriksen, F. K. Hansen, A. J. Banday, K. M. Gorski, and P. B. Lilje, *Astrophys. J.* **605**, 14 (2004); **609**, 1198(E) (2004).
 [16] C.-G. Park, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **349**, 313 (2004).
 [17] D.L. Larson and B. Wandelt, *Astrophys. J.* **613**, L85 (2004).
 [18] L.-Y. Chiang, P.D. Naselsky, O. Verkhodanov, and M. Way, *Astrophys. J. Lett.* **590**, 65 (2003).
 [19] K. Land and J. Magueijo, *astro-ph/0405519*.
 [20] A. Slosar and U. Seljak, *Phys. Rev. D* **70**, 083002 (2004).
 [21] F. Bernardeau and J.-P. Uzan, *Phys. Rev. D* **66**, 103506 (2002).
 [22] F. Bernardeau and J.-P. Uzan, *Phys. Rev. D* **67**, 121301(R) (2003).
 [23] F. Bernardeau and J.-P. Uzan, *Phys. Rev. D* **70**, 043533 (2004).
 [24] A. Riazuelo, J.-P. Uzan, R. Lehoucq, and J. Weeks, *Phys. Rev. D* **69**, 103514 (2004); A. Riazuelo, J.-P. Uzan, R. Lehoucq, J. Weeks, and J.-P. Luminet, *Phys. Rev. D* **69**, 103518 (2004); J.-P. Uzan and A. Riazuelo, *C.R. Acad. Sci. (Paris)* **4**, 945 (2003); J.-P. Uzan, A. Riazuelo, R. Lehoucq, and J. Weeks, *Phys. Rev. D* **69**, 043003 (2004); J.-P. Luminet, J. Weeks, A. Riazuelo, R. Lehoucq, and J.-P. Uzan, *Nature (London)* **425**, 593 (2003).
 [25] F. Bernardeau, T. Brunier, and J.-P. Uzan (to be published).
 [26] R. Durrer, T. Kahniashvili, and A. Yates, *Phys. Rev. D* **58**, 123004 (1998); A. Mack, T. Kahniashvili, and A. Kosowsky, *Phys. Rev. D* **65**, 123004 (2002); G. Chen, P.

- Mukherjee, T. Kahniashvili, B. Ratra, and Y. Wang, *Astrophys. J.* **611**, 655 (2004); P.D. Naselsky, L.-Y. Chiang, P. Olesen, and O. Verkhodanov, *Astrophys. J.* **615**, 45 (2004).
- [27] E. Hivon *et al.*, *Astrophys. J.* **567**, 2 (2002).
- [28] <http://www.eso.org/science/healpix>
- [29] L. Verde *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **148**, 195 (2003).
- [30] F.R. Bouchet and R. Gispert, *New Astron. Rev.* **4**, 443 (1999).
- [31] D.A. Varshalovich, A.N. Moskalev, and V.K. Khersonskii, *Quantum Theory of Angular Momentum* (World Scientific, Singapore, 1988).
- [32] K.M. Górski, E. Hivon, and B.D. Wandelt, in *Proceedings of the MPA/ESO Cosmology Conference "Evolution of Large-Scale Structure,"* edited by A.J. Banday, R.S. Sheth, and L. Da Costa (PrintPartners, Ipskamp, The Netherlands, 1999), pp. 37–42.

3.7 Fonctions de corrélation d'ordre plus élevé (article)

3.7.1 Présentation de l'article

Motivations

Les fonctions de corrélation d'ordre plus élevé que deux permettent de mettre en évidence l'écart à la gaussianité d'une distribution. En effet, si une variable aléatoire de moyenne nulle $\phi(x)$ suit une loi de distribution gaussienne, toutes ses fonctions de corrélation s'expriment en fonction de la fonction de corrélation à deux points

$$\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_{2n}) \rangle = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2n}} \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \langle \phi(x_{\sigma(i)}) \phi(x_{\sigma(j)}) \rangle, \quad (3.188)$$

$$\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_{2n+1}) \rangle = 0, \quad (3.189)$$

où \mathcal{S}_{2n} est l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.

Nous définissons la fonction de corrélation connexe à n points, pour $n > 2$ en soustrayant à la fonction de corrélation à n points la partie gaussienne. Pour un champ gaussien, toutes les fonctions de corrélation connexes, excepté la fonction à un et deux points, sont donc nulles.

Les fluctuations de température du fond diffus cosmologique, reliées aux perturbations de métrique primordiales, constituent une observable de choix dans l'étude de la phase inflationnaire. En particulier, la statistique de ces fluctuations est susceptible de nous éclairer sur les interactions pendant l'inflation. En effet, la présence de plusieurs champs en interaction durant l'inflation peut, sous certaines conditions, donner naissance à des fluctuations de métrique initiales non-gaussiennes caractéristiques. Il apparaît dès lors indispensable de comprendre l'influence de fluctuations initiales non-gaussiennes sur les anisotropies de température.

Dans cet article [Brunier & Bernardeau, 2006], nous considérons l'effet de non-gaussianités primordiales sur les fonctions de corrélation à trois et quatre points de la température. Les déviations à la gaussianité des fluctuations du potentiel gravitationnel Φ sont caractérisées par trois paramètres constants ν_2 , ν_3^{line} et ν_3^{star} définis par

$$\langle \Phi_{\vec{k}_1} \Phi_{\vec{k}_2} \Phi_{\vec{k}_3} \rangle_c = \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3) \nu_2 [P(k_1)P(k_2) + \text{perm.}] , \quad (3.190)$$

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{\vec{k}_1} \Phi_{\vec{k}_2} \Phi_{\vec{k}_3} \Phi_{\vec{k}_4} \rangle_c &= \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 + \vec{k}_4) \left\{ \nu_3^{\text{star}} [P(k_1)P(k_2)P(k_3) + \text{perm.}] \right. \\ &\quad \left. + \nu_3^{\text{line}} [P(k_1)P(k_2)P(|\vec{k}_1 + \vec{k}_2|) + \text{perm.}] \right\} . \end{aligned} \quad (3.191)$$

Expression des fonctions de corrélation pour la température

Dans un premier temps, nous exprimons formellement les fonctions de corrélation pour la température en fonction de celles pour le potentiel gravitationnel primordial.

Pour ce faire, nous relient les coefficients $a_{\ell m}$ au potentiel gravitationnel, dans le cas de conditions initiales adiabatiques

$$a_{\ell m} = 4\pi(-i)^\ell \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} T_\ell(k) \Phi(\mathbf{k}) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) . \quad (3.192)$$

Nous ne considérons que des perturbations scalaires de sorte que la fonction de transfert $T_\ell(k)$ est reliée au produit des multipôles $\Theta_\ell^{(0)}(\eta, k)$ introduits précédemment par des fonctions de Bessel.

Afin de décrire de façon plus intuitive les anisotropies de température, nous décomposons le potentiel gravitationnel à une distance r de nous en harmoniques sphériques

$$\Phi(r\tilde{\gamma}) = \sum_{\ell m} \Phi_{\ell m}(r) Y_{\ell m}(\tilde{\gamma}) . \quad (3.193)$$

Les coefficients $a_{\ell m}$ sont alors reliés aux coefficients $\Phi_{\ell m}(r)$ *via* une fonction de transfert radiale

$$a_{\ell m} = \int dr R_\ell(r) \Phi_{\ell m}(r) . \quad (3.194)$$

Nous en déduisons l'expression des fonctions de corrélation des coefficients $a_{\ell m}$ en fonction de la statistique du potentiel gravitationnel. En particulier, nous obtenons les relations simples suivantes

i) pour la fonction à deux points

$$\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \int dr R_\ell(r) \xi_\ell(r) , \quad (3.195)$$

ii) pour la fonction à trois points des $a_{\ell m}$ ou *bispectre*

$$\langle a_{\ell_1 m_1} a_{\ell_2 m_2} a_{\ell_3 m_3} \rangle = 8\nu_2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} {}^{(3)}\mathcal{G}_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m_1 m_2 m_3} \int dr [R_{\ell_1}(r) \xi_{\ell_2}(r) \xi_{\ell_3}(r) + \text{perm.}] , \quad (3.196)$$

iii) pour la fonction à quatre points des $a_{\ell m}$ - ou *trispectre* - induite par les interactions quartiques du potentiel gravitationnel (paramètre ν_3^{star})

$$\begin{aligned} \langle a_{\ell_1 m_1} a_{\ell_2 m_2} a_{\ell_3 m_3} a_{\ell_4 m_4} \rangle^{\text{star}} &= (2\pi)^3 \nu_3^{\text{star}(4)} \mathcal{G}_{\ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_4}^{m_1 m_2 m_3 m_4} \\ &\times \int dr [R_{\ell_1}(r) \xi_{\ell_2}(r) \xi_{\ell_3}(r) \xi_{\ell_4}(r) + \text{perm.}] , \end{aligned} \quad (3.197)$$

iv) et pour la fonction à quatre points induite par les interactions trilineaires du potentiel gravitationnel

$$\begin{aligned} \langle a_{\ell_1 m_1} a_{\ell_2 m_2} a_{\ell_3 m_3} a_{\ell_4 m_4} \rangle^{\text{line}} &= 8^2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \nu_3^{\text{line}} \sum_{LM} (-1)^M {}^{(3)}\mathcal{G}_{\ell_1 \ell_2 L}^{m_1 m_2 M(3)} \mathcal{G}_{\ell_3 \ell_4 L}^{m_3 m_4 -M} \\ &\times \int dr dr' [R_{\ell_1}(r) \xi_{\ell_2}(r) \zeta_L(r, r') R_{\ell_3}(r') \xi_{\ell_4}(r')] + \text{perm.} , \end{aligned} \quad (3.198)$$

où les fonctions ξ_ℓ et $\zeta_L(r, r')$ sont définies respectivement par

$$\xi_\ell(r) = \int dk k^2 P(k) T_\ell(k) j_\ell(kr), \quad (3.199)$$

$$\zeta_L(r, r') = \int dk k^2 P(k) j_L(kr) j_L(kr'). \quad (3.200)$$

Nous avons noté ici $P(k)$ le spectre de puissance du potentiel gravitationnel qui, dans le cas d'un potentiel invariant d'échelle, est de la forme $P(k) \sim k^{-3}$. Les fonctions de Gaunt ${}^{(n)}\mathcal{G}_{\ell_1 \dots \ell_n}^{m_1 \dots m_n}$ sont l'équivalent en géométrie sphérique des distributions de Dirac assurant l'isotropie statistique de l'espace

$${}^{(n)}\mathcal{G}_{\ell_1 \dots \ell_n}^{m_1 \dots m_n} = \int d^2\tilde{\gamma} Y_{\ell_1 m_1}(\tilde{\gamma}) \dots Y_{\ell_n m_n}(\tilde{\gamma}). \quad (3.201)$$

Nous démontrons, comme les résultats exposés semblent l'indiquer, que toute fonction de corrélation des coefficients $a_{\ell m}$ s'exprime à partir des seules fonctions $\xi_\ell(r)$, $\zeta_L(r, r')$ et de la fonction de transfert radiale $R_\ell(r)$. Nous en déduisons de plus une interprétation graphique simple permettant le calcul de toute fonction de corrélation de température. Cette représentation graphique consiste à associer un vertex à chaque fonction $R_\ell(r)$, un propagateur externe relié à un vertex $R_\ell(r)$ à toute fonction $\xi_\ell(r)$ et un propagateur interne entre les positions r et r' à chaque fonction $\zeta_L(r, r')$, en imposant la conservation des moments angulaires à chaque vertex, *via* les intégrales de Gaunt. Les fonctions à trois et quatre points sont représentées sur les figures 1, 2 et 3 de l'article ci-dessous.

Nous cherchons alors à déterminer le comportement des fonctions de corrélations en fonction de la configuration dans l'espace des multipôles ℓ .

Comportement des fonctions de corrélation

Comme les anisotropies de température sont essentiellement déterminées par le potentiel gravitationnel au voisinage de la surface de dernière diffusion, il semble légitime de développer la fonction de transfert radiale en dérivées successives de distributions de Dirac. Ce traitement étant trop brutal, nous adoptons un traitement légèrement différent.

Comme nous l'avons vu, les effets de projection des inhomogénéités sur le ciel observable induisent un mélange de modes. Il faut donc distinguer le mélange de modes issu des non-gaussianités primordiales et celui induit par les effets de projection. De fait, nous décomposons la fonction de transfert dans l'espace de Fourier sous la forme

$$T_\ell(k) = A_0(\ell) j_\ell(k\Delta\eta) + A_1(\ell) j'_\ell(k\Delta\eta) + \dots, \quad (3.202)$$

où les coefficients $A_i(\ell)$ devant les fonctions de Bessel ne dépendent non pas de k comme attendu mais de l'échelle angulaire $\ell \sim k\Delta\eta$ et sont obtenus par un ajustement des résultats du code CMBFast. Ce développement, purement phénoménologique, vise à simplifier la description des fonctions de corrélation d'ordre élevé.

Nous en déduisons alors le comportement approximatif des fonctions de corrélation pour la température. Nos résultats sont confirmés puis étendus par un traitement dans la limite des petits angles. Cette approximation a l'avantage de permettre un traitement plus simple des effets de projection.

Nous montrons en particulier que les zéros du bispectre dans une configuration équilatérale où tous les ℓ sont égaux sont approximativement donnés par ceux du coefficient A_0 , c'est-à-dire par ceux du monopôle. L'étude du trispectre est plus délicate car de nombreux termes sont impliqués. Nous montrons cependant que les trispectres induits par les couplages quartiques et cubiques du potentiel gravitationnel possèdent des comportements différents. Il est donc théoriquement possible de discriminer, grâce à la la statistique des fluctuations de température, le type de non-linéarités présentes dans la distribution des perturbations de métrique primordiales.

3.7.2 Article

Shape of high order correlation functions in CMB anisotropy maps

Tristan Brunier* and Francis Bernardeau†

Service de Physique Théorique, CEA/DSM/SPhT, Unité de Recherche Associée au CNRS, CEA/Saclay 91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France

(Received 13 February 2006; published 24 April 2006)

We present a phenomenological investigation of non-Gaussian effects that could be seen on CMB temperature maps. Explicit expressions for the temperature correlation functions are given for different types of primordial mode couplings. We argue that a simplified description of the radial transfer function for the temperature anisotropies allows one to get insights into the general properties of the bispectrum and trispectrum. The accuracy of these results is explored together with the use of the small scale approximation to get explicit expressions of high order spectra. The bispectrum is found to have alternate signs for the successive acoustic peaks. Sign patterns for the trispectrum are more complicated and depend specifically on the type of metric couplings. Local primordial couplings are found to give patterns that are different from those expected from weak lensing effects.

DOI: [10.1103/PhysRevD.73.083524](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.73.083524)

PACS numbers: 98.80.Cq, 04.20.-q, 98.70.Vc

I. INTRODUCTION

The standard inflationary models [1] have been very successful in explaining the basic features of the CMB observations: near scale-invariant power spectrum of, to a good approximation, primordial Gaussian adiabatic perturbations. These are undoubtedly important results that give support to the inflationary scheme. From another point of view it is an uncomfortable situation since there is practically no possibility with the current data sets to distinguish different models of inflations. The search of observational signatures beyond predictions from generic inflation is therefore crucial for getting insights into the nature of the inflaton field or more generally into physics of the early Universe. For instance, trans-Planckian effects [2], presence of isocurvature modes [3–7], and non-Gaussian effects [8,9] could betray some aspects of the inflationary physics. It is now well established that in standard inflation, e.g. single field inflation with slow roll conditions, a minimal amount of non-Gaussianities is expected to be induced along the cosmic evolution [8]. They simply come from the couplings of modes contained in the Einstein equations, that are intrinsically nonlinear in the fields. The more famous of those are the lensing effects on the CMB sky [10–12]. They indeed can be seen as the effects of couplings between the gravitational potential on the last-scattering surface and those present on the line of sights. Of course other local couplings exist that take place before or during the recombination period. For instance, Bartolo and collaborators in [8] derive the amplitude and nature of the superhorizon couplings of the gravitational potentials in terms of their expected bispectrum. Its shape betrays the nature and shape of the quadratic couplings in the Einstein equations that generically are expected to

determine the types of couplings for the modes that reenter the horizon.

For one-field inflation, couplings at horizon crossing are rather generic and induce typically 10^{-5} effects in the metric perturbations. Effects of such amplitude are expected to be marginally visible. They are however expected to be altered by second order effects taking place at low redshift after horizon crossing. Except for the Sachs-Wolfe plateau or the lens effects, predictions of the observable intrinsic non-Gaussian effects are not known. They require the computation of the physics of recombination up to second order, an enterprise still to be done.

There are however cases where significant mode couplings could survive the inflationary period. This is the case for some flavors of the curvaton models [7]. This could also be the case in other models of multifield inflation where a transfer of modes, from isocurvature to adiabatic, is possible during or at the end of the inflationary period as described in [13–15]. In this case no isocurvature modes are expected to survive, contrary to the case of the curvaton model, and the models predict only adiabatic fluctuations the spectrum of which can be arbitrarily close to scale invariance. However nothing prevents the initial isocurvature modes from developing significant non-Gaussian features which may be transferred into those of the adiabatic fluctuations. Such a transfer mechanism has been described in detail in [16] where the resulting high order correlation properties are explicitly given.

In principle, the properties of the metric fluctuations entirely determine those of the temperature or polarization CMB sky. However, the transcription of the properties of metric to properties in the observed temperature field reveals involved for at least two reasons. First, it is to be noted that the transfer physics is naturally best encoded in Fourier space where all modes evolve independently from one another whereas the nonlinear couplings of Eq. (2) are local in real space. The second reason is that projection

*Electronic address: Tristan.Brunier@cea.fr†Electronic address: Francis.Bernardeau@cea.fr

effects should be taken into account so that the modes that are observed correspond to a collection of Fourier modes. The then simple functional forms [such as those of Eqs. (7) and (8) for instance] that are rather generically expected for the metric are then greatly altered. For instance the sign of the three- and four-point correlation function may depend on scale. The aim of the investigations pursued in this paper is to try to uncover simple prescriptions for the shape, e.g. angular dependence, of those quantities. Comparison with the trispectra induced by weak lensing effects will also be presented.

The paper is divided as follows. In the second section we detail the couplings we assume for the primordial metric fluctuations. In the third section we present the basic quantities that are required to describe the way the potential fluctuations are transferred into the temperature fluctuations. We then take advantage of these results to present the theoretical shapes of the bispectrum and trispectrum of the temperature field in the case for the models of potential high order correlation functions described in the previous paragraph. The following section is devoted to an attempt to obtain a phenomenological description of the transfer function that gives insights into the angular dependence of these correlation functions. The last section is devoted to computation in the small angle approximation. Calculations are obviously much more straightforward in this limit which indeed corresponds to a regime where most of the observations can be made.

II. A MODEL OF PRIMORDIAL NON-GAUSSIAN METRIC PERTURBATIONS

In the analysis pursued in this paper we assume that the primordial metric fluctuations are those expected in rather generic models of multiple-field inflation, more specifically along the descriptions presented in [13,14,17]. In this family of models, the surviving couplings in the metric are expected to be, to a good approximation, equivalent to those induced by the superposition of two stochastically independent fields, a Gaussian one and one obtained by a nonlinear transform of a Gaussian field with the same spectrum. In other words the local potential would read

$$\Phi(\vec{x}) = \cos\alpha\Phi_1(\vec{x}) + \sin\alpha\mathcal{F}[\Phi_2(\vec{x})], \quad (1)$$

where the ratio between the initial adiabatic and isocurvature fluctuations is described by the mixing angle α and where the function \mathcal{F} takes into account the self-coupling of the field that gave rise to this part of the metric fluctuations. The function \mathcal{F} obviously depends on the details of the inflationary model, in particular, on the self-interaction potential along the transverse directions. As argued in [13], a natural choice is a quartic potential. In such a case, the function \mathcal{F} is characterized by two quantities. One is the amplitude of the coupling constant times N_e , the number of e -foldings between horizon crossing of the observable modes and their transfer from isocurvature to adiabatic

direction; the other is related to the field value in the transverse direction $\bar{\Phi}$ at our current Hubble scale. The latter actually corresponds to a finite volume effect [17]. In this framework the function \mathcal{F} then reads¹

$$\mathcal{F}(\Phi) = \frac{\Phi + \bar{\Phi}}{\sqrt{1 - \mu_3(\Phi + \bar{\Phi})^{2/3}}}, \quad (2)$$

where μ_3 is related to the self-coupling of the field. For a coupling in $\lambda\phi^4/4$ we have

$$\mu_3 \sim -\lambda N_e/C_2^2, \quad (3)$$

where C_2 is the amplitude of the metric fluctuation at super-Hubble scale, $C_2 \approx 10^{-5}$. One important feature of this description is that the nonlinear transform of the field is local in real space. This description has the advantage of providing a full description of the model. This equation should however be used with care. It gives a good account of the mode couplings only when the effective coupling constant λN_e is small. It is therefore preferable to consider the bispectrum and trispectrum of the potential field. So let us define the spectrum $P(k)$, bispectrum and trispectrum, $B(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3)$ and $T(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \vec{k}_4)$, of the potential field the following way:

$$\langle \Phi_{\vec{k}_1} \Phi_{\vec{k}_2} \rangle = \delta_{\text{Dirac}}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)P(k_1) \quad (4)$$

$$\langle \Phi_{\vec{k}_1} \Phi_{\vec{k}_2} \Phi_{\vec{k}_3} \rangle = \delta_{\text{Dirac}}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3)B(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3) \quad (5)$$

$$\langle \Phi_{\vec{k}_1} \dots \Phi_{\vec{k}_4} \rangle_c = \delta_{\text{Dirac}}(\vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_4)T(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \vec{k}_4), \quad (6)$$

where the underscript c stands for the connected part of the corresponding ensemble average. As Φ_1 and Φ_2 have the same power spectrum, if the nonlinear couplings of Φ_2 are small then the power spectrum of the metric fluctuations is left unchanged (to corrections that are quadratic in the coupling parameter). Then for the form presented in Eq. (2), for a small coupling parameter μ_3 we have

$$B(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3) = \nu_2[P(k_1)P(k_2) + \text{perm.}] \quad (7)$$

with $\nu_2 = \sin^3\alpha\mu_3\bar{\Phi}$, $\bar{\Phi}$ being *a priori* of the order of H being the value of the Hubble constant at horizon crossing, and

$$\begin{aligned} T(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \vec{k}_4) = & \nu_3^{\text{star}}[P(k_1)P(k_2)P(k_3) + \text{perm.}] \\ & + \nu_3^{\text{line}}[P(k_1)P(k_2)P(|\vec{k}_2 + \vec{k}_3|) \\ & + \text{perm.}] \end{aligned} \quad (8)$$

with $\nu_3^{\text{star}} = \sin^4\alpha\mu_3$ and $\nu_3^{\text{line}} = \sin^4\alpha\mu_3^2\bar{\Phi}^2$.

¹In [13], the nonlinear transform function was derived for the transverse field fluctuations. In this case the parameter μ_3 in (2) is $\mu_3 = -\lambda N_e/(3H^2)$. A similar transform applies to the induced metric fluctuations since the two are proportional to each other with a redefinition of the coupling parameter μ_3 .

Note that, if we are interested in the bispectrum, the parameter ν_2 is identical to the parameter f_{NL} usually used to describe the nonlinear transform of the metric fluctuations [18]. It is to be noted however that whereas f_{NL} is expected of the order unity in single field inflation, ν_2 can reach much larger values in multiple-field inflation. This is one justification of the investigations presented in this paper.

We can see that the trispectrum contains two terms of different geometrical shapes. The relative importance of these two terms depends, in particular, on the value of $\bar{\Phi}$. This ratio is naturally of order unity, but otherwise totally unpredictable.² In the following we therefore consider the two cases and examine the consequences of both terms on the temperature high order correlation functions.

III. EXPRESSIONS OF THE CORRELATION FUNCTIONS

In this section we set the basic relations that relate the primordial metric fluctuations to the temperature fluctuations.

A. Radial transfer function

The observed temperature anisotropies are decomposed in a sum of spherical harmonics with coefficients $a_{\ell m}$. The inverse relation gives the expression of those coefficients as a function of the temperature fluctuation $\frac{\delta T}{T}(\hat{\gamma})$ in the direction $\hat{\gamma}$ on the sky,

$$a_{\ell m} = \int d^2\hat{\gamma} \frac{\delta T}{T}(\hat{\gamma}) Y_{\ell m}^*(\hat{\gamma}). \quad (9)$$

When the linear theory is applied to the metric and density fluctuations, the coefficients $a_{\ell m}$ are linearly related to the primordial metric fluctuations. In the following we will only take into account the existence of adiabatic fluctuations. Then one can write

$$a_{\ell m} = 4\pi(-i)^\ell \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} T_\ell(k) \Phi(\vec{k}) Y_{\ell m}^*(\hat{k}), \quad (10)$$

where $\Phi(\vec{k})$ is the three-dimensional Fourier transformed of the gravitational potential, $T_\ell(k)$ is the photon transfer function, and $Y_{\ell m}(\hat{k})$ are the spherical harmonics in the direction given by the unit vector $\hat{k} = \vec{k}/k$.

The functions $T_\ell(k)$ encode all the microphysics that takes place after horizon crossing until the photons reach the observer. There is one well-known limit case which corresponds to large-angular scales for vanishing curvature and cosmological constant. In this limit indeed, the observed local temperature fluctuation is simply one third of the local potential. This is the so-called Sachs-Wolfe effect

[19]. In this case we simply have $T_\ell(k) = -1/3 j_\ell(kr_*)$ neglecting the late and early integrated Sachs-Wolfe effects. Although the validity regime of this form is limited, it is worth investigating since it corresponds to a case where only projection effects have to be taken into account.

One aim of this paper is to take advantage of the expression (10) to relate as accurately as possible the statistical properties of the $a_{\ell m}$ to those of the potential field. To do so we found it fruitful to introduce the radial transfer function. Let us first decompose the gravitational potential intercepted on a sphere of radius r as

$$\Phi(r\hat{\gamma}) = \sum_{\ell m} \Phi_{\ell m}(r) Y_{\ell m}(\hat{\gamma}). \quad (11)$$

Note that conversely

$$\Phi_{\ell m}(r) = \int d^2\hat{\gamma} \Phi(r\hat{\gamma}) Y_{\ell m}^*(\hat{\gamma}). \quad (12)$$

In Fourier space, we then get

$$\Phi(\vec{k}) = \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} \Phi(\vec{x}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad (13)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\ell m} \int r^2 dr d^2\hat{\gamma} \Phi_{\ell m}(r) Y_{\ell m}(\hat{\gamma}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \quad (14)$$

Using the decomposition of plane waves on a sphere

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = 4\pi \sum_{LM} i^L j_L(kr) Y_{LM}(\hat{k}) Y_{LM}^*(\hat{\gamma}), \quad (15)$$

with $\vec{x} = r\hat{\gamma}$, one obtains

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{k}) &= 4\pi \sum_{L,L',M,m} i^L \int \frac{dr}{(2\pi)^{3/2}} r^2 \int d^2\hat{\gamma} j_L(kr) \\ &\times Y_{LM}(\hat{k}) Y_{L'M}^*(\hat{\gamma}) \Phi_{\ell m}(r) Y_{\ell m}(\hat{\gamma}) \end{aligned} \quad (16)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{\ell m} i^\ell \int dr r^2 j_\ell(kr) Y_{\ell m}(\hat{k}) \Phi_{\ell m}(r). \quad (17)$$

Conversely

$$\Phi_{\ell m}(r) = (-i)^\ell \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int d^3k \Phi(\vec{k}) j_\ell(kr) Y_{\ell m}^*(\hat{k}). \quad (18)$$

Hence Eq. (10) can be recast in

$$a_{\ell m} = \frac{2}{\pi} \int dr R_\ell(r) \Phi_{\ell m}(r), \quad (19)$$

where the radial transfer function $R_\ell(r)$ is obtained through a radial Fourier transform of the initial Fourier space transfer function,

$$R_\ell(r) = \int dk k^2 r^2 T_\ell(k) j_\ell(kr). \quad (20)$$

Obviously the microphysics of the recombination can equally be described by the functions $T_\ell(k)$ or by the

²At best what a complete theory would give is the expected probability distribution function of $\bar{\Phi}$, a computation sketched in [17].

functions $R_\ell(r)$. However the latter are more directly related to the physics of recombination, which takes place over a short range of radius, and one can therefore try to find approximate forms for their r dependence. The Sachs-Wolfe regime corresponds to a limit case for which

$$R_\ell^{\text{SW}}(r) = -\frac{\pi}{6} \delta_{\text{Dirac}}(r - r_*) . \quad (21)$$

Before we propose approximate forms for $R_\ell(r)$, let us first detail how the statistical quantities we are interested in are related to this function.

B. Power spectrum

We first want to express the ensemble average of products of $a_{\ell m} a_{\ell' m'}$ as a function of the potential power spectrum and the radial transfer function. Using Eq. (20) we naturally get

$$\begin{aligned} \langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle &= \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \int dr r^2 \int dr' r'^2 \\ &\times \int dk k^2 P(k) j_\ell(kr) j_{\ell'}(kr') \\ &\times \int dk_1 k_1^2 T_\ell(k_1) j_\ell(k_1 r) \\ &\times \int dk_2 k_2^2 T_{\ell'}(k_2) j_{\ell'}(k_2 r'), \end{aligned} \quad (22)$$

where the integration over r' may be performed if one takes advantage of

$$\int dx x^2 j_\ell(kx) j_\ell(k'x) = \frac{\pi}{2k^2} \delta_{\text{Dirac}}(k - k'). \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{\ell_1 m_1}(r_1) \Phi_{\ell_2 m_2}(r_2) \Phi_{\ell_3 m_3}(r_3) \rangle &= (-i)^{\ell_1 + \ell_2 + \ell_3} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \int d^3 \vec{k}_1 d^3 \vec{k}_2 d^3 \vec{k}_3 \langle \Phi(\vec{k}_1) \Phi(\vec{k}_2) \Phi(\vec{k}_3) \rangle \\ &\times j_{\ell_1}(k_1 r_1) j_{\ell_2}(k_2 r_2) j_{\ell_3}(k_3 r_3) \\ &\times Y_{\ell_1 m_1}^*(\hat{k}_1) Y_{\ell_2 m_2}^*(\hat{k}_2) Y_{\ell_3 m_3}^*(\hat{k}_3). \end{aligned} \quad (28)$$

The Dirac distribution that appears in (5) can be rewritten as a Fourier transform

$$\delta_{\text{Dirac}}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3) = \int \frac{d^3 \vec{x}}{(2\pi)^3} e^{i(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3) \cdot \vec{x}}, \quad (29)$$

and then expanded into spherical Bessel functions with Eq. (15):

$$\begin{aligned} \delta_{\text{Dirac}}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3) &= (4\pi)^3 \int \frac{d^3 \vec{x}}{(2\pi)^3} \sum_{L_1, L_2, L_3, M_1, M_2, M_3} i^{L_1 + L_2 + L_3} j_{L_1}(k_1 x) j_{L_2}(k_2 x) j_{L_3}(k_3 x) \\ &\times Y_{L_1 M_1}(\hat{k}_1) Y_{L_2 M_2}(\hat{k}_2) Y_{L_3 M_3}(\hat{k}_3) \\ &\times Y_{L_1 M_1}^*(\hat{\gamma}) Y_{L_2 M_2}^*(\hat{\gamma}) Y_{L_3 M_3}^*(\hat{\gamma}), \end{aligned} \quad (30)$$

where $\vec{x} = x \hat{\gamma}$. Using the form (7) for the expression of the bispectrum and inserting Eq. (30) into (28), we get

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{\ell_1 m_1}(r_1) \Phi_{\ell_2 m_2}(r_2) \Phi_{\ell_3 m_3}(r_3) \rangle_c &= 8\nu_2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \mathcal{G}_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m_1 m_2 m_3} \int dx x^2 \int dk_1 k_1^2 j_{\ell_1}(k_1 r_1) j_{\ell_1}(k_1 x) \int dk_2 k_2^2 j_{\ell_2}(k_2 r_2) j_{\ell_2}(k_2 x) \\ &\times \int dk_3 k_3^2 j_{\ell_3}(k_3 r_3) j_{\ell_3}(k_3 x) [P(k_1)P(k_2) + P(k_2)P(k_3) + P(k_3)P(k_1)], \end{aligned} \quad (31)$$

where the Gaunt integral is defined by

Then temperature anisotropy power spectrum C_ℓ , defined as

$$\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle = (-1)^{m'} \langle a_{\ell m} a_{\ell' -m'} \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} C_\ell, \quad (24)$$

reads

$$C_\ell = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int dr R_\ell(r) \xi_\ell(r), \quad (25)$$

where we define

$$\xi_\ell(r) = \int dk k^2 P(k) T_\ell(k) j_\ell(kr). \quad (26)$$

We will see now that the functional relation (25) can be generalized to higher order correlation functions.

C. Bispectrum

1. Full sky expression

We are interested in the ensemble average of the product of three $a_{\ell m}$ that should not vanish when the potential field exhibits non-Gaussian properties. This correlation function formally reads

$$\begin{aligned} \langle a_{\ell_1 m_1} a_{\ell_2 m_2} a_{\ell_3 m_3} \rangle &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \int dr_1 \int dr_2 \int dr_3 R_{\ell_1}(r_1) R_{\ell_2}(r_2) \\ &\times R_{\ell_3}(r_3) \langle \Phi_{\ell_1 m_1}(r_1) \Phi_{\ell_2 m_2}(r_2) \\ &\times \Phi_{\ell_3 m_3}(r_3) \rangle. \end{aligned} \quad (27)$$

The ensemble average that appears in the right-hand side of this equation can be related to the potential bispectrum,

$${}^{(3)}\mathcal{G}_{\ell_1\ell_2\ell_3}^{m_1m_2m_3} = \int d^2\hat{\gamma} Y_{\ell_1m_1}(\hat{\gamma}) Y_{\ell_2m_2}(\hat{\gamma}) Y_{\ell_3m_3}(\hat{\gamma}). \quad (32)$$

We integrate over the momenta k_i which do not appear as an argument $P(k_i)$ in Eq. (31) and then perform the integrations over two of the radial variables. Equation (27) then becomes

$$\langle a_{\ell_1m_1} a_{\ell_2m_2} a_{\ell_3m_3} \rangle_c = 8\nu_2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} {}^{(3)}\mathcal{G}_{\ell_1\ell_2\ell_3}^{m_1m_2m_3} \int dr [R_{\ell_1}(r) \xi_{\ell_2}(r) \xi_{\ell_3}(r) + R_{\ell_2}(r) \xi_{\ell_3}(r) \xi_{\ell_1}(r) + R_{\ell_3}(r) \xi_{\ell_1}(r) \xi_{\ell_2}(r)]. \quad (33)$$

The bispectrum is expressed in terms of the fundamental functions R_ℓ and ξ_ℓ that appeared in the computation of the power spectrum. We shall see a diagrammatic interpretation of each of these terms in Sec. III E. For instance, the third term of Eq. (33) is diagrammatically represented in Fig. 1.

The expression (33) also involves geometrical factors encoded by the Gaunt integrals. In the following, we introduce an estimator which should allow one to define a *reduced* quantity. We also present the correspondence with the small angle approximated bispectrum.

2. Estimator

Following [18,20] an unbiased estimator of the angular averaged bispectrum may be chosen to be

$$B_{\ell_1\ell_2\ell_3} = \sum_{m_1, m_2, m_3} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} a_{\ell_1m_1} a_{\ell_2m_2} a_{\ell_3m_3}, \quad (34)$$

where the Wigner-3j symbol is related to the Gaunt integral by

$${}^{(3)}\mathcal{G}_{\ell_1\ell_2\ell_3}^{m_1m_2m_3} = \sqrt{\frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)(2\ell_3+1)}{4\pi}} \times \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

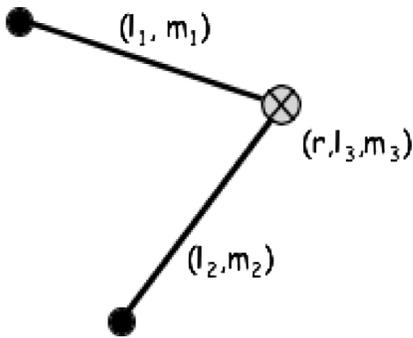


FIG. 1. Diagrammatic representation of the third term in the expression (33) of the bispectrum. Each line between a non-vertex point (ℓ_i, m_i) and a vertex (r, ℓ_3, m_3) represents the term $\xi_{\ell_i}(r)$. The vertex value is $\nu_2 {}^{(3)}\mathcal{G}_{\ell_1\ell_2\ell_3}^{m_1m_2m_3} R_{\ell_3}(r)$. The radial vertex position should be integrated over and the whole graph should be multiplied by $8\left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2}$.

Using the equality

$$\sum_{m_1, m_2} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell'_3 \\ m_1 & m_2 & m'_3 \end{pmatrix} = \frac{\delta_{\ell_3, \ell'_3} \delta_{m_3, m'_3}}{2\ell_3 + 1}, \quad (36)$$

we get

$$\langle B_{\ell_1\ell_2\ell_3} \rangle_c = \sqrt{\frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)(2\ell_3+1)}{4\pi}} \times \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} b_{\ell_1\ell_2\ell_3}, \quad (37)$$

with the reduced bispectrum defined as

$$b_{\ell_1\ell_2\ell_3} = 8\nu_2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \int dr [R_{\ell_1}(r) \xi_{\ell_2}(r) \xi_{\ell_3}(r) + R_{\ell_2}(r) \xi_{\ell_3}(r) \xi_{\ell_1}(r) + R_{\ell_3}(r) \xi_{\ell_1}(r) \xi_{\ell_2}(r)]. \quad (38)$$

The reduced bispectrum reveals convenient to describe the non-Gaussian part of the signal as it does not include the overall geometrical factors.

It is also convenient to introduce a normalized bispectrum $\tilde{b}_{\ell_1, \ell_2, \ell_3}$ defined by

$$\tilde{b}_{\ell_1\ell_2\ell_3} = \frac{b_{\ell_1\ell_2\ell_3}}{C_{\ell_1}C_{\ell_2} + C_{\ell_2}C_{\ell_3} + C_{\ell_3}C_{\ell_1}}, \quad (39)$$

which reads in terms of the functions $R_\ell(r)$ and $\xi_\ell(r)$

$$\tilde{b}_{\ell_1\ell_2\ell_3} = 8\left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \frac{\nu_2}{C_{\ell_1}C_{\ell_2} + C_{\ell_2}C_{\ell_3} + C_{\ell_3}C_{\ell_1}} \times \int dr [R_{\ell_1}(r) \xi_{\ell_2}(r) \xi_{\ell_3}(r) + R_{\ell_2}(r) \xi_{\ell_3}(r) \xi_{\ell_1}(r) + R_{\ell_3}(r) \xi_{\ell_1}(r) \xi_{\ell_2}(r)]. \quad (40)$$

3. Small angle approximation

The reduced bispectrum encodes all the physical processes that lead to a nonvanishing bispectrum. On the other hand, the Gaunt integral that appears in Eq. (38) only carries an overall geometrical dependence and ensures that the momenta ℓ_1 , ℓ_2 , and ℓ_3 satisfy the triangular inequalities.

It appears that this overall geometrical dependence translates into a simple momentum conservation in the flat sky approximation (see Appendix C). Defining the

quantity $a(\vec{\ell})$ as in Appendix C, the bispectrum reads in the small angle approximation

$$\langle a(\vec{\ell}_1)a(\vec{\ell}_2)a(\vec{\ell}_3) \rangle_c = \frac{1}{2\pi} b_{\ell_1\ell_2\ell_3} \delta_{\text{Dirac}}(\vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3), \quad (41)$$

where $b_{\ell_1\ell_2\ell_3}$ is the reduced bispectrum defined in Eq. (38). The Dirac function imposes that the vectors $\vec{\ell}_1$, $\vec{\ell}_2$, and $\vec{\ell}_3$

form a triangle whose lengths, respectively, match with ℓ_1 , ℓ_2 , and ℓ_3 .

We now turn to the study of the trispectrum.

D. Trispectrum

1. Full sky expression

Generally the trispectrum reads

$$\begin{aligned} \langle a_{\ell_1 m_1} a_{\ell_2 m_2} a_{\ell_3 m_3} a_{\ell_4 m_4} \rangle &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^4 \int dr_1 \int dr_2 \int dr_3 \int dr_4 R_{\ell_1}(r_1) R_{\ell_2}(r_2) R_{\ell_3}(r_3) R_{\ell_4}(r_4) \\ &\times \langle \Phi_{\ell_1 m_1}(r_1) \Phi_{\ell_2 m_2}(r_2) \Phi_{\ell_3 m_3}(r_3) \Phi_{\ell_4 m_4}(r_4) \rangle. \end{aligned} \quad (42)$$

From the expression (8), we will have 2 contributions. One *star* contribution, $\langle a_{\ell_1 m_1} \dots a_{\ell_4 m_4} \rangle^{\text{star}}$ due to the first term and one *line* contribution, $\langle a_{\ell_1 m_1} \dots a_{\ell_4 m_4} \rangle^{\text{line}}$, due to the second one. These denominations will actually become much clearer in Sec. III E where a diagrammatic representation of those terms is developed. For instance, only the diagrams whose shape is drawn in Fig. 2 contribute to the *line* trispectrum, whereas the *star* trispectrum is made of terms whose shape is drawn in Fig. 3.

For the line contribution, the connected four-point function of the potential is given by

$$\begin{aligned} \langle \Phi(\vec{k}_1) \dots \Phi(\vec{k}_4) \rangle_c^{\text{line}} &= \nu_3^{\text{line}} \int d^3 k_5 P(k_5) [P(k_1) + P(k_2)] [P(k_3) + P(k_4)] \delta_{\text{Dirac}}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_5) \delta_{\text{Dirac}}(\vec{k}_3 + \vec{k}_4 + \vec{k}_5) \\ &+ (2 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 4), \end{aligned} \quad (43)$$

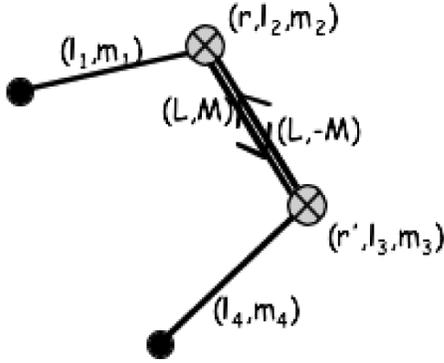


FIG. 2. Diagrammatic representation of the “line” contribution to the trispectrum. Each line between a nonvertex point (ℓ_i, m_i) and a vertex (r, ℓ, m) represents the term $\xi_{\ell_i}(r)$. Each line between the vertices (r, ℓ_2, m_2) and (r', ℓ_3, m_3) represents the term $\zeta_L(r, r')$. (Here L is the total angular momentum from ℓ_1 and ℓ_2 or equivalently from ℓ_3 and ℓ_4). The vertex values are $\nu_2^{(3)} \mathcal{G}_{\ell_1 \ell_2 L}^{m_1 m_2 M} R_{\ell_2}(r)$ and $\nu_2^{(3)} \mathcal{G}_{\ell_3 \ell_4 L}^{m_3 m_4 -M} R_{\ell_3}(r')$. The radial positions of the vertices should be integrated over and the internal momenta (L, M) should be summed over. The whole graph should be multiplied by $8^2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^2$.

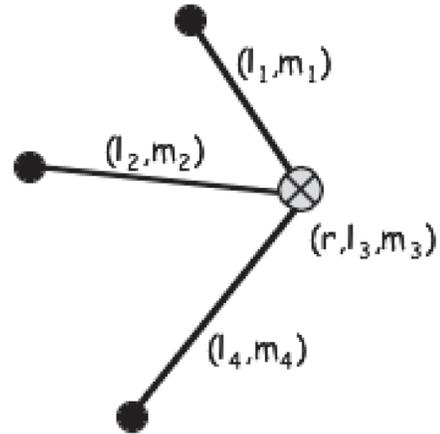


FIG. 3. Diagrammatic representation of the “star” contribution to the trispectrum. Each single line between (ℓ_i, m_i) and the vertex (r, ℓ, m) represents the term $\xi_{\ell_i}(r)$. The vertex value at the point r is given by $\nu_3^{(4)} \mathcal{G}_{\ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_4}^{m_1 m_2 m_3 m_4} R_{\ell_3}(r)$. The radial position of the vertex should be integrated over. The whole graph should be multiplied by $\frac{2^7}{\pi}$.

which entails using Eq. (30),

$$\begin{aligned}
\langle \Phi_{\ell_1 m_1}(r_1) \Phi_{\ell_2 m_2}(r_2) \Phi_{\ell_3 m_3}(r_3) \Phi_{\ell_4 m_4}(r_4) \rangle_c^{\text{line}} &= \nu_3^{\text{line}} \frac{2^8}{\pi^2} \sum_{L,M} (-1)^M \mathcal{G}_{\ell_1 \ell_2 L}^{m_1 m_2 M} \mathcal{G}_{\ell_3 \ell_4 L}^{m_3 m_4 -M} \int dx_1 dx_2 x_1^2 x_2^2 \\
&\times \left\{ \int dk_1 k_1^2 P(k_1) j_{\ell_1}(k_1 r_1) j_{\ell_1}(k_1 x_1) \int dk_2 k_2^2 j_{\ell_2}(k_2 r_2) j_{\ell_2}(k_2 x_1) \right. \\
&\times \int dk_3 k_3^2 P(k_3) j_{\ell_3}(k_3 r_3) j_{\ell_3}(k_3 x_2) \int dk_4 k_4^2 j_{\ell_4}(k_4 r_4) j_{\ell_4}(k_4 x_2) \\
&\times \left. \int dk_5 k_5^2 P(k_5) j_L(k_5 x_1) j_L(k_5 x_2) + (1 \leftrightarrow 2) + (3 \leftrightarrow 4) + \begin{pmatrix} 1 \leftrightarrow 2 \\ 3 \leftrightarrow 4 \end{pmatrix} \right\} \\
&+ (2 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 4). \tag{44}
\end{aligned}$$

Integrations over k_2 and k_4 in the first term impose $x_1 = r_2$ and $x_2 = r_4$ such as

$$\begin{aligned}
\langle \Phi_{\ell_1 m_1}(r_1) \Phi_{\ell_2 m_2}(r_2) \Phi_{\ell_3 m_3}(r_3) \Phi_{\ell_4 m_4}(r_4) \rangle_c^{\text{line}} &= \nu_3^{\text{line}} 2^6 \sum_{L,M} (-1)^M \mathcal{G}_{\ell_1 \ell_2 L}^{m_1 m_2 M} \mathcal{G}_{\ell_3 \ell_4 L}^{m_3 m_4 -M} \int dk_1 k_1^2 P(k_1) j_{\ell_1}(k_1 r_1) j_{\ell_1}(k_1 r_2) \\
&\times \int dk_3 k_3^2 P(k_3) j_{\ell_3}(k_3 r_3) j_{\ell_3}(k_3 r_4) \int dk_5 k_5^2 P(k_5) j_L(k_5 r_2) j_L(k_5 r_4) \\
&+ 11 \text{ other terms.} \tag{45}
\end{aligned}$$

Using the definition of the radial transfer function (20), integrations over two of the radial variables may be performed within the expression of the trispectrum which becomes

$$\begin{aligned}
\langle a_{\ell_1 m_1} a_{\ell_2 m_2} a_{\ell_3 m_3} a_{\ell_4 m_4} \rangle_c^{\text{line}} &= 8^2 \nu_3^{\text{line}} \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \sum_{L,M} (-1)^M \mathcal{G}_{\ell_1 \ell_2 L}^{m_1 m_2 M} \mathcal{G}_{\ell_3 \ell_4 L}^{m_3 m_4 -M} \\
&\times \left\{ \int dr \int dr' R_{\ell_1}(r) \xi_{\ell_2}(r) \zeta_L(r, r') R_{\ell_3}(r') \xi_{\ell_4}(r') + (1 \leftrightarrow 2) + (3 \leftrightarrow 4) + \begin{pmatrix} 1 \leftrightarrow 2 \\ 3 \leftrightarrow 4 \end{pmatrix} \right\} \\
&+ (2 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 4), \tag{46}
\end{aligned}$$

where

$$\zeta_L(r, r') = \int dk k^2 P(k) j_L(kr) j_L(kr'). \tag{47}$$

Contrarily to the previous correlation functions, the expression of the trispectrum involves a third function which only depends on the primordial power spectrum. We will see in Sec. III E that this term has a diagrammatic interpretation. For instance, the second term in Eq. (46) is diagrammatically represented in Fig. 2.

For the *star* contribution we have

$$\begin{aligned}
\langle \Phi_{\ell_1 m_1}(r_1) \Phi_{\ell_2 m_2}(r_2) \Phi_{\ell_3 m_3}(r_3) \Phi_{\ell_4 m_4}(r_4) \rangle_c^{\text{star}} &= \frac{2^7}{\pi} \nu_3^{\text{star}} \int d^2 \hat{\gamma} Y_{\ell_1 m_1}^*(\hat{\gamma}) Y_{\ell_2 m_2}^*(\hat{\gamma}) Y_{\ell_3 m_3}^*(\hat{\gamma}) Y_{\ell_4 m_4}^*(\hat{\gamma}) \int dx x^2 \\
&\times \int dk_1 k_1^2 j_{\ell_1}(k_1 r_1) j_{\ell_1}(k_1 x) \int dk_2 k_2^2 j_{\ell_2}(k_2 r_2) j_{\ell_2}(k_2 x) \\
&\times \int dk_3 k_3^2 j_{\ell_3}(k_3 r_3) j_{\ell_3}(k_3 x) \int dk_4 k_4^2 j_{\ell_4}(k_4 r_4) j_{\ell_4}(k_4 x) [P(k_1) P(k_2) P(k_3) \\
&+ 3 \text{ other terms}]. \tag{48}
\end{aligned}$$

The first term should be computed by integrating first over k_4 , which imposes $x = r_4$. This gives

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{\ell_1 m_1}(r_1) \Phi_{\ell_2 m_2}(r_2) \Phi_{\ell_3 m_3}(r_3) \Phi_{\ell_4 m_4}(r_4) \rangle_c^{\text{star}} &= 2^6 \nu_3^{\text{star}} \int d^2 \hat{\gamma} Y_{\ell_1 m_1}^*(\hat{\gamma}) Y_{\ell_2 m_2}^*(\hat{\gamma}) Y_{\ell_3 m_3}^*(\hat{\gamma}) Y_{\ell_4 m_4}^*(\hat{\gamma}) \\ &\times \int dk_1 k_1^2 P(k_1) j_{\ell_1}(k_1 r_1) j_{\ell_1}(k_1 r_4) \int dk_2 k_2^2 P(k_2) j_{\ell_2}(k_2 r_2) j_{\ell_2}(k_2 r_4) \\ &\times \int dk_3 k_3^2 P(k_3) j_{\ell_3}(k_3 r_3) j_{\ell_3}(k_3 r_4) + 3 \text{ other terms.} \end{aligned} \quad (49)$$

The angular integral may be expressed as a function of Gaunt integrals

$${}^{(4)} \mathcal{G}_{\ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_4}^{m_1 m_2 m_3 m_4} = \int d^2 \hat{\gamma} Y_{\ell_1 m_1}(\hat{\gamma}) Y_{\ell_2 m_2}(\hat{\gamma}) Y_{\ell_3 m_3}(\hat{\gamma}) Y_{\ell_4 m_4}(\hat{\gamma}) = \sum_{L, M} (-1)^{M(3)} \mathcal{G}_{\ell_1 \ell_2 L}^{m_1 m_2 M(3)} \mathcal{G}_{\ell_3 \ell_4 L}^{m_3 m_4 -M}. \quad (50)$$

Using the same expansion as in the previous subsection, we get

$$\langle a_{\ell_1 m_1} a_{\ell_2 m_2} a_{\ell_3 m_3} a_{\ell_4 m_4} \rangle_c^{\text{star}} = \nu_3^{\text{star}} \frac{2^7}{\pi} \sum_{L, M} {}^{(3)} \mathcal{G}_{\ell_1 \ell_2 L}^{m_1 m_2 M(3)} \mathcal{G}_{\ell_3 \ell_4 L}^{m_3 m_4 -M} (-1)^M \int dr [R_{\ell_1}(r) \xi_{\ell_2}(r) \xi_{\ell_3}(r) \xi_{\ell_4}(r) + 3 \text{ other terms}]. \quad (51)$$

One of the terms in Eq. (51) is diagrammatically represented in Fig. 3.

The expressions (46) and (51) are in perfect agreement with [21] in the case of the trispectrum. Indeed, this formalism can easily be extended to higher order terms. Any N -point correlation function may be expressed in terms of the three functions R_ℓ , ξ_ℓ and ζ_L using some basic rules that are detailed in Sec. III E and associated with a diagrammatic description.

Before going further, we stress how to decouple the overall geometrical dependence given in terms of Gaunt integrals from the primordial signal. To do so, we build an estimator for the full-sky trispectrum and study its limit in the small angle approximation.

2. Estimator

Following [18,22], we write the trispectrum in a rotational invariant form:

$$\langle a_{\ell_1 m_1} a_{\ell_2 m_2} a_{\ell_3 m_3} a_{\ell_4 m_4} \rangle_c = \sum_{L, M} (-1)^M \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & L \\ m_1 & m_2 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_3 & \ell_4 & L \\ m_3 & m_4 & -M \end{pmatrix} \mathcal{T}_{\ell_3 \ell_4}^{\ell_1 \ell_2}(L). \quad (52)$$

Similarly to the bispectrum, an estimator for the connected part of the angular averaged trispectrum may be chosen to be

$$T_{\ell_3 \ell_4}^{\ell_1 \ell_2}(L) = (2L + 1) \sum_{\text{all } m} \sum_M (-1)^M \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & L \\ m_1 & m_2 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_3 & \ell_4 & L \\ m_3 & m_4 & -M \end{pmatrix} a_{\ell_1 m_1} a_{\ell_2 m_2} a_{\ell_3 m_3} a_{\ell_4 m_4} - G_{\ell_3 \ell_4}^{\ell_1 \ell_2}(L), \quad (53)$$

where $G_{\ell_3 \ell_4}^{\ell_1 \ell_2}(L)$ is the estimator of the unconnected terms and is defined in such a way that $T_{\ell_3 \ell_4}^{\ell_1 \ell_2}(L)$ vanishes for a Gaussian field (see [22] for a discussion though the observable is not explicitly written in there),

$$\begin{aligned} G_{\ell_3 \ell_4}^{\ell_1 \ell_2}(L) &= (2L + 1) \sum_{\text{all } m} \sum_M (-1)^M \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & L \\ m_1 & m_2 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_3 & \ell_4 & L \\ m_3 & m_4 & -M \end{pmatrix} \\ &\times \left\{ \frac{(-1)^{m_1 + m_3}}{(2\ell_1 + 1)(2\ell_3 + 1 + 2\delta_{\ell_1 \ell_3})} \delta_{m_1 - m_2} \delta_{m_3 - m_4} \delta_{\ell_1 \ell_2} \delta_{\ell_3 \ell_4} \sum_{m', m''} (-1)^{m' + m''} a_{\ell_1 m'} a_{\ell_1 - m'} a_{\ell_3 m''} a_{\ell_3 - m''} \right. \\ &\left. + (2 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 4) \right\}. \end{aligned} \quad (54)$$

In the star configuration, we define the reduced averaged trispectrum ${}^{\text{star}} t_{\ell_3 \ell_4}^{\ell_1 \ell_2}(L)$ as

$$\text{star } \mathcal{T}_{\ell_3 \ell_4}^{\ell_1 \ell_2}(L) = \frac{2L+1}{4\pi} \sqrt{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)(2\ell_3+1)(2\ell_4+1)} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_3 & \ell_4 & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{star } t_{\ell_3 \ell_4}^{\ell_1 \ell_2}(L) \quad (55)$$

so that it takes the L -independent form

$$\text{star } t_{\ell_3 \ell_4}^{\ell_1 \ell_2} = \nu_3^{\text{star}} \frac{2^7}{\pi} \int dr [R_{\ell_1}(r) \xi_{\ell_2}(r) \xi_{\ell_3}(r) \xi_{\ell_4}(r) + 3 \text{ other terms}]. \quad (56)$$

The case of the line configuration is much involved since it implies three kinds of terms with different geometrical configurations encoded by the Gaunt integrals. The line trispectrum takes the form

$$\langle a_{\ell_1 m_1} a_{\ell_2 m_2} a_{\ell_3 m_3} a_{\ell_4 m_4} \rangle_c^{\text{line}} = \sum_{L, M} (-1)^M \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & L \\ m_1 & m_2 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_3 & \ell_4 & L \\ m_3 & m_4 & -M \end{pmatrix} P_{\ell_3 \ell_4}^{\ell_1 \ell_2}(L) + (2 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 4), \quad (57)$$

with

$$P_{\ell_3 \ell_4}^{\ell_1 \ell_2}(L) = \frac{2L+1}{4\pi} \sqrt{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)(2\ell_3+1)(2\ell_4+1)} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_3 & \ell_4 & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{line } t_{\ell_3 \ell_4}^{\ell_1 \ell_2}(L). \quad (58)$$

and the reduced trispectrum $\text{line } t_{\ell_3 \ell_4}^{\ell_1 \ell_2}(L)$ is given by

$$\text{line } t_{\ell_3 \ell_4}^{\ell_1 \ell_2}(L) = 8^2 \nu_3^{\text{line}} \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \left[\int dr \int dr' R_{\ell_1}(r) \xi_{\ell_2}(r) \xi_L(r, r') R_{\ell_3}(r') \xi_{\ell_4}(r') + (1 \leftrightarrow 2) + (3 \leftrightarrow 4) + \begin{pmatrix} 1 \leftrightarrow 2 \\ 3 \leftrightarrow 4 \end{pmatrix} \right]. \quad (59)$$

Using the link between the Wigner-6j and Wigner-3j symbols (see [21–23])

$$\begin{Bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{Bmatrix} = \sum_{\alpha \beta \gamma} \sum_{\delta \epsilon \phi} (-1)^{e+f+\epsilon+\phi} \begin{pmatrix} a & b & e \\ \alpha & \beta & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d & e \\ \gamma & \delta & -\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & f \\ \alpha & \delta & -\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & b & f \\ \gamma & \beta & \phi \end{pmatrix}, \quad (60)$$

the quantity $\text{line } \mathcal{T}_{\ell_3 \ell_4}^{\ell_1 \ell_2}(L)$ can be written as

$$\text{line } \mathcal{T}_{\ell_3 \ell_4}^{\ell_1 \ell_2}(L) = P_{\ell_3 \ell_4}^{\ell_1 \ell_2}(L) + (2L+1) \sum_{L'} (-1)^{\ell_2+\ell_3} \begin{Bmatrix} \ell_1 & \ell_2 & L \\ \ell_4 & \ell_3 & L' \end{Bmatrix} P_{\ell_2 \ell_4}^{\ell_1 \ell_3}(L') + (2L+1) \sum_{L''} (-1)^{L+L''} \begin{Bmatrix} \ell_1 & \ell_2 & L \\ \ell_3 & \ell_4 & L'' \end{Bmatrix} P_{\ell_3 \ell_2}^{\ell_1 \ell_4}(L''). \quad (61)$$

The Wigner-6j symbol

$$\begin{Bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{Bmatrix}$$

represents a quadrilateral with sides (a, b, c, d) whose diagonals form the triangles (a, d, f) , (b, c, f) , (c, d, e) , (a, b, e) , and vanishes if any of the related triangular inequalities are not fulfilled (see [23]).

Note that, contrary to the *star* trispectrum, the *line* trispectrum is generically singular when $L = 0$. This is possible if $\ell_1 = \ell_2$ and $\ell_3 = \ell_4$ (and symmetric cases) and is due to the expression (59) which is then logarithmically divergent for a scale-invariant power spectrum. This apparent divergence however does not appear in observable quantities such as that in Eq. (53). Indeed it can be easily checked that terms involving $P_{\ell_3 \ell_4}^{\ell_1 \ell_2}(L = 0)$ and coming from the two terms of (53) exactly cancel each other. Super-Hubble effects remain then unobservable.

Finally, we find convenient to introduce the normalized trispectra $\tilde{\mathcal{T}}_{\ell_3 \ell_4}^{\ell_1 \ell_2}(L)$ defined as

$$\tilde{\mathcal{T}}_{\ell_3 \ell_4}^{\ell_1 \ell_2} = \frac{\mathcal{T}_{\ell_3 \ell_4}^{\ell_1 \ell_2}(L)}{(C_{\ell_1} + C_{\ell_2}) C_L (C_{\ell_3} + C_{\ell_4})}. \quad (62)$$

3. Small angle approximation

Using the notations of Appendix C, we can define the quantities $a(\vec{\ell})$ for large enough multipoles so that the line and star trispectra take the forms

$$\begin{aligned} & \langle a(\vec{\ell}_1) a(\vec{\ell}_2) a(\vec{\ell}_3) a(\vec{\ell}_4) \rangle_c^{\text{star}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \delta_{\text{Dirac}}(\vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 + \vec{\ell}_4) \text{star } t_{\ell_3 \ell_4}^{\ell_1 \ell_2} \end{aligned} \quad (63)$$

and

$$\begin{aligned} \langle a(\vec{\ell}_1)a(\vec{\ell}_2)a(\vec{\ell}_3)a(\vec{\ell}_4) \rangle_c^{\text{line}} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \delta_{\text{Dirac}}(\vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 + \vec{\ell}_4) \int d^2\vec{L} [\delta_{\text{Dirac}}(\vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 - \vec{L})^{\text{line}} t_{\vec{\ell}_3\vec{\ell}_4}^{\ell_1\ell_2}(L) \\ &+ \delta_{\text{Dirac}}(\vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_3 - \vec{L})^{\text{line}} t_{\vec{\ell}_2\vec{\ell}_4}^{\ell_1\ell_3}(L) + \delta_{\text{Dirac}}(\vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_4 - \vec{L})^{\text{line}} t_{\vec{\ell}_3\vec{\ell}_2}^{\ell_1\ell_4}(L)]. \end{aligned} \quad (64)$$

The Dirac functions ensure that the multipoles $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3$, and $\vec{\ell}_4$ form a quadrilateral. The star trispectrum does not depend on the shape of the quadrangle since it is entirely determined by the side lengths. Yet the line trispectrum not only depends on the side lengths but also on the diagonals $\vec{L}_{12} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2$, $\vec{L}_{13} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_3$, and $\vec{L}_{14} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_4$ of the quadrilateral formed by the four multipoles.

E. Diagrammatic representations

The formal results obtained in the previous sections show that at least some aspects of the potential correlation functions are preserved. That furthermore suggests general rules for the construction of the N -point correlation functions for the spherical harmonics coefficients. Let us start with basic rules for the potential correlation functions. Using a usual diagrammatic representation, assume that the following rules hold for any potential N -point function $\langle \Phi_{\vec{k}_1} \dots \Phi_{\vec{k}_N} \rangle_c$ for tree order or loop graphs:

- (i) each vertex connecting n_i lines contributes to a factor ν_{n_i-1} and a Dirac distribution of the sum over all the incoming momenta,
- (ii) each external line carrying the momentum k_i represents $P(k_i)$. For p_i external lines connected to a vertex, the contribution is a sum over configurations of the product of $p_i - 1$ potential power spectra $P(k_i)$,
- (iii) each link between two vertices i and j should be formed by an internal line. Each internal line stands for $P(q_i)$ and imposes a momentum conservation through $\delta_{\text{Dirac}}(q_i + q_j)$, where q_i (respectively q_j) is the internal momentum out of the vertex i (respectively j).

To compute the induced N -point temperature correlation functions, we use the basic relation

$$\begin{aligned} \langle a_{\ell_1 m_1} \dots a_{\ell_N m_N} \rangle &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3N/2} (-i)^{\ell_1 + \dots + \ell_N} \int d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N R_{\ell_1}(r_1) \dots R_{\ell_N}(r_N) \\ &\times \int d^3 k_1 \dots d^3 k_N \langle \Phi_{\vec{k}_1} \dots \Phi_{\vec{k}_N} \rangle j_{\ell_1}(k_1 r_1) \dots j_{\ell_N}(k_N r_N) Y_{\ell_1 m_1}^*(\hat{k}_1) \dots Y_{\ell_N m_N}^*(\hat{k}_N). \end{aligned} \quad (65)$$

In the expression of the potential N -point function, the momentum conservation at the vertex i with $n_i - p_i$ external lines and p_i internal lines contributes as

$$\begin{aligned} \sum_{L_1^i, \dots, L_{n_i-p_i}^i, M_1^i, \dots, M_{n_i-p_i}^i} i^{L_1^i + \dots + L_{n_i-p_i}^i} \frac{(4\pi)^{n_i}}{(2\pi)^3} \int d^3 x_i j_{L_1^i}(k_1 x_i) \dots j_{L_{n_i-p_i}^i}(k_{n_i-p_i} x_i) j_{L_{n_i-p_i+1}^i}(q_1 x_i) \dots j_{L_{n_i}^i}(q_{p_i} x_i) \\ \times Y_{L_1^i M_1^i}(\hat{k}_1) \dots Y_{L_{n_i-p_i}^i M_{n_i-p_i}^i}(\hat{k}_{n_i-p_i}) Y_{L_{n_i-p_i+1}^i M_{n_i-p_i+1}^i}(\hat{q}_1) \dots Y_{L_{n_i}^i M_{n_i}^i}(\hat{q}_{p_i}) Y_{L_1^i M_1^i}^*(\hat{\gamma}_i) \dots Y_{L_{n_i}^i M_{n_i}^i}^*(\hat{\gamma}_i), \end{aligned} \quad (66)$$

where k (q) stands for an external (internal) momentum.

Integration over the angles $\hat{\gamma}_i$ will contribute with the overall geometrical factor ${}^{(n_i)}\mathcal{G}_{L_1^i \dots L_{n_i}^i}^{M_1^i M_{n_i}^i}$. Integration over the angles \hat{k}_i in Eq. (65) will impose $L_j^i = \ell_j$ for all external momenta. Integrations over all the external momenta that do not appear as $P(k_i)$ in the expansion Eq. (65) give $\pi/2 \delta_{\text{Dirac}}(r_j - x_k)$ factors [see Eq. (23)] which are to be integrated over x_k . Only the term

$$\int d\mathbf{r}_j R_{\ell_j}(r_j) \quad (67)$$

remains. Those terms are induced by a vertex in the potential correlation function and may be associated with verti-

ces at the positions r_j that carry the momenta (ℓ_j, m_j) . For all the other external momenta, integrations lead to

$$\int d\mathbf{r}_i \int dk_i k_i^2 P(k_i) R_{\ell_i}(r_i) j_{\ell_i}(k_i r_i) j_{\ell_i}(k_i r_k) \propto \xi_{\ell_i}(r_k). \quad (68)$$

Those terms are easily understood as external lines attached to a vertex at the point r_k as they correspond to external lines in the potential correlation function. Each external line carries the momenta (ℓ_i, m_i) . One should note that n_i lines attached to a vertex in the potential correlation function correspond to $n_i - 1$ lines in the temperature correlation function plus a vertex which carries an angular momentum.

Integration over any internal momentum q_i will give the following through $P(q_i)\delta_{\text{Dirac}}(q_i + q_j)$ and Eq. (66):

$$\sum_{L,M} \zeta_L(x_i, x_j) Y_{LM}^*(\hat{\gamma}_i) Y_{LM}(\hat{\gamma}_j), \quad (69)$$

with $L = L_k^i = L_{k'}^j$ and $M = M_k^i = -M_{k'}^j$. These terms are involved as soon as an internal line connects two vertices in the potential correlation function. In a diagrammatic representation of the temperature correlation function, they may be represented by a double line (one carrying the azimuthal momentum $+M$, the other carrying $-M$) connecting the vertices located at x_i and x_j .

Finally, if N is the number of external points and r is the number of vertex connecting n_1, \dots, n_r lines, respectively, in the potential correlation function, the numerical prefactor A_α for the temperature correlation function reads

$$A_\alpha = \nu_{n_1-1} \dots \nu_{n_r-1} 2^{r+5N/2-4} \pi^{N/2-r-2}. \quad (70)$$

To summarize, the general temperature N -point function may be diagrammatically represented with the following rules deduced from the basic diagrammatic rules

- (i) each of the N harmonic coefficients a_{ℓ_i, m_i} is represented either by an external line or by a vertex with a charge (ℓ_i, m_i) ,
- (ii) vertices are connected together by internal lines with arbitrary indices attached to them, being (L_i, M_i) at one end and $(L_i, -M_i)$ at the other one,
- (iii) one should then consider all the possible diagram configurations,

and the following correspondences allow the computation of any diagram

- (i) each external line with indices (ℓ_i, m_i) and attached to a vertex point at r_j contributes as $\xi_{\ell_i}(r_i)$,
- (ii) each internal line with indices (L_i, M_i) and $(L_i, -M_i)$ connecting two vertices at the points r_i and r_j stands for $\zeta_{L_i}(r_i, r_j)$,
- (iii) the weight of a vertex with indices (ℓ_i, m_i) at the point r_i to which n_i lines of respective indices $(\ell_1^i, m_1^i), \dots, (\ell_{n_i}^i, m_{n_i}^i)$ are attached is $\nu_{n_i} R_{\ell_i}(r_i)^{(n_i+1)} \mathcal{G}_{\ell_1^i \dots \ell_{n_i}^i \ell_i}^{m_1^i \dots m_{n_i}^i m_i}$,
- (iv) if N is the number of external points and r is the number of vertices the numerical prefactor reads $(\frac{2}{\pi})^{N/2} [(4\pi)^{N+2r-2} / (2\pi)^{3r}] = 2^{r+5N/2-4} \pi^{N/2-r-2}$,
- (v) the final value of the diagram is obtained after integration over the radial variables and summation over the internal indices L_i and M_i .

Obviously, if those rules are applied to the diagrams of Figs. 1–3, one recovers the expressions (33), (46), and (51).

Those rules appear to be useful in the computation of any N -point correlation function in the temperature fluctuations. They provide compact and simple expressions associated with diagrammatic interpretations.

Having established the forms of the temperature correlation functions, we pay attention in the following section to the behaviors of the bispectrum and trispectrum as functions of the multipoles and the configurations.

IV. SHAPES OF THE CORRELATION FUNCTIONS

The features of high order correlation functions in the temperature fluctuations are difficult to infer. However, at large-angular scales, the temperature and potential fluctuations are related in a very simple way because low multipoles correspond to very few Fourier modes. Hence, in the Sachs-Wolfe limit (valid up to $\ell \sim 20$) the functional forms of the temperature and potential correlation functions should be the same. On the contrary, temperature fluctuations at small angular scales are induced by numerous Fourier modes of the potential: the initial distribution of potential fluctuations is altered by projection effects. This renders the functional form of the temperature correlation functions much more intricate. Before we explore general configurations, we first establish the explicit Sachs-Wolfe limits of the bispectrum and trispectrum and examine specific configurations.

A. The Sachs-Wolfe limits

The Sachs-Wolfe limits of the functions R_ℓ, ξ_ℓ read

$$R_\ell^{\text{SW}}(r) = -\frac{\pi}{6} \delta_{\text{Dirac}}(r - r_*), \quad (71)$$

$$\xi_\ell^{\text{SW}}(r_*) = -\frac{3\pi}{2} C_\ell^{\text{SW}}, \quad (72)$$

whereas the vertex propagator contributes as

$$\zeta_L^{\text{SW}}(r_*, r_*) = \int dk k^2 P(k) j_L^2(kr_*) = \frac{9\pi}{2} C_L^{\text{SW}}. \quad (73)$$

From Eqs. (71)–(73), the Sachs-Wolfe limit of the reduced bispectrum takes the form

$$b_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{\text{SW}} = -24\nu_2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} (C_{\ell_1}^{\text{SW}} C_{\ell_2}^{\text{SW}} + \text{perm.}), \quad (74)$$

with ℓ_1, ℓ_2 , and ℓ_3 satisfying the triangular inequalities. As expected, the functional form of the temperature bispectrum is the same as the potential bispectrum.

As the bispectrum scales as $\sim C_\ell^2$ at large-angular scales, the normalized bispectrum (39) reduces to a constant in the Sachs-Wolfe limit,

$$\tilde{b}_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{\text{SW}} = -24\nu_2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2}. \quad (75)$$

Similar calculations can be done for the trispectra. In the line configuration, the reduced trispectrum takes the Sachs-Wolfe limit

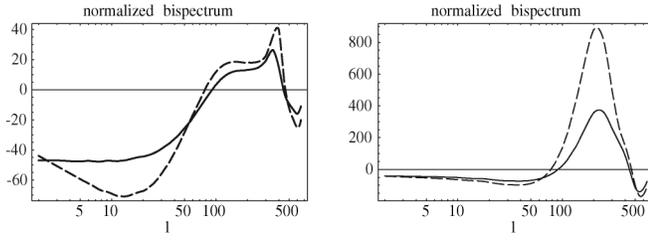


FIG. 4. Left panel: normalized bispectrum for an equilateral configuration $\tilde{b}_{\ell\ell\ell}$ in a Λ CDM model (dashed line) and a sCDM model (solid line) for $\nu_2 = 1$. The integrated Sachs-Wolfe effect prevents the formation of a plateau at low ℓ in a Λ CDM model. Both curves exhibit acoustic oscillations of roughly the same amplitude although acoustic pics seem to be larger in a Λ CDM model. Right panel: $\ell^2(\ell + 1)^2 b_{\ell\ell\ell}$ in a Λ CDM model (dashed line) and a sCDM model (solid line) for $\nu_2 = 1$. The amplitude of the bispectrum is greater in a Λ CDM model. Comparison between the two plots shows that the second peak ($\ell \sim 300$) in $\tilde{b}_{\ell\ell\ell}$ is only due to the minimum of the C_ℓ 's.

$$\text{line } \tilde{t}_{\ell_3 \ell_4}^{\ell_1 \ell_2}(L)^{\text{SW}} = 9\nu_3^{\text{line}}(2\pi)^3 C_L^{\text{SW}}(C_{\ell_1}^{\text{SW}} + C_{\ell_2}^{\text{SW}})(C_{\ell_3}^{\text{SW}} + C_{\ell_4}^{\text{SW}}), \quad (76)$$

while the L -independent star contribution gives

$$\text{star } \tilde{t}_{\ell_3 \ell_4}^{\ell_1 \ell_2 \text{SW}} = 9\nu_3^{\text{star}}(2\pi)^3 (C_{\ell_1}^{\text{SW}} C_{\ell_2}^{\text{SW}} C_{\ell_3}^{\text{SW}} + 3 \text{ other terms}). \quad (77)$$

From Eqs. (76) and (77), we recover the functional form of the potential trispectra when ℓ_1, ℓ_2 , and L on one hand and ℓ_3, ℓ_4 , and L on the other hand satisfy the triangle inequalities. One can note that the scaling of the temperature trispectrum at large-angular scales depends on the configuration: in the line configuration, the trispectrum scales as $\sim C_L^2$ for a given L , whereas it scales as $\sim C_L^3$ in the star configuration. The shape of the temperature trispectrum then depends on the type of mode couplings that are responsible for the potential trispectrum. The normalized trispectra defined in Eq. (62) reduce in the Sachs-Wolfe limit to

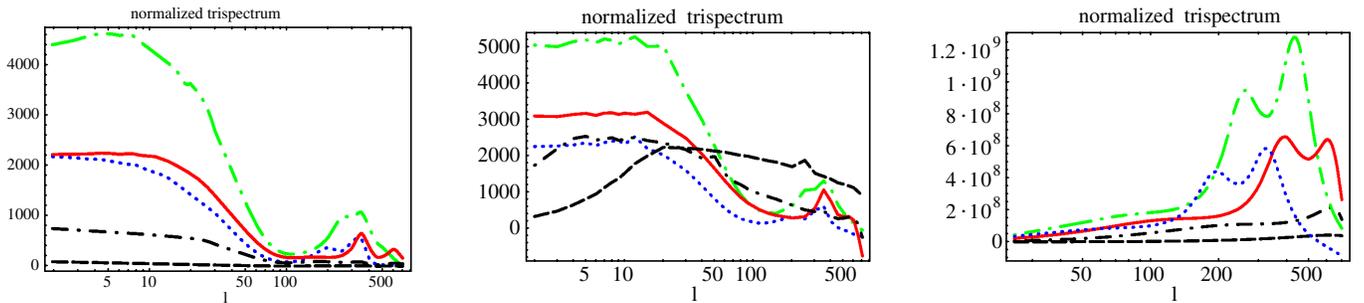


FIG. 5 (color online). Plot of $\tilde{t}_{\ell\ell\ell}^{\ell\ell}(L)$ as a function of ℓ for $L = \ell/10$ (dashed line), $L = \ell/2$ (dash-dotted line), $L = \ell$ (solid red line), $L = 3\ell/2$ (long-dash-dotted green line), and $L = 2\ell$ (dotted blue line) for $\nu_3^{\text{line}} = \nu_3^{\text{star}} = 1$. The left panel represents the *star* trispectrum, the center panel shows the *line* trispectrum, and the trispectrum from lensing effects is plotted in the right panel.

$$\text{line } \tilde{t}_{\ell_3 \ell_4}^{\ell_1 \ell_2}(L) = 9\nu_3^{\text{line}}(2\pi)^3 \left[1 + \frac{(C_{\ell_1} + C_{\ell_3})C_{L_{13}}(C_{\ell_2} + C_{\ell_4})}{(C_{\ell_1} + C_{\ell_2})C_L(C_{\ell_3} + C_{\ell_4})} + \frac{(C_{\ell_1} + C_{\ell_4})C_{L_{14}}(C_{\ell_3} + C_{\ell_2})}{(C_{\ell_1} + C_{\ell_2})C_L(C_{\ell_3} + C_{\ell_4})} \right], \quad (78)$$

$$\text{star } \tilde{t}_{\ell_3 \ell_4}^{\ell_1 \ell_2} = 9\nu_3^{\text{star}}(2\pi)^3 \frac{C_{\ell_1} C_{\ell_2} C_{\ell_3} + 3 \text{ other terms}}{(C_{\ell_1} + C_{\ell_2})C_L(C_{\ell_3} + C_{\ell_4})}. \quad (79)$$

B. General case

In the previous paragraph it has been shown that the structure of the high order correlation functions for the temperature field reproduces those of the potential in the Sachs-Wolfe limit. In general however this is not the case and the temperature correlation functions exhibit acoustic oscillations that depend on the geometric configuration [24].

For example, the left panel of Fig. 4 shows the normalized bispectrum for an equilateral configuration in a Λ -cold dark matter model (Λ CDM) and a standard cold dark matter model (sCDM). A Sachs-Wolfe plateau is expected in a sCDM model while, in a Λ CDM model, the integrated Sachs-Wolfe effect strongly contributes to the bispectrum at low ℓ in such a way that the plateau is not visible any more. For greater ℓ , say $\ell > 20$, we can see the imprints of acoustic oscillations on the behaviors of the bispectra which vanish for some values of ℓ . The amplitudes of oscillations of the normalized bispectra are comparable. As for the C_ℓ 's, the period of acoustic oscillations seems to be larger in a Λ CDM model. The right panel of Fig. 4 shows the bispectrum with a different normalization, i.e. $\ell^2(\ell + 1)^2 b_{\ell\ell\ell}$. We can note the presence of a plateau at the same level for both bispectra in the low ℓ limit although the amplitude of oscillations is greater in a Λ CDM model. Comparing the two normalizations, we can interpret the secondary peak of the normalized bispectrum $\tilde{b}_{\ell\ell\ell}$ at $\ell \sim 300$ as due to the minimum of the C_ℓ 's.

We have similarly computed $\text{line } \tilde{t}$ and $\text{star } \tilde{t}$ for different configurations. Some of those results are displayed in

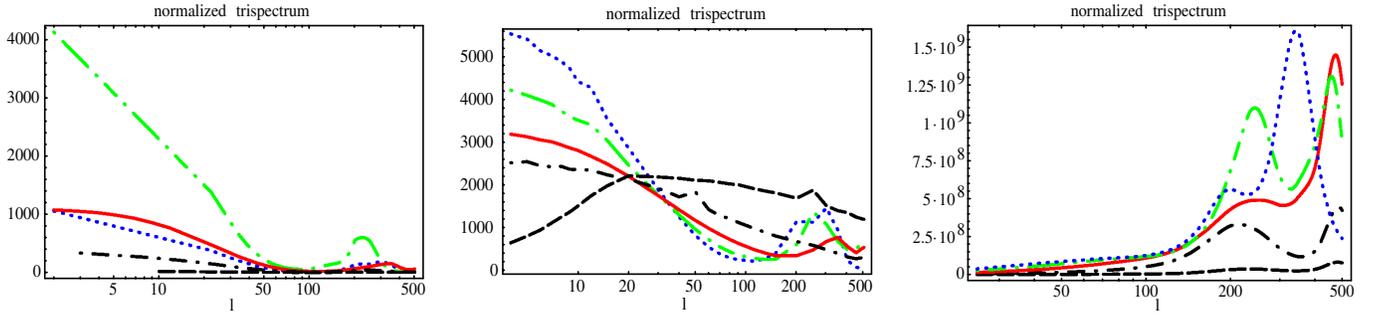


FIG. 6 (color online). Plot of $\tilde{t}_{\ell+200\ell+200}^{\ell\ell}(L)$ as a function of ℓ for $L = \ell/10$ (dashed line), $L = \ell/2$ (dash-dotted line), $L = \ell$ (solid red line), $L = 3\ell/2$ (long-dash-dotted green line), and $L = 2\ell$ (dotted blue line) for $\nu_3^{\text{line}} = \nu_3^{\text{star}} = 1$. The left panel represents the *star* trispectrum, the center panel shows the *line* trispectrum, and the trispectrum from lensing effects is plotted in the right panel.

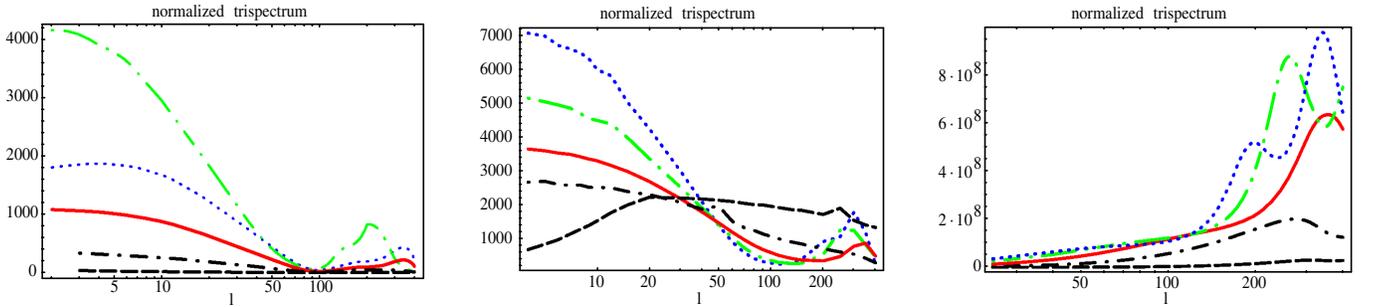


FIG. 7 (color online). Plot of $\tilde{t}_{\ell+300\ell+300}^{\ell\ell}(L)$ as a function of ℓ for $L = \ell/10$ (dashed line), $L = \ell/2$ (dash-dotted line), $L = \ell$ (solid red line), $L = 3\ell/2$ (long-dash-dotted green line), and $L = 2\ell$ (dotted blue line) for $\nu_3^{\text{line}} = \nu_3^{\text{star}} = 1$. The left panel represents the *star* trispectrum, the center panel shows the *line* trispectrum, and the trispectrum from lensing effects is plotted in the right panel.

Figs. 5–7 for the *star* (left panels) and *line* like mode couplings (center panels).

Figure 5 corresponds to the lozenge configuration $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = \ell_4 = \ell$ whereas Figs. 6 and 7 respectively correspond to the configurations $\ell_1 = \ell_2 = \ell, \ell_3 = \ell_4 = \ell + 200$ and $\ell_1 = \ell_2 = \ell, \ell_3 = \ell_4 = \ell + 300$. The different curves correspond to different lozenge shapes: $L = \ell/10$, $L = \ell/2$, $L = \ell$, $L = 3\ell/2$, and $L = 2\ell$. We can see very similar behaviors of the trispectra: they all exhibit oscillations with an acoustic peak located at $\ell \sim 300$. The *line* and *star* signals are larger in the low ℓ range and have roughly the same order of magnitude when $\nu_3^{\text{line}} \sim \nu_3^{\text{star}}$. In the chosen configurations, the trispectra both take positive values at least for $\ell < 500$.

However, the *line* trispectrum is much larger than the *star* one for large ℓ as well as for low- L values. A significant and specific dependence on the shape of the quadrilateral is clearly visible in these plots and may allow one to distinguish between the two types of mode couplings. In Figs. 6 and 7, we can see the L -dependence of the line trispectrum: for $\ell < 30$, the signal is an increasing function of L while it decreases with L in the range $30 < \ell < 150$. This feature is quite different from the star trispectrum whose amplitude is approximately a monotonic function of L .

The chosen configurations exhibit special points: for $\ell \sim 30$ for the linelike mode coupling and $\ell \sim 80$ for the

starlike one, the trispectra take values that do not depend on L . Note that for these points, the value of the star trispectrum is very low contrary to the line trispectrum. However, we should stress that we only plotted some specific configurations whose features may be quite different from other geometrical configurations. Exploring all the configurations remains a daunting task although we expect some geometry to be much more sensitive to primordial non-Gaussian signals [18].

C. Weak lensing effects

At the level of the temperature trispectra subtle differences can be observed depending on the nature of the potential high order correlation functions. This is then interesting to compare those results with the temperature trispectra induced by weak lensing effects. As mentioned in the introduction, this effect is the dominant low redshift second order coupling. For parity reasons, one expects indeed the trispectrum—rather than the bispectrum—to acquire a non-negligible value from lensing effects [10–12,22]. Lensing effects amount to relating the observed temperature contrast, $\hat{\delta T}/T$, to the primordial one, $\delta T/T$, through

$$\frac{\hat{\delta T}}{T}(\hat{\gamma}) = \frac{\delta T}{T}(\hat{\gamma} + \delta\hat{\gamma}), \quad (80)$$

where $\delta\vec{\gamma}$ is the lens induced displacement field. Usually, the displacement field is smaller than the angular scale under interest so that we may Taylor expand the temperature contrast as

$$\frac{\delta T}{T}(\hat{\gamma} + \delta\vec{\gamma}) = \frac{\delta T}{T}(\hat{\gamma}) + \delta\vec{\gamma} \cdot \nabla \frac{\delta T}{T}(\hat{\gamma}) + o(\delta\vec{\gamma}^2). \quad (81)$$

The first nonvanishing contribution to the connected trispectrum is given by

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta\hat{T}}{T}(\hat{\gamma}_1) \frac{\delta\hat{T}}{T}(\hat{\gamma}_2) \frac{\delta\hat{T}}{T}(\hat{\gamma}_3) \frac{\delta\hat{T}}{T}(\hat{\gamma}_4) \right\rangle_c &= \int \frac{d^2\ell_1}{2\pi} \frac{d^2\ell_2}{2\pi} \frac{d^2\ell_3}{2\pi} \frac{d^2\ell_4}{2\pi} \delta_{\text{Dirac}}(\vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 + \vec{\ell}_4) e^{i\vec{\ell}_1 \cdot \hat{\gamma}_1 + i\vec{\ell}_2 \cdot \hat{\gamma}_2 + i\vec{\ell}_3 \cdot \hat{\gamma}_3 + i\vec{\ell}_4 \cdot \hat{\gamma}_4} \\ &\times \int d^2L (C_{\ell_1} \vec{\ell}_1 + C_{\ell_2} \vec{\ell}_2) \cdot \frac{\vec{L}}{L^2} \times C_L^{\phi\phi} \times (C_{\ell_3} \vec{\ell}_3 + C_{\ell_4} \vec{\ell}_4) \cdot \frac{\vec{L}}{L^2} \delta_{\text{Dirac}}(\vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 - \vec{L}) \\ &+ (2 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 4), \end{aligned} \quad (82)$$

where

$$C_L^{\phi\phi} = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\chi_{\text{CMB}}} d\chi \frac{w^2(\chi)}{\mathcal{D}_0^2(\chi)} P_\delta\left(\frac{L}{\mathcal{D}_0(\chi)}\right). \quad (84)$$

Here χ and $\mathcal{D}_0(\chi)$ are, respectively, the comoving distance and the comoving angular diameter distance from the observer while P_δ is the matter power spectrum. The function w is a function of distances and strongly depends on the cosmological parameters (see e.g. [10–12]). We define the reduced trispectrum as

$$\begin{aligned} \text{lens}_{\ell_3\ell_4}^{\ell_1\ell_2}(L) &= C_L^{\phi\phi} \left[(C_{\ell_1} \vec{\ell}_1 + C_{\ell_2} \vec{\ell}_2) \cdot \frac{\vec{L}}{L^2} \times (C_{\ell_3} \vec{\ell}_3 + C_{\ell_4} \vec{\ell}_4) \cdot \frac{\vec{L}}{L^2} \right] + C_{L_{13}}^{\phi\phi} \left[(C_{\ell_1} \vec{\ell}_1 + C_{\ell_3} \vec{\ell}_3) \cdot \frac{\vec{L}_{13}}{L_{13}^2} \times (C_{\ell_2} \vec{\ell}_2 + C_{\ell_4} \vec{\ell}_4) \cdot \frac{\vec{L}_{13}}{L_{13}^2} \right] \\ &+ C_{L_{14}}^{\phi\phi} \left[(C_{\ell_1} \vec{\ell}_1 + C_{\ell_4} \vec{\ell}_4) \cdot \frac{\vec{L}_{14}}{L_{14}^2} \times (C_{\ell_3} \vec{\ell}_3 + C_{\ell_2} \vec{\ell}_2) \cdot \frac{\vec{L}_{14}}{L_{14}^2} \right], \end{aligned} \quad (85)$$

and the normalized trispectrum reads

$$\text{lens}_{\ell_3\ell_4}^{\ell_1\ell_2}(L) = \text{lens}_{\ell_3\ell_4}^{\ell_1\ell_2}(L) \frac{1}{(C_{\ell_1} + C_{\ell_2})C_L(C_{\ell_3} + C_{\ell_4})}. \quad (86)$$

The normalized trispectrum due to lensing effects is plotted in the right panels of Figs. 5–7 for different configurations in a Λ CDM model using the outputs of the CMBFAST code [25]. As expected, the contribution of weak lensing occurs at small scales and globally increases with ℓ . The signal is enhanced by large values of L whose value triggers the positions of the acoustic peaks.

Weak lensing effects have a specific signature on the temperature trispectrum which is quite different from the effects of primordial origin. The value of the trispectrum induced by weak lensing is much larger than the expected ones from primordial non-Gaussianities for $\nu_3^{\text{line}} \sim \nu_3^{\text{star}} \sim 1$. In particular, comparable signals in the range $\ell < 50$ would require $\nu_3 \sim 10^4$ and even $\nu_3 \sim 10^6$ for $\ell > 200$.

The following sections aim at describing the general behaviors of correlation functions induced by primordial non-Gaussian statistics.

$$\begin{aligned} &\left\langle \frac{\delta\hat{T}}{T}(\hat{\gamma}_1) \frac{\delta\hat{T}}{T}(\hat{\gamma}_2) \frac{\delta\hat{T}}{T}(\hat{\gamma}_3) \frac{\delta\hat{T}}{T}(\hat{\gamma}_4) \right\rangle_c \\ &= \left\langle \nabla_i \frac{\delta T}{T}(\hat{\gamma}_1) \frac{\delta T}{T}(\hat{\gamma}_3) \right\rangle \left\langle \nabla_j \frac{\delta T}{T}(\hat{\gamma}_2) \frac{\delta T}{T}(\hat{\gamma}_4) \right\rangle \\ &\times \langle \delta\gamma_{1i} \delta\gamma_{2j} \rangle + 11 \text{ other terms}, \end{aligned} \quad (82)$$

where the Einstein index summation was used. In the small angle approximation, the four-point function reads

V. PHENOMENOLOGICAL APPROACHES FOR THE RECONSTRUCTION OF THE CORRELATION FUNCTIONS

As we saw in the previous sections, the correlation functions of the coefficients $a_{\ell m}$ are given in terms of three functions: the radial transfer function $R_\ell(r)$, the function $\xi_\ell(r)$, and the vertex propagator $\zeta_\ell(r, r')$. Assuming a given power spectrum the propagator $\zeta_\ell(r, r')$ is a known function, peaked at $r = r'$, whereas $R_\ell(r)$ and $\xi_\ell(r)$ encode the details of the microphysics and have to be computed numerically. The goal of this section is to describe the behaviors of these functions in a simple way. As shown in Fig. 8, the variations of $\xi_\ell(r)$ with r are smoothed compared to those of $R_{\ell'}(r)$ which peaks at the last scattering surface $r = r_*$. Given the shape of the radial transfer function, it is then natural to expand it as a combination of a Dirac distribution, that would correspond to the Sachs-Wolfe limit, and its first derivatives or some equivalently smoothed functions. This expansion seems valid as soon as one neglects the late integrated Sachs-Wolfe effect, which is not localized at the last scattering surface. This expansion reduces to a description of the temperature anisotropy

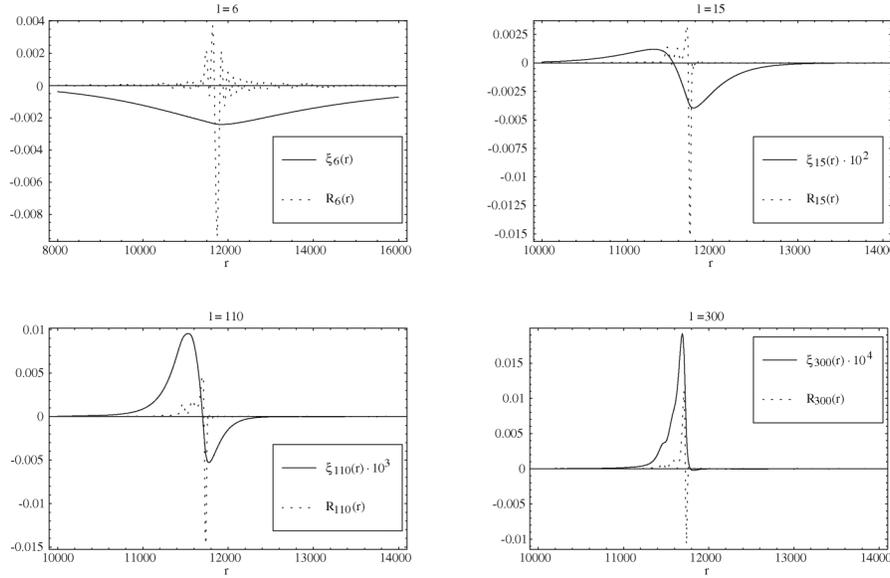


FIG. 8. Comparison between the variations of the radial transfer function $R_\ell(r)$ (dashed line) and $\xi_\ell(r)$ (solid line) as functions of r for different ℓ in a SCDM model. From the upper left panel to the lower right panel: $\ell = 6$, $\ell = 50$, $\ell = 110$, $\ell = 300$.

pies today through the knowledge of the first radial derivatives of the gravitational potential on the last scattering surface: $\phi_{\ell m}(r_*)$, $\phi'_{\ell m}(r_*)$, etc. This approach should be linked to a multipole expansion in the strong coupling limit. The goal of the next subsection is to test the validity of such an expansion.

A. Which expansions for the transfer functions?

Neglecting the integrated Sachs-Wolfe effect and assuming a nearly instantaneous recombination, the description of the baryon-photon plasma dynamics is encoded by the first multipoles $\theta_\ell(k, \eta_*)$ at the last scattering surface. The transfer function can be approximately written with the following expansion:

$$T_\ell(k) = \theta_0(k, \eta_*)j_\ell(kr_*) + \theta_1(k, \eta_*)j'_\ell(kr_*) + \dots, \quad (87)$$

where, to keep insights of the microphysics in mind, the monopole and the dipole are very roughly given by expressions such that (see [26] for a more accurate phenomenological description of the acoustic peaks)

$$\theta_0(k, \eta_*) \simeq -\frac{1}{3} \cos(kc_s \eta_*) e^{-k^2/k_D^2} \quad (88)$$

$$\theta_1(k, \eta_*) \simeq -\frac{1}{3\sqrt{3}} \sin(kc_s \eta_*) e^{-k^2/k_D^2}, \quad (89)$$

where the damping effect is schematically taken into account (and k_D is the damping scale), η_* is the conformal time at which recombination occurs, c_s is the sound of speed of the plasma at the last scattering surface.

In the following we propose to replace the expansion (87), where the coefficients are k dependent, by effective l -dependent coefficients, e.g.,

$$T_\ell(k) = A_0(\ell)j_\ell(kr_*) + A_1(\ell)j'_\ell(kr_*) + A_2(\ell)j''_\ell(kr_*) + \dots \quad (90)$$

This is justified from Eq. (87) by the fact that the Bessel functions, and their derivatives, peak at $k \sim \ell/r_*$. Roughly speaking, we then expect that $A_0(\ell) \approx \theta_0(\ell/r_*, \eta_*)$, $A_1(\ell) \approx \theta_1(\ell/r_*, \eta_*)$. This will explain the rough behavior of these coefficients. In the following though we will not take this identification into account any more.

The idea is then that, at least for large enough angular scales, such an expansion could provide a reasonable description of the observed anisotropies when only a few terms are taken into account. Such a convergence is ensured for Eq. (87) because the multipole decomposition at the last scattering surface is naturally ordered by a small parameter $k/\dot{\tau}$, where $\dot{\tau}$ is the recombination rate. Incidentally, one can remark that the first term of Eq. (90) would correspond to the Sachs-Wolfe effect in the limit where A_0 is independent on ℓ . In the following though, we treat these coefficients on a pure phenomenological footing. We will only assume that the decomposition (90) is sensible and provides us with a good description of the transfer function.

Such an expansion implies the following form for the radial transfer function:

$$R_\ell(r) = A_0(\ell)g_0(r, r_*; \ell) + A_1(\ell)g_1(r, r_*; \ell) + A_2(\ell)g_2(r, r_*; \ell) + \dots, \quad (91)$$

with

$$g_n(r, r_*; \ell) = \int dk k^2 r^2 j_\ell(kr) j_\ell^{(n)}(kr_*). \quad (92)$$

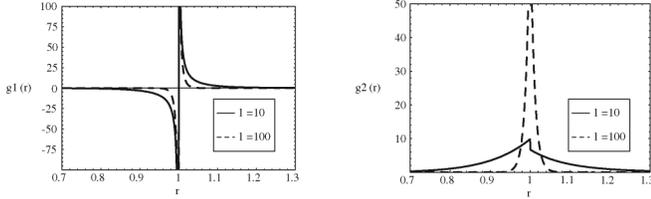


FIG. 9. Shape of g_1 (left panel) and g_2 (right panel) as a function of r/r_* for $\ell = 10$ (solid line) and $\ell = 100$ (dashed line).

The g_1 function is given in terms of the hypergeometric function ${}_2F_1$ and corresponds to a ℓ -dependent smoothing of $\delta'_{\text{Dirac}}(r - r_*)$. The expressions of g_1 and g_2 are given in Appendix A and their shapes are shown for different ℓ in Fig. 9. Note that $g_0(r, r_*; \ell) = \delta_{\text{Dirac}}(r - r_*)\pi/2r_*^2$.

To describe the effect of the expansion (90), it is necessary to know the coefficients $A_i(\ell)$. We then adopt a phenomenological approach in which these coefficients are determined from a comparison with the CMBFAST code results [25]. All the following results are obtained in a standard cold dark matter (sCDM) model, where the integrated effect may be neglected.

In principle, one should be capable of extracting the coefficients A_0, A_1, A_2, \dots by fitting the numerical radial transfer function with a combination of the functions g_0, g_1, g_2, \dots . However, this approach raises some issues. In particular, the determination of the coefficients A_i is ex-

remely sensitive to the choice of r_* because the functions g_i peak at the last scattering surface. On the other hand, the expansion (90) induces the following expansion of the smoothed functions $\xi_\ell(r)$:

$$\xi_\ell(r) = A_0(\ell)f_0\left(\frac{r}{r_*}; \ell\right) + A_1(\ell)f_1\left(\frac{r}{r_*}; \ell\right) + A_2(\ell)f_2\left(\frac{r}{r_*}; \ell\right) + \dots, \quad (93)$$

where, for a scale-invariant power spectrum,

$$f_n\left(\frac{r}{r_*}; \ell\right) = \int \frac{dk}{k} j_\ell(kr) j_\ell^{(n)}(kr_*). \quad (94)$$

The functions f_i are computed for $i = 0, 1, 2$ in Appendix B and plotted in Fig. 10. Fitting the functions $\xi_\ell(r)$ with a combination of the functions f_0, f_1 , and f_2 gives an accurate determination of the coefficients A_0, A_1 , and A_2 . The results are shown in Fig. 11. Comparisons with the expected coefficients A_0 and A_1 in Eqs. (88) and (89) for typical values of c_s and k_D are shown in Fig. 12. We can see that the oscillations of the coefficients originate from the oscillations of the first multipoles on the last scattering surface. As expected from the Sachs-Wolfe limit, $A_0(\ell)$ reduces to the constant value $\sim -1/3$ at low ℓ and $A_1(\ell), A_2(\ell) \rightarrow 0$ when ℓ goes to zero. Note that neglecting the early integrated Sachs-Wolfe effect in Eq. (87) for a sCDM model does not modify much the expected coefficient A_0 at

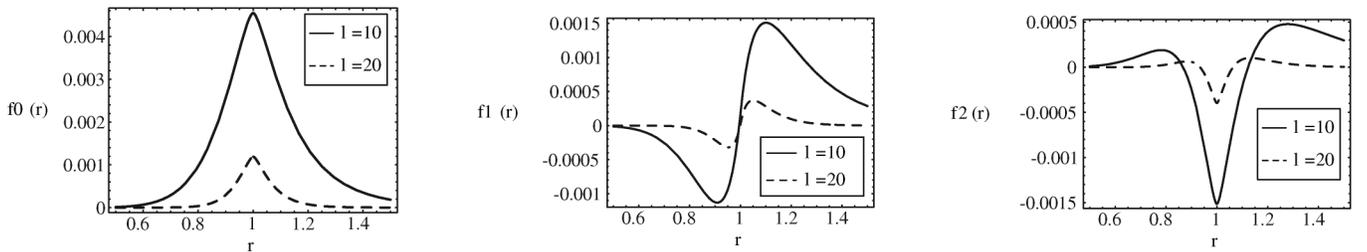


FIG. 10. Shape of f_0 (left panel), f_1 (center panel), and f_2 (right panel) as a function of r/r_* for $\ell = 10$ (solid line) and $\ell = 20$ (dashed line) (sCDM model).

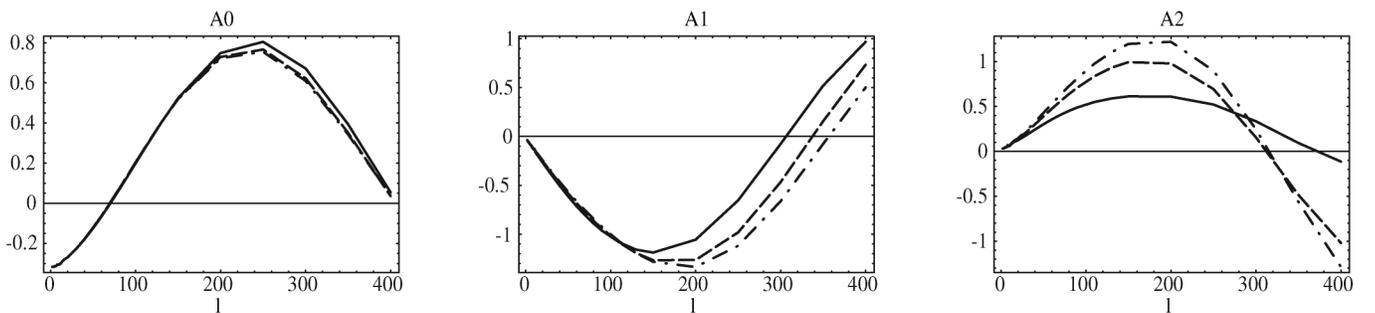


FIG. 11. Shapes of the coefficients A_0 (left panel), A_1 (center panel), and A_2 (right panel) as functions of ℓ in a sCDM model. These coefficients have been obtained from a fit of the standard CDM outputs of the CMBFAST code with the ansatz Eq. (93) for different choice of r_* . Solid line: $r_* = 11670 \text{ h}^{-1} \text{ Mpc}$. Dashed line: $r_* = 11690 \text{ h}^{-1} \text{ Mpc}$. Dotted dashed line: $r_* = 11700 \text{ h}^{-1} \text{ Mpc}$.

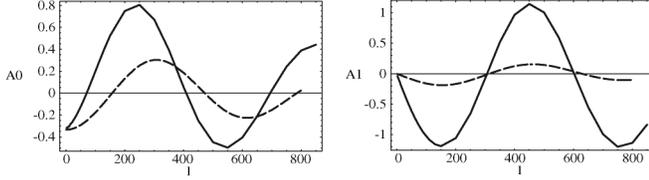


FIG. 12. Comparison between the fitted coefficients (solid line) $A_0(\ell)$ (left panel) and $A_1(\ell)$ (right panel) and the roughly estimated expected ones (dashed line) from Eqs. (88) and (89) with the typical values $c_s \sim 10^{-1}$, $r_*/\eta_* \sim 10^3$, and $k_D r_* \sim 10^3$. Eqs. (88) and (89) give a rough estimate of the coefficients A_0 and A_1 and explain their oscillations with ℓ .

low multipole values ℓ . This would not be the case in a Λ CDM model, for instance, where the integrated Sachs-Wolfe effect would induce large values of A_0 at low ℓ .

B. Power spectrum

Given the coefficients A_p , the computation of the C_ℓ 's may be performed analytically. Integrating over the radial coordinate r in Eq. (25) yields

$$C_\ell = \frac{2}{\pi} \int \frac{dk}{k} T_\ell(k)^2, \quad (95)$$

where we set a scale-invariant power spectrum. Using the expansion (90) leads to

$$\begin{aligned} C_\ell = \frac{2}{\pi} & \left[\frac{A_0^2}{2\ell(\ell+1)} + \frac{A_1^2}{6(\ell-1)(\ell+2)} \right. \\ & + A_2^2 \frac{3\ell^2 + 3\ell - 10}{30\ell(\ell-2)(\ell+1)(\ell+3)} - \frac{A_0 A_2}{3\ell(\ell+1)} \\ & + A_0 A_1 \frac{\pi(2\ell-3)!!}{(2\ell+3)!!} \\ & \left. + A_1 A_2 \frac{\pi(\ell^2 + \ell + 3)(2\ell-5)!!}{(2\ell+5)!!} + \dots \right], \quad (96) \end{aligned}$$

where higher order terms were not written explicitly as they are expected to be small corrections to this result. From the above expression, we can see that all the terms involving $A_i A_j$ are subdominant when $i + j$ is odd. This is a quite general fact as we will see in the flat sky approximation (see Appendix C). For sufficiently large ℓ , only the dominant terms contribute and the two-point function becomes

$$C_\ell = \frac{2}{\pi\ell^2} \left[\frac{A_0^2}{2} + \frac{A_1^2}{6} + \frac{A_2^2}{10} - \frac{A_0 A_2}{3} + \dots \right]. \quad (97)$$

Using the values of the previously obtained coefficients A_i , Eq. (97) appears to be a rough estimate of the power spectrum as shown in Fig. 13.

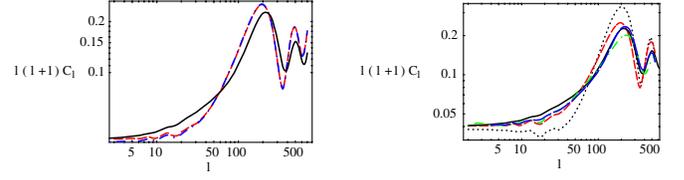


FIG. 13 (color online). Reconstruction of the power spectra from the ansatz (90). The coefficient A_i are obtained from a fit of the standard CDM outputs of the CMBFAST code. Left panel: effect of the flat sky approximation on the power spectrum reconstruction. The solid black line shows the results from CMBFAST. The red dashed line shows the results from Eq. (96) whereas the blue dot-dashed line is obtained from the flat sky approximation Eq. (97). Those two reconstructed curves are in agreement with each other for $\ell > 15$. Right panel: reconstruction of the power spectrum with different degrees of approximation: expansion to first order (contribution of A_0 and A_1 only) (dotted black line), to second order (long-dashed red line), to third order (dot-dashed green line), and to fourth order (short-dashed blue line). The solid black line represents the expected result from the CMBFAST code.

As we have shown in the previous subsection, the computations of higher order correlation functions involve quite cumbersome integrals over hypergeometric functions, which cannot be expressed analytically. To get an approximate result, it would seem natural to expand $\xi_\ell(r)$ about $r = r_*$ with a Taylor expansion since its behavior is smoothed compared to the radial transfer function's. However, this series expansion appears not to be valid in a sufficiently wide region around $r = r_*$. As this approach does not allow one to compute high order correlation functions, we should use another approximation. For sufficiently large ℓ ($\ell > 10$ in practice), Fig. 13 shows that the two-point function is well described only by the leading order terms in ℓ . As the large ℓ approximation corresponds to small angular scales, it also means that the sky is assumed to be locally flat so that projection effects reduce to a simple identification. In the following we assume that the last scattering surface is properly described by a plan. Hence, the multipole decomposition corresponds to a flat two-dimensional Fourier transform.

Using the expression of the temperature contrast

$$\frac{\delta T}{T}(\hat{\gamma}) = \sum_{\ell, m} a_{\ell m} Y_{\ell m}, \quad (98)$$

we get

$$\frac{\delta T}{T}(\hat{\gamma}) = \sum_{\ell, m} 4\pi(-i)^\ell \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} T_\ell(k) \Phi(\vec{k}) Y_{\ell m}(\hat{\gamma}) Y_{\ell m}^*(\hat{k}). \quad (99)$$

The decomposition of the transfer function in terms of Bessel functions gives

$$\begin{aligned} \frac{\delta T}{T}(\hat{\gamma}) &= \sum_p \sum_{\ell, m} A_p(\ell) 4\pi(-i)^\ell \\ &\times \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} j_\ell^{(p)}(kr_*) \Phi(\vec{k}) Y_{\ell m}(\hat{\gamma}) Y_{\ell m}^*(\hat{k}). \end{aligned} \quad (100)$$

Considering that the functions $A_p(\ell)$ do not vary much compared to the oscillating Bessel functions, we can use Eq. (15) to get

$$4\pi \sum_{\ell, m} (-i)^\ell j_\ell^{(p)}(kr_*) Y_{\ell m}(\hat{\gamma}) Y_{\ell m}^*(\hat{k}) = \frac{1}{k^p} \frac{d^p}{dr_*^p} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_*}, \quad (101)$$

with

$$\frac{\delta T}{T}(\hat{\gamma}) = \sum_p \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} A_p \Phi(\vec{k}) \frac{d^p}{k^p dr_*^p} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_*} \quad (105)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2} r_*^3} \sum_p \int dx d^2 \vec{\ell} A_p \frac{(-i)^p x^p e^{-ix}}{(x^2 + \ell^2)^{p/2}} \Phi(\vec{k}) e^{-i\vec{\ell}\cdot\hat{\gamma}}, \quad \text{with } \vec{k} = \frac{x}{r_*} \vec{u}_z + \frac{\vec{\ell}}{r_*}. \quad (106)$$

and the two-point function reads

$$\left\langle \frac{\delta T}{T}(\hat{\gamma}_1) \frac{\delta T}{T}(\hat{\gamma}_2) \right\rangle = \sum_{p_1, p_2} \int \frac{d^2 \vec{\ell}}{(2\pi)^2} F_{p_1, p_2}(\ell) A_{p_1}(\ell) A_{p_2}(\ell) e^{-i\vec{\ell}\cdot(\hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_2)}, \quad (107)$$

where

$$F_{p_1, p_2}(\ell) = (-i)^{p_1 - p_2} \int \frac{dx}{2\pi} \tilde{P}(\sqrt{x^2 + \ell^2}) \frac{x^{p_1 + p_2}}{(x^2 + \ell^2)^{(3+p_1+p_2)/2}} \quad \text{with } \tilde{P}(y) = r_*^3 P\left(\frac{y}{r_*}\right). \quad (108)$$

For a scale-invariant power spectrum $\tilde{P}(y) = 1/y^3$, the following integrals

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{x^{p_1 + p_2}}{(x^2 + \ell^2)^{(3+p_1+p_2)/2}} = \begin{cases} 0 & \text{if } p_1 + p_2 \text{ is odd} \\ \frac{2}{1+p_1+p_2} \frac{1}{\ell^2} & \text{if } p_1 + p_2 \text{ is even} \end{cases} \quad (109)$$

lead to

$$\left\langle \frac{\delta T}{T}(\hat{\gamma}_1) \frac{\delta T}{T}(\hat{\gamma}_2) \right\rangle = \frac{2}{\pi} \int \frac{d^2 \vec{\ell}}{(2\pi)^2} \frac{1}{\ell^2} \left[\frac{A_0^2}{2} + \frac{A_1^2}{6} + \frac{A_2^2}{10} + \frac{A_3^2}{14} + \frac{A_4^2}{18} - \frac{A_0 A_2}{3} + \frac{A_0 A_4}{5} - \frac{A_1 A_3}{5} - \frac{A_2 A_4}{7} + \dots \right] e^{-i\vec{\ell}\cdot(\hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_2)}, \quad (110)$$

which is in perfect agreement with Eq. (97) (see Appendix C for the correspondence between flat sky and all sky formalisms). As we highlighted, only terms $A_i A_j$ with $i + j$ even do contribute to the two-point function. The convergence of the series may be checked in Fig. 13 where we used the expansion (90) to A_4 .

The large ℓ limit together with the expansion (90) provides us with a more tractable formalism to express higher order correlation functions. In the following,

$$\vec{k} = k_z \vec{u}_z + \vec{k}_\perp, \quad (102)$$

$$\vec{r}_* = r_* \hat{\gamma}, \quad (103)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{r}_* \simeq k_z r_* + \vec{\ell} \cdot \hat{\gamma}. \quad (104)$$

The z -axis, whose unit vector \vec{u}_z is oriented towards us, supports the line of sight. Vectorial quantities belonging to the plan which is orthogonal to the line of sight are indexed by a symbol \perp . The vector $\vec{\ell} = \vec{k}_\perp / r_*$ is defined as the conjugated variable of the angle $\hat{\gamma}$.

The temperature contrast becomes

we explore the approximate behavior of the bispectrum through the very first terms of the expansion (90).

C. Bispectrum

An accurate description of the bispectrum is a powerful tool towards discriminating among the inflationary models [27,28] or understanding the primary or secondary nature of non-Gaussianities [29–32]. In this perspective, we apply our expansion to explore the key features of the tempera-

ture three-point function which may be expressed as

$$\left\langle \frac{\delta T}{T}(\hat{\gamma}_1) \frac{\delta T}{T}(\hat{\gamma}_2) \frac{\delta T}{T}(\hat{\gamma}_3) \right\rangle_c = \sum_{p_1, p_2, p_3} \int \frac{d^2 \vec{\ell}_1}{2\pi} \frac{d^2 \vec{\ell}_2}{2\pi} \frac{d^2 \vec{\ell}_3}{2\pi} A_{p_1} A_{p_2} A_{p_3} F_{p_1, p_2, p_3}(\ell_1, \ell_2, \ell_3) e^{-i\vec{\ell}_1 \cdot \hat{\gamma}_1} e^{-i\vec{\ell}_2 \cdot \hat{\gamma}_2} e^{-i\vec{\ell}_3 \cdot \hat{\gamma}_3} \times \delta_{\text{Dirac}}(\vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3), \quad (111)$$

with

$$F_{p_1, p_2, p_3}(\ell_1, \ell_2, \ell_3) = \nu_2 \frac{(-i)^{p_1 + p_2 + p_3}}{(2\pi)^{3/2}} \int dx_1 dx_2 dx_3 \delta_{\text{Dirac}}(x_1 + x_2 + x_3) \times \left[\frac{\tilde{P}(\sqrt{x_1^2 + \ell_1^2}) x_1^{p_1} e^{-ix_1}}{(x_1^2 + \ell_1^2)^{p_1/2}} \frac{\tilde{P}(\sqrt{x_2^2 + \ell_2^2}) x_2^{p_2} e^{-ix_2}}{(x_2^2 + \ell_2^2)^{p_2/2}} \frac{x_3^{p_3} e^{-ix_3}}{(x_3^2 + \ell_3^2)^{p_3/2}} + \text{perm.} \right]. \quad (112)$$

From the changes of variables $x_i \rightarrow -x_i$, one can see that the nonvanishing terms are those with $p_1 + p_2 + p_3$ even. In the special case where $p_3 = 0$, both p_1 and p_2 should be even.

As the direct computation is uneasy, we decompose the Dirac function $\delta_{\text{Dirac}}(x_1 + x_2 + x_3)$ as in Eq. (29) to recast the three-point function into

$$\left\langle \frac{\delta T}{T}(\hat{\gamma}_1) \frac{\delta T}{T}(\hat{\gamma}_2) \frac{\delta T}{T}(\hat{\gamma}_3) \right\rangle_c = \frac{\nu_2}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^2 \vec{\ell}_1}{2\pi} \int \frac{d^2 \vec{\ell}_2}{2\pi} \int \frac{d^2 \vec{\ell}_3}{2\pi} \delta_{\text{Dirac}}(\vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3) e^{-i(\hat{\gamma}_1 \cdot \vec{\ell}_1 + \hat{\gamma}_2 \cdot \vec{\ell}_2 + \hat{\gamma}_3 \cdot \vec{\ell}_3)} b_{(\ell_1, \ell_2, \ell_3)}, \quad (113)$$

with

$$b_{(\ell_1, \ell_2, \ell_3)} = \mathcal{B}_{(\ell_1, \ell_2, \ell_3)} + \mathcal{B}_{(\ell_3, \ell_1, \ell_2)} + \mathcal{B}_{(\ell_2, \ell_3, \ell_1)}. \quad (114)$$

For a scale-invariant power spectrum

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{(\ell_1, \ell_2, \ell_3)} &= \frac{4}{\ell_1^2 \ell_2^2} A_0(\ell_1) A_0(\ell_2) A_0(\ell_3) + 2 \frac{\ell_3}{\ell_1 \ell_2} b_1(\ell_1, \ell_2, \ell_3) A_1(\ell_1) A_0(\ell_2) A_1(\ell_3) + (\ell_1 \leftrightarrow \ell_2) \\ &+ 4 \frac{\ell_3}{\ell_1 \ell_2} b_1(\ell_3, \ell_1, \ell_2) A_0(\ell_1) A_0(\ell_2) A_2(\ell_3) - \frac{4}{3 \ell_1^2 \ell_2^2} A_2(\ell_1) A_0(\ell_2) A_0(\ell_3) + (\ell_1 \leftrightarrow \ell_2) \\ &+ \frac{\pi^2}{2} \frac{\ell_3}{\ell_1 \ell_2 (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3)^3} A_1(\ell_1) A_1(\ell_2) A_2(\ell_3) - \frac{2}{3} \frac{\ell_3}{\ell_1^2 \ell_2^2} b_2(\ell_1, \ell_2, \ell_3) A_2(\ell_1) A_1(\ell_2) A_1(\ell_3) + (\ell_1 \leftrightarrow \ell_2) \\ &+ \frac{4}{9} \frac{1}{\ell_1^2 \ell_2^2} A_2(\ell_1) A_2(\ell_2) A_0(\ell_3) - \frac{4}{3} \frac{\ell_3}{\ell_1^2 \ell_2^2} b_2(\ell_1, \ell_3, \ell_2) A_2(\ell_1) A_0(\ell_2) A_2(\ell_3) + (\ell_1 \leftrightarrow \ell_2) \\ &+ \frac{4}{9} \frac{\ell_3}{\ell_1^2 \ell_2^2} b_3(\ell_1, \ell_2, \ell_3) A_2(\ell_1) A_2(\ell_2) A_2(\ell_3). \end{aligned} \quad (115)$$

We defined the following functions (see Appendix B):

$$b_1(\ell_1, \ell_2, \ell_3) = \int_0^\infty dz z^2 e^{-\ell_1 z} K_1(\ell_2 z) K_1(\ell_3 z) \quad (116)$$

$$b_2(\ell_1, \ell_2, \ell_3) = \int_0^\infty dz z e^{-\ell_2 z} K_1(\ell_3 z) \times [\ell_1 z K_1(\ell_1 z) - \ell_1^2 z^2 K_0(\ell_1 z)] \quad (117)$$

$$b_3(\ell_1, \ell_2, \ell_3) = \int_0^\infty dz e^{-\ell_3 z} [\ell_1 z K_1(\ell_1 z) - \ell_1^2 z^2 K_0(\ell_1 z)] \times [\ell_2 z K_1(\ell_2 z) - \ell_2^2 z^2 K_0(\ell_2 z)], \quad (118)$$

where K_n stands for the modified Bessel function of the second kind of order n .

The link between the flat sky and all sky formalisms imposes (see Appendix C)

$$b_{\ell_1 \ell_2 \ell_3} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} b_{(\ell_1, \ell_2, \ell_3)}. \quad (119)$$

In the peculiar case where $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = \ell$, the functions b_1 , b_2 , and b_3 simplify to

$$\begin{aligned} b_1(\ell, \ell, \ell) &= \frac{1}{\ell^3} \left[\frac{3\pi^2}{32} {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}; 2; \frac{1}{4}\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3} {}_3F_2\left(1, 2, 3; \frac{3}{2}, \frac{5}{2}; \frac{1}{4}\right) \right] \\ &\simeq \frac{0.526}{\ell^3} \end{aligned} \quad (120)$$

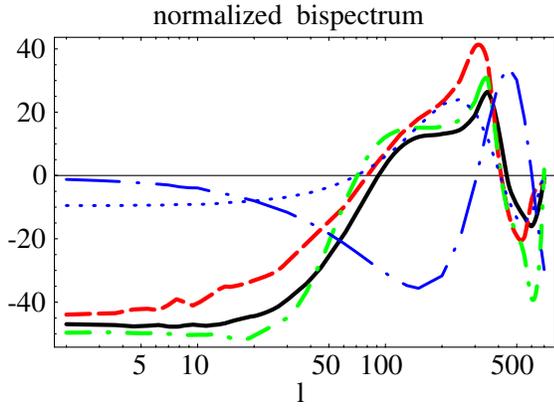


FIG. 14 (color online). Normalized bispectrum for an equilateral configuration $\tilde{b}_{\ell\ell\ell}$ in a Λ CDM model with $\nu_2 = 1$. The solid black line is the expected bispectrum. The red dashed and the green dot-dashed lines are, respectively, the reconstructed bispectrum to first and second order. The blue lines show the behavior of the coefficients $A_0(\ell)$ (dotted line) and $A_1(\ell)$ (long dash-dotted line).

$$b_2(\ell, \ell, \ell) \simeq 0.381 \frac{1}{\ell^2} \quad (121)$$

$$b_3(\ell, \ell, \ell) \simeq 0.335 \frac{1}{\ell}. \quad (122)$$

Numerical results are shown in Figs. 14–16. In Fig. 14, the normalized bispectrum in (113) is compared to the expected one in an equilateral configuration. For an equilateral configuration, it appears that the bispectrum is properly approximated with a few terms. In particular, one can see that the main features of the bispectrum are encoded by the coefficients A_0 and A_1 . Recalling Eq. (115),

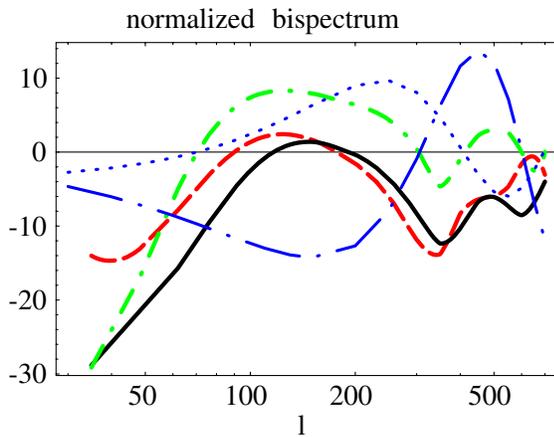


FIG. 15 (color online). Reconstruction of the normalized bispectrum for an isosceles configuration $\tilde{b}_{\ell\ell 70}$ as a function of ℓ in a Λ CDM model with $\nu_2 = 1$. The solid black line represents the expected bispectrum. The green dot-dashed line and the red dashed line represent the reconstructed bispectrum from an expansion to the order A_1 and A_2 , respectively. The blue lines represent the behaviors of the coefficients $A_0(\ell)$ (dotted line) and $A_1(\ell)$ (long dash-dotted line).

it means that roughly $b_{\ell\ell\ell} \propto A_0(\ell)(A_0^2(\ell) + 0.5A_1^2(\ell))$. Hence, the zeros of the bispectrum are roughly given by the zeros of the monopole $A_0(\ell)$ for an equilateral configuration (see Fig. 14).

Figure 15 represents the peculiar configuration where one of the ℓ is fixed to a zero of the monopole, $\ell = 70$, while the other two are equal. From Eq. (115), the bispectrum should reduce to first order to a single term

$$b_{70\ell\ell} \propto A_0(\ell)A_1(\ell)A_1(70). \quad (123)$$

Hence the zeros of the bispectrum are roughly those of the monopole and the dipole terms. Plots of Fig. 15 show that this approximation is too crude to estimate the zeros of the bispectrum mainly because this configuration demands the dominant term to vanish. However, the coarse features are recovered and the subdominant terms contribute as a global shift that lead to a proper fit of the expected bispectrum.

We also paid attention to configurations that would correlate the first two acoustic peaks of the C_ℓ 's. Figure 16 shows the bispectrum $b_{\ell\ell+300\ell+300}$. The basic features of this bispectrum may be inferred by noting that $A_0(\ell + 300) \simeq -A_0(\ell)$ and $A_1(\ell + 300) \simeq -A_1(\ell)$. We then get

$$b_{\ell\ell+300\ell+300} \propto A_0(\ell)[A_0(\ell)^2 + .5A_1(\ell)^2] \quad \text{and} \quad (124)$$

$$b_{\ell\ell+300} \propto -A_0(\ell)[A_0(\ell)^2 + h(\ell)A_1(\ell)^2],$$

where $h(\ell) \sim 0.25$ is a slowly varying function. These approximations roughly reproduce the shape of the bispectrum in the corresponding isosceles configuration.

Our results provide a simple way towards understanding the behavior of the bispectrum as a function of the configuration. Recalling that the coefficients A_0 , A_1 , and A_2

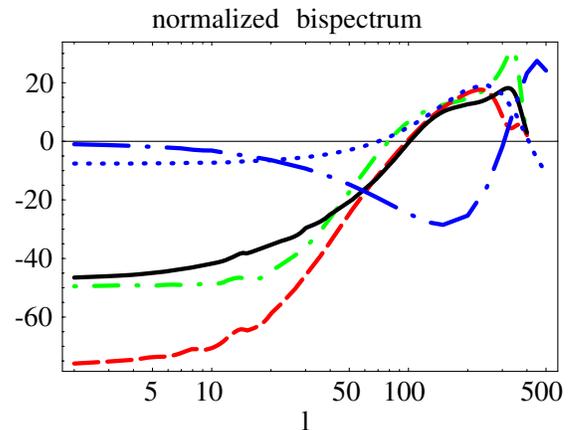


FIG. 16 (color online). Normalized bispectrum for an isosceles configuration $\tilde{b}_{\ell\ell+300\ell+300}$ in a Λ CDM model (solid black line) with $\nu_2 = 1$. The green dot-dashed line and the red dashed line represent the reconstructed normalized bispectrum to order $A_1(\ell)$ and $A_2(\ell)$, respectively. The blue lines represent the behaviors of the coefficients $A_0(\ell)$ (dotted line) and $A_1(\ell)$ (long dash-dotted line).

represent the first momenta of the gravitational potential on the last scattering surface, we have shown that the coarse features of the bispectrum may be inferred from the monopole and the dipole behaviors.

D. Trispectrum

The analysis of the trispectrum may be performed in the same way as previously for the bispectrum. As the number

of terms in our phenomenological approach increases with the order of the correlation function, the key features of the trispectrum become less obvious to infer. However, the sign of the trispectrum may be roughly predicted given the behaviors of A_0 and A_1 .

The very first terms of the expansion of the trispectrum read

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta T}{T}(\hat{\gamma}_1) \frac{\delta T}{T}(\hat{\gamma}_2) \frac{\delta T}{T}(\hat{\gamma}_3) \frac{\delta T}{T}(\hat{\gamma}_4) \right\rangle_c &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 \vec{\ell}_1}{2\pi} \int \frac{d^2 \vec{\ell}_2}{2\pi} \int \frac{d^2 \vec{\ell}_3}{2\pi} \int \frac{d^2 \vec{\ell}_4}{2\pi} \delta_{\text{Dirac}}(\vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 + \vec{\ell}_4) \\ &\times e^{-i(\hat{\gamma}_1 \cdot \vec{\ell}_1 + \hat{\gamma}_2 \cdot \vec{\ell}_2 + \hat{\gamma}_3 \cdot \vec{\ell}_3 + \hat{\gamma}_4 \cdot \vec{\ell}_4)} \int d^2 \vec{L} [\delta_{\text{Dirac}}(\vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{L}) t_{\ell_3, \ell_4}^{\ell_1, \ell_2}(L) + (2 \leftrightarrow 3) \\ &+ (2 \leftrightarrow 4)], \end{aligned} \quad (125)$$

with

$$\begin{aligned} \text{star } t_{\ell_3 \ell_4}^{\ell_1 \ell_2}(L) &= \frac{8\nu_3^{\text{star}}}{3\ell_1^2 \ell_2^2 \ell_3^2} A_0(\ell_1) A_0(\ell_2) A_0(\ell_3) A_0(\ell_4) + 3 \text{ other terms} + 4\nu_3^{\text{star}} \frac{\ell_4}{3\ell_1 \ell_2 \ell_3} A_1(\ell_1) A_0(\ell_2) A_0(\ell_3) A_1(\ell_4) \\ &\times \int_0^\infty dz z^3 e^{-\ell_1 z} K_1(\ell_2 z) K_1(\ell_3 z) K_1(\ell_4 z) + 11 \text{ other terms} + \dots \end{aligned} \quad (126)$$

and

$$\begin{aligned} \text{line } t_{\ell_3 \ell_4}^{\ell_1 \ell_2}(L) &= \frac{8\nu_3^{\text{line}}}{\ell_1^2 \ell_3^2 L^2} A_0(\ell_1) A_0(\ell_2) A_0(\ell_3) A_0(\ell_4) + 4\nu_3^{\text{line}} \frac{\ell_4}{\ell_1^2 \ell_3 L} A_0(\ell_1) A_0(\ell_2) A_1(\ell_3) A_1(\ell_4) \\ &\times \int_0^\infty dz z^2 e^{-\ell_3 z} K_1(\ell_4 z) K_1(Lz) + \frac{8\nu_3^{\text{line}}}{\pi^2} \frac{\ell_2 \ell_4}{\ell_1 \ell_3 L} A_0(\ell_1) A_1(\ell_2) A_0(\ell_3) A_1(\ell_4) \int_{-\infty}^\infty dx x K_1(\ell_1 x) K_1(\ell_2 x) \\ &\times \int_{-\infty}^\infty dy y K_1(\ell_3 y) K_1(\ell_4 y) |x - y| K_1(L|x - y|) + (1 \leftrightarrow 2) + (3 \leftrightarrow 4) + \begin{pmatrix} 1 & \leftrightarrow & 2 \\ 3 & \leftrightarrow & 4 \end{pmatrix} + \dots \end{aligned} \quad (127)$$

For a lozenge configuration $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = \ell_4 = \ell$, it may be checked that the signs of trispectra do not change since the dominant terms read

$$\text{star } t_{\ell \ell}^{\ell \ell}(L) \simeq \frac{\nu_3^{\text{star}}}{\ell^6} A_0^2(\ell) \left[\frac{32}{3} A_0^2(\ell) + 7.10 A_1^2(\ell) \right] \quad (128)$$

and

$$\begin{aligned} \text{line } t_{\ell \ell}^{\ell \ell}(L) &\simeq \frac{\nu_3^{\text{line}}}{\ell^6} A_0^2(\ell) \left[32 \frac{\ell^2}{L^2} A_0^2(\ell) \right. \\ &\left. + 16 \frac{\ell}{L} b_1 \left(1, 1, \frac{L}{\ell} \right) A_1^2(\ell) \right]. \end{aligned} \quad (129)$$

In a similar way, we could expect that the configurations such as $\ell_1 = \ell_2 = \ell$, $\ell_3 = \ell_4 = \ell'$ have a constant sign for not too large multipoles ℓ and ℓ' . This seems to be the case in Figs. 5–7. Figure 17 shows the reconstructed trispectrum $\tilde{t}_{\ell+300\ell+300}^{\ell \ell}(L=5)$. We can check that the trispectrum does not vanish and that its main features are properly reproduced by our expansion in terms of momenta of the gravitational field.

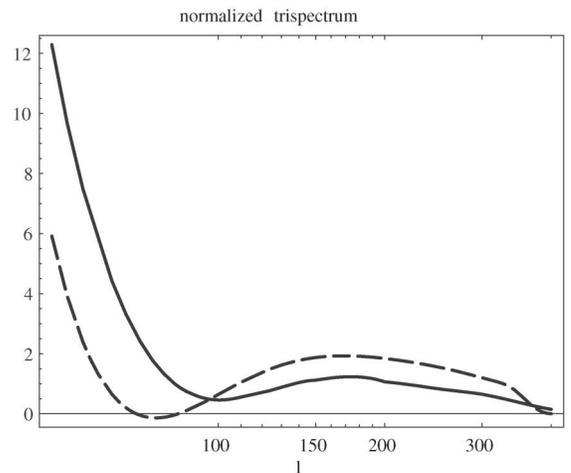


FIG. 17. Plot of $\text{star } \mathcal{T}_{\ell+300\ell+300}^{\ell \ell}(L)$ as a function of ℓ for $L=5$ with $\nu_3^{\text{star}}=1$. The solid line corresponds to the CMBFAST code results whereas the dashed one is the reconstructed trispectrum.

VI. CONCLUSIONS

We investigated the shapes of high order correlation functions in the CMB anisotropy maps. Formal expressions for the high order correlation functions can easily be obtained. We found that, for generic models of primordial non-Gaussianities, they can be described with the help of formal diagrams evaluated with computation rules we gave. We found that only three kinds of functions with simple diagrammatic interpretations are needed: the radial transfer functions $R_\ell(r)$ represented by vertices, the propagators $\xi_\ell(r)$ represented by outer lines joining a point to a vertex, and the vertex propagators, $\zeta_L(r; r')$, corresponding to internal lines joining two vertices. This formalism provides simple expressions of high order connected correlation functions of the observed temperature field for a large class of models of primordial non-Gaussianities.

The development of instabilities at superhorizon scales is intrinsically a nonlinear process that induces specific non-Gaussian effects. These types of mode couplings naturally induce a potential bispectrum the amplitude of which is characterized by a parameter ν_2 (e.g. f_{NL}) of the order unity. However, for such a low level of couplings and beyond the Sachs-Wolfe regime, the calculation of the temperature correlation functions requires a consistent second order treatment of the CMB anisotropies through the physics of recombination which is not taken into account in the formalism we present.

More significant sources of non-Gaussianities might come from additional scalar degrees of freedom in the very early universe. In such cases, the statistics induced may depend on the details of the scenario and, in particular, on the types of mode couplings during or at the end of the inflationary period. It makes the search of non-Gaussianities of the observed CMB maps precious for discriminating between different inflationary scenarii. This is illustrated for instance by the qualitative differences we found at the level of the trispectra between *linelike* and *starlike* mode coupling effects. Those shapes are furthermore found to be quite different from those induced by weak lensing effects.

As we stressed it is possible to obtain formally compact expressions for the high order correlation functions. It is nonetheless difficult to get insights into the geometrical dependences of these correlation functions in general. Projection effects and physics of recombination both contribute to make difficult the transcription from the high order correlation functions of the gravitational potential to those of the observed temperature field. Only in the Sachs-Wolfe regime is this transcription easy. The same formal structure between the correlation functions is indeed recovered. To obtain further insights into the behaviors of the

high order correlation functions at a small angular scale, we propose a description of the acoustic oscillations using semianalytic methods. Ignoring the integrated Sachs-Wolfe effect, we found that it was possible to use a gradientlike expansion as suggested by the fact that the radial transfer function is peaked in the vicinity of the last scattering surface. This approximation assumes that the temperature anisotropies can only be described by the behavior of the potential at or in the vicinity of the last scattering surface. In the approach we adopted the transfer physics is encoded by angular scale dependent terms while projection effects are treated separately. In this perspective, the small angle approximation is appropriate to handle projection effects and leads to more convenient results. We found that the shapes of the temperature power spectrum and bispectrum can be reasonably reproduced with the very first terms of such an expansion.

This perturbative approach can give insights into the behavior of the high order correlation functions. For instance, it gives a good account of the positions of the zeros of the bispectrum. They indeed have to roughly coincide with those of the monopole term at the surface of last scatter. Higher order expansion obviously leads to an increasing accuracy in the description of the amplitude of the temperature bispectrum. The trispectra show more complex structures with complicated sign patterns but that can also be explained, to a large extent, with the approach we have developed. In particular, some key features of the trispectrum, such as its sign in a lozenge configuration, may be accounted for. Nevertheless, the features of the high order temperature spectra might be complementary highlighted in a real space treatment of the CMB anisotropies [33]. We think that the method we have presented could be extended to the properties of the polarization field as well.

ACKNOWLEDGMENTS

We are grateful to Jean-Philippe Uzan whom the project was initiated with. We also thank Alain Riazuelo for fruitful discussions.

APPENDIX A: FUNCTIONS INVOLVED IN THE EXPANSION OF THE TRANSFER FUNCTION

Expanding the transfer function as in Eq. (90) induces the calculation of specific integrals in the expression of the radial transfer function $R_\ell(r)$ or in the function $\xi_\ell(r)$. In this subsection, we will give the expressions of the function $g_i(r, r_*; \ell)$ and $f_i(r/r_*; \ell)$ [see Eqs. (91)–(94)].

To compute these integrals, we will use the following equality (see [34]) for $-2 < p < \ell + \ell' + 1$ and $r < r_*$:

$$\int dk k^{-p} j_{\ell'}(kr_*) j_\ell(kr) = \frac{\pi}{2^{p+2}} \frac{r^\ell}{r_*^{\ell-p+1}} \frac{\Gamma(\frac{\ell+\ell'-p+1}{2})}{\Gamma(\frac{\ell'-\ell+p+2}{2})\Gamma(\ell+3/2)} {}_2F_1\left(\frac{\ell+\ell'-p+1}{2}, \frac{\ell-\ell'-p}{2}; \ell+3/2; \frac{r^2}{r_*^2}\right), \quad (\text{A1})$$

whereas for $r > r_*$

$$\int dk k^{-p} j_{\ell'}(kr_*) j_{\ell}(kr) = \frac{\pi}{2^{p+2}} \frac{r_*^{\ell'}}{r^{\ell'-p+1}} \frac{\Gamma(\frac{\ell+\ell'-p+1}{2})}{\Gamma(\frac{\ell-\ell'+p+2}{2})\Gamma(\ell'+3/2)} {}_2F_1\left(\frac{\ell+\ell'-p+1}{2}, \frac{\ell'-\ell-p}{2}; \ell'+3/2; \frac{r_*^2}{r^2}\right). \quad (\text{A2})$$

On the other hand, the recurrence relation between spherical Bessel functions

$$j'_{\ell}(x) = \frac{1}{2\ell+1} [\ell j_{\ell-1}(x) - (\ell+1)j_{\ell+1}(x)], \quad (\text{A3})$$

leads to

$$j_{\ell}^{(p)}(x) = \sum_{\ell'=\ell-p}^{\ell+p} \alpha_{\ell\ell'}^{(p)} j_{\ell'}(x), \quad (\text{A4})$$

where the coefficients $\alpha_{\ell\ell'}^{(p)}$ satisfy the recurrence relation

$$\alpha_{\ell\ell'}^{(p+1)} = \frac{\ell'+1}{2\ell'+3} \alpha_{\ell\ell'+1}^{(p)} - \frac{\ell'}{2\ell'-1} \alpha_{\ell\ell'-1}^{(p)}. \quad (\text{A5})$$

The integral defining g_1 in Eq. (92) may be computed with Eqs. (A1)–(A3) assuming that the limit $p = -2$ may be analytically continued. The expression for g_1 yields for $r < r_*$

$$g_1(r, r_*; \ell) = \frac{\sqrt{\pi}}{2r_*^2} \frac{\Gamma(\ell+1)}{\Gamma(\ell+3/2)} \left(\frac{r}{r_*}\right)^{\ell} \left[-\frac{\ell+2}{r_*} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \ell+1, \ell+\frac{3}{2}; \frac{r^2}{r_*^2}\right) - \frac{\ell+1}{\ell+3/2} \frac{1}{r_*^3} {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, \ell+2, \ell+\frac{5}{2}; \frac{r^2}{r_*^2}\right) \right]. \quad (\text{A6})$$

Similarly for $r > r_*$

$$g_1(r, r_*; \ell) = \frac{\sqrt{\pi}}{2r^2} \frac{\Gamma(\ell+1)}{\Gamma(\ell+3/2)} \left(\frac{r_*}{r}\right)^{\ell} \left[-\frac{\ell}{r_*} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \ell+1, \ell+\frac{3}{2}; \frac{r_*^2}{r^2}\right) + \frac{\ell}{\ell+3/2} \frac{r_*}{r^2} {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, \ell+2, \ell+\frac{5}{2}; \frac{r_*^2}{r^2}\right) \right]. \quad (\text{A7})$$

Here ${}_2F_1$ stands for the hypergeometric function. In the computation of g_2 , the integrals in Eq. (A1) are not defined for $p = -2$. Hence, we should write g_2 as

$$g_2(r, r_*; \ell) = \frac{d^2}{dr_*^2} \int dk j_{\ell}(kr) j_{\ell}(kr_*). \quad (\text{A8})$$

Using Eqs. (A1) and (A2), we get

$$\int dk j_{\ell}(kr) j_{\ell}(kr_*) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \frac{1}{2\ell+1} \frac{1}{r_*} \left(\frac{r}{r_*}\right)^{\ell} & \text{for } r < r_* \\ \frac{\pi}{2} \frac{1}{2\ell+1} \frac{1}{r} \left(\frac{r_*}{r}\right)^{\ell} & \text{for } r > r_* \end{cases} \quad (\text{A9})$$

and the function g_2 reads

$$g_2(r, r_*; \ell) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \frac{(\ell+1)(\ell+2)}{2\ell+1} \frac{1}{r_*^3} \left(\frac{r}{r_*}\right)^{\ell} & \text{for } r < r_* \\ \frac{\pi}{2} \frac{\ell(\ell-1)}{2\ell+1} \frac{1}{r_*} \left(\frac{r_*}{r}\right)^{\ell+1} & \text{for } r > r_* \end{cases}. \quad (\text{A10})$$

The expressions of the integrals f_i in Eq. (94) may be performed with Eqs. (A1)–(A5) and yield for $r < r_*$

$$f_0\left(\frac{r}{r_*}; \ell\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\Gamma(\ell)}{\Gamma(\ell+3/2)} \left(\frac{r}{r_*}\right)^{\ell} {}_2F_1\left(\ell, -\frac{1}{2}; \ell+\frac{3}{2}; \frac{r^2}{r_*^2}\right) \quad (\text{A11})$$

$$f_1\left(\frac{r}{r_*}; \ell\right) = \frac{\pi}{4} \left(\frac{r}{r_*}\right)^{\ell} \left[-\frac{\ell-1}{(2\ell-1)(2\ell+1)} + \frac{\ell+1}{(2\ell+1)(2\ell+3)} \left(\frac{r}{r_*}\right)^2 \right] \quad (\text{A12})$$

$$f_2\left(\frac{r}{r_*}; \ell\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{8} \left(\frac{r}{r_*}\right)^\ell \frac{\Gamma(\ell + 1)}{\Gamma(\ell + 3/2)} \left[\frac{4(\ell + 1)(\ell + 2)}{3(2\ell + 1)(2\ell + 3)} {}_2F_1\left(\ell + 1, -\frac{3}{2}; \ell + \frac{3}{2}; \frac{r^2}{r_*^2}\right) - 2 \frac{2\ell^2 + 2\ell - 1}{\ell(2\ell - 1)(2\ell + 3)} {}_2F_1\left(\ell, -\frac{1}{2}; \ell + \frac{3}{2}; \frac{r^2}{r_*^2}\right) + \frac{1}{(2\ell - 1)(2\ell + 1)} {}_2F_1\left(\ell - 1, \frac{1}{2}; \ell + \frac{3}{2}; \frac{r^2}{r_*^2}\right) \right]. \quad (\text{A13})$$

In the case $r > r_*$, they transform into

$$f_0\left(\frac{r}{r_*}; \ell\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\Gamma(\ell)}{\Gamma(\ell + 3/2)} \left(\frac{r}{r_*}\right)^\ell {}_2F_1\left(\ell, -\frac{1}{2}; \ell + \frac{3}{2}; \frac{r^2}{r_*^2}\right) \quad (\text{A14})$$

$$f_1\left(\frac{r}{r_*}; \ell\right) = \frac{\pi}{4} \left(\frac{r_*}{r}\right)^\ell \left[\frac{\ell}{(2\ell - 1)(2\ell + 1)} - \frac{\ell + 2}{(2\ell + 1)(2\ell + 3)} \left(\frac{r_*}{r}\right)^2 \right] \quad (\text{A15})$$

$$f_2\left(\frac{r}{r_*}; \ell\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{8} \left(\frac{r_*}{r}\right)^{\ell-2} \frac{\Gamma(\ell + 1)}{\Gamma(\ell + 3/2)} \left[\frac{1}{3} {}_2F_1\left(\ell - 1, -\frac{3}{2}; \ell - \frac{1}{2}; \frac{r_*^2}{r^2}\right) - 2 \frac{2\ell^2 + 2\ell - 1}{\ell(2\ell - 1)(2\ell + 3)} \left(\frac{r_*}{r}\right)^2 {}_2F_1\left(\ell, -\frac{1}{2}; \ell + \frac{3}{2}; \frac{r_*^2}{r^2}\right) + \frac{4(\ell + 1)(\ell + 2)}{(2\ell + 1)(2\ell + 3)(2\ell + 5)} \left(\frac{r_*}{r}\right)^4 {}_2F_1\left(\ell + 1, \frac{1}{2}; \ell + \frac{7}{2}; \frac{r_*^2}{r^2}\right) \right]. \quad (\text{A16})$$

APPENDIX B: INTEGRALS INVOLVED IN THE COMPUTATION OF THE BISPECTRUM

The computation of the bispectrum involves integrals such as

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{x^p}{(x^2 + \ell^2)^{(p+3)/2}} e^{-ixz}. \quad (\text{B1})$$

The integrals for $p = 0, 1$, and 2 may be performed [34]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-ixz}}{(\ell^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{2}{\ell} |z| K_1(\ell|z|), \quad (\text{B2})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{xe^{-ixz}}{(\ell^2 + x^2)^2} = -i \frac{\pi}{2\ell} z e^{-\ell|z|}, \quad (\text{B3})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^2 e^{-ixz}}{(\ell^2 + x^2)^{5/2}} = \frac{4}{3\ell^2} G_{1,3}^{2,1} \left(\frac{\ell^2 z^2}{4} \middle| \begin{matrix} -1/2 \\ 0, 1, 1/2 \end{matrix} \right), \quad (\text{B4})$$

where K_n is the modified Bessel function of the second kind of order n and

$$G_{p,q}^{m,n} \left(x \middle| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right)$$

is the Meijer's G -function. The Meijer's G -function is defined by

$$G_{p,q}^{m,n} \left(x \middle| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)} x^{-s} ds, \quad (\text{B5})$$

where the contour \mathcal{C} lies between the poles of $\Gamma(1 - a_j - s)$ and the poles of $\Gamma(b_j + s)$. The last integral (B4) may be simplified using

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^2 e^{-ixz}}{(\ell^2 + x^2)^{5/2}} = \frac{1}{3\ell} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial}{\partial \ell} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-ixz}}{(\ell^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (\text{B6})$$

With Eq. (B2) and the differential equations satisfied by the Bessel functions, we obtain

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^2 e^{-ixz}}{(\ell^2 + x^2)^{5/2}} = \frac{2}{3\ell^2} [\ell|z| K_1(\ell|z|) - \ell^2 z^2 K_0(\ell|z|)]. \quad (\text{B7})$$

Some other integrals involved in the computation of the bispectrum are of the type

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^p}{(x^2 + \ell^2)^{p/2}} e^{-ixz}. \quad (\text{B8})$$

Results for $p = 0, 1$, and 2 read

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ixz} = 2\pi \delta_{\text{Dirac}}(z), \quad (\text{B9})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{xe^{-ixz}}{(\ell^2 + x^2)^{1/2}} = -2i\ell \operatorname{sgn}(z) K_1(\ell|z|), \quad (\text{B10})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^2 e^{-ixz}}{\ell^2 + x^2} = -\pi \ell e^{-\ell|z|}. \quad (\text{B11})$$

For the special cases $z = 0$,

$$\int dx \frac{1}{(\ell^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{2}{\ell^2}, \quad (\text{B12})$$

$$\int dx \frac{x}{(\ell^2 + x^2)^2} = 0, \quad (\text{B13})$$

$$\int dx \frac{x^2}{(\ell^2 + x^2)^{5/2}} = \frac{2}{3\ell^2}. \quad (\text{B14})$$

APPENDIX C: FLAT SKY FORMALISM

We define the quantity $a(\vec{\ell})$ by the bidimensional Fourier transform of the temperature contrast

$$a(\vec{\ell}) = \int \frac{d^2\hat{\gamma}}{2\pi} \frac{\delta T}{T}(\hat{\gamma}) e^{-i\vec{\ell}\cdot\hat{\gamma}} \quad (\text{C1})$$

or conversely

$$\frac{\delta T}{T}(\hat{\gamma}) = \int \frac{d^2\vec{\ell}}{2\pi} a(\vec{\ell}) e^{i\vec{\ell}\cdot\hat{\gamma}}. \quad (\text{C2})$$

Inserting the multipole expansion of the temperature contrast in Eq. (C1), we may express $a(\vec{\ell})$ as a function of the coefficients $a_{\ell'm'}$

$$a(\vec{\ell}) = \sum_{\ell'm'} a_{\ell'm'} \int \frac{d^2\hat{\gamma}}{2\pi} Y_{\ell'm'}(\hat{\gamma}) e^{-i\vec{\ell}\cdot\hat{\gamma}}. \quad (\text{C3})$$

In the small angle approximation, the spherical harmonics are properly approximated by

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) \simeq J_m(\ell\theta) \sqrt{\frac{\ell}{2\pi}} e^{im\phi} \quad (\text{C4})$$

for $\ell \gg 1$ and $\theta \ll 1$. Moreover, we can decompose the vectors $\hat{\gamma}$ and $\vec{\ell}$ in the small angle approximation as

$$\hat{\gamma} \begin{pmatrix} \theta \cos\phi \\ \theta \sin\phi \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \vec{\ell} \begin{pmatrix} \ell \cos\phi_\ell \\ \ell \sin\phi_\ell \end{pmatrix}. \quad (\text{C5})$$

The quantity $a(\vec{\ell})$ then becomes

$$a(\vec{\ell}) = \sum_{\ell'm} a_{\ell'm} \int \frac{d^2\hat{\gamma}}{2\pi} J_m(\ell'\theta) \sqrt{\frac{\ell'}{2\pi}} e^{im\phi} e^{-i\ell\theta \cos(\phi - \phi_\ell)}. \quad (\text{C6})$$

Using the integral representation of the Bessel functions

$$J_m(\ell\theta) = \frac{1}{2\pi i^m} \int_0^{2\pi} d\phi' e^{im\phi' + i\ell\theta \cos\phi'}, \quad (\text{C7})$$

one naturally gets

$$a(\vec{\ell}) = \sum_{\ell'm} \sqrt{2\pi\ell'} (-i)^m a_{\ell'm} e^{-im\phi_\ell} \int \frac{d\theta}{2\pi} \theta J_m(\ell\theta) J_m(\ell'\theta), \quad (\text{C8})$$

which leads to

$$a(\vec{\ell}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\ell}} \sum_m (-i)^m a_{\ell m} e^{-im\phi_\ell}. \quad (\text{C9})$$

Conversely

$$a_{\ell m} = \sqrt{\frac{\ell}{2\pi}} i^m \int d\phi_\ell a(\vec{\ell}) e^{im\phi_\ell}. \quad (\text{C10})$$

Defining the power spectrum as

$$\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle = C_\ell \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}, \quad (\text{C11})$$

we find, using Eq. (C9), that

$$\langle a(\vec{\ell}) a(\vec{\ell}') \rangle = \delta_{\text{Dirac}}(\vec{\ell} - \vec{\ell}') C_\ell. \quad (\text{C12})$$

In an all sky formalism, the reduced bispectrum is defined by

$$\langle a_{\ell_1 m_1} a_{\ell_2 m_2} a_{\ell_3 m_3} \rangle_c = \mathcal{G}_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m_1 m_2 m_3} b_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}. \quad (\text{C13})$$

Using Eqs. (C9) and (C7), we find the power spectrum in a flat sky formalism

$$\langle a(\vec{\ell}_1) a(\vec{\ell}_2) a(\vec{\ell}_3) \rangle_c = \frac{1}{2\pi} b_{\ell_1 \ell_2 \ell_3} \delta_{\text{Dirac}}(\vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3). \quad (\text{C14})$$

The reduced trispectrum is defined by

$$\langle a_{\ell_1 m_1} a_{\ell_2 m_2} a_{\ell_3 m_3} a_{\ell_4 m_4} \rangle_c = \sum_{L, M} (-1)^M \mathcal{G}_{\ell_1 \ell_2 L}^{m_1 m_2 M} \mathcal{G}_{\ell_3 \ell_4 L}^{m_3 m_4 -M} \times t_{\ell_3 \ell_4}^{\ell_1 \ell_2}(L) \quad (\text{C15})$$

and the correspondence between flat sky and full sky formalisms imposes

$$\langle a(\vec{\ell}_1) a(\vec{\ell}_2) a(\vec{\ell}_3) a(\vec{\ell}_4) \rangle_c = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 L}{2\pi} \times \delta_{\text{Dirac}}(\vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 + \vec{\ell}_4) \times \delta_{\text{Dirac}}(\vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_3 - \vec{L}) t_{\ell_3 \ell_4}^{\ell_1 \ell_2}(L). \quad (\text{C16})$$

- [1] V.F. Mukhanov and G.V. Chibisov, JETP Lett. **33**, 532 (1981); S.W. Hawking, Phys. Lett. **115B**, 295 (1982); V.F. Mukhanov, H.A. Feldman, and R.H. Brandenberger, Phys. Rep. **215**, 203 (1992); A.D. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology* (Harwood, Chur, Switzerland, 1990).
- [2] J. Martin and R.H. Brandenberger, Phys. Rev. D **63**, 123501 (2001); **68**, 063513 (2003); R. Easther, B.R. Greene, W.H. Kinney, and G. Shiu, Phys. Rev. D **66**, 023518 (2002).
- [3] L.A. Kofman, Phys. Lett. B **173**, 400 (1986); D. Polarski and A.A. Starobinsky, Phys. Rev. D **50**, 6123 (1994); C. Gordon, D. Wands, B.A. Bassett, and R. Maartens, Phys. Rev. D **63**, 023506 (2001).
- [4] M. Bucher, K. Moodley, and N. Turok, Phys. Rev. D **66**, 023528 (2002); Phys. Rev. Lett. **87**, 191301 (2001).
- [5] E. Pierpaoli, J. Garcia-Bellido, and S. Borgani, J. High Energy Phys. **10** (1999) 015.
- [6] D. Langlois and A. Riazuelo, Phys. Rev. D **62**, 043504 (2000); J. Valiviita and V. Muhonen, Phys. Rev. Lett. **91**, 131302 (2003).
- [7] T. Moroi and T. Takahashi, Phys. Lett. B **522**, 215 (2001); **539**, 303(E) (2002); K. Enqvist and M.S. Sloth, Nucl. Phys. **B626**, 395 (2002); D.H. Lyth and D. Wands, Phys. Lett. B **524**, 5 (2002); D.H. Lyth, C. Ungarelli, and D. Wands, Phys. Rev. D **67**, 023503 (2003); N. Bartolo, S. Matarrese, and A. Riotto, Phys. Rev. D **69**, 043503 (2004).
- [8] N. Bartolo, E. Komatsu, S. Matarrese, and A. Riotto, Phys. Rep. **402**, 103 (2004).
- [9] G. Rigopoulos, E. Shellard, and B.W. van Tent, astro-ph/0506704 [Phys. Rev. D (to be published)]; astro-ph/0511041.
- [10] F. Bernardeau, Astron. Astrophys. **324**, 15 (1997); M. Zaldarriaga and U. Seljak, Phys. Rev. D **58**, 023003 (1998).
- [11] M. Zaldarriaga, Phys. Rev. D **62**, 063510 (2000).
- [12] W. Hu, Phys. Rev. D **62**, 043007 (2000).
- [13] F. Bernardeau and J.-P. Uzan, Phys. Rev. D **66**, 103506 (2002).
- [14] F. Bernardeau and J.-P. Uzan, Phys. Rev. D **67**, 121301 (2003).
- [15] F. Bernardeau, L. Kofman, and J.-P. Uzan, Phys. Rev. D **70**, 083004 (2004).
- [16] F. Bernardeau, T. Brunier, and J.-P. Uzan, Phys. Rev. D **69**, 063520 (2004).
- [17] F. Bernardeau and J.-P. Uzan, Phys. Rev. D **70**, 043533 (2004).
- [18] E. Komatsu, astro-ph/0206039.
- [19] R.K. Sachs and A.M. Wolfe, Astrophys. J. **147**, 73 (1967).
- [20] A. Gangui, astro-ph/0003335.
- [21] T. Okamoto and W. Hu, Phys. Rev. D **66**, 063008 (2002).
- [22] W. Hu, Phys. Rev. D **64**, 083005 (2001).
- [23] A.R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1968), 2nd ed.
- [24] E. Komatsu and D.N. Spergel, Phys. Rev. D **63**, 063002 (2001).
- [25] U. Seljak and M. Zaldarriaga, Astrophys. J. **469**, 437 (1996).
- [26] V.F. Mukhanov, Int. J. Theor. Phys. **43**, 623 (2004).
- [27] D. Babich, P. Criminelli, and M. Zaldarriaga, J. Cosmol. Astropart. Phys. **08** (2004) 009.
- [28] L. Verde, L.-M. Wang, A. Heavens, and M. Kamionkowski, Mon. Not. R. Astron. Soc. **313**, L141 (2000).
- [29] D. Babich and M. Zaldarriaga, Phys. Rev. D **70**, 083005 (2004).
- [30] E. Komatsu, B.D. Wandelt, D.N. Spergel, A.J. Banday, and K.M. Gorski, Astrophys. J. **566**, 19 (2002); E. Komatsu *et al.*, Astrophys. J. Suppl. Ser. **148**, 119 (2003); E. Komatsu, D.N. Spergel, and B.D. Wandelt, Astrophys. J. **634**, 14 (2005).
- [31] D.N. Spergel and D.M. Goldberg, Phys. Rev. D **59**, 103001 (1999).
- [32] H.K. Eriksen, A.J. Banday, K.M. Gorski, and P.B. Lilje, Astrophys. J. **622**, 58 (2005).
- [33] S. Bashinsky and E. Bertschinger, Phys. Rev. Lett. **87**, 081301 (2001); Phys. Rev. D **65**, 123008 (2002).
- [34] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products* (Academic, New York, 1980).

3.8 Conclusions

Ce chapitre nous a permis de présenter les outils nécessaires à l'étude du fond diffus cosmologique. La compréhension et l'interprétation des fluctuations de température et de polarisation du rayonnement fossile requiert la maîtrise de nombreuses notions parfois délicates que nous avons tenté de décrire en détail. Dans un premier temps, nous avons établi l'équation maîtresse pour le contraste de température, appelée équation de Boltzmann, au deuxième ordre dans les perturbations et en l'absence de collisions impliquant des photons. Nous avons ensuite cherché une décomposition particulière du contraste de température afin d'exprimer les solutions de cette équation. Bien qu'une telle démarche permette de comprendre le comportement du contraste de température aux très grandes échelles, les raffinements dus aux interactions lumière-matière doivent être pris en compte lors d'une description plus précise. Nous avons ainsi mis en évidence le lien entre la diffusion Compton et la polarisation du fond diffus cosmologique. Nous avons pu décrire le comportement global des différents spectres de puissance, pour la température et la polarisation.

Parmi les fenêtres observationnelles accessibles, celle du rayonnement fossile est la plus pertinente lorsque l'on s'intéresse à la physique de l'univers primordial. En effet, nous avons vu qu'aux grandes échelles, le contraste de température était proportionnel au potentiel gravitationnel peu de temps après l'inflation, ce qui constitue une relation particulièrement simple. Les fluctuations de température observées nous incitent donc à comprendre en détail les mécanismes qui ont généré les inhomogénéités primordiales et ont laissé leurs empreintes sur le ciel. En particulier, les fluctuations quantiques primordiales semblent avoir joué un rôle important dans la genèse des structures. Nous étudions donc dans le prochain chapitre les propriétés des champs quantiques dans un environnement gravitationnel avant de nous intéresser, dans le chapitre 5 aux modèles d'inflation.

CHAPITRE 4

Théorie quantique des champs en espace-temps courbe

Sommaire

4.1	Généralités	161
4.1.1	Échelles caractéristiques	161
4.1.2	Effets de la courbure	163
4.2	Équations du mouvement	164
4.2.1	Connexions de spin	164
4.2.2	Équations du mouvement de quelques champs	166
4.2.3	Normalisation des solutions	167
4.3	Quantification des champs	168
4.3.1	Moment conjugué et quantification canonique	168
4.3.2	Fréquences positives et vecteurs de Killing	169
4.3.3	Transformation de Bogolioubov	170
4.4	Développement adiabatique	173
4.4.1	Vide adiabatique	173
4.4.2	Développement de la fonction à deux points	174
4.5	Divergences et renormalisation de la théorie libre	176
4.5.1	Structure des divergences	176
4.5.2	Renormalisation des divergences	176
4.6	Théorie quantique des champs en interaction	178
4.6.1	Formalisme de Schwinger-Keldysh	178
4.6.2	Évolution des perturbations	179

4.6.3	Expression des valeurs moyennes d'opérateurs	180
4.6.4	Règles de Feynman dans le formalisme de Schwinger-Keldysh	183
4.6.5	Formulation à l'aide d'une intégrale de chemin	184
4.7	Application à un espace de de Sitter	185
4.7.1	Longueur géodésique	185
4.7.2	Choix d'un vide	187
4.7.3	Champ scalaire non massif et minimalement couplé	188
4.8	Corrections radiatives à la masse d'un champ scalaire en de Sitter (article)	193
4.8.1	Motivations et objectifs	193
4.8.2	Présentation de résultats	194
4.8.3	Article	196
4.9	Conclusions	223

Les succès de la théorie quantique des champs dans un espace-temps de Minkowski ont été particulièrement impressionnants au cours du XXème siècle, aboutissant dans les années 1970 au modèle standard de la physique des particules [Weinberg, 1967] [Salam, 1968]. Bien qu'incomplet, le modèle standard rend compte avec une très bonne précision des interactions non-gravitationnelles connues.

Cependant, les observations cosmologiques, depuis les résultats de Slipher [Slipher, 1915] et Hubble [Hubble, 1929] jusqu'aux données les plus récentes [Riess *et al.*, 1998] [Perlmutter *et al.*, 1999], indiquent que l'univers, homogène et isotrope aux grandes échelles, est en expansion. La description minkowskienne utilisée en physique des particules ne peut donc être qu'une approximation, valable uniquement localement.

Bien que la généralisation de la théorie des champs minkowskienne à des espaces non-plats soulève de nombreuses difficultés, elle n'en est pas moins essentielle pour la cosmologie. En effet, les effets quantiques dans l'univers chaud et dense des premiers instants semblent être à l'origine des grandes structures actuellement observées (voir chapitre 5).

De nombreux travaux ont cherché à décrire l'évolution de champs quantiques dans un espace-temps courbe. Les idées principales sont développées en détail dans [Birrell & Davies, 1982] [Wald, 1994] [de Witt, 2003a] et [de Witt, 2003b] (voir aussi [Ford, 1997] [Jacobson, 2003]). Il est bien évident que la théorie quantique des champs en espace-temps courbe n'est pas une théorie cohérente mais simplement une approximation. En effet, quantifier la matière sans quantifier la géométrie ne constitue qu'une description semi-classique de la gravitation. La quantification de la gravité, que nous ne discuterons pas ici, est un problème encore non résolu dont les approches les plus prometteuses sont la supergravité [Baillin & Love, 1994], la théorie des cordes (voir par exemple [Polchinski, 1998a] [Polchinski, 1998b] [Green *et al.*, 1987a] et [Green *et al.*, 1987b]) et la quantification canonique de la gravité (voir [Ashtekar, 1987] [Rovelli, 2004]).

Notons cependant qu'il est possible de quantifier les excitations de la métrique - le graviton - puisque, à l'ordre linéaire, la dynamique du graviton, est déterminée, tout comme pour la matière, par un tenseur énergie-impulsion. En revanche, il n'est pas possible d'inclure de façon cohérente des processus contenant au moins deux boucles de graviton.

Parmi les espace-temps courbes les plus étudiés, nous trouvons les espaces de de Sitter et d'anti-de-Sitter, qui sont maximalelement symétriques, au même titre que l'espace de Minkowski. Outre l'intérêt qu'ils présentent pour la cosmologie, ce sont des espaces de choix pour généraliser la théorie des champs. Les principales contributions concernant la formulation d'une théorie des champs scalaires en de Sitter peuvent être trouvées dans [Chernikov & Tagirov, 1968] [Tagirov, 1973] [Mottola, 1985] [Allen, 1985].

Dans la suite, nous utiliserons une approche semi-classique de la gravitation dans laquelle des champs quantiques de matière seront soumis à la gravité dans le cadre de la relativité générale d'Einstein. Nous n'aborderons pas les conséquences liées à la rétro-action gravitationnelle des champs de matière (voir par exemple [Mukhanov *et al.*, 1997] [Lošic & Unruh, 2006]). En revanche, nous nous intéresserons au domaine de validité de l'approximation minkowskienne ainsi qu'aux corrections induites par la courbure de l'espace-temps. Sans prétendre à l'exhaustivité, ce chapitre cherche à mettre en évidence certains aspects de la théorie des champs en espace-courbe.

Après avoir exposé, dans la partie 4.1, quelques idées générales sur les modifications induites par la géométrie, nous déterminerons les équations du mouvement des champs et discuterons la normalisation des solutions (partie 4.2). La partie 4.3 examine la quantification des champs et les problèmes liés au choix d'un vide. La partie suivante met en relief, à l'aide d'un développement *adiabatique*, les corrections locales que la courbure impose au propagateur d'un champ scalaire. Enfin nous discuterons des effets des divergences dans la partie 4.5 et du traitement des interactions dans la partie 4.6. La dernière partie concerne uniquement les propriétés d'un espace de de Sitter.

4.1 Généralités

4.1.1 Échelles caractéristiques

Nous pouvons déterminer, dans un premier temps, le domaine de validité de la description minkowskienne en comparant les échelles caractéristiques en présence.

À toute particule de masse m est associée une longueur, appelée *longueur de Compton*, définie par

$$\ell_c = \frac{\hbar}{mc} .$$

Cette longueur correspond approximativement à la distance parcourue par une par-

ticule instable de masse m avant de se désintégrer¹; en-deçà de cette échelle, la mécanique quantique relativiste perd sa validité au profit de la théorie quantique des champs.

D'autre part, nous pouvons associer à toute particule d'impulsion "spatiale" physique² k , une longueur d'onde caractéristique

$$\lambda_k = \frac{2\pi}{k} .$$

Une particule de grande impulsion ne sondera que de petites échelles. Au contraire, de faibles impulsions correspondent à de grandes échelles spatiales.

Les échelles caractéristiques induites par la masse et l'impulsion d'une particule définissent une pulsation ω associée à un mode d'excitation d'un champ. L'expression de cette pulsation caractéristique se déduit de la relation de dispersion, elle-même issue de l'équation du mouvement. En relativité restreinte, cette pulsation vaut simplement $\omega_0 = \sqrt{k^2 + m^2}$ tandis qu'elle prend la forme $\omega = \sqrt{k^2/a^2 + m^2}$ dans un espace-temps³ de FLRW de facteur d'échelle a . Les modes de fréquence élevée - ou modes *rapides* - correspondent à des modes massifs ou de petite longueur d'onde. Inversement les modes *lents* sont associés à de faibles masses et de grandes longueurs d'onde.

Cependant, un mode n'est lent ou rapide que par rapport à une échelle caractéristique. Au sein du modèle standard de la physique des particules ou de ses extensions "minkowskiennes", cette dernière est reliée aux échelles d'énergie sondées. En espace-temps courbe, elle s'identifie à la courbure de l'espace-temps. Ainsi, un mode de grande fréquence n'explore qu'un espace localement plat; les effets gravitationnels peuvent alors être négligés. En revanche, il est indispensable de prendre en compte la géométrie non triviale d'un espace-temps de courbure R lorsque

$$\omega^2 < \frac{1}{R} .$$

Dans un espace-temps plat, la condition $R = 0$ assure la validité d'une description minkowskienne. Dans un espace FLRW, le scalaire de Ricci est en général de l'ordre du carré du paramètre de Hubble⁴, H^2 , et l'effet de la courbure est important pour les modes lents tels que

$$k < H \quad \text{et} \quad m < H. \quad (4.1)$$

¹La durée de vie d'une particule est en général inversement proportionnelle à sa masse. Cependant, le coefficient de proportionnalité dépend de la particule considérée. De l'ordre de l'unité pour les bosons Z et W , il est strictement infini pour l'électron.

²Cette notion peut s'avérer ambiguë ou non définie. Afin de définir une impulsion spatiale, il est nécessaire de choisir une foliation de l'espace en terme d'hypersurfaces de genre espace, ce qui n'est pas toujours possible. Nous supposons cependant que de telles hypersurfaces existent, en ayant à l'esprit un espace de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker.

³L'impulsion k est ici comobile.

⁴Remarquons qu'un espace-temps FLRW dominé par la radiation satisfait la condition $R = 0$.

En particulier, l'échelle d'énergie induite par le paramètre de Hubble actuel H_0 est excessivement faible,

$$H_0 \approx 10^{-33} \text{ eV} ,$$

et toutes les particules massives connues évoluent aujourd'hui dans un espace plat. Cependant, lorsque l'univers était plus jeune, la condition (4.1) n'était pas nécessairement remplie par toutes les particules. Pendant l'inflation, par exemple,

$$H_{\text{inf}} \approx 10^{15} \text{ GeV}$$

et tous les modes *super-Hubble* - *i.e.* tels que $k < aH$ - de masse m telle que $m < H_{\text{inf}} \approx 10^{15} \text{ GeV}$ ressentent l'effet de la courbure de l'espace-temps.

4.1.2 Effets de la courbure

La courbure de l'espace-temps complique la formulation d'une théorie des champs, pourtant bien établie dans un espace de Minkowski. Nous examinons les modifications induites par une géométrie non-triviale.

Tout d'abord, la structure algébrique de la théorie des champs dépend du type d'espace-temps considéré et de ses symétries. En effet, dans un espace-temps de Minkowski, la théorie des champs est fondée sur l'invariance sous les transformations de Poincaré [Weinberg, 1995]. Dans un espace-temps en expansion, cette invariance sous les transformations de Poincaré est brisée et de nouvelles invariances, caractérisées par les vecteurs de Killing, doivent être prises en compte. Bien évidemment, l'invariance sous les transformations de Poincaré doit être restaurée localement. En conséquence, les équations du mouvement doivent être modifiées en accord avec les principes de covariance. C'est l'objet de la partie 4.2.

D'autre part, alors que les solutions peuvent être classées en terme de modes de fréquences négative ou positive dans un espace minkowskien, l'identification est plus délicate lorsque l'on impose une invariance sous les changements de coordonnées. La définition du temps perd son caractère absolu, celle de fréquence positive aussi. Cette difficulté, présente en espace-temps courbe, apparaît également en espace plat : un espace de Minkowski peut en effet être paramétré par des coordonnées cartésiennes ou des coordonnées de Rindler. Il existera donc en général plusieurs décompositions en modes d'un champ donné. Ces différentes décompositions induisent différents espaces de Fock présentant chacun un vide particulier. Le choix d'un vide n'est pas trivial en espace-temps courbe et doit reposer sur des critères bien définis. Cette notion sera abordée dans la partie 4.7.2.

Enfin, dans la partie 4.4, nous examinerons, à l'aide d'un développement adiabatique, les corrections induites perturbativement par la courbure aux fonctions de Green. C'est à partir d'un tel développement que la procédure de renormalisation peut être appliquée. Nous en préciserons quelques aspects dans la partie 4.5.

4.2 Équations du mouvement

4.2.1 Connexions de spin

Cherchons l'équation du mouvement d'un champ de spin s dans la métrique

$$g_{\mu\nu}(x) = e_{\mu}^a(x)e_{\nu}^b(x)\eta_{ab}, \quad (4.2)$$

où η_{ab} est la métrique minkowskienne et les Vierbeins⁵ ou tétrades (à quatre dimensions) $e_{\mu}^a(x)$ sont définies par

$$e_{\mu}^a(X) = \left(\frac{\partial y_X^a}{\partial x^{\mu}} \right)_{x=X}, \quad (4.3)$$

où les y_X^a sont les coordonnées normales de Fermi [Misner *et al.*, 1973], définies en $x = X$. Ces dernières permettent d'exprimer les équations du mouvement dans une base localement minkowskienne. Remarquons que les tétrades $e_{\mu}^a(X)$ se transforment comme des vecteurs covariants sous les changements de coordonnées $x^{\mu} \mapsto x'^{\mu}$ et comme des vecteurs contravariants sous les transformations de Lorentz locales $y_X^a \mapsto y_X^{a'} = \Lambda^a_b(X)y_X^b$. Les indices latins a, b, \dots , sont montés et descendus à l'aide de la métrique minkowskienne η_{ab} , les indices grecs μ, ν, \dots , à l'aide de la métrique $g_{\mu\nu}$.

En contractant un vecteur A^{μ} avec $e_{\mu}^a(x)$, nous obtenons une quantité

$$A^a(x) = A^{\mu}(x)e_{\mu}^a(x) \quad (4.4)$$

qui se comporte comme un scalaire sous les transformations de coordonnées et comme un vecteur sous les transformations de Lorentz locales. Les tétrades peuvent donc s'interpréter comme des vecteurs (indice μ) à valeurs vectorielles (indice a) formant une base localement plate. De la même manière, $A_{\mu}(x) = A^a(x)e_{\mu}^a(x)$ est un scalaire de Lorentz et un vecteur sous les changements de coordonnées.

Les tétrades, contrairement à la métrique $g_{\mu\nu}$, ne possèdent pas une dérivée spatialement covariante nulle. En revanche, la dérivée covariante d'une tétrade $e_{\mu}^a(x)$ suivant un vecteur X (vis-à-vis des changements de coordonnées) est un vecteur (sous les transformations de Lorentz) qui peut être décomposé dans la base localement plate des tétrades. En effet, si la connexion de spin ω^b_a est définie par la 1-forme évaluée en X telle que⁶

$$\nabla_X e_a = \omega^b_a(X)e_b, \quad (4.5)$$

nous obtenons, en coordonnées,

$$\omega^b_{\mu a} = e_{\nu}^b \nabla_{\mu} e_{\nu}^a, \quad (4.6)$$

⁵Dans un espace de dimension quelconque, le terme de Vielbeins est utilisé.

⁶Dans tout ce chapitre, nous adoptons la notation ∇ pour indiquer une dérivée spatialement covariante.

où nous avons utilisé la normalisation $e_a^\nu e_\nu^b = \delta_a^b$.

Afin de déterminer, dans la partie 4.2.2, les équations du mouvement d'un champ de spin s , nous allons décrire les lois de transformation des connexions de spin sous les transformations de Lorentz.

Transformations de Lorentz locales

D'après l'expression précédente, les connexions de spin se transforment comme des vecteurs sous les changements de coordonnées. En revanche, bien que les connexions de spin soient invariantes sous les transformations de Lorentz globales, sous les transformations de Lorentz locales $\Lambda_a^b(x)$, elles se transforment selon :

$$\omega_{\mu b}^a \mapsto \omega_{\mu b'}^{a'} = \Lambda^{a'}_a(x) \omega_{\mu b}^a \Lambda^b_{b'}(x) - \nabla_\mu \Lambda^{a'}_a(x) \Lambda^a_{b'}(x). \quad (4.7)$$

Le spin définit les lois de transformation d'un champ sous les transformations de Lorentz. Bien qu'en espace-temps courbe, l'invariance sous les transformations de Lorentz globale soit brisée, nous imposons néanmoins à la théorie les invariances sous les transformations de Lorentz locales et sous les changements de coordonnées.

En espace de Minkowski, sous une transformation de Lorentz globale Λ_a^b , les champs ψ et $\partial_a \psi$ possèdent le même spin et se transforment de la façon suivante

$$\psi \mapsto D[\Lambda] \psi, \quad (4.8)$$

$$\partial_a \psi \mapsto \Lambda_a^b D[\Lambda] \partial_b \psi, \quad (4.9)$$

où $D[\Lambda]$ est une matrice correspondant à une transformation de Lorentz dans la représentation associée au champ ψ .

Dans un espace-temps courbe, ces règles peuvent se généraliser à l'aide de dérivées covariantes et des transformations de Lorentz locales $\Lambda_a^b(x)$, ce qui revient à jauger les transformations de Lorentz. Cherchons donc une dérivée covariante, notée \mathcal{D} telle que, sous les transformations de Lorentz locales,

$$\mathcal{D}_a \psi \mapsto \Lambda_a^b(x) D[\Lambda(x)] \mathcal{D}_b \psi. \quad (4.10)$$

Cette dérivée covariante est reliée à la dérivée spatiale par

$$\mathcal{D}_\mu = \nabla_\mu + \Gamma_\mu, \quad (4.11)$$

où le terme Γ_μ doit se transformer sous les transformations de Lorentz locales $\Lambda(x)$ selon

$$\Gamma_\mu \mapsto D[\Lambda(x)] \Gamma_\mu D^{-1}[\Lambda(x)] - \nabla_\mu D[\Lambda(x)] D^{-1}[\Lambda(x)]. \quad (4.12)$$

On voit donc que $D[\Lambda(x)]$ satisfait la même loi de transformation que la connexion de spin dans la représentation associée à ψ . Si Σ^{ab} sont les générateurs du groupe de Lorentz dans la représentation associée à ψ , nous pouvons donc choisir

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2} \Sigma^{ab} \omega_{\mu ab} = \frac{1}{2} \Sigma^{ab} e_{\nu a} \nabla_\mu e_b^\nu. \quad (4.13)$$

La loi de transformation (4.12) est alors respectée.

Générateurs des transformations de Lorentz

Les générateurs des transformations de Lorentz satisfont les relations de commutation suivantes (voir par exemple [Peskin & Schroeder, 1996] [Weinberg, 1995])

$$[\Sigma_{ab}, \Sigma_{cd}] = \eta_{bc}\Sigma_{ad} - \eta_{ac}\Sigma_{bd} + \eta_{bd}\Sigma_{ca} - \eta_{ad}\Sigma_{cb} . \quad (4.14)$$

Cette algèbre peut être décomposée en deux sous-algèbres dont les générateurs satisfont les relations de commutation

$$[M_a, M_b] = i\epsilon_{ab}{}^c M_c , \quad (4.15)$$

$$[N_a, N_b] = i\epsilon_{ab}{}^c N_c , \quad (4.16)$$

propres aux moments angulaires. Les représentations irréductibles sont indexées par les entiers ou demi-entiers m et n tels que $m(m+1)$ et $n(n+1)$ soient respectivement les valeurs propres de M^2 et N^2 . Le champ scalaire est indexé par $(0, 0)$, les spineurs le sont par $(\frac{1}{2}, 0)$ et $(0, \frac{1}{2})$ tandis que le champ vectoriel peut être indexé par $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

4.2.2 Équations du mouvement de quelques champs

Cas du champ scalaire

Un champ scalaire se transforme trivialement sous les transformations de Lorentz, *i.e.* $D[\Lambda(x)] = Id$. L'équation du mouvement d'un champ scalaire est simplement obtenue en remplaçant les dérivées spatiales par des dérivées spatialement covariantes. Ainsi

$$S_M = \int d^4x \left[\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] \longmapsto S_C = \int d^4x \sqrt{|g|} \left[g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] . \quad (4.17)$$

Le potentiel $V(\phi)$ peut inclure un terme de couplage à la courbure de la forme $\xi R\phi^2$. Le champ est dit *minimalement couplé* lorsque $\xi = 0$. Dans un espace conformément minkowskien et pour un champ non massif, les équations du mouvement du champ se mettent sous la forme de leur équivalent minkowskien lorsque $\xi = (D-2)/[4(D-1)]$, où D est la dimension de l'espace-temps. Dans ce cas, le champ est dit *conformément couplé*.

Champ de spin 1/2

Dans le cas d'un spin 1/2, les générateurs des transformations de Lorentz sont donnés par

$$\Sigma^{ab} = \frac{1}{4} [\gamma^a, \gamma^b] , \quad (4.18)$$

où les matrices γ^a de Dirac vérifient l'algèbre de Clifford en espace-temps plat

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab} . \quad (4.19)$$

Les matrices $\gamma^\mu = e_a^\mu \gamma^a$, quant à elles, satisfont alors l'algèbre de Clifford en espace-temps courbe

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} . \quad (4.20)$$

L'action de Dirac pour un champ ψ de spin 1/2 devient

$$S_M = \int d^4x \left[i\bar{\psi} \gamma^a \partial_a \psi + m\bar{\psi} \psi \right] \longmapsto S_C = \int d^4x \sqrt{|g|} \left[i\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu + \Gamma_\mu) \psi + m\bar{\psi} \psi \right] , \quad (4.21)$$

où $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ et γ^0 est la matrice gamma en espace de Minkowski.

Champ vectoriel

Un champ de spin un, noté A_μ , est soumis à la densité de Lagrangien

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} , \quad (4.22)$$

avec

$$F_{\mu\nu} = \mathcal{D}_\mu A_\nu - \mathcal{D}_\nu A_\mu . \quad (4.23)$$

Dans le cas d'un champ de jauge abélien $U(1)$, les dérivées covariantes se réduisent à de simples dérivées et

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \quad (4.24)$$

Bilan

La procédure utilisée nous est doublement utile. Elle permet en premier lieu d'appréhender correctement la dynamique des champs de spin élevé dans un espace-temps courbe en assurant l'invariance de Lorentz locale. D'autre part, à l'aide de ce formalisme, la dérivée covariante peut être généralisée à toute symétrie interne et, en particulier, aux théories de jauge. Les champs pertinents dans le cadre de la relativité générale sont donc les connections de spin et les tétrades.

4.2.3 Normalisation des solutions

Les équations du mouvement possèdent, en général, des solutions sous la forme de modes, indexés par un indice, continu ou discret, que nous noterons i . Après avoir doté l'espace des solutions d'un produit scalaire, nous pouvons former une base orthonormée des modes propres solutions de l'équation d'évolution. Par exemple, les solutions d'une équation de propagation d'une quantité scalaire en espace de Minkowski sont décomposées sur une base d'ondes planes, indexées par le vecteur d'onde. Une solution générale des équations du mouvement est alors exprimée comme une combinaison linéaire des modes propres.

En espace-temps courbe, le produit scalaire⁷ peut être généralisé sous la forme

$$(\phi_1, \phi_2) = -i \int_{\Sigma} d\Sigma^{\mu} \sqrt{|g_{\Sigma}|} \phi_1 \overleftrightarrow{\mathcal{D}}_{\mu} \phi_2^*, \quad (4.25)$$

où Σ est une hypersurface de Cauchy de genre espace, $d\Sigma^{\mu} = n^{\mu} d\Sigma$, n^{μ} étant vecteur unitaire orienté vers le futur et orthogonal à l'hypersurface Σ et $d\Sigma$ étant un élément de volume infinitésimal de Σ . Ici, ϕ est un champ scalaire et ϕ^* est son dual, \mathcal{D}_{μ} est la dérivée covariante introduite précédemment tandis que g_{Σ} est le déterminant de la métrique induite sur l'hypersurface Σ . Le produit scalaire de Klein-Gordon ainsi défini est indépendant de l'hypersurface⁸ Σ .

On obtient une base orthonormée de l'espace des solutions (u_i) de l'équation du mouvement en imposant les conditions

$$(u_i, u_j) = \delta_{ij}, \quad (u_i^*, u_j^*) = -\delta_{ij}, \quad (u_i, u_j^*) = 0. \quad (4.27)$$

Cependant, en espace-temps courbe, cette base orthonormée n'est en général pas unique.

4.3 Quantification des champs

4.3.1 Moment conjugué et quantification canonique

Il existe plusieurs procédures de quantification des champs. Nous présenterons ici la procédure de quantification canonique qui permet de mettre en évidence les difficultés liées à l'invariance sous les changements de coordonnées.

Singularisons sur la variété considérée une coordonnée temporelle t et des hypersurfaces Σ de genre espace⁹. À partir de l'expression du lagrangien $\mathcal{L}[\phi_a(\mathbf{x}, t)]$, nous obtenons le moment conjugué $\pi_a(\mathbf{x}, t)$ du champ $\phi_a(\mathbf{x}, t)$

$$\pi_a(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi_a(\mathbf{x}, t))}. \quad (4.28)$$

Imposons alors les relations de commutation à temps égaux suivantes

$$\begin{aligned} [\phi_a(\mathbf{x}, t), \phi_b(\mathbf{x}', t)] &= 0, \\ [\pi_a(\mathbf{x}, t), \pi_b(\mathbf{x}', t)] &= 0, \\ [\phi_a(\mathbf{x}, t), \pi_b(\mathbf{x}', t)] &= i\hbar \delta_{ab} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \end{aligned}$$

⁷On parle du produit scalaire de Klein-Gordon.

⁸En effet, d'après le théorème de Gauss, si Σ_1 et Σ_2 sont deux hypersurfaces ne se rejoignant qu'à l'infini, nous obtenons, en posant $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$:

$$\int_{\Sigma} d\Sigma^{\mu} \sqrt{|g_{\Sigma}(x)|} \phi_1(x) \overleftrightarrow{\mathcal{D}}_{\mu} \phi_2^*(x) = \int_{V(\Sigma)} dV \sqrt{|g(x)|} \mathcal{D}^{\mu} \left(\phi_1(x) \overleftrightarrow{\mathcal{D}}_{\mu} \phi_2^*(x) \right) = 0, \quad (4.26)$$

la dernière égalité utilisant le fait que ϕ_1 et ϕ_2 sont solutions des équations du mouvement.

⁹Nous supposons qu'une telle foliation est possible.

Le hamiltonien

$$H[\phi(t), \pi(t)] = \int d^3\mathbf{x} \left\{ \sum_a \pi_a(\mathbf{x}, t) \dot{\phi}_a(\mathbf{x}, t) - \mathcal{L}[\phi_a(\mathbf{x}, t)] \right\} \quad (4.29)$$

agit alors comme un opérateur d'évolution pour les champs

$$\dot{\phi}_a(\mathbf{x}, t) = i \left[H[\phi(t), \pi(t)], \phi_a(\mathbf{x}, t) \right], \quad (4.30)$$

$$\dot{\pi}_a(\mathbf{x}, t) = i \left[H[\phi(t), \pi(t)], \pi_a(\mathbf{x}, t) \right]. \quad (4.31)$$

Cette procédure est directement applicable dans un espace-temps minkowskien puisque l'équation (4.28) définit un unique moment conjugué¹⁰ lorsque les coordonnées cartésiennes sont utilisées. Ce n'est malheureusement plus le cas en espace-temps courbe puisque le temps t n'est défini qu'à un choix de coordonnées près : il existe donc, en général, plusieurs choix de variables temporelles conduisant à différentes définitions du moment conjugué du champ.

4.3.2 Fréquences positives et vecteurs de Killing

Nous pouvons interpréter l'indétermination précédente à l'aide d'une décomposition en modes des solutions des équations d'évolution.

Dans un espace de Minkowski, il existe de manière non ambiguë un vecteur de Killing de genre temps ∂_t qui soit orthogonal aux hypersurfaces de genre espace. Ce vecteur de Killing traduit les symétries de l'espace-temps minkowskien et permet de définir une décomposition en modes de fréquences positive ou négative. Soulignons qu'en espace plat, le signe de ces fréquences ne dépend pas du système de coordonnées choisi¹¹ [Wald, 1994]. En effet, en décomposant les solutions en modes de Fourier, fonctions propres du laplacien, les solutions des équations du mouvement s'écrivent sous la forme

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \left[u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} a_{\mathbf{k}} + u_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x}) e^{i\omega t} a_{\mathbf{k}}^\dagger \right], \quad (4.32)$$

les modes de fréquence positive $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \propto e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ étant normalisés grâce au produit scalaire de Klein-Gordon tandis que la pulsation satisfait la relation de dispersion $\omega = (k^2 + m^2)^{1/2}$. Les opérateurs $a_{\mathbf{k}}$ et $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ sont respectivement les opérateurs création et annihilation associés au mode \mathbf{k} .

Dans un espace-temps courbe, en revanche, trouver un tel vecteur de Killing n'est pas toujours possible. Supposons cependant qu'il existe un vecteur de Killing K^μ , globalement de genre temps, défini par

$$\mathcal{L}_K g_{\mu\nu} = 0. \quad (4.33)$$

¹⁰Notons toutefois que ce moment conjugué n'est pas invariant sous les transformations de Lorentz et en particulier les boosts.

¹¹Ce qui n'est évidemment pas le cas de la valeur de ces fréquences

Il existe alors une coordonnée t par rapport à laquelle la métrique est indépendante et telle que le vecteur de Killing prenne la forme simple¹² $K^\mu = (1, 0, 0, 0)$.

Le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ permet alors de définir une quantité conservée de la forme

$$K = - \int_{\Sigma} K_\mu T^{\mu\nu} d\Sigma_\nu \quad (4.34)$$

qui est indépendante du choix de l'hypersurface Σ . Cette quantité conservée s'apparente à l'énergie transportée dans la direction temporelle¹³, c'est-à-dire à un hamiltonien.

Le commutateur d'un champ et de cette quantité K est alors donné par

$$\mathcal{L}_K \phi = i [K, \phi] , \quad (4.35)$$

par analogie avec les relations (4.30)-(4.31). Le champ ϕ ainsi que sa dérivée de Lie par rapport à K^μ peuvent être décomposés sur la base des solutions de l'équation du mouvement pour ϕ . Les équations mode à mode s'écrivent

$$\mathcal{L}_K u_i^* = i \kappa_i u_i^* , \quad (4.36)$$

où les κ_i sont des constantes et où aucune sommation implicite n'est supposée. Dans ces conditions, les modes u_i peuvent être choisis tels que les constantes κ_i soient positives. Ce choix se réduit à celui des modes de fréquence positive et conduit à

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial t} = i \epsilon_i u_i^* . \quad (4.37)$$

ϵ_i est l'énergie associée à une particule du mode i mesurée par l'horloge associée au vecteur de Killing.

En général, dans un espace-temps courbe, il peut exister un autre vecteur de Killing L^μ qui commute avec K^μ et qui soit également globalement de genre temps. Dans ces conditions, une autre famille de modes \bar{u}_i et \bar{u}_i^* peut être choisie telle que l'on puisse considérer les \bar{u}_i comme des modes de fréquence positive et les \bar{u}_i^* comme des modes de fréquence négative pour une horloge dont le temps propre serait associé à L^μ .

La décomposition en modes propres n'est donc pas unique en général.

4.3.3 Transformation de Bogolioubov

Nous avons vu dans les parties précédentes qu'en espace-temps courbe, un champ peut posséder plusieurs développements en modes. Singularisons deux de ces développements

$$\phi(x) = \sum_i \left(u_i a_i + u_i^* a_i^\dagger \right) , \quad (4.38a)$$

¹²Le vecteur de Killing peut être normalisé de manière à ce que la coordonnée t corresponde au temps propre mesuré par une horloge donnée.

¹³En remarquant que l'intégrand est l'équivalent de T^{00} .

$$\phi(x) = \sum_i \left(\bar{u}_i \bar{a}_i + \bar{u}_i^* \bar{a}_i^\dagger \right) . \quad (4.38b)$$

Les opérateurs annihilation a_i , \bar{a}_i et création a_i^\dagger , \bar{a}_i^\dagger agissent dans deux espaces de Fock distincts. Nous pouvons définir deux vides distincts $|0\rangle$ et $|\bar{0}\rangle$ tels que

$$a_i |0\rangle = 0 \quad \forall i , \quad (4.39)$$

$$\bar{a}_i |\bar{0}\rangle = 0 \quad \forall i . \quad (4.40)$$

Les deux familles de modes u_i et \bar{u}_i étant orthonormées vis-à-vis du produit scalaire de Klein-Gordon

$$(u_i, u_j) = \delta_{ij} , \quad (u_i^*, u_j^*) = -\delta_{ij} , \quad (u_i, u_j^*) = 0 \quad (4.41)$$

et les mêmes relations sont valables pour les modes \bar{u}_i . D'autre part, ces deux familles étant complètes dans l'espace des solutions, il existe une transformation qui permette de passer d'une base à l'autre, appelée transformation de Bogolioubov [Bogolioubov, 1958]

$$\bar{u}_i = \sum_j (\alpha_{ij} u_j + \beta_{ij} u_j^*) , \quad (4.42a)$$

$$\bar{u}_i^* = \sum_j (\alpha_{ij}^* u_j^* + \beta_{ij}^* u_j) . \quad (4.42b)$$

Les coefficients de cette transformation sont obtenus à partir des produits scalaires

$$(\bar{u}_i, u_j) = \alpha_{ij} \quad \text{et} \quad (\bar{u}_i, u_j^*) = -\beta_{ij} . \quad (4.43)$$

En remarquant que le produit scalaire satisfait $(f, g) = (g, f)^*$ pour deux fonctions quelconques f et g , il est possible d'inverser la transformation de Bogolioubov

$$u_i = \sum_j (\alpha_{ji}^* \bar{u}_j - \beta_{ji} \bar{u}_j^*) . \quad (4.44)$$

De plus, pour tout nombre complexe c et toutes fonctions f et g , la relation $c(f, g) = (f, c^*g)$ associée à la décomposition (4.42a) induit les identités suivantes

$$\sum_k (\alpha_{ik} \alpha_{jk}^* - \beta_{ik} \beta_{jk}^*) = \delta_{ij} , \quad (4.45a)$$

$$\sum_k (\alpha_{ik} \beta_{jk} - \beta_{ik} \alpha_{jk}) = 0 . \quad (4.45b)$$

Enfin, les opérateurs création a_i^\dagger et annihilation a_i étant obtenus par $a_i = (\phi, u_i)$ et $a_i^\dagger = -(\phi, u_i^*)$ - et de même pour \bar{a}_i^\dagger et \bar{a}_i , en remplaçant u_i par \bar{u}_i - nous obtenons

$$a_i = \sum_j \left(\alpha_{ji} \bar{a}_j + \beta_{ji}^* \bar{a}_j^\dagger \right) , \quad (4.46a)$$

$$\bar{a}_i = \sum_j \left(\alpha_{ij}^* a_j - \beta_{ij}^* a_j^\dagger \right) . \quad (4.46b)$$

Ainsi, une transformation de Bogolioubov “mélange” les modes de fréquence positive et négative et, par conséquent, mélange également les opérateurs création et annihilation. Le concept de particule peut alors perdre sa signification physique “minkowskienne”.

Création de particules entre deux régions asymptotiquement statiques

Supposons que l'espace-temps soit asymptotiquement statique dans le passé et le futur. Définissons un vide au sein de chacune de ces régions : $|0, \text{in}\rangle$ dans l'infini passé et $|0, \text{out}\rangle$ dans l'infini futur. Dans des régions asymptotiquement plates, chacun de ces vides s'identifie à un vide minkowskien.

Dans ces conditions, le champ admet les décompositions asymptotiques suivantes

$$\phi(x) = \sum_i \left[a_i^{\text{in}} \varphi_i^{\text{in}} + a_i^{\dagger \text{in}} \varphi_i^{* \text{in}} \right] \quad \text{lorsque } t \rightarrow -\infty , \quad (4.47)$$

et

$$\phi(x) = \sum_i \left[a_i^{\text{out}} \varphi_i^{\text{out}} + a_i^{\dagger \text{out}} \varphi_i^{* \text{out}} \right] \quad \text{lorsque } t \rightarrow +\infty . \quad (4.48)$$

Nous avons introduit les opérateurs annihilation a_i^{in} et a_i^{out} tels que

$$a_i^{\text{in}} |0, \text{in}\rangle = 0 \quad \text{et} \quad a_i^{\text{out}} |0, \text{out}\rangle = 0 \quad \forall i . \quad (4.49)$$

Les deux espaces de Fock ainsi définis sont reliés par une transformation de Bogolioubov (4.42a)-(4.46b)

$$\begin{aligned} a_i^{\text{out}} &= \sum_j \left(\alpha_{ij}^* a_j^{\text{in}} + \beta_{ij}^* a_j^{\dagger \text{in}} \right) , \\ a_i^{\dagger \text{out}} &= \sum_j \left(\alpha_{ij} a_j^{\dagger \text{in}} + \beta_{ij} a_j^{\text{in}} \right) . \end{aligned} \quad (4.50)$$

En général, les deux vides ne sont pas équivalents puisque

$$a_i^{\text{out}} |0, \text{in}\rangle = \sum_j \beta_{ij} |j, \text{in}\rangle \neq 0 . \quad (4.51)$$

Plaçons-nous dans la représentation d'Heisenberg, dans laquelle seuls les opérateurs évoluent avec le hamiltonien, les états étant indépendants du temps. En particulier, si l'état initial est le vide $|0, \text{in}\rangle$, il reste identique à lui-même au cours de l'évolution. Introduisons alors l'opérateur *nombre de particules* $N_i = a_i^\dagger a_i$, où les opérateurs création et annihilation évoluent dans le temps. Dans l'infini futur, cet opérateur prend la forme asymptotique $N_i^{\text{out}} = a_i^{\dagger \text{out}} a_i^{\text{out}}$. Bien que la valeur moyenne

du nombre de particules soit nulle dans le vide $|0, \text{out}\rangle$, l'action de cet opérateur dans le vide $|0, \text{in}\rangle$ n'est pas triviale puisque

$$\langle 0, \text{in} | N_i^{\text{out}} | 0, \text{in} \rangle = \sum_j |\beta_{ij}|^2 \neq 0 . \quad (4.52)$$

L'équation (4.52) indique que l'état final contient en général des particules malgré l'évolution *libre* des champs. La création de ces particules est attribuée à l'évolution temporelle de l'environnement du champ et ne dépend que des états initial et final. Ce résultat n'est cependant pas spécifique à un espace-temps courbe. Dans un espace de Minkowski, en effet, si un observateur inertiel ne voit aucune particule, un observateur uniformément accéléré, quant à lui, mesurera une distribution thermique de particules, dont la température caractéristique est l'inverse de l'accélération [Unruh, 1976], [de Witt, 1979]. En relativité générale, il n'y a aucun observateur privilégié ; la notion de particules est donc toute relative. D'autre part, le fait que l'opérateur nombre de particules soit non local génère des difficultés d'interprétation : le nombre de particules doit dépendre des propriétés de l'espace-temps dans son ensemble.

En revanche, la valeur moyenne du tenseur énergie impulsion dans un état donné est une observable mieux adaptée : c'est une quantité covariante définie localement. De plus, cette valeur peut servir à l'étude de la rétro-action des effets quantiques sur la métrique, puisque le tenseur énergie-impulsion intervient dans les équations d'Einstein.

4.4 Développement adiabatique

4.4.1 Vide adiabatique

Dans le cas où l'espace-temps ne contient pas de région statique, l'approximation adiabatique doit, en général, être utilisée.

En effet, nous avons vu qu'il était possible de définir une pulsation ω caractéristique d'un mode d'excitation d'un champ. Déduite de la relation de dispersion, cette pulsation possède une dépendance temporelle reliée à celle de la métrique. Dans le régime WKB défini par $\dot{\omega} \ll \omega^2$, il est en général possible de trouver des solutions approchées à l'équation du mouvement. Nous associons alors à la pulsation ω un *paramètre adiabatique* T considéré comme un infiniment petit du premier ordre. Les quantités ω^2 et $\dot{\omega}$ sont d'ordre T^2 . Itérativement, il est possible de trouver des solutions approchées de l'équation d'évolution à l'ordre n dans le paramètre adiabatique T (nous négligeons alors les termes en T^p où $p > n$).

Si $\varphi_i^{(n)}$ est un mode propre de l'équation du mouvement à l'ordre T^n , le champ ϕ , solution à tout ordre de l'équation d'évolution, se décompose selon

$$\phi = \sum_i \left[c_i^{(n)} \varphi_i^{(n)} + d_i^{(n)} \varphi_i^{*(n)} \right] , \quad (4.53)$$

où l'indice n précise que les solutions sont tronquées à l'ordre T^n . Le choix des quantités c et d assure une définition du vide en fonction de conditions initiales données.

Une telle approximation ne donne accès qu'à la composante "haute-fréquence" des modes et permet de singulariser un vide. Dès lors, nous pouvons utiliser ces approximations afin de déduire le comportement aux petites échelles des fonctions de Green. En particulier, la théorie libre est caractérisée par la fonction de Green à deux points, que nous étudions ci-après.

4.4.2 Développement de la fonction à deux points

Afin de déterminer la structure ultraviolette du propagateur d'un champ scalaire en espace courbe, nous pouvons appliquer un développement adiabatique. Ayant imposé l'invariance du lagrangien sous les transformations de Lorentz locales, nous nous attendons à une structure localement minkowskienne. Pour le vérifier, nous devons, dans un premier temps, décrire la géométrie localement, c'est-à-dire développer la métrique autour d'une métrique plate. Nous devons ensuite exprimer le propagateur entre deux points relativement peu distants l'un de l'autre. À cette fin, l'utilisation d'une transformée de Fourier semble adaptée, les petites échelles correspondant aux grandes impulsions. Bien que les fonctions propres du laplacien ne soient pas des ondes planes en général, il est toujours possible d'imposer un tel développement localement en imposant un filtre aux fonctions considérées de manière à ce qu'elles tendent rapidement vers zéro lorsqu'on s'éloigne d'un volume donné.

Le paramètre adiabatique pertinent sera alors la pulsation $\omega = \sqrt{k^2 - m^2}$ tout comme en espace plat.

Développons localement la métrique autour d'une métrique plate. Nous pouvons, par exemple, utiliser les coordonnées normales de Riemann, introduites initialement par B. Riemann [Riemann, 1868] (voir aussi [Poisson, 2004]). En notant y^α les coordonnées de Riemann du point x à partir de l'origine choisie en x' , nous obtenons

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{3}R_{\mu\alpha\nu\beta} y^\alpha y^\beta - \frac{1}{6}\nabla_\gamma R_{\mu\alpha\nu\beta} y^\alpha y^\beta y^\gamma \quad (4.54)$$

$$+ \left[\frac{1}{20}\nabla_\delta \nabla_\gamma R_{\mu\alpha\nu\beta} + \frac{2}{45}R_{\alpha\mu\beta\lambda} R_{\gamma\nu\delta}^\lambda \right] y^\alpha y^\beta y^\gamma y^\delta + o(y^4). \quad (4.55)$$

Dans un second temps, afin de manipuler des quantités scalaires et non des densités, nous introduisons le bi-scalaire $\mathcal{G}_F(x, x')$, formé à partir de la fonction de Green $G_F(x, x')$ et défini par $\mathcal{G}_F(x, x') = |g(x)|^{1/2} G_F(x, x')$. La fonction $\mathcal{G}_F(x, x')$ de x se comporte donc comme un scalaire sous les changements de coordonnées. Notons que le facteur $\sqrt{|g|}$ apparaît lorsque nous prenons x' comme origine et considérons x comme une variable de position¹⁴. Afin de décrire la physique locale, nous écrivons

¹⁴Nous aurions très bien pu fixer l'origine au milieu de la géodésique joignant x et x' : la quantité

le scalaire $\mathcal{G}_F(x, x')$ sous la forme d'une transformée de Fourier

$$\mathcal{G}_F(x, x') = \int d^D k e^{-iky} \mathcal{G}_F(k), \quad (4.56)$$

où $ky = \eta_{\alpha\beta} k^\alpha y^\beta$. L'équation du mouvement pour le propagateur de Feynman peut être ré-écrite à l'aide des coordonnées normales de Riemann, puis par un développement perturbatif en puissances du paramètre adiabatique $\omega^{-1} = (k^2 - m^2)^{-1/2}$, nous obtenons [Bunch & Parker, 1979]

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_F(k) = & \frac{1}{k^2 - m^2} - \left(\frac{1}{6} - \xi\right) \frac{R}{(k^2 - m^2)^2} + \frac{i}{2} \left(\frac{1}{6} - \xi\right) \nabla_\alpha R \frac{\partial}{\partial k^\alpha} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} \\ & - \frac{1}{3} a^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial k^\alpha} \frac{\partial}{\partial k^\beta} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} + \left[\left(\frac{1}{6} - \xi\right)^2 R^2 + \frac{2}{3} a^\lambda{}_\lambda \right] \frac{1}{(k^2 - m^2)^3} \\ & + \dots \end{aligned} \quad (4.57)$$

avec

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta} = & \frac{1}{2} \left(\xi - \frac{1}{6}\right) \nabla_{\alpha\beta} R + \frac{1}{120} \nabla_{\alpha\beta} R - \frac{1}{40} \nabla_\lambda \nabla^\lambda R_{\alpha\beta} \\ & - \frac{1}{30} R_{\alpha}{}^\lambda R_{\beta\lambda} + \frac{1}{60} R_{\alpha}{}^\lambda{}_\beta R_{\kappa\lambda} + \frac{1}{60} R^{\lambda\mu\kappa}{}_\alpha R_{\beta\lambda\mu\kappa}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

L'ordre adiabatique dominant caractérise le comportement minkowskien et nous retrouvons la forme usuelle du propagateur. Dans l'espace réel, ce terme conduit à des divergences quadratique et logarithmique (si la masse est non nulle) dans une fréquence de coupure ultraviolette. Les termes suivants mettent en évidence les diverses contributions sous dominantes induites par la géométrie. En appliquant une transformée de Fourier inverse, nous décelons une divergence logarithmique, proportionnelle au scalaire de Ricci, dans l'expression du propagateur évalué en des points coïncidents. Les procédures usuelles de renormalisation doivent être généralisées afin de prendre en compte de telles divergences.

Cette approche permet de décrire le comportement des fonctions de Green localement en utilisant un développement par rapport à la courbure. Bien évidemment, ce développement n'est valable que lorsque la courbure n'est pas trop importante. En champ fort, au voisinage d'un trou noir par exemple, ce développement perturbatif perd vite sa validité et des effets non perturbatifs doivent être pris en compte.

Néanmoins, ce traitement possède l'avantage de mettre en évidence le type de divergences ultraviolettes attendues. Il ne précise cependant pas le comportement du champ à grande échelle et ne permet pas de définir un état du vide sur l'ensemble de l'espace. Il ne tient pas compte non plus de la topologie de l'espace.

La partie suivante consiste en une discussion de la structure de ces divergences et de leur renormalisation.

scalaire issue de la fonction de Green est alors défini par l'expression symétrique $\mathcal{G}_F(x, x') = |g(x)|^{1/4} G_F(x, x') |g(x')|^{1/4}$.

4.5 Divergences et renormalisation de la théorie libre

4.5.1 Structure des divergences

En théorie des champs, la procédure de renormalisation est indispensable, même en l'absence d'interaction. Par exemple, dans un espace-temps minkowskien, un ordre normal, qui est une procédure de renormalisation parmi d'autres, est introduit de manière à compenser les contributions infinies à l'énergie. Étant donné qu'en l'absence de gravitation, seules des différences d'énergie sont mesurables, il est possible de redéfinir le zéro des énergies, afin de manipuler des quantités finies. Cette procédure s'avère délicate en espace-temps courbe car les équations d'Einstein font intervenir, non pas des différences d'énergie, mais des densités d'énergie.

D'après le développement adiabatique précédent, nous nous attendons à ce que les divergences ultraviolettes principales soient les mêmes que celles trouvées en Minkowski. En revanche, rien n'exclut des divergences sous-dominantes, proportionnelles au tenseur de Riemann et à ses contractions, c'est-à-dire induites par la géométrie.

Dans le cas général, nous attendons des divergences pour les fonctions à deux points d'un champ scalaire de la forme

$$G_F(x, x') = \frac{U(x, x')}{\sigma(x, x')} + V(x, x') \ln(\sigma(x, x')) + W(x, x'), \quad (4.59)$$

où $U(x, x')$, $V(x, x')$ et $W(x, x')$ sont des fonctions régulières en $x = x'$. Cette forme est appelée forme de Hadamard [Hadamard, 1923]. Fulling *et al.* [Fulling *et al.*, 1978] ont montré que si cette forme était valable à un instant donné dans un ouvert au voisinage d'une surface de Cauchy, alors elle était valable partout. Bien qu'aucun théorème général ne permette de prédire l'existence ou non d'un développement de Hadamard, il s'avère que l'expression 4.59 s'applique à la plupart des géométries et des états quantiques d'intérêt. En particulier, les espace-temps FLRW de la cosmologie imposent la forme de Hadamard au propagateur.

Nous discutons dans la partie suivante les effets induits par la renormalisation de telles divergences.

4.5.2 Renormalisation des divergences

Le problème fondamental

Le développement adiabatique (4.57), initié par Schwinger [Schwinger, 1951] puis généralisé par de Witt [Witt, 1963] [de Witt, 1975], permet de déterminer la structure des divergences ultraviolettes d'une théorie. En espace-temps courbe, les divergences sous-dominantes sont associées à des facteurs géométriques, c'est-à-dire au tenseur de Riemann. Les contre-termes infinis qui, une fois introduits dans le lagrangien total, doivent compenser ces divergences, dépendent eux aussi du tenseur de Riemann.

Ces derniers peuvent, par conséquent, être assimilés à la partie gravitationnelle de l'action, c'est-à-dire à l'action d'Einstein-Hilbert

$$S_g = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{|g|} (R - 2\Lambda) .$$

Les contre-termes introduits font intervenir

- i) une renormalisation de la constante de Newton G ,
- ii) une renormalisation de la constante cosmologique Λ ,
- iii) des termes quadratiques dans le tenseur de Riemann de la forme¹⁵

$$H = \alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \gamma R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} ,$$

où α , β et γ sont des constantes infinies.

Comme dans toute procédure de renormalisation, les coefficients α , β et γ ne sont fixés que par des conditions de renormalisation issues de l'expérience. N'ayant pas encore observé de déviations significatives à la relativité générale, nous pouvons raisonnablement ajuster ces coefficients de manière à obtenir une théorie effective qui corresponde, aux échelles d'énergie accessibles, à la relativité générale. Toutefois de nombreux travaux s'intéressent aux extensions de la relativité générale (par exemple les théories scalaire-tenseur [Brans & Dicke, 1961], les actions gravitationnelles incluant une fonction quelconque de la courbure [Mukhanov *et al.*, 1992],...).

Rétro-action

N'ayant pas à notre disposition une théorie quantique de la gravitation, nous adoptons en général une approche semi-classique, caractérisée par une métrique classique et des champs de matière quantiques. Les équations d'Einstein, dans l'approximation de Hartree, font intervenir la valeur moyenne du tenseur énergie-impulsion et s'écrivent

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \langle T_{\mu\nu} \rangle , \quad (4.60)$$

où la constante cosmologique Λ , la constante de Newton G et la valeur moyenne $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ ont une valeur finie après renormalisation. Afin d'être solution des équations d'Einstein, la quantité $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ doit posséder certaines propriétés. L'ensemble des conditions que doit satisfaire un tenseur énergie-impulsion "raisonnable" ont été décrites par Wald [Wald, 1977] [Wald, 1978a] [Wald, 1978b]. En particulier, en raison des identités de Bianchi, la loi de conservation

$$\nabla_\mu \langle T^{\mu\nu} \rangle = 0 \quad (4.61)$$

¹⁵Notons que dans un espace à quatre dimensions, la combinaison

$$R^2 - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}$$

est un invariant topologique dont l'intégrale fournit une constante, la caractéristique d'Euler de la variété.

doit être vérifiée. Ces conditions ne sont en général pas uniques et ne permettent de définir un tenseur énergie-impulsion qu'à un tenseur conservé près, quadratique dans le tenseur de Riemann. Pour une discussion de la renormalisabilité du tenseur énergie-impulsion, voir par exemple [Bunch, 1979].

Notons que la rétro-action induite par les corrections quadratiques dans le scalaire de Ricci ont été étudiées dans [Starobinsky, 1980] afin de proposer une origine possible de la constante cosmologique.

À présent et dans tous les développements ultérieurs, nous supposons que la théorie libre est bien définie et qu'il est possible d'étudier les effets quantiques des interactions dans le cadre de la relativité générale. Le but des parties suivantes est de présenter le formalisme de Schwinger-Keldysh, approprié à la description des interactions en cosmologie.

4.6 Théorie quantique des champs en interaction

Dans un espace-temps de Minkowski, la description des interactions d'une théorie des champs fait généralement intervenir les hypothèses suivantes :

- i) le système considéré est initialement libre,
- ii) l'interaction n'a lieu que pendant une durée finie,
- iii) l'état final est libre et s'identifie à l'état initial.

Comme nous l'avons souligné page 171, l'état final, du fait de la dynamique gravitationnelle, ne s'identifie pas à l'état initial : il est alors nécessaire de rendre compte à la fois des interactions des champs entre eux et de l'évolution de la métrique. Afin de ne considérer que les effets induits par les interactions non-gravitationnelles, il est plus commode de calculer des fonctions de corrélation à temps égaux plutôt que des processus de diffusion entre un état initial et un état final. Le formalisme adapté à une telle description est celui initialement introduit par Schwinger [Schwinger, 1961] et Keldysh [Keldysh, 1965], appelé formalisme de Schwinger-Keldysh, formalisme "in-in" ou formalisme à boucle temporelle¹⁶. Son application à la cosmologie n'a été explorée que quelques années plus tard [Jordan, 1986] [Calzetta & Hu, 1987]. Nous en proposons une description dans la suite en nous appuyant sur le travail de S. Weinberg [Weinberg, 2005].

4.6.1 Formalisme de Schwinger-Keldysh

Comme nous l'avons signalé, le formalisme de Schwinger-Keldysh est particulièrement adapté à la description de champs en interaction dans un espace-temps courbe et plus précisément les espace-temps cosmologiques. En effet, la cosmologie traite bien plus souvent des fonctions de corrélation¹⁷ que des amplitudes de diffusion

¹⁶En anglais *closed time path formalism*.

¹⁷Par exemple la fonction à deux points - ou *spectre de puissance* - du potentiel gravitationnel à la fin de l'inflation. D'autres fonctions de corrélations à temps égaux qui en dépendent sont

de certains processus.

Deux approches distinctes peuvent être employées en cosmologie.

Ou bien, nous fixons l'état initial *et* l'état final, ce dernier étant accessible grâce aux observations. Il suffit alors d'étudier les différents processus ayant lieu entre ces deux états. Cette méthode s'avère cependant particulièrement ardue car elle nécessite de prendre en compte un grand nombre de diffusions.

Une seconde possibilité consiste à fixer l'état initial correspondant au vide. Nous étudions alors l'évolution d'un système sans fixer l'état final et étudions ses fonctions de corrélation. C'est la méthode généralement adoptée en cosmologie. Elle est alors fondé sur un formalisme "in-in".

4.6.2 Évolution des perturbations

Considérons un système régi par un hamiltonien général formé des variables canoniques $\phi_a(\mathbf{x}, t)$ et de leurs variables conjuguées $\pi_a(\mathbf{x}, t)$. Comme nous l'avons vu, une telle description possède une part d'arbitraire inhérente au libre choix du système de coordonnées. Nous supposons dans la suite que le système de coordonnées est fixé et qu'il existe un vecteur de Killing de genre temps.

Les variables canoniquement conjuguées vérifient les relations de commutation à temps égaux suivantes

$$[\phi_a(\mathbf{x}, t), \pi_b(\mathbf{y}, t)] = i\delta_{ab}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\phi_a(\mathbf{x}, t), \phi_b(\mathbf{y}, t)] = [\pi_a(\mathbf{x}, t), \pi_b(\mathbf{y}, t)] = 0, \quad (4.62)$$

ainsi que les équations du mouvement suivantes

$$\dot{\phi}_a(\mathbf{x}, t) = i \left[H[\phi(t), \pi(t)], \phi_a(\mathbf{x}, t) \right], \quad (4.63)$$

$$\dot{\pi}_a(\mathbf{x}, t) = i \left[H[\phi(t), \pi(t)], \pi_a(\mathbf{x}, t) \right]. \quad (4.64)$$

L'indice a correspond aux différents champs ainsi qu'à leurs spins. En cosmologie, nous nous intéressons, la plupart du temps, aux fluctuations quantiques des champs autour d'une valeur classique, ne dépendant que du temps dans un espace homogène et isotrope. Nous supposons alors l'existence d'une solution "classique" dépendante du temps - et, en toute généralité, de l'espace - des équations du mouvement. Les variables classiques, notées $\bar{\phi}_a(\mathbf{x}, t)$ et $\bar{\pi}_a(\mathbf{x}, t)$, vérifient donc

$$\dot{\bar{\phi}}_a(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta H[\bar{\phi}(t), \bar{\pi}(t)]}{\delta \bar{\pi}_a(\mathbf{x}, t)}, \quad \dot{\bar{\pi}}_a(\mathbf{x}, t) = -\frac{\delta H[\bar{\phi}(t), \bar{\pi}(t)]}{\delta \bar{\phi}_a(\mathbf{x}, t)}, \quad (4.65)$$

et nous pouvons développer les solutions des équations du mouvement autour de ces solutions de fond

$$\phi_a(\mathbf{x}, t) = \bar{\phi}_a(\mathbf{x}, t) + \delta\phi_a(\mathbf{x}, t), \quad \pi_a(\mathbf{x}, t) = \bar{\pi}_a(\mathbf{x}, t) + \delta\pi_a(\mathbf{x}, t), \quad (4.66)$$

également étudiées comme, par exemple, celles de la température, de la polarisation du CMB ou celles de la densité de matière ou de vitesse.

afin d'étudier l'évolution des perturbations. Comme les champs classiques commutent, les relations de commutation à temps égaux sont valables pour les perturbations

$$[\delta\phi_a(\mathbf{x}, t), \delta\pi_b(\mathbf{y}, t)] = i\delta_{ab}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad [\delta\phi_a(\mathbf{x}, t), \delta\phi_b(\mathbf{y}, t)] = [\delta\pi_a(\mathbf{x}, t), \delta\pi_b(\mathbf{y}, t)] = 0, \quad (4.67)$$

et les équations d'évolution prennent la forme

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\phi}}_a(\mathbf{x}, t) + \delta\dot{\phi}_a(\mathbf{x}, t) &= i [H[\phi(t), \pi(t)], \delta\phi_a(\mathbf{x}, t)] , \\ \dot{\bar{\pi}}_a(\mathbf{x}, t) + \delta\dot{\pi}_a(\mathbf{x}, t) &= i [H[\phi(t), \pi(t)], \delta\pi_a(\mathbf{x}, t)] . \end{aligned} \quad (4.68)$$

Décomposons le hamiltonien en une partie indépendante ou linéaire dans les perturbations et une partie d'ordre supérieur à deux dans les perturbations

$$\begin{aligned} H[\phi(t), \pi(t)] &= H[\bar{\phi}(t), \bar{\pi}(t)] + \sum_a \int d^3\mathbf{x} \frac{\delta H[\bar{\phi}(t), \bar{\pi}(t)]}{\delta \bar{\phi}_a(\mathbf{x}, t)} \delta\phi_a(\mathbf{x}, t) + \tilde{H}[\delta\phi(t), \delta\pi(t); t] , \\ &+ \sum_a \int d^3\mathbf{x} \frac{\delta H[\bar{\phi}(t), \bar{\pi}(t)]}{\delta \bar{\pi}_a(\mathbf{x}, t)} \delta\pi_a(\mathbf{x}, t) . \end{aligned} \quad (4.69)$$

Bien que le hamiltonien total H régit le comportement des champs et de leurs variables conjuguées, c'est \tilde{H} qui régit l'évolution des perturbations. En effet, à l'aide des équations classiques du mouvement (4.65) et des relations de commutation (4.67), nous pouvons établir les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} i \sum_b \int d^3\mathbf{y} \left[\frac{\delta H[\bar{\phi}(t), \bar{\pi}(t)]}{\delta \bar{\phi}_b(\mathbf{y}, t)} \delta\phi_b(\mathbf{y}, t) + \frac{\delta H[\bar{\phi}(t), \bar{\pi}(t)]}{\delta \bar{\pi}_b(\mathbf{y}, t)} \delta\pi_b(\mathbf{y}, t), \delta\phi_a(\mathbf{x}, t) \right] &= \dot{\bar{\phi}}_a(\mathbf{x}, t) , \\ i \sum_b \int d^3\mathbf{y} \left[\frac{\delta H[\bar{\phi}(t), \bar{\pi}(t)]}{\delta \bar{\phi}_b(\mathbf{y}, t)} \delta\phi_b(\mathbf{y}, t) + \frac{\delta H[\bar{\phi}(t), \bar{\pi}(t)]}{\delta \bar{\pi}_b(\mathbf{y}, t)} \delta\pi_b(\mathbf{y}, t), \delta\pi_a(\mathbf{x}, t) \right] &= \dot{\bar{\pi}}_a(\mathbf{x}, t) . \end{aligned}$$

Par soustraction, nous constatons que les perturbations évoluent bien sous l'action de \tilde{H}

$$\begin{aligned} \delta\dot{\phi}_a(\mathbf{x}, t) &= i \left[\tilde{H}[\phi(t), \pi(t); t], \delta\phi_a(\mathbf{x}, t) \right] , \\ \delta\dot{\pi}_a(\mathbf{x}, t) &= i \left[\tilde{H}[\phi(t), \pi(t); t], \delta\pi_a(\mathbf{x}, t) \right] . \end{aligned} \quad (4.70)$$

Remarquons que le hamiltonien \tilde{H} dépend explicitement du temps par l'intermédiaire des solutions classiques $\bar{\phi}$ et $\bar{\pi}$.

4.6.3 Expression des valeurs moyennes d'opérateurs

Cherchons à résoudre les équations d'évolution des fluctuations des champs. Les fluctuations à la date t peuvent s'écrire en fonction des fluctuations à une date

antérieure t_0 grâce à un opérateur d'évolution, correspondant à une transformation unitaire de la forme

$$\begin{aligned}\delta\phi_a(t) &= U^{-1}(t, t_0)\delta\phi_a(t_0)U(t, t_0), \\ \delta\pi_a(t) &= U^{-1}(t, t_0)\delta\pi_a(t_0)U(t, t_0).\end{aligned}\quad (4.71)$$

À partir des équations du mouvement (4.70), l'équation régissant l'évolution de l'opérateur unitaire $U(t, t_0)$ s'écrit

$$\frac{d}{dt}U(t, t_0) = -iU(t, t_0)\tilde{H}[\delta\phi(t), \delta\pi(t); t] = -i\tilde{H}[\delta\phi(t_0), \delta\pi(t_0); t]U(t, t_0). \quad (4.72)$$

La dernière égalité est obtenue en développant le hamiltonien \tilde{H} en puissances des champs puis en utilisant les relations (4.71). Nous imposons également la condition initiale

$$U(t_0, t_0) = 1. \quad (4.73)$$

La date initiale t_0 peut être fixée de façon à définir un vide adiabatique. Il est également possible de la faire correspondre à une région statique de l'espace-temps, si cette dernière existe. En cosmologie, l'instant t_0 est choisi généralement infiniment loin dans le passé, $t_0 = -\infty$, date à laquelle la plupart des modes d'excitation des champs ont un comportement minkowskien. Nous supposons également l'absence d'interaction à la date t_0 . Afin d'obtenir une expression explicite pour $U(t, t_0)$, le hamiltonien \tilde{H} peut être décomposé en une partie cinétique H_0 , quadratique dans les fluctuations et une partie d'interaction H_I :

$$\tilde{H}[\delta\phi(t), \delta\pi(t); t] = H_0[\delta\phi(t), \delta\pi(t); t] + H_I[\delta\phi(t), \delta\pi(t); t]. \quad (4.74)$$

Nous cherchons alors à développer l'opérateur d'évolution $U(t, t_0)$ en puissance du hamiltonien d'interaction.

Pour ce faire, nous introduisons les fluctuations dans la représentation d'interaction $\delta\phi_a^I(t)$ et $\delta\pi_a^I(t)$ de manière à ce que leur dépendance temporelle soit induite par la partie libre du hamiltonien

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_a^I(\mathbf{x}, t) &= i [H_0[\phi^I(t), \pi^I(t)], \phi_a^I(\mathbf{x}, t)], \\ \dot{\pi}_a^I(\mathbf{x}, t) &= i [H_0[\phi^I(t), \pi^I(t)], \pi_a^I(\mathbf{x}, t)].\end{aligned}\quad (4.75)$$

Les champs étant supposés libres à la date t_0 , nous imposons les conditions initiales suivantes

$$\delta\phi_a^I(t_0) = \delta\phi_a(t_0) \text{ et } \delta\pi_a^I(t_0) = \delta\pi_a(t_0). \quad (4.76)$$

De façon similaire au traitement précédent, nous traduisons l'évolution temporelle des champs ϕ^I et π^I dans la représentation d'interaction à l'aide d'un opérateur unitaire $U_0(t, t_0)$

$$\begin{aligned}\delta\phi_a^I(t) &= U_0^{-1}(t, t_0)\delta\phi_a(t_0)U_0(t, t_0), \\ \delta\pi_a^I(t) &= U_0^{-1}(t, t_0)\delta\pi_a(t_0)U_0(t, t_0).\end{aligned}\quad (4.77)$$

L'opérateur d'évolution $U_0(t, t_0)$ vérifie alors l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}U_0(t, t_0) = -iU_0(t, t_0)H_0 [\delta\phi^I(t), \delta\pi^I(t); t] = -iH_0 [\delta\phi^I(t_0), \delta\pi^I(t_0); t] U_0(t, t_0) , \quad (4.78)$$

associée à la condition initiale

$$U_0(t_0, t_0) = 1 . \quad (4.79)$$

Nous pouvons alors établir le lien entre les deux opérateurs d'évolution U et U_0 précédemment introduits. En effet, posons

$$U(t, t_0) = U_0(t, t_0)F(t, t_0) , \quad (4.80)$$

avec

$$F(t_0, t_0) = 1 . \quad (4.81)$$

En utilisant les relations suivantes, valables pour chaque hamiltonien \tilde{H} , H_0 et H_I ,

$$\begin{aligned} H [\delta\phi^I(t), \delta\pi^I(t); t] &= U_0^{-1}(t, t_0)H [\delta\phi(t_0), \delta\pi(t_0); t] U_0(t, t_0) , \\ H [\delta\phi(t), \delta\pi(t); t] &= U^{-1}(t, t_0)H [\delta\phi(t_0), \delta\pi(t_0); t] U(t, t_0) , \end{aligned} \quad (4.82)$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{dF(t, t_0)}{dt} &= \frac{d}{dt} [U_0^{-1}(t, t_0)U(t, t_0)] = -iU_0^{-1}(t, t_0)H_I [\delta\phi(t_0), \delta\pi(t_0); t] U(t, t_0) \\ &= -iH_I [\delta\phi^I(t), \delta\pi^I(t); t] F(t, t_0) . \end{aligned} \quad (4.83)$$

Utilisant la notation condensée

$$H_I(t) = U_0^{-1}(t, t_0)H_I [\delta\phi(t_0), \delta\pi(t_0); t] U_0(t, t_0) = H_I [\delta\phi^I(t), \delta\pi^I(t); t] , \quad (4.84)$$

la solution pour $F(t, t_0)$ s'écrit

$$F(t, t_0) = T \exp \left(-i \int_{t_0}^t H_I(t) dt \right) , \quad (4.85)$$

où T indique que les produits d'opérateurs issus du développement de l'exponentielle doivent être écrits par ordre de temps décroissant. L'expression d'un opérateur quelconque, fonction des champs ϕ et π , s'écrit, à la date t , en fonction de celle du champ libre

$$\begin{aligned} Q(t) &= F^{-1}(t, t_0)Q^I(t)F(t, t_0) \\ &= \left[A \exp \left(i \int_{t_0}^t H_I(t) dt \right) \right] Q^I(t) \left[T \exp \left(-i \int_{t_0}^t H_I(t) dt \right) \right] , \end{aligned} \quad (4.86)$$

où A désigne un anti- T -produit, indiquant que les opérateurs doivent être écrits par ordre de temps croissant.

4.6.4 Règles de Feynman dans le formalisme de Schwinger-Keldysh

Les raisonnements précédents nous incitent à établir les règles de Feynman dans le formalisme de Schwinger-Keldysh. Ces dernières sont fondées sur les règles de Feynmann usuelles à quelques extensions près.

Les règles de Feynman sont obtenues en développant les exponentielles contenues dans l'équation (4.86) en puissances des constantes de couplage. Les champs apparaissant dans l'expression (4.86) évoluent sous l'action d'un hamiltonien "libre", quadratique au plus dans les champs : les champs en représentation d'interaction suivent alors une distribution gaussienne. Le théorème de Wick s'applique et permet de calculer la valeur moyenne de l'opérateur $Q^I(t)$ dans le vide $|0\rangle$, défini à la date t_0 . Nous en déduisons immédiatement la valeur moyenne de l'opérateur $Q(t)$ dans un état quelconque à la date t , noté $|t\rangle = F(t, t_0)|0\rangle$ puisque

$$\langle t|Q(t)|t\rangle = \langle 0|Q^I(t)|0\rangle . \quad (4.87)$$

Appliquons ce raisonnement aux différents termes qui contribuent à la valeur moyenne $\langle Q(t) \rangle$ d'un opérateur $Q(t)$ donné par (4.86).

Nous obtenons alors deux types de vertex, de signes opposés. En effet, si λ est une constante de couplage apparaissant dans le hamiltonien d'interaction, le développement du T -produit fournit un facteur $-i\lambda$ tandis que l'anti- T -produit génère un facteur $+i\lambda$.

D'autre part, l'application du théorème de Wick fait intervenir plusieurs types de contractions. Un champ issu du T -produit peut être contracté avec trois types de champs :

- i) les champs issus du développement du T -produit. Le terme résultant est un propagateur de Feynman, c'est-à-dire incluant un T -produit,

$$iG_{++}(x, x') = \langle 0|T[\phi(x)\phi(x')] |0\rangle , \quad (4.88)$$

où $|0\rangle$ correspond au vide libre à la date t_0 ;

- ii) les champs n'appartenant pas à une exponentielle. Le terme résultant est également un propagateur de Feynman bien qu'il fasse intervenir un champ extérieur, assimilable à une patte externe dans un graphe ;
- iii) les champs issus du développement de l'anti- T -produit. Le terme résultant est une fonction de Wightman, c'est-à-dire n'incluant aucun ordonnancement en temps particulier. Le terme issu de l'anti- T -produit s'écrit à gauche du terme issu du T -produit

$$iG_{-+}(x, x') = \langle 0|\phi(x)\phi(x')|0\rangle . \quad (4.89)$$

Des règles similaires s'obtiennent lorsqu'on développe l'anti- T -produit. Nous définissons également les propagateurs suivants

$$\begin{aligned} iG_{+-}(x, x') &= \langle 0|\phi(x')\phi(x)|0\rangle , \\ iG_{--}(x, x') &= \langle 0|A[\phi(x)\phi(x')] |0\rangle , \end{aligned} \quad (4.90)$$

le dernier terme étant issu de la contraction de deux champs initialement contenus dans l'anti- T -produit.

Ces divers propagateurs ne sont pas indépendants puisque l'hermiticité des champs implique

$$\begin{aligned} iG_{-+}(x, x') &= \theta(t - t') iG_{++}(x, x') + \theta(t' - t) [iG_{++}(x, x')]^* , \\ iG_{+-}(x, x') &= \theta(t - t') [iG_{++}(x, x')]^* + \theta(t' - t) iG_{++}(x, x') , \\ iG_{--}(x, x') &= [iG_{++}(x, x')]^* . \end{aligned} \quad (4.91)$$

4.6.5 Formulation à l'aide d'une intégrale de chemin

En présentant le formalisme de Schwinger-Keldysh, nous avons souligné, à partir d'un formalisme canonique, que plusieurs types de propagateurs intervenaient, en fonction de l'ordonnancement en temps des champs. Une formulation à l'aide d'une intégrale de chemin permet de prendre en compte, assez facilement, ces différents ordonnancements en temps (voir page 196). En effet, l'intégrale de chemin fait intervenir deux champs, dont l'un évolue suivant la flèche du temps, c'est-à-dire du passé vers le futur et l'autre évolue du futur vers le passé. C'est pour cette raison que ce formalisme est aussi appelé formalisme à boucle temporelle. Le calcul de corrélateurs et non de processus de diffusion impose que ces deux champs soient égaux à un instant donné dans le futur (cet instant est en général choisi après l'interaction). Le corrélateur à la date s de deux opérateurs $\mathcal{O}_1[\phi]$ et $\mathcal{O}_2[\phi]$ prend la forme

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \bar{T}^* (\mathcal{O}_2[\phi]) A (\mathcal{O}_1[\phi]) | \Psi \rangle &= \int [d\phi_+] [d\phi_-] \delta[\phi_-(\ell) - \phi_+(\ell)] \\ &\times \mathcal{O}_2[\phi_-] \mathcal{O}_1[\phi_+] \Psi^*[\phi_-(s)] e^{i \int_s^\ell dt \{L[\phi_+(t)] - L[\phi_-(t)]\}} \Psi[\phi_+(s)] . \end{aligned} \quad (4.92)$$

Nous avons noté ici T et A les opérateurs de T -produit et d'anti- T -produit respectivement, tandis que $\Psi[\phi_+(s)]$ est l'état quantique à la date initiale s . Notons que l'instant final ℓ apparaît dans la distribution de Dirac ainsi que dans la borne supérieure de l'intégration temporelle.

Les équations du mouvement sont obtenues par

$$\left. \frac{\delta S[\phi_+, \phi_-]}{\delta \phi_\pm(x)} \right|_{\phi_\pm = \phi} = 0 . \quad (4.93)$$

Cette approche permet de prendre en compte plus aisément les contre-termes dans une procédure de renormalisation (voir page 196).

4.7 Application à un espace de de Sitter

Les concepts décrits dans les paragraphes précédents sont tout à fait généraux et susceptibles de s'appliquer aux champs de matière comme aux excitations de métrique, dans une large classe de variétés. Il peut être intéressant d'appliquer un tel formalisme dans des espace-temps donnés et, en particulier, dans les espaces de Sitter et anti-de-Sitter. D'un point de vue formel, les espaces les plus symétriques que représentent les espaces de Sitter et anti-de Sitter nous renseignent sur la construction d'une théorie des champs fondée sur des symétries différentes de celles de Poincaré et constituent, en ce sens, une extension naturelle des théories de champs minkowskienne. D'un point de vue phénoménologique, certains effets quantiques, propres aux espace-temps homogènes et isotropes de la cosmologie, pourraient laisser leurs empreintes dans les relevés cosmologiques. En particulier, l'univers primordial semble avoir connu une phase d'expansion accélérée - l'inflation - correspondant à un espace de de Sitter ou quasi-de Sitter, pendant laquelle des fluctuations quantiques de certains champs auraient généré les premières inhomogénéités. Ces deux raisons nous ont conduit à explorer les propriétés d'un espace de Sitter dans le développement de ce chapitre.

Les différents systèmes de coordonnées adaptés à la description d'un espace de Sitter sont présentés dans l'annexe E. Dans la suite, nous résumons les résultats obtenus sur les champs scalaires évoluant dans un espace de de Sitter [Bunch & Davies, 1978] [Mottola, 1985] [Allen, 1985] [Allen & Folacci, 1987]. Des compléments peuvent être obtenus dans [Garidi, 2003] [Joung *et al.*, 2006].

4.7.1 Longueur géodésique

L'espace-temps de Sitter est un espace-temps à symétrie maximale, de courbure constante et positive. À D dimensions, il peut être décrit par un plongement dans un espace-temps de Minkowski $(D+1)$ -dimensionnel [Hawking & Ellis, 1973]. Soient $X_0, X_i, i = 1, \dots, D$, les coordonnées d'un point dans l'espace de Minkowski de dimension $D+1$. Ces coordonnées vérifient

$$X_0^2 - \sum_{i=1}^D X_i^2 = -\frac{1}{H^2}, \quad (4.94)$$

où H est la constante de Hubble : seuls D paramètres, c'est à dire D coordonnées suffisent à décrire un point de l'espace de de Sitter. Différents choix de systèmes de coordonnées sont présentés dans l'annexe E. Dans la suite, nous noterons $X(x)$ les coordonnées dans l'espace minlowskien $D+1$ -dimensionnel associées au point x dans l'espace de de Sitter à D dimensions.

La contrainte (4.94) montre que le groupe de symétrie de de Sitter est le groupe $O(1,4)$. Nous définissons alors une fonction $Z(X, X')$, caractéristique d'un espace

de de Sitter entre deux points $X(x)$ et $X'(x')$, définie par¹⁸

$$Z(X, X') = H^2 \eta_{ab} X^a(x) X'^b(x'), \quad (4.97)$$

où η_{ab} est la métrique lorentzienne $(+, -, \dots, -)$. Cette longueur est manifestement invariante sous les transformations du groupe des isométries $O(1, 4)$ associées à de Sitter.

Nous définissons la *longueur géodésique* $\ell(x, x')$ par

$$Z(X, X') = \cos [H\ell(x, x')] , \quad (4.98)$$

et introduisons une fonction modifiée de la longueur géodésique $y(X, X')$ par

$$\frac{1}{2} y(X, X') = 1 - Z(X, X') = 2 \sin^2 \left(\frac{H\ell(X, X')}{2} \right) . \quad (4.99)$$

Lorsque $Z(X, X') = 1$, les points X et X' sont séparés par une distance géodésique nulle, c'est à dire par une géodésique nulle. Lorsque $Z(X, X') < 1$ (réciproquement $Z(X, X') > 1$), la géodésique qui sépare les points X et X' est de genre temps (réciproquement de genre espace). Lorsque $Z(X, X') = -1$, les points sont dits antipodaux et $Z(X, X') < -1$ caractérise deux points antipodaux reliés par une géodésique de genre espace.

Il est possible d'évaluer cet invariant en utilisant un système de coordonnées particulier. Ainsi un feuilletage euclidien (voir annexe E), conduit à

$$Z(X, X') = 1 - \frac{1}{2} a(\eta) a(\eta') H^2 [(\eta - \eta')^2 - \delta_{ij} (x^i - x'^i)(x^j - x'^j)] , \quad (4.100)$$

c'est-à-dire

$$y(x; x') = a(\eta) a(\eta') H^2 [(\eta - \eta')^2 - \delta_{ij} (x^i - x'^i)(x^j - x'^j)] . \quad (4.101)$$

¹⁸Nous pouvons comprendre la signification de cette grandeur par analogie avec le plongement d'une sphère de rayon $R = H^{-1}$ dans un espace euclidien. Choisissons deux points x et x' sur la sphère dont les coordonnées sont X et X' dans l'espace de plongement euclidien. En notant $\eta_{ij} = (+1, \dots, +1)$ la métrique dans l'espace euclidien, la fonction $\eta_{ij} X^i X'^j$ est le produit scalaire entre les deux vecteurs joignant le centre de la sphère et chacun des points. La fonction $Z(X, X') = R^{-2} \eta_{ij} X^i X'^j$ est simplement le cosinus de l'angle entre les deux points, *i.e.* $Z(X, X') = \cos(\theta)$. L'angle θ est relié à la distance entre les points x et x' *le long de la sphère*, c'est-à-dire à la longueur géodésique $\ell(x, x')$ qui les sépare, par la relation $\theta = \ell(x, x')/R$. Nous en déduisons

$$Z(X, X') = \cos \left(\frac{\ell(x, x')}{R} \right) . \quad (4.95)$$

Nous pouvons introduire la longueur géodésique modifiée $y(x, x')$ définie par $Z(X, X') = 1 - y(x, x')/2$, dont nous déduisons

$$y(x, x') = 4 \sin^2 \left(\frac{\ell(x, x')}{2R} \right) . \quad (4.96)$$

4.7.2 Choix d'un vide

Les symétries du vide ont été étudiées dans le cas d'un champ scalaire [Allen, 1985] et [Mottola, 1985]. Le cas spécifique d'un champ scalaire non massif et minimalement couplé a été examiné dans [Allen & Folacci, 1987].

Considérons un champ scalaire ϕ évoluant dans un espace de de Sitter. Le propagateur d'un tel champ $iG(x, x') = \langle 0 | \{ \phi(x) \phi(x') \} | 0 \rangle$ est solution de l'équation du mouvement homogène

$$(D_\mu D^\mu + m^2 + \xi R) iG(x, x') = 0 . \quad (4.102)$$

Si le vide $|0\rangle$ est invariant sous les isométries de de Sitter, le propagateur ne s'exprime qu'en fonction de la longueur géodésique $\ell(x, x')$ ou, de façon équivalente, en fonction de la fonction $y(x, x')$ définie dans (4.99) :

$$iG(x, x') = iG(y(x, x')) . \quad (4.103)$$

Dans le cas massif, $m \neq 0$, il est possible de trouver une famille de vides, appelés vides α caractérisés par un paramètre complexe et invariants sous les transformations $O(1, 4)$ tels que la relation (4.103) soit vérifiée [Bunch & Davies, 1978] [Mottola, 1985] [Allen, 1985]. Parmi ces vides, un seul possède un comportement minkowskien aux petites distances : il est appelé vide euclidien ou vide de Bunch-Davies. Les autres vides sont obtenus à partir du vide euclidien à l'aide d'une transformation de Bogolioubov.

Le cas non massif $m = 0$ et minimalement couplé $\xi = 0$ est particulièrement intéressant puisqu'il n'est pas possible de trouver un vide invariant sous le groupe des transformations $O(1, 4)$. Autrement dit, il n'existe pas de vide invariant sous les transformations de de Sitter, associé à un champ sans masse [Allen, 1985] [Mottola, 1985]. En revanche, certains vides peuvent être invariants sous les transformations de sous-groupe de de Sitter. Par exemple, l'invariance sous le sous-groupe $E(3)$ euclidien impose un vide similaire au vide de Bunch-Davies, c'est-à-dire tel que le comportement du propagateur soit identique, à petite distance, au cas minkowskien. La perte de l'invariance sous l'ensemble des isométries de l'espace-temps se traduit alors sous la forme de divergences à grand temps. En effet, en feuilletage euclidien

$$\langle \phi(x)^2 \rangle = \frac{H^2}{4\pi^2} \ln(a(t)) = \frac{H^3}{4\pi^2} t . \quad (4.104)$$

Cet effet a été étudié dans [Linde, 1982b], [Starobinsky, 1982] et [Vilenkin & Ford, 1982] (voir aussi [Dolgov & Pelliccia, 2006]). Les conséquences du choix du vide sur la valeur moyenne du tenseur énergie-impulsion sont présentées en détail dans [Anderson *et al.*, 2000].

4.7.3 Champ scalaire non massif et minimalement couplé

Solutions des équations du mouvement

L'équation du mouvement d'un champ scalaire $\phi(\mathbf{x}, t)$, non massif et minimalement couplé, évoluant dans un espace FLRW est de la forme

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} - 3H\frac{d\phi}{dt} - \frac{1}{a^2}\nabla_i\nabla^i\phi = 0, \quad (4.105)$$

le facteur d'expansion étant une fonction exponentielle du temps $a(t) = a_0 e^{Ht}$. Lorsque les sections spatiales sont plates, les solutions de cette équation se décomposent en modes de Fourier

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \left[\varphi_k(t) a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \varphi_k^*(t) a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right]. \quad (4.106)$$

Dans le vide de Bunch-Davies, les fonctions propres $\varphi_k(t)$ s'écrivent

$$\varphi_k(t) = \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \left(1 + i\frac{k}{aH} \right) e^{i\frac{k}{aH}t}. \quad (4.107)$$

Localement, *i.e.* pour $k \rightarrow +\infty$, ces modes s'identifient aux modes minkowskiens

$$a\varphi_k(t) \sim \frac{i}{\sqrt{2k}} e^{-ik\eta}, \quad (4.108)$$

où nous avons utilisé les coordonnées conformes¹⁹. Au contraire, à grande échelle ($k \rightarrow 0$), le champ tend simplement vers une constante

$$\varphi_k(t) \rightarrow \frac{H}{\sqrt{2k^3}}. \quad (4.109)$$

Notons que les mêmes comportements limite sont obtenus en fixant l'impulsion \mathbf{k} et en examinant les limites temporelles : la limite infrarouge est obtenue lorsque $t \rightarrow \infty$ tandis que la limite ultraviolette est retrouvée lorsque $t \rightarrow -\infty$. Ce fait s'explique à l'aide du décalage vers le rouge. Les modes physiques, $p_{\text{phys}} = k/a$ voient leur longueur d'onde croître exponentiellement. Lorsque la longueur d'onde physique sort de l'horizon causal, de taille caractéristique H^{-1} , les fonctions propres prennent la forme (4.109). La quantité pertinente qu'il importe de considérer est donc le rapport de l'impulsion à l'horizon causal.

¹⁹Le facteur i peut être absorbé par un choix approprié de la phase du champ ϕ .

Divergences infra-rouges

Les solutions (4.106) permettent d'exprimer le propagateur dans le vide de Bunch-Davies à temps égaux

$$iG_k(\eta, \eta) \equiv \langle \phi(\mathbf{k}, \eta) \phi(\mathbf{k}', \eta) \rangle = \frac{H^2}{2k^3} \left(1 + \frac{k^2}{a^2 H^2} \right). \quad (4.110)$$

L'expression de ce propagateur dans l'espace réel est cependant mal définie. En effet, l'intégrale

$$\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} iG_k(\eta, \eta) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \varphi_k(\eta) \varphi_k^*(\eta) \quad (4.111)$$

diverge dans l'ultraviolet *et* dans l'infrarouge si le vide euclidien est choisi, c'est-à-dire si les modes sont donnés par l'équation (4.106).

Les divergences ultraviolettes, qui possèdent la structure de Hadamard, traduisent notre méconnaissance de la physique à courte échelle, au même titre que les divergences ultraviolettes dans un espace de Minkowski. Ces divergences peuvent être régularisées puis renormalisées.

En revanche, les divergences infrarouges peuvent être régularisées - à l'aide d'une fréquence de coupure par exemple - mais ne peuvent pas être renormalisées par l'ajout de contre-termes car elles concernent la structure à grande échelle. Elles traduisent le fait qu'un nombre croissant de modes sortent de l'horizon - leur longueur d'onde comobile k (respectivement physique $p = k/a$) vérifiant $k\eta < 1$ (respectivement $p < H$) - et deviennent constants. La densité d'énergie aux très grandes échelles croît donc indéfiniment ! Ces divergences infrarouges naissent donc, comme nous l'avons souligné auparavant, de la contribution d'un nombre croissant de modes constants aux échelles super-horizon. Cependant, ces divergences ne sont pas "physiques" car des corrélations sur des échelles plus grandes que l'horizon ne sont pas mesurables. L'inflation stochastique proposée par A. Starobinsky [Starobinsky & Yokoyama, 1994] propose un moyen de resommer ces divergences infrarouges : les modes de grande longueur d'onde sont absorbés dans la définition d'un champ moyen. Les fonctions de corrélation ainsi définies possèdent un comportement parfaitement régulier aux grandes échelles et à grand temps.

Ford et Parker [Ford & Parker, 1977] ont attribué l'origine de ce comportement à grande échelle à un choix inapproprié du vide. En effet, il est possible de trouver des fonctions propres φ_k dont la dépendance en k conduit à un comportement régulier de la fonction de corrélation aux grandes distances. Malheureusement, ces choix se font au détriment des symétries du vide.

Nous nous proposons d'exposer les principales étapes de la construction d'un propagateur dans l'espace réel, "régularisé" dans l'infrarouge.

Propagateur dans l'espace réel

Nous suivons ici le travail de R. Woodard [Tsamis & Woodard, 1994] [Onemli & Woodard, 2002] conduisant à l'expression du propagateur libre, dans l'espace réel, d'un champ scalaire non massif et minimalement couplé évoluant dans un espace de de Sitter. Le propagateur de Feynman dans l'espace réel, dans le vide de Bunch-Davies, s'écrit

$$\begin{aligned} iG^{\text{F}}(x; x') &= \langle T [\phi(x)\phi(x')] \rangle \\ &= H^2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k^3} \left[1 + ik|\eta' - \eta| + \frac{k^2}{H^2 aa'} \right] e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x})+ik|\eta'-\eta|-\delta k} \end{aligned} \quad (4.112)$$

où la valeur absolue est issue de l'ordonnement en temps tandis que les divergences ultraviolettes ont été régularisées à l'aide du coefficient positif δ . En intégrant sur les angles

$$iG^{\text{F}}(x; x') = \frac{H^2}{(2\pi)^2} \int \frac{dk}{k} \sin(k\Delta x) \left[i - k|\eta' - \eta| + i\frac{k^2}{H^2 aa'} \right] e^{ik|\eta'-\eta|-\delta k}. \quad (4.113)$$

Après intégration par parties

$$iG^{\text{F}}(x; x') = \frac{H^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{aa'} \frac{1}{(x-x')^2 + i\delta} + \frac{H^2}{(2\pi)^2} + \frac{H^2}{(2\pi)^2} \int \frac{dk}{k} \cos(k\Delta x) e^{-ik|\eta'-\eta|-\delta k}. \quad (4.114)$$

Le dernier terme diverge logarithmiquement dans l'infrarouge. Afin de régulariser son expression, nous pouvons introduire une borne inférieure Λ_{IR} dans l'intégrale de l'équation (4.114). L'intégrale prend alors la forme

$$\begin{aligned} &\frac{H^2}{(2\pi)^2} \int_{\Lambda_{\text{IR}}}^{\infty} \frac{dk}{k} \cos(k\Delta x) e^{-ik|\eta'-\eta|-\delta k} \\ &= -\frac{H^2}{8\pi^2} \left\{ \text{Ei}[-\Lambda_{\text{IR}}(\delta - i\Delta x + i|\eta' - \eta|)] + \text{Ei}[-\Lambda_{\text{IR}}(\delta + i\Delta x + i|\eta' - \eta|)] \right\} \\ &= \frac{H^2}{8\pi^2} \left\{ -\ln[\Lambda_{\text{IR}}^2(\Delta x^2 - \Delta\eta^2 + i\delta)] - 2\gamma + o(\Lambda_{\text{IR}}) \right\}, \end{aligned} \quad (4.115)$$

où γ est la constante d'Euler.

Revenons sur l'introduction de la borne inférieure Λ_{IR} . Au premier abord, cette constante est arbitraire : elle permet de régulariser l'expression du propagateur dans l'espace réel et semble lui ôter sa signification physique. En effet, deux choix distincts pour Λ_{IR} conduisent à deux valeurs distinctes de la fonction de corrélation entre deux points donnés.

Cependant, insérée dans un cadre cosmologique, la fonction à deux points - régularisée dans l'infrarouge - possède une signification physique bien définie. Dans un espace de de Sitter, l'horizon comobile décroît : il suffit alors d'imposer des conditions initiales à l'intérieur de l'horizon causal au début de l'inflation. La fréquence

de coupure traduit simplement l'impossibilité d'établir des conditions initiales homogènes sur des échelles plus grandes que la taille de l'horizon causal au début de l'inflation.

Supposons qu'une phase d'expansion cosmologique - non accélérée - ait précédé une période inflationnaire assimilable à une expansion de Sitter. Les conditions initiales, correspondant au début de la phase inflationnaire, résultent alors d'un processus causal. En particulier, l'espace est pavé de volumes élémentaires, dont la taille est de l'ordre de l'horizon causal et dont les caractéristiques physiques sont différentes. Il semble alors peu naturel d'imposer les mêmes conditions initiales à tout l'espace. Dans le cas d'un champ scalaire, le choix d'un vide de Bunch-Davies ne peut s'appliquer qu'à un volume de la taille de l'horizon causal initial. Le facteur Λ_{IR} s'identifie donc à l'horizon causal initial et nous posons $\Lambda_{IR} = a_0 H$ où a_0 est le facteur d'échelle à la date t_0 , à partir de laquelle débute la phase inflationnaire. Par souci de notations, nous choisissons $a_0 = 1$.

Imposant la condition initiale²⁰ $a_0 = 1$ dans l'expression (4.115), nous obtenons le propagateur d'un champ scalaire non massif et minimalement couplé en de Sitter dans le vide de Bunch-Davies

$$iG(x; x') = \frac{H^2}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{1}{y(x; x')} - \frac{1}{2} \ln(y(x; x')) + \frac{1}{2} \ln(a(\eta)a(\eta')) \right\}, \quad (4.116)$$

qui a la forme de Hadamard. Le dernier terme, qui ne s'exprime pas simplement en fonction de la longueur invariante $y(x, x')$, brise l'invariance sous les transformations de de Sitter. C'est l'introduction d'une fréquence de coupure dans l'infrarouge qui est à l'origine de cette brisure explicite. Un tel terme était de toute façon attendu : nous avons déjà signalé qu'il n'existe pas de vide invariant sous les transformations de de Sitter pour un champ scalaire non massif et minimalement couplé.

Le propagateur peut être évalué en des points coïncidents²¹

$$iG(x; x) = \frac{H^2}{(2\pi)^2} \ln(a). \quad (4.117)$$

Nous retrouvons la croissance linéaire en temps mise en évidence dans [Vilenkin & Ford, 1982] [Starobinsky, 1982] [Linde, 1982b].

Propagateur à D dimensions

Nous pouvons étendre ces résultats à un nombre de dimensions $D = 4 - \epsilon$ quelconque. Une telle expression nous permettra d'étudier les procédures de renormalisation en régularisation dimensionnelle.

²⁰Dans le cas général, il suffit de remplacer $a(t)$ par $a(t)/a_0$.

²¹Les divergences ultraviolettes ne contribuent pas à la fonction de corrélation au même point, ce qui peut être compris par prolongement analytique dans le plan complexe (voir par exemple [Peskin & Schroeder, 1996] [Itzykson & Zuber, 1980] [Weinberg, 1995]).

Nous cherchons un propagateur de Feynman $iG(x; x')$ sous la forme d'une fonction de $y(x, x')$, c'est-à-dire invariante sous les transformations de de Sitter, et d'une fonction symétrique en $a(\eta)$ et $a(\eta')$:

$$iG(x; x') = f(y(x, x')) + g(a(\eta), a(\eta')) , \quad (4.118)$$

qui vérifie les équations du mouvement

$$\eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} a^{D-2}(\eta) \frac{\partial}{\partial x^\nu} iG(x; x') = i\delta^D(x - x') . \quad (4.119)$$

V. Onemli et R. Woodard [Onemli & Woodard, 2002] ont trouvé les solutions de cette équation à partir de l'Ansatz (4.118). Afin d'obtenir une distribution de Dirac dans le second membre de l'équation du mouvement (4.119), la fonction $f(y)$ doit nécessairement comporter un terme de la forme

$$f(y) = \frac{C_1}{y^{\frac{D}{2}-1}} + O\left(y^{-\frac{D}{2}}\right) , \quad (4.120)$$

où C_1 est une constante déterminée par l'équation du mouvement (4.119)

$$C_1 = \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{\pi}{H^2}\right)^{2-\frac{D}{2}} \Gamma\left(\frac{D}{2} - 1\right) . \quad (4.121)$$

En développant en série de MacLaurin la solution de l'équation du mouvement (4.119) $f(y)$, nous obtenons des relations de récursion entre les différents coefficients. Il suffit ensuite d'ajuster ces coefficients de manière à satisfaire l'équation (4.119). Dans le vide de Bunch-Davies, le propagateur en D -dimension s'exprime comme la somme de trois termes

$$iG(x; x') = A(x; x') + B(x; x') + C(x; x') \quad (4.122)$$

avec

$$A(x; x') = \frac{\Gamma(1 - \frac{\epsilon}{2}) (aa')^{-1+\frac{\epsilon}{2}}}{4\pi^{2-\frac{\epsilon}{2}} \Delta x^{2-\epsilon}} , \quad (4.123)$$

$$B(x; x') = \frac{H^{2-\epsilon}}{(4\pi)^{2-\frac{\epsilon}{2}}} \left\{ -\frac{2\Gamma(3 - \frac{\epsilon}{2})}{\epsilon} \left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} + \pi \cot\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right) \frac{\Gamma(3 - \epsilon)}{\Gamma(2 - \frac{\epsilon}{2})} + \frac{\Gamma(3 - \epsilon)}{\Gamma(2 - \frac{\epsilon}{2})} \ln(aa') \right\} , \quad (4.124)$$

$$C(x; x') = \frac{H^{2-\epsilon}}{(4\pi)^{2-\frac{\epsilon}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \frac{\Gamma(3 - \epsilon + n)}{\Gamma(2 - \frac{\epsilon}{2} + n)} \left(\frac{y}{4}\right)^n - \frac{1}{n + \frac{\epsilon}{2}} \frac{\Gamma(3 - \frac{\epsilon}{2} + n)}{\Gamma(2 + n)} \left(\frac{y}{4}\right)^{n+\frac{\epsilon}{2}} \right\} . \quad (4.125)$$

Le terme $A(x, x')$ se réduit au propagateur minkowskien. Le second terme - $B(x, x')$ - est proportionnel à la courbure, *i.e.* à la constante de Hubble et comporte les modifications induites par la géométrie. Ce terme possède une partie invariante sous les transformations de de Sitter et une partie, logarithmique dans le facteur d'échelle, qui brise l'invariance sous $O(1, 4)$. Enfin, le terme $C(x, x')$ est le plus compliqué. Cependant, à la limite où les points x et x' coïncident, ce terme s'annule. D'autre part, il ne contribue aucunement au propagateur en quatre dimensions.

L'expression (4.122), quoique délicate à manipuler, permet de mener à bien, dans une théorie en interaction, le calcul de quantités renormalisées, en régularisation dimensionnelle. Nous avons vu que les interactions pouvaient être décrites à l'aide du formalisme de Schwinger-Keldysh, impliquant plusieurs types de propagateurs. Chacun de ces propagateurs est relié à un ordonnancement particulier des champs dans le temps. Nous pouvons, à peu de frais, prendre en compte ces différences en introduisant les fonctions suivantes

$$\begin{aligned}
 y_{++}(x, x') &= a(\eta)a(\eta')H^2 [|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 - (|\eta - \eta'| - i\delta)^2] , \\
 y_{-+}(x, x') &= a(\eta)a(\eta')H^2 [|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 - (\eta - \eta' - i\delta)^2] , \\
 y_{+-}(x, x') &= a(\eta)a(\eta')H^2 [|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 - (\eta - \eta' + i\delta)^2] , \\
 y_{--}(x, x') &= a(\eta)a(\eta')H^2 [|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 - (|\eta - \eta'| + i\delta)^2] , \quad (4.126)
 \end{aligned}$$

où δ est un réel positif supposé petit. Les propagateurs $iG_{\pm\pm}(x, x')$ sont obtenus en remplaçant l'invariant $y(x, x')$ par ses équivalents $y_{\pm\pm}(x, x')$.

4.8 Corrections radiatives à la masse d'un champ scalaire en de Sitter (article)

4.8.1 Motivations et objectifs

L'étude de l'évolution d'un champ scalaire test dans un espace-temps courbe est, comme nous l'avons précisé, est d'une grande importance tant sur le plan formel, de manière à comprendre l'influence de la courbure sur les équations effectives du mouvement, que sur le plan phénoménologique, puisque la cosmologie fait remonter l'origine des structures aux fluctuations quantiques d'un ou plusieurs champs scalaires.

L'espace de de Sitter présente un double intérêt : ses symétries - même brisées - facilitent les calculs tandis que les propriétés dynamiques des champs de matière y évoluant nous renseignent sur la phase inflationnaire.

Bien que l'évolution libre des champs soit relativement bien décrite, peu de travaux ont examiné les effets des interactions. Les interactions quartiques étant les mieux décrites en espace plat, nous nous proposons d'examiner les corrections radiatives induites par une auto-interaction de ce type.

Parmi les paramètres renormalisés, la masse des champs scalaires légers se singularise. Non seulement les termes générés par les interactions qui la corrigent sont les plus simples à calculer, mais la masse est le paramètre principal dont dépendent les fluctuations des champs à très grandes distances. Par exemple, pendant l'inflation, seuls les champs légers produisent des fluctuations super-Hubble (voir chapitre 5, page 255).

Nous nous proposons d'utiliser la technique de Schwinger-Keldysh afin de calculer ces corrections. En général, les contre-terms à insérer dans l'action couplent les champs ϕ_+ et ϕ_- et sont donc également affectés d'une polarité $\pm \pm \dots$ telle que le nombre de signes soit égal au nombre de champs impliqués dans l'interaction. L'action effective, qui tient compte des quantités renormalisées, prend la forme

$$\Gamma[\phi_+, \phi_-] = S[\phi_+] - S[\phi_-] - \frac{1}{2} \int d^D x \int d^D x' \left\{ \begin{aligned} &\phi_+(x) M_{++}^2(x; x') \phi_+(x') + \phi_+(x) M_{+-}^2(x; x') \phi_-(x') \\ &+ \phi_-(x) M_{-+}^2(x; x') \phi_+(x') + \phi_-(x) M_{--}^2(x; x') \phi_-(x') \end{aligned} \right\} + O(\phi_{\pm}^3),$$

tandis que les équation du mouvement sont obtenues en variant l'action effective par rapport à l'un des champs, par exemple ϕ_+ , et en imposant ensuite $\phi_+ = \phi_- = \phi$:

$$\left. \frac{\delta \Gamma[\phi_+, \phi_-]}{\delta \phi_+(x)} \right|_{\phi_{\pm}=\phi} = \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} - \int d^D x' \left\{ M_{++}^2(x; x') + M_{+-}^2(x; x') \right\} \phi(x') + O(\phi^2) = 0. \quad (4.127)$$

Notons que les paramètres renormalisés acquièrent une dépendance temporelle ou spatiale. En effet, la procédure de renormalisation consiste à introduire des contre-terms infinis qui compensent les divergences à une date fixée, par exemple $t = 0$. À une date ultérieure $t \neq 0$, les contre-terms ne compensent pas nécessairement les divergences et les termes résiduels dépendent de l'instant t considéré.

Enfin, il peut être intéressant de comparer les contre-terms introduits à ceux d'un espace-temps minkowskien ou ceux déterminés par l'étude plus générale de T. Bunch et P. Panangaden, menée à l'aide d'un formalisme "in-out" dans un espace FLRW quelconque [Bunch *et al.*, 1980] [Bunch & Panangaden, 1980]. La comparaison avec les contre-terms minkowskiens révèle la structure des divergences en de Sitter tandis qu'une comparaison avec les résultats plus généraux valide l'application du formalisme "in-in" de Schwinger-Keldysh et la forme choisie pour le propagateur en de Sitter.

4.8.2 Présentation de résultats

Nous présentons ici le travail réalisé en collaboration avec V. Onemli et R. Woodard [Brunier *et al.*, 2005]. Employant le formalisme de Schwinger-Keldysh, nous considérons les auto-interactions d'un champ scalaire, non massif et minimalement couplé, dans un espace de de Sitter. Nous nous sommes intéressés aux corrections à la masse, à l'ordre de deux boucles, induites par des interactions quartiques.

La contribution à une boucle est induite par le graphe présenté sur la figure 4.1. Le résultat à une boucle est particulièrement simple, relié au propagateur évalué aux mêmes points

$$M_{++}^2 = \frac{\lambda H^2}{8\pi^2} \left(\frac{a}{a_0}\right)^4 \ln\left(\frac{a}{a_0}\right), \quad (4.128)$$

où a_0 est le facteur d'échelle au début de l'inflation. Le facteur a^4 provient de l'élément de volume de l'intégration, $\sqrt{|g|}$. Sans prendre en compte ce facteur, nous voyons que la masse d'un champ test léger en de Sitter augmente donc linéairement avec le temps.

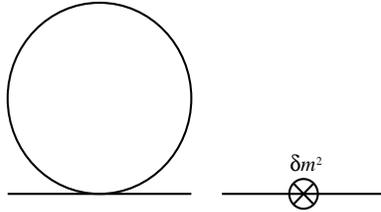


FIG. 4.1 – Diagrammes à une boucle contribuant à la masse.

La contribution des graphes à deux boucles est plus délicate à calculer. Elle fait non seulement intervenir les corrections à la masse, mais aussi une renormalisation de la fonction d'onde et de la constante de couplage. La masse renormalisée à deux boucles la masse effective possède une structure compliquée, non locale (voir article ci-après) de la forme

$$M^2(x; x') \Big|_{\text{leading}} = H^2 a^4 \delta^4(x-x') \times \lambda \ln(a) \sum_{\ell=1}^{\infty} m_{\ell} \left(\lambda \ln^2(a) \right)^{\ell-1}. \quad (4.129)$$

Ce résultat devrait par la suite être inséré dans l'équation du mouvement afin d'obtenir une équation d'évolution effective. Il semble cependant que les corrections à la masse ne croissent qu'en puissance du logarithme du facteur d'échelle et ne peuvent induire, au niveau perturbatif, de trop grandes corrections à la masse, ce qui est conforme aux résultat de S. Weinberg [Weinberg, 2006].

D'autre part, les contributions infinies à la masse issues de trois différents diagrammes mélangent les divergences infrarouge et ultraviolette sous la forme

$$\frac{\ln(a)}{\epsilon}, \quad (4.130)$$

où $\epsilon = 4 - D$ est nul lorsque le nombre de dimensions D tend vers quatre. Il est notable de constater que la somme de ces divergences est strictement nulle après ajout de contre-termes et que la théorie, à deux boucles, n'est sensible à aucun mélange d'échelles.

Les contre-termes introduits sont identiques à ceux obtenus dans un espace-temps plat, en ce qui concerne la fonction d'onde et la constante de couplage. Nous pouvons nous y attendre puisque ces divergences dans un espace de Minkowski sont logarithmiques avec la fréquence de coupure ultraviolette. Les divergences induites par la courbure, sous dominantes, sont donc finies. Au contraire, les corrections à la masse sont quadratiques en espace plat. La forme obtenue est ici différente et inclut des contributions sous-dominantes proportionnelles au paramètre de Hubble H . Les mêmes conclusions ont été atteintes dans [Bunch *et al.*, 1980] [Bunch & Panangaden, 1980].

4.8.3 Article

Two-loop scalar self-mass during inflation

T Brunier¹, V K Onemli² and R P Woodard³

¹ Service de Physique Théorique, CEA/Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette, France

² Laboratoire de Physique Théorique, Université Paris XI, Bât. 210, 91405 Orsay, France

³ Department of Physics, University of Florida, Gainesville, FL 32611, USA

E-mail: brunier@spt.saclay.cea.fr, Vakif.Onemli@th.u-psud.fr and woodard@phys.ufl.edu

Received 25 August 2004

Published 3 December 2004

Online at stacks.iop.org/CQG/22/59

Abstract

We work in the locally de Sitter background of an inflating universe and consider a massless, minimally coupled scalar with a quartic self-interaction. We use dimensional regularization to compute the fully renormalized scalar self-mass-squared at one- and two-loop order for a state which is released in Bunch–Davies vacuum at $t = 0$. Although the field strength and coupling constant renormalizations are identical to those of flat space, the geometry induces a non-zero mass renormalization. The finite part also shows a sort of growing mass that competes with the classical force in eventually turning off this system’s super-acceleration.

PACS numbers: 98.80.Cq, 04.62.+v

1. Introduction

For studying quantum fields which are spectators during inflation, it is convenient to model the background geometry using a portion of the full de Sitter manifold known as the open coordinate patch. If the D -dimensional cosmological constant is $\Lambda \equiv (D - 1)H^2$, the invariant element can be expressed, in either conformal or co-moving coordinates, as follows:

$$ds^2 = a^2(-d\eta^2 + d\vec{x} \cdot d\vec{x}) = -dt^2 + a^2 d\vec{x} \cdot d\vec{x} \quad \text{where } a(\eta) = -\frac{1}{H\eta} = e^{Ht}. \quad (1)$$

One might expect that the inflationary expansion of this spacetime makes quantum effects stronger by allowing virtual particles to persist longer than in flat space. Indeed, it is simple to see that any sufficiently long wavelength (wavelength $> 1/H$) virtual particle which is massless on the Hubble scale can exist forever [1]. However, one must also consider the *rate* at which virtual particles emerge from the vacuum. Classical conformal invariance causes this rate (per unit co-moving time) to fall like $1/a$, so all long wave length virtual particles which emerge become real, but very few emerge [1]. To get enhanced quantum effects during inflation,

requires therefore quanta which are effectively massless and also not classically conformally invariant.

A fascinating example of enhanced quantum effects occurs when a massless minimally coupled scalar is endowed with a quartic self-interaction,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi g^{\mu\nu}\sqrt{-g} - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4\sqrt{-g} + \text{counterterms.} \quad (2)$$

If this system is released at $t=0$ ($\eta = -1/H$) in free Bunch–Davies vacuum, the fully renormalized energy density and pressure are [2, 3],

$$\rho_{\text{ren}} = \frac{\Lambda}{8\pi G} + \frac{\lambda H^4}{2^6\pi^4} \left\{ \frac{1}{2} \ln^2(a) + \frac{2}{9}a^{-3} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)^2} a^{-n-1} \right\} + O(\lambda^2), \quad (3)$$

$$p_{\text{ren}} = -\frac{\Lambda}{8\pi G} - \frac{\lambda H^4}{2^6\pi^4} \left\{ \frac{1}{2} \ln^2(a) + \frac{1}{3} \ln(a) + \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-4}{(n+1)^2} a^{-n-1} \right\} + O(\lambda^2). \quad (4)$$

Hence their sum violates the weak energy condition on cosmological scales,

$$\rho_{\text{ren}} + p_{\text{ren}} = \frac{\lambda H^4}{2^6\pi^4} \left\{ -\frac{1}{3} \ln(a) + \frac{2}{9}a^{-3} - \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1} a^{-n-1} \right\} + O(\lambda^2). \quad (5)$$

The physics behind this surprising result is that inflationary particle production causes the scalar to undergo a random walk such that its average distance from the minimum of the φ^4 potential increases without bound in the free theory [4–6],

$$\langle \Omega|\varphi^2(x)|\Omega\rangle_0 = (\text{divergent constant}) + \frac{H^2}{4\pi^2} \ln(a). \quad (6)$$

After the ultraviolet divergence is removed by renormalization, the effect is to drive the scalar up its potential, which increases the vacuum energy and leads to (3) and (4). The process is self-limiting for two reasons. Firstly, as the scalar rises up its potential, the classical φ^3 force pushes it back down. Secondly, the φ^2 curvature associated with being away from $\varphi = 0$ acts like a positive mass-squared to reduce the inflationary particle production responsible for pushing the scalar away from $\varphi = 0$.

This model is of more than passing interest because the supernova acceleration data are consistent with an evolving dark energy equation of state whose current value is less than -1 [7–18]. Such a thing is difficult to explain with classical models on account of the problem with stability [19–63]. Therefore one is lead naturally to a self-limiting quantum effect in a classically stable theory such as (2).

Although this model gives a value for $w+1$ which is far too small to explain the observations [3], it does serve to establish that quantum effects can induce a temporary phase of super-acceleration. Further, it does so in a wonderfully simple setting for which every issue can be settled by explicit computation. To check stability, one first computes the self-mass-squared $M^2(x; x')$ and then studies how it modifies the effective field equations at linearized order,

$$\square\varphi(x) - \int d^4x' M^2(x; x')\varphi(x') = 0. \quad (7)$$

That first step is the object of this paper. Just as in flat space one must go to two-loop order to see corrections to the derivative terms, so we will compute the fully renormalized self-mass-squared at one- and two-loop orders. In a later work we will employ the result to study the behaviour of linearized perturbations in the quantum-corrected field equations.

In section 2 we explain the Schwinger–Keldysh formalism that one must use for cosmological settings in which the state is specified at a finite time rather than in the asymptotic past and future. We also derive the Feynman rules. The one-loop counterterms are computed in section 3. Sections 4–6 treat the various two-loop contributions to the self-mass-squared. In section 7 we give the fully renormalized results. Implications are discussed in section 8. The various technical results used throughout the paper are discussed in the appendices.

2. Feynman rules in the Schwinger–Keldysh formalism

The Schwinger–Keldysh formalism is a technique that makes computation of expectation values almost as simple as the Feynman rules do for computing in–out matrix elements [64, 65]. To sketch the derivation, consider a real scalar field, $\phi(x)$, whose Lagrangian (not Lagrangian density) at time t is $L[\phi(t)]$. Most quantum field theorists are familiar with the functional integral expression for the matrix element of an operator $\mathcal{O}_1[\phi]$ between states whose wave functionals are given at a starting time s and a last time ℓ ,

$$\langle \Phi | T^*(\mathcal{O}_1[\phi]) | \Psi \rangle = \int [d\phi] \mathcal{O}_1[\phi] \Phi^*[\phi(\ell)] \exp\left(i \int_s^\ell dt L[\phi(t)]\right) \Psi[\phi(s)]. \quad (8)$$

The T^* -ordering symbol in the matrix element indicates that the operator $\mathcal{O}_1[\phi]$ is time-ordered, except that any derivatives are taken *outside* the time-ordering. We can use (8) to obtain a similar expression for the matrix element of the *anti*-time-ordered product of some operator $\mathcal{O}_2[\phi]$ in the presence of the reversed states,

$$\langle \Psi | \bar{T}^*(\mathcal{O}_2[\phi]) | \Phi \rangle = \langle \Phi | T^*(\mathcal{O}_2^\dagger[\phi]) | \Psi \rangle^* \quad (9)$$

$$= \int [d\phi] \mathcal{O}_2[\phi] \Phi[\phi(\ell)] \exp\left(-i \int_s^\ell dt L[\phi(t)]\right) \Psi^*[\phi(s)]. \quad (10)$$

Now note that summing over a complete set of states Φ gives a delta functional,

$$\sum_{\Phi} \Phi[\phi_-(\ell)] \Phi^*[\phi_+(\ell)] = \delta[\phi_-(\ell) - \phi_+(\ell)]. \quad (11)$$

Taking the product of (8) and (10), and using (11), we obtain a functional integral expression for the expectation value of any anti-time-ordered operator \mathcal{O}_2 multiplied by any time-ordered operator \mathcal{O}_1 ,

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \bar{T}^*(\mathcal{O}_2[\phi]) T^*(\mathcal{O}_1[\phi]) | \Psi \rangle &= \int [d\phi_+] [d\phi_-] \delta[\phi_-(\ell) - \phi_+(\ell)] \mathcal{O}_2[\phi_-] \mathcal{O}_1[\phi_+] \Psi^*[\phi_-(s)] \\ &\times \exp\left(i \int_s^\ell dt \{L[\phi_+(t)] - L[\phi_-(t)]\}\right) \Psi[\phi_+(s)]. \end{aligned} \quad (12)$$

This is the fundamental relation between the canonical operator formalism and the functional integral formalism in the Schwinger–Keldysh formalism.

The Feynman rules follow from (12) in close analogy to those for in–out matrix elements. Because the same field is represented by two different dummy functional variables, $\phi_{\pm}(x)$, the endpoints of lines carry a \pm polarity. External lines associated with the operator $\mathcal{O}_2[\phi]$ have ‘ $-$ ’ polarity whereas those associated with the operator $\mathcal{O}_1[\phi]$ have ‘ $+$ ’ polarity. Interaction vertices are either all $+$ or all $-$. Vertices with $+$ polarity are the same as in the usual Feynman rules whereas vertices with the $-$ polarity have an additional minus sign. Propagators can be $++$, $--$, $+-$ and $-+$.

The four propagators can be read off from the fundamental relation (12) when the free Lagrangian is substituted for the full one. It is useful to denote canonical expectation values in the free theory with a subscript 0. With this convention we see that the $++$ propagator is just the ordinary Feynman propagator,

$$i\Delta_{++}(x; x') = \langle \Omega | T(\phi(x)\phi(x')) | \Omega \rangle_0 = i\Delta(x; x'). \quad (13)$$

The other cases are simple to read off and to relate to the Feynman propagator,

$$i\Delta_{-+}(x; x') = \langle \Omega | \phi(x)\phi(x') | \Omega \rangle_0 = \theta(t - t')i\Delta(x; x') + \theta(t' - t)[i\Delta(x; x')]^*, \quad (14)$$

$$i\Delta_{+-}(x; x') = \langle \Omega | \phi(x')\phi(x) | \Omega \rangle_0 = \theta(t - t')[i\Delta(x; x')]^* + \theta(t' - t)i\Delta(x; x'), \quad (15)$$

$$i\Delta_{--}(x; x') = \langle \Omega | \bar{T}(\phi(x)\phi(x')) | \Omega \rangle_0 = [i\Delta(x; x')]^*. \quad (16)$$

Therefore, we can get the four propagators of the Schwinger–Keldysh formalism from the Feynman propagator once that is known.

Quantum field theory has much the same structure in the Schwinger–Keldysh formalism as for the familiar in–out formalism. In particular, one-particle-irreducible (1PI) diagrams mean the same thing and play the same fundamental role. Because each external line can take either polarity there are 2^N variations for each N -point function of the in–out formalism. They generate an effective action that depends upon background fields $\phi_+(x)$ and $\phi_-(x)$. For example, there are four Schwinger–Keldysh 2-point 1PI functions, $M_{\pm\pm}^2(x; x')$. The $++$ one is the same as the in–out self-mass-squared and the others are related as the propagators,

$$-iM_{--}^2(x; x') = (-iM_{++}^2(x; x'))^*, \quad -iM_{-+}^2(x; x') = (-iM_{+-}^2(x; x'))^*. \quad (17)$$

The various self-mass-squared terms enter the effective action as follows [65]:

$$\begin{aligned} \Gamma[\phi_+, \phi_-] &= S[\phi_+] - S[\phi_-] \\ &- \frac{1}{2} \int d^D x \int d^D x' \left\{ \begin{aligned} &\phi_+(x)M_{++}^2(x; x')\phi_+(x') + \phi_+(x)M_{+-}^2(x; x')\phi_-(x') \\ &+ \phi_-(x)M_{-+}^2(x; x')\phi_+(x') + \phi_-(x)M_{--}^2(x; x')\phi_-(x') \end{aligned} \right\} + O(\phi_{\pm}^3). \end{aligned} \quad (18)$$

Note that since counterterms derive from the classical actions— $S[\phi_+]$ and $-S[\phi_-]$ —there can be no primitive divergences in 1PI diagrams of mixed polarity.

The effective field equations of the Schwinger–Keldysh formalism are obtained by varying with respect to either of the background fields and then setting the two fields equal [65],

$$\left. \frac{\delta \Gamma[\phi_+, \phi_-]}{\delta \phi_+(x)} \right|_{\phi_{\pm}=\phi} = \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} - \int d^D x' \{ M_{++}^2(x; x') + M_{+-}^2(x; x') \} \phi(x') + O(\phi^2) = 0. \quad (19)$$

Just as in–out matrix elements of the field obey the in–out effective field equations, so do the expectation values of the field obey the Schwinger–Keldysh effective field equations. Unlike the in–out effective field equations, the Schwinger–Keldysh effective field equations are causal and purely real. That is, the equations are generally not local, although there is no net dependence at point x^μ from fields at any point x'^μ which lies outside the past light-cone of x^μ . Hence the initial value problem is well defined. Also, if the initial value data are real, the solution remains real.

Up to this point the discussion has been general. We begin the process of deriving the Feynman rules of our model by expressing its Lagrangian (2) in terms of the unrenormalized field ϕ and bare parameters m_0^2 and λ_0 ,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi g^{\mu\nu}\sqrt{-g} - \frac{1}{2}m_0^2\phi^2\sqrt{-g} - \frac{1}{4!}\lambda_0\phi^4\sqrt{-g}. \quad (20)$$

Specializing to the (D -dimensional) locally de Sitter geometry in conformal coordinates (1), and introducing the renormalized field $\varphi \equiv \phi/\sqrt{Z}$ gives,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}Z\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi\eta^{\mu\nu}a^{D-2} - \frac{1}{2}Zm_0^2\varphi^2a^D - \frac{1}{4!}Z^2\lambda_0\varphi^4a^D. \quad (21)$$

We now make the usual decomposition of bare parameters into renormalized parameters and counterterms,

$$Z \equiv 1 + \delta Z, \quad Zm_0^2 \equiv 0 + \delta m^2, \quad Z^2\lambda_0 \equiv \lambda + \delta\lambda. \quad (22)$$

Note that we define the renormalized mass to be zero. Of course, this can only be enforced initially; the point of the calculation is to see what happens later under the impact of inflationary particle production!

The final expression of the Lagrangian distinguishes the free part (first term), the interaction (second term) and the counter-interactions (last three terms),

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi\eta^{\mu\nu}a^{D-2} - \frac{1}{4!}\lambda\varphi^4a^D - \frac{1}{2}\delta Z\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi\eta^{\mu\nu}a^{D-2} - \frac{1}{2}\delta m^2\varphi^2a^D - \frac{1}{4!}\delta\lambda\varphi^4a^D. \quad (23)$$

The propagator derives from the free part and obeys the equation,

$$\text{Propagator} \implies \eta^{\mu\nu}\partial_\mu(a^{D-2}\partial_\nu i\Delta(x; x')) = i\delta^D(x - x'). \quad (24)$$

The position–space interaction vertex depends upon the four points x_{1-4}^μ ,

$$\text{Interaction} \implies -i\lambda a_1^D \delta^D(x_1 - x_2)\delta^D(x_2 - x_3)\delta^D(x_3 - x_4). \quad (25)$$

The field strength renormalization depends upon the two points x^μ and x'^μ ,

$$\text{Field strength renormalization} \implies i\delta Z \eta^{\mu\nu}\partial_\mu(a^{D-2}\partial_\nu\delta^D(x - x')). \quad (26)$$

The mass renormalization also depends upon x^μ and x'^μ ,

$$\text{Mass renormalization} \implies -i\delta m^2 a^D \delta^D(x - x'). \quad (27)$$

Of course the coupling constant renormalization is the same as (25) with λ replaced by $\delta\lambda$,

$$\text{Coupling constant renorm.} \implies -i\delta\lambda a_1^D \delta^D(x_1 - x_2)\delta^D(x_2 - x_3)\delta^D(x_3 - x_4). \quad (28)$$

It remains to solve (24) for the propagator. One might try to look for a function of the de Sitter invariant geodesic length $\ell(x; x')$ but there is no such solution. The reason is that the free theory possesses no normalizable, de Sitter invariant wave functions, and hence no de Sitter invariant states [66]. By allowing $i\Delta(x; x')$ to depend additionally upon the scale factors $a \equiv a(\eta)$ and $a' \equiv a(\eta')$ one can find a solution which has the homogeneity and isotropy of cosmology [2]. It is expressed in terms of a length function which we call $y_{++}(x; x')$:

$$y_{++}(x; x') \equiv aa'H^2 [\|\vec{x} - \vec{x}'\|^2 - (|\eta - \eta'| - i\delta)^2] \equiv aa'H^2 \Delta x_{++}^2(x; x'). \quad (29)$$

When the infinitesimal parameter δ vanishes, this has a simple relation to the geodesic length, $y = 4 \sin^2(H\ell/2)$. One can see from (13)–(16) that the four propagators must all depend the same way on a , a' and length functions $y_{\pm\pm}$ defined as follows:

$$y_{+-}(x; x') \equiv aa' H^2 [\|\vec{x} - \vec{x}'\|^2 - (\eta - \eta' + i\delta)^2] \equiv aa' H^2 \Delta x_{+-}^2(x; x'), \quad (30)$$

$$y_{-+}(x; x') \equiv aa' H^2 [\|\vec{x} - \vec{x}'\|^2 - (\eta - \eta' - i\delta)^2] \equiv aa' H^2 \Delta x_{-+}^2(x; x'), \quad (31)$$

$$y_{--}(x; x') \equiv aa' H^2 [\|\vec{x} - \vec{x}'\|^2 - (|\eta - \eta'| + i\delta)^2] \equiv aa' H^2 \Delta x_{--}^2(x; x'). \quad (32)$$

Because of this close relationship between the four propagators we shall often drop the \pm subscripts and treat expressions for general $y = y(x; x')$ and $\Delta x^2 = \Delta x^2(x; x')$.

To facilitate dimensional regularization, we express the dimension of spacetime in terms of its deviation from four, $D = 4 - \epsilon$. It is also convenient to break the propagator up into three terms,

$$i\Delta(x; x') = A(x; x') + B(x; x') + C(x; x'), \quad (33)$$

$$A(x; x') \equiv \frac{\Gamma(1 - (\epsilon/2)) (aa')^{-1+(\epsilon/2)}}{4\pi^{2-(\epsilon/2)} \Delta x^{2-\epsilon}}, \quad (34)$$

$$B(x; x') \equiv \frac{H^{2-\epsilon}}{(4\pi)^{2-(\epsilon/2)}} \left\{ -\frac{2\Gamma(3 - (\epsilon/2))}{\epsilon} \left(\frac{y}{4}\right)^{(\epsilon/2)} + \pi \cot\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right) \frac{\Gamma(3 - \epsilon)}{\Gamma(2 - (\epsilon/2))} + \frac{\Gamma(3 - \epsilon)}{\Gamma(2 - (\epsilon/2))} \ln(aa') \right\}, \quad (35)$$

$$C(x; x') \equiv \frac{H^{2-\epsilon}}{(4\pi)^{2-(\epsilon/2)}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \frac{\Gamma(3 - \epsilon + n)}{\Gamma(2 - (\epsilon/2) + n)} \left(\frac{y}{4}\right)^n - \frac{1}{n + (\epsilon/2)} \frac{\Gamma(3 - (\epsilon/2) + n)}{\Gamma(2 + n)} \left(\frac{y}{4}\right)^{n+(\epsilon/2)} \right]. \quad (36)$$

Powers of $A(x; x')$ are the ultimate source of ultraviolet divergences. The term $B(x; x')$ is not ultraviolet divergent by itself,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} B(x; x') = \left(\frac{H}{4\pi}\right)^2 \{-2 \ln(H^2 \Delta x^2/4) - 1\} = -\frac{H^2}{8\pi^2} \ln\left(\frac{\sqrt{e}}{4} H^2 \Delta x^2\right). \quad (37)$$

However, we must retain $\epsilon \neq 0$ whenever $B(x; x')$ multiplies two or more powers of $A(x; x')$. The term $C(x; x')$ actually vanishes for $\epsilon = 0$. We only need it when multiplying by more than two powers of $A(x; x')$, which cannot happen for the maximum number of propagators— $(i\Delta(x; x'))^3$ —we shall encounter in this computation.

3. One-loop counterterms

Neither the non-flat geometry, nor the Schwinger–Keldysh formalism, nor even the use of position space rather than momentum space, alters the basic structure of perturbative quantum field theory. In particular, the diagrams all look the same as in flat momentum space, and working at two loops requires knowledge of the one-loop counterterms. The purpose of this

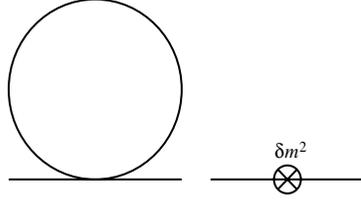


Figure 1. Generic one-loop self-mass-squared.

section is to compute the order- λ contribution to δm^2 and the order- λ^2 contribution to $\delta\lambda$. As in flat space there is no one-loop contribution to δZ .

Figure 1 depicts the one-loop contribution to the scalar self-mass-squared. We can extract δm^2 at order λ by focusing on the $++$ term,

$$-iM_{1++}^2(x; x') = -i \left[\frac{\lambda}{2} i\Delta_{++}(x; x) + \delta m^2 \right] a^D \delta^D(x - x') + O(\lambda^2). \quad (38)$$

Although the coincidence limit of the massless propagator vanishes when using dimensional regularization in flat space, the de Sitter curvature of our background gives a nonzero result that can be read off from (33),

$$i\Delta(x'; x') = \lim_{x \rightarrow x'} i\Delta(x; x') = \frac{H^{2-\epsilon}}{(4\pi)^{2-(\epsilon/2)}} \frac{\Gamma(3-\epsilon)}{\Gamma(2-(\epsilon/2))} \left\{ 2 \ln(a) + \pi \cot\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right) \right\}. \quad (39)$$

Because of the finite, time-dependent term we cannot make the one-loop self-mass-squared vanish for all time. Our renormalization condition is that it should be zero at $t = 0$, which implies,

$$\delta m^2 = -\frac{\lambda H^{2-\epsilon}}{2^{5-\epsilon} \pi^{2-(\epsilon/2)}} \frac{\Gamma(3-\epsilon)}{\Gamma(2-(\epsilon/2))} \pi \cot\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right) + O(\lambda^2). \quad (40)$$

The renormalized $++$ self-mass-squared is therefore,

$$M_{1++}^2(x; x') = \frac{\lambda H^2}{8\pi^2} a^4 \ln(a) \delta^4(x - x') + O(\lambda^2). \quad (41)$$

The $--$ case is minus the complex conjugate,

$$M_{1--}^2(x; x') = -\frac{\lambda H^2}{8\pi^2} a^4 \ln(a) \delta^4(x - x') + O(\lambda^2). \quad (42)$$

The $+-$ and $-+$ cases vanish at this order because there are no mixed interactions,

$$M_{1+-}^2(x; x') = -(M_{1-+}^2(x; x'))^* = 0 + O(\lambda^2). \quad (43)$$

We can extract the order λ^2 contribution to $\delta\lambda$ from the one-loop corrections to the $++++$ 4-point 1PI function. Figure 2 shows the diagram topology. A simple application of the Feynman rules gives,

$$\begin{aligned} -iV_+(x_1, x_2, x_3, x_4) = & -i(\lambda + \delta\lambda) a_1^D \delta^D(x_1 - x_2) \delta^D(x_1 - x_3) \delta^D(x_1 - x_4) \\ & - \frac{1}{2} \lambda^2 \left\{ a_1^D a_4^D [i\Delta_{++}(x_1; x_4)]^2 \delta^D(x_1 - x_2) \delta^D(x_3 - x_4) \right. \\ & + a_1^D a_3^D [i\Delta_{++}(x_1; x_3)]^2 \delta^D(x_1 - x_4) \delta^D(x_2 - x_3) \\ & \left. + a_1^D a_2^D [i\Delta_{++}(x_1; x_2)]^2 \delta^D(x_1 - x_3) \delta^D(x_4 - x_2) \right\} + O(\lambda^3). \quad (44) \end{aligned}$$

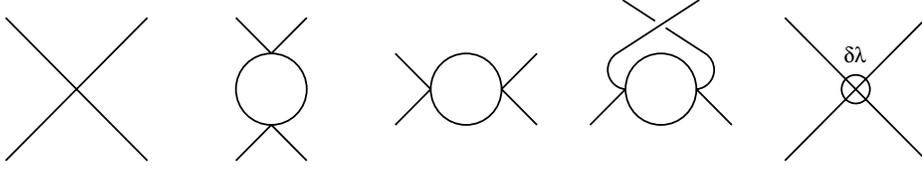


Figure 2. Generic tree and one-loop vertex function.

In appendix B, we show that the square of a propagator can be expressed as a local term which diverges for $\epsilon \rightarrow 0$, plus a nonlocal term which is integrable for $\epsilon = 0$. For the $++$ propagator, the result is equation (B.5) which we reproduce here,

$$\begin{aligned}
 (i\Delta_{++}(x; x'))^2 \longrightarrow & -\frac{i\mu^{-\epsilon}}{2^3\pi^{2-(\epsilon/2)}} \frac{\Gamma(1-(\epsilon/2))}{(1-\epsilon)\epsilon} a^{-4+2\epsilon} \delta^D(x-x') \\
 & -\frac{(aa')^{-2}}{2^6\pi^4} \partial^2 \left(\frac{\ln(\mu^2 \Delta x_{++}^2)}{\Delta x_{++}^2} \right) - \frac{H^2}{2^4\pi^4} \frac{\ln((\sqrt{e}/4)H^2 \Delta x_{++}^2)}{aa' \Delta x_{++}^2} \\
 & + \frac{H^4}{2^6\pi^4} \ln^2 \left(\frac{\sqrt{e}}{4} H^2 \Delta x_{++}^2 \right). \tag{45}
 \end{aligned}$$

To fix $\delta\lambda$ we are interested only in the local, divergent term. There is such a contribution from the s -channel— $(i\Delta_{++}(x_1; x_4))^2$ —the t -channel— $(i\Delta_{++}(x_1; x_3))^2$ —and the u -channel— $(i\Delta_{++}(x_1; x_2))^2$ —graphs. They each make the same contribution, so the divergent part of the vertex is,

$$\begin{aligned}
 -iV_+(x_1, x_2, x_3, x_4) = & -i(\lambda + \delta\lambda) a_1^{4-\epsilon} \delta^D(x_1-x_2) \delta^D(x_1-x_3) \delta^D(x_1-x_4) \\
 & + \frac{i3\lambda^2 \mu^{-\epsilon}}{2^4\pi^{2-(\epsilon/2)}} \frac{\Gamma(1-(\epsilon/2))}{(1-\epsilon)\epsilon} a_1^4 \delta^D(x_1-x_2) \delta^D(x_1-x_3) \delta^D(x_1-x_4) \\
 & + \lambda^2(\text{nonlocal finite}) + O(\lambda^3). \tag{46}
 \end{aligned}$$

The simplest renormalization condition is to absorb the entire local, constant part at order λ^2 ,

$$\delta\lambda = \frac{3\lambda^2 \mu^{-\epsilon}}{16\pi^{2-(\epsilon/2)}} \frac{\Gamma(1-(\epsilon/2))}{\epsilon(1-\epsilon)}. \tag{47}$$

Note that while the divergence is proportional to the fourth power of the scale factor, the counterterm is proportional to the D th power. This means that expanding $a_1^{4-\epsilon} = a_1^4(1 - \epsilon \ln(a_1) + O(\epsilon^2))$ gives an additional, finite local term. The full renormalized $++++$ 1PI 4-point vertex is,

$$\begin{aligned}
 -iV_R(x_1, x_2, x_3, x_4) = & -i \left(\lambda - \frac{3\lambda^2}{2^4\pi^2} \ln(a_1) \right) a_1^4 \delta^4(x_1-x_2) \delta^4(x_1-x_3) \delta^4(x_1-x_4) \\
 & + \frac{\lambda^2}{2^7\pi^4} \left\{ (a_1 a_4)^2 \partial_1^2 \left[\frac{\ln(\mu^2 \Delta x_{14}^2)}{\Delta x_{14}^2} \right] + 4H^2 (a_1 a_4)^3 \frac{\ln((\sqrt{e}/4)H^2 \Delta x_{14}^2)}{\Delta x_{14}^2} \right. \\
 & \left. - H^4 (a_1 a_4)^4 \ln^2 \left(\frac{\sqrt{e}}{4} H^2 \Delta x_{14}^2 \right) \right\} \delta^4(x_1-x_2) \delta^4(x_3-x_4) \\
 & + \lambda^2(t\text{-channel}) + \lambda^2(u\text{-channel}) + O(\lambda^3). \tag{48}
 \end{aligned}$$

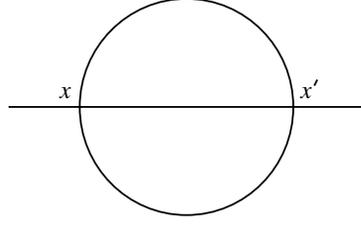


Figure 3. Generic sunset diagram.

4. The sunset diagram

The first two-loop contribution to the scalar self-mass-squared is known as the sunset (ss) diagram. Figure 3 depicts its topology. A simple application of the Feynman rules gives,

$$-iM_{ss\pm\pm}^2 = \frac{1}{3!} (\mp i\lambda)(\mp i\lambda)(aa')^{4-\epsilon} (i\Delta_{\pm\pm}(x; x'))^3. \quad (49)$$

In appendix C, we show that the cube of a propagator can be expressed as a local term which diverges for $\epsilon \rightarrow 0$, plus a nonlocal term which is integrable for $\epsilon = 0$. For the $++$ propagator the result is equation (C.12) which we reproduce here,

$$\begin{aligned} (i\Delta_{++}(x; x'))^3 \rightarrow & -\frac{i\mu^{-2\epsilon}\Gamma^2(1-\epsilon/2)}{2^9\pi^{4-\epsilon}} \frac{(aa')^{-3+(3\epsilon/2)}\partial^2\delta^D(x-x')}{(1-(3\epsilon/2))(1-\epsilon)(1-(3\epsilon/4))\epsilon} \\ & + \frac{i3H^{2-\epsilon}\mu^{-\epsilon}a^{-4+2\epsilon}}{2^{6-\epsilon}\pi^{4-\epsilon}} \left\{ \frac{(1-\epsilon/2)(1-\epsilon/4)\Gamma^2(1-\epsilon/2)}{(1-(3\epsilon/2))\epsilon^2} \left(\frac{Ha}{2\mu}\right)^\epsilon \right. \\ & - \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\epsilon} \left[\pi \cot\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right) + 2\ln(a) \right] \left. \right\} \delta^D(x-x') \\ & - \frac{(aa')^{-3}}{2^{11}\pi^6} \partial^4 \left[\frac{\ln(\mu^2\Delta x_{++}^2)}{\Delta x_{++}^2} \right] + \frac{3H^2(aa')^{-2}}{2^8\pi^6} \partial^2 \left[\ln\left(\frac{He^{3/4}}{2\mu}\right) \frac{\ln(\mu^2\Delta x_{++}^2)}{\Delta x_{++}^2} \right. \\ & + \left. \frac{1}{4} \frac{\ln^2(\mu^2\Delta x_{++}^2)}{\Delta x_{++}^2} \right] + \frac{3H^4}{2^8\pi^6} \frac{\ln^2((\sqrt{e}/4)H^2\Delta x_{++}^2)}{aa'\Delta x_{++}^2} \\ & - \frac{H^6}{2^9\pi^6} \ln^3\left(\frac{\sqrt{e}}{4}H^2\Delta x_{++}^2\right). \end{aligned} \quad (50)$$

When this is multiplied by $(aa')^{4-\epsilon}$ a few simple rearrangements allow us to recognize the spacetime-dependent part of the first term as essentially a field strength renormalization,

$$\begin{aligned} (aa')^{1+(\epsilon/2)}\partial^2\delta^D(x-x') & = a^{1+(\epsilon/2)}\partial^2(a^{1+(\epsilon/2)}\delta^D(x-x')) = a^{2+\epsilon} \left\{ \partial^2 - (2+\epsilon)Ha\partial_0 \right. \\ & \left. - \left(1+\frac{\epsilon}{2}\right)\left(2+\frac{\epsilon}{2}\right)H^2a^2 \right\} \delta^D(x-x'). \end{aligned} \quad (51)$$

Doing the same thing for the second term reveals what is essentially a mass renormalization plus some finite local terms *and* an overlapping divergence,

$$\begin{aligned} \frac{i3H^2a^4}{2^6\pi^4} \left(\frac{2\pi}{H\mu}\right)^\epsilon \left\{ \frac{(1-\epsilon/4)(1-\epsilon/2)\Gamma^2(1-\epsilon/2)}{\epsilon^2(1-(3\epsilon/2))} \left(\frac{Ha}{2\mu}\right)^\epsilon \right. \\ \left. - \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\epsilon} \left[\pi \cot\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right) + 2\ln(a) \right] \right\} \delta^D(x-x') \rightarrow \frac{i3H^2a^4}{2^6\pi^4} \left(\frac{2\pi}{H\mu}\right)^\epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ \frac{(1 - (\epsilon/4))(1 - (\epsilon/2))\Gamma^2(1 - (\epsilon/2))}{\epsilon^2(1 - (3\epsilon/2))} \left(\frac{H}{2\mu}\right)^\epsilon - \frac{\Gamma(1 - \epsilon)}{\epsilon} \pi \cot\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{\epsilon} \ln(a) + \frac{1}{2} \ln^2(a) + \left[\frac{3}{4} - \gamma + \ln\left(\frac{H}{2\mu}\right) \right] \ln(a) \right\} \delta^D(x - x'). \end{aligned} \quad (52)$$

In displaying the final result we exhibit the field strength and mass renormalizations, as well as the overlapping divergence and the finite, local terms. Our result for the $++$ case is,

$$\begin{aligned} M_{ss++}^2 & \longrightarrow -\frac{\lambda^2}{2^{10}3\pi^4} \left(\frac{\pi}{\mu^2}\right)^\epsilon \frac{\Gamma^2(1 - (\epsilon/2))}{(1 - (3\epsilon/4))(1 - (3\epsilon/2))(1 - \epsilon)\epsilon} a^2 [\partial^2 - 2Ha\partial_0 - 2H^2a^2] \\ & \times \delta^D(x - x') - \frac{\lambda^2}{2^{10}3\pi^4} a^2 \left\{ \ln(a)\partial^2 - (2\ln(a) + 1)Ha\partial_0 - \left(2\ln(a) + \frac{3}{2}\right)H^2a^2 \right\} \\ & \times \delta^4(x - x') + \frac{\lambda^2 H^2}{2^7\pi^4} \left(\frac{2\pi}{H\mu}\right)^\epsilon \left\{ \frac{(1 - (\epsilon/4))(1 - (\epsilon/2))\Gamma^2(1 - (\epsilon/2))}{\epsilon^2(1 - (3\epsilon/2))} \left(\frac{H}{2\mu}\right)^\epsilon \right. \\ & \left. - \frac{\Gamma(1 - \epsilon)}{\epsilon} \pi \cot\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right) \right\} a^4 \delta^D(x - x') - \frac{\lambda^2 H^2}{2^7\pi^4} \left(\frac{2\pi}{H\mu}\right)^\epsilon \frac{\ln(a)}{\epsilon} a^4 \delta^D(x - x') \\ & + \frac{\lambda^2 H^2}{2^7\pi^4} \left\{ \frac{1}{2} \ln^2(a) + \left[\frac{3}{4} - \gamma + \ln\left(\frac{H}{2\mu}\right) \right] \ln(a) \right\} a^4 \delta^4(x - x') \\ & + \frac{i\lambda^2 aa'}{2^9\pi^6} \left\{ \frac{1}{24} \partial^4 \left[\frac{\ln(\mu^2 \Delta x_{++}^2)}{\Delta x_{++}^2} \right] - H^2 aa' \partial^2 \left[\ln\left(\frac{He^{3/4}}{2\mu}\right) \frac{\ln(\mu^2 \Delta x_{++}^2)}{\Delta x_{++}^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\ln^2(\mu^2 \Delta x_{++}^2)}{4\Delta x_{++}^2} \right] - H^4 (aa')^2 \frac{\ln^2((\sqrt{e}/4)H^2 \Delta x_{++}^2)}{\Delta x_{++}^2} + \frac{H^6}{6} (aa')^3 \ln^3\left(\frac{\sqrt{e}}{4} H^2 \Delta x_{++}^2\right) \right\}. \end{aligned} \quad (53)$$

The $--$ case is minus the complex conjugate,

$$\begin{aligned} M_{ss--}^2 & \longrightarrow \frac{\lambda^2}{2^{10}3\pi^4} \left(\frac{\pi}{\mu^2}\right)^\epsilon \frac{\Gamma^2(1 - (\epsilon/2))}{(1 - (3\epsilon/4))(1 - (3\epsilon/2))(1 - \epsilon)\epsilon} a^2 [\partial^2 - 2Ha\partial_0 - 2H^2a^2] \\ & \times \delta^D(x - x') + \frac{\lambda^2}{2^{10}3\pi^4} a^2 \left\{ \ln(a)\partial^2 - (2\ln(a) + 1)Ha\partial_0 - \left(2\ln(a) + \frac{3}{2}\right)H^2a^2 \right\} \\ & \times \delta^4(x - x') - \frac{\lambda^2 H^2}{2^7\pi^4} \left(\frac{2\pi}{H\mu}\right)^\epsilon \left\{ \frac{(1 - (\epsilon/4))(1 - (\epsilon/2))\Gamma^2(1 - (\epsilon/2))}{\epsilon^2(1 - (3\epsilon/2))} \left(\frac{H}{2\mu}\right)^\epsilon \right. \\ & \left. - \frac{\Gamma(1 - \epsilon)}{\epsilon} \pi \cot\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right) \right\} a^4 \delta^D(x - x') + \frac{\lambda^2 H^2}{2^7\pi^4} \left(\frac{2\pi}{H\mu}\right)^\epsilon \frac{\ln(a)}{\epsilon} a^4 \delta^D(x - x') \\ & - \frac{\lambda^2 H^2}{2^7\pi^4} \left\{ \frac{1}{2} \ln^2(a) + \left[\frac{3}{4} - \gamma + \ln\left(\frac{H}{2\mu}\right) \right] \ln(a) \right\} a^4 \delta^4(x - x') \\ & + \frac{i\lambda^2 aa'}{2^9\pi^6} \left\{ \frac{1}{24} \partial^4 \left[\frac{\ln(\mu^2 \Delta x_{--}^2)}{\Delta x_{--}^2} \right] - H^2 aa' \partial^2 \left[\ln\left(\frac{He^{3/4}}{2\mu}\right) \frac{\ln(\mu^2 \Delta x_{--}^2)}{\Delta x_{--}^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\ln^2(\mu^2 \Delta x_{--}^2)}{4\Delta x_{--}^2} \right] - H^4 (aa')^2 \frac{\ln^2((\sqrt{e}/4)H^2 \Delta x_{--}^2)}{\Delta x_{--}^2} + \frac{H^6}{6} (aa')^3 \ln^3\left(\frac{\sqrt{e}}{4} H^2 \Delta x_{--}^2\right) \right\}. \end{aligned} \quad (54)$$

The mixed polarities lack the local terms and differ by a sign,

$$\begin{aligned}
M_{ss+-}^2 &= \frac{i\lambda^2}{6}(aa')^{4-\epsilon} [i\Delta_{+-}(x; x')]^3 = -i\frac{\lambda^2 aa'}{2^9 \pi^6} \left\{ \frac{1}{24} \partial^4 \left[\frac{\ln(\mu^2 \Delta x_{+-}^2)}{\Delta x_{+-}^2} \right] \right. \\
&\quad - H^2 aa' \partial^2 \left[\ln\left(\frac{He^{3/4}}{2\mu}\right) \frac{\ln(\mu^2 \Delta x_{+-}^2)}{\Delta x_{+-}^2} + \frac{1}{4} \frac{\ln^2(\mu^2 \Delta x_{+-}^2)}{\Delta x_{+-}^2} \right] \\
&\quad \left. - H^4 (aa')^2 \frac{\ln^2((\sqrt{e}/4)H^2 \Delta x_{+-}^2)}{\Delta x_{+-}^2} + \frac{H^6}{6} (aa')^3 \ln^3\left(\frac{\sqrt{e}}{4} H^2 \Delta x_{+-}^2\right) \right\}, \quad (55)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{ss-+}^2 &= \frac{i\lambda^2}{6}(aa')^{4-\epsilon} [i\Delta_{-+}(x; x')]^3 = -i\frac{\lambda^2 aa'}{2^9 \pi^6} \left\{ \frac{1}{24} \partial^4 \left[\frac{\ln(\mu^2 \Delta x_{-+}^2)}{\Delta x_{-+}^2} \right] \right. \\
&\quad - H^2 aa' \partial^2 \left[\ln\left(\frac{He^{3/4}}{2\mu}\right) \frac{\ln(\mu^2 \Delta x_{-+}^2)}{\Delta x_{-+}^2} + \frac{1}{4} \frac{\ln^2(\mu^2 \Delta x_{-+}^2)}{\Delta x_{-+}^2} \right] \\
&\quad \left. - H^4 (aa')^2 \frac{\ln^2((\sqrt{e}/4)H^2 \Delta x_{-+}^2)}{\Delta x_{-+}^2} + \frac{H^6}{6} (aa')^3 \ln^3\left(\frac{\sqrt{e}}{4} H^2 \Delta x_{-+}^2\right) \right\}. \quad (56)
\end{aligned}$$

5. The snowman diagram

The primitive two-loop graph is known as the snowman (sm) diagram. Unlike the sunset diagram, it contributes only to M_{++}^2 and M_{--}^2 . Its generic topology is depicted in figure 4. The right-hand side diagram depicts the one-loop mass counterterm which naturally combines with it.

Because both the external points of this diagram must have the same polarity we denote the contributions with a single subscript sign, M_{sm+}^2 and M_{sm-}^2 . The internal vertices are summed over both polarities, as always in the Schwinger–Keldysh formalism. A simple application of the Feynman rules gives,

$$\begin{aligned}
-iM_{sm+}^2 &= \frac{-i\lambda a^D}{2} \delta^D(x-x') \int d^D x'' a''^D \{ [i\Delta_{++}(x; x'')]^2 - [i\Delta_{+-}(x; x'')]^2 \} \\
&\quad \times \left\{ \frac{(-i\lambda)}{2} i\Delta(x''; x'') - i\delta m^2 \right\}. \quad (57)
\end{aligned}$$

Since both diagrams of figure 4 have the same lower loop, they possess a common factor in the first curly bracket. The first term within the final curly bracket derives from the left-hand side diagram, while the second term comes from the right-hand side diagram.

The coincident propagator and the mass counter term are calculated in (39) and (40) respectively. Once they are inserted into the above equation, one finds

$$\begin{aligned}
-iM_{sm+}^2 &= \frac{-\lambda^2 H^{2-\epsilon} a^{4-\epsilon}}{2^{5-\epsilon} \pi^{2-(\epsilon/2)}} \frac{\Gamma(3-\epsilon)}{\Gamma(2-(\epsilon/2))} \delta^D(x-x') \int d^4 x'' a''^{4-\epsilon} \ln(a'') \\
&\quad \times \{ [i\Delta_{++}(x; x'')]^2 - [i\Delta_{+-}(x; x'')]^2 \}. \quad (58)
\end{aligned}$$

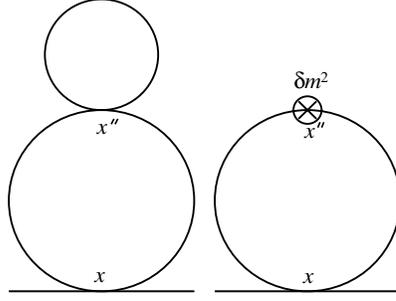


Figure 4. Generic snowman diagram with mass counterterm.

The squares of the various propagators are computed in appendix B and the results we need are (B.5) and (B.6)

$$\begin{aligned}
-iM_{\text{sm}+}^2 &= \frac{i\lambda^2 H^2 a^4}{2^7 \pi^4} \left(\frac{2\pi}{H\mu} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\epsilon} \ln(a) \delta^D(x-x') \\
&+ \frac{\lambda^2 H^2 a^2}{2^{10} \pi^6} \delta^4(x-x') (-\partial_0^2) \int d^4 x'' a''^2 \ln(a'') \left[\frac{\ln(\mu^2 \Delta x_{++}^2)}{\Delta x_{++}^2} - \frac{\ln(\mu^2 \Delta x_{+-}^2)}{\Delta x_{+-}^2} \right] \\
&+ \frac{\lambda^2 H^4 a^3}{2^8 \pi^6} \delta^4(x-x') \int d^4 x'' a''^3 \ln(a'') \left[\frac{\ln((H^2 \sqrt{e}/4) \Delta x_{++}^2)}{\Delta x_{++}^2} - \frac{\ln((H^2 \sqrt{e}/4) \Delta x_{+-}^2)}{\Delta x_{+-}^2} \right] \\
&- \frac{\lambda^2 H^6 a^4}{2^{10} \pi^6} \delta^4(x-x') \int d^4 x'' a''^4 \ln(a'') \left[\ln^2 \left(\frac{H^2 \sqrt{e}}{4} \Delta x_{++}^2 \right) - \ln^2 \left(\frac{H^2 \sqrt{e}}{4} \Delta x_{+-}^2 \right) \right], \quad (59)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow \frac{i\lambda^2 H^2}{2^7 \pi^4} \left(\frac{2\pi}{H\mu} \right)^\epsilon \left\{ \frac{\ln(a)}{\epsilon} + \gamma \ln(a) \right\} a^4 \delta^D(x-x') + \frac{\lambda^2 H^2 a^2}{2^{10} \pi^6} \delta^4(x-x') \\
&\times \{ I_1 + 4H^2 a I_2 - H^4 a^2 I_3 \}. \quad (60)
\end{aligned}$$

The integrals I_1 , I_2 and I_3 are evaluated in appendix D and the results are expressions (D.10), (D.16) and (D.20). Substituting these and adding everything up gives,

$$\begin{aligned}
M_{\text{sm}+}^2 &= -\frac{\lambda^2 H^2}{2^7 \pi^4} \left(\frac{2\pi}{H\mu} \right)^\epsilon \frac{\ln(a)}{\epsilon} a^4 \delta^D(x-x') + \frac{\lambda^2 H^2}{2^7 \pi^4} a^4 \delta^4(x-x') \left\{ -\frac{4}{9} \ln^3(a) + \frac{13}{18} \ln^2(a) \right. \\
&+ \left[\ln \left(\frac{H}{2\mu} \right) + \frac{8}{3} - \gamma - \frac{2}{9} \pi^2 \right] \ln(a) - \frac{238}{81} + \frac{13}{54} \pi^2 + \frac{4}{3} \zeta(3) + \frac{a^{-3}}{81} \\
&\left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{(n+1)^3} a^{-(n+1)} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{-(n+2)}}{(n+2)^3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{-(n+3)}}{n(n+3)^3} \right\}. \quad (61)
\end{aligned}$$

Note that the overlapping divergence from the first term is the same as the one from the sunset diagram. The $--$ case is minus (61).

6. The counter diagrams

We have already encountered the mass counterterm in section 3. At the order we are working, there is also a one-loop diagram with λ replaced by $\delta\lambda$, and there is a field strength renormalization. The generic diagram topologies are depicted in figure 5. Note that neither diagram contributes to the mixed polarities.

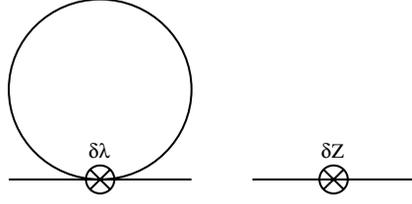


Figure 5. Generic counter diagrams. The one on the left is the same as figure 1 but with $\delta\lambda$ in place of λ . The one on the right is the field strength renormalization.

The contribution of the one-loop counter vertex diagram to the $++$ polarity is,

$$-iM_{\text{cv}+}^2 = -i\frac{\delta\lambda}{2}a^D i\Delta(x'; x')\delta^D(x-x'). \quad (62)$$

Of course we can read off the answer from section 3,

$$M_{\text{cv}+}^2 = \frac{3H^2\lambda^2 a^{4-\epsilon}}{2^8\pi^4} \left(\frac{2\pi}{\mu H}\right)^\epsilon \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\epsilon} \left\{ 2\ln(a) + \pi \cot\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right) \right\} \delta^D(x-x'), \quad (63)$$

$$\rightarrow \frac{H^2\lambda^2}{2^7\pi^4} \left(\frac{2\pi}{\mu H}\right)^\epsilon \left\{ \frac{3}{2} \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\epsilon} \pi \cot\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right) - \frac{3}{2} \ln^2(a) \right\} a^4 \delta^D(x-x'). \quad (64)$$

The $--$ case is the minus of this.

The contribution of field strength renormalization to the $++$ polarity is,

$$M_{\delta Z+}^2 = -\delta Z \eta^{\mu\nu} \partial_\mu (a^{D-2} \partial_\nu \delta^D(x-x')) = -\delta Z a^{2-\epsilon} (\partial^2 - (2-\epsilon)Ha\partial_0) \delta^D(x-x'). \quad (65)$$

The only primitive graph with a divergence proportional to $a^2(\partial^2 - 2Ha\partial_0)\delta^D(x-x')$ is the sunset diagram. Comparison with our result (53) for it implies

$$\delta Z = -\frac{\lambda^2}{2^{10}3\pi^4} \left(\frac{\pi}{\mu^2}\right)^\epsilon \frac{\Gamma^2(1-(\epsilon/2))}{(1-(3\epsilon/4))(1-(3\epsilon/2))(1-\epsilon)\epsilon}. \quad (66)$$

Although some finite, local terms result from expanding $a^{-\epsilon} = 1 - \epsilon \ln(a) + O(\epsilon^2)$ there are no overlapping divergences from the field strength renormalization at two-loop order,

$$M_{\delta Z+}^2 = \frac{\lambda^2}{2^{10}3\pi^4} \left(\frac{\pi}{\mu^2}\right)^\epsilon \frac{\Gamma^2(1-(\epsilon/2))}{(1-(3\epsilon/4))(1-(3\epsilon/2))(1-\epsilon)\epsilon} a^2 (\partial^2 - 2Ha\partial_0) \delta^D(x-x') \\ + \frac{\lambda^2}{2^{10}3\pi^4} a^2 [-\ln(a)\partial^2 + (2\ln(a)+1)Ha\partial_0] \delta^4(x-x'). \quad (67)$$

After field strength renormalization, all remaining divergences reside on $a^4\delta^D(x-x')$. Such contributions come from the sunset diagram (53) and the counter vertex (64). Comparison with these results suggests that the simplest choice for the two-loop mass counterterm is,

$$\delta m^2|_{\lambda^2} = -\frac{\lambda^2 H^2}{2^7\pi^4} \left(\frac{2\pi}{H\mu}\right)^\epsilon \left\{ \left(\frac{H}{2\mu}\right)^\epsilon \frac{\Gamma^2(1-(\epsilon/2))}{12(1-(3\epsilon/2))(1-(3\epsilon/4))(1-\epsilon)\epsilon} \right. \\ + \left(\frac{H}{2\mu}\right)^\epsilon \frac{(1-(\epsilon/4))(1-(\epsilon/2))\Gamma^2(1-(\epsilon/2))}{(1-(3\epsilon/2))\epsilon^2} \\ \left. + \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{2\epsilon} \pi \cot\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right) + \frac{1}{16} - \frac{238}{81} + \frac{13}{54}\pi^2 + \frac{4}{3}\zeta(3) \right\}. \quad (68)$$

Of course, the mass counterterm is $M_{\delta m+}^2 = \delta m^2 a^{4-\epsilon} \delta^D(x-x')$. Using the expansion $a^{-\epsilon} = 1 - \epsilon \ln(a) + \frac{1}{2}\epsilon^2 \ln^2(a) + O(\epsilon^3)$, we see that the two-loop contribution is,

$$\begin{aligned}
M_{\delta m+|\lambda^2}^2 \longrightarrow & -\frac{\lambda^2 H^2}{2^7 \pi^4} \left(\frac{2\pi}{H\mu}\right)^\epsilon \left\{ \left(\frac{H}{2\mu}\right)^\epsilon \frac{\Gamma^2(1-(\epsilon/2))}{12(1-(3\epsilon/2))(1-(3\epsilon/4))(1-\epsilon)\epsilon} \right. \\
& + \left(\frac{H}{2\mu}\right)^\epsilon \frac{(1-(\epsilon/4))(1-(\epsilon/2))\Gamma^2(1-(\epsilon/2))}{(1-(3\epsilon/2))\epsilon^2} \\
& + \left. \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{2\epsilon} \pi \cot\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right) \right\} a^4 \delta^D(x-x') + \frac{\lambda^2 H^2}{2^6 \pi^4} \left(\frac{2\pi}{H\mu}\right)^\epsilon \frac{\ln(a)}{\epsilon} a^4 \delta^D(x-x') \\
& - \frac{\lambda^2 H^2}{2^7 \pi^4} \left\{ \ln^2(a) - \left[\frac{5}{6} + 2\gamma + \ln\left(\frac{H}{2\mu}\right) \right] \ln(a) \right. \\
& + \left. \frac{1}{16} - \frac{238}{81} + \frac{13}{54}\pi^2 + \frac{4}{3}\zeta(3) \right\} a^4 \delta^4(x-x'). \tag{69}
\end{aligned}$$

Note that the nonlocal divergence precisely cancels the nonlocal divergences from the sunset diagram (53) and the snowman diagram (61). As usual, the $--$ polarity is minus (69).

7. The fully renormalized result

To get the full two-loop result for the $++$ case we add the contributions from the sunset diagram (53), the snowman diagram (61), the counter vertex diagram (64), the field strength renormalization (67) and the two-loop mass renormalization (69),

$$\begin{aligned}
M_{2++}^2 = & M_{ss++}^2 + M_{sm+}^2 + M_{cv+}^2 + M_{\delta Z+}^2 + M_{\delta m+}^2 \\
= & \frac{i\lambda^2}{2^9 \pi^6} \left\{ \frac{aa'}{24} \partial^4 \left[\frac{\ln(\mu^2 \Delta x_{++}^2)}{\Delta x_{++}^2} \right] \right. \\
& - H^2 (aa')^2 \partial^2 \left[\ln\left(\frac{He^{3/4}}{2\mu}\right) \frac{\ln(\mu^2 \Delta x_{++}^2)}{\Delta x_{++}^2} + \frac{\ln^2(\mu^2 \Delta x_{++}^2)}{4\Delta x_{++}^2} \right] \\
& - \left. H^4 (aa')^3 \frac{\ln^2((\sqrt{e}/4)H^2 \Delta x_{++}^2)}{\Delta x_{++}^2} + \frac{H^6}{6} (aa')^4 \ln^3\left(\frac{\sqrt{e}}{4}H^2 \Delta x_{++}^2\right) \right\} \\
& + \frac{\lambda^2}{2^9 3 \pi^4} a^2 \left\{ -\ln(a)\partial^2 + (2\ln(a) + 1)Ha\partial_0 \right\} \delta^4(x-x') \\
& + \frac{\lambda^2 H^2}{2^7 \pi^4} \left\{ -\frac{4}{9}\ln^3(a) - \frac{23}{18}\ln^2(a) + \left[\frac{13}{3} + 3\ln\left(\frac{H}{2\mu}\right) - \frac{2}{9}\pi^2 \right] \ln(a) \right\} a^4 \delta^4(x-x') \\
& + \frac{\lambda^2 H^2}{2^7 \pi^4} \left\{ \frac{a^{-3}}{81} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{(n+1)^3} a^{-(n+1)} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{-(n+2)}}{(n+2)^3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{-(n+3)}}{n(n+3)^3} \right\} a^4 \delta^4(x-x'). \tag{70}
\end{aligned}$$

As with the renormalized stress–energy tensor [3], we conjecture that the exponentially falling terms on the last line could be absorbed into a perturbative modification of the initial state.

The $--$ polarity is minus the complex conjugate,

$$\begin{aligned}
M_{2--}^2 &= -(M_{2++}^2)^* = \frac{i\lambda^2}{2^9\pi^6} \left\{ \frac{aa'}{24} \partial^4 \left[\frac{\ln(\mu^2 \Delta x_{--}^2)}{\Delta x_{--}^2} \right] \right. \\
&\quad - H^2 (aa')^2 \partial^2 \left[\ln \left(\frac{He^{3/4}}{2\mu} \right) \frac{\ln(\mu^2 \Delta x_{--}^2)}{\Delta x_{--}^2} + \frac{\ln^2(\mu^2 \Delta x_{--}^2)}{4\Delta x_{--}^2} \right] \\
&\quad \left. - H^4 (aa')^3 \frac{\ln^2((\sqrt{e}/4)H^2 \Delta x_{--}^2)}{\Delta x_{--}^2} + \frac{H^6}{6} (aa')^4 \ln^3 \left(\frac{\sqrt{e}}{4} H^2 \Delta x_{--}^2 \right) \right\} \\
&\quad - \frac{\lambda^2}{2^9 3\pi^4} a^2 \{ -\ln(a) \partial^2 + (2\ln(a) + 1) Ha \partial_0 \} \delta^4(x - x') \\
&\quad - \frac{\lambda^2 H^2}{2^7 \pi^4} \left\{ -\frac{4}{9} \ln^3(a) - \frac{23}{18} \ln^2(a) + \left[\frac{13}{3} + 3 \ln \left(\frac{H}{2\mu} \right) - \frac{2}{9} \pi^2 \right] \ln(a) \right\} a^4 \delta^4(x - x') \\
&\quad - \frac{\lambda^2 H^2}{2^7 \pi^4} \left\{ \frac{a^{-3}}{81} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{(n+1)^3} a^{-(n+1)} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{-(n+2)}}{(n+2)^3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{-(n+3)}}{n(n+3)^3} \right\} a^4 \delta^4(x - x').
\end{aligned} \tag{71}$$

As usual, the $+-$ and $-+$ polarities have opposite signs and lack the local terms,

$$\begin{aligned}
M_{2+-}^2 &= -\frac{i\lambda^2}{2^9\pi^6} \left\{ \frac{aa'}{24} \partial^4 \left[\frac{\ln(\mu^2 \Delta x_{+-}^2)}{\Delta x_{+-}^2} \right] \right. \\
&\quad - H^2 (aa')^2 \partial^2 \left[\ln \left(\frac{He^{3/4}}{2\mu} \right) \frac{\ln(\mu^2 \Delta x_{+-}^2)}{\Delta x_{+-}^2} + \frac{\ln^2(\mu^2 \Delta x_{+-}^2)}{4\Delta x_{+-}^2} \right] \\
&\quad \left. - H^4 (aa')^3 \frac{\ln^2((\sqrt{e}/4)H^2 \Delta x_{+-}^2)}{\Delta x_{+-}^2} + \frac{H^6}{6} (aa')^4 \ln^3 \left(\frac{\sqrt{e}}{4} H^2 \Delta x_{+-}^2 \right) \right\},
\end{aligned} \tag{72}$$

$$\begin{aligned}
M_{2-+}^2 &= -\frac{i\lambda^2}{2^9\pi^6} \left\{ \frac{aa'}{24} \partial^4 \left[\frac{\ln(\mu^2 \Delta x_{-+}^2)}{\Delta x_{-+}^2} \right] \right. \\
&\quad - H^2 (aa')^2 \partial^2 \left[\ln \left(\frac{He^{3/4}}{2\mu} \right) \frac{\ln(\mu^2 \Delta x_{-+}^2)}{\Delta x_{-+}^2} + \frac{\ln^2(\mu^2 \Delta x_{-+}^2)}{4\Delta x_{-+}^2} \right] \\
&\quad \left. - H^4 (aa')^3 \frac{\ln^2((\sqrt{e}/4)H^2 \Delta x_{-+}^2)}{\Delta x_{-+}^2} + \frac{H^6}{6} (aa')^4 \ln^3 \left(\frac{\sqrt{e}}{4} H^2 \Delta x_{-+}^2 \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{73}$$

8. Discussion

We have computed and fully renormalized the four Schwinger–Keldysh self-mass-squared terms at one- and two-loop orders for massless, minimally coupled ϕ^4 (2) on a locally de Sitter background (1). The next step is using our results to study the quantum-corrected, effective field equations at linearized order (7). The term ‘ $M^2(x; x')$ ’ called for in (7) is the sum of $M_{++}^2(x; x')$ and $M_{+-}^2(x; x')$. The analysis, which will be presented in a subsequent paper, is very similar to that already done for de Sitter photons using the one-loop vacuum polarization [67] and for de Sitter fermions using the one-loop self-energy [68].

There are two interesting issues to investigate. The first is stability. Secular effects in this system are driven by inflationary particle production which forces the scalar up its φ^4 potential. One would expect this to generate a *positive* mass-squared, and it is significant that our one-loop result (41) is positive. The two-loop result (70) is a little too complicated to interpret without a detailed calculation of the type proposed, but we expect no problems with stability.

The second interesting issue is an apparent paradox in the stochastic solution of this model which was given in 1994 by Starobinskiĭ and Yokoyama [69]. As we noted in section 1, this model is stable for two reasons. Firstly, as inflationary particle production forces the scalar up its potential the classical force pushes it back down. Secondly, the curvature of the potential must induce a positive mass-squared which should reduce the inflationary particle production. However, the solution of Starobinskiĭ and Yokoyama implements only the first effect. Although, it would be possible to implement the second effect as well within the context of Starobinskiĭ's stochastic technique [70], including just the first effect gives perfect agreement at leading logarithmic order as high as this has been checked. The question is why should this be so? A possible answer is that the nonzero self-mass-squared always remains down by one factor of $\ln(a)$. Whereas the leading logarithms of the energy density give a series in $\lambda \ln^2(a)$,

$$\rho|_{\text{leading}} = H^4 \sum_{\ell=2}^{\infty} \rho_{\ell} (\lambda \ln^2(a))^{\ell-1}, \quad (74)$$

it may be that the self-mass-squared behaves as such a series times $\lambda \ln(a)$,

$$M^2(x; x')|_{\text{leading}} = H^2 a^4 \delta^4(x - x') \times \lambda \ln(a) \sum_{\ell=1}^{\infty} m_{\ell} (\lambda \ln^2(a))^{\ell-1}. \quad (75)$$

It is worth noting that, had gravity been quantized, there would have been similar corrections from graviton exchange. While the physics of the pure scalar model pretty much guarantees that a positive self-mass-squared must be induced, there is no such argument for gravity. If the induced self-mass-squared turns out to be tachyonic it might have important implications for scalar-driven inflation. Further, there is no reason for the gravitational process to ever stop. The graviton should not experience a classical force since it has no non-derivative potential. Nor should the graviton ever develop a mass. This might be significant for scalar-driven models which inflate for a very large number of e-foldings.

We close with a comment on accuracy. Two-loop computations are generally intricate enough that this becomes an issue. In this regard it is worth noting that three distinct diagrams conspire to cancel the overlapping divergences. This is significant because there are no overlapping divergences at this order in massless φ^4 on flat space.

It is also a significant correspondence check that we get the same results for $\delta\lambda$ (at one loop) and δZ (at two loops) as for massless φ^4 in flat space. This had to be the case because the divergences these counterterms absorb are formally logarithmic. Because geometric corrections make divergences more finite, any geometric corrections to $\delta\lambda$ and δZ must be finite. The same is not the case for δm^2 because the divergences it cancels are formally quadratic. Indeed, δm^2 vanishes for massless φ^4 in flat space whereas we found logarithmically divergent corrections proportional to H^2 at both one- and two-loop orders.

Acknowledgments

This work was partially supported by NSF grant PHY-0244714 and by the Institute for Fundamental Theory.

Appendix A. Partial integration identities

In almost all cases, derivatives of the conformal coordinate intervals $\Delta x_{\pm\pm}^2(x; x')$ can be taken generically, without regard to polarity and without worrying about delta functions,

$$\partial^2 \left(\frac{1}{\Delta x_{\pm\pm}^{n-m\epsilon}} \right) = \frac{(n-m\epsilon)(n-2-(m-1)\epsilon)}{\Delta x_{\pm\pm}^{n+2-m\epsilon}} \quad (n \neq 2 \text{ or } m \neq 1). \quad (\text{A.1})$$

The exception is $1/\Delta x^{2-\epsilon}$,

$$\begin{aligned} \partial^2 \left(\frac{1}{\Delta x_{++}^{2-\epsilon}} \right) &= \frac{i4\pi^{2-(\epsilon/2)}}{\Gamma(1-(\epsilon/2))} \delta^D(x-x') = -\partial^2 \left(\frac{1}{\Delta x_{--}^{2-\epsilon}} \right), \\ \partial^2 \left(\frac{1}{\Delta x_{+-}^{2-\epsilon}} \right) &= 0 = \partial^2 \left(\frac{1}{\Delta x_{-+}^{2-\epsilon}} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

These identities allow one to extract more and more derivatives of inverse powers of $\Delta x_{\pm\pm}^2$ until the result is integrable in $D = 4$ dimensions. For $m \neq 1$ we have,

$$\frac{1}{\Delta x_{\pm\pm}^{4-m\epsilon}} = \frac{\partial^2}{(2-m\epsilon)(-m\epsilon)} \left(\frac{1}{\Delta x_{\pm\pm}^{2-m\epsilon}} \right), \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{1}{\Delta x_{\pm\pm}^{6-m\epsilon}} = \frac{\partial^4}{(4-m\epsilon)(2-m\epsilon)(2-(m-1)\epsilon)(-m\epsilon)} \left(\frac{1}{\Delta x_{\pm\pm}^{2-m\epsilon}} \right). \quad (\text{A.4})$$

At this stage one adds zero in the form of the appropriate identity (A.2) and then expands the nonlocal term in powers of ϵ . For example, the $++$ term gives,

$$\partial^2 \left(\frac{1}{\Delta x_{++}^{2-m\epsilon}} \right) = \partial^2 \left(\frac{1}{\Delta x_{++}^{2-m\epsilon}} - \frac{\mu^{-(m-1)\epsilon}}{\Delta x_{++}^{2-\epsilon}} \right) + \frac{i4\pi^{2-(\epsilon/2)}\mu^{-(m-1)\epsilon}}{\Gamma(1-(\epsilon/2))} \delta^D(x-x'), \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} &= + \frac{i4\pi^{2-(\epsilon/2)}\mu^{-(m-1)\epsilon}}{\Gamma(1-(\epsilon/2))} \delta^D(x-x') + \mu^{-m\epsilon} \partial^2 \\ &\quad \times \left(\frac{[(m-1)/2]\epsilon \ln(\mu^2 \Delta x_{++}^2) + [(m^2-1)/8]\epsilon^2 \ln^2(\mu^2 \Delta x_{++}^2) + O(\epsilon^3)}{\Delta x_{++}^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

The cases we require are

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x_{++}^{4-2\epsilon}} &= \frac{\mu^{-\epsilon}}{(2-2\epsilon)(-\epsilon)} \frac{i4\pi^{2-(\epsilon/2)}}{\Gamma(1-(\epsilon/2))} \delta^D(x-x') + \frac{\mu^{-2\epsilon} \partial^2}{(2-2\epsilon)(-\epsilon)} \\ &\quad \times \left(\frac{\frac{1}{2}\epsilon \ln(\mu^2 \Delta x_{++}^2) + \frac{3}{8}\epsilon^2 \ln^2(\mu^2 \Delta x_{++}^2) + O(\epsilon^3)}{\Delta x_{++}^2} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x_{++}^{4-3\epsilon}} &= \frac{\mu^{-2\epsilon}}{(2-3\epsilon)(-2\epsilon)} \frac{i4\pi^{2-(\epsilon/2)}}{\Gamma(1-(\epsilon/2))} \delta^D(x-x') \\ &\quad + \frac{\mu^{-3\epsilon} \partial^2}{(2-3\epsilon)(-2\epsilon)} \left(\frac{\epsilon \ln(\mu^2 \Delta x_{++}^2) + \epsilon^2 \ln^2(\mu^2 \Delta x_{++}^2) + O(\epsilon^3)}{\Delta x_{++}^2} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x_{++}^{6-3\epsilon}} &= \frac{\mu^{-2\epsilon}}{(4-3\epsilon)(2-3\epsilon)(2-2\epsilon)(-2\epsilon)} \frac{i4\pi^{2-(\epsilon/2)}}{\Gamma(1-(\epsilon/2))} \partial^2 \delta^D(x-x') \\ &+ \frac{\mu^{-3\epsilon} \partial^4}{(4-3\epsilon)(2-3\epsilon)(2-2\epsilon)(-2\epsilon)} \left(\frac{\epsilon \ln(\mu^2 \Delta x_{++}^2) + O(\epsilon^2)}{\Delta x_{++}^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

The -- variations differ only in the sign of the delta function term,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x_{--}^{4-2\epsilon}} &= -\frac{\mu^{-\epsilon}}{(2-2\epsilon)(-\epsilon)} \frac{i4\pi^{2-(\epsilon/2)}}{\Gamma(1-(\epsilon/2))} \delta^D(x-x') + \frac{\mu^{-2\epsilon} \partial^2}{(2-2\epsilon)(-\epsilon)} \\ &\times \left(\frac{\frac{1}{2}\epsilon \ln(\mu^2 \Delta x_{--}^2) + \frac{3}{8}\epsilon^2 \ln^2(\mu^2 \Delta x_{--}^2) + O(\epsilon^3)}{\Delta x_{--}^2} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x_{--}^{4-3\epsilon}} &= -\frac{\mu^{-2\epsilon}}{(2-3\epsilon)(-2\epsilon)} \frac{i4\pi^{2-(\epsilon/2)}}{\Gamma(1-(\epsilon/2))} \delta^D(x-x') \\ &+ \frac{\mu^{-3\epsilon} \partial^2}{(2-3\epsilon)(-2\epsilon)} \left(\frac{\epsilon \ln(\mu^2 \Delta x_{--}^2) + \epsilon^2 \ln^2(\mu^2 \Delta x_{--}^2) + O(\epsilon^3)}{\Delta x_{--}^2} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x_{--}^{6-3\epsilon}} &= -\frac{\mu^{-2\epsilon}}{(4-3\epsilon)(2-3\epsilon)(2-2\epsilon)(-2\epsilon)} \frac{i4\pi^{2-(\epsilon/2)}}{\Gamma(1-(\epsilon/2))} \partial^2 \delta^D(x-x') \\ &+ \frac{\mu^{-3\epsilon} \partial^4}{(4-3\epsilon)(2-3\epsilon)(2-2\epsilon)(-2\epsilon)} \left(\frac{\epsilon \ln(\mu^2 \Delta x_{--}^2) + O(\epsilon^2)}{\Delta x_{--}^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

And the mixed terms have no delta functions,

$$\frac{1}{\Delta x_{+-}^{4-2\epsilon}} = \frac{\mu^{-2\epsilon} \partial^2}{(2-2\epsilon)(-\epsilon)} \left(\frac{\frac{1}{2}\epsilon \ln(\mu^2 \Delta x_{+-}^2) + \frac{3}{8}\epsilon^2 \ln^2(\mu^2 \Delta x_{+-}^2) + O(\epsilon^3)}{\Delta x_{+-}^2} \right), \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{1}{\Delta x_{+-}^{4-3\epsilon}} = \frac{\mu^{-3\epsilon} \partial^2}{(2-3\epsilon)(-2\epsilon)} \left(\frac{\epsilon \ln(\mu^2 \Delta x_{+-}^2) + \epsilon^2 \ln^2(\mu^2 \Delta x_{+-}^2) + O(\epsilon^3)}{\Delta x_{+-}^2} \right), \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{1}{\Delta x_{+-}^{6-3\epsilon}} = \frac{\mu^{-3\epsilon} \partial^4}{(4-3\epsilon)(2-3\epsilon)(2-2\epsilon)(-2\epsilon)} \left(\frac{\epsilon \ln(\mu^2 \Delta x_{+-}^2) + O(\epsilon^2)}{\Delta x_{+-}^2} \right). \quad (\text{A.15})$$

Replacing +- with -+ gives the final case.

Appendix B. The square of a propagator

When the square of a propagator multiplies regular expressions, we first decompose it according to (34) and then take ϵ to zero in all but the A^2 term,

$$(\imath \Delta(x; x'))^2 = (A(x; x'))^2 + 2A(x; x') (B(x; x') + C(x; x')) + (B(x; x') + C(x; x'))^2 \quad (\text{B.1})$$

$$\longrightarrow \frac{\Gamma^2(1 - (\epsilon/2)) (aa')^{-2+\epsilon}}{2^4\pi^{4-\epsilon}} \frac{1}{\Delta x^{4-2\epsilon}} - \frac{H^2 \ln((\sqrt{e}/4)H^2 \Delta x^2)}{2^4\pi^4} \frac{1}{aa' \Delta x^2} + \frac{H^4}{2^6\pi^4} \ln^2\left(\frac{\sqrt{e}}{4} H^2 \Delta x^2\right). \quad (\text{B.2})$$

We then employ the appropriate identity (A.7), (A.10) or (A.13) and take $\epsilon = 0$ in the nonlocal part. The squares of the $+-$ and $-+$ propagators are finite,

$$(i\Delta_{+-})^2 \rightarrow -\frac{(aa')^{-2}}{2^6\pi^4} \partial^2 \left(\frac{\ln(\mu^2 \Delta x_{+-}^2)}{\Delta x_{+-}^2} \right) - \frac{H^2 \ln((\sqrt{e}/4)H^2 \Delta x_{+-}^2)}{2^4\pi^4} \frac{1}{aa' \Delta x_{+-}^2} + \frac{H^4}{2^6\pi^4} \ln^2\left(\frac{\sqrt{e}}{4} H^2 \Delta x_{+-}^2\right), \quad (\text{B.3})$$

$$(i\Delta_{-+})^2 \rightarrow -\frac{(aa')^{-2}}{2^6\pi^4} \partial^2 \left(\frac{\ln(\mu^2 \Delta x_{-+}^2)}{\Delta x_{-+}^2} \right) - \frac{H^2 \ln((\sqrt{e}/4)H^2 \Delta x_{-+}^2)}{2^4\pi^4} \frac{1}{aa' \Delta x_{-+}^2} + \frac{H^4}{2^6\pi^4} \ln^2\left(\frac{\sqrt{e}}{4} H^2 \Delta x_{-+}^2\right). \quad (\text{B.4})$$

The square of the $++$ propagator includes a local divergent term in addition to the corresponding $++$ finite terms,

$$(i\Delta_{++}(x; x'))^2 \longrightarrow -\frac{i\mu^{-\epsilon}}{2^3\pi^{2-(\epsilon/2)}} \frac{\Gamma(1 - (\epsilon/2))}{(1 - \epsilon)\epsilon} a^{-4+2\epsilon} \delta^D(x - x') - \frac{(aa')^{-2}}{2^6\pi^4} \partial^2 \left(\frac{\ln(\mu^2 \Delta x_{++}^2)}{\Delta x_{++}^2} \right) - \frac{H^2 \ln((\sqrt{e}/4)H^2 \Delta x_{++}^2)}{2^4\pi^4} \frac{1}{aa' \Delta x_{++}^2} + \frac{H^4}{2^6\pi^4} \ln^2\left(\frac{\sqrt{e}}{4} H^2 \Delta x_{++}^2\right). \quad (\text{B.5})$$

The square of the $--$ propagator is the complex conjugate,

$$(i\Delta_{--}(x; x'))^2 \longrightarrow \frac{i\mu^{-\epsilon}}{2^3\pi^{2-(\epsilon/2)}} \frac{\Gamma(1 - (\epsilon/2))}{(1 - \epsilon)\epsilon} a^{-4+2\epsilon} \delta^D(x - x') - \frac{(aa')^{-2}}{2^6\pi^4} \partial^2 \left(\frac{\ln(\mu^2 \Delta x_{--}^2)}{\Delta x_{--}^2} \right) - \frac{H^2 \ln((\sqrt{e}/4)H^2 \Delta x_{--}^2)}{2^4\pi^4} \frac{1}{aa' \Delta x_{--}^2} + \frac{H^4}{2^6\pi^4} \ln^2\left(\frac{\sqrt{e}}{4} H^2 \Delta x_{--}^2\right). \quad (\text{B.6})$$

Appendix C. The cube of a propagator

When the cube of a propagator multiplies a regular expression we again decompose it according to (34) but now we must retain $\epsilon \neq 0$ in the A^3 and $3A^2B$ terms,

$$(i\Delta(x; x'))^3 = A^3 + 3A^2(B + C) + 3A(B + C)^2 + (B + C)^3, \quad (\text{C.1})$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow & \frac{\Gamma^3(1 - (\epsilon/2)) (aa')^{-3+(3\epsilon/2)}}{2^6\pi^{6-(3\epsilon/2)}} \frac{1}{\Delta x^{6-3\epsilon}} + \frac{3H^{2-\epsilon}\Gamma(1 - (\epsilon/2))\Gamma(2 - \epsilon)}{2^{7-\epsilon}\pi^{6-(3\epsilon/2)}(aa')^{2-\epsilon}} \\ & \times \left\{ -\frac{2\Gamma(3 - (\epsilon/2)) \Gamma(2 - (\epsilon/2)) (H^2 aa'/4)^{\epsilon/2}}{\epsilon \Gamma(3 - \epsilon)} \frac{1}{\Delta x^{4-3\epsilon}} + \left[\frac{\pi \cot(\pi\epsilon/2) + \ln(aa')}{\Delta x^{4-2\epsilon}} \right] \right\} \\ & + \frac{3H^4 \ln^2((\sqrt{e}/4)H^2 \Delta x^2)}{2^8\pi^6} \frac{1}{aa' \Delta x^2} - \frac{H^6}{2^9\pi^6} \ln^3\left(\frac{\sqrt{e}}{4} H^2 \Delta x^2\right). \quad (\text{C.2}) \end{aligned}$$

The A^3 term is easy to read off from the identities (A.9), (A.12) and (A.15). For example, the $+-$ case gives

$$\frac{\Gamma^3(1 - (\epsilon/2)) (aa')^{-3+(3\epsilon/2)}}{2^6\pi^{6-(3\epsilon/2)} \Delta x_{+-}^{6-3\epsilon}} \rightarrow -\frac{(aa')^{-3}}{2^{11}\pi^6} \partial^4 \left[\frac{\ln(\mu^2 \Delta x_{+-}^2)}{\Delta x_{+-}^2} \right]. \quad (\text{C.3})$$

The $3A^2B$ term is more complicated on account of the $1/\epsilon$ divergence in its prefactors. One must first partially integrate and multiply before taking $\epsilon = 0$ in the nonlocal term. For the $+-$ case we have,

$$\begin{aligned} 3(A^2B)_{+-} &= \frac{3H^{2-\epsilon} (aa')^{-2+\epsilon} \mu^{-2\epsilon}}{2^{7-\epsilon}\pi^{6-(3\epsilon/2)}} \Gamma\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \left\{ \frac{(1 - (\epsilon/2))(1 - (\epsilon/4))\Gamma^2(1 - (\epsilon/2))}{2(1 - (3\epsilon/2))\epsilon} \right. \\ &\quad \times \left(\frac{H^2 aa'}{4\mu^2} \right)^{\epsilon/2} \partial^2 \left[\frac{\ln(\mu^2 \Delta x_{+-}^2)}{\Delta x_{+-}^2} + \epsilon \frac{\ln^2(\mu^2 \Delta x_{+-}^2)}{\Delta x_{+-}^2} \right] - \frac{\Gamma(1 - \epsilon)}{4} \left[\pi \cot\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. \left. + \ln(aa') \right] \partial^2 \left[\frac{\ln(\mu^2 \Delta x_{+-}^2)}{\Delta x_{+-}^2} + \frac{3}{4}\epsilon \frac{\ln^2(\mu^2 \Delta x_{+-}^2)}{\Delta x_{+-}^2} \right] \right\}. \quad (\text{C.4}) \end{aligned}$$

At this point we digress to recall some basic series expansions,

$$\Gamma(1 - \epsilon) = 1 + \gamma\epsilon + \left[\frac{\gamma^2}{2} + \frac{\pi^2}{12} \right] \epsilon^2 + O(\epsilon^3), \quad \pi \cot\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right) = \frac{2}{\epsilon} \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \epsilon^2 + O(\epsilon^4) \right]. \quad (\text{C.5})$$

It follows that the various prefactors in (C.4) are,

$$\frac{(1 - \epsilon/2)(1 - (\epsilon/4))\Gamma^2(1 - (\epsilon/2))}{2(1 - (3\epsilon/2))\epsilon} = \frac{1}{2\epsilon} + \frac{\gamma}{2} + \frac{3}{8} + O(\epsilon), \quad (\text{C.6})$$

$$-\frac{\Gamma(1 - \epsilon)}{4} \pi \cot\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right) = -\frac{1}{2\epsilon} - \frac{\gamma}{2} + O(\epsilon), \quad (\text{C.7})$$

$$-\frac{\Gamma(1 - \epsilon)}{4} = -\frac{1}{4} + O(\epsilon). \quad (\text{C.8})$$

Making use of these expansions in (C.4) gives,

$$3(A^2B)_{+-} \rightarrow \frac{3H^2 (aa')^{-2}}{2^8\pi^6} \partial^2 \left[\ln\left(\frac{He^{3/4}}{2\mu}\right) \frac{\ln(\mu^2 \Delta x_{+-}^2)}{\Delta x_{+-}^2} + \frac{1}{4} \frac{\ln^2(\mu^2 \Delta x_{+-}^2)}{\Delta x_{+-}^2} \right]. \quad (\text{C.9})$$

Employing (C.3) and (C.9) in (C.2) gives

$$\begin{aligned} (i\Delta_{+-}(x; x'))^3 &\rightarrow -\frac{(aa')^{-3}}{2^{11}\pi^6} \partial^4 \left[\frac{\ln(\mu^2 \Delta x_{+-}^2)}{\Delta x_{+-}^2} \right] + \frac{3H^2 (aa')^{-2}}{2^8\pi^6} \partial^2 \left[\ln\left(\frac{He^{3/4}}{2\mu}\right) \frac{\ln(\mu^2 \Delta x_{+-}^2)}{\Delta x_{+-}^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \frac{\ln^2(\mu^2 \Delta x_{+-}^2)}{\Delta x_{+-}^2} \right] + \frac{3H^4 \ln^2((\sqrt{e}/4)H^2 \Delta x_{+-}^2)}{2^8\pi^6 aa' \Delta x_{+-}^2} - \frac{H^6}{2^9\pi^6} \ln^3\left(\frac{\sqrt{e}}{4} H^2 \Delta x_{+-}^2\right). \quad (\text{C.10}) \end{aligned}$$

The $-+$ case follows by complex conjugation,

$$(i\Delta_{-+}(x; x'))^3 \rightarrow -\frac{(aa')^{-3}}{2^{11}\pi^6} \partial^4 \left[\frac{\ln(\mu^2 \Delta x_{-+}^2)}{\Delta x_{-+}^2} \right] + \frac{3H^2(aa')^{-2}}{2^8\pi^6} \partial^2 \left[\ln \left(\frac{He^{3/4}}{2\mu} \right) \frac{\ln(\mu^2 \Delta x_{-+}^2)}{\Delta x_{-+}^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \frac{\ln^2(\mu^2 \Delta x_{-+}^2)}{\Delta x_{-+}^2} \right] + \frac{3H^4}{2^8\pi^6} \frac{\ln^2((\sqrt{e}/4)H^2 \Delta x_{-+}^2)}{aa' \Delta x_{-+}^2} - \frac{H^6}{2^9\pi^6} \ln^3 \left(\frac{\sqrt{e}}{4} H^2 \Delta x_{-+}^2 \right). \quad (\text{C.11})$$

The cube of the $++$ propagator includes a local divergent term in addition to the corresponding $++$ finite terms,

$$(i\Delta_{++}(x; x'))^3 \rightarrow -\frac{i\mu^{-2\epsilon}\Gamma^2(1 - (\epsilon/2))}{2^9\pi^{4-\epsilon}} \frac{(aa')^{-3+(3\epsilon/2)}\partial^2\delta^D(x-x')}{(1 - (3\epsilon/2))(1 - \epsilon)(1 - (3\epsilon/4))\epsilon} \\ + \frac{i3H^{2-\epsilon}\mu^{-\epsilon}a^{-4+2\epsilon}}{2^{6-\epsilon}\pi^{4-\epsilon}} \left\{ \frac{(1 - (\epsilon/2))(1 - (\epsilon/4))\Gamma^2(1 - (\epsilon/2))}{(1 - (3\epsilon/2))\epsilon^2} \left(\frac{Ha}{2\mu} \right)^\epsilon \right. \\ \left. - \frac{\Gamma(1 - \epsilon)}{\epsilon} \left[\pi \cot \left(\frac{\pi\epsilon}{2} \right) + 2 \ln(a) \right] \right\} \delta^D(x-x') - \frac{(aa')^{-3}}{2^{11}\pi^6} \partial^4 \left[\frac{\ln(\mu^2 \Delta x_{++}^2)}{\Delta x_{++}^2} \right] \\ + \frac{3H^2(aa')^{-2}}{2^8\pi^6} \partial^2 \left[\ln \left(\frac{He^{3/4}}{2\mu} \right) \frac{\ln(\mu^2 \Delta x_{++}^2)}{\Delta x_{++}^2} + \frac{1}{4} \frac{\ln^2(\mu^2 \Delta x_{++}^2)}{\Delta x_{++}^2} \right] \\ + \frac{3H^4}{2^8\pi^6} \frac{\ln^2((\sqrt{e}/4)H^2 \Delta x_{++}^2)}{aa' \Delta x_{++}^2} - \frac{H^6}{2^9\pi^6} \ln^3 \left(\frac{\sqrt{e}}{4} H^2 \Delta x_{++}^2 \right). \quad (\text{C.12})$$

The cube of the $--$ propagator is the complex conjugate,

$$(i\Delta_{--}(x; x'))^3 \rightarrow \frac{i\mu^{-2\epsilon}\Gamma^2(1 - (\epsilon/2))}{2^9\pi^{4-\epsilon}} \frac{(aa')^{-3+(3\epsilon/2)}\partial^2\delta^D(x-x')}{(1 - (3\epsilon/2))(1 - \epsilon)(1 - (3\epsilon/4))\epsilon} \\ - \frac{i3H^{2-\epsilon}\mu^{-\epsilon}a^{-4+2\epsilon}}{2^{6-\epsilon}\pi^{4-\epsilon}} \left\{ \frac{(1 - (\epsilon/2))(1 - (\epsilon/4))\Gamma^2(1 - (\epsilon/2))}{(1 - (3\epsilon/2))\epsilon^2} \left(\frac{Ha}{2\mu} \right)^\epsilon \right. \\ \left. - \frac{\Gamma(1 - \epsilon)}{\epsilon} \left[\pi \cot \left(\frac{\pi\epsilon}{2} \right) + 2 \ln(a) \right] \right\} \delta^D(x-x') - \frac{(aa')^{-3}}{2^{11}\pi^6} \partial^4 \left[\frac{\ln(\mu^2 \Delta x_{--}^2)}{\Delta x_{--}^2} \right] \\ + \frac{3H^2(aa')^{-2}}{2^8\pi^6} \partial^2 \left[\ln \left(\frac{He^{3/4}}{2\mu} \right) \frac{\ln(\mu^2 \Delta x_{--}^2)}{\Delta x_{--}^2} + \frac{1}{4} \frac{\ln^2(\mu^2 \Delta x_{--}^2)}{\Delta x_{--}^2} \right] \\ + \frac{3H^4}{2^8\pi^6} \frac{\ln^2((\sqrt{e}/4)H^2 \Delta x_{--}^2)}{aa' \Delta x_{--}^2} - \frac{H^6}{2^9\pi^6} \ln^3 \left(\frac{\sqrt{e}}{4} H^2 \Delta x_{--}^2 \right). \quad (\text{C.13})$$

Appendix D. Evaluating the integrals for the snowman diagram

The first integral we need in equation (59) is

$$I_1 \equiv -\partial_0^2 \int d^4x'' a''^2 \ln(a'') \left[\frac{\ln(\mu^2 \Delta x_{++}^2)}{\Delta x_{++}^2} - \frac{\ln(\mu^2 \Delta x_{+-}^2)}{\Delta x_{+-}^2} \right]. \quad (\text{D.1})$$

The first step is to make use of the identity,

$$\frac{\ln(\mu^2 \Delta x^2)}{\Delta x^2} = \frac{\partial^2}{8} \left[\ln^2(\mu^2 \Delta x^2) - 2 \ln(\mu^2 \Delta x^2) \right]. \quad (\text{D.2})$$

Because the derivative is with respect to x^μ we can move it outside the integration over x''^μ . The remaining integrand possesses only logarithmic singularities.

We define the coordinate separations

$$\Delta\eta \equiv \eta - \eta'', \quad r \equiv \|\vec{x} - \vec{x}''\|. \quad (\text{D.3})$$

The $++$ and $+ -$ terms cancel for $\Delta\eta < 0$ so we can restrict the integration to $\Delta\eta > 0$. In this case the logarithms can be expanded as

$$\ln[\mu^2 \Delta x_{\pm\pm}^2] = \ln[\mu^2(\Delta\eta^2 - r^2)] \pm i\pi\theta(\Delta\eta^2 - r^2). \quad (\text{D.4})$$

We then perform the angular and radial integrations and act the first three derivatives,

$$\begin{aligned} I_1 &= i2\pi^2 \partial_0^4 \int_{\eta_i}^{\eta} d\eta'' a''^2 \ln(a'') \int_0^{\Delta\eta} dr r^2 (\ln[\mu^2(\Delta\eta^2 - r^2)] - 1) \\ &= i2\pi^2 \partial_0^4 \int_{\eta_i}^{\eta} d\eta'' a''^2 \ln(a'') \Delta\eta^3 \left[\frac{2}{3} \ln(2\mu\Delta\eta) - \frac{11}{9} \right] \\ &= i8\pi^2 \partial_0 \int_{\eta_i}^{\eta} d\eta'' a''^2 \ln(a'') \ln(2\mu\Delta\eta). \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

The lower limit $\eta_i = -H^{-1}$ ($t'' = 0$) derives from the fact that the state is released in free Bunch–Davies vacuum at this instant.

To perform the remaining temporal integration first change variables from η'' to $a'' = -1/(H\eta'')$ and make the corresponding change in the derivative,

$$I_1 = i8\pi^2 a^2 \frac{\partial}{\partial a} \int_1^a da'' \ln(a'') \ln \left[\frac{2\mu}{H} \left(\frac{1}{a''} - \frac{1}{a} \right) \right]. \quad (\text{D.6})$$

Then break up the second logarithm and act the derivative on the two nonsingular terms,

$$I_1 = -i8\pi^2 a^2 \left[\ln^2(a) - \ln\left(\frac{2\mu}{H}\right) \ln(a) - \frac{\partial}{\partial a} \int_1^a da'' \ln(a'') \ln\left(1 - \frac{a''}{a}\right) \right]. \quad (\text{D.7})$$

Now substitute the expansion,

$$\ln\left(1 - \frac{a''}{a}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{a''}{a}\right)^n, \quad (\text{D.8})$$

and integrate termwise,

$$\int_1^a da'' \ln(a'') \ln\left(1 - \frac{a''}{a}\right) = -a \left\{ \ln(a) - 2 + \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{-(n+1)}}{n(n+1)^2} \right\}. \quad (\text{D.9})$$

Combining terms gives the following final result:

$$I_1 = -i8\pi^2 a^2 \left[\ln^2(a) - \ln\left(\frac{2\mu}{H}\right) \ln(a) + \ln(a) - 1 + \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{-(n+1)}}{(n+1)^2} \right]. \quad (\text{D.10})$$

The second integral in (59) is,

$$I_2 \equiv \int d^4 x'' a''^3 \ln(a'') \left[\frac{\ln((H^2 \sqrt{e}/4) \Delta x_{++}^2)}{\Delta x_{++}^2} - \frac{\ln((H^2 \sqrt{e}/4) \Delta x_{+-}^2)}{\Delta x_{+-}^2} \right]. \quad (\text{D.11})$$

Proceeding as before we extract a derivative with identity (D.2) and then exploit (D.4) to obtain

$$\begin{aligned} I_2 &= i\frac{\pi}{2}\partial^2 \int d^4x'' a''^3 \ln(a'')\theta(\Delta\eta^2 - r^2) \ln\left(\frac{H^2}{4\sqrt{e}}(\Delta\eta^2 - r^2)\right) \\ &= i2\pi^2(-\partial_0^2) \int_{\eta_i}^{\eta} d\eta'' a''^3 \ln(a'') \int_0^{\Delta\eta} dr r^2 \ln\left(\frac{H^2}{4\sqrt{e}}(\Delta\eta^2 - r^2)\right). \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Now perform the angular integrations, make the change of variable $r \equiv \Delta\eta z$, act the temporal derivatives and change variables from η'' to a'' ,

$$\begin{aligned} I_2 &= -i2\pi^2 \int_{\eta_i}^{\eta} d\eta'' a''^3 \ln(a'') \int_0^1 dz z^2 \partial_0^2 \left[\Delta\eta^3 \ln\left(\frac{H^2}{4\sqrt{e}}\Delta\eta^2(1-z^2)\right) \right] \\ &= -i2\pi^2 \int_{\eta_i}^{\eta} d\eta'' a''^3 \ln(a'') \Delta\eta \int_0^1 dz z^2 \left\{ 6 \ln\left[\frac{H^2}{4}\Delta\eta^2(1-z^2)\right] + 7 \right\} \\ &= -\frac{i2\pi^2}{H^2} \int_1^a da'' \ln(a'') \left(1 - \frac{a''}{a}\right) \left\{ 4 \ln\left(\frac{1}{a''} - \frac{1}{a}\right) - 3 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

A small rearrangement gives,

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{i2\pi^2}{H^2} \left\{ \int_1^a da'' \left(1 - \frac{a''}{a}\right) [3 \ln(a'') + 4 \ln^2(a'')] \right. \\ &\quad \left. - 4 \int_1^a da'' \left(1 - \frac{a''}{a}\right) \ln(a'') \ln\left(1 - \frac{a''}{a}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

The only non-trivial integral left in (D.14) can be evaluated using (D.8)

$$\begin{aligned} &\int_1^a da'' \left(1 - \frac{a''}{a}\right) \ln(a'') \ln\left(1 - \frac{a''}{a}\right) \\ &= -a \left\{ \frac{1}{4} \ln(a) - 1 + \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a^{-(n+1)}}{n(n+1)^2} - \frac{a^{-(n+2)}}{n(n+2)^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

The final result for I_2 is therefore,

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{i2\pi^2 a}{H^2} \left\{ 2 \ln^2(a) - \frac{7}{2} \ln(a) + \frac{3}{4} + \frac{\pi^2}{3} - 5a^{-1} + \frac{1}{4}a^{-2} \right. \\ &\quad \left. + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a^{-(n+1)}}{n(n+1)^2} - \frac{a^{-(n+2)}}{n(n+2)^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

The initial reduction of the last integral in (59) is familiar from I_1 and I_2 ,

$$\begin{aligned} I_3 &\equiv \int d^4x'' a''^4 \ln(a'') \left[\ln^2\left(\frac{H^2\sqrt{e}}{4}\Delta x_{++}^2\right) - \ln^2\left(\frac{H^2\sqrt{e}}{4}\Delta x_{+-}^2\right) \right] \\ &= i4\pi \int d^4x'' a''^4 \ln(a'')\theta(\Delta\eta^2 - r^2) \ln\left(\frac{H^2\sqrt{e}}{4}(\Delta\eta^2 - r^2)\right) \\ &= i16\pi^2 \int_0^1 dz z^2 \int_{\eta_i}^{\eta} d\eta'' a''^4 \ln(a'') \Delta\eta^3 \ln\left(\frac{H^2\sqrt{e}}{4}\Delta\eta^2(1-z^2)\right) \\ &= \frac{i16\pi^2}{H^4} \int_0^1 dz z^2 \int_1^a \frac{da''}{a''} \ln(a'') \left(1 - \frac{a''}{a}\right)^3 \ln\left(\frac{\sqrt{e}}{4}\left(\frac{1}{a''} - \frac{1}{a}\right)^2 (1-z^2)\right) \\ &= \frac{i16\pi^2}{H^4} \int_1^a \frac{da''}{a''} \ln(a'') \left(1 - \frac{a''}{a}\right)^3 \left\{ \frac{2}{3} \ln\left(\frac{1}{a''} - \frac{1}{a}\right) - \frac{13}{18} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

At this stage it is best to integrate by parts on the term $\ln(a'')/a'' = \partial/\partial a''(\ln^2(a'')/2)$,

$$I_3 = \frac{i16\pi^2}{H^4} \left\{ - \int_1^a da'' \left(1 - \frac{a''}{a}\right)^2 \ln^2(a'') \left[\frac{1}{a} \left(\frac{13}{12} + \ln(a'') \right) - \frac{1}{3a''} \right] + \frac{1}{a} \int_1^a da'' \left(1 - \frac{a''}{a}\right)^2 \ln^2(a'') \ln\left(1 - \frac{a''}{a}\right) \right\}. \quad (\text{D.18})$$

The first term is straightforward and the final term can be evaluated using (D.8),

$$\int_1^a da'' \left(1 - \frac{a''}{a}\right)^2 \ln^2(a'') \ln\left(1 - \frac{a''}{a}\right) = a \left\{ -\frac{80}{27} + \frac{11}{54}\pi^2 + \frac{2}{3}\zeta(3) + \left(\frac{71}{54} - \frac{\pi^2}{9}\right) \ln(a) - \frac{1}{9} \ln^2(a) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a^{-(n+1)}}{n(n+1)^3} - \frac{2a^{-(n+2)}}{n(n+2)^3} + \frac{a^{-(n+3)}}{n(n+3)^3} \right] \right\}. \quad (\text{D.19})$$

Substituting (D.19) in (D.18) and adding everything up gives,

$$I_3 = i \frac{8\pi^2}{H^4} \left\{ -\frac{385}{324} + \frac{11}{27}\pi^2 + \frac{4}{3}\zeta(3) + \frac{a^{-3}}{81} + \frac{a^{-2}}{4} - 5a^{-1} - \left(\frac{11}{6} + \frac{2\pi^2}{9}\right) \ln(a) + \frac{31}{18} \ln^2(a) - \frac{4}{9} \ln^3(a) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a^{-(n+1)}}{n(n+1)^3} - \frac{2a^{-(n+2)}}{n(n+2)^3} + \frac{a^{-(n+3)}}{n(n+3)^3} \right] \right\}. \quad (\text{D.20})$$

References

- [1] Woodard R P 2003 Quantum effects during inflation *Preprint astro-ph/0310757*
- [2] Onemli V K and Woodard R P 2002 *Class. Quantum Grav.* **19** 4607 (*Preprint gr-qc/0204065*)
- [3] Onemli V K and Woodard R P 2004 Quantum effects can render $w < -1$ on cosmological scales *Phys. Rev. D* **70** 107301 (*Preprint gr-qc/0406098*)
- [4] Vilenkin A and Ford L H 1982 *Phys. Rev. D* **26** 1231
- [5] Linde A D 1982 *Phys. Lett. B* **116** 335
- [6] Starobinskiĭ A A 1982 *Phys. Lett. B* **117** 175
- [7] Alam U, Sahni V, Saini T D and Starobinskiĭ A A 2003 Is there evidence for dark energy metamorphosis? *Preprint astro-ph/0311364*
- [8] Choudhury T R and Padmanabhan T 2003 Cosmological parameters from supernova observations: a critical comparison of three data sets *Preprint astro-ph/0311622*
- [9] Wang Y and Mukherjee P 2004 *Astrophys. J.* **606** 654 (*Preprint astro-ph/0312192*)
- [10] Gong Y 2004 Observational constraints on dark energy model *Preprint astro-ph/0401207*
- [11] Nesseris S and Perivolaropoulos L 2004 A comparison of cosmological models using recent supernova data *Preprint astro-ph/0401556*
- [12] Wang Y and Tegmark M 2004 New dark energy constraints from supernova, microwave background and galaxy clustering *Preprint astro-ph/0403292*
- [13] Alam U, Sahni V and Starobinskiĭ A A 2004 The case for dynamical dark energy revisited *Preprint astro-ph/0403687*
- [14] Feng B, Wang X and Zhang X 2004 Dark energy constraints from the cosmic age and supernova *Preprint astro-ph/0404224*
- [15] Jassal H K, Bagla J S and Padmanabhan T 2004 WMAP constraints on low redshift evolution of dark energy *Preprint astro-ph/0404378*
- [16] Corasaniti P S, Kunz M, Parkinson D, Copeland E J and Bassett B A 2004 The foundations of observing dark energy dynamics with the Wilkinson microwave anisotropy probe *Preprint astro-ph/0406608*

- [17] Hannestad S and Mortsell E 2004 Cosmological constraints on the dark energy equation of state and its evolution *Preprint astro-ph/0407259*
- [18] Virey J-M, Ealet A, Tao C, Tilquin A, Bonissant A, Fouchez D and Taxil P 2004 Probing dark energy with supernovae: a concordant or a convergent model? *Preprint astro-ph/0407452*
- [19] Carroll S M, Hoffman M and Trodden M 2003 *Phys. Rev. D* **68** 023509 (*Preprint astro-ph/0301273*)
- [20] Cline J M, Jeon S Y and Moore G D 2003 The phantom menaced: constraints on low-energy effective ghosts *Preprint hep-ph/0311312*
- [21] Nojiri S, Odintsov S D and Ogushi S 2002 *Int. J. Mod. Phys. A* **17** 4809 (*Preprint hep-th/0205187*)
- [22] Nojiri S and Odintsov S D 2003 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* JCAP06(2003)004 (*Preprint hep-th/0303011*)
- [23] Nojiri S and Odintsov S D 2003 *Phys. Lett. B* **562** 147 (*Preprint hep-th/0303117*)
- [24] Nojiri S and Odintsov S D 2003 *Phys. Lett. B* **565** 1 (*Preprint hep-th/0304131*)
- [25] Barvinsky A O 2003 *Phys. Lett. B* **572** 109 (*Preprint hep-th/0304229*)
- [26] Nojiri S and Odintsov S D 2003 *Phys. Lett. B* **571** 1 (*Preprint hep-th/0306212*)
- [27] Nojiri S and Odintsov S D 2004 Gravity assisted dark energy dominance and cosmic acceleration *Preprint astro-ph/0403622*
- [28] Srivastava S K 2004 Dark energy and dark matter of the universe from one-loop renormalization of riccion *Preprint hep-th/0404170*
- [29] Elizalde E, Nojiri S and Odintsov S D 2004 Late-time cosmology in (phantom) scalar–tensor theory: dark energy and the cosmic speed-up *Preprint hep-th/0405034*
- [30] Nojiri S and Odintsov S D 2004 The final state and thermodynamics of dark energy universe *Preprint hep-th/0408170*
- [31] Lima J A S and Alcaniz J S 2004 Thermodynamics and spectral distribution of dark energy *Preprint astro-ph/0402265*
- [32] Maia M D, Monte E M, Maia J M F and Alcaniz J S 2004 On the geometry of dark energy *Preprint astro-ph/0403072*
- [33] Alcaniz J S and Pires N 2004 Cosmic acceleration in brane cosmology *Preprint astro-ph/0404146*
- [34] Bouhmadi-Lopez M and Madrid J 2004 Escaping the big rip? *Preprint astro-ph/0404540*
- [35] Frampton P H and Takahasi T 2004 Bigger rip with no dark energy *Preprint astro-ph/0405333*
- [36] Hsu S D H, Jenkins A and Wise M B 2004 Gradient instability for $w < -1$ *Preprint astro-ph/0406043*
- [37] Srivastava S K 2004 Future universe with $w < -1$ without big smash *Preprint astro-ph/0407048*
- [38] Vikman A 2004 Can dark energy evolve to the Phantom? *Preprint astro-ph/0407107*
- [39] Babichev E, Dokuchaev V and Eroshenko Y 2004 Dark energy cosmology with generalized linear equation of state *Preprint astro-ph/0407190*
- [40] Nojiri S 2004 Dark energy and modified gravities *Preprint hep-th/0407099*
- [41] Feng B, Li M, Piao Y-S and Zhang X 2004 Oscillating quantum and the recurrent universe *Preprint astro-ph/0407432*
- [42] Amendola L, Gasperini M and Piazza F 2004 Fitting type Ia supernovae with coupled dark energy *Preprint astro-ph/0407573*
- [43] Carvalho F C and Saa A 2004 Non-minimal coupling, exponential potentials and the $w < -1$ regime of dark energy *Preprint astro-ph/0408013*
- [44] Carroll S M, De Felice A and Trodden M 2004 Can we be tricked into thinking that w is less than -1 ? *Preprint astro-ph/0408081*
- [45] Holman R and Naidu S 2004 Dark energy from ‘water’ *Preprint astro-ph/0408102*
- [46] Capozziello S, Melchiorri A and Schirone A 2004 Scaling dark energy *Preprint astro-ph/0408112*
- [47] Bertolami O and Paramos J 2004 Astrophysical constraints on scalar field models *Preprint astro-ph/0408216*
- [48] Lue A and Starkman G D 2004 How a brane cosmological constant can trick us into thinking that $w < -1$ *Preprint astro-ph/0408246*
- [49] Wang P and Meng X 2004 Can vacuum decay in our universe *Preprint astro-ph/0408495*
- [50] Barvinsky A O 2004 Cosmological constant problem and long-distance modifications of Einstein theory *Preprint hep-th/0409144*
- [51] Srivastava S K 2004 Tachyon as a dark energy source *Preprint gr-qc/0409074*
- [52] Roman T 2004 Some thoughts on energy conditions and wormholes *Preprint gr-qc/0409090*
- [53] Fang W, Lu H Q, Huang Z G and Zhang K F 2004 Phantom cosmology with the Born–Infeld type scalar field *Preprint hep-th/0409080*
- [54] Boyanovski D, de Vega H J and Sanchez N G 2004 Particle decay during inflation: self-decay of inflaton quantum fluctuations during slow roll *Preprint astro-ph/0409406*
- [55] Rapetti D, Allen S W and Weller J 2004 Constraining dark energy with x-ray galaxy clusters, supernovae and the cosmic microwave background *Preprint astro-ph/0409574*

-
- [56] Csaki C, Kaloper N and Terning J 2004 Exorcising $w < -1$ *Preprint astro-ph/0409596*
 - [57] Santini E S and Lemarchand G A 2004 Accelerated expansion in a stochastic self-similar fractal universe *Preprint astro-ph/0410056*
 - [58] Lazkoz R 2004 Rigidity of cosmic acceleration in a class of k -essence cosmologies *Preprint gr-qc/0410019*
 - [59] Chimento L P and Lazkoz R 2004 Unified phantom cosmologies *Preprint astro-ph/0405518*
 - [60] Aguirregabiria J M, Chimento L P and Lazkoz R 2004 *Phys. Rev. D* **70** 023509 (*Preprint astro-ph/0403157*)
 - [61] Chimento L P and Lazkoz R 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 211301 (*Preprint gr-qc/0307111*)
 - [62] Calcagni G 2004 Patch dualities and remarks on nonstandard cosmologies *Preprint gr-qc/0410027*
 - [63] Martin J and Musso M A 2004 Stochastic quintessence *Preprint astro-ph/0410190*
 - [64] Schwinger J 1961 *J. Math. Phys.* **2** 407
 - [65] Jordan R D 1986 *Phys. Rev. D* **33** 444
 - [66] Allen B and Folacci A 1987 *Phys. Rev. D* **35** 3771
 - [67] Prokopec T and Woodard R P 2004 *Ann. Phys.* **312** 1 (*Preprint gr-qc/0310056*)
 - [68] Prokopec T and Woodard R P 2003 *J. High Energy Phys.* JHEP10(2003)059 (*Preprint astro-ph/0309593*)
 - [69] Starobinskiĭ A A and Yokoyama J 1994 *Phys. Rev. D* **50** 6357 (*Preprint astro-ph/9407016*)
 - [70] Starobinskiĭ A A 1986 Stochastic de Sitter (inflationary) stage in the early universe *Field Theory, Quantum Gravity and Strings* ed H J de Vega and N Sanchez (Berlin: Springer) pp 107–26

4.9 Conclusions

Nous avons présenté dans ce chapitre le formalisme nécessaire à la compréhension des fluctuations de champs quantiques dans un environnement gravitationnel. Pour ce faire, nous n'avons utilisé qu'une approche semi-classique dans laquelle la géométrie n'est pas quantifiée. Deux points importants doivent être notés. Tout d'abord, l'invariance sous les changements de coordonnées soulève de nouvelles difficultés par rapport à la théorie des champs minkowskienne, souvent traitée en coordonnées cartésiennes. De ce fait, le choix du vide quantique comporte un caractère arbitraire, qu'il est possible de réduire en imposant des symétries particulières. D'autre part, la structure d'une théorie des champs est modifiée en présence d'une courbure intrinsèque non-nulle de l'espace-temps. Ainsi, la procédure de renormalisation conduit donc à l'ajout de contre-termes géométriques qui peuvent être intégrés à l'action d'Einstein-Hilbert. Dans ces conditions, la théorie effective de la gravitation, n'est en général plus la relativité générale.

Les principales notions introduites ici nous permettent à la fois d'étudier les fluctuations quantiques des champs pendant l'inflation et de préciser les limites d'une telle approche. Nous sommes alors en mesure de comprendre certaines propriétés des modèles inflationnaires, ce qui est l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE 5

Inflation

Sommaire

5.1	Motivations	227
5.1.1	Problème de causalité	228
5.1.2	Problème de la platitude	229
5.1.3	Problème de la densité de reliques	230
5.2	Mécanisme inflationnaire : évolution homogène	232
5.3	Évolution des perturbations	234
5.3.1	Invariance de jauge	234
5.3.2	Évolution des perturbations	235
5.4	Nature quantique des fluctuations	236
5.4.1	Quantification des fluctuations	236
5.4.2	Quantification des perturbations	239
5.4.3	Spectre de puissance	243
5.5	Interprétation	244
5.5.1	Interprétation en terme de particules	244
5.5.2	Comportement classique de fluctuations quantiques	246
5.6	Quelques réalisations explicites	247
5.6.1	Inflation chaotique	247
5.6.2	Inflation chaotique à plusieurs champs	249
5.7	Modèles à plusieurs champs scalaires	251
5.7.1	Forme canonique de l'action	251
5.7.2	Cas de deux champs scalaires	253

5.7.3	Interprétation	254
5.8	Non-gaussianités	255
5.8.1	Modèle à un champ scalaire	256
5.8.2	Curvaton	258
5.8.3	Inflation multi-champs : transfert de fluctuations	258
5.8.4	Réalisation explicite en supersymétrie : inflation hybride	263
5.9	Fonctions de corrélation d'un champ scalaire dans un espace de de Sitter (article)	268
5.9.1	Présentation de l'article	268
5.9.2	Article	269
5.10	Corrections radiatives à la masse des champs scalaires (article)	276
5.10.1	Motivations et résultats	276
5.10.2	Article	278
5.11	Effets de taille finie	294
5.11.1	Origine des effets de taille finie	294
5.11.2	Conséquences sur les non-gaussianités	295
5.12	Conclusions	295

Le paradigme de l'inflation, qui consiste en une phase d'expansion accélérée ayant précédé l'ère de domination de la radiation, a été introduit par A. Guth en 1981 [Guth, 1981] afin de résoudre les paradoxes inhérents au modèle du Big Bang chaud. Très rapidement, l'application de la théorie des perturbations cosmologiques à la phase inflationnaire a permis de comprendre le mécanisme de génération d'inhomogénéités primordiales à partir de fluctuations quantiques [Mukhanov & Chibisov, 1981] [Guth & Pi, 1982] [Hawking, 1982]. Dès lors de très nombreux modèles d'inflation ont été construits afin de rendre compte à la fois de l'évolution globale de l'univers et de l'évolution de ses structures (pour une revue, voir [Lyth & Riotto, 1999]).

Suite à l'évolution gravitationnelle, les grandes structures actuelles se répartissent suivant une distribution qui dépend fortement de la statistique des fluctuations quantiques initiales, ce qui constitue un test pour les modèles d'inflation. Bien qu'un modèle simple, générant des fluctuations initiales gaussiennes, suffise à rendre compte des observations [Spergel *et al.*, 2006], les modèles plus riches, aux signatures observationnelles spécifiques non encore observées, ne sont pas pour autant exclus. C'est le cas par exemple de mécanismes inflationnaires générant des fluctuations non-gaussiennes, qui devraient être fortement contraints par les développements expérimentaux actuels et futurs (voir par exemple [Bartolo *et al.*, 2004]).

Plusieurs approches ont été proposées afin de décrire d'éventuelles déviations à la gaussianité. Juan Maldacena [Maldacena, 2003] a développé un formalisme permettant le calcul des non-gaussianités dues aux non-linéarités dans un modèle d'inflation à un seul champ scalaire.

Le résultat qu'il obtient est du même ordre de grandeur que celui de S. Matarrese [Acquaviva *et al.*, 2003], qui détermine classiquement la dynamique des quantités invariantes de jauge au deuxième ordre. Cependant, ce calcul classique ne semble pas rendre compte correctement des fluctuations des modes de petites longueurs d'onde.

G. Rigopoulos, E. Shellard et B. van Tent [Rigopoulos & Shellard, 2003] [Rigopoulos & Shellard, 2005] [Rigopoulos *et al.*, 2005] se fondent sur l'approche *des univers séparés* introduite par Salopek et Bond [Salopek & Bond, 1990] consistant à négliger les gradients spatiaux au deuxième ordre : l'espace est décomposé en volumes élémentaires, dont la taille caractéristique est le rayon de Hubble, et qui évoluent indépendamment les uns des autres. Les fluctuations aux petites échelles sont prises en compte suivant la méthode de l'inflation stochastique [Starobinsky & Yokoyama, 1994]. Bien que les calculs soient difficiles à mener, ces approximations aboutissent à des résultats qui s'appliquent à une large classe de modèles, contenant un nombre arbitraire de champs scalaires.

Parallèlement, D. Langlois et F. Vernizzi [Langlois & Vernizzi, 2005] [Langlois & Vernizzi, 2006] ont mis en évidence, sans aucune approximation, des quantités géométriques classiques conservées, invariantes de jauge à tout ordre. Cette approche, très élégante et valable à toutes les échelles, permet de décrire les non-linéarités de manière particulièrement efficace.

Toutes ces méthodes sont vraisemblablement complémentaires et peuvent être comparées les unes aux autres. La comparaison aux observations, quant à elle, exige de déterminer quelles sont les quantités pertinentes. En particulier, il est indispensable de comprendre comment les anisotropies de température sont reliées à l'ordre *non-linéaire* aux perturbations de métrique primordiales.

Ce chapitre présente, dans une première partie, les problèmes liés au modèle du Big-Bang chaud qui ont conduit à introduire une phase d'inflation. Les premières parties visent à décrire l'évolution homogène de l'univers puis l'évolution des perturbations. Les deux paragraphes suivants concernent la quantification des perturbations et leur interprétation en termes de fluctuations quantiques et classiques. Nous présentons ensuite deux modèles d'inflation chaotique dont l'un fait intervenir plusieurs champs scalaires et généralise les modèles de N-flation [Dimopoulos *et al.*, 2005] et d'inflation assistée [Liddle *et al.*, 1998] [Copeland *et al.*, 1999]. Nous examinons par ailleurs les propriétés des modèles à plusieurs champs scalaires avant de nous concentrer sur l'étude des non-gaussianités. Nous présentons enfin une caractérisation des fluctuations isocourbes non-gaussiennes à l'aide d'une approche quantique et étudions la validité de notre résultat en estimant les corrections radiative à la la masse des champs scalaires.

5.1 Motivations

Nous détaillons ici les principaux paradoxes résultant du modèle du Big-Bang chaud, à savoir les problèmes de causalité, de la platitude de l'espace et de la densité

de reliques.

5.1.1 Problème de causalité

Le principe cosmologique postule que l'univers est homogène et isotrope aux grandes échelles. Or l'homogénéisation de l'univers sur de grandes distances requiert un mécanisme causal qui puisse coupler les propriétés physiques de deux points éloignés l'un de l'autre. Nous pouvons déterminer la taille de l'horizon causal¹ au moment du découplage d_{H}^* . Comme le moment du découplage est proche de l'équivalence matière/radiation, nous avons

$$d_{\text{H}}^* = 2 \int_{t_i}^{t^*} \frac{dt}{a(t)} = 2(\eta_* - \eta_i) \approx 2\eta_* , \quad (5.1)$$

où η_i est un temps conforme initial tandis que η_* est le temps conforme au moment de l'équivalence. Dans l'équation (5.1), nous avons utilisé le fait que, dans l'ère de domination de la radiation, $a(\eta) = a_* \frac{\eta}{\eta_*}$.

Afin de déterminer l'angle sous-tendu par cette distance sur notre ciel, nous devons calculer la distance angulaire d_{A}^* qui nous sépare de la surface de dernière diffusion. En supposant que nous sommes dans l'ère de domination de la matière depuis le découplage, le facteur d'échelle évolue comme $a(\eta) = a_* \left(\frac{\eta}{\eta_*}\right)^2$ et la distance angulaire d_{A}^* vaut

$$d_{\text{A}}^* = \int_{t_*}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = (\eta_0 - \eta_*) \approx \eta_* \left(\frac{a_0}{a_*}\right)^{1/2} . \quad (5.2)$$

L'angle sous lequel nous observons l'horizon causal au moment du découplage vaut donc

$$\theta = \frac{d_{\text{H}}^*}{d_{\text{A}}^*} \sim 2 \left(\frac{a_*}{a_0}\right)^{\frac{1}{2}} \sim 3^\circ . \quad (5.3)$$

Deux points sur le ciel séparés de plus de 3° n'ont donc jamais été en contact causal si l'on suppose que l'univers a débuté par une phase de domination de la radiation.

Afin de rendre compte de l'homogénéité de l'espace sur l'ensemble de notre horizon, il est nécessaire de trouver un mécanisme capable "d'accroître" le rayon causal au moment du découplage. Pour ce faire, il faut invoquer une phase primordiale telle que la borne inférieure dans l'équation (5.1) ne soit plus négligeable, c'est-à-dire une phase telle que, pour des temps suffisamment petits, le facteur d'échelle croisse en $a(t) \sim t^\alpha$ avec $\alpha > 1$. Par conséquent, une telle phase est accélérée puisque $\ddot{a} > 0$.

Supposons qu'une phase d'expansion accélérée $a(t) \sim t^\alpha$ ait lieu entre les instants t_i et t_f , avant la phase de domination de la radiation. En temps conforme, le facteur

¹Nous considérons ici l'horizon comobile.

d'échelle varie comme

$$a(\eta) = a_f \left(\frac{2\eta_f - \eta}{\eta_f} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, \quad (5.4)$$

entre les instants η_i et η_f . Dans ces conditions, l'horizon causal au moment du découplage devient

$$d_H^* = 2(\eta_* - \eta_i) \approx -2\eta_i, \quad (5.5)$$

et η_i doit être suffisamment grand, *i.e.* $\eta_i \gg 10^2 \eta_*$, de façon à résoudre le problème de l'horizon et permettre l'observation d'un domaine causal au moment du découplage sous un angle $\theta \sim 360^\circ$. Nous en déduisons

$$\left(\frac{a_f}{a_i} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \gg 10^2 \frac{\eta_*}{\eta_f}. \quad (5.6)$$

En décrivant la durée de cette phase d'expansion accélérée par le nombre de e-folds, $N = \ln(a_f/a_i)$, nous obtenons $N \gg 35$ pour des grandes valeurs de α . Résoudre le problème de l'horizon impose donc une phase d'expansion accélérée suffisamment longue.

5.1.2 Problème de la platitude

D'après les observations récentes, le paramètre cosmologique mesurant la courbure est proche de l'unité à quelques pour cents près $\Omega_0 = 1,02 \pm 0,02$: les sections spatiales semblent plates en très bonne approximation. Parmi toutes les valeurs possibles de la courbure, $\Omega_0 = 1$ est de mesure nulle. Par conséquent, une dynamique sous-jacente a vraisemblablement conduit à une telle valeur. Afin de le vérifier, déterminons l'évolution de la courbure Ω en fonction du temps

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\dot{\rho}}{\rho_c} - \Omega \frac{\dot{\rho}_c}{\rho_c}. \quad (5.7)$$

En utilisant les équations de Friedman, nous obtenons la relation suivante

$$\frac{\dot{\rho}_c}{\rho_c} = 2H \frac{\dot{H}}{H^2} = \Omega - 1 - \frac{3}{2}(1+w)\Omega, \quad (5.8)$$

qui, associée à l'équation de continuité (1.13) fournit

$$\frac{d(\Omega - 1)}{dt} = H(1 + 3w)\Omega(\Omega - 1). \quad (5.9)$$

Cette équation nous indique que $\Omega = 1$ est un point fixe de cette équation : si l'espace est parfaitement plat à un instant donné, il le restera au long de l'évolution de l'univers, ce qui revient à poser $\mathcal{K} = 0$. Au contraire, le moindre écart à la platitude, $\Omega \neq 1$, au début de l'ère de domination de la radiation, sera amplifié de sorte que

l'effet de la courbure sera rapidement non-négligeable. En effet, si $1 + 3w > 0$, le comportement asymptotique de la courbure peut être déduit de la relation (5.9)

$$\begin{aligned}\Omega(t_i) > 1 &\Rightarrow \Omega(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty, \\ \Omega(t_i) < 1 &\Rightarrow \Omega(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.\end{aligned}\quad (5.10)$$

Ce comportement asymptotique peut aussi être déterminé à partir de la solution générale de l'équation (5.9), pour une équation d'état constante, $w = cste$,

$$\Omega - 1 = \frac{a^{1+3w}}{cste - a^{1+3w}}. \quad (5.11)$$

Si nous supposons que l'univers a été dominé par la radiation depuis le temps de Planck jusqu'à nos jours, la mesure $|\Omega(t_0) - 1| < 10^{-2}$ nous indique que

$$|\Omega(t_{Pl}) - 1| \sim 10^{-2} \left(\frac{a_{Pl}}{a_0} \right)^2 \sim 10^{-2} \left(\frac{T_0}{T_{Pl}} \right)^2 \sim 10^{-64}, \quad (5.12)$$

ce qui correspond à un ajustement fin de la courbure à plus de soixante décimales près au temps de Planck ! Cette valeur extrêmement précise est particulièrement suspecte car il est très probable que la courbure ne soit pas exactement nulle initialement.

En revanche, si le coefficient $(1 + 3w)$ dans l'équation (5.9) est négatif, c'est-à-dire pour une équation d'état de la forme $P < -\rho/3$, $\Omega = 1$ est un attracteur. Une solution naturelle au problème d'ajustement fin consiste à introduire une phase dominée par un fluide d'équation d'état $P < -\rho/3$, avant l'ère de domination de la radiation, d'une durée telle que

$$\frac{a_f}{a_i} \sim 10^{35}. \quad (5.13)$$

Remarquons qu'une équation d'état de la forme $P < -\rho/3$ correspond à une expansion accélérée de l'univers *via* l'équation de Raychauduri (1.24)

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}(\rho + 3P). \quad (5.14)$$

Une valeur si faible de la courbure actuelle s'explique en supposant qu'une phase d'expansion accélérée de l'ordre de 35 e-folds a précédé l'ère de domination de la radiation.

5.1.3 Problème de la densité de reliques

Il est vraisemblable, qu'au cours de son refroidissement, l'univers ait connu une transition de phase. Parmi les hypothèses plausibles en lien avec la physique des particules, cette transition de phase serait associée à la brisure d'un groupe de symétrie, appelé *groupe de grande unification*, contenant les symétries du modèle standard. En

matière condensée, les transitions de phase donnent naissance, en général, à des sous-structures juxtaposées aux propriétés physiques différentes, comme, par exemple, les domaines de Weiss d'un matériau ferromagnétique. En appliquant ces concepts à un univers en expansion, nous attendons donc que des défauts topologiques résultent d'une transition de phase.

Quel que soit le groupe de symétrie brisé dans l'univers primordial, il est impératif qu'un groupe de jauge $U(1)$, propre à l'électromagnétisme, survive. Or la brisure d'un groupe en un groupe résiduel contenant la symétrie $U(1)$ génère nécessairement des monopôles magnétiques [Vilenkin & Shellard, 1994]. Nous pouvons alors estimer la densité actuelle des monopôles magnétiques dans le cas où l'univers n'a connu qu'une phase dominée par la radiation. Nous supposons dans la suite que la brisure spontanée de symétrie intervient à l'échelle de grande unification, *i.e.* à une température de l'ordre de $T_{\text{GUT}} \sim 10^{16}$ GeV, produisant des monopôles magnétiques de masse $M \sim 10^{16}$ GeV.

Au moment de la transition de phase, la longueur de corrélation ne peut excéder l'horizon causal : nous attendons donc la création d'un défaut topologique par volume causal. Dans ces conditions, la densité numérique comobile de monopôles magnétiques au moment de la brisure vaut

$$na^3 \sim H_{\text{GUT}}^3 . \quad (5.15)$$

Au cours de l'évolution ultérieure, cette densité est simplement diluée par l'expansion de sorte que la densité d'énergie actuelle par unité de volume physique vaut

$$\rho_0 = M \frac{a^3}{a_0^3} H_{\text{GUT}}^3 . \quad (5.16)$$

Supposons que l'univers ait évolué adiabatiquement tout en étant dominé par la radiation depuis la brisure de symétrie jusqu'à nos jours. Cela implique, en particulier, que le paramètre de Hubble évolue en $H \sim T^2$, ce qui conduit à

$$\rho_0 \sim M H_0^3 \left(\frac{T_{\text{GUT}}}{T_0} \right)^3 . \quad (5.17)$$

Cette densité normalisée à la densité critique actuelle $\rho_c = 3H_0^2/\kappa$ vaut alors

$$\Omega_m h^2 \sim 10^{20} \left(\frac{M}{16\text{GeV}} \right) \left(\frac{T_{\text{GUT}}}{16\text{GeV}} \right)^3 , \quad (5.18)$$

ce qui correspond à une densité d'énergie considérable, telle que l'univers entre en contraction très rapidement, conduisant à une catastrophe de type "Big Crunch" .

Afin de résoudre ce problème, il est indispensable d'invoquer un mécanisme de dilution efficace, c'est-à-dire qui puisse diluer la densité de défauts topologiques d'un facteur supérieur à 10^{20} . Nous obtenons alors la contrainte suivante

$$\frac{a_f}{a_i} \gg 10^{10} , \quad (5.19)$$

sur la durée de cette phase, située entre la transition de phase et la période de domination de la radiation.

5.2 Mécanisme inflationnaire : évolution homogène

Les paradoxes apparents de l'univers trouvent une solution simple si l'univers primordial a connu une phase d'expansion accélérée, appelée inflation [Guth, 1981] [Guth & Pi, 1982] [Linde, 1982a]. Les seuls fluides induisant une expansion accélérée sont une constante cosmologique positive et, dans certaines conditions, un champ scalaire. Or l'univers n'a pas pu être initialement dominé par une constante cosmologique car ce cas de figure impliquerait que la radiation et la matière n'aient jamais dominé la densité d'énergie. Seul un champ scalaire, primordial ou composite, a pu générer une phase d'expansion accélérée dans l'univers primordial.

Considérons un champ scalaire φ soumis à la densité de lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} D_\mu \varphi D_\nu \varphi - V(\varphi) . \quad (5.20)$$

Le tenseur énergie-impulsion d'un tel champ est similaire à celui d'un fluide parfait

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P) u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu} , \quad (5.21)$$

avec

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} D_\mu \varphi D_\nu \varphi + V(\varphi) , \\ P &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} D_\mu \varphi D_\nu \varphi - V(\varphi) , \\ u_\mu &= \frac{D_\mu \varphi}{(g^{\mu\nu} D_\mu \varphi D_\nu \varphi)^{1/2}} . \end{aligned} \quad (5.22)$$

L'équation de Raychauduri (1.24) indique qu'une expansion accélérée ne peut être générée que par un fluide dont l'équation d'état vérifie

$$P < -\frac{\rho}{3} . \quad (5.23)$$

Appliquée au cas d'un champ scalaire, cette contrainte s'écrit

$$g^{\mu\nu} D_\mu \varphi D_\nu \varphi < V(\varphi) , \quad (5.24)$$

hypothèse que nous appliquerons par la suite.

Si le champ scalaire évolue dans un espace de fond homogène et isotrope FLRW, il est légitime de décomposer le champ scalaire en une partie "classique" φ_0 , ne dépendant que du temps, et une partie perturbée, d'amplitude plus faible et d'origine quantique $\delta\varphi$ de sorte que

$$\varphi(x) = \varphi_0(t) + \delta\varphi(\mathbf{x}, t) . \quad (5.25)$$

À l'ordre zéro, la partie classique du champ fait évoluer l'univers homogène et isotrope² et les équations d'évolution prennent la forme

$$H^2 + \frac{\mathcal{K}}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \left[\frac{1}{2} \dot{\varphi}_0^2 + V(\varphi_0) \right], \quad (5.26)$$

$$\dot{H} = -4\pi G \dot{\varphi}_0^2, \quad (5.27)$$

$$\ddot{\varphi}_0 + 3H\dot{\varphi}_0 = -V^\varphi(\varphi_0), \quad (5.28)$$

soit en temps conforme

$$\mathcal{H}^2 + \mathcal{K} = \frac{8\pi G}{3} \left[\frac{1}{2} \varphi_0'^2 + a^2 V(\varphi_0) \right], \quad (5.29)$$

$$\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}' = 4\pi G \varphi_0'^2, \quad (5.30)$$

$$\varphi_0'' + 2\mathcal{H}\varphi_0' = -a^2 V^\varphi(\varphi_0). \quad (5.31)$$

L'expansion accélérée rendant la courbure négligeable, nous n'en tiendrons pas compte ultérieurement et poserons $\mathcal{K} = 0$.

La condition d'accélération (5.24) devient

$$\dot{\varphi}_0^2 < V(\varphi_0), \quad (5.32)$$

qui, compte-tenu des équations (5.26) et (5.27), s'écrit sous la forme

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} < 1. \quad (5.33)$$

L'inflation est donc caractérisée par la condition $\epsilon < 1$. Notons que plus le coefficient ϵ est petit devant 1, plus le paramètre de Hubble est proche d'une constante et plus l'accélération de l'expansion est grande. À la limite $\epsilon \rightarrow 0$, l'expansion est assimilable à une expansion de de Sitter dominée par une constante cosmologique $\Lambda_{\text{eff}} = 8\pi G V(\varphi_0)$ et le champ prend une valeur constante $\varphi_0(t) = \text{cste}$.

Intéressons-nous de plus près à la dynamique du champ φ_0 pendant une phase d'expansion proche de de Sitter. Le paramètre de Hubble variant peu lors d'une expansion quasi-de Sitter, l'équation (5.26) montre que le paramètre de Hubble est proportionnel au potentiel $3H^2 M_{\text{Pl}}^2 \approx V(\varphi_0)$. Le terme cinétique $\dot{\varphi}_0^2$ reste négligeable tant que l'accélération du champ $\ddot{\varphi}_0$ est faible, *i.e.* tant que $\ddot{\varphi}_0 \ll 3H\dot{\varphi}_0$. De même, l'accélération du champ est négligeable tant que sa dérivée tierce est suffisamment faible, *etc.* Nous pouvons donc imposer une succession de conditions telles que les dérivées temporelles d'ordre n du champ soient des infiniment petits d'ordre n . Cette approximation est appelée *approximation de roulement lent*³ car elle consiste à considérer un champ quasiment constant qui roule lentement le long de son potentiel.

²À très grande échelle, il est possible que l'univers ne soit plus homogène et isotrope. Nous supposons donc que cette hypothèse est valide à l'échelle de l'horizon causal au début de la phase inflationnaire.

³*Slow roll.*

Afin de quantifier l'écart à une expansion de de Sitter, nous introduisons les paramètres de roulement lent définis par

$$\begin{aligned}
 \epsilon &\equiv \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V^\varphi}{V} \right)^2, \\
 \delta &\equiv \frac{1}{8\pi G} \frac{V^{\varphi\varphi}}{V}, \\
 \xi &\equiv \frac{1}{8\pi G} \sqrt{\frac{V^{(3)}V^\varphi}{V^2}}, \\
 \dots &,
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

qui font intervenir des dérivées d'ordre de plus en plus grand du potentiel. Dans l'approximation d'un potentiel très plat, ces quantités sont de plus en plus faibles.

L'équation d'état du fluide parfait que constitue le champ scalaire peut donc être ajustée en fonction de la dynamique de la valeur moyenne du champ et conduire à une expansion plus ou moins proche d'une expansion de de Sitter. Cependant, le champ, de nature quantique, développe naturellement des fluctuations autour d'une valeur moyenne homogène. Tandis que la partie homogène du champ génère une expansion globale, ses fluctuations, que nous caractérisons dans la partie suivante, induisent des perturbations de métrique.

5.3 Évolution des perturbations

Les fluctuations d'un champ scalaire sont nécessairement induites par la nature quantique du champ. Bien que ces fluctuations soient d'origine quantique, il est possible, dans certaines conditions, de supposer qu'elles se comportent classiquement. Dans un premier temps, nous examinons les fluctuations d'un point de vue classique avant de considérer le lien avec une approche quantique.

5.3.1 Invariance de jauge

Les fluctuations du champ ne sont définies qu'à un choix de jauge près et se transforment comme un scalaire sous les transformations de jauge. Sous un changement de coordonnées $x^\mu \mapsto x'^\mu = e^{\xi^\nu \partial_\nu} x^\mu$, avec $\xi^\mu \equiv (T, L^i)$, les fluctuations du champ se transforment selon

$$\begin{aligned}
 \delta\varphi \mapsto & \delta\varphi - T\varphi'_0 \left(1 + \frac{\delta\varphi'}{\varphi'_0} \right) - L^i \nabla_i \delta\varphi \\
 & + \frac{1}{2} T^2 \varphi''_0 + \frac{1}{2} \varphi'_0 (TT' + L^i \nabla_i T).
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

Nous pouvons alors introduire la variable suivante, invariante de jauge au premier ordre

$$v \equiv a\delta\varphi + z\psi, \quad (5.36)$$

et avec

$$z \equiv \frac{a\varphi'_0}{\mathcal{H}}. \quad (5.37)$$

Nous pouvons définir la perturbation de courbure sur les hypersurfaces iso-champ par

$$\mathcal{R} = \frac{v}{z} = \psi + \frac{\mathcal{H}}{\varphi'_0} \delta\varphi, \quad (5.38)$$

qui, généralisée au deuxième ordre dans les perturbations, devient⁴

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \equiv & \psi + \mathcal{H} \frac{\delta\varphi}{\varphi'_0} - \mathcal{H} \frac{\delta\varphi\delta\varphi'}{\varphi'^2_0} \\ & - \frac{\delta\varphi}{\varphi'_0} (\psi' + 2\mathcal{H}\psi) + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta\varphi}{\varphi'_0} \right)^2 \left(\mathcal{H} \frac{\varphi''_0}{\varphi'_0} - \mathcal{H}' - 2\mathcal{H}^2 \right) \\ & + \left(\nabla_i \psi + \frac{\mathcal{H}}{\varphi'_0} \nabla_i \delta\varphi \right) \int v^i d\eta. \end{aligned} \quad (5.39)$$

La notation \mathcal{R} introduite ici n'est pas fortuite. En effet, le feuilletage comobile correspond à une foliation en termes d'hypersurfaces de champ constant, ce qui est visible en perturbant la relation (5.22). La quantité \mathcal{R} s'identifie donc à la perturbation de courbure en feuilletage comobile. Nous pouvons également nous en convaincre en utilisant les équations d'Einstein associées à la définition (2.71) de \mathcal{R} .

5.3.2 Évolution des perturbations

Afin d'étudier le comportement des fluctuations du champ, nous pouvons reporter la forme du tenseur énergie-impulsion dans les équations d'Einstein. La conservation du tenseur énergie-impulsion perturbé fournit l'équation de Klein-Gordon qui, dans la jauge newtonienne, prend la forme

$$\delta\varphi'' + 2\mathcal{H}\delta\varphi' - \Delta\delta\varphi = -2a\Phi V^\varphi - a^2 V^{\varphi\varphi} \delta\varphi + \varphi'_0 (\Phi' + 3\Psi'), \quad (5.40)$$

au premier ordre dans les perturbations.

Cette équation, associée aux équations d'Einstein, permet d'étudier l'évolution classique des fluctuations du champ et leur influence sur les perturbations de métrique. Les phénomènes de nature quantique ne peuvent cependant être négligés. Il importe donc d'étudier le comportement quantique des fluctuations et de comprendre dans quelle mesure ces fluctuations peuvent être étudiées classiquement.

⁴Cette expression diffère de celle obtenue dans [Acquaviva *et al.*, 2003] qui propose une expression de la courbure en feuilletage comobile invariante de jauge uniquement sous les translations temporelles.

5.4 Nature quantique des fluctuations

5.4.1 Quantification des fluctuations

Champ de l'inflaton

Afin de déterminer les variables à quantifier ainsi que leur normalisation, il faut déterminer l'action dont découle la dynamique des champs. Nous ne chercherons ici à n'étudier que la dynamique linéaire des champs : par conséquent, l'action doit être développée au deuxième ordre.

Considérons dans un premier temps un champ dont les variations influent sur l'évolution de la géométrie. Ce champ est assimilable au champ de l'inflaton. L'action du champ scalaire et celle d'Einstein-Hilbert peuvent être combinées et se ré-écrire, au deuxième ordre dans les perturbations, sous la forme canonique suivante [Mukhanov *et al.*, 1992] [Kodama & Sasaki, 1984]

$$S_{\text{tot}}^{(2)} = S_{\text{m}}^{(2)} + S_{\text{g}}^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^4\mathbf{x} \left[v'^2 - \nabla_i v \nabla^i v + \frac{z''}{z} v^2 + o(v^3) \right], \quad (5.41)$$

où les grandeurs v et z sont définies par les équations (5.36) et (5.37). La variable v est appelé *variable de Sasaki-Mukhanov*. Dans la dérivation de l'expression (5.41), nous avons utilisé les équations d'Einstein à l'ordre zéro ainsi que *les équations d'évolution des perturbations au premier ordre*. En particulier, l'action (5.41) tient compte de l'énergie potentielle du champ de l'inflaton.

La variable invariante de jauge v prend la forme d'un champ canonique évoluant dans un espace de Minkowski mais dont la masse dépendante du temps est obtenue par

$$m_{\text{eff}}^2 = -\frac{z''}{z}. \quad (5.42)$$

Dans un espace en expansion accélérée, cette masse est imaginaire pure puisque $z''/z > 0$: les fluctuations du champ développent donc l'équivalent d'une instabilité tachyonique. De ce fait, nous nous attendons à un comportement pathologique des ces fluctuations. Notre étude, dans le chapitre 4, de l'évolution d'un champ scalaire dans un espace de de Sitter nous indique que les difficultés apparaissent aux grandes échelles et se traduisent par la présence *de divergences infrarouges* dans le propagateur libre.

Influence du choix d'un vide

Nous pouvons interpréter l'existence d'une instabilité tachyonique comme le développement du champ autour d'une valeur moyenne "instable", *i.e.* autour d'un mauvais vide. Afin d'illustrer cette relation, prenons l'exemple de la densité de lagrangien suivante :

$$\mathcal{L}[\varphi] = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{\mu^2}{2} \varphi^2 - \frac{\lambda}{4} \varphi^4 ,$$

avec $\lambda > 0$ et $\mu^2 > 0$. Si nous développons le champ autour d'une valeur moyenne nulle $\varphi = 0 + \delta\varphi$, nous voyons apparaître une instabilité tachyonique puisque le carré de la masse du champ quantique $\delta\varphi$ vaut $-\mu^2$. Mais, la valeur nulle du champ correspond à un maximum local du potentiel : c'est une valeur instable. En remarquant que les minima du potentiel sont situés en $\varphi_0 = \pm\mu/\sqrt{\lambda}$, nous développons cette fois-ci le champ au voisinage d'un minimum $\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi$. Dans ces conditions, la densité de lagrangien s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\varphi_0 + \delta\varphi] &= \frac{1}{2} \partial_\mu \delta\varphi \partial^\mu \delta\varphi - \frac{3\lambda\varphi_0 - \mu^2}{2} \delta\varphi^2 - \lambda\varphi_0 \delta\varphi^3 - \frac{\lambda}{4} \delta\varphi^4 \\ &\quad - \delta\varphi\varphi_0(\lambda\varphi_0^2 - \mu) - \frac{\lambda}{4} \varphi_0^4 + \frac{\mu^2}{2} \varphi_0^2 . \end{aligned}$$

La masse effective du champ $\delta\varphi$ est telle que $m^2 = 3\lambda\varphi_0 - \mu^2$. Lorsque φ_0 est le minimum du potentiel, la masse est réelle et vaut simplement $m = \mu\sqrt{2}$: le champ $\delta\varphi$ ne développe pas d'instabilité tachyonique. Nous voyons sur cet exemple qu'un développement autour d'un "mauvais vide" résulte en une instabilité tachyonique.

L' "instabilité tachyonique" affecte les grandes échelles et résulte d'un "mauvais" développement autour d'une valeur moyenne (voir l'encadré ci-dessus). Afin de "régulariser" le comportement infrarouge du champ, il semble indispensable de redéfinir la valeur moyenne du champ en prenant en compte, par exemple, la contribution des petites échelles aux modes de très grande longueur d'onde. C'est sur ce principe qu'est fondée l'inflation stochastique [Starobinsky & Yokoyama, 1994] dans laquelle la partie super-Hubble du champ évolue sous l'effet des fluctuations de courte longueur d'onde. La théorie est alors libre de toute divergence infrarouge.

Champ scalaire test

Considérons l'action d'un champ scalaire dans un espace FLRW non-perturbé

$$S_m = \int d^4\mathbf{x} a^4 \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right] . \quad (5.43)$$

En posant

$$u = a\varphi , \quad (5.44)$$

cette action se ré-écrit, après intégration par parties

$$S_m = \frac{1}{2} \int d^4\mathbf{x} \left[u'^2 - \nabla_i u \nabla^i u + \frac{a''}{a} u^2 - 2a^4 V \left(\frac{u}{a} \right) \right] . \quad (5.45)$$

Développons ce champ autour d'une valeur moyenne φ_0 de sorte que $\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi$ - ou de façon équivalente $u = u_0 + \delta u$ - sans tenir compte des perturbations de métrique. Afin d'obtenir une équation d'évolution linéaire dans les fluctuations, il est nécessaire de développer l'action au deuxième ordre en $\delta\varphi$ dont l'expression est donnée par

$$S_m^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^4\mathbf{x} \left\{ \delta u'^2 - \nabla_i \delta u \nabla^i \delta u + \left[\frac{a''}{a} - a^2 V'' \left(\frac{u_0}{a} \right) \right] \delta u^2 + o(\delta u^3) \right\} , \quad (5.46)$$

où V'' est la dérivée seconde du potentiel par rapport au champ φ_0 . Cette action s'applique à un champ scalaire *test*, évoluant dans un espace en expansion et ne perturbant pas la métrique. Dans ces conditions, le potentiel V n'est pas contraint. L'effet de l'expansion sur le potentiel du champ δu est double. Tout d'abord, il apparaît un terme en a^2 devant le potentiel. Ainsi, pour un potentiel quadratique

$$V(\varphi) = \frac{m^2}{2} \varphi^2 , \quad (5.47)$$

la masse du champ δu croît comme le facteur d'échelle lorsque $m \neq 0$

$$m_u^2 = m^2 a^2 . \quad (5.48)$$

En revanche, une masse strictement nulle reste nulle. Le second effet de l'expansion se traduit par un terme de masse effective dépendant du temps pour le champ δu . Pendant l'inflation, $a'' > 0$, et la masse induite par l'expansion est imaginaire pure, donnant lieu à une possible instabilité tachyonique.

Notons que, dans un espace de de Sitter, les masses effectives apparaissant dans les équations (5.41) et (5.46) sont identiques

$$m_{\text{eff}}^2 = -\frac{z''}{z} = -\frac{a''}{a} = -H^2 a^2 . \quad (5.49)$$

Ondes gravitationnelles

Les ondes gravitationnelles sont soumises à l'action

$$S_g = \frac{1}{16\pi G} \int d^3\mathbf{x} d\eta a^2 \left[\bar{\bar{E}}'_{ij} \bar{\bar{E}}'^{ij} - \nabla_k \bar{\bar{E}}_{ij} \nabla^k \bar{\bar{E}}^{ij} - 2\mathcal{K} \bar{\bar{E}}^{ij} \bar{\bar{E}}_{ij} \right] . \quad (5.50)$$

Si les vecteurs $e_{ij}^\lambda(\mathbf{k}, \eta)$ sont les vecteurs transverses décrivant les états de polarisation, nous décomposons les ondes gravitationnelles sous la forme

$$\bar{\bar{E}}_{ij}(\mathbf{x}, \eta) = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} E_{\lambda}(\mathbf{k}, \eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e_{ij}^{\lambda}(\mathbf{k}, \eta) . \quad (5.51)$$

Posons alors

$$\mu_{\lambda}(\mathbf{k}, \eta) = \frac{a}{\sqrt{8\pi G}} E_{\lambda}(\mathbf{k}, \eta) \quad (5.52)$$

et notons $\mu_{\lambda}(\mathbf{x}, \eta)$ sa transformée de Fourier inverse. Ces notations permettent d'écrire l'action (5.50) sous la forme canonique suivante

$$S_g = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \int d^3\mathbf{x} d\eta \left[\mu_{\lambda}^{\prime 2} - \nabla_k \mu_{\lambda} \nabla^k \mu_{\lambda} - 2\mathcal{K} \mu_{\lambda}^2 + \frac{a''}{a} \mu_{\lambda}^2 \right] . \quad (5.53)$$

Les champs décrivant les ondes gravitationnelles se comportent donc comme des champs scalaires tests évoluant librement dans un espace en expansion.

5.4.2 Quantification des perturbations

Ayant identifié les variables canoniques pertinentes, nous sommes en mesure de les quantifier. Nous utiliserons une procédure de quantification canonique. Nous étudierons principalement le champ de l'inflaton bien que la procédure soit identique pour les autres champs⁵. Introduisons la transformée de Fourier du champ

$$v(\mathbf{x}, \eta) = \int d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} v_{\mathbf{k}}(\eta) , \quad (5.54)$$

et son moment conjugué, que nous décomposons également en modes de Fourier

$$\pi(\mathbf{x}, \eta) = v'(\mathbf{x}, \eta) = \int d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} v'_{\mathbf{k}}(\eta) . \quad (5.55)$$

La définition du moment conjugué n'est pas unique. En effet, nous aurions très bien pu choisir

$$\tilde{\pi} = v'(\mathbf{x}, \eta) - \frac{z'}{z} v(\mathbf{x}, \eta) , \quad (5.56)$$

en remarquant qu'après intégration par parties, l'action s'écrit sous une forme équivalente

$$S^{(2)} = \int d\eta L^{(2)}[v; t] = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} d\eta \left[\left(v' - \frac{z'}{z} v \right)^2 - \nabla^i v \nabla_i v \right] . \quad (5.57)$$

⁵Il suffit de remplacer les termes en z''/z par a''/a afin de transposer les résultats à un champ test ou aux ondes gravitationnelles.

Nous définissons dès lors le hamiltonien

$$H = \int d^3\mathbf{x} \pi v - L^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \left[v'^2 - \nabla^i v \nabla_i v - \frac{z''}{z} v^2 \right], \quad (5.58)$$

dont dérivent les équations du mouvement

$$v'(\mathbf{x}, \eta) = i[H, v(\mathbf{x}, \eta)] \quad \text{et} \quad \pi'(\mathbf{x}, \eta) = i[H, \pi(\mathbf{x}, \eta)], \quad (5.59)$$

où les crochets doivent ici être compris comme des crochets de Poisson. Le champ classique $v_{\mathbf{k}}(\eta)$ vérifie alors explicitement l'équation

$$v_{\mathbf{k}}''(\eta) + \left(k^2 - \frac{z''}{z} \right) v_{\mathbf{k}}(\eta) + o(v^2) = 0. \quad (5.60)$$

Imposons désormais que $v(\mathbf{x}, \eta)$ et $\pi(\mathbf{x}, \eta)$ soient élevés au rang d'opérateur satisfaisant la relation de commutation à temps égaux suivante

$$[v(\mathbf{x}, \eta), \pi(\mathbf{x}', \eta)] = i\delta^D(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (5.61)$$

Les crochets de Poisson apparaissant dans les équations (5.59) deviennent alors des commutateurs. Introduisons alors, en représentation d'Heisenberg, les opérateurs création et annihilation dépendant du temps $a_{\mathbf{k}}(\eta)$ et $a_{\mathbf{k}}^\dagger(\eta)$, définis par

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}}(\eta) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{k} v_{\mathbf{k}}(\eta) + \frac{i}{\sqrt{k}} \pi_{\mathbf{k}}(\eta) \right], \\ a_{-\mathbf{k}}^\dagger(\eta) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{k} v_{\mathbf{k}}(\eta) - \frac{i}{\sqrt{k}} \pi_{\mathbf{k}}(\eta) \right]. \end{aligned} \quad (5.62)$$

En inversant ces relations, nous obtenons

$$\begin{aligned} v_{\mathbf{k}}(\eta) &= \frac{1}{\sqrt{2k}} \left[a_{\mathbf{k}}(\eta) + a_{-\mathbf{k}}^\dagger(\eta) \right], \\ \pi_{\mathbf{k}}(\eta) &= -i\sqrt{\frac{k}{2}} \left[a_{\mathbf{k}}(\eta) - a_{-\mathbf{k}}^\dagger(\eta) \right]. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Dans ces conditions, la relation de commutation (5.61) conduit aux relations de commutation à temps égaux suivantes

$$[v_{\mathbf{k}}(\eta), \pi_{\mathbf{k}'}(\eta)] = i\delta^D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \quad \text{et} \quad [a_{\mathbf{k}}(\eta), a_{-\mathbf{k}}^\dagger(\eta)] = \delta^D(\mathbf{k} + \mathbf{k}'). \quad (5.64)$$

Il est possible d'extraire la dépendance temporelle des opérateurs $a_{\mathbf{k}}^\dagger(\eta)$ et $a_{\mathbf{k}}(\eta)$ en exprimant ces derniers dans la base des opérateurs création et annihilation à la date η_0 : $a_{\mathbf{k}}^\dagger(\eta_0)$ et $a_{\mathbf{k}}(\eta_0)$. Comme nous ne considérons qu'une théorie libre, la transformation mise en jeu est une simple transformation de Bogolioubov. Les coefficients

de cette transformation dans un espace de fond homogène et isotrope sont particulièrement contraints. En effet, les symétries de l'espace indiquent que les champs peuvent être décomposés selon

$$v(\mathbf{x}, \eta) = \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left[f_k(\eta) a_{\mathbf{k}}(\eta_0) + f_k^*(\eta) a_{\mathbf{k}}^\dagger(\eta_0) \right] . \quad (5.65)$$

L'homogénéité exclut tout mélange de modes, *i.e.* $f_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}(\eta) = f_{\mathbf{k}}\delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ tandis que l'isotropie impose que les modes $f_k(\eta)$ ne dépendent que de la norme du vecteur \mathbf{k} . Les relations de commutation permettent alors de contraindre les fonctions $f_k(\eta)$ puisque l'égalité

$$\begin{aligned} [v_{\mathbf{k}}(\eta), \pi_{\mathbf{k}'}(\eta)] &= i\delta^D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \\ &= [f_k(\eta) a_{\mathbf{k}}(\eta_0) + f_k^*(\eta) a_{\mathbf{k}}^\dagger(\eta_0), f_{k'}(\eta) a_{\mathbf{k}'}(\eta_0) + f_{k'}^*(\eta) a_{\mathbf{k}'}^\dagger(\eta_0)] , \end{aligned} \quad (5.66)$$

n'est vérifiée que lorsque

$$f_k(\eta) f_{k'}^*(\eta) - f_{k'}(\eta) f_k^*(\eta) = i , \quad (5.67)$$

avec la condition initiale induite par la relation (5.63)

$$f_k(\eta_0) = \frac{1}{\sqrt{2k}} . \quad (5.68)$$

Les fonctions $f_k(\eta)$ sont obtenues à partir des équations du mouvement (5.59)

$$f_k'' + \left(k^2 - \frac{z''}{z} \right) f_k = 0 . \quad (5.69)$$

Solutions des équations du mouvement

Approximation de roulement lent Les solutions de l'équation (5.69) ne sont pas connues dans le cas général. Cependant, la masse effective z''/z peut être développée en fonction des paramètres de roulement lent

$$\frac{z''}{z} = \frac{1}{\eta^2} [2 + 6\epsilon + 3\delta + o(\epsilon^2, \delta^2)] . \quad (5.70)$$

Remarquons que, dans le cas d'un champ test ou des ondes gravitationnelles, la masse effective devient

$$\frac{a''}{a} = \frac{1}{\eta^2} [2 + 3\epsilon + o(\epsilon^2, \delta^2)] . \quad (5.71)$$

Ces développements coïncident à l'ordre le plus bas dans les paramètres de roulement lent.

Les solutions de cette équation sont données par les fonctions de Bessel du troisième type

$$f_k(\eta) = \frac{\sqrt{-\pi\eta}}{2} [C_1(k)H_\nu^{(1)}(-k\eta) + C_2(k)H_\nu^{(2)}(-k\eta)] , \quad (5.72)$$

où $H_\nu^{(1)}$ et $H_\nu^{(2)} = H_\nu^{(1)*}$ sont les fonctions de Hankel du premier et deuxième ordre et

$$\nu = \frac{3}{2} + 2\epsilon - \delta . \quad (5.73)$$

Les solutions (5.72) supposent que les paramètres de roulement lent varient peu, ce qui est une approximation cohérente avec l'ordre des développements (5.70) et (5.71).

En utilisant la normalisation du Wronskien des fonctions de Hankel

$$H_\nu^{(1)}(x) \frac{d}{dx} H_\nu^{(2)}(x) - \frac{d}{dx} H_\nu^{(1)}(x) H_\nu^{(2)}(x) = -\frac{4i}{\pi x} , \quad (5.74)$$

nous obtenons la condition suivante sur les coefficients C_1 et C_2 :

$$|C_1(k)|^2 - |C_2(k)|^2 = 1 . \quad (5.75)$$

Le choix de ces coefficients correspond à un choix du vide. Afin de retrouver localement un comportement minkowskien, nous imposons le vide de Bunch-Davies. Pour ce faire, remarquons que le temps η_0 peut être choisi infiniment loin dans le passé, moment auquel tous les modes sont à l'intérieur du rayon de Hubble et se comportent comme en espace-temps plat. Les coefficients deviennent alors

$$C_1(k) = i \quad \text{et} \quad C_2(k) = 0 . \quad (5.76)$$

Nous avons imposé une phase globale de manière à rendre le coefficient C_1 imaginaire pur, ce qui implique que les modes de fluctuation sont réels aux grandes échelles.

Pour des modes subhorizon, *i.e.* $-k\eta \gg 1$, les fonctions de Hankel prennent la forme

$$H_\nu^{(1)}(-k\eta) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{-k\eta} e^{-ik\eta} e^{-i(\nu\pi/2 + \pi/4)} . \quad (5.77)$$

Les solutions obtenues sont alors des ondes planes, de façon similaire à ce qui se passe dans un espace de Minkowski. Pour les modes de grande longueur d'onde, $-k\eta \ll 1$,

$$H_\nu^{(1)}(-k\eta) \approx -i \frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{-k\eta}{2} \right)^{-\nu} . \quad (5.78)$$

Aux grandes échelles, les modes ne possèdent plus de comportement oscillant. En effet, ces modes correspondent à des distances supérieures à tout rayon causal : on parle alors de modes "gelés".

Expansion de de Sitter Dans le cas d'une expansion strictement de Sitter, $\epsilon = \delta = 0$ et les modes solutions prennent la forme simple

$$f_k(t) = a(t) \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \left(1 - i \frac{k}{Ha(t)} \right) \exp \left(i \frac{k}{Ha(t)} \right), \quad (5.79)$$

à partir de laquelle nous retrouvons les limites précédentes. Remarquons qu'un mode k de longueur d'onde donnée, initialement sous l'horizon, traversera l'horizon à la date t telle que $k = a(t)H$. Hors de l'horizon causal, c'est-à-dire, lorsque $k < a(t)H$, les modes f_k associés au champ v_k croissent linéairement avec le facteur d'échelle. Autrement dit, les modes associés au champ initial φ se figent et prennent une valeur constante.

5.4.3 Spectre de puissance

Ce paragraphe cherche à caractériser à statistique des fluctuations développées par le champ à l'aide de leur fonction à deux points. La courbure étant proportionnelle au champ scalaire, le spectre de puissance des potentiels gravitationnels est relié au spectre de puissance de la variable de Sasaki-Mukhanov. La décomposition en modes de cette variable est de la forme

$$v(\mathbf{x}, \eta) = i \frac{\sqrt{-\pi\eta}}{2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left[H_\nu^{(1)}(-k\eta) a_{\mathbf{k}} - H_\nu^{(2)}(-k\eta) a_{\mathbf{k}}^\dagger \right], \quad (5.80)$$

où $a_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}}(\eta_0)$ et $a_{\mathbf{k}}^\dagger = a_{\mathbf{k}}^\dagger(\eta_0)$. La fonction à deux points est donnée par

$$\langle 0 | v_{\mathbf{k}}(\eta) v_{\mathbf{k}'}'(\eta) | 0 \rangle = \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \frac{2\pi^2}{k^3} \Delta_v(k), \quad (5.81)$$

où $|0\rangle$ est l'état du vide à la date η_0 . La distribution de Dirac qui intervient dans la fonction à deux points traduit l'isotropie de l'espace de fond. La fonction $\Delta_v(k)$, ou spectre de puissance, vaut

$$\Delta_v \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} |v_k(\eta)|^2 = \frac{k^3}{2\pi^2} \frac{-\pi\eta}{4} |H_\nu^{(1)}(-k\eta)|^2. \quad (5.82)$$

Après la phase inflationnaire, l'horizon croît à nouveau. Les modes de grande longueur d'onde deviennent observables lorsqu'ils entrent à nouveau dans l'horizon causal tandis que les petites échelles évoluent de façon non-linéaire. Les informations les plus directes que l'on puisse obtenir sur le mécanisme inflationnaire concernent donc les propriétés des modes super-Hubble à la fin de l'inflation, et en particulier leur spectre de puissance. Les modes superhorizon étant gelés, il suffit d'évaluer le spectre de puissance au moment où les modes deviennent super-Hubble $-k\eta \approx 1$. Nous obtenons alors le spectre de puissance du champ φ

$$\Delta_\varphi = \frac{1}{a^2} \Delta_v \approx \left(\frac{H_k}{2\pi} \right)^2. \quad (5.83)$$

Ici, H_k correspond à la valeur du paramètre de Hubble au moment où le mode k traverse l'horizon. Le spectre de puissance pour la perturbation de courbure vaut simplement

$$\Delta_{\mathcal{R}} = \left(\frac{H_k}{\dot{\varphi}_0} \right)^2 \Delta_{\varphi} = \frac{1}{2\epsilon_k} \frac{\Delta_{\varphi}}{M_{\text{Pl}}^2} \approx \frac{1}{12\pi^2 M_{\text{Pl}}^6} \left(\frac{V^3}{V'^2} \right)_k . \quad (5.84)$$

Nous voyons ainsi que les fluctuations du champ conduisent à des perturbations de métrique. Nous pouvons comprendre ce transfert à l'aide d'un raisonnement simple. En effet, pendant l'inflation, le champ de l'inflaton roule lentement le long de son potentiel. À chaque valeur du champ correspond un facteur d'expansion local. Tandis que la valeur moyenne du champ conduit à l'expansion accélérée d'un espace homogène et isotrope, les fluctuations du champ, quant à elles, génèrent localement un décalage temporel de l'expansion. Nous pouvons alors imaginer l'espace pavé de volumes dont les facteurs d'expansion diffèrent. Les perturbations de courbure sont de l'ordre des fluctuations relatives du facteur d'échelle $\mathcal{R} \sim \delta a/a \sim H\delta t$, où δt correspond au décalage temporel induit par une fluctuation autour de la valeur moyenne du champ. En utilisant l'équation de Klein-Gordon en roulement lent, cette durée peut être estimée à $\delta t \sim -3H\delta\varphi/V'$, ce qui implique que la perturbation de courbure $\mathcal{R} \sim -\delta\varphi/M_{\text{Pl}}(2\epsilon)^{-1/2}$ est proportionnelle aux fluctuations du champ, en accord avec (5.84). C'est sur cette interprétation géométrique qu'est fondé le formalisme δN , introduit initialement par Sasaki et Stewart [Sasaki & Stewart, 1996]. La perturbation de courbure \mathcal{R} est déterminée par le nombre de e-folds, définis localement, mesurés le long d'une courbe intégrale joignant une hypersurface de référence - de courbure nulle - et l'hypersurface étudiée (comobile par exemple). Une telle démarche présente l'avantage d'être intuitive tout en étant généralisable à *tout ordre dans les perturbations*.

5.5 Interprétation

5.5.1 Interprétation en terme de particules

Pendant une phase d'inflation les effets quantiques principaux se font sentir dans le cas d'un champ scalaire de petite masse et minimalement couplé à la gravité. En effet, l'énergie d'un mode de nombre d'onde comobile k vaut

$$E(t, k) = \sqrt{\frac{k^2}{a^2} + m^2} , \quad (5.85)$$

soit, en coordonnées conformes

$$E(\eta, k) = \sqrt{k^2 + m^2 a^2} . \quad (5.86)$$

Il en résulte une relation d'incertitude de Heisenberg particulière. En effet, une paire de particule peut être créée à la date t et subsister pendant une durée Δt telle que

$$\int_t^{t+\Delta t} dt' E(t', k) \sim 1. \quad (5.87)$$

Ce sont donc les particules les moins massives qui peuvent survivre le plus longtemps. Dans le cas non massif, on peut évaluer simplement l'intégrale, dans un espace de de Sitter

$$\int_t^{t+\Delta t} dt' E(t', k) = \frac{k}{Ha(t)} (1 - e^{-H\Delta t}). \quad (5.88)$$

Les particules non massives telles que $k \lesssim Ha(t)$ peuvent donc émerger du vide et survivre pendant un temps infini! Les particules virtuelles sont éloignées l'une de l'autre par l'expansion accélérée et ne peuvent pas se recombiner.

Il reste à savoir combien de ces paires de particules émergent du vide. Si ces particules sont conformément couplées, peu d'entre elles sont créées. En particulier, le taux de création de particules en coordonnées conformes doit être égal à celui dans Minkowski en raison de l'invariance conforme. Si ce taux de création est une constante notée Γ en espace plat, il vaut, dans un espace en expansion,

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dN}{d\eta} \frac{d\eta}{dt} = \frac{\Gamma}{a(t)}. \quad (5.89)$$

Le nombre de particules créées est donc exponentiellement faible.

En revanche, les particules qui ne sont pas couplées conformément à la métrique, en particulier les gravitons et les champs scalaires minimalement couplés, vérifieront des propriétés différentes. La production de ces particules n'est pas supprimée par le facteur d'expansion.

La valeur moyenne de l'énergie dans le vide pour un mode k , s'écrit sous la forme

$$\langle 0|E(t, k)|0\rangle = \frac{k}{2} + \frac{H^2 a^2}{4k}. \quad (5.90)$$

Si l'on considère que chaque particule de nombre d'onde k possède une énergie k , alors leur nombre

$$N(t, k) = \left(\frac{Ha(t)}{2k} \right)^2 \quad (5.91)$$

croît exponentiellement avec le temps!

Ces arguments heuristiques montrent bien que les particules non massives et minimalement couplées ont un comportement singulier, les effets quantiques se traduisant par une production importante de particules.

5.5.2 Comportement classique de fluctuations quantiques

L'équation (5.72) nous indique qu'à grand temps - ou à grande échelle - les modes propres du champ prennent une valeur réelle. Le champ peut donc s'écrire, en négligeant la dépendance temporelle des paramètres de roulement lent,

$$v(\mathbf{x}, \eta) \approx \frac{\Gamma(\nu)}{2^{1-\nu}\sqrt{\pi}} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{(-k\eta)^{1/2-\nu}}{\sqrt{k}} (a_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}}^\dagger) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (5.92)$$

et son moment conjugué devient

$$\pi(\mathbf{x}, \eta) \approx \left(\frac{1}{2} - \nu\right) \frac{1}{\eta} v(\mathbf{x}, \eta). \quad (5.93)$$

Les relations de commutation entre le champ et son moment conjugué sont donc négligeables à grand temps, c'est-à-dire lorsque les modes d'intérêt sont sortis de l'horizon

$$[v(\mathbf{x}, \eta), \pi(\mathbf{x}', \eta)] \approx 0. \quad (5.94)$$

Sans faire appel aux conditions de roulement lent, nous pouvons nous rendre compte que cette configuration revient à négliger le mode décroissant parmi les solutions de l'équation du mouvement. En effet, à grande échelle, les solutions sont de la forme

$$f_k(\eta) = D_1(\mathbf{k})a + D_2(\mathbf{k})a \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\eta'}{a^2(\eta')}. \quad (5.95)$$

Les relations de commutation imposent la condition sur le wronskien, qui se ré-écrit

$$D_1 \text{Im} D_2 = -\frac{1}{2}. \quad (5.96)$$

Nous pouvons choisir les valeurs des constantes $D_1(k)$ et $D_2(k)$ telles que

$$D_1(k) = \frac{H_k}{\sqrt{2}k^{3/2}} \quad \text{et} \quad D_2(k) = -i \frac{k^{3/2}}{\sqrt{2}H_k}, \quad (5.97)$$

où H_k est la valeur du paramètre de Hubble au moment où le mode k sort de l'horizon.

Le second terme de la solution (5.95) correspond au mode décroissant : il est donc rapidement négligeable et la seule contribution aux modes f_k provient du premier terme, proportionnel à D_1 , dans l'équation (5.95). Les relations de commutation peuvent alors être négligées et les champs se comportent classiquement. Il est alors possible de considérer le champ comme un champ stochastique classique [Lesgourgues *et al.*, 1997] [Polarski & Starobinsky, 1996] satisfaisant, pour tout opérateur \mathcal{O} , la relation suivante

$$\langle \Psi | \mathcal{O}(\delta\varphi) \mathcal{O}^\dagger(\delta\varphi) | \Psi \rangle = \int \delta\varphi \rho(|\delta\varphi|) |\delta\varphi|^2, \quad (5.98)$$

avec une matrice densité “classique” définie à partir de la fonction d’onde Ψ par

$$\rho(|\delta\varphi|) = |\Psi(\delta\varphi)|^2 . \quad (5.99)$$

En première approximation, si les valeurs moyennes sont calculées dans le vide de Bunch-Davies et en négligeant toute interaction du champ, la distribution des modes aux échelles superhorizon est gaussienne. De fait, les fonctions de corrélation vérifient

$$\begin{aligned} \langle \delta\varphi_{\mathbf{k}} \delta\varphi_{\mathbf{k}'} \rangle &= \delta^D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P(k) , \\ \langle \prod_{i=1}^{2n+1} \delta\varphi_{\mathbf{k}_i} \rangle &= 0 , \\ \langle \prod_{i=1}^{2n} \delta\varphi_{\mathbf{k}_i} \rangle &= \delta^D(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_n) \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \langle \delta\varphi_{\mathbf{k}_{\sigma(i)}} \delta\varphi_{\mathbf{k}_{\sigma(j)}} \rangle . \end{aligned} \quad (5.100)$$

Un champ stochastique gaussien de moyenne nulle est donc entièrement caractérisé par sa variance, *i.e.* sa fonction de corrélation d’ordre deux.

5.6 Quelques réalisations explicites

5.6.1 Inflation chaotique

Le plus simple des modèles inflationnaire est le modèle d’inflation chaotique introduit par A. Linde [Linde, 1983]. Avant son introduction, les modèles inflationnaires considéraient que le champ de l’inflaton, initialement nul ou de faible valeur, jouait le rôle du paramètre d’ordre décrivant la transition de phase associée à la fin de l’inflation. Une transition de phase du premier ordre correspondait à *l’ancienne inflation* tandis que la *nouvelle inflation* était caractérisée par une transition de phase du deuxième ordre. L’inflation chaotique repose également sur l’idée que l’univers primordial a connu une transition de phase induite, par exemple, par la brisure d’un groupe de grande unification. À la suite de cette transition de phase se met en place la phase inflationnaire. Il est alors légitime de penser qu’au début de l’inflation, les conditions initiales sont quelconques et les champs acquièrent des valeurs de l’ordre de grandeur des dimensions caractéristiques, c’est-à-dire approximativement l’échelle de Planck. Le champ de l’inflaton, initialement de grande valeur moyenne et largement éloigné du minimum de son potentiel, roule alors lentement le long de son potentiel, supposé polynomial, atteignant, à la fin de l’inflation, une valeur nulle pour un minimum nul du potentiel. Ces conditions initiales sont dites chaotiques : ce sont elles qui, en fixant la valeur initiale du champ de l’inflation, le singularisent en tant que tel.

Considérons un potentiel polynomial de la forme

$$V(\varphi) = \lambda_p M_{\text{Pl}}^4 \left(\frac{\varphi}{M_{\text{Pl}}} \right)^p , \quad (5.101)$$

où λ_p est une constante adimensionnée. Les premiers paramètres de roulement lent prennent la forme

$$\epsilon = \frac{M_{\text{Pl}} p^2}{2 \varphi^2} \quad \text{et} \quad \delta = M_{\text{Pl}} \frac{p(p-1)}{\varphi^2}. \quad (5.102)$$

L'inflation s'arrête lorsque $\epsilon = 1$, c'est-à-dire lorsque le champ atteint la valeur finale $\varphi_f(t = t_f) = pM_{\text{Pl}}/\sqrt{2}$. Le nombre de e-folds rend compte de la durée de l'inflation

$$N(t) = \int_t^{t_f} H dt \approx \frac{1}{M_{\text{Pl}}} \int_{\varphi_f}^{\varphi} d\varphi \frac{V}{V_\varphi} \approx \frac{1}{2n} \left(\frac{\varphi}{M_{\text{Pl}}} \right)^2 - \frac{n}{4}. \quad (5.103)$$

Imposant que la durée de l'inflation soit suffisamment longue, *i.e.* $N > N_{\text{min}} \sim 60$, nous obtenons une contrainte sur la valeur initiale du champ de l'inflaton φ_i

$$\varphi_i > M_{\text{Pl}} \sqrt{2Np + \frac{p^2}{2}} \gtrsim 10M_{\text{Pl}}. \quad (5.104)$$

Bien que cette valeur soit particulièrement grande et dépasse l'échelle de Planck, elle ne représente pas un obstacle à l'utilisation des outils traditionnels de la physique. En revanche, lorsque la densité d'énergie dépasse l'échelle de Planck, toute interprétation devient litigieuse. Nous devons donc imposer

$$V(\varphi) < M_{\text{Pl}}^4 \Leftrightarrow \lambda_p \ll 10^{-p}. \quad (5.105)$$

Négligeant, en vertu de l'approximation de roulement lent, l'accélération du champ dans l'équation de Klein-Gordon, nous obtenons les solutions suivantes

$$\varphi(t) = \varphi_f \left[1 - \frac{\sqrt{\lambda_p} p(p-4)}{3} \frac{\left(\frac{p}{\sqrt{2}} \right)^{(p-4)/2}}{2} M_{\text{Pl}}(t_f - t) \right]^{2/(4-p)}, \quad (5.106)$$

$$a(t) = a_f \exp \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2pM_{\text{Pl}}} [\varphi^2(t) - \varphi_f^2] \right\}. \quad (5.107)$$

Dans la limite $p \rightarrow 4$, le champ évolue exponentiellement avec le temps

$$\varphi(t) = \varphi_f \exp \left[\frac{4\sqrt{\lambda}}{3} M_{\text{Pl}}(t_f - t) \right]. \quad (5.108)$$

Nous avons donc obtenu des contraintes sur les paramètres du modèle à partir de la seule dynamique homogène. D'autres contraintes proviennent de l'étude des perturbations puisque la courbure est de l'ordre de

$$\mathcal{R} \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} \frac{V^{3/2}}{M_{\text{Pl}}^3 V'} \sim 10^{-5}. \quad (5.109)$$

Nous obtenons alors

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\lambda_p}}{p} \left(\frac{\varphi}{M_{\text{Pl}}} \right)^{p/2+1} \sim 10^{-5}, \quad (5.110)$$

soit, avec une valeur du champ proche de la masse de Planck $\varphi \sim M_{\text{Pl}}$

$$\lambda_p \sim 10^{-9}. \quad (5.111)$$

Les couplages doivent donc être de l'ordre de 10^{-9} en unité de la masse de Planck. La petitesse des constantes de couplage impose que le champ de l'inflaton puisse être considéré comme libre. Cependant, d'aussi faibles couplages ne semblent pas naturels et ont vraisemblablement été induits dynamiquement. Nous proposons, dans la partie qui suit, un mécanisme impliquant plusieurs champs scalaires afin d'expliquer ces valeurs.

5.6.2 Inflation chaotique à plusieurs champs

Nous cherchons à explorer les conséquences de la présence de plusieurs champs scalaires de grande valeur moyenne pendant l'inflation. Nous nous proposons d'examiner un modèle de potentiel en loi de puissance de la forme :

$$V(\varphi^a) = M_{\text{Pl}}^4 \sum_{a=1}^N \lambda_p^a \left(\frac{\varphi^a}{M_{\text{Pl}}} \right)^p, \quad (5.112)$$

où p est un entier naturel. Ce potentiel généralise les modèles d'*inflation assistée* [Liddle *et al.*, 1998] [Copeland *et al.*, 1999] - dont la forme exponentielle du potentiel est obtenue à la limite $p \rightarrow \infty$ - et de *N-flation* [Dimopoulos *et al.*, 2005] - dont le potentiel pour les axions est approximé par des termes quadratiques $p = 2$.

Supposons que les champs φ^a satisfassent les conditions de roulement lent de sorte que

$$3H\dot{\varphi}^a = -p\lambda_p^a M_{\text{Pl}}^3 \left(\frac{\varphi^a}{M_{\text{Pl}}} \right)^{p-1}. \quad (5.113)$$

Nous obtenons alors, après intégration,

$$\frac{1}{\lambda_p^a (\varphi^a)^{p-2}} = \frac{1}{\lambda_p^b (\varphi^b)^{p-2}} + cste \quad \forall (a, b). \quad (5.114)$$

Si les valeurs moyennes des champs sont suffisamment grandes au début de l'inflation, nous pouvons négliger la constante dans (5.114), lorsque $p > 2$, ce qui conduit à

$$\varphi^a (\lambda_p^a)^{1/(p-2)} = \varphi^b (\lambda_p^b)^{1/(p-2)}. \quad (5.115)$$

Compte-tenu de l'équation d'Einstein

$$\dot{H} = -4\pi G \sum_{a=1}^N (\dot{\varphi}^a)^2, \quad (5.116)$$

l'évolution de la géométrie est induite par la direction du champ projetée suivant le vecteur "vitesse" u_a défini par

$$u_a = \frac{\dot{\varphi}^a}{\sqrt{\sum_{a=1}^N (\dot{\varphi}^a)^2}} . \quad (5.117)$$

Nous définissons donc le champ φ comme le champ qui perturbe la géométrie

$$\varphi = \sum_{a=1}^N \varphi^a u_a . \quad (5.118)$$

La trajectoire classique dans l'espace des champs est déterminée par les contraintes

$$\varphi^a = \varphi u_a = \varphi \frac{(\lambda_p^a)^{\frac{1}{2-p}}}{\sqrt{\sum_{b=1}^N (\lambda_p^b)^{\frac{2}{2-p}}}} , \quad (5.119)$$

où nous avons utilisé les équations du mouvement (5.115). Le potentiel varie alors uniquement en fonction de φ avec une dépendance polynomiale

$$V(\varphi) = M_{\text{Pl}}^4 \sum_{a=1}^N \lambda_p^a \left(\frac{\varphi^a}{M_{\text{Pl}}} \right)^p = M_{\text{Pl}}^4 \tilde{\lambda}_p \left(\frac{\varphi}{M_{\text{Pl}}} \right)^p , \quad (5.120)$$

où la constante de couplage effective $\tilde{\lambda}_p$ vaut

$$\tilde{\lambda}_p = \frac{(\lambda_p^a)^{\frac{2}{2-p}}}{\left[\sum_{b=1}^N (\lambda_p^b)^{\frac{2}{2-p}} \right]^{\frac{p}{2}}} . \quad (5.121)$$

Ce résultat nous permet d'expliquer aisément la faible valeur des constantes de couplage pendant l'inflation. Supposons, pour simplifier, que toutes les constantes de couplages soient égales

$$\lambda_p^a = \kappa_p \quad \forall a . \quad (5.122)$$

La constante de couplage effective vaut alors

$$\tilde{\lambda}_p = \frac{\kappa_p}{N^{\frac{p-2}{2}}} . \quad (5.123)$$

Nous voyons donc que la constante de couplage effective diminue avec le nombre de champs dès que $p > 2$. Par exemple, si les constantes de couplage initiales sont de l'ordre de 10^{-4} , nous retrouvons la contrainte sur les constantes de couplage en inflation chaotique pour peu que le nombre de champs contribuant à l'expansion soit de l'ordre de $N \gtrsim 10^5$ ($p = 4$). La présence de couplages non-renormalisables ($p > 4$) relâche la contrainte sur le nombre de champs. Notons également que ce

mécanisme permet d'expliquer la valeur importante du champ de l'inflaton en inflation chaotique. La relation (5.119) nous indique en effet que le champ qui dirige la phase inflationnaire possède une valeur moyenne approximativement \sqrt{N} fois plus grande que les autres champs. Ainsi nous pouvons parfaitement obtenir $\varphi \gtrsim 10M_{\text{Pl}}$ si les autres champs vérifient $\varphi^a \ll M_{\text{Pl}}$ à condition que le nombre de champs soit élevé.

Nous avons rendu compte, d'une manière naturelle, à la fois de la petitesse des constantes de couplage et de la grande valeur du champ de l'inflaton, toutes deux caractéristiques d'une inflation chaotique, en invoquant la présence d'un grand nombre de champs scalaires. Cependant, bien que nous ayons introduit plusieurs degrés de liberté scalaires, nous ne nous sommes préoccupés que du seul degré de liberté qui régit l'expansion accélérée, celui correspondant justement au champ de l'inflaton. Nous explorons plus en détail dans les développements ultérieurs la phénoménologie des modèles à N champs scalaires.

5.7 Modèles à plusieurs champs scalaires

5.7.1 Forme canonique de l'action

Comme nous l'avons décelé sur l'exemple de l'inflation chaotique, la phénoménologie de la physique inflationnaire est bien plus riche lorsqu'on introduit des degrés de liberté scalaires supplémentaires. Les modèles à un seul champ sont caractérisés par des perturbations adiabatiques⁶, réparties suivant une distribution gaussienne définie par sa variance, ou de façon équivalente, par le spectre de puissance, quasiment invariant d'échelle. L'introduction de nouveaux champs autorise des modes de fluctuations isocourbes, qui peuvent être corrélés ou non aux fluctuations adiabatiques. Cette partie a pour objet la détermination des degrés de liberté pertinents ainsi que l'action à laquelle ils sont soumis.

Des compléments sur les modèles d'inflation multi-champs peuvent être trouvés dans la littérature. Les travaux sont trop nombreux pour être tous cités ici mais on pourra consulter l'article de revue de N. Bartolo *et al.* [Bartolo *et al.*, 2004] ainsi que les références qu'il y présente.

De façon similaire à l'étude des fluctuations quantiques d'un unique champ scalaire, notre point de départ est l'action qui régit la dynamique de N champs scalaires. Nous choisissons des champs minimalement couplés à la gravité et dont le terme cinétique est canonique

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi^a \partial_\nu \varphi^a - V(\varphi^a) \right\} + \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R. \quad (5.124)$$

⁶Un champ scalaire se comporte comme un fluide parfait, paramétré par un seul degré de liberté, dont les fluctuations se décomposent en perturbations adiabatiques et en perturbations d'entropie. En régime de roulement lent, les perturbations d'entropie sont négligeables car la pression et la densité ainsi que leurs fluctuations sont opposées.

Après un calcul fastidieux, il est possible d'assembler les perturbations des champs et de la métrique afin d'obtenir une action qui, au deuxième ordre dans les perturbations, s'écrit

$$\begin{aligned}
S^{(2)} = & \int d^4x \left\{ \frac{1}{2}v'^2 - \frac{1}{2}\partial_i v \partial_i v + \frac{z''}{2z}v^2 \right. \\
& + \frac{1}{2}\delta\vec{s}_\perp'^2 - \frac{1}{2}\partial_i \delta\vec{s}_\perp \cdot \partial_i \delta\vec{s}_\perp + \frac{a''}{2a}\delta\vec{s}_\perp^2 \\
& - \frac{1}{2}\delta s_\perp^a \delta s_\perp^b \frac{\partial^2 V}{\partial\varphi_0^a \partial\varphi_0^b} a^2 + v\delta\vec{s}_\perp \cdot \left(\frac{\vec{z}}{z}\right)' \frac{z'}{z} \\
& \left. - v\delta\vec{s}_\perp \cdot \left(\frac{\vec{z}}{z}\right)'' - 2v'\delta\vec{s}_\perp \cdot \left(\frac{\vec{z}}{z}\right)' \right\}. \tag{5.125}
\end{aligned}$$

Ici nous avons noté

$$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0 + \delta\vec{\varphi}, \tag{5.126}$$

$$\vec{\varphi}'_0 = \vec{z} \frac{\mathcal{H}^2}{a^2}, \tag{5.127}$$

$$v = (a\delta\vec{\varphi} + \vec{z}\psi) \cdot \frac{\vec{z}}{z}, \tag{5.128}$$

$$\delta\vec{s}_\perp = (a\delta\vec{\varphi} + \vec{z}\psi) - v \frac{\vec{z}}{z}. \tag{5.129}$$

La variable \vec{z} , généralisation vectorielle de son équivalent défini dans (5.37), joue un rôle central. En effet, le vecteur \vec{z} est à tout instant tangent à la trajectoire classique dans l'espace des champs. Toute fluctuation des champs se décompose donc en une partie *adiabatique* - projetée le long de la trajectoire - et des composantes *isocourbes*, orthogonales au vecteur tangent à la trajectoire. Notons que ce vecteur est similaire à celui introduit, dans un cadre plus général, par B. Van Tent [Groot Nibbelink & van Tent, 2002] [van Tent, 2002] (voir aussi [Lahiri & Bhattacharya, 2006]).

Intéressons-nous de plus près à l'expression (5.125). Tant que le vecteur unitaire \vec{z}/z est constant, c'est-à-dire que la trajectoire "moyenne" dans l'espace des champs est rectiligne, tout se passe comme si les perturbations de métrique ne provenaient que de la composante adiabatique v : nous retrouvons le mécanisme d'une inflation à un seul champ. Les fluctuations isocourbes $\delta\vec{s}_\perp$, quant à elles, évoluent sans perturber la métrique : l'action régissant leur dynamique est similaire à celle établie pour un champ scalaire test. Nous identifions donc ici, la variable adiabatique v comme généralisation de la variable de Sasaki-Mukhanov qui induit des perturbations de métrique. Elle est invariante de jauge au premier ordre. Les variables de perturbation des champs contenues dans le terme $\delta\vec{s}_\perp$ correspondent à des perturbations isocourbes. Nous pouvons dès lors introduire la perturbation de courbure en feuilletage comobile

$$\mathcal{R} = \frac{\vec{z}}{z^2} \cdot \left(v \frac{\vec{z}}{z} + \delta\vec{s}_\perp \right) = \frac{v}{z}. \tag{5.130}$$

Nous avons vu que, lorsque la trajectoire classique était rectiligne, nous retrouvions les caractéristiques d'une inflation à seul champ. En revanche, lorsque la trajectoire dans l'espace des champs est courbée, de sorte que le vecteur unitaire \vec{z}/z tangent à la trajectoire change de direction, des termes de mélange entre les fluctuations adiabatiques et isocourbes apparaissent. Dans ces conditions, les fluctuations isocourbes contribuent aux perturbations de métrique. En effet, la variation temporelle de la courbure vaut

$$\mathcal{R}' = \left(\frac{v}{z}\right)' = \left(\frac{a\vec{\delta\varphi}}{z} + \frac{\vec{z}}{z}\psi\right)' \cdot \frac{\vec{z}}{z} + \left(\frac{a\vec{\delta\varphi}}{z} + \frac{\vec{z}}{z}\psi\right) \cdot \left(\frac{\vec{z}}{z}\right)' . \quad (5.131)$$

Le premier terme s'identifie à la variation de la courbure générée par les perturbations adiabatiques, *i.e.* projetées le long de la trajectoire. Le dernier terme, en revanche, n'induit des perturbations de métrique que lorsque la trajectoire dans l'espace des champs est courbe et s'interprète comme une contribution à la courbure des fluctuations isocourbes. En remarquant que

$$\frac{\vec{z}}{z} \cdot \left(\frac{\vec{z}}{z}\right)' = 0 , \quad (5.132)$$

ce terme se ré-écrit

$$\left(\frac{a\vec{\delta\varphi}}{z} + \frac{\vec{z}}{z}\psi\right) \cdot \left(\frac{\vec{z}}{z}\right)' = \frac{\delta\vec{s}_\perp}{z} \cdot \left(\frac{\vec{z}}{z}\right)' . \quad (5.133)$$

Nous retrouvons ainsi les résultats établis dans [Garcia-Bellido & Wands, 1996][Gordon *et al.*, 2000]. Nous présentons maintenant une application simple de notre formalisme dans le cas d'un modèle à deux champs.

5.7.2 Cas de deux champs scalaires

Considérons le cas particulier de deux champs scalaires tels que

$$\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad \text{et, pour les perturbations,} \quad \vec{\delta\varphi} = \begin{pmatrix} \delta\phi \\ \delta\chi \end{pmatrix} . \quad (5.134)$$

L'espace des champs est ainsi réduit à un espace à deux dimensions dont une base orthonormale (\vec{e}_1, \vec{e}_2) peut être choisie de sorte qu'un vecteur \vec{e}_1 coïncide avec le vecteur unitaire tangent à la trajectoire

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{z}}{z} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} . \quad (5.135)$$

Notons que la dérivée temporelle de \vec{e}_1 est colinéaire à \vec{e}_2 puisque $\vec{e}_1' = \theta' \vec{e}_2$. Les directions adiabatique et isocourbe, désignées respectivement par les champs σ et s , sont identifiées par la décomposition des champs sur ces vecteurs de base

$$\sigma = \vec{e}_1 \cdot \vec{\varphi} = \cos \theta \phi + \sin \theta \chi, \quad (5.136)$$

$$s = \vec{e}_2 \cdot \vec{\varphi} = \cos \theta \chi - \sin \theta \phi. \quad (5.137)$$

Nous définissons également les champs canoniques invariants de jauge suivants

$$\begin{aligned} v &= a\delta\sigma + z\psi, \\ \delta s_{\perp} &= a\delta s, \end{aligned} \quad (5.138)$$

à partir desquels la variation de la courbure s'écrit

$$\mathcal{R}' = \left(\widetilde{\frac{v}{z}} \right)' + \theta' \frac{\delta s_{\perp}}{z}, \quad (5.139)$$

où un tilde signifie que la dérivation ne porte pas sur les vecteurs de base mais uniquement sur les composantes, ce qui correspond à une dérivation à θ constant.

5.7.3 Interprétation

Le mécanisme de transfert de fluctuations isocourbes vers la métrique s'interprète géométriquement, dans le cadre du formalisme δN . En effet, les fluctuations des champs dans la direction adiabatique induisent un décalage local à l'expansion globale. La distance totale parcourue le long de la trajectoire dans l'espace des champs est directement reliée à la durée de l'inflation, c'est-à-dire au nombre de e-folds définis localement. Que dire des fluctuations isocourbes ? Chaque mode de fluctuations isocourbes se traduit par une trajectoire légèrement différente de la trajectoire classique, d'autant plus "éloignée" que l'amplitude des fluctuations est grande. En fonction des modèles inflationnaires, ces trajectoires perturbées possèdent une longueur totale différente de celle de la trajectoire classique. En particulier, lorsque la trajectoire moyenne dans l'espace des champs s'incurve, les trajectoires situées à "l'extérieur du virage" ont une longueur supérieure à celles situées à l'intérieur et correspondent ainsi à une durée de l'inflation localement plus grande. Notons enfin que ce mécanisme ne dépend pas de la longueur d'onde des perturbations isocourbes : le transfert de fluctuations a lieu à toutes les échelles, y compris les échelles super-Hubble.

La mise en évidence d'une possible contribution des fluctuations isocourbes aux perturbations de métrique dépend de plusieurs paramètres. En premier lieu, cette contribution n'est non nulle que dans certaines classes de modèles, celles dont la trajectoire classique dans l'espace des champs n'est pas rectiligne. D'autre part, l'amplitude des fluctuations doit être suffisante, principalement aux grandes échelles,

afin de laisser une empreinte observationnelle. Cela impose une faible masse aux champs, celle-ci ne pouvant excéder la valeur du paramètre de Hubble, comme nous le montrons par la suite.

L'évolution des fluctuations d'un champ scalaire test massif dans un espace de de Sitter est déterminée par l'équation de Klein-Gordon

$$\delta\varphi_{\mathbf{k}}'' + \left(k^2 + m^2 a^2 + \frac{a''}{a}\right) \delta\varphi_{\mathbf{k}} = 0, \quad (5.140)$$

dont les solutions sont

$$\delta\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{i}{2} \sqrt{-\pi\eta} H_\nu^{(1)}(-k\eta) \quad \text{avec} \quad \nu = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{m^2}{H^2}}. \quad (5.141)$$

Le spectre de puissance aux échelles super-Hubble $-k\eta \ll 1$ se comporte donc comme

$$\Delta_\varphi \sim H^2 (-k\eta)^{3-2\text{Re}(\nu)}. \quad (5.142)$$

L'amplitude des fluctuations du champ est de l'ordre de H pour $m < H$ mais lorsque la masse m devient comparable ou supérieure au paramètre de Hubble, $m > H$, les fluctuations du champ décroissent en k^3 et sont négligeables aux échelles super-Hubble.

Enfin, il est nécessaire de discriminer les contributions des fluctuations isocourbes et adiabatique, ce qui n'est pas *a priori* une tâche facile. La caractéristique principale qui différencie ces deux types de perturbations concerne le potentiel d'interaction. L'équation (5.125) montre que la variation du potentiel dans la direction adiabatique est fortement contrainte puisqu'elle induit directement les perturbations de courbure par l'intermédiaire du terme z''/z . En revanche, les variations du potentiel dans les directions orthogonales ne sont pas contraintes : les conditions de roulement lent ne sont pas indispensables à ces directions. De plus, ces champs évoluent comme des champs tests dans un espace en expansion, ce qui simplifie considérablement leur description.

Bien que nous n'ayons développé l'action qu'au deuxième ordre dans les perturbations, ce principe semble encore valide aux ordres supérieurs. Il est dès lors possible de considérer des potentiels particulièrement creusés, générant des non-linéarités importantes de sorte que la distribution des fluctuations isocourbes ne soit plus parfaitement gaussienne.

Dans la suite, nous décrivons certains mécanismes pouvant être responsables des non-gaussianités dans la distribution des perturbations de métrique.

5.8 Non-gaussianités

Diverses observables nous donnent accès aux phénomènes physiques pendant l'inflation. L'évolution homogène tout d'abord, censée résoudre les paradoxes apparents

du Big-Bang chaud, permet de contraindre la valeur des constantes de couplage, la durée de l'inflation et les échelles d'énergie mises en jeu. Au-delà de l'approximation homogène, le spectre de puissance des perturbations de métrique est une source d'informations importante : son amplitude, sa variation en fonction de l'échelle, caractérisée par l'indice spectral, voire la variation de l'indice spectral avec l'échelle sont autant d'observables permettant de contraindre davantage les modèles. Cependant, le spectre de puissance n'est qu'une première étape dans la détermination de la statistique des perturbations. En règle générale, une distribution peut être définie par l'ensemble de ses moments. Supposer que la distribution n'est déterminée que par son moment d'ordre deux, le spectre de puissance, revient à faire une approximation gaussienne. Une connaissance plus précise de la distribution requiert la connaissance de fonctions de corrélation d'ordre élevé.

Bien qu'aucune déviation à la gaussianité primordiale n'ait été mise en évidence à ce jour, celle-ci pourrait être détectée dans les expériences futures [Surveyor,]. Afin d'interpréter les observations potentielles, il est essentiel de déterminer les principales signatures attendues. De fortes contraintes pourraient être imposées, non seulement sur les constantes de couplage, mais aussi sur le nombre de champs légers et leurs interactions.

Dans ce qui suit, nous présentons quelques modèles susceptibles de générer des non-gaussianités.

5.8.1 Modèle à un champ scalaire

Sachant qu'un modèle d'inflation chaotique reproduit fidèlement les observations actuelles [Spergel *et al.*, 2006], il est naturel de quantifier les déviations à la gaussianité.

Dans le cas de l'inflation chaotique (voir partie 5.6.1), les constantes de couplage doivent être très faibles. Nous nous attendons donc à ce que l'approximation gaussienne soit valide et que les déviations à la gaussianité soient négligeables. Nous pouvons le vérifier par un calcul d'ordre de grandeur.

Considérons un champ scalaire test dans les conditions de roulement lent. L'équation de Klein-Gordon pour les fluctuations du champ s'écrit

$$\delta\ddot{\varphi} + 3H\delta\dot{\varphi} - \frac{1}{a^2}\nabla^2\delta\varphi = -\frac{d^2V}{d\varphi^2}\delta\varphi - \frac{d^3V}{d\varphi^3}\frac{\delta\varphi^2}{2} + o(\delta\varphi^3). \quad (5.143)$$

Lorsque les termes d'interaction sont négligeables, tous les modes de Fourier évoluent indépendamment et, d'après le théorème de la limite centrale, la distribution du champ est gaussienne. Les termes d'interaction, *i.e.* les non-linéarités dans l'équation d'évolution des perturbations, couplent les modes de Fourier les uns aux autres : le théorème de la limite centrale ne s'applique plus et la distribution des fluctuations n'est plus gaussienne.

Ainsi, seuls des termes non-linéaires de grande amplitude induisent des déviations significatives à la gaussianité. Dans l'équation (5.143), cela se traduit par

$|V^{(3)}\delta\varphi/V''| \gtrsim 1$. Or, le spectre de puissance nous indique que les fluctuations du champ sont de l'ordre du paramètre de Hubble $\delta\varphi \sim H$, tandis que le rapport des dérivées du potentiel est de l'ordre de grandeur de $\Delta\varphi_0$, où $\Delta\varphi_0$ correspond à la variation de la valeur moyenne du champ pendant un temps Δt donné

$$\frac{V''}{V^{(3)}} \sim \Delta\varphi_0 .$$

Dans l'approximation de roulement lent, l'équation de Klein-Gordon pour φ_0 montre que $\Delta\varphi_0 \sim -V'\Delta t/(3H) \sim -NM_{\text{Pl}}\sqrt{\epsilon}$, où $N \approx H\Delta t$ est le nombre de e-folds depuis la sortie de l'horizon des modes observables. Ainsi, les non-gaussianités sont significatives lorsque $H > N\sqrt{\epsilon}M_{\text{Pl}}$. Afin d'estimer la possibilité d'une telle condition, rappelons-nous que les perturbations de courbure sont de l'ordre de $\mathcal{R} \sim 10^{-5}$, ce qui fournit $H \sim 10^{-5}\sqrt{\epsilon}M_{\text{Pl}}$. Les non-linéarités ne sont donc significatives que si le nombre de e-folds vaut 10^{-5} , c'est-à-dire si l'inflation s'arrête immédiatement. L'amplitude relative des termes non-linéaires est donc de l'ordre de $10^{-5}/N$ et la distribution des fluctuations du champ est très faiblement non-gaussienne. En utilisant l'équation d'évolution des perturbations, $\delta\varphi^{\text{NG}} \sim (\delta\varphi^{\text{G}})^2 V^{(3)}N/H^2 \sim \delta(\delta\varphi^{\text{G}})^2/(M_{\text{Pl}}\sqrt{\epsilon})$, où δ est le second paramètre de roulement lent. Nous pouvons donc estimer la fonction de corrélation à trois points pour la courbure

$$\langle \mathcal{R}^3 \rangle \sim \left(\frac{\dot{\varphi}_0}{H} \right)^3 \langle \delta\varphi^3 \rangle \sim f_{\text{NL}} \langle \mathcal{R}^2 \rangle^2 , \quad (5.144)$$

avec $f_{\text{NL}} \sim \delta$. L'amplitude de la fonction à trois points de la courbure est de l'ordre des paramètres de roulement lent.

Nous pouvons interpréter aisément ce résultat en remarquant que des non-linéarités importantes nécessitent un potentiel très prononcé, aux variations marquées, tandis que l'approximation de roulement lent suppose un potentiel quasiment plat. Les deux conditions sont donc incompatibles.

De façon plus formelle, J. Maldacena [?] a été le premier à calculer de façon cohérente les non-gaussianités dans les perturbations de courbure. En développant l'action d'un champ scalaire à l'ordre trois dans les perturbations, puis en appliquant le formalisme quantique de Schwinger-Keldysh, il a déterminé la fonction de corrélation à trois points

$$\langle \mathcal{R}_{\mathbf{k}_1} \mathcal{R}_{\mathbf{k}_2} \mathcal{R}_{\mathbf{k}_3} \rangle \sim -(n_s - 1) \langle \mathcal{R}_{\mathbf{k}_1} \mathcal{R}_{-\mathbf{k}_1} \rangle \langle \mathcal{R}_{\mathbf{k}_2} \mathcal{R}_{\mathbf{k}_3} \rangle \quad \text{pour } k_1 \ll k_2, k_3 , \quad (5.145)$$

où n_s est l'indice spectral pour les modes scalaires et s'exprime comme une combinaison linéaire des paramètres de roulement lent. Ce résultat coïncide effectivement avec notre estimation ainsi qu'avec le calcul classique au deuxième ordre présenté dans [Acquaviva *et al.*, 2003]. Bien que faibles, ces non-gaussianités pourraient être mesurées par le satellite Planck⁷ pour $f_{\text{NL}} > 3$. Les observations actuelles imposent une contrainte sur ce paramètre, $-54 < f_{\text{NL}} < 114$ à 95% de niveau de

⁷À condition d'inclure les mesures des fluctuations de température *et* de polarisation.

confiance [Spergel *et al.*, 2006], qui ne permet pas de mettre en évidence une quelconque déviation à la gaussianité.

5.8.2 Curvaton

Le modèle du curvaton a été initialement introduit par A. Linde et V. Mukhanov [Linde & Mukhanov, 1997] puis développé dans [Moroi & Takahashi, 2001] [Lyth & Wands, 2002] [Linde & Mukhanov, 2006] [Lyth, 2006]. Le curvaton est un champ scalaire léger qui coexiste avec l'inflaton et que l'on rend responsable des perturbations de courbure bien qu'il ne domine pas la densité d'énergie totale. Ceci n'est possible que si, d'une part, les fluctuations du champ de l'inflaton sont négligeables, *i.e.* $H \ll 10^{-5} \sqrt{\epsilon} M_{\text{Pl}}$, tandis que, d'autre part, la valeur moyenne du curvaton σ est inférieure au paramètre de Hubble, *i.e.* $\sigma < H$. À la fin de l'inflation, l'inflaton se désintègre en matière relativiste tandis que le curvaton survit à l'inflation et ne se désintègre qu'ultérieurement, avant la nucléosynthèse. Les produits de la désintégration de l'inflaton voient leur densité d'énergie décroître en a^{-4} . La densité d'énergie du champ du curvaton, quant à elle, est approximativement constante tant que sa masse est inférieure au paramètre de Hubble $m_\sigma < H$ et décroît en a^{-3} lorsque le paramètre de Hubble a diminué suffisamment pour que $m_\sigma > H$. À plus ou moins long terme après l'inflation, l'évolution est dominée par la densité d'énergie du curvaton.

Nous pouvons estimer les fluctuations développées par le curvaton en supposant que son potentiel ne contient qu'un terme de masse. Pendant l'inflation, le contraste de densité induit par les fluctuations du champ du curvaton vaut

$$\frac{\delta\rho_\sigma}{\rho_{\text{total}}} = \frac{m_\sigma^2 \sigma \delta\sigma}{3H^2 M_{\text{Pl}}^2}. \quad (5.146)$$

Sachant que le champ du curvaton est léger, ses fluctuations sont naturellement de l'ordre de H et leur contribution au contraste de densité $\delta\rho_\sigma/\rho_{\text{total}} \sim m_\sigma^2 \sigma / (HM_{\text{Pl}}^2) \leq 10^{-10} \epsilon$ est quasiment nulle. Après l'inflation, lorsque la densité d'énergie est dominée par celle du curvaton

$$\frac{\delta\rho_\sigma}{\rho_\sigma} = 2 \frac{\delta\sigma}{\sigma} + \frac{\delta\sigma^2}{\sigma^2}, \quad (5.147)$$

et ce contraste de densité peut être arbitrairement grand si le champ σ prend une valeur faible. Pour de faibles valeurs du champ du curvaton $\sigma < H$, le second terme dans l'équation (5.147) ne peut être négligé. Bien que les fluctuations $\delta\sigma$ soient de nature gaussienne, le contraste de densité possède alors une composante non-gaussienne importante.

5.8.3 Inflation multi-champs : transfert de fluctuations

Lorsque plusieurs degrés de liberté scalaires sont présents pendant l'inflation, les variations du potentiel dans les directions isocourbes ne sont pas contraintes. Les

fluctuations isocourbes sont donc susceptibles

- i) de développer des non-gaussianités importantes aux grandes échelles, à condition que les champs soient légers,
- ii) et d'être transférées aux perturbations de métrique au moment où la trajectoire dans l'espace des champs s'incurve.

Dès lors, nous caractérisons les non-gaussianités à l'aide de deux paramètres : l'amplitude des non-gaussianités développées par les fluctuations isocourbes et l'angle de mélange qui traduit l'efficacité de leur transfert vers les perturbations adiabatiques. Dans ce qui suit, nous caractérisons les fluctuations classiques isocourbes en nous fondant sur le travail de F. Bernardeau et J.-P. Uzan [Bernardeau & Uzan, 2002] (pour une étude complète de champs stochastiques non-gaussiens, voir [Bernardeau *et al.*, 2002]). Nous supposons que les champs scalaires associés sont légers et se comportent comme des champs tests dans un espace en expansion.

En régime de roulement lent, l'équation du mouvement pour les modes isocourbes s'écrit, pour les grandes longueurs d'onde

$$3H\dot{\underline{\delta s}} = \underline{S}(\delta s) , \quad (5.148)$$

où le souligné indique l'utilisation d'une fenêtre de filtrage excluant les échelles sub-horizon. Ici \underline{S} est un terme de source, également filtré. La résolution générale d'une telle équation n'est pas aisée et il est nécessaire d'utiliser une approximation. Nous choisissons donc de négliger l'influence des modes sub-horizon sur les modes filtrés. Bien évidemment, cette approximation ne peut pas être légitime sur toute la durée de l'inflation. En effet, nous avons explicitement calculé les corrections radiatives à la masse d'un champ scalaire dans un espace de de Sitter. Le résultat a montré que la renormalisation des divergences locales faisait intervenir des corrections en logarithme du facteur d'échelle. Ces divergences à grand temps sont prises en compte dans l'approche stochastique de Starobinsky [Starobinsky & Yokoyama, 1994] dans laquelle la physique locale influe sur les modes de grande longueur d'onde. En première approximation cependant, nous pouvons négliger l'influence des modes sub-horizon et considérer que $\underline{S}(\delta s) \approx S(\underline{\delta s})$. L'équation (5.148) peut alors être résolue perturbativement [Woodard, 2005].

Fort de cette approximation, ré-écrivons l'équation (5.148) sous la forme

$$3H\dot{\underline{\delta s}} \approx S(\underline{\delta s}) . \quad (5.149)$$

Nous développons alors le champ stochastique en puissance des constantes de couplage

$$\underline{\delta s} = \underline{\delta s}^{(0)} + \underline{\delta s}^{(1)} + \underline{\delta s}^{(2)} + \dots , \quad (5.150)$$

de sorte que la hiérarchie suivante soit vérifiée

$$\begin{aligned} 3H\dot{\underline{\delta s}}^{(0)} &= 0, \\ 3H\dot{\underline{\delta s}}^{(1)} &= S(\underline{\delta s}^{(0)}), \\ &\dots \end{aligned} \quad (5.151)$$

Nous en déduisons que $\underline{\delta s}^{(0)} = cste$. Le champ $\underline{\delta s}^{(0)}$, filtré aux échelles super-Hubble, est figé et n'évolue pas dans le temps. Il conserve donc sa statistique initiale, celle d'un champ stochastique classique. Nous supposons alors que ce champ est une variable aléatoire qui suit une loi de distribution gaussienne. Il n'est pas évident que la loi de distribution soit exactement gaussienne puisqu'elle dépend de la physique locale et de l'évolution subhorizon des modes. Cependant, si nous supposons que les modes initialement subhorizon sortent rapidement de l'horizon, les non-linéarités développées sont suffisamment faibles pour que la statistique initiale du champ soit approximativement gaussienne.

Si le terme de source S ne possède pas de dépendance temporelle explicite, le champ à l'ordre suivant $\underline{\delta s}^{(1)}$ évolue sous l'action d'un terme constant et

$$\dot{\underline{\delta s}}^{(1)} \approx \frac{S(\underline{\delta s}^{(0)})}{3H}. \quad (5.152)$$

En particulier, si le terme de source est issu d'un potentiel quartique de la forme $V(\delta s) = \lambda \delta s^4/4$,

$$S(\underline{\delta s}^{(0)}) = -\lambda \left[\underline{\delta s}^{(0)} \right]^3 \quad (5.153)$$

et

$$\underline{\delta s}^{(1)}(t) = -\frac{\lambda}{3} \left[\underline{\delta s}^{(0)} \right]^3 \int_{t_i}^t \frac{dt'}{H}, \quad (5.154)$$

où t_i est un temps initial assimilable, par exemple, à l'instant auquel les modes d'intérêt cosmologiques traversent l'horizon. Le terme de source génère des non-linéarités, des couplages de modes qui font dévier la statistique du champ vers une distribution légèrement non-gaussienne. Afin d'estimer les déviations à une statistique gaussienne, nous pouvons calculer les fonctions de corrélation du champ, au premier ordre dans la constante de couplage. En particulier, la fonction de corrélation connexe à quatre points, nulle dans le cas gaussien, vaut ici

$$\langle \underline{\delta s}^4 \rangle_c = 3 \langle \left[\underline{\delta s}^{(0)} \right]^3 \underline{\delta s}^{(1)} \rangle_c. \quad (5.155)$$

En utilisant l'équation (5.154), nous obtenons

$$\langle \underline{\delta s}^4 \rangle_c = -\lambda \int_{t_i}^t \frac{dt'}{H} \langle \left[\underline{\delta s}^{(0)} \right]^3 \left[\underline{\delta s}^{(0)} \right]^3 \rangle_c = -6\lambda \int_{t_i}^t \frac{dt'}{H} \left[\langle \underline{\delta s}^{(0)2} \rangle \right]^3. \quad (5.156)$$

La fonction de corrélation à quatre points s'exprime en fonction du spectre de puissance $\langle \underline{\delta s}^{(0)2} \rangle$. Son amplitude est donnée par le terme de vertex

$$\nu_3(t) = -6\lambda \int_{t_i}^t \frac{dt'}{H} . \quad (5.157)$$

Lors d'une phase d'expansion de de Sitter, le paramètre de Hubble est constant $H = cste$, tandis que le nombre de e-folds entre les instants t et t_i est donné par $N = H \int_{t_i}^t dt' = H\Delta t$. Nous obtenons donc

$$\nu_3(t) = -6 \frac{\lambda N}{H^2} . \quad (5.158)$$

Pour une expansion en loi de puissance $a(t) \propto t^\alpha$, le paramètre de Hubble s'écrit $H = \alpha/t$ et

$$\nu_3(t) = -3 \frac{\lambda}{\alpha} (t^2 - t_i^2) . \quad (5.159)$$

Le nombre de e-folds entre la sortie de l'horizon des modes observables et l'instant t est défini par

$$\Delta N(t) = \alpha \int_{t_i}^t \frac{dt'}{t'} = \alpha \ln \left(\frac{t}{t_i} \right) . \quad (5.160)$$

La fonction de vertex vaut donc

$$\nu_3(t) = -3 \frac{\alpha \lambda}{H_i^2} \left\{ \exp \left[\frac{2}{\alpha} \Delta N(t) \right] - 1 \right\} . \quad (5.161)$$

Nous avons également noté H_i le paramètre de Hubble au moment de la sortie de l'horizon. À la limite $\alpha \rightarrow \infty$, nous retrouvons le cas de de Sitter. Cependant, plus α est proche de 1 par valeurs supérieures⁸ plus la fonction de vertex est grande. En effet, pour $\alpha = 2$,

$$\nu_3(t) \approx -3 \frac{\lambda \alpha}{H_i^2} e^{\Delta N(t)} \quad (5.162)$$

peut être extrêmement grand. Notons toutefois que le développement perturbatif 5.150 n'est valable que lorsque $\nu_3(t) [\delta s^{(0)}]^2 < 1$, avec $\delta s^{(0)} \sim H_i$.

Nous voyons sur ces exemples que l'amplitude des non-gaussianités ne dépend pas uniquement de la constante de couplage mais du produit de la constante de couplage et d'une fonction du nombre de e-folds. Dans un espace de de Sitter, cette amplitude croît linéairement avec le temps.

Au-delà du traitement perturbatif, nous pouvons caractériser l'ensemble de la distribution en déterminant les solutions de l'équation du mouvement

$$3H\dot{\underline{\delta s}} = -\lambda \underline{\delta s}^3 , \quad (5.163)$$

⁸Si $\alpha < 1$, l'expansion n'est pas accélérée.

qui, dans un espace de de Sitter prennent la forme

$$\underline{\delta}_S(t) = \frac{\underline{\delta}_S^{(0)}}{\sqrt{1 - 2\nu_3(t) [\underline{\delta}_S^{(0)}]^2}}. \quad (5.164)$$

Nous voyons que le développement perturbatif peut être resommé⁹. Un seul paramètre ν_3 suffit à déterminer entièrement la distribution. F. Bernardeau et J.-P. Uzan [Bernardeau & Uzan, 2002] ont obtenu la fonction densité de probabilité de la distribution du champ $\underline{\delta}_S$ (la méthode est décrite en détail dans [Bernardeau *et al.*, 2002]) qui est représentée sur la figure 5.1. La fonction densité de probabilité est proche d'une fonction gaussienne et possède la même variance. En revanche, lorsque $\lambda > 0$, les larges excursions du champ sont supprimées par rapport à une distribution gaussienne. Ce phénomène est compréhensible puisque le champ évolue dans un potentiel quartique qui tend à le confiner.

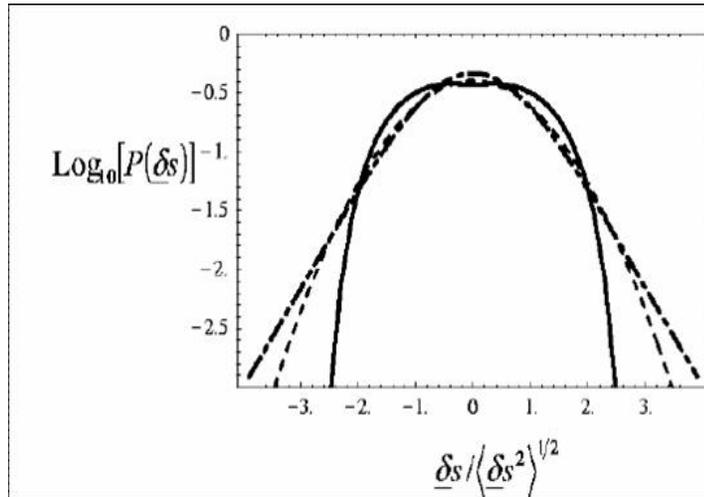


FIG. 5.1 – Fonction densité de probabilité d'un champ stochastique classique test soumis à un potentiel quartique $V(\underline{\delta}_S) = \lambda \underline{\delta}_S^4/4$ dans un espace de de Sitter. La courbe en tirets correspond à une distribution gaussienne $\lambda = 0$. La courbe en trait plein est obtenue pour une valeur positive de la constante de couplage λ telle que $\nu_3 H^2 = -0,3$. La dernière courbe correspond à une valeur opposée de la constante de couplage $\nu_3 H^2 = 0,3$.

Nous n'avons décrit les fluctuations que d'un point de vue classique, ne considérant que les modes super-Hubble. Avant de généraliser ces résultats à l'aide d'une approche quantique, nous examinons une réalisation explicite d'un tel modèle en supersymétrie.

⁹En négligeant les fluctuations aux petites échelles

5.8.4 Réalisation explicite en supersymétrie : inflation hybride

Généralités

De nombreux autres modèles d'inflation ont été proposés au delà des modèles dits de vieille et nouvelle inflation ou d'inflation chaotique. En particulier, les modèles d'inflation hybride [Linde, 1994] sont relativement intéressants pour plusieurs raisons. Tout d'abord, la fin de l'inflation coïncide avec une transition de phase qui pourrait être reliée à la brisure d'un groupe de grande unification ou d'un groupe résiduel. D'autre part, les valeurs prises par les champs scalaires, de l'ordre de M_{Pl} , sont légèrement plus faibles qu'au sein d'un modèle d'inflation chaotique, où les valeurs dépassent la dizaine de masse de Planck. Enfin, ces modèles, fondés sur le mécanisme de Higgs, s'insèrent parfaitement dans des extensions supersymétriques de la physique des particules.

Le modèle standard de la physique des particules n'est en effet qu'un modèle effectif, rendant compte de la physique à relativement basse énergie (de l'ordre du TeV). Les densités d'énergie propres à l'univers primordial sont de l'ordre des échelles de grande unification, c'est-à-dire environ 10^{16} GeV, et permettent de sonder les extensions du modèle standard, au premier rang desquelles se trouvent les modèles supersymétriques. Nous n'avons pas l'ambition de décrire un modèle standard supersymétrique - que constituent par exemple le MSSM¹⁰ ou le NMSSM¹¹ - mais plutôt celle de décrire un mécanisme inflationnaire cohérent fondé sur la supersymétrie (pour une revue détaillée, voir [Lyth & Riotto, 1999]).

En supergravité, l'obtention d'un potentiel positif susceptible de conduire à une phase d'inflation nécessite une brisure de la supersymétrie par terme F ou D . En effet, en supergravité, le potentiel dépend de trois quantités : un potentiel de Kähler $K(z, \bar{z})$, un superpotentiel qui est une fonction holomorphe des champs, $W(z)$, et une fonction holomorphe $f_{\alpha\beta}$ intervenant dans un terme cinétique non-trivial

$$V = V_F + V_D = e^{\frac{K}{M_{\text{Pl}}^2}} \left[(\mathcal{D}^i W) (K^{-1})^j_i (\mathcal{D}_j W^*) - 3 \frac{W W^*}{M_{\text{Pl}}^2} \right] + \frac{1}{2} (\text{Re } f_{\alpha\beta}) D^\alpha D^\beta. \quad (5.165)$$

Une expansion de de Sitter est nécessairement caractérisée par un potentiel positif, agissant comme une source des équations de Friedman. Une telle phase d'expansion est "stable" à la condition

$$3 \frac{|W|^2}{M_{\text{Pl}}^2} < |F|^2 + \frac{1}{2} |D|^2 e^{-\frac{K}{M_{\text{Pl}}^2}}, \quad (5.166)$$

avec

$$|F|^2 = (\mathcal{D}^i W) (K^{-1})^j_i (\mathcal{D}_j W^*) \quad \text{et} \quad |D|^2 = (\text{Re } f_{\alpha\beta}) D^\alpha D^\beta. \quad (5.167)$$

¹⁰ *Minimal Supersymmetric Standard Model.*

¹¹ *Next to Minimal Supersymmetric Standard Model.*

La contrainte (5.166) impose que l'un au moins des termes F ou D soit non-nul, ce qui caractérise une brisure de supersymétrie. Ainsi, toute phase d'expansion accélérée - dominée par les termes potentiels - brise la supersymétrie. À la fin de la phase inflationnaire, la supersymétrie est en général restorée au détriment d'autres symétries (symétries de jauge par exemple).

Dans les paragraphes suivants, nous négligerons les corrections de supergravité et ne décrirons que les effets supersymétriques. L'inflation par termes F a été originellement introduite par [Dvali *et al.*, 1994] mais, en raison du problème η (voir [Binetruy & Dvali, 1996]), ce modèle requiert un ajustement fin des paramètres. Afin de résoudre cette difficulté, l'inflation par termes D a ensuite été proposée par [Binetruy & Dvali, 1996] puis ré-explorée dans [Binetruy *et al.*, 2004]. L'espace des paramètres associé à chacun de ces modèles a été étudié en détail par Jonathan Rocher [Rocher & Sakellariadou, 2005a] [Rocher & Sakellariadou, 2005b]. Notons qu'il est possible d'englober les modèles inflationnaires par termes F ou D dans une théorie supersymétrique à deux générateurs (SUSY N=2). Cette inflation par termes P est présentée dans [Kallosh & Linde, 2003]. Nous nous intéressons dans cette partie à un mécanisme inflationnaire par termes D similaire au modèle hybride proposé par F. Bernardeau et J.-P. Uzan [Bernardeau & Uzan, 2003].

Présentation du modèle

Nous cherchons un mécanisme inflationnaire, induit par des termes D , donnant naissance à une distribution non-gaussienne des fluctuations de métrique à la fin de l'inflation. Nous choisissons le superpotentiel

$$W = \lambda(\mathbf{S} + \mathbf{R} \tan \theta)\Phi_+\Phi_- + \frac{\mu}{3}\mathbf{R}^3, \quad (5.168)$$

où Φ_+ and Φ_- sont des superchamps chargés sous un groupe de jauge $U(1)$ et de charges opposées, \mathbf{S} et \mathbf{R} étant deux superchamps chiraux non chargés. Nous noterons ϕ_+ , ϕ_- , S et R les champs scalaires qu'ils contiennent respectivement.

Du superpotentiel (5.168) est déduit le potentiel pour les champs scalaires

$$V = V_F + V_D, \quad (5.169)$$

où les termes F et D sont donnés respectivement par

$$V_F = \lambda^2|\phi_+\phi_-|^2 + |\lambda \tan \theta \phi_+\phi_- + \mu R^2|^2 + \lambda^2 [|\phi_+|^2 + |\phi_-|^2] |S + R \tan \theta|^2, \quad (5.170)$$

$$V_D = \frac{g^2}{2} (|\phi_+|^2 - |\phi_-|^2 + \xi)^2. \quad (5.171)$$

Ce potentiel possède deux minima : le minimum absolu, défini par $\phi_+ = 0$, $\phi_- = \sqrt{\xi}$ et $S = R = 0$, brise la symétrie de jauge tandis que pour des valeurs

$S > g\sqrt{\xi}/\lambda$, la configuration $\phi_+ = \phi_- = 0$, $R = 0$ correspond à un minimum local qui brise la supersymétrie par un terme D non nul $V_D = g^2\xi^2/2$.

Si le champ scalaire S satisfait des conditions initiales chaotiques, ce dernier est susceptible d'acquérir initialement de très grandes valeurs. Le potentiel est alors dominé par une constante, source d'une expansion accélérée. Les corrections à une boucle (voir ci-après) au potentiel conduit l'inflaton S vers de plus faibles valeurs jusqu'à la valeur critique

$$S_c = \frac{g\sqrt{\xi}}{\lambda} - \delta R \tan \theta \quad (5.172)$$

où δR correspond aux fluctuations quantiques du champ scalaire R . À ce moment, le champ ϕ_- devient tachyonique et acquiert une valeur moyenne non-nulle. L'inflation s'arrête, la supersymétrie est restaurée tandis que l'invariance de jauge est brisée, donnant naissance à des défauts topologiques. La dépendance de la valeur critique du champ de l'inflaton avec les fluctuations quantiques de R assure un mécanisme de transfert des fluctuations isocourbes vers les perturbations de métrique.

La courbure en feuilletage comobile s'écrit comme la somme de deux contributions, l'une adiabatique et l'autre isocourbe.

$$\mathcal{R} = \frac{1}{M_{\text{pl}}^2} \left(\frac{V}{V'} \right)_h \delta S - \frac{1}{M_{\text{pl}}^2} \tan \theta \left(\frac{V}{V'} \right)_c \delta R, \quad (5.173)$$

où l'indice "h" correspond à l'instant où le mode de perturbation traverse l'horizon tandis que "c" indique la fin de l'inflation, la valeur critique du champ de l'inflaton ayant été atteinte. V' est la dérivée du potentiel par rapport à S .

Les signatures non-gaussiennes dépendent de trois quantités : l'angle de mélange θ caractéristique de l'efficacité du transfert, la constante de couplage μ dont dépend l'amplitude des non-gaussianités et l'amplitude relative de la partie non gaussienne, dépendant des paramètres de roulement lent *via* le terme en $(V/V')_c$.

Il faut tout d'abord considérer le mécanisme de transfert et, en particulier, vérifier que le rapport V/V' n'évolue pas de façon significative entre la traversée de l'horizon et la fin de l'inflation.

Pendant l'inflation, le potentiel à l'ordre des arbres est exactement plat. Le champ de l'inflaton S n'a donc *a priori* aucune raison d'évoluer. En revanche, à l'ordre d'une boucle, les corrections radiatives donnent naissance à un potentiel effectif de la forme

$$V_{1\text{-loop}} = \frac{\Lambda^2}{32\pi^2} STr M(\phi)^2 + \frac{1}{64\pi^2} Str \left[M(\phi)^4 \left(\frac{M(\phi)^2}{\Lambda^2} - \frac{3}{2} \right) \right], \quad (5.174)$$

où la supertrace STr de la matrice de masse $M(\phi)$ est définie par

$$STr [M(\phi)] = \sum_{\text{spin } j=0,1/2,1} (-1)^{2j} (1+2j) Tr(M_j), \quad (5.175)$$

et Λ est une fréquence de coupure ultraviolette. Cette formule a été initialement établie par C. Coleman et E. Weinberg [Coleman & Weinberg, 1973]. Notons que la formule (5.174) n'est valable que dans un espace-temps de Minkowski, ce qui n'est manifestement pas le cas pendant l'inflation, excepté localement. Bien que nous nous attendions naïvement à ce que l'expansion d'un espace FLRW induise une masse effective pour les champs scalaires de l'ordre de $-a''/a \sim -H^2$, il n'est pas correct d'inclure un tel terme dans la matrice des masses. Comme nous pouvons le prévoir (voir le chapitre 4), la contribution de la courbure au potentiel effectif semble n'affecter que les divergences sous-dominantes, *i.e.* les divergences logarithmiques [Brunier & Bernardeau, 2005] (voir également page 276). De telles corrections sont susceptibles de modifier les résultats concernant la durée de l'inflation.

En supposant que nous pouvons négliger l'effet de la courbure, l'effet des corrections radiatives à une boucle se met sous la forme

$$V_{\text{eff}}(|S|) = \frac{g^2 \xi^2}{2} \left\{ 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} \left[2 \ln \left(\frac{\lambda^2 |S|^2}{\Lambda^2} \right) + (z+1)^2 \ln(1+z^{-1}) + (z-1)^2 \ln(1-z^{-1}) \right] \right\} \quad (5.176)$$

où l'on a posé $z = \lambda^2 |S|^2 / (g^2 \xi)$.

La dérivée première du potentiel effectif vaut

$$V'_{\text{eff}}(|S|) = \frac{g^4 \xi^2}{8\pi^2} \frac{1}{|S|} z f(z) \quad (5.177)$$

avec

$$f(z) = (z+1) \ln(1+z^{-1}) + (z-1) \ln(1-z^{-1}). \quad (5.178)$$

La phase inflationnaire se termine lorsque l'un des paramètres de roulement lent s'approche de l'unité ou lorsque la valeur moyenne de l'inflaton atteint sa valeur critique. Dans le dernier cas, la fin de l'inflation est équivalente à la condition $z = 1$, *i.e.* $S = g\sqrt{\xi}/\lambda$. La fin des conditions de roulement lent intervient lorsque la valeur du champ de l'inflaton est telle que $z = z_{\text{SR}}$. Afin de déterminer la valeur de z_{SR} , nous explicitons les premiers paramètres de roulement lent ϵ et η

$$\epsilon = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 = \frac{\lambda^2 g^2}{34\pi^4} \frac{M_{\text{Pl}}^2}{\xi} z f(z)^2 \quad (5.179)$$

$$\eta = M_{\text{Pl}}^2 \frac{V''}{V} = \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \frac{M_{\text{Pl}}^2}{\xi} g(z) \quad (5.180)$$

avec

$$g(z) = (3z+1) \ln(1+z^{-1}) + (3z-1) \ln(1-z^{-1}). \quad (5.181)$$

En inflation par termes D , $0 < \epsilon \ll -\eta$. La condition traduisant la fin du régime de roulement lent porte donc sur le paramètre ϵ et s'écrit

$$|g(z_{\text{SR}})| = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \frac{\xi}{M_{\text{Pl}}^2}. \quad (5.182)$$

La solution de cette équation montre que les conditions de roulement lent sont brisées avant que le champ n'atteigne sa valeur critique.

Nous devons alors comparer les rapports $(V/V')_{z=1}$ et $(V/V')_{z=z_h}$ qui traduisent le poids relatif des fluctuations adiabatique et isocourbe aux fluctuations de métrique. En utilisant la relation

$$\frac{V}{V'} = \frac{4\pi^2}{g\lambda} \sqrt{\xi} \frac{1}{\sqrt{z}f(z)}, \quad (5.183)$$

nous obtenons

$$\frac{(V/V')_{z=1}}{(V/V')_{z=z_h}} = \frac{\sqrt{z_h}f(z_h)}{\ln(4)}. \quad (5.184)$$

Le nombre d'e-folds N_h entre la traversée de l'horizon et la fin de l'inflation permet de contraindre le rapport précédent puisque

$$N_h = \int_{t_h}^{t_{\text{SR}}} H dt = \frac{2\pi^2}{\lambda^2} \frac{\xi}{M_{\text{Pl}}^2} \int_{z_{\text{SR}}}^{z_h} \frac{dz}{zf(z)}. \quad (5.185)$$

La contribution principale de la dernière intégrale provient de sa borne supérieure. Pour $z \gg 1$

$$\frac{1}{\sqrt{z}f(z)} \sim \frac{\sqrt{z}}{2}, \quad (5.186)$$

la valeur du champ de l'inflaton à la traversée de l'horizon est donnée par

$$z_h = \frac{\lambda^2}{\pi^2} \frac{M_{\text{Pl}}^2}{\xi} N_h. \quad (5.187)$$

Pour des valeurs de paramètres en accord avec les observations cosmologiques [Rocher & Sakellariadou, 2005b], $\lambda \sim 10^{-4}$, $g \sim 10^{-2}$, $\frac{\xi}{M_{\text{Pl}}^2} \sim 10^{-8}$, $N_h \sim 60$, nous obtenons

$$z_h \simeq 6 \quad \text{et} \quad \sqrt{z_h}f(z_h) \sim 1. \quad (5.188)$$

D'après l'équation (5.184), le rapport V/V' n'évolue donc pas significativement entre la traversée de l'horizon et la brisure de symétrie de jauge. À condition que $\tan \theta \sim 1$, les parties gaussienne et non-gaussienne contribuent approximativement avec la même amplitude aux perturbations de métrique.

Pour d'autres valeurs permises des paramètres du modèle, la valeur moyenne du champ de l'inflaton peut atteindre la masse de Planck et ce modèle doit être plongé dans une théorie de supergravité.

Le scénario standard d'inflation par terme D identifie un seul superchamp non-chargé S tel que le champ scalaire associé joue le rôle du champ de l'inflaton. Le modèle proposé par le superpotentiel (5.168) présente les mêmes caractéristiques. Cependant, au cours de la phase inflationnaire, nous imposons la présence d'un champ scalaire supplémentaire. Ce champ développe des fluctuations super-Hubble non-gaussiennes induites par un potentiel d'auto-interaction quartique. Au moment de la brisure de la symétrie de jauge, ces perturbations isocourbes sont transférées à la métrique puisque cet instant est paramétré par une combinaison linéaire des champs.

5.9 Fonctions de corrélation d'un champ scalaire dans un espace de de Sitter (article)

5.9.1 Présentation de l'article

Afin de décrire les déviations à la gaussianité d'un champ scalaire test dans un espace de de Sitter, nous évaluons [Bernardeau *et al.*, 2004], en utilisant le formalisme de Schwinger-Keldysh, les fonctions de corrélation à trois (respectivement quatre) points du champ soumis à un potentiel d'auto-interaction cubique (respectivement quartique).

Nous obtenons un résultat exact au premier ordre dans la constante de couplage. Aux échelles superhorizon, nous retrouvons le résultat établi classiquement. Dans le cas d'un potentiel quartique $V(\varphi) = \lambda\varphi^4/4!$, la fonction à quatre points connexe se met sous la forme

$$\langle \varphi_{\mathbf{k}_1} \dots \varphi_{\mathbf{k}_4} \rangle_c = \nu_3 \delta^3 \left(\sum_i \mathbf{k}_i \right) [P(k_1)P(k_2)P(k_3) + \text{permutations}] , \quad (5.189)$$

avec

$$\nu_3 = \frac{\lambda}{3H^2} \left[\gamma + \zeta(\{k_i\}) + \ln \left(-\eta \sum_i k_i \right) \right] . \quad (5.190)$$

Nous avons noté ici γ la constante d'Euler et ζ une fonction de l'ordre de l'unité qui dépend peu de la configuration $\{k_i\}$. Le dernier terme s'interprète comme le nombre de e-folds écoulés depuis la traversée de l'horizon du mode $k = \sum_i k_i$. Si ce terme est suffisamment grand, nous retrouvons l'expression (5.158) pour la fonction de vertex.

Ce calcul révèle qu'une description classique des non-gaussianités est valide aux grandes échelles. Néanmoins, seule une approche quantique semble en mesure de rendre compte du comportement des fonctions de corrélation lorsque certains modes sont sub-horizon. L'intérêt principal d'un calcul de précision est d'obtenir le comportement des fonctions de vertex (l'équivalent de $f_{\text{NL}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$) avec les différentes échelles de perturbation, imposant ainsi de fortes contraintes sur les modèles et les méthodes utilisées.

5.9.2 Article

High order correlation functions for a self-interacting scalar field in de Sitter space

Francis Bernardeau and Tristan Brunier

Service de Physique Théorique, CEA/DSM/SPHT, Unité de recherche associée au CNRS, CEA/Saclay 91191 Gif-sur-Yvette Cédex, France

Jean-Philippe Uzan

Laboratoire de Physique Théorique, CNRS-UMR 8627, Bât. 210, Université Paris XI, F-91405 Orsay Cedex, France, and Institut d'Astrophysique de Paris, GRECO, CNRS-FRE 2435, 98 bis, Bd Arago, 75014 Paris, France

(Received 25 November 2003; published 26 March 2004)

We present the expressions of the three- and four-point correlation functions of a self-interacting light scalar field in a de Sitter spacetime at tree order, respectively, for a cubic and a quartic potential. Exact expressions are derived and their limiting behavior on superhorizon scales are presented. Their essential features are shown to be similar to those obtained in a classical approach.

DOI: 10.1103/PhysRevD.69.063520

PACS number(s): 98.80.Cq, 04.62.+v

I. INTRODUCTION

The computation of high order correlation functions of scalar fields in a de Sitter spacetime can be of interest for investigations of the physics of the early Universe. There are indeed a growing number of indications that in its early phase the universe underwent an inflationary period [2] that can be accurately described by a de Sitter phase during which the energy density of the universe is thought to be dominated by the self-energy of a scalar field [1]. Its fluctuations, or the fluctuations of any other light scalar fields, are thought to be the progenitors of the large-scale structure of the Universe [3]. The statistical properties of the induced metric fluctuations then depend on the potential landscape in which the fields evolve. It is unlikely that the fluctuations produced along the inflaton direction can be significantly non-Gaussian as stressed in recent works [4,5]. It is possible however that if there exist other self-interacting light scalar fields during that period primordial non-Gaussian metric fluctuations can be generated [6–9]. The details of the effects induced by such self-interacting fields are based on the statistical properties of the metric fluctuations that quantum generated field fluctuations can induce.

The purpose of this paper is to investigate the foundation of these calculations by calculating the correlation properties of a test scalar field in a de Sitter background. The content of the paper is the following. In the second part we present the basis of such computations. In the third we explore the expression of the leading order term of high order correlators for different self-interacting potentials. In particular we give explicit results for the superhorizon limit that corresponds to modes that can be observed today. Finally we give insights on the physical interpretations of those results.

II. CORRELATION FUNCTION COMPUTATIONS

A. Free field behavior

For the purpose of our calculations we assume that the inflationary phase can be described by a de Sitter background epoch. This description is only approximate since during the inflationary period the Hubble constant slowly varies with time but it is a framework in which all calculations can be

pursued analytically. We have checked that to a large extent the results would not be affected if the background is changed [14].

A de Sitter spacetime [10] in flat spatial section slicing is described by the metric,

$$ds^2 = \frac{1}{(H\eta)^2} (-d\eta^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j) \quad (1)$$

which is conformal to half of the Minkowski spacetime. The conformal time is related to the cosmological time by

$$\eta = -\frac{1}{H} e^{-Ht} \quad (2)$$

and runs from $-\infty$ to 0, the limit $\eta \rightarrow 0^-$ representing the “infinite future.”

For a minimally coupled free quantum field of mass m , the solution can be decomposed in plane waves as

$$\hat{v}_0(\mathbf{x}, \eta) = \int d^3\mathbf{k} [v_0(k, \eta) \hat{b}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + v_0^*(k, \eta) \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}], \quad (3)$$

where we have introduced $\hat{v} \equiv a \hat{\chi}$, a caret referring to a quantum operator. In this Heisenberg picture, the field has become a time-dependent operator expanded in terms of time-independent creation and annihilation operators satisfying the usual commutation relations $[\hat{b}_{\mathbf{k}}, \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\text{Dirac}}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$. We can then define the free vacuum state by the requirement

$$\hat{b}_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0 \quad \text{for all } \mathbf{k}. \quad (4)$$

As it is standard while working in curved spacetime [11], the definition of the vacuum state suffers from some arbitrariness since it depends on the choice of the set of modes $\chi_0(k, \eta)$. They satisfy the evolution equation

$$v_0'' + \left(k^2 - \frac{2}{\eta^2} - \frac{m^2/H^2}{\eta^2} \right) v_0 = 0, \quad (5)$$

the general solution of which is given by $\sqrt{\pi\eta/4}[c_1 H_\nu^{(1)}(k\eta) + c_2 H_\nu^{(2)}(k\eta)]$ with $|c_2|^2 - |c_1|^2 = 1$, where $H_\nu^{(1)}$ and $H_\nu^{(2)}$ are the Hankel functions of first and second kind and with $\nu^2 = 9/4 - m^2/H^2$. Among this family of solutions, it is natural to choose the one enjoying the de Sitter symmetry and the same short distance behavior than in Minkowski spacetime. This leads to

$$v_0(k, \eta) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi\eta} H_\nu^{(2)}(k\eta). \quad (6)$$

This uniquely defines a de Sitter invariant vacuum state referred to as the Bunch-Davies state vacuum [11]. In the massless limit, the solution of Eq. (5) reduces to

$$v_0(k, \eta) = \left(1 - \frac{i}{k\eta}\right) \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}}. \quad (7)$$

This result gives the expression of the equal-time two-point correlator of the Fourier modes,

$$\langle \chi(\mathbf{k}_1) \chi(\mathbf{k}_2) \rangle = \delta_{\text{Dirac}}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) P_2(k_1), \quad (8)$$

$$P_2(k_1) = \frac{H^2 \eta^2}{2k_1} \left(1 + \frac{1}{k_1^2 \eta^2}\right). \quad (9)$$

A remarkable result is that in the superhorizon limit ($k\eta \rightarrow 0$) is that the phase of $v_0(k, \eta)$ freezes and it reads,

$$v_0(k, \eta) = \frac{-i}{\eta} \frac{1}{\sqrt{2k^3}}. \quad (10)$$

Note that the Fourier modes of χ are frozen only in the case of a massless field in a de Sitter background. As a result the field χ behaves like a classic stochastic field with fluctuations whose 2-point correlator is,

$$\langle \chi(\mathbf{k}_1) \chi(\mathbf{k}_2) \rangle = \frac{H^2}{2k_1^3} \delta_{\text{Dirac}}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2). \quad (11)$$

And since χ is a free field, its superhorizon fluctuations follow a Gaussian statistics.

B. Computation of higher-order correlation functions

Having determined the free field solutions, one can then express perturbatively the N -point correlation functions of the interacting field, χ , in terms of those of the free scalar field. The equal time correlators we are interested in are expectation values of product of field operators for the current time vacuum state. Such computations can be performed following general principles of quantum field calculations [4]. The simplest formulation is to apply the evolution operator $U(\eta_0, \eta)$ backward in time to transform the interacting field vacuum into the free field vacuum at an arbitrarily early time η_0 so that

$$\langle v_{\mathbf{k}_1} \dots v_{\mathbf{k}_n} \rangle \equiv \langle 0 | U^{-1}(\eta_0, \eta) v_{\mathbf{k}_1} \dots v_{\mathbf{k}_n} U(\eta_0, \eta) | 0 \rangle, \quad (12)$$

where $|0\rangle$ is here the *free field* vacuum [12,15]. It is implicitly assumed in this expression that the coupling of the field χ is switched on at time η_0 . We will see in the following that the choice of η_0 is not important as long as it is much earlier than any other times intervening in the problem.

The evolution operator U can be written in terms of the interaction Hamiltonian, H_I , as

$$U(\eta_0, \eta) = \exp\left(-i \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta' H_I(\eta')\right). \quad (13)$$

If one is interested only in a single vertex interaction quantity, the evolution operator can be expanded to linear order in H_I ,

$$U(\eta_0, \eta) = I_d - i \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta' H_I(\eta') \quad (14)$$

so that the connected part of the above ensemble average at a time η finally reads

$$\langle v_{\mathbf{k}_1} \dots v_{\mathbf{k}_n} \rangle_c = -i \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta' \langle 0 | [v_{\mathbf{k}_1} \dots v_{\mathbf{k}_n}, H_I(\eta')] | 0 \rangle, \quad (15)$$

where the brackets stand for the commutator. The result is expressed in terms of the Green function

$$G(k, \eta, \eta') = \frac{1}{2k} \left(1 - \frac{i}{k\eta}\right) \left(1 + \frac{i}{k\eta'}\right) \exp[ik(\eta' - \eta)] \quad (16)$$

defined as

$$\langle 0 | v(\mathbf{k}, \eta) v(\mathbf{k}', \eta') | 0 \rangle = \delta_{\text{Dirac}}(\mathbf{k} + \mathbf{k}') G(k, \eta, \eta').$$

Before we proceed to explore explicit cases, let us note that as long as calculations are restricted to tree order, the very same calculation can be done assuming that χ is a classic stochastic field whose stochastic properties are initially those of the quantum free field. Not surprisingly one finds the same formal expressions.

III. EXACT RESULTS

Results can be given in a closed form for simple self-interacting potentials. We give in this section explicit results for cubic and quartic potentials. Because of its renormalization properties, the quartic potential is a natural choice to consider. We will, however, see that the case of a cubic potential can be relevant when finite volume effects are taken into account (see Ref. [13] for more details on finite volume effects).

In the following we thus assume that H_I is of the form

$$H_I(\chi) = \int d^3\mathbf{x} \sqrt{-g} \frac{\lambda}{p!} \chi^p, \quad (17)$$

and we are then interested in the computation of the leading order part of the connected part of the ensemble average of products of p Fourier modes of the fields. In case of a quartic coupling, we have

$$\begin{aligned} \langle v_{\mathbf{k}_1} \dots v_{\mathbf{k}_4} \rangle_c &= -i\lambda \delta_{\text{Dirac}}(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_4) \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\eta' [G(k_1, \eta, \eta') \dots G(k_4, \eta, \eta') \\ &- G^*(k_1, \eta, \eta') \dots G^*(k_4, \eta, \eta')]. \quad (18) \end{aligned}$$

This expression is unfortunately quite cumbersome to compute. It depends, for symmetry reasons, on the norms of the four wave vectors k_1, \dots, k_4 in the following combinations:

$$\pi_1 = \sum_i k_i, \quad (19)$$

$$\pi_2 = \sum_{i < j} k_i k_j, \quad (20)$$

$$\pi_3 = \sum_{i < j < k} k_i k_j k_k, \quad (21)$$

$$\pi_4 = \sum_{i < j < k < l} k_i k_j k_k k_l. \quad (22)$$

The expression (18) can then be rewritten as

$$\begin{aligned} \langle v_{\mathbf{k}_1} \dots v_{\mathbf{k}_4} \rangle_c &= \frac{-\lambda}{24\pi_4^3 \pi_1 \eta^4} \delta_{\text{Dirac}}\left(\sum_i \mathbf{k}_i\right) (\pi_1^4 - 2\pi_1^2 \pi_2 - \pi_1 \pi_3 + 3\pi_4 \\ &+ (-\pi_1^3 \pi_3 + 3\pi_1 \pi_2 \pi_3 - \pi_1^2 \pi_4 - 3\pi_2 \pi_4) \eta^2 \\ &+ 3\pi_4^2 \eta^4 - \pi_1(\pi_1^3 - 3\pi_1 \pi_2 + 3\pi_3)) \\ &\times \{ [(1 - \pi_2 \eta^2 + \pi_4 \eta^4) \cos(\pi_1 \eta) \\ &+ \eta(\pi_1 - \pi_3 \eta^2) \sin(\pi_1 \eta)] \text{ci}(-\pi_1 \eta) \\ &- [\eta(\pi_1 - \pi_3 \eta^2) \cos(\pi_1 \eta) + (-1 + \pi_2 \eta^2 - \pi_4 \eta^4) \\ &\times \sin(\pi_1 \eta)] \text{si}(-\pi_1 \eta) \}, \quad (23) \end{aligned}$$

where the cosine integral (ci) and sine integral (si) functions are defined, for $\eta < 0$, by

$$\int_{-\infty}^{\eta} \frac{d\eta'}{\eta'} \exp[-ik\eta'] \equiv \text{ci}(-k\eta) + i \text{si}(-k\eta). \quad (24)$$

The superhorizon limit (i.e., $k_i \eta \ll 1$ for all $i = 1, \dots, 4$) of Eq. (23) is

$$\begin{aligned} \langle v_{\mathbf{k}_1} \dots v_{\mathbf{k}_4} \rangle_c &= \frac{-\lambda \delta_{\text{Dirac}}\left(\sum_i \mathbf{k}_i\right)}{24\pi_4^3 \pi_1 \eta^4} \{ \pi_1^4 - 2\pi_1^2 \pi_2 - \pi_1 \pi_3 \\ &+ 3\pi_4 - \pi_1(\pi_1^3 - 3\pi_1 \pi_2 + 3\pi_3) [\gamma + \log(-\pi_1 \eta)] \}, \quad (25) \end{aligned}$$

where γ is Euler's constant ($\gamma \approx 0.577$). This implies that the 4-point correlator of the actual fields χ reads

$$\begin{aligned} \langle \chi_{\mathbf{k}_1} \dots \chi_{\mathbf{k}_4} \rangle_c &= -\frac{\lambda H^4}{24} \frac{\delta_{\text{Dirac}}\left(\sum_i \mathbf{k}_i\right)}{\prod_i k_i^3} \left\{ -\sum_i k_i^3 \right. \\ &\times \left. \left(\gamma + \zeta(\{k_i\}) + \log\left[-\eta \sum_i k_i\right] \right) \right\}. \quad (26) \end{aligned}$$

In this expression, terms of the order of $k_i \eta$ have been neglected. This result illustrates the transition to the stochastic limit. The function ζ is an homogeneous function of the Fourier wave numbers

$$\zeta(\{k_i\}) = \frac{-\pi_1^4 + 2\pi_1^2 \pi_2 + \pi_1 \pi_3 - 3\pi_4}{\pi_1(\pi_1^3 - 3\pi_1 \pi_2 + 3\pi_3)}. \quad (27)$$

The dependence of the function ζ on the wavelength ratio is illustrated on Fig. 1. It is found to be relatively weak. We did not fully explore its properties but one can explicitly show for instance that if one of the wave vectors vanishes, ζ is smaller than -2 and reaches its minimum, $-8/3$, for a symmetric configuration of the three remaining wave vectors. From the plot in Fig. 1 it appears that the minimum value of ζ is -3.2 and is reached for a "square" configuration, that is, when the four wavelengths are of equal length. The maximum value, -2 , is reached when two of the wavelengths vanish. The overall variations of ζ with the wave-

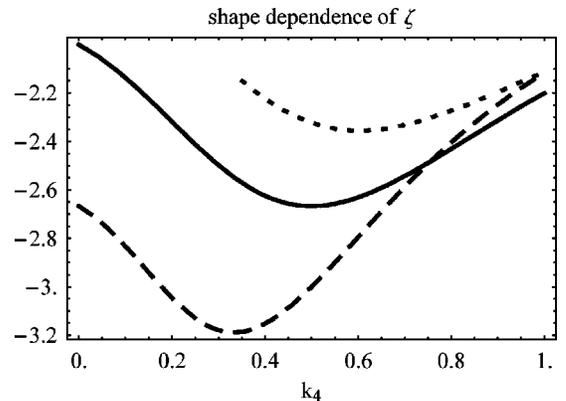


FIG. 1. Dependence of the function ζ as a function of k_4 for fixed values of k_1, k_2 , and k_3 . The solid line corresponds to configuration $k_1 = 0, k_2 = \frac{1}{2}, k_3 = \frac{1}{2}, k_4$; the dashed line to $k_1 = \frac{1}{3}, k_2 = \frac{1}{3}, k_3 = \frac{1}{3}, k_4$; and the dotted line to $k_1 = \frac{1}{6}, k_2 = \frac{1}{3}, k_3 = \frac{1}{6}, k_4$.

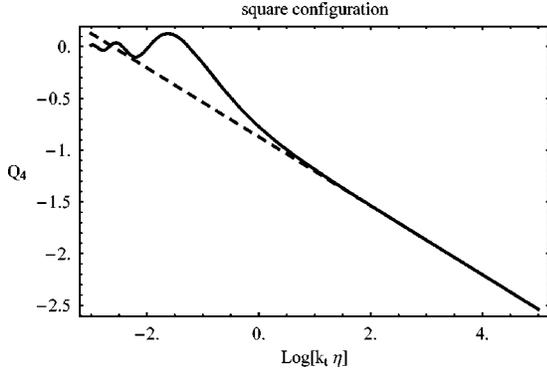


FIG. 2. Behavior of the function Q_4 as of function of time. The transition to the superhorizon behavior (dashed line) is shown. The function Q_4 is shown here for a “square” configuration ($k_1=k_2=k_3=k_4$) as a function of $k_i\eta=\sum k_i\eta$.

length ratios are therefore rather mild. It is then legitimate to describe the four-point correlation function as the sum of products of two-point power spectra, e.g.,

$$\langle \chi_{\mathbf{k}_1} \dots \chi_{\mathbf{k}_4} \rangle_c = \delta_{\text{Dirac}} \left(\sum \mathbf{k}_i \right) P_4(\{k_i\}), \quad (28)$$

$$P_4(\{k_i\}) = \nu_3(\{k_i\}) \sum_i \prod_{j \neq i} \frac{H^2}{2k_j^3}. \quad (29)$$

The vertex value ν_3 is given by

$$\nu_3(\{k_i\}) = \frac{\lambda}{3H^2} \left[\gamma + \zeta(k_i) + \log \left(-\eta \sum k_i \right) \right], \quad (30)$$

which carries a weak geometrical dependence with the wave vectors geometry through ζ .

When the term $\log(-\eta \sum k_i)$ is large (and negative), that is when the number of e -folds, N_e , between the time of horizon crossing for the modes we are interested in and the end of inflation is large, the vertex value is simply given as

$$\nu_3(\{k_i\}) = -\lambda N_e / (3H^2),$$

which corresponds exactly to the value that was obtained in Ref. [8] from the classical evolution of the stochastic field on superhorizon scales (see comments in the last section).

The result obtained above is however more complete since it contains next to leading order terms. It allows us, for instance, to estimate the validity regime of the superhorizon result. It shows in particular that the mode coupling induced on subhorizon scales are negligible as soon as the number of e -folds after horizon crossing exceeds a few units. This is made clear when one considers the reduced four-point correlation function, Q_4 , defined as,

$$Q_4(\{k_i\}) = \frac{P_4(k_1, k_2, k_3, k_4)}{P_2(k_1)P_2(k_2)P_2(k_3) + \text{sym.}}, \quad (31)$$

where P_2 is defined in Eq. (9) and sym. stands for symmetric permutations. The behavior of Q_4 as a function of time and for different configurations of the wave vectors is depicted

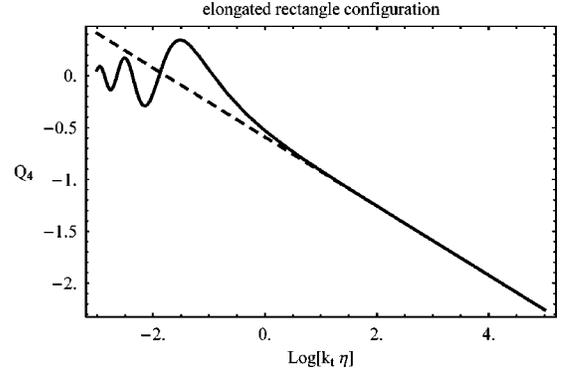


FIG. 3. Same as Fig. 2 for a “rectangular” configuration ($k_1=k_2=4, k_3=4k_4$).

on Figs. 2–4 and one can convince oneself that it converges rapidly toward the superhorizon result as soon as $-\log \sum k_i \eta \sim \mathcal{O}(1)$.

Similar results can be obtained for the 3-point function in the case of a cubic potential, $V(\chi) = \lambda \chi^3 / 3!$. In this case the quantity to compute is

$$\begin{aligned} \langle v_{\mathbf{k}_1} \dots v_{\mathbf{k}_3} \rangle &= -i\lambda \delta_{\text{Dirac}}(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_3) \\ &\times \int^\eta \frac{d\eta'}{H\eta'} [G(k_1, \eta, \eta') \dots G(k_3, \eta, \eta') \\ &- G^*(k_1, \eta, \eta') \dots G^*(k_3, \eta, \eta')], \quad (32) \end{aligned}$$

which gives,

$$\begin{aligned} \langle v_{\mathbf{k}_1} \dots v_{\mathbf{k}_3} \rangle &= \frac{\lambda}{12\pi_3^3 \eta^3 H} \delta_{\text{Dirac}}(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_3) \\ &\times (\pi_1^3 - 2\pi_1\pi_2 - \pi_3 + (-\pi_1^2\pi_3 + 3\pi_2\pi_3)\eta^2 \\ &- (\pi_1^3 - 3\pi_1\pi_2 + 3\pi_3) \\ &\times \{ [(1 - \pi_2\eta^2)\cos(\pi_1\eta) \\ &+ \eta(\pi_1 - \pi_3\eta^2)\sin(\pi_1\eta)] \text{ci}(-\pi_1\eta) \\ &- [\eta(\pi_1 - \pi_3\eta^2)\cos(\pi_1\eta) \\ &+ (-1 + \pi_2\eta^2)\sin(\pi_1\eta)] \text{si}(-\pi_1\eta) \}). \quad (33) \end{aligned}$$

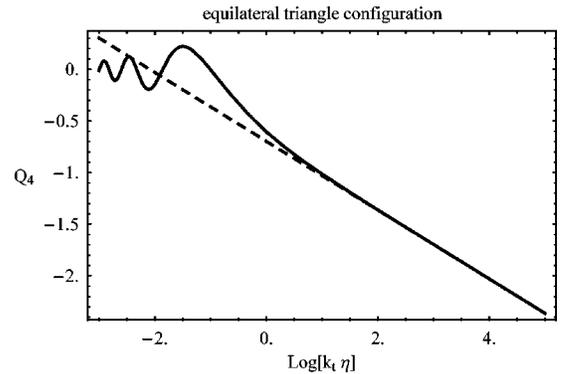


FIG. 4. Same as Fig. 2 for a “triangular” configuration ($k_1=0, k_2=k_3=k_4$).

To a factor 2η , one recovers basically the same expression as for the fourth cumulant (23) when π_4 is set to zero. In the superhorizon limit, the expression of this cumulant reads

$$\begin{aligned} \langle \chi_{\mathbf{k}_1} \cdots \chi_{\mathbf{k}_3} \rangle &= -\frac{\lambda H^2}{12} \frac{\delta_{\text{Dirac}}\left(\sum \mathbf{k}_i\right)}{\prod k_i^3} \\ &\times \left\{ -\sum k_i^3 \left(\gamma + \zeta_3(\{k_i\}) + \log \left[-\eta \sum k_i \right] \right) \right\}, \end{aligned} \quad (34)$$

where ζ_3 is simply given by

$$\zeta_3(\{k_i\}) = \zeta(k_1, k_2, k_3, k_4 \rightarrow 0). \quad (35)$$

To express it in another way we still have

$$\langle \chi_{\mathbf{k}_1} \cdots \chi_{\mathbf{k}_3} \rangle = \delta_{\text{Dirac}}\left(\sum \mathbf{k}_i\right) P_3(\{k_i\}), \quad (36)$$

$$P_3(\{k_i\}) = \nu_3(\{k_i\}) \sum_i \prod_{j \neq i} \frac{H^2}{2k_j^3}, \quad (37)$$

with a vertex value ν_3 to be taken in the appropriate limit, $k_4 \rightarrow 0$. The shape dependence of the vertex, or the time dependence of this cumulant, thus reproduces that of the fourth cumulant, as shown on Figs. 1 (solid line) and 4.

IV. COMMENTS

We have obtained some closed forms for the 3- and 4-point correlation functions of a test scalar field with a self-interacting potential of order, respectively, 3 and 4 in a de Sitter background. It is interesting to note, as it was already in the literature [8], that the superhorizon behavior of the field can be obtained from a simplified Klein-Gordon equation for the field evolution on superhorizon scales

$$\ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} = -\frac{\partial V}{\partial \chi}(\chi) \quad (38)$$

solved perturbatively at first order in λ . In this equation χ has to be understood as the filtered value of χ at a fixed scale that leaves the horizon at a given time t_0 . The previous equation is then valid for $t > t_0$ only where the field can be described by a classical stochastic field. Moreover in writing this equation one also makes the assumption that its right-hand side can be computed from the filtered value of the field (which is not necessarily identical to what would have been obtained from a filtering of the source term). The equation (38) can be solved perturbatively in λ . At zeroth order χ is constant and, at first order, it reads

$$\chi^{(1)} = \chi_0^{(1)} - \frac{\partial V}{\partial \chi}(\chi_0^{(0)}) \frac{t-t_0}{3H}, \quad (39)$$

if $\chi_0^{(1)}$ is the leading order value of the field at horizon crossing. Note that $t-t_0$ can be rewritten as N_e/H where N_e is the number of e -folds since horizon crossing. It implies that if the number of e -folds is large enough the term $\chi_0^{(1)}$ should become negligible. As a consequence the leading order expression of the first nontrivial high order cumulant of the one-point probability distribution function (PDF) of χ takes either the form $3\nu_3\langle\chi^2\rangle^2$ or $4\nu_3\langle\chi^2\rangle^3$ for, respectively, a cubic or a quartic potential. The value of the coefficient ν_3 that enters these expressions is precisely the one obtained in Eq. (30) in the superhorizon limit, that is $\nu_3 = -\lambda N_e/(3H^2)$. And indeed if one had to compute such cumulants from either expression (29) or (37) the integration over the wave vectors would have led to the very same expressions in the superhorizon limit. That shows that the late time behavior of the cumulants we found comes in fact from a simpler dynamical evolution. It actually demonstrates that the computations in the classical approach sketched here can be put on a firm ground. It also allows investigations of more subtle effects, such as the finite volume effects where more than one filtering scale has to be taken into account, that cannot be properly addressed in a classical approach.

Regarding the finite volume effect it is interesting to investigate how the results for the cubic and the quartic potentials could be related together. We refer here to our companion paper [13] where we give a comprehensive presentation of finite volume effects on observable quantities. Suffice is to say that even if one assumes χ has a self-interacting quartic potential, a nonzero third order correlator might be observable. The reason is that one cannot have access to genuine ensemble averages but to constrained ensemble averages such as $\langle \chi_{\mathbf{k}_1} \cdots \chi_{\mathbf{k}_3} \rangle_{\bar{\chi}}$, which is the expectation value of $\chi_{\mathbf{k}_1} \cdots \chi_{\mathbf{k}_3}$ for a given value of $\bar{\chi}$, average value of χ over the largest scale available in the survey in which the correlators are computed.

To leading order in $\bar{\chi}$ with respect to its variance, $\sigma_{\bar{\chi}}$, this constrained average value reads

$$\langle \chi_{\mathbf{k}_1} \cdots \chi_{\mathbf{k}_3} \rangle_{\bar{\chi}} = \langle \chi_{\nu k_1} \cdots \chi_{\mathbf{k}_3} \bar{\chi} \rangle \frac{\bar{\chi}}{\sigma_{\bar{\chi}}^2}. \quad (40)$$

If, for $i=1, \dots, 3$, the wavelengths $1/k_i$ are much smaller than the survey size than the expression of $\langle \chi_{\mathbf{k}_1} \cdots \chi_{\mathbf{k}_3} \bar{\chi} \rangle_c \bar{\chi} / \sigma_{\bar{\chi}}^2$ is that of $\langle \chi_{\mathbf{k}_1} \cdots \chi_{\mathbf{k}_3} \rangle$ when the self-interacting field χ evolves in the potential $\lambda \bar{\chi} \chi^3/3!$, which is the cubic term in χ in the expansion of $\lambda(\chi + \bar{\chi})^4/4!$. This shows that the two cases described in this paper are consistent with one another and that the functional relation between the two had to be expected.

To conclude we have established in this paper a number of generic results that put the tree-order computation of higher order correlations in a de Sitter background on a secure ground. We leave for further studies the examination of more realistic cases in which the background expansion is more complex.

- [1] A. Guth Phys. Rev. D **23**, 347 (1981).
- [2] D.N. Spergel, Astrophys. J., Suppl. **148**, 175 (2003); H.V. Peiris *et al.*, *ibid.* **148**, 213 (2003).
- [3] S. Mukhanov and G.V. Chibisov, Pis'ma Zh. Éksp. Teor. Fiz. **33**, 549 (1981) [JETP Lett. **33**, 532 (1981)]; S.W. Hawking, Phys. Lett. **115B**, 295 (1982); V.F. Mukhanov, H.A. Feldman, and R.H. Brandenberger, Phys. Rep. **215**, 203 (1992); A.D. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology* (Harwood, Chur, Switzerland, 1990); A.R. Liddle and D.H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [4] J. Maldacena, J. High Energy Phys. **0305**, 013 (2003).
- [5] P. Creminelli, J. Cosmol. Astropart. Phys. **10**, 003 (2003).
- [6] N. Bartolo, S. Matarrese, and A. Riotto, Phys. Rev. D **64**, 083514 (2001).
- [7] N. Bartolo, S. Matarrese, and A. Riotto, Phys. Rev. D **65**, 103505 (2002).
- [8] F. Bernardeau and J.-P. Uzan, Phys. Rev. D **66**, 103506 (2002).
- [9] F. Bernardeau and J.-P. Uzan, Phys. Rev. D **67**, 121301(R) (2003).
- [10] S. Hawking and G.F.R. Ellis, *Large Scales Structure of Space-time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).
- [11] N.D. Birrel and P.C.W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).
- [12] N.C. Tsamis and R.D. Woodard, Class. Quantum Grav. **11**, 2969 (1994).
- [13] F. Bernardeau and J.-P. Uzan, astro-ph/0311421.
- [14] Calculations in other backgrounds are difficult in general but we have checked that in case of a power law inflation, $a(t) \propto t^\nu$, we recover the same behaviors in the superhorizon limit if ν is large enough.
- [15] It is to be noted that these calculations do not correspond to those of diffusion amplitudes of some interaction processes in a de Sitter space. When one tries to do these latter calculations with a path integral formulations, mathematical divergences are encountered as it has been stressed in Refs. [8,12]. With that respect de Sitter space differs from Minkowski space-time. Our current point of view on this difficulty is that diffusion amplitudes cannot be properly defined in de Sitter space and that only field correlators as defined here correspond to actual observable quantities that can be safely computed.

5.10 Corrections radiatives à la masse des champs scalaires (article)

5.10.1 Motivations et résultats

Afin de vérifier la cohérence du mécanisme proposé permettant la génération de non-gaussianités, nous allons déterminer les effets des fluctuations quantiques sur la masse des champs scalaires. À l'ordre des arbres, les champs légers sont aisément identifiables : ce sont ceux dont la masse, apparaissant dans le lagrangien, est inférieure au paramètre de Hubble. Ces champs développent alors des fluctuations superhorizon. Supposons que ces champs interagissent entre eux. Les divergences générées par les processus quantiques sont alors absorbées dans les paramètres du lagrangien. Les paramètres effectifs, ceux qui apparaissent dans les équations du mouvement, prennent en compte les interactions. Les champs ne développeront des fluctuations super-Hubble que si leur masse effective reste faible.

Ici encore, le champ de l'inflaton se singularise. Considérons un champ scalaire soumis à un potentiel d'auto-interaction quartique

$$V(\varphi) = \lambda\phi^4. \quad (5.191)$$

À l'ordre d'une boucle, la correction à la masse est naturellement de l'ordre de

$$\Delta m^2 = \lambda\Lambda^2, \quad (5.192)$$

où Λ est une fréquence de coupure ultraviolette. Supposons que cette dernière atteigne une valeur proche de l'échelle de Planck. Dans le cas de l'inflaton, dont la valeur moyenne est aussi de l'ordre de la masse de Planck,

$$\Delta m_{\text{infl}}^2 \sim \lambda M_{\text{Pl}}^2 \sim \lambda \frac{\varphi^4}{M_{\text{Pl}}^2} \sim H^2. \quad (5.193)$$

La masse de l'inflaton est ici protégée par la petitesse de la constante de couplage $\lambda \sim 10^{-10}$. Au contraire, la masse des autres champs scalaires peut atteindre de très grandes valeurs puisque la constante de couplage λ est naturellement de l'ordre de l'unité et $\Delta m^2 \sim M_{\text{Pl}}^2$.

Afin de ne pas ajuster trop finement les paramètres du lagrangien, nous ne renormalisons pas la masse des champs. Nous préférons utiliser un modèle "jouet" de Wess-Zumino, incluant fermions et bosons, tel que le potentiel s'écrive

$$V = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \bar{\psi}(\varphi_1 + i\varphi_2)\psi + \lambda^2 |\varphi|^4, \quad (5.194)$$

où $\varphi = (\varphi_1 + i\varphi_2)/\sqrt{2}$ est un champ scalaire complexe et ψ est un spineur de Dirac à quatre composantes. En espace plat, nous savons que les corrections à la

5.10. Corrections radiatives à la masse des champs scalaires (article) 277

masse des bosons se compensent. Dans un espace en expansion, seules les divergences principales se compensent tandis qu'apparaissent des divergences résiduelles sous-dominantes. Nous obtenons ainsi les corrections à la masse des champs scalaires dues aux boucles bosoniques δm_B et fermioniques δm_F

$$\begin{aligned}\delta m_B^2 &= \frac{\lambda^2}{2\pi^2 a^2} \left[\Lambda^2 + 2a^2 H^2 \ln \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_{\text{IR}}} \right) \right], \\ \delta m_F^2 &= -\frac{\lambda^2}{2\pi^2 a^2} \left[\Lambda^2 - a^2 H^2 \ln \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right) \right],\end{aligned}\quad (5.195)$$

où μ est une échelle d'énergie caractéristique. Ici Λ est une fréquence de coupure ultraviolette comobile - et non physique - dans l'espace tridimensionnel de Fourier tandis que Λ_{IR} est son équivalent dans l'infrarouge. Contrairement à la formule de Coleman-Weinberg, les masses générées par les boucles ne se compensent pas, bien que les divergences principales disparaissent. Nous pouvons dès lors nous interroger sur la validité de l'expression (5.174) dans les modèles d'inflation supersymétriques. Les corrections induites par la courbure pourraient modifier les prédictions concernant la durée de l'inflation dans de tels modèles.

Notons, d'autre part, que l'écart entre les masses δm_B et δm_F n'est pas toujours caractéristique d'une brisure de supersymétrie. La brisure de supersymétrie est définie par le fait que les termes F ou D prennent une valeur non-nulle. Dans un espace-temps courbe - anti-de Sitter par exemple - les masses peuvent différer sans que la supersymétrie soit brisée pour autant [de Wit, 2001].

Nous pouvons également comparer notre résultat à celui obtenu dans un espace de de Sitter. Nous avons vu que la masse effective à une boucle d'un champ test en de Sitter prend la forme, en régularisation dimensionnelle (voir page 196)

$$m_{\text{eff}}^2 \sim \lambda^2 H^2 \ln \left(\frac{a}{a_0} \right). \quad (5.196)$$

En comparant cette dépendance à l'expression obtenue pour δm_B , nous voyons que la fréquence de coupure Λ à imposer semble posséder une dépendance temporelle de la forme $\Lambda = a(t)\Lambda_{\text{phys}}$ où Λ_{phys} est une fréquence de coupure physique constante. La fréquence de coupure infrarouge, quant à elle, peut s'interpréter comme le rayon causal au début de la phase inflationnaire $\Lambda_{\text{IR}} = a_0 H$. Dans ces conditions, la divergence quadratique peut être absorbée par renormalisation tandis que la dépendance résiduelle varie comme

$$\delta m_B \propto \lambda^2 H^2 \ln \left(\frac{a}{a_0} \right). \quad (5.197)$$

Enfin, notons que, quelle que soit l'approche utilisée, la masse effective des champs scalaires est en $\lambda^2 \ln(a)$, qui reste faible tant que la constante de couplage λ est suffisamment faible, $\lambda \leq 10^{-2}$. Nous pouvons en conclure que, tant que le produit de la constante de couplage par le nombre de e-folds reste petit devant

l'unité, les champs scalaires en de Sitter restent légers et développent des fluctuations super-Hubble. Le mécanisme de génération de non-gaussianités par transfert de fluctuations ne semble donc pas être remis en question par les corrections radiatives.

5.10.2 Article

Radiative corrections to scalar masses in de Sitter space

Tristan Brunier and Francis Bernardeau*

*Service de Physique Théorique, CEA/DSM/SPhT,
Unité de recherche associée au CNRS, CEA/Saclay 91191 Gif-sur-Yvette cedex*

Jean-Philippe Uzan†

*Laboratoire de Physique Théorique, CNRS-UMR 8627,
Bât. 210, Université Paris XI, F-91405 Orsay Cedex, France,
Institut d'Astrophysique de Paris, GReCO, CNRS-FRE 2435, 98 bis, Bd Arago, 75014 Paris, France.*

We compute the radiative corrections to the mass of a test boson field in an inflating spacetime. The calculations are carried out in case of a boson part of a supersymmetric chiral multiplet. We show that its mass is preserved up to logarithmic divergences both in ultraviolet and infrared domains. Consequences of these results for inflationary models are discussed.

I. MOTIVATION

Quantum field theory in an inflating universe is thought to be the playground of the physical processes that took place during the early Universe [1]. However little has yet been explicitly computed for self interacting fields [2]. Any light bosonic fields with non minimal coupling that exist during an inflationary phase is bound to produce, together with the inflaton field, superhorizon fluctuations that eventually might be visible in mechanisms such as isocurvature modes generation from multi-field inflation [3–6], curvaton models [7, 8], bent trajectory inflationary models [9, 10] or modulated fluctuations [11]. If such fields are self interacting, for instance with a quartic potential, such fluctuations might develop significant non-Gaussian features that in turn could be detected (see ref.[12] for a review). This would be only possible however if the radiative corrections do not render the particle too massive, e.g. with a mass larger than the Hubble constant H , to develop any fluctuations at all. One question then raised by phenomenological investigations of this physics is whether the mass of a self interacting bosonic field can be protected against radiative corrections.

Of course one expects such a theory to be renormalizable but it implies that the fundamental bare theory has to be fine-tuned. The radiative correction to the mass of a self interacting boson should indeed be naively of the order of $\delta m^2 \sim \lambda M_{\text{Pl}}^2$ (λ being the coupling constant). This question has been investigated in [22] in the case of the inflaton field. In this case λ is generically small since, for the inflaton field λM_{Pl}^2 has to be of the order of H^2 . In the case we are interested in, however, we have no such constraints on λ which can then be close to unity. For such values of the coupling constant the scalar field becomes too heavy to develop significant fluctuations unless the cancellation is precise over ten orders of magnitude - since $H^2/M_{\text{Pl}}^2 \sim 10^{-10}$ during inflation.

On the other hand light scalar fields are expected to be associated with fermions as parts of super-multiplets in supersymmetric theories - such as in D or F -term inflation models [13, 14]. From the Minkowskian behavior, one expects the largest divergences coming from the fermionic and bosonic loops to cancel out. The aim of this paper is precisely to compute the radiative corrections to a test boson mass embedded in a chiral multiplet when it lives in an inflating universe. The test model will be the Wess-Zumino Lagrangian in an expanding universe, not necessarily assumed to be de Sitter. The background evolution of the Universe is assumed to be driven by an other sector of the theory.

We set up the formalism in section II. In section III we compute the two-point function to get the one loop effective masses of the fields in any spatially flat Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) spacetime. The ultraviolet and infrared behaviors are discussed in section IV. We show in particular that the infrared divergences can be apprehended in a classical approach. In the ultraviolet domain, the correction to the mass is found to be logarithmically divergent and proportional to the spacetime curvature and the coupling constant. It shows that masses of light scalar fields do not get a large contribution compared to the Hubble scale. Our results are put into perspective in the conclusion.

*Electronic address: brunier@spht.saclay.cea.fr; Electronic address: fbernard@spht.saclay.cea.fr

†Electronic address: uzan@th.u-psud.fr

II. GENERAL SETUP

A. A toy model

We aim at studying radiative mass corrections in a generic Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker background with flat spatial sections where the background is assumed to be driven by another sector of the theory. We will focus on the following Lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\varphi^*\nabla_{\mu\nu}\varphi + \frac{1}{2}\bar{\psi}[i\gamma^\alpha V_\alpha{}^\mu(x)\nabla_\mu - m]\psi - \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\bar{\psi}(\phi_1 - i\gamma^5\phi_2)\psi - m|\varphi|^2 - m\lambda|\varphi|^2(\varphi + \varphi^*) - \lambda^2|\varphi|^4 \quad (1)$$

where $\varphi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$ is a complex scalar field, ψ is a four-dimensional Majorana spinor and the γ^α are the flat Dirac matrices. We also defined

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0, \quad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \quad (2)$$

The kinetic term for fermions involves the Vierbein which are defined as

$$V^\alpha{}_\mu(x) = \left(\frac{\partial\zeta_X^\alpha(x)}{\partial x^\mu} \right)_{X=x} \quad (3)$$

where the coordinates $\zeta^\alpha(x)$ correspond to a locally inertial frame while x^μ are the non-inertial coordinates. One can check that the Vierbein behave like vectors under Lorenz transformation (index α) and under coordinate transformation (index μ). The metric $g_{\mu\nu}$ is related to the Minkowkian one $\eta_{\alpha\beta}$ through

$$g_{\mu\nu}(x) = V^\alpha{}_\mu(x)V^\beta{}_\nu(x)\eta_{\alpha\beta}. \quad (4)$$

To obtain an action which is invariant under Lorentz group and coordinates change, the derivatives of a spinor have to be modified in the following way

$$\nabla_\alpha = V_\alpha{}^\mu(x)\nabla_\mu = V_\alpha{}^\mu(x)(\partial_\mu + \Gamma_\mu) \quad (5)$$

where the spin connexion is defined by

$$\Gamma_\mu(x) = \frac{1}{2}\sigma^{\alpha\beta}V_\alpha{}^\nu(x)\partial_\mu V_{\beta\nu}(x), \quad (6)$$

$\sigma^{\alpha\beta}$ being the spinorial representation of the Lorentz group generators given in terms of the Dirac matrices

$$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{i}{4}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta]. \quad (7)$$

Since we will focus on spatially flat FLRW spacetimes, the metric should be written in conformal time such as $g_{\mu\nu} = a^2(\eta)\eta_{\mu\nu}$. The Vierbein are simply expressed as $V^\alpha{}_\mu(x) = a\delta^\alpha{}_\mu$ and defining the conformal fields as

$$\tilde{\varphi} = a\varphi \quad (8)$$

$$\tilde{\psi} = a^{3/2}\psi \quad (9)$$

the Lagrangian takes the form

$$\mathcal{L} = \frac{1}{a^4} \left[\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\tilde{\varphi}^*\partial_{\mu\nu}\tilde{\varphi} + \frac{1}{2}\bar{\tilde{\psi}}(i\gamma^\alpha\partial_\alpha - ma)\tilde{\psi} + \frac{a''}{a}\tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi} - \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\bar{\tilde{\psi}}(\tilde{\phi}_1 - i\gamma^5\tilde{\phi}_2)\tilde{\psi} - m^2a^2|\tilde{\varphi}|^2 - \lambda^2|\tilde{\varphi}|^4 - m\lambda a|\tilde{\varphi}|^2(\tilde{\varphi} + \tilde{\varphi}^*) \right]. \quad (10)$$

Recalling that the scalar curvature is given by $R = 6a''/a^3$, the bosons formally acquire an effective time-dependent mass square proportional to the curvature

$$m_{\text{eff}}^2 = -\frac{1}{6}R \quad (11)$$

while the fermions stay massless. As we shall see in the following, quantum corrections to the mass in the context of a cut-off regularisation lead to logarithmic divergences that are proportional to the curvature, as we should expect from (11).

One can note that this Lagrangian is deduced from a Wess-Zumino model with the superpotential

$$W(\Phi) = \frac{1}{2}m^2\Phi + \frac{1}{3}\lambda\Phi^3. \quad (12)$$

However, this is only a Wess-Zumino inspired toy model. Supersymmetric models in curved spacetime should be carefully dealt with since the parameter of a supersymmetric transformation should be space and time dependent [15, 16]. The background structure may forbid any coherent global supersymmetric approach.

B. Quantizations of the fields

As we are interested in quantum corrections to masses, we shall quantize the fields in a curved background. The bosonic fields in any potential $U(\phi)$ obey the Klein-Gordon equation which reads

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) = \frac{dU(\phi)}{d\phi}. \quad (13)$$

Setting $\chi = a\phi$ and $V(\chi) = U(\chi/a)$, one gets the equation of motion written in a spatially flat FLRW metric

$$\chi'' - \Delta\chi = -a^4\frac{dV}{d\chi} + \frac{1}{6}Ra^2\chi \quad (14)$$

where R is the scalar curvature, a is the scale factor and a prime stands for a derivative with respect to the conformal time. The friction term in (13) coming from the kinetic term has been absorbed in an effective mass term in (14). Since flat spatial sections are considered, the free real scalar fields may be expanded on a plane wave basis

$$\phi(\vec{x}, \eta) = \frac{1}{a(\eta)} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \left[u_k(\eta)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} a_{\vec{k}} + u_k^*(\eta)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} a_{\vec{k}}^\dagger \right] \quad (15)$$

$$= \frac{1}{a(\eta)} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \phi_{\vec{k}}(\eta)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (16)$$

where the operators $a_{\vec{k}}$ and $a_{\vec{k}}^\dagger$ are respectively the annihilation and creation operators and satisfy the equal time commutations

$$\left[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^\dagger \right] = \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \quad [a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}] = 0, \quad [a_{\vec{k}}^\dagger, a_{\vec{k}'}^\dagger] = 0. \quad (17)$$

The canonical quantization imposes a condition on the Wronskian normalisation

$$u_k(\eta)u_k^{*\prime}(\eta) - u_k^*(\eta)u_k'(\eta) = i. \quad (18)$$

In the following, we will define the Wightman function to be

$$G_k(\eta, \eta') = u_k(\eta)u_k^*(\eta'), \quad (19)$$

its expression in a given background depending on the choice of the vacuum.

In a FLRW background with flat spatial sections, the Dirac equation reads

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\left(a^{3/2}\psi\right) - ma\left(a^{3/2}\psi\right) = -\frac{dU}{d\psi}. \quad (20)$$

In the massless case, a free spinor in a spatially flat FLRW spacetime is just conformal to a Minkowski spinor. In the following, for the sake of simplicity we shall only consider massless fermions. Moreover, we will consider Majorana spinors satisfying the conjugation relation

$$\psi = C(\bar{\psi})^T \quad (21)$$

where C is the charge conjugation matrix that satisfies the property $C^{-1} = -C = C^T$. Consequently the decomposition of a massless Majorana spinor on a plane wave basis is trivially related to the Minkowskian decomposition and reads

$$\psi(\vec{x}, \eta) = \frac{1}{a^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k}} \sum_{j=1}^2 \left[u^{(j)}(k)e^{-ik\eta}e^{+i\vec{k}\cdot\vec{x}} b_{\vec{k}}^j + v^{(j)}(k)e^{+ik\eta}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} b_{\vec{k}}^{j\dagger} \right] \quad (22)$$

where k stands for $\|\vec{k}\|$ and $u^{(j)}(k)$ and $v^{(j)}(k)$ are four-component spinors related by $u^{(j)} = C(\bar{v}^{(j)})^T$. The fermionic operators commute with the bosonic ones and satisfy the anticommutation relations

$$\left\{ b_{\vec{k}}^j, b_{\vec{k}'}^{j'\dagger} \right\} = \delta_{jj'}\delta(\vec{k} - \vec{k}'), \quad \left\{ b_{\vec{k}}^j, b_{\vec{k}'}^{j'} \right\} = 0, \quad \left\{ b_{\vec{k}}^{j\dagger}, b_{\vec{k}'}^{j'\dagger} \right\} = 0. \quad (23)$$

The free vacuum is defined by the conditions

$$a_{\vec{k}}|0\rangle = 0 \quad b_{\vec{k}}^j|0\rangle = 0 \quad \forall j, \vec{k}. \quad (24)$$

As in Minkowski, the mode functions satisfy the completeness relation

$$\sum_{j=1}^2 u_{\alpha}^{(j)}(k) \bar{u}_{\beta}^{(j)}(k) = k^{\mu} (\gamma_{\mu})_{\alpha\beta} = \sum_{j=1}^2 \bar{v}_{\alpha}^{(j)}(k) v_{\beta}^{(j)}(k). \quad (25)$$

Using the relations (21) and (25), one also finds

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha, \beta=0}^4 \langle 0 | \bar{\psi}_{\alpha}(x') \bar{\psi}_{\beta}(x'') | 0 \rangle \langle 0 | \psi_{\alpha}(x') \psi_{\beta}(x'') | 0 \rangle &= - \sum_{\alpha, \beta=0}^4 \langle 0 | \bar{\psi}_{\alpha}(x') \psi_{\beta}(x'') | 0 \rangle \langle 0 | \psi_{\alpha}(x') \bar{\psi}_{\beta}(x'') | 0 \rangle \\ &= - \frac{1}{a^3(\eta') a^3(\eta'')} \int \frac{d^3 \vec{p}_1 d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^6} \Delta_{p_1, p_2}(\eta', \eta'') e^{i(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \cdot (\vec{x}' - \vec{x}'')} \end{aligned} \quad (26)$$

with

$$\Delta_{p_1, p_2}(\eta', \eta'') = \frac{\eta^{\mu\nu} p_{1\mu} p_{2\nu}}{4p_1 p_2} e^{-i(p_1 + p_2)(\eta' - \eta'')} \quad (27)$$

where we set $p_i = \|\vec{p}_i\|$.

We are now ready to calculate radiative mass corrections. In the next section, we set up the formalism we shall use to study one loop mass correction in Yukawa potentials and compare our results to the effect of a small mass.

III. MASS CORRECTION

A. Quantum level formalism

In order to study radiative mass corrections in a generic spatially flat FLRW background, we are interested in the calculation of the two-point function

$$\eta_1 \langle 0 | \phi_{\vec{k}_1}(\eta_1) U(\eta_1, \eta_2) \phi_{\vec{k}_2}(\eta_2) | 0 \rangle_{\eta_2} \quad (28)$$

where ϕ is a scalar field, $|0\rangle_{\eta_i}$ is the vacuum state at the time η_i and $U(\eta_1, \eta_2)$ is an evolution operator that makes a state evolve from the conformal time η_2 to the conformal time η_1 .

In a free field theory, this expression may be easily computed. For example in an Heisenberg picture, the vacuum state does not evolve and the form of the field depends only on the background and on the choice of the vacuum state. However this expression must be modified in an interacting field theory and the corrections can only be evaluated order by order in the coupling constants in a perturbation theory approach.

In an interaction picture, the states evolve under the action of the interactions while the fields evolve as if they were free. In this representation, the vacuum state evolves as

$$|0\rangle_{\eta} = U(\eta, \eta_0) |0\rangle \quad (29)$$

where $|0\rangle$ is a free vacuum at some time η_0 , assumed far in the past. The two-point function becomes

$$\eta_1 \langle 0 | \phi_{\vec{k}_1}(\eta_1) U(\eta_1, \eta_2) \phi_{\vec{k}_2}(\eta_2) | 0 \rangle_{\eta_2} = \langle 0 | U(\eta_1, \eta_0)^{-1} \phi_{\vec{k}_1}(\eta_1) U(\eta_1, \eta_2) \phi_{\vec{k}_2}(\eta_2) U(\eta_2, \eta_0) | 0 \rangle \quad (30)$$

where the operator $U(\eta_1, \eta_0)^{-1}$ is just the inverse of the evolution operator $U(\eta_1, \eta_0)$, that is to say $U(\eta_0, \eta_1)$.

One can find an explicit representation of the operator $U(\eta_1, \eta_2)$ which reads in the interaction picture

$$U(\eta_1, \eta_2) = T \left[e^{-i \int_{\eta_2}^{\eta_1} d\eta' H_I(\eta')} \right] \quad (31)$$

where $H_I(\eta)$ is the interaction hamiltonian and η_1 is a conformal time greater than η_2 .

One has to be careful with time ordering since, for $\eta_1 < \eta_2$,

$$U(\eta_2, \eta_1) = A \left[e^{+i \int_{\eta_2}^{\eta_1} d\eta' H_I(\eta')} \right] \quad (32)$$

where A stands for the anti-time ordering operator.

B. Effect of a small mass

Let us study the correction to the massless scalar mode function from a potential of the form

$$U(\phi) = \frac{\delta m^2}{2} \phi^2 \quad (33)$$

where δm^2 is assumed to be a small parameter.

As a first approximation, we can decompose the scalar field on a plane wave basis, taking into account the loop correction. The field then reads

$$\chi(\vec{x}, \eta) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \left[v_k(\eta) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} a_{\vec{k}} + v_k^*(\eta) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} a_{\vec{k}}^\dagger \right] \quad (34)$$

where we defined

$$v_k(\eta) = u_k^{(0)}(\eta) + u_k^{(1)}(\eta) + \mathcal{O}(\delta m^4). \quad (35)$$

The mode function $u_k^{(0)}$ is the free mode function whereas $u_k^{(1)}$ is the first order correction in δm^2 .

Expanding the mode function in power of the small parameter δm^2 in the equation of motion, one gets the system

$$u_k''^{(0)} + \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) u_k^{(0)} = 0 \quad (36)$$

$$u_k''^{(1)} + \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) u_k^{(1)} = -\delta m^2 a^2 u_k^{(0)} \quad (37)$$

that could be solved using the retarded Green function

$$G^R(\eta, \eta') = -i \Theta(\eta - \eta') \left[u_k^{(0)}(\eta) u_k^{(0)*}(\eta') - u_k^{(0)*}(\eta) u_k^{(0)}(\eta') \right] \quad (38)$$

where Θ is the Heaviside function. In the last expression, we used the normalisation (18). To first order in δm^2 , the correction to the mode function reads

$$u_k^{(1)}(\eta) = - \int d\eta' \delta m^2 a^2(\eta') u_k^{(0)}(\eta') G^R(\eta, \eta'). \quad (39)$$

Expanding the Wightman function as

$$G_k(\eta_1, \eta_2) = u_k^{(0)}(\eta_1) u_k^{(0)*}(\eta_2) + u_k^{(1)}(\eta_1) u_k^{(0)*}(\eta_2) + u_k^{(0)}(\eta_1) u_k^{(1)*}(\eta_2) + \mathcal{O}(\delta m^4) \quad (40)$$

and inserting (39) into (40), one then obtains

$$\begin{aligned} G_k(\eta_1, \eta_2) = & G_k^{(0)}(\eta_1, \eta_2) + 2 \int_{-\infty}^{\eta_2} d\eta' \delta m^2 a^2(\eta') \text{Im} \left[G_k^{(0)}(\eta_1, \eta') G_k^{(0)}(\eta_2, \eta') \right] \\ & + 2 \int_{\eta_2}^{\eta_1} d\eta' \delta m^2 a^2(\eta') G_k^{(0)*}(\eta_2, \eta') \text{Im} \left[G_k^{(0)}(\eta_1, \eta') \right]. \end{aligned} \quad (41)$$

This correction to the free propagator should be compared to the divergences which may be induced by other potentials such as Yukawa couplings of the Wess-Zumino model.

C. Radiative mass correction from a bosonic loop

Let us now compute the one loop scalar self-mass induced by a quartic potential

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} \phi^4 \quad (42)$$

with the related interaction Hamiltonian

$$H_I(\eta) = \int d^3 \vec{x} \sqrt{-g} \frac{\lambda}{4} \phi^4(x) = \int d^3 \vec{x} \frac{\lambda}{4} \chi^4(x). \quad (43)$$

Expanding the evolution operator to first order in λ , we get from eq. (30)

$$\begin{aligned} {}_{\eta_1}\langle 0|\chi_{\vec{k}_1}(\eta_1)\chi_{\vec{k}_2}(\eta_2)|0\rangle_{\eta_2} &= -i \int_{\eta_0}^{\eta_2} d\eta' \langle 0|\left[\chi_{\vec{k}_1}(\eta_1)\chi_{\vec{k}_2}(\eta_2), H_I(\eta')\right]|0\rangle \\ &\quad - i \int_{\eta_2}^{\eta_1} d\eta' \langle 0|\left[\chi_{\vec{k}_1}(\eta_1), H_I(\eta')\right]\chi_{\vec{k}_2}(\eta_2)|0\rangle. \end{aligned} \quad (44)$$

Using the Wick theorem, this expression transforms into

$$\begin{aligned} &{}_{\eta_1}\langle 0|\chi_{\vec{k}_1}(\eta_1)\chi_{\vec{k}_2}(\eta_2)|0\rangle_{\eta_2} \\ &= 6\lambda \int_{\eta_0}^{\eta_2} d\eta' \int d^3\vec{x}' \text{Im} \left[\langle 0|\chi_{\vec{k}_1}(\eta_1)\chi(x')|0\rangle \langle 0|\chi_{\vec{k}_2}(\eta_2)\chi(x')|0\rangle \langle 0|\chi(x')\chi(x')|0\rangle \right] \\ &\quad + 6\lambda \int_{\eta_2}^{\eta_1} d\eta' \int d^3\vec{x}' \text{Im} \left[\langle 0|\chi_{\vec{k}_1}(\eta_1)\chi(x')|0\rangle \right] \langle 0|\chi(x')\chi_{\vec{k}_2}(\eta_2)|0\rangle \langle 0|\chi(x')\chi(x')|0\rangle. \end{aligned} \quad (45)$$

Finally, using the definition (19) one finds the contribution from the bosonic loop

$$\begin{aligned} {}_{\eta_1}\langle 0|\chi_{\vec{k}_1}(\eta_1)\chi_{\vec{k}_2}(\eta_2)|0\rangle_{\eta_2} &= 6\lambda\delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \int_{\eta_0}^{\eta_2} d\eta' \text{Im} [G_{k_1}(\eta_1, \eta')G_{k_1}(\eta_2, \eta')] \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} G_p(\eta', \eta') \\ &\quad + 6\lambda\delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \int_{\eta_2}^{\eta_1} d\eta' \text{Im} [G_{k_1}(\eta_1, \eta')] G_{k_1}^*(\eta_2, \eta') \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} G_p(\eta', \eta'). \end{aligned} \quad (46)$$

Comparing eqs.(41) and (46), one finds a mass contribution from the quartic interaction at one loop order

$$\delta m_B^2 = \frac{3\lambda}{a^2(\eta')} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} G_p(\eta', \eta') \quad (47)$$

This result holds in any spatially flat FLRW spacetime.

D. Scalar self-mass from the fermionic loops

We now pay attention to the contribution from fermionic loops through a Yukawa coupling of the form

$$V(\phi, \psi) = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \bar{\psi} \phi \psi \quad (48)$$

where ψ is a four component Majorana spinor. The interaction Hamiltonian is given by

$$H_I(\eta) = \int d^3\vec{x} \sqrt{-g} \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \phi(x) \bar{\psi}(x) \psi(x). \quad (49)$$

The two-point function (30) involves three different evolution operators namely $U(\eta_2, \eta_0)$, $U^{-1}(\eta_1, \eta_0)$ and $U(\eta_1, \eta_2)$. The first non vanishing contribution - after the tree level - comes from the expansion of those operators to second order in the coupling constant. Expanding the first two as

$$U(\eta_2, \eta_0) = 1 - i \int_{\eta_0}^{\eta_2} d\eta' H_I(\eta') - \int_{\eta_0}^{\eta_2} d\eta' \int_{\eta_0}^{\eta'} d\eta'' H_I(\eta') H_I(\eta'') + \mathcal{O}(\lambda^3) \quad (50)$$

$$U^{-1}(\eta_1, \eta_0) = 1 + i \int_{\eta_0}^{\eta_1} d\eta' H_I(\eta') - \int_{\eta_0}^{\eta_1} d\eta' \int_{\eta_0}^{\eta'} d\eta'' H_I(\eta'') H_I(\eta') + \mathcal{O}(\lambda^3) \quad (51)$$

leads to three different terms in the two-point function (30)

$$- \int_{\eta_0}^{\eta_2} d\eta' \int_{\eta_0}^{\eta'} d\eta'' \langle 0|\phi_{\vec{k}_1}(\eta_1)\phi_{\vec{k}_2}(\eta_2)H_I(\eta')H_I(\eta'')|0\rangle, \quad (52)$$

$$- \int_{\eta_0}^{\eta_1} d\eta' \int_{\eta_0}^{\eta'} d\eta'' \langle 0|H_I(\eta'')H_I(\eta')\phi_{\vec{k}_1}(\eta_1)\phi_{\vec{k}_2}(\eta_2)|0\rangle, \quad (53)$$

$$\int_{\eta_0}^{\eta_1} d\eta' \int_{\eta_0}^{\eta_2} d\eta'' \langle 0|H_I(\eta')\phi_{\vec{k}_1}(\eta_1)\phi_{\vec{k}_2}(\eta_2)H_I(\eta'')|0\rangle \quad (54)$$

whereas including the expansion of $U(\eta_1, \eta_2)$ exhibits three other terms

$$- \int_{\eta_2}^{\eta_1} d\eta' \int_{\eta_2}^{\eta'} d\eta'' \langle 0 | \phi_{\vec{k}_1}(\eta_1) H_I(\eta') H_I(\eta'') \phi_{\vec{k}_2}(\eta_2) | 0 \rangle, \quad (55)$$

$$\int_{\eta_0}^{\eta_1} d\eta' \int_{\eta_2}^{\eta_1} d\eta'' \langle 0 | H_I(\eta') \phi_{\vec{k}_1}(\eta_1) H_I(\eta'') \phi_{\vec{k}_2}(\eta_2) | 0 \rangle, \quad (56)$$

$$- \int_{\eta_2}^{\eta_1} d\eta' \int_{\eta_0}^{\eta_2} d\eta'' \langle 0 | \phi_{\vec{k}_1}(\eta_1) H_I(\eta') \phi_{\vec{k}_2}(\eta_2) H_I(\eta'') | 0 \rangle. \quad (57)$$

All those terms describe fermionic loops and involve contractions over spinorial operators as well as integrations over running momenta. Such expressions - introduced in section II (see eqs.(26) and (27)) - only depend on the following quantity

$$f(\eta', \eta''; \Lambda, k) = \int \frac{d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{p}_2 \Delta_{p_1, p_2}(\eta', \eta'') \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{k}), \quad (58)$$

where $\Delta_{p_1, p_2}(\eta', \eta'')$ is given by eq.(27) and Λ is a ultraviolet three-dimensional cut-off. The integration in the infrared sector does not lead to any divergence as it could be expected from the spinors being conformal to Minkowski. Summing all the terms (52-57) and noting that $f^*(\eta', \eta''; \Lambda, k) = f(\eta'', \eta'; \Lambda, k)$, the two-point function may be written in a simpler form after cumbersome calculations

$$\begin{aligned} \eta_1 \langle 0 | \chi_{\vec{k}_1}(\eta_1) \chi_{\vec{k}_2}(\eta_2) | 0 \rangle_{\eta_2} &= 4\lambda^2 \delta^3(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \left(\right. \\ &\quad \int_{\eta_0}^{\eta_2} d\eta' \int_{\eta_0}^{\eta'} d\eta'' \left\{ \text{Im} [G_{k_1}(\eta_1, \eta')] \text{Im} [G_{k_1}(\eta_2, \eta'') f(\eta', \eta''; \Lambda, k_1)] \right. \\ &\quad \left. \left. + \text{Im} [G_{k_1}(\eta_2, \eta')] \text{Im} [G_{k_1}(\eta_1, \eta'') f(\eta', \eta''; \Lambda, k_1)] \right\} \right. \\ &\quad \left. + \int_{\eta_2}^{\eta_1} d\eta' \int_{\eta_0}^{\eta'} d\eta'' G_{k_1}^*(\eta_2, \eta'') \text{Im} [G_{k_1}(\eta_1, \eta')] \text{Im} [f(\eta', \eta''; \Lambda, k)] \right. \\ &\quad \left. + \int_{\eta_2}^{\eta_1} d\eta' \int_{\eta_0}^{\eta_2} d\eta'' \text{Im} [G_{k_1}(\eta_1, \eta')] \text{Im} [G_{k_1}(\eta_2, \eta'')] f(\eta', \eta''; \Lambda, k) \right). \quad (59) \end{aligned}$$

As low running momenta do not contribute to $f(\eta', \eta''; \Lambda, k)$, there is no infrared contribution to the bosonic masses. Thus the radiative corrections come from the ultraviolet regime, i.e. from large momenta. The expression (27) being a product of a divergent function by an oscillating one, the main contribution occurs when the conformal times are close to each other. We can then expand the expression (59) with respect to the infinitely small parameter $\epsilon = \eta'' - \eta'$ and the expansion of the Wightman function reads

$$G_k(\eta, \eta'') = G_k(\eta, \eta') + (\eta'' - \eta') G'_k(\eta, \eta') + \frac{(\eta'' - \eta')^2}{2} G''_k(\eta, \eta') + \mathcal{O}[(\eta'' - \eta')^3] \quad (60)$$

where ' stands for a derivation with respect to the second variable. We also define the real quantities indexed by j

$$\begin{aligned} I_j(\Lambda, k) &= (-i)^{j-1} \int_{\eta_0}^{\eta'} d\eta'' \frac{(\eta'' - \eta')^j}{j!} \int \frac{d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{p}_2 \Delta_{p_1, p_2}(\eta', \eta'') \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{k}_1) \\ &= \int \frac{d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{p}_2 \frac{1}{(p_1 + p_2)^{j+1}} \left[1 - \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{p_1 p_2} \right] \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{k}) \end{aligned} \quad (61)$$

to get the expansion

$$\int_{\eta_0}^{\eta'} d\eta'' G_k(\eta, \eta'') f(\eta', \eta''; \Lambda, k) = \sum_j i^{j-1} G_k^{(j)}(\eta, \eta') I_j(\Lambda, k). \quad (62)$$

The computations of $I_j(\Lambda, k)$ for $j = 0, 1, 2$ are sufficient since $I_j(\Lambda, k)$ converges for $j > 2$ and give

$$I_0(\Lambda, k) = \frac{\Lambda^2}{4\pi^2} - \frac{k^2}{8\pi^2} \ln \left(\frac{\Lambda}{k} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{k}{\Lambda} \right), \quad (63)$$

$$I_1(\Lambda, k) = \frac{1}{4\pi^2} \Lambda + \mathcal{O}\left(\frac{k}{\Lambda}\right), \quad (64)$$

$$I_2(\Lambda, k) = \frac{1}{8\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{k}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{k}{\Lambda}\right). \quad (65)$$

Using the equation of motion for the Wightman function in the background metric

$$G_k''(\eta, \eta') + k^2 G_k(\eta, \eta') = \frac{a''}{a} G_k(\eta, \eta') \quad (66)$$

and inserting eq.(62) into eq.(59), the loop correction reads

$$\begin{aligned} \eta_1 \langle 0 | \chi_{\vec{k}_1}(\eta_1) \chi_{\vec{k}_2}(\eta_2) | 0 \rangle_{\eta_2} &= -\frac{\lambda^2}{\pi^2} \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \left\{ \right. \\ &\quad \int_{\eta_0}^{\eta_2} d\eta' \left[\Lambda^2 - \frac{a''}{2a} \ln\left(\frac{\Lambda}{k}\right) \right] \text{Im} [G_{k_1}(\eta_1, \eta') G_{k_1}(\eta_2, \eta')] \\ &\quad + \int_{\eta_2}^{\eta_1} d\eta' \left[\Lambda^2 - \frac{a''}{2a} \ln\left(\frac{\Lambda}{k}\right) \right] G_{k_1}^*(\eta_2, \eta') \text{Im} [G_{k_1}(\eta_1, \eta')] \left. \right\} \\ &\quad - \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \text{Re} [G_{k_1}(\eta_1, \eta_2)] \ln\left(\frac{\Lambda}{k}\right) \\ &\quad + 4\lambda^2 \int_{\eta_2}^{\eta_1} d\eta' \int_{\eta_0}^{\eta_2} d\eta'' \text{Im} [G_{k_1}(\eta_1, \eta')] \text{Im} [G_{k_1}(\eta_2, \eta'')] f(\eta', \eta''; \Lambda, k). \end{aligned} \quad (67)$$

Let us compute the last term. Its main contribution comes from η'' and η' being close to η_2 . We can then expand the Green function with $\eta' - \eta_2 \rightarrow 0$ and $\eta'' - \eta_2 \rightarrow 0$

$$\text{Im} [G_k(\eta_1, \eta')] \text{Im} [G_k(\eta_2, \eta'')] = \sum_{j,l} \text{Im} [G_k^{(j)}(\eta_1, \eta_2)] \text{Im} [G_k^{(l)}(\eta_2, \eta_2)] \frac{(\eta' - \eta_2)^j (\eta'' - \eta_2)^l}{j! l!}. \quad (68)$$

We are left with two terms of the form

$$\int_{\eta_0}^{\eta_2} d\eta'' \frac{(\eta'' - \eta_2)^j}{j!} e^{-i(p_1+p_2)(\eta_2-\eta'')} = \frac{i^{j-1}}{(p_1+p_2)^{j+1}}, \quad (69)$$

$$\int_{\eta_2}^{\eta_1} d\eta'' \frac{(\eta' - \eta_2)^j}{j!} e^{-i(p_1+p_2)(\eta' - \eta_2)} = \frac{(-i)^{j-1}}{(p_1+p_2)^{j+1}} \left[e^{-i(p_1+p_2)(\eta_2-\eta_1)} - 1 \right]. \quad (70)$$

The equation (70) provides us with a term whose phase is proportional to the difference of the conformal times. Since this term oscillates rapidly when $|\eta_1 - \eta_2| > 1/\Lambda$, we can neglect its ultraviolet contribution unless the times are equal, which would lead to a trivial result for (70).

The last term of eq. (67) then becomes

$$\begin{aligned} &\int_{\eta_2}^{\eta_1} d\eta' \int_{\eta_0}^{\eta_2} d\eta'' \text{Im} [G_k(\eta_1, \eta')] \text{Im} [G_k(\eta_2, \eta'')] f(\eta', \eta''; \Lambda, k) \\ &= \sum_{j,l} \text{Im} [G_k^{(j)}(\eta_1, \eta_2)] \text{Im} [G_k^{(l)}(\eta_2, \eta_2)] (i)^{l-j} I_{l+j+1}(\Lambda, k). \end{aligned} \quad (71)$$

The only divergent term is obtained when $l = 1$ and $j = 0$ and reads

$$-i \text{Im} [G_k(\eta_1, \eta_2)] \text{Im} [G_k'(\eta_2, \eta_2)] I_2(\Lambda, k) = -\frac{i}{2} \text{Im} [G_k(\eta_1, \eta_2)] I_2(\Lambda, k) \quad (72)$$

where we used eq. (18).

Finally, we are left with

$$\eta_1 \langle 0 | \chi_{\vec{k}_1}(\eta_1) \chi_{\vec{k}_2}(\eta_2) | 0 \rangle_{\eta_2} = -\frac{\lambda^2}{\pi^2} \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \left\{ \right.$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\eta_0}^{\eta_2} d\eta' \left[\Lambda^2 - \frac{a''}{2a} \ln \left(\frac{\Lambda}{k} \right) \right] \text{Im} [G_{k_1}(\eta_1, \eta') G_{k_1}(\eta_2, \eta')] \\
& + \int_{\eta_2}^{\eta_1} d\eta' \left[\Lambda^2 - \frac{a''}{2a} \ln \left(\frac{\Lambda}{k} \right) \right] G_{k_1}^*(\eta_2, \eta') \text{Im} [G_{k_1}(\eta_1, \eta')] \\
& - \frac{1}{4} G_{k_1}(\eta_1, \eta_2) \ln \left(\frac{\Lambda}{k} \right) \Big\}. \tag{73}
\end{aligned}$$

There is no linear divergence left, in agreement with the local Lorentz invariance. The additional term may be cancelled by a field strength renormalisation setting

$$v_k(\eta) \rightarrow (1 + \delta Z) v_k(\eta). \tag{74}$$

with

$$\delta Z = -\frac{\lambda^2}{8\pi^2} \ln \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right) \tag{75}$$

where μ is a typical energy scale depending on the renormalisation condition. From eq.(41), one can see that the fermionic loop gives a mass to the scalar field

$$\delta m_{\text{F}}^2 = -\frac{\lambda^2}{2\pi^2 a^2(\eta)} \left[\Lambda^2 - \frac{a''}{2a} \ln \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right) \right]. \tag{76}$$

One can remark a background dependent logarithmic divergence proportional to the scalar curvature.

In the case of a Yukawa coupling (48), the propagator of fermions is just modified by a trace over an odd number of gamma matrices which vanishes. Fermions do not acquire a mass through a Yukawa coupling.

IV. INTERPRETATION

In the context of the Lagrangian (1), the one loop scalar masses read from eqs.(47) and (76)

$$\delta m^2 = \frac{\lambda^2}{2\pi^2 a^2(\eta)} \left[4 \int dpp^2 G_p(\eta, \eta) - \Lambda^2 + \frac{a''}{2a} \ln \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right) \right]. \tag{77}$$

In the following, we compute this expression for different FLRW spacetimes and special attention is paid to de Sitter spacetime.

A. Flat spacetime

In the flat case, the exact computation of the radiative mass corrections in the massive case may be easily dealt with and one expects to recover the Minkowski results by setting $a = 1$ and

$$G_k(\eta, \eta) = \frac{1}{2\omega_k} = \frac{1}{2\sqrt{k^2 + m^2}}. \tag{78}$$

Considering a non-vanishing mass entails an additional correction from the trilinear coupling in the bosonic sector. Finally, one finds a zero mass correction for both the scalar fields and a field strength renormalisation as it should be expected from a supersymmetric model in Minkowski spacetime [15, 17].

B. Generic flat FLRW spacetime

To compute the expression (77) in a generic flat FLRW spacetime, we need to specify a vacuum since the choice of a vacuum state is not imposed [2]. The simplest choice consists in a Bunch-Davies vacuum whose limit is Minkowskian far in the past. With this convention, for any spatially flat FLRW spacetime with constant acceleration, the mode function is given by [18]

$$u_k(\eta) = \sqrt{\frac{\pi r x^r}{4k}} x^\alpha H_\nu^{(1)}(rx) \tag{79}$$

where

$$y = -\frac{1}{aH^2} \frac{dH}{d\eta} = -\frac{1}{H^2} \frac{dH}{dt}, \quad r = \frac{1}{1-y}, \quad \nu = r + \frac{1}{2}, \quad \alpha = -\frac{r}{2}y, \quad x = \frac{k}{aH} \quad (80)$$

and where $H_\nu^{(1)}$ is the Hankel function of the first kind with the index ν . We will only pay attention to period with constant acceleration, i.e. $y = \text{cst}$. To study the ultraviolet divergences, we shall use the following expansion (see e.g. [19])

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu + n + \frac{1}{2})}{n! \Gamma(\nu - n + \frac{1}{2})} \left(\frac{i}{2z}\right)^n. \quad (81)$$

Expanding the expression (79) for large momenta, one gets

$$u_k(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{i(rx - r\pi/2 - \pi/2)} \left[1 + i \frac{r+1}{2x} - \frac{(r+2)(r^2-1)}{8rx^2} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad (82)$$

which leads to

$$G_k(\eta, \eta) = u_k(\eta) u_k^*(\eta) = \frac{1}{2k} \left(1 + \frac{r+1}{2rx^2} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^4}\right) = \frac{1}{2k} \left(1 + \frac{a''}{2a} \frac{1}{k^2} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^4}\right). \quad (83)$$

Inserting this result into (77), one obtains the one loop mass correction in any constant acceleration FLRW spacetime in the ultraviolet regime

$$\delta m^2 = \delta m_B^2 + \delta m_F^2 = \frac{3\lambda^2 a''}{4\pi^2 a^3} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right) \quad (84)$$

where μ is a typical energy scale.

There is no quadratic divergence left since we should recover a supersymmetric action on small scales. The local Lorentz invariance prevents any linear divergence. The only remaining one is due to the curvature which is in agreement with (11) and follows directly from a WKB approximation from the equation of motion (14).

The infrared regime may also lead to divergences. We will only pay attention to the infrared divergence due to the bosonic loops since low momenta from the fermionic loops have no contribution. Using the following expansion in the case of a non-integer index [19]

$$H_\nu^{(1)}(z) \sim \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu + \frac{i}{\sin(\pi\nu)} \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}, \quad (85)$$

the Wightmann function reads in the small momentum limit

$$G_k(\eta, \eta) \sim \frac{\pi r}{4aH} \left[\frac{(r/2)^{2\nu}}{\Gamma^2(1+\nu)} \left(\frac{k}{aH}\right)^{2\alpha+r-1+2\nu} + \frac{1}{\sin^2(\pi\nu)} \frac{(r/2)^{-2\nu}}{\Gamma^2(1-\nu)} \left(\frac{k}{aH}\right)^{2\alpha+r-1-2\nu} \right]. \quad (86)$$

Inserting this expansion into eq. (47) gives a vanishing contribution if both the integrals converge, i.e. if

$$2\alpha + r + 1 + 2\nu > -1 \quad \text{and} \quad 2\alpha + r + 1 - 2\nu > -1.$$

Hence, in the massless case, there are infrared divergences for any $|\nu| \geq 3/2$. For a scale factor growing as $a(t) \sim t^\beta$, we get from eq.(80)

$$\nu = \frac{3\beta - 1}{2\beta - 2}. \quad (87)$$

For power law expansion such as $\beta \geq 2/3$, the scalar mass gets an infrared divergent contribution. In the limit of a massless scalar field in a de Sitter space, ν exactly equals 3/2 and an infrared logarithmic divergence does appear. This infrared behavior has been investigated in [20].

C. Consequences on de Sitter inflation

In this subsection, we apply the previous results to the specific case of de Sitter spacetime which is assumed to properly describe the phase of inflation in the early universe. In particular, light scalar fields are bound to generate significant fluctuations during inflation if their masses are small compared to the Hubble scale. We want to check that their masses are protected against one loop mass corrections.

In the following, we shall consider a coupling to the curvature which may be added to the Lagrangian (1). The curvature in a de Sitter spacetime is constant and given by $R = 12H^2$. Hence, the additional potential looks like a mass term for the scalars

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\xi R(\phi_1^2 + \phi_2^2). \quad (88)$$

Using the previous results, the effective masses found in (11) read

$$m_{\text{eff}}^2 \simeq -\frac{a''}{a^3} + \frac{1}{2}\xi R = 2(6\xi - 1)H^2. \quad (89)$$

This effective mass is constant and vanishes in the case of conformally coupled scalar fields. To express the quantum corrections to the masses, let us choose the Bunch-Davies vacuum [2] for which the mode function reads

$$u_k(\eta) = \sqrt{\frac{\pi}{4k}} \sqrt{-k\eta} H_{\nu}^{(1)}(-k\eta) \quad (90)$$

where $H_{\nu}^{(1)}$ is the Hankel function of the first kind and $\nu^2 = 9/4 - 12\xi$. Applying the previous expansions of Hankel function, the self mass in the ultraviolet regime reads

$$\delta m^2 = \frac{3\lambda^2 H^2}{2\pi^2} (1 - 6\xi) \ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right). \quad (91)$$

Not surprisingly, there is no additional ultraviolet logarithmic divergence for a conformally coupled scalar field with $\xi = 1/6$.

The de Sitter solutions for the massive mode functions are well known and read in the Bunch-Davies vacuum

$$u_k(\eta) = \sqrt{\frac{\pi}{4k}} \sqrt{-k\eta} H_{\nu'}^{(1)}(-k\eta) \quad (92)$$

with $\nu'^2 = 9/4 - m^2/H^2 - 12\xi$. From eqs. (47) and (85), we can see that the contribution to the mass from the infrared regime vanishes for any index such as $|\text{Re}(\nu')| < 3/2$, i.e. as soon as $m^2 + 12\xi H^2 > 0$.

These results may be applied to the minimally coupled case for which the Wightman function takes the simpler form

$$G_k(\eta, \eta) = \frac{1}{2k} \left(1 + \frac{1}{k^2 \eta^2}\right). \quad (93)$$

The radiative mass corrections read

$$\delta m_{\text{B}}^2 = \frac{\lambda^2}{2\pi^2 a^2} \left[\Lambda^2 + 2a^2 H^2 \ln\left(\frac{\Lambda}{\Lambda_{\text{IR}}}\right) \right], \quad (94)$$

$$\delta m_{\text{F}}^2 = -\frac{\lambda^2}{2\pi^2 a^2} \left[\Lambda^2 - a^2 H^2 \ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) \right], \quad (95)$$

$$\delta m^2 = \delta m_{\text{B}}^2 + \delta m_{\text{F}}^2 = \frac{3\lambda^2 H^2}{2\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) + \frac{\lambda^2 H^2}{\pi^2} \ln\left(\frac{\mu}{\Lambda_{\text{IR}}}\right). \quad (96)$$

For the light scalar fields to develop a significant fluctuations one should get rid of quadratic divergences - as it is the case in supersymmetric models - and impose a condition to the coupling constant such as the mass is protected against radiative correction

$$\lambda^2 \ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) \ll 1 \quad (97)$$

which could be easily satisfied for a coupling constant smaller than 10^{-2} .

The infrared divergence that appears in the mass corrections is related to the large scale structure of spacetime and have been extensively discussed in the literature [2, 18, 21–27]. Such a divergence naturally appears in the real space propagator, the cut-off being of order of the initial comoving horizon, i.e. :

$$\Lambda_{\text{IR}} \simeq a_0 H, \quad (98)$$

where a_0 is the scale factor at some initial time [33]. In the context of de Sitter spacetime, the transition between a quantum and a classical behavior occurs at the horizon crossing : perturbations modes leave the horizon and behave classically outside the horizon [9, 28, 29]. It is then natural to pay attention to a classical description of the divergences which is the aim of the following subsection.

D. Connection to a classical viewpoint

During inflation, the universe exponentially grows. The equation of evolution for a stochastic classical field which describes the large scale perturbations is given by eq.(13) in the low momentum limit

$$\delta s'' + 2H\delta s' = -a^2 S(\delta s) \quad (99)$$

where S stands for the source term. In the case of a parabolic potential (33) with a quartic self interaction (42), it takes the form

$$S(\delta s) = \delta m^2 \delta s + \lambda \delta s^3. \quad (100)$$

In a perturbative approach, we can expand the field into powers of the coupling constant

$$\delta s = \delta s^{(0)} + \delta s^{(1)} + \dots \quad (101)$$

and define the Fourier transform of the field for each order of perturbation

$$u_{\vec{k}}^{(n)}(\eta) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \delta s^{(n)}(\vec{x}, \eta) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}}. \quad (102)$$

As a stochastic gaussian field, $u_{\vec{k}}^{(0)}$ has the following properties

$$u_{\vec{k}}^{(0)*} = u_{-\vec{k}}^{(0)} \quad (103)$$

$$\langle u_{\vec{k}}^{(0)} u_{\vec{k}'}^{(0)} \rangle = \delta^3(\vec{k} + \vec{k}') P(k) \quad (104)$$

where the brackets stand for an ensemble average and the power spectrum, $P(k)$, entirely defines the field distribution. To zeroth order, the modes are frozen and we get from the equation of motion

$$\delta s^{(0)} = \text{cst.} \quad (105)$$

The first order is sourced by the free field

$$\delta s^{(1)''} + 2H\delta s^{(1)'} = -a^2 S(\delta s^{(0)}) \quad (106)$$

where all the time dependence in the r.h.s. is expressed in the factor a^2 . We then get

$$\delta s^{(1)'}(\vec{x}, \eta_1) = -S(\delta s^{(0)}) e^{-\frac{2}{a(\eta_1)}} \int_{\eta_0}^{\eta_1} d\eta_2 a(\eta_2)^2 e^{\frac{2}{a(\eta_2)}}. \quad (107)$$

In the case of a parabolic potential (33), the first order mode function becomes in momentum space

$$u_{\vec{k}}^{(1)}(\eta) = -\delta m^2 I(\eta) u_{\vec{k}}^{(0)} \quad (108)$$

where we defined

$$I(\eta) = \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta_1 e^{-\frac{2}{a(\eta_1)}} \int_{\eta_0}^{\eta_1} d\eta' a(\eta')^2 e^{\frac{2}{a(\eta')}}. \quad (109)$$

Inserting eqs.(103), (104) and (108) into (40), one gets

$$\langle u_{\vec{k}}(\eta_1)u_{\vec{k}'}(\eta_2)\rangle = \delta^3(\vec{k} + \vec{k}')P(k) - \delta m^2 \delta^3(\vec{k} + \vec{k}')P(k) [I(\eta_1) + I(\eta_2)]. \quad (110)$$

In the case of a quartic potential (42), one finds in momentum space

$$u_{\vec{k}}^{(1)}(\eta) = -\lambda I(\eta) \int \frac{d^3\vec{k}_1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{k}_2}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k_3 \delta^3(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 - \vec{k}) u_{\vec{k}_1}^{(0)} u_{\vec{k}_2}^{(0)} u_{\vec{k}_3}^{(0)} \quad (111)$$

and the two-point function becomes

$$\langle u_{\vec{k}}(\eta_1)u_{\vec{k}'}(\eta_2)\rangle = \delta^3(\vec{k} + \vec{k}')P(k) - 3\lambda \delta^3(\vec{k} + \vec{k}')P(k) [I(\eta_1) + I(\eta_2)] \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} P(p). \quad (112)$$

The correction to the mass from the quartic interaction reads

$$\delta m^2 = 3\lambda \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} P(k) \quad (113)$$

which is the same result as in the quantum level calculation since

$$P(k) = \frac{1}{a^2} G_k(\eta, \eta) \quad (114)$$

with k going to zero. In the case of a Harrison-Zeldovitch spectrum, i.e. $P(k) \sim k^{-3}$, one recovers the same infrared logarithmic divergence as in the previous subsection.

V. CONCLUSION

We calculated the radiative corrections to the masses of test scalar and fermionic fields in a Wess-Zumino toy model embedded in a spatially flat FLRW spacetime. Our results emphasized that the curvature acts as an effective time dependent mass $m_{\text{eff}}^2 = -R/6$ for bosons whereas fermions stay massless. In a de Sitter spacetime, this effective mass is constant and given by the Hubble scale.

The final results show that radiative corrections exhibit divergent contributions to the scalar masses both in the ultraviolet and infrared regimes. The leading ultraviolet divergences, quadratic and linear in the energy cutoff, cancelled both as expected since one should recover the Minkowskian structure in any locally inertial frame. However a subleading ultraviolet divergence, logarithmic in the energy cutoff and proportional to the spacetime curvature, survives. If it gives masses to scalar fields, it does not however render them too heavy compared to the Hubble scale. Hence, no significant fine tuning will be required for those fields to develop superhorizon fluctuations. Moreover, the infrared divergences that we observe arise as soon as the scale factor grows faster than $t^{2/3}$. They can be interpreted as those due to a self-interacting stochastic classical field.

These results call for some comments.

First, one should carefully deal with supersymmetric models in an expanding universe. In supergravity theories, the behavior of the fields - including the graviton and the gravitino - has to be deduced from an action which is locally supersymmetric. This task is often difficult to handle with. Imposing an expansion of the background, i.e. a dynamics for the graviton, and setting the vacuum expectation values of the fermions to zero would generally lead to a supersymmetry breaking as confirmed by our result.

In this context, the use of the Coleman-Weinberg formula in case of an expanding universe can be questioned. For instance, in inflationary models - such as F or D-term inflation models - the one loop effective terms due to the curvature should be compared to the usual one loop terms of the flat spacetime limit [30]. Although one does not expect this contribution to deeply affect the dynamics at one loop order, consequences of such terms should probably be studied in more details [31, 32].

Finally what we have shown here is that light test scalar fields do not acquire a contribution larger than the Hubble constant from one loop corrections when they are embedded in chiral multiplet. This result extends what was known for the inflaton field. As a consequence it is reasonable to assume that light scalar fields more or less generically develop superhorizon isocurvature fluctuations. And then, as was shown in [9], nothing prevents those from containing significant non-Gaussianities although whether it is generically the case is still an open question. It anyway puts non-Gaussian inflationary models on a much firmer ground.

Acknowledgment: We want to thank J. Mourad, R.P. Woodard, J. Iliopoulos, N. Chatillon, P. Brax, J. Rocher for fruitful discussions.

-
- [1] S. Mukhanov and G.V. Chibisov, JETP Lett. **33** (1981) 532;
S.W. Hawking, Phys. Lett. B **115** (1982) 295;
V.F. Mukhanov, H.A. Feldman, and R.H. Brandenberger, Phys. Rept. **215** (1992) 203.
A.D. Linde, *Particle physics and inflationary cosmology*, Harwood (Chur, Switzerland, 1990);
- [2] N.D. Birrel and P.C.W. Davies, *Quantum fields in curved space*, Cambridge University Press (1982).
- [3] A.D. Linde, Phys. Lett. B **158** (1985) 375;
L.A. Kofman, Phys. Lett. B **173** (1986) 400;
D. Polarski and A.A. Starobinsky, Phys. Rev. D **50** (1994) 6123;
J. Garcia-Bellido and D. Wands, Phys. Rev. D **53** (1996) 5437;
V.F. Mukhanov and P.J. Steinhardt, Phys. Lett. B **422** (1998) 52;
D. Langlois, Phys. Rev. D **59** (1999) 123512;
C. Gordon, D. Wands, B.A. Basset and R. Maartens, Phys. Rev. D **63** (2000) 023506;
J.H. Hwang and H. Noh, Phys. Lett. B **495** (2000) 277.
- [4] M. Bucher, K. Moodley and N. Turok, Phys. Rev. D **66** (2002) 023528;
D. Langlois and A. Riazuelo, Phys. Rev. D **62** (2000) 043504;
M. Bucher, K. Moodley and N. Turok, Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 191301.
- [5] D.S. Salopek and J.R. Bond, Phys. Rev. D **42** (1990) 3936;
D. La and P.J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **62** (1989) 376;
K. Yamamoto *et al.*, Phys. Rev. D **46** (1992) 4206;
A.D. Linde and V.F. Mukhanov, Phys. Rev. D **56** (1997) 535;
I. Antoniadis, P.O. Mazur and E. Motola, astro-ph/9705200.
- [6] N. Bartolo, S. Matarrese and A. Riotto, Phys. Rev. D **64** (2001) 083514;
N. Bartolo, S. Matarrese, and A. Riotto, Phys. Rev. D **65** (2002) 103505.
- [7] D.H. Lyth and D. Wands, Phys. Lett. B **524** (2002) 5;
D.H. Lyth, C. Ungarelli, D. Wands, Phys. Rev. D **67** (2003) 023503.
- [8] N. Bartolo, S. Matarrese, A. Riotto, Phys. Rev. D **69** (2004) 043503.
- [9] F. Bernardeau and J.-P. Uzan, Phys. Rev. D **66** (2002) 103506.
- [10] F. Bernardeau and J.-P. Uzan, Phys. Rev. D **67** (2003) 121301(R).
- [11] L. Kofman, astro-ph/0303614; G.R. Dvali, A. Gruzinov and M. Zaldarriaga, Phys. Rev. D **69** (2004) 023505;
F. Bernardeau, L. Kofman and J.-P. Uzan, Phys. Rev. D **70** (2004) 083004.
- [12] N. Bartolo, E. Komatsu, S. Matarrese, A. Riotto, Phys. Rept. **402** (2004) 103-266.
- [13] P. Binetruy and G.R. Dvali, Phys. Lett. B **388** (1996) 241-246;
G.R. Dvali, Phys. Lett. B **387** (1996) 471-477;
G.R. Dvali, Q. Shafi, R. K. Schaefer, Phys. Rev. Lett. **73** (1994) 1886-1889.
- [14] D.H. Lyth and A. Riotto, Phys. Rept. **314** (1999) 1-146.
- [15] D. Bailin and A. Love, *Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory*, Institute of Physics Publishing (1994).
- [16] B. de Wit, *Supergravity*, Lecture notes 2001 Les Houches Summerschool, hep-th/0212245.
- [17] M.T. Grisaru, M. Rocek and W. Siegel, Nucl. Phys. B **159** (1979) 429.
- [18] N.C. Tsamis and R.P. Woodard, Class. Quant. Grav. **20** (2003) 5205-5223.
- [19] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, series and products*, ed. Academic, N.Y. (1980).
- [20] L.H. Ford and L. Parker, Phys. Rev. D **16** (1977) 2 245.
- [21] A.A. Starobinsky, Phys. Lett. B **117** (1982) 175.
- [22] A.D. Linde, Phys. Lett. B **116** (1982) 335.
- [23] A. Vilenkin and L.H. Ford, Phys. Rev. D **26** (1982) 1231.
- [24] V.K. Olemni and R.P. Woodard, Class. Quant. Grav. **19** (2002) 4607, gr-qc/0204065.
- [25] V.K. Olemni and R.P. Woodard, *Quantum effects can render $w < -1$ on cosmological scales*, Phys. Rev. D **70** (2004) 107301.
- [26] N.C. Tsamis and R.P. Woodard, Class. Quant. Grav. **11** (1994) 2969-2989.
- [27] T. Brunier, V.K. Olemni and R.P. Woodard, gr-qc/0408080.
- [28] A.A. Starobinsky and J. Yokoyama, Phys. Rev. D **50** (1994) 6357.
- [29] A.A. Starobinsky, "Stochastic de Sitter (inflationary) stage in the early universe", in *Field Theory, Quantum Gravity and Strings*, (1986) 107-126 ed. by H.J. de Vega and N. Sanchez.
- [30] S. Coleman and E. Weinberg, Phys. Rev. D **7** (1973) 1888.
- [31] G.M. Shore, Ann. Phys. **128** (1980) 376-424.
- [32] A.L. Berkin, Phys. Rev. D **46** (1992) 1551-1559.
- [33] The correction to the mass from the bosonic loop has also been computed in another way in [27]. These two results are compatible in the only case of a time dependent cut-off growing as the scale factor, i.e. being proportional to the comoving

horizon in a de Sitter space.

5.11 Effets de taille finie

Nous avons caractérisé la distribution des fluctuations sur l'ensemble de l'espace. Cependant, les observations ne concernent qu'un volume fini et ne nous donnent accès qu'à un nombre limité de modes. En conséquence, la statistique des fluctuations observées peut différer notablement de celle attendue si l'on ne tient pas compte des effets de taille finie.

5.11.1 Origine des effets de taille finie

Le principal écueil concerne la décomposition d'un champ en une valeur moyenne et une perturbation

$$\varphi(\mathbf{x}, \eta) = \varphi_0(\eta) + \delta\varphi(\mathbf{x}, \eta) . \quad (5.198)$$

La démarche adoptée consiste à considérer que la solution $\varphi_0(\eta)$ est classique tandis que les fluctuations quantiques sont entièrement intégrées dans la partie $\delta\varphi(\mathbf{x}, \eta)$. Cela implique que $\varphi_0(\eta)$ est définie comme la valeur moyenne dans le vide du champ $\varphi(\mathbf{x}, \eta)$

$$\varphi_0(\eta) = \langle 0 | \varphi(\mathbf{x}, \eta) | 0 \rangle . \quad (5.199)$$

La valeur moyenne dans le vide doit être comprise comme une *valeur moyenne d'ensemble*. Chaque valeur du champ correspond à une réalisation particulière. La valeur moyenne de toutes ces réalisations conduit à la définition de $\varphi_0(\eta)$. Or nous n'avons accès qu'à une seule de ces réalisations puisque nous n'observons qu'un seul univers : cette valeur moyenne n'est donc pas mesurable !

La résolution de ce paradoxe réside dans l'hypothèse ergodique. Cette dernière consiste à supposer que moyenne d'ensemble et moyenne statistique coïncident. Ainsi, mesurer la valeur moyenne géométrique d'une grandeur dans un volume donné donne accès à la valeur moyenne d'ensemble. Bien que $\varphi_0(\eta)$ ne soit pas mesurable,

$$\bar{\varphi}_0(\eta) = \frac{1}{V_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} d^3\mathbf{x} \varphi_{\text{cl}}(\mathbf{x}, \eta) \quad (5.200)$$

est mesurable, où $V_{\mathcal{D}}$ est le volume du domaine \mathcal{D} observé tandis que l'indice "cl" correspond à la partie classique du champ.

Nous supposons alors que les définitions (5.199) et (5.200) sont suffisamment proches si le volume $V_{\mathcal{D}}$ est suffisamment grand. Cette condition n'est malheureusement pas nécessairement réalisée. Dans ce cas, la décomposition (5.198) n'est plus pertinente. Afin d'accorder observations et prédictions, la valeur moyenne du champ $\varphi(\mathbf{x}, \eta)$ définie par (5.199) doit être remplacée par la valeur dans le vide de la moyenne géométrique du champ

$$\tilde{\varphi}_0(\eta) = \frac{1}{V_{\mathcal{D}}} \langle 0 | \int_{\mathcal{D}} d^3\mathbf{x} \varphi(\mathbf{x}, \eta) | 0 \rangle . \quad (5.201)$$

Les dimensions du domaine \mathcal{D} doivent être comparables à celles accessibles aux observations.

Il est possible d'estimer l'ordre de grandeur de cette valeur moyenne à l'aide d'une approche stochastique (voir [Starobinsky & Yokoyama, 1994] et [Bernardeau & Uzan, 2004]). Si la dynamique du champ est régie par un potentiel quartique de la forme $V(\varphi) = \lambda\varphi^4$, sa valeur moyenne aux grandes échelles connaît des fluctuations de l'ordre de $H/\lambda^{1/4}$.

5.11.2 Conséquences sur les non-gaussianités

Ces effets de taille finie peuvent avoir une influence sur les non-gaussianités. En effet, considérons un champ φ soumis à un potentiel $V(\varphi)$. Si la valeur moyenne du champ φ_0 est non-nulle, les fluctuations du champ sont soumises au potentiel $V(\varphi_0 + \delta\varphi)$ et non pas $V(\delta\varphi)$.

Ce mécanisme a été étudié par F. Bernardeau et J.-P. Uzan [Bernardeau & Uzan, 2004] dans le cas d'un champ scalaire φ test évoluant, en de Sitter, dans un potentiel quartique. Un potentiel de la forme $V(\varphi) = \lambda(\varphi_0 + \delta\varphi)^4$ donne alors naissance à des auto-interactions cubiques auxquelles sont soumises les fluctuations $\delta\varphi$. Parmi les conséquences d'un tel développement, la fonction à trois points du champ acquiert une valeur non-nulle proportionnelle à la valeur moyenne φ_0 du champ. En reprenant l'analyse effectuée page 259, nous obtenons l'analogue de l'expression (5.164)

$$\underline{\delta s}(t) = \frac{\underline{\delta s}^{(0)} + \bar{s}}{\sqrt{1 - 2\nu_3 [\underline{\delta s}^{(0)} + \bar{s}]^2}}, \quad (5.202)$$

où \bar{s} est la valeur moyenne du champ s et $\underline{\delta s}^{(0)}$ est un champ gaussien de moyenne nulle. La fonction densité de probabilité peut également être obtenue [Bernardeau & Uzan, 2004] et est représentée sur la figure 5.2.

5.12 Conclusions

Ce chapitre nous a permis de décrire en détail divers aspects des modèles inflationnaires. Nous nous sommes intéressés à la fois au mécanisme d'expansion accélérée ainsi qu'aux fluctuations, classiques ou quantiques, des champs évoluant dans un espace en expansion. Une large classe de modèles d'inflation est en accord avec les contraintes observationnelles actuelles. La plupart de ces modèles n'impliquent bien souvent que des champs libres. Une possibilité de les discriminer consisterait à étudier des effets fins, par exemple ceux dus aux interactions entre les champs quantiques. En particulier, de telles interactions pourraient se traduire par de légères déviations à la gaussianité dans la distribution du potentiel gravitationnel à la fin de l'inflation. Nous avons donc tenté, dans un premier temps, de décrire les déviations à la gaussianité dans la distribution des champs. En fondant notre approche sur un

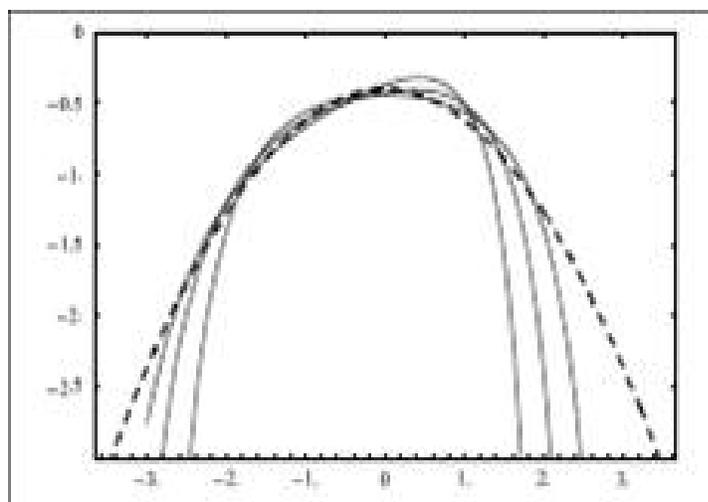


FIG. 5.2 – Fonction densité de probabilité d'un champ test $\tilde{\delta s} = \underline{\delta s} - \bar{s}$ dans un espace de de Sitter. Le champ $\underline{\delta s}$ est un champ stochastique classique soumis à un potentiel quartique $V(\underline{\delta s}) = \lambda \underline{\delta s}^4/4$ tandis que \bar{s} est sa valeur moyenne dans le volume observé. La courbe en tiret correspond à une distribution gaussienne $\lambda = 0$ et $\bar{s} = 0$. Les courbes en trait plein sont obtenues pour une valeur positive de la constante de couplage λ telle que $\nu_3 H^2 = -0,3$ et pour les valeurs respectives de \bar{s}/H : 0, 0,5 et 1 (de la droite vers la gauche lorsqu'on considère des valeurs négatives du champs).

mécanisme de transfert entre les fluctuations adiabatique et isocourbes, nous avons alors mis en évidence trois paramètres essentiels caractérisant des non-gaussianités primordiales observables : le produit d'une constante de couplage par une fonction du nombre de e-folds, l'angle de mélange, traduisant l'efficacité du transfert, et la valeur moyenne des champs à l'échelle des observations, interprétée comme un effet de taille finie.

Afin de traiter les modèles inflationnaires dans toute leur généralité, il serait intéressant de développer l'action qui gouverne la dynamique des champs aux ordres élevés de manière à prendre en compte les interactions au niveau quantique de façon cohérente. L'action étant invariante sous les changements de coordonnées, elle doit pouvoir s'exprimer en termes de quantités invariantes de jauge à déterminer. Sous l'effet des interactions, les degrés de liberté scalaires sont susceptibles de développer des fluctuations non-gaussiennes. Il reste à déterminer les degrés de liberté pertinents, c'est-à-dire directement observables, qui pourraient mettre en évidence des effets fins induits par de telles interactions.

Cependant, rechercher des effets aussi fins peut s'avérer une tâche ardue tant sur le plan des observations que sur le plan théorique. Il semble en effet indispensable de comprendre le domaine de validité d'une approche quantique dans un espace-temps en expansion et les conséquences d'une possible rétro-action sur l

Pour ce faire, il faudrait décrire les anisotropies du fond diffus cosmologique de façon suffisamment précise afin d'identifier et contraindre les paramètres de la physique inflationnaire. Un traitement complet des perturbations au deuxième ordre serait un premier pas dans cette direction. Mais l'évolution des perturbations depuis la phase inflationnaire jusqu'à nos jours apparaît compliquée et difficile d'accès.

Quoi qu'il en soit, la mise en évidence, dans les relevés cosmologiques, de déviations à la gaussianité imputables à des processus de l'univers primordial serait à la fois une prouesse technologique et une source très précieuse d'informations sur les premiers instants.

ANNEXE A

Quantités géométriques perturbées¹

Sommaire

A.1	Généralités sur les perturbations de métrique	299
A.2	Perturbations au deuxième ordre	300
A.3	Perturbations dans un espace à symétrie maximale . . .	301
A.4	Perturbations dans un espace FLRW	302
A.4.1	Symboles de Christoffel	302
A.4.2	Tenseur de Ricci	304
A.4.3	Scalaire de Ricci	306
A.4.4	Tenseur d'Einstein	307
A.5	Tenseur énergie-impulsion	309

A.1 Généralités sur les perturbations de métrique

Considérons une variété perturbée dont la métrique $g_{\mu\nu}$ est la somme d'une métrique de référence $\bar{g}_{\mu\nu}$ et d'une métrique perturbée $\delta g_{\mu\nu}$. La métrique inverse non perturbée est notée $\bar{g}^{\mu\nu}$ et sa partie perturbée est $\delta g^{\mu\nu}$. La notation ∇_μ correspond à une dérivée covariante par rapport à la métrique non-perturbée.

Notons que si $\delta g_{\mu\nu}$ est un infiniment petit du premier ordre et ne contient aucun terme sous dominant, il n'en va pas de même pour $\delta g^{\mu\nu}$ qui contient tous les ordres

¹Cette annexe reprend les principales étapes détaillées dans [Riazuelo, 2000] étendues au deuxième ordre dans les perturbations.

de perturbations de manière à vérifier

$$(\bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu})(\bar{g}^{\nu\kappa} + \delta g^{\nu\kappa}) = \delta_\mu^\kappa . \quad (\text{A.1})$$

En particulier, les perturbations satisfont la relation suivante

$$\bar{g}_{\mu\nu}\delta g^{\nu\kappa} + \delta g_{\mu\nu}\bar{g}^{\nu\kappa} + \delta g_{\mu\nu}\delta g^{\nu\kappa} = 0 , \quad (\text{A.2})$$

qui généralise le résultat usuel du premier ordre $\delta g^{\mu\nu} = -\bar{g}^{\mu\kappa}\bar{g}^{\nu\lambda}\delta g_{\kappa\lambda}$.

Les symboles de Christoffel se calculent grâce à la relation

$$\Gamma_{\mu\nu}^\kappa = \frac{1}{2}(\bar{g}^{\kappa\lambda} + \delta g^{\kappa\lambda}) [\partial_\mu(\bar{g}_{\nu\lambda} + \delta g_{\nu\lambda}) + \partial_\nu(\bar{g}_{\lambda\mu} + \delta g_{\lambda\mu}) - \partial_\lambda(\bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu})] . \quad (\text{A.3})$$

La partie perturbée des symboles de Christoffel est un tenseur à tout ordre dans les perturbations. En effet, en exprimant les dérivées partielles en fonction des dérivées covariantes et en utilisant la relation (A.2), on obtient

$$\Gamma_{\mu\nu}^\kappa = \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\kappa + \delta\Gamma_{\mu\nu}^\kappa , \quad (\text{A.4})$$

où $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\kappa$ correspond à la partie non perturbée et

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\kappa = \frac{1}{2}(\bar{g}^{\kappa\lambda} + \delta g^{\kappa\lambda}) [\nabla_\mu\delta g_{\nu\lambda} + \nabla_\nu\delta g_{\lambda\mu} - \nabla_\lambda\delta g_{\mu\nu}] . \quad (\text{A.5})$$

Le tenseur de Riemann perturbé s'écrit sous la forme

$$\delta R_{\mu\lambda\nu}^\kappa = \nabla_\lambda\delta\Gamma_{\mu\nu}^\kappa - \nabla_\nu\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\kappa + \delta\Gamma_{\lambda\alpha}^\kappa\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \delta\Gamma_{\nu\alpha}^\kappa\delta\Gamma_{\lambda\mu}^\alpha , \quad (\text{A.6})$$

ce qui conduit à l'expression du tenseur de Ricci perturbé

$$\delta R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\lambda\nu}^\lambda = \nabla_\lambda\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \nabla_\nu\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \delta\Gamma_{\lambda\alpha}^\lambda\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \delta\Gamma_{\nu\alpha}^\lambda\delta\Gamma_{\lambda\mu}^\alpha . \quad (\text{A.7})$$

Le scalaire de Ricci s'obtient par la relation

$$R = (\bar{R}_{\mu\nu} + \delta R_{\mu\nu})(\bar{g}^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}) , \quad (\text{A.8})$$

où les tenseurs $\bar{R}_{\mu\nu}$ et $\bar{g}^{\mu\nu}$ correspondent aux quantités non-perturbées.

A.2 Perturbations au deuxième ordre

Le tenseur de Ricci s'écrit, au deuxième ordre dans les perturbations de métrique,

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\nabla_\lambda \{ (\bar{g}^{\lambda\kappa} + \delta g^{\lambda\kappa}) [\nabla_\mu\delta g_{\nu\kappa} + \nabla_\nu\delta g_{\kappa\mu} - \nabla_\kappa\delta g_{\mu\nu}] \} \\ &\quad - \frac{1}{2}\nabla_\nu \{ (\bar{g}^{\lambda\kappa} + \delta g^{\lambda\kappa}) [\nabla_\mu\delta g_{\lambda\kappa} + \nabla_\lambda\delta g_{\kappa\mu} - \nabla_\kappa\delta g_{\mu\lambda}] \} \\ &\quad - \frac{1}{4}\bar{g}^{\lambda\kappa}\bar{g}^{\rho\sigma} [\nabla_\mu\delta g_{\rho\kappa} + \nabla_\rho\delta g_{\kappa\mu} - \nabla_\kappa\delta g_{\mu\rho}] [\nabla_\nu\delta g_{\lambda\sigma} + \nabla_\lambda\delta g_{\sigma\nu} - \nabla_\sigma\delta g_{\nu\lambda}] \\ &\quad + \frac{1}{4}\bar{g}^{\lambda\kappa}\bar{g}^{\rho\sigma} \nabla_\rho \delta g_{\kappa\lambda} [\nabla_\mu\delta g_{\nu\sigma} + \nabla_\nu\delta g_{\sigma\mu} - \nabla_\sigma\delta g_{\mu\nu}] . \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Notons $\delta g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$, les indices du tenseur $h_{\mu\nu}$ étant montés ou descendus à l'aide de la métrique non-perturbée. En revanche, nous imposons que les indices de $\delta g_{\mu\nu}$ le soient à l'aide de la métrique perturbée $\bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$. La métrique perturbée inverse est donc de la forme

$$\delta g^{\mu\nu} = -h^{\mu\nu} + h^{\mu\rho}h_{\rho}^{\nu} + o(h^2) . \quad (\text{A.10})$$

Le tenseur de Ricci perturbé prend alors la forme

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} = & \nabla_{\lambda}\nabla_{(\mu}h_{\nu)}^{\lambda} - \frac{1}{2}\nabla^{\lambda}\nabla_{\lambda}h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}h \\ & - h^{\lambda\kappa}\nabla_{\lambda}\nabla_{(\mu}h_{\nu)}^{\kappa} + \frac{1}{2}h^{\lambda\kappa}\nabla_{\lambda}\nabla_{\kappa}h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}h^{\lambda\kappa}\nabla_{(\mu}\nabla_{\nu)}h_{\lambda\kappa} \\ & - \nabla_{\lambda}h^{\lambda\kappa}\nabla_{(\mu}h_{\nu)\kappa} + \frac{1}{2}\nabla_{\lambda}h^{\lambda\kappa}\nabla_{\kappa}h_{\mu\nu} + \frac{1}{4}\nabla_{\nu}h^{\lambda\kappa}\nabla_{\mu}h_{\lambda\kappa} \\ & - \frac{1}{2}\nabla_{\lambda}h_{\nu\kappa}\nabla^{\kappa}h_{\mu}^{\lambda} + \frac{1}{2}\nabla_{\lambda}h_{\nu\kappa}\nabla^{\lambda}h_{\mu}^{\kappa} \\ & - \frac{1}{4}\nabla_{\lambda}h\nabla^{\lambda}h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\nabla_{\lambda}h\nabla_{(\mu}h_{\nu)}^{\lambda} . \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Le scalaire de Ricci est donné, quant à lui, par l'expression

$$\begin{aligned} R = & (\bar{R}_{\mu\nu} + \delta R_{\mu\nu})(\bar{g}^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}) \\ & 6\mathcal{K} - 2\mathcal{K}h + 2\mathcal{K}h^{\mu\nu}h_{\mu\nu} + \nabla_{\lambda}\nabla_{\kappa}h^{\lambda\kappa} - \nabla_{\lambda}\nabla^{\lambda}h \\ & + h^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}h + h^{\mu\nu}\nabla_{\lambda}\nabla^{\lambda}h_{\mu\nu} - h^{\mu\nu}(\nabla_{\lambda}\nabla_{\mu} + \nabla_{\mu}\nabla_{\lambda})h_{\nu}^{\lambda} \\ & + \frac{3}{4}\nabla_{\lambda}h_{\mu\nu}\nabla^{\lambda}h^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\nabla_{\lambda}h\nabla^{\lambda}h + \nabla_{\mu}h\nabla_{\nu}h^{\mu\nu} \\ & - \nabla_{\lambda}h^{\lambda\kappa}\nabla_{\mu}h^{\mu}_{\kappa} - \frac{1}{2}\nabla_{\lambda}h_{\mu\nu}\nabla^{\nu}h^{\mu\lambda} . \end{aligned}$$

A.3 Perturbations dans un espace à symétrie maximale

Un espace de référence à symétrie maximale de dimension N de métrique ω_{ij} est caractérisé par un paramètre \mathcal{K} tel que

$${}^{(N)}\bar{R}_{ki\ lj} = \mathcal{K} (\omega_{kl}\omega_{ij} - \omega_{kj}\omega_{il}) , \quad (\text{A.12})$$

$${}^{(N)}\bar{R}_{ij} = \mathcal{K} (N - 1) \omega_{ij} , \quad (\text{A.13})$$

$${}^{(N)}\bar{R} = \mathcal{K} N(N - 1) . \quad (\text{A.14})$$

En tenant compte des perturbations de métrique de la forme

$$\delta\omega_{ij} = \tilde{h}_{ij} = -2\psi\omega_{ij} + 2\nabla_i\nabla_j E + 2\nabla_{(i}\bar{E}_{j)} + 2\bar{\bar{E}}_{ij} \quad (\text{A.15})$$

le scalaire de Ricci s'écrit, au deuxième ordre dans les perturbations,

$$\begin{aligned}
{}^{(N)}R &= N(N-1)\mathcal{K} - (N-1)\mathcal{K}\tilde{h} + (N-1)\mathcal{K}\tilde{h}^{ij}\tilde{h}_{ij} + \nabla_l\nabla_k\tilde{h}^{lk} - \nabla_l\nabla^l\tilde{h} \\
&+ \tilde{h}^{ij}\nabla_i\nabla_j\tilde{h} + \tilde{h}^{ij}\nabla_l\nabla^l\tilde{h}_{ij} - \tilde{h}^{ij}(\nabla_l\nabla_i + \nabla_i\nabla_l)\tilde{h}_j^l \\
&+ \frac{3}{4}\nabla_l\tilde{h}_{ij}\nabla^l\tilde{h}^{ij} - \frac{1}{4}\nabla_l\tilde{h}\nabla^l\tilde{h} + \nabla_i\tilde{h}\nabla_j\tilde{h}^{ij} \\
&- \nabla_l\tilde{h}^{lk}\nabla_i\tilde{h}_k^i - \frac{1}{2}\nabla_l\tilde{h}_{ij}\nabla^j\tilde{h}^{il} .
\end{aligned} \tag{A.16}$$

A.4 Perturbations dans un espace FLRW

Considérons un espace de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker perturbé dont la métrique a pour forme

$$ds^2 = a(\eta)^2 [(1 + 2\phi) d\eta^2 - B_i d\eta dx^i - (\omega_{ij} - h_{ij}) dx^i dx^j] . \tag{A.17}$$

Les sections spatiales forment un espace à symétrie maximale dont les perturbations de métrique sont données par $\tilde{h}_{ij} = -h_{ij}$, \tilde{h}_{ij} ayant la même expression que celle de l'équation (A.15). Dans la suite, la notation ∇_i correspond à la dérivée covariante par rapport à la métrique spatiale non-perturbée ω_{ij} , les indices spatiaux sont montés et descendus à l'aide de la métrique spatiale non-perturbée ω_{ij} . La métrique inverse s'écrit au deuxième ordre

$$g^{00} = \frac{1}{a^2} [1 - 2\phi + 4\phi^2 - B_i B^i] , \tag{A.18}$$

$$g^{0i} = -\frac{1}{a^2} [(1 - 2\phi)B^i - h^{ij}B_j] , \tag{A.19}$$

$$g^{ij} = -\frac{1}{a^2} [\omega^{ij} + h^{ij} + h^{ik}h_k^j - B^i B^j] . \tag{A.20}$$

Dans toute la suite, nous étudierons les perturbations au deuxième ordre.

A.4.1 Symboles de Christoffel

Nous donnons, dans cette partie, l'expression des symboles de Christoffel au deuxième ordre dans les perturbations.

Ordre 0

Les symboles de Christoffel non-perturbés s'écrivent

$$\Gamma_{00}^0 = \mathcal{H}, \quad (\text{A.21})$$

$$\Gamma_{0i}^0 = 0, \quad (\text{A.22})$$

$$\Gamma_{ij}^0 = \mathcal{H}\omega_{ij}, \quad (\text{A.23})$$

$$\Gamma_{00}^i = 0, \quad (\text{A.24})$$

$$\Gamma_{j0}^i = \mathcal{H}\delta_j^i, \quad (\text{A.25})$$

$$\Gamma_{jk}^i = {}^{(3)}\Gamma_{jk}^i. \quad (\text{A.26})$$

Ordre 1

Au premier ordre dans les perturbations,

$$\Gamma_{00}^0 = \phi', \quad (\text{A.27})$$

$$\Gamma_{0i}^0 = \nabla_i \phi + \mathcal{H}B_i, \quad (\text{A.28})$$

$$\Gamma_{ij}^0 = (-2\mathcal{H}\phi - \psi' - 2\mathcal{H}\psi)\omega_{ij} + E'_{ij} + 2\mathcal{H}E_{ij} - \nabla_{(i}B_{j)}, \quad (\text{A.29})$$

$$\Gamma_{00}^i = B'^i + \mathcal{H}B^i + \omega^{ij}\nabla_j\phi, \quad (\text{A.30})$$

$$\Gamma_{j0}^i = -\frac{1}{2}h_j^i + \frac{1}{2}(\nabla_j B^i - \omega^{ik}\nabla_k B^j), \quad (\text{A.31})$$

$$\Gamma_{jk}^i = -\mathcal{H}B^i\omega_{jk} - \frac{1}{2}\omega^{il}[\nabla_j h_{kl} + \nabla_k h_{jl} - \nabla_l h_{jk}]. \quad (\text{A.32})$$

Ordre 2

Au deuxième ordre dans les perturbations, nous obtenons

$$\Gamma_{00}^0 = -2\phi\phi' + B'_i B^i + \mathcal{H}B_i B^i + B^i \nabla_i \phi, \quad (\text{A.33})$$

$$\Gamma_{0i}^0 = -2\mathcal{H}\phi B_i - 2\phi\nabla_i \phi + B^j \nabla_{[i} B_{j]} - \frac{1}{2}h'^j{}_i B_j, \quad (\text{A.34})$$

$$\Gamma_{ij}^0 = (4\mathcal{H}\phi^2 - \mathcal{H}B^k B_k)\omega_{ij} + 2\phi\nabla_{(i} B_{j)} + 2\mathcal{H}\phi h_{ij} + \phi h'_{ij} - \frac{1}{2}B^k [2\nabla_{(i} h_{j)k} - \nabla_k h_{ij}] \quad (\text{A.35})$$

$$\Gamma_{00}^i = -\phi' B^i + B'_j h^{ij} + \mathcal{H}B_j h^{ij} + h^{ij}\nabla_j \phi, \quad (\text{A.36})$$

$$\Gamma_{j0}^i = -\frac{1}{2}h^{ik} h'_{jk} - B^i \nabla_j \phi - \mathcal{H}B^i B_j + h^{ik}\nabla_{[j} B_{k]}, \quad (\text{A.37})$$

$$\Gamma_{jk}^i = 2\mathcal{H}\phi B^i \omega_{jk} - \mathcal{H}\omega_{jk} B_l h^{il} + \frac{1}{2}B^i h'_{jk} + \mathcal{H}B^i h_{jk} + B^i \nabla_{(j} B_{k)} - \frac{1}{2}h^{il} [\nabla_j h_{kl} + \nabla_k h_{jl} - \nabla_l h_{jk}]. \quad (\text{A.38})$$

A.4.2 Tenseur de Ricci

La composante du tenseur de Ricci s'écrit, au deuxième ordre,

$$\begin{aligned}
R_{00} = & -3\mathcal{H}' + \nabla^2(\phi + B' + \mathcal{H}B) + 3\mathcal{H}\phi' + \frac{1}{2}\mathcal{H}h' + \frac{1}{2}h'' \\
& -6\mathcal{H}\phi\phi' - \phi'\nabla^2 B - \frac{1}{2}h'\phi' - \nabla_i\phi\nabla^i\phi + \nabla_i h^{ij}\nabla_j\phi + h^{ij}\nabla_i\nabla_j\phi + \mathcal{H}B^i\nabla_i\phi \\
& + B^i B_i(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2) + \mathcal{H}B_j\nabla_i h^{ij} - \nabla_{[i}B_{j]}\nabla_{[j}B_{i]} + \mathcal{H}h^{ij}\nabla_i B_j + 3\mathcal{H}B'_i B^i \\
& + \nabla_i h^{ij}B'_j + h^{ij}\nabla_i B'_j + \frac{1}{2}\mathcal{H}h^{ij}h'_{ij} + \frac{1}{2}h^{ij}h''_{ij} + \frac{1}{4}h'_{ij}h^{ij'} \\
& - \frac{1}{2}\omega^{ik} [2\nabla_{(i}h_{j)k} - \nabla_k h_{ij}] [\nabla^j\phi + B'^j + \mathcal{H}B^j] . \tag{A.39}
\end{aligned}$$

La composante 0-i du tenseur de Ricci a pour expression

$$\begin{aligned}
R_{0i} = & 2\mathcal{H}\nabla_i\phi + (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)B_i + \frac{1}{2}\nabla_j\nabla_i B^j - \frac{1}{2}\nabla^2 B_i + \frac{1}{2}\nabla_i h' - \frac{1}{2}\nabla_k h'_k \\
& -4\mathcal{H}\phi\nabla_i\phi - 2(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\phi B_i - \mathcal{H}\phi'B_i - \nabla^2 B\nabla_i\phi + \nabla^j\phi\nabla_{(i}B_{j)} - B^j\nabla_j\nabla_i\phi \\
& + \frac{1}{2}h'_{ij}\nabla^j\phi - \frac{1}{2}h'\nabla_i\phi - \mathcal{H}\nabla^2 B B_i + 2\mathcal{H}B^j\nabla_{[i}B_{j]} - B^j\nabla_{(i}B'_{j)} \\
& - \frac{1}{2}B^j h''_{ij} - \mathcal{H}B^j h'_{ij} - \frac{1}{2}\mathcal{H}B_i h' + \nabla_j h^{jk}\nabla_{[i}B_{k]} + h^{jk}\nabla_j\nabla_{[i}B_{k]} \\
& + h^{jk}\nabla_{[i}h'_{j]k} + h'_{k[j}\nabla_i h^{jk} - \frac{1}{4}h'^{jl}\nabla_i h_{jl} + \nabla^{[k}B^{j]}\nabla_{[j}h_{l]i} \\
& + \left(\frac{1}{4}h'_i{}^k\omega^{jl} - \frac{1}{2}\nabla_{[i}B^{k]}\omega^{jl} \right) [\nabla_j h_{kl} + \nabla_k h_{jl} - \nabla_l h_{jk}] . \tag{A.40}
\end{aligned}$$

Enfin la composante i-j s'écrit

$$\begin{aligned}
R_{ij} = & (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{K})\omega_{ij} - [2(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\phi + \mathcal{H}\phi']\omega_{ij} - \nabla_i\nabla_j\phi \\
& - \nabla_{(i}B'_{j)} - \mathcal{H}\nabla^2 B\omega_{ij} - 2\mathcal{H}\nabla_{(i}B_{j)} \\
& - (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)h_{ij} - \mathcal{H}h'_{ij} - \frac{1}{2}\mathcal{H}h'\omega_{ij} - \frac{1}{2}h''_{ij} - \nabla_k\nabla_{(i}h^k_{j)} + \frac{1}{2}\nabla^2 h_{ij} + \frac{1}{2}\nabla_i\nabla_j h \\
& + 4(\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\phi^2\omega_{ij} + 4\mathcal{H}\phi\phi'\omega_{ij} + \nabla_i\phi\nabla_j\phi + 2\phi\nabla_i\nabla_j\phi + \phi'\nabla_{(i}B_{j)} + 2\phi\nabla_{(i}B'_{j)} \\
& + 2\mathcal{H}\omega_{ij}\phi\nabla^2 B + \mathcal{H}B^k\nabla_k\phi\omega_{ij} + 4\mathcal{H}\phi\nabla_{(i}B_{j)} - \frac{1}{2}\nabla_k B_i\nabla^k B_j - \frac{1}{2}\nabla_i B_k\nabla_j B^k \\
& + B^k\nabla_k\nabla_{(i}B_{j)} - B^k\nabla_j\nabla_i B_k + \nabla^2 B\nabla_{(i}B_{j)} - (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\omega_{ij}B_k B^k \\
& - \mathcal{H}B'_k B^k\omega_{ij} + 2(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\phi h_{ij} + \mathcal{H}\phi'h_{ij} + 2\mathcal{H}\phi h'_{ij} + \mathcal{H}\phi h'\omega_{ij} + \frac{1}{2}\phi'h'_{ij} + \phi h''_{ij} \\
& - \frac{1}{2}\nabla^k\phi[2\nabla_{(i}h_{j)k} - \nabla_k h_{ij}] - \frac{1}{2}B'^k[2\nabla_{(i}h_{j)k} - \nabla_k h_{ij}] - \frac{1}{2}B^k[2\nabla_{(i}h'_{j)k} - \nabla_k h'_{ij}] \\
& - \mathcal{H}B^k[2\nabla_{(i}h_{j)k} - \nabla_k h_{ij}] + \mathcal{H}\nabla^2 B h_{ij} + \frac{1}{2}\nabla^2 B h'_{ij} + \frac{1}{2}B^k\nabla_k h'_{ij} \\
& - \mathcal{H}\omega_{ij}h^{kl}\nabla_k B_l - \mathcal{H}\omega_{ij}B_l\nabla_k h^{kl} + \frac{1}{2}\mathcal{H}\omega_{ij}B^k\nabla_k h + \frac{1}{2}h'\nabla_{(i}B_{j)} - \nabla^k B_{(i}h'_{j)k} \\
& + \mathcal{H}h_i^k\nabla_{[j}B_{k]} + \mathcal{H}h_j^k\nabla_{[i}B_{k]} + \frac{1}{4}h'h'_{ij} + \frac{1}{2}\mathcal{H}h'h_{ij} - \frac{1}{2}h_i^k h'_{jk} - \frac{1}{2}\mathcal{H}h^{kl}h'_{kl}\omega_{ij} + \frac{1}{2}\nabla_i h_{kl}\nabla_j h^{kl} \\
& - \frac{1}{2}\nabla_k h^{kl}[2\nabla_{(i}h_{j)l} - \nabla_j h_{ij}] - \frac{1}{2}h^{kl}[2\nabla_k\nabla_{(i}h_{j)l} - \nabla_k\nabla_l h_{ij}] + \frac{1}{2}h^{kl}\nabla_i\nabla_j h_{kl} \\
& + \frac{1}{4}\nabla_k h[2\nabla_{(i}h_{j)k} - \nabla^k h_{ij}] - \frac{1}{4}[2\nabla_{(i}h^l_{k)} - \nabla^l h_{ik}][2\nabla_{(j}h^k_{l)} - \nabla^k h_{jl}]. \tag{A.41}
\end{aligned}$$

A.4.3 Scalaire de Ricci

On en déduit le scalaire de Ricci

$$\begin{aligned}
Ra^2 = & -6\mathcal{K} - 6(\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) + 6\mathcal{H}\Delta B + 2\Delta B' + 2\Delta\phi + 6\mathcal{H}\phi' + 12(\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\phi \\
& + \nabla_i \nabla_j h^{ij} - \Delta h + 3\mathcal{H}h' + h'' - 2\mathcal{K}h \\
& - 24(\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\phi^2 - 24\mathcal{H}\phi\phi' - 4\phi\Delta\phi - 2\nabla_i \phi \nabla^i \phi \\
& - 12\mathcal{H}\phi\Delta B - 2\phi'\Delta B - 4\phi\Delta B' - 6\mathcal{H}B^i \nabla_i \phi \\
& + 6(\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)B_i B^i + 6\mathcal{H}B'_i B^i - (\Delta B)^2 \\
& - 6\mathcal{H}\phi h' - \phi' h' - 2\phi h'' + 2h^{ij} \nabla_i \nabla_j \phi + 2\nabla_i h^{ij} \nabla_j \phi - \nabla_i h \nabla^i \phi \\
& + B^k \Delta B_k - B^k \nabla_k \Delta B - B^i \nabla_j \nabla_i B^j + B^i \Delta B_i - \frac{1}{2} \nabla_i B_j \nabla^j B^i + \frac{3}{2} \nabla_i B_j \nabla^i B^j \\
& - 6\mathcal{H}h^{ij} \nabla_i B_j + 6\mathcal{H}B_j \nabla_i h^{ij} + 2h^{ij} \nabla_i B'_j + 2B'_i \nabla_j h^{ij} \\
& + h'^{ij} \nabla_i B_j + 2B_i \nabla_j h'^{ij} - h' \Delta B - 3\mathcal{H}B^i \nabla_i h - 2B^i \nabla_i h' - B'^i \nabla_i h \\
& - 2\mathcal{K}h_{ij} h^{ij} + 3\mathcal{H}h^{ij} h'_{ij} + h^{ij} h''_{ij} + \frac{3}{4} h'_{ij} h'^{ij} - \frac{1}{4} h'^2 \\
& + 2h^{ij} \nabla_{(i} \nabla_k h^k_{j)} - h^{ij} \Delta h_{ij} - h^{ij} \nabla_i \nabla_j h \\
& + \nabla_i h^{ij} \nabla_k h^k_j + \frac{1}{2} \nabla_j h^{ik} \nabla_i h^j_k - \frac{3}{4} \nabla_i h^{jk} \nabla^i h_{jk} - \nabla_i h \nabla_j h^{ij} + \frac{1}{4} \nabla_i h \nabla^i h \quad (\text{A.42})
\end{aligned}$$

A.4.4 Tenseur d'Einstein

Le tenseur d'Einstein est défini par

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} . \quad (\text{A.43})$$

En utilisant les résultats précédents, nous obtenons pour la composante G_{00}

$$\begin{aligned} G_{00} = & 3\mathcal{H}^2 + 3\mathcal{K} - 2\mathcal{H}\Delta B - \mathcal{H}h' + \mathcal{K}h + 6\mathcal{K}\phi + \frac{1}{2}\Delta h - \frac{1}{2}\nabla_i\nabla_j h^{ij} \\ & + 2\mathcal{K}h\phi + \mathcal{K}h^{ij}h_{ij} + \phi\Delta h - \phi\nabla_i\nabla_j h^{ij} + 4\mathcal{H}B^i\nabla_i\phi \\ & - (\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}')B_iB^i - \frac{1}{2}\nabla_{(i}B_{j)}\nabla^{(i}B^{j)} - 2\mathcal{H}h^{ij}\nabla_iB_j - 2\mathcal{H}B_j\nabla_i h^{ij} \\ & + \mathcal{H}B^i\nabla_i h + \frac{1}{2}(\Delta B)^2 + \frac{1}{2}B^k\nabla_k\Delta B - B^k\Delta B_k \\ & + \frac{1}{2}B^i\nabla_j\nabla_iB^j - \frac{1}{2}\nabla_jB_i h^{ij} \\ & - B_i\nabla_j h^{ij} + \frac{1}{2}h'\Delta B + B^i\nabla_i h' + \frac{1}{8}h'^2 \\ & - \mathcal{H}h^{ij}h'_{ij} - \frac{1}{8}h'_{ij}h'^{ij} + \frac{1}{2}h^{ij}\nabla_i\nabla_j h \\ & + \frac{1}{2}\nabla_i h\nabla_j h^{ij} + \frac{3}{8}\nabla_i h_{kl}\nabla^i h^{kl} - \frac{1}{2}\nabla_k h^{kl}\nabla_i h_l^i \\ & - \frac{1}{4}\nabla_k h^{il}\nabla_i h_l^k - h^{ij}\nabla_{(i}\nabla_{k)}h_j^k - \frac{1}{8}\nabla_k h\nabla^k h + \frac{1}{2}h^{ij}\Delta h_{ij} . \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

La composante G_{0i} du tenseur d'Einstein vaut

$$\begin{aligned} G_{0i} = & 2\mathcal{H}\nabla_i\phi - (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 + 3\mathcal{K})B_i + \frac{1}{2}\nabla_i h' - \frac{1}{2}\nabla_k h_i'^k + \frac{1}{2}\nabla_j\nabla_i B^j \\ & - \frac{1}{2}\Delta B_i - 4\mathcal{H}\phi\nabla_i\phi + 2(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\phi B_i + 2\mathcal{H}\phi' B_i \\ & - \Delta B\nabla_i\phi - B^j\nabla_j\nabla_i\phi + B_i\Delta\phi + \nabla^j\phi\nabla_{(i}B_{j)} + 2\mathcal{H}B_i\Delta B \\ & + 2\mathcal{H}B^j\nabla_{[i}B_{j]} - B^j\nabla_{(i}B'_{j)} + \mathcal{H}B_i h' - \mathcal{K}hB_i - \frac{1}{2}B^k h''_{ki} - \mathcal{H}B^j h'_{ij} \\ & + B_i\Delta B' + \frac{1}{2}B_i h'' - \frac{1}{2}B_i\Delta h + \frac{1}{2}B_i\nabla_j\nabla_k h^{jk} + \nabla_j h^{jk}\nabla_{[i}B_{k]} + h^{jk}\nabla_j\nabla_{[i}B_{k]} \\ & + h^{jk}\nabla_{[i}h'_{j]k} + h'_{k[j}\nabla_{i]}h^{jk} + \frac{1}{4}h'_{ik}\nabla^k h - \frac{1}{2}\nabla^k h\nabla_{[i}B_{k]} \\ & - \frac{1}{4}h'_{jk}\nabla_i h^{jk} + \nabla_{[j}h_{k]i}\nabla^{[k}B^{j]} + \frac{1}{2}h'_{ij}\nabla^j\phi - \frac{1}{2}h'\nabla_i\phi . \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

Enfin, nous exprimons la composante G_{ij} du tenseur d'Einstein

$$\begin{aligned}
G_{ij} = & -(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 + \mathcal{K})\omega_{ij} + 2(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\phi\omega_{ij} + 2\mathcal{H}\phi'\omega_{ij} + \Delta\phi\omega_{ij} - \nabla_i\nabla_j\phi \\
& + \Delta B'\omega_{ij} - \nabla_{(i}B'_{j)} + 2\mathcal{H}[\Delta B - \nabla_{(i}B_{j)}] + \frac{1}{2}(h''\omega_{ij} - h''_{ij}) + \mathcal{H}(h'\omega_{ij} - h'_{ij}) \\
& - \frac{1}{2}(\Delta h\omega_{ij} - \Delta h_{ij}) + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 + 3\mathcal{K})h_{ij} - \mathcal{K}h\omega_{ij} - \nabla_k\nabla_{(i}h_{j)}^k + \frac{1}{2}\nabla_i\nabla_j h \\
& + \frac{1}{2}\nabla_k\nabla_l h^{kl}\omega_{ij} - 4(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\phi^2\omega_{ij} - 8\mathcal{H}\phi\phi'\omega_{ij} - (\nabla_k\phi\nabla^k\phi\omega_{ij} - \nabla_i\phi\nabla_j\phi) \\
& - 2\phi(\Delta\phi\omega_{ij} - \nabla_i\nabla_j\phi) - \phi'[\Delta B\omega_{ij} - \nabla_{(i}B_{j)}] - 2\phi[\Delta B'\omega_{ij} - \nabla_{(i}B'_{j)}] \\
& - 4\mathcal{H}\phi[\Delta B\omega_{ij} - \nabla_{(i}B_{j)}] - 2\mathcal{H}B^k\nabla_k\phi\omega_{ij} + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)B_kB^k\omega_{ij} + 2\mathcal{H}B^kB'_k\omega_{ij} \\
& - \frac{1}{2}(\Delta B)^2\omega_{ij} - \frac{1}{2}B^k\nabla_k\Delta B\omega_{ij} - \frac{1}{2}B^k\nabla_l\nabla_k B^l\omega_{ij} + B^k\Delta B_k\omega_{ij} - \frac{1}{4}\nabla_k B_l\nabla^l B^k\omega_{ij} \\
& + \frac{3}{4}\nabla_k B_l\nabla^k B^l\omega_{ij} - \frac{1}{2}\nabla_i B^k\nabla_j B_k - \frac{1}{2}\nabla_k B_i\nabla^k B_j + B^k\nabla_k\nabla_{(i}B_{j)} - B^k\nabla_{(i}\nabla_{j)}B_k \\
& + \Delta B\nabla_{(i}B_{j)} - 2\mathcal{H}\phi(h'\omega_{ij} - h'_{ij}) - \frac{1}{2}(h'\omega_{ij} - h'_{ij})\phi' - \phi(h''\omega_{ij} - h''_{ij}) - 2\mathcal{H}\phi'h_{ij} \\
& - 2(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\phi h_{ij} - h_{ij}(\Delta\phi + \Delta B' + 2\mathcal{H}\Delta B) - \frac{1}{2}\Delta B(h'\omega_{ij} - h'_{ij}) + h^{kl}\nabla_k B'_l\omega_{ij} \\
& - \frac{1}{2}(\nabla_k h\nabla^k\phi\omega_{ij} - \nabla_k h_{ij}\nabla^k\phi) + 2\mathcal{H}h^{kl}\nabla_k B_l\omega_{ij} + 2\mathcal{H}B_k\nabla_l h^{kl}\omega_{ij} + \mathcal{H}h_i{}^k\nabla_{[j}B_{k]} \\
& + \mathcal{H}h_j{}^k\nabla_{[i}B_{k]} - 2\mathcal{H}B^k\nabla_{(i}h_{j)k} + \mathcal{H}B^k\nabla_k(h_{ij} - h\omega_{ij}) - B^k\nabla_k(h'\omega_{ij} - h'_{ij}) \\
& - B^k\nabla_{(i}h'_{j)k} + B_k\nabla_l h'^{kl}\omega_{ij} + \frac{1}{2}h'^{kl}\nabla_k B_l\omega_{ij} - \nabla_k B_{(i}h'_{j)k} + \frac{1}{2}h'\nabla_{(i}B_{j)} \\
& + h^{kl}\nabla_k\nabla_l\phi\omega_{ij} - \nabla_k\phi\nabla_{(i}h_{j)}^k + \nabla_k h^{kl}\nabla_l\phi\omega_{ij} - \frac{1}{2}B'_k\nabla^k(h\omega_{ij} - h_{ij}) \\
& - B'_k\nabla_{(i}h_{j)}^k + B'_k\nabla_l h^{kl}\omega_{ij} - \mathcal{K}h^{kl}h_{kl}\omega_{ij} + \mathcal{K}hh_{ij} + \frac{1}{2}h^{kl}h''_{kl}\omega_{ij} - \frac{1}{2}h''h_{ij} \\
& - \mathcal{H}h'h_{ij} + \mathcal{H}h^{kl}h'_{kl}\omega_{ij} - \frac{1}{4}h'(\frac{1}{2}h'\omega_{ij} - h'_{ij}) - \frac{1}{2}h'_{ik}h'_j{}^k + \frac{3}{8}h'^{kl}h'_{kl}\omega_{ij} \\
& - \frac{1}{2}h^{kl}\nabla_k\nabla_l h\omega_{ij} + \frac{1}{2}h_{ij}\Delta h - \frac{1}{2}h_{ij}\nabla_k\nabla_l h^{kl} - \frac{1}{2}h^{kl}\Delta h_{kl}\omega_{ij} + h^{kl}\nabla_{(k}\nabla_{m)}h_l{}^m\omega_{ij} \\
& - h^{kl}\nabla_k\nabla_{(i}h_{j)l} + \frac{1}{2}h^{kl}\nabla_k\nabla_l h_{ij} + \frac{1}{2}h^{kl}\nabla_{(i}\nabla_{j)}h_{kl} + \frac{1}{4}\nabla^k h[2\nabla_{(i}h_{j)k} - \nabla_k h_{ij}] \\
& - \frac{1}{4}[2\nabla_{(i}h_{k)l} - \nabla_l h_{ik}][2\nabla_{(j}h^l{}^k - \nabla^k h'_j{}^l] + \frac{1}{8}\nabla_k h\nabla^k h\omega_{ij} + \frac{1}{4}\nabla_k h^{ml}\nabla_m h_l{}^k\omega_{ij} \\
& - \frac{1}{2}\nabla_k h\nabla_l h^{kl}\omega_{ij} - \frac{3}{8}\nabla_k h_{lm}\nabla^k h^{lm}\omega_{ij} + \frac{1}{2}\nabla_k h^{kl}\nabla_m h_l{}^m\omega_{ij} + \frac{1}{2}\nabla_i h_{kl}\nabla_j h^{kl} \\
& - \frac{1}{2}\nabla_k h^{kl}[2\nabla_{(i}h_{j)l} - \nabla_l h_{ij}].
\end{aligned}$$

A.5 Tenseur énergie-impulsion

Considérons le tenseur énergie-impulsion d'un fluide parfait

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu - u^\lambda u_\lambda P g_{\mu\nu} , \quad (\text{A.46})$$

où ρ et P sont respectivement la densité d'énergie et la pression du fluide. La quadri-vitesse décrivant le mouvement d'ensemble du fluide est notée u^μ .

Les composantes de la quadri-vitesse vérifient la relation de normalisation

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1 . \quad (\text{A.47})$$

A l'ordre 0, le fluide est au repos et

$$\bar{u}^\mu = \frac{1}{a}(1, \mathbf{0}) \quad \text{et} \quad \bar{u}_\mu = a(1, \mathbf{0}) . \quad (\text{A.48})$$

Notons v^i les perturbations spatiales de la vitesse du fluide, avec $v^i \equiv \nabla^i v + \bar{v}^i$. La quadri-vitesse prend alors la forme suivante, au deuxième ordre dans les perturbations,

$$u^\mu = \frac{1}{a}\delta_0^\mu \left(1 - \phi + \frac{3}{2}\phi^2 + v_i B^i + \frac{1}{2}v_i v^i \right) + \frac{1}{a}\delta_i^\mu v^i , \quad (\text{A.49})$$

tandis que

$$u_\mu = a\delta_\mu^0 \left(1 + \phi - \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{2}v_i v^i \right) + a\delta_\mu^i (-B_i - v_i + \phi B_i + h_{ij}v^j) . \quad (\text{A.50})$$

À l'ordre 0, la pression et la densité sont reliées par l'équation d'état $P_0 = w \rho_0$ tandis que les perturbations de pression δP sont reliées aux perturbations de densité $\delta\rho$ par

$$\delta P = c_s^2 \delta\rho + w \rho_0 \Gamma , \quad (\text{A.51})$$

le terme Γ étant relié aux perturbations d'entropie. En effet, dans le cas d'une évolution adiabatique,

$$\frac{P'}{\rho'} = c_s^2 = \left(\frac{\delta P}{\delta\rho} \right)_s . \quad (\text{A.52})$$

Les composantes du tenseur énergie-impulsion, en l'absence de pression anisotrope, se mettent sous la forme

$$T^0_0 = \rho_0 \left[1 + \frac{\delta\rho}{\rho_0} + (1+w)(v^i v_i + v^i B_i) \right] , \quad (\text{A.53})$$

$$T^i_0 = \rho_0 v^i \left[\frac{\delta\rho}{\rho_0} (1+c_s^2) + (1+w)(1+\phi) + w\Gamma \right] , \quad (\text{A.54})$$

$$T^0_i = \rho_0 \left[\frac{\delta\rho}{\rho_0} (1+c_s^2) (-B_i - v_i) - w\Gamma (B_i + v_i) + (1+w)(-B_i - v_i + \phi v_i + 2\phi B_i + h_{ij}v^j) \right] , \quad (\text{A.55})$$

$$T^i_j = \rho_0 \left[\left(-c_s^2 \frac{\delta\rho}{\rho_0} - w(1+\Gamma) \right) \delta_j^i - (1+w)v^i (v_j + B_j) \right] . \quad (\text{A.56})$$

Nous utiliserons également les composantes covariantes du tenseur énergie-impulsion

$$T_{00} = \rho_0 a^2 \left[(1 + 2\phi) \left(1 + \frac{\delta\rho}{\rho_0} \right) + (1 + w)v^i v_i \right], \quad (\text{A.57})$$

$$T_{0i} = \rho_0 a^2 \left[-B_i - w \Gamma v_i + (1 + w) (-v_i - \phi v_i + h_{ij} v^j) \right] \\ + \delta\rho a^2 \left[-B_i + (1 + c_s^2) v_i \right], \quad (\text{A.58})$$

$$T_{ij} = \rho_0 a^2 \left[w(1 + \Gamma)(\omega_{ij} - h_{ij}) + c_s^2 \frac{\delta\rho}{\rho_0} (\omega_{ij} - h_{ij}) \right. \\ \left. + (1 + w)(B_i + v_i)(B_j + v_j) \right] \quad (\text{A.59})$$

ANNEXE B

Transformation de jauge

Sommaire

B.1 Transformations de la métrique	311
B.2 Tenseur énergie-impulsion	313

Cette annexe détaille les transformations des quantités perturbées sous une transformation de jauge du deuxième ordre. Les transformations des perturbations de métrique sont étudiées dans la partie B.1, celles des perturbations du tenseur énergie-impulsion dans la partie B.2.

B.1 Transformations de la métrique

Considérons la métrique perturbée d'un espace de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker

$$ds^2 = a(\eta)^2 \left[(1 + 2\phi) d\eta^2 - B_i d\eta dx^i - (\omega_{ij} - h_{ij}) dx^i dx^j \right], \quad (\text{B.1})$$

avec

$$h_{ij} = 2\psi \omega_{ij} - 2\nabla_i \nabla_j E - 2\nabla_{(i} \bar{E}_{j)} - 2\bar{\bar{E}}_{ij}. \quad (\text{B.2})$$

Les indices spatiaux sont montés et descendus à l'aide de la métrique spatiale non-perturbée. Les symboles ∇_i , \bar{D}_μ et D_μ correspondent respectivement aux dérivées covariantes par rapport à la métrique spatiale non-perturbée ω_{ij} , la métrique de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker non-perturbée \bar{g}_{ij} et la métrique perturbée

$g_{\mu\nu}$. Soit un champ de vecteurs ξ^μ induisant la transformation de jauge suivante

$$x^\mu \mapsto \tilde{x}^\mu = e^{\xi^\nu \partial_\nu} x^\mu . \quad (\text{B.3})$$

La m etricque se transforme alors selon

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\mu\nu} &= e^{-\mathcal{L}_\xi} g_{\mu\nu} \\ &= g_{\mu\nu} - \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \mathcal{L}_\xi \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} + o(\xi^2) . \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

En explicitant les termes en dérivées de Lie au deuxième ordre en puissance des perturbations, nous obtenons

$$\phi \mapsto \phi - (\xi^{0'} + \mathcal{H}\xi^0)(1 + 2\phi) - \xi^0 \phi' - \xi^i \nabla_i \phi + B_i \xi'^i + \frac{1}{2a^2} \mathcal{L}_\xi \bar{D}_0 \xi_0 , \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned} B_i \mapsto & B_i + \nabla_i \xi^0 (1 + 2\phi) - \xi'^j [\omega_{ij} - h_{ij}] - (\xi^{0'} + 2\mathcal{H}\xi^0) B_i \\ & - \xi^0 B'_i - B_j \nabla_i \xi^j - \xi^j \nabla_j B_i - \frac{1}{a^2} \mathcal{L}_\xi \bar{D}_{(0}\xi_{i)} , \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} h_{ij} \mapsto & h_{ij} + 2B_{(i} \nabla_{j)} \xi^0 + 2\mathcal{H}\xi^0 [\omega_{ij} - h_{ij}] - \xi^0 h'_{ij} \\ & + 2 [\omega_{k(i} - h_{k(i)}] \nabla_{j)} \xi^k - \xi^k \nabla_k h_{ij} + \frac{1}{a^2} \mathcal{L}_\xi \bar{D}_{(i}\xi_{j)} . \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi D_0 \xi_0 &= a^2 \left[\xi^0 \xi^{0''} + 5\mathcal{H}\xi^0 \xi^{0'} + \xi^{02} (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2) + 2\xi^{0'2} \right. \\ & \left. + (\xi^i \nabla_i \xi^{0'} + \xi'^i \nabla_i \xi^0) + \mathcal{H}\xi^i \nabla_i \xi^0 - \omega_{ij} \xi'^i \xi'^j \right] \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi D_{(0}\xi_{i)} &= a^2 \left[-\frac{1}{2} \omega_{ij} \xi^0 \xi''^j - 2\omega_{ij} \mathcal{H}\xi^0 \xi'^j - \frac{1}{2} \omega_{ij} \xi^{0'} \xi'^j \right. \\ & + \frac{3}{2} \nabla_i \xi^0 \xi^{0'} + 2\mathcal{H}\xi^0 \nabla_i \xi^0 + \frac{1}{2} \xi^0 \nabla_i \xi^{0'} - \frac{1}{2} \omega_{ij} \xi^k \nabla_k \xi^j - \frac{1}{2} \omega_{ij} \xi^{k'} \nabla_k \xi^j \\ & \left. - \omega_{jk} \xi^{k'} \nabla_i \xi^j + \frac{1}{2} \xi^k \nabla_k \nabla_i \xi^0 + \frac{1}{2} \nabla_i \xi^j \nabla_j \xi^0 \right] \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi D_{(i}\xi_{j)} &= -a^2 \omega_{ij} \left[\mathcal{H}\xi^0 \xi^{0'} + \mathcal{H}\xi^k \nabla_k \xi^0 + (2\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}') \xi^{02} \right] \\ & - a^2 \omega_{k(j} \left[\nabla_{i)} \xi'^k \xi^0 + 4\mathcal{H}\nabla_{i)} \xi^k \xi^0 + \nabla_{i)} \xi^0 \xi'^k + \nabla_{i)} \xi'^l \nabla_l \xi^k + \xi^{[l} \nabla_{|l} \nabla_{i)} \xi^k \right] \\ & - a^2 \omega_{kl} \nabla_{(i} \xi^k \nabla_{j)} \xi^l + a^2 \nabla_{(i} \xi^0 \nabla_{j)} \xi^0 . \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Posons $\xi^\mu \equiv (T, L^i)$ avec $L^i = \nabla^i L + \bar{L}^i$. Les indices spatiaux contenus dans L^i sont montés et descendus à l'aide de la m etricque spatiale non-perturbée. Les lois de

transformations pour chacune des quantités perturbées de la métrique deviennent

$$\begin{aligned}\tilde{\phi} &= \phi - (T' + \mathcal{H}T)(1 + 2\phi) - T\phi' - L^i \nabla_i \phi + B_i L^i \\ &\quad + \frac{1}{2}T [T'' + 5\mathcal{H}T' + (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)T] + T'^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} (L^i \nabla_i T' + L'^i \nabla_i T) + \frac{1}{2}\mathcal{H}L^i \nabla_i T - \frac{1}{2}L'^i L'_i ,\end{aligned}\tag{B.11}$$

$$\begin{aligned}\tilde{B}_i &= B_i + (1 + 2\phi)\nabla_i T - L'^j [(1 - 2\psi)\omega_{ij} + 2E_{ij}] \\ &\quad - (T' + 2\mathcal{H}T)B_i - TB'_i - B_j \nabla_i L^j - L^j \nabla_j B_i \\ &\quad + \frac{1}{2}T (L''_i + 4\mathcal{H}L'_i - \nabla_i T' - 4\mathcal{H}\nabla_i T) + \frac{1}{2}T'(L'_i - 3\nabla_i T) \\ &\quad + \frac{1}{2}L^k \nabla_k L'_i - \frac{1}{2}L^k \nabla_k \nabla_i T - \frac{1}{2}\nabla_i L^k \nabla_k T + \frac{1}{2}L'^k \nabla_k L_i + L'_j \nabla_i L^j\end{aligned}\tag{B.12}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\psi} &= \psi + \mathcal{H}T(1 - 2\psi) - T\psi' - L^i \nabla_i \psi \\ &\quad - \frac{1}{2}T [\mathcal{H}T' + (2\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}')T] - \frac{1}{2}L^k \nabla_k T ,\end{aligned}\tag{B.13}$$

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{ij} &= E_{ij} - B_{(i} \nabla_{j)} T - (1 - 2\psi)\nabla_{(i} L_{j)} - 2E_{k(i} \nabla_{j)} L^k - (E'_{ij} + 2\mathcal{H}E_{ij})T - L^k \nabla_k E_{ij} \\ &\quad + \frac{1}{2} [T\nabla_{(i} L'_{j)} + L'_{(i} \nabla_{j)} T + 4\mathcal{H}T\nabla_{(i} L_{j)} + L^m \nabla_m \nabla_{(i} L_{j)} + \nabla_m L_{(i} \nabla_{j)} L^m] \\ &\quad + \frac{1}{2}\nabla_i L_k \nabla_j L^k - \frac{1}{2}\nabla_i T \nabla_j T .\end{aligned}\tag{B.14}$$

B.2 Tenseur énergie-impulsion

Considérons le tenseur énergie-impulsion d'un fluide parfait

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu} ,\tag{B.15}$$

où $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ et $P = P_0 + \delta P$ sont respectivement la densité d'énergie et la pression du fluide. L'équation d'état prend la forme $P_0 = w\rho_0$ tandis que les perturbations de pression et de densité sont reliées par $\delta P = c_s^2 \delta\rho + w\rho_0 \Gamma$. Γ s'apparente ici aux perturbations d'entropie. La quadri-vitesse du fluide prend la forme

$$u^\mu = \frac{1}{a}\delta_0^\mu(1 + v^0) + \frac{1}{a}\delta_i^\mu v^i ,\tag{B.16}$$

v^i correspondant à la partie spatiale de la vitesse, qui est nulle lorsque le fluide est au repos. La pression et la densité sont toutes deux des scalaires et se transforment

donc de la façon suivante

$$\begin{aligned} \delta\rho \longmapsto & \delta\rho - T\rho'_0 \left(1 + \frac{\delta\rho'}{\rho'_0}\right) - L^i \nabla_i \delta\rho \\ & + \frac{1}{2} T^2 \rho''_0 + \frac{1}{2} \rho'_0 (TT' + L^i \nabla_i T), \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

$$\begin{aligned} \delta P \longmapsto & \delta P - TP'_0 \left(1 + \frac{\delta P'}{P'_0}\right) - L^i \nabla_i \delta P \\ & + \frac{1}{2} T^2 P''_0 + \frac{1}{2} P'_0 (TT' + L^i \nabla_i T). \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

La vitesse, quant à elle, se transforme comme un quadri-vecteur selon

$$\begin{aligned} v^i \longmapsto & v^i + (1 - \phi)L^i - T(v^i - \mathcal{H}v^i) - L^j \nabla_j v^i + v^j \nabla_j L^i \\ & + \frac{1}{2} T' L^i - \frac{1}{2} T L'^i + \frac{1}{2} L'^j \nabla_j L^i - \frac{1}{2} L^j \nabla_j L^i + \mathcal{H} T L^i. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

ANNEXE C

Formalisme 3+1

Sommaire

C.1	Forme de la métrique	315
C.2	Interprétation géométrique	316
C.3	Équations d'évolution	316
C.4	Décomposition des perturbations	317

C.1 Forme de la métrique

Le formalisme ADM permet une approche plus élégante de la théorie des perturbations. La métrique s'écrit de façon générale

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= N^2(x, t) dt^2 - \gamma_{ij} (N^i dt + dx^i) (N^j dt + dx^j) . \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

La fonction N est appelée fonction de retard tandis que N_i est le vecteur déplacement. La métrique spatiale perturbée γ_{ij} permet de monter et descendre les indices du vecteur N_i . Les éléments de la métrique s'écrivent sous la forme

$$g_{00} = N^2 - \gamma_{ij} N^i N^j , \quad (\text{C.2})$$

$$g_{0i} = -\gamma_{ij} N^j , \quad (\text{C.3})$$

$$g_{ij} = -\gamma_{ij} , \quad (\text{C.4})$$

tandis que la métrique inverse est donnée par

$$g^{00} = \frac{1}{N^2}, \quad (\text{C.5})$$

$$g^{0i} = -\frac{N^i}{N^2}, \quad (\text{C.6})$$

$$g^{ij} = -\gamma^{ij} + \frac{N^i N^j}{N^2}. \quad (\text{C.7})$$

L'équation C.1 permet d'exprimer le déterminant de la métrique g en fonction de celui de la métrique spatiale

$$g = N^2 \gamma, \quad (\text{C.8})$$

où l'on a noté

$$g = \det(g_{ij}) \quad \text{et} \quad \gamma = \det(\gamma_{ij}). \quad (\text{C.9})$$

C.2 Interprétation géométrique

Le formalisme ADM permet d'étudier l'évolution des hypersurfaces de genre espace - définies par la condition $\eta = cste$.

Le vecteur normal aux hypersurfaces de temps constant s'écrit

$$n_\beta = N \partial_\eta = (N, 0, 0, 0) \quad (\text{C.10})$$

tandis que la forme associée vaut

$$n^\alpha = \left(\frac{1}{N}, -\frac{N^i}{N} \right). \quad (\text{C.11})$$

La courbure extrinsèque des hypersurfaces de temps conforme constant a pour expression

$$K^i_j = \frac{1}{2N} \left[\nabla_j N^i + \nabla^i N_j - \gamma^{ik} \frac{d}{d\eta} \gamma_{jk} \right]. \quad (\text{C.12})$$

C.3 Équations d'évolution

On considère l'action purement gravitationnelle

$$S[g_{\mu\nu}] = \kappa_4 \int d^4x \sqrt{|g|} R. \quad (\text{C.13})$$

L'action peut alors s'écrire

$$S[g_{\mu\nu}] = \kappa_4 \int \sqrt{\gamma} [N^{(3)}R + (K_{ij}K^{ij} - K^2)]. \quad (\text{C.14})$$

Les équations de contraintes sont obtenues en dérivant l'action par rapport aux champs auxiliaires N et N^i jouant le rôle de multiplicateur de Lagrange.

On a les équations de contrainte suivantes

$${}^{(3)}R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 16\pi G\rho \quad (\text{C.15})$$

$$\nabla_i (K^{ij} - \gamma^{ij}K) = 8\pi Gq_i \quad (\text{C.16})$$

et les équations d'évolution

$$\partial_\eta \gamma_{ij} = \mathcal{L}_{N^i} \gamma_{ij} - 2NK_{ij} \quad (\text{C.17})$$

$$\begin{aligned} \partial_\eta K_{ij} &= \mathcal{L}_{N^i} K_{ij} - \nabla_i \nabla_j N \\ &+ N \left[{}^{(3)}R_{ij} - 2K_{ik}K_j^k + KK_{ij} - 8\pi G \left(P_{ij} - \frac{1}{2}P\gamma_{ij} + \frac{1}{2}\rho\gamma_{ij} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

On note que

$$\mathcal{L}_{N^i} \gamma_{ij} = \nabla_i N_j + \nabla_j N_i \quad (\text{C.19})$$

$$\mathcal{L}_{N^i} K_{ij} = N^k \nabla_k K_{ij} + K_{ik} \nabla_j N^k + K_{kj} \nabla_i N^k . \quad (\text{C.20})$$

On a noté

$$\rho = n^\mu n^\nu T_{\mu\nu} \quad (\text{C.21})$$

$$q_i = -\gamma_i^\mu n^\nu T_{\mu\nu} \quad (\text{C.22})$$

$$P_{ij} = \gamma_i^\mu \gamma_j^\nu T_{\mu\nu} , \quad (\text{C.23})$$

avec

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu \quad (\text{C.24})$$

C.4 Décomposition des perturbations

Les perturbations de métrique autour d'un espace FLRW s'écrivent sous la forme générale

$$ds^2 = a^2 \{ (1 + 2\phi)d\eta^2 - 2B_i d\eta dx^i - [\omega_{ij} - h_{ij}] dx^i dx^j \} . \quad (\text{C.25})$$

Ici les indices des quantités B et h sont montés et descendus à l'aide de la métrique spatiale *non-perturbée* ω_{ij} .

L'identification entre les expressions (C.1) et (C.25) conduit à

$$N_i = a^2 B_i \quad (\text{C.26})$$

$$\gamma_{ij} = a^2 \omega_{ij} - a^2 h_{ij} . \quad (\text{C.27})$$

Nous obtenons également les relations

$$\gamma^{ij} = \frac{1}{a^2} [\omega^{ij} + h^{ij} + h^{ik} h_k^j + h^{ik} h_k^l h_l^j + \dots] , \quad (\text{C.28})$$

$$N^i = a^2 \gamma^{ij} B_j , \quad (\text{C.29})$$

$$N^2 = a^2 [1 + 2\phi + a^2 \gamma^{ij} B_i B_j] . \quad (\text{C.30})$$

Dans un espace à quatre dimensions, le déterminant de la métrique spatiale s'écrit

$$\gamma = \det(\gamma_{ij}) = a^6 \left[1 - h + \frac{1}{2}(h^2 - h^i_j h^j_i) - \frac{1}{6}h^3 + \frac{1}{2}hh^i_j h^j_i - \frac{1}{3}h^i_j h^j_k h^k_i \right], \quad (\text{C.31})$$

où $h = h^i_i$.

Les symboles de Christoffel prennent la forme à *tout ordre dans les perturbations*

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{a^2}{2N^2} [2\mathcal{H}(1 + 2\phi) + 2\phi'] - \frac{N^i}{2N^2} a^2 (-4\mathcal{H}B_i - 2B'_i - 2\nabla_i\phi), \\ \Gamma_{00}^i &= -a^2 \frac{N^i}{2N^2} [2\mathcal{H}(1 + 2\phi) + 2\phi'] + \frac{a^2}{2} \left(\frac{N^i N^j}{N^2} - \gamma^{ij} \right) (-4\mathcal{H}B_j - 2B'_j - 2\nabla_j\phi), \\ \Gamma_{0i}^0 &= \frac{a^2}{N^2} \nabla_i\phi - \frac{N^j}{2N^2} (-\gamma'_{ij} - 2a^2 \nabla_{[i} B_{j]}) , \\ \Gamma_{0i}^k &= -a^2 \frac{N^k}{N^2} \nabla_i\phi + \frac{1}{2} \left(\frac{N^k N^j}{N^2} - \gamma^{kj} \right) (-\gamma'_{ij} - 2a^2 \nabla_{[i} B_{j]}) , \\ \Gamma_{ij}^0 &= \frac{1}{2N^2} (\gamma'_{ij} - 2a^2 \nabla_{(i} B_{j)}) - a^2 \frac{N^k}{2N^2} (\nabla_i h_{jk} + \nabla_j h_{ik} - \nabla_k h_{ij}) , \\ \Gamma_{ji}^k &= {}^{(3)}\Gamma_{ji}^k + \frac{N^k}{N^2} (-\gamma'_{ij} + 2a^2 \nabla_{(i} B_{j)}) \\ &\quad + \frac{a^2}{2} \left(\frac{N^k N^l}{N^2} - \gamma^{kl} \right) (\nabla_i h_{jl} + \nabla_j h_{il} - \nabla_l h_{ij}) . \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

ANNEXE D

Opérateur de Liouville

Cette annexe présente le calcul de l'opérateur de Liouville à tout ordre dans les perturbations.

D.1 Feuilletage 3+1

Considérons la trajectoire géodésique d'un photon $x^\mu(\lambda)$ dont le vecteur tangent, vaut

$$p^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} . \quad (\text{D.1})$$

Nous choisissons le paramètre affine λ tel que $dx^0 = d\eta = p^0 d\lambda$. Dans ces conditions, l'impulsion des photons s'écrit

$$\frac{dx^\mu}{d\eta} = \frac{k^\mu}{k^0} . \quad (\text{D.2})$$

Écrivons alors la métrique sous la forme

$$ds^2 = N^2 d\eta^2 - \gamma_{ij} (N^i d\eta + dx^i) (N^j d\eta + dx^j) . \quad (\text{D.3})$$

Le vecteur unitaire normal aux hypersurfaces de temps constant s'écrit

$$n_\mu \equiv N \partial_\eta = (N, 0, 0, 0) \quad \text{et} \quad n^\mu = g^{\mu\nu} n_\nu = \frac{1}{N} (1, -N^i) . \quad (\text{D.4})$$

Nous pouvons décomposer l'énergie \mathcal{E} et la direction de propagation γ^μ des photons sous la forme

$$\mathcal{E} = p^\mu n_\mu \quad \text{et} \quad \gamma^\mu = \frac{p^\mu}{\mathcal{E}} - n^\mu . \quad (\text{D.5})$$

D'après le choix de ces définitions

$$\mathcal{E} = \frac{p^0}{N}, \quad \gamma^\mu n_\mu = 0, \quad \gamma^\mu \gamma_\mu = -1, \quad \gamma^0 = 0. \quad (\text{D.6})$$

D.2 Opérateur de Liouville

Appliqué à une fonction de distribution $f(x^\mu, p^\mu) = f(\eta, x^i, \mathcal{E}, \tilde{\gamma}^\mu)$, l'opérateur de Liouville se met sous la forme

$$\mathcal{L}[f] \equiv \frac{df}{d\eta} = \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{p^i}{p^0} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{d\mathcal{E}}{d\eta} \frac{\partial f}{\partial \mathcal{E}} + \frac{d\tilde{\gamma}^i}{d\eta} \frac{\partial f}{\partial \tilde{\gamma}^i}. \quad (\text{D.7})$$

Il suffit d'exprimer chacun des coefficients de ce développement.

$$\frac{p^i}{p^0} = N\gamma^i - N^i \quad (\text{D.8})$$

puis

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{d\eta} &= \frac{dp^\mu}{d\eta} n_\mu + p^\mu \frac{dn_\mu}{d\eta} \\ &= -N\Gamma_{\alpha\beta}^0 \frac{p^\alpha p^\beta}{p^0} + p^0 \left(\frac{\partial N}{\partial \eta} + \frac{p^i}{p^0} \frac{\partial N}{\partial x^i} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\gamma}^i}{d\eta} &= \frac{dp^i}{d\eta} \frac{1}{E} - \frac{dE}{d\eta} \frac{p^i}{E^2} - \frac{dn^i}{d\eta} \\ &= -\Gamma_{\alpha\beta}^i \frac{p^\alpha p^\beta}{Ep^0} - \frac{\gamma^i + n^i}{E} \frac{dE}{d\eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{N^i}{N} \right) + N(\gamma^j + n^j) \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{N^i}{N} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

D.3 Développement au deuxième ordre

En utilisant les expressions de la fonction retard N et du vecteur déplacement N^i

$$N = ae^\alpha, \quad (\text{D.11})$$

$$N^i = a^2 \gamma^{ij} B_j, \quad (\text{D.12})$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{2} \ln (1 + 2\phi + a^2 \gamma^{ij} B_i B_j), \quad (\text{D.13})$$

$$\gamma^{ij} = \frac{1}{a^2} (\omega^{ij} + h^{ij} + h^{ik} h_k^j + h^{ik} h_k^l h_l^j + \dots), \quad (\text{D.14})$$

ainsi que celle des symboles de Christoffel à tout ordre dans les perturbations (voir annexe C), nous pouvons obtenir la forme de l'opérateur de Liouville à tout ordre.

Nous pouvons décomposer la fonction de distribution en une partie homogène et une partie perturbée $f(x^\mu, p^\mu) = \bar{f}(\eta, \mathcal{E}) + \delta f(x^\mu, p^\mu)$. Dans ces conditions, il suffit de développer les coefficients devant $\partial_i f$ et $\partial f / \partial \tilde{\gamma}^i$ au premier ordre afin d'explicitier l'opérateur de Liouville au deuxième ordre dans les perturbations. Nous trouvons alors les coefficients suivants

$$\frac{p^i}{p^0} = -B^i + \tilde{\gamma}^i (1 + \phi) , \quad (\text{D.15})$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{E}} \frac{d\mathcal{E}}{d\eta} = & -(\mathcal{H} + 2\mathcal{H}B_i B^i) + \tilde{\gamma}^i (-\nabla_i \phi - B^j \nabla_i B_j - 4\mathcal{H}\phi B_i) \\ & - \tilde{\gamma}^i \tilde{\gamma}^j \left[-2\mathcal{H}\phi h_{ij} - \nabla_{(i} B_{j)} - \frac{1}{2} h'_{ij} - \frac{1}{2} B^k (\nabla_i h_{jk} + \nabla_j h_{ik} - \nabla_k h_{ij}) \right] \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

où nous avons introduit $\tilde{\gamma}^i = a\gamma^i$. En effet, ce dernier vecteur est plus physique car son amplitude n'est pas affectée par l'expansion contrairement à γ^i qui vérifie $\gamma^i \propto a^{-1}$.

Nous trouvons également

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\gamma}^i}{d\eta} = & \nabla^i \phi - \tilde{\gamma}^j \left(h'_j{}^i + \nabla^i B_j + {}^{(3)}\Gamma_{jk}^i B^k \right) + \tilde{\gamma}^j \tilde{\gamma}^k \left({}^{(3)}\Gamma_{jk}^i + {}^{(3)}\Gamma_{jk}^i \phi + \delta_k^i \nabla_j \phi \right) \\ & - \tilde{\gamma}^i \tilde{\gamma}^j \tilde{\gamma}^k \left(-\nabla_j B_k - \frac{1}{2} h'_{jk} \right) . \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

ANNEXE E

Systèmes de coordonnées en de Sitter

Sommaire

E.1	Feuilletage euclidien	324
E.2	Feuilletage sphérique	324
E.3	Feuilletage hyperbolique	325
E.4	Feuilletage statique	325

L'espace-temps de Sitter est un espace-temps à symétrie maximale, de courbure constante et positive. À D dimension, il peut être décrit par un plongement dans un espace-temps de Minkowski $(D + 1)$ -dimensionnel [Hawking & Ellis, 1973]. Soient $X_0, X_i, i = 1, \dots, D$, les coordonnées d'un point dans l'espace de Minkowski de dimension $D + 1$. Ces coordonnées vérifient

$$X_0^2 - \sum_{i=1}^D X_i^2 = -\frac{1}{H^2}, \quad (\text{E.1})$$

où H est la constante de Hubble¹. L'élément de longueur infinitésimal est donné par

$$ds^2 = (dX_0)^2 - \sum_{i=1}^D (dX_i)^2. \quad (\text{E.2})$$

¹Dans un espace-temps de de Sitter, le scalaire de Ricci est relié au paramètre de Hubble par $R = D(D - 1)H^2$. La constante cosmologique Λ s'exprime en fonction de la constante de Hubble $\Lambda = H^2(D - 2)(D - 1)/2$.

La contrainte (E.1) montre qu'un point est décrit par D paramètres indépendants en fonction desquels s'expriment les coordonnées X_i . Le choix de ces D paramètres correspond à un choix de système de coordonnées ; les choix les plus judicieux étant présentés en détail dans [Spradlin *et al.*, 2001].

E.1 Feuilletage euclidien

En choisissant la paramétrisation (t, x_i) , $i = 1, \dots, D-1$, telle que

$$X_0 = \frac{1}{H} \sinh(Ht) + \frac{H}{2} e^{Ht} \sum_{i=1}^{D-1} (x_i)^2 \quad (\text{E.3})$$

$$X_D = \frac{1}{H} \cosh(Ht) - \frac{H}{2} e^{Ht} \sum_{i=1}^{D-1} (x_i)^2 \quad (\text{E.4})$$

$$X_i = e^{Ht} x_i \quad , \quad i = 1, \dots, D-1 \quad , \quad (\text{E.5})$$

avec $-\infty < t, x_i < \infty$, l'élément de longueur devient

$$ds^2 = dt^2 - e^{2Ht} \sum_{i=1}^{D-1} (dx_i)^2 \quad . \quad (\text{E.6})$$

Cette description ne couvre que la moitié de la variété puisque $X_0 + X_D > 0$. En utilisant le temps conforme défini par $d\eta = e^{-Ht} dt$, c'est-à-dire $\eta = -\exp(Ht)/H$, l'élément de longueur devient

$$ds^2 = \frac{1}{H^2 \eta^2} \left(d\eta^2 - \sum_{i=1}^{D-1} (dx_i)^2 \right) \quad . \quad (\text{E.7})$$

E.2 Feuilletage sphérique

Une autre paramétrisation possible utilise les coordonnées $(t, \chi, \theta_1, \dots, \theta_{D-2})$ telles que les sections spatiales soient sphériques

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{H} \sinh(Ht) \quad , \\ X_1 &= \frac{1}{H} \cosh(Ht) \cos(\chi) \quad , \\ X_2 &= \frac{1}{H} \cosh(Ht) \sin(\chi) \cos(\theta_1) \quad , \\ &\dots \quad , \\ X_{D-1} &= \frac{1}{H} \cosh(Ht) \sin(\chi) \sin(\theta_1) \dots \cos(\theta_{D-2}) \quad , \\ X_D &= \frac{1}{H} \cosh(Ht) \sin(\chi) \sin(\theta_1) \dots \sin(\theta_{D-2}) \quad . \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

L'élément de longueur invariant s'écrit

$$ds^2 = dt^2 - \frac{\cosh^2(Ht)}{H^2} [d\chi^2 + \sin^2(\chi)d\Omega_{D-2}^2] , \quad (\text{E.9})$$

où $d\Omega_{D-2}^2$ est l'angle correspondant à une sphère en dimension $D - 2$.

E.3 Feuilletage hyperbolique

Nous pouvons choisir les paramètres $(t, \chi, \theta_1, \dots, \theta_{D-2})$ tels que

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{H} \sinh(Ht) \cosh(\chi) , \\ X_D &= \frac{1}{H} \cosh(Ht) , \\ X_1 &= \frac{1}{H} \sinh(Ht) \sinh(\chi) \cos(\theta_1) , \\ X_2 &= \frac{1}{H} \sinh(Ht) \sinh(\chi) \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) , \\ &\dots , \\ X_{D-1} &= \frac{1}{H} \sinh(Ht) \sinh(\chi) \sin(\theta_1) \dots \sin(\theta_{D-2}) . \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

L'élément de longueur infinitésimal s'écrit alors

$$ds^2 = dt^2 - \frac{\sinh^2(Ht)}{H^2} [d\chi^2 + \sinh^2(\chi)d\Omega_{D-2}^2] . \quad (\text{E.11})$$

E.4 Feuilletage statique

Enfin, on peut exprimer la métrique en de Sitter sous la forme d'une métrique de Swarzschild en utilisant les paramètres suivants

$$X_0 = \sinh(Ht) \sqrt{\frac{1}{H^2} - r^2} , \quad (\text{E.12})$$

$$X_1 = \cosh(Ht) \sqrt{\frac{1}{H^2} - r^2} , \quad (\text{E.13})$$

$$X_2 = r \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) , \quad (\text{E.14})$$

$$X_3 = r \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) , \quad (\text{E.15})$$

$$X_{2i-2} = r \sin(\theta_1) \dots \cos(\theta_i) , \quad (\text{E.16})$$

$$X_{2i-1} = r \sin(\theta_1) \dots \sin(\theta_i) , \quad (\text{E.17})$$

$$X_D = r \cos(\theta_1) . \quad (\text{E.18})$$

L'élément de longueur s'écrit

$$ds^2 = (1 - H^2 r^2) dt^2 - \frac{1}{(1 - H^2 r^2)} dr^2 - r^2 d\Omega_{D-2}^2 . \quad (\text{E.19})$$

Bibliographie

- [2dF Galaxy Redshift Survey,] 2DF GALAXY REDSHIFT SURVEY. *home page*.
www.mso.anu.edu.au/2dFGRS/.
- [Acquaviva *et al.*, 2003] V. ACQUAVIVA, N. BARTOLO, S. MATARRESE, & A. RIOTTO. *Second-order cosmological perturbations from inflation*. Nuclear Physics **B667** (2003) 119–148.
- [Allen, 1985] B. ALLEN. *Vacuum states in de Sitter space*. Physical Review **D32** (1985) 3136.
- [Allen & Folacci, 1987] B. ALLEN & A. FOLACCI. *The massless minimally coupled scalar field in de Sitter space*. Physical Review **D35** (1987) 3771.
- [Alpher *et al.*, 1948] R. A. ALPHER, H. A. BETHE, & G. GAMOV. *The origin of chemical elements*. Physical Review **73** (1948) 803–804.
- [Alpher & Herman, 1948] R. A. ALPHER & R. C. HERMAN. *Evolution of the universe*. Nature **162** (1948) 774.
- [Anderson *et al.*, 2000] P. R. ANDERSON, W. EAKER, S. HABIB, C. MOLINA-PARÍS, & E. MOTTOLA. *Attractor states and infrared scaling in de Sitter space*. Physical Review **D62** (2000) 124019 gr-qc/0005102.
- [Arnowitt *et al.*, 1962] R. ARNOWITT, S. DESER, & C. W. MISNER. *The dynamics of general relativity* (1962) gr-qc/0405109.
- [Ashtekar, 1987] A. ASHTEKAR. *New hamiltonian formulation of general relativity*. Physical Review **D36** (1987) 1587–1602.
- [Bailin & Love, 1994] D. BAILIN & A. LOVE. *Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory* (1994). Graduate Student Series in Physics.
- [Bardeen, 1980] J. M. BARDEEN. *Gauge-invariant cosmological pertrubations*. Physical Review **D22** (1980) 1882–1905.
- [Bardeen *et al.*, 1983] J. M. BARDEEN, P. J. STEINHARDT, & M. S. TURNER. *Spontaneous creation of almost scale - free density perturbations in an inflationary universe*. Physical Review **D28** (1983) 679–693.
- [Bartolo *et al.*, 2004] N. BARTOLO, E. KOMATSU, S. MATARRESE, & A. RIOTTO. *Non-gaussianity from inflation : theory and observations*. Physics Reports **402** (2004) 103–266 astro-ph/0406398.

- [Bartolo *et al.*, 2006] N. BARTOLO, S. MATARRESE, & A. RIOTTO. *CMB anisotropies at second order i* (2006) astro-ph/0604416.
- [Benabed, 2001] K. BENABED (2001). *Effets de lentille gravitationnelle sur le rayonnement de fond cosmique*. PhD thesis Université Paris XI.
- [Bernardeau *et al.*, 2004] F. BERNARDEAU, T. BRUNIER, & J.-P. UZAN. *High order correlation functions for self interacting scalar field in de sitter space*. Physical Review **D 69** (2004) 063520.
- [Bernardeau *et al.*, 2002] F. BERNARDEAU, S. COLOMBI, E. G. NAGA, & R. SCOCIMARRO. *Large-scale structure of the universe and cosmological perturbation theory*. Physics Reports **367** (2002) 1–248.
- [Bernardeau & Uzan, 2002] F. BERNARDEAU & J.-P. UZAN. *Non-Gaussianity in multi-field inflation*. Physical Review **D 66** (2002) 103506.
- [Bernardeau & Uzan, 2003] F. BERNARDEAU & J.-P. UZAN. *Inflationary models inducing non-Gaussian metric fluctuations*. Physical Review **D 67** (2003) 121301.
- [Bernardeau & Uzan, 2004] F. BERNARDEAU & J.-P. UZAN. *Finite volume effects for non-Gaussian multi-field inflationary models*. Physical Review **D 70** (2004) 043533.
- [Binetruy *et al.*, 2004] P. BINETRUY, G. DVALI, R. KALLOSH, & A. VAN PROEYEN. *Fayet-Iliopoulos terms in supergravity and cosmology*. Classical and Quantum Gravity **21** (2004) 3137–3170 hep-th/0402046.
- [Binetruy & Dvali, 1996] P. BINETRUY & G. R. DVALI. *D-term inflation*. Physics Letters **B388** (1996) 241–246 hep-ph/9606342.
- [Birrell & Davies, 1982] N. D. BIRRELL & P. C. W. DAVIES. *Quantum fields in curved space* (1982). Cambridge university press.
- [Bogolioubov, 1958] N. N. BOGOLIUBOV. *A new method in the theory of superconductivity I*. Soviet Physics, Journal of Experimental and Theoretical Physics **7** (1958) 41.
- [Bond & Efstathiou, 1984] J. R. BOND & G. P. EFSTATHIOU. *Cosmic background radiation anisotropies in Universes dominated by nonbaryonic dark matter*. Astrophysical Journal Letters **285** (1984) L45–L48.
- [Bond & Efstathiou, 1987] J. R. BOND & G. P. EFSTATHIOU. *The statistics of cosmic background radiation fluctuations*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **226** (1987) 655–687.
- [Brans & Dicke, 1961] C. BRANS & R. DICKE. *Mach's principle and a relativistic theory of gravitation*. Physical Review **124** (1961) 925.
- [Bruni *et al.*, 1992] M. BRUNI, P. K. S. DUNSBY, & G. F. R. ELLIS. *Cosmological perturbations and the physical meaning of gauge invariant variables*. Astrophysical Journal **395** (1992) 34–53.

- [Brunier & Bernardeau, 2005] T. BRUNIER & F. BERNARDEAU. *Radiative corrections to scalar masses in de Sitter space*. Physical Review **D 71** (2005) 063529.
- [Brunier & Bernardeau, 2006] T. BRUNIER & F. BERNARDEAU. *The shape of high order correlation functions in CMB anisotropy maps* (2006) astro-ph/0602276.
- [Brunier *et al.*, 2005] T. BRUNIER, V. K. ONEMLI, & R. P. WOODARD. *Two loop scalar self-mass during inflation*. Classical and Quantum Gravity **22** (2005) 59–84.
- [Bunch, 1979] T. S. BUNCH. *On renormalization of the quantum stress tensor in curved space-time by dimensional regularization*. Journal of Physics **A12** (1979) 517–531.
- [Bunch & Davies, 1978] T. S. BUNCH & P. C. W. DAVIES. *Quantum field theory in de Sitter space: renormalization by point-splitting*. Proceedings of the Royal Society **A 360** (1978) 117–134.
- [Bunch & Panangaden, 1980] T. S. BUNCH & P. PANANGADEN. *On renormalisation of $\lambda\phi^4$ field theory in curved space-time: II*. Journal of physics Phys. A **Math. Gen.** **13** (1980) 919–932.
- [Bunch *et al.*, 1980] T. S. BUNCH, P. PANANGADEN, & L. PARKER. *On renormalisation of $\lambda\phi^4$ field theory in curved space-time: I*. Journal of Physics A **Math. Gen.** **13** (1980) 901–918.
- [Bunch & Parker, 1979] T. S. BUNCH & L. PARKER. *Feynman propagator in curved space-time: A momentum space representation*. Physical Review **D20** (1979) 2499–2510.
- [Calzetta & Hu, 1987] E. CALZETTA & B. L. HU. *Closed time path functional formalism in curved space-time: Application to cosmological back reaction problems*. Physical Review **D35** (1987) 495.
- [Carroll *et al.*, 1992] S. M. CARROLL, W. H. PRESS, & E. L. TURNER. *The cosmological constant*. Annual Review of Astronomy and Astrophysics **30** (1992) 499–542.
- [Chandrasekhar, 1960] S. CHANDRASEKHAR. *Radiative transfer* (1960). Dover Publications New-York.
- [Chernikov & Tagirov, 1968] N. A. CHERNIKOV & E. A. TAGIROV. *Quantum theory of scalar fields in de Sitter space-time*. Annales de l’Institut Henri Poincaré, Physique Théorique **A9** (1968) 109–141.
- [Coc *et al.*, 2004] A. COC, E. VANGIONI-FLAM, P. DESCOUVEMONT, A. ADAH-CHOUR, & C. ANGULO. *Updated big bang nucleosynthesis confronted to WMAP observations and to the abundance of light elements*. Astrophysical Journal **600** (2004) 544–552 astro-ph/0309480.
- [Coleman & Weinberg, 1973] C. COLEMAN & E. WEINBERG. *Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking*. Physical Review **D7** (1973) 1888.
- [Copeland *et al.*, 1999] E. J. COPELAND, A. MAZUMDAR, & N. J. NUNES. *Generalized assisted inflation*. Physical Review **D60** (1999) 083506 astro-ph/9904309.

- [de Wit, 2001] B. DEWIT (2001). *Supergravity*. In *Gravity, gauge theories and strings* Les Houches Summer School pages 1–135 Les Houches. Euro Summer School on Unity of Fundamental Physics : Gravity, Gauge Theory and Strings hep-th/0212245. 30 Jul - 31 Aug 2001.
- [de Witt, 1975] B. S. DEWITT. *Quantum field theory in curved space-time*. Physics Reports **19** (1975) 295.
- [de Witt, 1979] B. S. DEWITT. *General Relativity* (1979). Cambridge University Press S.W. Hawking and W. Israel edition.
- [de Witt, 2003a] B. S. DEWITT. *The global approach to Quantum field theory* (2003a) volume 1. Oxford University Press.
- [de Witt, 2003b] B. S. DEWITT. *The global approach to Quantum field theory* (2003b) volume 2. Oxford University Press.
- [Delamotte,] B. DELAMOTTE. *Un soupçon de théorie des groupes : groupe des rotations et groupe de poincaré*. <http://www.lpthe.jussieu.fr/DEA/>.
- [Dicke *et al.*, 1965] R. H. DICKE, P. J. E. PEEBLES, P. G. ROLL, & D. WILKINSON. *Cosmic black-body radiation*. Astrophysical Journal **142** (1965) 414–419.
- [Dimopoulos *et al.*, 2005] S. DIMOPOULOS, S. KACHRU, J. MCGREEVY, & J. G. WACKER. *N-flation* (2005) hep-th/0507205.
- [Diu *et al.*, 1989] B. DIU, C. GUTHMANN, D. LEDERER, & B. ROULET. *Physique statistique* (1989). Hermann.
- [Dodelson, 2003] S. DODELSON. *Modern Cosmology* (2003). Academic Press.
- [Dolgov & Pelliccia, 2006] A. DOLGOV & D. N. PELLICCIA. *Scalar field instability in de Sitter space-time*. Nuclear Physics **B734** (2006) 208–219 hep-th/0502197.
- [Dunsby *et al.*, 1992] P. K. S. DUNSBY, M. BRUNI, & G. F. R. ELLIS. *Covariant perturbations in a multifluid cosmological medium*. Astrophysical Journal **395** (1992) 54–73.
- [Durrer, 1994] R. DURRER. *Gauge invariant cosmological perturbation theory : a general study and its application to the texture scenario of structure formation*. Fundamentals of Cosmic Physics **15** (1994) 209 astro-ph/9311041.
- [Dvali *et al.*, 1994] G. R. DVALI, Q. SHAFI, & R. K. SCHAEFER. *Large scale structure and supersymmetric inflation without fine tuning*. Physical Review Letters **73** (1994) 1886–1889.
- [Einstein, 1917] A. EINSTEIN. *Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie*. Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte, Halbband **2** (1917) 142–152.
- [Ellis & Bruni, 1989] G. F. R. ELLIS & M. BRUNI. *Covariant and gauge invariant approach to cosmological density fluctuations*. Physical Review **D40** (1989) 1804–1818.

- [Ellis *et al.*, 1989] G. F. R. ELLIS, J. HWANG, & M. BRUNI. *Covariant and gauge independent perfect fluid robertson- walker perturbations*. Physical Review **D40** (1989) 1819–1826.
- [Ellis & van Elst, 1998] G. F. R. ELLIS & H. VANELST. *Cosmological models* (1998) gr-qc/9812046.
- [Eriksen *et al.*, 2004] H. K. ERIKSEN, F. K. HANSEN, A. J. BANDAY, K. M. GORSKI, & P. B. LILJE. *Asymmetries in the CMB anisotropy field*. Astrophysical Journal **605** (2004) 14–20 astro-ph/0307507.
- [Ford & Parker, 1977] L. FORD & L. PARKER. *Infrared divergences in a class of Robertson-Walker universes*. Physical Review **D16** (1977) 245–250.
- [Ford, 1997] L. H. FORD (1997). *Quantum field theory in curved spacetime*. In *Campos do Jordao 1997, Particles and fields* Proceedings of 9th Jorge Andre Swieca Summer School : Particles and Fields, Sao Paulo, Brazil pages 345–388.
- [Friedman, 1922] A. FRIEDMAN. *Über die Krümmung des Raumes*. Zeitschrift für Physik **10** (1922) 377–386.
- [Friedman, 1924] A. FRIEDMAN. *Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes*. Zeitschrift für Physik **21** (1924) 326–332.
- [Fulling *et al.*, 1978] S. A. FULLING, M. SWEENEY, & R. M. WALD. *Singularity structure of the two point function in quantum field theory in curved space-time*. Communications in Mathematical Physics (1978).
- [Gamov, 1946] G. GAMOV. *Expanding universe and the origin of elements*. Physical Review **70** (1946) 572–573.
- [Garcia-Bellido & Wands, 1996] J. GARCIA-BELLIDO & D. WANDS. *Metric perturbations in two-field inflation*. Physical Review **D53** (1996) 5437–5445 astro-ph/9511029.
- [Garidi, 2003] T. GARIDI. *What is mass in de sitterian physics?* (2003) hep-th/0309104.
- [Giovannini, 2005] M. GIOVANNINI. *Theoretical tools for the physics of CMB anisotropies*. International Journal of Modern Physics **D14** (2005) 363–510 astro-ph/0412601.
- [Gordon *et al.*, 2000] C. GORDON, D. WANDS, B. A. BASSETT, & R. MAARTENS. *Adiabatic and entropy perturbations from inflation*. Physical Review **D 63** (2000) 023506.
- [Green *et al.*, 1987a] M. GREEN, J. SCHWARZ, & E. WITTEN. *Superstring Theory : Introduction* (1987a) volume 1. Cambridge University Press.
- [Green *et al.*, 1987b] M. GREEN, J. SCHWARZ, & E. WITTEN. *Superstring Theory : Loop Amplitudes, Anomalies and Phenomenology* (1987b) volume 2. Cambridge University Press.

- [Groot Nibbelink & van Tent, 2002] S. GROOT NIBBELINK & B. J. W. VANTENT. *Scalar perturbations during multiple field slow-roll inflation*. Classical and Quantum Gravity **19** (2002) 613–640 hep-ph/0107272.
- [Guth, 1981] A. H. GUTH. *The inflationary universe : a possible solution to the horizon and flatness problems*. Physical Review **D23** (1981) 347–356.
- [Guth & Pi, 1982] A. H. GUTH & S.-Y. PI. *Fluctuations in the new inflationary universe*. Physical Review Letters **49** (1982) 1110–1113.
- [Hadamard, 1923] J. HADAMARD. *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations* (1923). Yale University Press New Haven.
- [Hamilton, 2001] A. J. S. HAMILTON. *Formulae for growth factors in expanding universes containing matter and a cosmological constant*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **322** (2001) 419 astro-ph/0006089.
- [Hawking, 1982] S. HAWKING. *The development of irregularities in a single bubble inflationary universe*. Physical Letters **B115** (1982) 295.
- [Hawking, 1966] S. W. HAWKING. *Perturbations of an expanding universe*. Astrophysical Journal **145** (1966) 544–554.
- [Hawking & Ellis, 1973] S. W. HAWKING & G. F. R. ELLIS. *The Large scale structure of space-time* (1973). Cambridge University Press.
- [Hu, 1995] W. T. HU (1995). *Wandering in the Background : a cosmic microwave background explorer*. PhD thesis Berkeley, University of California astro-ph/9508126.
- [Hu *et al.*, 1998] W. T. HU, U. SELJAK, M. S. WHITE, & M. ZALDARRIAGA. *A complete treatment of CMB anisotropies in a FRW universe*. Physical Review **D57** (1998) 3290–3301 astro-ph/9709066.
- [Hu & Silk, 1993] W. T. HU & J. D. SILK. *Thermalization and spectral distortions of the cosmic microwave background*. Physical Review **D48** (1993) 285–502.
- [Hubble, 1929] E. HUBBLE. *A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae*. Proceedings of the National Academy of Science **15** (1929) 168–173.
- [Itzykson & Zuber, 1980] C. ITZYKSON & J.-B. ZUBER. *Quantum Field Theory* (1980). McGraw-Hill.
- [Jackson, 2001] J. D. JACKSON. *Électrodynamique classique* (2001). Dunod.
- [Jacobson, 2003] T. JACOBSON. *Introduction to quantum fields in curved spacetime and the hawking effect* (2003) gr-qc/0308048.
- [Jordan, 1986] R. D. JORDAN. *Effective field equations for expectation values*. Physical Review **D33** (1986) 444–454.
- [Joung *et al.*, 2006] E. JOUNG, J. MOURAD, & R. PARENTANI. *Group theoretical approach to quantum fields in de Sitter space I. The principle series* (2006) hep-th/0606119.

- [Kaiser, 1983] N. KAISER. *Small-angle anisotropy of the microwave background radiation in the adiabatic theory*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **202** (1983) 1169–1180.
- [Kallosh & Linde, 2003] R. KALLOSH & A. LINDE. *P-term, D-term and F-term inflation*. JCAP **0310** (2003) 008 hep-th/0306058.
- [Kamionkowski *et al.*, 1997] M. KAMIONKOWSKI, A. KOSOWSKY, & A. J. STEBBINS. *Statistics of cosmic microwave background polarization*. Physical Review **D55** (1997) 7368–7388 astro-ph/9611125.
- [Keldysh, 1965] L. V. KELDYSH. *Diagram technique for nonequilibrium processes*. Soviet Physics Journal of Experimental and Theoretical Physics **20** (1965) 1018–1026.
- [Klein & Nishina, 1929] O. KLEIN & Y. NISHINA. *Über die streuung von strahlung durch freie elektronen nach der neuen relativistischen quantendynamik von dirac*. Zeitschrift für Physik **52** (1929) 853.
- [Kodama & Sasaki, 1984] H. KODAMA & M. SASAKI. *Cosmological perturbation theory*. Progress of Theoretical Physics Supplement **78** (1984) 1–166.
- [Kolb & Turner, 1990] E. W. KOLB & M. S. TURNER. *The early universe* (1990). Addison-Wesley.
- [Lahav *et al.*, 1991] O. LAHAV, P. B. LILJE, J. R. PRIMACK, & M. J. REES. *Dynamical effects of the cosmological constant*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **251** (1991) 128–136.
- [Lahiri & Bhattacharya, 2006] J. LAHIRI & G. BHATTACHARYA. *Perturbative analysis of multiple-field cosmological inflation*. Annals of Physics **321** (2006) 999–1023 astro-ph/0507630.
- [Langlois & Vernizzi, 2005] D. LANGLOIS & F. VERNIZZI. *Evolution of non-linear cosmological perturbations*. Physical Review Letters **95** (2005) 091303 astro-ph/0503416.
- [Langlois & Vernizzi, 2006] D. LANGLOIS & F. VERNIZZI. *Nonlinear perturbations for dissipative and interacting relativistic fluids*. JCAP **0602** (2006) 014 astro-ph/0601271.
- [Lemaître, 1927] G. LEMAÎTRE. *Un univers de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vieillesse radiale des nébuleuses extragalactiques*. Annales de la Société Scientifique de Bruxelles **A47** (1927) 49–59.
- [Lesgourgues *et al.*, 1997] J. LESGOURGUES, D. POLARSKI, & A. A. STAROBINSKY. *Quantum-to-classical transition of cosmological perturbations for non-vacuum initial states*. Nuclear Physics **B497** (1997) 479–510 gr-qc/9611019.
- [Liddle & Lyth, 1993] A. R. LIDDLE & D. H. LYTH. *The cold dark matter density perturbation*. Physics Reports **231** (1993) 1–105 astro-ph/9303019.
- [Liddle *et al.*, 1998] A. R. LIDDLE, A. MAZUMDAR, & F. E. SCHUNCK. *Assisted inflation*. Physical Review **D58** (1998) 061301 astro-ph/9804177.

- [Lifshitz, 1946] E. M. LIFSHITZ. *On the gravitational stability of the expanding universe*. Journal of Experimental and Theoretical Physics **16** (1946) 576.
- [Lifshitz & Khalatnikov, 1963] E. M. LIFSHITZ & I. M. KHALATNIKOV. *Investigations in relativistic cosmology*. Advances in Physics **12** (1963) 185–249.
- [Linde & Mukhanov, 1997] A. LINDE & V. MUKHANOV. *Nongaussian isocurvature perturbations from inflation*. Physical Review **D56** (1997) 535.
- [Linde & Mukhanov, 2006] A. LINDE & V. MUKHANOV. *The curvaton web*. JCAP **0604** (2006) 009 astro-ph/0511736.
- [Linde, 1982a] A. D. LINDE. *A new inflationary universe scenario : a possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems*. Physics Letters **B108** (1982a) 389–393.
- [Linde, 1982b] A. D. LINDE. *Scalar field fluctuations in expanding universe and the new inflationary universe scenario*. Physics Letters **B116** (1982b) 335.
- [Linde, 1983] A. D. LINDE. *Chaotic inflation*. Physics Letters **B129** (1983) 177–181.
- [Linde, 1994] A. D. LINDE. *Hybrid inflation*. Physical Review **D49** (1994) 748–754 astro-ph/9307002.
- [Losic & Unruh, 2006] B. LOSIC & W. G. UNRUH. *On leading order gravitational backreactions in de Sitter spacetime* (2006) gr-qc/0604122.
- [Lyth, 1985] D. H. LYTH. *Large-scale energy-density perturbations and inflation*. Physical Review **D31** (1985) 1792–1798.
- [Lyth, 2006] D. H. LYTH. *Non-gaussianity and cosmic uncertainty in curvaton-type models*. JCAP **0606** (2006) 015 astro-ph/0602285.
- [Lyth & Riotto, 1999] D. H. LYTH & A. RIOTTO. *Particle physics models of inflation and the cosmological density perturbation*. Physics Reports **314** (1999) 1–146 hep-ph/9807278.
- [Lyth & Wands, 2002] D. H. LYTH & D. WANDS. *Generating the curvature perturbations without an inflaton*. Physical Letters **B524** (2002) 5.
- [Lyth & Wands, 2003] D. H. LYTH & D. WANDS. *Conserved cosmological perturbations*. Physical Review (2003) 103515 astro-ph/0306498.
- [Ma & Bertschinger, 1995] C.-P. MA & E. BERTSCHINGER. *Cosmological perturbation theory in the synchronous and conformal newtonian gauges*. Astrophysical Journal **455** (1995) 7–25 astro-ph/9506072.
- [Maldacena, 2003] J. MALDACENA. *Non-Gaussian features of primordial fluctuations in single field inflationary models*. Journal of High Energy Physics **0305** (2003) 013.
- [Malik & Wands, 2004] K. A. MALIK & D. WANDS. *Evolution of second order cosmological perturbations*. Classical and Quantum Gravity **21** (2004) L65–L72 astro-ph/0307055.

- [Misner *et al.*, 1973] C. W. MISNER, K. S. THORNE, & J. A. WHEELER. *Gravitation* (1973). W. H. Freeman.
- [Moroi & Takahashi, 2001] T. MOROI & T. TAKAHASHI. *Effects of cosmological moduli fields on cosmic microwave background*. Physical Letters **B522** (2001) 215.
- [Mottola, 1985] E. MOTTOLA. *Particle creation in de sitter space*. Physical Review **D31** (1985) 754.
- [Mukhanov & Chibisov, 1981] V. MUKHANOV & G. CHIBISOV. *Quantum fluctuations in a nonsingular universe*. Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters **33** (1981) 1981.
- [Mukhanov *et al.*, 1997] V. F. MUKHANOV, L. R. W. ABRAMO, & R. H. BRANDENBERGER. *On the back reaction problem for gravitational perturbations*. Physical Review Letters **78** (1997) 1624–1627 gr-qc/9609026.
- [Mukhanov *et al.*, 1992] V. F. MUKHANOV, H. FELDMAN, & R. H. BRANDENBERGER. *Theory of cosmological perturbations*. Physics Reports **215** (1992) 203–333.
- [Nakamura, 2003] K. NAKAMURA. *Evolution of second order cosmological perturbations*. Progress of Theoretical Physics **110** (2003) 723 gr-qc/0303090.
- [Onemli & Woodard, 2002] V. K. ONEMLI & R. P. WOODARD. *Super-acceleration from massless, minimally coupled ϕ^4* . Classical and Quantum Gravity **19** (2002) 4607 gr-qc/0204065.
- [Padmanabhan, 1993] T. PADMANABHAN. *Structure formation in the universe* (1993). Cambridge University Press cambridge edition.
- [Page *et al.*, 2006] L. PAGE *et al.* . *Three year wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations : Polarization analysis* (2006) astro-ph/0603450.
- [Peacock, 1998] J. A. PEACOCK. *Cosmological Physics* (1998). Cambridge University Press cambridge edition.
- [Peebles, 1993] P. J. E. PEEBLES. *Principles of physical cosmology* (1993). Princeton University Press princeton edition.
- [Peebles & Yu, 1970] P. J. E. PEEBLES & J. T. YU. *Primeval adiabatic perturbation in an expanding universe*. Astrophysical Journal **162** (1970) 605–613.
- [Penzias & Wilson, 1965] A. A. PENZIAS & R. W. WILSON. *A measurement of excess antenna temperature at 4080 mc/s*. Astrophysical Journal **142** (1965).
- [Perlmutter *et al.*, 1999] S. PERLMUTTER *et al.* . *Measurements of omega and lambda from 42 high-redshift supernovae*. Astrophysical Journal **517** (1999) 565–586 astro-ph/9812133.
- [Peskin & Schroeder, 1996] M. PESKIN & D. V. SCHROEDER. *An introduction to quantum field theory* (1996). AddisonW.
- [Peter & Uzan, 2005] P. PETER & J.-P. UZAN. *Cosmologie primordiale* (2005). Collection Échelles éditions belin edition.

- [Poisson, 2004] E. POISSON. *The motion of point particles in curved spacetime*. Living Review **Relativity** **7** (2004). <http://www.livingreviews.org/lrr-2004-6>.
- [Polarski & Starobinsky, 1996] D. POLARSKI & A. A. STAROBINSKY. *Semiclassicality and decoherence of cosmological perturbations*. Classical and Quantum Gravity **13** (1996) 377–392 gr-qc/9504030.
- [Polchinski, 1998a] J. POLCHINSKI. *String Theory : An introduction to the bosonic string* (1998a) volume 1. Cambridge Monographs on Mathematical Physics cambridge edition.
- [Polchinski, 1998b] J. POLCHINSKI. *String Theory : Superstring theory and beyond* (1998b) volume 2. Cambridge Monographs on Mathematical Physics cambridge edition.
- [Prunet *et al.*, 2005] S. PRUNET, J.-P. UZAN, F. BERNARDEAU, & T. BRUNIER. *Constraints on mode couplings and modulation of the CMB with WMAP data*. Physical Review **D** **71** (2005) 083508.
- [Riazuelo, 2000] A. RIAZUELO (2000). *Signature de divers modèles d'Univers primordial dans les anisotropies du rayonnement fossile*. PhD thesis Université Paris XI.
- [Riemann, 1868] B. RIEMANN. Abh. K. Ges. Wiss. Gottingen **13** (1868) 133.
- [Riess *et al.*, 1998] A. G. RIESS *et al.* . *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*. Astronomical Journal **116** (1998) 1009–1038 astro-ph/9805201.
- [Rigopoulos, 2004] G. I. RIGOPOULOS. *On second order gauge invariant perturbations in multi-field inflationary models*. Classical and Quantum Gravity **21** (2004) 1737–1754.
- [Rigopoulos & Shellard, 2003] G. I. RIGOPOULOS & E. P. S. SHELLARD. *The separate universe approach and the evolution of nonlinear superhorizon cosmological perturbations*. Physical Review **D** **68** (2003) 123518.
- [Rigopoulos & Shellard, 2005] G. I. RIGOPOULOS & E. P. S. SHELLARD. *Non-linear inflationary perturbations*. JCAP **0510** (2005) 006.
- [Rigopoulos *et al.*, 2005] G. I. RIGOPOULOS, E. P. S. SHELLARD, & B. J. W. VAN TENT. *A simple route to non-Gaussianity in inflation*. Physical Review **D** **72** (2005) 083507.
- [Riotto & Trodden, 1999] A. RIOTTO & M. TRODDEN. *Recent progress in baryogenesis*. Annual Review of Nuclear and Particle Science **49** (1999) 35.
- [Robertson, 1935] H. P. ROBERTSON. *On the foundations of relativistic cosmology*. Proceedings of the National Academy of Science (U.S.A) **15** (1935) 822–829.
- [Rocher, 2005] J. ROCHER (2005). *Contraintes cosmologiques sur la physique de l'univers primordial*. PhD thesis Université Paris XI, <http://www2.iap.fr/users/rocher/>.

- [Rocher & Sakellariadou, 2005a] J. ROCHER & M. SAKELLARIADOU. *D-term inflation, cosmic strings, and consistency with cosmic microwave background measurement*. Physical Review Letters **94** (2005a) 011303 hep-ph/0412143.
- [Rocher & Sakellariadou, 2005b] J. ROCHER & M. SAKELLARIADOU. *Supersymmetric grand unified theories and cosmology*. JCAP **0503** (2005b) 004 hep-ph/0406120.
- [Rovelli, 2004] C. ROVELLI. *Quantum Gravity* (2004). Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press.
- [Sachs & Wolfe, 1967] R. SACHS & A. WOLFE. *Perturbations of a cosmological model and angular variations of the microwave background*. Astrophysical Journal **147** (1967) 73–90.
- [Salam, 1968] A. SALAM (1968). *Weak and electromagnetic interactions*. In Svartholm, editor, *Elementary Particle Theory, Proceedings Of The Nobel Symposium Held 1968 At Lerum, Sweden* pages 367–377 Stockholm.
- [Salopek & Bond, 1990] D. SALOPEK & J. R. BOND. *Nonlinear evolution of long-wavelength metric fluctuations in inflationary models*. Physical Review **D42** (1990) 3936.
- [Sasaki & Stewart, 1996] M. SASAKI & E. D. STEWART. *A general analytic formula for the spectral index of the density perturbations produced during inflation*. Progress of Theoretical Physics **95** (1996) 71–78 astro-ph/9507001.
- [Schwinger, 1951] J. S. SCHWINGER. *The theory of quantized fields. I*. Physical Review **82** (1951) 914–927.
- [Schwinger, 1961] J. S. SCHWINGER. *Brownian motion of a quantum oscillator*. Journal of Mathematical Physics **2** (1961) 407–432.
- [SCPwebsite,] SCPWEBSITE. *High redshift supernova search, supernova cosmology project*. <http://panisse.lbl.gov/>.
- [Seljak & Zaldarriaga, 1997] U. SELJAK & M. ZALDARRIAGA. *An all-sky analysis of polarization in the microwave background*. Physical Review **D55** (1997) 1830–1840 astro-ph/9609170.
- [Silk, 1968] J. D. SILK. *Cosmic black-body radiation and galaxy formation*. Astrophysical Journal **151** (1968) 459–472.
- [Slipher, 1915] V. M. SLIPHER. *Spectrographic observations of nebulae*. Popular Astronomy **23** (1915) 21–24.
- [Smoor, 1997] G. F. SMOOT. *The cosmic microwave background spectrum* (1997) astro-ph/9705101.
- [Spergel et al., 2006] D. N. SPERGEL et al. . *Wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) three year results : Implications for cosmology* (2006) astro-ph/0603449.
- [Spradlin et al., 2001] M. SPRADLIN, A. STROMINGER, & A. VOLOVICH. *Les houches lectures on de sitter space* (2001) hep-th/0110007.

- [Starobinsky, 1980] A. A. STAROBINSKY. *A new type of isotropic cosmological models without singularity*. Physics Letters **B91** (1980) 99.
- [Starobinsky, 1982] A. A. STAROBINSKY. *Dynamics of phase transition in the new inflationary universe scenario and generation of perturbations*. Physics Letters **B117** (1982) 175–178.
- [Starobinsky & Yokoyama, 1994] A. A. STAROBINSKY & J. YOKOYAMA. *Equilibrium state of a selfinteracting scalar field in the de Sitter background*. Physical Review **D50** (1994) 6357–6368 astro-ph/9407016.
- [Stewart, 1990] J. M. STEWART. *Perturbations of Friedmann-Robertson-Walker cosmological models*. Classical and Quantum Gravity **7** (1990) 1169–1180.
- [Stewart & Walker, 1974] J. M. STEWART & M. WALKER. *Perturbations of space-times in general relativity*. Proceedings of the Royal Society **A341** (1974) 49–74.
- [Sunyaev & Zel'dovich, 1980] R. SUNYAEV & Y. B. ZEL'DOVICH. *Microwave background radiation as a probe of the contemporary structure and history of the universe*. Annual Review of Astronomy and Astrophysics **18** (1980) 437.
- [Surveyor,] P. SURVEYOR. *The home page of planck*. <http://astro.estec.esa.nl/Planck/>.
- [Tagirov, 1973] E. A. TAGIROV. *Consequences of field quantization in de Sitter type cosmological models*. Annals of Physics **76** (1973) 561–579.
- [Tegmark et al., 2004] M. TEGMARK et al. . *The 3d power spectrum of galaxies from the SDSS*. Astrophysical Journal **606** (2004) 702–740 astro-ph/0310725.
- [The Wilkinson Microwave Anisotropy Probe,] THE WILKINSON MICROWAVE ANISOTROPY PROBE. *Home page*. <http://www.nasa.gov/>.
- [Thorne, 1980] K. S. THORNE. *Multipole expansions of gravitational radiation*. Review of Modern Physics **52** (1980) 299.
- [Tsamis & Woodard, 1994] N. C. TSAMIS & R. P. WOODARD. *The physical basis for infrared divergences in inflationary quantum gravity*. Classical and Quantum Gravity **11** (1994) 2969–2990.
- [Unruh, 1976] W. G. UNRUH. *Notes on black-holes evaporation*. Physical Review **D14** (1976) 870.
- [Uzan, 1998] J.-P. UZAN. *Dynamics of relativistic interacting gases : from a kinetic to a fluid description*. Classical Quantum Gravity **15** (1998) 1063–1088 gr-qc/9801108.
- [van Tent, 2002] B. J. W. VANTENT (2002). *Cosmological inflation with multiple fields and the theory of density fluctuations*. PhD thesis University of Utrecht. <http://igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/2002-1004-084000/inhoud.htm>.
- [Vilenkin & Ford, 1982] A. VILENKIN & L. H. FORD. *Gravitational effects upon cosmological phase transitions*. Physical Review **D26** (1982) 1231.

- [Vilenkin & Shellard, 1994] A. V. VILENKIN & E. P. S. SHELLARD. *Cosmic strings and other topological defects* (1994). Cambridge University Press cambridge edition.
- [Wald, 1994] R. WALD. *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics* (1994). University of Chicago Press chicago lectures in physics edition.
- [Wald, 1977] R. M. WALD. *The back reaction effect in particle creation in curved space-time*. Communications in Mathematical Physics **54** (1977) 1–19.
- [Wald, 1978a] R. M. WALD. *Axiomatic renormalization of the stress tensor of a conformally invariant field in conformally flat space-times*. Annals of Physics **110** (1978a) 472–486.
- [Wald, 1978b] R. M. WALD. *Trace anomaly of a conformally invariant quantum field in curved space-time*. Physical Review **D17** (1978b) 1477–1484.
- [Walker, 1936] A. G. WALKER. *On Milne's theory of world-structure*. Proceedings of the London Mathematical Society **42** (1936) 90–127.
- [Wands *et al.*, 2000] D. WANDS, K. A. MALIK, D. H. LYTH, & A. R. LIDDLE. *A new approach to the evolution of cosmological perturbations on large scales*. Physical Review **D62** (2000) 043527 astro-ph/0003278.
- [Weinberg, 1967] S. WEINBERG. *A model of leptons*. Physical Review Letters **19** (1967) 1264–1266.
- [Weinberg, 1995] S. WEINBERG. *The quantum theory of fields* (1995) volume I. Cambridge university press.
- [Weinberg, 2005] S. WEINBERG. *Quantum contributions to cosmological correlations*. Physical Review **D 72** (2005) 043514.
- [Weinberg, 2006] S. WEINBERG. *Quantum contributions to cosmological correlations II : can these corrections become large ?* Physical Review **D74** (2006) 023508 hep-th/0605244.
- [White & Hu, 1997] M. J. WHITE & W. HU. *The Sachs-Wolfe effect*. Astronomy and Astrophysics **321** (1997) 8–9.
- [White *et al.*, 1994] M. J. WHITE, D. SCOTT, & J. SILK. *Anisotropies in the cosmic microwave background*. Annual Review of Astronomy and Astrophysics **32** (1994) 319–370.
- [Witt, 1963] C. D. WITT, editor (1963). *Relativity, Groups and Topology* Les Houches Summer School. Gordon and Breach.
- [Woodard, 2005] R. P. WOODARD. *A leading logarithm approximation for inflationary quantum field theory*. Nucl. Phys. Proc. Suppl. **148** (2005) 108–119 astro-ph/0502556.
- [Zaldarriaga & Seljak, 1997] M. ZALDARRIAGA & U. SELJAK. *Signatures of gravity waves in polarization of the microwave background*. Physical Review Letters **78** (1997) 2054–2057.

- [Zel'dovich *et al.*, 1969] Y. B. ZEL'DOVICH, V. G. KURT, & R. A. SUNYAEV. *The recombination of hydrogen in the hot model of the universe*. Journal of Experimental and Theoretical Physics **28** (1969) 146–150.
- [Zel'dovich & Sunyaev, 1969] Y. B. ZEL'DOVICH & R. A. SUNYAEV. *The interaction of matter and radiation in a hot-model universe*. Astrophysics and Space Science **4** (1969) 301–316.
- [Zwicky, 1937] F. ZWICKY. *On the masses of nebulae and of clusters of nebulae*. Astrophysical Journal **86** (1937) 217–234.

Signatures d'une physique non-standard dans les relevés cosmologiques

Tristan Brunier

Résumé

Ce mémoire de thèse a pour objet l'étude de l'origine des grandes structures de l'univers et des signatures observables correspondantes. Il décrit l'évolution classique des perturbations puis les mécanismes quantiques les ayant générées.

L'évolution classique des inhomogénéités est décrite à l'aide de la théorie des perturbations cosmologiques. L'accent est mis sur les non-linéarités au deuxième ordre, susceptibles de révéler des effets fins, présents initialement ou induits par l'évolution.

Ces outils sont utilisés afin de relier la structure des inhomogénéités à celle des anisotropies de température et de polarisation du fond diffus cosmologique. Ils permettent une nouvelle interprétation physique du comportement des spectres de puissance, y compris aux grands ordres. L'effet d'une anisotropie dipolaire, d'origine statistique ou expérimentale, est examiné ainsi que le comportement de fluctuations de température non-gaussiennes d'origine primordiale.

Nous étudions par la suite les propriétés de champs quantiques en espace-temps courbe, en nous concentrant sur un espace de de Sitter. En particulier, nous caractérisons les effets de la renormalisation sur la masse des champs.

Les notions développées sont alors appliquées aux fluctuations quantiques pendant l'inflation. Les signatures spécifiques de certains modèles d'inflation montrent, en particulier, que des fluctuations non-gaussiennes peuvent naître des interactions entre plusieurs champs scalaires. Ces non-gaussianités sont caractérisées puis nous vérifions que les modèles proposés sont viables en calculant les corrections radiatives à la masse des champs.