Université Paris 6 – Pierre et Marie Curie
et
Service de Physique Théorique, Commissariat à l'Énergie Atomique

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6

Spécialité : **Physique théorique**

présentée par **Nicolas ORANTIN**

pour obtenir le grade de docteur de l'Université Paris 6

Du développement topologique des modèles de matrices à la théorie des cordes topologiques : combinatoire de surfaces par la géométrie algébrique.

Soutenue le 13 Septembre 2007 devant le jury composé de

M. AKEMANN Gernot, rapporteur
M. BRÉZIN Édouard, président
M. EYNARD Bertrand, directeur
M. KONTSEVICH Maxim
M. KOSTOV Ivan
M. NEKRASOV Nikita, rapporteur

Résumé.

Le modèle à deux matrices a été introduit pour étudier le modèle d'Ising sur surface aléatoire. Depuis, le lien entre les modèles de matrices et la combinatoire de surfaces discrétisées s'est beaucoup développé. Cette thèse a pour propos d'approfondir ces liens et de les étendre au delà des modèles de matrices en suivant l'évolution de mes travaux de recherche. Tout d'abord, je m'attache à définir rigoureusement le modèle à deux matrices hermitiennes formel donnant accès aux fonctions génératrices de surfaces discrétisées portant une structure de spin. Je montre alors comment calculer, par des méthodes de géométrie algébrique, tous les termes du développement topologique des observables comme formes différentielles définies sur une courbe algébrique associée au modèle : la courbe spectrale. Dans un second temps, je montre comment, imitant la construction du modèle à deux matrices, on peut définir de telles formes différentielles sur n'importe quelle courbe algébrique possédant de nombreuses propriétés d'invariance sous les déformations de la courbe algébrique considérée. En particulier, on peut montrer que si cette courbe est la courbe spectrale d'un modèle de matrices, ces invariants reconstituent les termes des développements topologiques des observables du modèle. Finalement, je montre que pour un choix particulier des paramètres, ces objets peuvent être rendus invariants modulaires et sont solutions des équations d'anomalie holomorphe de la théorie de Kodaira-Spencer donnant un nouvel élément vers la preuve de la conjecture de Dijkgraaf-Vafa.

Mots clés : matrices aléatoires, combinatoire, théorie des cordes, espaces des modules, intégrabilité, géométrie algébrique

Summary

The 2-matrix model has been introduced to study Ising model on random surfaces. Since then, the link between matrix models and combinatorics of discrete surfaces has strongly tightened. This manuscript aims to investigate these deep links and extend them beyond the matrix models, following my work's evolution. First, I take care to define properly the hermitian 2 matrix model which gives rise to generating functions of discrete surfaces equipped with a spin structure. Then, I show how to compute all the terms in the topological expansion of any observable by using algebraic geometry tools. They are obtained as differential forms on an algebraic curve associated to the model : the spectral curve. In a second part, I show how to define such differentials on any algebraic curve even if it does not come from a matrix model. I then study their numerous symmetry properties under deformations of the algebraic curve. In particular, I show that these objects coincide with the topological expansion of the observable of a matrix model if the algebraic curve is the spectral curve of this model. Finally, I show that fine tuning the parameters ensure that these objects can be promoted to modular invariants and satisfy the holomorphic anomaly equation of the Kodaira-Spencer theory. This gives a new hint that the Dijkgraaf-Vafa conjecture is correct.

Key words : random matrices, combinatorics, string theory, moduli space, integrability, algebraic geometry

Remerciements

Je tiens avant toutes choses à remercier mon directeur de thèse Bertrand Eynard. Il a passé énormément de temps à me transmettre une partie de ses connaissances sur ce très vaste domaine que représentent les matrices aléatoires tout au long de l'évolution de mes travaux. J'ai également pu profiter de sa large connaissance du sujet, de son impressionnante intuition et de sa vision globale des applications possibles à travers les sujets qu'il m'a proposés : tous très riches, passionnants et pleins de perspectives. Je tiens aussi à le remercier pour sa disponibilité, sa gentillesse et sa patience. Je suis également très reconnaissant envers Kirone Mallick pour ses nombreux conseils depuis que j'ai eu le plaisir de travailler avec lui il y a maintenant 4 ans. Il a toujours été là pour me guider lorsque j'ai eu des choix à faire.

Je remercie Édouard Brézin et Maxim Kontsevich d'avoir accepté de faire partie de mon jury et tout particulièrement Nikita Nekrasov et Gernot Akemann qui ont accepté la lourde tâche de rapporter mon manuscript ainsi que Ivan Kostov avec qui j'ai eu la chance de pouvoir interagir très fréquemment.

Merci également à Michel Bergère, Philippe Di Francesco et Aleix Prats-Ferrer d'avoir accepté de relire des versions préliminaires de ma thèse. J'ai aussi pris beaucoup de plaisir à discuter régulièrement avec eux et les nombreuses questions de Michel m'ont souvent permis de clarifier mes idées. Je voudrais également remercier mes collaborateurs Leonid Chekhov et Marcos Mariño qui m'ont aussi beaucoup appris dans leurs sujets respectifs et se sont toujours montrés disponibles pour répondre à mes questions.

Merci enfin au SPhT, qui m'a permis d'effectuer cette thèse dans un cadre toujours agréable et stimulant sans avoir à me préoccuper d'autre chose que mes travaux de recherche, ainsi qu'à tous ses membres et plus particulièrement à Jérémie Bouttier, François David, Vincent Pasquier, Pierre Vanhove et Jean-Bernard Zuber que j'ai régulièrement dérangés par mes questions ainsi qu'au Niels Bohr Institute qui m'a hébergé pendant deux mois durant lesquels j'ai eu le plaisir de pouvoir apprendre auprès de Charlotte Kristjansen.

Le travail présenté dans cette thèse a profité des financements du réseau européen ENIGMA MRT-CT-2004-5652, du projet ANR Géométrie et Intégrabilité en Physique Mathématique ANR-05-BLAN-0029-01, du réseau européen ENRAGE MRTN-CT-2004-005616, de l'ESF à travers le programme Misgam ainsi que par les gouvernements français et japonais à travers le projet PAI Sakura.

Avant propos et plan.

Les modèles de matrices aléatoires, depuis leur apparition dans le monde de la physique en 1951, n'ont eu de cesse de trouver des applications dans des domaines très variés des sciences parmi lesquels on peut citer quelques éxemples en vrac : la physique nucléaire, la physique statistique, l'étude des systèmes chaotiques, la théorie des cordes, les théories conformes, la combinatoire, la théorie des nombres, la théorie des noeuds, l'intégrabilité, l'étude des problèmes de Riemann Hilbert ...

La richesse et la variété des domaines liés au matrices aléatoires en font un objet d'étude passionnant et enrichissant, particulièrement pour un étudiant, tant les perspectives de recherche sont nombreuses. Au cours de ma thèse j'ai ainsi pû toucher à des problèmes très différents les uns de autres et cotoyer des gens d'horizons très divers. Ce mémoire n'a pas pour but de cataloguer l'état de l'art dans l'ensemble des domaines où les modèles de matrices ont apporté une contribution, le volume nécessaire à un tel exposé étant bien trop grand et mes connaissances trop limitées.

Je me restreindrai donc à un domaine que j'ai plus particulièrement étudié et sur lequel ont porté mes travaux au cours de cette thèse : le lien entre les modèles de matrices hermitiennes et la combinatoire de surfaces. J'essaierai de montrer que ces deux problèmes sont profondément reliés et combien la structure sous-jacente est riche, mélangeant géométrie algébrique et inégrabilité. J'ai essayé de rendre ce mémoire aussi accessible que possible, quel que soit le domaine d'expertise du lecteur, qu'il soit mathématicien ou physicien, et j'espère avoir réussi à faire un exposé ne nécessitant que des connaissances élémentaires de physique et mathématiques. Je suis en effet très heureux que ce domaine puisse donner naissance à des discussions entre mathématiciens et physiciens et j'espère donc que ce mémoire puisse être lisible par les différentes communautés liées, de près ou de loin, à ce vaste sujet.

Les résultats que j'ai obtenu au cours de ma thèse ont tous été le fruit de travaux avec mon directeur de thèse, B. Eynard. Ils découlent pour la plupart d'un résultat qu'il a obtenu dans le cadre du modèle à une matrice hermitienne au moment où j'ai entamé ma thèse sous sa direction : il a montré dans [42], comment calculer tout le développement topologique des fonctions de corrélations de ce modèle grâce à des outils de géométrie algébrique et à une représentation diagrammatique élégante du résultat. Mes travaux ont essentiellement consisté en l'exploration de certaines des nombreuses perspectives ouvertes par cette construction.

Cette thése suit l'évolution de mes travaux au cours de ces trois dernières années :

- Le chapitre 1 consiste en une courte introduction sur les modèles de matrices présentant un historique et quelques applications motivant les travaux présentés dans la suite ;
- Le chapitre 2 est entièrement consacré au sujet principal de ma thèse : le modèle à deux matrices hermitiennes. Après avoir défini sans ambiguité le modèle et les observables étudiées, je montre comment, en généralisant la méthode de [42], on peut calculer le développement topologique complet de toutes les observables en termes de la courbe spectrale classique. Ce chapitre est basé sur mes travaux avec Chekhov et Eynard **[II]**[**III**][**I**][51] .
- Le chapitre 3 montre comment cette même méthode permet de résoudre le modèle à une matrice ainsi que le modèle à une matrice en champ extérieur. La dérivation

des résultats du modèle de matrice en champ extérieur est basé sur mon travail avec Eynard [**IV**].

- Dans le chapitre 4, je présente une généralisation de cette construction au dela des modèles de matrices. Je montre comment, partant d'une courbe algébrique quelconque, on peut construire une famille infinie de formes différentielles imitant les résultats obtenus dans les deux chapitres précédents. Lorsque la courbe considérée est la courbe spectrale d'un modèle de matrices, ces formes différentielles coincident avec les termes du développement topologique des observables de ce modèle. J'étudie également le comportement de ces formes différentielles sous les déformations de la courbe ainsi que les propriétés de symétrie induites et comment ces propriétés permettent de comparer différents modèles et de retrouver facilement des résultats classiques dans l'étude d'intégrales matricielles. Ces résultats ont été obtenus avec Eynard dans [**IV**][**VI**].
- Après une très brève introduction entre le lien entre modèles de matrices et théorie des cordes, je montre que les objets introduits dans le chapitre précédent satisfont les équations d'anomalie holomorphe pour les cordes fermées de BCOV [15] et je propose des équations pour les cordes ouvertes satisfaites par les fonctions de corrélation définies précédemment. Ces résultats viennent d'une collaboration avec Eynard et Mariño [**V**].
- Le chapitre 6 est une conclusion où je résume les principaux résultats présentés dans cette thèse et certaines perspectives ouvertes par ces travaux.

Ces chapitres correspondant au coeur de la thèse sont suivis d'un chapitre comportant quelques appendices techniques et d'une partie où j'ai regroupé mes articles. Ces deux derniers chapitres permettent, entre autres choses, de regrouper toutes les démonstrations nécessaires aux résultats présentés ici. Ainsi, j'ai présenté les réultats sans démonstration dans le corps du texte. Lorsque celà peut aider à une meilleure compréhension du résultat, j'ai cependant parfois présenté une idée des démonstrations.

Liste d'articles utilisés pour ce mémoire.

[**I**]B.Eynard, N.Orantin, "Mixed correlation functions in the 2-matrix model, and the Bethe Ansatz", **JHEP** 0508 028 (2005), math-ph/0504058.

[**II**]B.Eynard, N.Orantin, "Topological expansion of the 2-matrix model correlation functions : diagrammatic rules for a residue formula", *J. High Energy Phys.* **JHEP12**(2005)034, math-ph/0504058.

[**III**]L.Chekhov, B.Eynard and N.Orantin, "Free energy topological expansion for the 2-matrix model", *J. High Energy Phys.* **JHEP12** (2006) 053, math-ph/0603003.

[**IV**]B.Eynard, N.Orantin, "Invariants of algebraic curves and topological expansion", à paraitre dans *Communication in Number Theory and Physics*, volume 1, n 2, math-ph/0702045.

[**V**]B.Eynard, M.Mariño, N.Orantin, "Holomorphic anomaly and matrix models", *J. High Energy Phys.* **JHEP06** (2007) 058, hep-th/0702110.

[**VI**]B.Eynard, N.Orantin, "Topological expansion of mixed correlations in the hermitian 2 Matrix Model and x-y symmetry of the F_g invariants", soumis à *JHEP*, arXiv :0705.0958 .

[**VII**]B.Eynard, N.Orantin, "Weil-Petersson volume of moduli space, Mirzakhani's recursion and matrix models", arXiv :0705.3600.

Table des matières

1 Introduction. 15

1 Petit historique des modèles de matrices. 15
1.1 Matrices aléatoires et physique nucléaire. 15
1.2 Modèles de matrices et combinatoire. 16
1.3 Matrices aléatoires et surfaces continues. 18
2 Applications des modèles de matrices aléatoires. 19
2.1 Volume symplectique de l'espace des modules de surfaces de Riemann. 19
2.2 Théorie de la gravitation quantique bidimensionnelle. 20
2.3 Théories des cordes. 21
2.4 Théories conformes et modèles minimaux. 22
2.5 De l'émergence de la géométrie algébrique et des systèmes intégrables. 24

2 Modèle à deux matrices hermitiennes. 27

1 Définition du modèle. 28
1.1 Intégrale sur l'ensemble des matrices hermitiennes. 28
1.2 Intégrale sur un chemin de valeurs propres. 30
1.3 Intégrale formelle. 31
2 Combinatoire des cartes, surfaces discrétisées. 42
2.1 Génération de surfaces discrétisées bicolores fermées. 43
2.2 Surfaces ouvertes et conditions de bord. 44
3 Développement topologique. 48
4 Cas particulier : modèle d'Ising. 49
5 Double limite d'échelle et limite continue. 50
6 Equations de boucles. 51
6.1 Dérivation des équations de boucles. 52
7 Limite planaire. 54
7.1 Equation de boucle maîtresse et courbe spectrale. 54
7.2 Limite planaire des fonctions de corrélation mixtes. 56
8 Développements topologiques et géométrie algébrique. 62
8.1 Rappels de géométrie algébrique. 62
8.2 Propriétés de la courbe spectrale du modèle à deux matrices. . . 71
9 Développement topologique du modèle à deux matrices. 73
9.1 Définitions, solutions des équations de boucles et feuillet physique. 74
9.2 Quelques propriétés des fonctions de corrélation. 75
9.3 Courbe spectrale complète. 76

9.4 Fonctions de corrélation simples et représentation diagrammatique. 77
9.5 Développement topologique de l'énergie libre. 84
9.6 Développement topologique des fonctions de corrélation mixtes. 86
10 Solution générale des équations de boucles. 88
10.1 Représentation diagrammatique 90
10.2 Retour sur le développement topologique des traces simples. . . 92
10.3 Retour sur la limite planaire des traces mixtes. 92
10.4 Interprétation des relations de récurrence. 93
11 Conclusion du chapitre. 95

3 Autres modèles de matrices. 97
1 Modèle à une matrice. 97
1.1 Interprétation combinatoire. 99
1.2 Courbe spectrale classique. 99
1.3 Solution des équations de boucles. 101
1.4 Lien avec le modèle à deux matrices. 102
2 Modèle de matrices en champ extérieur. 103
2.1 Définition et interprétation combinatoire. 103
2.2 Résolution du modèle. 104
3 Conclusion du chapitre. 107

4 Invariants algébriques. 109
1 Définition des modules de la courbe. 110
2 Déformation par κ. 110
3 Fonctions de corrélation et énergies libres. 112
3.1 Définitions. 112
3.2 Représentation diagrammatique. 115
3.3 Propriétés. 115
3.4 Cas particuliers : genres 0 et 1. 117
4 Déformations de la courbe. 119
4.1 Invariance symplectique. 119
4.2 Variation par rapport aux modules de la courbe. 120
4.3 Opérateur d'insertion de boucle et son inverse. 125
4.4 Transformations modulaire. 126
4.5 Variation par rapport à κ. 127
5 Limite singulière. 128
6 Applications. 129
6.1 Double limite d'échelle et modèles minimaux des théories conformes. 129
6.2 Application à l'intégrale de Kontsevich. 134
6.3 Exemple : courbe d'Airy. 136
6.4 Exemple : la gravité pure (3,2) 138
7 Intégrabilité des invariants algébriques. 140
7.1 Fonction de Baker-Akhiezer. 140
7.2 Relation de Sato. 142
7.3 Equations de Hirota 142
8 Conclusion du chapitre. 143

5 Modèles de matrices et théorie des cordes. 145
1 Théorie des cordes critiques et doubles limites d'échelle. 145
2 Théories de cordes topologiques. 146
3 Conjecture de Dijkgraaf-Vafa et modèle B local. 149
3.1 Variétés de Calabi-Yau locales. 149
3.2 Conjecture de Dijkgraaf-Vafa. 150
3.3 Miroirs de géométries toriques. 152
4 Théorie de Kodaira-Spencer et anomalie holomorphe. 152
5 Conclusion du chapitre. 155

6 Conclusion. 157
1 Résultats principaux : du développement topologique des modèles de matrices à la théorie des cordes topologiques. 157
1.1 Calcul d'intégrales à deux matrices formelles. 157
1.2 Invariants et déformations de courbes algébriques. 158
1.3 Théories conformes et intégrabilité. 158
1.4 Conjecture de Dijkgraaf-Vafa. 159
2 Perspectives. 159
2.1 Etude d'autres modèles de matrices. 159
2.2 Lien avec l'intégrale de matrice convergente. 160
2.3 Lien avec un système intégrable quantique. 160
2.4 Interprétation des invariants algébriques : calcul du volume de l'espace des modules de surfaces. 161
2.5 Symétrie miroir, théories topologiques de type A et courbe de Seiberg-Witten. 162

7 Appendices. 165
1 Modèle Gaussien et théorème de Wick. 165
2 Fonction de partition formelle et surfaces discrétisées. 168
3 Intégrale formelle et équations de boucles. 170
4 Variations de $F^{(0)}$ par rapport aux modules. 171
4.1 Dérivées premières de $F^{(0)}$. 171
4.2 Dérivées secondes de $F^{(0)}$. 171

8 Articles. 173
1 Mixed correlation functions in the 2-matrix model, and the Bethe Ansatz 173
2 Topological expansion of the 2-matrix model correlation functions : diagrammatic rules for a residue formula 192
3 Free energy topological expansion for the 2-matrix model 215
4 Invariants of algebraic curves and topological expansion 232
5 Holomorphic anomaly and matrix models 280
6 Topological expansion of mixed correlations in the hermitian 2 Matrix Model and x-y symmetry of the F_g invariants 293
7 Weil-Petersson volume of moduli space, Mirzakhani's recursion and matrix models 313

Chapitre 1

Introduction.

Avant toute intrusion dans le monde des matrices aléatoires, il semble indispensable de rappeler leur surprenante apparition dans le monde de la physique ainsi que leurs si nombreuses et non moins surprenantes applications par la suite. La première partie de ce chapitre a donc pour but de rappeler l'origine des modèles de matrices aléatoires en général et des objets étudiés dans la suite plus particulièrement. Dans la seconde partie de ce chapitre, nous présenterons divers problèmes mathématiques et théories physiques liés aux modèles de matrices, que ce soit des applications directes ou bien simplement des problèmes comportant une structure similaire. Nous nous attacherons particulièrement à montrer les points communs à ces différentes théories.

1 Petit historique des modèles de matrices.

1.1 Matrices aléatoires et physique nucléaire.

Les matrices aléatoires sont arrivées en physique presque par hasard. En effet, au cours des années 50, les physiciens nucléaires tentent d'étudier des noyaux de plus en plus gros, c'est-à-dire de déterminer le spectre de l'Hamiltonien caractérisant chaque noyau. La complexité du problème et la taille de l'opérateur à diagonaliser croissant avec la taille du noyau, ils se sont finalement trouvés face à un problème qu'ils ne pouvaient pas résoudre ni même décrire théoriquement. Ils étaient cependant capables d'avoir accès à ce spectre expérimentalement en étudiant la diffusion de neutrons lancés sur ce noyau. Ainsi l'expérience donnait accès à la répartition des niveaux d'énergie, la manière dont ils sont corrélés entre eux, leur densité $\rho(E)$ (i.e. le nombre moyen de niveaux dans un intervalle d'énergie)...

L'étude de ces résultats expérimentaux a fait apparaître une structure très robuste et universelle de la répartition statistique des niveaux d'énergie ne dépendant pas directement du noyau étudié ni de la région du spectre observée (voir [84] et les nombreuses références à l'intérieur). En effet, si les niveaux avaient été décorrélés, on se serait par exemple attendu à trouver une distribution de Poisson qui ne fut pas du tout observée. Au contraire, la distribution observée a été retrouvée par Wigner en partant d'une statistique bien différente. Puisque l'Hamiltonien d'un noyau lourd est trop complexe pour être décrit explicitement, Wigner a proposé de le modéliser par une matrice de taille $N \times N$ dont les coefficients sont des variables aléatoires décorélées suivant chacune une

loi gaussienne adoptant ainsi une approche statistique. Lorsque la taille de la matrice N tend vers l'infini, il a observé que le spectre devient (quasi-)continu sur un intervalle $[a, b]$ et que la densité d'énergie suit la célèbre loi du "demi-cercle" de Wigner [105] :

$$\rho(E) = \frac{4}{\pi(b-a)} \sin\phi \quad \text{avec} \quad E = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\phi. \tag{1-1}$$

Or, les corrélations issues de cette densité correspondent exactement aux observations expérimentales obtenues par diffusion de neutrons lents. L'existence d'une approche statistique de ce problème n'est pas due au hasard mais bien aux propriétés particulières de ce type de diffusion. En effet, les neutrons bombardant le noyau à étudier apportent ici chacun une faible énergie. Il faut alors en accumuler beaucoup pour pouvoir arracher un neutron au noyau. L'énergie individuelle des neutrons incidents est donc totalement absorbée par le noyau au cours de cette réaction avant d'être restituée à travers un neutron diffusé. L'étude des neutrons diffusés ne doit donc plus caractériser les comportements individuels des neutrons incidents mais leur comportement collectif impliquant un caractère statistique.

Cette approche statistique peut s'appliquer à d'autres problèmes physiques liés à un Hamiltonien trop compliqué pour être décrit exactement. On a alors pu observer que les caractéristiques générales du spectre ne dépendent pas des détails du problème étudié mais simplement de ses symétries, chaque cas correspondant à l'intégration sur un ensemble de matrices particulier ([84] est une nouvelle fois une source formidable d'informations sur ce point). En effet, l'étude des matrices aléatoires elles-mêmes a permis d'observer des propriétés d'universalités : lorsque la taille des matrices tend vers l'infini, on peut trouver certaines caractéristques du spectre (par exemple l'espacement entre deux valeurs propres successives) qui ne dépendent absolument pas des détails de la mesure d'intégration mais seulement de l'ensemble des matrices sur lequel on intégre.

Il peut donc être intéressant d'étudier les matrices aléatoires en posant une mesure sur l'ensemble de matrices présentant des caractéristiques communes plutôt que de les voir comme un ensemble de coefficients aléatoires réels corrélés. C'est cette approche que nous considérerons dans cette thèse en considérant une mesure d'intégration sur l'ensemble des matrices hermitiennes.

1.2 Modèles de matrices et combinatoire.

Pour bien comprendre comment le modèle qui nous intéresse a vu le jour, il est nécessaire de rappeler comment un résultat de Chromodynamique Quantique (QCD) s'est avéré être fondamental dans le cadre des matrices aléatoires. Cette théorie est une théorie des champs où les particules sont des quarks portant une charge de couleur qui est un objet tridimensionnel. Ils interagissent donc à travers des matrices de jauge de taille 3×3, les gluons, présentant une symétrie $SU(3)$. La résolution de cette théorie est un problème extrèmement complexe et si l'on peut obtenir des résultats perturbatifs aux petites échelles où la constante de couplage est faible, l'étude aux grandes échelles ne peut être décrite de la même façon. En 74, 't Hooft [100] a proposé d'aborder le problème différemment en le généralisant : au lieu de considérer seulement trois couleurs, on peut étudier le même problème avec un nombre de couleurs arbitraire N.

On peut alors faire tendre ce nombre $N \to \infty$ et exprimer les observables du modèle à travers leur développement en $\frac{1}{N}$ pour obtenir finalement des informations sur la valeur $N = 3$. 't Hooft a alors découvert que les graphes de Feynman contribuant à un ordre donné dans ce développement ont une topologie fixée.

Le type de modèles que nous allons étudier dans ce mémoire a été introduit bien plus tard. Partant des techniques classiques de théorie des champs, Brézin, Itzykson, Parisi et Zuber [22] ont interprété les intégrales matricielles issues de la théorie des matrices aléatoires comme des fonctions génératrices de graphes épais lorsque la taille des matrices tend vers l'infini. Pour cela, ils ont développé les intégrales considérées autour d'un col pour se ramener au calcul de valeurs moyennes d'opérateurs par rapport à une mesure gaussienne. L'application du théorème de Wick (voir l'appendice 1) permet alors de représenter le résulat comme une somme sur un ensemble de graphes où les vertex sont orientés. Nous reviendrons plus précisément sur cette construction dans le début du chapitre 2 puisqu'elle est la base des objets étudiés ici.

L'étude des modèles de matrices a connu un regain d'interêt quelques années plus tard grâce à une simple observation. Plusieurs domaines très différents de la physique, tels que la théorie des cordes, la gravitation quantique ou bien l'étude de membranes, nécessitent de pouvoir caractériser des surfaces et, plus particulièrement, de pouvoir mettre une mesure sur cet ensemble. En 1985, plusieurs chercheurs étudiant de telles surfaces ont observé que l'interprétation introduite par [22] permet d'approcher ce type de problème à partir des intégrales de matrices [9, 30, 65]. En effet, considérant un graphe épais, il existe une procédure très simple permettant de remplacer tout vertex à k pattes par un polygône à k côtés. A un graphe consistant en un recollement de vertex, on fait donc correspondre une surface formée de polygônes collés entre eux par leurs arêtes. La théorie des matrices aléatoires permet ainsi de calculer des objets de la forme :

$$\mathcal{Z} = \sum_{\mathcal{S}} \mathcal{P}(\mathcal{S}) \tag{1-2}$$

où $\mathcal{S}$ est une surface discrétisée construite comme un recollement de polygônes et $\mathcal{P}$ est un poids associé à toute surface de ce type. Pour passer à de "vraies" surfaces, c'est-à-dire continues, il faut alors faire tendre le nombre de polygônes vers l'infini et réduisant leur taille de manière à garder l'aire de la surface considéré finie.

Dans ce cadre, la propriété découverte par 't Hooft en QCD signifie que, lorsque la taille des matrices tend vers l'infini, le développement en $\frac{1}{N}$ permet de sélectionner le genre des surfaces générées. Ainsi, on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} \sum_{\mathcal{S}_g} \mathcal{P}(\mathcal{S}_g) = \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} \mathcal{Z}^{(g)} \\ &= \mathrm{N}^2 \; + \; + \; \mathrm{N}^{-2} \; + \cdots \end{aligned} \tag{1-3}$$

où l'on somme maintenant sur l'ensemble des surfaces $\mathcal{S}_g$ de genre g donné pour obtenir chaque terme de ce développement topologique. Cette propriété s'est avérée fondamentale dans l'étude des matrices aléatoires et a permis de faire de grands progrès.

1.3 Matrices aléatoires et surfaces continues.

Revenons maintenant à une éventuelle procédure permettant d'atteindre des surfaces continues à partir des modèles de matrices. Une telle limite est atteinte en faisant tendre le nombre moyen de polygônes constitutifs des surfaces vers l'infini. Ceci est en général obtenu en approchant un point critique dans l'espace des paramètres du modèle. En effet, on peut montrer [47] que le nombre moyen de polygônes $< n >$ est donné par une relation de la forme

$$< n >= g\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial g} \tag{1-4}$$

où g est un paramètre du modèle de matrices et $\mathcal{Z}$ la fonction génératrice de surfaces discrétisées issue de ce modèle. Il faut donc atteindre une singularité de $\ln \mathcal{Z}$ comme fonction de g pour faire diverger cette quantité. On détermine ainsi un point critique g_c tel que pour tout terme du développement topologique $\mathcal{Z}^{(h)}$ défini dans Eq. (1-3), il existe un exposant critique α_h tel que

$$\mathcal{Z}^{(h)} = (g - g_c)^{-\alpha_h}\mathcal{Z}^{(h)}_{sing} + \text{termes sous dominants.} \tag{1-5}$$

On peut alors définir une constante cosmologique liant l'aire moyenne des polygônes ϵ^2 et la distance au point critique :

$$\Lambda\epsilon^2 := (g - g_c). \tag{1-6}$$

La fonction génératrice totale est alors donnée par le comportement

$$\mathcal{Z} = \sum_{h=0}^{\infty} N^{2-2h}(g - g_c)^{-\alpha_h}\mathcal{Z}^{(h)}_{sing} \tag{1-7}$$

au voisinage de la singularité g_c. Il a été montré [23, 39, 55] que l'exposant critique α_h est linéaire en le genre h : il existe un exposant γ tel que

$$\alpha_h = (\gamma - 2)(1 - h). \tag{1-8}$$

Les exposants de $\frac{1}{N^2}$ et $(g - g_c)$ sont donc comparables et ceci permet de définir une variable combinant les deux $\kappa := N(g - g_c)^{1-\frac{\gamma}{2}}$ permettant d'exprimer :

$$\mathcal{Z} = \sum_{h=0}^{\infty} \kappa^{2-2h}\mathcal{Z}^{(h)}_{sing} \tag{1-9}$$

et ainsi de mélanger les contributions des surfaces de genres différents à travers une double limite d'échelle obtenue par $N \to \infty$ et $g \to g_c$ en gardant κ fini. Cette double limite d'échelle est intéressante puisqu'elle permet d'avoir accès aux surfaces continues depuis les modèles de matrices et de mélanger les surfaces de genres différents ce qui est un élément fondamental de la théorie des cordes où ces dernières intéragissent en se séparant et se recollant créent des surfaces de genre plus élevé. Nous reviendrons sur ce point dans la partie suivante dédiée aux applications des matrices aléatoires.

2 Applications des modèles de matrices aléatoires.

Les matrices aléatoires sont un outil formidable tant ses applications sont nombreuses aussi bien en physique qu'en mathématiques. Dans cette partie nous présentons seulement une petite partie de celles-ci plus particulièrement reliées aux résultats présentés dans ce mémoire.

2.1 Volume symplectique de l'espace des modules de surfaces de Riemann.

En mathématiques, on peut être intéressé par décrire et compter des surfaces partageant une même topologie. Lorsque ces surfaces sont discrétisées, ceci se ramène à de la pure combinatoire mais lorsque les surfaces sont continues, on ne peut plus aborder le problème de la même manière. Il faut définir un certain nombre de paramètres, appelés modules, dont la valeur permet de caractériser chaque surface ou type de surface. L'ensemble des surfaces est donc mis en bijection avec l'espace de toutes les valeurs possibles de ces paramètres : l'espace des modules [31]. Un premier ensemble de modules peut être identifié comme le genre g et le nombre de bords k d'une surface. On peut alors découper l'ensemble des surfaces en des sous-ensembles $\mathcal{S}_k^{(g)}$ contenant toutes les surfaces de genre g donné et ayant k bords. A chacun de ces ensembles on peut associer un ensemble de modules tels que la longueur de chaque bord par exemple dont les différentes valeurs forment un espace $\mathcal{M}_k^{(g)}$. Alors que dans le cas des surfaces discrétisées, on les compte en associant à chaque assemblage de polygônes un poids et en effectuant la somme de ces poids, l'équivalent continu consiste à munir l'espace des modules d'une mesure et à calculer le volume de ce dernier par rapport à cette mesure. En effet, chaque point de l'espace des modules correspond à une surface et imposer une mesure sur cet espace consiste à associer un poids à chaque surface, l'intégration remplaçant alors la somme discrète.

Dans l'étude de ces espaces, Riemann lui-même a été le premier à étudier l'espace $\mathcal{M}_g$ de toutes les structures complexes sur une surface orientée de genre g modulo l'ensemble des difféormorphismes préservant l'orientation. Il a ainsi pu montrer que l'espace $\mathcal{M}_g$ a pour dimension réelle $6g-6$. Beaucoup plus récemment, démontrant ainsi une conjecture précédement établie par Witten [108], Kontsevich [72]a montré que l'on pouvait calculer le volume de tels espaces par le calcul d'intégrales de matrices du type

$$\mathcal{Z}(\Lambda) = \frac{\int dM exp - \text{ Tr } \left(\frac{\Lambda M^2}{2} - i\frac{M^3}{6}\right)}{\int dM - \text{ Tr } \frac{\Lambda M^2}{2}} \tag{2-1}$$

où Λ est une matrice de champ extérieur en utilisant la propriété disant que les volumes $v_n^{(g)} := \text{Vol}\left(\mathcal{M}_n^{(g)}\right)$ satisfont les équations de Korteweg-de Vries (KdV).

Le fait que cette hierachie intégrable d'équations apparaisse dans l'étude des matrices aléatoires est connu depuis longtemps et beaucoup de travaux ont montré que de telles hierarchies intégrables sont fondamentalement liées à différents modèles de matrices aléatoires [23, 55, 39, 13]. Au contraire, l'émergence de telles contraintes dans le cadre de l'étude de l'espace des modules de surfaces continues etait plus surpenante et

n'est toujours pas comprise et fait l'objet de nombreux travaux. Très récemment, Mirzakhani [87, 88] a proposé une relation de récurrence permettant de retrouver la valeur de ces volumes avec une approche mélangeant géométrie algébrique et géométrie hyperbolique. Ces relations semblent être un premier pas vers une meilleure compréhension de ce lien entre hierarchies intégrables et espaces de modules.

2.2 Théorie de la gravitation quantique bidimensionnelle.

La gravitation est sûrement la force fondamentale la plus facilement observable à l'échelle macroscopique puisqu'elle a toujours été ressentie par tout le monde et a été formalisée très tôt à travers les lois de Newton. Cependant son comportement à petites échelles est plus problématique. Il paraîtrait en effet naturel de vouloir quantifier cette intéraction fondamentale comme l'électromagnétisme et les autres forces, mais les techniques de théorie des champs utilisées ne peuvent s'appliquer dans ce cas là puisque la gravitation est une théorie non renormalisable.

Comment quantifier cette théorie en pratique ? On peut tenter d'imiter ce qui se fait déjà dans les autres théories en utilisant les intégrales de chemins, c'est-à-dire sommer sur tous les chemins d'états possibles entre un état initial et un état final donné. On sait depuis Einstein que le champ gravitationnel est un champ courbant l'espace temps. Pour le caractériser il faut donc se donner une variété $\mathcal{E}$ de dimension 4, des coordonnées $\{x_i\}_{i=1}^4$ sur celle-ci et une métrique g_{ij} donnée par une matrice 4×4. Son action est alors donnée par la courbure de $\mathcal{E}$:

$$S := \frac{-c^3}{16\pi G} \int_{\mathcal{E}} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \sqrt{-det\, g} R \tag{2-2}$$

où R est la courbure scalaire de la métrique g et G un nombre appelé constante gravitationnelle. Une intégrale de chemin sera alors de la forme :

$$\mathcal{Z} = \sum_{\mathcal{E}} exp\left(-i\frac{S(\mathcal{E})}{\hbar}\right) \tag{2-3}$$

où la somme porte sur toutes les variétés $\mathcal{E}$ satisfaisant les conditions initiale et finale. Le calcul d'une telle somme est extrèmement compliqué et un tel problème n'a pas encore pu être résolu, en particulier parce qu'on ne sait pas bien décrire les différentes topologies de $\mathcal{E}$ intervenant dans cette somme.

On peut cependant essayer de simplifier le problème pour tenter de le résoudre en diminuant la dimension de l'espace temps : on peut considérer l'espace temps comme une variété de dimension 2 : une dimension d'espace et une dimension de temps. On va également faire une rotation de Wick $t \to it$, faisant passer dans l'espace des temps complexes et rendant la métrique Euclidienne. Dans ce cas là, le problème se rapproche d'un problème de calcul de volume d'espace de modules de surfaces continues décrit plus haut. On doit en effet calculer des intégrales de chemin de la forme :

$$\mathcal{Z} = \sum_{\mathcal{E}} exp\left(-\frac{\int dx^2 \sqrt{-det\, g}(\Lambda + GR)}{\hbar}\right) \tag{2-4}$$

où la somme porte sur toutes les surfaces satisfaisant les conditions aux limites et Λ est la constante cosmologique. En fait, le symbole de somme est ici un peu abusif puisqu'il

sous entend une somme discrète alors que l'espace des surface n'est pas à priori discret. En fait, il faudrait plutôt réécrire $\mathcal{Z}$ comme une intégrale sur l'espace des modules des surfaces de Riemann $\mathcal{E}$.

C'est justement sur ce point que les intégrales de matrices s'avèrent efficaces à condition de donner un sens précis à cette somme discrète. Une idée naturelle pour décrire une surface, fréquemment utilisée par exemple en mécanique dans les méthodes de modélisation en éléments finis, consiste à discrétiser cette dernière en la remplaçant par une surface "proche" composée uniquement de polygônes collés entre eux par leurs arêtes. La somme $\mathcal{Z}$ consiste alors à sommer sur de telles surfaces discrétisées en donnant un poids particulier à chacun des polygônes les composant ainsi qu'à l'opération de recollement d'arêtes : on peut donc voir $\mathcal{Z}$ comme une fonction génératrice de telles surfaces. Or comme nous le verrons, c'est exactement le type de fonctions génératrices que l'on peut obtenir à partir des intégrales de matrices. Notons qu'il faut alors faire très attention à cette discrétisation des surfaces et pouvoir caractériser son impact sur les observables du modèle.

Pour la suite, remarquons que l'on peut également introduire des champs de "matière" scalaires $X_i : \mathcal{E} \to \mathbb{C}$ couplés à la gravité, par exemple à travers l'action modifiée :

$$S = \int dx^2 \sqrt{-det\, g}(\Lambda + GR + \sum_i g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X_i \partial_\beta X_i). \tag{2-5}$$

2.3 Théories des cordes.

Une autre théorie peut se mettre sous une forme similaire et se ramener au même problème consistant en une intégrale sur l'espace des modules des surfaces de Riemann : la théorie des cordes [54]. Celle-ci est une généralisation des théories des champs habituelles où les particules ne sont plus des points de l'espace temps mais des objets à une dimension, i.e. des cordes paramétrées par des coordonnées $X_i(s,t)_{i=1,\dots,3}$ où s est une abscisse curviligne sur la corde. Pour définir une intégrale de chemin il faut alors intégrer sur tous les états $X_i(t)$ entre une corde initiale $X_i(s,t_0)$ et une corde finale $X_i(s,t_f)$. Or, lorsqu'une corde évolue dans le temps, elle dessine une surface (bidimensionnelle) dans l'espace temps. L'intégrale de chemin correspond donc comme dans le paragraphe précédent à sommer sur toutes les surfaces entre les états initiaux et finaux :

$$\mathcal{Z} = \sum_{\mathcal{E}} exp\left(-i\frac{S(\mathcal{E})}{\hbar}\right). \tag{2-6}$$

Plusieurs actions $S(\mathcal{E})$ peuvent alors être choisies et plusieurs mesures pour la sommation. Nous n'alllons pas nous attarder sur toutes les actions possibles. Notons que parmi toutes celles-ci, Polyakov [94] a proposé une action invariante sous les changements de coordonnées de la surface :

$$S := -\frac{\mu c}{2}\int dsdt\sqrt{-det\, g}(\sum_i G_{\mu\nu} g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X_\mu \partial_\beta X_\nu) \tag{2-7}$$

où G est la métrique de Minkowski sur l'espace-temps et g la métrique induite sur la feuille d'univers (i.e. la surface dessinée par l'évolution de la corde dans le temps). Notons que l'on reconnait ici exactement la même somme sur les surfaces que celle

introduite dans le paragraphe précédent dans le cadre de la gravitation quantique bidimensionnelle dans Eq. (2-5).

Cependant, cette théorie des cordes présente de nombreux défauts. Non seulement, elle ne peut être vérifiée expérimentalement mais au niveau théorique, les symétries nécessaires impliquent de fortes contraintes. En effet, on ne peut pas construire une telle théorie dans un espace temps de dimension 4 mais 26 ! Il faut donc éliminer 22 dimensions. Une partie du chemin a déjà été fait par Ramond [95] et Neveu et Schwarz [92] en introduisant la supersymétrie : ils ont ramené le problème à une théorie à dix dimensions. Il reste donc 6 dimensions à éliminer pour revenir aux 4 dimensions de l'espace temps réel. Ceci peut être fait en réduisant la taille des 6 directions supplémentaires, en les compactifiant. Les nombreux travaux dans ce domaine font apparaître une très riche structure intéressante au moins au niveau mathématique si ce n'est pour retrouver les propriétés physiques du monde réel.

Remarque 2.1 Nous n'avons évoqué ici qu'un exemple parmi bien d'autres de modèle de théorie des cordes lié aux modèles de matrices aléatoires. Nous verrons un autre exemple dans le chapitre 5 qui lui est totalement dédié : les théories des cordes topologiques. Ce cas correspond à une théorie des cordes où seule la topologie de la feuille d'univers (i.e. la surface générée par l'évolution temporelle de la corde) entre en compte dans le calcul de la fonction de partition. Si deux types de théories des cordes apparaissent dans ce cadre, tous deux sont fortement reliés aux modèles de matrices [81] : que ce soit par les propriétés de variation de la fonction de partition du type A sous les déformation de la feuille d'univers ou par la conjecture de Dijkgraaf et Vafa [36] identifiant directement un modèle de matrice équivalent au type B, les points communs entre modèles de matrices et théories des cordes topologiques sont frappants.

2.4 Théories conformes et modèles minimaux.

Explicitons un peu plus comment ces dimensions critiques pour l'espace temps sont obtenues. Au niveau local, l'action de Polyakov a une symétrie sous le changement de la métrique :

$$g_{\alpha\beta} \to e^{\varphi} g_{\alpha\beta}, \tag{2-8}$$

la symétrie conforme. Cependant cette symétrie est brisée par la quantification : la sommation sur les surfaces introduit une anomalie. On peut caractériser cette anomalie par un unique scalaire : la charge centrale c. Celle-ci s'annule lorsque la théorie quantique est invariante conforme. Pour la définir, il est nécessaire d'étudier plus précisément les transformations conformes de la métrique. Ce sont les transformations qui changent la métrique par un facteur scalaire et donc laissent invariante l'action de la théorie [62] : elles sont données par

$$z \to z(1 + \epsilon f(z)) \tag{2-9}$$

où f est une fonction analytique de la variable complexe $z = x + iy$ avec x et y des coordonnées sur la surface considérée. Elles sont donc générées par les opérateurs $l_n := z^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}$. En fait, comme souvent, pour obtenir les bons générateurs des transformations conformes, on doit introduire un ordre normal pour préciser l'ordre dans lequel les différents opérateurs agissent. On obtient ainsi les générateurs $L_n :=: l_n :$ qui satisfont

les relations de commutation :

$$[L_n, L_m] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{m+n}Id, \tag{2-10}$$

c'est-à-dire qu'ils forment une extension de l'algèbre de Virasoro avec une charge centrale c.

On peut construire une représentation de cette algèbre en partant d'un opérateur primaire $|0>$:

$$L_0|0>= h|0> \quad \text{et} \quad \forall n > 0\,,\ L_n|0>= 0 \tag{2-11}$$

considéré comme le vide de la représentation. L'ensemble des états engendrés par les autres opérateurs L_{-n} :

$$|n_1 n_2 \dots n_k >:= L_{-n_1} L_{-n_2} \dots L_{-n_k}|0> \tag{2-12}$$

engendrent alors, en général, une représentation de dimension infinie irréductible de l'algèbre de Virasoro. Cependant ceci n'est plus vrai dans certains cas particuliers où la représentation engendrée est réductible puisque les états engendrés ne sont pas linéairement indépendants. En effet, pour les valeurs de h particulières :

$$h_{r,s} = \frac{1}{48}\left(12(r-s)^2 + (1-c)(r^2 - s^2 - 2) + (r^2 - s^2)\sqrt{(25-c)(1-c)}\right) \tag{2-13}$$

où r et s sont entiers, on obtient de telles représentations réductibles.

Remarque 2.2 Certains modèles ne font intervenir qu'un nombre fini de représentations réductibles de ce type et sont ainsi entièrement solubles : les modèles minimaux indexés par deux entiers p et q premiers entre eux. Dans ce cas, la charge centrale est de la forme :

$$c = 1 - 6\frac{(p-q)^2}{pq} \tag{2-14}$$

et les dimension des champs primaires sont données par la table de Kac [62] :

$$h_{r,s} = \frac{(rq - sp)^2 - (p-q)^2}{4pq} \tag{2-15}$$

où s et r sont deux entiers strictement positifs et strictement inférieurs respectivement à q et à p.

Nous verrons comment résoudre ces modèles grâce aux modèles de matrice dans le chapitre 4 de cette thèse.

On peut montrer que l'on peut associer une telle charge centrale à chaque champ suivant sa statistique : à un boson, on associe une charge 1 tandis qu'à un fermion on associe une charge $\frac{1}{2}$. On peut également montrer que le champ de jauge $g_{\alpha\beta}$ a une dimension négative égale à -26 due, entre autres choses, à l'introduction de fantômes de Fadeev-Popov. La charge totale d'une théorie des cordes D dimensionnelle avec l'action de Polyakov est donc égale à :

$$c = D - 26 \tag{2-16}$$

puisqu'il y a D champs bosoniques dans cette théorie. On voit ainsi qu'il est nécessaire d'avoir une théorie avec un espace temps de dimension $D = 26$ pour que la symétrie conforme soit préservée au niveau quantique. Pour réduire la dimension critique, on peut introduire la supersymétrie et donc D fermions. Ceci induit de plus de nouveaux fantômes de Fadeev-Popov avec une charge +11. On a alors la charge centrale

$$c = D - 26 + \frac{D}{2} + 11 \tag{2-17}$$

ce qui donne une dimension critique $D = 10$ comme annoncé plus haut.

En fait, les modèles de matrices permettent non seulement d'avoir accès aux théories des cordes critiques mais égalements à celles qui ont une dimension non critique et donc une charge centrale non nulle. En particulier, les modèles minimaux correspondent à une charge centrale $c < 1$.

Dans tous les cas, pour comparer les résultats des théories conformes introduites ici et des modèles de matrices vus comme fonctions génératrices de surfaces discrétisées, il faut pouvoir trouver un language commun. Dans les deux cas on peut se ramnener à une unité de comparaison possible : l'aire des surfaces générées. On peut se demander comment se comportent les observables de ces différents modèles en termes de l'aire $\mathcal{A}$ des surfaces considérées. Plus particulièrement comment divergent ces observables quand $\mathcal{A} \to \infty$. En général, pour les théories conformes, on peut montrer que pour un genre h et une aire $\mathcal{A}$ fixée pour les surfaces $\mathcal{E}$, on a un comportement du type [71] :

$$\mathcal{Z}^{(h)} = \sum_{\mathcal{E}} exp\left(-i\frac{S(\mathcal{E})}{\hbar}\right) \sim_{\mathcal{A}\to\infty} \mathcal{A}^{\gamma_h - 3} \tag{2-18}$$

où l'exposant γ_h est linéaire en le genre et donné par[1] :

$$\gamma_h = 2h + \gamma_{string}(1 - h). \tag{2-19}$$

Le coefficient γ_{string}, appelé susceptibilité de corde dépend de la théorie considérée. Par exemple, pour un modèle minimal de type (p, q), on peut montrer q'il vaut :

$$\gamma_{string} = -2\frac{|p - q|}{p + q - |p - q|}. \tag{2-20}$$

On peut calculer un tel exposant critique pour n'importe quelle autre observable $< \mathcal{O} >$ du modèle et ainsi le comparer avec les résultats de modèles de matrices.

Nous verrons ainsi que la comparaison de ces exposants, à condition de bien normaliser les observables et variables, permet de montrer que les modèles de matrices donnent accès aux théories conformes (en particulier en prenant certaines limites où les surfaces discrétisées deviennent continues).

2.5 De l'émergence de la géométrie algébrique et des systèmes intégrables.

Si les applications présentées jusqu'ici ont toutes un lien avec la combinatoire de surfaces discrétisées ou continues, les modèles de matrices sont liés à de nombreux

[1] On peut noter la similitude entre cette équation et Eq. (1-8).

autres problèmes qui ne seront pas ou très peu abordés dans cette thèse. Si elle ne semble pas aussi directement reliée à notre problème, l'une des propriétés des modèles de matrices qui semble fondamentale dans toutes les construction introduites ici est son intégrabilité. En effet, cette propriété, que l'on retrouve sous différentes formes suivant l'aspect des modèles de matrices étudiés, assure que le problème est soluble : cela signifie que l'on est en principe capable de calculer toutes les observables du modèle considéré (ce qui ne signifie pas que l'on puisse le faire facilement en pratique).

Il a été observé que les observables des modèles de matrices sont, en général, solutions d'équations différentielles appartenant à des hierarchies intégrables telles que les hierarchies KP, la hierarchie de Toda 2 dimensionnelle, celle de Whitham ... En fait, lorsque l'on intègre sur une matrice de taille finie N, on trouve un système intégrable quantique caractérisé par $\hbar \sim \frac{1}{N}$. On s'attend donc à retrouver un système intégrable classique lorsque la taille $N \to \infty$ et ainsi tous les ingrédients le caractérisant comme une courbe algébrique appelée courbe spectrale ou la fonction τ satisfaisant des relations bilinéaires.

Nous verrons que nous retrouvons effectivement tous ces ingrédients dans le cadre des intégrales formelles qui sont liées à la limite des intégrales de matrices convergentes lorsque la taille des matrices tend vers l'infini. On ira même plus loin puisque nous montrerons que ces éléments classiques permettent de calculer toutes les corrections en $\frac{1}{N}$, i.e. toutes les corrections semi-classiques[2].

Si le lien entre intégrabilité et modèles de matrices semble bien compris à présent, le lien direct entre combinatoire de surfaces et intégrabilité restait jusqu'à récemment assez obscur. Pourtant cet outil semble fondamental dans l'étude de l'espace des modules de surfaces de Riemann. En effet, si l'approche de Kontsevich a été de réinterpréter ce problème en termes d'intégrales matricielles, ceci est principalement dû au fait que les volumes d'espaces de modules sont solutions d'équations différentielles de la hierarchie KdV et donc à l'intégrabilité. Si des travaux récents [93, 79, 91] ont permis de comprendre un peu mieux ce lien à la lumière de l'étude de partitions aléatoires et leur lien avec les fonctions tau de systèmes intégrables, j'espère que cette thèse permettra de donner de premiers éléments de compréhension utilisant le formalisme des matrices aléatoires.

[2]Nous verrons que ceci n'est pas exact puisque le modèle étudié n'est pas exactement l'intégrale de matrice dont on s'attend à ce qu'elle soit la fonction tau d'un système intégrable quantique. Il reste dons une dernière étape à franchir pour pouvoir reconstruire le système quantique lui-même par resommation des termes semi-classiques.

Chapitre 2

Modèle à deux matrices hermitiennes.

Dans ce chapitre, nous présentons une méthode de résolution du modèle à deux matrices hermitiennes formel. Ce modèle est souvent décrit comme la limite d'une intégrale matricielle convergente où la taille des matrices tend vers ∞ puisqu'il correspond à un développement perturbatif de cette intégrale par rapport à un paramètre qui est de l'ordre de l'inverse de la taille des matrices considérées. Nous allons donc montrer comment calculer tous les termes du développement de toutes les observables de ce modèle par rapport à ce paramètre. Cette méthode, basée sur les travaux de Eynard pour le modèle à une matrice [42] et ses méthodes générales de résolution des équations de boucles, montrera toute sa puissance dans les chapitres suivants où nous la généraliserons au delà des modèle de matrices aléatoires.

Le modèle à deux matrices hermitiennes a fait l'objet de différentes approches dans la littérature. En effet, les nombreux domaines où ce problème, qui consiste essentiellement à évaluer des intégrales matricielles, semble apparaître ont permis à différentes spécialités de se retrouver sur un même terrain. Ainsi chacun a pu utiliser ses méthodes favorites et l'on peut facilement imaginer que les contributions de physiciens, probabilistes ou combinatoriciens vont apporter des points de vue bien différents. Le modèle étudié ici a été introduit en premier par Kazakov comme un modèle de physique statistique [66] : il a été utilisé pour modéliser le modèle d'Ising sur surface aléatoire, i.e. décrire un système de spins en intéractions vivant sur un réseau triangulaire aléatoire.

La méthode développée ici consiste à résoudre un ensemble d'équations satisfaites par les observables du système. Ces équations sont connues sous le nom d'équations de boucles [86, 99, 34, 8, 43] dans le milieu des matrices aléatoires mais elles se retrouvent en fait dans diverses spécialités de physique ou de mathématiques sous des noms aussi divers que contraintes de Virasoro, identités de Ward, équations de Schwinger Dyson, équations de Tutte [102, 103] ou même équations de Baxter [11]. Si des méthodes ont été proposées pour les résoudre dans des cas particuliers [5, 4, 3] ou même totalement [8] dans le cas du modèle à une matrice, l'approche de Eynard [42, 27] a pour avantage la simplicité et la généralité. En effet, en utilisant un langage approprié, celui de la géométrie algébrique, on peut résoudre ces équations de manière intrinsèque de façon à ne plus faire apparaître les specificités de tel ou tel modèle en se ramenant à l'étude d'une courbe algébrique associée au modèle [67].

Cependant, ces équations sont très générales et admettent des solutions présentant des structures bien différentes les unes des autres. Il existe ainsi plusieurs définitions non équivalentes de ce qui est usuellement dénommé "intégrale matricielle" dans la littérature. Toutes satisfont les équations de boucles mais elles ne coincïdent pas de manière générale. Cette imprécision dans la définition, récurrente dans la littérature, a mené à des contradictions flagrantes particulièrement mises en avant par [5] et [63, 32, 21] et expliquées plus tard par [18].

Nous débuterons donc ce chapitre en précisant ce que nous entendons par "intégrale de matrice". Ceci nous permettra ensuite d'interpréter ces intégrales comme fonctions génératrices de surfaces constituées de polygones de couleurs différentes. Enfin, je présenterai le principal résultat de cette partie : comment, en utilisant des concepts de géométrie algébrique, on peut calculer de manière explicite toutes ces "intégrales de matrices formelles" en termes d'objets fondamentaux définis sur une courbe algébrique appelée courbe spectrale.

1 Définition du modèle.

Considérons deux potentiels polynômiaux[1] :

$$V_1(x) := \sum_{k=0}^{d_1+1} \frac{t_k}{k} x^k \quad \text{et} \quad V_2(x) := \sum_{k=0}^{d_2+1} \frac{\tilde{t}_k}{k} x^k \tag{1-1}$$

et définissons l'intégrale

$$\mathcal{Z}_{2MM} := \int_{H_N \times H_N} dM_1 dM_2 \, e^{-\frac{1}{\hbar} Tr(V_1(M_1)+V_2(M_2)-M_1 M_2)}, \tag{1-2}$$

où M_1 et M_2 sont deux matrices hermitiennes de taille $N \times N$, dM_1 et dM_2 sont les produits des mesures de Lebesgues des composantes réelles de M_1 et M_2

$$dM := \prod_i dM_{ii} \prod_{i<j} dRe(M_{ij}) dIm(M_{ij}) \tag{1-3}$$

et $\hbar = \frac{T}{N}$ est un paramètre de dévelopement perturbatif. Une telle intégrale ne semble a priori pas souffrir de défaut de définition. Cependant, suivant la spécialité dans laquelle elle est étudiée ou bien même le régime d'étude, le signe intégrale a plusieurs significations différentes dans la littérature. Il est donc important de préciser quel objet se cache vraiment sous cette dénomination.

1.1 Intégrale sur l'ensemble des matrices hermitiennes.

La définition la plus naturelle consiste à diagonaliser les matrices $M_1 = U_1^\dagger \Lambda_1 U_1$ et $M_2 = U_2^\dagger \Lambda_2 U_2$ pour ensuite intégrer sur les valeurs propres réelles,

$$\Lambda_i = diag(\lambda_{i,1}, \ldots, \lambda_{i,N}), \tag{1-4}$$

[1] Toute la méthode présentée ici peut s'étendre au cas de potentiels dont la dérivée est une fonction rationnelle. Cependant, les quelques subtilités techniques induites par cette généralisation n'apportent rien de nouveau à la compréhension du problème et entrent dans le cadre du chapite 4. Le lecteur intéressé pourra aisément adapter la description faite du modèle à une matrice avec potentiel rationnel ou bien se reporter à la démonstration de [**IV**].

d'une part et le groupe unitaire, $U_i^\dagger U_i = 1$, d'autre part. Dés lors l'intégrale 1-2 s'écrit

$$\begin{aligned}&\mathcal{Z}_{herm} := \\ &:= \int_{U(N)\times U(N)} dU_1 dU_2 \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} d\Lambda_1 d\Lambda_2 \Delta(\lambda_1)^2\Delta(\lambda_2)^2 e^{-\frac{1}{\hbar}Tr(V_1(\Lambda_1)+V_2(\Lambda_2)-U_1^\dagger\Lambda_1 U_1 U_2^\dagger \Lambda_2 U_2)}\end{aligned} \tag{1-5}$$

où le déterminant de Vandermonde

$$\Delta(\lambda_1) := \prod_{i>j}(\lambda_{1,i} - \lambda_{1,j}) \tag{1-6}$$

vient du Jacobien du changement de variable :

$$dM_1 = \Delta(\lambda_1)^2 dU_1 d\Lambda_1 \tag{1-7}$$

avec $d\Lambda_1 = \prod_{i=1}^N d\lambda_i$ et dU est la mesure de Haar sur le groupe $U(N)$.

Sous cette forme, un seul terme contient encore un couplage entre les valeurs propres et les matrices unitaires de changement de base par l'intermédiaire de la combinaison $U_1 U_2^\dagger$. Cette contribution peut être totalement explicitée en utilisant la

Théorème 1.1 *Formule d'Harish Chandra-Itzykson-Zuber (HCIZ) [56, 59] :*

$$\int_{U(N)} dU e^{\,\mathrm{Tr}\,\Lambda_1 U \Lambda_2 U^\dagger} = \frac{\det E}{2^{\frac{N(N-1)}{2}}\Delta(\lambda_1)\Delta(\lambda_2)} \prod_{k=1}^{N-1} k!, \tag{1-8}$$

où la matrice E, de taille $N\times N$, est définie par :

$$E_{ij} = \exp(\lambda_{1,i}\lambda_{2,j}). \tag{1-9}$$

On peut ainsi réexprimer la fonction de partition comme :

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{herm} &= (\pi\hbar)^{\frac{N(N-1)}{2}} \frac{1}{N!}\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \det(e^{\frac{1}{\hbar}\lambda_{1,i}\lambda_{2,j}})\Delta(\lambda_1)\Delta(\lambda_2)\times \\ &\qquad\qquad \times\prod_{i=1}^N d\lambda_1 d\lambda_2 e^{-\frac{1}{\hbar}[V_1(\lambda_{1,i})+V_2(\lambda_{2,i})]} \\ &= (\pi\hbar)^{\frac{N(N-1)}{2}} \int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \Delta(\lambda_1)\Delta(\lambda_2)\prod_{i=1}^N d\lambda_{1,i} d\lambda_{2,i} e^{-\frac{1}{\hbar}[V_1(\lambda_{1,i})+V_2(\lambda_{2,i})-\lambda_{1,i}\lambda_{2,i}]}.\end{aligned} \tag{1-10}$$

Cette expression permet, entre autres choses, d'identifier des critères de convergence de cette intégrale : il faut que les potentiels V_1 et V_2 soient pairs et que leur termes de plus haut degrés t_{d_1+1} et $\tilde{t}_{d_2+1}$ aient une partie réelle strictement positive si $d_1 > 1$ ou $d_2 > 1$. Plus généralement, il faut que la partie réelle de la fonction $V_1(x) + V_2(y) - xy$ soit bornée inférieurement sur $\mathbb{R}^2$.

Le calcul d'une telle intégrale peut être ramené à l'étude de deux familles de polynômes moniques

$$\pi_n(x) = x^n + \dots \quad \text{et} \quad \sigma_n(y) = y^n + \dots \tag{1-11}$$

biorthogonaux par rapport à la mesure :

$$\int_{\mathbb{R}^2} dxdy\pi_n(x)\sigma_n(y)e^{-\frac{1}{\hbar}[V_1(x)+V_2(y)-xy]} = h_n\delta_{nm}. \tag{1-12}$$

Cette méthode de résolution a été beaucoup étudiée dans la littérature [85, 20] et a permis de faire le lien avec certains problèmes de Riemann-Hilbert (voir [50] pour une revue sur le sujet). Cependant, je voudrais encore rappeler que cette définition de l'intégrale de matrices ne coincide pas avec l'objet d'étude de cette thèse et les résultats obtenus dans ce contexte ne peuvent s'appliquer aux problèmes de combinatoire de cartes.

Remarque 1.1 Cette intégrale n'a pas forcément de développement en $\hbar^2$!

Remarque 1.2 Un résultat récent permet de calculer une grande classe d'observables de ce modèle grâce à une formule de type HCIZ. Cette formule, dont une première extension a été mise en avant par Morozov [89] suivant Shatashvili [97], a été fortement généralisée par [48] :

Théorème 1.2 *Formule de Eynard-Prats Ferrer : pour toute fonction F composée d'un produit de traces contenant chacune un produit de deux matrices :*

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_{U(N)} F(\Lambda_1, U\Lambda_2U^\dagger)e^{-\operatorname{Tr}\Lambda_1U\Lambda_2U^\dagger}dU = \\ &= \frac{\prod_{i=1}^N k!}{N!(-2\pi)^{\frac{N(N-1)}{2}}\Delta(\lambda_1)\Delta(\lambda_2)} \textstyle\sum_{\sigma,\tau\in S_N}(-1)^{\sigma\tau}e^{-\operatorname{Tr}\Lambda_{1,\sigma}\Lambda_{2,\tau}}\times \\ &\qquad\qquad \times \textstyle\int_{T_N} dTF(\Lambda_{1,\sigma}+T, \Lambda_{2,\tau}+T^\dagger)e^{-\operatorname{Tr}TT^\dagger}\end{aligned} \tag{1-13}$$

où T_N est l'ensemble des matrices complexes triangulaires supérieures strictes muni de la mesure dT du produit des mesures de Lebesgues des parties réelles et imaginaires de tous les éléments de la matrice, S_N est l'ensemble des permutations de taille N et

$$\Lambda_{i,\sigma} = diag(\lambda_{i,\sigma(1)}, \lambda_{i,\sigma(2)}, \ldots, \lambda_{i,\sigma(N)}) \tag{1-14}$$

pour toute permutation $\sigma \in S_N$.

Cette généralisation donne accès à toute les intégrales matricielles du type :

$$\int_{H_N\times H_N} dM_1dM_2\, F(M_1, M_2)e^{-\frac{1}{\hbar}Tr(V_1(M_1)+V_2(M_2)-M_1M_2)} \tag{1-15}$$

où F est contraint par les propriétés de la formule de Eynard-Prats Ferrer.

1.2 Intégrale sur un chemin de valeurs propres.

Dans le paragraphe précédent, nous avons imposé aux valeurs propres un critère de réalité contraignant ainsi fortement les potentiels acceptables. On peut retourner le problème en fixant des potentiels arbitraires et contraindre les chemins d'intégration possibles pour les valeurs propres par ces potentiels. L'intégrale

$$\int_{\mathcal{C}} \Delta(\lambda_1)\Delta(\lambda_2)\prod_{i=1}^N d\lambda_1d\lambda_2e^{-\frac{1}{\hbar}[V_1(\lambda_{1,i})+V_2(\lambda_{2,i})-\lambda_{1,i}\lambda_{2,i}]} \tag{1-16}$$

est convergente si les chemins d'intégration $\mathcal{C}$ pour les couples de valeurs propres $(\lambda_{1,i}, \lambda_{2,i})$ sont choisis de manière appropriée, c'est-à-dire tels que $Re(V_1(x)+V_2(y)-xy)$ est bornée inférieurement sur tout chemin $\mathcal{C}_{1,i} \times \mathcal{C}_{2,i}$ parcouru par le couple $(\lambda_{1,i}, \lambda_{2,i})$. Si les potentiels ne sont pas triviaux ($d_1 > 1$ ou $d_2 > 1$), cette condition revient à rechercher les chemins $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ tels que

$$\int_{\mathcal{C}_1} e^{-\frac{1}{\hbar}V_1(x)}dx \quad \text{et} \quad \int_{\mathcal{C}_2} e^{-\frac{1}{\hbar}V_2(y)}dy \tag{1-17}$$

soient absolument convergentes. Génériquement, il existe d_1 (resp. d_2) chemins homologiquement indépendants $\mathcal{C}_{1,i}, i = 1 \dots d_1$ (resp. $\mathcal{C}_{2,j}, j = 1 \dots d_2$) allant de l'infini à l'infini satisfaisant cette propriété. On peut donc décomposer n'importe quel chemin $\mathcal{C}$ acceptable en :

$$\exists!\, \kappa, \;\; \mathcal{C} = \sum_{i,j} \kappa_{i,j}\, \mathcal{C}_{1,i} \times \mathcal{C}_{2,j} \tag{1-18}$$

où κ est une matrice à coefficients complexes. Ce qui nous permet de réexprimer la fonction de partition sur le chemin correspondant comme

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{conv}(\kappa) &= \tfrac{1}{N!}\sum_{\sigma\in S_N}(-1)^\sigma \sum_{k_1,\dots,k_N}\sum_{l_1,\dots,l_N}\prod_{i=1}^{N}\int_{\lambda_{1,i}\in\mathcal{C}_{1,i},\lambda_{2,\sigma(i)}\in\mathcal{C}_{2,\sigma(i)}} \\
&\qquad \Delta(\lambda_1)\Delta(\lambda_2)\prod_i \kappa_{k_i,l_{\sigma(i)}} e^{-\frac{1}{\hbar}\left[V_1(\lambda_{1,i})+V_2(\lambda_{2,i})-\lambda_{1,i}\lambda_{2,\sigma(i)}\right]} d\lambda_{1,i}d\lambda_{2,i} \\
&= \sum_{k_1,\dots,k_N}\sum_{l_1,\dots,l_N}\prod_i \kappa_{k_i,l_i}\prod_{i=1}^{N}\int_{\lambda_{1,i}\in\mathcal{C}_{1,k_i},\lambda_{2,i}\in\mathcal{C}_{2,l_i}} \\
&\qquad \Delta(\lambda_{1,i})\Delta(\lambda_{2,i})\prod_i e^{-\frac{1}{\hbar}[V_1(\lambda_{1,i})+V_2(\lambda_{2,i})-\lambda_{1,i}\lambda_{2,i}]} d\lambda_{1,i}d\lambda_{2,i}.
\end{aligned} \tag{1-19}$$

La méthode de polynômes orthogonaux peut se généraliser directement à ce cadre en changeant simplement le chemin d'intégration dans la condition d'orthogonalité des polynômes :

$$\int_{\mathcal{C}^2} dxdy\pi_n(x)\sigma_n(y)e^{-\frac{1}{\hbar}[V_1(x)+V_2(y)-xy]} = h_n\delta_{nm}. \tag{1-20}$$

1.3 Intégrale formelle.

Si les deux définitions données précédemment sont intimement liées, l'objet de notre étude est d'une toute autre nature, inspirée par les techniques de calcul de théorie des champs utilisées par les physiciens. On la définit comme une **intégrale de matrice formelle**, i.e. une série formelle dont chacun des termes est bien défini et correspond à la fonction génératrice de cartes bicoloriées.

Dans un premier temps, je tâcherai d'expliquer comment des approximations (non rigoureusement justifiées) inspirées de la physique ont naturellement mené à voir les intégrales de matrices comme des objets combinatoires. Je m'appliquerai ensuite à présenter la définition tout à fait rigoureuse de ce que l'on entend par **intégrale formelle**.

Lien intuitif entre intégrale de matrice et combinatoire.

Naïvement, pour calculer une intégrale de la forme $I := \int_{\mathbb{R}} dx\, e^{-\frac{1}{\hbar}V(x)}$ où V est un polynôme, un physicien est tenté d'utiliser la méthode dite du col. Celle-ci consiste, en gros, à dire que l'intégrale est dominée par la valeur de l'intégrand en son maximum, le reste étant considéré comme une pertubation sous dominante du fait de la décroissance exponentielle de $e^{-\frac{1}{\hbar}V(x)}$. Plus précisément, on choisit un "point col" s_i comme solution de :

$$V'(s_i) = 0. \tag{1-21}$$

Le développement de Taylor du potentiel au voisinage de ce col peut alors s'écrire :

$$V(x + s_i) = V(s_i) + gx^2 + \delta V(x) \tag{1-22}$$

où $\delta V(x)$ ne contient que des termes de degré ≥ 3 en x et $g = \frac{V''(s_i)}{2}$. Le changement de variable $x \to x + s_i$ donne alors :

$$I = e^{-\frac{1}{\hbar}V(s_i)} \int_{\mathbb{R}} dx e^{-\frac{g}{\hbar}x^2} e^{-\frac{1}{\hbar}\delta V(x)}. \tag{1-23}$$

Le développement de Taylor de la partie non quadratique implique alors :

$$I = e^{-\frac{1}{\hbar}V(s_i)} \int_{\mathbb{R}} \sum_k \frac{(\delta V(x))^k}{k!} e^{-\frac{g}{\hbar}x^2} dx \tag{1-24}$$

qui peut être ramenée à une somme d'intégrales gaussiennes si l'on inverse la sommation et l'intégration :

$$I = e^{-\frac{1}{\hbar}V(s_i)} \sum_k \int_{\mathbb{R}} \frac{(\delta V(x))^k}{k!} e^{-\frac{g}{\hbar}x^2} dx. \tag{1-25}$$

Si l'on représente chaque intégrale $\int_{\mathbb{R}} x^k e^{-\frac{g}{\hbar}x^2} dx$ par un vertex à k pattes, le théorème de Wick[2] nous dit que I est alors la fonction génératrice de tous les graphes composés de vertex de valence au moins 2 et au plus $deg(V)$ dont les poids respectifs dépendent des coefficients du potentiel V et du point col autour duquel on développe.

Comment s'étend une telle méthode dans le cas qui nous intéresse ?

En premier lieu, on doit déterminer les extrema $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ de l'action

$$\mathcal{S}(M_1, M_2) = V_1(M_1) + V_2(M_2) - M_1 M_2. \tag{1-26}$$

Ceux-ci sont donnés par les solutions du système

$$\begin{cases} V_1'(\mathcal{M}_1) = \mathcal{M}_2 \\ V_2'(\mathcal{M}_2) = \mathcal{M}_1 \end{cases}. \tag{1-27}$$

Sans perte de généralité, on peut considérer que ces matrices sont des matrices diagonales dont les valeurs propres sont solutions du système (1-27) vu comme un sytème numérique. On peut résoudre celui-ci en éliminant $\mathcal{M}_2$ grâce à la première équation. On obtient ainsi une équation polynomiale de degré $d_1 d_2$ en $\mathcal{M}_1$

$$V_2'\left(V_1'(\mathcal{M}_1)\right) = \mathcal{M}_1. \tag{1-28}$$

[2]Voir l'appendice 1 dédié à ce théorème dans le cadre des intégrales de matrices gaussiennes.

Il existe donc de manière générique $d_1 d_2$ "points cols" (ξ_i, η_i)[3] solution de cette équation où ξ_i est une valeur propre de $\mathcal{M}_1$ et η_i la valeur popre de $\mathcal{M}_2$ correspondante. Pour construire un point col dans l'espace des couples de matrices hermitiennes $H_N \times H_N$, il faut alors distribuer leurs N valeurs propres entre ces différents points cols :

$$\mathcal{M}_1 = \mathrm{diag}\,(\overbrace{\xi_1, \ldots, \xi_1}^{n_1 \text{ fois}}, \overbrace{\xi_2, \ldots, \xi_2}^{n_2 \text{ fois}}, \ldots, \overbrace{\xi_{d_1 d_2}, \ldots, \xi_{d_1 d_2}}^{n_{d_1 d_2} \text{ fois}}) \tag{1-29}$$

et

$$\mathcal{M}_2 = \mathrm{diag}\,(\overbrace{\eta_1, \ldots, \eta_1}^{n_1 \text{ fois}}, \overbrace{\eta_2, \ldots, \eta_2}^{n_2 \text{ fois}}, \ldots, \overbrace{\eta_{d_1 d_2}, \ldots, \eta_{d_1 d_2}}^{n_{d_1 d_2} \text{ fois}}) \tag{1-30}$$

avec $\sum_{i=1}^{d_1 d_2} n_i = N$. Ainsi, un point col est caractérisé par des **fractions de remplissage** $\frac{n_i}{N}$ qui représentent la proportion de valeurs propres $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ situées au point col (ξ_i, η_i) : on a choisi la configuration où le comportement de (ξ_i, η_i) est dominant pour n_i valeurs propres. En fixant une configuration, on a brisé la symétrie $U(N)$ de l'intégrale en la symétrie $\prod_{i=1}^{d_1 d_2} U(n_i)$ chaque élément du produit se rapportant à la symétrie entre les valeurs propres au voisinage du même point col.

Remarque 1.3 On considère tous les extrema de l'action et non pas seulement ses minima comme on devrait intuitivement le faire.

Remarque 1.4 On peut voir le système d'équations 1-27 comme la condition d'équilibre des valeurs propres de $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ soumis au potentiels $V_1(x)+V_2(y)-xy$. Le choix de fractions de remplissage consiste à distribuer les valeurs propres dans les différents puits formés par ce potentiel (voir l'exemple 1.1).

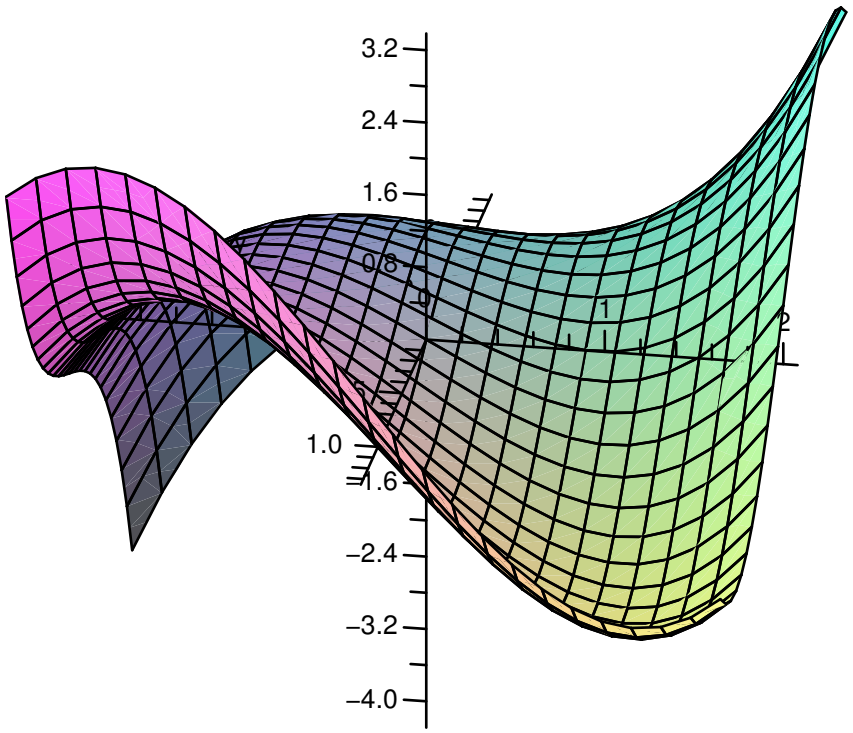
Remarque 1.5 Notons que ces fractions de remplissage ont une influence sur le résultat de l'approximation du col. Nous verrons que ce sont effectivement des paramètres qu'il faut se donner pour définir l'intégrale formelle de manière unique. On retrouvera ces paramètres tout au long de ce chapitre et il est important de garder à l'esprit que ce sont des données du problème au même titre que les potentiels V_1 et V_2.

Exemple 1.1 *Considérons les potentiels*

$$\begin{cases} V_1(x) = x^3 - x \\ V_2(y) = \frac{y^3}{3} - 1.01y \end{cases} . \tag{1-31}$$

[3] Chaque point col est un couple de nombres complexes.

La surface $z = V_1(x) + V_2(y) - xy$ *est alors :*



(1-32)

et l'on a quatre points cols :

$$\begin{aligned} p_1 = (0,8904; 1,3786) \quad &, \quad p_2 = (-0,0107; -0,9997) \\ p_3 = (-0,7168; 0,5415) \quad &, \quad p_4 = (-0,1629; -0,9204). \end{aligned}$$

(1-33)

On peut voir que parmi ceux-ci, seul p_1 *est un vrai minimum alors que* p_2 *et* p_3 *sont des points selle et* p_4 *est un maximum.*

Une fois les fractions de remplissage fixées, l'approximation du col consiste à effectuer un développement autour du col correspondant en réécrivant les matrices à intégrer comme une perturbation autour de celui-ci :

$$M_1 = \mathcal{M}_1 + m_1 \quad , \quad M_2 = \mathcal{M}_2 + m_2 \tag{1-34}$$

puis à considérer que l'intégrale est dominée par la valeur de l'intégrand en ce point. Le développement de Taylor de l'action au voisinage de ce point col permet de mettre à

part sa partie quadratique. Si l'on commute les signes d'intégration et de sommation du développement de Taylor, on peut réécrire cette intégrale comme une série dont chacun des terme est une fonction de corrélation par rapport à une mesure gaussienne :

$$\mathcal{Z} = e^{-\frac{1}{\hbar}\,\mathrm{Tr}\,[V_1(\mathcal{M}_1)+V_2(\mathcal{M}_2)-\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2]} \sum_{k,l} \frac{(-\hbar)^{-k+l}}{k!l!} \left\langle [\,\mathrm{Tr}\,\delta_{\mathcal{M}_1} V_1(m_1)]^k\,[\,\mathrm{Tr}\,\delta_{\mathcal{M}_2} V_2(m_2)]^l \right\rangle_g \tag{1-35}$$

où $\delta_{\mathcal{M}_1} V_1(m_1)$ et $\delta_{\mathcal{M}_2} V_2(m_2)$ représentent les parties non quadratiques de V_1 et V_2 dans le développement de Taylor autour du point col et $< \,.\, >_g$ la valeur moyenne par rapport à une mesure gaussienne. Le théorème de Wick (voir l'appendice 1) et la représentation du résultat sous forme de diagrammes de Feynman impliquent alors que $\mathcal{Z}$ est la fonction génératrice de graphes fermés coloriés portant une structure de spin.

C'est cette approche que nous allons rendre rigoureuse dans le paragraphe suivant pour définir les intégrales de matrices formelles.

Définition de l'intégrale de matrices formelle.

En se basant sur l'intuition fournie par le paragraphe précédent, on définit l'intégrale de matrice formelle par la fonction de partition résultant de la décomposition de l'intégrale convergente en intégrales gaussiennes par développement en série de Taylor au voisinage d'un point col. Pour cela, il est nécéssaire de donner un sens à ce développement de Taylor en précisant l'interaction entre les différentes solutions du système d'équations numériques :

$$\begin{cases} V_1'(\xi_i) = \eta_i \\ V_2'(\eta_i) = \xi_i \end{cases} \tag{1-36}$$

Definition 1.1 *Soit un entier N et deux potentiels polynômiaux*[4] *V_1 et V_2 définis comme précédemment par Eq. (1-1).*

Soit $\vec{n}$ une $d_1 d_2$-partition de N :

$$\vec{n} := \{n_1, n_2, \ldots, n_{d_1 d_2}\} \qquad \textit{tels que} \qquad \sum_{i=1}^{d_1 d_2} n_i = N. \tag{1-37}$$

Soient $\{(\xi_i, \eta_i)\}_{i=1}^{d_1 d_2}$, les $d_1 d_2$ solutions du système de deux équations numériques :

$$\begin{cases} V_1'(\xi_i) = \eta_i \\ V_2'(\eta_i) = \xi_i \end{cases} . \tag{1-38}$$

On définit les parties non quadratiques des développements autour de ces points cols par

$$\delta V_{1,i}(x) = V_1(x) - V_1(\xi_i) - \frac{V_1''(\xi_i)}{2}(x-\xi_i)^2 \tag{1-39}$$

[4]On pourrait en pratique seulement demander que ces potentiels aient une dérivée rationnelle et tous les résultats resteront valables (voir par exemple **[IV]**). Cependant, par soucis de simplicité je me restreind ici au cas poynomial.

et

$$\delta V_{2,i}(y) = V_2(y) - V_2(\eta_i) - \frac{V_2''(\eta_i)}{2}(y-\eta_i)^2. \tag{1-40}$$

Pour tout l, on définit le polynôme en T :

$$\begin{array}{l} \sum_{k=l/2}^{dl/2} A_{k,l} T^k = \\ = \frac{(-1)^l N^l}{l!\, T^l} \int dM_1 \dots dM_d d\tilde{M}_1 \dots d\tilde{M}_d (\sum_i \mathrm{Tr}\, \delta V_{1,i}(M_i) + \delta V_{2,i}(\tilde{M}_i))^l \\ \prod_{i=1}^d \mathrm{e}^{-\frac{N}{T}\left(\mathrm{Tr}\, \frac{V_1''(\xi_i)}{2}(M_i - \xi_i \mathbf{1}_{n_i})^2 + \frac{V_2''(\eta_i)}{2}(\tilde{M}_i - \eta_i \mathbf{1}_{n_i})^2 - (M_i - \xi_i \mathbf{1}_{n_i})(\tilde{M}_i - \eta_i \mathbf{1}_{n_i})\right)} \\ \prod_{i>j} \det(M_i \otimes \mathbf{1}_{n_j} - \mathbf{1}_{n_i} \otimes M_j)\ \prod_{i>j} \det(\tilde{M}_i \otimes \mathbf{1}_{n_j} - \mathbf{1}_{n_i} \otimes \tilde{M}_j) \end{array} \tag{1-41}$$

comme une intégrale gaussienne sur les matrices **hermitiennes** *M_i et $\tilde{M}_i$ de taille $n_i \times n_i$.*

La fonction de partition du modèle à deux matrices formel est alors définie comme la série en T ([49, 50]) :

$$\boxed{\mathcal{Z}_{form} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k (\sum_{j=0}^{2k} A_{k,j}).} \tag{1-42}$$

Lien avec l'intégrale normale à symétrie brisée.

Ecrivons explicitement la fonction de partition formelle :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{Z}_{form} & = & \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l N^l}{l!\, T^l} \int \prod_{\alpha=1}^{d} dM_\alpha d\tilde{M}_\alpha \left(\sum_i \mathrm{Tr}\, \delta V_{1,i}(M_i) + \delta V_{2,i}(\tilde{M}_i) \right)^l \\ & & \prod_{i=1}^{d} \mathrm{e}^{-\frac{N}{T}\left(\mathrm{Tr}\, \frac{V_1''(\xi_i)}{2}(M_i - \xi_i \mathbf{1}_{n_i})^2 + \frac{V_2''(\eta_i)}{2}(\tilde{M}_i - \eta_i \mathbf{1}_{n_i})^2 - (M_i - \xi_i \mathbf{1}_{n_i})(\tilde{M}_i - \eta_i \mathbf{1}_{n_i})\right)} \\ & & \prod_{i>j} \det(M_i \otimes \mathbf{1}_{n_j} - \mathbf{1}_{n_i} \otimes M_j)\ \prod_{i>j} \det(\tilde{M}_i \otimes \mathbf{1}_{n_j} - \mathbf{1}_{n_i} \otimes \tilde{M}_j). \end{array} \tag{1-43}$$

Si l'on échange l'ordre de la sommation sur l et de l'intégration sur les matrices, on reconnait le développement de Taylor de

$$\begin{array}{l} \int \prod_{\alpha=1}^{d} dM_\alpha d\tilde{M}_\alpha \prod_{i=1}^d \mathrm{e}^{-\frac{N}{T}\left(\mathrm{Tr}\, V_1(M_i - \xi_i \mathbf{1}_{n_i}) + \mathrm{Tr}\, V_2(\tilde{M}_i - \eta_i \mathbf{1}_{n_i}) - (M_i - \xi_i \mathbf{1}_{n_i})(\tilde{M}_i - \eta_i \mathbf{1}_{n_i})\right)} \\ \prod_{i>j} \det(M_i \otimes \mathbf{1}_{n_j} - \mathbf{1}_{n_i} \otimes M_j)\ \prod_{i>j} \det(\tilde{M}_i \otimes \mathbf{1}_{n_j} - \mathbf{1}_{n_i} \otimes \tilde{M}_j) \end{array} \tag{1-44}$$

qui par changement des variable d'intégration $X_i := M_i - \xi_i \mathbf{1}_{n_i}$ et $Y_i := \tilde{M}_i - \eta_i \mathbf{1}_{n_i}$ prend la forme de la fonction de partition du **modèle à deux matrices à symétrie brisée** [50] :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{Z}_{normb} & := & \int dX_1 \dots dX_d dY_1 \dots dY_d \prod_{i=1}^d \mathrm{e}^{-\frac{N}{T}(\mathrm{Tr}\, V_1(X_i) + \mathrm{Tr}\, V_2(Y_i) - X_i Y_i))} \\ & & \prod_{i>j} \det(X_i \otimes \mathbf{1}_{n_j} - \mathbf{1}_{n_i} \otimes X_j)\ \prod_{i>j} \det(Y_i \otimes \mathbf{1}_{n_j} - \mathbf{1}_{n_i} \otimes Y_j). \end{array} \tag{1-45}$$

Cette dernière consiste à briser la symétrie $U(N)$ en une symétrie $\prod_i U(n_i)$ en considérant l'intégrale matricielle comme l'intégrale sur $d_1 d_2$ ensembles de couples de matrices (X_i, Y_i) dont les valeurs propres appartiennent respectivement à des couples de contours $(\mathcal{C}_{1,i}, \mathcal{C}_{2,i})$ acceptables au sens de Eq. (1-16). Ainsi, par opposition au modèle de la partie 1.2 où toutes les matrices avaient des valeurs propres conditionnées à vivre sur un seul chemin acceptable $\mathcal{C} := \kappa_{ij}\, \mathcal{C}_{1,i} \times \mathcal{C}_{2,j}$ quelconque, les différentes matrices ont des valeurs propres sur un chemin différent.

Attention :

Malgré cette proximité entre les deux modèles, le modèle normal à symétrie brisée et le modèle formel ne coincident pas en général, ne serait-ce que par le problème posé par l'échange de la sommation des termes de la série de Taylor et de l'intégration gaussienne.

Remarque 1.6 Le lien exact entre ces différents modèles ainsi que leurs différences sont peu connus au moment de la rédaction de ce mémoire et vont bien au delà de la portée de ce dernier. Je ne m'attarderai donc pas plus sur ceux-ci me concentrant à présent uniquement sur le modèle formel. Le lecteur intéressé par ces aspects peut trouver une plus longue discussion dans [50] par exemple.

Remarque 1.7 On abusera dés à présent et tout au long de cette thèse de la notation intuitive :

$$\mathcal{Z}_{form} = \int_{form} e^{-\frac{1}{\hbar}\,\mathrm{Tr}\,(V_1(M_1)+V_2(M_2)-M_1 M_2)} dM_1 dM_2 \tag{1-46}$$

tout en gardant à l'esprit que l'intégrale n'est ici qu'une notation rappelant l'origine de cette fonction de partition. On ne devra jamais oublier que ce n'est pas une intégrale sur l'ensemble des matrices hermitiennes à proprement parler.

Interprétation combinatoire.

Comme nous l'avons vu plus haut, le modèle formel a été défini de manière à correspondre au développement de Feynman de l'intégrale du modèle normal à symétrie brisée. A ce titre, il est naturel d'en chercher une interprétation combinatoire comme fonction génératrice de graphes et, par extension, de surfaces discrétisées. C'est d'ailleurs cette interprétation qui a motivé l'introduction de ce modèle dans le cas de l'étude du modèle d'Ising sur surface aléatoire [66], ainsi que l'engouement des physiciens pour les modèles de matrices aléatoires en général dans le cadre des théories de gravitation quantique.

Etant donnés les deux potentiels V_1 et V_2 et un point col dans l'espace $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$, c'est-à-dire l'ensemble des $d_1 d_2$ solutions (ξ_i, η_i) du système

$$\begin{cases} V_1'(\xi_i) = \eta_i \\ V_2'(\eta_i) = \xi_i \end{cases} \tag{1-47}$$

et un ensemble de fractions de remplissage $\{\epsilon_i\}_{i=1,\dots,d_1 d_2}$ telles que

$$\sum_{i=1}^{d_1 d_2} \epsilon_i = 1, \tag{1-48}$$

on définit les poids :

Definition 1.2 *Pour tout $i = 1, \dots, d_1 d_2$, on définit :*

$$\forall k = 1, \dots, d_1 + 1\,, \quad t_{k,i} := \frac{V_1^{(k)}(\xi_i)}{(k-1)!} \tag{1-49}$$

et

$$\forall k = 1, \dots, d_2 + 1\,, \quad \tilde{t}_{k,i} := \frac{V_2^{(k)}(\eta_i)}{(k-1)!}. \tag{1-50}$$

Pour tout couple $i, j = 1, \dots, d_1 d_2$ avec $i \neq j$ et tout couple $k, l = 1, \dots, \infty$, on définit :

$$h_{k,i} := \sum_{j \neq i} \frac{\epsilon_j}{(\xi_j - \xi_i)^k} \qquad , \qquad \tilde{h}_{k,i} := \sum_{j \neq i} \frac{\epsilon_j}{(\eta_j - \eta_i)^k}, \tag{1-51}$$

$$h_{k,i;l,j} := \frac{(k+l-1)!}{(k-1)!(l-1)!} \frac{1}{(\xi_j - \xi_i)^k (\xi_i - \xi_j)^l} \tag{1-52}$$

et

$$\tilde{h}_{k,i;l,j} := \frac{(k+l-1)!}{(k-1)!(l-1)!} \frac{1}{(\eta_j - \eta_i)^k (\eta_i - \eta_j)^l}. \tag{1-53}$$

Remarque 1.8 Les poids $t_{k,i}$ (resp. $\tilde{t}_{k,i}$) ne sont rien d'autre que les coefficients de la partie non-quadratique du développement de Taylor de V_1 (resp. V_2) autour du point ξ_i (resp. η_i) introduite dans le paragraphe précédent :

$$\delta V_{1,i}(x) = \sum_{k=3}^{d_1+1} \frac{t_{k,i}}{k} (x - \xi_i)^k \qquad , \qquad \delta V_{2,i}(y) = \sum_{k=3}^{d_2+1} \frac{\tilde{t}_{k,i}}{k} (y - \eta_i)^k, \tag{1-54}$$

alors que les $h_{k,i;l,j}$ (resp. $\tilde{h}_{k,i;l,j}$) viennent du développement de $\prod_{i>j} \det(M_i \otimes \mathbf{1}_{n_j} - \mathbf{1}_{n_i} \otimes M_j)$ (resp. $\prod_{i>j} \det(\tilde{M}_i \otimes \mathbf{1}_{n_j} - \mathbf{1}_{n_i} \otimes \tilde{M}_j)$) dans Eq. (1-41).

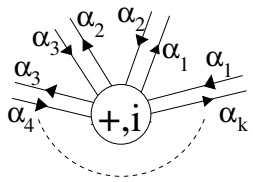
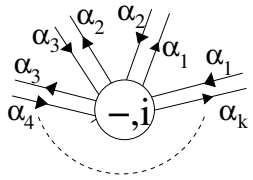
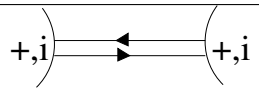
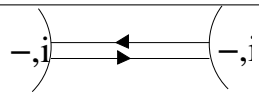
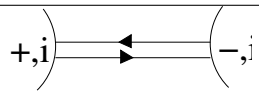
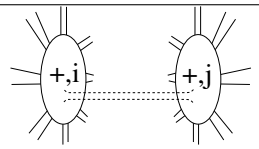
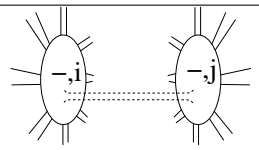
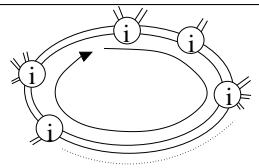
Ces poids nous permettent d'associer une valeur à chaque graphe de l'ensemble :

Definition 1.3 *Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des graphes fermés formés de vertex épais*[5] *de valence $k \geq 1$, portant une "couleur" $i = 1, \dots, d_1 d_2$ et un "spin" (i.e. un signe + ou -) et collés selon les prescriptions suivantes :*

- *Deux vertex peuvent être collés par leurs pattes si et seulement si ils ont la même couleur ;*
- *Deux vertex peuvent être collés par leurs centres si et seulement si ils sont de même spin et de couleur différente.*

On peut résumer les éléments apparaissant dans la construction de ces graphes par le tableau suivant :

[5] Un vertex épais est un vertex dont les pattes sont des rubans comme présentés dans l'appendice 1. Ce sont donc des vertex orientés.

Elément	Figure
vertex k-valent de spin + et couleur i	
vertex k-valent de spin - et couleur i	
lien entre deux pattes de vertex de spin + et couleur i	
lien entre deux pattes de vertex de spin - et couleur i	
lien entre deux pattes de vertex de couleur i et spins différents	
lien entre les centres d'un vertex k-valent de couleur i et de spin + et d'un vertex l-valent de couleur j et de spin +	
lien entre les centres d'un vertex k-valent de couleur i et de spin - et d'un vertex l-valent de couleur j et de spin -	
Boucle indépendante de couleur i	

Un tel graphe peut être vu comme un ensemble de $d_1 d_2$ graphes non coloriés construits comme dans l'appendice 1 et liés entre eux par le centre de certains vertex de même spin. Ainsi, pour obtenir tous les graphes de $\mathcal{G}$, on commence par dessiner tous les graphes fermés formés de vertex épais de valence $k \geq 1$ et portant chacun un spin et collés entre eux par leurs pattes. On recolle alors de toutes les manières possibles $d_1 d_2$ de ces graphes (en autorisant la présence de plusieurs exemplaires du même graphe et le graphe vide) par le centre de vertex de même spin.

Pour caractériser un graphe de $\mathcal{G}$, on utilise les notations suivantes :

Definition 1.4 *Soit un graphe $G \in \mathcal{G}$. On note :*

– *$n_{k,i}(G)$:= nombre de vertex de valence k, de spin + et de couleur i dont le centre est libre*[6] *;*

[6]Un centre est dit libre si il n'est pas relié à un autre centre par un lien.

- $\tilde{n}_{k,i}(G)$:= *nombre de vertex de valence k, de spin - et de couleur i dont le centre est libre ;*
- $n_{++,i}(G)$:= *nombre d'arêtes liant deux vertex de couleur i et de spin + par leurs pattes ;*
- $n_{--,i}(G)$:= *nombre d'arêtes liant deux vertex de couleur i et de spin − par leurs pattes ;*
- $n_{+-,i}(G)$:= *nombre d'arêtes liant deux vertex de couleur i et de spins différents par leurs pattes ;*
- $n_{a,i}(G) = n_{+-,i}(G) + n_{++,i}(G) + n_{--,i}(G)$:= *nombre total d'arêtes liant deux vertex de couleur i par leurs pattes quelque soit leurs spins ;*
- $n_{k,i;l,j}(G)$:= *nombre de paires de vertex de spin + collés par leurs centres de valences et de couleurs respectives (k,i) et (l,j)*[7] *;*
- $\tilde{n}_{k,i;l,j}(G)$:= *nombre de paires de vertex de spin - collés par leurs centres de valences et de couleurs respectives (k,i) et (l,j)*[8] *;*
- G_i := *composante de couleur i du graphe obtenue en brisant tous les liens entre centres de polygones ;*
- $l_i(G)$:= *nombre de boucles indépendantes dans le graphe G_i ;*
- $\#Aut(G)$:= *cardinal du groupes d'automorphismes de G ;*
- $\chi(G)$:= *caractéristique d'Euler-Poincaré de G :*

$$\begin{aligned}\chi(G) &= \textstyle\sum_i \left[l_i(G) - n_{a,i}(G) + \sum_k \left(n_{k,i}(G) + \tilde{n}_{k,i}(G)\right)\right] \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{d_1 d_2} \chi(G_i) - 2\sum_{i,j,k,l} \left(n_{k,i;l,j}(G) + \tilde{n}_{k,i;l,j}(G)\right).\end{aligned} \tag{1-55}$$

Definition 1.5 *A chaque graphe $G \in \mathcal{G}$, on associe un poids :*

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(G) \;:=\; & \frac{N^{\chi(G)}}{\#Aut(G)} T^{n_T(G)} \prod_{i=1}^{d_1 d_2} \prod_{k=3}^{d_1+1} (t_{k,i} + T h_{k,i})^{n_{k,i}(G)} \prod_{k=3}^{d_2+1} (\tilde{t}_{k,i} + T \tilde{h}_{k,i})^{\tilde{n}_{k,i}(G)} \\ & \prod_{i=1}^{d_1 d_2} h_{1,i}^{n_{1,i}(G)} \tilde{h}_{1,i}^{\tilde{n}_{1,i}(G)} h_{2,i}^{n_{2,i}(G)} \tilde{h}_{2,i}^{\tilde{n}_{2,i}(G)} \prod_{k>d_1+1} h_{k,i}^{n_{k,i}(G)} \prod_{l>d_2+1} \tilde{h}_{l,i}^{\tilde{n}_{l,i}(G)} \\ & \prod_{i=1}^{d_1 d_2} \epsilon_i^{l_i(G)} t_{2,i}^{n_{++,i}(G)} \tilde{t}_{2,i}^{n_{--,i}(G)} (t_{2,i}\tilde{t}_{2,i} - 1)^{-n_{v,i}(G)} \prod_{j>i} \prod_k \prod_l h_{k,i;l,j}^{n_{k,i;l,j}(G)} \tilde{h}_{k,i;l,j}^{\tilde{n}_{k,i;l,j}(G)}\end{aligned} \tag{1-56}$$

où

$$\begin{aligned}n_T(G) \;:=\; & \textstyle\sum_i \left(\sum_k \frac{k}{2}(n_{k,i}(G) + \tilde{n}_{k,i}(G)) - \sum_{k=3}^{d_1+1} n_{k,i}(G) - \sum_{l=3}^{d_1 2+1} \tilde{n}_{l,i}(G)\right) \\ & + \textstyle\sum_i \sum_{j>i} \sum_k \sum_l \frac{k+l}{2}(n_{k,i;l,j}(G) + \tilde{n}_{k,i;l,j}(G)).\end{aligned} \tag{1-57}$$

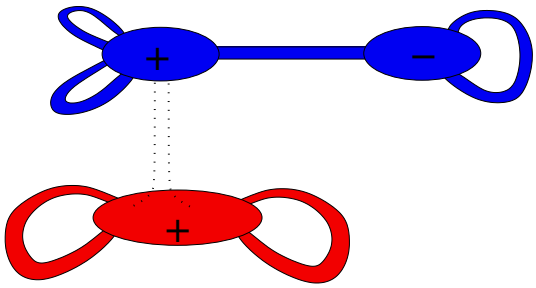
Associer un tel poids à un graphe G correspond à associer un poids à chacun des éléments composant le graphe comme suit :

[7] Le nombre total de vertex de spin + est donné par $\sum_{k,l,i,j} 2n_{k,i;l,j}(G) + n_{k,i}(G)$.

[8] Le nombre total de vertex de spin - est donné par $\sum_{k,l,i,j} 2\tilde{n}_{k,i;l,j}(G) + \tilde{n}_{k,i}(G)$.

Elément	Poids
vertex k-valent de spin + et couleur i dont le centre est libre	$\begin{cases} \frac{N}{T}t_{k,i} + Nh_{k,i} \text{ si } k \in [3, d_1+1] \\ Nh_{k,i} \text{ sinon} \end{cases}$
vertex k-valent de spin - et couleur i dont le centre est libre	$\begin{cases} \frac{N}{T}\tilde{t}_{k,i} + Nh_{k,i} \text{ si } k \in [3, d_2+1] \\ Nh_{k,i} \text{ sinon} \end{cases}$
lien entre deux pattes de vertex de spin + et couleur i	$\frac{1}{N}\frac{t_{2,i}}{t_{2,i}\tilde{t}_{2,i}-1}$
lien entre deux pattes de vertex de spin - et couleur i	$\frac{1}{N}\frac{\tilde{t}_{2,i}}{t_{2,i}\tilde{t}_{2,i}-1}$
lien entre deux pattes de vertex de couleur i et spins différents	$\frac{1}{N}\frac{1}{t_{2,i}\tilde{t}_{2,i}-1}$
Paire composée d'un vertex k-valent de couleur i et de spin + et d'un vertex l-valent de couleur j et de spin +	$h_{k,i;l,j}$
Paire composée d'un vertex k-valent de couleur i et de spin - et d'un vertex l-valent de couleur j et de spin -	$\tilde{h}_{k,i;l,j}$
Boucle indépendante de couleur i	$N\epsilon_i$

Exemple 1.2 *Considérons un exemple de graphe apparaissant lorsque l'on a deux couleurs : bleu, représenté par l'indice 1 et rouge représenté par l'indice 2 :*



(1-58)

Il est constitué d'un vertex bleu de valence 5 et de spin +, d'un vertex bleu de valence 3 et de spin - et d'un vertex rouge de valence 4 et de spin + reliés entre eux par 6 arêtes formant $3+4$ *boucles indépendantes, i.e. :*

$$\begin{array}{llll} \tilde{n}_{3,1} = n_{--,1} = n_{+-,1} = n_{5,1;4,2} = 1 & , & & \\ n_{++,1} = \tilde{n}_{++,2} = 2 & , & l_1 = 4 & et \quad l_2 = 3. \end{array} \tag{1-59}$$

et son poids est donc donné par :

$$N^2 T^{\frac{15}{2}} (\tilde{t}_{3,1} + T\tilde{h}_{3,1})\epsilon_1^4\epsilon_2^3 t_{2,1}^2 t_{2,2}^2 \tilde{t}_{2,1}(t_{2,1}\tilde{t}_{2,1}-1)^4(t_{2,2}\tilde{t}_{2,2}-1)^2 h_{5,1;4,2}. \tag{1-60}$$

Ces poids nous permettent de controler la quantité de chaque élément dans un graphe, et l'on définit la fonction génératrice correspondante comme :

Théorème 1.3 *La* **fonction de partition du modèle à deux matrices hermitiennes formel** *est égale à*

$$\boxed{\mathcal{Z}_{form} = \prod_i e^{-\frac{N^2}{T}\epsilon_i(V_1(\xi_i)+V_2(\eta_i)-\xi_i\eta_i)} \prod_{j>i} [(\xi_i-\xi_j)(\eta_i-\eta_j)]^{N^2\epsilon_i\epsilon_j} \sum_{G\in\mathcal{G}} \mathcal{W}(G).} \tag{1-61}$$

Preuve:

Ce théorème résulte directement du théorème de Wick décrit en appendice.

On peut cependant remarquer que cette fonction est bien une série formelle en puissances de T. En effet, l'inégalité :

$$n_T(G) \geq \frac{1}{2}\sum_i \left(\sum_k (n_{k,i}+\tilde{n}_{k,i}) + \sum_{j>i}\sum_{k,l} (n_{k,i;l,j}+\tilde{n}_{k,i;l,j}) \right) \tag{1-62}$$

assure que seul un nombre fini de graphes contribue à une puissance donnée de T. On peut donc bien écrire :

$$\mathcal{Z}_{form} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m T^m \tag{1-63}$$

où chaque A_m est une somme finie de termes donnée dans le langage du paragraphe précédent par :

$$A_m = \sum_{j=0}^{2m} A_{m,j} \tag{1-64}$$

où les $A_{m,j}$ sont donnés par Eq. (1-41). □

On définit également la fonction génératrice des graphes connexes par la procédure classique :

Definition 1.6 *L'***énergie libre** *:*

$$\boxed{\mathcal{F} = -\frac{1}{N^2}\ln \mathcal{Z}_{form}} \tag{1-65}$$

est la fonction génératrice des graphes **connexes** G *de* $\mathcal{G}$ *comptés avec un poids* $\mathcal{W}(G)$.

C'est également une série formelle en T qui prend la forme :

$$\mathcal{F} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n T^n. \tag{1-66}$$

2 Combinatoire des cartes, surfaces discrétisées.

Nous avons défini la fonction génératrice de graphes épais dérivés des diagrammes de Feynman. On peut aisément voir que ces derniers sont en bijection avec un ensemble de cartes (ou surfaces discrétisées dans le langage des physiciens) coloriées portant une structure de spins semblable à celle d'un modèle d'Ising [30, 65, 66].

2.1 Génération de surfaces discrétisées bicolores fermées.

En effet, on peut utiliser une description duale en remplaçant simplement tout vertex k-valent par le k-gone dont les côtés sont les perpendiculaires aux pattes du vertex. Ainsi, les graphes sont remplacés par des surfaces composées de polygones suivant :

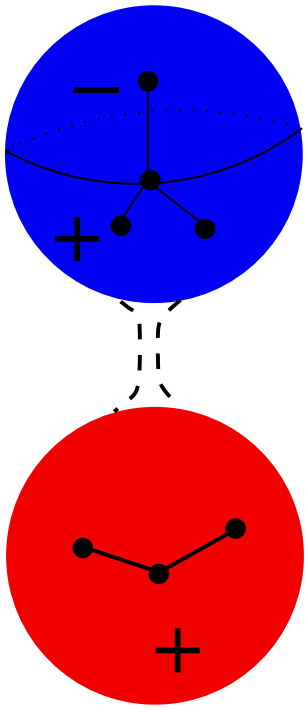
Definition 2.1 *Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des surfaces fermées formées de polygones orientés à $k \geq 1$ côtés, portant une "couleur" $i = 1, \ldots, d_1 d_2$ et un "spin" (i.e. un signe + ou -) et collés selon les prescriptions :*

- *Deux vertex peuvent être collés le long de leurs arêtes si et seulement si ils ont la même couleur ;*
- *Deux vertex peuvent être collés par leurs centres si et seulement si ils sont de même spin et de couleur différente.*

La bijection élément par élément est résumée dans le tableau :

Diagramme de Feynmann	**Surface discrétisée**
vertex k-valent de spin + et couleur i	k-gone de spin + et couleur i
vertex k-valent de spin - et couleur i	k-gone de spin - et couleur i
lien entre deux pattes de vertex de spin + et couleur i	arête commune à deux polygones de spin + et couleur i
lien entre deux pattes de vertex de spin - et couleur i	arête commune à deux polygones de spin - et couleur i
lien entre deux pattes de vertex de couleur i et spins différents	arête commune à deux polygones de spin différents et couleur i
lien entre les centres d'un vertex k-valent de couleur i et de spin + et d'un vertex l-valent de couleur j et de spin +	centre commun à un k-gone de couleur i et de spin + et un l-gone de couleur j et de spin +
lien entre les centres d'un vertex k-valent de couleur i et de spin - et d'un vertex l-valent de couleur j et de spin -	centre commun à un k-gone de couleur i et de spin - et un l-gone de couleur j et de spin -
Boucle indépendante de couleur i	Sommet de couleur i

Exemple 2.1 *Le diagramme 1-58 est ainsi envoyé sur la surface :*



(2-1)

et l'on peut vérifier que l'on obtient bien le même poids que précédement. Notons que l'on a pu dessiner chacun des deux graphes sur une sphère, leurs caractéristiques d'Euler étant toutes deux égales à 2. On peut également voir que la sphère bleue est divisée en deux faces de spins opposés séparées par un équateur correspondant au seul lien $+-$ du graph dual.

La fonction de partition du modèle formel peut donc être vue comme la fonction génératrice des surfaces de l'ensemble $\mathcal{S}$, c'est-à-dire des recollements de surfaces discrétisées monocolores sur lesquelles vit une structure de spin, en associant à chaque surface un poids qui peut être facilement retrouvé par l'utilisation de la bijection entre graphes et surfaces discrétisées. La description complète de cette procédure est décrite dans l'appendice 2.

2.2 Surfaces ouvertes et conditions de bord.

Il est également intéressant de pouvoir générer des surfaces ouvertes (par exemple pour des applications à la théorie des cordes ou bien à l'étude des théories conformes ou simplement avec un objectif combinatoire d'énumération de cartes). Ces fonctions peuvent être obtenues simplement par variation des poids associés aux différents éléments des graphes. En effet, la fonction génératrice des surfaces dont on a enlevé (ou marqué) un k-gone de spin $+$ (resp. de spin -) et de couleur i est donnée par $k\frac{\partial}{\partial t_{k,i}} \ln \mathcal{Z}_{form}$ (resp. $k\frac{\partial}{\partial \tilde{t}_{k,i}} \ln \mathcal{Z}_{form}$). Or, compter toutes les surfaces auxquelles on a enlevé un k-gone revient à compter toutes les surfaces ouvertes avec un bord de longueur k et une condition de bord imposée par le spin et la couleur du k-gone à retirer.

Cependant, ces fonctions génératrices ne sont pas pratiques à manipuler dans les faits et par soucis de simplicité ainsi que pour des raisons historiques issues de la

représentation sous forme d'intégrale matricielle de $\mathcal{Z}_{form}$, il est préférable de travailler avec les fonctions de corrélations de la forme :

$$k_1 \dots k_m l_1 \dots l_n \frac{\partial}{\partial t_{k_1}} \dots \frac{\partial}{\partial t_{k_m}} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}_{l_1}} \dots \frac{\partial}{\partial \tilde{t}_{l_n}} \ln \mathcal{Z}_{form} \tag{2-2}$$

où les t_i et $\tilde{t}_j$ sont les coefficients des potentiels V_1 et V_2 respectivement (voir Eq. (1-1)).

En effet, le poids d'un k-gone de spin + (resp. de spin -) et de couleur i est encodé dans les coefficient t du potentiel V_1 et $\tilde{t}$ du potentiel V_2 par l'intermédiaire de $t_{k,i}$ (resp. $\tilde{t}_{k,i}$).

Il est également utile de définir les résolvantes du type

$$\sum_k \frac{k}{x^{k+1}} \partial_{t_k} \ln \mathcal{Z}_{form} \qquad , \qquad \sum_k \frac{k}{y^{k+1}} \partial_{\tilde{t}_k} \ln \mathcal{Z}_{form} \tag{2-3}$$

pour considérer toutes les longueurs de bords possibles. Les paramètres x et y sont alors des fugacités associées aux bords. On a ici introduit les **opérateurs d'insertion de boucle**[9] consistant en une dérivée formelle par rapport à tous les coefficients des potentiels V_1 et V_2 respectivement :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial V_1(x)} := \sum_k \frac{k}{x^{k+1}} \partial_{t_k} \qquad , \qquad \frac{\partial}{\partial V_2(y)} := \sum_k \frac{k}{y^{k+1}} \partial_{\tilde{t}_k}.} \tag{2-4}$$

Les fonctions de corrélation ainsi définies :

$$\overline{W}_{k,l}(\mathbf{x_K}, \mathbf{y_L}) := -\frac{\partial}{\partial V_1(x_1)} \dots \frac{\partial}{\partial V_1(x_k)} \frac{\partial}{\partial V_2(y_1)} \dots \frac{\partial}{\partial V_2(y_l)} \mathcal{F} \tag{2-5}$$

génèrent donc des surfaces ouvertes à $k+l$ bords dont chacun a une condition de bord homogène : k d'entre eux viennent de l'extraction d'un polygone de spin + et les l autres de l'extraction d'un polygone de spin -.

Remarque 2.1 On utilisera ici encore abondament la notation d'intégrale matricielle pour désigner les fonctions de corrélation. En effet, l'action de la dérivation par rapport à l'un des coefficients des potentiels est facile à représenter :

$$\begin{aligned} k \frac{\partial}{\partial t_k} \ln \mathcal{Z}_{form} &= \frac{k}{\mathcal{Z}_{form}} \frac{\partial}{\partial t_k} \int dM_1 dM_2 e^{-\frac{1}{\hbar} \mathrm{Tr}\,(V_1(M_1)+V_2(M_2)-M_1 M_2)} \\ &= -\frac{1}{\hbar \mathcal{Z}_{form}} \int dM_1 dM_2 \ \mathrm{Tr}\ M_1^k e^{-\frac{1}{\hbar} \mathrm{Tr}\,(V_1(M_1)+V_2(M_2)-M_1 M_2)} \\ &= \frac{1}{\hbar} \left\langle \mathrm{Tr}\ M_1^k \right\rangle \end{aligned} \tag{2-6}$$

L'action de l'opérateur d'insertion de boucles peut alors être représentée par :

$$\frac{\partial}{\partial V_1(x)} \mathcal{F} = -\hbar \left\langle \mathrm{Tr}\ \frac{1}{x - M_1} \right\rangle, \tag{2-7}$$

[9] Ce nom provient du fait qu'un tel opérateur agit sur les surfaces générées en ajoutant un bord, c'est-à-dire en inserrant une boucle dans le graphe dual. Nous reviendrons plus longuement sur la description de son action dans la partie 9 de ce chapitre.

et plus généralement les fonctions de corrélations $\overline{W}_{k,l}$ sont données par :

$$\boxed{\overline{W}_{k,l}(\mathbf{x_K},\mathbf{y_L}) = \hbar^{2-k-l}\left\langle \prod_{i=1}^{k} \mathrm{Tr}\,\frac{1}{x_i - M_1} \prod_{j=1}^{l} \mathrm{Tr}\,\frac{1}{y_j - M_2}\right\rangle_c ,} \tag{2-8}$$

où l'indice c signifie que l'on ne tient compte que de la partie connexe. Ces fonctions de corrélation sont dites "simples" car elles ne font apparaître qu'un seul type de matrice (M_1 ou M_2) à l'intérieur de chaque trace.

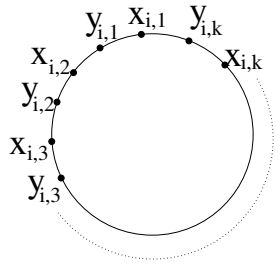
Il est naturel de vouloir étendre cette définition à la valeur moyenne d'une classe plus grande de fonctions de M_1 et M_2 invariantes par action du groupe $U(N)$ en mélangeant les deux types de matrices :

$$\boxed{\begin{aligned}&\overline{H}_{k_1,\ldots,k_l;m;n}(S_1,S_2,\ldots,S_l;x_1,\ldots,x_m;y_1,\ldots,y_n) := \hbar^{2-l-m-n}\\ &\left\langle \prod_{i=1}^{l} \mathrm{Tr}\,\left(\tfrac{1}{x_{i,1}-M_1}\tfrac{1}{y_{i,1}-M_2}\tfrac{1}{x_{i,2}-M_1}\tfrac{1}{y_{i,2}-M_2}\cdots\tfrac{1}{x_{i,k_i}-M_1}\tfrac{1}{y_{i,k_i}-M_2}\right)\times\right.\\ &\left.\times\prod_{j=1}^{m}\mathrm{Tr}\,\frac{1}{x_j-M_1}\prod_{s=1}^{n}\mathrm{Tr}\,\frac{1}{y_s-M_2}\right\rangle_c\end{aligned}} \tag{2-9}$$

où S_i représente la suite de longueur $2k_i$

$$S_i := [x_{i,1}, y_{i,1}, x_{i,2}, y_{i,2}, x_{i,3}, y_{i,3}, \ldots, x_{i,k}, y_{i,k}] \tag{2-10}$$

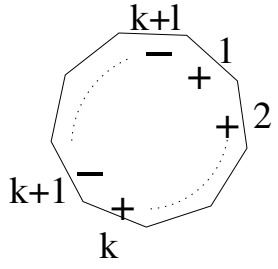
dans laquelle les variables de type x et y alternent. A cause de l'invariance cyclique de la trace, ce n'est pas S_i à proprement parler qui intervient dans la fonction de corrélation mais sa classe d'équivalence sous les permutations cycliques et il sera utile de représenter cette dernière graphiquement par

$S_i =$ 

. (2-11)

Ces fonctions de corrélation plus compliquées sont dites "mixtes" puisqu'elles mélangent des matrices M_1 et M_2 à l'intérieur d'une même trace.

Que signifient ces nouvelles fonctions en termes combinatoires ? Considérons le cas le plus simple : $\langle \mathrm{Tr}\, M_1^k M_2^l \rangle$. Si l'on développe en diagrammes de Feynman l'intégrale correspondante, on génère des surfaces qui comportent toutes un polygone à $k+l$ côtés, k d'entre eux portant un spin + suivis de l spin − :



(2-12)

Les surfaces générées par cette fonction de corrélation sont donc des surfaces à un bord de longueur $k+l$ mais avec une condition de bord changeant deux fois. Cela signifie que, pour calculer les poids des surfaces générées, on fait comme si elles étaient entourées d'une couronne de longueur $k+l$ composée de k polygones de spin + successifs suivis de l polygones de spin $-$[10].

D'un point de vue purement combinatoire, de telles fonctions de corrélation ne peuvent être simplement définies à l'aide des poids $\mathcal{W}$ considérés jusqu'à présent : on doit considérer une légère généralisation des cartes. On doit introduire des polygones à $\sum_{\alpha=1}^{K} k_\alpha + \sum_{\beta=1}^{L} l_\beta$ côtés de spins différents donnés par la séquence :

$$\overbrace{+,+,\dots,+}^{k_1},\overbrace{-,-,\dots,-}^{l_1},\overbrace{+,\dots,+}^{k_2},\overbrace{-,\dots,-}^{l_2}\dots,\overbrace{+,+,\dots,+}^{k_K},\overbrace{-,-,\dots,-}^{l_L}, \tag{2-13}$$

et de couleur i avec un poids $t_{(k_1,l_1,k_2,\dots,k_K,l_L),i}$. Les polygones considérés jusquà présent correspondent à $(K,L)=(1,0)$ pour ceux de spin + et $(K,L)=(0,1)$ pour ceux de spin -. Dés lors, la généralisation de la fonction de partition est évidente : on considère l'ensemble des graphes construits avec ces nouveaux polygones[11] muni des poids $\mathcal{W}_{general}$ induits par l'introduction des $t_{(k_1,l_1,k_2,\dots,k_K,l_L),i}$. La fonction de partition correspondante est alors donnée par :

$$\mathcal{Z}_{general} := \prod_i e^{-\frac{N^2}{T}\epsilon_i(V_1(\xi_i)+V_2(\eta_i)-\xi_i\eta_i)} \prod_{j>i} [(\xi_i-\xi_j)(\eta_i-\eta_j)]^{N^2\epsilon_i\epsilon_j} \sum_{G\in\mathcal{G}_{general}} \mathcal{W}_{general}(G). \tag{2-14}$$

Les fonctions de corrélation mixtes sont alors obtenues en dérivant la fonction de partition par rapport aux nouveaux poids avant de prendre ces derniers égaux à 0. Par exemple :

$$\left.\frac{\partial \ln \mathcal{Z}_{general}}{\partial t_{(k,l),i}}\right|_{t_{(k_1,l_1,k_2,\dots,k_K,l_L),i}=0} \to \left\langle \operatorname{Tr} M_1^k M_2^l \right\rangle . \tag{2-15}$$

Remarque 2.2 Les résolvantes introduites ici comme fonctions de corrélations, qu'elles soient mixtes ou non, sont des séries formelles en leurs paramètres x et y, définies quand ces derniers tendent vers l'infini. Ainsi, en tant que fonctions de ces paramètres complexes, elles sont en général multivaluées. Dans tous les cas, la bonne valeur est séléctionnée par la règle suivante :

$$\left\langle \operatorname{Tr} \frac{1}{x-M_1} B \right\rangle \sim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \left\langle \operatorname{Tr} B \right\rangle . \tag{2-16}$$

Ceci permet également de voir les fonctions de corrélation simples comme des limites des fonctions de corrélations mixtes par :

$$\left\langle \operatorname{Tr} \frac{1}{x-M_1}\frac{1}{y-M_2} \right\rangle \sim_{y\to\infty} \frac{1}{y} \left\langle \operatorname{Tr} \frac{1}{x-M_1} \right\rangle . \tag{2-17}$$

[10] On ne doit pas tenir compte du poids de la couronne elle même mais seulement des contributions venant de l'interaction entre la courrone et la surface.

[11] Ces polygones portant plusieurs spins ne peuvent être liés par leurs centres à aucun autre élément de la carte. Ils ne peuvent être liés que par leurs côtés à des polygones de même couleur.

3 Développement topologique.

Chaque terme B_k de la série formelle en T, $\mathcal{F} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k T^k$, est un polynôme en $\frac{1}{N^2}$ car l'exposant k majore le nombre de vertex formant les graphes G contribuant à B_k (voir la discussion dans la preuve du théorème 1.3). Ainsi, on peut noter :

$$B_k = \sum_h B_{k,h} N^{-2h}, \tag{3-1}$$

et définir les termes :

$$\mathcal{F}^{(h)} := \sum_{k=0}^{\infty} B_{k,h} T^k \tag{3-2}$$

pour tout h positif ou nul.

Or, en s'attardant sur la définition combinatoire de la fonction de partition Eq. (1-61), on peut observer que ces termes correspondent au coefficient de N^{-2h} dans l'énergie libre. Par ailleurs, l'exposant de N dans le poids d'un graphe donné est sa caractéristique d'Euler-Poincaré. Ainsi, en sélectionnant un exposant particulier de N par $\mathcal{F}^{(h)}$, on impose que les surfaces aient un genre h fixé : $\mathcal{F}^{(h)}$ est la fonction génératrice des surfaces connexes de $\mathcal{S}$ de genre h en utilisant le même poids que pour $\mathcal{Z}_{form}$. On peut donc écrire le **développement topologique** :

$$\boxed{\mathcal{F} = \sum_{h=0}^{\infty} \mathcal{F}^{(h)} N^{-2h}} \tag{3-3}$$

comme une série formelle en $\frac{1}{N^2}$.

De manière analogue, on peut écrire un développement topologique

$$\overline{H}_{k_1,k_2,\ldots,k_l;m;n} = \sum_{h=0}^{\infty} N^{-2h} \overline{H}^{(h)}_{k_1,k_2,\ldots,k_l;m;n} \tag{3-4}$$

pour toutes les fonctions de corrélation sélectionnant le genre h des surfaces ouvertes générées.

Remarque 3.1 Le dévellopement topologique est une série formelle en $\frac{1}{N^2}$ et n'a donc aucune raison de converger. Cependant, chacun des coefficients $\mathcal{F}^{(h)}$ est une fonction analytique de ses paramètres avec un rayon de convergence non nul comme nous allons le montrer dans ce chapitre.

L'essentiel du travail présenté dans ce chapitre consiste à calculer explicitement les différents termes $\mathcal{F}^{(h)}$ et $\overline{H}^{(h)}$ du développement topologique de n'importe quelle fonction de corrélation ainsi que de l'énergie libre.

4 Cas particulier : modèle d'Ising.

Nous avons considéré dans la partie précédente un modèle de matrices formel pour deux potentiels V_1 et V_2 génériques et des fractions de remplissage quelconques. Dans cette partie nous étudions le cas particulier où les valeurs propres de la matrice col autour de laquelle on développe sont toutes égales : la matrice est totalement dégénérée et une seule fraction de remplissage est non nulle et donc égale à l'unité. Il n'y a alors qu'une seule couleur sur les surfaces générées. Sans perte de généralité, on peut supposer que cet unique point col (i.e. l'unique couple de valeurs propres des deux matrices col) se situe en $(\xi, \eta) = (0, 0)$. Alors, la fonction de partition $\mathcal{Z}_{form}$ est la fonction génératrice des surfaces fermées (connexes ou non) formées de k_1-gones de spin +, avec $k_1 \leq d_1$, et de k_2-gones de spin -, avec $k_2 \leq d_2$, recollés par leurs arêtes, en utilisant les poids suivants :

- les k-gones de spin + sont comptés avec un poids $\frac{N}{T} t_k$;
- les k-gones de spin - sont comptés avec un poids $\frac{N}{T} \tilde{t}_k$;
- les arêtes communes à deux polygones de spin + sont comptées avec un poids $\frac{1}{N} \frac{t_2}{t_2 \tilde{t}_2 - 1}$;
- les arêtes communes à deux polygones de spin - sont comptées avec un poids $\frac{1}{N} \frac{\tilde{t}_2}{t_2 \tilde{t}_2 - 1}$;
- les arêtes communes à deux polygones de spins différents sont comptées avec un poids $\frac{1}{N} \frac{1}{t_2 \tilde{t}_2 - 1}$;
- les sommets sont comptés avec un poids N.

Les fonctions de corrélation $\overline{H}_{k_1,\ldots,k_l;m;n}(S_1, S_2, \ldots, S_l; x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_n)$ sont alors les fonctions génératrices de telles surfaces connexes avec $l + m + n$ bords et des conditions de bord différentes[12] :

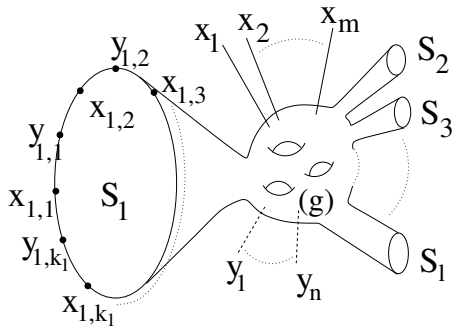
- Les m bords associés aux variables x_i ont une condition homogène de type + ;
- Les n bords associés aux variables y_i ont une condition homogène de type - ;
- Les l bords associés aux cycles S_i ont une condition de bord non homogène donnée par l'alternance de condition + et de condition - suivant l'alternance des variables $x_{i,j}$ et $y_{i,j}$ dans le cycle S_i.

Leur développement topologique permet alors de sélectionner le genre des surfaces générées : $\overline{H}^{(g)}_{k_1,\ldots,k_l;m;n}(S_1, S_2, \ldots, S_l; x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_n)$ est la fonction génératrice des surfaces décrites plus haut avec la condition supplémentaire qu'elles soient de genre g.

[12] Il y a deux conditions de bord possibles décrites dans la partie 2. On appelera condition de type + (resp. de type -) la condtion obtenue en fixant un polygone de spin + (resp. -) à l'extérieur de la surface

Dans la suite, il sera parfois utile de représenter graphiquement ces fonctions de corrélation en référence aux surfaces générées. On représente la fonction de corrélation :

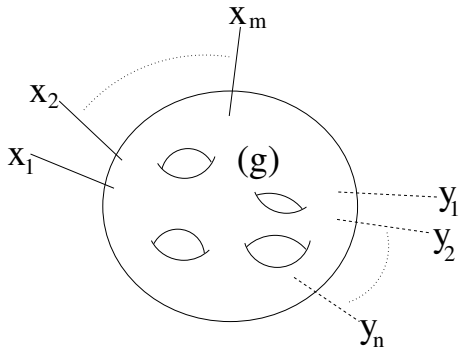
$$\overline{H}^{(g)}_{k_1,\dots,k_l;m;n}(S_1,S_2,\dots,S_l;x_1,\dots,x_m;y_1,\dots,y_n) :=$$



(4-1)

par une "surface" de genre g avec $l+m+n$ bords sur lesquels les conditions de bords + et - sont représentées par les variables x et y respectivement. Les bords où la condition est homogène ont été réduits en un point par souci de simplicité. De même, les fonctions de corrélation simples sont représentées par :

$$\overline{W}^{(g)}_{m,n}(x_1,\dots,x_m;y_1,\dots,y_n) :=$$



. (4-2)

Remarque 4.1 Cette représentation prend tout son sens quand les fonctions de corrélation sont effectivement fonctions génératrices de surfaces discrétisées, c'est-à-dire lorsque l'on a un seul point col. Cependant, elle sera utile tout au long de cette thèse et sera reprise même lorsque l'interprétation combinatoire des fonctions de corrélation est légèrement modifiée par l'existence de fractions de remplissage.

5 Double limite d'échelle et limite continue.

Si le modèle à deux matrices formel permet de compter les surfaces discrétisées, leur succès vient en partie de la conviction que ces surfaces composées de polygones donnent accès aux surfaces continues par une procédure de passage à la limite. Une telle procédure peut être obtenue intuitivement en faisant croitre le nombre de polygones composant les surfaces tout en réduisant leur taille de manière à garder l'aire de la surface constante.

Plus précisément, en gravitation quantique (ou théorie des cordes), on veut pouvoir calculer une intégrale de la forme

$$Z_{cont} = \sum_g \int_{\Sigma_g} \mathcal{D}\Sigma_g e^{-E(\Sigma_g)} \tag{5-1}$$

où l'intégrale porte sur toutes les surfaces fermées de genre g et $E(\Sigma_g)$ est l'action d'Einstein-Polyakov définie par Eq. (2-7) du chapitre 1 :

$$E(\Sigma_g) := 4\pi G(2-2g) + \Lambda \,\text{Aire}(\Sigma_g) + \text{Champ de matière couplé.} \qquad (5\text{-}2)$$

Pour pouvoir approcher cette quantité par les intégrales de matrices formelles, on discrétise les surfaces Σ_g en les découpant en polygones d'aire moyenne ϵ^2. En effet, on peut alors approcher chacun des termes constituant Z_{cont} par le terme de genre g, $\mathcal{F}^{(g)}_{\text{2MM}}$ du développement topologique de l'énergie libre d'un modèle à deux matrices[13] (si l'on a besoin d'imposer une structure de spin de type Ising pour la matière couplée à la gravité) à condition d'identifier les paramètre des deux théories :

– La taille des matrices à considérer N est liée au paramètre G par :

$$\ln N \propto G; \qquad (5\text{-}3)$$

– On associe une constante cosmologique couplée à chaque type de polygone[14] :

$$\Lambda_k \epsilon^2 = \ln(t_k) - \frac{k}{2}\ln(T) \qquad , \qquad \widetilde{\Lambda}_k \epsilon^2 = \ln(\tilde{t}_k) - \frac{k}{2}\ln(T). \qquad (5\text{-}4)$$

Il faut maintenant faire tendre la taille des polygones ϵ^2 vers 0 tout en gardant l'aire totale finie, i.e. il faut faire tendre le nombre moyen de polygones vers l'infini de manière à compenser leur petite taille. Or, on peut voir aisément que le nombre moyen de polygônes dans une surface de genre g est donné par :

$$< n_k >= t_k \frac{\partial \mathcal{F}^{(g)}_{\text{2MM}}}{\partial t_k} \qquad , \qquad < \tilde{n}_k >= \tilde{t}_k \frac{\partial \mathcal{F}^{(g)}_{\text{2MM}}}{\partial \tilde{t}_k}. \qquad (5\text{-}5)$$

Il est donc nécessaire que le nombre total de polygônes $\sum_k t_k \frac{\partial \mathcal{F}_{\text{2MM}}}{\partial t_k} + \tilde{t}_k \frac{\partial \mathcal{F}_{\text{2MM}}}{\partial \tilde{t}_k}$ diverge comme ϵ^{-2}, ce qui peut être obtenu en réglant de manière appropriée les coefficients des potentiels du modèle à deux matrices considéré.

On voit en particulier qu'il existe plusieurs façons d'approcher cette limite continue : on peut favoriser certains types de polygones au détriment des autres ou bien tous leur donner la même importance. Ces différentes limites correspondent à approcher des points critiques ou multi-critiques correspondant à des singularités de types différents dans l'espace des modules du modèle à deux matrices et permettent d'atteindre différentes théories conformes couplées à la gravité.

Nous reviendrons en détail sur cette procédure de passage à la limite dans la partie 6 du chapitre 4 lorsque nous aurons tous les outils nécessaires pour la décrire rigoureusement.

6 Equations de boucles.

Parmi les nombreuses approches utilisées pour tenter de résoudre les modèles de matrices[15], l'une a apporté des résultats très concluants dans l'étude de différentes

[13] Lorsqu'il pourra y avoir confusion sur le modèle auquel se rapport l'énergie libre, nous utiliserons l'indice $2MM$ pour identifier le modèle à deux matrices.

[14] On considère ici le cas présenté dans la partie précédente où il n'y a pas de fraction de remplissage à fixer.

[15] Ce terme générique inclus et confond de manière abusive les différentes définitons de l'intégrale matricielle $\mathcal{Z}$.

intégrales de matrices formelles : la méthode dite des équations de boucles. Celle-ci consiste à obtenir une hiérarchie d'équations satisfaites par les fonctions de corrélations et l'énergie libre par "intégration par partie" de $\mathcal{Z}$. Ces équations portent en fait plusieurs noms suivant la manière dont elles ont été obtenues et surtout le contexte dans lequel elles ont été dérivées. Du point de vue des physiciens, elles sont appelées équations de Schwinger-Dyson en théorie des champs et furent obtenues en combinatoire des cartes triangulées sous le nom d'équations de Tutte ([102, 103]).

Formellement, en utilisant les notations en termes d'intégrales matricielles, ces équations signifient que l'intégrale de matrice reste inchangée par un changement de variable $M_i \to M_i + \epsilon\, \delta M_i$. En considérant un choix de δM assez large, on peut refermer l'ensemble d'équations obtenu et ainsi résoudre le modèle[16].

6.1 Dérivation des équations de boucles.

Dans ce paragrpahe, je présente la recette à utiliser pour dériver les équations de boucles satisfaites par les fonctions de corrélation et l'énergie libre. La dérivation rigoureuse, plus technique, consiste à effectuer un changement de variables dans les intégrales gaussiennes composant la fonction de partition. Elle peut être trouvée dans [49]. Cependant, le lecteur uniquement intéressé par la résolution de ce modèle peut se contenter de cette partie.

Lorsque l'on effectue un changement de variable

$$M_1 \to \tilde{M}_1 := M_1 + \epsilon f(M_1, M_2), \tag{6-1}$$

on change l'action dans $\mathcal{Z}$, d'une part, ainsi que la mesure par l'intermédiaire du jacobien du changement de variable d'autre part :

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z} &= \int dM_1\, dM_2\, e^{-\frac{1}{\hbar} Tr(V_1(M_1)+V_2(M_2)-M_1M_2)} \\
&= \int d\tilde{M}_1\, dM_2\, e^{-\frac{1}{\hbar} Tr\left(V_1(\tilde{M}_1)+V_2(M_2)-\tilde{M}_1M_2\right)} \\
&= \int dM_1\, dM_2\, e^{-\frac{1}{\hbar} Tr(V_1(M_1)+V_2(M_2)-M_1M_2)} \times \\
&\qquad \times (1 + \epsilon(J(M_1, M_2) - K(M_1, M_2)) + 0(\epsilon^2))
\end{aligned} \tag{6-2}$$

où $J(M_1, M_2)$ et $K(M_1, M_2)$ correspondent à l'ordre 1 en ϵ respectivement du jacobien du changement de variable et de la variation de l'action et sont définis par

$$\begin{aligned}
\det \frac{\partial \tilde{M}_1}{\partial M_1} &= 1 + \epsilon J(M_1, M_2) + O(\epsilon^2) \\
\frac{1}{\hbar} Tr\left(V_1(\tilde{M}_1) + V_2(M_2) - \tilde{M}_1 M_2\right) &= \frac{1}{\hbar} Tr\left(V_1(M_1) + V_2(M_2) - M_1 M_2\right) \\
&\quad + \epsilon K(M_1, M_2) + O(\epsilon^2).
\end{aligned} \tag{6-3}$$

[16] En fait, les équations obtenues ne semblent pas être fermées à première vue. Pour réellement les fermer, il faut faire appelle à des notions de géométrie algébrique et à la courbe spectrale définie dans la partie suivante.

A l'ordre 1 en ϵ, cette invariance se traduit par

$$\langle J(M_1, M_2)\rangle = \langle K(M_1, M_2)\rangle \,. \tag{6-4}$$

Détermination de $J(M_1, M_2)$ et de $K(M_1, M_2)$.

– Le terme correspondant à la variation de l'action est obtenu facilement et s'écrit

$$K(M_1, M_2) = \frac{1}{\hbar} Tr\left[V_1'(M_1) f(M_1, M_2) - M_2 f(M_1, M_2)\right]. \tag{6-5}$$

– La détermination de $J(M_1, M_2)$ est quant à elle moins évidente, mais peut être résumée par deux règles simples, que nous désignerons par le noms de règles "split" et "merge" ([47]). Celles-ci correspondent en fait aux deux types de changement de variables effectués en pratique. Il est intéressant de redériver ces règles comme un exercice par le calcul explicite du Jacobien du changement de variables. Pour ce faire, il est important de noter que les variables indépendantes de la matrices M sont les éléments $M_{i,i}$ ainsi que $Re(M_{i,j})$ et $Im(M_{i,j})$ pour $i < j$ (voir [49]). A ces deux règles vient également s'ajouter la règle de chaîne valable pour tout type de changement de variable.

Règle de chaîne.
Pour un changement de variable faisant apparaître plusieurs facteurs, on applique les règles Split et Merge successivement à chacun des termes en suivant la règle de Leibnitz : le résultat est la somme des termes obtenus en utilisant les règles Split et Merge à chacun des facteurs en gardant le reste constant.

Règle Split.
Le premier type de changement de variable que nous devons considérer correspond à $f(M_1, M_2) = A\frac{1}{x-M_1}B$ où A et B sont des fonctions de M_1 et M_2. Alors la correction issue du Jacobien s'écrit :

$$\begin{aligned} J(M_1, M_2) &= Tr\left(A\frac{1}{x-M_1}\right) Tr\left(\frac{1}{x-M_1}B\right) \\ &\quad + \text{contributions venant de } A(M_1) \text{ et } B(M_1). \end{aligned} \tag{6-6}$$

Ainsi, chaque fois que l'on rencontre un terme du type $\frac{1}{x-M_1}$ en dehors d'une trace, on "coupe" l'expression en deux traces en introduisant un facteur $\frac{1}{x-M_1}$ dans chaque trace.

Règle merge.
On rencontre également des changements de variable du type $f(M_1, M_2) = ATr\left(\frac{1}{x-M_1}B\right)$. On a alors :

$$\begin{aligned} J(M_1, M_2) &= Tr\left(A\frac{1}{x-M_1}B\frac{1}{x-M_1}\right) \\ &\quad + \text{contributions venant de } A(M_1) \text{ et } B(M_1). \end{aligned} \tag{6-7}$$

C'est-à-dire que, chaque fois que l'on rencontre un terme $\frac{1}{x-M_1}$ dans une trace, on regroupe toute l'expression à l'intérieur d'une même trace en remplaçant "Tr" par un duplicata du facteur $\frac{1}{x-M_1}$.

7 Limite planaire.

Chacune des fonctions de corrélation entrant dans les équations de boucles a un développement topologique en $\frac{1}{N^2}$. Ainsi chaque équation de boucle peut être décomposée en une hierarchie infinie d'équations portant sur les termes développement de 't Hooft de ces observables[17]. Nous nous intéresserons dans cette partie aux fonctions génératrices des surfaces de genre nul, c'est-à-dire aux termes dominants dans les développements en $\frac{1}{N^2}$. Nous n'étudierons donc que la première équation de chacune de ces hierarchies : celle qui correspondrait à la limite obtenue lorque la taille de la matrice tend vers l'infini.

Attention.
Considérer la limite planaire des équations de boucles ne veut pas dire que les coefficients d'ordre inférieur dans le développement topologique sont négligeables par rapport à ceux d'ordre supérieur. Cela signifie juste que l'on travaille avec les termes de l'ordre 0 des séries formelles définissant les observables du modèle et rien de plus. Il faut donc se méfier de ce terme "limite planaire" qui ne désigne en fait aucune limite.

7.1 Equation de boucle maîtresse et courbe spectrale.

Considérons dans un premier temps le changement de variables le plus simple faisant intervenir la matrice M_1 :

$$M_2 \to M_2 + \epsilon \frac{1}{x - M_1}. \tag{7-1}$$

L'équation de boucle associée s'écrit alors simplement en utilisant la règle split Eq. (6-6) :

$$x\overline{W}_{1,0}(x) - 1 = \frac{1}{N}\left\langle Tr \frac{1}{x - M_1} V_2'(M_2) \right\rangle. \tag{7-2}$$

Le changement de variable, polynômial en y :

$$M_1 \to M_1 + \epsilon \left(\frac{1}{x - M_1} \frac{V_2'(y) - V_2'(M_2)}{y - M_2} \right) \tag{7-3}$$

donne, en utilisant (7-2), l'équation de boucle :

$$(y - Y(x))U(x,y) = V_2'(y)\overline{W}_{1,0}(x) - P(x,y) - x\overline{W}_{1,0}(x) + 1 - \frac{1}{N^2}U(x,y;x) \tag{7-4}$$

[17] C'est la manière intuitive de voir les choses. Ici, les équations de boucles ressommées, où tous les termes du développement topologique sont regroupés dans une série infinie, ne sont qu'une notation pratique pour décrire de manière concise l'ensemble de la hierarchie d'équations correspondant à chaque coefficient des puissance de $\frac{1}{N^2}$.

où l'on a noté :

$$U(x,y) := \frac{1}{N}\left\langle \mathrm{Tr}\,\frac{1}{x-M_1}\frac{V_2'(y)-V_2'(M_2)}{y-M_2}\right\rangle, \tag{7-5}$$

$$P(x,y) := \frac{1}{N}\left\langle \mathrm{Tr}\,\frac{V_1'(x)-V_1'(M_1)}{x-M_1}\frac{V_2'(y)-V_2'(M_2)}{y-M_2}\right\rangle, \tag{7-6}$$

$$U(x,y) := \frac{1}{N}\left\langle \mathrm{Tr}\,\frac{1}{x-M_1}\frac{V_2'(y)-V_2'(M_2)}{y-M_2}\,\mathrm{Tr}\,\frac{1}{x-M_1}\right\rangle_c \tag{7-7}$$

et

$$Y(x) := V_1'(x) - \frac{1}{N}\left\langle \mathrm{Tr}\,\frac{1}{x-M_1}\right\rangle. \tag{7-8}$$

$U(x,y)$ étant un polynôme en y, il n'a pas de singularité pour y fini, et l'équation (7-4) prise en $y = Y(x)$ s'écrit :

$$\begin{cases} y = Y(x) \\ (V_2'(y)-x)(V_1'(x)-y) - P(x,y) + 1 = \frac{1}{N^2}U(x,y;x) \end{cases}. \tag{7-9}$$

En notant le polynôme de degrés (d_1+1) en x et (d_2+1) en y :

$$E(x,y) = (V_2'(y)-x)(V_1'(x)-y) - P(x,y) + 1, \tag{7-10}$$

on peut réécrire l'équation précédente en :

$$\boxed{E(x,Y(x)) = \frac{1}{N^2}U(x,Y(x);x)} \tag{7-11}$$

appelée **équation de boucle maîtresse**.

Lorsque l'on considère la limite planaire, i.e. l'ordre 0 de cette équation, on obtient une équation algébrique :

$$\mathcal{E}(x, Y^{(0)}(x)) = 0 \tag{7-12}$$

où

$$\boxed{\mathcal{E}(x,y) := (V_2'(y)-x)(V_1'(x)-y) - P^{(0)}(x,y) + 1} \tag{7-13}$$

est l'ordre dominant du développement topologique de E. On a ainsi associé une courbe algébrique au modèle à deux matrices :

$$\mathcal{E}(x,y) = 0 \tag{7-14}$$

que nous nommerons **courbe spectrale classique** puisqu'elle correspond à la limite planaire $N \to \infty$, i.e. la limite classique $\hbar \to 0$.

Cette courbe algébrique est un objet fondamental de la résolution des équations de boucles. En effet, tous les termes du développement topologique des fonctions de corrélations (et pas seulement leur limite planaire) seront obtenus en termes de fonctions définies sur la surface de Riemann compacte associée à $\mathcal{E}$. En d'autres termes, les modules de $\mathcal{E}$ contiennent toute l'information nécessaire à la détermination de l'intégrale matricielle $\mathcal{Z}$.

Remarques :

– L'équation $\mathcal{E}(x, Y^{(0)}(x)) = 0$ permet de fixer de manière implicite la fonction $Y^{(0)}(x)$ et donc $\overline{W}^{(0)}_{1,0}(x)$. Cependant, cette équation a $d_2 + 1$ solutions à x donné. Ceci montre que $\overline{W}_{1,0}(x)$ est à priori une fonction multivaluée dans $\mathbb{C}$. Cependant celle-ci est monovaluée en tant que fonction sur la surface de Riemann associée à $\mathcal{E}$: les différentes valeurs pour un x donné correpondent alors à la structure en feuillets de $\mathcal{E}$ (voir la partie 8.1). Il ne faut cependant pas oublier que $\overline{W}_{1,0}(x)$ est défini comme une série infinie en x qui n'a de sens que pour $x \to \infty$. Cette contrainte supplémentaire permet de retrouver quelle est la bonne valeur de $\overline{W}_{1,0}(x)$ pour un x donné.
– Pour dériver la courbe spectrale classique, nous avons pris le parti de privilégier M_1. Mais nous aurions pu effectuer exactement la même dérivation en privilégiant M_2 dans les changements de variables, auquel cas la limite planaire de l'équation de boucle maitresse aurait donné :

$$\mathcal{E}(X^{(0)}(y), y) = 0, \tag{7-15}$$

où l'on note

$$X(y) := V_2'(y) - \left\langle \operatorname{Tr} \frac{1}{y - M_2} \right\rangle. \tag{7-16}$$

Ainsi, au lieu de travailler avec $\mathcal{E}(x, y)$, il faudrait travailler avec $\mathcal{E}(y, x)$. Cependant, par définition, les résultats ne doivent pas dépendre de ce choix et l'on voit apparaitre un première propriété de symétrie des fonctions de corrélations.

7.2 Limite planaire des fonctions de corrélation mixtes.

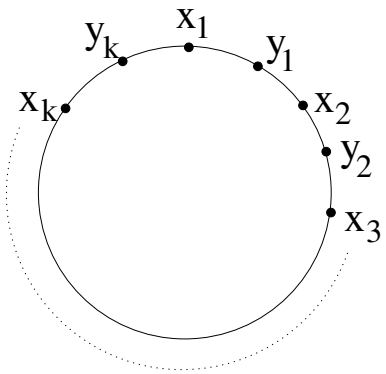
De manière générale, le développement topologique des fonctions de corrélation ne peuvent pas s'exprimer sans faire appel à des notions de géométrie algébrique et aux spécificités de la courbe spectrale $\mathcal{E}$. Cependant, ceci n'est plus vrai si l'on se limite à l'étude de la limite planaire, i.e. l'ordre dominant quand $N \to \infty$. Grâce à une jolie formule similaire à une Ansatz de Bethe, il est possible d'exprimer n'importe quelle fonction de corrélation mixte en termes de produits de traces mixtes à deux points $\left\langle \operatorname{Tr} \frac{1}{x-M_1} \frac{1}{y-M_2} \right\rangle$ avec des coefficients rationnels.

Dans cette partie, par souci de brieveté dans les notations, on les simplifiera en notant l'ordre dominant des traces mixtes par

$$H_k^{(0)} := \frac{1}{N} \left\langle \operatorname{Tr} \frac{1}{x_1 - M_1} \frac{1}{y_1 - M_2} \frac{1}{x_2 - M_1} \frac{1}{y_2 - M_2} \cdots \frac{1}{x_k - M_1} \frac{1}{y_k - M_2} \right\rangle + \delta_{k1}, \tag{7-17}$$

i.e. $H_k^{(0)}$ est la fonction génératrice des surfaces de genre zéro avec un bord et $2k$ opérateur de bords, i.e. des disques avec $2k$ opérateur de bords que l'on représente

comme dans Eq. (2-11) par :

$H_k^{(0)} :=$ 

(7-18)

Un résultat classique donne la fonction de corrélation mixte la plus simple en termes de la courbe spectrale par :

Lemme 7.1 *La fonction génératrice des disques avce deux opérateurs de bords est donnée par :*

$$\boxed{H_1^{(0)}(x,y) := \frac{\mathcal{E}(x,y)}{(X^{(0)}(y)-x)(y-Y^{(0)}(x))}.} \tag{7-19}$$

On peut alors montrer que pour tout k, $H_k^{(0)}$ est décomposable sur la base des $H_1^{(0)}$ suivant le théorème :

Théorème 7.1 *Pour tout $k \geq 1$, la fonction à k points $H_k^{(0)}(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_k, y_k)$*

$$\boxed{H_k^{(0)}(x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k) = \sum_{\sigma \in \overline{S}_k} C_\sigma^{(k)}(x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k) \prod_{i=1}^{k} H_1^{(0)}(x_i, y_{\sigma(i)})} \tag{7-20}$$

où les coefficients $C_\sigma^{(k)}$ sont des fractions rationnelles des x_i et des y_i indépendantes des potentiels et avec des pôles, au plus simples, situés à points coincidents et où $\overline{S}_k$ est l'ensemble des permutations planaires de $(1, 2, \ldots, n)$.

Précisons tout d'abord ce que l'on entend par permutation planaire :

Definition 7.1 *Une permutation σ de $(1, 2, \ldots, k)$ est dite planaire si*

$$n_{cycles}(\sigma) + n_{cycles}(S \circ \sigma) = k + 1 \tag{7-21}$$

où S est la permutation cyclique :

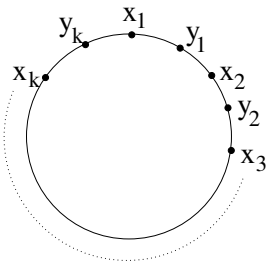
$$S(i) = i + 1 \ [k] \tag{7-22}$$

et $n_{cycles}(\sigma)$ est le nombre de cycles dans la décomposition de σ en cycles irréductibles.

On note $\overline{S}_k$ l'ensemble des permutations planaires de $(1, 2, \ldots, k)$.

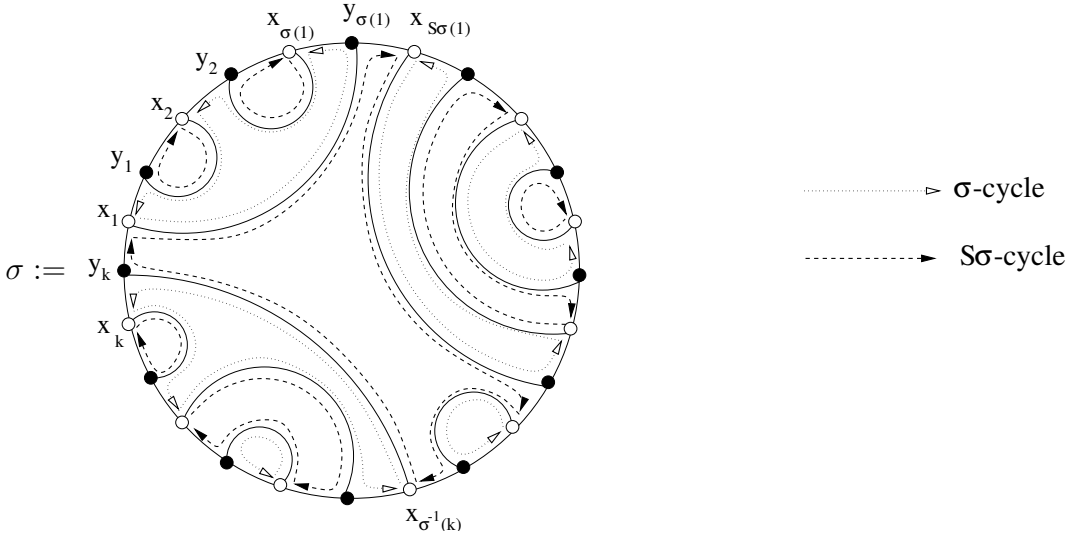
Cette notion de planarité se réfère à une représentation des permutations par des systèmes d'arches qui nous sera utile tout au long de cette partie.

Soit une permutation σ de $(1, 2, \ldots, k)$. Pour la représenter, plaçons les variables $(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_k, y_k)$ sur un disque en préservant leur ordre :



(7-23)

La permutation σ est alors simplement représentée en reliant les points x_i aux points $y_{\sigma(i)}$[18] :



(7-24)

La condition de planarité signifie alors que le système d'arches représentant σ est planaire, i.e. ne présente aucun croisement. En effet, chaque face ainsi dessinée dans le disque correspond à un cycle de la décomposition de σ et de $S \circ \sigma$ et l'on a traduit la condition de de planarité par la relation d'Euler-Poincaré. Le nombre d'éléments de $\overline{S}_k$ est donné par les nombres de Catalan :

$$Card\left(\overline{S_k}\right) = Cat(k) = \frac{(2k)!}{k!(k+1)!}. \tag{7-25}$$

Cette représentation en termes de systèmes d'arches est également utile pour calculer la valeur des termes $C_\sigma^{(k)}$.

Preuve:

[18] Dans cette représentation, les variables x et y marquent des démarcations sur le bord alors qu'ils ont été introduits comme fugacités associées à la longueur des différentes conditions de bords. Ainsi, en termes de surafces discrétisées, elles ne devraient pas se situer à des interfaces mais entre deux interfaces.

Je vais montrer ici d'où vient cette décomposition sans montrer comment calculer les coefficients $C_\sigma^{(k)}$. La dérivation montrée ici est bien plus simple et élégante que celle présentée dans [**I**]. Elle est due à L. Cantini [24].

Les $H_k^{(0)}$ satisfont l'équation de boucles obtenue par le changement de variable $\delta M_2 = \frac{1}{x_1-M_1}\frac{1}{y_1-M_2}\cdots\frac{1}{x_k-M_1}\frac{1}{y_k-M_2}$ en ne gardant que les coefficients de N dans le développement topologique :

$$\begin{aligned} & (X(y_k)-x_1)\,H_k^{(0)}(x_1,y_1,x_2,\ldots,x_k,y_k) \\ = & \sum_{j=1}^{k-1}\frac{H_{k-j}^{(0)}(x_{j+1},\ldots,y_k)-H_{k-j}^{(0)}(x_{j+1},\ldots,x_k,y_j)}{y_k-y_j}\,H_j^{(0)}(x_1,\ldots,y_j) \\ & -Pol_{y_k}V_2'(y(k))H_k^{(0)}(x_1,\ldots,y_k) \end{aligned} \qquad (7-26)$$

où $Pol_x f(x)$ indique la partie polynômiale de f(x).

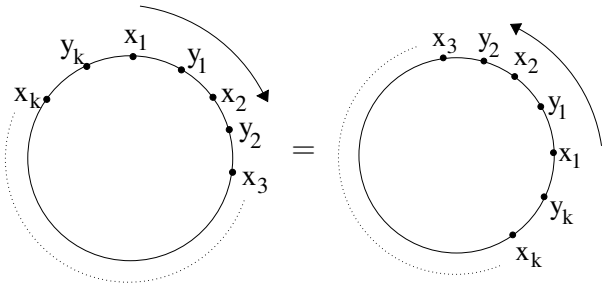
Si l'on effectue le changement de variable $\delta M_2 = \frac{1}{x_k-M_1}\frac{1}{y_k-M_2}\cdots\frac{1}{x_1-M_1}\frac{1}{y_1-M_2}$ qui consiste à lire la suite $x_1,y_1,x_2,y_2,\ldots,x_k,y_k$ dans l'autre sens, on obtient l'équation de boucles :

$$\begin{aligned} & (X^{(0)}(y_k)-x_k)\,H_k^{(0)}(x_k,y_{k-1},x_{k-1},\ldots,y_2,x_2,y_1,x_1,y_k) \\ = & \sum_{j=1}^{k-1}\frac{H_j^{(0)}(x_j,y_{j-1}\ldots,y_1,x_1,y_j)-H_j^{(0)}(x_j,y_{j-1}\ldots,y_1,x_1,y_k)}{y_j-y_k}\times \\ & \qquad\times H_{k-j}^{(0)}(x_k,y_{k-1},x_{k-1},\ldots,x_{j+1},y_j) \\ & -Pol_{y_k}V_2'(y(k))H_k^{(0)}(x_k,y_{k-1},x_{k-1},\ldots,y_2,x_2,y_1,x_1,y_k). \end{aligned} \qquad (7-27)$$

Or, $H_k^{(0)}(x_k,y_{k-1},x_{k-1},\ldots,y_2,x_2,y_1,x_1,y_k)$ décrit les mêmes objets combinatoires que $H_k^{(0)}(x_1,y_1,x_2,\ldots,x_k,y_k)$ mais avec l'orientation du bord inversée. En effet, ces deux fonctions sont les fonctions génératrices des disques avec $2k$ opérateurs de bords mais si l'un les décrit vus du dessus, l'autre les décrit vus du dessous :

$$H_k^{(0)}(x_k,y_{k-1},x_{k-1},\ldots,y_2,x_2,y_1,x_1,y_k) = H_k^{(0)}(x_1,y_1,x_2,\ldots,x_k,y_k) \qquad (7\text{-}28)$$

car



. (7-29)

Cette propriété permet d'écrire la seconde équation de boucle Eq. (7-27) sous la forme :

$$\begin{aligned} & (X^{(0)}(y_k)-x_k)\,H_k^{(0)}(x_1,y_1,x_2,\ldots,x_k,y_k) \\ = & \sum_{j=1}^{k-1}\frac{H_j^{(0)}(x_1,y_1,\ldots,x_j,y_j)-H_j^{(0)}(x_1,y_1,\ldots,x_j,y_k)}{y_j-y_k}\times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times H^{(0)}_{k-j}(x_{j+1}, y_{j+1}, \dots, y_{k-1}, x_k, y_j) \\ &-Pol_{y_k} V_2'(y(k)) H^{(0)}_k(x_1, y_1, x_2, \dots, x_k, y_k). \end{aligned} \tag{7-30}$$

La différence avec Eq. (7-26) prouve le théorème :

$$\begin{aligned} &H^{(0)}_k(x_1, y_1, x_2, \dots, x_k, y_k) = \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} \frac{H^{(0)}_j(x_1, y_1, \dots, x_j, y_j) H^{(0)}_{k-j}(x_{j+1}, y_{j+1}, \dots, x_k, y_k) - \mathrm{idem}(y_k \leftrightarrow y_j)}{(x_k - x_1)(y_k - y_j)} \end{aligned} \tag{7-31}$$

□

Les coefficients rationnels $C^{(k)}_\sigma$ sont facilement décrits en termes des $C^{(k)}_{Id}$ uniquement par le théorème :

Théorème 7.2 *Pout tout $k \geq 1$, et toute permutation $\sigma \in S_k$, $C^{(k)}_\sigma$ est une fonction rationnelle de ses arguments $x_1, \dots, y_k$, par :*

- $C^{(k)}_\sigma(x_1, y_1, x_2, \dots, x_k, y_k) := 0$ *si σ n'est pas planaire ;*
- *Si σ est planaire, on décompose σ et $S \circ \sigma$ en leurs produits de cycles :*

$$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_l \qquad , \qquad S \circ \sigma = \tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_2 \dots \tilde{\sigma}_{\tilde{l}} \tag{7-32}$$

tels que :

$$\sigma_j = (i_{j,1}, i_{j,2}, \dots, i_{j,l_j}) \qquad , \qquad \sigma(i_{j,m}) = i_{j,m+1} \tag{7-33}$$

$$\tilde{\sigma}_j = (\tilde{i}_{j,1}, \tilde{i}_{j,2}, \dots, \tilde{i}_{j,\tilde{l}_j}) \qquad , \qquad \sigma(\tilde{i}_{j,m}) = \tilde{i}_{j,m+1} - 1 \tag{7-34}$$

$$\begin{aligned} C^{(k)}_\sigma(x_1, y_1, x_2, \dots, x_k, y_k) \qquad := \qquad & \prod_{j=1}^{l} C^{(l_j)}_{Id}(x_{i_{j,1}}, y_{i_{j,2}}, x_{i_{j,2}}, y_{i_{j,3}}, \dots, x_{i_{j,l_j}}, y_{i_{j,1}}) \\ & \prod_{j=1}^{\tilde{l}} C^{(\tilde{l}_j)}_{Id}(x_{\tilde{i}_{j,1}}, y_{\tilde{i}_{j,2}-1}, x_{\tilde{i}_{j,2}}, \dots, y_{\tilde{i}_{j,\tilde{l}_j}-1}, x_{\tilde{i}_{j,\tilde{l}_j}}, y_{\tilde{i}_{j,1}-1}) \end{aligned} \tag{7-35}$$

où $C^{(1)}_{Id} := 1$.

Ce théorème signifie que pour calculer un coefficient $C^{(k)}_\sigma$, ils suffit de dessiner les sytème d'arches correspondant à la permutation σ. Si deux arches se croisent, le coefficient a pour valeur 0, sinon il est égal au produit des C_{Id} pris sur chacune des faces[19].

Exemple 7.1 *Considérons la permutation $\sigma \in \overline{S}_{12}$ donnée par :*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 6 & 5 & 4 & 8 & 12 & 10 & 9 & 11 \end{pmatrix}. \tag{7-36}$$

[19] Attention ! Les faces correspondant à σ et $S \circ \sigma$ doivent être orientées de manières opposées. Par exemple, l'identité et a permutaion cyclique ne donnent pas le même résultats à cause de cette orientation.

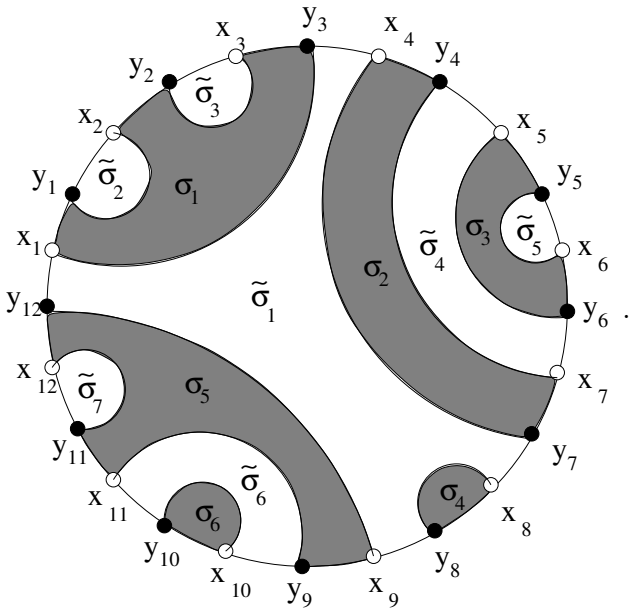
Sa décomposition en cycles s'écrit :

$$\sigma = (1,3,2)(4,7)(5,6)(8)(9,12,11)(10) \tag{7-37}$$

et celle de $S \circ \sigma$ *est donnée par*

$$S \circ \sigma = (1,4,8,9)(2)(3)(5,7)(6)(10,11)(12). \tag{7-38}$$

Il en résulte le découpage du disque en faces par le système d'arches associé à σ *:*



(7-39)

Celui-ci nous permet de déterminer le coefficient :

$$\begin{aligned} C_\sigma^{(12)} \quad = \quad & C_{Id}^{(3)}(x_1,y_3,x_3,y_2,x_2,y_1)C_{Id}^{(2)}(x_5,y_6,x_6,y_5) \\ & C_{Id}^{(3)}(x_9,y_{12},x_{12},y_{11},x_{11},y_9)C_{Id}^{(2)}(x_4,y_7,x_7,y_4) \\ & C_{Id}^{(4)}(x_1,y_3,x_4,y_7,x_8,y_8,x_9,y_{12})C_{Id}^{(2)}(x_5,y_6,x_7,y_4) \\ & C_{Id}^{(2)}(x_{10},y_{10},x_{11},y_9). \end{aligned} \tag{7-40}$$

Il reste maintenant à déterminer les briques de bases $C_{Id}^{(k)}$. Elles sont données par

Lemme 7.2 *Les* $C_{(Id)}$ *sont définis de manière unique par la relation de récurrence*

$$\begin{aligned} C_{(Id)}^{(1)}(x_1,y_1) \quad &:= \quad 1, \\ C_{(Id)}^{(k)}(x_1,\ldots,y_k) \quad &:= \quad \sum_{j=1}^{k-1} \frac{C_{(Id)}^{(j)}(x_1,y_1,\ldots,x_j,y_j)C_{(Id)}^{(k-j)}(x_{j+1},y_{j+1},\ldots,x_k,y_k)}{(x_k-x_1)(y_k-y_j)}. \end{aligned} \tag{7-41}$$

Il existe une manière efficace et simple de décrire les solutions de cette équation à l'aide d'une représentation sous forme d'arbres. La procédure à mettre en oeuvre est décrite en appendice de [**I**].

8 Développements topologiques et géométrie algébrique.

Cette partie représente le coeur de cette thèse. Après avoir rappelé les définitions et propriétés de géométrie algébrique nécessaires à la compréhension des résultats principaux de ce chapitre, nous montrerons comment calculer les expressions explicites de tout le développement topologique d'une grande famille d'observables du système ainsi que de l'énergie libre comme fonctions sur la courbe spectrale classique.

8.1 Rappels de géométrie algébrique.

Le propos de cette thèse n'étant pas la géométrie algébrique à proprement parler, nous ne présenterons ici que les notions nécessaires à la lecture des paragraphes suivants. Le lecteur intéressé pourra se reporter aux ouvrages [53] et [52] pour les approfondir.

Equation algébrique et surface de Riemann compacte associée.

Soit une équation algébrique

$$\mathcal{E}(x,y) = 0 \tag{8-1}$$

où $\mathcal{E}$ est un polynôme de degrés d_1+1 et d_2+1 en ses deux variables x et y. On appelle $\overline{\Sigma}$ la surface de Riemann compacte associée, c'est-à-dire qu'il existe deux fonctions meromorphes $x : \overline{\Sigma} \to \mathbb{C}$ et $y : \overline{\Sigma} \to \mathbb{C}$ telles que

$$\mathcal{E}(x,y) = 0 \Leftrightarrow \exists p \in \overline{\Sigma} \text{ tel que } \begin{cases} x = x(p) \\ y = y(p) \end{cases} . \tag{8-2}$$

On associe ainsi à une courbe algébrique $\mathcal{E}$ une surface de Riemann compact $\overline{\Sigma}$. Dans toute la suite, on parlera donc indistinctement de surface de Riemann ou de courbe algébrique.

Remarque 8.1 Lorsque l'équation algébrique est de la forme

$$y^2 = \prod_{i=0}^{nbp} (x - a_{2i})(x - a_{2i+1}), \tag{8-3}$$

on parle de courbe hyperelliptique. Ces courbes ont des propriétés particulières que nous décrirons dans la partie 1 du chapitre suivant.

Polytope de Newton.

La courbe algébrique $\mathcal{E}$ peut être caractérisée par les coefficients de son développement autour de $x, y \to \infty$:

$$\mathcal{E}(x,y) = \sum_{i=0}^{d_1+1} \sum_{j=0}^{d_2+1} E_{ij}\, x^i\, y^j. \tag{8-4}$$

Un outil très utile à l'étude des propriétés de $\overline{\Sigma}$ consiste à représenter graphiquement ces coefficients : on associe à tout $E_{ij} \neq 0$ un point à la position (i,j) du plan. Le polygone ainsi obtenu est appelé **polytope de Newton** de $\mathcal{E}$.

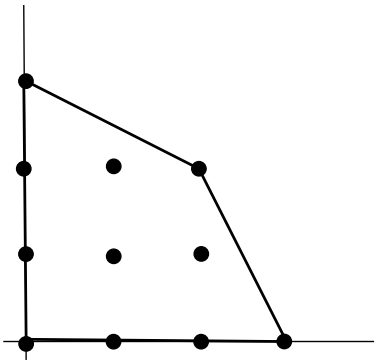
On peut directement lire sur ce polytope certaines propriétés de $\overline{\Sigma}$. Par exemple le genre maximal de la surface $\overline{\Sigma}$ associée est égal au nombre de points strictement contenus à l'intérieur du polytope.

On peut également y lire les propriétés des points à l'infini de $\overline{\Sigma}$, c'est-à-dire des pôles de x et de y. Pour ce faire, il faut regarder l'enveloppe externe du polytope, i.e. la frontière du plus petit domaine convexe contenant tous les points du polytope. Cette frontière est composée des deux segments $[(0,0),(d_1+1,0)]$ et $[(0,0),(0,d_2+1)]$ d'une part mais aussi d'un ensemble de segments $\{Seg_i = [u_i, u_{i+1}]\}_{i=1\ldots\mathcal{P}-1}$ ordonnés tels que $u_1 = (0, d_2+1)$ et $u_{\mathcal{P}} = (d_1+1, 0)$. On peut alors montrer que chaque segment Seg_i correspond à un pôle de la forme ydx dont le degré est donné par la pente du segment correspondant.

Exemple 8.1 *Considérons la courbe*

$$\mathcal{E}(x,y) = x + x^3 + x^2y^2 + y^3 + xy^2. \tag{8-5}$$

Son polytope est



(8-6)

On peut y voir par exemple que $\mathcal{E}$ a un genre $g < 3$ et deux points à l'infini.

Structure en feuillets.

Considérons l'équation algébrique Eq. (8-1) comme une équation en y à x fixé. Elle a d_2+1 solutions, i.e. pour tout x (ou presque)

$$\exists (p^0, p^1, \ldots, p^{d_2}) \in \overline{\Sigma}^{d_2+1} \text{ tels que } \forall i \; x(p^i) = x. \tag{8-7}$$

On a donc une structure en d_2+1 feuillets en x, c'est-à-dire que l'on a, de manière générique, d_2+1 copies de $\mathbb{C}$ superposées se projetant toutes sur la base x.

De même, on notera les différents feuillets en y par :

$$\exists (\tilde{p}^0, \tilde{p}^1, \ldots, \tilde{p}^{d_2}) \in \overline{\Sigma}^{d_1+1} \text{ tels que } \forall i \; y(\tilde{p}^i) = y. \tag{8-8}$$

On peut exprimer $\mathcal{E}$ de manière à faire apparaître explicitement ces structures en feuillets :

$$\mathcal{E}(x(p), y(q)) = E_{0,d_2} \prod_{i=0}^{d_2} (y(q) - y(p^i)) = E_{d_1,0} \prod_{i=0}^{d_1} (x(p) - x(\tilde{q}^i)). \tag{8-9}$$

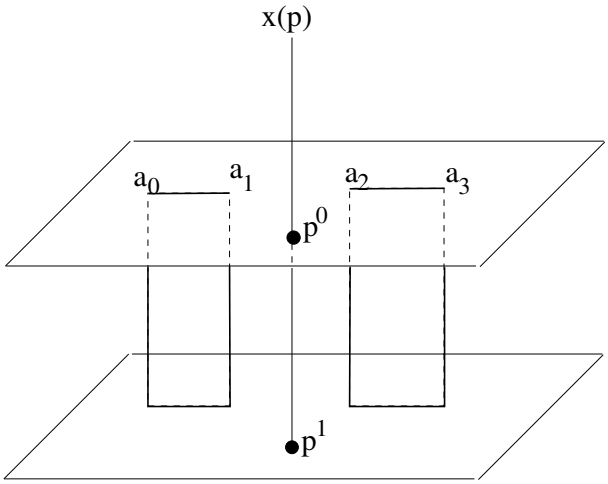


FIG. 2.1 – Représentation du tore sous la forme de deux feuillets en x reliés par deux coupures, c'est-à-dire deux sphères de Riemann recollées le long de deux segments.

Points de branchement :

On nomme **point de branchement** en x tout point a_i où la différentielle dx s'annule :

$$dx(a_i) = 0. \tag{8-10}$$

Dans cette thèse, nous supposerons toujours que les points de branchements sont des zéros simples de dx, c'est-à-dire qu'au voisinage d'un point de branchement a_i, x se comporte comme le carré de y :

$$y(p) \sim_{p \to a_i} \sqrt{x(p) - x(a_i)}. \tag{8-11}$$

Ces points correspondent aux points où deux feuillets se croisent : deux points p^i correspondant au même x se rencontrent. En effet, pour tout point p au voisinage d'un point de branchement a_i, il existe un unique point $\overline{p}$ tel que $x(p) = x(\overline{p})$ et $\overline{p}$ approche a_i quand $p \to a_i$ (voir fig. 2.2). La courbe algébrique $\mathcal{E}$ peut alors être vue comme $d_2 + 1$ sphères de Riemann recollées entre elles par des segments reliant les points de branchement en x. On passe de l'une à l'autre en traversant ces segments.

Remarque 8.2 La définition du **point conjugué** $\overline{p}$ de p dépend en général du point de branchement a_i considéré (voir par exemple la figure 2.2). Cependant, dans la mesure où il sera toujours clair à quel point de branchement on se réfère, nous omettrons de préciser celui-ci dans la suite.

Remarque 8.3 La représentation de la surface de Riemann sous forme de feuillets reliés par des coupures semble indiquer qu'il existe une relation entre le nombre de points de branchements et le genre de la surface. Ce lien est obtenu par le théorème de Riemann-Hurwitz qui dit que le nombre de points de branchements $\#b.p$ et le genre g sont reliés par l'équation :

$$g = -d_2 + \frac{\#b.p}{2}. \tag{8-12}$$

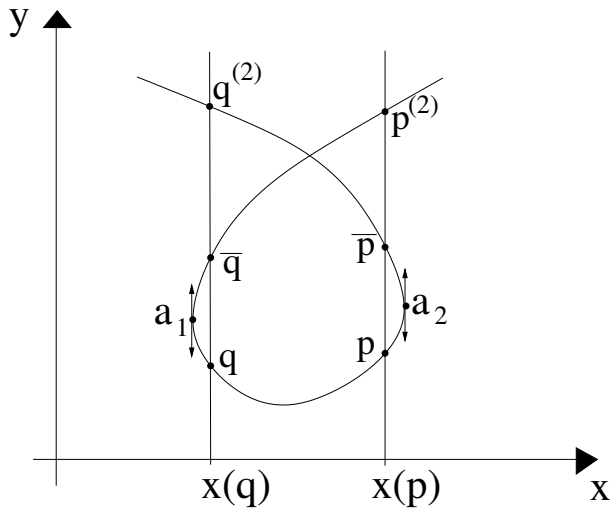


FIG. 2.2 – Exemple de courbe $\mathcal{E}(x,y)$ présentant deux points de branchements en x. On peut voir que le point conjugué n'est pas globalement défini.

Structure modulaire.

• **Base de cycles.**

Lorsque la courbe $\mathcal{E}$ a pour genre g, il existe $2g$ cycles non triviaux homologiquement indépendants. On peut alors choisir une base symplectique $\{(\underline{\mathcal{A}}_i, \underline{\mathcal{B}}_i)\}_{i=1\ldots g}$ telle que

$$\underline{\mathcal{A}}_i \cap \underline{\mathcal{B}}_j = \delta_{ij} \qquad , \qquad \underline{\mathcal{A}}_i \cap \underline{\mathcal{A}}_j = 0 \qquad , \qquad \underline{\mathcal{B}}_i \cap \underline{\mathcal{B}}_j = 0. \tag{8-13}$$

En découpant la surface le long des cycles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ainsi choisis, on obtient un domaine simplement connexe comme décrit sur la figure 2.3 : le **domaine fondamental**.

Sur cette courbe, il existe g formes holomorphes linéairement indépendantes $du_1, \ldots, du_g$, que l'on choisit normalisées sur les cycles $\mathcal{A}$:

$$\oint_{\underline{\mathcal{A}}_j} du_i = \delta_{ij}. \tag{8-14}$$

Ces différentielles permettent de définir la **matrice des périodes de Riemann** caractéristique de la surface $\overline{\Sigma}$. C'est une matrice τ de taille $g \times g$ dont les éléments sont les intégrales des différentielles holomorphes sur les cycles $\underline{\mathcal{B}}$:

$$\tau_{ij} = \oint_{\underline{\mathcal{B}}_j} du_i. \tag{8-15}$$

Cette matrice τ est symétrique et satisfait

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \qquad , \qquad \operatorname{Im} \tau > 0. \tag{8-16}$$

Dés lors, considérant un point $p \in \overline{\Sigma}$ n'appartenant à aucun cycle $\underline{\mathcal{A}}$ ni $\underline{\mathcal{B}}$, on définit l'application d'Abel

$$u_i(p) = \int_{p_0}^{p} du_i \tag{8-17}$$

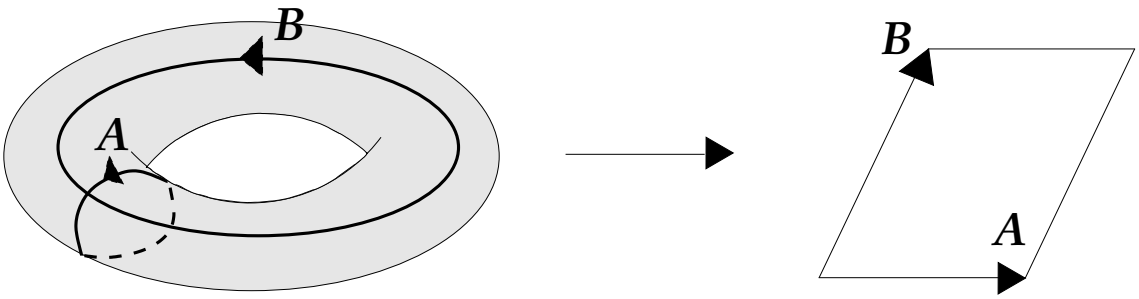


FIG. 2.3 – Le domaine fondamental du tore est un losange obtenu par découpage de la surface de départ suivant les cycles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

où le contour d'intégration est dans le domaine fondamental.

Le vecteur à g composantes $\mathbf{u}(p) = (u_1(p), \ldots, u_g(p))$ transporte la courbe dans sa jacobienne.

Notons que l'application d'Abel dépend du point de base p_0 mais celui-ci n'aura aucune influence dans toute la suite.

Fonctions theta et formes premières

On appelle **caractéristique** tout vecteur $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^g$ s'il existe deux vecteurs à coefficients entiers $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^g$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^g$ tels que :

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{a} + \tau.\mathbf{b}}{2}. \tag{8-18}$$

On dit que $\mathbf{z}$ et une caractéristique impaire si

$$\sum_{i=1}^{g} a_i b_i = \text{impair}. \tag{8-19}$$

Etant données une caractéristique $\mathbf{z} = \frac{\mathbf{a}+\tau\mathbf{b}}{2}$, une matrice symétrique $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ telle que $\mathrm{Im}\tau$ est définie positive et un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^g$, on définit la **fonction théta**

$$\theta_{\mathbf{z}}(\mathbf{v}, \tau) = \sum_{\mathbf{n} \in Z^g} \mathrm{e}^{i\pi(\mathbf{n}-\mathbf{b}/2)^t \tau (\mathbf{n}-\mathbf{b}/2)} \, \mathrm{e}^{2i\pi(\mathbf{v}+\mathbf{a}/2)^t . (\mathbf{n}+\mathbf{b}/2)}. \tag{8-20}$$

Si $\mathbf{z}$ est une caractéristique impaire, $\theta_{\mathbf{z}}$ est une fonctions impaire de $\mathbf{v}$[20] et on définit la forme holomorphe

$$dh_{\mathbf{z}}(p) = \sum_{i=1}^{g} du_i(p) \; . \; \left. \frac{\partial \theta_{\mathbf{z}}(\mathbf{v})}{\partial v_i} \right|_{\mathbf{v}=0}. \tag{8-21}$$

Elle a $g-1$ zéros qui sont des zéros doubles. On peut donc considérer leurs racines carrées définies dans la domaine fondamental et la **forme première** :

$$E(p,q) = \frac{\theta_{\mathbf{z}}(u(p) - u(q))}{\sqrt{dh_{\mathbf{z}}(p)\, dh_{\mathbf{z}}(q)}}. \tag{8-22}$$

[20]En particulier, on a alors $\theta_z(0, \tau) = 0$

On peut montrer qu'elle est **indépendante de z** et qu'elle n'a qu'un zéro sur la diagonale $p = q$ et aucun pôle.

Structure complexe.

En plus de la structure modulaire de $\overline{\Sigma}$, on doit également décrire sa structure complexe, c'est-à-dire les propriétés des fonctions méromorphes $x(p)$ et $y(p)$. Plus précisément, il nous suffit ici de préciser les modules caractérisant la forme différentielles ydx : sa structure de pôles, son comportment au voisinage de ceux-ci ainsi que son comportement le long des cycles $\underline{\mathcal{A}}$.

On note $\{\alpha_i\}_{i=1\dots\mathcal{P}}$ les pôles de ydx[21] et z_{α_i} une variable locale au voisinage de α_i. Pour définir cette dernière, considérons trois cas :

– soit α_i est un pôle de degrés d_i de x, auquel cas on définit :

$$z_{\alpha_i}(p) := x(p)^{\frac{1}{d_i}}; \tag{8-23}$$

– soit α_i n'est ni un pôle de x ni un point de branchement en x mais un pôle de y. Alors, on définit :

$$z_{\alpha_i}(p) := \frac{1}{x(p) - x(\alpha_i)}; \tag{8-24}$$

– soit α_i est un point de branchement en x (i.e. un zéro simple de dx) et donc un pôle de y. Dans ce cas

$$z_{\alpha_i}(p) := \frac{1}{\sqrt{x(p) - x(\alpha_i)}}. \tag{8-25}$$

Dans tous les cas, $z_{\alpha_i}(p)$ a un pôle simple quand $p \to \alpha_i$ et donc $\zeta_{\alpha_i}(p) := \frac{1}{z_{\alpha_i}}(p)$ a un zéro simple, définissant ainsi une bonne variable locale au voisinage du point α_i.

Les températures.

Un premier ensemble de modules est simplement donné par les résidus de ydx en ses pôles :

$$t_{0,i} := \operatorname*{Res}_{p\to\alpha_i} y(p)\, dx(p). \tag{8-26}$$

Remarque 8.4 Les températures ne sont pas des modules indépendants. En effet, il est facile de voir que

$$\sum_{i=1}^{\mathcal{P}} t_{0,i} = 0. \tag{8-27}$$

Les modules aux pôles.

Les ordres sous-dominants dans le développement de taylor de ydx donnent les autres modules de cette forme liés aux points à l'infini sur la surface. Pour les décrire, on introduit un "potentiel" associé à chacune des singularités de la surface :

$$V_i(p) := \operatorname*{Res}_{q\to\alpha_i} y(q)dx(q)\ \ln\left(1 - \frac{z_{\alpha_i}(p)}{z_{\alpha_i}(q)}\right). \tag{8-28}$$

[21]Rappelons que le nombre de points à l'infini, $\mathcal{P}$, peut être connu en représentant le polytope de Newton de $\mathcal{E}$.

C'est un polynôme en $z_{\alpha_i}(p)$. On peut donc l'écrire :

$$V_i(p) := \sum_{j=1}^{\deg V_i} t_{j,i}\ z_{\alpha_i}^j(p). \tag{8-29}$$

Remarque 8.5 La donnée de ces modules caractérise bien le comportement de ydx aux voisinage des pôles car

$$ydx(p) \sim_{p\to\alpha_i} dV_i(p) - t_{0,i}\frac{dz_{\alpha_i}(p)}{z_{\alpha_i}(p)} + O\left(\frac{dz_{\alpha_i}(p)}{z_{\alpha_i}^2(p)}\right) \tag{8-30}$$

où la différentielle

$$dV_i(p) = \operatorname*{Res}_{q\to\alpha_i} y(q)dx(q)\frac{dz_{\alpha_i}(p)}{z_{\alpha_i}(p) - z_{\alpha_i}(q)} \tag{8-31}$$

satisfait

$$\operatorname*{Res}_{p\to\alpha_i} dV_i(p) = 0. \tag{8-32}$$

Les fractions de remplissage[22].

On définit les fractions de remplissage ϵ_i pour $i = 1 \dots g$ comme les intégrales sur les cycles $\underline{\mathcal{A}}$ de la différentielle ydx :

$$\epsilon_i = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\underline{\mathcal{A}}_i} ydx. \tag{8-33}$$

Fonctions et différentielles fondamentales sur la courbe.

Les fonctions de corrélation et les termes du développement topologique de l'énergie libre peuvent être exprimés uniquement à l'aide de deux briques élémentaires, deux différentielles définies sur la courbe spectrale : le noyau de Bergmann et la différentielle Abelienne de troisième espèce.

Noyau de Bergmann.

Sur la surface $\overline{\Sigma}$, il existe une unique différentielle bilinéaire $\underline{B}(p,q)$ ayant un unique pôle double sur la diagonale $p = q$ sans résidu et avec des cycles $\underline{\mathcal{A}}$ nuls. C'est-à-dire qu'il est donné par les contraintes :

$$\underline{B}(p,q) = \frac{dz(p)dz(q)}{(z(p) - z(q))^2} + \text{ terme fini et } \oint_{\underline{\mathcal{A}}} \underline{B}(p,q) = 0 \tag{8-34}$$

où z est n'importe quelle variable locale au voisinage de q.

Différentielle Abelienne de troisième espèce.

De même, pour tout couple de points (q_1, q_2) de $\overline{\Sigma}$, il existe une unique forme différentielle $\underline{dS}_{q_1,q_2}(p)$ sur la surface avec deux pôles simples en $p \to q_1$ et $p \to q_2$ avec

[22]Cette dénomination vient directement de l'interprétation des modèles de matrices comme un gaz de particules fermioniques (voir [84, 47]).

résidus respectifs 1 et -1 et normalisée par l'annulation de ses intégrales sur les cycles $\underline{\mathcal{A}}$:

$$\operatorname*{Res}_{q_1} \underline{dS}_{q_1,q_2} = 1 = -\operatorname*{Res}_{q_2} \underline{dS}_{q_1,q_2} \qquad , \qquad \oint_{\mathcal{A}_i} \underline{dS}_{q_1,q_2} = 0. \tag{8-35}$$

Propriétés.

On peut tout d'abord remarquer que la différentielle Abelienne de troisième espèce peut être obtenue par intégration du noyau de Bergmann sur un chemin du domaine fondamental allant de q_2 à q_1 :

$$\underline{dS}_{q_1,q_2}(p) = \int_{q_2}^{q_1} \underline{B}(p,q) \tag{8-36}$$

ou bien dans sa version dérivée

$$d_{q_1}\left(\underline{dS}_{q_1,q_2}(p)\right) = \underline{B}(q_1,p). \tag{8-37}$$

Le noyau de Bergmann, en tant que dérivée seconde d'une foncion θ, est symétrique :

$$\underline{B}(p,q) = d_p d_q \ln\left(\theta_{\mathbf{z}}(u(p)-u(q))\right) = \underline{B}(q,p) \tag{8-38}$$

où $\mathbf{z}$ est une caractéristique impaire quelconque. Par intégration, on obtient :

$$\underline{dS}_{q_1,q_2}(p) = d_p \ln\left(\frac{\theta_{\mathbf{z}}(\mathbf{u}(p)-\mathbf{u}(q_1))}{\theta_{\mathbf{z}}(\mathbf{u}(p)-\mathbf{u}(q_2))}\right) \tag{8-39}$$

et

$$\underline{dS}_{q_1,q_2} = -\underline{dS}_{q_2,q_1}. \tag{8-40}$$

Les intégrales sur les cycles $\underline{\mathcal{B}}$ sont données par

$$\oint_{q\in\underline{\mathcal{B}}_i} \underline{B}(p,q) = 2i\pi\, du_i(p) \qquad \text{et} \qquad \oint_{\mathcal{B}_i} \underline{dS}_{q_1,q_2} = 2i\pi(u_i(q_1)-u_i(q_2)). \tag{8-41}$$

Formules de Cauchy.

Pour une fonction meromorphe $f(p)$, les formules de Cauchy ainsi que les propriétés de $\underline{dS}$ et $\underline{B}$ permettent d'écrire

$$f(p) = -\operatorname*{Res}_{q_1\to p} \underline{dS}_{q_1,q_2}(p) f(q_1) \tag{8-42}$$

ainsi qu'une expression pour la différentielle de f :

$$df(p) = \operatorname*{Res}_{q\to p} \underline{B}(p,q) f(q). \tag{8-43}$$

Identité bilinéaire de Riemann.

Tout au long de ce chapitre, nous aurons besoin de déplacer des contours d'intégration sur une surface de Riemann. Si l'intégrand a des intégrales non nulles le long de cycles non-triviaux, celles-ci doivent être prises en compte lorsque l'on déplace le contour d'intégration. L'identité bilinéaire de Riemann [52] explicite cette dépendance.

Soient ω_1 et ω_2 deux formes méromorphes sur la surface $\overline{\Sigma}$ et un point p_0 arbitraire. Considérons la fonction Φ_1 définie sur le domaine fondamental par

$$\Phi_1(p) = \int_{p_0}^{p} \omega_1 \tag{8-44}$$

où le chemin d'intégration reste à l'intérieur du domaine fondamental.

On a alors l'**identité bilinéaire de Riemann** :

$$\operatorname*{Res}_{p\to\text{tous les poles}} \Phi_1(p)\omega_2(p) = \frac{1}{2i\pi}\sum_{i=1}^{g} \oint_{\underline{\mathcal{A}}_i} \omega_1 \oint_{\underline{\mathcal{B}}_i} \omega_2 - \oint_{\underline{\mathcal{B}}_i} \omega_1 \oint_{\underline{\mathcal{A}}_i} \omega_2. \tag{8-45}$$

En particulier, pour $\omega_1(p) = B(p,q)$, on obtient :

$$\operatorname*{Res}_{p\to\text{tous les poles}} dS_{p,p_0}(q)\,\omega(p) = -\sum_{i=1}^{g} du_i(q) \oint_{\mathcal{A}_i} \omega \tag{8-46}$$

ainsi que :

$$\omega(q) = \operatorname*{Res}_{p\to\text{poles de }\omega} dS_{p,p_0}(q)\,\omega(p) + \sum_{i=1}^{g} du_i(q) \oint_{\mathcal{A}_i} \omega. \tag{8-47}$$

Décomposition de ydx sur les modules de la structure complexe.

En utilisant l'équation bilinéaire de Riemann Eq. (8-47), on peut réécrire ydx de manière à faire apparaître explicitement les modules de la courbe $\mathcal{E}$:

$$ydx = \sum_{i,j} t_{j,i} B_{j,i} + \sum_{i} t_{0,i} \underline{dS}_{\alpha_i,o} + 2i\pi \sum_{i} \epsilon_i du_i \tag{8-48}$$

avec

$$B_{j,i}(p) = -\operatorname*{Res}_{q\to\alpha_i} \underline{B}(p,q) z_{\alpha_i}(q)^j. \tag{8-49}$$

Cette décomposition est très utile puisqu'elle nous permet de reporter toute variation des modules introduits jusqu'ici en une variation de la forme différentielle ydx seule.

Briques élémentaires.

A partir de ces fonctions, on définit deux éléments qui seront la base de la résolution des équations de boucles. Pour un point $p \in \overline{\Sigma}$ quelconque et un point q proche d'un point de branchement a_i (i.e. tel que l'on puisse définir un point conjugué $\overline{q}$.), on définit les formes différentielles :

$$\omega(q) := (y(q) - y(\overline{q}))dx(q) \tag{8-50}$$

et

$$\underline{dE}_q(p) = \frac{1}{2}\int_{q}^{\overline{q}} B(.,p) \tag{8-51}$$

où le chemin d'intégration reste dans un voisinage du point de branchement a_i.

Fonction tau de Bergmann.

La **fonction tau de Bergmann**, τ_{Bx}, a été introduite dans [75, 76, 45] pour l'étude des espaces de Hurwitz et de la première correction de l'énergie libre des modèles de matrices. Elle est définie de manière unique par les contraintes :

$$\frac{\partial \ln(\tau_{Bx})}{\partial x(a_i)} = \operatorname*{Res}_{p \to a_i} \frac{B(p,\overline{p})}{dx(p)} \tag{8-52}$$

pour tout point de branchement a_i. La formule variationnelle de Rauch [96] assure que le membre de droite est une forme fermée et donc que cette définition n'est pas caduque. Cependant, notons que cette fonction est définie à une constante multiplicative près qui ne jouera aucun rôle dans la suite.

8.2 Propriétés de la courbe spectrale du modèle à deux matrices.

Dans ce paragraphe nous allons nous attarder sur les propriétés particulières de la courbe spectrale classique d 'un modèle à deux matrices dont nous rappelons la forme :

$$\mathcal{E}_{2MM}(x,y) = (V_1'(x) - y)(V_2'(y) - x) + P(x,y) \tag{8-53}$$

où V_1 et V_2 sont des polynômes de degrés respectifs $d_1 + 1$ et $d_2 + 1$ et $P(x,y)$ est un polynôme en ses deux variables de degré $d_1 - 1$ en x et $d_2 - 1$ en y.

Polytope de Newton.

Le développement de $\mathcal{E}_{2MM}$ peut s'écrire :

$$\mathcal{E}_{2MM} = t_{d_1} x^{d_1+1} + \tilde{t}_{d_2} y^{d_2+1} + x^{d_1}(t_{d_1} V_2'(y) + t_{d_1-1}) + y^{d_2}(\tilde{t}_{d_2} V_1'(x) + \tilde{t}_{d_2-1}) + P(x,y). \tag{8-54}$$

Il est alors clair que $P(x,y)$ est contenu strictement à l'intérieur du polytope et que ce dernier prend la forme représentée dans la figure (2.4).

La simple lecture de ce polytope nous permet de conclure que la surface de Riemann correspondante a un genre g majoré par

$$g \leq d_1 d_2 - 1. \tag{8-55}$$

On peut également voir que sa frontière est composée de deux segments, donc la forme ydx a deux pôles dont nous étudions les propriétés dans le paragraphe suivant.

Points à l'infini.

Il y a deux points à l'infini sur la surface $\overline{\Sigma}$, c'est-à-dire deux points qui sont des pôles de la fonction meromorphe $x(p)$ ou de $y(p)$:

- L'un, noté ∞_x, est un pôle simple pour $x(p)$ et de degrés d_1 pour $y(p)$ (on peut le voir d'après le facteur $y - V_1'(x)$ dans $\mathcal{E}_{2MM}$ par exemple) ;
- L'autre, noté ∞_y, est un pôle simple pour $y(p)$ et de degrés d_2 pour $x(p)$ (d'après le facteur $x - V_2'(y)$ dans $\mathcal{E}_{2MM}$).

Si l'on s'intéresse maintenant à la structure de pôles de la forme différentielle ydx, on voit qu'elle a un pôle de degrés $d_1 + 2$ en ∞_x et de degrés $d_2 + 2$ en ∞_y.

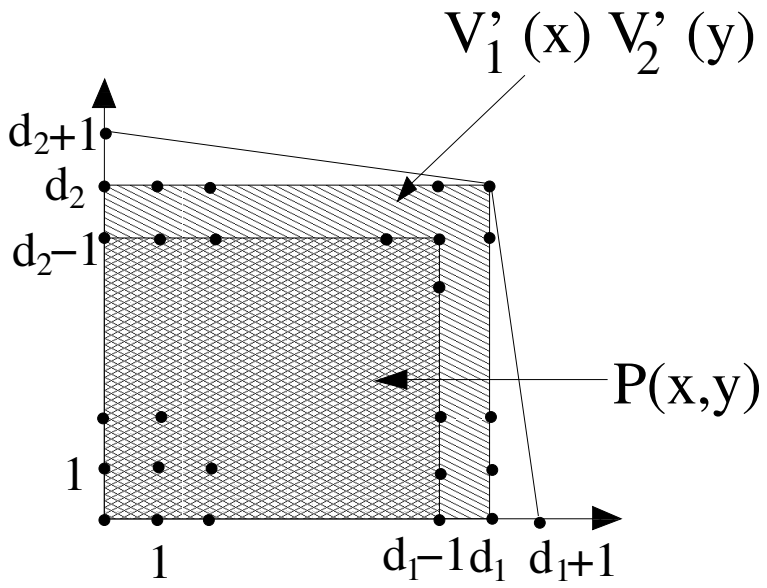


FIG. 2.4 – Polytope de Newton de $\mathcal{E}_{2MM}$. Les parties hachurées mettent en valeur les contributions des différents termes, $P(x,y)$ et $V_1'(x)V_2'(y)$ respectivement. La partie non hachurée correspond à la contribution exclusive de $xV_1'(x) + yV_2'(y)$.

Structure en feuillets.

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à la structure en feuillets en x, c'est à dire que nous fixons la variable complexe x dans l'équation algébrique $\mathcal{E}_{2MM}(x,y) = 0$ et regardons les différentes solutions correspondantes en y.

De manière générique $\mathcal{E}_{2MM}(x,y) = 0$ a $d_2 + 1$ solutions en y. Il existe donc $d_2 + 1$ points $\{p^i\}_{i=0\dots d_2}$ de la surface algébrique compacte $\overline{\Sigma}$ se projetant sur un même point $x = x(p^i)$ dans le plan complexe : il y a $d_2 + 1$ feuillets en x, chacun étant associé à un p^i différent. Chaque exposant se réfèrera donc à partir de maintenant à un feuillet. Ces feuillets ne sont cependant pas tous équivalents. En effet, l'un de ces feuillets est caractérisé par le fait qu'il contient le point ∞_x alors que tous les autres feuillets se rejoignent en ∞_y. On appelle **feuillet physique** le feuillet contenant ∞_x et on lui associe l'exposant 0. Nous expliquerons cette dénomination dans la partie 9.1.

Cas particulier : Courbe de genre 0.

Si l'on est intéressé par la combinatoire des cartes portant une structure de spin, on se place dans le cadre décrit dans la partie 4 et la courbe $\mathcal{E}_{2MM}$ est alors de genre nul. Il n'y a alors plus de fraction de remplissage ϵ_i ni de base de cycles $(\underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}})$. Ce cas correspond vraiment à traiter un modèle d'Ising sur surface aléatoire.

La condition de genre 0 assure également que l'on peut trouver une paramétrisation rationnelle de la courbe $\mathcal{E}_{2MM}(x,y)$. Cela signifie que l'on peut trouver deux fonctions rationnelles $P(z)$ et $Q(z)$ définies dans le plan complexe telles que :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,,\ \mathcal{E}_{2MM}(P(z), Q(z)) = 0. \tag{8-56}$$

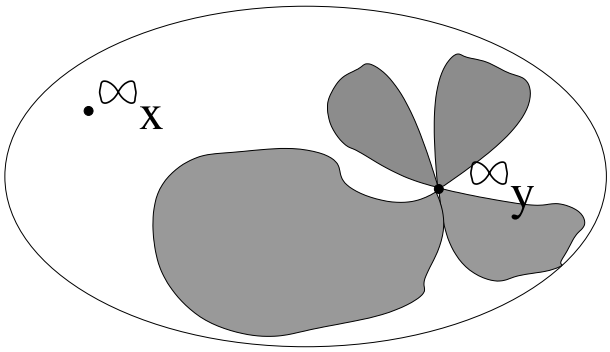


FIG. 2.5 – La structure en feuillets en x de $\mathcal{E}_{2MM}$ fait apparaître un unique feuillet contenant ∞_x alors que les quatre autres (en grisé) contiennent ∞_y. On a représenté ici l'exemple d'une surface de genre 0 par souci de simplicité, mais le même type de description s'applique bien sûr à des surfaces de genre plus élevé.

On représente donc $\mathcal{E}_{2MM}$ par cette paramétrisation :

$$\mathcal{E}_{2MM} := \begin{cases} x = P(z) \\ y = Q(z) \end{cases} \tag{8-57}$$

Dés lors, toute fonction et différentielle sur $\overline{\Sigma}$ s'exprime simplement en termes de ces fonctions rationnelles. En particulier le noyau de Bergmann est donné par :

$$\underline{B}(z_1, z_2) = \frac{P'(z_1)P'(z_2)dz_1dz_2}{(P(z_1) - P(z_2))^2} \tag{8-58}$$

où $P'(z)$ est la dérivée de la fonction rationnelle $P(z)$ par rapport à sa variable complexe z.

9 Développement topologique du modèle à deux matrices.

Dans cette partie, nous allons montrer comment on peut calculer tous les termes du développement topologique de n'importe quelle fonction de corrélation du modèle à deux matrices hermitiennes, y compris l'énergie libre. Nous ne présenterons ici que les résultats avec parfois des idées des démonstrations, les preuves complètes étant assez techniques et écrites dans nos articles avec L. Chekhov et B. Eynard [**II**][**III**].

Nous allons présenter les résultats par ordre de complexité croissante :

- Dans un premier temps, nous montrons comment définir une courbe spectrale semi-classique à partir des corrections en $\frac{1}{N^2}$ de la courbe spectrale classique ;
- Nous verrons ensuite comment celle-ci nous permet de calculer tout le développement topologique des fonctions de correlation simples ;
- L'introduction d'un nouvel opérateur nous permet alors de remonter jusqu'au développement topologique de l'énergie libre ;
- Enfin, nous présenterons une formule permettant le calcul de n'importe quelle fonction de corrélation à n'importe quel ordre de correction en $\frac{1}{N^2}$.

9.1 Définitions, solutions des équations de boucles et feuillet physique.

Comme nous l'avons vu plus tôt dans la partie 7.1 consacrée à l'équation de boucles maîtresse, la résolution des équations de boucles donne généralement plusieurs solutions pour les fonctions de corrélation : ce sont donc des fonctions multivaluées du plan complexe. Dans toute la suite, nous allons résoudre les équations de boucles en étudiant les fonctions de corrélations comme des différentielles sur la courbe spectrale classique où elles sont monovaluées. Le fait que ces dernières donnent lieu à plusieurs solutions différentes dans le plan complexe vient alors tout simplement de la structure en feuillets (que ce soit en x ou en y) de la surface de Riemann. En effet, pour une valeur complexe de $x(p)$ ou de $y(p)$, il existe plusieurs points p correspondant sur la courbe $\mathcal{E}_{2MM}$, chacun d'eux induisant une valeur différente pour les fonctions de corrélation.

Cependant, en revenant à la définition même de ces objets, on peut sélectionner la solution physiquement (ou combinatoirement) intéressante. En effet, les fonctions de corrélation sont des séries génératrices valables uniquement comme séries formelles quand leur paramètre de développement x (resp. y) tend vers l'infini avec un pole simple[23]. Or, parmi les différents antécédents p^i de $x(p)$ (resp. $\tilde{p}^j$ de $y(p)$), un seul satisfait cette condition : c'est l'antécédent se trouvant dans le feuillet physique en x, p^0 (resp. le feuillet physique en y, $\tilde{p}^0$), expliquant ainsi cette dénomination.

Dés à présent, et ce tout au long de ce chapitre, le terme fonction de corrélation ne se rapportera plus aux fonctions complexes $\overline{H}^{(h)}_{\mathbf{k};l;m}$ définies plus haut mais aux différentielles

$$H^{(h)}_{\mathbf{k};l;m}(S_{k_1},\dots,S_{k_i};\mathbf{p_L};\mathbf{q_M}) \tag{9-1}$$

dont les arguments $\{p_{i,j},q_{i,j}\}_{j=1}^{k_i}$ pour $i=1,\dots,k$, $\{p_i\}_{i=1}^{l}$ et $\{q_i\}_{i=1}^{m}$ sont des points de la surface de Riemann $\overline{\Sigma}$ et satisfaisant la condition

$$\begin{aligned}
&H^{(h)}_{\mathbf{k};l;m}(S_{k_1},\dots,S_{k_i};\mathbf{p_L};\mathbf{q_M}) = \\
&\overline{H}^{(h)}_{\mathbf{k};l;m}(S_{k_1},\dots,S_{k_i};\mathbf{x}(\mathbf{p_L});\mathbf{y}(\mathbf{q_M}))\prod dx(p_{i,j})\,dy(q_{i,j})\,dx(p_i)\,dy(q_j) \\
&+\delta_{h,0}\delta_{l,0}\delta_{m,0}\delta_{i,1}\delta_{k_1,1}dx(p_{1,1})dy(q_{1,1}) \\
&+\delta_{h,0}\delta_{i,0}\delta_{k,2}\delta_{l,0}\frac{dx(p_1)dx(p_2)}{(x(p_1)-x(p_2))^2} \\
&+\delta_{h,0}\delta_{i,0}\delta_{k,0}\delta_{l,2}\frac{dy(q_1)dy(q_2)}{(y(q_1)-y(q_2))^2}
\end{aligned} \tag{9-2}$$

pour des arguments p dans le feuillet physique en x et q dans le feuillet physique en y.

On notera également les fonctions de corrélation simples :

$$W^{(g)}_{k,l} := H^{(g)}_{0;k;l}. \tag{9-3}$$

Dans la suite, nous allons donc calculer ces fonctions de corrélation en n'importe quel point de la surface de Riemann, mais il ne faudra pas oublier que l'on n'obtient de valeur physique que pour des arguments dans leurs feuillets physiques respectif.

[23] Cette condition est souvent résumée par le comportement asymptotique de la résolvante : $W_{1,0}(x) \sim \frac{1}{x} + O(x^{-2})$ quand $x \to \infty$.

On introduit finalement les fonctions auxiliaires suivantes :

$$\widetilde{U}^{(h)}_{\mathbf{k};l;m}(S_{k_1},\dots,S_{k_i};\mathbf{p_L};\mathbf{q_M}) := Pol_{x(p_{1,1})}V_1'(x(p_{1,1}))H^{(h)}_{\mathbf{k};l;m}(S_{k_1},\dots,S_{k_i};\mathbf{p_L};\mathbf{q_M}), \quad (9\text{-}4)$$

$$U^{(h)}_{\mathbf{k};l;m}(S_{k_1},\dots,S_{k_i};\mathbf{p_L};\mathbf{q_M}) := Pol_{y(q_{1,k})}V_2'(y(q_{1,k}))H^{(h)}_{\mathbf{k};l;m}(S_{k_1},\dots,S_{k_i};\mathbf{p_L};\mathbf{q_M}) \quad (9\text{-}5)$$

et

$$P^{(h)}_{\mathbf{k};l;m}(S_{k_1},\dots,S_{k_i};\mathbf{p_L};\mathbf{q_M}) := Pol_{x(p_{1,1})}V_1'(x(p_{1,1}))U^{(h)}_{\mathbf{k};l;m}(S_{k_1},\dots,S_{k_i};\mathbf{p_L};\mathbf{q_M}) \quad (9\text{-}6)$$

qui sont des polynômes respectivement en $x(p_{1,1})$, $y(q_{1,k})$ et $x(p_{1,1})$ et $y(q_{1,k})$.

9.2 Quelques propriétés des fonctions de corrélation.

Dans ce paragraphe nous résumons quelques propriétés importantes des fonctions de corrélation.

Lemme 9.1 *Les fonctions de corrélation simples ont toute des intégrales nulles autour des cycles $\underline{\mathcal{A}}$:*

$$\int_{p\in\underline{\mathcal{A}}} W^{(h)}_{k+1;l}(p,\mathbf{p_K};\mathbf{q_L}) = 0 \quad (9\text{-}7)$$

pour tout $k+l+h>0$.

Cette propriété vient directement du fait que les fractions de remplissage ϵ_i sont les intégrales de ydx et donc de $W^{(0)}_{1;0}$ sur ces cycles et qu'elles sont indépendantes des coefficients des potentiels V_1 et V_2.

Lemme 9.2 *Les fonctions de corrélation simples $W^{(h)}_{k+1;l}(p,\mathbf{p_K};\mathbf{q_L})$ ont des pôles seulement aux points de branchement $p\to a_i$.*

Ce résultat s'obtient par récurrence grâce aux équations de boucles.

Un autre résultat classique donne la fonction à deux points de genre 0 comme une fonction fondamentale sur la courbe spectrale clasique :

Lemme 9.3 *La fonction à deux points de genre 0 est le noyau de Bergmann sur la courbe spectrale $\mathcal{E}$:*

$$\boxed{W^{(0)}_{2;0}(p,q) = W^{(0)}_{0;2}(p,q) = -W^{(0)}_{1;1}(p;q) = \underline{B}(p,q).} \quad (9\text{-}8)$$

Ce résultat est fondamental puisqu'il nous servira de base dans toute la suite. Nous nous servirons de cette fonction à deux points comme donnée initiale pour une résolution par récurrence.

9.3 Courbe spectrale complète.

Reprenons l'équation de boucle maitresse Eq. (7-11), mais conservons le terme correctif en $\frac{1}{N^2}$:

$$E(x, Y(x)) = \frac{1}{N^2} U(x, Y(x); x) \tag{9-9}$$

avec

$$E(x, y) = \mathcal{E}_{2MM}(x, y) + \sum_{g=1}^{\infty} N^{-2g} E^{(g)}(x, y). \tag{9-10}$$

On peut montrer que les deux fonctions E et U apparaissant dans cette équation peuvent s'écrire :

Théorème 9.1

$$\boxed{E(x(p), y) = -\tilde{t}_{d_2+1} \text{"} \left\langle \prod_{i=0}^{d_2} (y - V_1'(x(p^i)) + \hbar \operatorname{Tr} \frac{1}{x(p^i) - M_1}) \right\rangle \text{"}} \tag{9-11}$$

et

$$U_0(p, y) = -\tilde{t}_{d_2+1} \text{"} \left\langle \prod_{i=1}^{d_2} (y - V_1'(x(p^i)) + \hbar \operatorname{Tr} \frac{1}{x(p^i) - M_1}) \right\rangle \text{"}. \tag{9-12}$$

où les guillemets " $\langle . \rangle$ " signifient que chaque fois que l'on rencontre une fonction à deux points en développant en cumulants, on la remplace par

$$W_{2,0}(x, x') := \left\langle \operatorname{Tr} \frac{1}{x - M_1} \operatorname{Tr} \frac{1}{x' - M_1} \right\rangle + \frac{1}{(x - x')^2}. \tag{9-13}$$

Ce résultat est obtenu simplement en montrant que Eq. (9-9) a une unique solution, étant données les propriétés de U et E, et que les formules données dans le théorème sont effectivement solutions (voir **[III]**pour plus de détails).

A priori cette formule définit une fonction $E(x(p), y)$ polynômiale en y mais dont le comportement en son autre variable p est moins évident : sa symétrie sur tous les feuillets p^i permet juste de conclure qu'il s'agit d'une fonction rationnelle de $x(p)$. Néanmoins, une étude approfondie de la structure de ses pôles permet de vérifier qu'il s'agit bien d'un polynôme en $x(p)$ **[III]**. On peut même aller plus loin et démontrer que

Lemme 9.4 *$E(x, y)$ est symétrique dans le rôle de x et y :*

$$\begin{aligned} E(x(p), y(q)) &= -\tilde{t}_{d_2+1} \text{"} \left\langle \prod_{i=0}^{d_2} (y(q) - V_1'(x(p)) + \hbar \operatorname{Tr} \frac{1}{x(p^i) - M_1}) \right\rangle \text{"} \\ &= -t_{d_1+1} \text{"} \left\langle \prod_{i=0}^{d_1} (x(p) - V_2'(y(q)) + \hbar \operatorname{Tr} \frac{1}{y(\tilde{q}^i) - M_2}) \right\rangle \text{"}. \end{aligned} \tag{9-14}$$

Cette propriété, très forte à première vue, est tout à fait naturelle. En effet, la courbe spectrale, qu'elle soit classique ou semi-classique, est obtenue par la dérivation d'équations de boucles par changement de variable dans l'intégrale matricielle. Nous avons ici choisi d'effectuer le changement $\delta M_1 := \frac{1}{x-M_1}\frac{V_2'(y)-V_2'(y)}{y-M_2}$ brisant la symétrie naturelle du modèle en M_1 et M_2. Mais nous aurions tout aussi bien pu considérer le changement de variable $\delta M_2 := \frac{V_1'(x)-V_1'(M_1)}{x-M_1}\frac{1}{y-M_2}$ pour obtenir la même information à travers une autre courbe spectrale correspondant à la première par l'échange des rôles respectifs de x et de y. Déjà au niveau classique la courbe est explicitement symétrique :

$$\mathcal{E}_{2MM}(x,y) = (V_1'(x)-y)(V_2'(y)-x) + P^{(0)}(x,y). \tag{9-15}$$

Il n'est donc pas surprenant que cette symétrie se retrouve dans tout le développement topologique de cette courbe spectrale qui contient toute l'information nécéssaire à la résolution du modèle (mis à part un petit nombre de paramètres : les fractions de remplissage).

9.4 Fonctions de corrélation simples et représentation diagrammatique.

Première relation de récurrence.

Sachant que $E(x,y)$ est un polynôme en ses deux variables, étudions un à un les coefficients des différentes puissances de y et en rappelant que

$$E(x,y) = (V_1'(x)-y)(V_2'(y)-x) + P(x,y) \tag{9-16}$$

où $P(x,y)$ est une série formelle en $\frac{1}{N^2}$ dont chacun des termes est un polynôme en x et en y. A l'ordre h dans le développement topologique de cette équation, le développement en $y \to \infty$ des membres de gauche et de droite de cette équation donnent les égalités suivantes :

- **Coefficient de y^{d_2+1} :** Le résultat est une égalité triviale du type "$0=0$".
- **Coefficient de y^{d_2} :** On obtient une équation liant fortement les différents feuillets et très utile dans toute la suite :

$$\forall\, h \geq 1,\ \ \sum_{i=0}^{d_2} W_{1,0}^{(h)}(p^i) = 0. \tag{9-17}$$

- **Coefficient de y^{d_2-1} :** On obtient cette fois-ci une équation bilinéaire :

$$\begin{aligned} &2\sum_{i=0}^{d_2} y(p^i) W_{1,0}^{(h)}(p^i)dx(p) = \\ &= \sum_{i=0}^{d_2}\sum_{m=1}^{h-1} W_{1,0}^{(m)}(p^i)W_{1,0}^{(h-m)}(p^i) + \sum_{i=0}^{d_2} \overline{W}_{2,0}^{(h-1)}(p^i,p^i) + 2Q^{(h)}(x(p))\,(dx(p))^2 \end{aligned} \tag{9-18}$$

où $Q(x) = \sum_h N^{-2h} Q^{(h)}(x) := \frac{1}{N}\left\langle \mathrm{Tr}\, \frac{V_1'(x)-V_1'(M_1)}{x-M_1} \right\rangle$ est un polynôme en x de degré $d_1 - 1$.

Etant données les intégrales sur les cycles $\underline{\mathcal{A}}_i$ des fonctions de corrélation :

$$\forall\,(i,k,h),\quad \oint_{p\in\underline{\mathcal{A}}_i} W_{k+1,0}^{(h)}(p,\mathbf{p_K})=0 \tag{9-19}$$

et la structure de pôles de ces dernières décrite par le lemme 9.2, on peut en déduire

$$\begin{aligned} W_{1,0}^{(h)}(q) &= -\sum_i \operatorname*{Res}_{p\to a_i} \frac{\underline{dE}_p(q)(\overline{W}_{2,0}^{(h-1)}(p,p)+\sum_{m=1}^{h-1} W_{1,0}^{(m)}(p)W_{1,0}^{(h-m)}(p))}{(y(p)-y(\overline{p}))dx(p)} \\ &= \sum_i \operatorname*{Res}_{p\to a_i} \frac{\underline{dE}_p(q)(W_{2,0}^{(h-1)}(p,\overline{p})+\sum_{m=1}^{h-1} W_{1,0}^{(m)}(p)W_{1,0}^{(h-m)}(\overline{p}))}{(y(p)-y(\overline{p}))dx(p)}. \end{aligned} \tag{9-20}$$

On a ainsi exprimé la fonction de corrélation à un point de genre h en termes de fonctions de corrélation de genres moins élevés. Cependant, ce système d'équations n'est évidemment pas fermé puisqu'il ne donne pas accès aux fonctions à plusieur points nécessaires à la construction d'une récurrence. Pour fermer ce système, il faut donc être capable de passer de $W_{k,0}^{(h)}$ à $W_{k+1,0}^{(h)}$.

Opérateur d'insertion de boucle.

Ces opérateurs faisant passer de $W_{k,l}$ à $W_{k+1,l}$ et $W_{k,l+1}$ sont connus et étudiés depuis longtemps : ce sont les opérateurs d'insertion de boucle introduits dans Eq. (2-4) permettant d'obtenir toutes les fonctions de corrélation simples lorsqu'ils sont appliqués successivement sur l'énergie libre (voir Eq. (2-5)).

Ainsi pour obtenir toutes les fonctions de corrélation à partir de la fonction à un point, il suffit de savoir comment ces opérateurs agissent sur les différents éléments composant les règles de récurence. Nous n'aurons donc besoin que de deux propriétés déjà bien connues de l'opérateur $\frac{\partial}{\partial V_1}$, à savoir son action sur les fonctions fondamentales :

$$\frac{\partial y(p)}{\partial V_1(x(r))}\,dx(r) = -\frac{\underline{B}(p,r)}{dx(p)} \tag{9-21}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{B}(p,q)}{\partial V_1(x(r))}\,dx(r) &= \sum_\alpha \operatorname*{Res}_{\xi\to\mu_\alpha} \frac{2\underline{dE}_\xi(q)\underline{B}(p,\overline{\xi})\underline{B}(\xi,r)}{\big(y(\xi)-y(\overline{\xi})\big)\,dx(\xi)} \\ &= \sum_\alpha \operatorname*{Res}_{\xi\to\mu_\alpha} \frac{\underline{dE}_\xi(q)\,\big[\underline{B}(p,\overline{\xi})\underline{B}(\xi,r)+\underline{B}(r,\overline{\xi})\underline{B}(\xi,p)\big]}{\big(y(\xi)-y(\overline{\xi})\big)\,dx(\xi)}. \end{aligned} \tag{9-22}$$

En appliquant cet opérateur plusieurs fois sur Eq. (9-20), on obtient un ensemble de relations de récurrence fermé :

Théorème 9.2

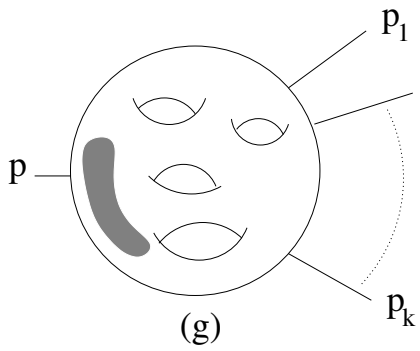
$$\boxed{\begin{aligned} W_{k+1,0}^{(h)}(q,p_K) &= \textstyle\sum_\alpha \operatorname{Res}_{p\to\mu_\alpha} \frac{\underline{dE}_{p,\overline{p}}(q)}{(y(p)-y(\overline{p}))\,dx(p)} \Big(W_{k+1,0}^{(h-1)}(p,\overline{p},p_K)+ \\ &\quad + \textstyle\sum_{j,m} W_{j+1,0}^{(m)}(p,p_J)\,W_{k+1-j,0}^{(h-m)}(\overline{p},p_{K-J})\Big), \end{aligned}} \tag{9-23}$$

La démonstration tient au fait que cette règle est stable sous l'application de $\frac{\partial}{\partial V_1}$.

Représentation de la règle de récurrence.

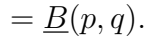
Ces relations de récurrence peuvent être représentées de manière diagrammatique permettant une meilleure compréhension du résultat. Pour ce faire, on reprend les représentations des fonctions de corrélations sous forme diagrammatique introduites dans la partie 4.

Commençons par représenter la fonction de corrélation $W_{k,0}^{(g)}(\mathbf{p_K})$ par une surface de genre g avec k pattes marquées par les points $\{p_i\}_{i=1\dots k}$ par analogie avec les surfaces qu'elle génère :

$W_{k+1,0}^{(g)}(p,\mathbf{p_K}) :=$ 

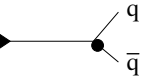
. (9-24)

La fonction à deux points de genre 0, $W_{2,0}^{(0)}(p,q)$, est alors une sphère à deux pattes : on la représente plus simplement par une arête non-orientée joignant p et q :

$W_{2,0}^{(0)}(p,q) :=$ 

$= \underline{B}(p,q).$ (9-25)

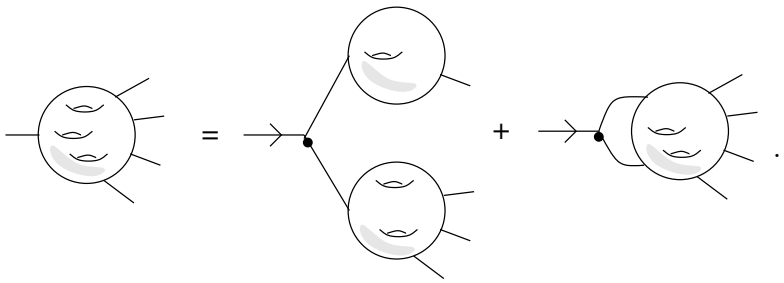
Introduisons un dernier élément graphique composé d'une arête orientée allant d'un point p vers un vertex trivalent dont les deux autres pattes sont associées à q et $\overline{q}$ respectivement :

$$\sum_i \operatorname*{Res}_{q\to a_i} \frac{\underline{dE}_q(p)}{\omega(q)} :=$$ 

. (9-26)

On repère par un point la patte correspondant à $\overline{q}$ et on la dénommera enfant droit dans toute la suite pour la différencier de l'enfant gauche associé à q.

La relation de récurrence Eq. (9-23) est alors représentée par

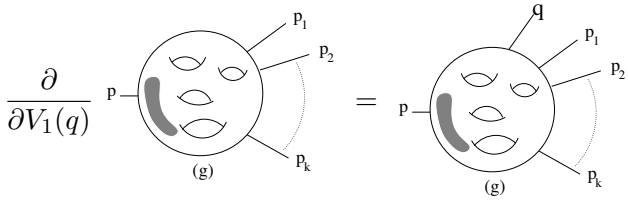


. (9-27)

Sous cette forme, il est clair que l'ensemble des relations de récurrence Eq. (9-23) forme un système triangulaire puisqu'à chaque étape on réduit soit le nombre de "trous" dans la surface ou le nombre de pattes (ou les deux). Ainsi, après un nombre fini d'étapes, on sera réduit au calcul de la fonction à deux points $W_{2,0}^{(0)}$ qui est déjà connue.

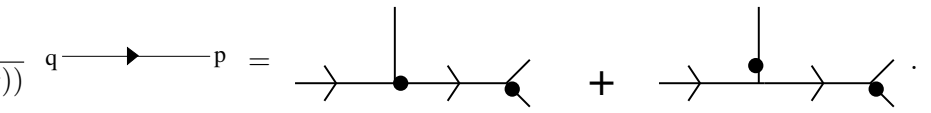
Remarque 9.1 Cette représentation diagrammatique est également pratique pour expliquer comment passer de la relation pour la fonction à un point à la règle de récurrence générale. En effet, il suffit de voir comment l'opérateur d'insertion de boucles agit sur les différents éléments de cette méthode diagrammatique.

Par définition, l'opérateur d'insertion de boucle ajoute une patte à n'importe quel objet à k pattes et g trous :

$\frac{\partial}{\partial V_1(q)}$ 

. (9-28)

Les propriétés Eq. (9-21) et Eq. (9-22) permettent quant à elles de déterminer comment l'opérateur d'insertion de boucles agit sur le vertex :

$dx(r)\,\frac{\partial}{\partial V_1(x(r))}$ 

. (9-29)

Il est alors facile de vérifier que si l'on applique $\frac{\partial}{\partial V_1}$ à l'équation Eq. (9-27) définissant $W^{(g)}_{k+1,0}$, on obtient bien l'équation donnant $W^{(g)}_{k+2,0}$.

Résultat de la réccurence.

En itérant $2g+k-2$ fois la relation de récurrence pour le calcul de $W^{(g)}_{k,0}$, on obtient une expression exacte de $W^{(g)}_{k,0}$ comme somme sur un ensemble de diagrammes trivalents à g boucles et k pattes dont le poids est donné par les règles précédentes :

Théorème 9.3 *Pour tout $k \geq 0$ et tout $g \geq 0$ tels que $2g+k-2 \geq 1$ et tout ensemble de points $\{p, p_1, \ldots, p_k\} \in \overline{\Sigma}^{k+1}$, la fonction de corrélation à $k+1$ points de genre g est donnée par :*

$$\boxed{W^{(g)}_{k+1,0}(p, \mathbf{p_K}) = \sum_{G \in \mathcal{G}^g_k(p, \mathbf{p_K})} \mathcal{P}(G)} \tag{9-30}$$

où $\mathcal{G}^g_k(p, \mathbf{p_K})$ est l'ensemble des graphes connexes trivalents définis par les contraintes :

1. ils comportent $2g+k-1$ vertex trivalents que l'on appelle **vertex** *;*

2. ils comportent un unique vertex monovalent marqué par le point p appelé **racine** *;*

3. ils comportent k vertex monovalents marqués par $p_1, p_2, \ldots, p_k$ appelés **feuilles** *du graph ;*

4. il sont constitués de $3g+2k-1$ arêtes ;

5. les arêtes peuvent être soit orientées par une flèche soit non orientées. Il y a $k+g$ arêtes non orientées ;

6. l'arête partant de la racine p est orientée par une flèche partant de p ;

7. les arêtes partant des feuilles $p_1, \dots, p_k$ ne sont pas orientées ;

8. les arêtes orientées forment un "squelette d'arbre binaire planaire couvrant[24]". L'orientation des arêtes va de la racine vers les feuilles munissant le graphe d'un ordre partiel sur les vertex ;

9. parmi les $k+g$ arêtes non orientées, k d'entre elles lient un vertex à une feuille et les g autres lient deux vertex trivalents entre eux. Deux vertex trivalents peuvent être liés entre eux seulement si ils sont comparable selon l'ordre fournit par les flèches[25] ;

10. si les enfants d'un vertex sont une arête orientée et une arête non orientée, alors l'arête orientée est l'enfant de gauche. Cette préscription ne s'applique que si l'arête non orientée lie ce vertex à l'un de ses descendants (et non à l'un de ses parents).

et le poids $\mathcal{P}(G)$ d'un graphe G est donné par les règles suivantes :
- *On marque tout vertex trivalent du graphe par un point courant r_i de $\overline{\Sigma}$ et on associe r_i à son enfant de gauche et $\overline{r}_i$ à son enfant de droite. Toute arête relie alors deux points de la surface $\overline{\Sigma}$;*
- *A une arête non orientée liant r et r', on associe le facteur $\underline{B}(r, r')$;*
- *A toute arête orientée allant de r vers r', on associe le facteur $\frac{d\underline{E}_{r'}(r)}{(y(r')-y(\overline{r}'))dx(r')}$;*
- *Suivant les flèches en sens inverse (des feuilles vers la racine), à chaque vertex r, on calcule la somme sur tous les points de branchement a_i des résidus quand $r \to a_i$: $\sum_i \operatorname{Res}_{r \to a_i}$[26].*
- *Après avoir calculé l'ensemble de ces résidus, on obtient le poids du graphe.*

Grâce à ce théorème, on a une méthode rapide, simple et aisée à se souvenir pour calculer n'importe quel terme dans le développement topologique des fonctions de corrélation simples $W_{k,0}$, c'est-à-dire les fonctions génératrices des surfaces discrétisées avec k bords sans opérateurs de bords de genre quelconque. Cette technique est simple car elle ne nécessite qu'une fonction de base et le calcul de résidus, i.e. le développement de Taylor du noyau de Bergmann au voisinage des points de branchement. Elle est également rapide car elle nécessite le calcul d'un nombre très restreint de termes et est facile à programmer pour une résolution informatique.

Remarque 9.2 Par construction les quantités ainsi définies sont bien symétrique en toutes leurs variables sauf la première. Il est cependant possible de montrer qu'elles sont en fait heureusement bien symétriques en toutes leurs variables comme attendu.

[24] Un squelette d'arbre binaire est un arbre binaire dont on a oté toutes les feuilles, i.e. un arbre dont les vertex ont pour valence 1, 2 ou 3. La condition de planarité signifie que les enfants droit (marqué par un point) et gauche (non marqué) d'un vertex ne sont pas équivalents. Enfin, le fait que l'arbre soit couvrant signifie qu'il passe par tous les vertex.

[25] C'est-à-dire si on peut aller de l'un à l'autre en suivant des arêtes orientés suivant leur orientation. Dans ce cas le vertex de départ est appelé parent et le vertex d'arrivée descendant.

[26] Notons que ceci donne un sens au poids donné aux arêtes fléchées ainsi qu'au choix d'associer $\overline{r}$ à l'un des enfants de chaque vetex. En effet, l'application $p \to \overline{p}$ n'est définie localement qu'au voisinage des points de branchement. On peut vérifier qu'ici cette application ne sera invoquée que pour des points marquant un vertex et donc proches d'un point de branchement.

Ces graphes ainsi que les poids qui leur sont associés ont d'autres propriétés peu évidentes à première vue et nous les discuterons dans le chapitre 5.

Remarque 9.3 Comment construire de manière pratique les graphes correspondant à la fonction à $k+1$ points de genre g ?

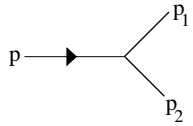
- On commence par tracer tous les arbres enracinés en p possibles composés de $2g+k-1$ arêtes et $2g+k$ vertex de valence 1, 2 ou 3 avec la contrainte que la racine soit un vertex de valence 1.
- On oriente ensuite toutes les arêtes en partant de la racine.
- On branche de toutes les manières possibles les k arêtes correspondant aux feuilles $p_1, \dots, p_k$ sur les vertex de manière à ce que leur valence ne dépasse toujours pas 3.
- On complète le graph en branchant g arêtes non orientées de manière à ce que tous les vertex aient valence 3 en interdisant aux arêtes de relier deux vertex non comparables.
- Il ne reste plus qu'à marquer de toutes les manières non équivalentes possibles les enfants droits et gauches en suivant la préscription 10.

Etudions explicitement les premiers exemples :

Exemple 9.1 *Commençons par le calcul de $W_{3,0}^{(0)}(p,p_1,p_2)$ et donc la construction des éléments de $\mathcal{G}_3^0(p,p_1,p_2)$. On représente tous les arbres enracinés à 2 vertex et 1 arête, orientés depuis la racine p :*

(9-31)

On ajoute ensuite les deux feuilles p_1 et p_2 :



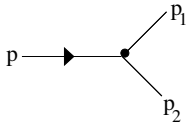
(9-32)

On marque finalement l'enfant droit et l'enfant gauche :

$$W_{3,0}^{(0)}(p,p_1,p_2) = \mathcal{P}\left(\quad\right) + \mathcal{P}\left(\quad\right). \tag{9-33}$$

Calculons le poids du premier graphe. Notons r la variable d'intégration associée à l'unique vertex trivalent de ce graphe. Les trois arêtes le composant ont alors pour poids respectifs $\underline{B}(\overline{r},p_1)$, $\underline{B}(r,p_2)$ et $\frac{d\underline{E}_r(p)}{(y(r)-y(\overline{r}))dx(r)}$. Donc

$$\mathcal{P}\left(\quad\right) = \sum_i \operatorname*{Res}_{r\to a_i} \frac{d\underline{E}_r(p)}{(y(r)-y(\overline{r}))dx(r)} \underline{B}(\overline{r},p_1)\underline{B}(r,p_2), \tag{9-34}$$



ce qui donne finalement :

$$W_{3,0}^{(0)}(p,p_1,p_2) = \sum_i \operatorname*{Res}_{r\to a_i} \frac{d\underline{E}_r(p)}{(y(r)-y(\overline{r}))dx(r)} \left[\underline{B}(\overline{r},p_1)\underline{B}(r,p_2) + \underline{B}(\overline{r},p_2)\underline{B}(r,p_1)\right]. \tag{9-35}$$

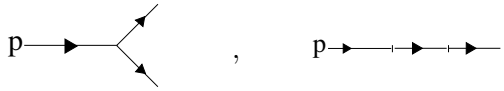
De la même manière, il est facile de construire le seul élément de $\mathcal{G}_1^1$ et d'obtenir :

$$W_1^{(1)}(p) \quad = \quad \text{p} \longrightarrow \bullet \text{◯}$$

$$= \quad \operatorname*{Res}_{q\to \mathbf{a}} \frac{\underline{dE}_q(p)}{\omega(q)} \underline{B}(q,\overline{q}).$$

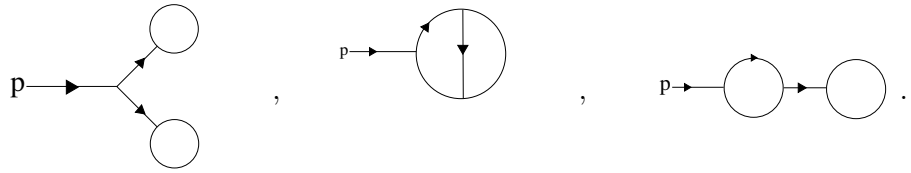
$$(9-36)$$

Etudions un dernier exemple : $W_{1,0}^{(2)}(p)$.
La première étape de la construction donne :



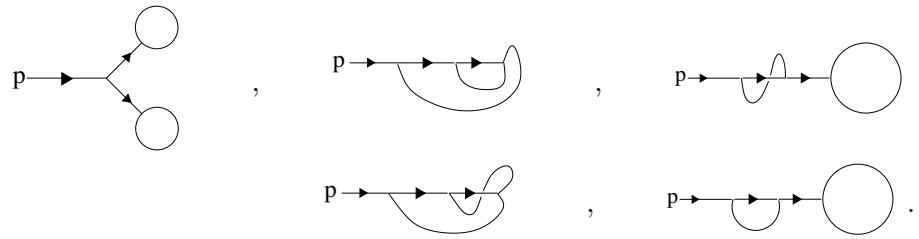
(9-37)

On complète alors les vertex par des arêtes non orientées de manière à ce qu'ils soient tous trivalents. Déjà ici, la prescription 9) interdit une possibilité.



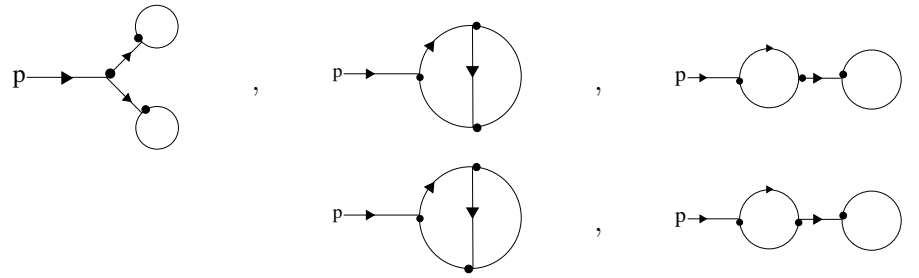
(9-38)

Il reste alors à spécifier les enfants droits et gauches en respectant la contrainte 10) :



(9-39)

Ce qui s'écrit en indiquant l'enfant droit par un point :



(9-40)

On peut remarquer que sans les contraintes 9) et 10), on aurait obtenu 13 graphes différents au lieu de 5.

Ceci nous donne la valeur de la fonction à un point de genre 2 :

$$\begin{aligned} W_1^{(2)}(p) \quad = \quad & \operatorname*{Res}_{q\to\mathbf{a}} \operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}} \operatorname*{Res}_{s\to\mathbf{a}} \frac{dE_q(p)}{\omega(q)} \frac{dE_r(q)}{\omega(r)} \frac{dE_s(\overline{q})}{\omega(s)} \underline{B}(r,\overline{r})\underline{B}(s,\overline{s}) \\ & + \operatorname*{Res}_{q\to\mathbf{a}} \operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}} \operatorname*{Res}_{s\to\mathbf{a}} \frac{d\underline{E}_q(p)}{\omega(q)} \frac{d\underline{E}_r(q)}{\omega(r)} \frac{d\underline{E}_s(\overline{r})}{\omega(s)} \underline{B}(r,\overline{q})\underline{B}(s,\overline{s}) \\ & + \operatorname*{Res}_{q\to\mathbf{a}} \operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}} \operatorname*{Res}_{s\to\mathbf{a}} \frac{d\underline{E}_q(p)}{\omega(q)} \frac{d\underline{E}_r(q)}{\omega(r)} \frac{d\underline{E}_s(r)}{\omega(s)} [\underline{B}(\overline{q},\overline{r})\underline{B}(s,\overline{s}) \\ & + \underline{B}(\overline{s},\overline{q})\underline{B}(s,\overline{r}) + \underline{B}(s,\overline{q})\underline{B}(\overline{s},\overline{r})] \end{aligned} \tag{9-41}$$

9.5 Développement topologique de l'énergie libre.

On a maintenant une expression exacte pour tous les $W_{k,0}^{(g)}$ avec $k > 0$ à partir des $W_{1,0}^{(g)}$ grâce à l'opérateur d'insertion de boucles $\frac{\partial}{\partial V_1}$. Pour obtenir les termes du développement topologique de l'énergie libre $F^{(g)}$, pouvant être vus comme les $W_{0,0}^{(g)}$, il faut être capable de passer de $W_{k+1,0}^{(g)}$ à $W_{k,0}^{(g)}$, c'est-à-dire trouver l'opérateur inverse de $\frac{\partial}{\partial V_1}$ dans la base des $W_{k,0}^{(g)}$.

Inversion de l'opérateur d'insertion de boucles.

Definition 9.1 *Soit l'opérateur H_x tel que pour toute différentielle méromorphe ϕ :*

$$\boxed{H_x.\phi := \operatorname*{Res}_{\infty_x} V_1(x)\,\phi - \operatorname*{Res}_{\infty_y} (V_2(y) - xy)\,\phi + \int_{\infty_x}^{\infty_y} \phi + \sum_i \epsilon_i \oint_{\mathcal{B}_i} \phi.} \tag{9-42}$$

Son action sur les fonctions de corrélation est décrite par

Théorème 9.4 *Pour tout $h \geq 0$ et $k \geq 0$:*

$$H_x.W_{k+1,0}^{(h)}(.,\mathbf{p_K}) = (2-k-2h)W_{k,0}^{(h)}(\mathbf{p_K}). \tag{9-43}$$

où l'on a adopté la notation :

$$W_{0,0}^{(h)} := -F^{(h)}. \tag{9-44}$$

Corollaire 9.1 *Pour tout $h \geq 0$ et $k \geq 0$ et une primitive quelconque de ydx :*

$$\phi := \int ydx, \tag{9-45}$$

on a

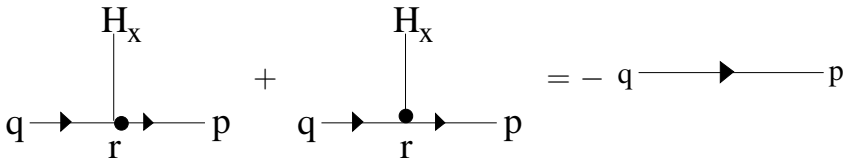
$$\operatorname*{Res}_{q\to\mathbf{a}} \phi(q) W_{k+1}^{(h)}(q,\mathbf{p_K}) = (2-2h-k)W_k^{(h)}(\mathbf{p_K}). \tag{9-46}$$

Preuve:

La démonstration complète de ce théorème est donnée dans [**III**]. Je ne vais présenter ici qu'une idée de celle-ci en évitant les détails techniques.

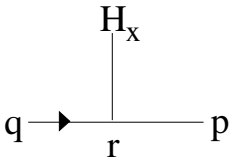
On peut tout d'abord remarquer que si les graphes composant $W_{k+1,0}^{(h)}$ ont plusieurs pattes externes, on peut choisir d'agir sur l'une des feuilles plutôt que sur la racine.

Etudions alors comment H_x agit sur les différents éléments composant les diagrammes. On peut montrer que l'on a :



(9-47)

et



$= 0.$ (9-48)

On peut alors en déduire que

$$H_x.W_{k+1,0}^{(h)}(.,\mathbf{p_K}) = H_x.\frac{\partial}{\partial V_1}W_{k,0}^{(h)}(\mathbf{p_K}) = (2-k-2h)W_{k,0}^{(h)}(\mathbf{p_K}). \tag{9-49}$$

où le facteur combinatoire $2h+k-2$ vient du fait qu'il y a $2h+k-2$ arêtes orientées composant les diagrammes de $W_{k,0}^{(h)}$ et donc autant de possibilités de faire apparaître une nouvelle patte externe par l'action de $\frac{\partial}{\partial V_1}$ que l'on fait ensuite disparaitre par H_x.

La formule pour énergie libre

$$(2-2h)\mathcal{F}^{(h)} = -H_x.W_{1,0}^{(h)} \tag{9-50}$$

est obtenue en montrant qu'elle redonne bien la fonction à un point sous l'action de $\frac{\partial}{\partial V_1}$.

Le corrolaire est obtenus par des combinaisons d'intégrations par partie et de changement de contours d'intégration. □

Expression de $\mathcal{F}^{(g)}$ pour $g > 1$.

Ce théorème nous donne donc accès à une formule explicite pour n'importe quel terme du développement topologique de l'énergie libre sauf le terme sous-dominant, c'est-à-dire la première correction en $\frac{1}{N^2}$:

$$\boxed{(2-2h)\mathcal{F}^{(h)} = -H_x.W_{1,0}^{(h)}.} \tag{9-51}$$

En effet, pour $h = 1$, le facteur combinatoire s'annule et cette équation ne nous donne aucune information quant à la forme de $\mathcal{F}^{(1)}$.

Expression de $\mathcal{F}^{(0)}$.

Pour ce qui est de $\mathcal{F}^{(0)}$, sa valeur est connue depuis longtemps (voir par exemple [17]) sous la forme :

$$\boxed{2\mathcal{F}^{(0)} = \operatorname*{Res}_{\infty_x} (V_1(x) + V_2(y) - xy)\, ydx + T \oint_{\infty_x}^{\infty_y} ydx + \sum_i \epsilon_i \oint_{\mathcal{B}_i} ydx} \tag{9-52}$$

i.e

$$2\mathcal{F}^{(0)} = H_x.ydx. \tag{9-53}$$

Cette formulation correspond à la définition :

$$W_{1,0}^{(0)} := -ydx \tag{9-54}$$

naturelle lorsque l'on considère l'ordre dominant de la définition :

$$Ydx = V_1' - W_{1,0}. \tag{9-55}$$

Expression de $\mathcal{F}^{(1)}$.

L'expression de l'énergie libre de genre 1 ne peut évidemment pas être obtenue à partir de l'action de H_x puisque le préfacteur $\frac{1}{2-2g}$ diverge dans ce cas. Elle a en effet été obtenue par une méthode bien différente dans [45] et peut être mise sous la forme :

$$\boxed{\mathcal{F}^{(1)} = \frac{-1}{2} \ln(\tau_{Bx}) - \frac{1}{24} \ln\left(\prod_i \frac{dy}{dz_i}(a_i)\right)} \tag{9-56}$$

où τ_{Bx} est la fonction τ de Bergmann associée à x définie par Eq. (8-52).

9.6 Développement topologique des fonctions de corrélation mixtes.

Dans cette partie, nous allons résoudre l'équation de boucle la plus générale donnant accès au développement topologique de n'importe quelle fonction de corrélation $H^{(h)}_{\mathbf{k_L};m;n}$. Nous allons une nouvelle fois présenter le résultat sous forme d'un système triangulaire que nous représenterons de manière diagrammatique par souci de simplicité.

Equations de boucles.

Le changement de variables

$$\begin{aligned}\delta M_1 \;:=\; & \tfrac{1}{x(p_{1,1})-M_1} \tfrac{1}{y(p_{1,1})-M_2} \tfrac{1}{x(p_{1,2})-M_1} \tfrac{1}{y(p_{1,2})-M_2} \cdots \tfrac{1}{x(p_{1,k_1})-M_1} \tfrac{1}{y(p_{1,k_1})-M_2} \\ & \textstyle\prod_{i=2}^{l} \operatorname{Tr} \left(\tfrac{1}{x(p_{i,1})-M_1} \tfrac{1}{y(p_{i,1})-M_2} \tfrac{1}{x(p_{i,2})-M_1} \tfrac{1}{y(p_{i,2})-M_2} \cdots \tfrac{1}{x(p_{i,k_i})-M_1} \tfrac{1}{y(p_{i,k_i})-M_2} \right) \\ & \textstyle\prod_{j=1}^{m} \operatorname{Tr} \tfrac{1}{x(p_j)-M_1} \prod_{s=1}^{n} \operatorname{Tr} \tfrac{1}{y(q_s)-M_2}\end{aligned} \tag{9-57}$$

donne l'équation de boucles générale :

$$
\begin{aligned}
&(Y(p_{1,1}) - y(q_{1,k_1}) - \mathrm{Pol}_{x(p_{1,1})} V_1'(x(p_{1,1})))H_{k_1,\dots,k_l;m;n}(\mathbf{S_L};\mathbf{p_M};\mathbf{q_N}) = \\
&\sum_{A\bigcup B=\{2,\dots,l\}} \sum_{I,J} H_{k_1,\mathbf{k_A};|I|;|J|}(S_1,\mathbf{S_A};\mathbf{p_I};\mathbf{q_J}) H_{\mathbf{k_B};m-|I|+1;n-|J|}(\mathbf{S_B};p_{1,1}\mathbf{p_{M/I}};\mathbf{q_N/J}) \\
&+ \sum_{A\bigcup B=\{2,\dots,l\}} \sum_{\alpha=2}^{k_1} \sum_{I,J} H_{k_1-\alpha+1,\mathbf{k_B};m-|I|;n-|J|}(\{p_{1,\alpha},q_{1,\alpha},\dots p_{1,k_1},q_{1,k_1}\},\mathbf{S_B};\mathbf{p_{M/I}};\mathbf{q_{N/J}}) \\
&\times \frac{H_{\alpha-1,\mathbf{k_A};|I|;|J|}(\{p_{1,1},q_{1,1},\dots p_{1,\alpha-1},q_{1,\alpha-1}\},\mathbf{S_A};\mathbf{p_I};\mathbf{q_J}) - H_{\alpha-1,\mathbf{k_A};|I|;|J|}(\{p_{1,\alpha},q_{1,1},\dots p_{1,\alpha-1},q_{1,\alpha-1}\},\mathbf{S_A};\mathbf{p_I};\mathbf{q_J})}{x(p_{1,\alpha})-x(p_{1,1})} \\
&\sum_{i=2}^{l}\sum_{\alpha=1}^{k_i} \frac{1}{x(p_{i,\alpha})-x(p_{1,1})} \\
&\Big[H_{k_1+k_i,\mathbf{k_{L/\{1,i\}}};m;n}(\{S_1,p_{i,\alpha},q_{i,\alpha},p_{i,\alpha+1},\dots,q_{i,k_i},p_{i,1},\dots,p_{i,\alpha-1},q_{i,\alpha-1}\},\mathbf{S_{L/\{1,i\}}};\mathbf{p_M};\mathbf{q_N}) \\
&\qquad -\mathrm{Idem}\big|_{p_{1,1}:=p_{i,\alpha}}\Big] \\
&-\sum_{i=1}^{m} \partial_{p_i} \left[\frac{H_{\mathbf{k_L};m-1;n}(\mathbf{S_L};\mathbf{p_{M/\{i\}}};\mathbf{q_N}) - H_{\mathbf{k_L};m-1;n}(\mathbf{S_L};\mathbf{p_{M/\{i\}}};\mathbf{q_N})\big|_{p_{1,1}:=p_i}}{x(p_i)-x(p_{1,1})}\right] \\
&+\frac{1}{N^2}\sum_{\alpha=2}^{k_1} \frac{1}{x(p_{1,\alpha})-x(p_{1,1})} \times \\
&\Big[H_{\alpha-1,k_1-\alpha+1,\mathbf{k_{L/\{1\}}};m;n}(S_{1|\alpha},\mathbf{S_{L/\{1\}}};\mathbf{p_M};\mathbf{q_N}) \\
&-H_{\alpha-1,k_1-\alpha+1,\mathbf{k_{L/\{1\}}};m;n}(S_{1|\alpha},\mathbf{S_{L/\{1\}}};\mathbf{p_M};\mathbf{q_N})\Big]\Big|_{p_{1,1}:=p_{1,\alpha}} \\
&+\frac{1}{N^2} H_{\mathbf{k_L};m+1;n}(\mathbf{S_K};p_{1,1},\mathbf{p_M};\mathbf{q_N}).
\end{aligned}
\tag{9-58}
$$

où $S_{1|\alpha}$ est le couple de cycles obtenu en coupant le cycle S_1 avant $p_{1,\alpha}$ et avant $p_{1,1}$:

$$S_{1,\alpha} := \{p_{1,1},q_{1,1},\dots p_{1,\alpha-1},q_{1,\alpha-1}\},\{p_{1,\alpha},q_{1,\alpha},\dots p_{1,k_1},q_{1,k_1}\}. \tag{9-59}$$

Le coefficient de $\frac{1}{N^{2g}}$ s'écrit alors :

$$
\begin{aligned}
&(y(p_{1,1}) - y(q_{1,k_1}) - Pol_{x(p_{1,1})}V_1'(x(p_{1,1})))H^{(g)}_{k_1,\dots,k_l;m;n}(S_1,S_2,\dots,S_l;p_1,\dots,p_m;q_1,\dots,q_n) = \\
&\sum_{h=1}^{g} H^{(h)}_{0;1;0}(p_{1,1})H^{(g-h)}_{k_1,\dots,k_l;m;n}(S_1,S_2,\dots,S_l;p_1,\dots,p_m;q_1,\dots,q_n) \\
&+\sum_{h}\sum_{A\bigcup B=\{2,\dots,l\}}\sum_{I,J} H^{(h)}_{k_1,\mathbf{k_A};|I|;|J|}(S_1,\mathbf{S_A};\mathbf{p_I};\mathbf{q_J})H^{(g-h)}_{\mathbf{k_B};m-|I|+1;n-|J|}(\mathbf{S_B};p_{1,1}\mathbf{p_{M/I}};\mathbf{q_N/J}) \\
&+\sum_{h}\sum_{A\bigcup B=\{2,\dots,l\}}\sum_{\alpha=2}^{k_1}\sum_{I,J} H^{(h)}_{k_1-\alpha+1,\mathbf{k_B};m-|I|;n-|J|}(\{p_{1,\alpha},q_{1,\alpha},\dots p_{1,k_1},q_{1,k_1}\},\mathbf{S_B};\mathbf{p_{M/I}};\mathbf{q_{N/J}}) \\
&\quad\times\frac{H^{(g-h)}_{\alpha-1,\mathbf{k_A};|I|;|J|}(\{p_{1,1},q_{1,1},\dots p_{1,\alpha-1},q_{1,\alpha-1}\},\mathbf{S_A};\mathbf{p_I};\mathbf{q_J})-H^{(g-h)}_{\alpha-1,\mathbf{k_A};|I|;|J|}(\{p_{1,\alpha},q_{1,1},\dots p_{1,\alpha-1},q_{1,\alpha-1}\},\mathbf{S_A};\mathbf{p_I};\mathbf{q_J})}{x(p_{1,\alpha})-x(p_{1,1})} \\
&+\sum_{i=2}^{l}\sum_{\alpha=1}^{k_i}\frac{1}{x(p_{i,\alpha})-x(p_{1,1})} \\
&\Big[H^{(g)}_{k_1+k_i,\mathbf{k_{L/\{1,i\}}};m;n}(\{S_1,p_{i,\alpha},q_{i,\alpha},p_{i,\alpha+1},\dots,q_{i,k_i},p_{i,1},\dots,p_{i,\alpha-1},q_{i,\alpha-1}\},\mathbf{S_{L/\{1,i\}}};\mathbf{p_M};\mathbf{q_N}) \\
&\qquad -\mathrm{Idem}|_{p_{1,1}:=p_{i,\alpha}}\Big] \\
&+\sum_{i=1}^{m}\partial_{p_i}\left[\frac{H_{\mathbf{k_L};m-1;n}(\mathbf{S_L};\mathbf{p_{M/\{i\}}};\mathbf{q_N})\big|_{p_{1,1}:=p_i}}{x(p_i)-x(p_{1,1})}\right] \\
&+\sum_{\alpha=2}^{k_1}\frac{1}{x(p_{1,\alpha})-x(p_{1,1})}\times \\
&\Big[H^{(g-1)}_{\alpha-1,k_1-\alpha+1,\mathbf{k_{L/\{1\}}};m;n}(S_{1|\alpha},\mathbf{S_{L/\{1\}}};\mathbf{p_M};\mathbf{q_N}) \\
&-H^{(g-1)}_{\alpha-1,k_1-\alpha+1,\mathbf{k_{L/\{1\}}};m;n}(S_{1|\alpha},\mathbf{S_{L/\{1\}}};\mathbf{p_M};\mathbf{q_N})\Big] \\
&+H^{(g-1)}_{\mathbf{k_L};m+1;n}(\mathbf{S_K};p_{1,1},\mathbf{p_M};\mathbf{q_N}).
\end{aligned}
\tag{9-60}
$$

10 Solution générale des équations de boucles.

Pour résoudre l'équation de boucle Eq. (9-60), remarquons tout d'abord que le membre de droite ne contient que des fonctions de corrélation d'ordre inférieur à $H^{(g)}_{\mathbf{k_L};m;n}$ dans le sens où elles correspondent à un genre strictement inférieur à g ou bien décrivent des surfaces avec moins de bords, i.e. elles contiennent moins de facteurs de la forme Tr (.). Nous allons donc procéder par récurrence sur le genre et le nombre de traces, plus précisément sur $2g+l+m+n$.

Considérons donc tous les termes du membre de droite de Eq. (9-60) connus et calculons les termes du membre de gauche. Par définition le dernier terme du membre de gauche est un polynôme en $x(p_{1,1})$ de degré d_1-1. Or, $H^{(g)}_{\mathbf{k_L};m;n}$ n'a pas de pôle en $p_{1,1} := \tilde{q}^j_{1,k_1}$ pour $j=1,\dots,d_1$, on peut donc évaluer cette équation en ces points pour obtenir la valeur du polynôme

$$
U^{(g)}_{k_1,\dots,k_l;m;n}(x(p_{1,1})) := Pol_{x(p_{1,1})}V_1'(x(p_{1,1}))H^{(g)}_{k_1,\dots,k_l;m;n}(\mathbf{S_L};\mathbf{p_M};\mathbf{q_N}). \tag{10-1}
$$

en ces points indépendamment de $H^{(g)}_{\mathbf{k_L};m;n}$ puisque sa contribution est annulée par son

préfacteur $y(p_{1,1}) - y(q_{1,k_1})$. La formule d'interpolation de Lagrange s'écrit alors :

$$U^{(g)}_{k_1,\dots,k_l;m;n}(x(p_{1,1})) = \sum_{j=1}^{d_1} \operatorname*{Res}_{r\to\tilde{q}^j} \frac{H^{(0)}_{1;0;0}(p_{1,1},q_{1,k_1})U^{(g)}_{k_1,\dots,k_l;m;n}(x(r))(y(p_{1,1})-y(q))dx(r)}{(x(p_{1,1})-x(r))(y(r)-y(q))H^{(0)}_{1;0;0}(r,q_{1,k_1})}, \tag{10-2}$$

pour ce polynôme de degré $d_1 - 1$ dont la valeur est connue en d_1 points.

En insérant cette solution dans Eq. (9-60), on obtient :

$$H^{(g)}_{\mathbf{k_L};m;n}(\mathbf{S_L};p_1,\dots,p_m;q_1,\dots,q_n) = \operatorname*{Res}_{r\to p_{1,1},\tilde{q}^j} \frac{H^{(0)}_{1;0;0}(p_{1,1},q_{1,k_1})\ \mathrm{RHS}|_{p_{1,1}:=r}}{(x(p_{1,1})-x(r))(y(q)-y(r))H^{(0)}_{1;0;0}(r,q_{1,k_1})} \tag{10-3}$$

où RHS est le terme de droite de Eq. (9-60).

On peut éliminer certains termes en déplaçant le contour d'intégration et en utilisant la structure de pôles des fonctions de corrélation ainsi que le caractère rationnel de certaines combinaisons de celles-ci pour finalement obtenir :

$$\begin{aligned}
&H^{(g)}_{\mathbf{k_L};m;n}(\mathbf{S_L};p_1,\dots,p_m;q_1,\dots,q_n) = \\
&\operatorname*{Res}_{r\to p_{i,\alpha},p_j,\tilde{q}^j_{1,k_1}} \frac{H^{(0)}_{1;0;0}(p_{1,1},q_{1,k_1})}{(x(p_{1,1})-x(r))(y(q_{1,k_1})-y(r))H^{(0)}_{1;0;0}(r,q_{1,k_1})} \\
&\Big\{\sum_{h=1}^{g} H^{(h)}_{0;1;0}(r)H^{(g-h)}_{k_1,\dots,k_l;m;n}(S_1(r),S_2,\dots,S_l;p_1,\dots,p_m;q_1,\dots,q_n) \\
&+\sum_{A\bigcup B=\{2,\dots,l\}}\ \sum_{h,I,J} H^{(h)}_{k_1,\mathbf{k_A};|I|;|J|}(S_1(r),\mathbf{S_A};\mathbf{p_I};\mathbf{q_J})H^{(g-h)}_{\mathbf{k_B};m-|I|+1;n-|J|}(\mathbf{S_B};r,\mathbf{p_{M/I}};\mathbf{q_N/J}) \\
&+\sum_{A\bigcup B=\{2,\dots,l\}}\ \sum_{\alpha=2}^{k_1}\sum_{h,I,J} H^{(h)}_{k_1-\alpha+1,\mathbf{k_B};m-|I|;n-|J|}(\{p_{1,\alpha},q_{1,\alpha},\dots p_{1,k_1},q_{1,k_1}\},\mathbf{S_B};\mathbf{p_{M/I}};\mathbf{q_{N/J}}) \\
&\qquad\times\tfrac{H^{(g-h)}_{\alpha-1,\mathbf{k_A};|I|;|J|}(\{r,q_{1,1},\dots p_{1,\alpha-1},q_{1,\alpha-1}\},\mathbf{S_A};\mathbf{p_I};\mathbf{q_J})}{x(p_{1,\alpha})-x(r)} \\
&+\sum_{i=2}^{l}\sum_{\alpha=1}^{k_i}\frac{1}{x(p_{i,\alpha})-x(r)}H^{(g)}_{k_1+k_i,\mathbf{k_{L/\{1,i\}}};m;n}(S_{1;i\alpha}(r),\mathbf{S_{L/\{1,i\}}};\mathbf{p_M};\mathbf{q_N}) \\
&+\sum_{\alpha=2}^{k_1}\frac{1}{x(p_{1,\alpha})-x(r)}H^{(g-1)}_{\alpha-1,k_1-\alpha+1,\mathbf{k_{L/\{1\}}};m;n}(S_{1|\alpha}(r),\mathbf{S_{L/\{1\}}};\mathbf{p_M};\mathbf{q_N}) \\
&+H^{(g-1)}_{\mathbf{k_L};m+1;n}(\mathbf{S_K}(r);r,\mathbf{p_M};\mathbf{q_N})\Big\}
\end{aligned} \tag{10-4}$$

où l'on a noté $S(r)$ lorsque l'on remplace $p_{1,1}$ par r dans S et $S_{1;i\alpha}$ pour le cycle obtenu en recollant S_1 et S_i à la position α de S_i :

$$S_{1;i\alpha} := \{S_1, p_{i,\alpha}, q_{i,\alpha}, p_{i,\alpha+1}, \dots, q_{i,k_i}, p_{i,1}, \dots, p_{i,\alpha-1}, q_{i,\alpha-1}\}. \tag{10-5}$$

Comme nous l'avons vu plus haut, ce système est triangulaire et admet une solution unique étant donnés $H^{(0)}_{1;0;0}$, $H^{(0)}_{0;1;0}$, $H^{(0)}_{0;0;2}$ et $H^{(0)}_{0;1;1}$ déjà déterminés dans la littérature de nombreuses fois (voir par exmple [43]).

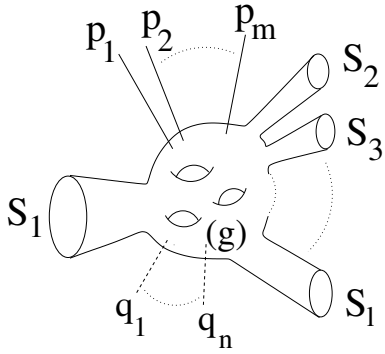
10.1 Représentation diagrammatique

Nous allons à nouveau représenter ce résultat sous forme de diagramme en utilisant la représentation introduite dans la partie 4. Cette représenation a plusieurs avantages. Tout d'abord, elle permet de mettre en avant la structure de ce résultat et de bien voir que ce système d'équations est triangulaire. Elle est également très utile pour se souvenir du résultat qui semble a priori compliqué alors que sa structure est finalement assez simple. Enfin, cette représentation appelle une interprétation combinatoire et fait le lien entre les résultat précédement obtenus sur l'ordre dominant des traces mixtes et le développement topologique des traces simples.

Blocs de base : deux nouveaux vertex

Représentons les fonctions de corrélation par des surfaces de genre g avec $l+m+n$ bords comme dans Eq. (4-1) :

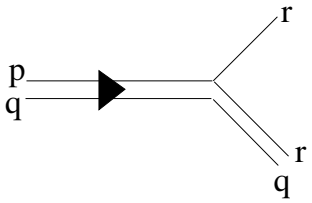
$$H^{(g)}_{\mathbf{k_L};m;n}(\mathbf{S_L};p_1,\dots,p_m;q_1,\dots,q_n) := \quad . \tag{10-6}$$



Introduisons également deux nouveaux vertex

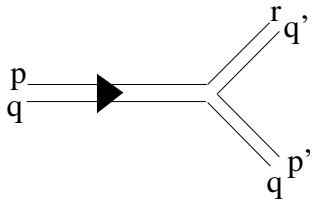
• **Vertex fin :**

$$\operatorname*{Res}_{r\to p,\tilde{q}^j} \frac{H^{(0)}_{1;0;0}(p,q)}{(x(p)-x(r))(y(q)-y(r))H^{(0)}_{1;0;0}(r,q)} := \tag{10-7}$$



• **Vertex épais :**

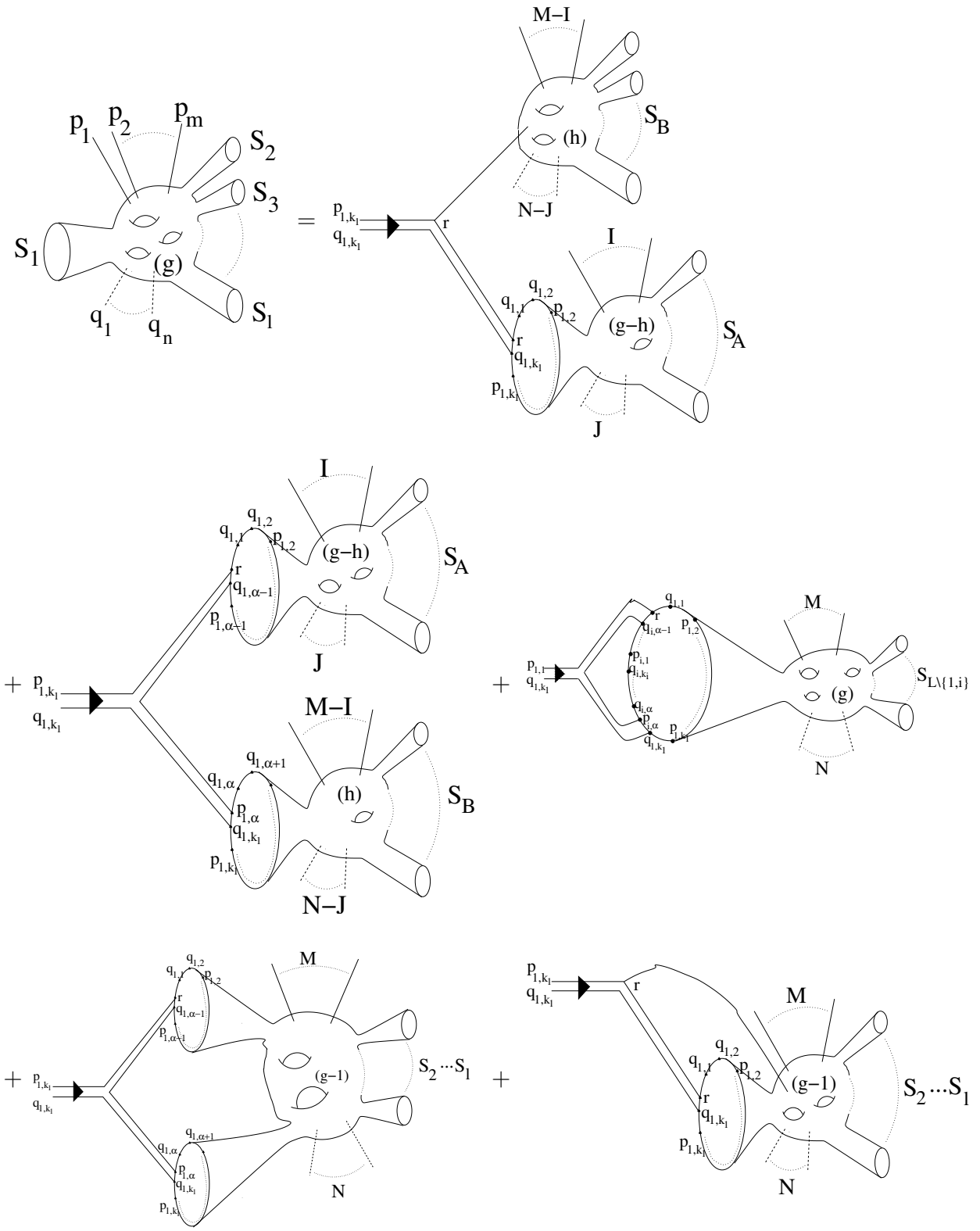
$$\operatorname*{Res}_{r\to p,\tilde{q}^j,p'} \frac{H^{(0)}_{1;0;0}(p,q)}{(x(p)-x(r))(y(q)-y(r))(x(p')-x(r))H^{(0)}_{1;0;0}(r,q)} := \tag{10-8}$$



Ces deux nouveaux vertex vont nous permettre de généraliser la représentation diagrammatique introduite précédemment. Nous aurons ainsi accès à une représentation graphique de toutes les fonctions de corrélation.

Représentation de la relation de récurrence.

La relation de récurrence Eq. (10-4) prend alors simplement la forme :



(10-9)

10.2 Retour sur le développement topologique des traces simples.

Ces relations générales doivent contenir les règles de récurrence pour les traces simples Eq. (9-23) puisque les traces simples peuvent être obtenues en étudiant le comportement des traces mixtes lorsque l'une des variables tend vers l'infini :

$$\left\langle \mathrm{Tr}\,\frac{1}{x(p)-M_1}\frac{1}{y(q)-M_2}\right\rangle \sim_{q\to\infty_y}\frac{1}{y(q)}\left\langle \mathrm{Tr}\,\frac{1}{x(p)-M_1}\right\rangle . \tag{10-10}$$

Plus précisément, les fonctions de corrélation simples et mixtes sont liées par le lemme

Lemme 10.1 *Les fonctions de corrélations simples peuvent être obtenues à partir des fonctions mixtes par :*

$$W^{(h)}_{k+1,0}(p,\mathbf{p_K}) = \operatorname*{Res}_{q\to\infty_y}\frac{H^{(h)}_{1;k;0}(p,q;\mathbf{p_K})dy(q)}{H^{(0)}_{1;0;0}(p,q)}. \tag{10-11}$$

La fonction de corrélation n'ayant que des traces simples sauf une trace mixte est donnée par la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} H^{(g)}_{1;k;0}(p,q;\mathbf{p_K}) &= \operatorname*{Res}_{r\to p,\tilde{q}^j,\mathbf{p_K}}\frac{H^{(0)}_{1;0;0}(p,q)}{(x(p)-x(r))(y(r)-y(q))H^{(0)}_{1;0;0}(r,q)}\Big(H^{(g-1)}_{1;k+1;0}(r,q;r,\mathbf{p_K}) \\ &\quad +\sum_{h,l}H^{(h)}_{0;l+1;0}(r,\mathbf{p_L})H^{(g-h)}_{1;k-l;0}(r,q;\mathbf{p_{K/L}})\Big). \end{aligned} \tag{10-12}$$

Par définition, l'application du lemme 10.1 à cette relation redonne les relations de récurrence Eq. (9-27) qui n'en sont donc qu'un cas particulier. Cette propriété signifie que le passage à la limite $y\to\infty$ consiste à "écraser" le propagateur épais associé à y pour le rendre fin comme pour les fonctions de corrélation simples.

10.3 Retour sur la limite planaire des traces mixtes.

Lorsque l'on s'intéresse seulement au calcul de l'ordre dominant des traces mixtes la relation de récurrence se referme sur les $H_k := H^{(0)}_{k;0;0}$ et devient

$$\begin{aligned} &H_k(p_1,q_1,p_2,q_2,\ldots,p_k,q_k) = \\ &= \operatorname*{Res}_{r\to\tilde{q}^j_k,p_i}\frac{H_1(p_1,q_k)}{(x(p_1)-x(r))(y(q_k)-y(r))H_1(r,q_k)}\times \\ &\qquad\times\sum_{l=2}^{k}\frac{H_{l-1}(r,q_1,p_2,q_2,\ldots,q_{l-1})H_{k-l+1}(p_l,q_l,\ldots,p_k,q_k)}{x(p_l)-x(r)}. \end{aligned} \tag{10-13}$$

Cette formule semble faire explicitement appel à la structure de la courbe spectrale classique. Cependant nous allons montrer qu'elle peut simplement être ramenée à la relation de récurrence Eq. (7-20).

En effet, on peut mettre cette équation sous la forme :

$$
\begin{aligned}
H_k &= \sum_{l=2}^{k} \operatorname*{Res}_{r\to\tilde{q}_k^j,p_l} \frac{H_1(p_1,q_k)H_{l-1}(r,q_1,\ldots,q_{l-1})H_{k-l+1}(p_l,\ldots,q_k)}{(x(p_1)-x(r))(y(q_k)-y(r))(x(p_l)-x(r))H_1(r,q_k)} \\
&= \sum_{l=2}^{k} \operatorname*{Res}_{r\to\tilde{q}_k^j,p_l} \frac{H_1(p_1,q_k)H_{l-1}(r,q_1,\ldots,q_{l-1})H_{k-l+1}(p_l,\ldots,q_k)}{(x(p_1)-x(r))(x(p_l)-x(r))H_1(r,q_k)} \\
&\qquad \times\left(\frac{1}{(y(q_k)-y(r))}-\frac{1}{(y(q_k)-y(q_1))}+\frac{1}{(y(q_k)-y(q_1))}\right) \\
&= \sum_{l=2}^{k}\Big[\operatorname*{Res}_{r\to\tilde{q}_k^j,p_l,p_1} \frac{H_1(p_1,q_k)H_{l-1}(r,q_1,\ldots,q_{l-1})H_{k-l+1}(p_l,\ldots,q_k)}{(x(p_1)-x(r))(x(p_l)-x(r))(y(q_k)-y(q_1))H_1(r,q_k)} \\
&+ \operatorname*{Res}_{r\to\tilde{q}_k^j,p_l,p_1} \frac{H_1(p_1,q_k)H_{k-l+1}(p_l,\ldots,q_k)(y(r)-y(q_1))H_{l-1}(r,q_1,\ldots,q_{l-1})}{(x(p_1)-x(r))(x(p_l)-x(r))(y(q_k)-y(q_1))(y(q_k)-y(r))H_1(r,q_k)}\Big] \\
&\qquad (10-14)
\end{aligned}
$$

Or, $(y(r)-y(q_1))H_{l-1}(r,q_1,\ldots,q_{l-1})$ et $(y(q_k)-y(r))H_1(r,q_k)$ sont des polynômes en $x(r)$. L'intégrant dans le second terme est donc une fraction rationnelle en $x(r)$. On peut facilement vérifier que le contour d'intégration entoure tous ses pôles dans le plan complexe et ce second terme est donc nul. Le premier terme ne présente quant à lui que des pôles simples et on retrouve donc

$$
H_k = \sum_{l=2}^{k} \operatorname*{Res}_{r\to p_l,p_1} \frac{H_1(p_1,q_k)H_{l-1}(r,q_1,\ldots,q_{l-1})H_{k-l+1}(p_l,\ldots,q_k)}{(x(p_1)-x(r))(x(p_l)-x(r))(y(q_k)-y(q_1))H_1(r,q_k)} \qquad (10\text{-}15)
$$

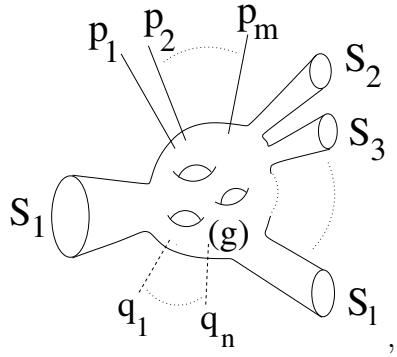
qui n'est rien d'autre que l'équation Eq. (7-31) avec les rôles de x et y inversés.

10.4 Interprétation des relations de récurrence.

Cette représentation sous forme de diagrammes des fonctions de corrélation, c'est-à-dire des fonction génératrices de surfaces discrétisées, pose la question de l'existence d'une théorie des champs sous-jacente dont les graphes présentés ici seraient les diagrammes de Feynman. En fait, une telle théorie n'existe probablement pas. En effet, le nombre de diagrammes ainsi créés croit beaucoup moins vite avec le nombre de boucles que ce que l'on devrait obtenir avec une théorie des champs standard. Ceci est lié aux préscriptions fortement non-locales dans la construction des diagrammes participant aux traces simples.

Par contre, il existe une façon de se rappeler simplement les différents termes apparaissant dans le terme de droite des relations de récurrences Eq. (10-4). Le terme de gauche $H^{(g)}_{\mathbf{k_L};m;n}(\mathbf{S_L};p_1,\ldots,p_m;q_1,\ldots,q_n)$ représentant la fonction génératrices de

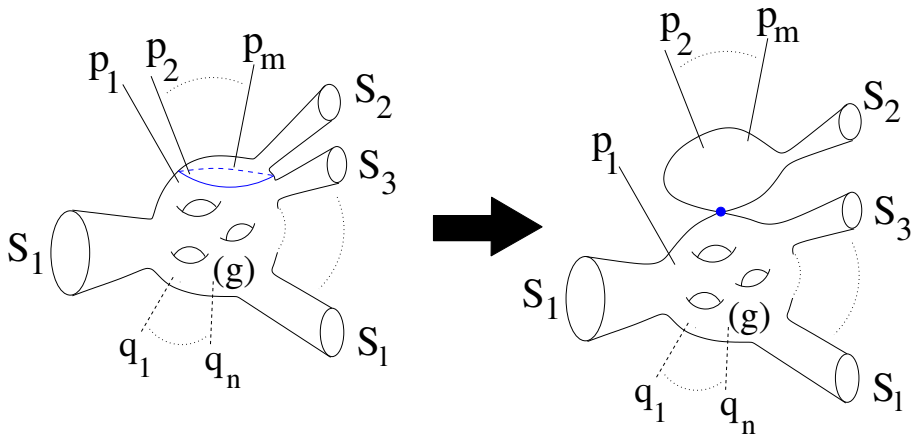
toutes les surfaces $\mathcal{S}^{(g)}_{\mathbf{k_L};m;n}$ du type

$\mathcal{S}^{(g)}_{\mathbf{k_L};m;n} =$ 

, (10-16)

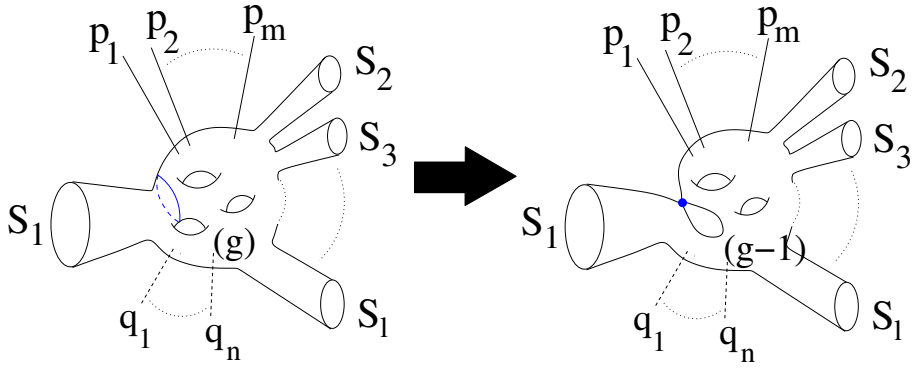
on peut le voir comme une intégrale sur l'espace des modules $\mathcal{M}^{(g)}_{\mathbf{k_L};m;n}$ de telles surfaces. Le terme de droite peut alors être vu comme les termes de bords venant de cette intégrale, c'est-à-dire la somme sur toutes les surfaces dégénérées de cet ensemble. Ils sont donc obtenus de manière pratique en "pinçant" tous les chemins non triviaux possibles sur la surface $\mathcal{S}^{(g)}_{\mathbf{k_L};m;n}$. On voit alors qu'il existe plusieurs chemins ayant des rôles non équivalents :

– On peut tout d'abord pincer un cycle non trivial sur la surface. Deux cas de figure se présentent : soit l'on découpe ainsi la surface en deux composantes :



(10-17)

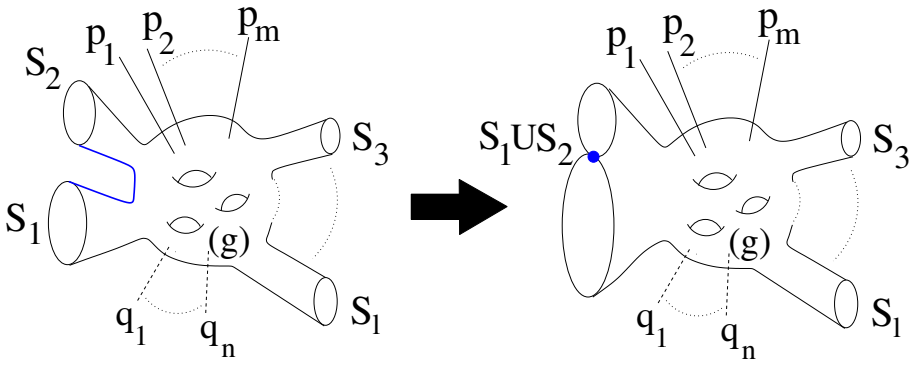
et l'on obtient le premier terme de Eq. (10-4) ; soit l'on pince juste une jambe interne :



(10-18)

et l'on obtient le cinquième terme de Eq. (10-4).

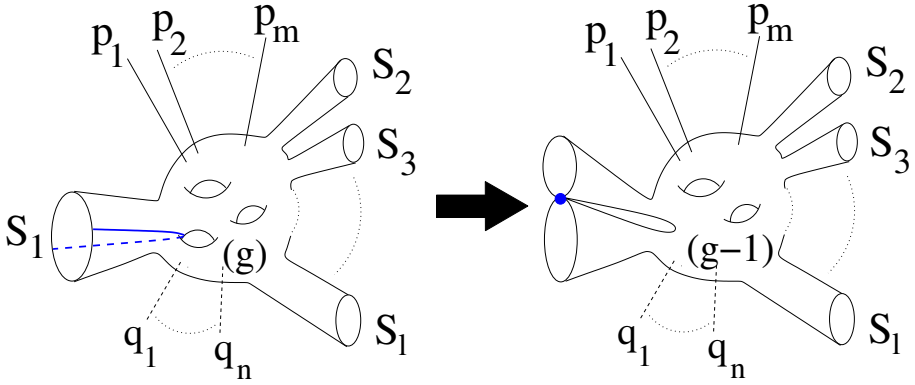
– On peut également pincer un chemin allant d'un cycle S_i a un autre cycle S_j :



(10-19)

pour obtenir le troisième terme de Eq. (10-4)[27].

– Enfin, on peut pincer un cycle S_i lui-même



(10-20)

pour obtenir les deuxièmes et quatrièmes termes de Eq. (10-4) selon si cette dégenerescence coupe la surface en deux parties ou non.

11 Conclusion du chapitre.

Dans ce chapitre, nous avons montré comment résoudre entièrement le modèle à deux matrices hermitiennes, c'est-à-dire comment calculer tous les termes du développement topologique de toutes les fonctions de corrélation du modèle. Cette méthode de résolution, utilisant avantageusement le langage de la géométrie algébrique, présente plusieurs avantages :

– Elle est systématique et montre bien que toutes les observables du modèle à deux matrices hermitiennes ne dépendent que de la courbe spectrale et plus particulièrement de ses points de branchements. Le résultat prend la même forme que l'on soit dans un cas à une ou plusieurs coupures.

– Contrairement à d'autres méthodes de résolutions comme celle développée originellement dans [8], celle-ci est facilement programmable pour une résolution automatique. En effet, une fois la courbe spectrale connue, il suffit de calculer

[27]Notons que ce cas est le seul correpondant à la règle merge des équations de boucles.

le noyau de Bergmann et effectuer des développement de Taylor au voisinage des points de branchement : il n'est pas nécessaire de reconstruire une base dans laquelle travailler à chaque étape du calcul.

– Comme on peut représenter le résultat de cette méthode sous forme de graphes, il est assez facile à retrouver avec très peu d'éléments (il suffit de connaitre la valeur des vertex et propagateurs). En effet, on peut retrouver la forme des équations de récurrence grâce à une analogie avec les surfaces générées par les fonctions de corrélation et leurs dégenerescences possibles.

Si le modèle à deux matrices formel est résolu en termes de sa courbe spectrale ce chapitre appelle également des questions. D'une part, il serait intéressant de pouvoir utiliser ces résultats pour faire le lien avec ceux obtenus dans l'étude de l'intégrale convergente en s'intéressant aux effets d'instantons interdits dans le cas formel. D'autre part, si ces règles diagrammatiques sont efficaces, leur interprétation est plus délicate et nous ne sommes pas en mesure pour le moment d'expliquer leur origine combinatoire (ou géométrique). Enfin, la simplicité du résultat en terme de la courbe spectrale classique laisse supposer que cette méthode doit pouvoir s'adapter à d'autres modèles de matrices : c'est ce que nous montrons dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Autres modèles de matrices.

Le modèle à deux matrices hermitiennes est un modèle de matrices aléatoires particulier parmi bien d'autres. Cependant, la structure algébrique présentée dans la chapitre précédent est présente dans d'autres modèles de matrices hermitiennes. Dans ce chapitre, nous étudions d'autres exemples de modèles de matrices classiques reposant sur une même structure algébrique : chacun de ces modèles a une interprétation combinatoire et peut être associé et totalement caractérisé par une courbe algébrique et des fractions de remplissage. On peut alors montrer qu'ils peuvent être résolus par la même méthode que le modèle à deux matrices.

Si ces modèles présentent les propriétés nécéssaires pour une résolution algébrique, la raison n'en est pas encore claire. Bien évidemment de tels miracles sont liés aux propriétés d'intégrabilité des modèles considérés mais le lien profond entre une intégrale de matrice donnée et l'existence d'une éventuelle structure algébrique associée n'est pour l'instant pas claire. On peut, par exemple, se demander si de tels résultats peuvent être étendus à des modèles équivalents avec des matrices appartenant à un autre groupe : par exemple à des matrices quaternioniques ou réelles symmétriques. Nous ne discuterons pas cette question ici puisque la réponse n'en est pas encore connue en général : on a seulement observé, au cas par cas, que l'on retrouvait une structure similaire pour plusieurs modèles différents.

1 Modèle à une matrice.

Le modèle à une matrice hermitienne est très proche du modèle à deux matrices[1]. Pour le définir, considérons la fonction de partition $\mathcal{Z}_{1MM}$ définie par l'intégrale de matrices formelle

$$\mathcal{Z}_{1MM} := \int dM\, e^{-\frac{N}{T} Tr\, V(M)}, \tag{1-1}$$

[1]En effet, comme nous le verrons dans la partie 1.4, ce modèle est un cas particulier du précédent.

où $V(x)$ est un potentiel dont la dérivée est une fonction rationnelle donnée par ses zéros $\{X_i\}_{i=1\dots d}$ et son dénominateur $D(x)$:

$$V'(x) = \frac{\prod_{i=1}^{d}(x - X_i)}{D(x)}, \tag{1-2}$$

et l'intégrale sur les matrices hermitiennes de taille $N \times N$ est à comprendre au sens formel de manière similaire à l'intégrale à deux matrices Eq. (1-2) du chapitre précédent.

Pour cela, choisissons une partition de N à d éléments :

$$\vec{n} = \{n_1, n_2, \dots, n_d\} \tag{1-3}$$

telle que

$$N = \sum_{i=1}^{d} n_i, \tag{1-4}$$

à laquelle on associe une matrice diagonale

$$M_{\vec{n}} = (\overbrace{X_1, \dots, X_1}^{n_1}, \dots, \overbrace{X_d, \dots, X_d}^{n_d}) \tag{1-5}$$

solution de $V'(M_{\vec{n}}) = 0$. Décomposons également le potentiel $V(M_{\vec{n}} + M)$ en mettant à part sa partie quadratique en M dans son développement de Taylor pour un petit M :

$$\text{Tr}\, V(M) = \text{Tr}\, \left(V(M_{\vec{n}}) + V_{quad}(M) + \delta V(M)\right) \tag{1-6}$$

où $V_{quad}(M)$ contient tous les termes quadratiques en M. Le développement en série de la partie non quadratique s'écrit comme une série formelle

$$\exp -\frac{N}{T}\delta V(M) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} T^{-j} N^j (\delta V(M))^j. \tag{1-7}$$

On définit alors la fonction de partition du modèle à une matrice comme la série formelle :

$$\mathcal{Z}_{1MM} := \sum_{k=0}^{\infty} T^k \sum_{j=0}^{2k} A_{k,j} \tag{1-8}$$

où les coefficients $A_{k,j}$ sont des polynômes de Laurent en N^2 définis par les valeurs moyennes par rapport à la mesure gaussienne $\exp\left(-\frac{N}{T}V_{quad}(M)\right)dM$ des termes du développement en série de Eq. (1-7) :

$$\frac{\int dM e^{-\frac{N}{T}V_{quad}(M)} \frac{1}{j!} T^{-j} N^j (\delta V(M))^j}{\int dM e^{-\frac{N}{T}V_{quad}(M)}} := \sum_{k=\frac{j}{2}}^{\frac{dj}{2}-1} A_{k,j} T^k. \tag{1-9}$$

Ce modèle, à première vue bien plus simple que le précédent, présente déjà beaucoup des ingrédients nécessaires à la résolution de ce dernier. Il a donc souvent servi de

premier test pour des nouvelles méthodes de résolutions. Ainsi, depuis l'introduction du développement topologique (et donc du modèle formel) dans [22], le modèle a été résolu par étapes successives. Il a d'abord été montré dans le cas à une coupure dans [99, 8, 25] que les observables du modèle sont plus facilement décrites en termes des points de branchements d'une courbe algébrique associée : la courbe spectrale. Cette méthode a été récemment améliorée par la technique diagrammatique développée par Eynard dans [42] permettant de calculer le développement topologique de toutes les fonctions de corrélation quel que soit le nombre de coupures. C'est cette méthode qui a servi de base à tous les travaux présentés dans cette thèse. Elle a ensuite été étendue dans [27] pour donner accès au développement topologique de l'énergie libre.

Dans cette partie, nous présentons donc les résultats obtenus dans ces deux articles [42, 27] par Chekhov et Eynard.

1.1 Interprétation combinatoire.

Tout comme le modèle à deux matrices, l'intégrale formelle $\mathcal{Z}_{1MM}$ a une interprétation combinatoire en termes de comptage de cartes, i.e. de surfaces composées de polygones. En effet, de manière analogue on peut voir cette intégrale comme le développement en diagrammes de Feynman épais autour d'un point col gaussien. Alors, $\mathcal{Z}_{1MM}$ est la fonction génératrice de toutes les surfaces fermées composées de polygones avec au plus d côtés. Comme il n'y a plus qu'une matrice, les polygones ne portent plus ici de spins.

On peut ainsi définir l'**énergie libre** comme la fonction génératrice des surfaces fermées connexes :

$$\mathcal{F}_{1MM} := -\frac{1}{N^2}\ln(\mathcal{Z}_{1MM}), \tag{1-10}$$

ainsi que les **fonctions de corrélation** à k points, $W_k(\mathbf{x_K})$, comme les fonctions génératrices des surfaces avec k bords :

$$W_k(\mathbf{x_K}) := N^{k-2}\left\langle \prod_{i=1}^{k} \operatorname{Tr}\frac{1}{x_i - M}\right\rangle_c . \tag{1-11}$$

On peut également séléctionner le genre h des surfaces générées en écrivant les développements topologiques respectifs de ces fonctions :

$$\mathcal{F}_{1MM} = \sum_{h=0}^{\infty} N^{2-2h}F^{(h)} \quad \text{et} \quad W_k(\mathbf{x_K}) = \sum_{h=0}^{\infty} N^{2-2h-k}W_k^{(h)}. \tag{1-12}$$

1.2 Courbe spectrale classique.

Equations de boucles.

Considérons l'équation de boucles associée au changement de variable $\delta M = \frac{1}{x-M}$. Elle peut s'écrire sous la forme :

$$Y(x)^2 - \frac{1}{N^2}W_2(x,x) = \frac{V'(x)^2}{4} - \frac{1}{N}\left\langle \operatorname{Tr}\frac{V'(x)-V(M)}{x-M}\right\rangle \tag{1-13}$$

où l'on a défini la fonction $Y(x) = \frac{V'(x)}{2} - \frac{1}{N}\left\langle \operatorname{Tr}\frac{1}{x-M}\right\rangle$.

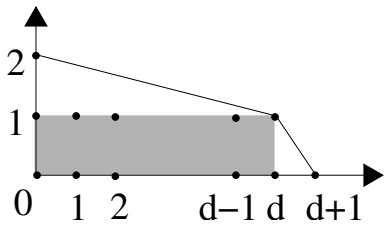


FIG. 3.1 – Le polytope de la courbe spectrale classique du modèle à une matrice.

En oubliant le terme en $\frac{1}{N^2}$, on construit la courbe spectrale classique associée au modèle à une matrice :

$$\boxed{\mathcal{E}_{1MM}(x,y) = D(x)^2(y^2(x) - \frac{V'(x)^2}{4} + P(x))} \tag{1-14}$$

où $D(x)P(x)$ est un polynôme de degré au plus $d-1$. Il est complètement fixé par le choix des fractions de remplissage $\vec{n}$ par la prescription :

$$\forall i\,,\ \frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{A}_i} Y^{(0)}(x)dx = \frac{n_i T}{N} \tag{1-15}$$

pour un choix de base de cycles canonique $\{\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i\}$ sur $\mathcal{E}_{1MM}(x,y)$ et le comportement à petit T :

$$Y^{(0)}(x) \sim \frac{V'(x)}{2} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{d}\frac{n_i}{x - X_i} + O(T^2). \tag{1-16}$$

Propriétés de la courbe spectrale.

La courbe spectrale $\mathcal{E}_{1MM}(x,y)$ est une courbe hyperelliptique puisque quadratique en l'une de ses variables. Cette simple observation a plusieurs implications directes qui permettent de simplifier son étude et la description des fonctions qu'elle engendre.

Comme dans le cas du modèle à deux matrices, $\mathcal{E}_{1MM}$ peut être vue comme une surface de Riemann compacte $\overline{\Sigma}_{1MM}$ munie de deux fonctions méromorphes x et y de $\overline{\Sigma}_{1MM}$ dans $\mathbb{C}$ telles que :

$$\forall\, p \in \overline{\Sigma}_{1MM},\ \ \mathcal{E}_{1MM}(x(p), y(p)) = 0. \tag{1-17}$$

La simple lecture du polytope de $\mathcal{E}_{1MM}$ de la figure 3.1 nous permet de voir que le genre maximal de $\mathcal{E}_{1MM}$ est $d-1$ et qu'il existe deux points à l'infini sur cette courbe comme dans le cas du modèle à deux matrices : ∞_x et ∞_y. Ces deux points sont caractérisés par le comportement de la fonction $y(x)$ en leur voisinage :

$$ydx \sim_{\infty_x} V'(x)dx \quad \text{et} \quad y \text{ a un pôle simple en } \infty_y. \tag{1-18}$$

La propriété d'hyperellipticité de la courbe spectrale en elle même signifie qu'il n'y a que deux feuillets en x. En effet, pour un x générique fixé, $\mathcal{E}_{1MM}(x,y)$ est un polynôme

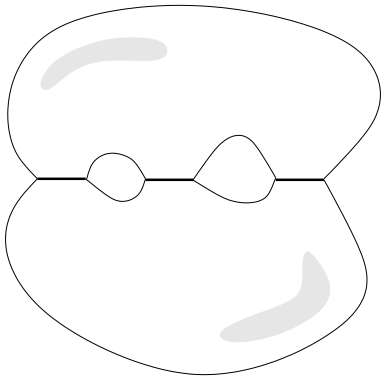


FIG. 3.2 – Exemple de courbe hyperelliptique avec 6 points de branchement. Elle forme une surface de genre 2.

de degrés 2 en y et l'équation $\mathcal{E}_{1MM}(x,y) = 0$ a deux solutions en y. Cependant, pour certaines valeurs particulières de x, cette équation peut avoir un unique zéro double en y : les deux feuillets se rejoignent donc en ces points $x(a_i)$, les **points de branchements**. Ils peuvent être caractérisés par l'annulation de la différentielle $dx(a_i) = 0$ en leur relèvement sur la surface $\overline{\Sigma}_{1MM}$ par la fonction x. La courbe $\mathcal{E}_{1MM}$ peut donc être vue comme deux copies de la sphère de Riemann collées selon des coupures joignant les différents points de branchements (voir figure 3.2).

Remarque 1.1 Le nombre de points de branchements est directement lié au genre de $\overline{\Sigma}_{1MM}$ par la formule de Riemann-Hurwitz :

$$\text{Genre} = -1 + \frac{\text{Nombre de points de branchments}}{2}. \tag{1-19}$$

Pour tout point p de $\overline{\Sigma}_{1MM}$, il existe donc un unique autre point $\overline{p}$ avec la même projection selon x :

$$\forall p \in \overline{\Sigma}_{1MM},\ \exists! \overline{p} \ \text{ tel que } \ x(p) = x(\overline{p}). \tag{1-20}$$

La forme de la courbe $y^2 = f(x)$, permet même de dire que les valeurs de y dans les deux feuillets sont opposées

$$y(p) = -y(\overline{p}), \tag{1-21}$$

le choix d'un feuillet consistant à choisir l'une des deux racine de $f(x)$. Ainsi, les points de branchements coïncident avec les zéros de la fonction y.

La notation de $\overline{p}$ pour représenter la deuxième solution de $\mathcal{E}_{1MM}(x(p), y) = 0$ n'a pas été prise au hasard puisqu'elle fait référence au point conjugué défini dans la partie 8.1 du chapitre 2. En effet, dans le cas d'une courbe hyperelliptique, puisqu'il n'existe que deux feuillets, l'application qui, à un point p associe son point conjugué $\overline{p}$, est globalement définie et elle coincide avec la définition donnée ici.

1.3 Solution des équations de boucles.

On peut montrer que la méthode utilisée pour résoudre le modèle à deux matrices fonctionne encore pour le modèle à une matrice et que les développements topologiques

des fonctions de corrélation et de l'énergie libre sont donnés par le système triangulaire de relations de récurrence :

Théorème 1.1 *Les termes du développement topologique des fonctions de corrélation sont récursivement définis par*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} W_{k+1}^{(h)}(q,p_K) & = & \sum_\alpha \operatorname{Res}_{p\to\mu_\alpha} \frac{\frac{1}{2}dE_{p,\overline{p}}(q)}{(y(p)-y(\overline{p}))\,dx(p)} \Big(W_{k+1}^{(h-1)}(p,\overline{p},p_K) + \\ & & + \sum_{j,m} W_{j+1}^{(m)}(p,p_J)\, W_{k+1-j}^{(h-m)}(\overline{p},p_{K-J}) \Big), \end{array}} \tag{1-22}$$

et ceux de l'énergie libre par

$$\forall\, h>1,\ (2h-2)F^{(h)} = H_x.W_1^{(h)}, \tag{1-23}$$

avec l'opérateur H_x défini par son action sur une forme différentielle ϕ :

$$H_x.\phi := \operatorname*{Res}_{\infty_x} V_1(x)\,\phi + \operatorname*{Res}_{\infty_y} xy\,\phi + \int_{\infty_x}^{\infty_y} \phi + \sum_i \epsilon_i \oint_{\mathcal{B}_i} \phi. \tag{1-24}$$

On peut noter une légère simplification de ces règles grâce à l'hyperellipticité de la courbe qui assure une définition globale de $\overline{p}$ satisfaisant :

$$\boxed{y(p)-y(\overline{p}) = 2y(p).} \tag{1-25}$$

Les premiers termes du développement topologique de l'énergie libre sont connus depuis longtemps (voir par exemple [25, 45, 17]) et s'écrivent :

Théorème 1.2

$$F^{(0)} = -\frac{1}{2} H_x.ydx \tag{1-26}$$

et

$$F^{(1)} = \frac{-1}{2}\ln(\tau_{Bx}) - \frac{1}{24}\ln\left(\prod_i \frac{dy}{dz_i}(a_i)\right) \tag{1-27}$$

où τ_{Bx} est la fonction τ de Bergmann associée à x définie par Eq. (8-52) du chapitre 2.

1.4 Lien avec le modèle à deux matrices.

Revenons au modèle à deux matrices défini dans le chapitre précédent en considérant le cas particulier où l'un des potentiels est quadratique, par exemple :

$$V_2(y) := y^2. \tag{1-28}$$

On peut alors réécrire l'intégrale formelle Eq. (1-2) du chapitre 2 sous la forme :

$$\mathcal{Z} \quad = \quad \int dM_1 e^{-\frac{1}{\hbar}\operatorname{Tr} V_1(M_1)} \int dM_2 e^{-\frac{1}{\hbar}\operatorname{Tr}\left[\left(M_2-\frac{M_1}{2}\right)^2-\frac{M_1^2}{4}\right]}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int dM_1 e^{-\frac{1}{\hbar}\operatorname{Tr}\left(V_1(M_1)-\frac{M_1^2}{4}\right)} \int dM e^{-\frac{1}{\hbar}\operatorname{Tr} M^2} \\
&\propto \int dM_1 e^{-\frac{1}{\hbar}\operatorname{Tr}\left(V_1(M_1)-\frac{M_1^2}{4}\right)} \\
&(1-29)
\end{aligned}
$$

où l'on est passé de la première ligne à la deuxième par un simple changement de variables dans la seconde intégrale et le coefficient de proportionnalité de la dernière ligne est simplement l'intégrale gaussienne sur M de la seconde ligne.

On voit ainsi que le modèle à une matrice est équivalent à un modèle à deux matrices dont l'un des potentiels est gaussien. Il est facile de vérifier que tous les éléments décrits dans cette partie à propos du modèle à une matrice coïncident bien avec les résultats d'un modèle à deux matrices avec potentiel quadratique. On peut par exemple vérifier que la courbe spectrale classique du modèle à deux matrice se réduit à celle du modèle à une matrice si V_2 est quadratique. Toutes les autres propriétés de cette partie peuvent en être dérivées.

2 Modèle de matrices en champ extérieur.

2.1 Définition et interprétation combinatoire.

Dans cette partie, nous abordons le modèle à une matrice en champ extérieur défini par l'intégrale formelle [109] :

$$Z_{\text{Mext}}(\hat{\Lambda}) = \int_{H_n} dM\, e^{-NTr(V(M)-M\widehat{\Lambda})} \tag{2-1}$$

où $V'(x) = \dfrac{\sum_{k=0}^{d} g_k x^k}{D(x)}$ est une fraction rationnelle de dénominateur $D(x)$, et $\hat{\Lambda}$ est une matrice extérieure de taille $N \times N$ supposée diagonale :

$$\widehat{\Lambda} = \operatorname{diag}\,(\overbrace{\widehat{\lambda}_1,\ldots,\widehat{\lambda}_1}^{n_1},\overbrace{\widehat{\lambda}_2,\ldots,\widehat{\lambda}_2}^{n_2},\ldots,\overbrace{\widehat{\lambda}_s,\ldots,\widehat{\lambda}_s}^{n_s}). \tag{2-2}$$

Ce modèle a une importance particulière du point de vue mathématique. En effet, le cas particulier où $V(x) = x^3$ et $\widehat{\Lambda} = \Lambda^2$ a été introduit par Kontsevich [72] dans un contexte tout à fait différent pour calculer les nombres d'intersections de surfaces de Riemann. Ce rapprochement entre deux problèmes à priori très éloignés est principalement due au fait que l'on peut construire une bijection entre l'ensemble des classes de Chern des surfaces de Riemann et les cartes avec des bords marqués et que l'intégrale de Kontsevich est une réalisation explicite de la fonction τ de la hierarchie intégrable de KdV [72].

De plus, ce modèle a été lié au précédent. En effet, en se basant sur une comparaison des équations de boucles, il a été montré que l'on pouvait obtenir cette intégrale comme le carré d'une double limite d'échelle d'un modèle à une matrice [83], avant de montrer qu'elle peut être obtenue également directement comme le résultat d'une autre double limite d'échelle du modèle à une matrice [10].

En fait, en considérant un modèle à une matrice en champ extérieur, on pourra avoir accès aux fonctions τ de n'importe quelle réduction de la hierarchie KP et l'on ne sera pas limité à KdV. Ceci semble indiquer que le résultat des doubles limites d'échelles du modèle à deux matrices est contenu dans l'ensemble des modèles à une matrice en champ extérieur.

Dans cette partie, nous montrons comment on peut appliquer exactement la même méthode que précédemment pour résoudre ce modèle.

2.2 Résolution du modèle.

Comme dans les modèles à une et deux matrices, on définit de manière analogue les développements topologiques de l'énergie libre et des fonctions de corrélation par :

$$\overline{w}_k(x_1,\dots,x_k) := N^{k-2}\left\langle \prod_{i=1}^{k} \operatorname{tr}\frac{1}{x_i - M}\right\rangle_c + \frac{\delta_{k,2}}{(x_1-x_2)^2}, \tag{2-3}$$

$$\overline{w}_k(\mathbf{x}_K) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{N^{2h}}\,\overline{w}_k^{(h)}(\mathbf{x}_K) \tag{2-4}$$

et

$$\mathcal{F}_{\mathrm{Mext}} := -\frac{1}{N^2}\ln Z_{\mathrm{Mext}} = \sum_{h=0}^{\infty} N^{2-2h} F_{\mathrm{Mext}}^{(h)}. \tag{2-5}$$

Il est aussi important d'introduire le polynôme minimal de $\hat{\Lambda}$:

$$S(y) := \prod_{i=1}^{s}(y - \widehat{\lambda}_i), \tag{2-6}$$

ainsi que les deux polynômes

$$u_k(x,y;\mathbf{x}_K) := N^{k-1}\left\langle \operatorname{tr}\frac{1}{x-M}\frac{S(y)-S(\Lambda)}{y-\Lambda}\prod_{r=1}^{k}\operatorname{tr}\frac{1}{x_{i_r}-M}\right\rangle_c - \delta_{k,0}S(y) \tag{2-7}$$

et

$$P_k(x,y;\mathbf{x}_K) := N^{k-1}\left\langle \operatorname{tr}\frac{V'(x)-V'(M_1)}{x-M}\frac{S(y)-S(\Lambda)}{y-\Lambda}\prod_{r=1}^{k}\operatorname{tr}\frac{1}{x_{i_r}-M}\right\rangle_c. \tag{2-8}$$

On voit que $u_k(x,y;\mathbf{x}_K)$ est un polynome en y de degré $s-1$ et que $D(x)P_k(x,y;\mathbf{x}_K)$ est un polynôme en x de degré $d-1$ et en y de degré $s-1$.

Equation de boucles maîtresse et courbe spectrale classique.

Le changement de variable

$$\delta M = \frac{1}{x-M}\frac{S(y)-S(\Lambda)}{y-\Lambda} \tag{2-9}$$

donne l'équation de boucles

$$(y+\overline{w}_1(x)-V'(x))(u_0(x,y)-S(y))+\frac{1}{N^2}u_1(x,y;x) = (V'(x)-y)S(y)-P_0(x,y). \quad (2\text{-}10)$$

On définit la **courbe spectrale** du modèle de matrice en champ extérieur par

$$\boxed{E_{\rm Mext}(x,y) := ((V'(x)-y)S(y) - P_0(x,y))\, D(x)} \quad (2\text{-}11)$$

et la fonction

$$Y(x) := V'(x) - \overline{w}_1(x). \quad (2\text{-}12)$$

L'équation de boucles Eq. (2-10) s'écrit alors

$$E_{\rm Mext}(x, Y(x)) = \frac{1}{N^2}u_1(x, Y(x); x)D(x) \quad (2\text{-}13)$$

et devient une équation algébrique à l'ordre dominant dans le développement en $\frac{1}{N^2}$:

$$E^{(0)}_{\rm Mext}(x, Y(x)) = 0 \quad (2\text{-}14)$$

définissant ainsi la **courbe spectrale classique** de ce modèle.

Propriétés de la courbe spectrale classique.

Etudions les propriétés de la courbe algébrique $\mathcal{E}_{\rm Mext}(x,y) = E^{(0)}_{\rm Mext}(x,y) = 0$.

Puisque y est solution d'une équation de degré $s+1$ à x fixé, la courbe $\mathcal{E}_{\rm Mext}(x,y)$ présente $s+1$ feuillets en x. Ceux-ci peuvent être discriminés par le comportement de $x(p)$ lorsque p approche un pôle :

- dans le feuillet physique, $y(p) \sim V'(x(p)) - 1/x + O(1/x^2(p))$ quand $x(p) \to \infty$;
- Dans les autres feuillets, $y(p) \sim \widehat{\lambda}_i + \frac{n_i}{N}\frac{1}{x(p)} + O(1/x^2(p))$.

La courbe $\mathcal{E}_{\rm Mext}$ est de genre maximal $g \leq s-1$ et on définit les fractions de remplissages comme des paramètres du modèle :

$$\epsilon_i := \frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{A}_i} y dx. \quad (2\text{-}15)$$

Equations de boucles et développement topologique.

Comme précédemmment, on préfère travailler avec des fonctions de corrélations définies comme des différentielles sur la courbe spectrale classique plutôt qu'avec des fonctions multivaluées dans le plan complexe. On définit donc :

$$W_k(\mathbf{p_K}) := \overline{w}_k(\mathbf{x}(\mathbf{p_K}))\, dx(p_1)\dots dx(p_k) \quad (2\text{-}16)$$

et

$$U_k(p, y; \mathbf{p_K}) := u_k(x(p), y; \mathbf{x}(\mathbf{p_K}))\, dx(p)dx(p_1)\dots dx(p_k) \quad (2\text{-}17)$$

de même que leur développements toplogiques :

$$W_k(\mathbf{p_K}) = \sum_{h=0}^{\infty} N^{2-2h}\, W_k^{(h)}(\mathbf{p_K}) \quad \text{and} \quad U_k(p,y;\mathbf{p_K}) = \sum_{h=0}^{\infty} N^{2-2h}\, U_k^{(h)}(p,y;\mathbf{p_K}). \tag{2-18}$$

Le développement topologique de Eq. (2-13) donne pour $h > 1$:

$$\begin{aligned} E^{(h)}(x,y) \quad &= \quad D(x)(y-Y(x))u_0^{(h)}(x,y) + D(x)w_{1,0}^{(h)}(x)u_0^{(0)}(x,y) \\ &\quad + D(x)\sum_{m=1}^{h-1} w_{1,0}^{(m)}(x)u_0^{(h-m)}(x,y) + D(x)u_1^{(h-1)}(x,y;x), \end{aligned} \tag{2-19}$$

où $E^{(h)}(x,y)$ est le développement topologique du polynôme $E_{\rm Mext}$.

Cette équation est suffisante pour démontrer le théorème :

Théorème 2.1

$$E_{\rm Mext}(x,y) = -D(x)\text{“}\left\langle \prod_{i=0}^{s}(y - V'(x(p)) + \tfrac{1}{N}\,\mathrm{Tr}\,\tfrac{1}{x(p^{(i)})-M})\right\rangle'' = D(x)\left[(V'(x)-y)S(y) - P_0(x,y)\right] \tag{2-20}$$

et

$$U_0(p,y) = -\text{“}\left\langle \prod_{i=1}^{s}(y - V'(x(p)) + \frac{1}{N}\,\mathrm{Tr}\,\frac{1}{x(p^{(i)})-M})\right\rangle'' \tag{2-21}$$

où “ $<.>''$ est défini comme dans le théorème 9.1.

Preuve:

La preuve est complètement similaire à celle du théorème 9.1 du chapitre 2. □

Comme dans les cas précédents, cette propriété nous permet de montrer que les équations de boucles sont résolues par le système triangulaire de définitions :

$$\boxed{\begin{aligned} W_{k+1}^{(h)}(q,p_K) \quad &= \quad \sum_\alpha \mathrm{Res}_{\,p\to\mu_\alpha} \frac{\frac{1}{2}dE_{p,\overline{p}}(q)}{(y(p)-y(\overline{p}))\,dx(p)} \Big(W_{k+1}^{(h-1)}(p,\overline{p},p_K) + \\ &\quad + \sum_{j,m} W_{j+1}^{(m)}(p,p_J)\, W_{k+1-j}^{(h-m)}(\overline{p},p_{K-J}) \Big), \end{aligned}} \tag{2-22}$$

avec la donnée initiale de la fonction à deux points :

$$W_2^{(0)}(p_1,p_2) = \underline{B}(p_1,p_2), \tag{2-23}$$

où les notations sont les mêmes que dans les parties précédentes pour des objets définis cette fois ci sur la courbe algébrique $\mathcal{E}_{\rm Mext}$.

On obtient également ainsi le développement topologique de l'énergie libre :

$$\boxed{\forall h > 1\,,\ F_{Mext}^{(h)} = \frac{1}{2-2h}\ \mathop{\mathrm{Res}}_{q\to\mathbf{a}} \phi(q) W_1^{(h)}(q),} \tag{2-24}$$

où $\phi(q)$ est n'importe quelle primitive de $ydx(q)$.

3 Conclusion du chapitre.

Nous avons montré dans ce chapitre comment il est possible d'appliquer la même procédure pour résoudre le modèle à une matrice et le modèle en champ extérieur que pour résoudre le modèle à deux matrices. Pour cela il suffit de **garder les mêmes résultats en changeant seulement la courbe spectrale**. On a donc obtenu une formule générale unique pour résoudre ces différents modèles de matrices formels.

Une première question se pose : à quelle catégorie de modèles de matrices peut-on appliquer la même procédure ? Pour le moment, la réponse à cette question n'est pas connue en général même si l'on connaît des modèles pour lesquels cette méthode semble fonctionner comme le modèle à plusieurs matrices couplées en chaine.

Une autre question se pose alors : il paraît évident que l'on peut généraliser cette procédure au delà des modèles de matrices. A toute courbe algébrique, on peut associer des familles infinies d'énergies libres et de fonctions de corrélation par la même méthode. Que représentent alors ces objets lorsque la courbe algébrique n'est pas issue d'un modèle de matrice ? Ont-ils des propriétés particulières ? Nous tenterons de répondre autant que possible à ces questions dans le chapitre suivant.

Chapitre 4

Invariants algébriques.

Dans les chapitres précédents, nous avons étudié différents modèles de matrices hermitiennes. Nous avons ainsi pu calculer les développements topologiques de l'énergie libre et des fonctions de corrélation respectifs de ces modèles. Etant donné un modèle, il était supposé depuis longtemps que les coefficients de ces développements pouvaient s'exprimer uniquement en termes des modules d'une courbe algébrique : la courbe spectrale classique associée au modèle considéré. Cependant il est plus surprenant que les résultats présentés précédemment montrent qu'il existe une formule unique pour résoudre ces différents modèles en changeant simplement la courbe algébrique sur laquelle travailler : c'est-à-dire que l'on est capable de définir des fonctions $F^{(g)}(\mathcal{E}_{\text{Modele}})$ qui coincident avec le développement de 't Hooft de l'énergie libre $F^{(g)}_{\text{Modele}}$ du modèle dont la courbe spectrale est $\mathcal{E}_{\text{Modele}}$.

Il est alors naturel de se poser la question d'une généralisation de cette procédure au delà des modèles de matrices. Etant donnée une courbe algébrique $\mathcal{E}$ quelconque, nous définissons dans ce chapitre des nombres $F^{(g)}(\mathcal{E})$ par la même procédure que pour le calul de l'énergie libre des modèles de matrices et étudions leurs propriétés. Tous les résultats présentés ici peuvent être trouvés dans [**IV**]avec les démonstrations associées.

Dans un premier temps, nous allons brièvement rappeler les différents paramètres définissant une courbe algébrique $\mathcal{E}$, c'est-à-dire les modules de notre problème. Nous définirons ensuite une famille de formes différentielles sur la courbe $\mathcal{E}$ en imitant la résolution des équations de boucles des modèles de matrices hermitiennes. Nous nous attacherons ensuite à l'étude des variations de ces formes différentielles sous les déformations de la courbe algébrique. Nous montrerons enfin comment la connaissance de ces lois de déformation ainsi que des propriétés d'invariance en découlant, sont un outil très puissant, en particulier pour démontrer l'équivalence de différents modèles.

1 Définition des modules de la courbe.

Considérons une **courbe algébrique quelconque** définie comme dans la partie 8.1 du chapitre 2[1] par l'équation :

$$\mathcal{E}(x,y) = 0 \tag{1-1}$$

et qui peut être vue comme une surface de Riemann compacte Σ de genre donné $\mathcal{G}$ muni de deux fonctions méromorphes x, y telles que :

$$\forall p \in \Sigma\,,\ \mathcal{E}(x(p), y(p)) = 0 \tag{1-2}$$

ainsi que d'une base symplectique de cycles $\{(\underline{\mathcal{A}}_i, \underline{\mathcal{B}}_i)\}_{i=1}^{\mathcal{G}}$.

Ceci fait, les pôles α_i de la forme différentielle ydx et les points de branchements a_i annulant $dx(a_i) = 0$ sont fixés. On peut alors décrire les modules de la courbe :

– Les fractions de remplissage :

$$\underline{\epsilon}_i := \frac{1}{2i\pi} \oint_{\underline{\mathcal{A}}_i} ydx; \tag{1-3}$$

– Les températures :

$$t_{0,i} := \operatorname*{Res}_{\alpha_i} ydx; \tag{1-4}$$

– Les autres modules aux pôles : $t_{j,i}$ définis par les polynômes

$$V_i(z_{\alpha_i}(p)) := \sum_j t_{j,i} z^j_{\alpha_i}(p) := \operatorname*{Res}_{q \to \alpha_i} y(q)dx(q) \ln\left(1 - \frac{z_{\alpha_i}}{z_{\alpha_i}(q)}\right) \tag{1-5}$$

où $\frac{1}{z_{\alpha_i}}$ est une bonne variable locale au voisinage du pôle α_i indépendante de y.

2 Déformation par κ.

En plus de ces modules propres à la courbe algébrique elle-même, on introduit un paramètre supplémentaire pemettant de changer la normalisation des fonctions de base.

Pour une **matrice symétrique quelconque** κ, on déforme les briques de bases de la construction des fonctions de corrélation du modèle à deux matrices en définissant :

Definition 2.1 *Pour toute matrice symétrique κ, on définit le noyau de Bergmann κ-déformé :*

$$B(p,q)[\kappa] := \underline{B}(p,q) + 2i\pi \sum_{i,j} du_i(p)\kappa_{ij}du_j(q) \tag{2-1}$$

ainsi que la déformée de la différentielle Abelienne de troisième espèce :

$$dS_{q_1,q_2}(p) = \int_{q_2}^{q_1} B(p,q) \tag{2-2}$$

[1]Dans tout ce chapitre, nous reprendrons les notations de la partie 8.1 du chapitre 2 sauf indication contraire. On pourra s'y reporter directement sans avoir lu au préalable le reste du chapitre ayant trait au modèle à deux matrices.

où le chemin d'intégration se situe entièrement dans le domaine fondamental, et, au voisinage d'un point de branchement,

$$dE_q(p)[\kappa] := \underline{dE}_q(p) + 2i\pi \sum_{i,j} du_i(p)\kappa_{ij}(u_j(\overline{q}) - u_j(q)). \tag{2-3}$$

On définit également un ensemble de cycles dépendant de κ mélangeant les éléments de la base $\{(\underline{\mathcal{A}}_i, \underline{\mathcal{B}}_i)\}$:

Definition 2.2 *Pour une matrice symétrique κ quelconque, on définit l'ensemble de cycles κ-déformés $\{(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i)\}_{i=1}^{\mathcal{G}}$ par :*

$$\begin{cases} \mathcal{A} := (1 + \kappa\tau)\underline{\mathcal{A}} - \kappa\underline{\mathcal{B}} \\ \mathcal{B} := \underline{\mathcal{B}} - \tau\underline{\mathcal{A}} \end{cases} \tag{2-4}$$

où l'on a utilisé une notation vectorielle pour décrire les cycles : $\mathcal{A} := (\mathcal{A}_i)$.

Ceci nous permet de définir des fractions de remplissage associées à chaque valeur de κ :

Definition 2.3 *On définit les fractions de remplissage κ déformées par :*

$$\epsilon_i := \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{A}_i} y dx. \tag{2-5}$$

Ces cycles permettent également de mieux décrire les propriétés de normalisation des différentielles κ-déformées. Ces différentielles satisfont les propriétés suivantes :

– Symétrie et normalistion du noyau de Bergmann déformé :

$$B(p,q)[\kappa] = B(q,p)[\kappa] \qquad , \qquad \oint_{\mathcal{A}_i} B[\kappa] = 0 \qquad , \qquad \oint_{q\in\mathcal{B}_i} B(p,q)[\kappa] = 2i\pi\, du_i(p). \tag{2-6}$$

– Formule de Cauchy : pour toute fonction méromorphe $f(p)$, sa différentielle est donnée par

$$df(p) = \operatorname*{Res}_{q\to p} B(p,q)f(q). \tag{2-7}$$

– $B(p,q)[0] = \underline{B}(p,q)$.

– Structure de pôles et normalisation de dS_{q_1,q_2} : C'est l'unique forme méromorphe avec seulement deux pôles simples en q_1 et q_2, telle que

$$\operatorname*{Res}_{q_1} dS_{q_1,q_2} = 1 = -\operatorname*{Res}_{q_2} dS_{q_1,q_2} \qquad , \qquad \oint_{\mathcal{A}_i} dS_{q_1,q_2} = 0 \tag{2-8}$$

et elle satisfait :

$$\oint_{\mathcal{B}_i} dS_{q_1,q_2} = 2i\pi(u_i(q_1) - u_i(q_2)). \tag{2-9}$$

– Symétrie de dS :

$$dS_{q_1,q_2} = -dS_{q_2,q_1}, \tag{2-10}$$

– Expression de dS en termes des fonctions θ :

$$dS_{q_1,q_2}(p) = d_p \ln\left(\frac{\theta_{\mathbf{z}}(\mathbf{u}(p)-\mathbf{u}(q_1))}{\theta_{\mathbf{z}}(\mathbf{u}(p)-\mathbf{u}(q_2))}\right) + 2i\pi \sum_{i,j} du_i(p)\kappa_{ij}(u_j(q_1)-u_j(q_2)). \tag{2-11}$$

– Dérivation et intégration de dS :

$$d_{q_1}\left(dS_{q_1,q_2}(p)\right) = B(q_1,p) \tag{2-12}$$

et

$$\int_{p_1}^{p_2} dS_{q_1,q_2} = \int_{q_1}^{q_2} dS_{p_1,p_2}. \tag{2-13}$$

– Formule de Cauchy : pour toute fonction méromorphe f :

$$f(p) = -\operatorname*{Res}_{q_1\to p} dS_{q_1,q_2}(p) f(q_1). \tag{2-14}$$

– L'identité bilinéaire de Riemann reste vérifiée avec ces nouveaux cycles déformés. Considérant ω_1 et ω_2 deux formes méromorphes sur la surface Σ et un point p_0 arbitraire,on définit Φ_1 sur le domaine fondamental par

$$\Phi_1(p) = \int_{p_0}^{p} \omega_1 \tag{2-15}$$

où le chemin d'intégration reste à l'intérieur du domaine fondamental.
On a alors l'**identité bilinéaire de Riemann** :

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{p\to \text{all poles}} \Phi_1(p)\omega_2(p) &= \frac{1}{2i\pi}\sum_{i=1}^{g} \oint_{\underline{\mathcal{A}}_i}\omega_1 \oint_{\underline{\mathcal{B}}_i}\omega_2 - \oint_{\underline{\mathcal{B}}_i}\omega_1 \oint_{\underline{\mathcal{A}}_i}\omega_2 \\ &= \frac{1}{2i\pi}\sum_{i=1}^{g} \oint_{\mathcal{A}_i}\omega_1 \oint_{\mathcal{B}_i}\omega_2 - \oint_{\mathcal{B}_i}\omega_1 \oint_{\mathcal{A}_i}\omega_2. \end{aligned} \tag{2-16}$$

– On peut également décomposer ydx (comme dans Eq. (8-48) du chapitre 2) sur les modules en tenant compte des κ déformations :

$$ydx = \sum_{i,j} t_{j,i} B_{j,i} + \sum_i t_{0,i} dS_{\alpha_i,o} + 2i\pi \sum_i \epsilon_i du_i \tag{2-17}$$

avec

$$B_{j,i}(p) = -\operatorname*{Res}_{q\to\alpha_i} \underline{B}(p,q) z_{\alpha_i}(q)^j. \tag{2-18}$$

3 Fonctions de corrélation et énergies libres.

3.1 Définitions.

Dans les chapitres précédents, on a vu comment, étant donnée la courbe spectrale classique $\mathcal{E}_{MM}$ d'un modèle de matrices aléatoires, on peut calculer les développements topologiques de ses fonctions de corrélations $W_{k,MM}$ et son énergie libre F_{MM} grâce à un

ensemble d'applications $F^{(g)}$ (resp. $W_k^{(g)}$) allant de l'ensemble des courbes algébriques $\mathcal{E}$ dans l'ensemble des nombres complexes (resp. des k-formes sur $\mathcal{E}$) :

$$W_{k,MM} = \sum_{g=0}^{\infty} N^{-2g} W_k^{(g)}(\mathcal{E}_{MM}) \qquad , \qquad F_{MM} := \sum_{g=0}^{\infty} N^{-2g} F^{(g)}(\mathcal{E}_{MM}). \tag{3-1}$$

Si ces applications donnent des résultats convaincants lorsqu'elles sont utilisées dans le cadre des modèles de matrices, il est intéressant de les étendre au delà de ces derniers. Dans cette partie nous allons donc étudier leurs propriétés en toute généralité. Nous allons commencer par définir ces objets **sans supposer l'existence d'un quelconque modèle de matrices sous jacent**.

Par imitation du développement topologique des fonctions de corrélation et de l'énergie libre du modèle à deux matrices, on définit ainsi :

Definition 3.1 Fonctions de corrélation :

$$W_k^{(g)} = 0 \quad \text{if } g < 0 \tag{3-2}$$

$$W_1^{(0)}(p) = 0 \tag{3-3}$$

$$W_2^{(0)}(p_1, p_2) = B(p_1, p_2) \tag{3-4}$$

et on définit par récurence sur k et g les formes multilinéaires méromorphes :

$$\boxed{\begin{array}{l} W_{k+1}^{(g)}(p, \mathbf{p_K}) = \\ = \sum_i \operatorname*{Res}_{q \to a_i} \frac{dE_q(p)}{\omega(q)} \left(\sum_{m=0}^{g} \sum_{J \subset K} W_{j+1}^{(m)}(q, \mathbf{p_J}) W_{k-j+1}^{(g-m)}(\overline{q}, \mathbf{p_{K/J}}) + W_{k+2}^{(g-1)}(q, \overline{q}, \mathbf{p_K}) \right). \end{array}} \tag{3-5}$$

Energies libres :

$$\boxed{\forall g > 1\,,\ F^{(g)} = \frac{1}{2-2g} \sum_i \operatorname*{Res}_{q \to a_i} \Phi(q) W_1^{(g)}(q)} \tag{3-6}$$

où Φ est une primitive quelconque de ydx, et pour $g = 1$

$$\boxed{F^{(1)} = -\frac{1}{2} \ln(\tau_{Bx}) \ - \frac{1}{24} \ln\left(\prod_i y'(a_i) \right) + \ln\left(\det\left(\frac{1}{\kappa} \right) \right)} \tag{3-7}$$

où

$$y'(a_i) = \frac{dy(a_i)}{dz_i(a_i)} \qquad , \qquad z_i(p) = \sqrt{x(p) - x(a_i)} \tag{3-8}$$

et τ_{Bx} fonction τ de Bergmann définie par Eq. (8-52).

L'ordre dominant est quant à lui défini par :

$$\boxed{F^{(0)} = \frac{1}{2}\sum_i \operatorname*{Res}_{\alpha_i} V_i y dx + \frac{1}{2}\sum_i t_{0,i}\mu_{\alpha_i} - \frac{1}{4i\pi}\sum_i \oint_{\mathcal{A}_i} y dx \oint_{\mathcal{B}_i} y dx} \tag{3-9}$$

où

$$\mu_{\alpha_i} = \int_{\alpha_i}^{o} (y dx - dV_i + t_{0,i}\frac{dz_{\alpha_i}}{z_{\alpha_i}}) + V_i(o) - t_{0,i}\ln(z_{\alpha_i}(o)). \tag{3-10}$$

Dans la suite, on notera :

$$\forall i = 1 \dots \mathcal{G}\ ,\ \Gamma_i := \oint_{\mathcal{B}_i} y dx. \tag{3-11}$$

On définit également les **fonctions spéciales** correspondant au cas où $\kappa \to 0$:

Definition 3.2 Fonctions de corrélation spéciales :

$$\underline{W}_k^{(g)} = 0 \quad \text{if } g < 0 \tag{3-12}$$

$$\underline{W}_1^{(0)}(p) = 0 \tag{3-13}$$

$$\underline{W}_2^{(0)}(p_1, p_2) = \underline{B}(p_1, p_2) \tag{3-14}$$

où $\underline{B}$ est le noyau de Bergmann non déformé, et on définit par récurrence sur k et g les fomes multilinéaires méromorphes :

$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{W}_{k+1}^{(g)}(p, \mathbf{p_K}) = \\ = \sum_i \operatorname*{Res}_{q\to a_i} \frac{dE_q(p)}{\omega(q)} \Big(\sum_{m=0}^{g} \sum_{J\subset K} \underline{W}_{j+1}^{(m)}(q, \mathbf{p_J}) \underline{W}_{k-j+1}^{(g-m)}(\overline{q}, \mathbf{p_{K/J}}) + \underline{W}_{k+2}^{(g-1)}(q, \overline{q}, \mathbf{p_K}) \Big).\end{array}} \tag{3-15}$$

Energies libres spéciales :

$$\boxed{\forall g > 1\ ,\ \underline{F}^{(g)} = \frac{1}{2-2g}\sum_i \operatorname*{Res}_{q\to a_i} \Phi(q)\underline{W}_1^{(g)}(q)} \tag{3-16}$$

et, pour $g = 1$,

$$\boxed{\underline{F}^{(1)} = -\frac{1}{2}\ln(\tau_{Bx}) \ -\frac{1}{24}\ln\left(\prod_i y'(a_i)\right)}. \tag{3-17}$$

L'ordre dominant est quant à lui défini par :

$$\boxed{F^{(0)} = \frac{1}{2}\sum_i \operatorname*{Res}_{\alpha_i} V_i y dx + \frac{1}{2}\sum_i t_{0,i}\mu_{\alpha_i} - \frac{1}{4i\pi}\sum_i \oint_{\underline{\mathcal{A}}_i} y dx \oint_{\underline{\mathcal{B}}_i} y dx.} \tag{3-18}$$

3.2 Représentation diagrammatique.

On reprend la représentation diagrammatique introduite dans la partie 9.4 du chapitre 2 en changeant légèrement les valeurs des propagateurs et vertex : on change partout les noyaux de Bergmann par leurs κ déformées, y compris dans les différentielles abélienes de troisième espèce.

Ainsi, les fonctions de corrélation et énergies libres sont obtenues en sommant sur le même ensemble de graphes que celui défini par le théorème 9.3 du chapitre 2 mais avec les poids définis par :

Definition 3.3 *Le poids $\mathcal{P}(G)$ d'un graphe G est donné par les règles suivantes :*
- *On marque tout vertex trivalent du graphe par un point courant r_i de Σ et on associe r_i à son enfant de gauche et $\overline{r}_i$ à son enfant de droite. Toute arête relie alors deux points de la surface Σ ;*
- *A une arête non orientée liant r et r', on associe le facteur $B(r, r')$;*
- *A toute arête orientée allant de r vers r', on associe le facteur $\frac{dE_{r'}(r)}{(y(r')-y(\overline{r}'))dx(r')}$;*
- *Suivant les flèches en sens inverse (des feuilles vers la racine), à chaque vertex r, on calcule la somme sur tous les points de branchement a_i des résidus quand $r \to a_i$: $\sum_i \operatorname*{Res}_{q \to a_i}$.*
- *Après avoir calculé l'ensemble de ces résidus, on obtient le poids du graphe.*

Cela peut simplement s'écrire :

$$\mathcal{P}\left(\mathfrak{p} \text{———} \mathfrak{q} \right) := B(p, q), \tag{3-19}$$

et

$$\mathcal{P}\left(\mathfrak{p} \longrightarrow \begin{matrix} \mathfrak{q} \\ \overline{\mathfrak{q}} \end{matrix} \right) := \sum_i \operatorname*{Res}_{q \to a_i} \frac{dE_q(p)}{\omega(q)}. \tag{3-20}$$

Les fonctions de corrélations sont alors données par

Théorème 3.1

$$\boxed{W_{k+1,0}^{(g)}(p, \mathbf{p_K}) = \sum_{G \in \mathcal{G}_k^g(p, \mathbf{p_K})} \mathcal{P}(G).} \tag{3-21}$$

3.3 Propriétés.

Ces nouveaux objets possèdent de nombreuses propriétés dont certaines sont largement inspirées des modèles de matrices. Nous présentons ici un ensemble de caractéristiques utiles à la manipulation et à la compréhension de ces objets. Toutes les démonstrations peuvent être trouvées dans [**IV**].

Tout d'abord, et ceci est presque une définition, les chapitres précédents nous permettent d'écrire le théorème :

Théorème 3.2 *Les développements topologiques des énergies libres des modèles à une matrice, deux matrices et une matrice en champ extérieur définies respectivement par*

Eq. (1-10) du chapitre 3, Eq. (1-65) du chapitre 2 et Eq. (2-5) du chapitre 3 sont données par

$$\mathcal{F}_{1MM} = \sum_{g=0}^{\infty} N^{-2g} \underline{F}^{(g)}(\mathcal{E}_{1MM}) \qquad , \qquad \mathcal{F}_{2MM} = \sum_{g=0}^{\infty} N^{-2g} \underline{F}^{(g)}(\mathcal{E}_{2MM}) \tag{3-22}$$

et

$$\mathcal{F}_{\text{Mext}} = \sum_{g=0}^{\infty} N^{-2g} \underline{F}^{(g)}(\mathcal{E}_{\text{Mext}}) \tag{3-23}$$

où $\mathcal{E}_{1MM}$, $\mathcal{E}_{2MM}$ et $\mathcal{E}_{\text{Mext}}$ sont les courbes spectrales classiques des modèles à une matrice, deux matrices et une matrice en champ extérieur respectivement, définies par Eq. (1-14) du chapitre 3, Eq. (7-13) du chapitre 2 et Eq. (2-11) du chapitre 3 et κ a été prise égale à 0.

Les fonctions de corrélation ainsi définies sont évidement symétriques en tous leurs arguments sauf le premier. Cependant, on peut voir que la fonction à trois points de genre 0 peut être mise sous une forme explicitement symétrique en tous ses arguments :

Théorème 3.3 *La 3-forme $W_3^{(0)}$ s'écrit :*

$$W_3^{(0)}(p, p_1, p_2) = \operatorname*{Res}_{q \to \mathbf{a}} \frac{B(q,p)B(q,p_1)B(q,p_2)}{dx(q)dy(q)}. \tag{3-24}$$

Cette formule est la généralisation de la formule donnée par Krichever dans le cadre des modèles de matrices [77].

Il est très important de connaître la structure de pôles des fonctions de corrélation pour pouvoir les manipuler. On peut montrer qu'elles sont données par :

Théorème 3.4 *Pour tout couple $(k, g) \neq (1, 0)$, la fonction de corrélation $W_{k+1}^{(g)}$ n'a de pôle en chacune de ses variables qu'aux points de branchements en x, a_i.*

Ce résultat qui est ici un théorème est une condition nécéssaire pour que ces formes différentielles soient bien les observables voulues dans le cadre des modèles de matrices.

De même, dans le contexte des intégrales matricielles, ces observables doivent être bien définies sur chaque feuillet et donc avoir des intégrales nulles sur les cycles $\mathcal{A}_i$. Dans ce cadre plus général, on montre que :

Théorème 3.5 *Pour tout couple (k, g), on a :*

$$\forall i = 1, \dots, \mathcal{G} \qquad \oint_{p \in \mathcal{A}_i} W_{k+1}^{(g)}(p, p_1, \dots, p_k) = 0, \tag{3-25}$$

$$\forall i = 1, \dots, \mathcal{G}, \ \forall m = 1, \dots, k \qquad \oint_{p_m \in \mathcal{A}_i} W_{k+1}^{(g)}(p, p_1, \dots, p_k) = 0. \tag{3-26}$$

Si dans le cadre particulier des modèles de matrices où, rappelons le, $\kappa = 0$, on considérait les intégrales sur les cycles $\underline{\mathcal{A}}$ de la base choisie au départ, on voit qu'il est important de considérer ici les cycles $\mathcal{A}[\kappa]$ pour $\kappa \neq 0$.

Deux propriétés également très utiles des modèles de matrices concernant la somme sur l'ensemble des feuillets sont conservées :

Théorème 3.6 *Pour tout couple (k,g), on a :*

$$\sum_i W_{k+1}^{(g)}(p^i,p_1,\dots,p_k) = \delta_{k,1}\delta_{g,0}\,\frac{dx(p)dx(p_1)}{(x(p)-x(p_1))^2} \tag{3-27}$$

et $k \geq 1$:

$$\sum_i W_{k+1}^{(g)}(p_1,p^i,p_2,\dots,p_k) = \delta_{k,1}\delta_{g,0}\,\frac{dx(p)dx(p_1)}{(x(p)-x(p_1))^2} \tag{3-28}$$

où la somme porte sur tous les feuillets, c'est-à-dire tous les points p^i tels que $x(p^i) = x(p)$.

Théorème 3.7 *Pour $(k,g) \neq (0,1)$,*

$$\begin{aligned} P_k^{(g)}(x(p),p_K) \quad = \quad & \frac{1}{dx(p)^2}\sum_i \Big[-2y(p^i)dx(p)W_{k+1}^{(g)}(p^i,p_K) \\ & + \sum_{m=0}^{g}\sum_{J\subset K} W_{j+1}^{(m)}(p^i,p_J)W_{k-j+1}^{(g-m)}(p^i,p_{K/J}) + W_{k+2}^{(g-1)}(p^i,p^i,p_K)\Big] \end{aligned} \tag{3-29}$$

est une fonction rationnelle de $x(p)$ sans pôle aux points de branchements en x.

Ces propriétés nous permettent finalement de montrer la symétrie des fonctions de corrélation en tous leurs arguments :

Théorème 3.8 *$W_k^{(g)}(p_1,\dots,p_k)$ est une fonction symétrique de toutes ses variables p_i.*

Cette propriété est encore une fois naturelle dans le cadre des modèles de matrices mais je tiens à souligner à nouveau que rien n'assurait à priori qu'elle soit vraie dans un cadre plus général.

Ceci nous permet d'affiner la déscription du comportement des fonctions de corrélations en leurs pôles :

Corollaire 3.1

$$\forall i, \qquad \operatorname*{Res}_{a_i} W_{k+1}^{(g)}(p,p_1,\dots,p_k) = 0, \tag{3-30}$$

$$\forall i, \qquad \operatorname*{Res}_{a_i} x(p)W_{k+1}^{(g)}(p,p_1,\dots,p_k) = 0, \tag{3-31}$$

$$\sum_i \operatorname*{Res}_{a_i} y(p)W_{k+1}^{(g)}(p,p_1,\dots,p_k) = 0, \tag{3-32}$$

$$\sum_i \operatorname*{Res}_{a_i} x(p)y(p)W_{k+1}^{(g)}(p,p_1,\dots,p_k) = 0. \tag{3-33}$$

3.4 Cas particuliers : genres 0 et 1.

Dans cette partie nous montrons comment ces relations de récurrences s'écrivent explicitement dans les cas où la courbe algébrique $\mathcal{E}$ est de genre 0 ou 1. En effet, dans ces cas là, on peut les exprimer dans un langage peut-être plus familier.

Genre 0.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, si l'on veut faire de la combinatoire de cartes par l'intermédiaire des modèles de matrices, il faut imposer que la courbe spectrale classique associée soit de genre 0 en imposant toutes les fractions de remplissage nulles sauf l'une d'elles. Alors, la surface de Riemann compacte Σ est équivalente à la sphère de Riemann sous les transformations conformes. Il existe donc une paramétrisation rationnelle de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire que l'on peut trouver deux fonctions rationnelles $X(p)$ et $Y(p)$ telles que :

$$\mathcal{E}(x,y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists p\in\mathbf{C}\,,\ x=X(p)\,,\ y=Y(p). \tag{3-34}$$

Dans ce cas, le noyau de Bergmann est défini comme le noyau de Bergmann de la sphère par :

$$B(p,q)=\underline{B}(p,q)=\frac{dpdq}{(p-q)^2}=d_p\,d_q\,\ln(p-q) \tag{3-35}$$

et la forme première est simplement :

$$E(p,q)=\underline{E}(p,q)=\frac{p-q}{\sqrt{dp\,dq}}. \tag{3-36}$$

Les points de branchement sont les zéros de la fonction $X(p)$:

$$X(a_i)=0. \tag{3-37}$$

Le vertex est alors donné par :

$$\operatorname*{Res}_{q\to\mathbf{a}}\frac{dp}{2(Y(q)-Y(\overline{q}))X'(q)dq}\left[\frac{1}{q-p}-\frac{1}{\overline{q}-p}\right] \tag{3-38}$$

et les différentes fonctions de corrélation sont facilement obtenues par développpement de Taylor des fonctions X et Y au voisinage des zéros de X'.

Genre 1.

Si la courbe est de genre $\mathcal{G}=1$, alors on peut la paramétrer sur le losange correspondant au domaine fondamental d'un tore (cf. fig.2.3 du chapitre 2) i.e. on peut trouver une paramétrisation elliptique de $\mathcal{E}$. Ainsi il existe deux fonctions elliptiques $X(p)$ et $Y(p)$ [104] telles que

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E}(x,y)=0 & \Leftrightarrow & \exists p\in\mathbf{C}\,,\ x=X(p)\,,\ y=Y(p) \\ X(p+1)=X(p+\tau)=X(p) & , & Y(p+1)=Y(p+\tau)=Y(p). \end{array} \tag{3-39}$$

Alors le noyau de Bergmann est quasiment la fonction de Weierstrass correspondante [104] :

$$\underline{B}(p,q)=\left(\wp(p-q,\tau)+\frac{\pi}{\mathrm{Im}\tau}\right)\,dpdq. \tag{3-40}$$

La forme première est donnée par :

$$\underline{E}(p,q)=\frac{\theta_1(p-q,\tau)}{\theta_1'(0,\tau)\sqrt{dp\,dq}}. \tag{3-41}$$

Notons que si $\kappa = \frac{-1}{2i\mathrm{Im}\tau}$, le noyau de Bergmann déformé se réduit à la fonction de Weierstrass

$$B(p,q) = \wp(p-q,\tau)\ dpdq \tag{3-42}$$

et est donc invariant modulaire. Nous verrons dans la prochaine partie que cette propriété s'étend à toutes les courbes algébriques et n'est pas un artefact du genre 1.

4 Déformations de la courbe.

Nous avons défini les fonctions de corrélation et énergies libres comme des fonctionnelles d'une courbe algébrique $\mathcal{E}$, on peut alors se poser la question de leur dépendance en les modules de cette courbe : comment varient ces quantités lorsque l'on change la paramétrisation de la courbe ou bien la courbe elle même par l'intermédiaire de ses modules ?

4.1 Invariance symplectique.

Le théorème suivant montre que sous certaines transformations de la courbe algébrique $\mathcal{E}$, les énergies libres restent inchangées.

Théorème 4.1 *Pour tout g, $F^{(g)}$ reste inchangée lorsque l'on change $\mathcal{E}$ par l'une des transformations suivantes :*

- $x \to \frac{ax+b}{cx+d}$ *et* $y \to \frac{(cx+d)^2}{ad-bc}y$ *avec* $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$;
- $x \to x$ *et* $y \to y + R(x)$ *pour toute fonction rationnelle* $R(x)$;
- $x \to -x$ *et* $y \to y$;
- $x \to y$ *et* $y \to x$.

La démonstration des trois premières propriétés découle directement des définitions par l'intermédiaire de la représentation diagrammatique présentée dans la partie 3.2. La démonstration de la dernière symétrie est beaucoup plus difficile. Dans le cadre du modèle à deux matrices, elle correspond à dire que le calcul de l'énergie libre donne le même résultat que l'on résolve les équations de boucles obtenues par variation de la matrice M_1 ou par variation de M_2, c'est-à-dire que le résultat ne dépend pas du mode de calcul. La démonstration passe ici par la généralisation des fonctions de corrélation mixtes $H^{(g)}_{1;k;l}$ dans ce cadre plus général et leur étude précise. Cette dérivation très technique peut être trouvée dans [**VI**].

Ce théorème montre que les énergies libres sont des invariants d'une certaine classe de courbes algébriques, c'est pourquoi nous nommerons dorénavant invariants algébriques les $F^{(g)}$[2]. Il nous fournit un outil très puissant pour comparer différents modèles caractérisés par une courbe algébrique. Nous montrerons par exemple son utilité dans la comparaison de plusieurs modèles de matrices dans la partie 6 de ce chapitre.

Remarque 4.1 On parle ici d'invariance symplectique parce que toutes ces transformations conservent la forme symplectique

$$|dx \wedge dy|. \tag{4-1}$$

[2]En effet, le terme énergie libre inspiré des modèles de matrices n'a plus de sens ici tant qu'aucun système physique sous-jacent n'a été identifié.

Cependant, il n'est pas clair pour le moment si $F^{(g)}$ est conservée par toute transformation laissant cette forme inchangée. Plus précisément, on ne connaît pas de caractéristaion de l'ensemble des transformations conservant les $F^{(g)}$.

4.2 Variation par rapport aux modules de la courbe.

Considérons une variation infinitésimale de la courbe $\mathcal{E} \to \mathcal{E} + \delta\mathcal{E}$, obtenue par une variation de $y(x)$ à x fixé :

$$\delta_\Omega \; y|_x \, dx = -\Omega. \tag{4-2}$$

Remarque 4.2 On peut travailler à n'importe quelle coordonnée locale z fixée plutôt que x fixé. On a alors une structure de Poisson :

$$\delta_\Omega \, y|_z \, dx - \delta_\Omega \, x|_z \, dy = -\Omega \tag{4-3}$$

où Ω est une forme différentielle quelconque dont nous restreignons les propriétés dans la suite.

Nous allons étudier comment les différentes formes différentielles et invariants introduits plus haut varient sous cette transformation. Pour ce faire, nous allons d'abord étudier comment varie l'élément de base de cette construction : le noyau de Bergmann.

Formule variationnelle de Rauch et variation du noyau de Bergmann.

Sous cette transformation, Eq. (4-3) montre que la variation de la projection des points de branchements dans le plan x est donnée par :

$$\delta_\Omega \, x(a_i) = \frac{\Omega(a_i)}{dy(a_i)}. \tag{4-4}$$

en supposant ici que $\frac{\Omega}{dy}$ n'a pas de pôle aux points de branchements.

La formule variationnelle de Rauch [96, 53] nous dit alors que la variation du noyau de Bergmann s'écrit

$$\delta_\Omega \underline{B}(p,q)|_{x(p),x(q)} = \sum_i \operatorname*{Res}_{r \to a_i} \frac{\Omega(r)\underline{B}(r,p)\underline{B}(r,q)}{dx(r)dy(r)}. \tag{4-5}$$

En intégrant sur un cycle $\underline{\mathcal{B}}$, on obtient la variation des différentielles holomorphes :

$$\delta_\Omega du(p)|_{x(p)} = \sum_i \operatorname*{Res}_{r \to a_i} \frac{\Omega(r)\underline{B}(r,p)\mathbf{du}(r)}{dx(r)dy(r)}, \tag{4-6}$$

puis, par une seconde intégration, la variation de la matrice des périodes de Riemann :

$$\delta_\Omega \tau = 2i\pi \sum_i \operatorname*{Res}_{r \to a_i} \frac{\Omega(r)\mathbf{du}(r)\mathbf{du}^t(r)}{dx(r)dy(r)}. \tag{4-7}$$

Etudions de même la variation du noyau de Bergmann κ déformé. Il y a maintenant deux termes à faire varier : d'une part le noyau de Bergmann nu et d'autre part la déformation dont la variation se décompose elle-même en la variation des différentielles holomorphes et de κ lui même. En effet, aucune contrainte ne vient s'opposer à un choix de κ dépendant de la courbe algébrique elle même. La formule variationnelle de Rauch peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned}\delta_\Omega B(p,q)|_{x(p),x(q)} &= \operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}} \frac{\Omega(r)B(r,p)B(r,q)}{dx(r)dy(r)} - 2i\pi\,\mathbf{du}^t(p)(\kappa\,\delta_\Omega\tau\,\kappa - \delta_\Omega\kappa)\mathbf{du}(q)\\ &= 2\operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}} \frac{\Omega(r)dE_r(p)B(r,q)}{\omega(r)} - 2i\pi\,\mathbf{du}^t(p)(\kappa\,\delta_\Omega\tau\,\kappa - \delta_\Omega\kappa)\mathbf{du}(q)\end{aligned} \tag{4-8}$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$\begin{aligned}\left(\delta_\Omega + \operatorname{tr}\,[\kappa\,\delta_\Omega\tau\,\kappa - \delta_\Omega\kappa]\frac{\partial}{\partial\kappa}\right)_{x(p),x(q)} B(p,q) &= \operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}} \frac{\Omega(r)B(r,p)B(r,q)}{dx(r)dy(r)}\\ &= -2\operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}} \frac{\Omega(r)dE_r(p)B(r,q)}{\omega(r)}\end{aligned} \tag{4-9}$$

En définissant la **dérivée covariante** par :

$$\boxed{D_\Omega = \delta_\Omega + \operatorname{tr}\,\left[(\kappa\,\delta_\Omega\tau\,\kappa - \delta_\Omega\kappa)\frac{\partial}{\partial\kappa}\right]} \tag{4-10}$$

on peut résumer la variation du noyau de Bergmann déformé par :

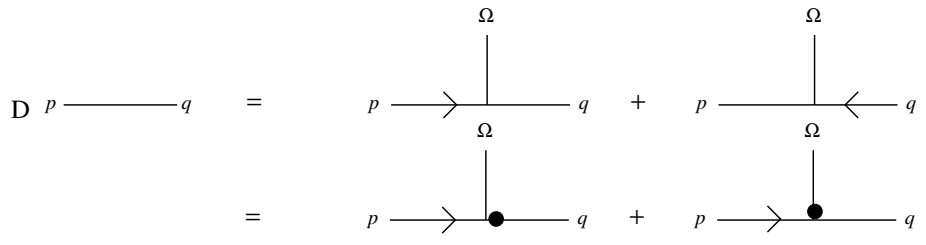
$$\begin{aligned}D_\Omega B(p,q) &= -2\operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}} \frac{\Omega(r)dE_r(p)B(r,q)}{\omega(r)}\\ &= \operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}} \frac{dE_r(p)}{\omega(r)}\left[\Omega(r)B(\overline{r},q) + \Omega(\overline{r})B(r,q)\right].\end{aligned} \tag{4-11}$$

En intégrant au voisinage d'un point de branchement a_j, on obtient également :

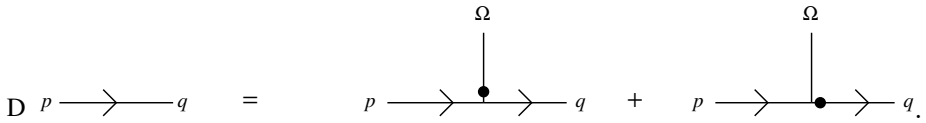
$$\begin{aligned}D_\Omega\,dE_q(p)|_{x(p),x(q)} &= -2\operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}} \frac{dE_r(p)}{\omega(r)}\,\Omega(r)dE_q(r)\\ &= \operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}} \frac{dE_r(p)}{\omega(r)}\,\left[\Omega(r)dE_q(\overline{r}) + \Omega(\overline{r})dE_q(r)\right].\end{aligned} \tag{4-12}$$

Le sens de ces deux équations peut être éclairci en utilisant la représentation diagrammatique des fonctions de corrélation. En effet, le noyau de Bergmann et dE sont les deux types d'arêtes composant les diagrammes et les deux seules quantités variant

sous l'action de δ_Ω. Les équations Eq. (4-11) et Eq. (4-12) expliquent alors comment les diagrammes changent sous la variation Ω de la courbe algébrique $\mathcal{E}$:



et

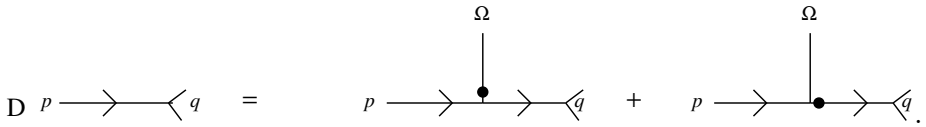


On reconstruit alors la dérivée covariante des fonctions de corrélations ainsi que des invariants algébriques par le lemme suivant :

Lemme 4.1 *Pour toute forme bilinéaire symétrique $f(q,p) = f(p,q)$:*

$$D_\Omega \left(\sum_j \operatorname*{Res}_{q \to a_j} \frac{dE_q(p)}{\omega(q)} f(q,\overline{q}) \right)_{x(p)} = 2 \sum_{i,j} \operatorname*{Res}_{r \to a_i} \operatorname*{Res}_{q \to a_j} \frac{dE_r(p)}{\omega(r)} \Omega(r) \frac{dE_q(r)}{\omega(q)} f(q,\overline{q}) + \sum_j \operatorname*{Res}_{q \to a_j} \frac{dE_q(p)}{\omega(q)} D_\Omega \left(f(q,\overline{q}) \right)_{x(q)} . \tag{4-13}$$

Ce lemme exprime en fait l'action de D_Ω sur le vertex :



Graphiquement, cela signifie simplement que la variation d'un diagramme est obtenue en ajoutant une patte Ω à toutes les arêtes possibles.

En particulier, si la variation de la courbe peut se mettre sous la forme

$$\Omega(p) = \int_{\partial\Omega} B(p,q)\Lambda(q) \tag{4-14}$$

où $\partial\Omega$ est un contour d'intégration assez éloigné des points de branchements [3], on peut décrire les variations correspondantes par :

Théorème 4.2 *Variations des fonctions de correlation et énergies libres : pour $g+k > 1$, elles sont données par :*

$$\boxed{D_\Omega W_k^{(g)}(p_1,\dots,p_k)\Big|_{x(p_i)} = \int_{\partial\Omega} W_{k+1}^{(g)}(p_1,\dots,p_k,q)\Lambda(q)} \tag{4-15}$$

[3] Ceci exclut entre autres le cas où Ω correspond à la variation d'une "arête dure", cf [44, 26, 16].

et, pour $g \geq 1$,

$$\boxed{D_\Omega F^{(g)} = -\int_{\partial\Omega} W_1^{(g)}(p)\Lambda(p).} \tag{4-16}$$

Nous allons utiliser cette description pour étudier les variations des invariants algébriques par rapport aux modules de la courbe $\mathcal{E}$. En effet, Eq. (2-17) nous permet d'identifier les Ω correspondant à la variation de chacun des modules.

Variation des fractions de remplissage.

Considérons la variation de la courbe donnée par

$$\Omega(p) = -2i\pi du_i(p) = -\oint_{\mathcal{B}_i} B(p,q). \tag{4-17}$$

i.e. $\partial\Omega = \mathcal{B}_i$ et $\Lambda = -1$. Elle correspond à :

$$\delta_\Omega \epsilon_j = \delta_{ij} \qquad , \qquad \delta_\Omega t_{0,j} = 0 \qquad , \qquad \delta_\Omega V_j = 0. \tag{4-18}$$

Cette variation est donc équivalente à faire varier uniquement l'une des fractions de remplissage $\epsilon_i = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{A}_i} ydx$:

$$D_{-2i\pi du_i} = \frac{\partial}{\partial \epsilon_i}. \tag{4-19}$$

Le théorème 4.2 implique

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon_i} W_k^{(g)}(p_1,\dots,p_k) = -\oint_{\mathcal{B}_i} W_{k+1}^{(g)}(p_1,\dots,p_k,q), \tag{4-20}$$

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon_i} F^{(g)} = \oint_{\mathcal{B}_i} W_1^{(g)}(q), \tag{4-21}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon_i} F^{(0)} = -\oint_{\mathcal{B}_j} ydx + \frac{1}{4i\pi}\left(\kappa \oint_{\mathcal{B}} ydx\right)^t \delta_{-2i\pi du_i}(\tau)\, \kappa \oint_{\mathcal{B}} ydx. \tag{4-22}$$

Variation des températures.

Soient α_i et α_j deux pôles distincts de ydx. Considérons la variation de la courbe donnée par

$$\Omega(p) = -dS_{\alpha_i,\alpha_j}(p) = \int_{\alpha_i}^{\alpha_j} B(p,q) \qquad , \qquad \text{i.e. } \partial\Omega = [\alpha_i,\alpha_j] \ , \ \Lambda = 1 \tag{4-23}$$

Elle correspond à :

$$\delta_\Omega \epsilon_j = 0 \qquad , \qquad \delta_\Omega t_{0,k} = \delta_{i,k} - \delta_{j,k} \qquad , \qquad \delta_\Omega V_k = 0. \tag{4-24}$$

Cette variation est donc équivalente à faire varier uniquement les températures $t_{0,i}$ et $t_{0,j}$:

$$D_{-dS_{\alpha_i,\alpha_j}} = \frac{\partial}{\partial t_{0,i}} - \frac{\partial}{\partial t_{0,j}}. \tag{4-25}$$

Remarque 4.3 Toutes les températures sont liées par la condition :

$$\sum_i t_{0,i} = 0. \tag{4-26}$$

On ne peut donc pas faire varier une seule d'elles indépendamment. C'est pourquoi nous avons dû en changer deux à la fois ici.

Le théorème 4.2 implique

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_{0,i}} - \frac{\partial}{\partial t_{0,j}}\right) W_k^{(g)}(p_1, \ldots, p_k) = \int_{\alpha_i}^{\alpha_j} W_{k+1}^{(g)}(p_1, \ldots, p_k, q), \tag{4-27}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_{0,i}} - \frac{\partial}{\partial t_{0,j}}\right) F^{(g)} = \int_{\alpha_j}^{\alpha_i} W_1^{(g)}(q) \tag{4-28}$$

et

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_{0,i}} - \frac{\partial}{\partial t_{0,j}}\right) F^{(o)} = \mu_{\alpha_i} - \mu_{\alpha_j} + \frac{1}{4i\pi}\left(\kappa \oint_{\mathcal{B}} ydx\right)^t \delta_{-dS_{\alpha_i,\alpha_j}}(\tau)\, \kappa \oint_{\mathcal{B}} ydx. \tag{4-29}$$

Variation des modules aux pôles

Soit α_i un pôle de ydx. Considérons la variation de la courbe donnée par

$$\Omega(p) = -B_{k,i} = \operatorname*{Res}_{\alpha_i} B(p,q) z_{\alpha_i}^k(q), \tag{4-30}$$

i.e. $\partial\Omega$ est un petit cercle entourant α_i et $\Lambda = \frac{1}{2i\pi} z_{\alpha_i}^k$. On a alors :

$$\delta_\Omega \epsilon_j = 0 \qquad , \qquad \delta_\Omega t_{0,j} = 0 \qquad , \qquad \delta_\Omega t_{k',j} = \delta_{i,j}\delta_{k,k'} \tag{4-31}$$

Cette variation équivaut donc à ne changer que le coefficient $t_{k,i}$:

$$D_{-B_{k,i}} = \frac{\partial}{\partial t_{k,i}}. \tag{4-32}$$

Le théorème 4.2 donne

$$\frac{\partial}{\partial t_{k,i}} W_k^{(g)}(p_1, \ldots, p_k) = \operatorname*{Res}_{\alpha_i} z_{\alpha_i}^k(q) W_{k+1}^{(g)}(p_1, \ldots, p_k, q), \tag{4-33}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_{k,i}} F^{(g)} = -\operatorname*{Res}_{\alpha_i} z_{\alpha_i}^k(q) W_1^{(g)}(q) \tag{4-34}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t_{k,i}} F^{(o)} = \operatorname*{Res}_{\alpha_i} ydx z_{\alpha_i}^k + \frac{1}{4i\pi}\left(\kappa \oint_{\mathcal{B}} ydx\right)^t \delta_{B_{k,i}}(\tau)\, \kappa \oint_{\mathcal{B}} ydx. \tag{4-35}$$

Il peut être intéressant de connaître non seulement les dérivées premières mais également les dérivées secondes de $F^{(0)}$ par rapport aux modules de la courbe. En effet, dans le cadre des modèles de matrices, ce sont ces dernières qui sont "universelles". Nous les avons donc regroupées dans l'appendice 4 sous la forme d'un formulaire.

Homogénéité

On peut utiliser ces formules pour montrer une propriété d'homogénéité permettant de décomposer les invariants sur la base de ces modules :

Théorème 4.3 *Pour tout $g > 1$, $F^{(g)}$ satisfait la propriété d'homogénéité :*

$$(2-2g)F^{(g)} = \sum_{i,k} t_{k,i}\frac{\partial}{\partial t_{k,i}}F^{(g)} + \sum_i t_{0,i}\frac{\partial}{t_{0,i}}F^{(g)} + \sum_i \epsilon_i \frac{\partial}{\partial \epsilon_i}F^{(g)} \tag{4-36}$$

i.e. $F^{(g)}$ est homogène de degré $2-2g$.

4.3 Opérateur d'insertion de boucle et son inverse.

On peut également utiliser ces déformations de la courbe algébrique pour reconstruire les fonctions de corrélation $W_k^{(g)}$ à partir des invariants algébriques $F^{(g)}$.

En effet, pour tout point q situé loin de tout point de branchement, considérons la variation :

$$\Omega(p) = B(p,q). \tag{4-37}$$

Elle induit une variation des fonctions de corrélation donnée par :

Théorème 4.4

$$D_B\, W_k^{(g)}(p_1,\dots,p_k) = W_{k+1}^{(g)}(p_1,\dots,p_k,q) \tag{4-38}$$

$$D_B\, F^{(g)} = -W_1^{(g)}(q) \tag{4-39}$$

et

$$D_B\, F^{(0)} = y(q)dx(q) + \frac{1}{4i\pi}\left(\kappa \oint_{\mathcal{B}} ydx\right)^t \oint_{\mathcal{B}}\oint_{\mathcal{B}} W_{3,0}\kappa \oint_{\mathcal{B}} ydx. \tag{4-40}$$

C'est à dire que l'opérateur $D_{B(.,q)}$ agit sur les fonctions de corrélation en ajoutant une patte externe au point q. C'est exactement le rôle joué par l'opérateur $\frac{\partial}{\partial V_1}$ défini par Eq. (2-4) du chapitre 2. On a donc étendu la notion d'**opérateur d'insertion de boucle** à ce cadre plus général d'invariants algébriques : il consiste simplement à ajouter un pôle double à la forme ydx en un point marqué de la courbe spectrale.

Dans le chapitre 2, nous avons introduit l'opérateur H_x pour retirer une patte aux fonctions de corrélations, i.e. inverser l'opérateur d'insertion de boucles[4].

Nous pouvons définir ici le même type d'opérateur par :

Théorème 4.5 *Pour $k \geq 1$, on a :*

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{p_{k+1}\to \mathbf{a},p_1,\dots,p_k} \Phi(p_{k+1})W_{k+1}^{(g)}(p_1,\dots,p_k,p_{k+1}) \quad &= \quad (2g+k-2)W_k^{(g)}(p_1,\dots,p_k) \\ &\quad +\delta_{g,0}\delta_{k,1}y(p_1)dx(p_1)\end{aligned} \tag{4-41}$$

où Φ est n'importe quelle primitive de ydx :

$$d\Phi = ydx. \tag{4-42}$$

Il est à noter que pour $k=0$ et $g \geq 2$, ceci définit l'énergie libre comme la fonction de corrélation à 0 points $W_0^{(g)} = F^{(g)}$.

[4]Ce n'est pas à proprement parler l'inverse de $\frac{\partial}{\partial V_1}$ puisque cette propriété n'est valable que dans l'espace des fonctions de corrélations et qu'il apparaît un facteur dépendant de la fonction considérée.

4.4 Transformations modulaire.

Nous allons maintenant étudier comment les diffèrentes fonctions de corrélation dépendent du choix d'une base de cycles $(\underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}})$.

Considérons une transformation modulaire quelconque des cycles :

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathcal{A}} \\ \underline{\mathcal{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{\mathcal{A}\mathcal{A}'} & \delta_{\mathcal{A}\mathcal{B}'} \\ \delta_{\mathcal{B}\mathcal{A}'} & \delta_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\mathcal{A}}' \\ \underline{\mathcal{B}}' \end{pmatrix} \qquad , \qquad \begin{pmatrix} \underline{\mathcal{A}}' \\ \underline{\mathcal{B}}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{\mathcal{A}'\mathcal{A}} & \delta_{\mathcal{A}'\mathcal{B}} \\ \delta_{\mathcal{B}'\mathcal{A}} & \delta_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\mathcal{A}} \\ \underline{\mathcal{B}} \end{pmatrix} \tag{4-43}$$

où $\delta_{\mathcal{A}'\mathcal{A}} = \delta^t_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$, $\delta_{\mathcal{A}'\mathcal{B}} = -\delta^t_{\mathcal{A}\mathcal{B}'}$, $\delta_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \delta^t_{\mathcal{A}\mathcal{A}'}$, $\delta_{\mathcal{B}'\mathcal{A}} = -\delta^t_{\mathcal{B}\mathcal{A}'}$ et les matrices $\delta_{\mathcal{A}\mathcal{A}'}$, $\delta_{\mathcal{A}\mathcal{B}'}$, $\delta_{\mathcal{B}\mathcal{A}'}$ et $\delta_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ ont des coefficients entiers qui satisfont $\delta_{\mathcal{A}\mathcal{A}'}\delta^t_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} - \delta_{\mathcal{B}\mathcal{A}'}\delta^t_{\mathcal{A}\mathcal{B}'} = Id$.

Sous ce changement de base de cycles d'homologie, les différentiels holomorphes et la matrice des périodes de Riemann sont changées suivant

$$\mathbf{du}' = \mathcal{J}\mathbf{du} \qquad , \qquad \mathbf{du} = \mathcal{J}^{-1}\mathbf{du}' \tag{4-44}$$

où

$$\mathcal{J} = (\delta^t_{\mathcal{A}\mathcal{A}'} + \tau'\delta^t_{\mathcal{A}\mathcal{B}'}) = (\delta_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} - \tau\delta_{\mathcal{A}\mathcal{B}'})^{-1} \tag{4-45}$$

et

$$\tau' = (\delta_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} - \tau\delta_{\mathcal{A}\mathcal{B}'})^{-1}(-\delta_{\mathcal{B}\mathcal{A}'} + \tau\delta_{\mathcal{A}\mathcal{A}'}) \qquad , \qquad \tau = (\delta^t_{\mathcal{A}\mathcal{A}'} + \tau'\delta^t_{\mathcal{A}\mathcal{B}'})^{-1}\,(\delta^t_{\mathcal{B}\mathcal{A}'} + \tau'\delta^t_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}). \tag{4-46}$$

Nous commençons une nouvelle fois par étudier les variations induites sur les blocs de bases. Ainsi le noyau de Bergmann est changé en :

$$\underline{B}' = \underline{B} + 2i\pi\,\mathbf{du}^t\widehat{\kappa}\mathbf{du}. \tag{4-47}$$

où l'on a utilisé la matrice symétrique de taille $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$:

$$\widehat{\kappa} = \widehat{\kappa}^t = (\delta_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}\delta^{-1}_{\mathcal{A}\mathcal{B}'} - \tau)^{-1} = \delta_{\mathcal{A}\mathcal{B}'}\mathcal{J}. \tag{4-48}$$

Le noyau de Bergmann κ-déformé change lui suivant :

$$\begin{aligned} B'(p,q) &= \underline{B}(p,q) + 2i\pi\left[\mathbf{du}'^t(p)\kappa\mathbf{du}'(q) + \mathbf{du}^t(p)\widehat{\kappa}\mathbf{du}(q)\right] \\ &= \underline{B}(p,q) + 2i\pi\mathbf{du}^t(p)\left(\widehat{\kappa} + \mathcal{J}^t\kappa\mathcal{J}\right)\mathbf{du}(q). \end{aligned} \tag{4-49}$$

En d'autres termes, une transformation modulaire est équivalente à un changement du paramètre κ par $\kappa \to \widehat{\kappa} + \mathcal{J}^t\kappa\mathcal{J}$ dans la définition de la déformation du noyau de Bergmann $B(p,q)$. Ceci nous permet de connaître les variations modulaires des énergies libres :

Théorème 4.6 *Pour $g \geq 2$ la transformation modulaire de l'invariant $F^{(g)}$ consiste à changer κ en $\widehat{\kappa} + \mathcal{J}^t\kappa\mathcal{J}$ dans les définitions des noyaux de Bergmann et différentielles Abeliennes déformés.*

Pour $g = 1$, $F^{(1)}$ est changée en :

$$F^{(1)'} = F^{(1)} - \frac{1}{2}\ln(\delta_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} - \tau\delta_{\mathcal{A}\mathcal{B}'}). \tag{4-50}$$

Remarque 4.4 La transformation de $F^{(0)}$ sous ce changement de base de cycles d'homologie est bien plus compliquée puisque le résultat final dépend explicitement de la position des pôles de ydx dans le domaine fondamental et donc de tous les paramètres de la transformation modulaire.

Comme les transformations modulaires des énergies libres dépendent directement de κ par l'application :

$$\kappa \to \widehat{\kappa} + \mathcal{J}^t \kappa \mathcal{J}, \tag{4-51}$$

on peut se demander si cette application a un point fixe, i.e. si il existe un choix de κ pour lequel les $F^{(g)}$ sont des invariants modulaires. La réponse est donnée par le théorème suivant :

Théorème 4.7 *Pour le choix* $\kappa = \frac{i}{2\,\mathrm{Im}\tau}$, *les* $F^{(g)}[\kappa]$ *sont des* **invariants modulaires**.

En effet, pour ce choix de κ, le noyau de Bergmann déformé est le noyau de Schiffer dont l'invariance modulaire est connue [14]. Comme la seule dépendance modulaire des $F^{(g)}$ se trouve dans la déformation du noyau de Bergmann, on obtient simplement le résultat.

Nous verrons dans le chapitre suivant que cette valeur de κ permet de faire le lien avec les fonctions de partition de théorie des cordes topologiques et nous reviendrons donc sur ce cas particulier dans la partie correspondante.

4.5 Variation par rapport à κ.

Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, la matrice κ peut être utilisée pour décrire les variations modulaires des énergies libres. On peut ainsi voir les variations de κ comme des transformations modulaires infinitésimales. Nous allons donc calculer la dépendance en κ des fonctions de corrélation et énergies libres.

Tout d'abord, en comptant le nombre d'arêtes dans leur représentation diagrammatique, il est facile de voir que $W_k^{(g)}$ est un polynôme en κ de degré $3g+2k-3$ tandis que $F^{(g)}$ est un polynôme de degré $3g-3$ pour $g>1$.

Leurs dérivées par rapport aux éléments de κ sont quant à elles données par :

Théorème 4.8

$$\boxed{\begin{array}{rcl} 2i\pi \frac{\partial}{\partial \kappa_{ij}} W_k^{(g)}(\mathbf{p_K}) & = & \frac{1}{2} \oint_{r\in\mathcal{B}_j} \oint_{s\in\mathcal{B}_i} W_{k+2}^{(g-1)}(\mathbf{p_K}, r, s) \\ & & +\frac{1}{2} \sum_h \sum_{L\subset K} \oint_{r\in\mathcal{B}_i} W_{|L|+1}^{(h)}(\mathbf{p_L}, r) \oint_{s\in\mathcal{B}_j} W_{k-|L|+1}^{(g-h)}(\mathbf{p_{K/L}}, s) \end{array}} \tag{4-52}$$

et, en particulier pour $g \geq 2$ *:*

$$\boxed{-2i\pi \frac{\partial}{\partial \kappa_{ij}} F^{(g)} = \frac{1}{2} \oint_{r\in\mathcal{B}_j} \oint_{s\in\mathcal{B}_i} W_2^{(g-1)}(r,s) + \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{g-1} \oint_{r\in\mathcal{B}_i} W_1^{(h)}(r) \oint_{s\in\mathcal{B}_j} W_1^{(g-h)}(s)} \tag{4-53}$$

alors que pour $g = 1$, on a

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \kappa_{ij}} F^{(1)} = \left(\kappa^{-1}\right)_{ij}.} \tag{4-54}$$

On peut noter une forte similitude entre ces équations et les équations d'anomalie holomorphe de la théorie de Kodaira–Spencer [1, 2, 15][**V**]. En fait, nous montrerons dans le chapitre suivant qu'elles coincident effectivement pour la valeur de κ rendant les énergies libres invariantes modulaires.

5 Limite singulière.

Nous allons étudier dans cette partie comment les objets introduits jusqu'ici se comportent lorsque la courbe $\mathcal{E}$ devient singulière.

Pour ce faire, considérons une famille de courbes algébriques paramétrée par une variable t permettant d'approcher une singularité :

$$\mathcal{E}(x, y, t) \tag{5-1}$$

telle que la courbe pour $t = 0$ a un point de branchement singulier a avec une singularité de type p/q, c'est-à-dire, décrite en termes d'une variable locale z au voisinage de a, par :

$$\begin{cases} t = 0 \\ x(z) \sim x(a) + (z-a)^q \\ y(z) \sim y(a) + (z-a)^p \end{cases}. \tag{5-2}$$

Pour $t \neq 0$, la singularité disparaît et l'on a une paramétrisation en terme de la variable locale $\zeta = z\, t^{-\nu}$:

$$\begin{cases} x(z,t) \sim x(a) + t^{q\nu}\ Q(\zeta) + o(t^{q\nu}) \\ y(z,t) \sim y(a) + t^{p\nu}\ P(\zeta) + o(t^{p\nu}) \end{cases} \tag{5-3}$$

où Q et P sont des polynômes de degrés respectifs q et p et où ν est un exposant critique dépendant explicitement du choix du paramètre t.

La **courbe spectrale singulière**

$$\mathcal{E}_{\text{sing}}(\xi, \eta) = \begin{cases} \xi(\zeta) = Q(\zeta) \\ \eta(\zeta) = P(\zeta) \end{cases} = \text{Resultant}(Q - \xi, P - \eta) \tag{5-4}$$

est définie comme la partie la plus divergente de la courbe lorsque $t \to 0$.

Si la courbe $\mathcal{E}(t)$ elle même présente une singularité, les énergies libres $F^{(g)}(\mathcal{E}(t))$ présentent elles aussi une singularité pour $t \to 0$. Elles se comportent suivant :

$$F^{(g)}(\mathcal{E}(t)) \sim t^{\gamma_g} F^{(g)}_{\text{sing}} + o(t^{\gamma_g}) \qquad , \text{ for } g \geq 2 \tag{5-5}$$

$$F^{(1)}(\mathcal{E}(t)) \sim -\frac{1}{24}\,(p-1)(q-1)\nu\, \ln(t) + O(1) \qquad , \text{ for } g = 1. \tag{5-6}$$

On appelle **double limte d'échelle** de $F^{(g)}$ la partie singulière $F^{(g)}_{\text{sing}}$ en réference aux modèles de matrices. Elle est déterminée ainsi que l'exposant γ_g par le théorème suivant :

Théorème 5.1 *La limite singulière de l'énergie libre est donnée par :*

$$\boxed{F^{(g)}_{\text{sing}}(\mathcal{E}) = F^{(g)}(\mathcal{E}_{\text{sing}}) \qquad , \text{ for } g \geq 2} \tag{5-7}$$

et l'exposant critique s'écrit

$$\gamma_g = (2-2g)(p+q)\nu. \tag{5-8}$$

En d'autres termes, par une normalisation appropriée, notre construction des $F^{(g)}$ commute avec les limites singulières.

Cette propriété de passage à la limite a de nombreuses implications comme nous le verrons plus loin. Elle permet, entre autres choses, d'appliquer notre méthode à l'étude des théories conformes et permet de faire le lien entre différents modèles.

6 Applications.

Nous montrons dans cette partie l'efficacité de notre méthode dans deux cas particuliers. D'une part, nous montrons comment elle permet d'avoir accès de manière directe et systématique aux modèles minimaux (p, q) et nous montrons d'autre part comment elles permettent de retrouver très facilement des résultats classiques relatifs à l'intégrale de Kontsevich [72].

6.1 Double limite d'échelle et modèles minimaux des théories conformes.

On sait depuis longtemps que les limites singulières des modèles à une et deux matrices hermitiennes, connues sous le nom de doubles limites d'échelle, sont fortement liées aux modèles minimaux de type (p, q) obtenus en théorie des champs conforme [73, 34, 29, 38]. Dans cette partie, nous explicitons ce lien en montrant de manière précise comment traiter la singularité due à la double limite d'échelle grâce aux invariants définis plus haut. Nous montrons, entre autres, comment les exposants critiques correspondants aux modèles (p, q) apparaissent et quelles sont les courbes spectrales correspondantes.

Nous avons vu dans le chapitre 2 que, tant que la courbe spectrale classique associée à un modèle à deux matrices est régulière, tous les coefficients $F^{(g)}$ du développement topologique de l'énergie libre peuvent être calculés. Ainsi, le rayon de convergence en T de $F^{(g)}(T)$ est atteint pour certaines courbes singulières. Nous nous restreignons ici, comme dans la partie 5, aux singularités rationnelles.

Considérons donc le cas où les potentiels V_1 et V_2 sont choisis de manière à ce que la courbe spectrale classique $\mathcal{E}_{\text{2MM}}$ ait une singularité de type p/q lorsque T est égale à la valeur critique T_c.

$$\begin{cases} T = T_c \\ x(z) \sim_{p\to a} x(a) + (z - z(a))^q \\ y(z) \sim_{p\to a} y(a) + (z - z(a))^p \end{cases} \tag{6-1}$$

Notons que les valeurs de p et q sont majorées par les degrés des potentiels V_1 et V_2. Ainsi, le modèle à une matrice donne seulement accès à $q = 2$.

On peut se ramener à la limite singulière décrite dans la partie précédente en utilisant la notation $t = T - T_c$. Ainsi, à $t \neq 0$, il n'y a pas de singularité et l'on décrit la courbe $\mathcal{E}_{\text{2MM}}$ en termes de la variable locale $\zeta = zt^{-\nu}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(z,t) \sim x(a) + t^{q\nu}\ Q(\zeta) + o(t^{q\nu}) \\ y(z,t) \sim y(a) + t^{p\nu}\ P(\zeta) + o(t^{p\nu}) \\ \zeta = zt^{-\nu} \end{array} \right. \tag{6-2}$$

où Q (resp. P) est un polynôme de degrés q (resp. p).

On définit alors la courbe spectrale singulière par

$$\mathcal{E}_{\text{sing}}(\xi,\eta) = \left\{ \begin{array}{l} \xi = Q(\zeta) \\ \eta = P(\zeta) \end{array} \right. = \text{Resultant}(Q-\xi, P-\eta). \tag{6-3}$$

Or, la dépendance en T du modèle à deux matrices se caractérise par

$$\left.\frac{d}{dT} y dx\right|_x = dS_{\infty_x,\infty_y} \tag{6-4}$$

où ∞_x et ∞_y sont les deux pôles de ydx décrits dans la partie 8.1 du chapitre 2. Notons qu'ils sont loins des points de branchement, et en particulier du point de branchement devenant singulier. Au voisinage de la singularité, on a donc

$$\left.\frac{d}{dT} y dx\right|_x \sim C\, t^{\nu}\, d\zeta + O(t^{2\nu}) \tag{6-5}$$

où C est une constante d'ordre 1. En utilisant la paramétrisation Eq. (6-2), on obtient la relation de Poisson [29, 34] entre les polynômes :

$$pP(\zeta)Q'(\zeta) - qQ(\zeta)P'(\zeta) = \frac{C}{\nu}\, t^{1-(p+q-1)\nu} \tag{6-6}$$

qui fixe

$$\nu = \frac{1}{p+q-1}. \tag{6-7}$$

Alors le théorème 5.1 montre que le terme dominant des énergies libres est donné par

$$F^{(g)}_{\text{2MM}}(T) \underset{T\to T_c}{\sim} (T-T_c)^{(2-2g)(p+q)/(p+q-1)} F^{(g)}(\mathcal{E}_{\text{sing}}) \qquad , \text{ pour } g \geq 2 \tag{6-8}$$

lorsque l'on s'approche de la singularité à $T = T_c$. Les deux premier termes du développement topologique sont aussi donnés par :

$$F^{(0)}_{\text{2MM}}(T) \underset{T\to T_c}{\sim} \frac{C^2}{2} \frac{(p+q-1)^2}{(p+q)(p+q+1)} (T-T_c)^{2+2\nu} + \text{reg} \qquad , \text{ pour } g = 0 \tag{6-9}$$

et

$$F^{(1)}_{\text{2MM}}(T) \underset{T\to T_c}{\sim} -\frac{1}{24} (p-1)(q-1)\nu \ln(T-T_c) + O(1) \qquad , \text{ pour } g = 1. \tag{6-10}$$

On a ainsi un moyen de calculer explicitement la double limite d'échelle des termes du développement topologique de l'énergie libre sans faire de passage à la limite : il suffit de calculer les quantités correspondantes directement sur la courbe spectrale singulière.

Modèles minimaux (p,q).

Etudions plus précisément la courbe singulière $\mathcal{E}_{(p,q)}$ correspondant à un modèle minimal (p,q) (cf [29]) donnée par

$$\mathcal{E}_{(p,q)}(x,y) = \left\{ \begin{array}{l} x = Q(\zeta) \\ y = P(\zeta) \end{array} \right. = \text{Resultant}(Q-x, P-y). \tag{6-11}$$

où P et Q sont deux polynômes de degrés respectifs p et q satisfaisant la relation de Poisson :

$$pPQ' - qQP' = \frac{t_1}{\nu} \tag{6-12}$$

dont la solution peut être écrite [34] :

$$P = (Q^{p/q})_+ \tag{6-13}$$

et

$$(Q^{p/q})_- = \frac{t_1}{q}\zeta^{1-q} + O(\zeta^{-q}), \tag{6-14}$$

où nous avons utilisé les notations $f = f_+ + f_-$ avec f_+ et f_- désignant respectivement les parties positives et négatives du développement en série de Laurent de f, i.e. la partie polynômiale et la partie pôlaire. On voit aisément que cette dernière équation implique $q-2$ contraintes pour les éléments de Q.

La courbe $\mathcal{E}_{(p,q)}$ ainsi définie est de genre nul et telle que les fonctions rationnelles x et y la paramétrisant n'ont qu'un seul pôle situé à l'infini : $\alpha := \infty$. Le noyau de Bergmann est alors (cf partie 8.1 du chapitre 2) :

$$B(\zeta_1,\zeta_2) = \frac{d\zeta_1\, d\zeta_2}{(\zeta_1-\zeta_2)^2}. \tag{6-15}$$

Les modules au pôle de cette courbe sont alors les coefficients Q_k et P_k donnés par

$$Q(\zeta) = \sum_{k=0}^{q} Q_k \zeta^k \qquad , \qquad P(\zeta) = \sum_{k=0}^{p} P_k \zeta^k. \tag{6-16}$$

Par translation sur la variable locale ζ, on peut supposer que $Q_{q-1} = 0$ et, par changement d'échelle, que $Q_{q-2} = -qQ_q$ sans perte de généralité. La relation de Poisson Eq. (6-12) dit alors que $P_{p-1} = 0$ et $P_{p-2} = -pP_p$, et donc que :

$$Q_{q-1} = P_{p-1} = 0 \qquad , \qquad \frac{Q_{q-2}}{Q_q} = -q \qquad , \qquad \frac{P_{p-2}}{P_p} = -p. \tag{6-17}$$

On retrouve alors :

$$F^{(0)}(\mathcal{E}_{(p,q)}) = 0. \tag{6-18}$$

Remarque 6.1 L'invariance symplectique du théorème 4.1 autorisant l'échange des rôles respectifs de x et de y permet de montrer très simplement la propriété bien connue d'équivalence des modèles (p,q) et (q,p).

Autres modules.

Dans un contexte plus général [34], on peut déformer les modèles minimaux (p,q) avec $p+q-2$ autres modules $t_1,\dots,t_{p+q-2}$. Pour ce faire, considérons un polynôme Q monique de degré q :

$$Q(\zeta)=\zeta^q+\sum_{j=0}^{q-2}u_{q-j}\zeta^j \tag{6-19}$$

dont les coefficients $u_2,\dots,u_q$ sont des fonctions de $q-1$ modules $t_1,\dots,t_{q-1}$ déterminées par la contrainte

$$(Q^{p/q})_-=\sum_{j=1}^{q-2}\frac{q-j}{q}t_{q-j}Q^{-j/q}+\frac{t_1}{q}\zeta^{1-q}+O(\zeta^{-q}). \tag{6-20}$$

Définissons alors un polynôme P monic de degré p par :

$$P(\zeta)=\zeta^p+\sum_{j=0}^{p-2}v_{p-j}\zeta^j=Q_+^{p/q}-\sum_{j=1}^{p-1}\frac{j+q}{q}t_{q+j-1}Q_+^{j/q} \tag{6-21}$$

dépendant de $p-1$ autres paramètres $t_q,\dots,t_{q+p-2}$.

La courbe spectrale classique correspondante est alors :

$$\mathcal{E}_{(p,q)}(x,y)=\text{Resultant}(x-Q,y-P). \tag{6-22}$$

Il est bien connu que cette courbe dépendant des paramètres $t_1,\dots,t_{p+q-2}$ est la courbe spectrale de la hierarchie intégrable de Witham sans dispersion [**?**] et l'on a ainsi accès aux observables de cette hierarchie.

On peut vérifier que $t_2=t_3=\ldots=t_{p+q-1}=0$ redonne bien sûr le modèle minimal (p,q).

Exemples de Modèles minimaux.

Décrivons les premiers exemples de modèles (p,q) en donnant à chaque fois la courbe spectrale correspondante ainsi que les polynômes permettant une paramétrisation rationnelle.

• **Courbe d'Airy** $(2,1)$**.**

La courbe spectrale classique pour le modèle minimal $(2,1)$ est

$$\mathcal{E}_{(2,1)}(x,y)=y^2+t_1-x, \tag{6-23}$$

i.e.

$$Q(\zeta)=\zeta^2+t_1\qquad,\qquad P(\zeta)=\zeta. \tag{6-24}$$

On l'étudiera plus en détail dans la partie 6.3 puisqu'elle décrit le comportement générique de n'importe quelle courbe au voisinage d'un point de branchement et coincide avec la loi bien connue de Tracy-Widom [101].

• **Gravité pure** $(3,2)$**.**

La paramétrisation

$$Q(\zeta) = \zeta^2 - 2v \qquad , \qquad P(\zeta) = \zeta^3 - 3v\zeta \qquad , \qquad t_1 = 3v^2 \tag{6-25}$$

donne la courbe spectrale classique

$$\mathcal{E}_{(3,2)}(x,y) = x^3 - 3v^2x - y^2 + 2v^3 \tag{6-26}$$

que nous étudierons dans la partie 6.4 .

• **Modèle d'Ising** $(4,3)$**.**

Si l'on habille la gravité pure d'une structure de spin, c'est-à-dire que l'on ajoute de la matière de la manière la plus simple possible, on obtient la paramétrisation

$$Q(\zeta) = \zeta^3 - 3v\zeta - 3w \qquad , \qquad P(\zeta) = \zeta^4 - 4v\zeta^2 - 4w\zeta + 2v^2 - \frac{5}{3}t_5(\zeta^2 - 2v) \tag{6-27}$$

avec

$$t_1 = 4v^3 + 6w^2 \qquad , \qquad t_2 = 6vw. \tag{6-28}$$

La courbe spectrale classique est alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{(4,3)}(x,y) \;=\; & x^4 - y^3 - 4v^3x^2 + 3v^4y + 2v^6 \\
& +12wv(-xy + v^2x) + 6w^2(-x^2 + 2vy - 4v^3) + 8w^3x - 3w^4 \\
& +5t_5(-x^2y - v^2x^2 + 2v^3y + 2v^5 - 2wyx + 2v^2wx + 3w^2y - 17v^2w^2) \\
& +\frac{25}{3}t_5^2(v^2y + 2v^4 - 4vwx - 12vw^2) \\
& +\frac{125}{27}t_5^3(-x^2 + 2v^3 - 6wx - 9w^2).
\end{aligned} \tag{6-29}$$

Les variations par rapport aux modules t_5, t_2 et t_1 correspondent à des variations de la forme ydx données respectivement par

$$\Omega_5 = -d\Lambda_5 = d(\zeta^5 - 5v\zeta^3 + 10v^2\zeta), \tag{6-30}$$

$$\Omega_1 = -d\Lambda_1 = d(\zeta + \frac{5}{12}\,\frac{t_5}{v^3 - w^2}\,(2v^2\zeta + 2vw - w\zeta^2)), \tag{6-31}$$

et

$$\Omega_2 = -d\Lambda_2 = d(\zeta^2 + \frac{5}{6}\,\frac{t_5}{v^3 - w^2}\,(v^2\zeta^2 - 2vw\zeta - 2w^2)) \tag{6-32}$$

en utilisant les notations de 4.2.

• **Modèles unitaires** $(q+1,q)$**.**

Lorsque $p := q+1$, la courbe spectrale classique prend la forme :

$$\mathcal{E}_{(q+1,q)}(x,y) = T_{q+1}(x) - T_q(y) \tag{6-33}$$

où T_p est le p-ième polynôme de Tchebychev. Elle est alors paramétrée par

$$Q(\zeta) = T_q(\zeta) \qquad , \qquad P(\zeta) = T_{q+1}(\zeta). \tag{6-34}$$

6.2 Application à l'intégrale de Kontsevich.

Dans ce paragraphe nous étudions un cas particulier très simple de modèle à une matrice en champ extérieur introduit par Kontsevich dans le cadre de l'étude des nombres d'intersection des surfaces de Riemann [72]. Il serait intéressant de développer le profond lien entre les invariants introduits dans cette thèse et le calcul de ces nombres d'intersection et la conjecture de Witten-Kontsevich [108], mais ce n'est pas le propos de ce paragraphe et nous discuterons brievement ce point au cours de la conclusion.

L'intégrale de Kontsevich est la fonction génératrice permettant de calculer les nombres d'intersection de l'espace des modules des surfaces de Riemann (cf. [72, 33]). Elle est définie par :

$$Z_{\text{Kontsevich}} = \int dM \ \mathrm{e}^{-N \operatorname{Tr}\left(\frac{M^3}{3} - M(\Lambda^2 + t_1)\right)} \qquad , \qquad t_1 = \frac{1}{N} \operatorname{Tr} \frac{1}{\Lambda} \tag{6-35}$$

où Λ a pour valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$. Cette intégrale correspond donc au modèle à une matrice en champ extérieur Z_{Mext} introduit dans la partie 2 du chapitre 3 avec $V(x) = x^3/3$ et $\hat{\Lambda} = \Lambda^2 + t_1$. La courbe spectrale classique correspondante est donc

$$\mathcal{E}_{\text{Kontsevich}}(x, y) = (x^2 - y)S(y) - xS_1(y) - S_2(y) \tag{6-36}$$

où $S_1(y)$ et $S_2(y)$ sont des polynômes de degrés inférieurs strictement à s qui est le nombre de valeurs propres distinctes de Λ.

Pour que $F^{(g)}_{\text{Kontsevich}}$ soit bien la fonction génératrice des nombres d'intersection, cette courbe spectrale doit être de genre nul nécessairement. Alors, on peut écrire explicitement une paramétrisation rationnelle :

$$\mathcal{E}_{\text{Kontsevich}}(x, y) = \begin{cases} x(z) = z + \frac{1}{2N} \operatorname{Tr} \frac{1}{\Lambda} \frac{1}{z - \Lambda} \\ y(z) = z^2 + \frac{1}{N} \operatorname{Tr} \frac{1}{\Lambda} \end{cases} . \tag{6-37}$$

Sous cette forme, on peut voir que les points de branchements en x sont nombreux et compliqués à décrire. Heureusement, l'invariance symplectique du th.4.1 nous permet de travailler avec les rôles de x et y inversés. Nous allons donc étudier la forme xdy et les points de branchement en y. En fait, il y a un unique point de branchement en y solution de $y'(z) = 0$: il est situé à l'origine $z = 0$. Or, les formules définissant les $F^{(g)}$ consistent en le calcul de résidus en ce point de branchement, on a donc uniquement besoin de connaître le développement de Taylor de $x(z)$ autour de $z = 0$ pour calculer tous les $F^{(g)}$, i.e.

$$\mathcal{E}_{\text{Kontsevich}}(x, y) = \begin{cases} x(z) = z - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} t_{k+2} z^k \\ y(z) = z^2 + t_1 \end{cases} \tag{6-38}$$

où l'on a défini les temps de Kontsevich :

$$t_k = \frac{1}{N} \operatorname{Tr} \Lambda^{-k} \tag{6-39}$$

de manière à ce que :

$$\boxed{F^{(g)}_{\text{Kontsevich}} = F^{(g)}(\mathcal{E}_{\text{Kontsevich}}).} \tag{6-40}$$

On peut une nouvelle fois utiliser l'invariance symplectique du théorème 4.1 et ainsi ajouter à $x(z)$ n'importe quelle fonction rationnelle de $y(z)$. On obtient ainsi le théorème suivant :

Théorème 6.1 *$F^{(g)}_{\text{Kontsevich}}$ dépend uniquement des temps impairs t_{2k+1}, with $k \leq 3g-2$:*

$$\boxed{F^{(g)}_{\text{Kontsevich}} = F^{(g)}_{\text{Kontsevich}}(t_1, t_3, t_5, \dots, t_{6g-3})} \tag{6-41}$$

Supposons maintenant que $t_k = 0$ pour tout $k \geq p+2$. La courbe spectrale classique devient alors :

$$\begin{cases} x(z) = z - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{p} t_{k+2} z^k \\ y(z) = z^2 + t_1 \end{cases} \tag{6-42}$$

qui n'est autre que la courbe du modèle minimal $(p, 2)$ introduite dans le paragraphe précédent. D'une part cela démontre aisément le résultat obtenu par Ambjorn et Kristjansen [10] liant la double limite d'échelle du modèle à une matrice et l'intégrale de Kontsevich. D'autre part, cela démontre en une ligne le théorème classique

Théorème 6.2 *$Z_{\text{Kontsevich}}$ est la fonction τ de la hierarchie de KdV.*

Quelques fonctions de corrélations et énergies libres.

Pour la courbe de Kontsevich, les éléments de base sont donnés par :

$$B(z,z') = \frac{dz\,dz'}{(z-z')^2} \qquad , \qquad dE_z(z') = \frac{z\,dz'}{z^2 - z'^2}\ ,\ \omega(z) = 2z^2 dz\,(2 - \sum_j t_{2j+3}\, z^{2j}) \tag{6-43}$$

et l'unique point de branchement est situé en $z = 0$.

Suivant la définition 3.1, on calcule les premières fonctions de corrélation :

$$W_1^{(1)}(z) = -\frac{dz}{8(2-t_3)}\left(\frac{1}{z^4} + \frac{t_5}{(2-t_3)z^2}\right), \tag{6-44}$$

$$W_3^{(0)}(z_1,z_2,z_3) = -\frac{1}{2-t_3}\,\frac{dz_1\,dz_2\,dz_3}{z_1^2 z_2^2 z_3^2}, \tag{6-45}$$

$$\begin{aligned} W_2^{(1)}(z_1,z_2) = \frac{dz_1\,dz_2}{8(2-t_3)^4 z_1^6 z_2^6}\Big[&(2-t_3)^2(5z_1^4 + 5z_2^4 + 3z_1^2 z_2^2) \\ &+6t_5^2 z_1^4 z_2^4 + (2-t_3)(6t_5 z_1^4 z_2^2 + 6t_5 z_1^2 z_2^4 + 5t_7 z_1^4 z_2^4)\Big] \end{aligned} \tag{6-46}$$

et

$$W_1^{(2)}(z) = -\frac{dz}{128(2-t_3)^7 z^{10}}\Big[252\,t_5^4 z^8 + 12\,t_5^2 z^6 (2-t_3)(50\,t_7 z^2 + 21\,t_5)$$

$$
\begin{aligned}
&+z^4(2-t_3)^2(252\,t_5^2+348\,t_5t_7z^2+145\,t_7^2z^4+308\,t_5t_9z^4)\\
&+z^2(2-t_3)(203\,t_5+145\,z^2t_7+105\,z^4t_9+105\,z^6t_{11})\\
&+105\,(2-t_3)^4\Big].
\end{aligned}
\tag{6-47}
$$

Les premiers termes du développement topologique de l'énergie libre sont alors donnés par

$$F^{(1)}_{\text{Kontsevich}} = -\frac{1}{24}\ln\left(1-\frac{t_3}{2}\right) \tag{6-48}$$

et

$$F^{(2)}_{\text{Kontsevich}} = \frac{1}{1920}\,\frac{252\,t_5^3+435\,t_5t_7(2-t_3)+175\,t_9(2-t_3)^2}{(2-t_3)^5}. \tag{6-49}$$

Ces expressions coincident bien avec les résultats déjà connus dans la littérature [61].

Il est ici facile de calculer les termes suivants du développement topologique en utilisant la même méthode (on peut facilement écrire un programme faisant le travail).

6.3 Exemple : courbe d'Airy.

La courbe $y=\sqrt{x}$ est d'un intérêt particulier. En effet, non seulement elle correspond au modèle minimal le plus simple (cf [34, 35]), i.e. $(2,1)$, appelé également loi de Tracy-Widom [101], mais elle est le prototype du comportement de n'importe quelle courbe au voisinage de l'un de ses points de branchements.

Considérons la courbe

$$\mathcal{E}(x,y) = y^2 - x \tag{6-50}$$

et l'uniformisation $p=y$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(p) &=& p^2 \\ y(p) &=& p \end{array}\right. . \tag{6-51}$$

Il n'y a ici qu'un pôle situé en $p=\infty$, et un seul point de branchement en $p=0$. Le point conjugué est alors simplement $\overline{p}=-p$ et le noyau de Bergmann :

$$B(p,q)=\frac{dp\,dq}{(p-q)^2} \qquad , \qquad dE_q(p)=\frac{q\,dp}{q^2-p^2} \qquad , \qquad \omega(q)=4q^2dq. \tag{6-52}$$

On peut aisément voir que toutes les fonctions de corrélations avec $2g+k\geq 3$ sont de la forme :

$$W_k^{(g)}(p_1,\dots,p_k)=\omega_k^{(g)}(p_1^2,\dots,p_k^2)\,dp_1\dots dp_k \tag{6-53}$$

On peut même observer que les règles diagrammatiques sont homogènes et donc les fonctions $W_1^{(g)}(p)$ doivent être homogènes en p. On peut montrer que :

$$W_1^{(g)}(p)=\frac{c_g\,dp}{p^{6g-2}} \tag{6-54}$$

et que la fonction de corrélation à un point resommée est

$$W_1(p,N) := -Nydx + \sum_{g=1}^{\infty} N^{1-2g} W_1^{(g)}(p) = W_1(N^{\frac{1}{3}}p, 1). \tag{6-55}$$

De même, la fonction à deux points est donnée par

$$W_2(p,q,N) := \sum_{g=0}^{\infty} N^{-2g} W_2^{(g)}(p,q) = W_2(N^{\frac{1}{3}}p, N^{\frac{1}{3}}q, 1) \tag{6-56}$$

et plus généralement

$$W_k(p_1,\dots,p_k,N) := \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g-k} W_k^{(g)}(p_1,\dots,p_k) = W_k(N^{\frac{1}{3}}p_1,\dots,N^{\frac{1}{3}}p_k,1). \tag{6-57}$$

En fait, la solution de la relation de récurrence Eq. (3-5) peut s'exprimer explicitement en termes de la fonction d'Airy. Pour cela, considérons $g(x) = Ai'(x)/Ai(x)$ où $Ai(x)$ est la fonction d'Airy, i.e. $g'(x) + g^2(x) = x = p^2$. En termes de la variable p, on traduit cela par :

$$f(p) = g(p^2) \qquad , \qquad f^2 + \frac{f'}{2p} = p^2 \tag{6-58}$$

dont le développement à grand p donne :

$$f(p) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k p^{1-3k} = p - \frac{1}{4p^2} - \frac{9}{32p^5} + \dots \tag{6-59}$$

où les coefficients du développement satisfont :

$$\frac{4-3k}{2} f_{k-1} + \sum_{j=0}^{k} f_j f_{k-j} = \delta_{k,0}. \tag{6-60}$$

Les fonctions à un et deux points sont alors obtenues sous la forme :

$$W_1(p,1) = -2\frac{p^2 - f(p)f(-p)}{f(p)-f(-p)}\, pdp = -2p^2dp + \frac{dp}{(2p)^4} + \frac{9!!\, dp}{3^2\,(2p)^{10}} + \frac{15!!dp}{3^4\,(2p)^{16}} \dots \tag{6-61}$$

et

$$W_2(p,p',1) = -4\,\frac{(f(p)-f(p'))\,(f(-p)-f(-p'))}{(p^2-p'^2)^2\,(f(p)-f(-p))\,(f(p')-f(-p'))}\, pdp\, p'dp'. \tag{6-62}$$

En particulier

$$W_2(p,p,1) = \frac{f'(p)f'(-p)}{(f(p)-f(-p))^2}\, dp^2 \tag{6-63}$$

d'où la fonction à deux points non corrélée

$$W_2(p,p,1) + W_1(p,1)^2 = 4p^4\, dp^2 = x\, dx^2. \tag{6-64}$$

De manière analogue, on trouve par exemple la fonction à trois points

$$\begin{aligned} & W_3(p_1,p_2,p_3,1) \\ = \quad & \frac{dx_1 dx_2 dx_3}{(p_3^2-p_2^2)(p_3^2-p_1^2)(p_2^2-p_1^2)} \times \\ & \times \frac{\sum_{i=1}^3 f(p_i)f(-p_i)(f(p_{i-1})+f(-p_{i-1})-f(p_{i+1})-f(-p_{i+1}))}{(f(p_1)-f(-p_1))(f(p_2)-f(-p_2))(f(p_3)-f(-p_3))} \\ = \quad & \frac{dp_1\,dp_2\,dp_3}{2\,p_1^2\,p_2^2\,p_3^2} + \frac{dp_1\,dp_2\,dp_3}{2^6\,p_1^8\,p_2^8\,p_3^8} + \dots \end{aligned} \tag{6-65}$$

ainsi que des expressions similaires pour n'importe quel W_k.

En fait, on sait par ailleurs que toutes les fonctions de corrélations peuvent s'écrire sous forme de déterminant [40, 41] en utilisant le noyau de Tracy-Widom [101] :

$$K(x,x') = \frac{Ai(x)Ai'(x') - Ai'(x)Ai(x')}{x-x'}, \tag{6-66}$$

ce qui a un fort lien avec les propriétés d'intégrabilité de ces systèmes. En effet, le fait que la fonction d'Airy satisfasse l'équation différentielle $Ai'' = xAi$ peut être vu comme une conséquence du fait que A_i soit une fonction de Baker–Akhiezer ainsi que des équations de Hirota démontrées dans le théorème 7.2 de la partie suivante.

Remarque 6.2 Pour cette courbe, l'énergie libre est nulle :

$$\forall g \quad F^{(g)} = 0. \tag{6-67}$$

6.4 Exemple : la gravité pure (3,2)

Etudions maintenant en détails le modèle minimal $(3,2)$ souvent appelé modèle de la gravité pure [34]. Pour cela, considérons la courbe algébrique :

$$\mathcal{E}_{(3,2)} = \begin{cases} x(z) = z^2 - 2v \\ y(z) = z^3 - 3vz \\ t_1 = 3v^2 \end{cases} . \tag{6-68}$$

Remarquons tout d'abord que, puisque ce modèle est unitaire, l'uniformisation est obtenue par les polynômes de Tchebychev T_2 et T_3, qui satisfont la relation de Poisson Eq. (6-12). Par changement d'échelle $z = \sqrt{v}\,p$, on peut écrire la courbe comme :

$$\mathcal{E}_{(3,2)} = \begin{cases} x(p) = v(p^2-2) \\ y(z) = v^{3/2}(p^3-3p) \\ t_1 = 3v^2 \end{cases} . \tag{6-69}$$

Il n'y a alors qu'un seul point de branchement situé en $p=0$ et le point conjugué est alors défini par $\overline{p} = -p$. Comme précédemment le noyau de Bergmann est celui de la sphère :

$$B(p,q) = \frac{dp\,dq}{(p-q)^2} \qquad , \qquad dE_q(p) = \frac{q\,dp}{q^2-p^2} \tag{6-70}$$

$$\omega(q) = (y(q) - y(\overline{q}))dx(q) = 4v^{5/2}\,(q^2-3)\,q^2\,dq \tag{6-71}$$

$$\Phi(q) = v^{5/2}(\frac{2\,q^5}{5} - 2q^3) \tag{6-72}$$

La variation de ydx correspondant à une variation de t_1 est donnée par :

$$\Omega_1(p) = -\left.\frac{\partial y(p)dx(p)}{\partial t_1}\right|_{x(p)} = v^{1/2}\,dp = -v^{1/2}\ \operatorname*{Res}_{\infty} qB(p,q) \qquad , \qquad \Lambda_1(q) = -v^{1/2}\,q \tag{6-73}$$

donc l'effet de $\partial/\partial t_1$ sur les fonctions de corrélations est décrit par :

$$\left.\frac{\partial}{\partial t_1} W_k^{(g)}\right|_x = -v^{1/2}\ \operatorname*{Res}_{q\to\infty} qW_{k+1}^{(g)}. \tag{6-74}$$

Quelques fonctions de corrélation et énergies libres.

On trouve les premières fonctions de corrélations :

$$W_3^{(0)}(p_1,p_2,p_3) = -\frac{v^{-5/2}}{6}\ \frac{dp_1dp_2dp_3}{p_1^2p_2^2p_3^2} \tag{6-75}$$

$$W_1^{(1)}(p) = -\frac{v^{-5/2}}{(12)^2}\,\frac{p^2+3}{p^4}\,dp \tag{6-76}$$

$$W_2^{(1)}(p,q) = v^{-5}\ \frac{15q^4+15p^4+6p^4q^2+2p^4q^4+9p^2q^2+6p^2q^4}{2^5\,3^3\ p^6\,q^6}\,dp\,dq \tag{6-77}$$

$$W_1^{(2)}(p) = -v^{-15/2}\ 7\frac{135+87p^2+36p^4+12p^6+4p^8}{2^{10}\,3^5\,p^{10}}\,dp \tag{6-78}$$

$$W_4^{(0)}(p_1,p_2,p_3,p_4) = \frac{v^{-5}}{9p_1^2p_2^2p_3^2p_4^2}\ \left(1+3\sum_i\frac{1}{p_i^2}\right)\ dp_1dp_2dp_3dp_4 \tag{6-79}$$

$$\frac{W_5^{(0)}(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5)}{dp_1dp_2dp_3dp_4dp_5} = \frac{v^{-15/2}}{9p_1^2p_2^2p_3^2p_4^2p_5^2}\ \left(1+3\sum_i\frac{1}{p_i^2}+6\sum_{i<j}\frac{1}{p_i^2p_j^2}+5\sum_i\frac{1}{p_i^4}\right) \tag{6-80}$$

Encore une fois, il est aisé d'obtenir de cette façon n'importe quelle fonction de corrélation.

On peut également calculer les différents termes du développement topologique de l'énergie libre Par exemple, le théorème 4.2 et Eq. (6-74), permettent de calculer :

$$\frac{\partial^3 F^{(0)}}{\partial t_1^3} = -\frac{1}{6v} = -\frac{1}{2\sqrt{3t_1}} \longrightarrow \frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial t_1^2} = -\frac{t_1^{1/2}}{\sqrt{3}} \tag{6-81}$$

en utilisant eq.6-75.

De plus eq.6-76 implique :

$$\frac{\partial F^{(1)}}{\partial t_1} = -\frac{1}{(12)^2 v^2} = -\frac{1}{48 t_1} \longrightarrow \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial t_1^2} = \frac{1}{48\, t_1^2} \tag{6-82}$$

et eq.6-78 donne :

$$\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t_1} = -v^{-7}\, \frac{7}{2^8\, 3^5} = -\frac{7}{2^8\, 3^{3/2}\, t_1^{7/2}} \longrightarrow \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial t_1^2} = \frac{49}{2^9\, 3^{3/2}\, t_1^{9/2}}. \tag{6-83}$$

On peut alors vérifier que la dérivée seconde de l'énergie libre :

$$u = \frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} = \sum_{g=0}^{\infty} t_1^{(1-5g)/2} u^{(g)} \qquad , \qquad F^{(g)} = \frac{4u^{(g)}}{5(1-g)(3-5g)}\,. \tag{6-84}$$

satisfait l'équation de Painlevé I ordre par ordre :

$$u^2 + \frac{1}{6} u'' = \frac{1}{3} t_1. \tag{6-85}$$

Il est bien connu que cette équation doit être satisfaite à tous les ordres [23, 39, 55, 34]. Ceci peut une nouvelle fois être vu comme une conséquence des équations de Hirota présentées dans le th.7.2.

7 Intégrabilité des invariants algébriques.

Comme nous l'avons vu, il exste plusieurs exemples identifiant des fonctions de partitions de modèles de matrices comme les fonctions τ d'un système intégrable. Nous allons montrer dans cette partie comment différents indices laissent supposer que notre construction donne accès à une fonction τ (formelle pour le moment) associée à une courbe algébrique quelconque.

7.1 Fonction de Baker-Akhiezer.

Etant donnés deux points ξ et η du domaine fondamental, on définit le noyau suivant comme une série formelle en $\frac{1}{N}$:

$$K_N(\xi,\eta) = \frac{\mathrm{e}^{-N\int_\eta^\xi y dx}}{E(\xi,\eta)\,\sqrt{dx(\xi)dx(\eta)}} \exp\left(-\sum_{g=0}^{\infty}\sum_{l=1,2-2g-l<0}^{\infty} \frac{1}{l!}\, N^{2-2g-l} \int_\eta^\xi \int_\eta^\xi \dots \int_\eta^\xi W_l^{(g)}(p_1,\dots,p_l)\right) \tag{7-1}$$

où le chemin d'intégration reste entièrement dans le domaine fondamental. Il satisfait les propriétés suivantes :

– On peut voir que $(x(\xi) - x(\eta))K_N(\xi,\eta) \to 1$ quand $\eta \to \xi$.

– On a
$$\lim_{\eta\to\xi}\Big(K_N(\xi,\eta)-\frac{1}{(x(\xi)-x(\eta))}\Big)=-Ny(\xi)+\frac{W_1(\xi)}{dx(\xi)} \tag{7-2}$$
où $W_1=\sum_{g=1}^{\infty}N^{1-2g}W_1^{(g)}$.

– L'échange des deux arguments se traduit par :
$$K_N(\xi,\eta)=K_{-N}(\eta,\xi). \tag{7-3}$$

– A priori, K_N pourrait avoir des pôles aux points de branchement puisque son logarithme $\ln K_N$ en a. Cependant, d'après le théorème de passage à la limite th.5.1, on peut voir que le terme dominant de tous les $W_l^{(g)}$ est donné par les $W_l^{(g)}$ correspondant à la courbe d'Airy $y^2=x$ étudiée dans la partie 6.3 du chapitre précédent. Ainsi, au voisinage d'un point de branchement a, le noyau K_N se comporte comme le noyau de Tracy-Widom [101] quand $\xi,\eta\to a$:
$$K_N(\xi,\eta)\sim\frac{Ai(\hat\xi)Ai'(\hat\eta)-Ai'(\hat\xi)Ai(\hat\eta)}{\hat\xi-\hat\eta}$$
$$\hat\xi=N^{2/3}(x(\xi)-x(a))\qquad,\qquad\hat\eta=N^{2/3}(x(\eta)-x(a)) \tag{7-4}$$
Donc K_N n'est pas singulier aux points de branchements.

– Les seules singularités de $K_N(\xi,\eta)$ sont : d'une part, des singularités essentielles aux pôles de ydx avec une partie singulière égale à $\exp\left(-N\int_\eta^\xi ydx\right)$ et un pôle simple en $\xi=\eta$ d'autre part.

Considérons maintenant un pôle α de ydx. Pour ξ dans un voisinage de α, on définit :
$$\begin{aligned}\psi_{\alpha,N}(\xi) &= \frac{\mathrm{e}^{-N\,V_\alpha(\xi)}\mathrm{e}^{-N\int_\alpha^\xi(ydx-dV_\alpha+t_\alpha\frac{dz_\alpha}{z_\alpha})}}{E(\xi,\alpha)\sqrt{dx(\xi)d\zeta_\alpha(\alpha)}}\;(z_\alpha(\xi))^{Nt_\alpha}\\ &\quad\exp\left(-\sum_{g=0}^{\infty}\sum_{l=1,2-2g-l<0}^{\infty}\frac{1}{l!}\;N^{2-2g-l}\;\int_\alpha^\xi\int_\alpha^\xi\dots\int_\alpha^\xi W_l^{(g)}(p_1,\dots,p_l)\right)\\ &= \lim_{\eta\to\alpha}\left(K(\xi,\eta)\sqrt{\frac{dx(\eta)}{d\zeta_\alpha(\eta)}}\,\mathrm{e}^{-NV_\alpha(\eta)}\;(z_\alpha(\eta))^{Nt_\alpha}\right)\end{aligned} \tag{7-5}$$
où ζ_α est encore un paramètre local au voisinage de α, $\zeta_\alpha=\frac{1}{z_\alpha}$, et $\phi_{\alpha,N}(\xi)=\psi_{\alpha,-N}(\xi)$.

On appelle ces fonctions, **fonctions de Baker-Akhiezer** car elles possèdent les propriétés suivantes très similaires à celles des fonctions de Baker-Akhiezer introduites dans le cadre des systèmes intégrables classiques (cf [12]) :

– $\psi_{\alpha,N}$ est définie seulement dans le voisinage de α mais on peut facilement la prolonger analytiquement sur la courbe entière en choisissant un point de base arbitraire o dans le voisinage de α et en écrivant :
$$\begin{aligned}&\int_\alpha^\xi(ydx-dV_\alpha+t_\alpha\frac{dz_\alpha}{z_\alpha})+V_\alpha(\xi)-t_\alpha\ln(z_\alpha(\xi))\\ &=\int_o^\xi ydx+\int_\alpha^o(ydx-dV_\alpha+t_\alpha\frac{dz_\alpha}{z_\alpha})+V_\alpha(o)-t_\alpha\ln(z_\alpha(o)).\end{aligned} \tag{7-6}$$

– Comme K_N, ces fonctions pourraient à priori avoir des pôles aux points de banchements. Mais de façon similaire, le théorème 5.1 montre que lorsque les arguments approchent un point de branchement a, $\xi \to a$, les fonctions de Baker-Akhiezer se comportent suivant :

$$\psi_{\alpha,N}(\xi) \sim C\, Ai(\hat{\xi}) \qquad , \qquad \hat{\xi} = N^{2/3}(x(\xi) - x(a)) \tag{7-7}$$

où $C = \psi_{\alpha,N}(a)/Ai(0)$ est une constante de normalisation.
– Les seules singularités de $\psi_{\alpha,N}$ sont des singularités essentielles aux pôles de ydx où la partie singulière est donnée par $\exp(-N\int^{\xi} ydx)$.

Remarque 7.1 En fait, ces fonctions $\psi_{\alpha,N}$ ne sont pas à proprement parler des fonctions de Bakher-Akhiezer. En effet, elle ont des intégrales non nulles autour de cycles non-triviaux : elles ne reprennent pas la même valeur après que leur argument ai fait un tour autour de l'un de ces cycles. Les fonctions de Baker-Akhizer, quant à elles, ne doivent pas changer de valeur après un tour de leur variable autour de n'importe quel cycle. On peut donner cette propriété aux fonctions ψ par normalisation par des fonctions θ appropriées mais détruisant ainsi le développement en $\frac{1}{N^2}$. L'étude de cette normalisation est très intéressante mais sort largement du propos de cette thèse, c'est pourquoi nous n'aborderons pas plus le sujet.

Nous nous restreindrons donc aux $\psi_{\alpha,N}$ eux mêmes qui peuvent être vus comme des "fonctions de Baker-Akhiezer formelles", c'est-à-dire qu'elles satisfont des équations de Hirota ordre par ordre en $\frac{1}{N}$ comme nous le montrons dans le prochain paragraphe.

7.2 Relation de Sato.

Etant donnés deux points ξ et η de la surface de Riemann compacte Σ et un nombre complexe r, on définit la courbe :

$$\mathcal{E} + r[\xi, -\eta] = \left\{ \left(x(p), y(p) + r\frac{dS_{\xi,\eta}(p)}{dx(p)} \right) \quad , \; p \in \Sigma \right\} \tag{7-8}$$

La différentielle $ydx + rdS_{\xi,\eta}$ a les mêmes intégrales autour des cycles $\mathcal{A}$ que ydx. Elle a également les mêmes pôles avec la même partie singulière plus deux nouveaux pôles simples, l'un en $p = \xi$ avec résidu r et l'autre en $p = \eta$ avec résidu $-r$.

On peut alors démontrer la **relation de Sato** :

Théorème 7.1

$$K_N(\xi, \eta) = \frac{Z_N(\mathcal{E} + \frac{1}{N}[\xi, -\eta])}{Z_N(\mathcal{E})} \qquad , \qquad \psi_{\alpha,N}(\xi) = \frac{Z_N(\mathcal{E} + \frac{1}{N}[\xi, \alpha])}{Z_N(\mathcal{E})}. \tag{7-9}$$

Encore une fois, cette relation est à comprendre au sens des séries formelles en $\frac{1}{N}$.

7.3 Equations de Hirota

Considérons deux courbes algébriques $\mathcal{E}(x, y)$ et $\tilde{\mathcal{E}}(x, y)$ avec la même structure conforme, on a alors les relations bilinéaires :

Théorème 7.2

$$\operatorname*{Res}_{\eta\to\zeta} dx(\eta)\, K_N(\xi,\eta)\, \tilde{K}_{\tilde{N}}(\eta,\zeta) = K_N(\xi,\zeta) \tag{7-10}$$

et

$$\operatorname*{Res}_{\xi\to\alpha} dx(\xi)\, \psi_{\alpha,N}(\xi)\, \tilde{\psi}_{\alpha,-\tilde{N}}(\xi) = 0 \qquad \text{if } \tilde{N}\tilde{t}_\alpha > Nt_\alpha + 1 \tag{7-11}$$

qui prennent la même forme que l'équation de Hirota des systèmes intégrables classiques [12, 74] en les considérant comme des relations entre séries formelles en $\frac{1}{N}$.

8 Conclusion du chapitre.

Nous avons montré dans ce chapitre comment construire, à partir de n'importe quelle courbe algébrique, un ensemble infini de nombres et de formes différentielles qui coincident avec les développement topologiques de plusieurs modèles de matrices lorsque la courbe considérée est une courbe spectrale. Non seulement ceci permet d'unifier ces différents modèles dans une même classe mais de plus, connaissant les propriétés d'invariance de ces objets sous les déformations de la courbe algébrique considérée, nous avons ainsi construit un objet puissant pour comparer différents modèles : pour comparer deux modèles il suffit de voir si leurs courbes spectrales appartiennent à la même classe d'équivalence modulo les transformations conservant les $F^{(g)}$. De plus, nous avons vu que ces propriétés d'invariance sont un outil très puissant pour le calcul, comme le montre l'exemple de l'intégrale de Kontsevich où des résultats classiques sont retrouvés sans effort.

Nous avons également fait un premier pas en direction d'un système intégrable sous-jacent en construisant les briques élémentaires d'un système intégrable classique sur la courbe algébrique considérée. Cependant, si ce développement formel semble donner tous les termes d'un développement semi-classique, il n'en donne pas pour autant accès au système quantique sous jacent. En effet, en fixant les fractions de remplissage (et donc en empêchant les instantons dans le cas des modèles de matrices), il semble que l'on a brisé une symétrie globale qu'il faut restaurer pour revenir au système quantique correspondant à une valeur de N finie. Il reste donc beaucoup à explorer dans cette direction.

Une autre direction à explorer consiste à se demander si cette construction peut s'étendre à des variétés autres que des surfaces de Riemann obtenues par l'intermédiaire d'une courbe algébrique. En effet, il semblerait que la construction développée ici ne dépende que des points de branchements et pourrait par exemple s'étendre à certaines courbes de la forme :

$$\mathcal{E}(x,y) = 0 \tag{8-1}$$

où $\mathcal{E}$ n'est plus un polynôme mais une fonction analytique en ses deux variables.

Chapitre 5

Modèles de matrices et théorie des cordes.

Les modèles de matrices ont souvent joué un rôle, ou du moins tenté, dans l'étude de différentes théories des cordes. Au cours des dernières décénnies, avec l'évolution de la compréhension de ces théories, l'interaction entre cordes et matrices aléatoires a pris de nombreuses formes dont nous allons donner ici quelques exemples. Le lecteur intéressé pourra se reporter aux revues de Mariño sur le sujet [80, 81].

1 Théorie des cordes critiques et doubles limites d'échelle.

Les modèles de matrices tels qu'ils sont décrits dans cette thèse sont par exemple apparus de manière détournée dans l'étude de ce que l'on appelle la théorie des cordes critiques (voir la partie qui leur est consacrée dans le chapitre 1).

Considérons une théorie des cordes correspondant à mettre une théorie des champs conforme sur une surface de Riemann Σ_g. L'objet principal de cette théorie est alors l'énergie libre :

$$F = \sum_g g_s^{2g-2} F_g \qquad , \qquad F_g = \int \mathcal{D}h \, \mathcal{D}\phi e^{-\mathcal{S}[\phi,h]} \tag{1-1}$$

où g_s est la constante de couplage des cordes, h la métrique bidimensionnelle sur Σ_g, ϕ les champs de matière couplés à la gravité par l'action $\mathcal{S}$ et l'intégrale de chemin dans F_g porte sur les configurations de champs sur Σ_g. On peut généraliser cette énergie libre en perturbant l'action de la théorie conforme par un ensemble d'opérateurs à l'aide de modules t_n :

$$\mathcal{S}[\phi, h, t] := \mathcal{S}[\phi, h] + \sum_n t_n \mathcal{O}_n. \tag{1-2}$$

Le calcul de l'énergie libre, très compliqué en général, se simplifie beaucoup lorsque la théorie conforme a une charge centrale égale à la charge centrale critique $c = 26$. En effet, dans ce cas, la métrique se découple et il ne reste plus qu'à intégrer sur l'espace

des modules $\mathcal{M}_g$ des surfaces de genre g :

$$F_g = \int_{\mathcal{M}_g} d\tau \int \mathcal{D}\phi e^{-\mathcal{S}[\phi,\tau,t]} \tag{1-3}$$

où τ est un ensemble de $3g-3$ coordonnées paramétrisant l'espace des modules. On voit qu'il est alors nécessaire de décrire toutes les surfaces Σ_g, ce qui peut être fait en utilisant les modèles de matrices et leur limite continue.

On peut aller plus loin puisque lorsque la charge centrale satisfait $c < 1$, bien que la théorie ne soit plus critique et donc compliquée par la présence du champ de Liouville – un degré de liberté dynamique –, on peut calculer tous les F_g grâce aux modèles de matrices.

L'idée de base est assez naturelle. Puisque l'on veut décrire la feuille d'univers de la corde, on va la discrétiser pour pouvoir la générer par une intégrale de matrice formelle comme définie dans les chapitres 2 et 3 de cette thèse. Les doubles limites d'échelle étudiées dans la partie 5 du chapitre 2 permettent alors d'atteindre des surfaces continues en imposant une charge centrale $c < 1$ à la théorie conforme. La partie divergente des différents termes du développement topologique du modèle de matrices sont alors identifiables avec les coefficients du développement en g_s de l'énergie libre de la théorie des cordes :

$$F_g = F^{(g)}(\mathcal{E}_{DSL}) \tag{1-4}$$

où $\mathcal{E}_{DSL}$ est la courbe obtenue en prenant la double limite d'échelle de la courbe spectrale du modèle de matrices. De même, les $W_k^{(g)}$ peuvent être interprétés comme des fonctions de corrélation de la théorie des cordes : elles correspondent à des amplitudes de cordes ouvertes consistant à intégrer sur un ensemble de surfaces avec bord.

Notons que, jusqu'à maintenant, ce calcul s'effectuait en évaluant l'énergie libre du modèle de matrice lui même avant de prendre la double limite d'échelle du résultat obtenu. Le résultat de [**IV**]résumé dans la partie 5 du chapitre 4, montre que ce passage à la limite n'est pas nécessaire. L'énergie libre de la théorie des cordes peut directement être obtenue en calculant les invariants $F^{(g)}$ de la courbe algébrique $\mathcal{E}_{(p,q)}$ du modèle minimal (p,q) voulu sans qu'elle ne vienne d'une quelconque limite ! Ce résultat est un premier indice révélant un lien plus profond entre les invariants algébriques $F^{(g)}$ et l'énergie libre de théories des cordes indépendamment de l'existence d'un quelconque modèle de matrice intermédiaire.

2 Théories de cordes topologiques.

Cette approche des théories des cordes par les modèles de matrices était, jusqu'il y a peu, limitée à ce secteur particulier correspondant aux doubles limites d'échelle. Mais l'engouement récent, en mathématiques et en physique, pour les théories des cordes topologiques a permis de montrer que l'interaction entre les deux modèles est bien plus profonde.

Les théories des cordes topologiques correspondent au cas où la théorie conforme couplée à la gravité est un modèle Sigma bidimensionnel non linéaire dont l'espace

cible X est une variété de Calabi-Yau[1] [78, 106, 107]. Cela signifie que les champs de base sont des applications :

$$\phi \,:\, \Sigma_g \to X. \tag{2-1}$$

Il existe en fait deux versions de telles théories : le modèle A lié à la théorie des invariants de Gromov-Witten et le modèle B lié aux déformations de la structure complexe de la Calabi-Yau X. C'est ce dernier modèle que nous allons étudier dans la suite.

Explicitons d'abord la structure complexe d'une variété de Calabi-Yau X de dimension complexe 3. La structure complexe d'une Calabi-Yau X est donnée par un ensemble de modules formant un espace $\mathcal{M}$ de dimension $h^{1,2}(X)$ paramétrisable comme suit. On commence par choisir une base de $H_3(X,\mathbb{Z})$:

$$(A_I, B_I) \qquad , \qquad I = 0, 1, \ldots, h^{1,2} \text{ tels que } A_I \cap B_J = \delta_{IJ}. \tag{2-2}$$

On définit alors les périodes de la Calabi-Yau par :

$$X_I := \int_{A_I} \Omega \text{ et } \mathcal{F}_I := \int_{B_I} \Omega \tag{2-3}$$

où Ω est une section holomorphe non nulle de la fibrée canonique $\Omega^{3,0}(X)$[2]. On peut montrer que les X_I sont des coordonnées projectives de $\mathcal{M}$, et donc que les $\mathcal{F}_I = \mathcal{F}_I(X)$ en sont des fonctions. On peut même montrer que leur dépendance provient d'une unique fonction $\mathcal{F}(X)$ selon :

$$\mathcal{F}_I(X) = \frac{\partial \mathcal{F}(X)}{\partial X_I}. \tag{2-4}$$

Cette fonction est homogène de degré deux en X_I, on peut donc introduire des nouvelles coordonnées

$$t_I := \frac{X_I}{X_0} \qquad , \qquad I = 1, \ldots, h^{1,2}(X) \tag{2-5}$$

de manière à définir le **prépotentiel** :

$$F_0(t) = \frac{1}{X_0^2}\mathcal{F}(X) \tag{2-6}$$

qui s'avère coincider avec l'énergie libre de genre 0 des cordes topologiques de type B sur X que nous définissons maintenant.

L'action d'une théorie topologique de type B sur X est obtenue par une déformation de l'action standard :

$$S_{\mathcal{N}=2} := S(0) + \sum_{I=1}^{n} t_I \int_{\Sigma_g} \phi_I^{(2)} + \sum_{I=1}^{n} \overline{t}_I \int_{\Sigma_g} \overline{\phi}_I^{(2)} \tag{2-7}$$

par les opérateurs chiraux ϕ_I et anti-chiraux $\overline{\phi}_I$ de la théorie correspondant aux directions marginales.

[1] Cette propriété est très importante pour que la théorie soit topologique. Nous ne la décrirons pas ici et le lecteur intéressé pourra se réferer aux revues [80, 81] pour plus de détail.

[2] L'existence d'une telle section est assurée par la propriété de Calabi-Yau de la variété X.

Notons que la déformation de l'action par les $\bar{t}$ peut s'écrire comme un terme BRST-exact par rapport à la symétrie topologique de la théorie. On s'attendrait alors à ce que l'énergie libre de genre g, $F^{(g)}$, ainsi que les fonctions de corrélation

$$C^{(g)}_{I_1\dots I_k} := \left\langle \int_{\Sigma_g} \phi^{(2)}_{I_1} \dots \int_{\Sigma_g} \phi^{(2)}_{I_k} \right\rangle \tag{2-8}$$

ne dépendent pas de ces paramètres non-holomorphes $\bar{t}$. Cependant, le couplage à la gravité détruit cette indépendance en introduisant une anomalie connue sous le nom d'**anomalie holomorphe**. Cette anomalie provenant de termes de bord peut être entièrement caractérisée par des équations de récurrence : les **équations d'anomalie holomorphe** [15]. Celles-ci peuvent être écrites en utilisant les notations suivantes. La métrique de Zamolodchikov sur l'espace des modules peut être définie en termes d'une fonction de Kähler K par

$$G_{I\overline{J}} = \partial_I \partial_{\overline{J}} K \tag{2-9}$$

où l'on a utilisé la notation

$$\partial_I := \frac{\partial}{\partial t_I} \qquad , \qquad \partial_{\overline{I}} := \frac{\partial}{\partial \bar{t}_I}. \tag{2-10}$$

L'énergie libre de genre 0, $F^{(0)}$, donne accès aux fonctions holomorphes à deux et trois points :

$$\tau_{IJ} := \partial_I \partial_J F^{(0)} \qquad , \qquad C_{IJK} := \partial_I \partial_J \partial_K F^{(0)}. \tag{2-11}$$

Les équations d'anomalie holomorphes peuvent alors s'écrire :

$$\forall g \geq 2\,,\ \partial_{\overline{K}} F^{(g)} = \frac{1}{2} C^{IJ}_{\overline{K}} \left(D_I D_J F^{(g-1)} + \sum_{h=1}^{g-1} D_I F^{(h)} D_J F^{(g-h)} \right) \tag{2-12}$$

où la dérivée covariante est définie par

$$D_I = \partial_I - \Gamma_I + (2-2g)\partial_I K \tag{2-13}$$

avec le symbole de Christoffel

$$\Gamma^K_{IJ} := G^{K\overline{M}} \partial_I G_{J\overline{M}} \tag{2-14}$$

et le tenseur

$$C^{IJ}_{\overline{K}} := e^{2K} G^{I\overline{M}} G^{J\overline{N}} \overline{C}_{\overline{MNK}}. \tag{2-15}$$

Pour le genre 1, l'équation s'écrit :

$$\partial_I \partial_{\overline{J}} F^{(1)} = \frac{1}{2} C_{IKL} C^{KL}_{\overline{J}} - \left(\frac{\chi}{24} - 1 \right) G_{I\overline{J}}. \tag{2-16}$$

Notons également que les fonctions de corrélation peuvent être obtenues par action de la dérivée covariante sur les énergies libres :

$$C^{(g)}_{I_1\dots I_k} = D_{I_1} \dots D_{I_k} F^{(g)}. \tag{2-17}$$

On peut donc écrire des équations d'anomalie pour elles aussi :

$$\begin{aligned}\partial_{\overline{K}} C^{(g)}_{I_1\dots I_k} \quad = \quad & \frac{1}{2} C^{MN}_{\overline{K}} \Big(C^{(g-1)}_{MNI_1\dots I_k} \\ & + \sum_{r=0}^{g} \sum_{s=0}^{k} \frac{1}{s!(n-s)!} \sum_{\sigma\in S_k} C^{(r)}_{MI_{\sigma(1)}\dots I_{\sigma(s)}} C^{(g-r)}_{NI_{\sigma(s+1)}\dots I_{\sigma(k)}} \Big) \\ & -(2g-2+n-1) \sum_{s=1}^{k} G_{\overline{K}I_s} C^{(g)}_{I_1\dots I_{s-1}I_{s+1}\dots I_k}. \end{aligned} \tag{2-18}$$

Une fois les équations d'anomalie holomorphes résolues, il reste à fixer une constante d'intégration, i.e. une fonction holomorphe des paramètres. Pour ce faire, on cherche à déterminer la limite holomorphe de $F^{(g)}(t,\bar{t})$ définie par :

$$F^{(g)}(t) := \lim_{\bar{t}\to\infty} F^{(g)}(t,\bar{t}). \tag{2-19}$$

Ce passage à la limite n'est pas anodin. En effet, si l'on transforme ainsi l'énergie libre en une fonction holomorphe des modules, on perd une propriété de symétrie : l'invariance modulaire de $F^{(g)}(t,\bar{t})$ est brisée. Nous avons vu dans le chapitre précédent que ce comportement se retrouve dans le cadre des invariants algébriques losque l'on fait varier κ.

Remarque 2.1 Les amplitudes définies ici ont pu être interprétées comme les amplitudes d'une théorie quantique des champs six dimensionnelle sur la Calabi-Yau X : la **théorie de Kodaira-Spencer** [15]. Dans la suite, nous ferons donc régulièrement référence à cette théorie pour parler des amplitudes du modèle de type B.

3 Conjecture de Dijkgraaf-Vafa et modèle B local.

3.1 Variétés de Calabi-Yau locales.

Parmi les différentes classes de variétés de Calabi-Yau possibles pour l'espace cible, il en existe une qui permet de rendre le lien entre modèle B et modèles de matrices (ou invariants algébriques) plus explicite encore. On appelle les variétés non compactes correspondantes des **variétés de Calabi-Yau locales** [69]. Il a été monré dans [69] que leurs propriétés sont alors encodées dans une surface de Riemann compacte $\overline{\Sigma}_n$ de genre n[3] par l'intermédiaire des modules

$$t_I \propto \int_{\mathcal{A}_I} y dx \qquad , \qquad I = 1,\dots,n \tag{3-1}$$

avec $\{(\mathcal{A}_I,\mathcal{B}_I)\}$ une base de cycles de $\overline{\Sigma}_n$ et la forme ydx définie par une paramétrisation de $\overline{\Sigma}_n$ comme équation algébrique. Ainsi, au lieu de travailler sur une variété de dimension 3, on travaille sur une variété de dimension 1, une surface de Riemann, tout comme

[3]Attention, cette surface ne doit pas être confondue avec la feuille d'univers Σ_g sur laquelle portent les intégrales du paragraphe précédent.

dans le cadre des matrices aléatoires. Dans le paragraphe suivant, nous montrons sur un exemple précis comment passer de la Calabi-Yau à la surface de Riemann.

Dans ce contexte, la métrique de Zamolodchikov est donnée par

$$G_{I\overline{J}} = -i(\tau - \overline{\tau})_{IJ} \tag{3-2}$$

où la fonction à deux points τ est simplement la matrice des périodes de Riemann de $\overline{\Sigma}_n$. Le symbole de Christoffel et le tenseur $C_{\overline{K}}^{IJ}$ sont quant à eux donnés par :

$$\Gamma_{IJ}^{L} = \left[(\tau - \overline{\tau})^{-1}\right]^{LM} \partial_I \tau_{JM} \tag{3-3}$$

et

$$C_{\overline{K}}^{IJ} = -\left[(\tau - \overline{\tau})^{-1}\right]^{IM} \left[(\tau - \overline{\tau})^{-1}\right]^{JN} C_{\overline{MNK}}. \tag{3-4}$$

Les équations d'anomalie holomorphes sont alors toujours données par Eq. (2-12) pour les énergies libres en considérant la dérivée covariante :

$$D_I := \partial_I - \Gamma_I. \tag{3-5}$$

De même, les fonctions de corrélation satisfont toutjours Eq. (2-18) mais sans le terme de la seconde ligne, i.e :

$$\partial_{\overline{K}} C^{(g)}_{I_1 \dots I_k} = \frac{1}{2} C_{\overline{K}}^{MN} \left(C^{(g-1)}_{MNI_1 \dots I_k} + \sum_{r=0}^{g} \sum_{s=0}^{k} \frac{1}{s!(n-s)!} \sum_{\sigma \in S_k} C^{(r)}_{MI_{\sigma(1)} \dots I_{\sigma(s)}} C^{(g-r)}_{NI_{\sigma(s+1)} \dots I_{\sigma(k)}} \right). \tag{3-6}$$

3.2 Conjecture de Dijkgraaf-Vafa.

Considérons un cas particulier de Calabi-Yau locale donnée par l'équation[4]

$$u^2 + v^2 = H(x,z) \quad \text{avec} \quad H(x,z) = z^2 - (W'(x))^2 + f(x) \tag{3-7}$$

où $W(x)$ et $f(x)$ sont deux polynômes de degrés respectifs $n+1$ et $n-1$. La section holomorphe est alors donnée par

$$\Omega = \frac{dxdzdu}{2\pi v}. \tag{3-8}$$

Pour cette géométrie particulière, montrons que ses périodes sur les cycles d'une base symplectique de la Calabi-Yau peuvent se ramener à des intégrales sur les cycles de la courbe $\overline{\Sigma}_n$

$$y^2(x) = (W'(x))^2 + f(x). \tag{3-9}$$

Supposons que cette courbe est générique, c'est-à-dire qu'il y a $2n$ points de branchments distincts :

$$(W'(x))^2 - f(x) = \prod_{i=1}^{2n} (x - x_i). \tag{3-10}$$

[4]C'est bien une variété de dimension 3 complexe : une équations polynomiale liant 4 variables complexes u, v, x et z !

Considérons les cycles $\{\mathcal{A}_i\}_{i=1\ldots n}$ définis par

$$\forall i = 1, \ldots, n\,, \quad \mathcal{A}_i := [x_{2i-1}, x_{2i}]\,. \tag{3-11}$$

On construit alors les cycles $\tilde{\mathcal{A}}_i$ de la Calabi-Yau par fibrations sur ces intervalles par l'équation :

$$\forall j = 1, \ldots, n\,,\ \forall x \in \mathcal{A}_j\,, \quad u^2 + v^2 + z^2 = \prod_{i=1}^{2n}(x - x_i). \tag{3-12}$$

Notons que ces cycles sont n 3-sphères de la variété de Calabi-Yau se projetant sur les cycles A_i de la courbe $H(x, y) = 0$ dans le plan de x. De même, on définit les cycles $\tilde{\mathcal{B}}$ par fibration sur les cycles $\mathcal{B}_i$ orthogonaux aux cycles $\mathcal{A}_i$. Calculons maintenant les périodes de la section Ω sur ces cycles.

Soit $\mathcal{C}$ un cycle $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{C}}$ le cycle corespondant sur la variété de Calabi-Yau. Alors

$$\int_{\tilde{\mathcal{C}}} \Omega = \int_{\tilde{\mathcal{C}}} \frac{dxdzdu}{2\pi v}. \tag{3-13}$$

Puisque $\tilde{\mathcal{C}}$ peut être vu comme une 2-sphère

$$u^2 + v^2 + z^2 = y(x)^2 \tag{3-14}$$

paramétrisée par x se déplaçant sur $\mathcal{C}$, on peut décomposer cette intégrale en une intégrale sur cette 2-sphère de rayon $y(x)$ et une intégrale sur $\mathcal{C}$[5] :

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\mathcal{C}}} \Omega \quad &= \quad \int_{\mathcal{C}} dx \int_0^{y(x)} \frac{rdr}{\sqrt{y(x)^2 - r^2}} \\ &= \quad \int_{\mathcal{C}} y(x)dx. \end{aligned} \tag{3-15}$$

Nous avons ainsi montré que, en intégrant la partie "triviale" de la géométrie de la variété de Calabi-Yau, on peut se ramener à étudier la projection sur une courbe hyperelliptique.

Jusqu'ici, nous avions simplement vu une très forte similitude entre les propriétés de transformation des énergies libres sous les déformations de la Calabi-Yau et les propriétés de variations des invariants algébriques associés aux surfaces $\overline{\Sigma}_n$ sans pour autant aller plus loin. Dans ce cas précis, on peut aller plus loin. On reconnait en effet dans l'équation de $\overline{\Sigma}_n$, la forme de l'équation de la courbe spectrale classique d'un modèle à une matrice avec un potentiel $W(x)$. Par ailleurs, Dijgraaf et Vafa ont conjecturé dans [36] que les énergies libres holomorphes $F^{(g)}(t)$ de cette théorie sont données par les termes du développement topologique du modèle à une matrice hermitienne. Cette conjecture a été vérifiée aux ordres 0 [36], 1 [37, 70] et 2 [58].

[5] On a supposé ici que u, v et z sont réels lorsque $x \in \mathcal{C}$. On peut faire exactement la même chose dans le cas où ils ne le sont pas

3.3 Miroirs de géométries toriques.

Il existe une autre classe de Calabi-Yau intéressante. Celle-ci est liée à la **symétrie miroir** [57] qui est une symétrie très importante puisqu'elle permet de relier les modèles de type A et de type B, i.e. la théorie des invariants de Gromov-Witten et la théorie des déformations de variétés de Calabi-Yau. Elle dit qu'étant donnée une Calabi-Yau $\widetilde{X}$, il existe une autre Calabi-Yau X telle que le modèle A sur $\widetilde{X}$ et le modèle B sur X coïncident :

$$F_A^{(g)}(t;\widetilde{X}) = F_B^{(g)}(t,X). \tag{3-16}$$

Dans le cas où $\widetilde{X}$ a une géométrie torique [19], son image par la symétrie miroir est caractérisée par une surface de Riemann $\overline{\Sigma}_n$ définie par une courbe algébrique du type[6] :

$$y^2 = M^2(x)\prod_{i=1}^{l}(x-x_i) \tag{3-17}$$

où $M(x)$ est une fonction transcendentale. De récents travaux [82], semblent indiquer que les amplitudes holomorphes des cordes ouvertes et fermées de telles modèles de type B sont également données par les énergies libres et fonctions de corrélations associées à la courbe Eq. (3-17).

4 Théorie de Kodaira-Spencer et anomalie holomorphe.

Nous montrons dans cette partie que, pour un choix[7] particulier de

$$\kappa = -(\tau-\overline{\tau})^{-1}, \tag{4-1}$$

les invariants $F^{(g)}$ satisfont les équations d'anomalie holomorphe. Rappelons que pour ce choix, ce sont des invariants modulaires et ils possèdent ainsi une première propriété nécessaire pour les identifier aux fonction de partitions de la théorie de Kodaira-Spencer.

Pour ce choix de κ, les fonctions de corrélation et énergies libres ne sont plus des fonctions holomorphes des modules. En effet, par l'intermédiaire de κ, ils ont maintenant une partie non holomorphe. Nous nous intéressons donc à cette nouvelle dépendance en étudiant particulièment leurs variations par rapport aux $\overline{\epsilon}_i$. Elles sont obtenues en utilisant les variations par rapport à κ calculées dans le chapitre 4 :

$$\frac{\partial W_k^{(g)}}{\partial\overline{\epsilon}} = \frac{\partial\kappa}{\partial\overline{\epsilon}}\frac{\partial W_k^{(g)}}{\partial\kappa} \quad , \quad \frac{\partial\kappa}{\partial\overline{\epsilon}} = -\kappa\frac{\partial\overline{\tau}}{\partial\overline{\epsilon}}\kappa \quad , \quad \frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial\epsilon^2} = 2\mathrm{i}\pi\tau \tag{4-2}$$

d'où

$$\frac{\partial W_k^{(g)}}{\partial\overline{\epsilon}} = -\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\,\kappa\frac{\partial^3\overline{F}^{(0)}}{\partial\overline{\epsilon}^3}\kappa\frac{\partial W_k^{(g)}}{\partial\kappa}. \tag{4-3}$$

[6] En fait, il faut effectuer une transformation exponentielle sur les variables pour obtenir ce résultat.

[7] Dans toute cette partie nous allons utiliser une notation vectorielle pour décrire les fractions de remplissage ϵ et les cycles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sous forme de vecteurs de taille $\mathcal{G}$. Il sera ainsi plus aisé de manipuler leur lien avec les matrices de taille $\mathcal{G}\times\mathcal{G}$, τ et κ sans avoir à faire appelle à de fastidieuses sommations sur des indices.

Ainsi, en utilisant le théorème 4.8 du chapitre 4 :

$$\frac{\partial W_k^{(g)}}{\partial \overline{\epsilon}} = -\frac{1}{(2\mathrm{i}\pi)^2}\,\kappa\frac{\partial^3\overline{F}^{(0)}}{\partial\overline{\epsilon}^3}\kappa\;\frac{1}{2}\oint_{r\in\mathcal{B}_j}\oint_{s\in\mathcal{B}_i}\Big(W_{k+2}^{(g-1)}(p_K,r,s) + \sum_h\sum_{L\subset K} W_{|L|+1}^{(h)}(p_L,r)W_{k-|L|+1}^{(g-h)}(p_{K/L},s)\Big). \tag{4-4}$$

Or, avec le choix $\kappa = 1/(\overline{\tau}-\tau)$, on a la propriété :

$$\kappa\frac{\partial\tau}{\partial\epsilon}\kappa = \frac{\partial\kappa}{\partial\epsilon}, \tag{4-5}$$

ce qui implique que l'opérateur différentiel D[8] introduit dans Eq. (4-10) du chapitre 4 se réduit à la dérivée usuelle :

$$D_{\epsilon_I} = \partial/\partial\epsilon_I. \tag{4-6}$$

On peut alors calculer son action sur les fonctions de corrélations :

$$\frac{\partial W_k^{(g)}}{\partial\epsilon} = -\oint_{\mathcal{B}} W_{k+1}^{(g)} = -\oint_{\underline{\mathcal{B}}} W_{k+1}^{(g)} + \tau\oint_{\underline{\mathcal{A}}} W_{k+1}^{(g)}, \tag{4-7}$$

et, en dérivant une seconde fois, on trouve :

$$\frac{\partial^2 W_k^{(g)}}{\partial\epsilon^2} + \frac{\partial\tau}{\partial\epsilon}\kappa\frac{\partial W_k^{(g)}}{\partial\epsilon} = \oint_{\mathcal{B}}\oint_{\mathcal{B}} W_{k+2}^{(g)}. \tag{4-8}$$

On obtient finalement l'équation :

$$\frac{\partial W_k^{(g)}}{\partial\overline{\epsilon}} = -\frac{1}{(2\mathrm{i}\pi)^2}\,\kappa\frac{\partial^3\overline{F}^{(0)}}{\partial\overline{\epsilon}^3}\kappa\;\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 W_k^{(g-1)}}{\partial\epsilon^2} + \frac{\partial\tau}{\partial\epsilon}\kappa\frac{\partial W_k^{(g-1)}}{\partial\epsilon} + \sum_h\sum_{L\subset K}\frac{\partial W_l^{(h)}}{\partial\epsilon}\,\frac{\partial W_{k-l}^{(g-h)}}{\partial\epsilon}\Big). \tag{4-9}$$

Pour la comparer à l'équation d'anomalie holomorphe, utilisons les notations de théorie des cordes :

$$t^I = (2\mathrm{i}\pi)^{\frac{1}{2}}\epsilon^I. \tag{4-10}$$

et la dernière équation s'écrit :

$$\frac{\partial W_k^{(g)}}{\partial\overline{t}} = -\kappa\frac{\partial^3\overline{F}^{(0)}}{\partial\overline{t}^3}\kappa\;\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 W_k^{(g-1)}}{\partial t^2} + \frac{\partial\tau}{\partial t}\kappa\frac{\partial W_k^{(g-1)}}{\partial t} + \sum_h\sum_{L\subset K}\frac{\partial W_l^{(h)}}{\partial t}\,\frac{\partial W_{k-l}^{(g-h)}}{\partial t}\Big). \tag{4-11}$$

Pour les énergies libres, on prend le cas où $k=0$ et on obtient :

$$\frac{\partial F^{(g)}}{\partial\overline{t}} = -\kappa\frac{\partial^3\overline{F}^{(0)}}{\partial\overline{t}^3}\kappa\;\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 F^{(g-1)}}{\partial t^2} + \frac{\partial\tau}{\partial t}\kappa\frac{\partial F^{(g-1)}}{\partial t} + \sum_{h=1}^{g-1}\frac{\partial F^{(h)}}{\partial t}\,\frac{\partial F^{(g-h)}}{\partial t}\Big) \tag{4-12}$$

[8] Attention à ne pas confondre cet opérateur avec la dérivée covariante introduite dans cette partie.

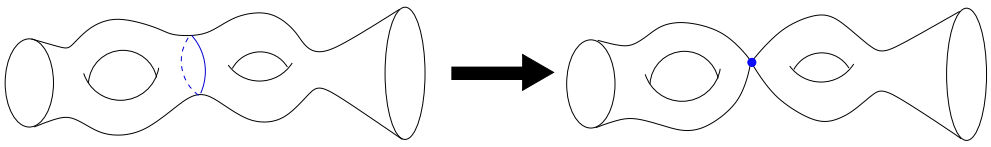
qui n'est rien d'autre que l'équation d'anomalie holomorphe pour les énergies libres Eq. (2-12) puisque

$$-\kappa^{IM}\frac{\partial^3\overline{F}^{(0)}}{\partial\bar{t}^{\overline{M}}\partial\bar{t}^{\overline{N}}\partial\bar{t}^{\overline{K}}}\kappa^{JN}=C^{IJ}_{\overline{K}}\,,\qquad \frac{\partial\tau_{JM}}{\partial t^I}\kappa^{KM}=-\Gamma^K_{IJ}. \tag{4-13}$$

Remarquons que l'on a également obtenu une équation similaire pour les fonctions de corrélation elles-mêmes :

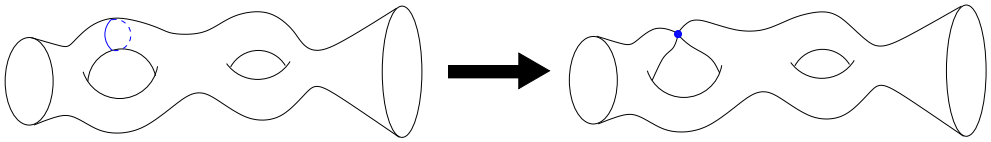
$$\partial_{\overline{K}}W^{(g)}_k=\frac{1}{2}C^{IJ}_{\overline{K}}\Big(D_ID_JW^{(g-1)}_k+\sum_h\sum_{L\subset K}D_IW^{(h)}_lD_JW^{(g-h)}_{k-l}\Big) \tag{4-14}$$

qui correspondent dans le cadre de la théorie des cordes topologiques aux amplitudes de cordes ouvertes par opposition aux cordes fermées décrites par les énergies libres (cf [82] pour des résutats explicites dans le cas de variétés miroires de Calabi-Yau toriques). On peut alors voir cette équation comme une équation d'anomalie holomorphe pour les cordes ouvertes. Ce type d'équations a déjà été discuté dans un cadre général [15] où elles sont obtenues en étudiant les dégenerescences possibles des surfaces de Riemann avec bords : c'est-à-dire que l'on regarde ce qu'il se passe lorsque la surface est "pincée" suivant l'un des cycles non triviaux qui est alors ramené à un point. Partant d'une surface $\Sigma_{g,k}$ de genre g à k bords, les deux termes du membre de droite de Eq. (4-14) correspondent d'une part au cas où ce pincement coupe la surface en deux surfaces disconnectées :



(4-15)

et au cas où l'on a pincé un noeud interne à la surface :



(4-16)

On peut également montrer que les amplitudes $C^{(g)}_{I_1\cdots I_k}$ sont données par

$$C^{(g)}_{I_1\cdots I_k}=\frac{(-1)^k}{(2\mathrm{i}\pi)^{\frac{k}{2}}}\oint_{\mathcal{B}_{I_1}}\cdots\oint_{\mathcal{B}_{I_k}}W^{(g)}_k(p_K) \tag{4-17}$$

puisque la dérivée covariante $D_I=\partial_I-\Gamma_I$ commute avec les intégrales sur les cycles $\mathcal{B}$ lorsque l'on agit sur une différentielle dont les intégrales sur les cycles $\mathcal{A}$ sont nulles.

Ainsi, l'intégration de toutes les variables dans Eq. (4-14) sur les cycles $\mathcal{B}$ redonne l'équation d'anomalie holomorphe pour les fonctions de corrélation dans le cas local. Cela montre que l'équation d'anomalie holomorphe n'implique que le secteur des cordes fermées dans les états intermédiaires.

5 Conclusion du chapitre.

Nous avons montré dans ce chapitre que les énergies libres et fonctions de corrélation calculées sur une courbe algébrique $\mathcal{E}$ satisfont toujours les équations d'anomalie holomorphe Eq. (2-12) pour le choix de $\kappa = -(\tau - \overline{\tau})^{-1}$. Cela montre que leur partie non holomorphe coincide bien avec la partie non-holomorphe d'un modèle de type B défini sur une Calabi-Yau locale caractérisée par la surface de Riemann $\mathcal{E}$. Par ailleurs, la limite holomorphe $\bar{t} \to \infty$ corespondant à $\kappa = 0$ fixe sans ambiguité la partie holomorphe des invariants algébriques. Entre autres, si la courbe algébrique considérée est la courbe spectrale d'un modèle de matrices, cette limite correspond aux énergies libres et fonctions de corrélations dudit modèle.

Ainsi, la démonstration de la conjecture de Dijgraaf-Vafa est ramenée à montrer que la partie holomorphe de l'énergie libre des modèles locaux de type B sont bien les invariants algébriques définis dans le chapitre 4 pour $\kappa = 0$.

Chapitre 6

Conclusion.

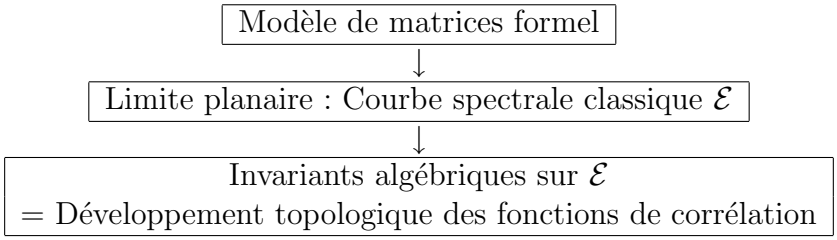
1 Résultats principaux : du développement topologique des modèles de matrices à la théorie des cordes topologiques.

1.1 Calcul d'intégrales à deux matrices formelles.

Dans ce mémoire, nous avons tout d'abord montré comment définir proprement un modèle à deux matrices formel comme fonction génératrice des surfaces discrétisées portant une structure de spin de type Ising. Nous avons particulièrement insisté sur le fait que ce modèle ne coincïde pas, en général, avec le développement d'une quelconque intégrale convergente quand la taille des matrices considérées tend vers l'infini.

Nous avons également montré commment associer une courbe algébrique à différents modèles de matrices formels ne dépendant que de l'ordre dominant du développement topologique du modèle considéré, c'est-à-dire de ce que l'on appelle habituellement limite classique ou limite planaire. Nous avons alors décrit une procédure unique pour cacluler tous les termes du développement topologique des observables du modèle considéré.

On peut résumer cette procédure par le graphique suivant :



Nous avons donc montré que ces différentes intégrales formelles ne sont qu'un seul et même objet en tant que fonctionnelle d'une courbe algébrique et proposé une méthode simple et efficace pour les calculer.

Le fait qu'une telle procédure existe peut peut-être s'expliquer par la combinatoire. Un modèle de matrice formel correspond à compter des cartes. Ces cartes peuvent être vues comme recollement de disques entre eux. Pour construire de telles carte il faut deux éléments : le poids d'un disque (obtenu par $W_1^{(0)}$ et donc ydx), et le poids d'un

recollement, encodé dans l'équation de la courbe spectrale classique. De ce point de vue, il n'est pas surprenant que la courbe spectrale classique possède toute l'information nécessaire au calcul de tout le développement topologique des observables du modèle et que la procédure à mettre en oeuvre pour passer de cette courbe aux fonctions de corrélation ne dépende pas du modèle.

1.2 Invariants et déformations de courbes algébriques.

Nous avons également montré comment généraliser cette procédure au delà des modèle de matrices en étendant cette construction à n'importe quelle courbe algébrique $\mathcal{E}$. Nous avons alors pu montrer que les nombres $F^{(g)}$ et les formes différentielles $W_k^{(g)}$ ainsi obtenues ont un comportement facile à décrire sous les déformations de $\mathcal{E}$:

- **Invariance symplectique :** les énergies libre $F^{(g)}$ sont invariantes sous de nombreuses transformations conservant la forme $dx \wedge dy$;
- **Transformations modulaires :** les transformations modulaires de la courbe peuvent être totalement absorbées dans la normalisation de la fonction à deux points $W_{2,0}^{(0)}$ par l'ajout d'un nouveau paramètre : une matrice symétrique κ ;
- **Variation de ydx :** toute variation de la forme différentielle ydx du type :

$$\delta ydx(p) := \int_{\mathcal{C}} B(\xi, p)\Lambda(\xi) \tag{1-1}$$

se traduit par une variation des fonctions de corrélation :

$$\delta W_k^{(g)}(\mathbf{p_K}) = \int_{\mathcal{C}} W_{k+1}^{(g)}(\xi, \mathbf{p_K})\Lambda(\xi). \tag{1-2}$$

Ces invariants sont donc fortement liés à la théorie des déformations des courbes algébriques. Entre autres choses, il est très intéressant de noter que ces résultats permettent d'interpréter la fonction de corrélation à k points de genre g, $W_{k,0}^{(g)}(p_1, \dots, p_k)$, calculée sur une courbe $\mathcal{E}$ comme l'énergie libre de genre g, $F(\widetilde{\mathcal{E}})^{(g)}$, calculée sur une courbe $\widetilde{\mathcal{E}}$ obtenue à partir de $\mathcal{E}$ en ajoutant des pôles en k points marqués $p_1, \dots, p_k$. Cette remarque fait écho avec l'interprétation combinatoire des fonctions de corrélations dans le cadre des modèles de matrices. En effet, ces propriétés semblent faire un lien entre la courbe spectrale du modèle de matrices et les surfaces discrétisées générées par les fonctions de corrélation : ajouter un bord aux surfaces générées revient à ajouter un pôle à la courbe spectrale.

1.3 Théories conformes et intégrabilité.

Nous avons utilisé cette procédure générale pour retrouver des résultats déjà connus de manière simple et rigoureuse. Nous avons ainsi montré comment les doubles limites d'échelles de modèles à une et deux matrices coïncident avec des modèles de matrices en champ extérieur (obtenu sans prendre de limite). Nous avons donc montré comment avoir accès directement aux observables de modèles minimaux de type (p, q) sans avoir besoin de faire un quelconque passage à la limite. Il suffit de considérer la courbe algébrique $\mathcal{E}_{(p,q)}$ associée.

Ceci nous a également permis de montrer à nouveau que les intégrales de matrices, et donc nos invariant algébriques, fournissent une réalisation explicite des fonctions τ des hierarchies intégrables KP et KdV par une simple comparaison des courbes algébriques associées.

Ce lien entre les invariants définis et l'intégrabilité a été rendu plus explicite, de manière générale, par la construction de fonction, de Baker-Akhiezer associées à une courbe algébrique quelconque. Ces fonctions permettent en effet de définir des équations de Hirota et des relations de Sato formelles associées à n'importe quelle courbe algébrique.

1.4 Conjecture de Dijkgraaf-Vafa.

Nous avons montré comment, en fixant le nouveau paramètre $\kappa = \frac{1}{\overline{\tau}-\tau}$, on peut rendre les $F^{(g)}$ et $W_k^{(g)}$ invariants modulaires en leur faisant perdre leur propriété d'holomorphicité. Nous avons ainsi reproduit le comportement des fonctions de partition de la théorie de Kodaira-Spencer décrit dans [1]. Nous avons alors pu montrer que les $F^{(g)}$ sont solutions des équations d'anomalies holomorphes des cordes fermées de cette théorie appuyant ainsi un peu plus la conjecture de Dijkgraaf-Vafa liant théorie des cordes topologique et modèles de matrices. Grâce à ce résultat, il ne reste plus qu'à identifier la partie holomorphe de la fonction de partition de la théorie de Kodaira-Spencer et les invariants algébriques correspondants pour $\kappa = 0$ (qui est la valeur à prendre pour pouvoir obtenir les observables de modèles de matrices).

Nous avons également montré que les $W_k^{(g)}$ satisfont des équations d'anomalie du même type que l'on aimerait interpréter comme équations d'anomalies holomorphes pour des cordes ouvertes cette fois-ci.

2 Perspectives.

La construction générale d'invariants décrite dans cette thèse pose beaucoup de questions quant à son interprétation d'une part et appelle des généralisations naturelles d'autre part.

2.1 Etude d'autres modèles de matrices.

Deux questions viennent naturellement à l'esprit suite à cette construction. Etant donnée une courbe algébrique quelconque, existe-t-il un modèle de matrice dont les observables sont données par les invariants associés à la courbe ? Au contraire, étant donné un modèle de matrice, dans quelle mesure peut-on utiliser la même procédure pour calculer le développement topologique de ses observables ?

La réponse à la première question semble à priori négative. Il semble, en effet, difficile de construire un modèle de matrices dont la courbe algébrique n'aurait qu'un seul point à l'infini (i.e. tel que ydx n'ait qu'un seul pôle). Cependant, la question semble plus ouverte si l'on considère également les "limites" de modèles de matrices dans les théories acceptables. Se pose alors la question de savoir comment reconstruire l'action de ce modèle à partir de la courbe algébrique. Une partie de la réponse à cette

question a déjà été donnée dans cette thèse. En effet, nous avons montré comment associer un "potentiel" V_i à chaque pôle α_i de ydx, faisant ainsi un premier pas vers la construction d'une action. Cependant, il reste beaucoup à étudier pour pouvoir répondre à ce problème.

D'un autre côté, cette procédure semble très prometteuse pour l'étude d'autres modèles de matrices. Les études déjà menées sur le modèle de matrices couplées en chaîne ouverte [46] semblent, en effet, indiquer que les fonctions de corrélation prennent la même forme. On peut alors se demander à quels autres types de modèles on peut étendre cette construction. En premier lieu, il serait très intéressant d'étudier le modèle $O(n)$ [60] pour ses applications ainsi que pour le degré de complexité supplémentaire qu'il semble faire apparaître. Il est pour le moment impossible de dire si notre procédure pourra se généraliser à ce cadre là sans une résolution explicite du modèle. On voit qu'il serat très utile d'avoir un critère permettant de déterminer si l'on peut calculer une intégrale de matrice formelle donnée par cette méthode.

Enfin, nous n'avons étudié ici que des modèles de matrices hermitiennes. Peut-on trouver une procédure équivalente pour des ensembles de matrices présentant une symétrie différente ? Existe-t-il une telle structure sous-jacente permettant de calculer des intégrales formelles sur l'ensemble des matrices réelles symétriques ou quaternioniques ? Des premiers pas ont été faits dans cette direction par Chekhov et Eynard qui ont perturbé le modèle à une matrice hermitienne dans [28] pour étudier la combinatoire de surfaces discrétisées pas forcément orientables.

2.2 Lien avec l'intégrale de matrice convergente.

Comme nous l'avons montré dans ce mémoire, cette procédure donne accès au calcul d'intégrales formelles et non à celui d'intégrales convergentes sur l'ensemble des matrices hermitiennes. Il serait cependant intéressant de faire le lien entre ces résultats et les intégrales convergentes. Dans le cadre du modèle à une matrice, Bonnet, David et Eynard [18] avaient en effet pu faire le lien explicite entre intégrale formelle et intégrale convergente en sommant sur les instantons. Ils ont en quelque sorte montré comment obtenir un état physique de moindre énergie comme superposition de tous les états possibles.

Il serait donc intéressant de faire de même pour le modèle à deux matrices et dans le cadre général développé ici. On aurait ainsi accès, par exemple, aux asymptotiques des polynômes biorthogonaux étudiés dans [50] ainsi qu'aux termes correctifs quand la taille des matrices intégrées tend vers l'infini.

2.3 Lien avec un système intégrable quantique.

Ce lien avec l'intégrale convergente semble également être indispensable à une meilleure compréhension du système intégrable caché derrière cette construction. En effet, si, pour certaines courbes, on retrouve des réductions de hierarchies intégrables et si nous avons été capable de construire des séries formelles dont le comportement rappelle les éléments de bases des systèmes intégrables classiques, la structure intégrable sous-jacente n'est pas comprise pour le moment. Hors, dans le cadre des modèles de matrices, on connaît très bien le système intégrable, et ce quelque soit la taille N de

la matrice. Ce système est en général quantique associé à une équation des cordes du type

$$[P, Q] = \frac{1}{N} \tag{2-1}$$

qui devient classique dans la limite des grandes matrices $N \to \infty$. On s'attend donc à avoir décrit le développement semi-classique d'un tel système par notre procédure et il serait intéressant de pouvoir reconstruire le système quantique total associé dans ce cadre plus général. Cependant, il faudra d'abord être capable de reconstruire l'équivalent d'une intégrale convergente puisque c'est cet objet qui est vraiment fonction τ du système intégrable. Pour ce faire, la nouvelle variable κ semble avoir un rôle très important à jouer dans une procédure consistant à resommer sur les fractions de remplissage.

2.4 Interprétation des invariants algébriques : calcul du volume de l'espace des modules de surfaces.

Le plus gros problème soulevé par cette construction consiste à comprendre ce que l'on a calculé dans un cadre général. Quels sont donc ces objets qui sont à la fois fonctions génératrices de surfaces discrétisées, fonctions de partitions de théorie des cordes topologique et fonction τ d'un système intégrable ? Si il était observé depuis longtemps que ces objets ont des points communs, il est surprenant qu'ils ne soient en fait qu'un seul et même objet paramétré par une courbe algébrique quelconque.

Cette unification des différents modèles de matrices avait déjà été préssentie dans les travaux de Alexandrov, Mironov et Morozov [6, 7] dans l'optique de définir une M-théorie matricielle.

Il me semble cependant qu'il existe un ingrédient, plus simple, commun aux différentes fonctions retrouvées par cette procédure faisant en plus le lien entre les interêts des mathématiciens et des physiciens. En effet, en regardant de plus près les exemples de fonctions $F^{(g)}$ retrouvées par cette méthode, on peut voir qu'elles correspondent toutes à intégrer une certaine fonction (ou mesure) sur l'espace des modules de surfaces. En effet, reprenons quelques exemples :

- Modèles à une et deux matrices : $F^{(g)}$ est la fonction génératrice des surfaces discrétisées de genre g. On peut donc voir les énergies libres comme une intégrale sur l'espace des modules des surfaces avec une mesure donnant un poids non nul à un ensemble discret de surfaces seulement. En reprenant les notations introduites dans le chapitre 2 :

  $$F^{(g)} = \int_{\Sigma_{g,0}} \chi_{\mathcal{S}_{g,0}}(\Sigma_{g,0}) \mathcal{W}(\Sigma_{g,0}) \tag{2-2}$$

  où l'intégrale porte sur toutes les surfaces connexes fermées de genre g, $\chi_{\mathcal{S}_{g,0}}$ est la fonction caractéristique de l'ensemble des surfaces discrétisées $\mathcal{S}_{g,0}$ défini par def.1.3 du chapitre 2 et $\mathcal{W}$ est le poids associé.
- Intégrale de Kontsevich : l'introduction de ce modèle particulier de matrice en champ extérieur a été originellement motivé par le calcul des nombres d'intersection de surfaces de Riemann et donc du volume de l'espace des modules des surfaces de Riemann par rapport à la mesure de Weyl-Petersson. Les fonctions

de corrélation sont données dans ce cas par :

$$W_{k,0}^{(g)} = \int_{\mathcal{M}_{g,n}} d\omega_{WP} \tag{2-3}$$

où ω_{WP} est la mesure de Weil-Petersson sur l'espace des modules[1].

– Modèle minimal (p, q) : la fonction de partition est une intégrale sur l'espace des modules des surfaces de Riemann avec l'action d'Einstein-Polyakov :

$$F_g = \int_{\mathcal{M}_g} e^{-i\frac{\mathcal{S}_p}{\hbar}}. \tag{2-4}$$

– Théorie des cordes topologique de type B : la fonction de partition est également une intégrale sur l'espace des modules des surfaces de genre g de la forme :

$$F_g := \int_{\mathcal{M}_g} d\tau \int \mathcal{D}\phi e^{-\mathcal{S}_{\mathcal{N}=2}} \tag{2-5}$$

où $\mathcal{S}_{\mathcal{N}=2}$ est l'action du modèle sigma définie par Eq. (2-7) du chapitre 5.

Il semblerait donc que les objets $W_{k,0}^{(g)}[\mathcal{E}]$ que nous avons définis peuvent être vus comme des intégrales sur l'espace $\mathcal{M}_{g,n}$ des modules des surfaces de genre g avec n bords à l'aide d'une métrique $d\mu[\mathcal{E}]$ dépendant de la courbe algébrique $\mathcal{E}$:

$$W_{k,0}^{(g)}[\mathcal{E}] = \int_{\mathcal{M}_{g,n}} d\mu[\mathcal{E}]. \tag{2-6}$$

Une telle interprétation aurait de nombreuses applications que ce soit en physique pour effectuer des calculs de théorie des cordes et comprendre certaines dualités ou en mathématiques où elle permettrait de faire plus explicitement le lien entre hierarchies intégrables et volumes de $\mathcal{M}_{g,n}$ dans la continuité directe des travaux de Kontsevich. On aurait également là un outil pour étudier précisément les propriétés topologiques des cartes de grandes tailles.

2.5 Symétrie miroir, théories topologiques de type A et courbe de Seiberg-Witten.

Dans cette thèse nous n'avons étudié qu'un type de théorie des cordes topologique : le type B. Or, on sait que dans de nombreux cas, une théorie de type B a un dual équivalent de type A par la symétrie miroir. Il serait très intéressant de pouvoir identifier l'équivalent fermionique de notre construction algébrique pour les théories de type A, donnant ainsi accès au calcul des invariants de Gromov-Witten.

Des travaux récents de Mariño [82] ont montré que si l'on applique notre méthode à l'image par la symétrie miroir de théories de type A avec une Calabi-Yau de géométrie torique, on retrouve bien les résultats attendus par ailleurs. Notons que dans ce cas, le

[1] Une approche géométrique du problème a permis à Mirzakhani [87, 88] de montrer que ces volumes satisfont une relation de récurrence. Nous avons montré dans **[VII]**que cette relation de récurrence n'est rien d'autre que l'equation 3-5 du chapitre 4 définissant les fonctions de corrélations pour la courbe $y = sin 2\pi\sqrt{x}$.

modèle B correspondant ne fait apparaître aucune courbe algébrique mais une courbe bien plus compliquée. Ceci semble indiquer que notre méthode de construction d'invariants peut s'étendre encore au delà des courbes algébriques.

Par ailleurs, il serait très intéressant de comprendre le lien profond entre les énergies libres calculées sur les courbes hypperelliptiques apparaissant dans les théories de Seiberg-Witten [98] et les couplages gravitationnels introduits par Nekrasov [90] puisque ces derniers peuvent être déformés en des objets non holomorphes satisfaisant les équations d'anomalie holomorphe associées à cette courbe.

Chapitre 7

Appendices.

1 Modèle Gaussien et théorème de Wick.

Considérons la mesure gaussienne sur l'ensemble H_N des matrices hermitiennes M de taille $N \times N$:

$$d\mu = \left(\frac{g}{2\pi}\right)^{\frac{N^2}{2}} e^{-\frac{g}{2}\,\mathrm{Tr}\,M^2} dM, \tag{1-1}$$

où dM est le produit des mesures de Lebesgues des éléments réels de M :

$$dM = \prod_i dM_{ii} \prod_{i<j} dRe(M_{ij}) dIm(M_{ij}) \tag{1-2}$$

et le facteur de normalisation $\mathcal{Z}_{gauss} := \left(\frac{2\pi}{g}\right)^{\frac{N^2}{2}}$ est obtenu par le calcul de la fonction de partition :

$$\mathcal{Z}_{gauss} := \int_{H_N} e^{-\frac{g}{2}\,\mathrm{Tr}\,M^2} dM. \tag{1-3}$$

On peut aisément calculer la corrélation entre deux éléments de matrices :

$$\langle M_{ab} M_{cd} \rangle := \frac{1}{\mathcal{Z}_{gauss}} \int_{H_N} M_{ab} M_{cd} e^{-\frac{g}{2}\,\mathrm{Tr}\,M^2} dM = \frac{\delta_{ad}\delta_{bc}}{g}. \tag{1-4}$$

Cette quantité très simple est en fait la seule dont le calcul est nécessaire pour obtenir la valeur moyenne du produit d'un nombre quelconque d'éléments de matrices grâce au théorème de Wick :

Théorème 1.1 *Théorème de Wick :*

La valeur moyenne du produit de $2n$ éléments de matrices est égale à la somme sur tous les appariements des éléments deux à deux du produit des valeurs moyennes des paires d'éléments correspondantes :

$$\left\langle \prod_{i=1}^{2n} M_{a_i b_i} \right\rangle = \sum_{\bigcup_j (k_j, l_j) = \{1,2,\ldots,2n\}} \prod_{j=1}^{n} \left\langle M_{a_{k_j} b_{k_j}} M_{a_{l_j} b_{l_j}} \right\rangle, \tag{1-5}$$

où la somme dans le membre de droite porte sur tous les appariements (k_j, l_j) deux à deux des éléments de $\{1, \ldots, 2n\}$.

Dans les faits, les objets intéressants sont les corrélations de fonctions invariantes sous l'action du groupe $U(N)$, de manière générique, on aimerait calculer

$$\left\langle \prod_i (\operatorname{Tr} M^i)^{k_i} \right\rangle, \tag{1-6}$$

où la somme porte sur un nombre fini de termes et les k_i sont des nombres entiers arbitraires. Puisque l'on peut réécrire les différentes traces comme un produit d'éléments de matrice :

$$\operatorname{Tr} M^k = \sum_{\alpha_i=1}^{N} M_{\alpha_1\alpha_2} M_{\alpha_2\alpha_3} M_{\alpha_3\alpha_4} \dots M_{\alpha_k\alpha_1}, \tag{1-7}$$

on peut appliquer le théorème de Wick et décomposer cette fonction de corrélation sur la base des corrélations de deux éléments de matrices. Par exemple, on obtient :

$$\left\langle \operatorname{Tr} M^2 \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{N} \langle M_{ij} M_{ji} \rangle = \frac{N^2}{g}, \tag{1-8}$$

ou encore

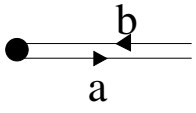
$$\begin{aligned} \left\langle \operatorname{Tr} M^4 \right\rangle &= \sum_{i,j,k,l} \langle M_{ij} M_{jk} M_{kl} M_{li} \rangle \\ &= \sum_{i,j,k,l} \left(\langle M_{ij} M_{jk} \rangle \langle M_{kl} M_{li} \rangle + \langle M_{ij} M_{kl} \rangle \langle M_{jk} M_{li} \rangle + \langle M_{ij} M_{li} \rangle \langle M_{kl} M_{jk} \rangle \right) \\ &= \frac{1}{g^2} \sum_{i,j,k,l} (\delta_{ik} + \delta_{il}\delta_{jk}\delta_{ij}\delta_{lk} + \delta_{jl}) \\ &= \frac{1}{g^2}(N^3 + N + N^3) = \frac{N}{g^2}(1 + 2N^2). \end{aligned} \tag{1-9}$$

De manière générale, chaque terme non nul dans la décomposition de $\left\langle \prod_i (\operatorname{Tr} M^i)^{k_i} \right\rangle$ par le théorème de Wick apporte la même contribution $\left(\frac{1}{g}\right)^{\frac{\sum_i i k_i}{2}}$ si $\sum_i i k_i$ est paire et 0 sinon. Ainsi, il faut donc compter le nombre de termes non nuls entrant dans ce développement. Le résultat prend alors la forme :

$$\left\langle \prod_i (\operatorname{Tr} M^i)^{k_i} \right\rangle = \left(\frac{1}{g}\right)^{\frac{\sum_i i k_i}{2}} \sum_{j \geq 0} c_j N^j, \tag{1-10}$$

où les c_j sont des nombres entiers qui appellent donc une interprétation combinatoire.

La célèbre représentation de Feynmann de ces fonctions de corrélation sous forme de diagramme nous fournit en effet une interprétation combinatoire de ces nombres c_j. Pour cela, on représente chaque objet matriciel par un élément graphique. Ainsi on représente chaque élément de matrice M_{ab} comme un ruban issu d'un point et marqué par les deux indices a et b :

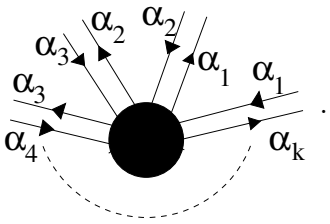
$M_{ab} :=$ 

. (1-11)

De même on représente $\mathrm{Tr} M^k$ par un vertex k valent portant des indices de sommation :

$$\mathrm{Tr}\, M^k = \sum_{\alpha_i=1}^{N} M_{\alpha_1\alpha_2} M_{\alpha_2\alpha_3} M_{\alpha_3\alpha_4} \dots M_{\alpha_k\alpha_1}$$

$$= \sum_{\alpha_i=1}^{N}$$

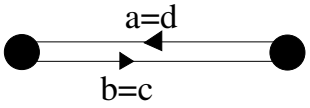


$$(1-12)$$

Sous cette représentation, l'expression de la corrélation de deux éléments de matrices Eq. (1-4) s'écrit comme une arète épaisse :

$$\langle M_{ab} M_{cd} \rangle = \frac{\delta_{ad}\delta_{bc}}{g}$$

$$= \frac{1}{g}$$



$$(1-13)$$

c'est-à-dire que prendre la valeur moyenne de deux éléments de matrices correspond à recoller les rubans les représentant et de compter l'arête ainsi formée avec un poids $\frac{1}{g}$ si les indices associés aux bords sont les mêmes et un poids nul sinon.

Le théorème de Wick nous dit alors que le nombre de termes non nuls dans le développement de $\left\langle \prod_i (\mathrm{Tr}\, M^i)^{k_i} \right\rangle$ est égal au nombre de diagramme formé de $\frac{\sum_i i k_i}{2}$ arêtes épaisses liées par $\sum_i k_i$ vertex dont k_i ont une valence i. A cela, il faut ajouter un facteur pour chaque diagramme venant du fait qu'il doit être étiqueté de toutes les manières possibles selon les prescriptions du théorème de Wick. Deux facteurs entrent en compte :

- Deux étiquetages peuvent être équivalents dans le sens où l'un peut être réobtenu à partir de l'autre par un simple changement du nom des étiquettes muettes[1]. Ce facteur est le nombre d'automorphismes du graphe, noté #Aut.
- L'opérateur de trace induit une sommation sur les indices de 1 à N. Les symboles de Kronecker apparaissant dans théorème de Wick réduisent certaines de ces sommes à un seul éléments. Il est facile de se convaincre que le nombre de sommes restant à effectuer après ces prescriptions est égal au nombre de boucles indépendantes[2] dans le graphe. Ainsi, on doit lui associer un facteur N à la puissance le nombre de boucles du graphe noté χ[3].

[1]Par étiquettes muettes, j'entends les indices sur lesquels la sommation de 1 à N est efectuée

[2]Le nombre de boucles indépendantes dans un graphe est le nombre de chemin différents que l'on parcours en suivant le bord de tous les rubans.

[3]Cette notation prend son sens par l'observation de 't Hooft [100] selon laquelle ce nombre est la carctéristique d'Euler de la surface la plus simple sur laquelle on peut dessiner le graphe de manière à le rendre planaire

On obtient finalement l'expression pour les fonctions de corrélation gaussiennes :

Théorème 1.2

$$\left\langle \prod_i (\operatorname{Tr} M^i)^{k_i} \right\rangle = \left(\frac{1}{g}\right)^{\frac{\sum_i ik_i}{2}} \sum_{G \in \mathcal{G}_{\{k_i\}_{i=1}^N}} \#Aut(G)\ N^{\chi(G)} \qquad (1\text{-}14)$$

où $\mathcal{G}_{\{k_i\}_{i=1}^N}$ *est 'ensemble des graphes à* $\frac{\sum_i ik_i}{2}$ *arêtes et* k_i *vertex de valence* i*.*

Pour notre exemple précédent, $\langle \operatorname{Tr} M^4 \rangle$, on doit composer les graphes à 2 arêtes et un seul vertex tetravalent :

$$\begin{aligned}
\left\langle \operatorname{Tr} M^4 \right\rangle &= \sum_{i,j,k,l} \left(\langle M_{ij}M_{jk}\rangle \langle M_{kl}M_{li}\rangle + \langle M_{ij}M_{kl}\rangle \langle M_{jk}M_{li}\rangle + \langle M_{ij}M_{li}\rangle \langle M_{kl}M_{jk}\rangle \right) \\
&= \\
&= \left(\frac{1}{g}\right)^2 \left[2\,\mathrm{N}^3 \; + \mathrm{N} \right] .
\end{aligned}$$

$(1-15)$

Remarque 1.1 Cette procédure diagrammatique peut facilement être étendue à un modèle gaussien avec plusieurs matrices en coloriant les vertex et arètes suivant la matrice à laquelle ils se réfèrent.

2 Fonction de partition formelle et surfaces discrétisées.

Nous explicitons ici l'expression de la fonction de partition formelle, $\mathcal{Z}_{form}$, en termes de surfaces discrétisées. $\mathcal{G}$ désigne ici l'ensemble des cartes défini par la définition 1.3 du chapitre 2.

Definition 2.1 *Soit une carte* $G \in CG$*. On note :*

- $n_{k,i}(G)$ *:= nombre k-gones de spin + et de couleur i dont le centre est libre*[4] *;*
- $\tilde{n}_{k,i}(G)$ *:= nombre k-gones de spin - et de couleur i dont le centre est libre ;*
- $n_{++,i}(G)$ *:= nombre de polygones de spins + et de couleur i collés par un bord ;*
- $n_{--,i}(G)$ *:= nombre de polygones de spins - et de couleur i collés par un bord ;*
- $n_{+-,i}(G)$ *:= nombre de polygones de spins différents et de couleur i collés par un bord ;*

[4] Un k-gone peut être lié à un autre par son centre. Son centre est dit libre si il n'est lié à aucun autre centre de cette façon.

- $n_{a,i}(G) = n_{+-,i}(G) + n_{++,i}(G) + n_{--,i}(G)$:= *nombre total d'arrêtes communes à deux polygones de couleur* i.
- $n_{k,i;l,j}(G)$:= *nombre de paires de polygones composées d'un* k*-gone de spin + et couleur* i *lié par son centre à un* l*-gone de spin + et couleur* j ;
- $\tilde{n}_{k,i;l,j}(G)$:= *nombre de paires de polygones composées d'un* k*-gone de spin - et couleur* i *lié par son centre à un* l*-gone de spin - et couleur* j ;
- G_i := *composante de couleur* i *de la surface obtenue en brisant tous les liens entre centres de polygones ;*
- $l_i(G)$:= *nombre de sommet de couleur* i ;
- $\#Aut(G)$:= *cardinal du groupes des automorphismes de* G ;
- $\chi(G)$:= *caractŕistique d'Euler-Poincaré de* G :

$$\chi(G) = \sum_i \left[l_i(G) - n_{a,i}(G) + \sum_k \left(n_{k,i}(G) + \tilde{n}_{k,i}(G) \right) \right]. \tag{2-1}$$

Definition 2.2 *A chaque surface* $G \in \mathcal{G}$*, on associe un poids :*

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(G) \;:=\; & \frac{N^{\chi(G)}}{\#Aut(G)} T^{n_T(G)} \prod_{i=1}^{d_1 d_2} \prod_{k=3}^{d_1+1} (t_{k,i} + T h_{k,i})^{n_{k,i}(G)} \prod_{k=3}^{d_1+1} (\tilde{t}_{k,i} + T \tilde{h}_{k,i})^{\tilde{n}_{k,i}(G)} \\ & \prod_{i=1}^{d_1 d_2} h_{1,i}^{n_{1,i}(G)} \tilde{h}_{1,i}^{\tilde{n}_{1,i}(G)} h_{2,i}^{n_{2,i}(G)} \tilde{h}_{2,i}^{\tilde{n}_{2,i}(G)} \prod_{k>d_1+1} h_{k,i}^{n_{k,i}(G)} \prod_{l>d_2+1} \tilde{h}_{l,i}^{\tilde{n}_{l,i}(G)} \\ & \prod_{i=1}^{d_1 d_2} \epsilon_i^{l_i(G)} t_{2,i}^{n_{++,i}(G)} \tilde{t}_{2,i}^{n_{--,i}(G)} (t_{2,i} \tilde{t}_{2,i} - 1)^{-n_{v,i}(G)} \prod_{j>i} \prod_k \prod_l h_{k,i;l,j}^{n_{k,i;l,j}(G)} \tilde{h}_{k,i;l,j}^{\tilde{n}_{k,i;l,j}(G)} \end{aligned} \tag{2-2}$$

où

$$\begin{aligned} n_T(G) \;:=\; & \textstyle\sum_i \left(\sum_k \frac{k}{2} (n_{k,i}(G) + \tilde{n}_{k,i}(G)) - \sum_{k=3}^{d_1+1} n_{k,i}(G) - \sum_{l=3}^{d_1 2+1} \tilde{n}_{l,i}(G) \right) \\ & + \textstyle\sum_i \sum_{j>i} \sum_k \sum_l \frac{k+l}{2} (n_{k,i;l,j}(G) + \tilde{n}_{k,i;l,j}(G)). \end{aligned} \tag{2-3}$$

Associer un tel poids à une carte G correspond à associer un poids à chacun des éléments composant le graphe comme suit :

Elément	Poids
k-gone de spin + et couleur i dont le centre est libre	$\begin{cases} \frac{N}{T}t_{k,i} + Nh_{k,i} \text{ si } k \in [3, d_1+1] \\ Nh_{k,i} \text{ sinon} \end{cases}$
k-gone de spin - et couleur i dont le centre est libre	$\begin{cases} \frac{N}{T}\tilde{t}_{k,i} + Nh_{k,i} \text{ si } k \in [3, d_2+1] \\ Nh_{k,i} \text{ sinon} \end{cases}$
arète commune à deux polygones de spin + et couleur i	$\frac{1}{N}\frac{t_{2,i}}{t_{2,i}\tilde{t}_{2,i}-1}$
arète commune à deux polygones de spin - et couleur i	$\frac{1}{N}\frac{\tilde{t}_{2,i}}{t_{2,i}\tilde{t}_{2,i}-1}$
arète commune à deux polygones de spin différents et couleur i	$\frac{1}{N}\frac{1}{t_{2,i}\tilde{t}_{2,i}-1}$
centre commun à un k-gone de couleur i et de spin + et un l-gone de couleur j et de spin +	$h_{k,i;l,j}$
centre commun à un k-gone de couleur i et de spin - et un l-gone de couleur j et de spin -	$h_{k,i;l,j}$
Sommet de couleur i	$N\epsilon_i$

La bijection entre les graphes et les surfaces permet d'écrire que :

Théorème 2.1 *La* **fonction de partition du modèle à deux matrices hermitiennes formel** *est égale à :*

$$\boxed{\mathcal{Z}_{form} := \prod_i e^{-\frac{N^2}{T}\epsilon_i(V_1(\xi_i)+V_2(\eta_i)-\xi_i\eta_i)} \prod_{j>i} \left[(x_i-x_j)(y_i-y_j)\right]^{N^2\epsilon_i\epsilon_j} \sum_{G\in\mathcal{G}} \mathcal{W}(G).} \tag{2-4}$$

3 Intégrale formelle et équations de boucles.

Dans cet appendice, nous allons montrer que les fonctions de corrélations du modèle à deux matrices satisfont les équations de boucles obtenues avec les règles Split et Merge.

Definition 3.1

Lemme 3.1 *Pour tout*

$$\begin{aligned} &G_{k_1,\dots,k_l;m;n}(S_1,S_2,\dots,S_l;x_1,\dots,x_m;y_1,\dots,y_n) := \\ &\tfrac{1}{x_{1,1}-M}\tfrac{1}{y_{1,1}-\tilde{M}}\tfrac{1}{x_{1,2}-M}\tfrac{1}{y_{1,2}-\tilde{M}}\cdots\tfrac{1}{x_{1,k_1}-M}\tfrac{1}{y_{1,k_1}-\tilde{M}}\ \prod_{j=1}^m \mathrm{Tr}\,\tfrac{1}{x_j-M}\prod_{s=1}^n \mathrm{Tr}\,\tfrac{1}{y_s-\tilde{M}} \\ &\prod_{i=2}^l \mathrm{Tr}\left(\tfrac{1}{x_{i,1}-M}\tfrac{1}{y_{i,1}-\tilde{M}}\tfrac{1}{x_{i,2}-M}\tfrac{1}{y_{i,2}-\tilde{M}}\cdots\tfrac{1}{x_{i,k_i}-M}\tfrac{1}{y_{i,k_i}-\tilde{M}}\right), \end{aligned} \tag{3-1}$$

les équations

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \textstyle\sum_{\alpha\le\beta}\int dM_1\dots dM_d d\tilde{M}_1\dots d\tilde{M}_d\left(\frac{\partial}{\partial Re(M_k)_{\alpha,\beta}}+\frac{\partial}{\partial Im(M_k)_{\alpha,\beta}}\right)\\ & \Big[(\textstyle\sum_i \mathrm{Tr}\,\delta V_{1,i}(M_i)+\delta V_{2,i}(\tilde{M}_i))^l G_{k_1,\dots,k_l;m;n}(S_1,S_2,\dots,S_l;x_1,\dots,x_m;y_1,\dots,y_n)\\ & \textstyle\prod_{i=1}^d \mathrm{e}^{-\frac{N}{T}\left(\mathrm{Tr}\,\frac{V_1''(\xi_i)}{2}(M_i-\xi_i\,\mathbf{1}_{n_i})^2+\frac{V_2''(\eta_i)}{2}(\tilde{M}_i-\eta_i\,\mathbf{1}_{n_i})^2-(M_i-\xi_i\,\mathbf{1}_{n_i})(\tilde{M}_i-\eta_i\,\mathbf{1}_{n_i})\right)}\\ & \textstyle\prod_{i>j}\det(M_i\otimes\mathbf{1}_{n_j}-\mathbf{1}_{n_i}\otimes M_j)\;\prod_{i>j}\det(\tilde{M}_i\otimes\mathbf{1}_{n_j}-\mathbf{1}_{n_i}\otimes\tilde{M}_j)\Big] \end{aligned} \tag{3-2}$$

4 Variations de $F^{(0)}$ par rapport aux modules.

Nous présentons ici un formulaire des dérivées premières et secondes de $F^{(0)}$ par rapport aux modules de la courbe algébrique. Ces résultats avaient déjà été dérivés dans le cadre des modèles de matrices de nombreuses fois [77, 16, 17]. Pour retrouver ces formules, nous prenons $\kappa = 0$.

4.1 Dérivées premières de $F^{(0)}$.

$$\frac{\partial F^{(0)}}{\partial t_{k,i}} = \operatorname*{Res}_{\alpha_i} z_{\alpha_i}^k\, ydx \tag{4-1}$$

$$\frac{\partial F^{(0)}}{\partial t_{\alpha_i,\alpha_j}} := \left(\frac{\partial}{\partial t_{0,i}}-\frac{\partial}{\partial t_{0,j}}\right)F^{(0)} = \mu_{\alpha_i}-\mu_{\alpha_j} \tag{4-2}$$

$$\frac{\partial F^{(0)}}{\partial \epsilon_i} = -\oint_{\mathcal{B}_i} ydx \tag{4-3}$$

4.2 Dérivées secondes de $F^{(0)}$.

$$\frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial t_{k,i}\partial t_{l,j}} = (\delta_{i,j}-1)\operatorname*{Res}_{p\to\alpha_i}\operatorname*{Res}_{q\to\alpha_j} z_{\alpha_i}(p)^k B(p,q) z_{\alpha_j}(q)^l \tag{4-4}$$

$$\frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial t_{k,i}\partial t_{\alpha_j,\alpha_k}} = \operatorname*{Res}_{\alpha_i} z_{\alpha_i}^k dS_{\alpha_j,\alpha_k} \tag{4-5}$$

$$\frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial t_{k,j}\partial \epsilon_i} = 2i\pi \operatorname*{Res}_{\alpha_j} z_{\alpha_j}^k du_i = -\oint_{\mathcal{B}_i} B_{\alpha_j,k} \tag{4-6}$$

$$\frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial \epsilon_i\partial t_{\alpha_j,\alpha_k}} = 2i\pi(u_i(\alpha_k)-u_i(\alpha_j)) \tag{4-7}$$

$$\frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial \epsilon_i\partial \epsilon_j} = 0 \;\; (-2i\pi\tau_{ij}\; for\; \underline{F}^{(0)}) \tag{4-8}$$

$$\frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial t^2_{\alpha_i,\alpha_j}} = \ln\left(d\zeta_{\alpha_i}(\alpha_i) d\zeta_{\alpha_j}(\alpha_j) E(\alpha_i,\alpha_j)^2\right) \tag{4-9}$$

$$\frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial t_{\alpha_i,\alpha_j} \partial t_{\alpha_i,\alpha_k}} = \ln\left(\frac{d\zeta_{\alpha_i}(\alpha_i) E(\alpha_i,\alpha_j) E(\alpha_i,\alpha_k)}{E(\alpha_j,\alpha_k)}\right) \tag{4-10}$$

$$\frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial t_{\alpha_i,\alpha_j} \partial t_{\alpha_k,\alpha_l}} = \ln\left(\frac{E(\alpha_k,\alpha_j) E(\alpha_i,\alpha_l)}{E(\alpha_i,\alpha_k) E(\alpha_j,\alpha_l)}\right) \tag{4-11}$$

où $\zeta_\alpha = \frac{1}{z_\alpha}$ est une variable locale au voisinage de α.

Chapitre 8

Articles.

1 Mixed correlation functions in the 2-matrix model, and the Bethe Ansatz

Published by Institute of Physics Publishing for SISSA
Received: *April 19, 2005*
Revised: *June 9, 2005*
Accepted: *July 11, 2005*
Published: *August 5, 2005*

Mixed correlation functions in the 2-matrix model, and the Bethe Ansatz

Bertrand Eynard and Nicolas Orantin

Service de Physique Théorique de Saclay, CEA/DSM/SPhT,
Unité de Recherche associée au CNRS (URA D2306), CEA Saclay,
F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France
E-mail: eynard@spht.saclay.cea.fr, orantin@spht.saclay.cea.fr

Abstract: Using loop equation technics, we compute all mixed traces correlation functions of the 2-matrix model to large N leading order. The solution turns out to be a sort of Bethe Ansatz, i.e. all correlation functions can be decomposed on products of 2-point functions. We also find that, when the correlation functions are written collectively as a matrix, the loop equations are equivalent to commutation relations.

Keywords: Differential and Algebraic Geometry, Matrix Models, Bethe Ansatz.

JHEP08(2005)028

Contents

1. Introduction **2**

2. The 2-matrix model, definitions and loop equations **3**
2.1 Partition function 3
2.2 Enumeration of discrete surfaces 4
2.3 Enumeration of discrete surfaces with boundaries 5
2.4 Master loop equation and algebraic curve 5
2.5 Correlation functions, definitions 6
2.6 Loop equations 7
2.7 Recursive determination of the correlation functions 8

3. A Bethe Ansatz-like formula for correlation functions **9**

4. Amplitudes of permutations **10**
4.1 Some definitions: planar permutations 11
4.2 Face amplitudes 11
4.3 The amplitudes C_σ 13
4.4 Examples 13
4.5 Properties of C_σ 15
4.6 Computation of the rational functions $F^{(k)}(x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k)$ 18
4.7 Proof of the main theorem 21

5. Matrix form of correlation functions **25**
5.1 Properties of the C_σ^k's. 26
5.2 Some commutation properties 27
5.3 Examples: $k = 2$. 28

6. Application: gaussian case **28**

7. Conclusion **30**

A. Practical computation of f_σ **30**

JHEP08(2005)028

© SISSA 2005

1. Introduction

Formal random matrix models have been used for their interpretation as combinatorial generating functions for discretized surfaces [1 – 3]. The hermitean one-matrix model counts surfaces made of polygons of only one color, whereas the hermitean two-matrix model counts surfaces made of polygons of two colors. In that respect, the 2-matrix model is more appropriate for the purpose of studying surfaces with non-uniform boundary conditions. At the continuum limit, the 2-matrix model gives access to "boundary operators" in conformal field theory [4].

Generating functions for surfaces with boundaries are obtained as random matrix expectation values. The expectation value of a product of l traces is the generating function for surfaces with l boundaries, the total power of matrices in each trace being the length of the corresponding boundary. If each trace contains only one type of matrix (different traces may contain different types of matrices), the expectation value is the generating function counting surfaces with uniform boundary conditions. Those non-mixed expectation values have been computed for finite n since the work of [5, 6] and refined by [7].

Mixed correlation functions have been considered as a difficult problem for a long time and progress have been obtained only recently [8, 9]. Indeed, non-mixed expectation values can easily be written in terms of eigenvalues only (since the trace of a matrix is clearly related to its eigenvalues), whereas mixed correlation functions cannot ($TrM_1^k M_2^{k'}$ cannot be written in terms of eigenvalues of M_1 and M_2).

The large-N limit of the generating function of the bicolored disc (i.e. one boundary, two colors, i.e. $\langle TrM_1^k M_2^{k'}\rangle$) has been known since [10 – 12]. The large-N limit of the generating function of the 4-colored disc (i.e. one boundary, 4 colors, i.e. $\langle TrM_1^k M_2^{k'} M_1^{k''} M_2^{k'''}\rangle$) has been known since [13]. The all order expansion of correlation functions for the 1-matrix model has been obtained by a Feynman-graph representation in [14] and the generalization to non-mixed correlation functions of the 2-matrix model has been obtained in [15].

Recently, the method of integration over the unitary group of [9] has allowed to compute, for finite N, all mixed correlation functions of the 2-matrix model in terms of orthogonal polynomials.

The question of computing mixed correlation functions in the large-N limit is addressed in the present article.

The answer is (not so) surprisingly related to classical results in integrable statistical models, i.e. the Bethe Ansatz. It has been known for a long time that random matrix models are integrable in some sense (Toda, KP, KdV, isomonodromic systems,...), but the relationship with Yang-Baxter equations and Bethe Ansatz was rather indirect. The result presented in this article should give some new insight in that direction. We find that the k-point functions can be expressed as the product of 2-point function, which is the underlying idea of the Bethe Ansatz.

Outline of the article:

- section 1 is an introduction,
- in section 2, we set definitions of the model and correlation functions, and we write the relevant loop equations,
- in section 3, we introduce a Bethe Ansatz-like formula, and prove it in section 4,
- in section 5, we solve the problem under a matrix form,
- section 6 is dedicated to the special gaussian case.

JHEP08(2005)028

2. The 2-matrix model, definitions and loop equations

2.1 Partition function

We are interested in the formal matrix integral:

$$Z := \int_{H_N^2} dM_1\, dM_2\, \mathrm{e}^{-N\,\mathrm{Tr}[V_1(M_1)+V_2(M_2)+M_1M_2]} \tag{2.1}$$

where M_1 and M_2 are $N\times N$ hermitean matrices and dM_1 (resp. dM_2) is the product of Lebesgue measures of all independent real components of M_1 (resp. M_2). $V_1(x)$ and $V_2(y)$ are complex polynomials of degree d_1+1 and d_2+1, called "potentials". The formal matrix integral is defined as a formal power series in the coefficients of the potentials (see [3]), computed by the usual Feynman method: consider a local extremum of $\mathrm{e}^{-N\,\mathrm{Tr}[V_1(M_1)+V_2(M_2)+M_1M_2]}$, and expand the non quadratic part as a power series and, for each term of the series, perform the gaussian integration with the quadratic part. This method does not care about the convergence of the integral, or of the series, it makes sense only order by order and it is in that sense that it can be interpreted as the generating function of discrete surfaces. All quantities in that model have a well defined $1/N^2$ expansion [16].

The extrema of $V_1(x)+V_2(y)+xy$ are such that:

$$V_1'(x) = -y\,, \qquad V_2'(y) = -x \tag{2.2}$$

there are d_1d_2 solutions (indeed $V_2'(-V_1'(x)) = -x$), which we note $(\overline{x}_I, \overline{y}_I)$, $I = 1,\dots,d_1d_2$. The extrema of $\mathrm{Tr}[V_1(M_1)+V_2(M_2)+M_1M_2]$ can be chosen diagonal (up to a unitary transformation), with $\overline{x}_I$'s and $\overline{y}_I$'s on the diagonal:

$$\begin{aligned} M_1 &= \mathrm{diag}(\overbrace{\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_1}^{n_1\text{ times}}, \overbrace{\overline{x}_2,\dots,\overline{x}_2}^{n_2\text{ times}}, \dots, \overbrace{\overline{x}_{d_1d_2},\dots,\overline{x}_{d_1d_2}}^{n_{d_1d_2}\text{ times}}) \\ M_2 &= \mathrm{diag}(\overbrace{\overline{y}_1,\dots,\overline{y}_1}^{n_1\text{ times}}, \overbrace{\overline{y}_2,\dots,\overline{y}_2}^{n_2\text{ times}}, \dots, \overbrace{\overline{y}_{d_1d_2},\dots,\overline{y}_{d_1d_2}}^{n_{d_1d_2}\text{ times}})\,. \end{aligned} \tag{2.3}$$

The extremum around which we perform the expansion is thus characterized by a set of filling fractions:

$$\epsilon_I = \frac{n_I}{N}\,, \qquad \sum_{I=1}^{d_1d_2} \epsilon_I = 1\,. \tag{2.4}$$

JHEP08(2005)028

To summarize, let us say that the formal matrix integral is defined for given potentials and filling fractions.

The "one-cut" case is the one where one of the filling fractions is 1, and all the others vanish. This is the case where the Feynman expansion is performed in the vicinity of only one extremum.

2.2 Enumeration of discrete surfaces

It is well known that formal matrix integrals are generating functions for the enumeration of discrete surfaces [3, 2, 17, 18].

For instance, in the one-cut case (expansion near an extremum $\overline{x}, \overline{y}$), one has:

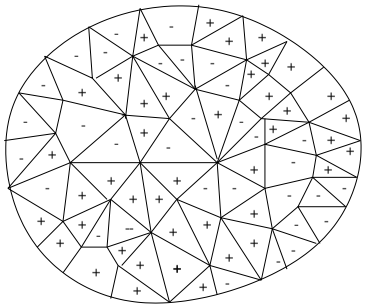
$$-\ln Z = \sum_G \frac{1}{\#\mathrm{Aut}(G)} N^{\chi(G)} \left(\frac{g_2}{\delta}\right)^{n_{--}(G)} \left(\frac{\tilde{g}_2}{\delta}\right)^{n_{++}(G)} \left(\frac{-1}{\delta}\right)^{n_{+-}(G)} \prod_{i=3}^{d_1+1} g_i^{n_i(G)} \prod_{i=3}^{d_2+1} \tilde{g}_i^{\tilde{n}_i(G)} \tag{2.5}$$

where the summation is over all finite connected closed discrete surfaces made of polygons of two signs (+ and -). For such a surface (or graph) G, $\chi(G)$ is its Euler characteristic, $n_i(G)$ is the number of i-gons carrying a + sign, $\tilde{n}_i(G)$ is the number of i-gons carrying a − sign, $n_{++}(G)$ is the number of edges separating two + polygons, $n_{--}(G)$ is the number of edges separating two − polygons and $n_{+-}(G)$ is the number of edges separating two polygons of different signs. $\#\mathrm{Aut}(G)$ is the number of automorphisms of G.

The g_i's, $\tilde{g}_i$'s and δ are defined as follows:

$$g_k := \left.\frac{\partial^k V_1(x)}{\partial x^k}\right|_{x=\overline{x}}, \qquad \tilde{g}_k := \left.\frac{\partial^k V_2(y)}{\partial x^k}\right|_{x=\overline{y}}, \qquad \delta := g_2\tilde{g}_2 - 1\,. \tag{2.6}$$

Example of a discrete surface:



(2.7)

In the multicut case, i.e. with arbitrary filling fractions, matrix integrals can still be interpreted in terms of "foams" of surfaces, and we refer the reader to the appendix of [19] or to [20] for more details.

JHEP08(2005)028

2.3 Enumeration of discrete surfaces with boundaries

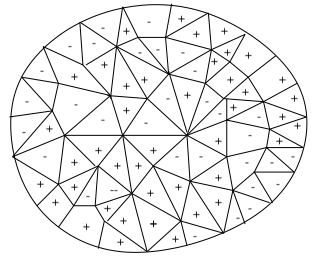
Similarly, given a sequence of signs $s_1, s_2, \ldots, s_k$, $s_i \in 1, 2$, it is well known that the following quantity:

$$\left\langle \mathrm{Tr}\Big(\prod_{i=1}^{k} M_{s_i}\Big) \right\rangle \tag{2.8}$$

is the generating function of discrete surfaces with one boundary of length k, whose signs of polygons on the edges are given by the sequence $(s_1, \ldots, s_k)$.

Example of a discrete surface with boundary $(++++++------++++++------)$:

$$\left\langle \mathrm{Tr}(M_1^6 M_2^5 M_1^5 M_2^6) \right\rangle = \sum_G$$



(2.9)

More generally, an expectation value of a product of n traces is the generating function for discrete surfaces with n boundaries.

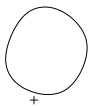
In this article, we are interested only in one boundary and to leading order in N, i.e. surfaces with the topology of a disc.

2.4 Master loop equation and algebraic curve

Let us define:

$$W(x) := \frac{1}{N}\left\langle \mathrm{Tr}\,\frac{1}{x - M_1}\right\rangle, \qquad \tilde{W}(y) := \frac{1}{N}\left\langle \mathrm{Tr}\,\frac{1}{y - M_2}\right\rangle \tag{2.10}$$

where the expectation values are formally computed as explained in the previous section, with the weight $\mathrm{e}^{-N\,\mathrm{Tr}[V_1(M_1)+V_2(M_2)+M_1M_2]}$. $W(x)$ (resp. $\tilde{W}(y)$) is defined as a formal power series in its large x (resp. large y) expansion, as well as in the expansion in the coefficients of the potentials. $W(x)$ (resp. $\tilde{W}(y)$) is a generating function for surfaces with one uniform boundary, i.e. with only sign + (resp. sign −) polygons touching the boundary by an edge:

$W(x) =$  , $\tilde{W}(y) =$ (2.11)

We also define the following formal series:

$$Y(x) := W(x) - V_1'(x)\,, \qquad X(y) := \tilde{W}(y) - V_2'(y)\,. \tag{2.12}$$

JHEP08(2005)028

In addition, we define:

$$P(x,y) := \frac{1}{N}\left\langle \mathrm{Tr}\,\frac{V_1'(x)-V_1'(M_1)}{x-M_1}\frac{V_2'(y)-V_2'(M_2)}{y-M_2}\right\rangle \tag{2.13}$$

$$U(x,y) := \frac{1}{N}\left\langle \mathrm{Tr}\,\frac{1}{x-M_1}\frac{V_2'(y)-V_2'(M_2)}{y-M_2}\right\rangle + x + V_2'(y) \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} U(x,y;x') &:= \left\langle \mathrm{Tr}\,\frac{1}{x-M_1}\frac{V_2'(y)-V_2'(M_2)}{y-M_2}\,\mathrm{Tr}\,\frac{1}{x'-M_1}\right\rangle - \\ &\quad -N^2 W(x')(U(x,y)-x-V_2'(y)) \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$E(x,y) := (V_1'(x)+y)(V_2'(y)+x) + P(x,y) - 1\,. \tag{2.16}$$

Notice that $U(x,y)$ and $U(x,y;x')$ are polynomials of y (with degree at most d_2-1), $P(x,y)$ is a polynomial of both variables of degree (d_1-1,d_2-1) and $E(x,y)$ is a polynomial of both x and y of degree (d_1+1,d_2+1).

It has been obtained in many articles [21, 22, 11, 12], that:

$$E(x,Y(x)) = \frac{1}{N^2}U(x,Y(x),x)\,. \tag{2.17}$$

To large-N leading order that equation reduces to an algebraic equation for $Y(x)$, called the "Master loop equation" [22]:

$$E(x,Y(x)) = 0 \tag{2.18}$$

(similarly, one also has $E(X(y),y)=0$, which implies $Y\circ X = \mathrm{Id}$, known as Matytsin's equation [23]). The coefficients of $E(x,y)$, i.e. of $P(x,y)$, are entirely determined by the conditions $\oint_{\mathcal{A}_i} y dx = 2i\pi\epsilon_i$ for a choice of irreducible cycles on the algebraic curve.

The properties of that algebraic equation have been studied in many works [21, 24]. Here we assume that it is known.

2.5 Correlation functions, definitions

We define:

$$\overline{W}_k(x_1,y_1,x_2,\dots,x_k,y_k) := \frac{1}{N}\left\langle \mathrm{Tr}\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{x_j-M_1}\frac{1}{y_j-M_2}\right\rangle \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_k(x_1,y_1,x_2,\dots,x_k,y_k) &:= \operatorname*{Pol}_{y_k} V_2'(y_k)\,\overline{W}_k(x_1,y_1,x_2,\dots,x_k,y_k) \\ &= \frac{1}{N}\left\langle \mathrm{Tr}\,\frac{1}{x_1-M_1}\frac{1}{y_1-M_2}\cdots\frac{1}{x_k-M_1}\frac{V_2'(y_k)-V_2'(M_2)}{y_k-M_2}\right\rangle \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned} \overline{P}_k(x_1,y_1,x_2,\dots,x_k,y_k) &:= \operatorname*{Pol}_{x_1}\operatorname*{Pol}_{y_k} V_1'(x_1)\,V_2'(y_k)\,\overline{W}_k(x_1,y_1,x_2,\dots,x_k,y_k) \\ &= \frac{1}{N}\left\langle \mathrm{Tr}\,\frac{V_1'(x_1)-V_1'(M_1)}{x_1-M_1}\,\frac{1}{y_1-M_2}\times\cdots \right. \\ &\qquad \left. \cdots\times\frac{1}{x_k-M_1}\,\frac{V_2'(y_k)-V_2'(M_2)}{y_k-M_2}\right\rangle \end{aligned} \tag{2.21}$$

$$A_k(x_1,y_1,x_2,\dots,x_k) := \frac{1}{N}\left\langle \mathrm{Tr}\,\frac{1}{x_1-M_1}\frac{1}{y_1-M_2}\cdots\frac{1}{x_k-M_1}V_2'(M_2)\right\rangle \tag{2.22}$$

JHEP08(2005)028

where $\mathrm{Pol}_x f(x)$ denotes the polynomial part at infinity of $f(x)$ (i.e. the positive part in the Laurent series for x near infinity).

The functions $\overline{W}_k$ are generating functions for discrete discs with all possible boundary conditions. One can recover any generating function of type eq. (2.8) by expanding into powers of the x_i's and y_i's.

For convenience, we prefer to consider the following functions:

$$W_k(x_1,y_1,x_2,\dots,x_k,y_k) := \overline{W}_k(x_1,y_1,x_2,\dots,x_k,y_k) + \delta_{k,1} \tag{2.23}$$

$$U_k(x_1,y_1,x_2,\dots,x_k,y_k) := \overline{U}_k(x_1,y_1,x_2,\dots,x_k,y_k) + \delta_{k,1}(V_2'(y_k)+x_k) \tag{2.24}$$

and for $k>1$:

$$P_k(x_1,y_1,x_2,\dots,x_k,y_k) := \overline{P}_k(x_1,y_1,x_2,\dots,x_k,y_k) + W_{k-1}(x_2,\dots,x_k,y_1) \tag{2.25}$$

For the smallest values of k, those expectation values can be found in the literature to large-N leading order:

- it was found in [11, 12, 21]:

$$W_1(x,y) = \frac{E(x,y)}{(x-X(y))(y-Y(x))}\,, \qquad U_1(x,y) = \frac{E(x,y)}{(y-Y(x))} \tag{2.26}$$

- it was found in the appendix C of [13] (there is a change of sign, because the action in [13] was $\mathrm{e}^{-N\,\mathrm{tr}(V_1(M_1)+V_2(M_2)-M_1M_2)}$):

$$W_2(x_1,y_1,x_2,y_2) = \frac{W_1(x_1,y_1)W_1(x_2,y_2) - W_1(x_1,y_2)W_1(x_2,y_1)}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)} \tag{2.27}$$

- for finite N, it was found in [8], and with notations explained in [8]:

$$W_1(x,y) = \det\left(1_N + \Pi_{N-1}\frac{1}{x-Q}\frac{1}{y-P^t}\Pi_{N-1}\right) \tag{2.28}$$

- for finite N, it was found in [9] how to compute any mixed correlation function in terms of determinants involving biorthogonal polynomials, with a formula very similar to eq. (2.28).

Here, we shall find a formula for all W_k's in the large-N limit.

2.6 Loop equations

Loop equations are nothing but Schwinger-Dyson equations. They are obtained by writing that an integral is invariant under a change of variable, or alternatively by writing that the integral of a total derivative vanishes.

The loop equation method is well known and explained in many works [21, 22]. Here, we write for each change of variable the corresponding loop equation (we use a presentation similar to that of [21]).

In all what follows we consider $k>1$.

JHEP08(2005)028

- the change of variable: $\delta M_2 = \frac{1}{x_1-M_1}\frac{1}{y_1-M_2}\cdots\frac{1}{x_k-M_1}$ implies:

$$\begin{aligned} A_k(x_1,\dots,x_k) &= \sum_{j=1}^{k-1} \overline{W}_j(x_1,\dots,y_j)\,\overline{W}_{k-j}(x_k,y_j,\dots,y_{k-1}) + \\ &+\frac{x_1\overline{W}_{k-1}(x_1,y_1,\dots,y_{k-1}) - x_k\overline{W}_{k-1}(x_k,y_1,\dots,y_{k-1})}{x_1-x_k} \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} W_j(x_1,\dots,y_j)\,W_{k-j}(x_k,y_j,\dots,y_{k-1}) - \\ &-W_{k-1}(x_k,y_1,\dots,y_{k-1}) + \\ &+x_k\,\frac{W_{k-1}(x_1,y_1,\dots,y_{k-1}) - W_{k-1}(x_k,y_1,\dots,y_{k-1})}{x_1-x_k} \end{aligned} \tag{2.29}$$

- the change of variable: $\delta M_1 = \frac{1}{x_1-M_1}\frac{1}{y_1-M_2}\cdots\frac{1}{x_k-M_1}\frac{V_2'(y_k)-V_2'(M_2)}{y_k-M_2}$ implies:

$$\begin{aligned} &(Y(x_1)-y_k)\,\overline{U}_k(x_1,\dots,y_k) = \\ &= \sum_{j=2}^{k} \frac{W_{j-1}(x_1,y_1,\dots,y_{j-1}) - W_{j-1}(x_j,y_1,\dots,y_{j-1})}{x_1-x_j}\,\overline{U}_{k-j+1}(x_j,y_j,\dots,x_k,y_k) + \\ &+V_2'(y_k)\frac{W_{k-1}(x_1,y_1,\dots,y_{k-1}) - W_{k-1}(x_k,y_1,x_2,\dots,y_{k-1})}{x_1-x_k} + \\ &+A_k(x_1,\dots,x_k) - \overline{P}_k(x_1,y_1,x_2,\dots,x_k,y_k) \\ &= \sum_{j=2}^{k} \frac{W_{j-1}(x_1,y_1,\dots,y_{j-1}) - W_{j-1}(x_j,y_1,\dots,y_{j-1})}{x_1-x_j}\,U_{k-j+1}(x_j,y_j,\dots,x_k,y_k) + \\ &+\sum_{j=1}^{k-1} W_j(x_1,\dots,y_j)\,W_{k-j}(x_k,y_j,\dots,y_{k-1}) - P_k(x_1,y_1,x_2,\dots,x_k,y_k) \end{aligned} \tag{2.30}$$

  where we have used the loop equation eq. (2.29) for $A_k(x_1,\dots,x_k)$.

- the change of variable: $\delta M_2 = \frac{1}{x_1-M_1}\frac{1}{y_1-M_2}\cdots\frac{1}{x_k-M_1}\frac{1}{y_k-M_2}$ implies:

$$\begin{aligned} &(X(y_k)-x_1)\,\overline{W}_k(x_1,y_1,x_2,\dots,x_k,y_k) = \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} \frac{W_{k-j}(x_{j+1},\dots,y_k) - W_{k-j}(x_{j+1},\dots,x_k,y_j)}{y_k-y_j} \times \\ &\times W_j(x_1,\dots,y_j) - U_k(x_1,\dots,y_k)\,. \end{aligned} \tag{2.31}$$

2.7 Recursive determination of the correlation functions

Theorem 1. *The system of equations eq. (2.30) and eq. (2.31) for all k has a unique solution.*

In other words, if we can find some functions W_k, U_k, P_k which obey eq. (2.30) and eq. (2.31) for all k, then they are the correlation functions we are seeking.

Proof. W_1, U_1 and P_1 have already been computed in the literature.

JHEP08(2005)028

Assume that we have computed W_j, U_j, P_j for all $j<k$. Let us show that eq. (2.30) and eq. (2.31) determine uniquely W_k, U_k and P_k.

Let $X^{(\alpha)}(y_k)$, $\alpha=0,\dots,d_1$ be the d_1+1 solutions for x of $E(x,y_k)=0$. For every $\alpha=0,\dots,d_1$ one has:

$$Y(X^{(\alpha)}(y_k)) = y_k \tag{2.32}$$

At $x_1 = X^{(\alpha)}(y_k)$, eq. (2.30) reads:

$$\begin{aligned} &P_k(X^{(\alpha)}(y_k),y_1,x_2,\dots,x_k,y_k) = \\ &= \sum_{j=2}^{k} \frac{W_{j-1}(X^{(\alpha)}(y_k),y_1,\dots,y_{j-1}) - W_{j-1}(x_j,y_1,x_2,\dots,y_{j-1})}{X^{(\alpha)}(y_k)-x_j} \times \\ &\times U_{k-j+1}(x_j,y_j,\dots,x_k,y_k) + \sum_{j=1}^{k-1} W_j(X^{(\alpha)}(y_k),\dots,y_j)\,W_{k-j}(x_k,y_j,\dots,y_{k-1}) \end{aligned} \tag{2.33}$$

where all the quantities in the r.h.s. are known from the recursion hypothesis. We thus know the value of P_k for d_1+1 values of x_1. Since P_k is a polynomial in x_1 of degree at most d_1-1, we can determine P_k by the interpolation formula:

$$(x_1-X(y_k))\frac{P_k(x_1,\dots,y_k)}{E(x_1,y_k)} = \sum_{\alpha=1}^{d_2} \frac{(X^{(\alpha)}(y_k)-X(y_k))\,P_k(X^{(\alpha)}(y_k),\dots,y_k)}{(x_1-X^{(\alpha)}(y_k))\,E_x(X^{(\alpha)}(y_k),y_k)} \tag{2.34}$$

where $X_k = X(y_k)$ denotes $X^{(0)}(y_k)$. Once P_k is known, eq. (2.30) allows to compute U_k, and eq. (2.31) allows to compute W_k.

3. A Bethe Ansatz-like formula for correlation functions

Thus, the loop equations determine W_k uniquely, i.e., if we can find W_k, $U_k = \mathrm{Pol}_{y_k} \times V_2'(y_k)W_k$ and $P_k = W_{k-1} + \mathrm{Pol}_{x_1} V_1'(x_1)U_k$ which satisfy eq. (2.31),eq. (2.30), it means that we have the right solution. We can thus make an Ansatz for W_k, and check that it satisfies the loop equations above.

Our Ansatz is similar to the Bethe Ansatz [25]:

$$W_k(x_1,y_1,\dots,x_k,y_k) = \sum_{\sigma\in\overline{\Sigma}_k} C_\sigma^{(k)}(x_1,y_1,\dots,x_k,y_k) \prod_{i=1}^{k} W_1(x_i,y_{\sigma(i)}) \tag{3.1}$$

where the coefficients C_σ are rational fractions of the x_i's and y_i's, with at most simple poles at coinciding points, and independent of the potentials.

We call eq. (3.1) a Bethe Ansatz-like formula, because it is very similar to the solution initially found by Bethe for the 1-dimensional spin chain, and then for the δ-interacting bosons.

JHEP08(2005)028

If we assume that eq. (3.1) satisfies eq. (2.31), we can in particular take the residue of eq. (2.31) at $y_k \to Y(x_l)$ for some l. That implies the following relationship among the coefficients $C_\sigma^{(k)}$'s:

$$(x_{\sigma^{-1}(k)} - x_1)\, C_\sigma^{(k)}(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k) = \\ = \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{\tau \in \Sigma(1,\dots,j)} \sum_{\rho \in \Sigma(j+1,\dots,k)} \delta_{\sigma,\tau\rho}\, \frac{C_\tau^{(j)}(x_1, \dots, y_j) C_\rho^{(k-j)}(x_{j+1}, \dots, y_k)}{y_k - y_j}\,. \quad (3.2)$$

Beside, since W_k is the expectation value of a trace, the $C_\sigma^{(k)}$'s must be cyclically invariant:

$$C_\sigma^{(k)}(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k) = C_\sigma^{(k)}(x_2, y_2, \dots, x_k, y_k, x_1, y_1) \quad (3.3)$$

and, since W_k should have no poles at coinciding points $y_k = y_j$ one should have:

$$\operatorname*{Res}_{y'_k \to y_j} C_\sigma^{(k)}(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y'_k) dy'_k = \operatorname*{Res}_{y'_k \to y_j} C_{(k,j)\circ\sigma}^{(k)}(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y'_k) dy'_k\,. \quad (3.4)$$

With $C^{(1)} = 1$, it is clear that the set of equations eq. (3.2), eq. (3.3), eq. (3.4), have at most a unique solution. We prove in the next section that the solution exists, and thus, eq. (3.2), eq. (3.3), eq. (3.4) determine $C_\sigma^{(k)}$ uniquely. The $C_\sigma^{(k)}$'s are explicitly computed in section 4.

Then in section 4.7, we prove that:

Theorem 2. *If the $C_\sigma^{(k)}$'s are rational functions defined by eq. (3.2), eq. (3.3), eq. (3.4), then the functions $\widehat{W}_k$'s defined by the r.h.s. of eq. (3.1), the functions $\widehat{U}_k(x_1, \dots, y_k) := \mathrm{Pol}(V_2'(y_k))\widehat{W}_k(x_1, \dots, y_k)$, and the functions $\widehat{P}_k(x_1, \dots, y_k) := \mathrm{Pol}(V_1'(x_1))\widehat{U}_k(x_1, \dots, y_k) + \widehat{W}_{k-1}(x_2, \dots, x_k, y_1)$, satisfy eq. (2.31) and eq. (2.30).*

As a corollary, using theorem 1, we have:

Theorem 3.

$$\boxed{W_k(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k) = \sum_{\sigma \in \overline{\Sigma}_k} C_\sigma^{(k)}(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k) \prod_{i=1}^{k} W_1(x_i, y_{\sigma(i)})\,.} \quad (3.5)$$

The derivation of theorem 2 is quite technical and is presented in section 4.7.

4. Amplitudes of permutations

In this section, we compute the amplitudes $C_\sigma^{(k)}$ explicitly.

Eq. (3.2), eq. (3.3), eq. (3.4) and initial condition $C^{(1)}(x_1, y_1) = 1$ clearly define at most a unique function $C_\sigma^{(k)}(x_1, \dots, y_k)$. In this section, we build the solution explicitly, and then, we prove that the function we have constructed indeed satisfies eq. (3.2), eq. (3.3), eq. (3.4).

Below we prove that eq. (3.2) implies that $C_\sigma^{(k)}$ vanishes for non planar permutations (see Definition 4.1 below) and, for planar permutations, $C_\sigma^{(k)}$ is the product of $C_{\mathrm{Id}}^{(k)}$ corresponding to faces. We are thus led to introduce the definitions in the next section.

JHEP08(2005)028

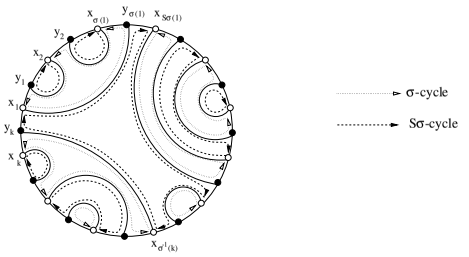


Figure 1: Example of a planar permutation and its faces.

4.1 Some definitions: planar permutations

Let S be the shift permutation:

$$S := \mathrm{shift} = (1, 2, \dots, k-1, k)\,, \qquad \text{i.e.} \qquad S(i) = i + 1\,. \quad (4.1)$$

Definition 1. *A permutation $\sigma \in \Sigma_k$ is called planar if*

$$n_{\mathrm{cycles}}(\sigma) + n_{\mathrm{cycles}}(S\sigma) = k + 1 \quad (4.2)$$

where $n_{\mathrm{cycles}}(\sigma)$ is the number of irreducible cycles composing the permutation σ.

Let $\overline{\Sigma}_k \subset \Sigma_k$ be the set of planar permutations of rank k.

Eq. (4.2) is equivalent to saying that if one draws the points $x_1, y_1, \dots, x_k, y_k$ on a circle, and draws a line between each pair $(x_j, y_{\sigma(j)})$, the lines don't intersect. The cycles of σ and the cycles of $S\sigma$ correspond to the faces (i.e. the connected components) of that partition of the disc.

Each planar permutation can also be represented as an arch system, and thus, the number of possible planar permutations is given by the Catalan number $\mathrm{Cat}\,(k)$:

$$\mathrm{Card}(\overline{\Sigma}_k) = \mathrm{Cat}\,(k) = \frac{2k!}{k!\,(k+1)!} \quad (4.3)$$

4.2 Face amplitudes

Definition 2. *For any $k \geq 1$, we define a rational function of $x_1, \dots, y_k$:*

$$F^{(k)}(x_1, y_1, x_2, \dots, x_k, y_k) \quad (4.4)$$

by the recursion formula:

$$F^{(1)}(x_1, y_1) := 1 \quad (4.5)$$
$$F^{(k)}(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k) := \sum_{j=1}^{k-1} \frac{F^{(j)}(x_1, y_1, \dots, x_j, y_j) F^{(k-j)}(x_{j+1}, y_{j+1}, \dots, x_k, y_k)}{(x_k - x_1)(y_k - y_j)}\,.$$

JHEP08(2005)028

Lemma 1. *For any $k \geq 1$:*

$$F^{(k)}(x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k) = O(y_k^{1-k}) \tag{4.6}$$

when $y_k \to \infty$.

Proof. Let us prove it by induction on k. It is true for k=1. Let k be larger or equal to 2 and assume that this is true for all $F^{(j)}$ with $j < k$. Then eq. (4.5) straightforwardly gives the same behaviour for $F^{(k)}$.

Lemma 2. *$F^{(k)}$ has cyclic invariance, i.e.*

$$F^{(k)}(x_2, y_2, \ldots, x_k, y_k, x_1, y_1) = F^{(k)}(x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k) \tag{4.7}$$

Proof. We prove it by recursion. It is clearly true for $k = 1$ and $k = 2$ since $F^{(2)} \times (x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{1}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}$. For $k \geq 3$, assume that it is true for all $F^{(j)}$ with $j < k$. One has:

$$\begin{aligned}
&F^{(k)}(x_2, y_2, \ldots, x_k, y_k, x_1, y_1) = \\
&= \sum_{j=2}^{k} \frac{F^{(j-1)}(x_2, \ldots, x_j, y_j) F^{(k+1-j)}(x_{j+1}, y_{j+1}, \ldots, x_k, y_k, x_1, y_1)}{(x_1 - x_2)(y_1 - y_j)} \\
&= \sum_{j=2}^{k} \frac{F^{(j-1)}(x_2, \ldots, x_j, y_j) F^{(k+1-j)}(x_1, y_1, x_{j+1}, y_{j+1}, \ldots, x_k, y_k)}{(x_1 - x_2)(y_1 - y_j)} \\
&= \sum_{j=2}^{k} \frac{F^{(j-1)}(x_2, \ldots, x_j, y_j)}{(x_1 - x_2)(y_1 - y_j)} \times \\
&\quad \times \sum_{l=j+1}^{k-1} \frac{F^{(l+1-j)}(x_1, y_1, x_{j+1}, y_{j+1}, \ldots, x_l, y_l) F^{(k-l)}(x_{l+1}, y_{l+1}, \ldots, x_k, y_k)}{(x_k - x_1)(y_k - y_l)} + \\
&\quad + \sum_{j=2}^{k} \frac{F^{(j-1)}(x_2, \ldots, x_j, y_j)}{(x_1 - x_2)(y_1 - y_j)} \frac{F^{(1)}(x_1, y_1) F^{(k-j)}(x_{j+1}, y_{j+1}, \ldots, x_k, y_k)}{(x_k - x_1)(y_k - y_1)} \\
&= \sum_{l=3}^{k-1} \frac{F^{(k-l)}(x_{l+1}, y_{l+1}, \ldots, x_k, y_k)}{(x_k - x_1)(y_k - y_l)} \times \\
&\quad \times \sum_{j=2}^{l} \frac{F^{(j-1)}(x_2, \ldots, x_j, y_j) F^{(l+1-j)}(x_{j+1}, y_{j+1}, \ldots, x_l, y_l, x_1, y_1)}{(x_1 - x_2)(y_1 - y_j)} \\
&= \sum_{l=3}^{k-1} \frac{F^{(k-l)}(x_{l+1}, y_{l+1}, \ldots, x_k, y_k) F^{(l)}(x_2, \ldots, x_l, y_l, x_1, y_1)}{(x_k - x_1)(y_k - y_l)} \\
&= \sum_{l=3}^{k-1} \frac{F^{(l)}(x_1, y_1, x_2, \ldots, x_l, y_l) F^{(k-l)}(x_{l+1}, y_{l+1}, \ldots, x_k, y_k)}{(x_k - x_1)(y_k - y_l)} \\
&= F^{(k)}(x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k)\,.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

JHEP08(2005)028

Lemma 3. *For $k \geq 2$, $F^{(k)}$ has simple poles in y_k:*

$$F^{(k)}(x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k) = \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{y_k - y_l} \operatorname*{Res}_{y'_k \to y_l} F^{(k)}(x_1, y_1, \ldots, x_k, y'_k) dy'_k\,. \tag{4.9}$$

Proof. It is clearly true for $k = 2$. We prove it by induction on k. Assume that it is true up to $k - 1$. Using the recursion hypothesis, one can see that each term in the r.h.s. of eq. (4.5) has at most a simple pole at $y_k = y_l$ and one can write eq. (4.9) with the use of Lemma 1. Thus the recursion hypothesis is true for k.

4.3 The amplitudes C_σ

Definition 3. *Then, for any $k \geq 1$, and for any permutation $\sigma \in \Sigma_k$, we define $C_\sigma^{(k)} \times (x_1, y_1, x_2, \ldots, x_k, y_k)$ a rational function of $x_1, \ldots, y_k$, by:*

- *$C_\sigma^{(k)}(x_1, y_1, x_2, \ldots, x_k, y_k) := 0$ if σ is not planar, and*
- *if σ is planar, we decompose σ and $S\sigma$ into their product of cycles:*

$$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_l\,, \qquad S\sigma = \tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_2 \ldots \tilde{\sigma}_{\tilde{l}} \tag{4.10}$$

such that:

$$\sigma_j = (i_{j,1}, i_{j,2}, \ldots, i_{j,l_j})\,, \qquad \sigma(i_{j,m}) = i_{j,m+1} \tag{4.11}$$

$$\tilde{\sigma}_j = (\tilde{i}_{j,1}, \tilde{i}_{j,2}, \ldots, \tilde{i}_{j,\tilde{l}_j})\,, \qquad \sigma(\tilde{i}_{j,m}) = \tilde{i}_{j,m+1} - 1 \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
C_\sigma^{(k)}(x_1, y_1, x_2, \ldots, x_k, y_k) := &\prod_{j=1}^{l} F^{(l_j)}(x_{i_{j,1}}, y_{i_{j,2}}, x_{i_{j,2}}, y_{i_{j,3}}, \ldots, x_{i_{j,l_j}}, y_{i_{j,1}}) \times \\
&\times \prod_{j=1}^{\tilde{l}} F^{(\tilde{l}_j)}(x_{\tilde{i}_{j,1}}, y_{\tilde{i}_{j,2}-1}, x_{\tilde{i}_{j,2}}, \ldots, y_{\tilde{i}_{j,\tilde{l}_j}-1}, x_{\tilde{i}_{j,\tilde{l}_j}}, y_{\tilde{i}_{j,1}-1})
\end{aligned} \tag{4.13}$$

i.e. $C_\sigma^{(k)}$ is the product of F's of each connected component of the disc partitioned by σ.

4.4 Examples

In particular with $\sigma = Id$, we have:

$$C_{Id}^{(k)}(x_1, y_1, x_2, \ldots, x_k, y_k) = F^{(k)}(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_k, y_k) \tag{4.14}$$

and with $\sigma = S^{-1}$:

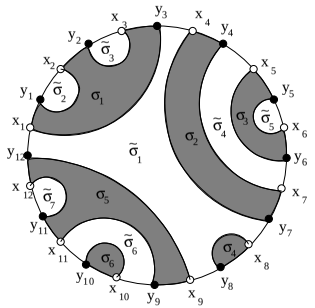
$$C_{S^{-1}}^{(k)}(x_1, y_1, x_2, \ldots, x_k, y_k) = F^{(k)}(x_k, y_{k-1}, x_{k-1}, \ldots, y_1, x_1, y_k)\,. \tag{4.15}$$

JHEP08(2005)028

An example with $k = 12$. Let us consider an example of $\sigma \in \overline{\Sigma}_{12}$ defined as follow: $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(3) = 2$, $\sigma(4) = 7$, $\sigma(5) = 6$, $\sigma(6) = 5$, $\sigma(7) = 4$, $\sigma(8) = 8$, $\sigma(9) = 11$, $\sigma(10) = 10$, $\sigma(11) = 12$ and $\sigma(12) = 9$:

$$\begin{aligned} \sigma &= (1,3,2)(4,7)(5,6)(8)(9,12,11)(10) \\ S\sigma &= (1,4,8,9)(2)(3)(5,7)(6)(10,11)(12)\,. \end{aligned} \tag{4.16}$$

The corresponding arch system is:



(4.17)

where dark faces (resp. white faces) correspond to the cycles of σ (resp. $S\sigma$). For that permutation $C_\sigma^{(12)}$ is worth:

$$\begin{aligned} &F^{(3)}(x_1,y_3,x_3,y_2,x_2,y_1)F^{(2)}(x_5,y_6,x_6,y_5)F^{(3)}(x_9,y_{12},x_{12},y_{11},x_{11},y_9)\times \\ &\times F^{(2)}(x_4,y_7,x_7,y_4)F^{(4)}(x_1,y_3,x_4,y_7,x_8,y_8,x_9,y_{12})F^{(2)}(x_5,y_6,x_7,y_4)\times \\ &\times F^{(2)}(x_{10},y_{10},x_{11},y_9) \end{aligned} \tag{4.18}$$

Example $k \leq 3$.

$$C^{(1)} = 1 \tag{4.19}$$

$$C^{(2)}_{Id} = \frac{1}{(x_2-x_1)(y_2-y_1)} \tag{4.20}$$

$$C^{(2)}_{(12)} = \frac{1}{(x_2-x_1)(y_1-y_2)} \tag{4.21}$$

$$C^{(3)}_{Id} = \frac{1}{(x_1-x_3)}\left(\frac{1}{y_3-y_1}\frac{1}{(x_2-x_3)(y_3-y_2)} + \frac{1}{y_3-y_2}\frac{1}{(x_1-x_2)(y_2-y_1)}\right) \tag{4.22}$$

$$C^{(3)}_{(1)(23)} = \frac{1}{(x_1-x_2)}\frac{1}{y_3-y_1}\frac{1}{(x_2-x_3)(y_2-y_3)} \tag{4.23}$$

$$C^{(3)}_{(12)(3)} = \frac{1}{(x_1-x_3)}\frac{1}{y_3-y_2}\frac{1}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)} \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned} C^{(3)}_{(123)} = &\frac{1}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(y_1-y_2)}\frac{1}{y_3-y_1} + \\ &+\frac{1}{(x_1-x_3)(x_1-x_2)(y_2-y_1)}\frac{1}{y_3-y_2} \end{aligned} \tag{4.25}$$

JHEP08(2005)028

$$C^{(3)}_{(13)(2)} = -\frac{1}{y_3-y_1}\frac{1}{(x_1-x_3)(x_2-x_3)(y_1-y_2)} \tag{4.26}$$

$$C^{(3)}_{(132)} = 0\,. \tag{4.27}$$

Example: rainbows. The rainbow is the permutation

$$\sigma(j) = k+1-j \tag{4.28}$$

if k is even:

$$C^{(k)}_\sigma = \frac{1}{\prod_{i=1}^{k/2}(x_{k+1-i}-x_i)(y_i-y_{k+1-i})\prod_{i=1}^{k/2-1}(x_{k+1-i}-x_{i+1})(y_i-y_{k-i})} \tag{4.29}$$

if k is odd:

$$C^{(k)}_\sigma = \frac{1}{\prod_{i=1}^{(k-1)/2}(x_{k+1-i}-x_i)(x_{k+1-i}-x_{i+1})(y_i-y_{k+1-i})(y_i-y_{k-i})}\,. \tag{4.30}$$

4.5 Properties of C_σ

Lemma 4. *The $C_\sigma^{(k)}$'s are cyclically invariant:*

$$C^{(k)}_\sigma(x_1,y_1,x_2,y_2,\ldots,x_k,y_k) = C^{(k)}_\sigma(x_2,y_2,\ldots,x_k,y_k,x_1,y_1) \tag{4.31}$$

Proof. It follows from Lemma 2.

Lemma 5. *The $C_\sigma^{(k)}$'s have at most simple poles in all their variables and are such that:*

$$C^{(k)}_\sigma(x_1,y_1,x_2,y_2,\ldots,x_k,y_k) = \sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{y_k-y_j}\operatorname*{Res}_{y'_k\to y_j} C^{(k)}_\sigma(x_1,y_1,x_2,y_2,\ldots,x_k,y'_k)dy'_k \tag{4.32}$$

Proof. If σ is planar, the pair (y_k, y_j) can appear in at most one factor of eq. (4.13), and the results follows from Lemma 3.

Theorem 4. *The $C_\sigma^{(k)}$'s, with $\sigma(1) \neq k$, satisfy the recursion formula eq. (3.2):*

$$C^{(k)}_\sigma = \frac{1}{x_{\sigma^{-1}(k)}-x_1}\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{\tau\in\Sigma(1,\ldots,j)}\sum_{\rho\in\Sigma(j+1,\ldots,k)}\delta_{\sigma,\tau\rho}\frac{1}{y_k-y_j}C^{(j)}_\tau C^{(k-j)}_\rho\,. \tag{4.33}$$

Proof. Let π be the cycle of length $l+1 \geq 2$ of $S\sigma$ which contains x_1 and y_k:

$$\pi = (x_1 \to y_{i_1-1} \to x_{i_1} \to y_{i_2-1} \to \cdots \to y_{i_{l-1}} \to x_{i_l} \to y_k \to x_1) \tag{4.34}$$

$$i_{j+1} := \sigma(i_j)+1\,, \qquad i_0 := 1\,. \tag{4.35}$$

Planarity implies that:

$$i_0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_l\,. \tag{4.36}$$

Since σ is planar, there exists a unique way of factorizing σ as:

$$\sigma = \prod_{j=0}^{l}\sigma_j\,, \qquad \sigma_j \in \overline{\Sigma}(i_j,\ldots,i_{j+1}-1)\,. \tag{4.37}$$

JHEP08(2005)028

From the definition of $C_\sigma^{(k)}$ we have:

$$C_\sigma^{(k)} = F^{(l+1)}(x_1, y_{i_1-1}, x_{i_1}, y_{i_2-1}, \ldots, y_{i_l-1}, x_{i_l}, y_k) \prod_j C_{\sigma_j}^{(i_{j+1}-i_j)}(x_{i_j}, \ldots, y_{i_{j+1}-1}) \quad (4.38)$$

and using eq. (4.5), we have:

$$\begin{aligned} C_\sigma^{(k)} &= F^{(l+1)}(x_1, y_{i_1-1}, x_{i_1}, y_{i_2-1}, \ldots, y_{i_l-1}, x_{i_l}, y_k) \prod_j C_{\sigma_j}^{(i_{j+1}-i_j)}(x_{i_j}, \ldots, y_{i_{j+1}-1}) \\ &= \sum_{m=1}^{l} \frac{F^{(m)}(x_1, y_{i_1-1}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_{m-1}}, y_{i_m-1}) F^{(l+1-m)}(x_{i_m}, y_{i_{m+1}-1}, x_{i_{m+1}}, \ldots, x_{i_l}, y_k)}{(x_{i_l} - x_1)(y_k - y_{i_m-1})} \times \\ &\quad \times \prod_j C_{\sigma_j}^{(i_{j+1}-i_j)}(x_{i_j}, \ldots, y_{i_{j+1}-1}) \end{aligned} \quad (4.39)$$

notice that $i_l = \sigma^{-1}(k)$, and note:

$$\tau_m := \prod_{j=1}^{m-1} \sigma_j \,, \qquad \rho_m := \prod_{j=m}^{l} \sigma_j \,. \quad (4.40)$$

We have:

$$\tau_m \in \overline{\Sigma}(1, \ldots, i_m - 1) \,, \qquad \rho_m \in \overline{\Sigma}(i_m, \ldots, k) \quad (4.41)$$

Eq. (4.38) gives:

$$C_\sigma^{(k)} = \frac{1}{x_{\sigma^{-1}(k)} - x_1} \sum_{m=1}^{l} \frac{1}{y_k - y_{i_m-1}} C_{\tau_m}^{(i_m)} C_{\rho_m}^{(k-i_m)} \,. \quad (4.42)$$

It is clear, from the planarity condition that if there exists some j and τ and ρ, such that:

$$\sigma = \tau\rho \,, \qquad \tau \in \overline{\Sigma}(1, \ldots, j) \,, \qquad \rho \in \overline{\Sigma}(j+1, \ldots, k) \quad (4.43)$$

then, one must have $j = i_m$, $\tau = \tau_m$ and $\rho = \rho_m$ for some m.

Lemma 6. *For any transposition (k, j) (with $k \neq j$), we have:*

$$\operatorname*{Res}_{y'_k \to y_j} C_\sigma^{(k)}(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_k, y'_k) dy'_k = - \operatorname*{Res}_{y'_k \to y_j} C_{(k,j)\circ\sigma}^{(k)}(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_k, y'_k) dy'_k \quad (4.44)$$

Proof. It is trivial if y_j and y_k are not in the same face, because both sides vanish: the l.h.s. has no pole and the r.h.s. is a non-planar permutation. The case where y_j and y_k belong to the same face reduces to proving the Lemma for $\sigma = Id$.

For $\sigma = Id$, we prove it by recursion on k. It clearly works for $k = 1$ and $k = 2$. Assume that it works up to $k - 1$.

From the definition eq. (3) we have:

$$\begin{aligned} &C_{(k,j)}^{(k)}(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_k, y_k) = \\ &\quad = F^{(j)}(x_1, y_1, \ldots, x_j, y_k) F^{(k-j)}(x_{j+1}, y_{j+1}, \ldots, y_{k-1}, x_k, y_j) \times \\ &\quad \times F^{(2)}(x_j, y_k, x_k, y_j) \\ &\quad = \frac{F^{(j)}(x_1, y_1, \ldots, x_j, y_k) F^{(k-j)}(x_{j+1}, y_{j+1}, \ldots, y_{k-1}, x_k, y_j)}{(x_j - x_k)(y_k - y_j)} \end{aligned} \quad (4.45)$$

JHEP08(2005)028

and thus:

$$\operatorname*{Res}_{y'_k \to y_j} C_{(k,j)}^{(k)}(x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k) = \frac{F^{(j)}(x_1, y_1, \ldots, x_j, y_j) F^{(k-j)}(x_{j+1}, y_{j+1}, \ldots, x_k, y_j)}{(x_j - x_k)} \,. \quad (4.46)$$

On the l.h.s. , we have from eq. (4.5):

$$\begin{aligned} &\operatorname*{Res}_{y'_k \to y_j} F^{(k)}(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_k, y'_k) = \\ &\quad = \operatorname*{Res}_{y'_k \to y_j} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{F^{(l)}(x_1, y_1, x_2, \ldots, x_l, y_l) F^{(k-l)}(x_{l+1}, y_{l+1}, \ldots, x_k, y'_k)}{(x_k - x_1)(y'_k - y_l)} \\ &\quad = \frac{F^{(j)}(x_1, y_1, x_2, \ldots, x_j, y_j) F^{(k-j)}(x_{j+1}, y_{j+1}, \ldots, x_k, y_j)}{(x_k - x_1)} + \\ &\qquad + \sum_{l=1}^{j-1} \frac{F^{(l)}(x_1, y_1, x_2, \ldots, x_l, y_l)}{(x_k - x_1)(y_j - y_l)} \operatorname*{Res}_{y'_k \to y_j} F^{(k-l)}(x_{l+1}, y_{l+1}, \ldots, x_k, y'_k) \,. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Then, from the recursion hypothesis, and from eq. (4.46) we have:

$$\begin{aligned} &\operatorname*{Res}_{y'_k \to y_j} F^{(k)}(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_k, y'_k) = \\ &\quad = \frac{F^{(j)}(x_1, y_1, x_2, \ldots, x_j, y_j) F^{(k-j)}(x_{j+1}, y_{j+1}, \ldots, x_k, y_j)}{(x_k - x_1)} - \\ &\qquad - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{F^{(l)}(x_1, y_1, x_2, \ldots, x_l, y_l)}{(x_k - x_1)(y_j - y_l)} \operatorname*{Res}_{y'_k \to y_j} C_{(k,j)}^{(k-l)}(x_{l+1}, y_{l+1}, \ldots, x_k, y'_k) \\ &\quad = \frac{F^{(j)}(x_1, y_1, x_2, \ldots, x_j, y_j) F^{(k-j)}(x_{j+1}, y_{j+1}, \ldots, x_k, y_j)}{(x_k - x_1)} - \\ &\qquad - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{F^{(l)}(x_1, y_1, x_2, \ldots, x_l, y_l)}{(x_k - x_1)(y_j - y_l)} \times \\ &\qquad \times \frac{F^{(j-l)}(x_{l+1}, y_{l+1}, \ldots, x_j, y_j) F^{(k-j)}(x_{j+1}, y_{j+1}, \ldots, y_{k-1}, x_k, y_j)}{(x_j - x_k)} \,. \end{aligned} \quad (4.48)$$

In the last line, we use again eq. (4.5) and get:

$$\begin{aligned} &\operatorname*{Res}_{y'_k \to y_j} F^{(k)}(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_k, y'_k) = \\ &\quad = \frac{F^{(j)}(x_1, y_1, x_2, \ldots, x_j, y_j) F^{(k-j)}(x_{j+1}, y_{j+1}, \ldots, x_k, y_j)}{(x_k - x_1)} - \\ &\qquad - (x_j - x_1) \frac{F^{(j)}(x_1, y_1, x_2, \ldots, x_j, y_j)}{(x_k - x_1)} \frac{F^{(k-j)}(x_{j+1}, y_{j+1}, \ldots, y_{k-1}, x_k, y_j)}{(x_j - x_k)} \,. \end{aligned} \quad (4.49)$$

One can then see that the sum of eq. (4.46) and eq. (4.49) vanishes, and the recursion hypothesis is proven for k.

Lemma 7.

$$\forall\, k > 1 \,, \qquad \sum_{\sigma \in \overline{\Sigma}_k} C_\sigma^{(k)}(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_k, y_k) = 0 \,. \quad (4.50)$$

JHEP08(2005)028

Proof. This expression is a rational function of all its variables. Consider the poles at $y_k = y_j$, and write $\tau = (k, j)$. One can split the symmetric group $\overline{\Sigma}_k$ into its two conjugacy classes wrt the subgroup generated by τ: $\overline{\Sigma}_k = [Id] \oplus [\tau]$. In other words:

$$\sum_{\sigma \in \overline{\Sigma}_k} C_\sigma(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k) = \sum_{\sigma \in \overline{\Sigma}_k/\tau} C_\sigma(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k) + \\ + C_{\tau\sigma}(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k)\,. \tag{4.51}$$

From Lemma 6, the terms in the r.h.s. have no pole at $y_k = y_j$. Similarly, using cyclicity and doing the same for the x's, we prove the lemma.

The Lemmas we have just proven, are sufficient to prove the main theorem 3. This is done in section 4.7.

4.6 Computation of the rational functions $F^{(k)}(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k)$

Although the exact computation of the $F^{(k)}$'s is not necessary for proving theorem 3, we do it for completeness. In this section we give an explicit (and non-recursive) formula for the $F^{(k)}$'s.

A practical way of computing these formulas is described in appendix A.

Definition 4. *To every permutation $\sigma \in \overline{\Sigma}_{k-1}$, we associate a weight f_σ computed as follows:*

$$f_\sigma = \prod_{n=1}^{l} \prod_{j=2}^{l_n} g_{i_{n,1}, i_{n,j}, i_{n,j+1}} \prod_{n=2}^{\tilde{l}} \prod_{j=2}^{\tilde{l_n}} g_{\tilde{i}_{n,j}, \tilde{i}_{n,1}, \sigma(\tilde{i}_{n,j})} \prod_{j=1}^{\tilde{l}_1} g_{\tilde{i}_{1,j}, k, \sigma(\tilde{i}_{1,j})} \tag{4.52}$$

where $g_{i,h,j}$ is defined as follows:

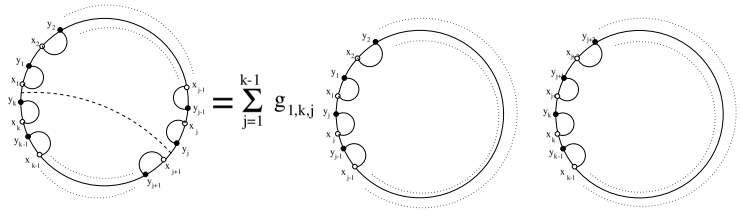
$$g_{i,h,j} := \frac{1}{x_h - x_i} \frac{1}{y_h - y_j} \tag{4.53}$$

and σ and $S\sigma$ are decomposed into their product of cycles as in Definition 3.

Theorem 5. *$F^{(k)}(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k)$ is obtained as the sum of the weights f_σ's over all $\sigma \in \Sigma_{k-1}$:*

$$F^{(k)}(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k) = \sum_{\sigma \in \Sigma_{k-1}} f_\sigma\,. \tag{4.54}$$

Proof. First of all, let us interpret diagrammatically the recursion relation eq. (4.5) defining the F's:



(4.55)

Actually, this recursion relation is nothing else but a rule for cutting a graph along the dashed line into two smaller ones. The weight of a graph is then obtained as the sum over all the possible ways of cutting it in two.

Notice that $F^{(k)}$ is the sum of $\mathrm{Cat}\,(k-1)$ different terms.

Let us now explicit this bijection with the graphs with $k-1$ arches. In order to compute one of the terms composing $F^{(k)}$, one has to cut it with the help of the recursion relation until one obtains only graphs with one arch. That is to say that one cuts it $k-1$ times along non intersecting lines (corresponding to the dashed one in the recursion relation). If one draws these cutting lines on the circle, one obtains a graph with $k-1$ arches dual of the original one. Thus every way of cutting a graph with $k-1$ arches is associated to a planar permutation $\sigma \in \overline{\Sigma}(i \dots k-1)$. Let us now prove that the term obtained by this cutting is equal to f_σ.

For the sake of simplicity, one denotes the identity graph of $(x_j, y_j, \dots, x_k, y_k)$ by circle $(j, j+1, \dots, k)$. In these conditions, the recursion relation reads:

$$(1, 2, \dots, k) = \sum_{j=1}^{k-1} g_{1,k,j}(1, \dots, j)(j+1, \dots, k)\,. \tag{4.56}$$

Let σ be a permutation of $(1, \dots, k-1)$. Cut it along the line going from the boundary (x_1, y_k) to $(y_{\sigma(1)}, x_{S\sigma(1)})$. It results from this operation the factor $g_{1,k,\sigma(1)}$ and the circles $(1, \dots, \sigma(1))$ and $(S\sigma(1), \dots, k)$:

$$(1, \dots, k) \to^\sigma g_{1,k,\sigma(1)}(1, \dots, \sigma(1))(S\sigma(1), \dots, k) \tag{4.57}$$

Then cutting the circle $(S\sigma(1), \dots, k)$ along $(y_k, x_{S\sigma(1)}) \to (y_{\sigma S\sigma(1)}, x_{S\sigma S\sigma(1)})$ gives:

$$(S\sigma(1), \dots, k) \to^\sigma g_{S\sigma(1),k,\sigma S\sigma(1)}(S\sigma(1), \dots, \sigma S\sigma(1))(S\sigma S\sigma(1), \dots, k) \tag{4.58}$$

One pursues this procedure step by step by always cutting the circle containing k. Using the former notations, this reads:

$$(1, \dots, k) \to^\sigma \prod_{j=1}^{\tilde{l}_1} g_{\tilde{i}_{1,j}, k, \sigma(\tilde{i}_{1,j})}(\tilde{i}_{1,j}, \dots, \sigma(\tilde{i}_{1,j}))\,. \tag{4.59}$$

So one has computed the weight associated to the first $S\sigma$ - cycle. The remaining circles correspond to σ-cycles. Let us compute their weight by considering for example $(\tilde{i}_{1,1}, \dots, \sigma(\tilde{i}_{1,1})) = (i_{1,1}, \dots, i_{1,2})$.

The cut along the line $(x_{i_{1,1}}, y_{i_{1,2}}) \to (y_{i_{1,3}}, x_{S(i_{1,1})})$ gives:

$$(i_{1,1}, \dots, i_{1,2}) \to^\sigma g_{i_{1,1}, i_{1,2}, i_{1,3}}(i_{1,1}, \dots, i_{1,3})(S(i_{1,3}), \dots, i_{1,2})\,. \tag{4.60}$$

Keeping on cutting the circle containing $i_{1,1}$ at every step gives:

$$(i_{1,1}, \dots, i_{1,2}) \to^\sigma \prod_{j=2}^{l_1} g_{i_{1,1}, i_{1,j}, i_{1,j+1}}(S(i_{1,j+1}), \dots, i_{1,j})\,. \tag{4.61}$$

JHEP08(2005)028

One can notice that the remaining circles in the r.h.s. correspond to cycles of $S\sigma$ whose contribution has not been taken into account yet. One can then compute their values by following a procedure similar to the one used for the first $S\sigma$-cycle.

One can then recursively cut the circles so that one finally obtains only circles containing only one element. This recursion is performed by alternatively processing on σ-cycles and $S\sigma$-cycles.

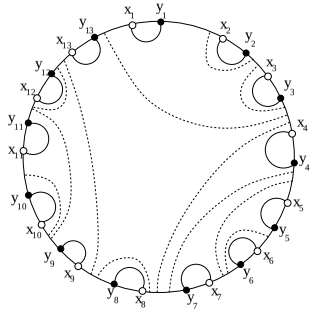
Thus, one straightforwardly finds:

$$(1,\dots,k) \to^{\sigma} \prod_{n=1}^{l}\prod_{j=2}^{l_n} g_{i_{n,1},i_{n,j},i_{n,j+1}} \prod_{n=2}^{\tilde{l}}\prod_{j=2}^{\tilde{l_n}} g_{\tilde{i}_{n,j},\tilde{i}_{n,1},\sigma(\tilde{i}_{n,j})} \prod_{j=1}^{\tilde{l}_1} g_{\tilde{i}_{1,j},k,\sigma(\tilde{i}_{1,j})} = f_\sigma \,. \tag{4.62}$$

And then:

$$F^{(k)} = \sum_{\sigma\in\overline{\Sigma}_{k-1}} f_\sigma \tag{4.63}$$

Example: let us compute the weight associated to the permutation $\sigma \in \overline{\Sigma}_{12}$ introduced earlier. Starting from the circle $(1,\dots,13)$, one will proceed step by step the following cutting:



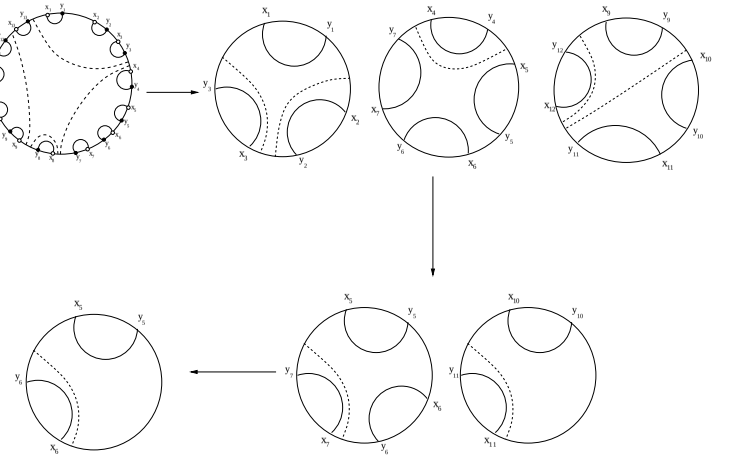
(4.64)

The first step consists in cutting along the $\tilde{\sigma}_1$ cycle. The dashed lines show where one cuts the circles. Note that one do not represent the circles of unite length. The associated weight is $g_{1,13,3}\, g_{4,13,7}\, g_{8,13,8}\, g_{9,13,12}$.

The second step consists in cutting along the remaining σ cycles. One associates the weight $g_{1,3,2}\, g_{1,2,1} \times g_{4,7,4} \times g_{9,12,11}\, g_{9,11,9}$ to this step.

JHEP08(2005)028

The weights associated to the two last cuttings are $g_{5,7,6} \times g_{10,11,10}$ and $g_{5,6,5}$.



(4.65)

Finally, the weight of this planar permutation is then:

$$f_\sigma = g_{1,13,3}\, g_{4,13,7}\, g_{8,13,8}\, g_{9,13,12}\, g_{1,3,2}\, g_{1,2,1}\, g_{4,7,4}\, g_{9,12,11}\, g_{9,11,9}\, g_{5,7,6}\, g_{10,11,10}\, g_{5,6,5}\,. \tag{4.66}$$

4.7 Proof of the main theorem

We now prove that the function $\widehat{W}$ defined by the r.h.s. of eq. (3.1) and the functions $\widehat{U}$ and $\widehat{P}$ defined in theorem 2 satisfy the system of equations eq. (2.30) and eq. (2.31).

Proof of theorem 2: using eq. (4.32), one has:

$$\begin{aligned}
\widehat{U}_k(x_1,\dots,y_k) &= \operatorname*{Pol}_{y_k} V_2'(y_k)\, \widehat{W}_k(x_1,y_1,\dots,x_k,y_k) \\
&= \operatorname*{Pol}_{y_k} V_2'(y_k) \sum_{\sigma\in\Sigma_k} C_\sigma^{(k)}(x_1,y_1,\dots,x_k,y_k) \prod_{i=1}^{k} W_1(x_i,y_{\sigma(i)}) \\
&= \sum_{\sigma\in\Sigma_k}\sum_{j\neq k} \operatorname*{Res}_{y'_k\to y_j} C_\sigma^{(k)}(x_1,y_1,\dots,x_k,y'_k)dy'_k \prod_{i=1}^{k-1} W_1(x_{\sigma^{-1}(i)},y_i) \times \\
&\quad \times \operatorname*{Pol}_{y_k} \frac{V_2'(y_k) W_1(x_{\sigma^{-1}(k)},y_k)}{y_k - y_j} \\
&= \sum_{\sigma\in\Sigma_k}\sum_{j\neq k} \operatorname*{Res}_{y'_k\to y_j} C_\sigma^{(k)}(x_1,y_1,\dots,x_k,y'_k)dy'_k \prod_{i=1}^{k-1} W_1(x_{\sigma^{-1}(i)},y_i) \times \\
&\quad \times \operatorname*{Pol}_{y_k} \frac{(\tilde{W}(y_k) - X(y_k)) W_1(x_{\sigma^{-1}(k)},y_k)}{y_k - y_j} \\
&= -\sum_{\sigma\in\Sigma_k}\sum_{j\neq k} \operatorname*{Res}_{y'_k\to y_j} C_\sigma^{(k)}(x_1,y_1,\dots,x_k,y'_k)dy'_k \prod_{i=1}^{k-1} W_1(x_{\sigma^{-1}(i)},y_i) \times
\end{aligned}$$

JHEP08(2005)028

$$
\begin{aligned}
&\times \operatorname*{Pol}_{y_k} \frac{X(y_k) W_1(x_{\sigma^{-1}(k)}, y_k)}{y_k - y_j} \\
&= \sum_{\sigma\in\Sigma_k} \sum_{j\neq k} \operatorname*{Res}_{y'_k \to y_j} C_\sigma^{(k)}(x_1, y_1, \ldots, x_k, y'_k) dy'_k \prod_{i=1}^{k-1} W_1(x_{\sigma^{-1}(i)}, y_i) \times \\
&\times \operatorname*{Pol}_{y_k} \frac{(x_{\sigma^{-1}(k)} - X(y_k)) W_1(x_{\sigma^{-1}(k)}, y_k) - (x_{\sigma^{-1}(k)} - X(y_j)) W_1(x_{\sigma^{-1}(k)}, y_j)}{y_k - y_j} \\
&= \sum_{\sigma\in\Sigma_k} \sum_{j\neq k} \operatorname*{Res}_{y'_k \to y_j} C_\sigma^{(k)}(x_1, y_1, \ldots, x_k, y'_k) dy'_k \prod_{i=1}^{k-1} W_1(x_{\sigma^{-1}(i)}, y_i) \times \\
&\times \frac{(x_{\sigma^{-1}(k)} - X(y_k)) W_1(x_{\sigma^{-1}(k)}, y_k) - (x_{\sigma^{-1}(k)} - X(y_j)) W_1(x_{\sigma^{-1}(k)}, y_j)}{y_k - y_j} \,.
\end{aligned} \tag{4.67}
$$

Indeed, using eq. (2.26), one sees that the last expression is a polynomial in y_k:

$$
\begin{aligned}
&\frac{(x_{\sigma^{-1}(k)} - X(y_k)) W_1(x_{\sigma^{-1}(k)}, y_k) - (x_{\sigma^{-1}(k)} - X(y_j)) W_1(x_{\sigma^{-1}(k)}, y_j)}{y_k - y_j} = \\
&\qquad = \frac{\frac{E(x_{\sigma^{-1}(k)}, y_k)}{y_k - Y(x_{\sigma^{-1}(k)})} - \frac{E(x_{\sigma^{-1}(k)}, y_j)}{y_j - Y(x_{\sigma^{-1}(k)})}}{y_k - y_j} \,.
\end{aligned} \tag{4.68}
$$

We have to check eq. (2.31), i.e. that $A = 0$ with:

$$
\begin{aligned}
A := &\sum_j \frac{\widehat{W}_{k-j}(x_{j+1}, \ldots, y_k) - \widehat{W}_{k-j}(x_{j+1}, \ldots, x_k, y_j)}{y_k - y_j} \widehat{W}_j(x_1, \ldots, y_j) - \\
&- \widehat{U}_k(x_1, \ldots, y_k) + (x_1 - X(y_k)) \widehat{W}_k(x_1, y_1, x_2, \ldots, x_k, y_k) \,.
\end{aligned} \tag{4.69}
$$

We have:

$$
\begin{aligned}
A = &\sum_{j\neq k} \sum_\pi \sum_\tau \frac{C_\tau^{(j)}(x_1, \ldots, y_j)\, C_\pi^{(k-j)}(x_{j+1}, \ldots, y_k)}{y_k - y_j} \times \\
&\times \prod_{i=1}^{j} W_1(x_{\tau^{-1}(i)}, y_i) \prod_{i=j+1}^{k} W_1(x_{\pi^{-1}(i)}, y_i) - \\
&- \sum_{j\neq k} \sum_\pi \sum_\tau \frac{C_\tau^{(j)}(x_1, \ldots, y_j)\, C_\pi^{(k-j)}(x_{j+1}, \ldots, y_j)}{y_k - y_j} W_1(x_{\pi^{-1}(k)}, y_j) \times \\
&\times \prod_{i=1}^{j} W_1(x_{\tau^{-1}(i)}, y_i) \prod_{i=j+1}^{k-1} W_1(x_{\pi^{-1}(i)}, y_i) - \\
&- \sum_\sigma \sum_{j\neq k} \frac{(x_{\sigma^{-1}(k)} - X(y_k))}{y_k - y_j} W_1(x_{\sigma^{-1}(k)}, y_k) \times \\
&\times \left(\operatorname*{Res}_{y_k \to y_j} C_\sigma^{(k)} \right) \prod_{i=1}^{k-1} W_1(x_{\sigma^{-1}(i)}, y_i) + \\
&+ \sum_\sigma \sum_{j\neq k} \frac{(x_{\sigma^{-1}(k)} - X(y_j))}{y_k - y_j} W_1(x_{\sigma^{-1}(k)}, y_j) \times \\
&\times \left(\operatorname*{Res}_{y_k \to y_j} C_\sigma^{(k)} \right) \prod_{i=1}^{k-1} W_1(x_{\sigma^{-1}(i)}, y_i) + \\
&+ (x_1 - X(y_k)) \sum_\sigma C_\sigma^{(k)}(x_1, \ldots, y_k) W_1(x_{\sigma^{-1}(k)}, y_k) \prod_{i=1}^{k-1} W_1(x_{\sigma^{-1}(i)}, y_i) \,.
\end{aligned} \tag{4.70}
$$

Using eq. (4.32) in the last line, adding it to the 4th line, and using eq. (4.32) again, we get:

$$
\begin{aligned}
A = &\sum_{j\neq k} \sum_\pi \sum_\tau \frac{C_\tau^{(j)}(x_1, \ldots, y_j)\, C_\pi^{(k-j)}(x_{j+1}, \ldots, y_k)}{y_k - y_j} \times \\
&\times \prod_{i=1}^{j} W_1(x_{\tau^{-1}(i)}, y_i) \prod_{i=j+1}^{k} W_1(x_{\pi^{-1}(i)}, y_i) + \\
&+ (x_1 - x_{\sigma^{-1}(k)}) \sum_\sigma C_\sigma^{(k)}(x_1, \ldots, y_k) W_1(x_{\sigma^{-1}(k)}, y_k) \prod_{i=1}^{k-1} W_1(x_{\sigma^{-1}(i)}, y_i) - \\
&- \sum_{j\neq k} \sum_\pi \sum_\tau \frac{C_\tau^{(j)}(x_1, \ldots, y_j)\, C_\pi^{(k-j)}(x_{j+1}, \ldots, y_j)}{y_k - y_j} W_1(x_{\pi^{-1}(k)}, y_j) \times \\
&\times \prod_{i=1}^{j} W_1(x_{\tau^{-1}(i)}, y_i) \prod_{i=j+1}^{k-1} W_1(x_{\pi^{-1}(i)}, y_i) + \\
&+ \sum_\sigma \sum_{j\neq k} \frac{(x_{\sigma^{-1}(k)} - X(y_j))}{y_k - y_j} W_1(x_{\sigma^{-1}(k)}, y_j) \times \\
&\times \left(\operatorname*{Res}_{y_k \to y_j} C_\sigma^{(k)} \right) \prod_{i=1}^{k-1} W_1(x_{\sigma^{-1}(i)}, y_i) \,.
\end{aligned} \tag{4.71}
$$

Using eq. (3.2) in the second line, exactly cancels the first line, and thus we get:

$$
\begin{aligned}
A = &- \sum_{j\neq k} \sum_\pi \sum_\tau \frac{C_\tau^{(j)}(x_1, \ldots, y_j)\, C_\pi^{(k-j)}(x_{j+1}, \ldots, y_j)}{y_k - y_j} W_1(x_{\pi^{-1}(k)}, y_j) \times \\
&\times \prod_{i=1}^{j} W_1(x_{\tau^{-1}(i)}, y_i) \prod_{i=j+1}^{k-1} W_1(x_{\pi^{-1}(i)}, y_i) + \\
&+ \sum_\sigma \sum_{j\neq k} \frac{(x_{\sigma^{-1}(k)} - X(y_j))}{y_k - y_j} W_1(x_{\sigma^{-1}(k)}, y_j) \times \\
&\times \left(\operatorname*{Res}_{y_k \to y_j} C_\sigma^{(k)} \right) \prod_{i=1}^{k-1} W_1(x_{\sigma^{-1}(i)}, y_i)
\end{aligned} \tag{4.72}
$$

which is a rational fraction in y_k with poles at $y_k = y_j$ for some j. From Lemma 6, A as defined in eq. (4.69) cannot have poles at $y_k = y_j$, thus $A = 0$.

Now, we have to check eq. (2.30) Using eq. (4.32), one has:

$$
\widehat{P}_k(x_1, \ldots, y_k) - \widehat{W}_{k-1}(x_2, \ldots, x_k, y_1) =
$$

JHEP08(2005)028

JHEP08(2005)028

$$
\begin{aligned}
&= \operatorname*{Pol}_{x_1} V_1'(x_1)\, \widehat{U}_k(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k) \\
&= \operatorname*{Pol}_{x_1} Y(x_1) \sum_{\sigma\in\Sigma_k} \sum_{j\neq k} \operatorname*{Res}_{y_k'\to y_j} C_\sigma^{(k)} \prod_{i=1}^{k-1} W_1(x_{\sigma^{-1}(i)}, y_i) \times \\
&\quad \times \frac{U_1(x_{\sigma^{-1}(k)}, y_k) - U_1(x_{\sigma^{-1}(k)}, y_j)}{y_k - y_j} \\
&= \operatorname*{Pol}_{x_1} Y(x_1) \sum_{\sigma\in\Sigma_k, \sigma(1)=k} \sum_{j\neq k} \operatorname*{Res}_{y_k'\to y_j} C_\sigma^{(k)} \prod_{i=1}^{k-1} W_1(x_{\sigma^{-1}(i)}, y_i) \times \\
&\quad \times \frac{U_1(x_1, y_k) - U_1(x_1, y_j)}{y_k - y_j} + \\
&\quad + \operatorname*{Pol}_{x_1} Y(x_1) \sum_{\sigma\in\Sigma_k, \sigma(1)\neq k} \sum_{j\neq k} \operatorname*{Res}_{y_k'\to y_j} C_\sigma^{(k)} W_1(x_1, y_{\sigma(1)}) \prod_{i\neq k, \sigma(1)} W_1(x_{\sigma^{-1}(i)}, y_i) \times \\
&\quad \times \frac{U_1(x_{\sigma^{-1}(k)}, y_k) - U_1(x_{\sigma^{-1}(k)}, y_j)}{y_k - y_j} \\
&= - \sum_{\sigma\in\Sigma_k, \sigma(1)=k} \sum_{j\neq k} \sum_{l\neq 1} \operatorname*{Res}_{x_1\to x_l} \operatorname*{Res}_{y_k'\to y_j} C_\sigma^{(k)} \prod_{i=1}^{k-1} W_1(x_{\sigma^{-1}(i)}, y_i) \times \\
&\quad \times \frac{E(x_1, y_k) - E(x_1, y_j) - E(x_l, y_k) + E(x_l, y_j)}{(x_1 - x_l)(y_k - y_j)} + \\
&\quad + \sum_{\sigma\in\Sigma_k, \sigma(1)\neq k} \sum_{j\neq k} \sum_{l\neq 1} \operatorname*{Res}_{x_1\to x_l} \operatorname*{Res}_{y_k'\to y_j} C_\sigma^{(k)} \prod_{i\neq k, \sigma(1)} W_1(x_{\sigma^{-1}(i)}, y_i) \times \\
&\quad \times \frac{(y_{\sigma(1)} - Y(x_1)) W_1(x_1, y_{\sigma(1)}) - (y_{\sigma(1)} - Y(x_l)) W_1(x_l, y_{\sigma(1)})}{x_1 - x_l} \times \\
&\quad \times \frac{U_1(x_{\sigma^{-1}(k)}, y_k) - U_1(x_{\sigma^{-1}(k)}, y_j)}{y_k - y_j} \,. \qquad (4.73)
\end{aligned}
$$

In order to satisfy eq. (2.30), we must prove that $B = 0$, where:

$$
\begin{aligned}
B := &\sum_{l=2}^{k} \frac{\widehat{W}_{l-1}(x_1, y_1, \dots, y_{l-1}) - \widehat{W}_{l-1}(x_l, y_1, x_2, \dots, y_{l-1})}{x_1 - x_l} \times \\
&\times \widehat{U}_{k-l+1}(x_l, y_l, \dots, x_k, y_k) + \\
&+ \sum_{l=1}^{k-1} \widehat{W}_l(x_1, \dots, y_l)\, \widehat{W}_{k-l}(x_k, y_l, \dots, y_{k-1}) - \\
&- \widehat{P}_k(x_1, y_1, x_2, \dots, x_k, y_k) - \\
&- (Y(x_1) - y_k)\, \widehat{U}_k(x_1, \dots, y_k) \,. \qquad (4.74)
\end{aligned}
$$

One does it in a way very similar to the previous one, i.e. first prove, using eq. (3.2), that B is a rational fraction of x_1, with poles at $x_1 = x_l$. But B can have no pole at $x_1 = x_l$, so,$B = 0$.

JHEP08(2005)028

5. Matrix form of correlation functions

So far, we have computed mixed correlation functions with only one trace, i.e. the generating function of connected discrete surfaces with one boundary. In this section, we generalize this theory to the computation of generating functions of non-connected discrete surfaces with any number of boundaries. In order to derive those correlation functions, a matrix approach of the problem, similar to the one developed in [9], is used.

Definition 5. *Let k be a positive integer. Let π and π' be two permutations of Σ_k and decompose $\pi'^{-1}\pi$ into the product of its irreducible cycles:*

$$
\pi'^{-1}\pi = P_1 P_2 \dots P_n \qquad (5.1)
$$

Each cycle P_i of $\pi'^{-1}\pi$, of length p_i, is denoted:

$$
P_m = (i_{m,1} \to^{\pi} j_{m,1} \rightsquigarrow^{\pi'^{-1}} i_{m,2} \to^{\pi} j_{m,2} \rightsquigarrow^{\pi'^{-1}} \dots \rightsquigarrow^{\pi'^{-1}} i_{m,p_m} \to^{\pi} j_{m,p_m} \rightsquigarrow^{\pi'^{-1}} i_{m,1}) \,. \qquad (5.2)
$$

For any $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k) \in \mathbf{C}$, we define:

$$
\mathcal{W}^k_{\pi,\pi'}(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k) := \left\langle \prod_{m=1}^{n} \left(\delta_{p_m,1} + \frac{1}{N} \operatorname{Tr} \prod_{j=1}^{p_m} \frac{1}{(M_1 - x_{i_{m,j}})(M_2 - y_{j_{m,j}})} \right) \right\rangle \qquad (5.3)
$$

which is a $k! \times k!$ matrix.

Let us now generalize the notion of planarity of a permutation.

Definition 6. *Let k be a positive integer. Let π and π' be two permutations of Σ_k.*

A permutation $\sigma \in \Sigma_k$ is said to be planar wrt (π, π') if

$$
n_{\text{cycles}}(\pi^{-1}\sigma) + n_{\text{cycles}}(\pi'^{-1}\sigma) = k + n_{\text{cycles}}(\pi'^{-1}\pi) \,. \qquad (5.4)
$$

Let $\Sigma_k^{(\pi,\pi')} \subset \Sigma_k$ be the set of permutations planar wrt (π, π').

Graphically, if one draws the sets of points $(x_{i_{1,1}}, y_{j_{1,1}}, x_{i_{1,2}}, y_{j_{1,2}}, \dots, x_{i_{1,p_1}}, y_{j_{1,p_1}})$, $(x_{i_{2,1}}, y_{j_{2,1}}, x_{i_{2,2}}, y_{j_{2,2}}, \dots, x_{i_{2,p_2}}, y_{j_{2,p_2}})$, ... , $(x_{i_{p,1}}, y_{j_{p,1}}, x_{i_{p,2}}, y_{j_{p,2}}, \dots, x_{i_{n,p_n}}, y_{j_{n,p_n}})$ on n circles and link each pair $(x_j, y_{\sigma(j)})$ by a line, these lines do not intersect nor go from one circle to another.

Remark 1. One can straightforwardly see two properties of these sets:

- This relation of planarity wrt to (π, π') is symmetric in π and π', that is to say:

$$
\Sigma_k^{(\pi,\pi')} = \Sigma_k^{(\pi',\pi)} \,. \qquad (5.5)
$$

- The planarity defined in eq. (1) corresponds to $\pi = Id$ and $\pi' = S^{-1}$:

$$
\overline{\Sigma}_k = \Sigma_k^{(Id,S^{-1})} \,. \qquad (5.6)
$$

JHEP08(2005)028

Directly from these definitions and the preceding results comes the following theorem computing any generating function of discrete surface with boundaries.

Theorem 6.

$$\boxed{\mathcal{W}^k_{\pi,\pi'}(x_1,y_1,x_2,y_2,\dots,x_k,y_k) = \sum_\sigma \mathcal{C}^k_{\sigma,\pi,\pi'}(x_1,y_1,\dots,x_k,y_k)\prod_{i=1}^k W_1(x_i,y_{\sigma(i)})} \tag{5.7}$$

where $\mathcal{C}^k_\sigma$ is the $k!\times k!$-matrix defined by:

- $\mathcal{C}^k_{\sigma,\pi,\pi'}(x_1,y_1,x_2,y_2,\dots,x_k,y_k) := 0$ *if σ is not planar wrt (π,π');*
- *if σ is planar wrt (π,π'):*

$$\begin{aligned}&\mathcal{C}^k_{\sigma,\pi,\pi'}(x_1,y_1,\dots,x_k,y_k) :=\\ &:= \prod_{m=1}^{a} F^{(a_m)}(x_{r_{m,1}},y_{\sigma(r_{m,1})},x_{r_{m,2}},y_{\sigma(r_{m,2})},\dots,x_{r_{m,a_m}},y_{\sigma(r_{m,a_m})})\times\\ &\quad\times\prod_{m=1}^{\tilde a} F^{(\tilde a_m)}(x_{\tilde r_{m,1}},y_{\sigma(\tilde r_{m,1})},x_{\tilde r_{m,2}},y_{\sigma(\tilde r_{m,2})},\dots,x_{\tilde r_{m,a_m}},y_{\sigma(\tilde r_{m,a_m})})\,.\end{aligned} \tag{5.8}$$

with the decompositions of $\pi^{-1}\sigma$ and $\pi'^{-1}\sigma$ into their products of cycles:

$$\pi^{-1}\sigma = \pi_1\pi_2\dots\pi_a\,,\qquad \pi'^{-1}\sigma = \tilde\pi_1\tilde\pi_2\dots\tilde\pi_{\tilde a} \tag{5.9}$$

such that:

$$\pi_m = (r_{m,1},r_{m,2},\dots,r_{m,a_m})\,,\qquad \tilde\pi_m = (\tilde r_{m,1},\tilde r_{m,2},\dots,\tilde r_{m,\tilde a_m})\,. \tag{5.10}$$

Remark 2. From the definition, one can see that $\sigma(r_{m,a_m}) = \pi(r_m,1)$ and $\sigma(\tilde r_{m,a_m}) = \pi'(\tilde r_m,1)$ for any m.

5.1 Properties of the C^k_σ's.

Lemma 8. *The matrices $\mathcal{C}^k_\sigma$ are symmetric.*

Proof. It comes directly from the definition.

Lemma 9.

$$\sum_\sigma \mathcal{C}^k_\sigma = Id \tag{5.11}$$

Proof. One has:

$$\mathcal{W}^k_{\pi,\pi'}(x_1,y_1,x_2,y_2,\dots,x_k,y_k) = \sum_\sigma \mathcal{C}^k_{\sigma,\pi,\pi'}\prod_{i=1}^k W_1(x_i,y_{\sigma(i)})\,. \tag{5.12}$$

Let us shift all the x's by a translation a and send $a\to\infty$, i.e. replace all the x_i's by x_i+a. In the l.h.s. , only the δ-terms of Definition 5 survive in the limit $a\to\infty$, and thus the l.h.s. tends towards the identity matrix. In the r.h.s. , notice that $W_1(x_i+a,y_{\sigma(i)})\to 1$. And $\mathcal{C}^k_\sigma$, which depends only on the differences between x_i's, is independent of a.

JHEP08(2005)028

5.2 Some commutation properties

Definition 7. *Let $\mathcal{M}^k(\vec x,\vec y,\xi,\eta)$ be the $k!\times k!$ matrix defined by:*

$$\mathcal{M}^k(\vec x,\vec y,\xi,\eta)_{\pi,\pi'} := \prod_i(\delta_{\pi(i),\pi'(i)} + \frac{1}{(\xi-x_i)(\eta-y_{\pi(i)})})\,. \tag{5.13}$$

Let $\mathcal{A}^{(k)}(x_1,y_1,\dots,x_k,y_k)$ be the $k!\times k!$ matrix defined by:

$$\begin{cases}\mathcal{A}^{(k)}_{\pi,\pi}(x_1,y_1,\dots,x_k,y_k) := \sum_i x_i y_{\pi(i)}\\ \mathcal{A}^{(k)}_{\pi,\pi'}(x_1,y_1,\dots,x_k,y_k) := 1 \quad \text{if } \pi\pi'^{-1} = \text{transposition}\\ \mathcal{A}^{(k)}_{\pi,\pi'}(x_1,y_1,\dots,x_k,y_k) := 0 \text{ otherwise}\end{cases} \tag{5.14}$$

Theorem 7.

$$\boxed{\forall\sigma,\xi,\eta\,,\qquad [\mathcal{M}^k(\vec x,\vec y,\xi,\eta),\mathcal{C}^k_\sigma(\vec x,\vec y)] = 0} \tag{5.15}$$

and

$$\boxed{\forall\xi,\eta\,,\qquad [\mathcal{M}^k(\vec x,\vec y,\xi,\eta),\mathcal{W}^k(\vec x,\vec y)] = 0} \tag{5.16}$$

Proof. Let us define:

$$\widetilde{\mathcal{M}}(\vec x,\vec y,\xi,\eta) := \mathcal{M}(N\vec x,\vec y,N\xi,\eta) \tag{5.17}$$

and

$$\widetilde{\mathcal{W}}^k_{\pi,\pi'}(x_1,y_1,\dots,x_k,y_k) := \left\langle\prod_{m=1}^n\left(\delta_{p_m,1}+\mathrm{Tr}\prod_{j=1}^{p_m}\frac{1}{N}\frac{1}{(M_1-x_{i_{m,j}})(M_2-y_{j_{m,j}})}\right)\right\rangle. \tag{5.18}$$

It was proven in [9] that:

$$[\widetilde{\mathcal{M}}^k(\vec x,\vec y,\xi,\eta),\widetilde{\mathcal{W}}^k(\vec x,\vec y)] = 0\,. \tag{5.19}$$

Now, in the large-N limit, the factorization property [3] $\langle\mathrm{Tr}\,\mathrm{Tr}\rangle\sim\langle\mathrm{Tr}\rangle\langle\mathrm{Tr}\rangle$, implies:

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{W}}^k_{\pi,\pi'}(x_1,y_1,x_2,y_2,\dots,x_k,y_k) &\sim N^{n_{\text{cycles}}(\pi'^{-1}\pi)-k}\times\\ &\quad\times\prod_{m=1}^n W_{p_m}(x_{i_{m,1}},y_{\pi(i_{m,1})},\dots,x_{i_{m,p_m}},x_{\pi(i_{m,p_m})})\\ &\sim N^{n_{\text{cycles}}(\pi'^{-1}\pi)-k}\mathcal{W}^k_{\pi,\pi'}(x_1,y_1,x_2,y_2,\dots,x_k,y_k)\end{aligned} \tag{5.20}$$

and using theorem 6, we have:

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathcal{W}}^k_{\pi,\pi'}(x_1,y_1,x_2,y_2,\dots,x_k,y_k)\sim\\ &\quad\sim N^{n_{\text{cycles}}(\pi'^{-1}\pi)-k}\sum_\sigma\mathcal{C}^k_{\sigma,\pi,\pi'}(x_1,y_1,x_2,y_2,\dots,x_k,y_k)\prod_{i=1}^k W_1(x_i,y_{\sigma(i)})\,.\end{aligned} \tag{5.21}$$

Notice that

$$\begin{aligned}&\mathcal{C}^k_{\sigma,\pi,\pi'}(x_1,y_1,x_2,y_2,\dots,x_k,y_k) =\\ &\quad= N^{k-n_{\text{cycles}}(\pi^{-1}\sigma)+k-n_{\text{cycles}}(\pi'^{-1}\sigma)}\mathcal{C}^k_{\sigma,\pi,\pi'}(Nx_1,y_1,Nx_2,y_2,\dots,Nx_k,y_k)\\ &\quad= N^{k-n_{\text{cycles}}(\pi'^{-1}\pi)}\mathcal{C}^k_{\sigma,\pi,\pi'}(Nx_1,y_1,Nx_2,y_2,\dots,Nx_k,y_k)\,.\end{aligned} \tag{5.22}$$

JHEP08(2005)028

Thus:

$$\widetilde{\mathcal{W}}^k_{\pi,\pi'}(x_1,y_1,x_2,y_2,\dots,x_k,y_k) \sim$$
$$\sim \sum_\sigma \mathcal{C}^k_{\sigma,\pi,\pi'}(Nx_1,y_1,Nx_2,y_2,\dots,Nx_k,y_k)\prod_{i=1}^k W_1(x_i,y_{\sigma(i)})\,. \tag{5.23}$$

Then, from [9], we have:

$$0 = \sum_\sigma \left[\mathcal{M}^k(N\vec{x},\vec{y},N\xi,\eta),\mathcal{C}^k_\sigma(Nx_1,y_1,\dots,Nx_k,y_k)\right]\prod_{i=1}^k W_1(x_i,y_{\sigma(i)})\,. \tag{5.24}$$

In particular, choose a permutation σ, and take the limit where $y_i \to Y(x_{\sigma^{-1}(i)})$, you get in that limit:

$$0 = \left[\mathcal{M}^k(N\vec{x},Y(\vec{x_{\sigma^{-1}}}),N\xi,\eta),\mathcal{C}^k_\sigma(Nx_1,Y(x_{\sigma^{-1}(1)}),\dots,Nx_k,Y(x_{\sigma^{-1}(k)}))\right]. \tag{5.25}$$

Since this equation holds for any potentials V_1 and V_2, it holds for any function $Y(x)$, and thus the $Y(x_i)$'s can be chosen independentely of the x_i's, and thus, for any $y_1,\dots,y_k$, we have:

$$0 = \left[\mathcal{M}^k(N\vec{x},\vec{y},N\xi,\eta),\mathcal{C}^k_\sigma(Nx_1,y_1,\dots,Nx_k,y_k)\right]. \tag{5.26}$$

Since it holds for any x_i's and ξ, it also holds for x_i/N and ξ/N.

Corollary 1.

$$\forall\sigma\,,\qquad [\mathcal{A}^{(k)}(\vec{x},\vec{y}),\mathcal{C}^k_\sigma(\vec{x},\vec{y})] = 0\,. \tag{5.27}$$

Proof. The corollary is obtained by taking the large ξ and η limit of theorem 7 (see appendix of [9]).

5.3 Examples: $k = 2$.

$$\mathcal{W}^{(2)} = \begin{pmatrix} W_{11}W_{22} & \frac{W_{11}W_{22}-W_{12}W_{21}}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)} \\ \frac{W_{11}W_{22}-W_{12}W_{21}}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)} & W_{12}W_{21} \end{pmatrix} \tag{5.28}$$

where $W_{ij} = W_1(x_i,y_j)$.

$$\mathcal{C}^2_{Id} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)} \\ \frac{1}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)} & 0 \end{pmatrix} \tag{5.29}$$

$$\mathcal{C}^2_{(12)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{(x_1-x_2)(y_2-y_1)} \\ \frac{1}{(x_1-x_2)(y_2-y_1)} & 1 \end{pmatrix} = 1 - \mathcal{C}^2_{Id}\,. \tag{5.30}$$

6. Application: gaussian case

There is an example of special interest, in particular for its applications to string theory in the BMN limit [26], it is the gaussian-complex matrix model case, $V_1 = V_2 = 0$. In that case one has $E(x,y) = xy - 1$, and thus:

$$W_1(x,y) = \frac{xy}{xy-1}\,. \tag{6.1}$$

JHEP08(2005)028

The loop equation defining recursively the W_k's can be written:

$$(x_1y_k - 1)W_k(x_1,y_1,\dots,x_k,y_k) =$$
$$= x_1\sum_j \frac{W_{j-1}(x_j,y_1,\dots,y_{j-1}) - W_{j-1}(x_1,y_1,\dots,y_{j-1})}{x_1-x_j}\times$$
$$\times W_{k-j+1}(x_j,y_j,\dots,x_k,y_k)\,. \tag{6.2}$$

Its solution is then:

$$W_k(x_1,y_1,\dots,x_k,y_k) = \sum_{\sigma\in\Sigma_k} C^{(k)}_\sigma(x_1,y_1,\dots,x_k,y_k)\prod_{i=1}^k \frac{x_iy_{\sigma(i)}}{x_iy_{\sigma(i)}-1}\,. \tag{6.3}$$

From the loop equation, one can see that $W_k(x_1,y_1,\dots,x_k,y_k)$ may have poles only when $x_i \to y_j^{-1}$ for any i and j. Because the C_σ's are rational functions of all their variables and because W_k has no singularity when $x_i = x_j$ or $y_i = y_j$, one can write:

$$W_k(x_1,y_1,\dots,x_k,y_k) = \frac{N_k(x_1,y_1,x_2,y_2,\dots,x_k,y_k)}{\prod_{i,j}(x_iy_j-1)} \tag{6.4}$$

where $N_k(x_1,y_1,x_2,y_2,\dots,x_k,y_k)$ is a polynomial in all its variables.

Moreover, the loop equation taken for the values $x_k = 0$ or $y_k = 0$ shows that $W_k(x_1,y_1,\dots,0,y_k) = W_k(x_1,y_1,\dots,x_k,0) = 0$. Using the cyclicity property of $W_k \times (x_1,y_1,\dots,x_k,y_k)$, one can claim that it vanishes whenever one of its arguments is equal to 0. One can thus factorize the polynomial $N_k(x_1,y_1,x_2,y_2,\dots,x_k,y_k)$ as follows:

$$W_k(x_1,y_1,\dots,x_k,y_k) = \frac{Q_k(x_1,y_1,x_2,y_2,\dots,x_k,y_k)\prod_i x_iy_i}{\prod_{i,j}(x_iy_j-1)} \tag{6.5}$$

where $Q_k(x_1,y_1,\dots,x_k,y_k)$ is a polynomial of degree $k-2$ with integer coefficient in all its variables.

Notice that $Q_k(x_1,y_1,\dots,y^{-1}_{\sigma(i)},y_i,\dots,x_k,y_k) = 0$ if σ is not planar.

As an example, we have:

- for $k = 2$:

$$W_2(x_1,y_1,x_2,y_2) = \frac{x_1x_2y_1y_2}{\prod_{i,j}(x_iy_j-1)}\,,\qquad Q_2(x_1,y_1,x_2,y_2) = 1 \tag{6.6}$$

- for $k = 3$:

$$W_3(x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3) = (2 - \sum_i x_iy_{i+1} + x_1x_2x_3y_1y_2y_3)\,\frac{x_1x_2x_3y_1y_2y_3}{\prod_{i,j}(x_iy_j-1)} \tag{6.7}$$

and

$$Q_3(x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3) = (2 - x_1y_2 - x_2y_3 - x_3y_1 + x_1x_2x_3y_1y_2y_3)\,. \tag{6.8}$$

JHEP08(2005)028

7. Conclusion

In this article, we have computed the generating functions of discs with all possible boundary conditions, i.e. the large-N limit of all correlation functions of the formal 2-matrix model. We have found that the $2k$ point correlation function can be written like the Bethe Ansatz for the δ-interacting bosons, i.e. a sum over permutations of product of 2-point functions. That formula is universal, it is independent of the potentials.

An even more powerful approach consists in gathering all possible $2k$ point correlation functions in a $k! \times k!$ matrix $\mathcal{W}^k$. We have found that this matrix $\mathcal{W}^k$ satisfies commutation relations with a family of matrices $\mathcal{M}^k$ which depend on two spectral parameters, and are related to the representations of $U(n)$ [9]. We claim that the theorem 7 is almost equivalent to the loop equations, and allows to determine $\mathcal{W}^k$.

It remains to understand how all these matrices and coefficients C_σ are related to usual formulations of integrability, i.e. how to write these in terms of Yang Baxter equations. For instance, the similarity with equations found in Razumov-Stroganov conjecture's proof [27] is to be understood.

One could also hope to find a direct proof of theorem 3, without having to solve the loop equations. In other words, we have found that the $2k$-point function can be written only in terms of W_1, while, in the derivation, we use the one point functions $Y(x)$ and $X(y)$ although they don't appear in the final result.

The next step, is to be able to compute the $1/N^2$ expansion of those correlation functions, as well as the large-N limit of connected correlation functions. We are already working that out, by mixing the approach presented in the present article and the Feynman graph approach of [14] generalized to the 2-matrix model in [15].

Another prospect is to go to the critical limit, i.e. where we describe generating functions for continuous surfaces with conformal invariance, and interpret this as boundary conformal field theory [4].

Acknowledgments

The authors want to thank M. Bauer, M. Bergère, F. David, P. Di Francesco, J.B. Zuber for stimulating discussions. This work was partly supported by the european network Enigma (MRTN-CT-2004-5652).

A. Practical computation of f_σ

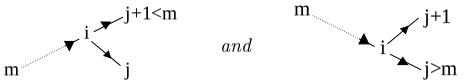
In this appendix, we build a set of trees in bijection with $\overline{\Sigma}_k$ and use it in order to compute practicaly the weights f_σ defined in Definition 4.

Definition 8. *Let $\mathcal{T}_k$ be the set of trees defined as follows: A tree T belongs to $T \in \mathcal{T}_k$, and is called a k-planar tree if and only if:*

- *its root is labelled $k+1$;*
- *it is composed of k+1 vertices, labeled by $[1, \dots, k+1]$;*

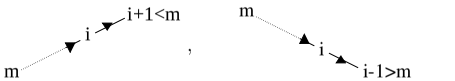
JHEP08(2005)028

- *it has k edges which can be either upgoing or downgoing;*
- *its vertices have valence $1, 2$ or 3, and are of one of the following eight possibilities, in which the point m denotes the origin of the branch containing i:*
  - *two trivalent vertices:*



(A.1)

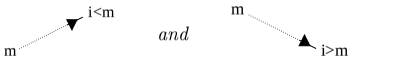
  - *four bivalent vertices:*



(A.2)

(A.3)

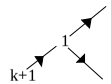
  - *two monovalent vertices corresponding to the leaves of the tree:*



(A.4)

Remark 3. Those trees are often called planar binary skeleton trees.

Remark 4. One can see that the first edge is necessarily upgoing, and its extremity is necessarily 1.



(A.5)

Theorem 8. *There is a bijection between $\mathcal{T}_k$ and the set of planar permutations $\overline{\Sigma}_k$:*

Proof. We build explicitly this bijection between $\overline{\Sigma}_{k-1}$ and $\mathcal{T}_{k-1}$.

Consider a planar permutation $\sigma \in \overline{\Sigma}_{k-1}$. Planarity means that σ defines a partition of the disc into faces of two kinds. Let us say that faces which correspond to cycles of $S\sigma$ are colored in white, faces which correspond to cycles of σ are colored in black.

Decompose σ and $S\sigma$ into products of irreducible cycles:

$$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_l \,, \qquad S\sigma = \tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_2 \dots \tilde{\sigma}_{\tilde{l}} \tag{A.6}$$

and we assume that $\tilde{\sigma}_1$ and σ_1 contain x_1.

Because of planarity, we can define a distance of faces (i.e. cycles) to the face $\tilde{\sigma}_1$, as the number of edges one has to cross for going from a face σ_i or $\tilde{\sigma}_i$ to σ_1, and call it $D(\sigma_i)$ or $D(\tilde{\sigma}_i)$.

JHEP08(2005)028

We also define the "origin" of a face, noted $m(\sigma_i)$ or $m(\tilde{\sigma}_i)$, as follows: If the face is $\tilde{\sigma}_1$, we define $m(\tilde{\sigma}_1) = k$, otherwise, because of planarity, there is only one neighbouring face which is at smaller distance of $\tilde{\sigma}_1$. Because of planarity, those two faces share at most one x, and the origin is defined as the label of that x.

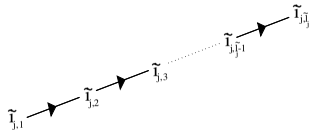
Thus, each face has a color, white or black, a distance D, and an origin m.

Now, to every face we associate a branch as follows:

- to a white face, $\tilde{\sigma}_j$, i.e. a cycle of $S\sigma$, noted

$$\tilde{\sigma}_j = (\tilde{i}_{j,1}, \tilde{i}_{j,2}, \dots, \tilde{i}_{j,\tilde{l}_j}), \qquad \tilde{i}_{j,1} = m(\tilde{\sigma}_j), \qquad \sigma(\tilde{i}_{j,n}) = \tilde{i}_{j,n+1} - 1 \tag{A.7}$$

we associate the upgoing branch $\tilde{i}_{j,1} \to \tilde{i}_{j,2} \to \dots \to \tilde{i}_{j,\tilde{l}_j}$



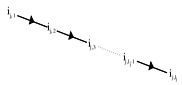
(A.8)

(if $\tilde{l}_j = 1$, the sequence contains only one vertex $\tilde{i}_{j,1} = m(\tilde{\sigma}_j)$ and no edge).

- to a black face, σ_j, i.e. a cycle of σ, noted

$$\sigma_j = (i_{j,1}, i_{j,2}, \dots, i_{j,l_j}), \qquad i_{j,1} = m(\sigma_j), \qquad \sigma(i_{j,n}) = i_{j,n+1} \tag{A.9}$$

we associate the downgoing branch $i_{j,1} \to i_{j,2} \to \dots \to i_{j,l_j}$



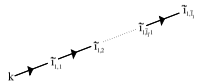
(A.10)

(if $l_j = 1$, the sequence contains only one vertex $i_{j,1} = m(\sigma_j)$ and no edge).

- to the first face $\tilde{\sigma}_1$,

$$\tilde{\sigma}_1 = (\tilde{i}_{1,1}, \tilde{i}_{1,2}, \dots, \tilde{i}_{1,\tilde{l}_1}), \qquad \tilde{i}_{1,1} = 1, \qquad \sigma(\tilde{i}_{1,n}) = \tilde{i}_{1,n+1} - 1 \tag{A.11}$$

we associate the upgoing branch $k \to \tilde{i}_{1,1} \to \tilde{i}_{1,2} \to \dots \to \tilde{i}_{1,\tilde{l}_1}$



(A.12)

By definition of the origin m of a face at distance D, the origin of a branch is necessarily a vertex on a branch at distance $D-1$, and from planarity, it cannot be a vertex on any other branch. Thus, there is a unique way to attach all branches to their origin, and we obtain a tree, which belongs to $\mathcal{T}_{k-1}$.

JHEP08(2005)028

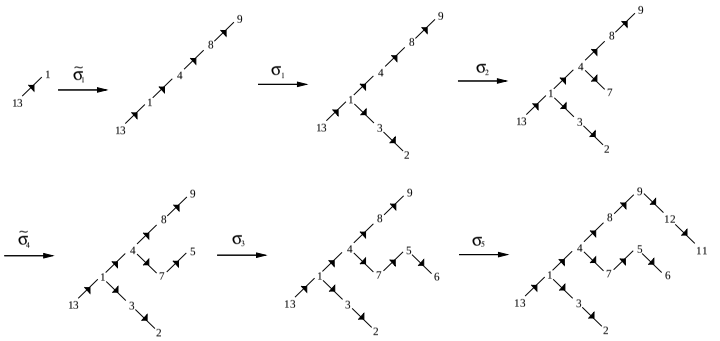
Inverse bijection: on the other hand, let us consider a $k-1$-tree. One can build a permutation $\sigma \in \overline{\Sigma}_{k-1}$ as follows: the image of an element of $(1, \dots, k-1)$ is:

- its descendant along a downgoing propagator if it exists;
- the origin of the downgoing branch to which it belongs in the other cases.

Because of the form of the vertices, the upgoing branches are necessarily the cycles of $S\sigma$. And since the branches form a tree, it implies that two faces touch one another through zero or one edge. Thus the permutation σ is planar.

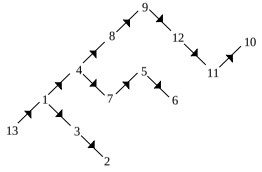
It is easy to see that this application is the inverse of the preceding one.

Example: let us carry out explicitly step by step this building for the permutation $\sigma \in \overline{\Sigma}_{12}$ introduced earlier. Notice that it is enrooted in $12+1=13$.



(A.13)

Considering the last non trivial cycle $\tilde{\sigma}_6 = (10, 11)$, one obtains finally the tree corresponding to (4.17):



(A.14)

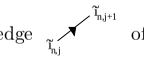
Corollary 2. *$\#\mathcal{T}_k = \mathrm{Cat}\,(k)$, where $\mathrm{Cat}\,(k)$ is the $k^{'th}$ Catalan number.*

From now, one can see how to simply compute the weight f_σ associated to a permutation σ.

JHEP08(2005)028

Consider a planar permutation $\sigma \in \overline{\Sigma}_k$ and its representation under the form of a tree $T \in \#\mathcal{T}_k$. Associate a weight to every edge of the tree as follows:

- To every downgoing edge

of a cycle σ_n of σ, one associates the weight $g_{i_{n,1},i_{n,j+1},i_{n,j+2}}$;
- To every upgoing edge 

of a cycle $\tilde{\sigma}_n$ of $S\sigma$, one associates the weight $g_{\tilde{i}_{n,j+1},\tilde{i}_{n,1},\sigma(\tilde{i}_{n,j+1})}$.

Then, the f_σ is the product of all the weights of edges composing T.

References

[1] M.L. Mehta, *Random matrices*, Academic Press, New York 1991.

[2] E. Brézin, C. Itzykson, G. Parisi and J. Zuber, *Planar diagrams*, *Commun. Math. Phys.* **59** (1978) 35.

[3] P. Di Francesco, P.H. Ginsparg and J. Zinn-Justin, *2D gravity and random matrices*, *Phys. Rept.* **254** (1995) 1 [hep-th/9306153].

[4] I.K. Kostov, *Boundary correlators in 2D quantum gravity: Liouville versus discrete approach*, *Nucl. Phys.* **B 658** (2003) 397 [hep-th/0212194].

[5] B. Eynard and M.L. Mehta, *Matrices coupled in a chain: eigenvalue correlations*, cond-mat/9710230.

[6] M.L. Mehta, *A method of integration over matrix variables*, *Commun. Math. Phys.* **79** (1981) 327.

[7] M.C. Bergere, *Biorthogonal polynomials for potentials of two variables and external sources at the denominator*, hep-th/0404126.

[8] M. Bertola and B. Eynard, *Mixed correlation functions of the two-matrix model*, *J. Phys.* **A 36** (2003) 7733 [hep-th/0303161].

[9] B. Eynard and A.P. Ferrer, *2-matrix versus complex matrix model, integrals over the unitary group as triangular integrals*, hep-th/0502041.

[10] V.A. Kazakov and I.K. Kostov, *Loop gas model for open strings*, *Nucl. Phys.* **B 386** (1992) 520 [hep-th/9205059].

[11] B. Eynard, *Eigenvalue distribution of large random matrices, from one matrix to several coupled matrices*, *Nucl. Phys.* **B 506** (1997) 633.

[12] B. Eynard, *Correlation functions of eigenvalues of multi-matrix models and the limit of a time dependent matrix*, *J. Phys.* **A 31** (1998) 8081 [cond-mat/9801075].

[13] B. Eynard, *Large-N expansion of the 2-matrix model*, *JHEP* **01** (2003) 051 [hep-th/0210047].

[14] B. Eynard, *Topological expansion for the 1-hermitian matrix model correlation functions*, *JHEP* **11** (2004) 031 [hep-th/0407261].

JHEP08(2005)028

[15] B. Eynard and N. Orantin, *A residue formula for correlation functions for the hermitian 2-matrix model*, in preparation.

[16] G. 't Hooft, *A planar diagram theory for strong interactions*, *Nucl. Phys.* **B 72** (1974) 461.

[17] V.A. Kazakov, *Ising model on a dynamical planar random lattice: exact solution*, *Phys. Lett.* **B 119** (1986) 140.

[18] B. Eynard, *An introduction to random matrices*, lectures given at Saclay, October 2000, notes available at http://www-spht.cea.fr/articles/t01/014/.

[19] G. Bonnet, F. David and B. Eynard, *Breakdown of universality in multi-cut matrix models*, *J. Phys.* **A 33** (2000) 6739.

[20] B. Eynard, *Polynômes biorthogonaux, problème de Riemann-Hilbert et géométrie algébrique*, Habilitation à diriger les recherches, université Paris VII, (2005).

[21] B. Eynard, *Master loop equations, free energy and correlations for the chain of matrices*, *JHEP* **11** (2003) 018 [hep-th/0309036].

[22] M. Staudacher, *Combinatorial solution of the two matrix model*, *Phys. Lett.* **B 305** (1993) 332 [hep-th/9301038].

[23] A. Matytsin, *On the large-N limit of the Itzykson-Zuber integral*, *Nucl. Phys.* **B 411** (1994) 805 [hep-th/9306077].

[24] V.A. Kazakov and A. Marshakov, *Complex curve of the two matrix model and its tau-function*, *J. Phys.* **A 36** (2003) 3107 [hep-th/0211236].

[25] M. Gaudin, *La Fonction d'Onde de Bethe*, Masson, Paris 1983.

[26] C. Kristjansen, J. Plefka, G.W. Semenoff and M. Staudacher, *A new double-scaling limit of $N = 4$ super Yang-Mills theory and pp-wave strings*, *Nucl. Phys.* **B 643** (2002) 3 [hep-th/0205033].

[27] P. Di Francesco and P. Zinn-Justin, *Around the Razumov-Stroganov conjecture: proof of a multi-parameter sum rule*, *Electr. J. Combin.* **12** (2005) R6.

JHEP08(2005)028

2 Topological expansion of the 2-matrix model correlation functions : diagrammatic rules for a residue formula

Published by Institute of Physics Publishing for SISSA
Received: *June 16, 2005*
Revised: *November 18, 2005*
Accepted: *November 22, 2005*
Published: *December 20, 2005*

Topological expansion of the 2-matrix model correlation functions: diagrammatic rules for a residue formula

Bertrand Eynard and Nicolas Orantin

Service de Physique Théorique de Saclay, CEA/DSM/SPhT
Unité de Recherche associée au CNRS (URA D2306), CEA Saclay
F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France
E-mail: eynard@spht.saclay.cea.fr, orantin@spht.saclay.cea.fr

Abstract: We solve the loop equations of the hermitian 2-matrix model to all orders in the topological $1/N^2$ expansion, i.e. we obtain all non-mixed correlation functions, in terms of residues on an algebraic curve. We give two representations of those residues as Feynman-like graphs, one of them involving only cubic vertices.

Keywords: Differential and Algebraic Geometry, 1/N Expansion, Topological Field Theories, Matrix Models.

JHEP12(2005)034

© SISSA 2005

Contents

1. Introduction **2**

2. Definitions and notations **4**
2.1 Definition of the formal 2-matrix model with fixed filling fractions 4
2.2 Notations 5
2.2.1 Notation for sets of variables 5
2.2.2 Correlation functions 5

3. Loop equations **7**
3.1 The master loop equation 7
3.2 Loop equations for correlation functions 8

4. Leading order and algebraic geometry **9**
4.1 Leading order of the master loop equation 9
4.2 Introduction to some algebraic geometry 9
4.3 Fixed filling fractions 10

5. Diagrammatic solution as cubic graphs **11**
5.1 Solution in the planar limit 11
5.1.1 Determination of W_{k+1} for $k \geq 2$ 12
5.1.2 Determination of R_k^i 13
5.2 Solution for any genus 17
5.2.1 A recursive formula for $W_{k+1}^{(h)}$ 18
5.2.2 A recursive formula for $R_k^{i,(h)}$ 19
5.3 Diagrammatic solution: a cubic theory 21
5.4 Examples 23
5.4.1 Leading terms: tree level 24
5.4.2 Topological expansion: one and two loops level 25

6. An effective non cubic theory **27**
6.1 Leading order: genus 0 27
6.2 Any genus h 29
6.3 Examples 31

7. The gaussian case: the 1-matrix model limit. **32**
7.1 Diagrammatic rules 32

8. Conclusion **34**

A. Needed tools of algebraic geometry **35**

JHEP12(2005)034

B. Two points function in the planar limit **36**

C. Computation of eq. (5.39) **39**

D. Derivation of eq. (5.40) **40**

1. Introduction

The purpose of this article is to generalize the method invented in [1], for the 2-matrix model. The method of [1] is a diagrammatic technique for computing correlation functions of the 1-matrix model in terms of residues on some algebraic curve.

Random matrix models play an important role in physics and mathematics [2], and have a wealth of applications which are too long to list here. In this article, we consider "formal" random matrix integrals, which are known to be generating functions for counting some classes of discrete surfaces [3 – 7].

The partition function, free energy and correlation functions are all generating functions enumerating some kinds of graphs (respectively closed graphs, connected closed graphs, open graphs), which graphs can be seen as discrete surfaces.

In the formal model, the size N of matrices, is just a complex parameter, it needs not be an integer, and all observables (free energy, correlation functions) always have a $1/N$ expansion, because for each power of the expansion parameters, there is only a finite number of graphs with a given power of N. The power of N in a graph is its Euler characteristic, and thus the $1/N$ expansion is known as the "topological expansion" discovered by 't Hooft [4]. In the formal model, N is thus an expansion parameter, and working order by order in N enumerates only discrete surfaces of a given topology [5]. An efficient method for dealing with this formal model is to consider the Schwinger-Dyson equations, called loop equations in this context [3, 8].

To large-N limit (i.e. planar topologies), the solution of loop equations is known to be related to Toda hierarchy [9 – 12]. For this reason, the large-N expansion of matrix models plays an important role in integrable systems, and in many areas of physics [13]. It was understood by [14] that the low energy effective action of some string theory models is also described by matrix models.

In the beginning, formal matrix models were considered only in their 1-cut phase, because a potential which is a small deformation of a quadratic one, must have only one well, i.e. the variables perturbatively explore only one well. However, a $N \times N$ matrix has N eigenvalues, and even though each of them can explore perturbatively only one well, they do not need explore all the same well. That gives "multicut" solutions of matrix models, where the number of eigenvalues near each extremum of the potential is fixed (fixed filling fractions). Multicut solutions play an important role in string theory, as they describe multi-particle states [14, 15]. Multicut solutions correspond to enumerating surfaces with contact terms, which can be called "foam of surfaces" as described in [7, 16].

JHEP12(2005)034

The link between formal matrix models (which always have a $1/N$ expansion) and convergent matrix integrals (which have a $1/N$ expansion only in the 1-cut case under certain assumptions), has been better understood after the work of [16]. We emphasize again, that the results developed in this article concern the formal matrix model with fixed filling fractions, and should not be applied to convergent matrix model directly.

Recently, it has progressively become clear that large-N expansion of random matrix models has a strong link with algebraic geometry [17]. The free energy and correlation functions have been computed in terms of properties of an algebraic curve. The large-N limit of the 1-point correlation function (called the resolvent) is solution of an algebraic equation, which thus defines an algebraic curve. There have been many works which computed free energy and correlation functions in terms of that algebraic curve. The leading order resolvent and free energy were computed in the 1-cut case (algebraic curve of genus zero) in the pioneering work of [5], then some recursive method for computing correlation functions and free energy to all orders in $1/N$ were invented by [18, 19]. Those methods were first limited to 1-matrix case and 1-cut.

Then for 1-matrix several works have dealt with multicut: Akeman and Ambjørn found the first subleading term for the multicut resolvent and the 2-cut free energy [20, 21], Chekhov [22] and one of the authors together with Kokotov and Korotkin [23] found simultaneously the first subleading term for the multi-cut free energy . Then a (non-recursive) diagrammatic method was invented in [1] to find all correlation functions to all orders, in the multicut case.

The 1-matrix model, corresponds to hyper elliptical curves only. In order to have more general algebraic curves, one needs at least a 2-matrix model. For the 2-matrix models, the loop equations have been known since [8], and have been written in a concise form in [24 – 26]. They have been used to find the subleading term of the free energy, first in the genus zero case in [27], then in the genus 1 case in [28], and with arbitrary genus in [23]. The purpose of this article is to generalize the diagrammatic method of [1] for the computation of non-mixed correlation functions in the 2-matrix case. We solve the loop equations and present their solutions (the non-mixed correlation function's expansion) under two different diagrammatic forms. We first build a cubic diagrammatic representation before presenting an effective non cubic theory.

Outline of the article.

- In section 2, we introduce the model and our notations.
- Section 3 is dedicated to the derivation of loop equations. We derive the fundamental "master loop equation" before deriving loop equations whose solutions are non-mixed correlation functions
- In section 4, we show how a compact Riemann surface arises from the leading order of the master loop equation and present notations and tools of algebraic geometry needed for the computation of correlation functions.

JHEP12(2005)034

- In section 5, we present a diagrammatic solution of the loop equations as cubic Feynman-like graphs.
- Section 6 is dedicated to the presentation of another representation of the non-mixed correlation functions as graphs of a non cubic effective theory.
- In section 7, we study the example of the gaussian case corresponding to the 1-matrix model limit.

2. Definitions and notations

2.1 Definition of the formal 2-matrix model with fixed filling fractions

In this article, we are interested in the study of the formal-two-matrix-model and the computation of a whole family of observables. The partition function Z is the formal matrix integral:

$$Z := \int_{H_n \times H_n} dM_1 dM_2 \, e^{-NTr(V_1(M_1)+V_2(M_2)-M_1M_2)} \tag{2.1}$$

where M_1 and M_2 are two $N \times N$ hermitian matrices, dM_1 and dM_2 the products of Lebesgue measures of the real components of M_1 and M_2 respectively, and V_1 and V_2 two polynomial potentials of degree d_1+1 and d_2+1 respectively:

$$V_1(x) = \sum_{k=1}^{d_1+1} \frac{g_k}{k} x^k \,, \qquad V_2(y) = \sum_{k=1}^{d_2+1} \frac{\tilde{g}_k}{k} y^k \,. \tag{2.2}$$

Formal integral means it is computed as the formal power series expansion order by order in the g_k's (see [3−5]) of a matrix integral, where the non-quadratic terms in the potentials V_1 and V_2 are treated as perturbations near quadratic potentials. Such a perturbative expansion can be performed only near local extrema of $V_1(x)+V_2(y)-xy$, i.e. near points such that:

$$V_1'(\xi_i) = \eta_i \,, \qquad V_2'(\eta_i) = \xi_i \tag{2.3}$$

which has $d_1 d_2$ solutions. Therefore, if $\overline{M}_1$ and $\overline{M}_2$ are diagonal matrices, whose diagonal entries are some ξ_i's (resp. η_i's), $(\overline{M}_1, \overline{M}_2)$ is a local extremum of $\mathrm{tr}(V_1(M_1)+V_2(M_2)-M_1M_2)$ around which we can perform a perturbative expansion.

The choice of such an extremum, around which the perturbative series is computed, is equivalent to the choice of the number of eigenvalues near each pair (ξ_i, η_i), $i = 1, \dots, d_1 d_2$, i.e. the data of $d_1 d_2$ integers n_i such that:

$$\sum_{i=1}^{d_1 d_2} n_i = N \,. \tag{2.4}$$

This means, that we can choose some contours $\mathcal{C}_i$, $i = 1, \dots, d_1 d_2$, such that the following equality holds order by order in the perturbative expansion:

$$\left\langle \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}_i} \mathrm{tr} \, \frac{dx}{x - M_1} \right\rangle = -n_i \,. \tag{2.5}$$

The numbers $\frac{n_i}{N}$ are called filling fractions. Thus, in the formal model, filling fractions are fixed parameters.

JHEP12(2005)034

Fat graphs and discrete random surfaces. Once filling fractions are chosen, we perform the perturbative expansion. Each term of that formal expansion is an expectation value of a gaussian integral, and using Wick's theorem, each term can be represented by a Feynman graph. Because the integration variables are matrices, the graphs are "fat graphs", which have a 2-dimensional structure. The hermitean matrix models thus enumerate oriented surfaces (other matrix ensembles can enumerate non-oriented surfaces). This Formal expansion equivalent to an enumerating function of Feynman graphs is a standard tool in physics [3, 4]. Random matrices have thus played a role in all theories where one needs to sum over surfaces, i.e. string theory and quantum gravity (i.e. statistical physics on a random lattice).

Following this interpretation, the loop equations [8] can be understood as relationships linking surfaces of different genus and different number of boundaries.

2.2 Notations

2.2.1 Notation for sets of variables

We will consider functions of many variables $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$, or of a subset of those variables. In that purpose we introduce the following notations:

Let K be a $k-$upple of integers:

$$K = (i_1, i_2, \dots, i_k) \,. \tag{2.6}$$

We denote $k = |K|$ the length (or cardinal) of K. For any $j \leq |K|$, we denote K_j the set of all $j-$upples (i.e. subsets of length j) contained in K:

$$K_j := \{ J \subset K \ , \ |J| = j \} \,. \tag{2.7}$$

We define the following $k-$upple of complex numbers:

$$\mathbf{x}_K := (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}) \,. \tag{2.8}$$

2.2.2 Correlation functions

For a given k, we define the correlation function:

$$\overline{w}_k(x_1, \dots, x_k) := N^{k-2} \left\langle \prod_{i=1}^{k} \mathrm{tr} \, \frac{1}{x_i - M_1} \right\rangle_c \,, \tag{2.9}$$

i.e., with the previous notations:

$$\overline{w}_{|K|}(\mathbf{x}_K) := N^{|K|-2} \left\langle \prod_{r=1}^{|K|} \mathrm{tr} \, \frac{1}{x_{i_r} - M_1} \right\rangle_c \,, \tag{2.10}$$

where the formal average $\langle \, . \, \rangle$ is computed with the measure in eq. (2.1), and the subscript c means connected part (cumulant).

JHEP12(2005)034

Those correlation functions can be expanded as formal series in $\frac{1}{N^2}$ in the large N limit:

$$\overline{w}_k(\mathbf{x}_K) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{N^{2h}} \overline{w}_k^{(h)}(\mathbf{x}_K)\,. \tag{2.11}$$

The purpose of this article is to compute $\overline{w}_k^{(h)}(\mathbf{x}_K)$ as residues on an algebraic curve and represent it with Feynman-like graphs of a cubic field theory on the curve.

We also define the following auxiliary functions:

$$\overline{u}_k(x,y;\mathbf{x}_K) := N^{|K|-1}\left\langle \mathrm{tr}\,\frac{1}{x-M_1}\frac{V_2'(y)-V_2'(M_2)}{y-M_2}\prod_{r=1}^{|K|}\mathrm{tr}\,\frac{1}{x_{i_r}-M_1}\right\rangle_c \tag{2.12}$$

$$p_k(x,y;\mathbf{x}_K) := N^{|K|-1}\left\langle \mathrm{tr}\,\frac{V_1'(x)-V_1'(M_1)}{x-M_1}\frac{V_2'(y)-V_2'(M_2)}{y-M_2}\prod_{r=1}^{|K|}\mathrm{tr}\,\frac{1}{x_{i_r}-M_1}\right\rangle_c \tag{2.13}$$

$$a_k(x;\mathbf{x}_K) := N^{|K|-1}\left\langle \mathrm{tr}\,\frac{1}{x-M_1}V_2'(M_2)\prod_{r=1}^{|K|}\mathrm{tr}\,\frac{1}{x_{i_r}-M_1}\right\rangle_c . \tag{2.14}$$

Notice that $\overline{u}_{k,}(x,y;\mathbf{x}_K)$ is a polynomial in y of degree d_2-1, and $p_k(x,y;\mathbf{x}_K)$ is a polynomial in x of degree d_1-1 and in y of degree d_2-1.

It is convenient to renormalize those functions, and define:

$$u_k(x,y;\mathbf{x}_K) := \overline{u}_k(x,y;\mathbf{x}_K) - \delta_{k,0}(V_2'(y)-x) \tag{2.15}$$

and

$$w_k(\mathbf{x}_K) := \overline{w}_k(\mathbf{x}_K) + \frac{\delta_{k,2}}{(x_1-x_2)^2}\,. \tag{2.16}$$

Let us remark that all those functions have the same kind of topological expansion as $\overline{w}_k(\mathbf{x}_K)$ and one defines $p_k^{(h)}(x,y;\mathbf{x}_K)$ and $u_k^{(h)}(x,y;\mathbf{x}_K)$ as well like in eq. (2.11).

We define the function:

$$Y(x) := V_1'(x) - w_1(x) \tag{2.17}$$

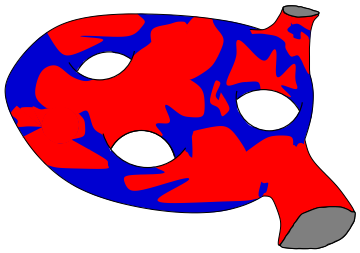
which we see below, describes the algebraic curve.

The $\frac{1}{N^2}$ expansion of such correlation functions is known to enumerate discrete surfaces of a given topology, whose polygons carry a spin + or - (Ising model on a random surface [13, 29]), see [7] for the multicut case i.e. foam of Ising surfaces.

The $\overline{w}_k^{(h)}$ are generating functions enumerating genus h discrete surfaces with k boundaries of spin +.

JHEP12(2005)034

As an example, $\overline{w}_2^{(3)}$ enumerates surfaces of genus 3 with 2 boundaries:

$\overline{w}_2^{(3)} =$  (2.18)

Notice that the question of boundaries with non uniform spin, i.e. with changes of boundary conditions has been solved to leading order only in [30].

3. Loop equations

There exist several methods for computing the free energy and correlation functions, the one we consider here is the "loop equation" method, which is nothing but Schwinger-Dyson, or Ward identities [3, 8]. They implement the Virasoro or W-algebra constraints on the partition function [17, 31], i.e. the fact that the matrix integral is left unchanged under a change of variable. The loop equations are valid in the formal model, order by order in the expansion parameters.

For the 2-matrix model, loop equations have been known since [8], and written in a more systematic way in [17, 24 – 26].

3.1 The master loop equation

It is well known that in the large-N limit, loop equations imply an algebraic equation for the functions w_1, i.e. for the function $Y(x)$, called the master loop equation. Let us briefly recall how to derive it (see [26]):

- the change of variables $M_2 \to M_2 + \epsilon\frac{1}{x-M_1}$ implies:

$$0 = a_0(x) - x\overline{w}_1(x) + 1 \tag{3.1}$$

- the change of variables $M_1 \to M_1 + \epsilon\frac{1}{x-M_1}\frac{V_2'(y)-V_2'(M_2)}{y-M_2}$ implies:

$$\begin{aligned}\overline{w}_1(x)\overline{u}_0(x,y) + \frac{1}{N^2}u_1(x,y;x) = {} & V_1'(x)\overline{u}_0(x,y) - p_0(x,y) - y\overline{u}_0(x,y) + \\ & + V_2'(y)w_1(x) - a_0(x)\end{aligned} \tag{3.2}$$

i.e., putting everything together:

$$(y-Y(x))u_0(x,y) + \frac{1}{N^2}u_1(x,y;x) = (V_2'(y)-x)(V_1'(x)-y) - p_0(x,y) + 1\,. \tag{3.3}$$

JHEP12(2005)034

We define:

$$E(x,y) = (V_2'(y) - x)(V_1'(x) - y) - p_0(x,y) + 1\,. \tag{3.4}$$

The *master loop equation* is thus:

$$\boxed{(y - Y(x))u_0(x,y) + \frac{1}{N^2}u_1(x,y;x) = E(x,y)} \tag{3.5}$$

where $E(x,y)$ is a polynomial of degree d_1+1 in x and d_2+1 in y.

3.2 Loop equations for correlation functions

We now derive the loop equations which allow to compute recursively the k-point non-mixed correlation functions.

- The change of variables $\delta M_2 = \frac{1}{x-M_1}\prod_{i=1}^k \mathrm{tr}\,\frac{1}{x_i - M_1}$ implies (see [26]):

$$a_k(x;\mathbf{x}_K) = x\,\overline{w}_{k+1}(x,\mathbf{x}_K) - N^2\overline{w}_k(\mathbf{x}_K) \tag{3.6}$$

- The change of variables $\delta M_1 = \frac{1}{x-M_1}\frac{V_2'(y)-V_2'(M_2)}{y-M_2}\ \prod_{i=1}^k \mathrm{tr}\,\frac{1}{x_i-M_1}$ implies (see [26]):

$$\begin{aligned} w_1(x)\,\overline{u}_k(x,y;\mathbf{x}_K) + \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{J\in K_j}\overline{u}_j(x,y;\mathbf{x}_J)\,\overline{w}_{k-j+1}(x,\mathbf{x}_{K-J}) + \\ + \frac{1}{N^2}\overline{u}_{k+1}(x,y;x,\mathbf{x}_K) + \\ + \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial}{\partial x_j}\,\frac{\overline{u}_{k-1}(x,y;\mathbf{x}_{K-\{j\}}) - \overline{u}_{k-1}(x_j,y;\mathbf{x}_{K-\{j\}})}{x-x_j} = \\ = V_1'(x)\overline{u}_{k,0}(x,y;\mathbf{x}_K) - p_k(x,y;\mathbf{x}_K) \\ - y\overline{u}_k(x,y;\mathbf{x}_K) + V_2'(y)\overline{w}_{k+1}(x,\mathbf{x}_K) - a_k(x;\mathbf{x}_K) \end{aligned} \tag{3.7}$$

i.e. for $k \geq 1$:

$$\boxed{\begin{aligned}(y - Y(x))\,u_k(x,y;\mathbf{x}_K) = &-\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{J\in K_j} u_j(x,y;\mathbf{x}_J)\,w_{k-j+1}(x,\mathbf{x}_{K-J}) - \\ &-\frac{1}{N^2}u_{k+1}(x,y;x,\mathbf{x}_K) + \\ &+\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial}{\partial x_j}\,\frac{u_{k-1}(x_j,y;\mathbf{x}_{K-\{j\}})}{x-x_j} - p_k(x,y;\mathbf{x}_K)\end{aligned}} \tag{3.8}$$

The purpose of this article is to solve eq. (3.8) and compute $\overline{w}_k^{(h)}$ for all k and h.

JHEP12(2005)034

4. Leading order and algebraic geometry

4.1 Leading order of the master loop equation

To large-N leading order, the master loop equation eq. (3.5) reads:

$$\boxed{(y - Y(x))u_0(x,y) = E(x,y)} \tag{4.1}$$

Since $u_0(x,y)$ is a polynomial in y, it has no singularity for y finite and the l.h.s. vanishes for $y = Y(x)$, i.e.:

$$E(x,Y(x)) = 0 \tag{4.2}$$

This defines an algebraic curve $E(x,y) = 0$.

Notice that to leading order we have:

$$u_0(x,y) = \frac{E(x,y)}{y - Y(x)} \tag{4.3}$$

and

$$u_0(x,Y(x)) = E_y(x,Y(x))\,. \tag{4.4}$$

4.2 Introduction to some algebraic geometry

We use notations similar to [32] or [33]. Some useful hints for understanding this section can be found in appendix A.

Let us parameterize the curve $E(x,y) = 0$ with a running point p of a compact Riemann surface $\mathcal{E}$. It means that we define two meromorphic functions $x(p)$ and $y(p)$ on $\mathcal{E}$ such that:

$$E(x,y) = 0 \Leftrightarrow \exists p \in \mathcal{E} \qquad x = x(p)\,, \quad y = y(p) \tag{4.5}$$

The functions x and y are not bijective. Indeed, since $E(x,y)$ is a polynomial of degree d_2+1 in y, it has d_2+1 solutions, i.e. for a given x, there exist d_2+1 points p on $\mathcal{E}$ such that $x(p) = x$. Thus, the Riemann surface is made of d_2+1 x-sheets, respectively d_1+1 y-sheets. Hence, from now on, we use these notations:

$$x(p) = x \Leftrightarrow p = p^j(x) \qquad \text{for} \quad j = 0,\dots,d_2 \tag{4.6}$$

$$y(p) = y \Leftrightarrow p = \tilde{p}^j(x) \qquad \text{for} \quad j = 0,\dots,d_1\,. \tag{4.7}$$

We will most often omit the exponent 0 corresponding to the physical sheet: $p = p^0$.

For instance, one can write $E(x,y)$ as:

$$\begin{aligned} E(x(p),y(q)) &= -g_{d_1+1}\times\prod_{i=0}^{d_1}(x(p) - x(\tilde{q}^i(y))) \\ &= -\tilde{g}_{d_2+1}\times\prod_{i=0}^{d_2}(y(q) - y(p^i(x)))\,. \end{aligned} \tag{4.8}$$

JHEP12(2005)034

Considering that the $w_k^{(h)}$'s, $u_k^{(h)}$'s and $p_k^{(h)}$'s are multivalued functions in their arguments x, we now work with differentials monovalued on the Riemann surface. Let us write the differentials:

$$W_{k+1}(p, \mathbf{p}_K) := w_{k+1}(x(p), \mathbf{x}(p_K))dx(p)\prod_{i=1}^{k} dx(p_i) \tag{4.9}$$

$$U_k(p, y; \mathbf{p}_K) := u_k(x(p), y; \mathbf{x}(p_K))dx(p)\prod_{i=1}^{k} dx(p_i) \tag{4.10}$$

$$P_k(x, y; \mathbf{p}_K) := p_k(x, y; \mathbf{x}(p_K))\prod_{i=1}^{k} dx(p_i)\,. \tag{4.11}$$

Note: in the following, the arguments of a function will be called $x(p)$ or $y(r)$ if the function is defined on the basis, and p or r if the function is defined on the Riemann surface — and so multivalued on the basis.

Let us now review the notations we use in this article to denote some basic objects. For definitions and details, we refer the reader to appendix A and [32] or [33].

Canonical cycles: $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{B}_i$ for $i = 1, \dots, g$ where g is the genus of the compact Riemann surface $\mathcal{E}$ ($0 \le g \le d_1 d_2 - 1$), such that:

$$\mathcal{A}_i \cap \mathcal{B}_i = \delta_{i,j}\,. \tag{4.12}$$

Branch points in x: they are the zeroes of dx on the surface. We denote them by a_i, $i = 1, \dots, d_2 + 1 + 2g$.

Bergmann kernel: it is the unique bilinear differential with only one double pole at $p = q$ satisfying:

$$B(p,q) \underset{p\to q}{\sim} \frac{dx(p)dx(q)}{(x(p)-x(q))^2} + \text{finite} \quad \text{and} \quad \forall i \ \oint_{p\in\mathcal{A}_i} B(p,q) = 0\,. \tag{4.13}$$

Abelian differential of third kind: it is the differential defined by $dS_{q,r}(p) = \int_{q'=r}^{q} B(p,q')$. Notice that it has the following properties:

$$\operatorname*{Res}_{p\to q} dS_{q,r}(p) = 1 = -\operatorname*{Res}_{p\to r} dS_{q,r}(p) \quad \text{and} \quad \forall i \ \oint_{\mathcal{A}_i} dS_{q,r}(p) = 0\,. \tag{4.14}$$

4.3 Fixed filling fractions

To large-N leading order, the loop equation eq. (4.2) is an algebraic equation:

$$E(x, Y(x)) = 0\,. \tag{4.15}$$

The coefficients of E are determined using filling fractions. Since $w_1(x) = V_1'(x) - Y(x)$, eq. (2.5) gives (up to a redefinition of $\mathcal{A}_i$):

$$\frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{A}_i} y dx = -\frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{A}_i} x dy = \epsilon_i \tag{4.16}$$

JHEP12(2005)034

Let us recall that (see section 2.1) the ϵ_i's are called filling fractions, and they are given parameters (moduli) of the model. They don't depend on the potential or on any other parameter.

In particular, since all correlation functions $w_k(x_1, \dots, x_k)$ are obtained by derivation of w_1 with respect to the potential V_1 [19], we have for $k \ge 2$:

$$\frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{A}_i} w_k(x_1, \dots, x_k)dx_1 = 0\,. \tag{4.17}$$

Equation eq. (4.16) together with the large x and y behaviors eq. (A.2) and eq. (A.1), are sufficient to determine completely all the coefficients of the polynomial $E(x,y)$, and thus the leading large-N resolvent $w_1(x)$.

In what follows, we assume that the leading resolvent, i.e. the function $Y(x)$ is known, and we refer the reader to the existing literature on that topic, for instance [17, 26, 34, 35].

5. Diagrammatic solution as cubic graphs

In this section we present a first way of describing the solution of the loop equation eq. (3.8) by trivalent diagrams whose h loop level corresponds to the h-th term $W_k^{(h)}$ of the topological expansion.

5.1 Solution in the planar limit

Before considering the full $\frac{1}{N^2}$ expansion, let us focus on the structure of the leading terms corresponding to planar fat graphs. Thus the $1/N^2$ terms in the loop equations are omited.

From now on and particularly in this paragraph, we drop the genus zero exponent (0) when it is clear that we deal with the planar limit, i.e. $w_k^{(0)}(\mathbf{x}_K) \to w_k(\mathbf{x}_K)$.

Up to now, the loop equations were written in terms of multivalued functions. It is more appropriate to write them in terms of meromorphic differentials on the Riemann surface. Thus, one writes eq. (3.8) in the planar limit as follows:

$$\begin{aligned}(y(r)-y(p))U_k(p, y(r); \mathbf{p}_K) = &-\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{J\in K_j} \frac{U_j(p, y(r); \mathbf{p}_J)\, W_{k-j+1}(p, \mathbf{p}_{K-J})}{dx(p)} + \\ &+\sum_{j=1}^{k} d_{p_j}\left(\frac{U_{k-1}(p_j, y(r); \mathbf{p}_{K-\{j\}})}{x(p)-x(p_j)}\,\frac{dx(p)}{dx(p_j)}\right) - \\ &-P_k(x(p), y(r); \mathbf{p}_K)dx(p)\,.\end{aligned} \tag{5.1}$$

Starting from eq. (5.1), we determine W_k and U_k for any k by recursion on k.

Let us assume that one knows $W_j(\mathbf{p}_J)$ for $j \le k$ and $U_j(p, \mathbf{p}_J)$ for $j \le k-1$. The first step consists in the determination of $W_{k+1}(p, \mathbf{p}_K)$ as a function of the lower order correlation functions. The second step leads to the computation of $U_k(p, \mathbf{p}_K)$. Once this is done, one knows the correlation functions one order upper. The initial terms W_2 and U_1 can be found in the literature [17, 26, 34] and are rederived in appendix B.

JHEP12(2005)034

5.1.1 Determination of W_{k+1} for $k \geq 2$

If one chooses $r = p$ in eq. (5.1), one gets (using eq. (4.3) and eq. (4.4)):

$$\begin{aligned} E_y(x(p),y(p))W_{k+1}(p,\mathbf{p}_K) = & -P_k(x(p),y(p);\mathbf{p}_K)\,dx(p) - \\ & -\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{J\in K_j}\frac{U_j(p,y(p);\mathbf{p}_J)\,W_{k-j+1}(p,\mathbf{p}_{K-J})}{dx(p)} + \\ & +\sum_{j=1}^{k} d_{p_j}\left(\frac{U_{k-1}(p_j,y(p);\mathbf{p}_{K-\{j\}})}{x(p)-x(p_j)}\,\frac{dx(p)}{dx(p_j)}\right). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Notice that the two equations eq. (5.1) and eq. (5.2) imply by recursion, that W_k and U_k are indeed meromorphic differentials on the curve, in all their variables.

We define:

$$\forall (i,j) \qquad R_k^i(p^j,p_K) := \frac{U_k(p^j,y(p^i);p_K)}{E_y(x(p^j),y(p^i))dx(p^j)}\,. \tag{5.3}$$

Note that we have already obtained (see eq. (4.3)) that:

$$R_0^i(p^l) = \delta_{i,l}\,. \tag{5.4}$$

Using eq. (4.14), the Cauchy formula gives:

$$W_{k+1}(p,\mathbf{p}_K) = -\operatorname*{Res}_{p'\to p} W_{k+1}(p',\mathbf{p}_K)dS_{p',o}(p) \tag{5.5}$$

where $o \in \mathcal{E}$ is an arbitrary point on the Riemann surface.

The integrand has poles in p' only at $p' = p$ and the branch points $p' = a_s$ (this can be proven recursively by differentiating wrt the potential $\frac{\partial}{\partial V_1}$). Using Riemann bilinear identity eq. (A.10), we can then move the integration contour and get:

$$W_{k+1}(p,\mathbf{p}_K) = \sum_s \operatorname*{Res}_{p'\to a_s} W_{k+1}(p',\mathbf{p}_K)dS_{p',o}(p)\,. \tag{5.6}$$

We now introduce the loop equation eq. (5.2) inside this expression and remark that only one term has poles when $p' \to a_s$. Thus $W_{k+1}(p,\mathbf{p}_K)$ can be written:

$$\begin{aligned} W_{k+1}(p,\mathbf{p}_K) &= -\sum_s \operatorname*{Res}_{p'\to a_s}\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{J\in K_j}\frac{U_j(p',y(p');\mathbf{p}_J)}{E_y(x(p'),y(p'))}\frac{W_{k-j+1}(p',\mathbf{p}_{K-J})}{dx(p')}dS_{p',o}(p) \\ &= -\sum_s \operatorname*{Res}_{p'\to a_s}\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{J\in K_j} R_j^0(p',\mathbf{p}_J)W_{k-j+1}(p',\mathbf{p}_{K-J})dS_{p',o}(p)\,. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Notice that $U_k(p,y;\mathbf{p}_K)$ is a polynomial in y whose degree is equal to $d_2 - 1$. Considering its d_2 values for $y = y(p^i)$ with $i \in [1,d_2]$, the interpolation formula reads:

$$\forall y \quad \frac{(y-y(p))U_k(p,y;\mathbf{p}_K)}{E(x(p),y)} = -\sum_{i=1}^{d_2}\frac{U_k(p,y(p^i);\mathbf{p}_K)(y(p)-y(p^i))}{(y-y(p^i))E_y(x(p),y(p^i))} \tag{5.8}$$

JHEP12(2005)034

for $y = y(p)$, this gives:

$$R_k^0(p,\mathbf{p}_K) = -\sum_{i=1}^{d_2} R_k^i(p,\mathbf{p}_K)\,. \tag{5.9}$$

So, in eq. (5.7), one obtains the recursive formula for $W_k(\mathbf{p}_K)$:

$$\boxed{W_{k+1}(p,\mathbf{p}_K) = \sum_{i=1}^{d_2}\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{J\in K_j}\sum_s \operatorname*{Res}_{p'\to a_s} R_j^i(p';\mathbf{p}_J)W_{k-j+1}(p',\mathbf{p}_{K-J})dS_{p',o}(p)\,.} \tag{5.10}$$

The sum over j represents the summation over all partitions of K into two subsets J and $K - J$.

5.1.2 Determination of R_k^i

In this section, we find a recursion formula for R_k^i.

For this purpose, one needs to know an intermediate expression defining the different U_k's as well as a relation linking the value of

$$\sum_{j=0}^{k-1} U_j(p^i,y(p);\mathbf{p}_J)W_{k-j+1}(p^i,\mathbf{p}_{K-J}) \tag{5.11}$$

for different i's.

Let us rewrite here eq. (5.1):

$$\begin{aligned} (y(r)-y(q))U_k(q,y(r);\mathbf{p}_K) = & -\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{J\in K_j}\frac{1}{dx(q)}U_j(q,y(r);\mathbf{p}_J)\,W_{k-j+1}(q,\mathbf{p}_{K-J}) + \\ & +\sum_{j=1}^{k} d_{p_j}\left(\frac{U_{k-1}(p_j,y(r);\mathbf{p}_{K-\{j\}})}{x(q)-x(p_j)}\,\frac{dx(q)}{dx(p_j)}\right) - \\ & -P_k(x(q),y(r);\mathbf{p}_K)dx(q)\,. \end{aligned} \tag{5.12}$$

In what follows, we use the properties of rational functions defined on the basis and not on the Riemann surface (for some more details, see the case $k = 1$ in appendix B).

For $r = q = p^i$, eq. (5.12) reads:

$$\begin{aligned} 0 = & -\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{J\in K_j}\frac{1}{dx(p^i)}U_j(p^i,y(p^i);\mathbf{p}_J)\,W_{k-j+1}(p^i,\mathbf{p}_{K-J}) + \\ & +\sum_{j=1}^{k} d_{p_j}\left(\frac{U_{k-1}(p_j,y(p^i);\mathbf{p}_{K-\{j\}})}{x(p^i)-x(p_j)}\,\frac{dx(p^i)}{dx(p_j)}\right) - \\ & -P_k(x(p^i),y(p^i);\mathbf{p}_K)dx(p^i) - \\ = & -\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{J\in K_j}\frac{1}{dx(p)}U_j(p^i,y(p^i);\mathbf{p}_J)\,W_{k-j+1}(p^i,\mathbf{p}_{K-J}) + \end{aligned}$$

JHEP12(2005)034

$$+\sum_{j=1}^{k} d_{p_j}\left(\frac{U_{k-1}(p_j,y(p^i);\mathbf{p}_{K-\{j\}})}{x(p)-x(p_j)}\frac{dx(p)}{dx(p_j)}\right)-$$
$$-P_k(x(p),y(p^i);\mathbf{p}_K)dx(p) \tag{5.13}$$

where we have used that $x(p)=x(p^i)$.

Now, write eq. (5.12) with $r=p^i$ and $q=p$:

$$(y(p^i)-y(p))U_k(p,y(p^i);\mathbf{p}_K) = -\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{J\in K_j}\frac{1}{dx(p)}U_j(p,y(p^i);\mathbf{p}_J)\,W_{k-j+1}(p,\mathbf{p}_{K-J})+$$
$$+\sum_{j=1}^{k} d_{p_j}\left(\frac{U_{k-1}(p_j,y(p^i);\mathbf{p}_{K-\{j\}})}{x(p)-x(p_j)}\frac{dx(p)}{dx(p_j)}\right)-$$
$$-P_k(x(p),y(p^i);\mathbf{p}_K)dx(p) \tag{5.14}$$

and inserting eq. (5.13) we get:

$$(y(p^i)-y(p))U_k(p,y(p^i);\mathbf{p}_K) = -\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{J\in K_j}\frac{1}{dx(p)}U_j(p,y(p^i);\mathbf{p}_J)W_{k-j+1}(p,\mathbf{p}_{K-J})+$$
$$+\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{J\in K_j}\frac{1}{dx(p)}U_j(p^i,y(p^i);\mathbf{p}_J)W_{k-j+1}(p^i,\mathbf{p}_{K-J}). \tag{5.15}$$

This formula is in principle sufficient to compute the U_k's recursively, and then, one can compute the R^i_k's. However, what we need in order to get diagrammatic rules, is a closed recursion relation for the R^i_k's themselves. In order to achieve this aim, we show that:

Lemma. *for any $k\geq 1$, one has:*

$$U_k(p,y;\mathbf{p}_K)=\frac{E(x(p),y)dx(p)}{y-y(p)}\sum_{r=1}^{d_2}\sum_{K_1\cup\ldots\cup K_r=K}\sum_{j_1\neq j_2\neq\ldots\neq j_r=1}^{d_2}\prod_{t=1}^{r}\frac{W_{|K_t|+1}(p^{j_t},\mathbf{p}_{K_t})}{(y-y(p^{(j_t)}))\,dx(p)} \tag{5.16}$$

where the sum over $K_1\cup\ldots\cup K_r=K$ is a sum over all partitions of K into r subsets.

Proof. It can be proven easily by recursive action of $\partial/\partial V_1$, as in [19], however, in order to have a self-contained method, we want to derive it here only from the loop equations eq. (3.8).

The proof works by recursion on k. It is proven in appendix B for $k=1$. Let us assume that, it holds for any $l\leq k-1$.

Notice, that since both sides of eq. (5.16) are polynomials of y, of degree d_2-1, it is sufficient to prove that the equality holds for d_2 values of y, namely, it is sufficient to prove it for $y=y(p^i)$, $i=1,\ldots,d_2$. Therefore, one has to prove that:

$$\frac{U_k(p,y(p^i);\mathbf{p}_K)}{dx(p)}=\frac{E_y(x(p^i),y(p^i))}{y(p^i)-y(p)}\sum_{r=1}^{d_2}\sum_{K_1\cup\ldots\cup K_r=K}\sum_{j_1\neq j_2\neq\ldots\neq j_{r-1}\neq 0,i}$$

JHEP12(2005)034

$$\frac{W_{|K_r|+1}(p^i,\mathbf{p}_{K_r})}{dx(p)}\prod_{t=1}^{r-1}\frac{W_{|K_t|+1}(p^{j_t},\mathbf{p}_{K_t})}{(y-y(p^{j_t}))\,dx(p)} \tag{5.17}$$

where only the sums in which one of the j_t's is equal to i contribute.

The recursion hypothesis for $j\leq k-1$, and any $J\in K_j$ gives:

$$\frac{U_j(p^i,y(p^i);\mathbf{p}_J)}{dx(p)} = E_y(x(p^i),y(p^i))\sum_{r=1}^{d_2}\sum_{J_1\cup\ldots\cup J_r=J}\sum_{j_1\neq j_2\neq\ldots\neq j_r\neq i}$$
$$\prod_{t=1}^{r}\frac{W_{|J_t|+1}(p^{j_t},\mathbf{p}_{J_t})}{(y(p^i)-y(p^{j_t}))\,dx(p)}. \tag{5.18}$$

In order to compute $U_j(p,y(p^i);\mathbf{p}_J)$, one has to keep only terms in the sum such that there exists a t such that $j_t=i$, i.e.

$$\frac{U_j(p,y(p^i);\mathbf{p}_J)}{dx(p)} = E_y(x(p^i),y(p^i))\sum_{r=1}^{d_2}\sum_{J_1\cup\ldots\cup J_r=J}\sum_{j_1\neq j_2\neq\ldots\neq j_{r-1}\neq 0,i}$$
$$\frac{W_{|J_r|+1}(p^i,\mathbf{p}_{J_r})}{(y(p^i)-y(p))\,dx(p)}\prod_{t=1}^{r-1}\frac{W_{|J_t|+1}(p^{j_t},\mathbf{p}_{J_t})}{(y(p^i)-y(p^{j_t}))\,dx(p)}. \tag{5.19}$$

Insert that into eq. (5.15):

$$(y(p^i)-y(p))U_k(p,y(p^i);\mathbf{p}_K) =$$
$$= -E_y(x(p^i),y(p^i))\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{J\in K_j}\sum_{r=1}^{d_2}\sum_{J_1\cup\ldots\cup J_r=J}\sum_{j_1\neq j_2\neq\ldots\neq j_{r-1}\neq 0,i}$$
$$W_{k-j+1}(p,\mathbf{p}_{K-J})\frac{W_{|J_r|+1}(p^i,\mathbf{p}_{J_r})}{(y(p^i)-y(p))\,dx(p)}\prod_{t=1}^{r-1}\frac{W_{|J_t|+1}(p^{j_t},\mathbf{p}_{J_t})}{(y(p^i)-y(p^{j_t}))\,dx(p)}+$$
$$+E_y(x(p^i),y(p^i))\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{J\in K_j}\sum_{r=1}^{d_2}\sum_{J_1\cup\ldots\cup J_r=J}\sum_{j_1\neq j_2\neq\ldots\neq j_r\neq i}$$
$$W_{k-j+1}(p^i,\mathbf{p}_{K-J})\prod_{t=1}^{r}\frac{W_{|J_t|+1}(p^{j_t},\mathbf{p}_{J_t})}{(y(p^i)-y(p^{j_t}))\,dx(p)}. \tag{5.20}$$

The difference between these two summation, keeps only $j_t\neq 0,i$, thus:

$$U_k(p,y(p^i);\mathbf{p}_K) = E_y(x(p^i),y(p^i))\,dx(p)\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{J\in K_j}\sum_{r=1}^{d_2}\sum_{J_1\cup\ldots\cup J_r=J}\sum_{j_1\neq j_2\neq\ldots\neq j_r\neq i,0}$$
$$\frac{W_{k-j+1}(p^i,\mathbf{p}_{K-J})}{(y(p^i)-y(p))\,dx(p)}\prod_{t=1}^{r}\frac{W_{|J_t|+1}(p^{j_t},\mathbf{p}_{J_t})}{(y(p^i)-y(p^{j_t}))\,dx(p)} \tag{5.21}$$

i.e. we have proven the lemma for k, for $y=y(p^i)$, and since both sides are polynomials in y of degree d_2-1, the equality holds for all y. □

JHEP12(2005)034

Theorem. *For all $k \geq 1$, one has:*

$$\sum_{i=1}^{d_2}\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{J\in K_j} U_j(p^i,y(p);\mathbf{p}_J)W_{k-j+1}(p^i,\mathbf{p}_{K-J}) = \\ = \sum_{j=1}^{k-1}\sum_{J\in K_j} U_j(p,y(p);\mathbf{p}_J)W_{k-j+1}(p,\mathbf{p}_{K-J}) \tag{5.22}$$

Proof. Let us simply perform some basic rearrangements:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{d_2}\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{J\in K_j} U_j(p^i,y(p);\mathbf{p}_J)W_{k-j+1}(p^i,\mathbf{p}_{K-J}) = \\
&= \sum_{K_1\bigcup L=K}\sum_{j_1=1}^{d_2} W_{|K_1|+1}(p^{j_1},\mathbf{p}_{K_1})U_{|L|+1}(p^{j_1},y(p);\mathbf{p}_L) \\
&= E_y(x(p),y(p))dx(p)\sum_{K_1\bigcup L=K}\sum_{j_1=1}^{d_2}\sum_{r=1}^{d_2}\sum_{K_2\cup\ldots\cup K_{r+1}=L}\sum_{j_2\neq j_3\neq\ldots\neq j_r\in[1,d_2]-\{j_1\}} \\
&\quad W_{|K_1|+1}(p^{j_1},\mathbf{p}_{K_1})\frac{W_{|K_{r+1}|+1}(p,\mathbf{p}_{K_{r+1}})}{(y(p)-y(p^{j_1}))}\prod_{a=2}^{r}\frac{W_{|K_a|+1}(p^{j_a},\mathbf{p}_{K_a})}{(y(p)-y(p^{j_a}))dx(p)} \\
&= E_y(x(p),y(p))dx(p)\sum_{r=1}^{d_2}\sum_{K_1\cup\ldots\cup K_{r+1}=K}\sum_{j_1\neq j_2\neq\ldots\neq j_r=1}^{d_2} \\
&\quad \prod_{a=1}^{r}\frac{W_{|K_a|+1}(p^{j_a},\mathbf{p}_{K_a})W_{|K_{r+1}|+1}(p,\mathbf{p}_{K_{r+1}})}{(y(p)-y(p^{j_a}))dx(p)} \\
&= \sum_{K_{r+1}\bigcup J=K} W_{|K_{r+1}|+1}(p,\mathbf{p}_{K_{r+1}})U_{|J|}(p,y(p);\mathbf{p}_J)
\end{aligned} \tag{5.23}$$

□

This identity simplifies eq. (5.15) which becomes now:

$$(y(p^i)-y(p))R_k^i(p,\mathbf{p}_K)dx(p) = W_{k+1}(p^i,\mathbf{p}_K) + \\ +\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{J\in K_j}\sum_{l\neq 0,i}\frac{U_j(p^l,y(p^j);\mathbf{p}_J)W_{k-j+1}(p^l,\mathbf{p}_{K-J})}{E_y(x(p),y(p^i))dx(p)}. \tag{5.24}$$

One can now write down the final recursion formula for $R_k^i(p,\mathbf{p}_K)$ in these terms:

$$\boxed{R_k^i(p,\mathbf{p}_K) = \frac{W_{k+1}(p^i,\mathbf{p}_K)}{(y(p^i)-y(p))dx(p)} + \\ +\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{J\in K_j}\sum_{l\neq 0,i}\frac{R_j^i(p^l,\mathbf{p}_J)W_{k-j+1}(p^l,\mathbf{p}_{K-J})}{(y(p^i)-y(p))dx(p)}.} \tag{5.25}$$

The relations eq. (5.7) and eq. (5.25) allow to compute recursively W_k for any k. This solution can be represented by binary trees as it is presented in section (5.3).

JHEP12(2005)034

5.2 Solution for any genus

In the previous paragraph, one has kept only the leading terms when performing the changes of variables to obtain the Schwinger-Dyson equations. Let us now write the $\frac{1}{N^2}$ corrective term for the same changes of variables so that we write a system of equations giving the whole $\frac{1}{N^2}$ expansion. One obtains the following loop equations:

$$\begin{aligned}
(y(r)-y(p))U_k(p,y(r);\mathbf{p}_K) = &-P_k(x(p),y(r);\mathbf{p}_K)dx(p) - \\
&-\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{dx(p)}U_j(p,y(r);\mathbf{p}_J)W_{k-j+1}(p,\mathbf{p}_{K-J}) - \\
&-\frac{1}{N^2}\frac{U_{k+1}(p,y(r);p,\mathbf{p}_K)}{dx(p)} + \\
&+\sum_j d_{p_j}\left(\frac{U_{k-1}(p_j,y(r);\mathbf{p}_{K-\{j\}})}{x(p)-x(p_j)}\frac{dx(p)}{dx(p_j)}\right).
\end{aligned} \tag{5.26}$$

For the following, one should remind the expression of the function $Y(x(p))$:

$$Y(x) := V_1'(x) - \overline{w}_1(x). \tag{5.27}$$

Then, for $h \geq 1$:

$$Y^{(h)}(x(p)) = -\frac{W_1^{(h)}(p)}{dx(p)}. \tag{5.28}$$

Consider now the $\frac{1}{N^2}$ expansion of this equation order by order. The genus h term (corresponding to the $\frac{1}{N^{2h}}$ term) gives:

$$\begin{aligned}
&(y(r)-y(p))U_k^{(h)}(p,y(r);\mathbf{p}_K) - \sum_{m=1}^{h}Y^{(m)}(x(p))U_k^{(h-m)}(p,y(r);\mathbf{p}_K) - = \\
&\quad = -P_k^{(h)}(x(p),y(r);\mathbf{p}_K)dx(p) \\
&\quad\quad -\sum_{m=0}^{h}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{dx(p)}U_j^{(m)}(p,y(r);\mathbf{p}_J)W_{k-j+1}^{(h-m)}(p,\mathbf{p}_{K-J}) - \\
&\quad\quad -\frac{U_{k+1}^{(h-1)}(p,y(r);p,\mathbf{p}_K)}{dx(p)} + \sum_j d_{p_j}\left(\frac{U_{k-1}^{(h)}(p_j,y(r);\mathbf{p}_{K-\{j\}})}{x(p)-x(p_j)}\frac{dx(p)}{dx(p_j)}\right).
\end{aligned} \tag{5.29}$$

When $y(r) = y(p)$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{h}Y^{(m)}(x(p))U_k^{(h-m)}(p,y(p);\mathbf{p}_K) = \\
&\quad = P_k^{(h)}(x(p),y(p);\mathbf{p}_K)dx(p) + \sum_{m=0}^{h}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{dx(p)}U_j^{(m)}(p,y(p);\mathbf{p}_J)W_{k-j+1}^{(h-m)}(p,\mathbf{p}_{K-J}) + \\
&\quad\quad +\frac{U_{k+1}^{(h-1)}(p,y(p);p,\mathbf{p}_K)}{dx(p)} - \sum_j d_{p_j}\left(\frac{U_{k-1}^{(h)}(p_j,y(p);\mathbf{p}_{K-\{j\}})}{x(p)-x(p_j)}\frac{dx(p)}{dx(p_j)}\right).
\end{aligned} \tag{5.30}$$

JHEP12(2005)034

These two equations are the generalization of eq. (5.1) and eq. (5.2) for any genus in the topological expansion. With all these tools, we are now able to compute all the terms of the $\frac{1}{N^2}$ expansion of non mixed traces.

In this section, we proceed in two steps to compute the correlation function $W_k^{(h)}$ for any k and any h, and represent it as a Feynman graph with h loops. The first step consists in the determination of a recursive relation for $W_k^{(h)}$, whereas the second one gives $R_k^{i,(h)} := \frac{U_k^{(h)}(p^j, y(p^i); p_K)}{E_y(x(p^j), y(p^i))dx(p^j)}$ considered the lower order terms known.

For the following, let h and k be two given positive integers. Let us consider $W_j^{(m)}$ known for any j if $m < h$ and any $j \leq k$ if $m = h$. One also assume that $R_j^{i,(m)}$ is known for any i and any j if $m < h$ and any $j < k$ if $m = h$. Starting from these assumptions, one computes $W_{k+1}^{(h)}$ and $R_k^{i,(h)}$, what will allow to know any term recursively.

5.2.1 A recursive formula for $W_{k+1}^{(h)}$

Let us remind eq. (5.30) in a more suitable way to emphasize that it allows us to compute $W_{k+1}^{(h)}(p, p_K)$ with our assumption:

$$\begin{aligned} W_{k+1}^{(h)}(p, \mathbf{p}_K)U_0(p, y(p)) = &- \sum_{m=0}^{h-1} W_1^{(h-m)}(p)U_k^{(m)}(p, y(p); \mathbf{p}_K) - \\ &- P_k^{(h)}(p, y(p); \mathbf{p}_K)dx(p)^2 - \\ &- \sum_{m=0}^{h} \sum_{j=0, m+j\neq 0}^{k-1} U_j^{(m)}(p, y(p); \mathbf{p}_J)W_{k-j+1}^{(h-m)}(p, \mathbf{p}_{K-J}) - \\ &- U_{k+1}^{(h-1)}(p, y(p); p, \mathbf{p}_K) + \\ &+ \sum_j \sum_j d_{p_j}\left(\frac{U_{k-1}^{(h)}(p_j, y(p); \mathbf{p}_{K-\{j\}})}{x(p) - x(p_j)}\frac{dx(p)}{dx(p_j)}\right)dx(p)\,. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Remark that the r.h.s. contains only known terms except $P_k^{(h)}(p, y(p); \mathbf{p}_K)$. Fortunately, it plays no role in Cauchy formula.

Indeed, we write the Cauchy formula, move the integration contour and vanish integrals around the cycles thanks to the Riemann bilinear identity eq. (A.10). This gives:

$$\begin{aligned} W_{k+1}^{(h)}(p, \mathbf{p}_K) &= -\operatorname*{Res}_{p'\to p} W_{k+1}^{(h)}(p', \mathbf{p}_K)dS_{p',o}(p) \\ &= \sum_s \operatorname*{Res}_{p'\to a_s} W_{k+1}^{(h)}(p', \mathbf{p}_K)dS_{p',o}(p)\,. \end{aligned} \tag{5.32}$$

We now introduce eq. (5.31) inside this formula and keep only terms which have poles at the branch points:

$$\begin{aligned} W_{k+1}^{(h)}(p, \mathbf{p}_K) = &- \sum_{m=0}^{h-1} \sum_s \operatorname*{Res}_{p'\to a_s} W_1^{(h-m)}(p')R_k^{(m)}(p'; \mathbf{p}_K)dS_{p',o}(p) - \\ &- \sum_{m=0}^{h} \sum_{j=0, m+j\neq 0}^{k-1} \sum_s \operatorname*{Res}_{p'\to a_s} R_j^{(m)}(p'; \mathbf{p}_J)W_{k-j+1}^{(h-m)}(p', \mathbf{p}_{K-J})dS_{p',o}(p) - \\ &- \sum_s \operatorname*{Res}_{p'\to a_s} R_{k+1}^{(h-1)}(p'; p', \mathbf{p}_K)dS_{p',o}(p)\,. \end{aligned} \tag{5.33}$$

For convenience, let us note:

$$W_1^{(0)}(p) \equiv 0\,. \tag{5.34}$$

Then, the recursive definition of $W_{k+1}^{(h)}(p, p_K)$ reads:

$$\boxed{\begin{aligned} &W_{k+1}^{(h)}(p, \mathbf{p}_K) = \\ &\quad = \sum_{i=1}^{d_2} \sum_{m=0}^{h} \sum_{j=0, m+j\neq 0}^{k} \sum_s \operatorname*{Res}_{p'\to a_s} R_j^{i,(m)}(p'; \mathbf{p}_J)W_{k-j+1}^{(h-m)}(p', \mathbf{p}_{K-J})dS_{p',o}(p) + \\ &\qquad + \sum_{i=1}^{d_2} \sum_s \operatorname*{Res}_{p'\to a_s} R_{k+1}^{i,(h-1)}(p'; p', \mathbf{p}_K)dS_{p',o}(p) \end{aligned}} \tag{5.35}$$

5.2.2 A recursive formula for $R_k^{i,(h)}$

The second step consists in the derivation of an equivalent formula for $R_k^{i,(h)}$. We proceed in the same way as for the genus 0 case: we use the rational properties of some of the correlation functions to write the recursive formula, with the aid of a relation similar to eq. (5.22).

Let $G_k^{(h)}(x(q), y(r))$ be:

$$\begin{aligned} G_k^{(h)}(x(q), y(r)) = &(y(r) - y(q))U_k^{(h)}(q, y(r); \mathbf{p}_K) + \frac{U_{k+1}^{(h-1)}(q, y(r); q, \mathbf{p}_k)}{dx(q)} + \\ &+ \sum_{m=1}^{h} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{dx(q)} U_j^{(m)}(q, y(r); \mathbf{p}_J)W_{k-j+1}^{(h-m)}(q, \mathbf{p}_{K-J}) + \\ &+ \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{dx(q)} U_j(q, y(r); \mathbf{p}_J)W_{k-j+1}^{(h)}(q, \mathbf{p}_{K-J})\,. \end{aligned} \tag{5.36}$$

The loop equation eq. (5.29) shows that $G_k^{(h)}(x(q), y(r))$ is a rational function in $x(q)$ and a polynomial in $y(r)$.

Thus, one has:

$$G_k^{(h)}(x(p^i), y(p^i)) = G_k^{(h)}(x(p), y(p^i)) \tag{5.37}$$

which can be written:

$$\begin{aligned} (y(p^i) - y(p))U_k^{(h)}(p, y(p^i); \mathbf{p}_K) = &\sum_{m=0}^{h} \sum_{j=0}^{k} \frac{W_{j+1}^{(m)}(p^i, \mathbf{p}_J)U_{k-j}^{(h-m)}(p^i, y(p^i); \mathbf{p}_{K-J})}{dx(p)} + \\ &+ \frac{U_{k+1}^{(h-1)}(p^i, y(p^i); p^i, \mathbf{p}_K)}{dx} - \end{aligned}$$

JHEP12(2005)034

JHEP12(2005)034

$$- \sum_{m=0}^{h} \sum_{j=0}^{k} \frac{W_{j+1}^{(m)}(p, \mathbf{p}_J) U_{k-j}^{(h-m)}(p, y(p^i); \mathbf{p}_{K-J})}{dx(p)} -$$
$$- \frac{U_{k+1}^{(h-1)}(p, y(p^i); p, \mathbf{p}_K)}{dx} . \tag{5.38}$$

We now establish a relation similar to eq. (5.22) in order to present our recursive formula in such a way that it can be graphically interpreted.

In order to achieve this aim, one has to determine an explicit intermediate formula for $U_k^{(h)}(p, y; p_K)$. Let us assume that (for the proof, see appendix C):

$$U_k^{(h)}(p, y(p^i); \mathbf{p}_K) =$$
$$= \frac{E_y(x, y(p^i))}{y(p^i) - y(p)} \sum_{r=1}^{\min(d_2, k+h)} \sum_{K_1 \bigcup \ldots \bigcup K_r = K} \sum_{h_\alpha = 0}^{h} \sum_{k_\alpha = |K_\alpha|}^{k+h} \sum_{j_{\alpha,\beta} \neq j_{\alpha',\beta'} \in [1,d_2] - \{i\}} \frac{1}{\Omega} \tag{5.39}$$
$$\frac{W_{k_1+1}^{(h_1)}(p^i, \mathbf{p}_{K_1}, p^{j_{1,1}}, \ldots, p^{j_{1,k_1-|K_1|}}) \Big(\prod_{\alpha=2}^{r} W_{k_\alpha+1}^{(h_\alpha)}(p^{j_{\alpha,0}}, \mathbf{p}_{K_\alpha}, p^{j_{\alpha,1}}, \ldots, p^{j_{\alpha,k_\alpha-|K_\alpha|}}) \Big)}{dx(p)^{r-k-1+\sum k_\alpha} \prod_{\alpha,\beta} y(p^i) - y(p^{j_{\alpha,\beta}})}$$

where $\Omega = \prod_\alpha (k_\alpha - |K_\alpha|)!$ is a symmetry factor and one has the following constraints:

- $\sum_o (h_\alpha + k_\alpha) = h + k$;
- $0 \leq |K_\alpha| \leq k_\alpha$.

One should note that the only external parameter entering these constraints is $k + h$.

It is now possible to derive an equality equivalent to eq. (5.22). One shows — in appendix D — that:

$$\sum_{m=0}^{h} \sum_{j=0; mj \neq kh}^{k} W_{j+1}^{(m)}(p, \mathbf{p}_J) U_{k-j}^{(h-m)}(p, y(p); \mathbf{p}_{K-J}) + U_{k+1}^{(h-1)}(p, y(p); p, \mathbf{p}_K) =$$
$$= \sum_{i=1}^{d_2} \sum_{m=0}^{h} \sum_{j=0; mj \neq kh}^{k} W_{j+1}^{(m)}(p^i, \mathbf{p}_J) U_{k-j}^{(h-m)}(p^i, y(p); \mathbf{p}_{K-J}) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{d_2} U_{k+1}^{(h-1)}(p^i, y(p); p^i, \mathbf{p}_K) . \tag{5.40}$$

This equality allows us to write:

$$(y(p^i) - y(p)) U_k^{(h)}(p, y(p^i); \mathbf{p}_K) =$$
$$= \sum_{m=0}^{h} \sum_{j=0; mj \neq kh}^{k} \sum_{l \neq 0, i} \frac{W_{j+1}^{(m)}(p^l, \mathbf{p}_J) U_{k-j}^{(h-m)}(p^l, y(p^i); \mathbf{p}_{K-J})}{dx(p)} +$$
$$+ \sum_{l \neq 0, i} \frac{U_{k+1}^{(h-1)}(p^l, y(p^i); p^l, \mathbf{p}_K)}{dx(p)} + W_{k+1}^{(h)}(p^i, \mathbf{p}_K) E_y(x, y(p^i)) . \tag{5.41}$$

JHEP12(2005)034

That is to say:

$$\boxed{R_k^{i,(h)}(p, \mathbf{p}_K) = \sum_{m=0}^{h} \sum_{j=0; mj \neq kh}^{k} \sum_{l \neq 0, i} \frac{W_{j+1}^{(m)}(p^l, \mathbf{p}_J) R_{k-j}^{i,(h-m)}(p^l; \mathbf{p}_{K-J})}{(y(p^i) - y(p)) dx(p)} + \\ + \sum_{l \neq 0, i} \frac{R_{k+1}^{i,(h-1)}(p^l; p^l, \mathbf{p}_K)}{(y(p^i) - y(p)) dx(p)} + \frac{W_{k+1}^{(h)}(p^i, \mathbf{p}_K)}{(y(p^i) - y(p)) dx(p)} .} \tag{5.42}$$

5.3 Diagrammatic solution: a cubic theory

This section is the principal part of the article. We define a correspondence between the correlation functions and a system of Feynman-like graphs. To every k-point function of genus h, we associate a graph with k external legs and h loops and eq. (5.35) and eq. (5.42) become two relations describing these graphs as functions of graphs with less legs or loops thanks to some rules we introduce in this part.

First of all, let us represent diagrammatically eq. (B.6) and eq. (B.16) as the propagators of the theory:

$W_2(p, q) =$

(5.43)

and

$R_1^i(p, p_1) =$

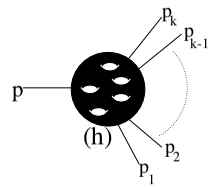
(5.44)

These two diagrams represent the basis of the whole representation: they allow to draw the $k > 2$ correlation functions.

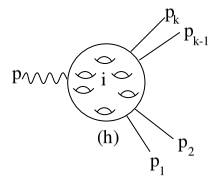
Note that the second propagator can also be seen has a vertex of valence 2, and this is the way it will be presented in the diagrammatic rules.

Let us now introduce the whole diagrammatic representation.

Let $R_k^{i,(h)}$, and $W_{k+1}^{(h)}$ respectively, be represented as white and black disks with h holes and k external legs (remember that $W_{k+1}^{(h)}$ is the generating function of discrete surfaces with $k + 1$ boundaries and h holes):

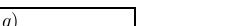
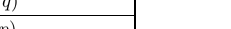
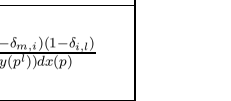
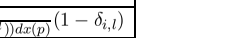
$W_{k+1}^{(h)}(p, \mathbf{p}_K) :=$ 

(5.45)

$R_k^{i,(h)}(p, \mathbf{p}_K) :=$ 

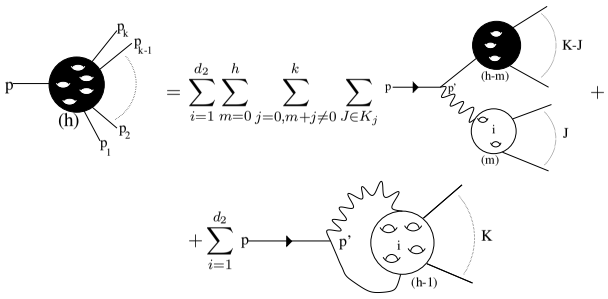
(5.46)

Let us introduce also the following propagators and vertices:

non-arrowed propagator:	 $:= W_2(p,q)$
arrowed propagator:	 $:= dS_{q,o}(p)$
Residue cubic-vertex:	$:= \sum_s \mathrm{Res}_{q\to a_s}$
colored cubic-vertices:	 $:= \frac{(1-\delta_{l,m})(1-\delta_{m,i})(1-\delta_{i,l})}{(y(p^i)-y(p^l))dx(p)}$
2-valent vertex:	 $:= \frac{1}{(y(p^i)-y(p^l))dx(p)}(1-\delta_{i,l})$

One can now simply interpret the recursion relations eq. (5.35) and eq. (5.42) in terms of diagrams.

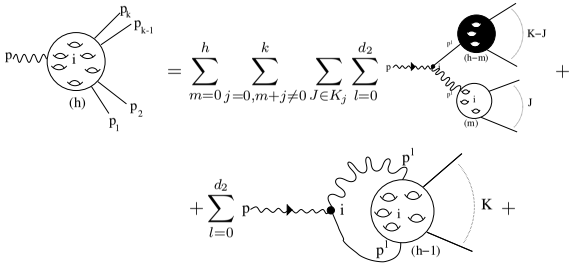
The relation eq. (5.35) reads:



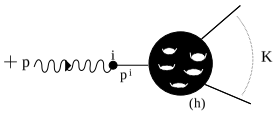
$$+ \sum_{i=1}^{d_2}$$

(5.47)

And given lower order $R_l^{i,(m)}$'s and $W_l^{(m)}$'s, one can obtain $R_k^{i,(h)}$ diagrammatically by writing eq. (5.42):



JHEP12(2005)034



(5.48)

From these diagrammatic relations, one can see that $W_{k+1}^{(h)}$ is obtained by *the summation over all diagrams with 1 root, k leaves and h loops* following the rules:

- *The vertices have valence 2 or 3; there are* $2h+k-1$ *trivalent vertices;*
- *The edges, are arrowed or not, the arrowed edges are waved or not;*
- *The subgraph made of arrowed edges forms a skeleton tree (i.e. a tree whose vertices have valence up to 3);*
- *from each trivalent vertex comes one waved and one non-waved propagator;*
- *two vertices linked with a waved propagator have different indices;*
- *the* k *leaves are non-arrowed propagators finishing at* p_j*'s (i.e.* $B(.,p_j)$*);*
- *the root is an arrowed non waved propagator starting from* p*.*

A practical way to draw these graphs is to draw every skeleton tree of arrows, put k non arrowed propagators as leaves, close it with h non arrowed propagators linking one vertex to one of its descendents in order to obtain h loops and then put waves so that from each trivalent vertex comes one waved and one non-waved arrow with the possibility that every waved arrow leads to a bivalent vertex.

Remarks:

- The order for computing the residues is following the arrows backwards from leaves to root.
- W_{k+1} is symmetric in its $k+1$ variables, although it is not obvious from this representation.
- There is no symmetry factor arising in this representation unlike [1].

5.4 Examples

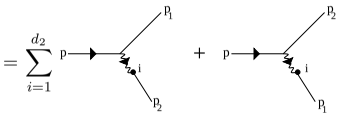
Let us briefly show some diagrams for small h and small k.

JHEP12(2005)034

5.4.1 Leading terms: tree level

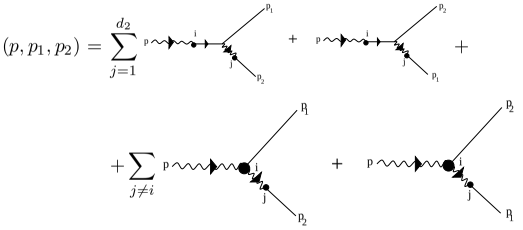
We begin by the leading terms of the first correlation functions, i.e. for $h = 0$.

• $k = 3$:

$$W_3^{(0)}(p,p_1,p_2) = \sum_{i=1}^{d_2}$$  (5.49)

$$= \sum_{i=1}^{d_2} \sum_s \operatorname*{Res}_{p' \to a_s} \left[\frac{B(p'^i,p_1)B(p',p_2)}{(y(p'^i)-y(p'))dx(p')} + \frac{B(p'^i,p_2)B(p',p_1)}{(y(p'^i)-y(p'))dx(p')} \right] dS_{p',o}(p)$$

and

$$R_2^{i_1(0)}(p,p_1,p_2) = \sum_{j=1}^{d_2}$$  (5.50)

Let us show that $W_3^{(0)}(p,p_1,p_2)$ is indeed symmetric in p_1, p_2 and p_3.

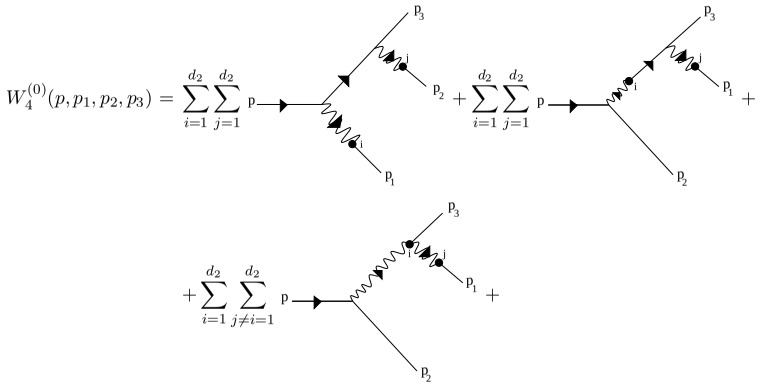
For every branch point a, let $\overline{q}$ be the only q^i such that $dx(\overline{q}) \to 0$ when $q \to a$.

$$\begin{aligned}
W_3^{(0)}(p,p_1,p_2) &= \sum_{i=1}^{d_2} \sum_s \operatorname*{Res}_{q\to a_s} \frac{B(q^i,p_1)B(q,p_2)+B(q^i,p_2)B(q,p_1)}{(y(q^i)-y(q))dx(q)} dS_{q,o}(p) \\
&= \sum_{i=1}^{d_2} \sum_s \operatorname*{Res}_{q\to a_s} \operatorname*{Res}_{r\to q^i} \frac{B(r,p_1)B(q,p_2)+B(r,p_2)B(q,p_1)}{(y(r)-y(q))(x(r)-x(q))} dS_{q,o}(p) \\
&= \sum_s \operatorname*{Res}_{q\to a_s} \operatorname*{Res}_{r\to \overline{q}} \frac{B(r,p_1)B(q,p_2)+B(r,p_2)B(q,p_1)}{(y(r)-y(q))(x(r)-x(q))} dS_{q,o}(p) \\
&= \sum_s \operatorname*{Res}_{q\to a_s} \frac{B(q,p_1)B(\overline{q},p_2)dS_{q,\overline{q}}(p)}{(y(\overline{q})-y(q))dx(q)} \\
&= -\sum_s \operatorname*{Res}_{q\to a_s} \frac{B(q,p_1)B(q,p_2)dS_{q,\overline{q}}(p)}{(y(\overline{q})-y(q))dx(q)} \\
&= \sum_s \operatorname*{Res}_{q\to a_s} \frac{B(q,p_1)B(q,p_2)B(q,p)}{dx(q)dy(q)}
\end{aligned} \tag{5.51}$$

which is nothing but the formula found in [35] and is a way of writing Rauch's variational formula.

JHEP12(2005)034

• $k = 4$:

$$W_4^{(0)}(p,p_1,p_2,p_3) = \sum_{i=1}^{d_2}\sum_{j=1}^{d_2}$$ 

$$+ \sum_{i=1}^{d_2}\sum_{j\neq i=1}^{d_2}$$

$$+(\text{permutations of } \{p_1,p_2,p_3\}) \tag{5.52}$$

One has to consider all the permutations on the external legs. Thus, $W_4^{(0)}$ is the sum over 18 different diagrams.

5.4.2 Topological expansion: one and two loops level

Consider now the first non planar examples beginning by the simplest one, the one loop correction to the one point function.

• $k = 1$ and $h = 1$:

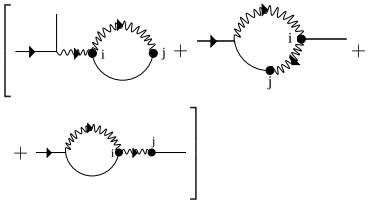
$$W_1^{(1)}(x(p))dx(p) =$$

$$= \sum_{i=1}^{d_2}$$

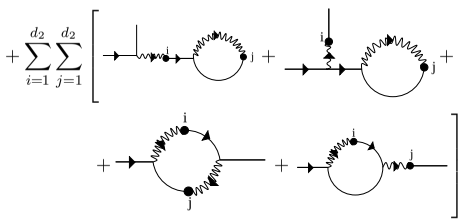
$$= \sum_{i=1}^{d_2} \sum_s \operatorname*{Res}_{q\to a_s} dS_{q,o}(p) \frac{B(q,q^i)}{y(q^i)-y(q)} \,. \tag{5.53}$$

One can check that this is identical to the result of [23].

• $k = 2$ and $h = 1$:

$$W_2^{(1)} = \sum_{i=1}^{d_2} \sum_{j\in[1,d_2]-\{i\}}$$ 

JHEP12(2005)034



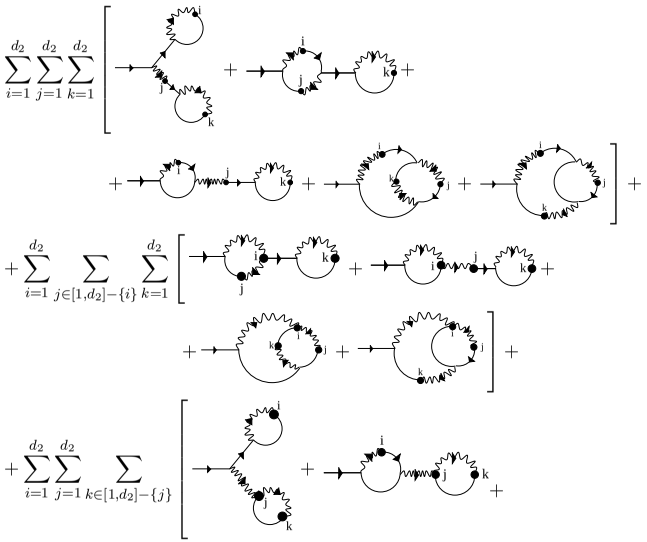
(5.54)

Analytically, this reads:

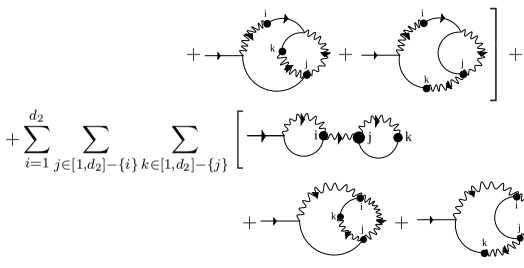
$$W_2^{(1)}(p,p_1) = \sum_{i=1}^{d_2} \sum_{j\in[1,d_2]-\{i\}} \sum_s \operatorname*{Res}_{p'\to a_s} \frac{dS_{p',o}(p)}{(y(p'^i)-y(p'))(y(p'^i)-y(p'^j))dx^2(p')}$$
$$\left[B(p',p_1)B(p'^i,p'^j)+B(p'^i,p_1)B(p',p'^j)+B(p',p'^i)B(p_1,p'^j)\right]+$$
$$+\sum_{i=1}^{d_2}\sum_{j=1}^{d_2}\sum_{s,t}\operatorname*{Res}_{p'\to a_s}\operatorname*{Res}_{p''\to a_t}\frac{dS_{p',o}(p)}{(y(p'^i)-y(p'))(y(p''^j)-y(p''))dx(p')dx(p'')}$$
$$\Big[B(p',p_1)B(p'',p''^j)dS_{p'',o}(p'^i)+B(p'^i,p_1)B(p'',p''^j)dS_{p'',o}(p')+$$
$$+B(p'',p')B(p_1,p''^j)dS_{p'',o}(p'^i)+B(p_1,p'')B(p',p''^j)dS_{p'',o}(p'^i)\Big]. \quad (5.55)$$

- $k=1$ and $h=2$:

$$W_1^{(2)} =$$



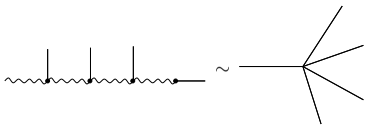
JHEP12(2005)034



(5.56)

6. An effective non cubic theory

The Feynman-like graphs described up to now correspond to cubic vertices only, but the price to pay is the introduction of auxiliary functions $R_k^{i,(h)}$. Nevertheless, in order to study some problems, this property is not needed and one may prefer an effective diagrammatic representation for only $W_k^{(h)}$ but vertices with valence up to d_2-1. This section is dedicated to building such a diagrammatic representation. It consists in resumming the linked waved vertices into one multivalent vertex:



(6.1)

6.1 Leading order: genus 0

We have already written the equations necessary to define this effective theory. Let us consider eq. (5.7) and eq. (5.16):

$$W_{k+1}(p,\mathbf{p}_K) = -\sum_s \operatorname*{Res}_{p'\to a_s} \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{J\in K_j} \frac{1}{dx'}\frac{U_j(p',y(p');\mathbf{p}_J)}{E_y(x(p'),y(p'))} W_{k-j+1}(p',\mathbf{p}_{K-J})dS_{p',o}(p) \quad (6.2)$$

$$U_k(p,y;\mathbf{p}_K) = \frac{E(x(p),y)dx(p)}{y-y(p)} \sum_{r=1}^{d_2} \sum_{K_1\cup\ldots\cup K_r=K} \sum_{j_1\neq j_2\neq\ldots\neq j_r=1}^{d_2} \prod_{t=1}^{r} \frac{W_{|K_t|+1}(p^{j_t},\mathbf{p}_{K_t})}{(y-y(p^{j_t}))\,dx(p)}. \quad (6.3)$$

This second equation taken for $y=y(p)$ reads:

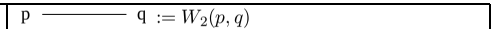
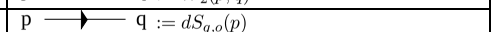
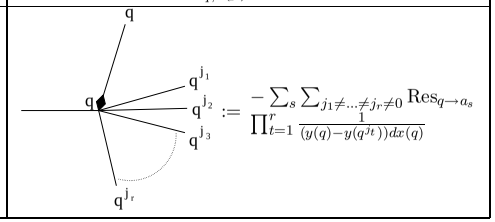
$$\frac{U_k(p,y(p);\mathbf{p}_K)}{E_y(x(p),y(p))dx(p)} = \sum_{r=1}^{d_2} \sum_{K_1\cup\ldots\cup K_r=K} \sum_{j_1\neq j_2\neq\ldots\neq j_r=1}^{d_2} \prod_{t=1}^{r} \frac{W_{|K_t|+1}(p^{j_t},\mathbf{p}_{K_t})}{(y(p)-y(p^{j_t}))\,dx(p)} \quad (6.4)$$

JHEP12(2005)034

Introduce it in eq. (6.2) and get a closed recursive formula for the W_k's:

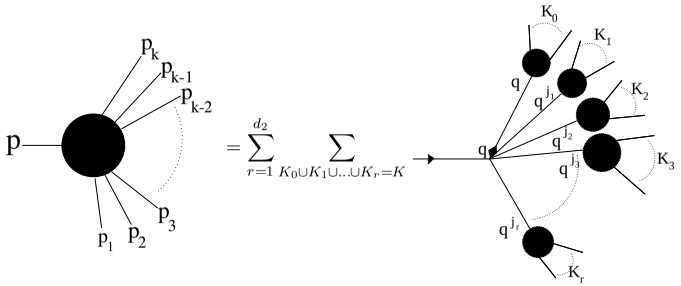
$$W_{k+1}(p,\mathbf{p}_K) = -\sum_s \operatorname*{Res}_{p'\to a_s} \sum_{r=1}^{d_2} \sum_{K_0\cup K_1\cup\ldots\cup K_r=K} \sum_{j_1\neq j_2\neq\ldots\neq j_r=1}^{d_2} W_{|K_0|+1}(p',\mathbf{p}_{K_0}) \prod_{t=1}^{r} \frac{W_{|K_t|+1}(p^{j_t},\mathbf{p}_{K_t})}{(y(p')-y(p^{j_t}))\,dx(p')} dS_{p',o}(p) \tag{6.5}$$

Let us introduce the following Feynman rules:

non-arrowed propagator:	 $:= W_2(p,q)$
arrowed propagator:	 $:= dS_{q,o}(p)$
$r+2$ -vertex $(1\le r\le d_2)$ with one marked edge:	 $:= \frac{-\sum_s \sum_{j_1\neq\ldots\neq j_r\neq 0} \operatorname{Res}_{q\to a_s}}{\prod_{t=1}^{r} \frac{1}{(y(q)-y(q^{jt}))dx(q)}}$

Remark that one leg of the multiple vertex is marked: on this leg, there is no summation over the different sheets.

Using these rules, one can diagrammatically write the recursive relation as follows:



(6.6)

From this relation, one can see that $W_{k+1}(p,\mathbf{p}_K)$ is obtained as the *summation over all trees with $k+1$ external legs* and following the rules:

- *The vertices have valence $r+2$ such as $1\le r\le \min(k-1,d_2)$;*
- *The edges are arrowed;*
- *One of the legs of each vertex is marked*

JHEP12(2005)034

- *The k leaves are non arrowed propagators ending at p_j's;*
- *The root is an arrowed propagator starting from p.*

The drawbacks of these effective rules induced by the existence of multivalent vertices is balanced by the simplicity of the vertices and the absence of different propagators.

6.2 Any genus h

Let us now study the extension of this theory to any genus.

Once again, the fundamental equations have already been written. Let us recall to mind eq. (5.35) and eq. (5.39):

$$W_{k+1}^{(h)}(p,\mathbf{p}_K) = -\sum_{m=0}^{h}\sum_{j=0,m+j\neq 0}^{k}\sum_s \operatorname*{Res}_{p'\to a_s} \frac{U_j^{(m)}(p',y(p');\mathbf{p}_J)}{E_y(x(p'),y(p'))} W_{k-j+1}^{(h-m)}(p',\mathbf{p}_{K-J})dS_{p',\alpha}(p) - \\ -\sum_s \operatorname*{Res}_{p'\to a_s} \frac{U_{k+1}^{(h-1)}(p',y(p');p',\mathbf{p}_K)}{E_y(x(p'),y(p'))} dS_{p',\alpha}(p) \tag{6.7}$$

and, for $i\neq 0$:

$$U_k^{(h)}(p,y(p^i);\mathbf{p}_K) = \\ = \frac{E_y(x,y(p^i))}{y(p^i)-y(p)} \sum_{r=1}^{min(d_2,k+h)} \sum_{K_1\bigcup\ldots\bigcup K_r=K} \sum_{h_\alpha=0}^{h} \sum_{k_\alpha=|K_\alpha|}^{k+h} \sum_{j_{\alpha,\beta}\neq j_{\alpha',\beta'}\in[1,d_2]-\{i\}} \frac{1}{\Omega} \\ \frac{W_{k_1+1}^{(h_1)}(p^i,\mathbf{p}_{K_1},p^{j_{1,1}},\ldots,p^{(j_{1,k_1-|K_1|})}) \left(\prod_{\alpha=2}^{r} W_{k_\alpha+1}^{(h_\alpha)}(p^{j_{\alpha,0}},\mathbf{p}_{K_\alpha},p^{j_{\alpha,1}},\ldots,p^{j_{\alpha,k_\alpha-|K_\alpha|}})\right)}{dx(p)^{r-k-1+\sum k_\alpha}\prod_{\alpha,\beta} y(p^i)-y(p^{j_{\alpha,\beta}})} \tag{6.8}$$

In order to introduce this second formula inside the first one, one has to use the interpolation formula to consider the case where $i=0$:

$$\frac{U_l^{(m)}(p,y(p);\mathbf{p}_L)}{E_y(x(p),y(p))} = \\ = -\sum_{r=1}^{\min(d_2,l+m)} \sum_{L_1\bigcup\ldots\bigcup L_r=L} \sum_{m_\alpha=0}^{m} \sum_{l_\alpha=|L_\alpha|}^{l+m} \sum_{j_1\neq\ldots\neq j_r\in[1,d_2]} \frac{1}{\Omega} \\ \frac{W_{l_1+1}^{(m_1)}(p^{j_{1,0}},\mathbf{p}_{L_1},p^{j_{1,1}},\ldots,p^{j_{1,l_1-|L_1|}}) \prod_{\alpha=2}^{r} W_{l_\alpha+1}^{(m_\alpha)}(p^{j_{\alpha,0}},\mathbf{p}_{L_\alpha},p^{j_{\alpha,1}},\ldots,p^{j_{\alpha,l_\alpha-|L_\alpha|}})}{dx(p)^{r-l-1+\sum l_\alpha}(y(p^{j_{1,0}})-y(p))\prod_{\alpha,\beta}(y(p^{j_{1,0}})-y(p^{j_{\alpha,\beta}})} \tag{6.9}$$

Recursively, it is easy to check that it can be written:

$$\frac{U_l^{(m)}(p,y(p);\mathbf{p}_L)}{E_y(x(p),y(p))dx(p)} = \sum_{r=1}^{\min(d_2,l+m)} \sum_{L_1\bigcup\ldots\bigcup L_r=L} \sum_{m_\alpha=0}^{m} \sum_{l_\alpha=|L_\alpha|}^{l+m} \sum_{j_{\alpha,\beta}\neq j_{\alpha',\beta'}\in[1,d_2]} \frac{1}{\Omega'} \\ \prod_{\alpha=1}^{r} \frac{W_{l_\alpha+1}^{(m_\alpha)}(p^{j_{\alpha,0}},\mathbf{p}_{L_\alpha},p^{j_{\alpha,1}},\ldots,p^{j_{\alpha,l_\alpha-|L_\alpha|}})}{dx(p)^{l_\alpha-|L_\alpha|+1}\prod_{\beta=0}^{l_\alpha-|L_\alpha|}(y(p)-y(p^{j_{\alpha,\beta}}))} \tag{6.10}$$

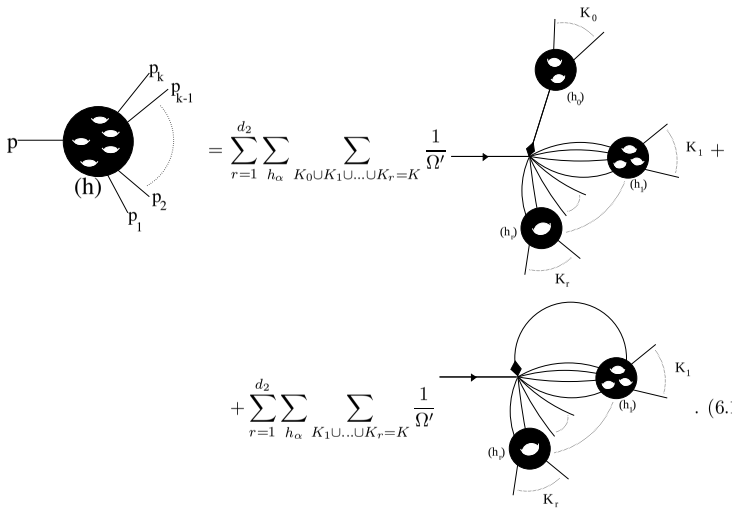
JHEP12(2005)034

where Ω' is some other symmetry factor depending only on the same parameters as Ω.

One is now able to write an explicit recursion formula for the $W_k^{(h)}$'s that can be graphically represented with the Feynman rules introduced in this section. The introduction of eq. (6.10) in eq. (6.7) gives:

$$W_{k+1}^{(h)}(p,\mathbf{p}_K) = -\sum_s \operatorname*{Res}_{p'\to a_s} \sum_{r=1}^{d_2} \sum_{K_0 \bigcup K_1 \bigcup \ldots \bigcup K_r = K} \sum_{h_\alpha=0}^{h} \sum_{k_\alpha=|K_\alpha|}^{k+h} \sum_{j_{\alpha,\beta}\neq j_{\alpha',\beta'}\in[1,d_2]} \frac{1}{\Omega'}$$
$$dS_{p',o}(p) W_{|K_0|+1}^{(h_0)}(p',\mathbf{p}_{K_0}) \prod_{\alpha=1}^{r} \frac{W_{k_\alpha+1}^{(h_\alpha)}(p'^{j_{\alpha,0}},\mathbf{p}_{K_\alpha},p'^{j_{\alpha,1}},\ldots,p'^{j_{\alpha,k_\alpha-|K_\alpha|}})}{dx(p')^{k_\alpha-|K_\alpha|+1}\prod_{\beta=0}^{k_\alpha-|K_\alpha|}(y(p')-y(p'^{j_{\alpha,\beta}}))} -$$
$$-\sum_s \operatorname*{Res}_{p'\to a_s} \frac{U_{k+1}^{(h-1)}(p',y(p');p',\mathbf{p}_K)}{E_y(x(p'),y(p'))} dS_{p',\alpha}(p)\,. \tag{6.11}$$

That is to say:



. (6.12)

Remark that we have splitted the diagrams in the r.h.s. in order to reproduce the recursion relation. Nevertheless, the first term in the r.h.s. is nothing else but a particular case of the second term where the marked leg of the vertex is left alone inside one of the W's.

Hence, the h-th order expansion term of the correlation function $W_{k+1}^{(h)}$ is obtained as the *summation over all Feynman diagrams with $k+1$ external legs and h loops* following the same rules as exposed in the genus 0 case, i.e.:

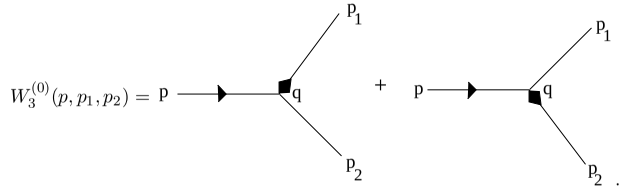
- *The vertices have valence $r+2$ such as $1 \leq r \leq d_2$;*

JHEP12(2005)034

- *The edges are arrowed or not;*
- *One of the legs of each vertex is marked;*
- *The subgraph made of arrowed edges forms a skeleton tree;*
- *The k leaves are non arrowed propagators ending at p_j's;*
- *The root is an arrowed propagator starting from p;*
- *a non arrowed edge links a vertex to one of its descendants along the tree.*

6.3 Examples

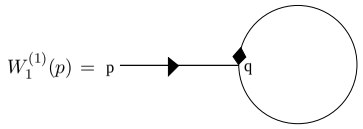
Let us review some simple examples of this description.



. (6.13)

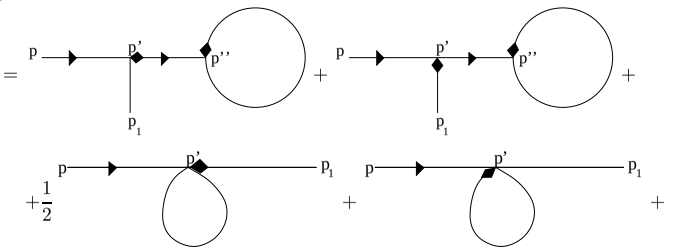
Analytically, this reads:

$$W_3^{(0)}(p,p_1,p_2) =$$
$$= \sum_{i=1}^{d_2} \sum_s \operatorname*{Res}_{q\to a_s} \left[B(q^i,p_1)B(q,p_2)+B(q^i,p_2)B(q,p_1)\right] \frac{dS_{q,o}(p)}{(y(q^i)-y(q))dx(q)} \tag{6.14}$$

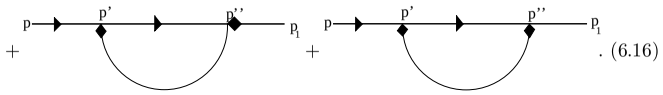


$$= \sum_s \sum_{i=1}^{d_2} \operatorname*{Res}_{q\to a_s} dS_{q,o}(p) \frac{B(q,q^i)}{(y(q^i)-y(q))dx(q)} \tag{6.15}$$

$W_2^{(1)}(p,p_1) =$



JHEP12(2005)034



. (6.16)

7. The gaussian case: the 1-matrix model limit.

In this section, we are interested in the special case where $d_2 = 1$, i.e. one has a gaussian potential in M_2. This situation is very important because it links our results to the 1-matrix model studied in [1]. Indeed, when one of the potentials is gaussian — V_2 for example —, the integration over one of the variables — M_2 in this case — is gaussian and can be straightforwardly performed without giving any contribution to the formal expansion. Then, the 2-matrix model with one gaussian potential $V_2(y) = \frac{g_2}{2}y^2$ is equivalent to the 1-matrix model with a potential $V = V_1 - \frac{x^2}{2g_2}$. We check in this part that our results coincide with the ones obtained directly from the 1-matrix model in [1]. Actually, it is a good way to better understand the structure obtained.

In this case, the Riemann surface is an hyperelliptical surface with only two x-sheets. The equation $x(p) = x$ has only two solutions. Let us call them p and $\overline{p}$, i.e. $p^0 = p$ and $p^1 = \overline{p}$. They obey the following relations:

$$x(p) = x(\overline{p})\,, \qquad y(p) = -y(\overline{p})\,. \tag{7.1}$$

The algebraic equation generating the Riemann surface reads:

$$E(x(p), y(r)) = -g_2(y(r) - y(p))(y(r) - y(\overline{p})) = -g_2(y(r)^2 - y(p)^2)\,. \tag{7.2}$$

One can also remark that:

$$U_k(p, y; \mathbf{p}_K) = g_2 W_{k+1}(p, \mathbf{p}_K)\,. \tag{7.3}$$

That is to say:

$$R_k^0(p, \mathbf{p}_K) = \frac{U_k(p, y(p); \mathbf{p}_K)}{E_y(x(p), y(p))dx(p)} = -\frac{W_{k+1}(p, \mathbf{p}_K)}{2y(p)dx(p)}\,. \tag{7.4}$$

So that:

$$R_k^0(\overline{p}, \mathbf{p}_K) = R_k^1(p, \mathbf{p}_K) = \frac{W_{k+1}(p, \mathbf{p}_K)}{2y(p)dx(p)}\,. \tag{7.5}$$

7.1 Diagrammatic rules

One can now study how the diagrammatic rules introduced earlier behave in this limit.

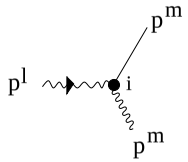
- **The cubic rules**

  Because V_2 is gaussian, the Feynman rules become:

JHEP12(2005)034

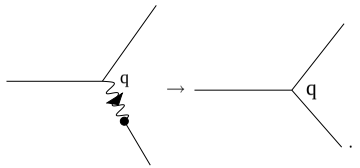
non-arrowed propagator:	p — q $:= W_2(p,q)$
arrowed propagator:	p → q $:= dS_{q,o}(p)$
Residue cubic-vertex:	q $:= \sum_s \mathrm{Res}_{q\to a_s}$
simple vertex:	p ~ $\overline{\mathrm{p}}$ $:= -\frac{1}{2y(p)dx(p)}$

The last component of the Feynman diagrams, the colored cubic-vertex, implies three different x-sheets. Because there exists only two such sheets in the gaussian case, this vertex vanishes:



$\equiv 0\,.$ (7.6)

Considered that the bivalent and trivalent vertices only appear together, one can merge them into one whose value is equal to $-\sum_s \mathrm{Res}_{q\to a_s} \frac{1}{2y(q)dx(q)}$, and one recovers [1]:



. (7.7)

- **The effective theory**

  The effect of the gaussian limit on the effective theory is to make it cubic. One obtains the following rules:

non-arrowed propagator:	p — q $:= W_2(p,q)$
arrowed propagator:	p → q $:= dS_{q,o}(p)$
cubic vertex (only for r=1):	q, q^{j_1}, q^{j_2}, q^{j_3}, q^{j_r} $:= -\sum_s \mathrm{Res}_{q\to a_s} \frac{1}{2y(q)dx(q)}$

JHEP12(2005)034

Hence, the two theories turn into only one cubic theory in this limit which is the one derived in [1]. Indeed, the corresponding recursive relation appears to be:

$$W_{k+1}^{(h)}(p,p_K) = -\sum_l \operatorname*{Res}_{q\to a_l} \frac{W_{k+2}^{(h-1)}(q,q,p_K)dS_{q,o}(p)}{2y(q)dx(q)} - \\ -\sum_{m=0}^{h}\sum_{j=0,j+m\neq 0}^{k}\sum_l \operatorname*{Res}_{q\to a_l} \frac{W_{j+1}^{(m)}(q,p_J)W_{k-j+1}^{(h-m)}(q,p_{K-J})dS_{q,o}(p)}{2y(q)dx(q)} \quad (7.8)$$

Remark. Diagrammatically, this limit can be easily interpreted. Starting from the general cubic theory, in order, to obtain the 1-matrix model graphs from the 2-matrix model ones, one only has to take the length of the waved propagators to 0. In this case, the graphs containing at least one colored vertex vanish.

Everything works as if the waved propagators of the 2-matrix model were unstable particles which decay into stable ones represented by non-waved propagators. Then the 1-matrix limit is obtained by taking the life time of these particles to 0.

One shall also note that there is no symmetry factor in the 2-matrix model graphs of the cubic theory whereas there are not well understood ones in the 1-matrix case. The derivation of the 1-matrix model as a limit exhibits how these factors arise. They come from the same contribution given by different diagrams in this limit. This observation exhibits how the 2-matrix model seems more fundamental.

8. Conclusion

In this article, we have generalized the diagrammatic technique of [1] to compute all non-mixed correlation functions of the 2-matrix model, to all orders in the topological expansion.

The result can be represented diagrammatically, with some cubic Feynman rules, which are just convenient notations for writing residues on an algebraic curve and it is not clear whether there exists a field theory giving rise to these graphs or not.

This shows that the method discovered in [1] is very universal, i.e. it works for all algebraic curves, not only hyper elliptical curves.

The future prospects of that work are to find the diagrammatic rules for computing the free energy to all order in the topological expansion, and also all mixed correlation functions (using the result of [30]). Another possible extension is to work out the multimatrix model, i.e. the chain of matrices as in [26], and in particular the limit of matrix quantum mechanics. We believe that this technique could apply to many other integrable models.

Another question, is to understand the limit of critical points, i.e. when some branch points and double points start to coalesce. It seems that the diagrammatic technique should just reduce to consider only residues at branch points which become critical. One may expect to recover some relation with the Kontsevich integral, in relationship with KP integrable hierarchies.

JHEP12(2005)034

Acknowledgments

The authors want to thank L. Chekhov, I. Kostov, V. Kazakov for stimulating discussions. This work was partly supported by the european network Enigma (MRTN-CT-2004-5652).

A. Needed tools of algebraic geometry

We review here some definitions and properties all along this article.

Behaviors at ∞. We see from eq. (2.17), that at large x, we have $y \sim V_1'(x) - \frac{1}{x} + O(1/x^2)$ in the x-physical sheet. (resp. at large y, we have $x \sim V_2'(y) - \frac{1}{y} + O(1/y^2)$ in the y-physical sheet). This means that the functions $x(p)$ and $y(p)$ have two poles, ∞_+ and ∞_- on $\mathcal{E}$. The function $x(p)$ has a simple pole at ∞_+ and a pole of degree d_2 at ∞_-, while the function $y(p)$ has a simple pole at ∞_- and a pole of degree d_1 at ∞_+. We have:

$$y(p) \underset{p\to\infty_+}{\sim} V_1'(x(p)) - \frac{1}{x(p)} + O(1/x(p)^2) \quad (A.1)$$

$$x(p) \underset{p\to\infty_-}{\sim} V_2'(y(p)) - \frac{1}{y(p)} + O(1/y(p)^2) \quad (A.2)$$

In particular:

$$\operatorname*{Res}_{\infty_+} y\,dx = \operatorname*{Res}_{\infty_-} x\,dy = 1\,. \quad (A.3)$$

Genus and cycles. The curve $\mathcal{E}$ is a compact Riemann surface with a finite genus $g \leq d_1 d_2 - 1$. If $g = 0$, $\mathcal{E}$ is simply connected, and if $g \neq 0$, there exist $2g$ linearly independent irreducible cycles on $\mathcal{E}$, such that by removing those $2g$ cycles we get a simply connected domain. It is possible to choose canonically the $2g$ cycles as $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{B}_i$, $i = 1,\dots,g$, such that:

$$\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = 0\,, \qquad \mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = 0\,, \qquad \mathcal{A}_i \cap \mathcal{B}_j = \delta_{ij}\,. \quad (A.4)$$

Branch points. The x-branch points a_i, $i = 1,\dots,d_2+1+2g$, are the zeroes of the differential dx, respectively, the y-branch points b_i, $i = 1,\dots,d_1+1+2g$, are the zeroes of dy. We assume here, that all branch points are simple and distinct, i.e. that the potentials are not critical. Notice also, that $E_y(x(p),y(p))$ vanishes (simple zeroes) at the branch points (it vanishes in other points too).

Bergmann kernel. On the Riemann surface $\mathcal{E}$, there exists a unique abelian bilinear differential $B(p,q)$, with one double pole at $p = q$, such that:

$$B(p,q) \underset{p\to q}{\sim} \frac{dx(p)dx(q)}{(x(p)-x(q))^2} + \text{finite} \qquad \text{and} \qquad \forall i \ \oint_{p\in\mathcal{A}_i} B(p,q) = 0\,. \quad (A.5)$$

It is symmetric:

$$B(p,q) = B(q,p)\,. \quad (A.6)$$

Its expression in terms of theta-functions can be found in [32, 33], it depends only on the complex structure of $\mathcal{E}$.

JHEP12(2005)034

Abelian differential of third kind. On the Riemann surface $\mathcal{E}$, there exists a unique abelian differential of the third kind $dS_{q,r}(p)$, with two simple poles at $p=q$ and at $p=r$, such that:

$$\operatorname*{Res}_{p\to q} dS_{q,r}(p) = 1 = -\operatorname*{Res}_{p\to r} dS_{q,r}(p) \qquad \text{and} \qquad \forall i \ \oint_{\mathcal{A}_i} dS_{q,r}(p) = 0\,. \tag{A.7}$$

We have:

$$dS_{q,r}(p) = \int_{q'=r}^{q} B(p,q') \tag{A.8}$$

where the integration path does not intersect any $\mathcal{A}_i$ or $\mathcal{B}_i$.

$dS_{q,r}(p)$ is a differential on $\mathcal{E}$ in terms of p, but it is a multivalued function of q (and of r). After crossing a cycle $\mathcal{B}_i$, it has no discontinuity, and after crossing a cycle $\mathcal{A}_i$, it has a discontinuity:

$$\operatorname{disc}(dS_{q,r}(p)) = dS_{q_+,r}(p) - dS_{q_-,r}(p) = \oint_{q'\in\mathcal{B}_i} B(p,q')\,. \tag{A.9}$$

Note that the discontinuity is independent of q.

Riemann bilinear identity. If ω is a differential form on $\mathcal{E}$, such that $\oint_{q\in\mathcal{A}_i}\omega(q)=0$, we have:

$$\begin{aligned}
\sum_i \operatorname*{Res}_{q\to z_i} \omega(q) dS_{q,r}(p) &= \sum_{i=1}^{g} \oint_{q\in\mathcal{A}_i} \operatorname{disc}_{\mathcal{A}_i}(\omega(q) dS_{q,r}(p)) - \\
&\quad - \sum_{i=1}^{g} \oint_{q\in\mathcal{B}_i} \operatorname{disc}_{\mathcal{B}_i}(\omega(q) dS_{q,r}(p)) \\
&= \sum_{i=1}^{g} \oint_{q\in\mathcal{A}_i} \omega(q) \operatorname{disc}_{\mathcal{A}_i}(dS_{q,r}(p)) \\
&= \sum_{i=1}^{g} \operatorname{disc}_{\mathcal{A}_i}(dS_{q,r}(p)) \oint_{q\in\mathcal{A}_i} \omega(q) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.10}$$

where the l.h.s. is the sum over all residues on a fundamental domain, the poles z_i are all the poles of ω as well as the pole at $q=p$. This identity is obtained by moving the integration contours on the surface, and taking carefully into account discontinuities along the nontrivial cycles (see [32, 33]).

B. Two points function in the planar limit

We present here a new derivation leading term of the 2-point function's leading term $W_2(p_1,p_2)$.

This case is of special interest because it represents some initial condition for the diagrammatic rules. In fact, the two correlation functions $W_2(p_1,p_2)$ and $U_1(p_1,y;p_2)$, are the basis of the whole structure of the $W_k^{(h)}$'s. Moreover, it allows us to show through a simple example the way we proceed further for the general case.

JHEP12(2005)034

We first rederive the well known result that the two point function is nothing else but the Bergmann Kernel (see [34] for instance).

Let $o\in\mathcal{E}$ be an arbitrary point on the Riemann surface. Since the abelian differential of the 3rd kind defined in eq. (4.14) $dS_{q,o}(p)$ behaves as $\frac{dx(p)}{x(p)-x(q)}$ when $q\to p$, one can write the Cauchy formula under the form:

$$W_2(p,p_1) = -\operatorname*{Res}_{q\to p} dS_{q,o}(p) W_2(q;p_1)\,. \tag{B.1}$$

One can see from eq. (5.2) with $k=1$, and from eq. (4.17), that the integrand in the r.h.s. has poles only for $q\to p$ and $q\to p_1$, Since W_2 has vanishing $\mathcal{A}$-cycles due to eq. (4.17), we can use the Riemann bilinear identity eq. (A.10), and get:

$$W_2(p,p_1) = \operatorname*{Res}_{q\to p_1} dS_{q,o}(p) W_2(q;p_1)\,. \tag{B.2}$$

For $k=1$, eq. (5.2) reads:

$$\begin{aligned}
E_y(x(p),y(p))\,W_2(p,p_1) &= -P_1(x(p),y(p);p_1)dx(p) + \\
&\quad + d_{p_1}\left(\frac{U_0(p_1,y(p))}{x(p)-x(p_1)}\,\frac{dx(p)}{dx(p_1)}\right)
\end{aligned} \tag{B.3}$$

and thus we have:

$$\begin{aligned}
W_2(p;p_1) &= \operatorname*{Res}_{q\to p_1} dS_{q,o}(p) W_2(q;p_1) \\
&= -\operatorname*{Res}_{q\to p_1} dS_{q,o}(p) \frac{P_1(x(q),y(q);p_1)dx(q)}{E_y(x(q),y(q))} + \\
&\quad + \operatorname*{Res}_{q\to p_1} dS_{q,o}(p) \frac{d_{p_1}\left(\frac{U_0(p_1,y(q))}{x(q)-x(p_1)}\,\frac{dx(q)}{dx(p_1)}\right)}{E_y(x(q),y(q))}
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Since $P_1(x(q),y(q);p_1)$ is a polynomial in $x(q)$ and $y(q)$, it has no pole at $q=p_1$. For the second term we use eq. (4.3):

$$\begin{aligned}
W_2(p;p_1) &= \operatorname*{Res}_{q\to p_1} dS_{q,o}(p) W_2(q;p_1) \\
&= d_{p_1} \operatorname*{Res}_{q\to p_1} dS_{q,o}(p) \frac{E(x(p_1),y(q))\,dx(q)}{(x(q)-x(p_1))(y(q)-y(p_1))E_y(x(q),y(q))} \\
&= d_{p_1} dS_{p_1,o}(p) \\
&= B(p_1,p)\,.
\end{aligned} \tag{B.5}$$

We thus recover the well known result: the two-points function is equal to the Bergmann kernel on the Riemann surface corresponding to the algebraic equation $E(x,y)=0$ (cf [17, 26, 34, 35]).

$$\boxed{W_2(p;p_1) = B(p,p_1)\,.} \tag{B.6}$$

JHEP12(2005)034

Let us now compute $U_1(p,y;p_1)$. For $k=1$, eq. (5.1) reads:

$$\frac{(y(r)-y(q))U_1(q,y(r);p_1)}{dx(q)} = -\frac{W_2(q;p_1)U_0(q,y(r))}{dx(q)^2} - P_1(x(q),y(r);p_1) + \\ +d_{p_1}\left(\frac{U_0(p_1,y(r))}{(x(q)-x(p_1))\,dx(p_1)}\right) \tag{B.7}$$

take it for $q=r=p^i$:

$$0 = -\frac{W_2(p^i;p_1)U_0(p^i,y(p^i))}{dx(p^i)^2} - P_1(x(p^i),y(p^i);p_1) + \\ +d_{p_1}\left(\frac{U_0(p_1,y(p^i))}{(x(p^i)-x(p_1))\,dx(p_1)}\right) \tag{B.8}$$

using that $x(p)=x(p^i)$, we have:

$$0 = -\frac{W_2(p^i;p_1)U_0(p^i,y(p^i))}{dx(p)^2} - P_1(x(p),y(p^i);p_1) + \\ +d_{p_1}\left(\frac{U_0(p_1,y(p^i))}{(x(p)-x(p_1))\,dx(p_1)}\right). \tag{B.9}$$

Now, write eq. (B.7) with $q=p$ and $r=p^i$:

$$\frac{(y(p^i)-y(p))U_1(p,y(p^i);p_1)}{dx(p)} = -\frac{W_2(p;p_1)U_0(p,y(p^i))}{dx(p)^2} - P_1(x(p),y(p^i);p_1) + \\ +d_{p_1}\left(\frac{U_0(p_1,y(p^i))}{(x(p)-x(p_1))\,dx(p_1)}\right) \tag{B.10}$$

and insert eq. (B.9), you get:

$$(y(p^i)-y(p))U_1(p,y(p^i);p_1) = \frac{W_2(p^i;p_1)U_0(p^i,y(p^i))}{dx(p)} - \\ -\frac{W_2(p;p_1)U_0(p,y(p^i))}{dx(p)}. \tag{B.11}$$

Using eq. (4.3), i.e. $U_0(p,y)=\frac{E(x(p),y)}{y-y(p)}dx(p)$, this implies:

$$(y(p^i)-y(p))U_1(p,y(p^i);p_1) = W_2(p^i;p_1)E_y(x(p^{i)},y(p^i))\,. \tag{B.12}$$

Since $U_1(p,y;p_1)$ is a polynomial of degree d_2-1 in y, we can reconstruct it through the interpolation formula:

$$U_1(p,y;p_1) = \frac{E(x(p),y)}{(y-y(p))}\sum_{i=1}^{d_2}\frac{1}{y-y(p^i)}\frac{(y(p^i)-y(p))U_1(p,y(p^i);p_1)}{E_y(x(p^i),y(p^i))} \tag{B.13}$$

i.e.

$$U_1(p,y;p_1) = \frac{E(x(p),y)}{(y-y(p))}\sum_{i=1}^{d_2}\frac{W_2(p^i,p_1)}{y-y(p^i)} \tag{B.14}$$

JHEP12(2005)034

and in particular, at $y=y(p)$, we have:

$$R_1^0(p,p_1)dx(p) = \frac{U_1(p,y(p);p_1)}{E_y(x(p),y(p))} = \sum_{i=1}^{d_2}\frac{W_2(p^i,p_1)}{y(p)-y(p^i)} \tag{B.15}$$

and for $i\neq 0$, we have:

$$R_1^i(p,p_1)dx(p) = \frac{U_1(p,y(p^i);p_1)}{E_y(x(p),y(p^i))} = \frac{W_2(p^i,p_1)}{(y(p^i)-y(p))}\,. \tag{B.16}$$

C. Computation of eq. (5.39)

In this appendix one proves recursively eq. (5.39) for any k and h.

Let us suppose that this formula is know for any $U_l^{(m)}$ with $m\leq h-1$ and for any $U_l^{(h)}$ with $l\leq k-1$. One writes it:

$$U_l^{(m)}(p,y(p^i);\mathbf{p}_L) = \\ = \frac{E_y(x,y(p^i))}{y(p^i)-y(p)}\sum_{r=1}^{min(d_2,k+h)}\sum_{L_1\bigcup\ldots\bigcup L_r=L}\sum_{m_\alpha=0}^{m}\sum_{l_\alpha=|L_\alpha|}^{l+m}\sum_{j_{\alpha,\beta}\neq j_{\alpha',\beta'}\in[1,d_2]-\{i\}}\frac{1}{\Omega} \\ \frac{W_{l_1+1}^{(m_1)}(p^i,\mathbf{p}_{L_1},p^{j_{1,1}},\ldots,p^{j_{1,l_1-|L_1|}})\left(\prod_{\alpha=2}^{r}W_{l_\alpha+1}^{(m_\alpha)}(p^{j_{\alpha,0}},\mathbf{p}_{L_\alpha},p^{j_{\alpha,1}},\ldots,p^{j_{\alpha,l_\alpha-|L_\alpha|}})\right)}{dx(p)^{r-l-1+\sum L_\alpha}\prod_{\alpha,\beta}y(p^i)-y(p^{j_{\alpha,\beta}})}. \tag{C.1}$$

Let us introduce some shortened notations so that one can write this proof in a few pages.

Considering the sum on the r.h.s. of eq. (C.1), one can see that there are two different kinds of terms:

- If $l_1=|L_1|$, one can factorise the term $W_{|L_1|+1}^{(m_1)}(p^i,\mathbf{p}_{L_1})$. Let us note the sum of these terms $W(p^i,p_L)W(p_L,p^j)$ where we have noted W instead of $W_{|L_1|+1}^{(m_1)}$ to indicate that these are formal notations;
- the other terms correspond to the sum over all $l_1\neq|L_1|$. Let us denote them by $W(p^i,p_L,p^j)W(p_L,p^j)$.

Using these notations, one can shortly write eq. (C.1):

$$U_l^{(m)}(p,y(p^i);\mathbf{p}_L) = W(p^i,p_L)W(p_L,p^j) + W(p^i,p_L,p^j)W(p_L,p^j) \tag{C.2}$$

Thus the interpolation formula gives:

$$U_l^{(m)}(p^i,y(p^i);p_L) = W(p_L,p^j) + W(p,p_L)W(p_L,p^j) + W(p,p_L,p^j)W(p_L,p^j) \tag{C.3}$$

where the first term corresponds to the sum where all j_β's are different from i and 0 and there is no W_{l_i} whose argument is p or p^i.

JHEP12(2005)034

On the other hand, one knows the relation (5.38):

$$U_k^{(h)}(p,y(p^i);\mathbf{p}_K) = \sum_{m=0}^{h}\sum_{j=0}^{k}\frac{W_{j+1}^{(m)}(p^i,\mathbf{p}_J)U_{k-j}^{(h-m)}(p^i,y(p^i);\mathbf{p}_{K-J})}{(y(p^i)-y(p))dx(p)} - \\ -\sum_{m=0}^{h}\sum_{j=0}^{k}\frac{W_{j+1}^{(m)}(p,\mathbf{p}_J)U_{k-j}^{(h-m)}(p,y(p^i);\mathbf{p}_{K-J})}{(y(p^i)-y(p))dx(p)} - \\ -\frac{U_{k+1}^{(h-1)}(p,y(p^i);p,\mathbf{p}_k)}{(y(p^i)-y(p))dx} + \frac{U_{k+1}^{(h-1)}(p^i,y(p^i);p^i,\mathbf{p}_k)}{(y(p^i)-y(p))dx} \qquad (C.4)$$

Remark that the terms in the r.h.s. of this equation correspond to the criterion of the hypothesis and one can then express them as a product of W's following the notations introduced earlier. This reads:

$$\begin{aligned} U_k^{(h)}(p,y(p^i);p_K) = {} & W(p^i,p_K)W(p_K,p^j)+W(p^i,p_K)W(p,p_K)W(p_K,p^j)+ \\ & +W(p^i,p_K)W(p,p_K,p^j)W(p_K,p^j)-W(p,p_K)W(p^i,p_K)W(p_K,p^j)- \\ & -W(p,p_K)W(p^i,p_K,p^j)W(p_K,p^j)+W(p^i,p_K,p^j)W(p_K,p^j)+ \\ & +W(p^i,p,p_K)W(p_K,p^j)+W(p,p_K)W(p^i,p_K,p^j)W(p_K,p^j)+ \\ & +W(p^i,p,p_K,p^j)W(p_K,p^j)+W(p,p_K,p^j)W(p^i,p_K,p^j)W(p_K,p^j)- \\ & -W(p,p^i,p_K)W(p_K,p^j)-W(p^i,p_K)W(p,p_K,p^j)W(p_K,p^j)- \\ & -W(p,p^i,p_K,p^j)W(p_K,p^j)-W(p^i,p_K,p^j)W(p,p_K,p^j)W(p_K,p^j) \\ = {} & W(p^i,p_K)W(p_K,p^j)+W(p^i,p_K,p^j)W(p_K,p^j)\,. \end{aligned} \qquad (C.5)$$

So one has proven the formula for $U_k^{(h)}$.
Because this formula is true for $h=0$, it is true for any k and h.

D. Derivation of eq. (5.40)

One wants to show that:

$$\sum_{m=0}^{h}\sum_{j=0;mj\neq kh}^{k}W_{j+1}^{(m)}(p,p_J)U_{k-j}^{(h-m)}(p,y(p);p_{K-J})+\frac{U_{k+1}^{(h-1)}(p,y(p);p,p_k)}{dx} = \\ = \sum_{i=1}^{d_2}\sum_{m=0}^{h}\sum_{j=0;mj\neq kh}^{k}W_{j+1}^{(m)}(p^i,p_J)U_{k-j}^{(h-m)}(p^i,y(p);p_{K-J})+ \\ +\sum_{i=1}^{d_2}\frac{U_{k+1}^{(h-1)}(p^i,y(p);p^i,p_k)}{dx}\,. \qquad (D.1)$$

Let us compute the difference D between the two sides of the equation by the introduction of eq. (5.39) written with some few different notations which are defined as follows:

- $l = r+h-\sum_\alpha h_\alpha$;
- $u_\beta = \sum_{\epsilon=1}^{\beta}(k_\epsilon - |K_\epsilon|) - \beta$.

One can then write:

$$\begin{aligned} D = {} & \sum_{m=0}^{h}\sum_{j=0;mj\neq kh}^{k}W_{j+1}^{(m)}(p,p_J)E_y(x,y(p))\sum_{i=1}^{d_2}\frac{1}{y(p)-y(p^i)}\times \\ & \times\sum_{r=1}^{d_2}\sum_{o=1}^{r}\sum_{h_o=0}^{h-m}\sum_{k_o=0}^{k+h-j-m}\sum_{j_2\neq\ldots\neq j_l\in[1,d_2]-\{i\}}\sum_{K_1\bigcup\ldots\bigcup K_r=K}\frac{1}{\Omega}\times \\ & \times\frac{W_{k_1+1}^{(h_1)}(p^i,p_{K_1},p^{j_{r+1}},\ldots,p^{j_{r+u_1}})\left(\prod_{\beta=2}^{r}W_{k_\beta+1}^{(h_\beta)}(p^{j_\beta},p_{K_\beta},p^{j_{r+u_{\beta-1}+1}},\ldots,p^{j_{r+u_\beta}})\right)}{\prod_{\gamma=2}^{l}y(p^i)-y(p^{j_\gamma})}- \\ & -\sum_{i=1}^{d_2}\sum_{m=0}^{h}\sum_{j=0;mj\neq kh}^{k}W_{j+1}^{(m)}(p^i,p_J)\frac{E_y(x,y(p))}{y(p)-y(p^i)}\times \\ & \times\sum_{r=1}^{d_2}\sum_{o=1}^{r}\sum_{h_o=0}^{h-m}\sum_{k_o=0}^{k+h-j-m}\sum_{j_2\neq\ldots\neq j_l\in[1,d_2]-\{i\}}\sum_{K_1\bigcup\ldots\bigcup K_r=K}\frac{1}{\Omega}\times \\ & \times\frac{W_{k_1+1}^{(h_1)}(p,p_{K_1},p^{j_{r+1}},\ldots,p^{j_{r+u_1}})\left(\prod_{\beta=2}^{r}W_{k_\beta+1}^{(h_\beta)}(p^{j_\beta},p_{K_\beta},p^{j_{r+u_{\beta-1}+1}},\ldots,p^{j_{r+u_\beta}})\right)}{\prod_{\gamma=2}^{l}y(p)-y(p^{j_\gamma})}+ \\ & +E_y(x,y(p))\sum_{i=1}^{d_2}\frac{1}{y(p)-y(p^i)}\times \\ & \times\sum_{r=1}^{d_2}\sum_{o=1}^{r}\sum_{h_o=0}^{h-1}\sum_{k_o=0}^{k+h}\sum_{j_2\neq\ldots\neq j_l\in[1,d_2]-\{i\}}\sum_{K_1\bigcup\ldots\bigcup K_r=K}\frac{1}{\Omega}\times \\ & \times\left[\frac{W_{k_1+1}^{(h_1)}(p^i,p,p_{K_1},p^{j_{r+1}},\ldots,p^{j_{r+u_1}})\left(\prod_{\beta=2}^{r}W_{k_\beta+1}^{(h_\beta)}(p^{j_\beta},p_{K_\beta},p^{j_{r+u_{\beta-1}+1}},\ldots,p^{j_{r+u_\beta}})\right)}{\prod_{\gamma=2}^{l}y(p^i)-y(p^{j_\gamma})}+\right. \\ & \quad+\frac{W_{k_1+1}^{(h_1)}(p^i,p_{K_1},p^{j_{r+1}},\ldots,p^{j_{r+u_1}})W_{k_2+1}^{(h_2)}(p,p^{j_2},p_{K_2},p^{j_{r+u_1+1}},\ldots,p^{j_{r+u_2}})}{\prod_{\gamma=2}^{l}y(p^i)-y(p^{j_\gamma})}\times \\ & \quad\left.\times\prod_{\beta=3}^{r}W_{k_\beta+1}^{(h_\beta)}(p^{j_\beta},p_{K_\beta},p^{j_{r+u_{\beta-1}+1}},\ldots,p^{j_{r+u_\beta}})\right]- \\ & -\sum_{i=1}^{d_2}\frac{E_y(x,y(p))}{y(p)-y(p^i)}\sum_{r=1}^{d_2}\sum_{o=1}^{r}\sum_{h_o=0}^{h-1}\sum_{k_o=0}^{k+h}\sum_{j_2\neq\ldots\neq j_l\in[1,d_2]-\{i\}}\sum_{K_1\bigcup\ldots\bigcup K_r=K}\frac{1}{\Omega}\times \\ & \times\left[\frac{W_{k_1+1}^{(h_1)}(p^i,p,p_{K_1},p^{j_{r+1}},\ldots,p^{j_{r+u_1}})\left(\prod_{\beta=2}^{r}W_{k_\beta+1}^{(h_\beta)}(p^{j_\beta},p_{K_\beta},p^{j_{r+u_{\beta-1}+1}},\ldots,p^{j_{r+u_\beta}})\right)}{\prod_{\gamma=2}^{l}y(p)-y(p^{j_\gamma})}+\right. \\ & \quad+\frac{W_{k_1+1}^{(h_1)}(p,p_{K_1},p^{j_{r+1}},\ldots,p^{j_{r+u_1}})W_{k_2+1}^{(h_2)}(p^i,p^{j_2},p_{K_2},p^{j_{r+u_1+1}},\ldots,p^{j_{r+u_2}})}{\prod_{\gamma=2}^{l}y(p^i)-y(p^{j_\gamma})}\times \\ & \quad\left.\times\prod_{\beta=3}^{r}W_{k_\beta+1}^{(h_\beta)}(p^{j_\beta},p_{K_\beta},p^{j_{r+u_{\beta-1}+1}},\ldots,p^{j_{r+u_\beta}})\right]. \end{aligned} \qquad (D.2)$$

JHEP12(2005)034
JHEP12(2005)034

The difference between the two first terms leaves only the terms corresponding to $u_1 \neq 0$ in the first one minus $u_1 \neq 0$ in the second one.

The difference between two last terms will allow us to compensate the preceding ones. Indeed, the terms with p^i and p together in the same correlation function straightforwardly vanish and one gets the exact opposite to the two first terms remaining.

Thus $D = 0$ and the equality (D.1) is proven.

References

[1] B. Eynard, *Topological expansion for the 1-hermitian matrix model correlation functions*, *JHEP* **11** (2004) 031 [hep-th/0407261].

[2] M.L. Mehta, *Random matrices*, 2nd edition, Academic Press, New York 1991.

[3] P. Di Francesco, P.H. Ginsparg and J. Zinn-Justin, *2-d gravity and random matrices*, *Phys. Rept.* **254** (1995) 1 [hep-th/9306153].

[4] G. 't Hooft, *A planar diagram theory for strong interactions*, *Nucl. Phys.* **B 72** (1974) 461.

[5] E. Brezin, C. Itzykson, G. Parisi and J.B. Zuber, *Planar diagrams*, *Commun. Math. Phys.* **59** (1978) 35.

[6] B. Eynard, *An introduction to random matrices*, lectures given at Saclay, October 2000, notes available at http://www-spht.cea.fr/articles/t01/014/.

[7] B. Eynard, *Polynômes biorthogonaux, problème de Riemann-Hilbert et géométrie algébrique*, habilitation à diriger les recherches, université Paris VII, 2005.

[8] M. Staudacher, *Combinatorial solution of the two matrix model*, *Phys. Lett.* **B 305** (1993) 332 [hep-th/9301038].

[9] F. David, *Loop equations and nonperturbative effects in two-dimensional quantum gravity*, *Mod. Phys. Lett.* **A 5** (1990) 1019.

[10] S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov and A. Morozov, *Generalized kontsevich model versus Toda hierarchy and discrete matrix models*, *Nucl. Phys.* **B 397** (1993) 339 [hep-th/9203043].

[11] P. Zinn-Justin and J.B. Zuber, *On some integrals over the* U(N) *unitary group and their large-N limit*, *J. Phys.* **A 36** (2003) 3173 [math-ph/0209019].

[12] P. Zinn-Justin, *Hciz integral and 2d Toda lattice hierarchy*, *Nucl. Phys.* **B 634** (2002) 417 [math-ph/0202045].

[13] I.K. Kostov, *Conformal field theory techniques in random matrix models*, hep-th/9907060.

[14] R. Dijkgraaf and C. Vafa, *Matrix models, topological strings and supersymmetric gauge theories*, *Nucl. Phys.* **B 644** (2002) 3 [hep-th/0206255]; *On geometry and matrix models*, *Nucl. Phys.* **B 644** (2002) 21 [hep-th/0207106]; *A perturbative window into non-perturbative physics*, hep-th/0208048.

[15] R. Dijkgraaf and E. Witten, *Mean field theory, topological field theory and multimatrix models*, *Nucl. Phys.* **B 342** (1990) 486.

[16] G. Bonnet, F. David and B. Eynard, *Breakdown of universality in multi-cut matrix models*, *J. Phys.* **A 33** (2000) 6739 [cond-mat/0003324].

JHEP12(2005)034

[17] V.A. Kazakov and A. Marshakov, *Complex curve of the two matrix model and its τ-function*, *J. Phys.* **A 36** (2003) 3107 [hep-th/0211236].

[18] J. Ambjørn, L. Chekhov and Y. Makeenko, *Higher genus correlators from the hermitian one-matrix model*, *Phys. Lett.* **B 282** (1992) 341 [hep-th/9203009].

[19] J. Ambjørn, L. Chekhov, C.F. Kristjansen and Y. Makeenko, *Matrix model calculations beyond the spherical limit*, *Nucl. Phys.* **B 404** (1993) 127 [hep-th/9302014], erratum *ibid.* **B449** (1995) 681.

[20] G. Akemann, *Higher genus correlators for the hermitian matrix model with multiple cuts*, *Nucl. Phys.* **B 482** (1996) 403 [hep-th/9606004].

[21] J. Ambjørn and G. Akemann, *New universal spectral correlators*, *J. Phys.* **A 29** (1996) L555 [cond-mat/9606129].

[22] L. Chekhov, *Genus one correlation to multi-cut matrix model solutions*, *Theor. Math. Phys.* **141** (2004) 1640 [hep-th/0401089].

[23] B. Eynard, A. Kokotov and D. Korotkin, $1/N^2$ *correction to free energy in hermitian two-matrix model*, *Lett. Math. Phys.* **71** (2005) 199 [hep-th/0401166].

[24] B. Eynard, *Eigenvalue distribution of large random matrices, from one matrix to several coupled matrices*, *Nucl. Phys.* **B 506** (1997) 633 [cond-mat/9707005].

[25] B. Eynard, *Correlation functions of eigenvalues of multi-matrix models and the limit of a time dependent matrix*, *J. Phys.* **A 31** (1998) 8081 [cond-mat/9801075].

[26] B. Eynard, *Master loop equations, free energy and correlations for the chain of matrices*, *JHEP* **11** (2003) 018 [hep-th/0309036].

[27] B. Eynard, *Large-N expansion of the 2-matrix model*, *JHEP* **01** (2003) 051 [hep-th/0210047].

[28] B. Eynard, *Large-N expansion of the 2-matrix model, multicut case*, math-ph/0307052.

[29] V.A. Kazakov, *Ising model on a dynamical planar random lattice: exact solution*, *Phys. Lett.* **A 119** (1986) 140.

[30] B. Eynard and N. Orantin, *Mixed correlation functions in the 2-matrix model and the Bethe ansatz*, *JHEP* **08** (2005) 028 [hep-th/0504029].

[31] A. Marshakov, A. Mironov and A. Morozov *From Virasoro constraints in Kontsevich's model to W-constraints in 2-matrix models*, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **54** (1991) 536.

[32] J.D. Fay, *Theta functions on Riemann surfaces*, Springer Verlag, Berlin 1973.

[33] H.M. Farkas and I. Kra, *Riemann surfaces*, 2nd edition, Springer Verlag, Berlin 1992.

[34] M. Bertola, *Free energy of the two-matrix model/dToda τ-function*, *Nucl. Phys.* **B 669** (2003) 435 [hep-th/0306184].

[35] I.M. Krichever, *The τ function of the universal whitham hierarchy, matrix models and topological field theories*, hep-th/9205110.

[36] B. Eynard, *Loop equations for the semiclassical 2-matrix model with hard edges*, math-ph/0504002.

JHEP12(2005)034

3 Free energy topological expansion for the 2-matrix model

Published by Institute of Physics Publishing for SISSA

Received: *October 12, 2006*
Accepted: *November 9, 2006*
Published: *December 18, 2006*

Free energy topological expansion for the 2-matrix model

Leonid Chekhov

Steklov Mathematical Institute, ITEP and Poncelet Laboratoire, Moscow, Russia
E-mail: chekhov@mi.ras.ru

Bertrand Eynard and Nicolas Orantin

Service de Physique Théorique de Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France
E-mail: eynard@saclay.cea.fr, orantin@cea.fr

Abstract: We compute the complete topological expansion of the formal hermitian two-matrix model. For this, we refine the previously formulated diagrammatic rules for computing the $\frac{1}{N}$ expansion of the nonmixed correlation functions and give a new formulation of the spectral curve. We extend these rules obtaining a closed formula for correlation functions in all orders of topological expansion. We then integrate it to obtain the free energy in terms of residues on the associated Riemann surface.

Keywords: Matrix Models, Differential and Algebraic Geometry, Topological Strings.

JHEP12(2006)053

© SISSA 2006

Contents

1. Introduction **1**

2. Definitions and algebraic-geometrical notation **3**
2.1 Definition of the model 3
2.2 Notations 4
2.2.1 Variable sets 4
2.2.2 Resolvents 4
2.2.3 The master loop equation 5
2.2.4 Algebraic geometry notations 5
2.3 Loop equations and fixed filling fractions 8

3. A new formula for the spectral curve **10**

4. Diagrammatic rules for the correlation functions: new insight. **12**

5. Topological expansion of the free energy **18**
5.1 The H operators 18
5.2 Finding the free energy 19
5.3 Dependence on other parameters 21
5.4 Scaling equation 21
5.5 Explicit computation of the free energy: diagrammatic rules 23

6. Conclusion **23**

A. Computation of $W_{k,1}^{(h)}$. **24**
A.1 Examples 24
A.1.1 2-point functions 24
A.1.2 3-point functions 24
A.2 General case 25

B. Symmetry of the free energy under the exchange of x and y **26**

1. Introduction

Matrix models is a fascinating topic unifying many otherwise seemingly unrelated disciplines, including integrable systems, conformal theories, topological expansion, etc [33, 14]. However, only recently the understanding came that geometry itself plays a crucial role in constructing perturbative solutions to matrix models. Dijkgraaf and Vafa [15] studies in

JHEP12(2006)053

the one-matrix model (1MM), together with subsequent observations [28, 4, 31, 32] based on the idea of [30] that topological hierarchies are encoded already in the planar limit of the solutions to the Hermitian one-matrix model with multiple-connected support of eigenvalues, led to understanding of a crucial role of the corresponding spectral curve in constructing explicit solutions.

The first attempts of computing the subleading terms in the $1/N^2$ expansion, where based on loop equations [2, 3], and allowed the authors of [3] to find the first few terms of the expansion of the free energy, only in the 1-cut case of the 1-hermitean matrix model.

In the begining of the 2000's, a geometrical approach, supported by using the master loop equation, resulted in constructing solutions in the first subleading order of the 1MM in the mutlticut case [19, 10, 20, 36].

Then, a Feynmann-like diagrammatic technique was invented in [16], which allowed to reformulate the loop equations themselves in a proper geometric way, and it became possible to compute all correlation functions of the 1-MM to all orders in the $1/N^2$ expansion [16]. However, the diagrammatic technique of [16] could not be applied directly to the expansion of the free energy. The topological expansion of the free energy to all orders was found with a refined diagrammatic technique in [11], where the key ingredient was the homogenity property of the free energy to all orders.

In parallel, the hermitian two-matrix model (2MM) solutions have been obtained, at early stages, in the planar limit of the $1/N$-expansion [34, 21]. It was however almost immediately observed [5, 18, 21] that the 2MM solution in the planar limit enjoys the same geometrical properties as the 1MM solution; only the spectral curve becomes an arbitrary algebraic curve, not just an hyperellitic curve arising in the 1MM case. The subsequent progress was however hindered by that the corresponding master loop equation in the 2MM case cannot immediately be expressed in terms of correlation functions alone. Nevertheless, using the geometrical properties of this equation, the solution in the first subleading order has been constructed [19, 20] on the base of knowledge of Bergmann tau function on Hurwitz spaces. However, the general belief arose that the 2MM case should not be very much different from the 1MM case, that is, we expect to find all ingredients of the 1MM solution in the 2MM case. Next step towards constructing the topological expansion of the 2MM was performed in [24], where the first variant of the diagrammatic technique for the correlation functions in the 2MM case was constructed. In the present paper we improve the technique of [24] (actually effectively simplifying it) to accommodate the action of the loop insertion operator. In fact, we demonstrate that the diagrammatic technique for the 2MM case is even closer to the one in the 1MM case that was before: in particular, we need only three-valent vertices, and the additional operator H we need to obtain the free energy turns out to be of the same origin as the one in the 1MM.

The paper is organized as follows. In section 2, we collect all the definitions, algebraic-geometrical notation, and facts about loop equations and filling fractions we need in what follows. In section 3, we provide a new formula for the spectral curve, which results in the new diagrammatic rules formulated in section 4. In the same section, we express the action of the loop insertion operator in terms of our diagrammatic technique, which makes the construction closed as regarding the nonmixed multipoint correlation functions. We

JHEP12(2006)053

introduce the "integration" operator H in section 5 and, using this operator, present the diagrammatic technique that enables us to construct the complete topological expansion for the 2MM to all orders except the subleading order. But for this latter, the answer has been found in [20], so we eventually formulate a complete procedure for constructing the topological expansion in the 2MM. In appendix A, we extend our technique to calculating the first mixed correlation function; higher mixed correlation functions need further refining of this technique, which is beyond the scope of this publication. In appendix B, we prove the symmetricity of the free-energy expression w.r.t. interchanging x and y variables, which is crucial for the proper integration of the expression for the first mixed correlation function.

2. Definitions and algebraic-geometrical notation

2.1 Definition of the model

We study the formal two-matrix model [27] and compute the free energy $\mathcal{F}$ of this model in the asymptotic $\frac{1}{N}$-expansion. The partition function Z is the formal matrix integral

$$Z := \int_{H_N \times H_N} dM_1 dM_2 \, e^{-\frac{1}{\hbar} Tr(V_1(M_1)+V_2(M_2)-M_1 M_2)} = e^{-\mathcal{F}}, \tag{2.1}$$

where M_1 and M_2 are two $N \times N$ Hermitian matrices, dM_1 and dM_2 are the products of Lebesgue measures of the real components of M_1 and M_2, $\hbar = \frac{T}{N}$ is a formal expansion parameter and V_1 and V_2 are two polynomial potentials of respective degrees $d_1 + 1$ and $d_2 + 1$

$$V_1(x) = \sum_{k=1}^{d_1+1} \frac{t_k}{k} x^k \qquad , \qquad V_2(y) = \sum_{k=1}^{d_2+1} \frac{\tilde{t}_k}{k} y^k. \tag{2.2}$$

Formal integral means that it is computed order by order in powers of the t_k's (see section 2.3 or [22]). We consider polynomial potentials here only for simplicity of notations, but it is clear that the whole method presented in this paper extends to "rational potentials" (i.e. such that V_1' and V_2' are rational functions), and we expect it to extend to the whole semiclassical setting [6] including hard edges as well.

One can expand the free energy as well as all the correlation functions of this model in a $\hbar$ series assuming $\hbar$ to the order of the reciprocal matrix size; this procedure is customarily called the *topological expansion* pertaining to the fat-graph representation for formal integrals ([35, 9, 14]).

The topological expansion of the Feynman diagrams series reads, in terms of the free energy,

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(N, T, t_1, t_2, \ldots, t_{d_1+1}, \tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \ldots, \tilde{t}_{d_2+1}) = \sum_{h=0}^{\infty} \hbar^{2h-2} \mathcal{F}^{(h)}(T, \ldots). \tag{2.3}$$

We find a general formula for $\mathcal{F}^{(h)}$ for any positive integer h. Actually, we address the problem for $h \geq 2$; the solutions for $h = 0$ ([30, 4]) and $h = 1$ ([20]) are already known.

JHEP12(2006)053

2.2 Notations

2.2.1 Variable sets

We consider functions of many variables $x_1, x_2, x_3, \ldots$, or of a subset of those variables. For this, we introduce the following notation:

Let K be a set of k integers:

$$K = (i_1, i_2, \ldots, i_k). \tag{2.4}$$

Let $k = |K|$ denote the length (or cardinality) of K. For any $j \leq |K|$, let K_j denote the set of all $j-$upples (i.e., subsets of length j) contained in K:

$$K_j := \{J \subset K \ , \ |J| = j\}. \tag{2.5}$$

We define the following $k-$upple of complex numbers:

$$\mathbf{x}_K := (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}) \qquad , \qquad d\mathbf{x}_K := \prod_{j=1}^{k} dx_j. \tag{2.6}$$

2.2.2 Resolvents

For given integers k and l, we define the resolvents:

$$\begin{aligned} \overline{w}_{|K|,|L|}(\mathbf{x}_K, \mathbf{y}_L) &:= \hbar^{2-|K|-|L|} \left\langle \prod_{i=1}^{|K|} \mathrm{tr}\, \frac{1}{x_i - M_1} \prod_{i=1}^{|L|} \mathrm{tr}\, \frac{1}{y_i - M_2} \right\rangle_{\mathrm{conn}} \\ &= -\hbar^2 \frac{\partial}{\partial V_2(y_{|L|})} \cdots \frac{\partial}{\partial V_2(y_1)} \frac{\partial}{\partial V_1(x_{|K|})} \frac{\partial}{\partial V_1(x_{|K|-1})} \cdots \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial V_1(x_1)} \\ &\quad + \frac{\delta_{|K|,1}\delta_{|L|,0}}{x_1} + \frac{\delta_{|K|,0}\delta_{|L|,1}}{y_1} \end{aligned} \tag{2.7}$$

with the formal loop insertion operators

$$\frac{\partial}{\partial V_1(x)} = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{x^{j+1}} \frac{\partial}{\partial t_j} \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial V_2(x)} = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{y^{j+1}} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}_j}. \tag{2.8}$$

We also introduce the polynomials in y:

$$\overline{u}_k(x, y; x_{|K|}) := \hbar^{1-k} \left\langle \mathrm{tr}\, \frac{1}{x - M_1} \frac{V_2'(y) - V_2'(M_2)}{y - M_2} \prod_{r=1}^{|K|} \mathrm{tr}\, \frac{1}{x_r - M_1} \right\rangle_{\mathrm{conn}}, \tag{2.9}$$

where the subscript *conn* denotes the connected component.

For convenience, we renormalize the two-point functions:

$$w_{|K|,|L|}(\mathbf{x}_K, \mathbf{y}_L) = \overline{w}_{|K|,|L|}(\mathbf{x}_K, \mathbf{y}_L) + \frac{\delta_{|K|,2}\delta_{|L|,0}}{(x_1 - x_2)^2} + \frac{\delta_{|K|,0}\delta_{|L|,2}}{(y_1 - y_2)^2} \tag{2.10}$$

and their polynomial correspondent:

$$u_k(x, y; x_K) := \overline{u}_k(x, y; x_K) - \delta_{k,0}(V_2'(y) - x). \tag{2.11}$$

JHEP12(2006)053

We consider the $\hbar^2$-expansions of the above quantities:

$$w_{|K|,|L|}(\mathbf{x}_K, \mathbf{y}_L) = \sum_{h=0}^{\infty} \hbar^{2h}\, w^{(h)}_{|K|,|L|}(\mathbf{x}_K, \mathbf{y}_L), \tag{2.12}$$

$$u_k(x, y; x_K) = \sum_{h=0}^{\infty} \hbar^{2h}\, u^{(h)}_k(x, y; x_K). \tag{2.13}$$

We also need the functions closely related to the algebraic structure of the problem:

$$Y(x) := V_1'(x) - \overline{w}_1(x) \tag{2.14}$$

and

$$P(x, y) := \hbar \left\langle \mathrm{tr}\, \frac{V_1'(x) - V_1'(M_1)}{x - M_1} \frac{V_2'(y) - V_2'(M_2)}{y - M_2} \right\rangle_{\mathrm{conn}}. \tag{2.15}$$

The latter function together with all its terms of $\hbar^2$-expansion, is a polynomial of degree $d_1 - 1$ in x and $d_2 - 1$ in y.

2.2.3 The master loop equation

Among many different ways to solve matrix models [33], addressing the formal 2-matrix model problem, we choose the so-called loop equations [34, 13] encoding the matrix integral in (2.1) to be invariant under special changes of variables. They correspond to the generalization of the Virasoro constraints of the one-matrix model, i.e. the W-algebra.

Considering a particular change of variables, we come to the *master loop equation* [19]:

$$\boxed{E(x, y) = (y - Y(x))u_0(x, y) + \hbar^2 u_1(x, y; x)}, \tag{2.16}$$

where

$$E(x, y) = (V_1'(x) - y)(V_2'(y) - x) - P(x, y) + T \tag{2.17}$$

is a polynomial in x and y defining the *spectral curve*.

Considering the 't Hooft expansion in orders of $\hbar^2$, for any $h \geq 1$, we have:

$$\begin{aligned} E^{(h)}(x, y) &= (y - Y(x))u_0^{(h)}(x, y) + w_{1,0}^{(h)}(x)u_0^{(0)}(x, y) \\ &\quad + \sum_{m=1}^{h-1} w_{1,0}^{(m)}(x)u_0^{(h-m)}(x, y) + \frac{\partial}{\partial V_1(x)} u_0^{(h-1)}(x, y), \end{aligned} \tag{2.18}$$

where $E^{(h)}(x, y)$ is the h'th term in the $\hbar^2$-expansion of the spectral curve $E(x, y)$.

2.2.4 Algebraic geometry notations

In this section, we recall the algebraic-geometrical pattern of our problem (see more details in [24 – 26]).

To leading order, the *master loop equation* (2.18) reduces to an algebraic equation

$$E^{(0)}(x, Y(x)) = 0 \tag{2.19}$$

JHEP12(2006)053

with $E^{(0)}(x,y)$ being a polynomial of degree d_1+1 in x and d_2+1 in y.

We parameterize the algebraic curve $E^{(0)}(x,y)=0$ implied by (2.19) by a running point p on the corresponding compact Riemann surface $\mathcal{E}$. We therefore define two analytical meromorphic functions $x(p)$ and $y(p)$ on $\mathcal{E}$ such that:

$$E^{(0)}(x,y)=0 \Leftrightarrow \exists! \, p\in\mathcal{E} \quad x=x(p)\ ,\ y=y(p). \tag{2.20}$$

The functions x and y are not bijective. Indeed, since $E^{(0)}(x,y)$ has a degree d_2+1 in y, it admits d_2+1 solutions for a given x; that is we have d_2+1 points p on $\mathcal{E}$ such that $x(p)=x$. Thus, the Riemann surface is made of d_2+1 x-sheets, or respectively, of d_1+1 y-sheets. We then denote

$$x(p)=x \Leftrightarrow p=p^{(j)}(x) \quad \text{for} \quad j=0,\dots,d_2, \tag{2.21}$$

$$y(p)=y \Leftrightarrow p=\tilde{p}^{(j)}(x) \quad \text{for} \quad j=0,\dots,d_1. \tag{2.22}$$

Among the different x-sheets (resp. y-sheet), there exists only one where $y(p)\sim_{x(p)\to\infty} V_1'(x(p))-\frac{T}{x(p)}+O(1/x^2(p))$ (resp. $x(p)\sim_{y(p)\to\infty} V_2'(y(p))-\frac{T}{y(p)}+O(1/y^2(p))$). We call it the physical sheet, and it bears the superscript 0.

Genus and cycles. The curve $\mathcal{E}$ is a compact Riemann surface of finite genus $g\leq d_1d_2-1$.[1] We do not require g to be equal to d_1d_2-1, that is, we allow double points on the corresponding Riemann surface. We choose $2g$ canonical cycles as $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{B}_i$, $i=1,\dots,g$, such that:

$$\mathcal{A}_i\cap\mathcal{A}_j=0 \qquad , \qquad \mathcal{B}_i\cap\mathcal{B}_j=0 \qquad , \qquad \mathcal{A}_i\cap\mathcal{B}_j=\delta_{ij}. \tag{2.23}$$

Branch points. The x-branch points μ_α, $\alpha=1,\dots,d_2+1+2g$, are the zeroes of the differential dx, respectively, the y-branch points ν_β, $\beta=1,\dots,d_1+1+2g$, are the zeroes of dy. We assume here that all branch points are simple and distinct. Note also that $E_y^{(0)}(x(p),y(p))$ vanishes (simple zeroes) at the branch points (it vanishes in other points as well).

A branch point is a point where two sheets of the Riemann surface meet. If p is a point on the Riemann surface near a branch point, there is another point p^i, which we note $\overline{p}$, near the same branch point. In other words:

$$\forall\alpha \quad \exists!\overline{p}\neq p \quad \text{such that} \quad x(\overline{p})=x(p) \quad \text{and} \quad y(\overline{p})\to_{p\to\mu_\alpha} y(p) \tag{2.24}$$

Let us emphasize that the point $\overline{p}$ and the corresponding sheet, depend on which branch point we are considering.

Bergmann kernel. On the Riemann surface $\mathcal{E}$, we have a unique Abelian bilinear differential $B(p,q)$, with one double pole at $p=q$ such that

$$B(p,q)\underset{p\to q}{\sim}\frac{dx(p)dx(q)}{(x(p)-x(q))^2}+\text{finite} \quad \text{and} \quad \forall i \oint_{p\in\mathcal{A}_i} B(p,q)=0. \tag{2.25}$$

[1] This genus g must not be confused with the genus indicating the order of the topological expansion

JHEP12(2006)053

It is symmetric,

$$B(p,q)=B(q,p), \tag{2.26}$$

it can be expressed in terms of theta-functions [26, 25], and depends only on the complex structure of $\mathcal{E}$.

Abelian differential of the third kind. On the Riemann surface $\mathcal{E}$, there exists a unique Abelian differential of the third kind $dS_{q,r}(p)$, with two simple poles at $p=q$ and at $p=r$, such that

$$\operatorname*{Res}_{p\to q} dS_{q,r}(p)=1=-\operatorname*{Res}_{p\to r} dS_{q,r}(p) \quad \text{and} \quad \forall i \oint_{\mathcal{A}_i} dS_{q,r}(p)=0. \tag{2.27}$$

Notice that the Abelian differential of the third kind and the Bergmann kernel are linked by

$$dS_{q,r}(p)=\int_{\xi=r}^{q} B(\xi,p) \quad \text{and} \quad B(p,q)=d_q\left(dS_{q,r}(p)\right). \tag{2.28}$$

where the contour of integration is a line from r to q, which does not cross any $\mathcal{A}$ or $\mathcal{B}$ cycle.

Given a branch point μ_α, and a point q in the vicinity of μ_α, we introduce the following notation:

$$dE_{q,\overline{q}}(p)=\int_{\overline{q}}^{q} B(\xi,p), \tag{2.29}$$

where now, the integration path is chosen as the shortest path between q and $\overline{q}$, i.e. a path which lies in a small vicinity of μ_α. That definition differs from the one above. If the branchpoint μ_α is surrounded by contour $\mathcal{A}_i$, we have:

$$dE_{q,\overline{q}}(p)=dS_{q,\overline{q}}(p)+\oint_{\mathcal{B}_i} B(p,\xi) \tag{2.30}$$

The main property of that $dE_{q,\overline{q}}(p)$, is that it vanishes at $q=\overline{q}$, i.e. it vanishes at the branch point μ_α.

Correlation functions on the Riemann surface Given the algebraic curve, we see that we can redefine the correlation functions (2.12) and (2.13) more precisely. Indeed, they are defined only as formal series as their arguments $\mathbf{x}_K$ and $\mathbf{y}_L$ tend to infinity. The loop equations show that these formal series are in fact algebraic functions and hence have a finite radius of convergency, with cuts beyond the radius. As functions of the x and y variables, they are multivalued.

If instead of writing them as functions of x or y, we write them as functions on the Riemann surface, they become monovalued. This is the reason why we prefer to introduce the following notation for the correlation functions, as meromophic differential forms on the Riemann surface:

$$W_{|K|,|L|}(\mathbf{p}_K,\mathbf{q}_L):=w_{|K|,|L|}(x(\mathbf{p}_K),y(\mathbf{q}_L))dx(\mathbf{p}_K)dy(\mathbf{q}_L), \tag{2.31}$$

and

$$U_{|K|}(p,y;\mathbf{p}_K):=u_{|K|}(x(p),y;x(\mathbf{p}_K))dx(\mathbf{p}_K), \tag{2.32}$$

JHEP12(2006)053

where p_i's and q_j's are points on the surface $\mathcal{E}$ whose images $x(p_i)$ or $y(q_i)$ are complex numbers. y is a complex number.

Remark 1. The interpretation of those correlation functions as generating series for the moments $< \prod_i \mathrm{Tr}\, M_1^{k_i} \prod_j \mathrm{Tr}\, M_2^{l_j} >_{\mathrm{c}}$, corresponds to the situation where all p_i's are in the x-physical sheet, in a vicinity of ∞_x, and all q_j's are in the y-physical sheet in a vicinity of ∞_y.

2 point function It is well known (see for instance [1, 5, 28 – 30, 19, 21]) that, to leading order, the 2-point function $W_{2,0}$ is the Bergmann kernel:

$$W_{2,0}^{(0)}(p,q) = B(p,q) \tag{2.33}$$

The non-renormalized 2 point function:

$$\overline{W}_{2,0}(p,q) = W_{2,0}(p,q) - \frac{dx(p)dx(q)}{(x(p)-x(q))^2} \tag{2.34}$$

is finite at $p = q$.

2.3 Loop equations and fixed filling fractions

We have showed that to leading order, the 1-point function $Y^{(0)}(x)$ obeys an algebraic equation (2.19):

$$E^{(0)}(x, Y(x)) = 0, \tag{2.35}$$

where

$$E^{(0)}(x,y) = (V_1'(x) - y)(V_2'(y) - x) - P^{(0)}(x,y) + T \tag{2.36}$$

But so far we have not discussed how to determine the polynomial $P^{(0)}(x,y)$.

As this was extensively discussed in the literature, we only briefly summarize it below.

We need $d_1d_2 - 1$ equations to fix the $d_1d_2 - 1$ unknown coefficients of $P^{(0)}$. Those additional $d_1d_2 - 1$ equations do not come from any loop equation, so we need an independent hypothesis related to the precise definition of our matrix model. In a sense, loop equations express the invariance of the integral under reparameterizations, independently on the integration paths. Additional equations are those that depend on the choice of integration path.

For arbitrary integration paths, the $\hbar$ expansion may not exist. The choice of integration method we use in this paper, corresponds to the so-called *formal matrix model, with fixed filling fractions*.

We consider here the problem of a formal matrix model, i.e. the one represented by the formal power series expansion of a matrix integral, where the non-quadratic terms in the potentials V_1 and V_2 are treated as perturbations near quadratic potentials. Such a perturbative expansion can be performed only near local extrema of $V_1(x) + V_2(y) - xy$, i.e. near the points (ξ_i, η_i), $i = 1, \dots, d_1d_2$, such that

$$V_1'(\xi_i) = \eta_i \quad \text{and} \quad V_2'(\eta_i) = \xi_i \tag{2.37}$$

JHEP12(2006)053

which has in general d_1d_2 solutions. Therefore, perturbative expansion can be performed near matrices of the form:

$$\overline{M_1} = \mathrm{diag}\,(\overbrace{\xi_1, \dots, \xi_1}^{n_1}, \overbrace{\xi_2, \dots, \xi_2}^{n_2}, \dots, \overbrace{\xi_{d_1d_2}, \dots, \xi_{d_1d_2}}^{n_{d_1d_2}}), \tag{2.38}$$

$$\overline{M_2} = \mathrm{diag}\,(\overbrace{\eta_1, \dots, \eta_1}^{n_1}, \overbrace{\eta_2, \dots, \eta_2}^{n_2}, \dots, \overbrace{\eta_{d_1d_2}, \dots, \eta_{d_1d_2}}^{n_{d_1d_2}}), \tag{2.39}$$

such that $\sum_{i=1}^{d_1d_2} n_i = N$. The perturbative integral is computed by writing $M_1 = \overline{M_1} + \delta M_1$ and $M_2 = \overline{M_2} + \delta M_2$, by expanding higher order terms (cubic and higher) in δM_1 and δM_2, and by treating quadratic terms in δM_1 and δM_2 as gaussian integrals.

In other words, a formal integral can be computed as soon as we have chosen a vacuum around which to make a perturbative expansion. The choice of a vacuum is equivalent to choosing a partition of N into d_1d_2 parts:

$$\sum_{i=1}^{d_1d_2} n_i = N. \tag{2.40}$$

It is easy to see that if we truncate the perturbative expansion to any finite order, we have:

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}_i} \left\langle \mathrm{tr}\, \frac{1}{x - M_1} \right\rangle dx = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}_i} \mathrm{tr}\, \frac{1}{x - \overline{M_1}} dx = -n_i, \tag{2.41}$$

where $\mathcal{C}_i$ is a small direct circle around the point ξ_i in the complex plane. And thus:

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}_i} w_{1,0}(x)dx = -n_i\hbar := -\epsilon_i. \tag{2.42}$$

If we do not truncate to a finite order, all functions become algebraic, with cuts, and the contours $\mathcal{C}_i$ are then enhanced to finite contours around the cuts, and up to a redefinition of the contours, the *filling fractions* are the $\mathcal{A}$-cycle integrals. We define:

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{A}_i} y dx = -\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{A}_i} x dy = \epsilon_i \tag{2.43}$$

We call ϵ_i's the filling fractions, and they are given new parameters (moduli) of the model. In what follows, we consider them to be independent of the potential or on any other parameter. Let us notice that the such defined ϵ_i's are not necessarily of the form n_i/N with n_i a positive integer, but they can be arbitrary complex numbers, provided that:

$$\sum_i \epsilon_i = t = N\hbar \tag{2.44}$$

In particular, since all correlation functions $w_{k,0}(x_1, \dots, x_k)$ are obtained by derivation of $w_{1,0}$ with respect to the potential V_1, we have:

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{A}_i} w_{k,0}(x_1, \dots, x_k)dx_1 = 0. \tag{2.45}$$

Eq. (2.43) together with the large x and y behaviors, suffices for determining completely all the coefficients of the polynomial $E^{(0)}(x,y)$, and thus the leading large N resolvents $w_{1,0}(x)$ and $w_{0,1}(y)$.

JHEP12(2006)053

Remark 2. It is easy to see that if we truncate the perturbative gaussian integral to any finite order, the result is a polynomial in $1/N^2$, and thus, formal matrix models always have a $1/N^2$ expansion. This comes from the fact that, to any finite order, the perturbative gaussian integral is the generating function for counting discrete surfaces made of a finite bounded number of polygons, thus having a maximal Euler characteristic (power of N).

Remark 3. We emphasize again the formality of our model: in principle, the $\mathcal{A}$-cycles do not necessarily lie in the physical sheet, so we would need additional assumptions to segregate physically meaningful models. Recall that the ϵ_i's can be arbitrary complex numbers.

Remark 4. We have $d_1 d_2$ non vanishing contour integrals, but they are not all independent. Their sum can be deformed as a contour around ∞. Thus, we only have $d_1 d_2 - 1$ independent non vanishing contour integrals, and thus the maximal genus of our curve is $d_1 d_2 - 1$. The number of independent filling fractions is $d_1 d_2 - 1$, due to the constraint on their sum.

Double points The Riemann surface $\mathcal{E}$ may have double points.

A point $p \in \mathcal{E}$ is a double point iff:

$$\exists q \neq p, \;\; x(p) = x(q) \text{ and } y(p) = y(q). \tag{2.46}$$

Double points are such that both derivatives E_x and E_y vanish, and thus the curve has two tangents at such points. The differential forms dx and dy do not vanish at double points.

We need an extra asumption to deal with double points.

We may consider that in the framework of the perturbative gaussian matrix integral seen above, double points correspond to vanishing filling fractions $\epsilon_i = 0$. Thus:

$$\oint_{\mathcal{C}} w_{1,0}(x)dx = 0 \tag{2.47}$$

where $\mathcal{C}$ is a contour which encircles the double point. In other words, we make the assumption that the resolvent has no residue at double points, to all orders in the $\hbar$ expansion. We will see below that this vanishing residue condition is sufficient to ensure that correlation functions never have poles at double points.

Another reason to make that assumption is based on the Krichever formula [30], which involves summation only over branch-points and not over double points.

3. A new formula for the spectral curve

The 't Hooft expansion of the master loop equation (2.18), links correlation functions of genus h to correlation functions of lower genus. The knowledge of the l.h.s. $E(x,y)$ would then give a way of deriving the whole topological expansion of the $W_{|K|,0}$.

JHEP12(2006)053

From the definition of the surface $\mathcal{E}$, one derives the leading term as:

$$\begin{aligned} E^{(0)}(x(p), y(q)) &= -t_{d_1+1} \times \prod_{i=0}^{d_1} (x(p) - x(\tilde{q}^{(i)}(y))) \\ &= -\tilde{t}_{d_2+1} \times \prod_{i=0}^{d_2} (y(q) - y(p^{(i)}(x))) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Actually, not only the leading term, but the whole function admits such a product structure:

Theorem 1. *The functions $E(x,y)$ and $U_0(p,y)$ can be written:*

$$\boxed{E(x(p), y) = -\tilde{t}_{d_2+1} \text{"} \left\langle \prod_{i=0}^{d_2} (y - V_1'(x(p)) + \hbar \,\mathrm{Tr}\, \frac{1}{x(p^i) - M_1}) \right\rangle \text{"}} \tag{3.2}$$

and

$$U_0(p, y) = -\tilde{t}_{d_2+1} \text{"} \left\langle \prod_{i=1}^{d_2} (y - V_1'(x(p)) + \hbar \,\mathrm{Tr}\, \frac{1}{x(p^i) - M_1}) \right\rangle \text{"}. \tag{3.3}$$

where the quotes " $\langle . \rangle$ " mean that when we expand into cumulants, each time we find a 2-point function $\overline{w}_{2,0}$, we replace it by $w_{2,0} = \overline{w}_{2,0} + \frac{1}{(x_1 - x_2)^2}$ as in (2.10).

In other words, $E(x,y)$ is the $(d_2+1)-$point correlation function, with all points corresponding to the same x in all the d_2+1 sheets, and $U_0(p,y)$ is the d_2-point correlation function, with all points corresponding to the same $x(p)$ in all sheets but the same as p.

Proof. We prove this theorem by showing that the two sides of the equalities (3.2) and (3.3) are defined by the same recursion relations.

We let $\widetilde{E}(x(p), y)$ and $\tilde{U}_0(p,y)$ be defined by the respective r.h.s. of (3.2) and (3.3). Consider their topological expansions:

$$\widetilde{E}(x,y) = \sum_{h=0}^{\infty} \hbar^{2h} \widetilde{E}^{(h)}(x,y) \quad \text{and} \quad \tilde{U}_0(p,y) = \sum_{h=0}^{\infty} \hbar^{2h} \widetilde{U}_0^{(h)}(x(p), y) \tag{3.4}$$

By expanding in cumulants (connected parts), one can observe that:

$$\begin{aligned} \widetilde{E}^{(h)}(x(p), y) &= (y - y(p)) \widetilde{U}_0^{(h)}(p,y) + W_{1,0}^{(h)}(p) \widetilde{U}_0^{(0)}(p,y) \\ &\quad + \sum_{m=1}^{h-1} W_{1,0}^{(m)}(p) \widetilde{U}_0^{(h-m)}(p,y) + \frac{\partial}{\partial V_1(x(p))} \widetilde{U}_0^{(h-1)}(p,y), \end{aligned} \tag{3.5}$$

which has exactly the same form as (2.18).

Obviously we have $E^{(0)}(x,y) = \widetilde{E}^{(0)}(x,y)$ and $U^{(0)}(p,y) = \widetilde{U}^{(0)}(p,y)$.

Let us now show that, given $E^{(0)}(x,y)$, (2.18) admits unique solution. For this, assume that we know $E^{(h-1)}(x,y)$ and $U_0^{(m)}(p,y)$ for all $m \leq h-1$ and prove that (2.18) allows computing $E^{(h)}(x,y)$ and $U_0^{(h)}(p,y)$.

JHEP12(2006)053

Consider (2.18) for $p = q^i$ and $y = y(p)$ for any $i = 0 \dots d_2$. It reads

$$E^{(h)}(x(p), y(p^i)) = \sum_{m=1}^{h} W_{1,0}^{(m)}(p^i) U_0^{(h-m)}(p^i, y(p^i)) + \frac{\partial}{\partial V_1(p^i)} U_0^{(h-1)}(p^i, y(p^i); p^i). \quad (3.6)$$

By the recursion hypothesis, one knows the r.h.s. totally, so one knows the l.h.s. . This gives the value of $E^{(h)}(x, y)$ for $d_2 + 1$ values of y. Because $E^{(h)}(x, y)$ is a polynomial in y of degree d_2, an interpolation formula gives its value for any y. It remains to compute $U_0^{(h)}(p, y)$ which is straightforward due to (2.18).

Thus, because $E^{(h)}(x, y)$ and $\widetilde{E}^{(h)}(x, y)$ obey the same equations with the same initial condition, we conclude that $E^{(h)}(x, y) = \widetilde{E}^{(h)}(x, y)$ for any h.

4. Diagrammatic rules for the correlation functions: new insight.

Using loop equations, two of the authors have derived two sets of diagrammatic rules allowing to compute any $W_{|K|,0}$ as residues on the Riemann surface [24]. One of these theories involved only cubic vertices but presented the disadvantage of using explicitly the auxiliary functions $U_{|K|}$, whereas the second one involved only the $W_{|K|,0}$'s but expressed it through vertices of valence up to d_2.

In this section, we present new diagrammatic rules composed of cubic vertices and involving only W's whose arguments are in the vicinity of the branch points. They are much simpler than all the preceding ones.

From (3.2) and the definition (2.17) of $E(x, y)$, we obtain the following equation:

$$-\tilde{t}_{d_2+1} \," \left\langle \prod_{i=0}^{d_2} (y - V_1'(x(p)) + \hbar \operatorname{Tr} \tfrac{1}{x(p^i) - M_1} \right\rangle " = (V_2'(y) - x(p))(V_1'(x(p)) - y) - P(x(p), y) + 1. \quad (4.1)$$

Recall that $P(x, y)$ is a polynomial both in y (of degree $d_2 - 1$) *and* in x.

The large y expansion of the l.h.s. reads

$$\begin{aligned} &-\tilde{t}_{d_2+1}\, y^{d_2+1} - \tilde{t}_{d_2+1} \sum_{i=0}^{d_2} \left\langle \hbar \operatorname{Tr} \frac{1}{x(p^i) - M_1} - V_1'(x(p)) \right\rangle y^{d_2} \\ &-\tilde{t}_{d_2+1} \sum_{i=0}^{d_2} \sum_{j \neq i} " \left\langle \left(\hbar \operatorname{Tr} \frac{1}{x(p^i) - M_1} - V_1'(x(p)) \right) \times \right. \\ &\qquad \left. \times \left(\hbar \operatorname{Tr} \frac{1}{x(p^j) - M_1} - V_1'(x(p)) \right) \right\rangle " y^{d_2-1} + O(y^{d_2-2}), \end{aligned} \quad (4.2)$$

and the large y expansion of the r.h.s. yields:

$$-\tilde{t}_{d_2+1}\, y^{d_2+1} - y^{d_2}(\tilde{t}_{d_2} - \tilde{t}_{d_2+1} V_1'(x(p))) - \tilde{t}_{d_2+1} Q(x(p)) y^{d_2-1} + O(y^{d_2-2}), \quad (4.3)$$

where $Q(x(p))$ is a polynomial in x of degree $d_1 - 1$.

JHEP12(2006)053

- Equating the coefficient of y^{d_2} gives

$$\boxed{\sum_{i=0}^{d_2} Y(p^i) = V_1'(x(p)) - \frac{\tilde{t}_{d_2}}{\tilde{t}_{d_2+1}}}, \quad (4.4)$$

which is a polynomial in $x(p)$. Expanded to order h, this means that

$$\sum_{i=0}^{d_2} W_{1,0}^{(h)}(p^i) = 0 \quad \text{for } h \geq 1. \quad (4.5)$$

Applying the loop insertion operator to (4.4) we get:

$$\sum_{i=0}^{d_2} W_{2,0}^{(h)}(p^i, q) = \delta_{h,0} \frac{dx(p)dx(q)}{(x(p) - x(q))^2}, \quad (4.6)$$

which can also be written:

$$\overline{W}_{2,0}(p^i, q) + \sum_{j \neq i} W_{2,0}(p^j, q) = 0. \quad (4.7)$$

- Equating the coefficient of y^{d_2-1} gives

$$\frac{1}{2} \sum_{i \neq j=0}^{d_2} Y(p^i) Y(p^j) + \hbar^2 w_{2,0}(p^i, p^j) = V_1'(x(p)) \frac{\tilde{t}_{d_2}}{\tilde{t}_{d_2+1}} + \frac{\tilde{t}_{d_2-1}}{\tilde{t}_{d_2+1}} + Q(x(p)) \quad (4.8)$$

where

$$Q(x) = \hbar \left\langle \operatorname{Tr} \frac{V_1'(x) - V_1'(M_1)}{x - M_1} \right\rangle \quad (4.9)$$

is a polynomial in x of degree $d_1 - 1$. Using (4.4) and (4.7) we get:

$$\sum_{i=0}^{d_2} Y(p^i)^2 + \hbar^2 \overline{w}_{2,0}(p^i, p^i) = V_1'(x(p))^2 - 2\frac{\tilde{t}_{d_2-1}}{\tilde{t}_{d_2+1}} + \left(\frac{\tilde{t}_{d_2}}{\tilde{t}_{d_2+1}} \right)^2 - 2Q(x(p)) \quad (4.10)$$

Expanding this equation in $\hbar$, we obtain for $h \geq 1$

$$\boxed{\begin{aligned} 2\textstyle\sum_{i=0}^{d_2} y(p^i) W_{1,0}^{(h)}(p^i) dx(p) = &\textstyle\sum_{i=0}^{d_2} \sum_{m=1}^{h-1} W_{1,0}^{(m)}(p^i) W_{1,0}^{(h-m)}(p^i) \\ &+ \textstyle\sum_{i=0}^{d_2} \overline{W}_{2,0}^{(h-1)}(p^i, p^i) + 2Q^{(h)}(x(p)) dx(p)^2. \end{aligned}} \quad (4.11)$$

We consider this equation when p is near a branch point μ_α, multiply it by $\frac{1}{2} \frac{dE_{p,\overline{p}}(q)}{y(p) - y(\overline{p})}$, take the residues when $p \to \mu_\alpha$ and sum over all the branch points. Notice that $\frac{1}{2} \frac{dE_{p,\overline{p}}(q)}{y(p) - y(\overline{p})}$ is finite at $p = \overline{p}$, i.e. it has no poles at branch points.

JHEP12(2006)053

Let us first compute the l.h.s. :

$$
\begin{aligned}
&\sum_\alpha \operatorname*{Res}_{p\to\mu_\alpha} \frac{dE_{p,\overline{p}}(q)\sum_{i=0}^{d_2} y(p^i)W_{1,0}^{(h)}(p^i)}{y(p)-y(\overline{p})} \\
&= \sum_\alpha \operatorname*{Res}_{p\to\mu_\alpha} \frac{dE_{p,\overline{p}}(q)\left[y(p)W_{1,0}^{(h)}(p)+y(\overline{p})W_{1,0}^{(h)}(\overline{p})+\sum_{p^i\neq p,\overline{p}} y(p^i)W_{1,0}^{(h)}(p^i)\right]}{y(p)-y(\overline{p})} \\
&= \sum_\alpha \operatorname*{Res}_{p\to\mu_\alpha} \frac{dE_{p,\overline{p}}(q)\left[y(p)W_{1,0}^{(h)}(p)+y(\overline{p})W_{1,0}^{(h)}(\overline{p})\right]}{y(p)-y(\overline{p})} \\
&= \sum_\alpha \operatorname*{Res}_{p\to\mu_\alpha} \frac{dE_{p,\overline{p}}(q)\left[y(p)W_{1,0}^{(h)}(p)-y(\overline{p})(W_{1,0}^{(h)}(p)+\sum_{p^i\neq p,\overline{p}} W_{1,0}^{(h)}(p^i))\right]}{y(p)-y(\overline{p})} \\
&= \sum_\alpha \operatorname*{Res}_{p\to\mu_\alpha} \frac{dE_{p,\overline{p}}(q)\left[y(p)W_{1,0}^{(h)}(p)-y(\overline{p})W_{1,0}^{(h)}(p)\right]}{y(p)-y(\overline{p})} \\
&= \sum_\alpha \operatorname*{Res}_{p\to\mu_\alpha} dE_{p,\overline{p}}(q)\, W_{1,0}^{(h)}(p) \\
&= \sum_\alpha \operatorname*{Res}_{p\to\mu_\alpha} dS_{p,o}(q)\, W_{1,0}^{(h)}(p) - dS_{\overline{p},o}(q)\, W_{1,0}^{(h)}(p) \\
&= \sum_\alpha \operatorname*{Res}_{p\to\mu_\alpha} dS_{p,o}(q)\,(W_{1,0}^{(h)}(p)-W_{1,0}^{(h)}(\overline{p})) \\
&= \sum_\alpha \operatorname*{Res}_{p\to\mu_\alpha} dS_{p,o}(q)\,(2W_{1,0}^{(h)}(p)+\sum_{p^i\neq p,\overline{p}} W_{1,0}^{(h)}(p^i)) \\
&= 2\sum_\alpha \operatorname*{Res}_{p\to\mu_\alpha} dS_{p,o}(q)\, W_{1,0}^{(h)}(p) \\
&= -2\operatorname*{Res}_{p\to q} dS_{p,o}(q)\, W_{1,0}^{(h)}(p) \\
&\qquad +\frac{1}{2i\pi}\sum_i \left(\oint_{\mathcal{A}_i} W_{1,0}^{(h)}(p)\oint_{\mathcal{B}_i} B(p,q)+\oint_{\mathcal{B}_i} W_{1,0}^{(h)}(p)\oint_{\mathcal{A}_i} B(p,q)\right) \\
&= -2\operatorname*{Res}_{p\to q} dS_{p,o}(q)\, W_{1,0}^{(h)}(p) \\
&= 2W_{1,0}^{(h)}(q)
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Let us compute the r.h.s. in a similar way. It reads

$$
\begin{aligned}
&\sum_\alpha \operatorname*{Res}_{p\to\mu_\alpha} \frac{\frac{1}{2}dE_{p,\overline{p}}(q)}{(y(p)-y(\overline{p}))dx(p)}\Big[\sum_{i=0}^{d_2}\left(\overline{W}_{2,0}^{(h-1)}(p^i,p^i)+\sum_{m=1}^{h-1} W_{1,0}^{(m)}(p^i)W_{1,0}^{(h-m)}(p^i)\right) \\
&\qquad\qquad +2Q^{(h)}(x(p))dx(p)^2\Big] \\
&= \sum_\alpha \operatorname*{Res}_{p\to\mu_\alpha} \frac{\frac{1}{2}dE_{p,\overline{p}}(q)}{(y(p)-y(\overline{p}))dx(p)}\Big[\overline{W}_{2,0}^{(h-1)}(p,p)+\sum_{m=1}^{h-1} W_{1,0}^{(m)}(p)W_{1,0}^{(h-m)}(p) \\
&\qquad\qquad +\overline{W}_{2,0}^{(h-1)}(\overline{p},\overline{p})+\sum_{m=1}^{h-1} W_{1,0}^{(m)}(\overline{p})W_{1,0}^{(h-m)}(\overline{p})\Big] \\
&= 2\sum_\alpha \operatorname*{Res}_{p\to\mu_\alpha} \frac{\frac{1}{2}dE_{p,\overline{p}}(q)}{(y(p)-y(\overline{p}))dx(p)}\Big[\overline{W}_{2,0}^{(h-1)}(p,p)+\sum_{m=1}^{h-1} W_{1,0}^{(m)}(p)W_{1,0}^{(h-m)}(p)\Big]
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

JHEP12(2006)053

Thus we have, for $h \geq 1$:

$$
W_{1,0}^{(h)}(q) = \sum_\alpha \operatorname*{Res}_{p\to\mu_\alpha} \frac{\frac{1}{2}dE_{p,\overline{p}}(q)(\overline{W}_{2,0}^{(h-1)}(p,p)+\sum_{m=1}^{h-1} W_{1,0}^{(m)}(p)W_{1,0}^{(h-m)}(p))}{(y(p)-y(\overline{p}))dx(p)} \tag{4.14}
$$

Using properties (4.5) and (4.7), this last equation can be changed into (we add terms which don't have poles at branch points, and thus whose resiudes vanish):

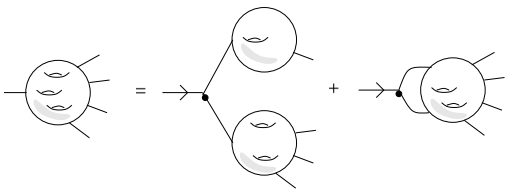
$$
W_{1,0}^{(h)}(q) = -\sum_\alpha \operatorname*{Res}_{p\to\mu_\alpha} \frac{\frac{1}{2}dE_{p,\overline{p}}(q)(W_{2,0}^{(h-1)}(p,\overline{p})+\sum_{m=1}^{h-1} W_{1,0}^{(m)}(p)W_{1,0}^{(h-m)}(\overline{p}))}{(y(p)-y(\overline{p}))dx(p)} \tag{4.15}
$$

This is the case $k=0$ of the following theorem (proved below by recursively applying the loop insertion operator $\partial/\partial V_1$):

Theorem 2.

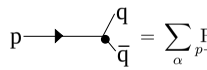
$$
\boxed{\begin{aligned} W_{k+1,0}^{(h)}(q,p_K) = &-\sum_\alpha \operatorname{Res}_{p\to\mu_\alpha} \frac{\frac{1}{2}dE_{p,\overline{p}}(q)}{(y(p)-y(\overline{p}))\,dx(p)}\Big(W_{k+1,0}^{(h-1)}(p,\overline{p},p_K)+ \\ &+\sum_{j,m} W_{j+1,0}^{(m)}(p,p_J)\,W_{k+1-j,0}^{(h-m)}(\overline{p},p_{K-J})\Big)\,, \end{aligned}} \tag{4.16}
$$

which can be diagrammatically represented by



(4.17)

where a sphere with h holes and k legs is the k-point function to order h $W_k^{(h)}$*, and the arrow means the following integration:*



$$
= \sum_\alpha \operatorname*{Res}_{p\to\mu_\alpha} \frac{-\frac{1}{2}dE_{q,\overline{q}}(p)}{(y(q)-y(\overline{q}))\,dx(q)} \tag{4.18}
$$

This equation is a recursion relation, whose initial condition is given by (2.33)*, i.e.*

$$
= B(p,q). \tag{4.19}
$$

Proof. We have already proved theorem (4.16) for $k=0$. Let us now show that the rule (4.18) is compatible with the derivation wrt the potential V_1.

JHEP12(2006)053

One preliminary needed formula is the action of the loop insertion operator on the function $y(p)$. It is well known (see for exemple [19]) that:

$$\frac{\partial y(p)}{\partial V_1(x(r))}\,dx(r) = -\frac{B(p,r)}{dx(p)} \tag{4.20}$$

First, the action of the loop insertion operator on the Bergmann kernel gives [24]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial B(p,q)}{\partial V_1(x(r))}\,dx(r) &= \sum_\alpha \operatorname*{Res}_{\xi\to\mu_\alpha} \frac{dE_{\xi,\overline{\xi}}(q)B(p,\overline{\xi})B(\xi,r)}{\big(y(\overline{\xi})-y(\xi)\big)\,dx(\xi)} \\ &= \sum_\alpha \operatorname*{Res}_{\xi\to\mu_\alpha} \frac{1}{2}\frac{dE_{\xi,\overline{\xi}}(q)\left[B(p,\overline{\xi})B(\xi,r)+B(r,\overline{\xi})B(\xi,p)\right]}{\big(y(\overline{\xi})-y(\xi)\big)\,dx(\xi)}.\end{aligned} \tag{4.21}$$

Note that this corresponds exactly to the conjecture for $k=1$ and $h=0$.

By integrating this expression with respect to p, we obtain the action on the arrowed edges:

$$\frac{\partial dE_{p,\overline{p}}(q)}{\partial V_1(x(r))}\,dx(r) = \sum_\alpha \operatorname*{Res}_{\xi\to\mu_\alpha} \frac{1}{2}\frac{dE_{\xi,\overline{\xi}}(q)\left[dE_{p,\overline{p}}(\overline{\xi})B(\xi,r)+B(r,\overline{\xi})dE_{p,\overline{p}}(\xi)\right]}{\big(y(\overline{\xi})-y(\xi)\big)\,dx(\xi)}, \tag{4.22}$$

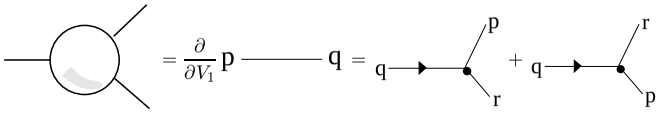
where q, p and r are outside the integration contour.

There is one last quantity to evaluate, corresponding to the vertices:

$$\frac{\partial}{\partial V_1(r)}\left(\frac{1}{y(p)-y(\overline{p})}\right)dx(r) = \frac{B(p,r)-B(\overline{p},r)}{(y(p)-y(\overline{p}))^2 dx(p)} \tag{4.23}$$

Let us now interpret diagrammatically these relations.

Eq. (4.21) represents the action of the loop insertion operator on the non arrowed edges:



(4.24)

In order to interpret (4.22), one has to move the point p inside the integration contour for ξ. For this purpose, let us consider the action of the loop operator on the vertex, $dx(r)\,\frac{\partial}{\partial V_1(x(r))}\sum_\alpha \operatorname{Res}_{q\to\mu_\alpha}\frac{dE_{q,\overline{q}}(p)}{2}\frac{1}{(y(\overline{q})-y(q))dx(q)}$. It gives the contribution

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_\alpha \operatorname{Res}_{q\to\mu_\alpha}\frac{dE_{q,\overline{q}}(p)}{2}\frac{B(\overline{q},r)-B(q,r)}{(y(\overline{q})-y(q))^2 dx(q)^2} \\ &+\textstyle\sum_\alpha \operatorname{Res}_{q\to\mu_\alpha}\operatorname{Res}_{\xi\to\mu_\alpha}\frac{dE_{\xi,\overline{\xi}}(p)}{2(y(\overline{\xi})-y(\xi))dx(\xi)}\frac{dE_{q,\overline{q}}(\overline{\xi})B(\xi,r)+dE_{q,\overline{q}}(\xi)B(\overline{\xi},r)}{2(y(\overline{q})-y(q))dx(q)}\end{aligned} \tag{4.25}$$

where q lies outside the integration contour for ξ. We move the integration contour for ξ in the second term so that q lies inside. One has poles only when $\xi\to q$ and $\xi\to\overline{q}$ which can be written

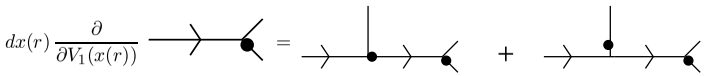
$$\operatorname*{Res}_{q\to\mu_\alpha}\operatorname*{Res}_{\xi\to\mu_\alpha} = \operatorname*{Res}_{\xi\to\mu_\alpha}\operatorname*{Res}_{q\to\mu_\alpha} - \operatorname*{Res}_{q\to\mu_\alpha}\operatorname*{Res}_{\xi\to q} - \operatorname*{Res}_{q\to\mu_\alpha}\operatorname*{Res}_{\xi\to\overline{q}}. \tag{4.26}$$

JHEP12(2006)053

These contributions cancel totally the first term in (4.25). Thus one finally obtains:

$$\begin{aligned}dx(r)\,\frac{\partial}{\partial V_1(x(r))}\sum_\alpha \operatorname*{Res}_{q\to\mu_\alpha}\frac{dE_{q,\overline{q}}(p)}{2}\frac{1}{(y(\overline{q})-y(q))dx(q)} &= \\ = \sum_\alpha \operatorname*{Res}_{\xi\to\mu_\alpha}\operatorname*{Res}_{q\to\mu_\alpha}\frac{dE_{\xi,\overline{\xi}}(p)}{2(y(\overline{\xi})-y(\xi))dx(\xi)}&\frac{dE_{q,\overline{q}}(\overline{\xi})B(\xi,r)+dE_{q,\overline{q}}(\xi)B(\overline{\xi},r)}{2(y(\overline{q})-y(q))dx(q)},\end{aligned} \tag{4.27}$$

which corresponds to adding one leg to the vertex:



(4.28)

This ensures that the theorem is true.

Therefore we have the following diagrammatic rules:

Theorem 3. *The $k+1$ point function to order h, $W_{k+1}^{(h)}$ is the sum over all possible diagrams obtained as follows:*

- *choose one of the variables, say p_1 as the root.*
- *draw all rooted skeleton binary trees (i.e. trees with vertices of valence ≤ 3) with $k-1+2h$ edges. Draw arrows going from root to leaves, that puts a partial ordering on vertices. A vertex V_1 preceeds V_2 if there is an oriented path from V_1 to V_2, and a vertex always preceeds itself.*
- *add, in all possible ways, k non arrowed edges ending at the point $p_2,\dots,p_{k+1}$, so that each vertex has valence ≤ 3.*
- *complete the diagrams in all possible ways with h non arrowed edges joining 2 comparable (with the partial ordering of the tree) vertices, so as to get diagrams with valence 3 only.*
- *At each vertex, mark one leg with a dot, in all possible inequivalent ways. In general there are 2 possibilities at each vertex, except if the 2 branches coming out of the vertex are symetric (either 1 non-oriented edge, or 2 identical subgraphs with no external legs). Each inequivalent diagram is counted exactly once (this is the standard way of computing symmetry factors).*
- *assign to each such diagram a value obtained as follows: each non-arrowed edge is a Bergmann kernel, a residue of the form (4.18) is computed at each vertex, where the $\overline{q}$ variable corresponds to the marked edge. The ordering for computing residues is given by the arrows, from leaves to root.*

Notice that those rules are extremely similar to those first found for the 1-matrix model in [16, 24, 11]. The 1-MM is merely the reduction of those rules to the case of an hyperelliptical surfaces.

JHEP12(2006)053

5. Topological expansion of the free energy

In order to find the topological expansion of the free energy, one has to "integrate wrt the potential V_1" the expansion of the one point function. First let us define the H_x and H_y operators corresponding respectively to the "inverse" of the loop insertion operator $\frac{\partial}{\partial V_1}$ and $\frac{\partial}{\partial V_2}$.

5.1 The H operators

We define the operators H_x and H_y such that, for any meromorphic differential form ϕ, one has

$$H_x.\phi := \operatorname*{Res}_{\infty_x} V_1(x)\,\phi - \operatorname*{Res}_{\infty_y} (V_2(y) - xy)\,\phi + T\int_{\infty_x}^{\infty_y} \phi + \sum_i \epsilon_i \oint_{\mathcal{B}_i} \phi \tag{5.1}$$

and

$$H_y.\phi := \operatorname*{Res}_{\infty_y} V_2(y)\,\phi - \operatorname*{Res}_{\infty_x} (V_1(x) - xy)\,\phi + T\int_{\infty_y}^{\infty_x} \phi - \sum_i \epsilon_i \oint_{\mathcal{B}_i} \phi. \tag{5.2}$$

Note that

$$(H_x + H_y).\phi = \operatorname*{Res}_{\infty_x,\infty_y} xy.\phi \tag{5.3}$$

Note that if $\phi = df$ is an exact differential, we have:

$$H_x.df = -\operatorname*{Res}_{\infty_x,\infty_y} f\,ydx \qquad , \qquad H_y.df = -\operatorname*{Res}_{\infty_x,\infty_y} f\,xdy. \tag{5.4}$$

We now compute the action of H_x on the two-point function on the Bergmann kernel $B(p,q)$ (in this computation H_x acts on the variable p), that is

$$\begin{aligned} H_x.B(p,q) =& \operatorname*{Res}_{\infty_x} V_1(x(p))\,B(p,q) - \operatorname*{Res}_{\infty_y} (V_2(y(p)) - xy)\,B(p,q) \\ &+T\int_{\infty_x}^{\infty_y} B(p,q) + \sum_i \epsilon_i \oint_{\mathcal{B}_i} B(p,q). \end{aligned} \tag{5.5}$$

We integrate by parts the residues at infinities. Provided that $B(p,q) = d_p dS_{p,o}(q)$, that $V_1'(x(p)) - y(p) \sim \frac{T}{x(p)}$ as $p \to \infty_x$ and that $V_2'(y(p)) - x(p) \sim \frac{T}{y(p)}$ as $p \to \infty_y$, we can write

$$\begin{aligned} H_x.B(p,q) =& -\operatorname*{Res}_{\infty_x} \frac{T}{x(p)} dx(p)\,dS_{p,o}(q) - \operatorname*{Res}_{\infty_x,\infty_y} y(p)dx(p)\,dS_{p,o}(q) \\ &+ \operatorname*{Res}_{\infty_y} \frac{T}{y(p)} dy(p)\,dS_{p,o}(q) + T dE_{\infty_y,\infty_x}(q) + \sum_i \epsilon_i \oint_{\mathcal{B}_i} B(p,q). \end{aligned} \tag{5.6}$$

JHEP12(2006)053

Finally, the Riemann bilinear identities [25, 26] associated to the fixed filling fractions conditions give

$$\begin{aligned} H_X.B(p,q) =& T dS_{\infty_x,o}(q) - \operatorname*{Res}_{\infty_x} y(p)dx(p)\,dS_{p,o}(q) - \operatorname*{Res}_{\infty_y} y(p)dx(p)\,dS_{p,o}(q) \\ &-T\,dS_{\infty_y,o}(q) + T dS_{\infty_y,\infty_x}(q) + \sum_i \epsilon_i \oint_{\mathcal{B}_i} B(p,q) \\ =& \operatorname*{Res}_q y(p)dx\,dS_{p,o}(q) - \frac{1}{2i\pi}\sum_i \oint_{\mathcal{A}_i} y(p)dx(p) \oint_{\mathcal{B}_i} B(p,q) \\ &+\frac{1}{2i\pi}\sum_i \oint_{\mathcal{B}_i} y(p)dx(p) \oint_{\mathcal{A}_i} B(p,q) + \sum_i \epsilon_i \oint_{\mathcal{B}_i} B(p,q) \\ =& -y(q)dx(q). \end{aligned} \tag{5.7}$$

That is:

$$H_x.B(.,q) = -y(q)dx(q). \tag{5.8}$$

Remark 5. The leading order of the free energy is already known [4]:

$$\begin{aligned} 2\mathcal{F}^{(0)} =& \operatorname*{Res}_{\infty_x} (V_1(x) + V_2(y) - xy)\,ydx + T\oint_{\infty_x}^{\infty_y} ydx + \sum_i \epsilon_i \oint_{\mathcal{B}_i} ydx \\ =& \operatorname*{Res}_{\infty_y} (V_1(x) + V_2(y) - xy)\,xdy + T\oint_{\infty_y}^{\infty_x} xdy - \sum_i \epsilon_i \oint_{\mathcal{B}_i} xdy. \end{aligned} \tag{5.9}$$

In other terms, one has

$$2\mathcal{F}^{(0)} = H_x(ydx) \tag{5.10}$$

5.2 Finding the free energy

Theorem 4. *For any h we have:*

$$(1-2h)W_{1,0}^{(h)} = H_x.W_{2,0}^{(h)} \tag{5.11}$$

Notice that this is already proven for $h = 0$.

Proof. Let us study how H_x acts on the diagrams composing $W_{2,0}^{(h)}$. By symmetry, one can consider that H_x acts on the leaf of the diagram.[2] Two different configurations can occur.

If the leaf is linked to an innermost vertex, one has to compute

$$\begin{aligned} \sum_\alpha \operatorname*{Res}_{r\to\mu_\alpha} \frac{dE_{r,\overline{r}}(q) H_x.B(r,.)B(r,p)f(p)}{2((y(\overline{r}) - y(r))dx(r)} &= -\sum_\alpha \operatorname*{Res}_{r\to\mu_\alpha} \frac{dE_{r,\overline{r}}(q)y(r)B(r,p)f(p)}{2((y(\overline{r}) - y(r))} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Otherwise, H_x acts on $B(r,.)$ where there is an arrow going out of the vertex corresponding to the integration of r:

$$A = \sum_{\alpha'} \operatorname*{Res}_{r\to\mu_{\alpha'}} \sum_\alpha \operatorname*{Res}_{p\to\mu_\alpha} \frac{dE_{r,\overline{r}}(q)dE_{p,\overline{p}}(r)y(\overline{r})f(p)}{2(y(r) - y(\overline{r}))(y(p) - y(\overline{p}))dx(r)dx(p)}. \tag{5.13}$$

[2] The diagrams composing $W_{2,0}^{(h)}$ have two external legs, one root with an arrow and one leaf which is a Bergmann kernel.

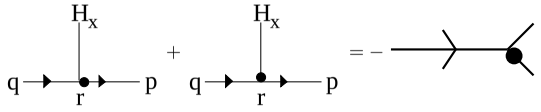
JHEP12(2006)053

By moving the integration contours so that r lies inside the contour of p, one keeps only the contributions when $r \to p$ and $r \to \overline{p}$, that is

$$\begin{aligned} A &= \sum_\alpha \operatorname*{Res}_{p\to\mu_\alpha} \operatorname*{Res}_{r\to p} \frac{dE_{r,\overline{r}}(q)dE_{p,\overline{p}}(r)y(\overline{r})f(p)}{2(y(r)-y(\overline{r}))(y(p)-y(\overline{p}))dx(r)dx(p)} \\ &\quad + \sum_\alpha \operatorname*{Res}_{p\to\mu_\alpha} \operatorname*{Res}_{r\to\overline{p}} \frac{dE_{r,\overline{r}}(q)dE_{p,\overline{p}}(r)y(\overline{r})f(p)}{2(y(r)-y(\overline{r}))(y(p)-y(\overline{p}))dx(r)dx(p)} \\ &= \sum_\alpha \operatorname*{Res}_{p\to\mu_\alpha} \frac{dE_{p,\overline{p}}(q)f(p)}{2(y(p)-y(\overline{p}))dx(p)}. \end{aligned} \tag{5.14}$$

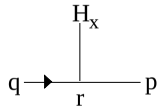
The same diagram with H_x acting on $B(\overline{r},.)$ gives the same contribution and cancels the $\frac{1}{2}$ factor.

Diagrammatically, this reads



(5.15)

and



$= 0.$ (5.16)

Thus, because there are $2h-1$ arrowed edges composing any graph contributing to $W_1^{(h)}$, one has:

$$\begin{aligned} H_{x_q}.W_{2,0}^{(h)}(p,q) &= H_{x_q}.\frac{\partial}{\partial V_1(q)}W_{1,0}^{(h)}(p) \\ &= -(2h-1)W_{1,0}^{(h)}(p). \end{aligned} \tag{5.17}$$

Beside, we have the following property:

Lemma 1. *For any $h \neq 1$:*

$$H_x.W_{1,0}^{(h)}(q) - H_y.W_{0,1}^{(h)}(q) = 0 \tag{5.18}$$

whose rather technical proof is found in appendix B.

Corollary 1. *One easily derive from this theorem that for any $h \neq 1$, the free energy can be written as*

$$\boxed{(2-2h)\mathcal{F}^{(h)} = -H_x W_{1,0}^{(h)} = -H_y W_{0,1}^{(h)},} \tag{5.19}$$

up to an integration constant which does not depend on V_1 or V_2.

JHEP12(2006)053

5.3 Dependence on other parameters

Now, with the explicit dependence of the free energy on the potentials V_1 and V_2 in hands, one is interested in the dependence in the other momenta, i.e. the filling fractions ϵ_i and the temperature T.

The definitions of the filling fractions implies that

$$\frac{\partial y(p)dx(p)}{\partial \epsilon_i} = 2i\pi du_i = \oint_{\mathcal{B}_i} B(p,q), \tag{5.20}$$

where the du_i's denote the normalized holomorphic differential on cycles $\mathcal{A}_i$. This allows to check that the derivation wrt the filling fractions is compatible with our diagrammatic rules through

$$\frac{\partial B(p,q)}{\partial \epsilon_i} = \oint_{\mathcal{B}_i} \frac{\partial}{\partial V_1(x(p))} B(q,r)dx(q), \tag{5.21}$$

which generalizes to

$$\frac{\partial W_{1,0}^{(h)}(p)}{\partial \epsilon_i} = \oint_{\mathcal{B}_i} W_{2,0}^{(h)}(p,q). \tag{5.22}$$

In the same fashion, one derives

$$\frac{\partial W_{1,0}^{(h)}(p)}{\partial T} = \int_{\infty_x}^{\infty_y} W_{2,0}^{(h)}(p,q). \tag{5.23}$$

5.4 Scaling equation

For the sake of completeness and in order to interpret the formula found for the free energy, one has to consider a slightly more general model, in which the coupling constant between the two matrices is not fixed, i.e. we consider the partition function

$$Z := \int_{H_N \times H_N} dM_1 dM_2\, e^{-\frac{1}{\hbar}\operatorname{Tr}(V_1(M_1)+V_2(M_2)-\kappa M_1 M_2)} = e^{-\mathcal{F}}. \tag{5.24}$$

where κ is an arbitrary non vanishing coupling constant.

One can easily obtain this model by rescaling our momenta:

$$t_k \to \frac{t_k}{\kappa} \ , \ \tilde{t}_k \to \frac{\tilde{t}_k}{\kappa} \text{ and } T \to \frac{T}{\kappa}. \tag{5.25}$$

After this redefinition of the parameters, all the results presented in this paper remain valid[3] and one obtains

$$(2-2h)\mathcal{F}^{(h)} = -H_x W_{1,0}^{(h)} + f(T, \epsilon_i, \kappa), \tag{5.26}$$

with

$$H_x.\phi := \operatorname*{Res}_{\infty_x} V_1(x)\,\phi - \operatorname*{Res}_{\infty_y} (V_2(y) - \kappa xy)\,\phi + T\int_{\infty_x}^{\infty_y} \phi + \sum_i \epsilon_i \oint_{\mathcal{B}_i} \phi. \tag{5.27}$$

[3]Note that the diagrammatic rules remain the same, only the Riemann surface is affected by this rescaling.

JHEP12(2006)053

Now, define

$$\forall h \neq 1 \;\; \tilde{F}^{(h)} = -\frac{H_x W_{1,0}^{(h)}(p)}{2-2h}. \tag{5.28}$$

Eq. (5.22) and (5.23) give

$$\begin{aligned}(2-2h)\frac{\partial \tilde{F}^{(h)}}{\partial \epsilon_i} &= -\frac{\partial H_x W_{1,0}^{(h)}(p)}{\partial \epsilon_i} \\ &= -\left(\frac{\partial H_x}{\partial \epsilon_i}\right) W_{1,0}^{(h)}(p) - H_x \frac{\partial W_{1,0}^{(h)}(p)}{\partial \epsilon_i} \\ &= -(2-2h)\oint_{\mathcal{B}_i} W_{1,0}^{(h)}(p).\end{aligned} \tag{5.29}$$

That is to say

$$\frac{\partial \tilde{F}^{(h)}}{\partial \epsilon_i} = -\oint_{\mathcal{B}_i} W_{1,0}^{(h)}(p) \quad \text{and} \quad \frac{\partial \tilde{F}^{(h)}}{\partial T} = -\int_{\infty_x}^{\infty_y} W_{1,0}^{(h)}(p). \tag{5.30}$$

On the other hand, by definition

$$\sum_{k=1}^{d_1} t_k \frac{\partial \tilde{F}^{(h)}}{\partial t_k} = \operatorname*{Res}_{\infty_x} V_1(x(p)) \frac{\partial \tilde{F}^{(h)}}{\partial V_1(x(p))}. \tag{5.31}$$

Which leads to

$$\sum_{k=1}^{d_1} t_k \frac{\partial \tilde{F}^{(h)}}{\partial t_k} = -\operatorname*{Res}_{\infty_x} V_1(x(p)) W_{1,0}^{(h)}(p). \tag{5.32}$$

One can also derive

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{d_2} \tilde{t}_k \frac{\partial \tilde{F}^{(h)}}{\partial \tilde{t}_k} &= -\operatorname*{Res}_{\infty_y} \frac{V_2(y(p))}{(2-2h)} \frac{\partial H_x . W_{1,0}^{(h)}(.)}{\partial V_2(y(p))} \\ &= -\operatorname*{Res}_{\infty_y} \frac{V_2(y(p))}{(2-2h)} \frac{\partial (H_x + H_y) . W_{1,0}^{(h)}(.)}{\partial V_2(y(p))} \\ &\quad + \operatorname*{Res}_{\infty_y} \frac{V_2(y(p))}{(2-2h)} \frac{\partial H_y . W_{1,0}^{(h)}(.)}{\partial V_2(y(p))} \\ &= \operatorname*{Res}_{\infty_y} V_2(y(p)) W_{1,0}^{(h)}(p).\end{aligned} \tag{5.33}$$

The last identity uses the property (5.3) of the H operators.

There is one additive momentum that one has to consider now, which gives

$$\frac{\partial \tilde{F}^{(h)}}{\partial \kappa} = -\operatorname*{Res}_{\infty_y} x(p) y(p) W_{0,1}(p) \tag{5.34}$$

Thus, putting everything together, for any set of filling fractions ϵ_i, any coupling constant κ and any temperature T, $\tilde{F}^{(h)}$ fulfills the homogenous equation

$$\boxed{(2-2h)\tilde{F}^{(h)} = \sum_{k=1}^{d_1+1} t_k \frac{\partial \tilde{F}^{(h)}}{\partial t_k} + \sum_{k=1}^{d_2+1} \tilde{t}_k \frac{\partial \tilde{F}^{(h)}}{\partial \tilde{t}_k} + T\frac{\partial \tilde{F}^{(h)}}{\partial T} + \kappa \frac{\partial \tilde{F}^{(h)}}{\partial \kappa} + \sum_i \epsilon_i \frac{\partial \tilde{F}^{(h)}}{\partial \epsilon_i}.} \tag{5.35}$$

JHEP12(2006)053

Hence, $\tilde{F}^{(h)}$ is our final answer for the free energy:

$$\tilde{F}^{(h)} = \mathcal{F}^{(h)} = \frac{1}{2h-2} H_x . W_{(1,0)}^{(h)} = \frac{1}{2h-2} H_y . W_{(0,1)}^{(h)}. \tag{5.36}$$

Remark 6. One can note that (5.35) is nothing but saying that rescaling the expansion parameter $\hbar$ is equivalent to rescaling all the other momenta in the same way:

$$0 = \hbar \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \hbar} + \sum_{k=1}^{d_1+1} t_k \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t_k} + \sum_{k=1}^{d_2+1} \tilde{t}_k \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{t}_k} + T\frac{\partial \tilde{F}}{\partial T} + \kappa \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \kappa} + \sum_i \epsilon_i \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \epsilon_i}. \tag{5.37}$$

5.5 Explicit computation of the free energy: diagrammatic rules

The equation (5.36) allows to compute any term in the expansion of the free energy, but the first correction to the leading order, using diagrammatic rules. For this purpose, one just introduce a new bi-valent vertex corresponding to the action of the H_x operator on the root of the diagrams composing the one point functions. One represent it,

$$\mathrm{q} \longrightarrow\!\!\circ\!\!\bullet\!\!\longrightarrow \overline{\mathrm{q}} \;= \sum_{\alpha} \operatorname*{Res}_{q \to \mu_\alpha} \frac{-\frac{1}{2}\int_{\overline{q}}^{q} y(\xi) dx(\xi)}{(y(q) - y(\overline{q})) dx(q)} \tag{5.38}$$

Using this new vertex, one obtains the h'th order correction to the free energy by considering the sum of the diagrams contributing to $W_{1,0}^{(h)}$ where the ingoing arrow is replaced by this new bi-valent vertex.

Remark 7. We must remind that this technic does not give the first order correction. Nevertheless this particular correction has already been computed in the literature [20].

6. Conclusion

In this paper, we have obtained a closed expression for the complete expansion of the free energy of the formal hermitian two-matrix model as residues on the spectral curve giving an answer to one of the problems left undone in [24]. On the way, we also refined the diagrammatic rules used to compute non-mixed correlation functions. We particularly exhibit that these functions actually only depend on what happens near the branch points. The link with the diagrammatic technique of [16] for the 1MM looks also more evident.

Nevertheless, there still remain many different problems one should address from this starting point. In this paper, we begin the computation of correlation functions mixing traces in M_1 and traces in M_2, but the general case does not seem as simple for the moment. In the same way, using the result of [17], one would like to compute the expansion of mixed traces.

This natural generalization of diagrammatic techniques from the 1MM to the 2MM also points out that the study of the chain of matrices [21] would give a more general knowledge of the link between algebraic geometry and matrix models.

Let us also mention that we have considered here only polynomial potentials, but it is clear that the whole method should extend easily to the more general class of semi-classical

JHEP12(2006)053

potentials [6, 7], whose loop equations are very similar [23]. The 1-MM with hard edges was already treated in [12].

Another extension of this problem is to compute the $1/N$ expansion of random matrix models for non-hermitian matrices. This problem is already partialy addressed in [36 –38], but a diagrammatic technique has not been found yet.

Finally, as we already mentioned it, solving the formal model is different from solving the physical problem corresponding to a convergent integral and constrained filling fractions lowering the energy. This problem, which is expected to be similar to [8] is not addressed for the moment and should give a natural complement to this work.

Acknowledgments

We are grateful to A. ZAbrodin for discussions. L. Chekhov thanks RFBR grant No 05-01-00498, grant for Support Scientific Schools 2052.2003.1, the program Mathematical Methods of Nonlinear Dynamics. All the authors thank the Enigma european network MRT-CT-2004-5652, and the ANR project Géométrie et intégrabilité en physique mathématique ANR-05-BLAN-0029-01.

A. Computation of $W_{k,1}^{(h)}$.

In this section, we compute a new set of correlation functions including one trace in M_2. In other words, we compute all the $W_{k,1}^{(h)}$'s. More precisely, we explain how the diagrammatic rules are modified when one changes one trace

$$\mathrm{Tr}\,\frac{1}{x(p)-M_1} \;\to\; \mathrm{Tr}\,\frac{1}{y(p)-M_2}. \tag{A.1}$$

We do not give explicit formulas for all the $W_{k,l}^{(h)}$ with $l>1$. This problem will be addressed in another work.

A.1 Examples

In order to give some idea of the result, let us review some already known functions [19, 5, 30].

A.1.1 2-point functions

$$W_{2,0}^{(0)}(p,q) = W_{0,2}^{(0)}(p,q) = -W_{1,1}^{(0)}(p,q) = B(p,q) \tag{A.2}$$

A.1.2 3-point functions

$$W_{3,0}^{(0)}(p_1,p_2,p_3) = \sum_{\text{alpha}} \operatorname*{Res}_{q\to\mu_\alpha} \frac{B(p_1,q)B(p_2,q)B(p_3,q)}{dx(q)dy(q)} \tag{A.3}$$

$$W_{2,1}^{(0)}(p_1,p_2,p_3) = -\sum_{\alpha} \operatorname*{Res}_{q\to\mu_\alpha} \frac{B(p_1,q)B(p_2,q)B(p_3,q)}{dx(q)dy(q)} - \operatorname*{Res}_{q\to p_3} \frac{B(p_1,q)B(p_2,q)B(p_3,q)}{dx(q)dy(q)} \tag{A.4}$$

JHEP12(2006)053

Proof.

$$\begin{aligned} W_{2,1}(p_1,p_2,q) &= \frac{\partial}{\partial V_1(x(p_2))}(w_{1,1}(p_1,q))dy(q)dx(p_1)dx(p_2) \\ &= -\frac{\partial}{\partial V_1(x(p_2))}(w_{2,0}(p_1,q)\frac{dx(q)}{dy(q)})dy(q)dx(p_1)dx(p_2) \\ &= -W_{3,0}(p_1,p_2,q) + \frac{W_{2,0}(p_1,q)}{dx(q)}d_q\left(\frac{W_{1,1}(p_2,q)}{dy(q)}\right) \\ &\quad + \frac{W_{1,1}(p_2,q)}{dy(q)}d_q\left(\frac{W_{2,0}(p_1,q)}{dx(q)}\right) \\ &= -W_{3,0}(p_1,p_2,q) + d_q\left(\frac{W_{2,0}(p_1,q)W_{1,1}(p_2,q)}{dx(q)dy(q)}\right) \end{aligned} \tag{A.5}$$

A.2 General case

Theorem 5. *For any $|K|+h>1$*

$$W_{|K|,1}^{(h)}(p_1,\dots,p_k,q) + W_{|K|+1,0}^{(h)}(p_1,\dots,p_k,q) = d_q f^{(h)}(p_1,\dots,p_k,q) \tag{A.6}$$

where $f^{(h)}(p_1,\dots,p_k,q)$ is obtained from the diagrams composing $W_{|K|,0}^{(h)}(p_1,\dots,p_k)$ by cutting any of its propagator as follows:

$$\mathrm{p}_1 \text{———} \mathrm{p}_2 \;\to\; \frac{1}{dx(q)dy(q)}\, \mathrm{p}_1 \text{———} \mathrm{q} \quad \mathrm{q} \text{———} \mathrm{p}_2 \tag{A.7}$$

and

$$\mathrm{p} \longrightarrow\!\!\!

Thus the derivative wrt V_2 of the first vertex, $\frac{\partial}{\partial V_2(y(s))}\sum_\alpha \operatorname{Res}_{p\to\mu_\alpha}\frac{dE_{p,\overline{p}}(q)}{2(y(\overline{p})-y(p))dx(p)}$ gives:

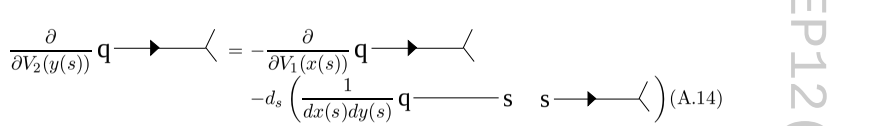
$$\begin{array}{l} -\sum_\alpha\sum_\beta \operatorname{Res}_{p\to\mu_\alpha}\operatorname{Res}_{a\to\mu_\beta}\frac{dE_{a,\overline{a}}(q)\left[dE_{p,\overline{p}}(\overline{a})B(a,s)+B(s,\overline{a})dE_{p,\overline{p}}(a)\right]}{4(y(\overline{a})-y(a))dx(a)(y(\overline{p})-y(p))dx(p)} \\ -\sum_\alpha \operatorname{Res}_{p\to\mu_\alpha}\operatorname{Res}_{a\to s}\operatorname{Res}_{b\to a}\frac{dE_{a,b}(q)dE_{p,\overline{p}}(b)B(a,s)}{2(y(b)-y(a))(x(b)-x(a))(y(\overline{p})-y(p))dx(p)}, \\ +\sum_\alpha \operatorname{Res}_{p\to\mu_\alpha}\frac{dE_{p,\overline{p}}(q)}{2}\frac{\partial}{\partial V_2(s)}\frac{1}{(y(\overline{p})-y(p))dx(p)} \end{array} \tag{A.12}$$

where p lies outside the integration contour for a. Note that all the derivations have been performed by keeping the x's fixed.

Moving the integration contours so that p lies inside gives a contribution that cancels the last terms and one obtains

$$\begin{array}{rl} \frac{\partial}{\partial V_2(y(s))}\sum_\alpha \operatorname{Res}_{p\to\mu_\alpha}\frac{dE_{p,\overline{p}}(q)}{2(y(\overline{p})-y(p))dx(p)} = & -\frac{\partial}{\partial V_1(x(s))}\sum_\alpha \operatorname{Res}_{p\to\mu_\alpha}\frac{dE_{p,\overline{p}}(q)}{2(y(\overline{p})-y(p))dx(p)} \\ & -d_s\left(\frac{B(s,q)}{dx(s)dy(s)}\sum_\alpha \operatorname{Res}_{p\to\mu_\alpha}\frac{dE_{p,\overline{p}}(s)}{2(y(\overline{p})-y(p))dx(p)}\right). \end{array} \tag{A.13}$$

This graphically reads:



(A.14)

These two relations prove straightforwardly the theorem.

Remark 8. For $|K|=1$, one can go further in the description of $W_{1,1}^{(h)}(p_1,p_2)+W_{2,0}^{(h)}(p_1,p_2)$. Indeed, the graphs obtained by cutting the propagators of $W_{1,0}^{(h)}(p_1)$ have no pole when $p_1\to p_2$ except when one cuts the root of the graph, in which case it gives the contribution $\frac{B(p_1,p_2)}{dx(p_2)dy(p_2)}W_{1,0}^{(h)}(p_2)$, that is to say:

$$W_{1,1}^{(h)}(p_1,p_2)+W_{2,0}^{(h)}(p_1,p_2) = -d_{p_2}\left\{\frac{B(p_1,p_2)}{dx(p_2)dy(p_2)}W_{1,0}^{(h)}(p_2)+f(p_1,p_2)\right\}, \tag{A.15}$$

where $f(p_1,p_2)$ has no pole as $p_1\to p_2$.

B. Symmetry of the free energy under the exchange of x and y

For $h\neq 1$

$$H_{x_q}.W_{1,0}^{(h)}(q)-H_{y_q}.W_{0,1}^{(h)}(q) = \left(H_{x_{p_1}}H_{y_{p_2}}-H_{y_{p_2}}H_{x_{p_1}}\right)W_{1,1}^{(h)}(p_1,p_2) \tag{B.1}$$

The only terms that contributes in the exchange of H_x and H_y come from the integration contours around ∞_x and ∞_y, i.e.

$$\begin{array}{rl} \mathcal{A} = & \left(H_{x_{p_1}}H_{y_{p_2}}-H_{y_{p_2}}H_{x_{p_1}}\right)W_{1,1}^{(h)}(p_1,p_2) \\ = & -\operatorname*{Res}_{p_1\to\infty_x}\operatorname*{Res}_{p_2\to p_1}V_1(x(p_1))(V_1(x(p_2))-x(p_2)y(p_2))W_{1,1}^{(h)}(p_1,p_2)- \\ & -\operatorname*{Res}_{p_1\to\infty_y}\operatorname*{Res}_{p_2\to p_1}V_2(y(p_2))(V_2(y(p_1))-x(p_1)y(p_1))W_{1,1}^{(h)}(p_1,p_2). \end{array} \tag{B.2}$$

JHEP12(2006)053

On the other hand, one knows from remark (A.15), that

$$W_{1,1}^{(h)}(p_1,p_2) = -W_{2,0}^{(h)}(p_1,p_2)-d_{p_2}\left\{\frac{B(p_1,p_2)}{dx(p_2)dy(p_2)}W_{1,0}^{(h)}(p_2)+f(p_1,p_2)\right\}. \tag{B.3}$$

where $f(p_1,p_2)$ has no pole when $p_2\to p_1$. Note that $W_{2,0}^{(h)}(p_1,p_2)$ do not have pole when $p_2\to p_1$ either.

Thus, the only non vanishing terms in (B.2) come from $d_{p_2}\left\{\frac{B(p_1,p_2)}{dx(p_2)dy(p_2)}W_{1,0}^{(h)}(p_2)\right\}$. This reads

$$\begin{array}{l} \operatorname{Res}_{p_1\to\infty_x}\operatorname{Res}_{p_2\to p_1}V_1(x(p_1))(V_1(x(p_2))-x(p_2)y(p_2))d_{p_2}\left\{\frac{B(p_1,p_2)}{dx(p_2)dy(p_2)}W_{1,0}^{(h)}(p_2)\right\} \\ +\operatorname{Res}_{p_1\to\infty_y}\operatorname{Res}_{p_2\to p_1}V_2(y(p_2))(V_2(y(p_1))-x(p_1)y(p_1))d_{p_2}\left\{\frac{B(p_1,p_2)}{dx(p_2)dy(p_2)}W_{1,0}^{(h)}(p_2)\right\}. \end{array} \tag{B.4}$$

We now evaluate these residues by part and obtain that

$$\begin{array}{rl} \mathcal{A} = & -\operatorname*{Res}_{p\to\infty_x}V_1(x(p))d_p\left[\frac{(V_1'(x(p))-y(p))dx(p)-x(p)dy(p)}{dx(p)dy(p)}W_{1,0}^{(h)}(p)\right] \\ & -\operatorname*{Res}_{p\to\infty_y}(V_2(y(p))-x(p)y(p))d_p\left[\frac{V_2'(y(p))W_{1,0}^{(h)}(p)}{dx(p)}\right]. \end{array} \tag{B.5}$$

Another integration by part can be written

$$\begin{array}{rl} \mathcal{A} = & +\operatorname*{Res}_{p\to\infty_x}V_1'(x(p))\frac{(V_1'(x(p))-y(p))dx(p)-x(p)dy(p)}{dy(p)}W_{1,0}^{(h)}(p) \\ & +\operatorname*{Res}_{p\to\infty_y}(V_2'(y(p))dy(p)-x(p)dy(p)-y(p)dx(p))\frac{V_2'(y(p))W_{1,0}^{(h)}(p)}{dx(p)}. \end{array} \tag{B.6}$$

Knowing that $V_1'(x(p))-y(p)\sim\frac{T}{x(p)}$ when $p\to\infty_x$ and $V_2'(y(p))-x(p)\sim\frac{T}{y(p)}$ when $p\to\infty_y$ and that the other factors do not have poles at infinities, one can finally write that

$$\left(H_{x_{p_1}}H_{y_{p_2}}-H_{y_{p_2}}H_{x_{p_1}}\right)W_{1,1}^{(h)}(p_1,p_2) = -\operatorname*{Res}_{q\to\infty_x,\infty_y}x(q)y(q)W_{1,0}^{(h)}(q). \tag{B.7}$$

Let us now show that the r.h.s. vanishes by looking precisely at the form of $W_{1,0}^{(h)}(q)$. Because it comes from a vertex, (4.16), with moving the integration contour, implies that

$$\begin{array}{rl} 2\operatorname*{Res}_{\infty_x,\infty_y}x(q)y(q)W_{1,0}^{(h)}(q) = & -2\sum_\alpha\operatorname*{Res}_{q\to\mu_\alpha}x(q)y(q)W_{1,0}^{(h)}(q) \\ = & -\sum_\alpha\sum_\beta\operatorname*{Res}_{q\to\mu_\alpha}\operatorname*{Res}_{p\to\mu_\beta}\frac{x(q)y(q)dE_{p,\overline{p}}(q)}{(y(p)-y(\overline{p}))dx(p)}\times \\ & \times\left[W_{2,0}^{(h-1)}(p,p)+\sum_{m=1}^{h-1}W_{1,0}^{(m)}(p)W_{1,0}^{(h-m)}(p)\right]. \end{array} \tag{B.8}$$

JHEP12(2006)053

Now we move one more time the integration contour and clearly segregate the case when p and q are near the same branch point.

$$
\begin{aligned}
2 \operatorname*{Res}_{\infty_x,\infty_y} x(q)y(q)W_{1,0}^{(h)}(q) = &- \sum_{\alpha \neq beta} \operatorname*{Res}_{p\to\mu_\alpha} \operatorname*{Res}_{q\to\mu_\beta} \frac{x(q)y(q)dE_{p,\overline{p}}(q)}{(y(p)-y(\overline{p}))dx(p)} \\
&\times \left[W_{2,0}^{(h-1)}(p,p) + \sum_{m=1}^{h-1} W_{1,0}^{(m)}(p) W_{1,0}^{(h-m)}(p) \right] - \\
&- \sum_{\alpha} \left[\operatorname*{Res}_{p\to\mu_\alpha} \operatorname*{Res}_{q\to\mu_\alpha} - \operatorname*{Res}_{q\to\mu_\alpha} \operatorname*{Res}_{p\to q,\overline{q}} \right] \frac{x(q)y(q)dE_{p,\overline{p}}(q)}{(y(p)-y(\overline{p}))dx(p)} \\
&\times \left[W_{2,0}^{(h-1)}(p,p) + \sum_{m=1}^{h-1} W_{1,0}^{(m)}(p) W_{1,0}^{(h-m)}(p) \right]. \qquad \text{(B.9)}
\end{aligned}
$$

One can see that the integrand has no pole as q approaches a branch point. Thus one keeps only

$$
\sum_{\alpha} \operatorname*{Res}_{q\to\mu_\alpha} \operatorname*{Res}_{p\to q,\overline{q}} \frac{x(q)y(q)dE_{p,\overline{p}}(q)}{(y(p)-y(\overline{p}))dx(p)} \left[W_{2,0}^{(h-1)}(p,p) + \sum_{m=1}^{h-1} W_{1,0}^{(m)}(p) W_{1,0}^{(h-m)}(p) \right]. \qquad \text{(B.10)}
$$

We finally perform the integration and get

$$
\begin{aligned}
2 \operatorname*{Res}_{\infty_x,\infty_y} x(q)y(q)W_{1,0}^{(h)}(q) &= \sum_{\alpha} \operatorname*{Res}_{q\to\mu_\alpha} \frac{x(q)}{dx(q)} \left[W_{2,0}^{(h-1)}(p,p) + \sum_{m=1}^{h-1} W_{1,0}^{(m)}(p) W_{1,0}^{(h-m)}(p) \right] \\
&= 0. \qquad \text{(B.11)}
\end{aligned}
$$

QED.

References

[1] G. Akemann, *Higher genus correlators for the hermitian matrix model with multiple cuts*, *Nucl. Phys.* **B 482** (1996) 403 [hep-th/9606004].

[2] J. Ambjørn and G. Akemann, *New universal spectral correlators*, *J. Phys.* **A29** (1996) L555 [cond-mat/9606129].

[3] J. Ambjørn, L. Chekhov, C.F. Kristjansen and Y. Makeenko, *Matrix model calculations beyond the spherical limit*, *Nucl. Phys.* **B 404** (1993) 127 *Erratum ibid.* **B 449** (1995) 681 [hep-th/9302014].

[4] M. Bertola, *Free energy of the two-matrix model/dtoda tau-function*, *Nucl. Phys.* **B 669** (2003) 435 [hep-th/0306184].

[5] M. Bertola, *Second and third order observables of the two-matrix model*, *JHEP* **11** (2003) 062 [hep-th/0309192].

[6] M. Bertola, *Bilinear semi-classical moment functionals and their integral representation*, Math/0205160

[7] M. Bertola, *Two-matrix model with semiclassical potentials and extended whitham hierarchy*, *J. Phys.* **A 39** (2006) 8823 [hep-th/0511295].

JHEP12(2006)053

[8] G. Bonnet, F. David and B. Eynard, *Breakdown of universality in multi-cut matrix models*, *J. Phys.* **A 33** (2000) 6739 [cond-mat/0003324].

[9] E. Brezin, C. Itzykson, G. Parisi and J.B. Zuber, *Planar diagrams*, *Commun. Math. Phys.* **59** (1978) 35.

[10] L. Chekhov, *Genus one correlation to multi-cut matrix model solutions*, *Theor. Math. Phys.* **141** (2004) 1640 [hep-th/0401089].

[11] L. Chekhov and B. Eynard, *Hermitean matrix model free energy: Feynman graph technique for all genera*, *JHEP* **03** (2006) 014 [hep-th/0504116].

[12] L. Chekhov, *Matrix models with hard walls: geometry and solutions*, *J. Phys.* **A 39** (2006) 8857 [hep-th/0602013], contribution to special volume of *J. Phys. A* on matrix models,.

[13] F. David, *Loop equations and nonperturbative effects in two-dimensional quantum gravity*, *Mod. Phys. Lett.* **A 5** (1990) 1019.

[14] P. Di Francesco, P.H. Ginsparg and J. Zinn-Justin, *2D gravity and random matrices*, *Phys. Rept.* **254** (1995) 1 [hep-th/9306153].

[15] R. Dijkgraaf and C. Vafa, *Matrix models, topological strings and supersymmetric gauge theories*, *Nucl. Phys.* **B 644** (2002) 3 [hep-th/0206255]; *On geometry and matrix models*, *Nucl. Phys.* **B 644** (2002) 21 [hep-th/0207106]; *A perturbative window into non-perturbative physics*, hep-th/0208048.

[16] B. Eynard, *Topological expansion for the 1-hermitian matrix model correlation functions*, *JHEP* **11** (2004) 031 [hep-th/0407261].

[17] B. Eynard and N. Orantin, *Mixed correlation functions in the 2-matrix model and the Bethe ansatz*, *JHEP* **08** (2005) 028 [hep-th/0504029].

[18] B. Eynard, *Large-N expansion of the 2-matrix model*, *JHEP* **01** (2003) 051 [hep-th/0210047].

[19] B. Eynard, *Large-N expansion of the 2-matrix model, multicut case*, math-ph/0307052.

[20] B. Eynard, A. Kokotov and D. Korotkin, $1/N^2$ *correction to free energy in Hermitian two-matrix model*, *Lett. Math. Phys.* **71** (2005) 199 [hep-th/0401166].

[21] B. Eynard, *Master loop equations, free energy and correlations for the chain of matrices*, *JHEP* **11** (2003) 018 [hep-th/0309036].

[22] B. Eynard, *Polynômes biorthogonaux, problème de Riemann-Hilbert et géométrie algébrique*, Habilitation à diriger les recherches, Université Paris VII, (2005).

[23] B. Eynard, *Loop equations for the semiclassical 2-matrix model with hard edges*, *J. Stat. Mech.* **0510** (2005) P006 [math-ph/0504002].

[24] B. Eynard and N. Orantin, *Topological expansion of the 2-matrix model correlation functions: diagrammatic rules for a residue formula*, *JHEP* **12** (2005) 034 [math-ph/0504058].

[25] H.M. Farkas, I. Kra, *Riemann surfaces* 2nd edition, Springer Verlag, 1992.

[26] J.D. Fay, *Theta functions on Riemann surfaces*, Springer Verlag, 1973.

[27] V.A. Kazakov, *Ising model on a dynamical planar random lattice: exact solution*, *Phys. Lett.* **A 119** (1986) 140.

JHEP12(2006)053

[28] V.A. Kazakov and A. Marshakov, *Complex curve of the two matrix model and its Tau-function*, *J. Phys.* **A 36** (2003) 3107 [hep-th/0211236].

[29] I.K. Kostov, *Conformal field theory techniques in random matrix models*, hep-th/9907060.

[30] I.M. Krichever, *The tau function of the universal whitham hierarchy, matrix models and topological field theories*, hep-th/9205110.

[31] L. Chekhov and A. Mironov, *Matrix models vs. Seiberg-Witten/Whitham theories*, *Phys. Lett.* **B 552** (2003) 293 [hep-th/0209085].

[32] L.Chekhov, A.Marshakov, A.Mironov and D.Vasiliev, *DV and WDVV*, *Phys. Lett.* **B 562** (2003) 323 hep-th/0301071.

[33] M.L. Mehta, *Random Matrices*, 2nd edition, Academic Press, New York, 1991.

[34] M. Staudacher, *Combinatorial solution of the two matrix model*, *Phys. Lett.* **B 305** (1993) 332 [hep-th/9301038].

[35] G. 't Hooft, *A planar diagram theory for strong interactions*, *Nucl. Phys.* **B 72** (1974) 461.

[36] P. Wiegmann and A. Zabrodin, *Large-N expansion for normal and complex matrix ensembles*, hep-th/0309253.

[37] I. Krichever, M. Mineev-Weinstein, P. Wiegmann, A. Zabrodin, *Laplacian growth and Whitham equations of soliton theory*, nlin-sys/0311005.

[38] P. Wiegmann and A. Zabrodin, *Large-N expansion of the 2D Dyson gas*, *J. Phys.* **A 39** (2006) 8933 [hep-th/0601009].

JHEP12(2006)053

4 Invariants of algebraic curves and topological expansion

arXiv:math-ph/0702045v4 7 May 2007

SPhT-T07/021

Invariants of algebraic curves and topological expansion

B. Eynard[1], *N. Orantin*[2]

Service de Physique Théorique de Saclay,
F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France.

Abstract:

For any arbitrary algebraic curve, we define an infinite sequence of invariants. We study their properties, in particular their variation under a variation of the curve, and their modular properties. We also study their limits when the curve becomes singular. In addition we find that they can be used to define a formal series, which satisfies formally an Hirota equation, and we thus obtain a new way of constructing a tau function attached to an algebraic curve.

These invariants are constructed in order to coincide with the topological expansion of a matrix formal integral, when the algebraic curve is chosen as the large N limit of the matrix model's spectral curve. Surprisingly, we find that the same invariants also give the topological expansion of other models, in particular the matrix model with an external field, and the so-called double scaling limit of matrix models, i.e. the (p, q) minimal models of conformal field theory.

As an example to illustrate the efficiency of our method, we apply it to the Kontsevitch integral, and we give a new and extremely easy proof that Kontsevitch integral depends only on odd times, and that it is a KdV τ-function.

[1] E-mail: eynard@spht.saclay.cea.fr
[2] E-mail: orantin@spht.saclay.cea.fr

Contents

1 Introduction **4**

2 Main results of this article **6**
2.1 Definitions . . . 6
2.2 Remarkable properties . . . 8
2.3 Some applications, Kontsevitch's integral . . . 9

3 Algebraic curves, reminder and notations **10**
3.1 Some properties of algebraic curves . . . 12
3.1.1 Sheets . . . 12
3.1.2 Branch points and conjugated points . . . 12
3.1.3 Genus, cycles, Abel map . . . 12
3.1.4 Theta-functions and prime forms . . . 13
3.1.5 Bergmann kernel . . . 14
3.1.6 3rd type differentials . . . 15
3.1.7 Modified set of cycles: . . . 15
3.1.8 Modified Bergmann kernel . . . 15
3.1.9 Modified prime form . . . 16
3.1.10 Modified 3rd type differentials . . . 16
3.1.11 Bergmann tau function . . . 17
3.2 Examples: genus 0 and 1 . . . 17
3.3 Riemann bilinear identity . . . 18
3.4 Moduli of the curve . . . 18
3.4.1 Filling fractions . . . 18
3.4.2 Moduli of the poles . . . 19

4 Definition of Correlation functions and free energies **20**
4.1 Notations . . . 20
4.2 Correlation functions and free energies . . . 21
4.2.1 Correlation functions . . . 21
4.2.2 Free energies . . . 22
4.2.3 Leading order free energy $F^{(0)}$. . . . 22
4.2.4 Special free energies and correlation functions . . . 22
4.3 Tau function . . . 23
4.4 Properties of correlation functions . . . 23
4.5 Diagrammatic representation . . . 25
4.6 Examples. . . . 29

4.7 Remark: Teichmuller pant gluings 31

5 Variations of the curve **31**
5.1 Rauch variational formula 32
5.2 Loop insertion operator 35
5.3 Variations with respect to the moduli 35
5.4 Homogeneity 37
5.5 Variations of $F^{(0)}$ with respect to the moduli. 37

6 Variations with respect to κ and modular transformations **39**
6.1 Variations with respect to κ 39
6.2 Modular transformations 40

7 Symplectic invariance **41**

8 Singular limits **42**

9 Integrability **44**
9.1 Baker-Akhiezer function 44
9.2 Sato relation 46
9.3 Hirota equation 46

10 Application: topological expansion of matrix models **47**
10.1 Formal 1-matrix model 47
10.1.1 Definition 47
10.1.2 Loop equations and classical spectral curve 48
10.2 2-matrix model 49
10.2.1 Definition 50
10.2.2 Loop equations and classical spectral curve 51
10.3 Double scaling limits of matrix models, minimal CFT 52
10.3.1 (p,q) minimal models 53
10.3.2 Other times 54
10.3.3 Examples of minimal models 55
10.4 Matrix model with external field 56
10.4.1 Application to Kontsevitch integral 57
10.5 Example: Airy curve 60
10.6 Example: pure gravity (3,2) 62
10.6.1 Some correlation functions 63

11 Conclusion **64**

A Properties of correlation functions **67**

B Variation of the curve **75**

C Proof of the symplectic invariance of $F^{(0)}$ and $F^{(1)}$ **79**
C.1 $F^{(1)}$ 79
C.2 $F^{(0)}$ 81

D Matrix model with an external field **82**
D.1 Loop equations 82
D.2 Leading order algebraic curve 83
D.2.1 Filling fractions and genus 84
D.2.2 Subleading loop equations 84
D.3 Diagrammatic rules for the correlation functions and the free energy . . 84
D.3.1 The semi-classical spectral curve 84
D.3.2 Diagrammatic solution 85

1 Introduction

Computing the topological expansion of various matrix integrals has been an interesting problem for more than 30 years. The reason for it, is that formal matrix integrals (cf [41] for a definition of formal integrals), are known to be combinatorics generating functionals. Some formal matrix integrals enumerate maps, or colored maps of given topology [14, 26, 27], some count intersection numbers (the Kontsevitch integral and its generalizations [58]), and physicists have also tried to reach the limit of continuous maps through critical limits, and thus tried to recover Liouville's field theory [57, 28].

Many methods have been invented to compute those formal matrix integrals, and the most successful is undoubtedly the "loop equations" method [53, 24], which is in fact nothing but integration by parts, or Tutte's equations [73, 74], or Schwinger–Dyson equations, or Ward identities, or Virasoro constraints, or W-algebra [26]. Until recently, those loop equations were solved only for the first few orders (mostly planar or torus), and case by case (for each matrix model). One of the most remarkable methods was obtained in [7]. Let us also mention that other methods were invented using orthogonal polynomials [67] (only in the case were the formal integral comes from an actual convergent integral), or topological string theory methods [65, 22, 11] using the so-called holomorphic anomaly equations.

In 2004, a new method for computing the large N expansion of matrix integrals was introduced in [33], and further developped in [40, 17]. The starting point of that

method was not new, it was the same as in [7], it consists in solving the loop equations recursively in powers of the expansion parameter $1/N^2$, where N is the size of the matrix. To leading order, loop equations become algebraic equations, and give rise to an algebraic curve $\mathcal{E}(x,y)=0$ where $\mathcal{E}$ is some polynomial in 2 variables, which we call the "classical spectral curve".

The new feature which was introduced in [33] was to use contour integrals and functions on the curve rather than on the x-plane as in [7]. When written on the curve, the loop equations, together with the Cauchy residue formula and the Riemann bilinear identity, simplify enormously, and take a very universal structure which can be written **entirely in terms of geometric properties of the curve**. In other words, the solution of loop equations of many different matrix models, depends only on the properties of the spectral curve, and not on the matrix model which gives that curve. In particular, they can be written for any arbitrary algebraic curve, even for curves which don't come from matrix models. It is thus tempting to define "free energies" for any algebraic curve. This is what we do in this article.

Therefore, in this article, for any arbitrary algebraic curve $\mathcal{E}(x,y)=0$, we define an infinite sequence of complex numbers $F^{(g)}(\mathcal{E})$, computed as residues of meromorphic forms on the curve. Out of these $F^{(g)}(\mathcal{E})$'s, we build a formal power series:

$$\ln Z_N(\mathcal{E}) = -\sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} F^{(g)}(\mathcal{E}) \tag{1-1}$$

and we study its properties.

We compute the variations of $F^{(g)}$ under variations of the curve (variations of its complex structure, its moduli, and modular transformations). We show that the $F^{(g)}$'s are invariant under some transformations of the curve, namely under transformations of the curve which preserve the symplectic form up to a sign $\pm dx\wedge dy$.

We also show that $Z_N(\mathcal{E})$ satisfies bilinear Hirota equations, and thus $Z_N(\mathcal{E})$ is a formal τ-function, and we construct the associated formal Baker-Hakiezer function [9].

We thus have a notion of a τ function associated to an algebraic curve. Such notion has already been encountered in the litterature [9], and it is not clear whether our definition coincides with other existing definitions. What can be understood so far, is that we are defining a sort of quantum deformation of a classical τ-function whose spectral curve is $\mathcal{E}$. The classical τ function being only the dispersionless limit $\ln Z_\infty(\mathcal{E}) = -F^{(0)}(\mathcal{E})$, while our $Z_N(\mathcal{E})$ concerns the full system.

Almost by definition, if $\mathcal{E}$ is the algebraic curve coming from the large N limit of the loop equations of a matrix model, then $Z_N(\mathcal{E})$ is the matrix integral.

What is more interesting is to see what is $Z_N(\mathcal{E})$ for curves not coming from the large N limit of the loop equations of a matrix model.

We study in details a few examples.

- The double scaling limit of a matrix model. It has been well known since [51, 26], that if we fine tune the parameters of a matrix model so that the algebraic curve $\mathcal{E}$ develops a singularity, the free energies become singular and the most singular part of the free energies form the KP-hierarchy τ-function (KdV hierarchy for the 1-matrix model). We show, by looking at the double scaling limit of matrix models, that the KP τ-function (resp. KdV τ-function), coincides with our definition for the classical limit of the (p,q) systems (resp. $(p,2)$).

- It has been well known since the works of Kontsevitch [58], that the KdV τ-function can be represented by another matrix integral called Kontsevitch integral. Kontsevitch introduced that integral as a counting function for intersection numbers, and proved that it is a KdV τ-function. One of the key features is that it depends on the eigenvalues of a diagonal matrix Λ, only through the quantities $t_k = \text{tr}\,\Lambda^{-k}$ for odd k (cf [49, 26]). Another important known property is that, if $t_k=0$ for $k>p$, it coincides with the $(p,2)$ τ-function found from the double scaling limit of the 1-matrix model, i.e. the $(p,2)$ conformal minimal model.

Here, we prove that the Kontsevitch matrix integral coincides with our $Z_N(\mathcal{E})$ when $\mathcal{E}$ is the large N limit of the Schwinger–Dyson equation of the Kontsevitch integral. The remarkable fact, is that for our $Z_N(\mathcal{E})$, the above properties (i.e. the fact that it depends only on odd t_k's and the fact that it gives the $(p,2)$ τ-function if $t_k=0$ for $k>p$) are trivial. We thus provide a new proof of those properties, and maybe a new interpretation.

2 Main results of this article

In this section we just sketch briefly the contents of the main body of the article.

2.1 Definitions

Given a polynomial of two variables $\mathcal{E}(x,y)$, we construct an infinite sequence of multilinear meromorphic forms over the curve of equation $\mathcal{E}(x,y)=0$, which we call:

$$W_k^{(g)}(p_1,p_2,\dots,p_k) \qquad , \qquad k,g\in\mathbf{N}. \tag{2-1}$$

In particular $W_0^{(g)} = -F^{(g)}$ are complex numbers $F^{(g)}(\mathcal{E})$.

The $F^{(g)}$'s and the $W_k^{(g)}$'s are defined in terms of residues near the branchpoints of the curve only, i.e. they depend only on the **local behavior of the curve near its**

branch points.

Then we show some properties:

- the $W_k^{(g)}$'s are **symmetric** in their k variables;
- there is a "loop insertion operator" which increases $k \to k+1$:

$$D_{B(p_{k+1},.)} W_k^{(g)}(p_1, p_2, \dots, p_k) = W_{k+1}^{(g)}(p_1, p_2, \dots, p_k, p_{k+1}); \tag{2-2}$$

- there is an inverse operator which contracts $k \to k-1$:

$$\operatorname*{Res}_{p_k \to \text{branch points}} \Phi(p_k)\, W_k^{(g)}(p_1, p_2, \dots, p_k) = (2g+k-3)\, W_{k-1}^{(g)}(p_1, p_2, \dots, p_{k-1}). \tag{2-3}$$

The $F^{(g)}$'s and the $W_k^{(g)}$'s are defined in a way which mimics the solution of matrix models loop equations, and almost by definition, they coincide with matrix model's free energy and correlation functions when the polynomial $\mathcal{E}$ is chosen as the classical large N limit of the matrix model's spectral curve:

$$\ln\left(\int dM \exp -N \operatorname{Tr} V(M)\right) = -\sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} F^{(g)}(\mathcal{E}_{\text{1MM}}) \tag{2-4}$$

and

$$\left\langle \operatorname{Tr} \frac{dx_1}{x_1 - M} \operatorname{Tr} \frac{dx_2}{x_2 - M} \dots \operatorname{Tr} \frac{dx_k}{x_k - M} \right\rangle = \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g-k} W_k^{(g)}(p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_k)) \tag{2-5}$$

The same construction works also for the 2-matrix model and the matrix model in an external field:

$$\begin{aligned} F^{(g)}_{\text{1MM}} &= F^{(g)}(\mathcal{E}_{\text{1MM}}) \\ F^{(g)}_{\text{2MM}} &= F^{(g)}(\mathcal{E}_{\text{2MM}}) \\ F^{(g)}_{\text{ext.field}} &= F^{(g)}(\mathcal{E}_{\text{ext.field}}). \end{aligned} \tag{2-6}$$

in particular it works for the Kontsevitch integral

$$F^{(g)}_{\text{Kontsevitch}} = F^{(g)}(\mathcal{E}_{\text{Kontsevitch}}) \tag{2-7}$$

where the LHS is the topological expansion of the corresponding matrix integral, and the RHS is the functional defined in this article, applied to the curve $\mathcal{E}(x,y) = 0$ coming from the large N limit of the Schwinger–Dyson equations of the corresponding matrix model.

Let us emphasize that not every curve $\mathcal{E}$ is the large N limit of a matrix model's spectral curve, and thus our functional $F^{(g)}(\mathcal{E})$ is defined beyond matrix models, and is really an algebro-geometric object. It has many remarkable properties, and we list below some of the most important ones:

2.2 Remarkable properties

Theorem 4.8 Diagrammatic representation:

$$W_{k+1}^{(g)}(p, p_1, \dots, p_k) = \sum_{G \in \mathcal{G}_{k+1}^{(g)}(p, p_1, \dots, p_k)} w(G) = w\left(\sum_{G \in \mathcal{G}_{k+1}^{(g)}(p, p_1, \dots, p_k)} G\right) \tag{2-8}$$

where $\mathcal{G}_{k+1}^{(g)}(p, p_1, \dots, p_k)$ is a set of trivalent graphs (built on trees), and w is a Feynman-like weight function associating values to edges and integrals (residues in fact) to vertices of the graph.

This theorem is important because it makes all formulae particularly easy to remember, and many theorems below can be proved in a diagrammatic way.

Theorem 8.1 Singular limits: if the curve becomes singular, the functional $F^{(g)}$ commutes with the singular limit, i.e.:

$$\lim F^{(g)}(\mathcal{E}) = F^{(g)}(\lim \mathcal{E}). \tag{2-9}$$

Theorem 9.2 Integrability: the formal series:

$$\ln Z_N(\mathcal{E}) = -\sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} F^{(g)}(\mathcal{E}) \tag{2-10}$$

obeys Hirota's bilinear equations, and thus is a τ function.

Theorem 5.3 Homogeneity : $F^{(g)}(\mathcal{E})$ is homogeneous of degree $2-2g$ in the moduli of the curve:

$$(2-2g)F^{(g)} = \sum_k t_k \frac{\partial F^{(g)}}{\partial t_k}. \tag{2-11}$$

Theorem 5.1 Deformations : if the curve $\mathcal{E}$ is deformed into $\mathcal{E} + \delta\mathcal{E}$, the differential ydx is deformed into $ydx \to ydx + \delta(ydx)$ where $\delta(ydx)$ is a meromorphic one-form which we denote $\delta(ydx) = -\Omega$, and which can be written as: $\Omega = \int_{\partial\Omega} W_2^{(0)} \Lambda$ for some appropriate contour $\partial\Omega$ and some appropriate function Λ. Then we have:

$$\delta W_k^{(g)}(p_1, p_2, \dots, p_k) = \int_{\partial\Omega} \Lambda(p_{k+1})\, W_{k+1}^{(g)}(p_1, p_2, \dots, p_k, p_{k+1}). \tag{2-12}$$

Theorem 7.1 Symplectic invariance : $F^{(g)}(\mathcal{E})$ is unchanged under the following changes of curve $\mathcal{E}(x,y)$:

$$\begin{array}{ll} y \to y + R(x) & , \quad R(x)\text{=rational fraction of } x, \\ y \to cy\ ,\ \ x \to c^{-1}x & , \quad c\text{=complex number}, \\ y \to -y\ ,\ \ x \to x\ , & \\ y \to x\ ,\ \ x \to y\ . & \end{array} \tag{2-13}$$

all those transformations conserve the symplectic form $dx \wedge dy$ up to the sign.

Theorem 6.2 Modular transformations : the modular dependence of $F^{(g)}(\mathcal{E})$ is only in the Bergmann kernel (defined in section 3.1.5), and thus the modular transformations of $F^{(g)}(\mathcal{E})$ are derived from those of the Bergmann kernel. Under a modular transformation, the Bergmann kernel is changed into $B(p,q) \to B(p,q) + 2i\pi\, du(p)\kappa du(q)$, and thus we introduce a new kernel for any arbitrary symmetric matrix κ:

$$B_\kappa(p,q) \to B(p,q) + 2i\pi\, du(p)\kappa du(q) \tag{2-14}$$

We thus define some $F^{(g)}_\kappa(\mathcal{E})$, and we compute:

$$\frac{\partial F^{(g)}}{\partial \kappa} \tag{2-15}$$

We also remark that when $\kappa = (\overline{\tau} - \tau)^{-1}$, $F^{(g)}_\kappa(\mathcal{E})$ is modular invariant.

2.3 Some applications, Kontsevitch's integral

(p,q) **minimal models, KP and KdV Hierarchies:** it is well known [26, 20] that some rational singular limits of matrix models correspond to (p,q) minimal models, and theorem 8.1 implies that:

$$F^{(g)}_{(p,q)} = F^{(g)}(\mathcal{E}_{(p,q)}) \tag{2-16}$$

and it is well known that (p,q) minimal models are some reductions of KdV hierarchy for $q = 2$ and KP hierarchy for general (p,q).

Notice that the $x \leftrightarrow y$ symmetry of theorem 7.1 (i.e. Eq. (2-13)) implies the famous $(p,q) \leftrightarrow (q,p)$ duality [26, 28, 56].

Kontsevitch integral's properties: Kontsevitch's integral is defined as:

$$Z_{\text{Kontsevitch}}(\Lambda) = \int dM\, \mathrm{e}^{-N \operatorname{Tr} \frac{M^3}{3} - M\Lambda^2} \quad , \quad \ln Z_{\text{Kontsevitch}} = -\sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} F^{(g)}_{\text{Kontsevitch}} \tag{2-17}$$

and we define the Kontsevitch's times:

$$t_k = \frac{1}{N} \operatorname{Tr} \Lambda^{-k}. \tag{2-18}$$

It is straightforward to write the Schwinger-Dyson equations and find the classical spectral curve:

$$\mathcal{E}_{\text{Kontsevitch}} = \left\{ \begin{array}{l} x(z) = z + \frac{1}{2N} \operatorname{Tr} \frac{1}{\Lambda} \frac{1}{z-\Lambda} \\ y(z) = z^2 + t_1 \end{array} \right. . \tag{2-19}$$

According to theorem 10.3, we have:

$$F^{(g)}_{\text{Kontsevitch}} = F^{(g)}(\mathcal{E}_{\text{Kontsevitch}}). \tag{2-20}$$

Using the $x \leftrightarrow y$ invariance of eq.2-13, we see that the only branch point in y is located at $z = 0$, and since the $F^{(g)}$'s depend only on the local behavior near the branchpoint, we may perform a Taylor expansion of $x(z)$ near $z = 0$:

$$\mathcal{E}_{\text{Kontsevitch}}(t_1, t_2, \ldots) = \left\{ \begin{array}{l} x(z) = z - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} t_{k+2} z^k \\ y(z) = z^2 + t_1 \end{array} \right. . \tag{2-21}$$

From the symplectic invariance theorem 7.1, (i.e. eq.2-13), we may add to x any rational function of y i.e. of z^2, thus we may substract to x its even part, and thus the following curves are related by symplectic invariance:

$$\mathcal{E}_{\text{Kontsevitch}}(t_1, t_2, t_3, \ldots) \sim \mathcal{E}_{\text{Kontsevitch}}(t_1, 0, t_3, 0, t_5, \ldots). \tag{2-22}$$

We thus have a very easy proof that $F^{(g)}_{\text{Kontsevitch}}$ **depends only on odd times**.

Moreover, if $t_k = 0$ for $k > p+2$, we have:

$$\mathcal{E}_{\text{Kontsevitch}}(t_1, t_2, \ldots, t_{p+2}, 0, \ldots) = \left\{ \begin{array}{l} x(z) = z - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{p} t_{k+2} z^k \\ y(z) = z^2 + t_1 \end{array} \right. \tag{2-23}$$

which is exactly the curve of the $(p,2)$ minimal model, i.e. it satisfies KdV hierarchy. We thus have a very easy proof that $Z_{\text{Kontsevitch}}$ **is a KdV tau-function**.

Those are old and classical results about the Kontsevitch integral, and we just propose a new proof, in order to illustrate the power of the tools we introduce.

3 Algebraic curves, reminder and notations

We begin by recalling some elements of algebraic geometry, which are used to fix the notations. We refer the reader to [46] or [47] for further details about algebro-geometric concepts.

		Summary of notations
$\mathcal{E}(x,y)=0$	$\longrightarrow$	classical spectral curve.
$d_1+1=\deg_x \mathcal{E}$	$\longrightarrow$	x-degree of the polynomial $\mathcal{E}$.
$d_2+1=\deg_y \mathcal{E}$	$\longrightarrow$	y-degree of the polynomial $\mathcal{E}$ (number of sheets).
$\mathbf{a}=\{a_i\}$	$\longrightarrow$	set of branch points $dx(a_i)=0$.
$\alpha=\{\alpha_i\}$	$\longrightarrow$	poles of ydx.
$\mathbf{g}$	$\longrightarrow$	genus of the curve.
$\underline{\mathcal{A}}_i \cap \underline{\mathcal{B}}_j = \delta_{ij}$	$\longrightarrow$	cannonical basis of non-contractible cycles.
du_i	$\longrightarrow$	cannonical holomorphic forms $\oint_{\underline{\mathcal{A}}_j} du_i = \delta_{ij}$.
$\tau_{ij}=\oint_{\underline{\mathcal{B}}_j} du_i$	$\longrightarrow$	Riemann's matrix of periods.
$u_i(p)=\int_{p_0}^{p} du_i$	$\longrightarrow$	Abel map.
$\mathcal{A}=\underline{\mathcal{A}}-\kappa(\underline{\mathcal{B}}-\tau\underline{\mathcal{A}})$	$\longrightarrow$	κ-modified $\mathcal{A}$-cycles
$\mathcal{B}=\underline{\mathcal{B}}-\tau\underline{\mathcal{A}}$	$\longrightarrow$	κ-modified $\mathcal{B}$-cycles, $\mathcal{A}_i\cap\mathcal{B}_j=\delta_{ij}$
$dS_{q_1,q_2}(p)$	$\longrightarrow$	3rd kind differential with simple poles q_1 and q_2, such that $\mathrm{Res}_{q_1} dS_{q_1,q_2} = 1 = -\mathrm{Res}_{q_2} dS_{q_1,q_2}$ and $\oint_{\mathcal{A}_i} dS_{q_1,q_2}=0$.
$B(p,q)$	$\longrightarrow$	Bergmann kernel, i.e. 2nd kind differential with double pole at $p=q$, no residue and vanishing $\mathcal{A}$-cycle integrals.
$z=\frac{\vec{n}+\tau\vec{m}}{2}$	$\longrightarrow$	regular odd characterisic, i.e. $\sum_{i=1}^{g} n_i m_i$ =odd.
$dh_z=\sum_i \frac{\partial\theta_z(\vec{v})}{\partial v_i}\Big\|_{v=0} du_i$	$\longrightarrow$	Holomorphic form with only double zeroes.
$\underline{E}(p,q)=\frac{\theta_z(u(p)-u(q),\tau)}{\sqrt{dh_z(p)dh_z(q)}}$	$\longrightarrow$	Prime form independent of z, with a simple zero at $p=q$.
$\Phi(p)=\int_o^p ydx$	$\longrightarrow$	some antiderivative of ydx defined on the universal covering.
$\overline{p}$, $x(\overline{p})=x(p)$	$\longrightarrow$	if p is near a branchpoints a, then $\overline{p}\neq p$ is the unique other point near a such that $x(\overline{p})=x(p)$.
$p^i(p)$, $x(p^i)=x(p)$	$\longrightarrow$	The p^i's, $i=0,\dots,d_2$, are the pre-images of $x(p)$ on the curve. By convention $p^0(p)=p$.
$D_\Omega=\delta_\Omega+\mathrm{tr}\,(\kappa\,\delta_\Omega\tau\,\kappa\frac{\partial}{\partial\kappa})$	$\longrightarrow$	Covariant variation wrt $\Omega=\delta(ydx)$.

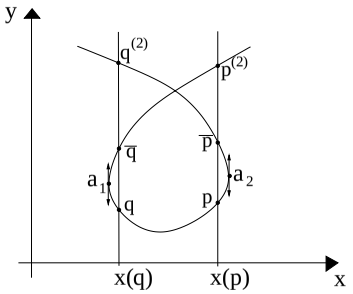
Consider an (embedded) algebraic curve given by its equation:

$$\mathcal{E}(x,y)=0 \tag{3-1}$$

where $\mathcal{E}$ is an almost arbitrary polynomial of two variables. This is equivalent to considering a compact Riemann surface $\overline{\Sigma}$ and 2 meromorphic functions x and y, such that

$$\forall p\in\overline{\Sigma} \qquad , \qquad \mathcal{E}(x(p),y(p))=0. \tag{3-2}$$

We only require that $\mathcal{E}(x,y)$ is not factorizable, and that all branchpoints (zeroes of dx) are simple, i.e. near a branchpoint a_i, y behaves like a square root $\sqrt{x-x(a_i)}$.



(3-4)

Figure 1: Example of an algebraic curve with two x-branch points a_1 and a_2 and a three sheeted structure (x has three preimages). One can see that the map $p\to\overline{p}$ is not globally defined, for instance when $q\to p$, we have $\overline{q}\to p^{(2)}$. The notion of conjugated point depends on the branch point.

3.1 Some properties of algebraic curves

3.1.1 Sheets

For each complex x, there exist $d_2+1=\deg_y\mathcal{E}$ solutions for y of $\mathcal{E}(x,y)=0$. This means that there are exactly d_2+1 points on the Riemann surface $\overline{\Sigma}$ for which $x(p)=x$: $\overline{\Sigma}$ has a sheet structure with d_2+1 x-sheets. We call them:

$$x(p)=x \quad \leftrightarrow \quad p=p^i(x)\ , \quad i=0,\dots,d_2. \tag{3-3}$$

3.1.2 Branch points and conjugated points

Let a_i, $i=1,\dots,n$, $\mathbf{a}=\{a_1,\dots,a_n\}$ be the set of branch-points, solutions of $dx=0$:

$$\forall a\in\mathbf{a} \qquad , \qquad dx(a)=0. \tag{3-5}$$

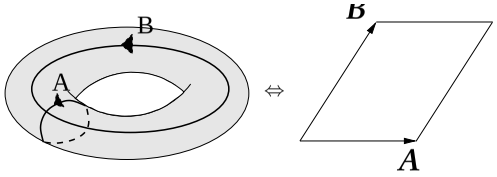
Since we assume that the branch-points are simple zeros of dx, we have the following property: if p is in the vicinity of a branch-point a_i, there is a unique point $\overline{p}\neq p$, such that $x(\overline{p})=x(p)$, which is also in the vicinity of a_i. $\overline{p}$ depends on i, and in general, $\overline{p}$ is not globaly defined (see fig. 1 for an example).

Notice that $\overline{p}$ is one of the p^k defined in the previous section.

3.1.3 Genus, cycles, Abel map

If the curve has genus $\mathbf{g}$, there are $2\mathbf{g}$ homologicaly independent non-trivial cycles, and we may choose a (not unique) cannonical basis:

$$\underline{\mathcal{A}}_i\cap\underline{\mathcal{B}}_j=\delta_{ij} \qquad , \qquad \underline{\mathcal{A}}_i\cap\underline{\mathcal{A}}_j=0 \qquad , \qquad \underline{\mathcal{B}}_i\cap\underline{\mathcal{B}}_j=0. \tag{3-6}$$



(3-11)

Figure 2: Example of canonical cycles and the corresponding fundamental domain in the case of the torus (genus $\mathfrak{g} = 1$).

The simply connected domain obtained by removing all $\underline{\mathcal{A}}$ and $\underline{\mathcal{B}}$-cycles from the curve is called the "**fundamental domain**" (see fig.(2) for the example of the torus).

On a genus $\mathfrak{g}$ curve, there are $\mathfrak{g}$ linearly independent holomorphic forms $du_1, \ldots, du_{\mathfrak{g}}$, which we choose normalized on the $\underline{\mathcal{A}}$-cycles:

$$\oint_{\underline{\mathcal{A}}_j} du_i = \delta_{ij}. \tag{3-7}$$

The **Riemann matrix of period** is defined by the $\underline{\mathcal{B}}$-cycles

$$\tau_{ij} = \oint_{\underline{\mathcal{B}}_j} du_i. \tag{3-8}$$

They have the property that

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \qquad , \qquad \mathrm{Im}\,\tau > 0. \tag{3-9}$$

Given a base point p_0 on the curve (we assume it is not on any $\underline{\mathcal{A}}$ or $\underline{\mathcal{B}}$-cycle), we define the **Abel map**

$$u_i(p) = \int_{p_0}^{p} du_i \tag{3-10}$$

where the integration path is in the fundamental domain. The $\mathfrak{g}$ -dimensional vector $u(p) = (u_1(p), \ldots, u_{\mathfrak{g}}(p))$ maps the curve into its Jacobian.

3.1.4 Theta-functions and prime forms

We say that $z \in \mathbf{C}^{\mathfrak{g}}$ is a **characteristic** if there exist two vectors with integer coefficients $\vec{a} \in Z^{\mathfrak{g}}$ and $\vec{b} \in Z^{\mathfrak{g}}$ such that:

$$z = \frac{\vec{a} + \tau.\vec{b}}{2}. \tag{3-12}$$

z is called an odd characteristic if

$$\sum_{i=1}^{\mathfrak{g}} a_i b_i = \text{odd}. \tag{3-13}$$

Given a characteristic $z = \frac{\vec{a}+\tau\vec{b}}{2}$, and given a symmetric matrix $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ such that $\mathrm{Im}\tau$ is positive definite, and a vector $v \in \mathbf{C}^{\mathfrak{g}}$, we define the θ_z function:

$$\theta_z(v,\tau) = \sum_{\vec{n} \in Z^{\mathfrak{g}}} \mathrm{e}^{i\pi(\vec{n}-\vec{b}/2)^t \tau (\vec{n}-\vec{b}/2)}\, \mathrm{e}^{2i\pi(v+\vec{a}/2)^t.(\vec{n}+\vec{b}/2)}. \tag{3-14}$$

If z is an odd characteristic, θ_z is an odd function of v, and in particular $\theta_z(0,\tau) = 0$ and we define the following holomorphic form:

$$dh_z(p) = \sum_{i=1}^{\mathfrak{g}} du_i(p)\ .\ \left.\frac{\partial \theta_z(v)}{\partial v_i}\right|_{v=0}. \tag{3-15}$$

All its $\mathfrak{g} - 1$ zeroes are double zeroes, so that it makes sense to consider its square root defined on the fundamental domain. The **prime form** is:

$$\underline{E}(p,q) = \frac{\theta_z(u(p)-u(q))}{\sqrt{dh_z(p)\,dh_z(q)}}. \tag{3-16}$$

It is independent of z, and it vanishes only if $p = q$ (and with a simple zero), and has no pole.

3.1.5 Bergmann kernel

We define a bilinear meromorphic form called the "**Bergmann kernel**" [10, 48]:

$$\underline{B}(p,q) = \text{Bergmann kernel} \tag{3-17}$$

as the unique 1-form in p, which has a double pole with no residue at $p = q$ and no other pole, and which is normalized such that

$$\underline{B}(p,q) \sim_{p\to q} \frac{dz(p)dz(q)}{(z(p)-z(q))^2} + \text{finite} \qquad , \qquad \oint_{\underline{\mathcal{A}}_I} \underline{B} = 0 \tag{3-18}$$

where z is any local coordinate on the curve in the vicinity of q. The Bergmann kernel depends only on the complex structure of the curve, and not on the details of $\mathcal{E}$. For instance if $\mathcal{E}$ has genus zero, $\underline{B}$ is the Bergmann kernel of the projective complex plane (the Riemann sphere), and if the curve has genus 1, $\underline{B}$ is related to the Weierstrass function.

Properties:

$$\underline{B}(p,q) = \underline{B}(q,p) \qquad , \qquad \oint_{q\in\underline{\mathcal{B}}_i} \underline{B}(p,q) = 2i\pi\, du_i(p). \tag{3-19}$$

For any odd characteristic z, we have:

$$\underline{B}(p,q) = d_p d_q \ln\left(\theta_z(u(p)-u(q))\right) \tag{3-20}$$

If $f(p)$ is any meromorphic function, its differential is given by

$$df(p) = \operatorname*{Res}_{q\to p} \underline{B}(p,q) f(q). \tag{3-21}$$

3.1.6 3rd type differentials

Given two points q_1 and q_2 on the curve , we define the 1-form $\underline{dS}_{q_1,q_2}$ by:

$$\underline{dS}_{q_1,q_2}(p) = \int_{q_2}^{q_1} \underline{B}(p,q) \tag{3-22}$$

where the integration path is in the fundamental domain.

$\underline{dS}_{q_1,q_2}$ is the unique meromorphic form with only simple poles at q_1 and q_2, such that:

$$\operatorname*{Res}_{q_1} \underline{dS}_{q_1,q_2} = 1 = -\operatorname*{Res}_{q_2} \underline{dS}_{q_1,q_2} \qquad , \qquad \oint_{\underline{\mathcal{A}}_i} \underline{dS}_{q_1,q_2} = 0. \tag{3-23}$$

3.1.7 Modified set of cycles:

In order to easily deal with modular properties of the objects we are going to introduce, it is convenient to define some modified cycles and kernels with an arbitrary symmetric matrix κ. When $\kappa = 0$, all those quantities reduce to the unmodified ones. The modular transformations of the modified objects, merely amount to a change of κ.

We thus choose an arbitrary $\mathbf{g} \times \mathbf{g}$ **symmetric matrix** κ with complex coefficients, and we define another set of cycles:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i &= \underline{\mathcal{A}}_i - \sum_j \kappa_{ij} (\underline{\mathcal{B}}_j - \sum_l \tau_{jl} \underline{\mathcal{A}}_l) \\ \mathcal{B}_i &= \underline{\mathcal{B}}_i - \sum_j \tau_{ij} \underline{\mathcal{A}}_j \end{aligned} \tag{3-24}$$

They satisfy:

$$\mathcal{A}_i \cap \mathcal{B}_j = \delta_{ij} \qquad , \qquad \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = 0 \qquad , \qquad \mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = 0 \tag{3-25}$$

and we straightforwardly have

$$\oint_{\mathcal{A}_i} du_j = \delta_{ij} \qquad , \qquad \oint_{\mathcal{B}_i} du_j = 0. \tag{3-26}$$

3.1.8 Modified Bergmann kernel

We also define the modified Bergmann kernel, normalized on $\mathcal{A}$ instead of $\underline{\mathcal{A}}$:

$$B(p,q) = \underline{B}(p,q) + 2i\pi \sum_{i,j} du_i(p)\, \kappa_{ij}\, du_j(q). \tag{3-27}$$

It is such that

$$B(p,q) = B(q,p) \qquad , \qquad \oint_{\mathcal{A}_I} B = 0 \qquad , \qquad \oint_{q \in \mathcal{B}_i} B(p,q) = 2i\pi\, du_i(p) \tag{3-28}$$

and if $f(p)$ is any meromorphic function, its differential is given by:

$$df(p) = \operatorname*{Res}_{q \to p} B(p,q) f(q). \tag{3-29}$$

- For $\kappa = 0$ we have $\underline{B} = B$.
- For $\kappa = (\overline{\tau} - \tau)^{-1}$, B is the Schiffer kernel [10, 48], and it is modular invariant.

3.1.9 Modified prime form

Similarly we define a modified prime form:

$$E(p,q) = \underline{E}(p,q)\, \mathrm{e}^{2i\pi u^t(p) \kappa u(q)} \tag{3-30}$$

It vanishes only if $p = q$ (with a simple zero), and has no pole.

3.1.10 Modified 3rd type differentials

In the same fashion, we define the modified 3rd type differentials dS_{q_1,q_2} by:

$$dS_{q_1,q_2}(p) = \int_{q_2}^{q_1} B(p,q) \tag{3-31}$$

where the integration path is in the fundamental domain.

dS_{q_1,q_2} is the unique meromorphic form with only simple poles at q_1 and q_2, such that:

$$\operatorname*{Res}_{q_1} dS_{q_1,q_2} = 1 = -\operatorname*{Res}_{q_2} dS_{q_1,q_2} \qquad , \qquad \oint_{\mathcal{A}_i} dS_{q_1,q_2} = 0. \tag{3-32}$$

Properties:

$$dS_{q_1,q_2} = -dS_{q_2,q_1} \tag{3-33}$$

$$dS_{q_1,q_2}(p) = d_p \ln\left(\frac{\theta_z(u(p) - u(q_1))}{\theta_z(u(p) - u(q_2))}\right) + 2i\pi \sum_{i,j} du_i(p) \kappa_{ij} (u_j(q_1) - u_j(q_2)) \tag{3-34}$$

$$\oint_{\mathcal{B}_i} dS_{q_1,q_2} = 2i\pi (u_i(q_1) - u_i(q_2)) \tag{3-35}$$

$$d_{q_1}\left(dS_{q_1,q_2}(p)\right) = B(q_1,p) \tag{3-36}$$

$$\int_{p_1}^{p_2} dS_{q_1,q_2} = \int_{q_1}^{q_2} dS_{p_1,p_2} \tag{3-37}$$

Cauchy residue formula: for any meromorphic function $f(p)$ we have:

$$f(p) = -\operatorname*{Res}_{q_1 \to p} dS_{q_1,q_2}(p) f(q_1). \tag{3-38}$$

3.1.11 Bergmann tau function

The **Bergmann τ-function** τ_{Bx} was introduced and studied in [61, 62, 37], it is such that

$$\frac{\partial \ln(\tau_{Bx})}{\partial x(a_i)} = \operatorname*{Res}_{p\to a_i} \frac{B(p,\overline{p})}{dx(p)} \tag{3-39}$$

It is well defined because the Rauch variational formula [68] implies that the RHS is a closed form. Notice that τ_{Bx} is defined only up to a multiplicative constant which will play no role in all the sequel.

3.2 Examples: genus 0 and 1

• **Genus 0**

If the curve $\mathcal{E}$ has a genus $\mathbf{g} = 0$, it is conformaly equivalent to the Riemann sphere, i.e. the complex plane with a point at ∞, and there exists a rationnal parametrization of the curve. It means that there exists two rational functions $X(p)$ and $Y(p)$ such that:

$$\mathcal{E}(x,y) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \exists p \in \mathbf{C}\,,\ x = X(p)\,,\ y = Y(p) \tag{3-40}$$

In this case, the Bergmann kernel is the Bergmann kernel of the Riemann sphere:

$$B(p,q) = \underline{B}(p,q) = \frac{dpdq}{(p-q)^2} = d_p\, d_q \ln(p-q). \tag{3-41}$$

The prime form is:

$$E(p,q) = \underline{E}(p,q) = \frac{p-q}{\sqrt{dp\,dq}}. \tag{3-42}$$

• **Genus 1**

If the curve has genus $\mathbf{g} = 1$, then it can be parametrized on a rhombus corresonding to the fundamental domain of a torus (see fig. 2). It means that there exists two elliptical functions $X(p)$ and $Y(p)$ such that (see [75] for elliptical functions):

$$\begin{array}{c} \mathcal{E}(x,y) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \exists p \in \mathbf{C}\,,\ x = X(p)\,,\ y = Y(p) \\ X(p+1) = X(p+\tau) = X(p) \qquad , \qquad Y(p+1) = Y(p+\tau) = Y(p) \end{array} \tag{3-43}$$

Then, the Bergmann kernel is the corresponding Weierstrass function [75]:

$$\underline{B}(p,q) = (\wp(p-q,\tau) + \frac{\pi}{\mathrm{Im}\tau})\ dpdq. \tag{3-44}$$

The prime form is:

$$\underline{E}(p,q) = \frac{\theta_1(p-q,\tau)}{\theta_1'(0,\tau)\sqrt{dp\,dq}}. \tag{3-45}$$

When $\kappa = \frac{-1}{2i\mathrm{Im}\tau}$, the modified Bergmann kernel is the Schiffer kernel, and if $\mathbf{g} = 1$ it is the Weierstrass function:

$$B(p,q) = \wp(p-q,\tau)\ dpdq. \tag{3-46}$$

3.3 Riemann bilinear identity

If ω_1 and ω_2 are two meromorphic forms on the curve. Let p_0 be an arbitrary base point, we consider the function Φ_1 defined on the fundamental domain by

$$\Phi_1(p) = \int_{p_0}^{p} \omega_1. \tag{3-47}$$

We have

$$\operatorname*{Res}_{p\to \text{all poles}} \Phi_1(p)\omega_2(p) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{i=1}^{\mathbf{g}} \oint_{\underline{\mathcal{A}}_i} \omega_1 \oint_{\underline{\mathcal{B}}_i} \omega_2 - \oint_{\underline{\mathcal{B}}_i} \omega_1 \oint_{\underline{\mathcal{A}}_i} \omega_2. \tag{3-48}$$

Note that this identity holds also for the modified cycles with any κ:

$$\operatorname*{Res}_{p\to \text{all poles}} \Phi_1(p)\omega_2(p) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{i=1}^{\mathbf{g}} \oint_{\mathcal{A}_i} \omega_1 \oint_{\mathcal{B}_i} \omega_2 - \oint_{\mathcal{B}_i} \omega_1 \oint_{\mathcal{A}_i} \omega_2. \tag{3-49}$$

In particular with $\omega_1(p) = B(p,q)$, we have:

$$\operatorname*{Res}_{p\to \text{all poles}} dS_{p,p_0}(q)\,\omega(p) = -\sum_{i=1}^{\mathbf{g}} du_i(q) \oint_{\mathcal{A}_i} \omega \tag{3-50}$$

and:

$$\omega(q) = \operatorname*{Res}_{p\to \text{poles of }\omega} dS_{p,p_0}(q)\,\omega(p) + \sum_{i=1}^{\mathbf{g}} du_i(q) \oint_{\mathcal{A}_i} \omega. \tag{3-51}$$

3.4 Moduli of the curve

The curve $\mathcal{E}(x,y) = 0$ is parameterized by:

- a genus $\mathbf{g}$ compact Riemann surface $\bar{\Sigma}$, with periods τ_{ij}.
- punctures α_i at the poles of x and y, whose moduli are given by the negative coefficients of the Laurent series of ydx near the poles.
- the $\mathcal{A}$-cycle integrals of ydx, called filling fractions.

3.4.1 Filling fractions

We define:

$$\epsilon_i = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{A}_i} ydx \tag{3-52}$$

which are called "filling fractions" by analogy with matrix models ([35]).

3.4.2 Moduli of the poles

Consider a pole α of ydx, define the "**temperatures**":

$$t_\alpha = \operatorname*{Res}_\alpha ydx. \tag{3-53}$$

Notice that:

$$\sum_\alpha t_\alpha = 0. \tag{3-54}$$

Then consider the 3 cases:

• Either α is a pole of x of degree d_α, then we define the local parameter near α as:

$$z_\alpha(p) = x(p)^{\frac{1}{d_\alpha}}; \tag{3-55}$$

• or α is not a pole of x neither a branchpoint (thus it is a pole of y), then we define the local parameter near α as:

$$z_\alpha(p) = \frac{1}{x(p) - x(\alpha)}. \tag{3-56}$$

• or α is not a pole of x, and it is a branchpoint (thus it is a pole of y), then we define the local parameter near α as:

$$z_\alpha(p) = \frac{1}{\sqrt{x(p) - x(\alpha)}}. \tag{3-57}$$

In all cases, in the vicinity of α, we define the "**potential**"

$$V_\alpha(p) = \operatorname*{Res}_{q\to\alpha} y(q)dx(q) \ln\left(1 - \frac{z_\alpha(p)}{z_\alpha(q)}\right) \tag{3-58}$$

which is a polynomial in $z_\alpha(p)$:

$$V_\alpha(p) = \sum_{k=1}^{\deg V_\alpha} t_{\alpha,k}\, z_\alpha^k(p). \tag{3-59}$$

The $t_{\alpha,k}$ **are the moduli of the pole** α.

We have the following properties:

$$dV_\alpha(p) = \operatorname*{Res}_{q\to\alpha} y(q)dx(q) \frac{dz_\alpha(p)}{z_\alpha(p) - z_\alpha(q)}, \tag{3-60}$$

$$\operatorname*{Res}_\alpha dV_\alpha = 0 \tag{3-61}$$

and

$$y(p)dx(p) \underset{p\to\alpha}{\sim} dV_\alpha(p) - t_\alpha \frac{dz_\alpha(p)}{z_\alpha(p)} + O(\frac{dz_\alpha(p)}{z_\alpha(p)^2}). \tag{3-62}$$

We have from Eq. (3-51):

$$y(p)dx(p) = -\sum_\alpha \operatorname*{Res}_{q\to\alpha} B(p,q)V_\alpha(q) + \sum_\alpha t_\alpha dS_{\alpha,o}(p) + 2i\pi \sum_i \epsilon_i du_i(p). \tag{3-63}$$

If we introduce

$$B_{\alpha,k}(p) = -\operatorname*{Res}_{q\to\alpha} B(p,q)\, z_\alpha(q)^k, \tag{3-64}$$

we can turn this expression to

$$ydx = \sum_{\alpha,k} t_{\alpha,k} B_{\alpha,k} + \sum_\alpha t_\alpha dS_{\alpha,o} + 2i\pi \sum_i \epsilon_i du_i(p) \tag{3-65}$$

in order to exhibit the moduli of the curve.

4 Definition of Correlation functions and free energies

In all this section, the curve $\mathcal{E}(x,y) = 0$ and a symmetric matrix κ are given and fixed. The unfamiliar reader may choose $\kappa = 0$ since most usual applications (matrix models) correspond to that case.

4.1 Notations

Consider an arbitrary point $p \in \bar{\Sigma}$, and a point q of $\bar{\Sigma}$ which is in the vicinity of a branch point a_i (so that $\overline{q}$ is well defined). We define:

Definition 4.1 *Diagrammatic rules:*

$$\text{vertex}: \qquad \omega(q) = (y(q) - y(\overline{q}))dx(q) \tag{4-1}$$

$$\text{line} - \text{propagator}: \qquad B(p,q) \tag{4-2}$$

$$\text{arrow} - \text{propagator}: \qquad dE_q(p) = \frac{1}{2}\int_q^{\overline{q}} B(\xi,p) \tag{4-3}$$

where the integration path is a path which lies entirely in a vincinity of a_i (thus it is uniquely defined)[3].

$$\text{root}: \qquad \Phi(q) = \int_o^q ydx \tag{4-4}$$

where o is an arbitrary base point on the curve, i.e. Φ is an arbitrary antiderivative of ydx, i.e. $d\Phi = ydx$.

[3]This definition is the opposite of the notation used in [40, 19] since the integral goes from q to $\overline{q}$ instead of going from $\overline{q}$ to q.

The reason why we call these objects diagramatic rules and vertices, propagator or root, is explained in section 4.5 below.

Notice that dE depends on i, i.e. on which branchpoint we are considering, but we omit to mention the index i in order to make the notations easier to read. In all what follows it is always clear which i is being considered.

Notation for subset of indices:

Given a set of points of the curve $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, if $K = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ is any subset of $\{1, 2, \dots, n\}$, we denote:

$$\mathbf{p}_K = \{p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}\} \tag{4-5}$$

4.2 Correlation functions and free energies

4.2.1 Correlation functions

The **k-point correlation functions to order g,** $W_k^{(g)}$, are meromorphic multilinear forms, defined by the following recursive triangular system:

Definition 4.2 *Correlation functions*

$$W_k^{(g)} = 0 \quad \text{if } g < 0 \tag{4-6}$$

$$W_1^{(0)}(p) = 0 \tag{4-7}$$

$$\boxed{W_2^{(0)}(p_1, p_2) = B(p_1, p_2)} \tag{4-8}$$

and define recursively (remember that $\mathbf{p_K}$ is a k-uplet of points cf eq.4-5):

$$\boxed{\begin{array}{l} W_{k+1}^{(g)}(p, \mathbf{p_K}) = \operatorname{Res}_{q\to\mathbf{a}} \frac{dE_q(p)}{\omega(q)} \Big(\\ \quad \sum_{m=0}^{g} \sum_{J\subset K} W_{|J|+1}^{(m)}(q, \mathbf{p_J}) W_{k-|J|+1}^{(g-m)}(\overline{q}, \mathbf{p_{K/J}}) + W_{k+2}^{(g-1)}(q, \overline{q}, \mathbf{p_K}) \Big) \end{array}} \tag{4-9}$$

This system is triangular because all terms in the RHS have lower $2g + k$ than in the LHS and given $W_1^{(0)}$ and $W_2^{(0)}$, it has a unique solution.

Notice that $W_{k+1}^{(g)}(p, p_1, \dots, p_k)$ is a multilinear meromorphic form in each of its arguments, it is clearly symmetric in the last k-ones, and we prove below (theorem 4.6) that it is in fact symmetric in all its arguments.

More properties of $W_{k+1}^{(g)}$ are studied below in section 4.4.

4.2.2 Free energies

We define the **free energies** which are complex numbers:

Definition 4.3 *Free energies.*

For $g > 1$

$$\boxed{F^{(g)} = \frac{1}{2-2g} \sum_i \operatorname*{Res}_{q\to a_i} \Phi(q) W_1^{(g)}(q)} \tag{4-10}$$

and

$$\boxed{F^{(1)} = -\frac{1}{2} \ln(\tau_{Bx}) \; - \frac{1}{24} \ln\left(\prod_i y'(a_i) \right) - \ln(\det \kappa)} \tag{4-11}$$

where

$$y'(a_i) = \frac{dy(a_i)}{dz_i(a_i)} \qquad , \qquad z_i(p) = \sqrt{x(p) - x(a_i)} \tag{4-12}$$

and τ_{Bx} is the Bergmann τ-function defined in Eq. (3-39).

$F^{(0)}$ is defined in the next section.

4.2.3 Leading order free energy $F^{(0)}$.

Let us define $F^{(0)}$ as follows :

$$\boxed{F^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_\alpha \operatorname*{Res}_\alpha V_\alpha y dx + \frac{1}{2} \sum_\alpha t_\alpha \mu_\alpha - \frac{1}{4i\pi} \sum_i \oint_{\mathcal{A}_i} y dx \oint_{\mathcal{B}_i} y dx} \tag{4-13}$$

where μ_α is given by

$$\mu_\alpha = \int_\alpha^o (y dx - dV_\alpha + t_\alpha \frac{dz_\alpha}{z_\alpha}) + V_\alpha(o) - t_\alpha \ln(z_\alpha(o)) \tag{4-14}$$

Notice that μ_α depends on some base point o, but the sum $\sum_\alpha t_\alpha \mu_\alpha$ does not.

4.2.4 Special free energies and correlation functions

All the quantities defined so far, were defined with the κ-modified cycles and modified Bergmann kernel. Let us also define them for $\kappa = 0$ (for instance $F^{(1)}$ obviously needs another definition).

Therefore we also define the unmodified quantities corresponding to $\kappa = 0$, as:

$$\forall k, g, \qquad \underline{W}_k^{(g)}(p_1, \dots, p_k) := W_k^{(g)}(p_1, \dots, p_k)\Big|_{\kappa=0}, \tag{4-15}$$

$$\text{for } g>1, \qquad \underline{F}^{(g)} := \frac{1}{2-2g}\sum_i \operatorname*{Res}_{q\to a_i}\Phi(q)\underline{W}_1^{(g)}(q) = F^{(g)}\big|_{\kappa=0}\ , \tag{4-16}$$

$$\underline{F}^{(1)} = -\frac{1}{2}\ln\left(\tau_{\underline{B}x}\right) \ -\frac{1}{24}\ln\left(\prod_i y'(a_i)\right), \tag{4-17}$$

$$\text{and} \qquad \underline{F}^{(0)} = \frac{1}{2}\sum_\alpha \operatorname*{Res}_\alpha V_\alpha y dx + \frac{1}{2}\sum_\alpha t_\alpha\mu_\alpha - \frac{1}{4i\pi}\sum_i \oint_{\underline{\mathcal{A}}_i} y dx \oint_{\underline{\mathcal{B}}_i} y dx\,. \tag{4-18}$$

Remark 4.1 The special functions, except $\underline{F}^{(1)}$ and $\underline{F}^{(0)}$, are obtained by changing B and dS by $\underline{B}$ and $\underline{dS}$ in the diagrammatic rules defined in section 4.5.

4.3 Tau function

Definition 4.4 *We define the* **tau-function** *as the formal power series in N^{-2}:*

$$\boxed{\ln\left(Z_N(\mathcal{E})\right) = -\sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g}F^{(g)}.} \tag{4-19}$$

We show in section 9 that $Z_N(\mathcal{E})$ is indeed a tau-function because it obeys Hirota equations, order by order in N^{-2}.

4.4 Properties of correlation functions

The loop functions defined in definition 4.2 satisfy the following theorems, whose **proofs can be found in Appendix A**:

Theorem 4.1 *The correlation function $W_3^{(0)}$ is worth:*

$$W_3^{(0)}(p,p_1,p_2) = \operatorname*{Res}_{q\to\mathbf{a}} \frac{B(q,p)B(q,p_1)B(q,p_2)}{dx(q)dy(q)} \tag{4-20}$$

In particular, $W_3^{(0)}$ is symmetric in its 3 variables.

Theorem 4.2 *For $(k,g)\neq(1,0)$, the loop function $W_{k+1}^{(g)}(p,p_1,\dots,p_k)$ has poles (in any of its variables $p,p_1,\dots,p_k$) only at the branch points.*

Theorem 4.3 *For every $\mathcal{A}$ cycle we have:*

$$\forall i=1,\dots,\mathbf{g} \qquad \oint_{p\in\mathcal{A}_i} W_{k+1}^{(g)}(p,p_1,\dots,p_k) = 0, \tag{4-21}$$

$$\forall i=1,\dots,\mathbf{g}\ ,\forall m=1,\dots,k \qquad \oint_{p_m\in\mathcal{A}_i} W_{k+1}^{(g)}(p,p_1,\dots,p_k) = 0. \tag{4-22}$$

Theorem 4.4 *For every k and g, we have:*

$$\sum_i \frac{W_{k+1}^{(g)}(p^i,p_1,\dots,p_k)}{dx(p^i)} = \delta_{k,1}\delta_{g,0}\frac{dx(p_1)}{(x(p)-x(p_1))^2} \tag{4-23}$$

and if $k\geq 1$:

$$\sum_i \frac{W_{k+1}^{(g)}(p_1,p^i,p_2,\dots,p_k)}{dx(p^i)} = \delta_{k,1}\delta_{g,0}\frac{dx(p_1)}{(x(p)-x(p_1))^2} \tag{4-24}$$

where we recall that p^i are all the points such that $x(p^i)=x(p)$ (see section 3.1).

Theorem 4.5 *For $(k,g)\neq(0,1)$,*

$$P_k^{(g)}(x(p),\mathbf{p_K}) = \frac{1}{dx(p)^2}\sum_i\Big[-2y(p^i)dx(p)W_{k+1}^{(g)}(p^i,\mathbf{p_K}) + W_{k+2}^{(g-1)}(p^i,p^i,\mathbf{p_K}) + \sum_{m=0}^{g}\sum_{J\subset K} W_{j+1}^{(m)}(p^i,\mathbf{p_J})W_{k-j+1}^{(g-m)}(p^i,\mathbf{p_{K/J}})\Big] \tag{4-25}$$

is a rational function of $x(p)$, with no poles at branch-points.

Theorem 4.6 *$W_k^{(g)}$ is a symmetric function of its k variables.*

Corollary 4.1

$$\forall i, \qquad \operatorname*{Res}_{p\to a_i} W_{k+1}^{(g)}(p,p_1,\dots,p_k) = 0, \tag{4-26}$$

$$\forall i, \qquad \operatorname*{Res}_{p\to a_i} x(p)W_{k+1}^{(g)}(p,p_1,\dots,p_k) = 0, \tag{4-27}$$

$$\sum_i \operatorname*{Res}_{p\to a_i} y(p)W_{k+1}^{(g)}(p,p_1,\dots,p_k) = 0, \tag{4-28}$$

$$\sum_i \operatorname*{Res}_{p\to a_i} x(p)y(p)W_{k+1}^{(g)}(p,p_1,\dots,p_k) = 0. \tag{4-29}$$

Theorem 4.7 *For $k\geq 1$ we have:*

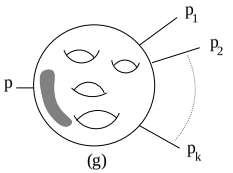
$$\operatorname*{Res}_{p_{k+1}\to\mathbf{a},p_1,\dots,p_k} \Phi(p_{k+1})W_{k+1}^{(g)}(\mathbf{p_K},p_{k+1}) = (2g+k-2)W_k^{(g)}(\mathbf{p_K}) + \delta_{g,0}\delta_{k,1}y(p_1)dx(p_1). \tag{4-30}$$

Notice that for $k=0$ and $g\geq 2$, it holds by definition if we define $W_0^{(g)} = -F^{(g)}$.

4.5 Diagrammatic representation

The recursive definitions of $W_k^{(g)}$ and $F^{(g)}$ can be represented **graphically**.

We represent the multilinear form $W_k^{(g)}(p_1,\dots,p_k)$ as a blob-like "surface" with g holes and k legs (or punctures) labeled with the variables $p_1,\dots,p_k$, and $F^{(g)}$ with 0 legs and g holes.

$W_{k+1}^{(g)}(p,p_1,\dots,p_k) :=$ 

, $F^{(g)} :=$

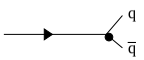
(4-31)

We represent the Bergmann kernel $B(p,q)$ (which is also $W_2^{(0)}$, i.e. a blob with 2 legs and no hole) as a straight non-oriented line between p and q

$B(p,q) :=$

. (4-32)

We represent $\frac{dE_q(p)}{\omega(q)}$ as a straight arrowed line with the arrow from p towards q, and with a tri-valent vertex whose legs are q and $\overline{q}$

$\frac{dE_q(p)}{\omega(q)} :=$ 

. (4-33)

Graphs

Definition 4.5 *For any $k \geq 0$ and $g \geq 0$ such that $k+2g \geq 3$, we define:*
Let $\mathcal{G}_{k+1}^{(g)}(p,p_1,\dots,p_k)$ be the set of connected trivalent graphs defined as follows:

1. *there are $2g+k-1$ tri-valent vertices called vertices.*
2. *there is one 1-valent vertex labelled by p, called the root.*
3. *there are k 1-valent vertices labelled with $p_1,\dots,p_k$ called the leaves.*
4. *There are $3g+2k-1$ edges.*
5. *Edges can be arrowed or non-arrowed. There are $k+g$ non-arrowed edges and $2g+k-1$ arrowed edges.*
6. *The edge starting at p has an arrow leaving from the root p.*

7. *The k edges ending at the leaves $p_1,\dots,p_k$ are non-arrowed.*
8. *The arrowed edges form a "spanning[4] planar[5] binary skeleton[6] tree" with root p. The arrows are oriented from root towards leaves. In particular, this induces a partial ordering of all vertices.*
9. *There are k non-arrowed edges going from a vertex to a leaf, and g non arrowed edges joining two inner vertices. Two inner vertices can be connected by a non arrowed edge only if one is the parent of the other along the tree.*
10. *If an arrowed edge and a non-arrowed inner edge come out of a vertex, then the arrowed edge is the left child. This rule only applies when the non-arrowed edge links this vertex to one of its descendants (not one of its parents).*

We have the following useful lemma:

Lemma 4.1 *There is a 1 to $3g+2k-1$ map from $\mathcal{G}_{k+1}^{(g)}(p,\mathbf{p_K})$ to $\mathcal{G}_{k+2}^{(g)}(p,\mathbf{p_K},p_{k+1})$.*

proof:

If G is a graph in $\mathcal{G}_{k+2}^{(g)}(p,p_1,\dots,p_k,p_{k+1})$, remove the non-arrowed edge attached to the leaf p_{k+1} and remove the corresponding vertex, and merge the incoming and the other outgoing edges of that vertex. You clearly get a graph $G' \in \mathcal{G}_{k+1}^{(g)}(p,p_1,\dots,p_k)$. It is clear that the same graph is obtained $3g+2k-1$ times (the number of edges of G'. And it is clear that from any $G' \in \mathcal{G}_{k+1}^{(g)}(p,p_1,\dots,p_k)$, you can obtain $3g+2k-1$ graphs $G \in \mathcal{G}_{k+2}^{(g)}(p,p_1,\dots,p_k,p_{k+1})$ by adding a new vertex on any edge, and linking this new vertex to the leaf p_{k+1}. □

Example of $\mathcal{G}_1^{(2)}(p)$

As an example, let us build step by step all the graphs of $\mathcal{G}_1^{(2)}(p)$, i.e. $g=2$ and $k=0$.

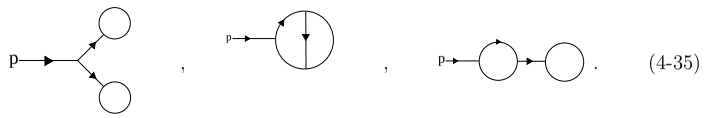
We first draw all planar binary skeleton trees with one root p and $2g+k-1=3$ arrowed edges:

. (4-34)

Then, we draw $g+k=2$ non-arrowed edges in all possible ways such that every vertex is trivalent, also satisfying rule 9) of definition.4.5. There is only one possibility for the

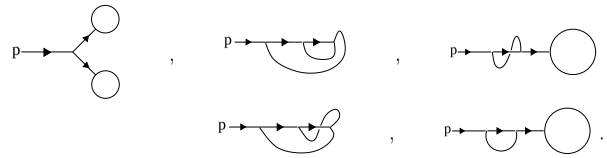
[4] It goes through all vertices.
[5] planar tree means that the left child and right child are not equivalent. The right child is marked by a black disk on the outgoing edge.
[6] a binary skeleton tree is a binary tree from which we have removed the leaves, i.e. a tree with vertices of valence 1, 2 or 3.

first graph and two for the second one:



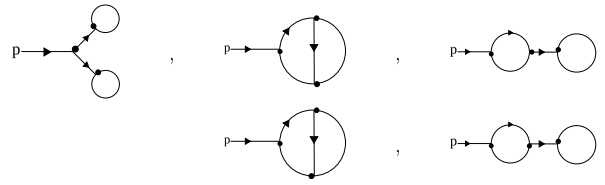
(4-35)

It just remains to specify the left and right children for each vertex. The only possibilities in accordance with rule 10) of def.4.5 are[7]:



(4-36)

In order to simplify the drawing, we can draw a black dot to specify the right child. This way one gets only planar graphs.



(4-37)

Remark that without the prescriptions 9) and 10), one would get 13 different graphs whereas we only have 5.

Weight of a graph

Consider a graph $G \in \mathcal{G}^{(g)}_{k+1}(p, p_1, \ldots, p_k)$. Then, to each vertex $i = 1, \ldots, 2g+k-1$ of G, we associate a label q_i, and we associate q_i to the beginning of the left child edge, and $\overline{q}_i$ to the right child edge. Thus, each edge (arrowed or not), links two labels which are points on the Riemann surface $\bar{\Sigma}$.

- To an arrowed edge going from q' towards q, we associate a factor $\frac{dE_q(q')}{(y(q)-y(\overline{q}))dx(q)}$.
- To a non arrowed edge going between q' and q we associate a factor $B(q', q)$.

[7] Note that the graphs are not necessarily planar.

- Following the arrows backwards (i.e. from leaves to root), for each vertex q, we take a residue at $q \to \mathbf{a}$, i.e. we sum over all branchpoints.

After taking all the residues, we get the weight of the graph:

$$w(G) \tag{4-38}$$

which is a multilinear form in $p, p_1, \ldots, p_k$.

Similarly, we define weights of linear combinations of graphs by:

$$w(\alpha G_1 + \beta G_2) = \alpha w(G_1) + \beta w(G_2) \tag{4-39}$$

and for a disconnected graph, i.e. a product of two graphs:

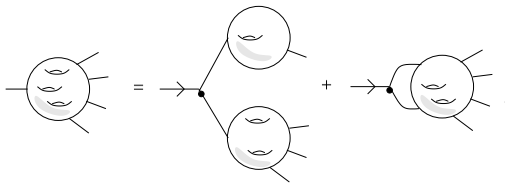
$$w(G_1 G_2) = w(G_1) w(G_2). \tag{4-40}$$

Theorem 4.8 *We have:*

$$W^{(g)}_{k+1}(p, p_1, \ldots, p_k) = \sum_{G \in \mathcal{G}^{(g)}_{k+1}(p, p_1, \ldots, p_k)} w(G) = w\left(\sum_{G \in \mathcal{G}^{(g)}_{k+1}(p, p_1, \ldots, p_k)} G \right) \tag{4-41}$$

proof:

This is precisely what the recursion equations 4-9 of def.4.2 are doing. Indeed, one can represent them diagrammatically by



(4-42)

□

Such graphical notations are very convenient, and are a good support for intuition and even help proving some relationships. It was immediately noticed after [33] that those diagrams look very much like Feynman graphs, and there was a hope that they could be the Feynman's graphs for the Kodaira–Spencer theory. But they ARE NOT Feynman graphs, because Feynman graphs can't have non-local restrictions like the fact that non oriented lines can join only a vertex and one of its descendent.

Those graphs are merely a notation for the recursive definition 4.2.

Lemma 4.2 Symmetry factor: *The weight of two graphs differing by the exchange of the right and left children of a vertex are the same. Indeed, the distinction between right and left child is just a way of encoding symmetry factors.*

proof:

This property follows directly from theorem 4.4 and the definition Eq. (4-9). Consider one term contributing to the first part of RHS of Eq. (4-9):

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{Res}_{q\to\mathbf{a}} \frac{dE_q(p)}{\omega(q)} W^{(m)}_{|J|+1}(q,\mathbf{P_J}) W^{(g-m)}_{k-|J|+1}(\overline{q},\mathbf{P_{K/J}}) \\
&\quad = -\operatorname*{Res}_{q\to\mathbf{a}} \frac{dE_q(p)}{\omega(q)} W^{(m)}_{|J|+1}(q,\mathbf{P_J}) W^{(g-m)}_{k-|J|+1}(q,\mathbf{P_{K/J}}) \qquad (4\text{-}43)\\
&\quad = \operatorname*{Res}_{q\to\mathbf{a}} \frac{dE_q(p)}{\omega(q)} W^{(m)}_{|J|+1}(\overline{q},\mathbf{P_J}) W^{(g-m)}_{k-|J|+1}(q,\mathbf{P_{K/J}}).
\end{aligned}$$

where the equalities are obtained by adding terms without residues at the branch points to the integrand and using theorem 4.4. One can perform the same trick for the second term in Eq. (4-9) and this proves the lemma. □

4.6 Examples.

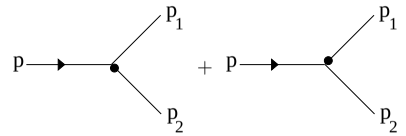
Let us present some examples of correlation functions and free energy for low order.

Correlation functions.

To leading order, one has the first correlation functions given by:

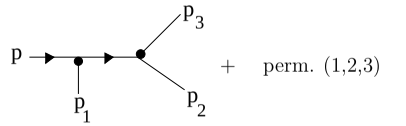
$$W^{(0)}_2(p,q) = B(p,q). \qquad (4\text{-}44)$$

$W^{(0)}_3(p,p_1,p_2)$ =



$$= \operatorname*{Res}_{q\to\mathbf{a}} \frac{dE_q(p)}{\omega(q)} \left[B(q,p_1)B(\overline{q},p_2) + B(\overline{q},p_1)B(q,p_2)\right] \qquad (4-45)$$

$W^{(0)}_4(p,p_1,p_2,p_3)$ =



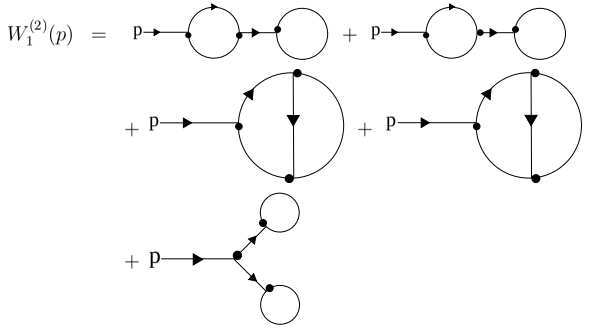
$$\begin{aligned}
= \quad & \operatorname*{Res}_{q\to\mathbf{a}} \operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}} \frac{dE_q(p)}{\omega(q)} \frac{dE_r(q)}{\omega(r)} \left[B(\overline{q},p_1)B(r,p_2)B(\overline{r},p_3)\right.\\
& + B(\overline{q},p_1)B(\overline{r},p_2)B(r,p_3) + B(\overline{q},p_2)B(r,p_1)B(\overline{r},p_3)\\
& + B(\overline{q},p_2)B(\overline{r},p_1)B(r,p_3) + B(\overline{q},p_3)B(r,p_2)B(\overline{r},p_1)\\
& \left. + B(\overline{q},p_3)B(\overline{r},p_2)B(r,p_1)\right]\\
& + \operatorname*{Res}_{q\to\mathbf{a}} \operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}} \frac{dE_q(p)}{\omega(q)} \frac{dE_r(\overline{q})}{\omega(r)} \left[B(q,p_1)B(r,p_2)B(\overline{r},p_3)\right.\\
& + B(q,p_1)B(\overline{r},p_2)B(r,p_3) + B(q,p_2)B(r,p_1)B(\overline{r},p_3)\\
& + B(q,p_2)B(\overline{r},p_1)B(r,p_3) + B(q,p_3)B(r,p_2)B(\overline{r},p_1)\\
& \left. + B(q,p_3)B(\overline{r},p_2)B(r,p_1)\right]
\end{aligned} \qquad (4-46)$$

First orders for the one point correlation function read:

$W^{(1)}_1(p)$ =

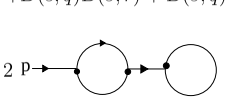
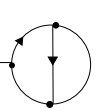
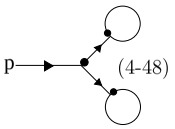
$$= \operatorname*{Res}_{q\to\mathbf{a}} \frac{dE_q(p)}{\omega(q)} B(q,\overline{q}) \qquad (4-47)$$

$W^{(2)}_1(p)$ =



$$\begin{aligned}
= \quad & \operatorname*{Res}_{q\to\mathbf{a}} \operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}} \operatorname*{Res}_{s\to\mathbf{a}} \frac{dE_q(p)}{\omega(q)} \frac{dE_r(q)}{\omega(r)} \frac{dE_s(\overline{q})}{\omega(s)} B(r,\overline{r})B(s,\overline{s})\\
& + \operatorname*{Res}_{q\to\mathbf{a}} \operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}} \operatorname*{Res}_{s\to\mathbf{a}} \frac{dE_q(p)}{\omega(q)} \frac{dE_r(q)}{\omega(r)} \frac{dE_s(\overline{r})}{\omega(s)} B(r,\overline{q})B(s,\overline{s})
\end{aligned}$$

$$+\operatorname*{Res}_{q\to\mathbf{a}}\operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}}\operatorname*{Res}_{s\to\mathbf{a}}\frac{dE_q(p)}{\omega(q)}\frac{dE_r(q)}{\omega(r)}\frac{dE_s(r)}{\omega(s)}[B(\overline{q},\overline{r})B(s,\overline{s})$$
$$+B(\overline{s},\overline{q})B(s,\overline{r})+B(s,\overline{q})B(\overline{s},\overline{r})]$$

$=$ 2  $+$ 2  $+$  (4-48)

where the last expression is obtained using lemma 4.2.

Free energy.

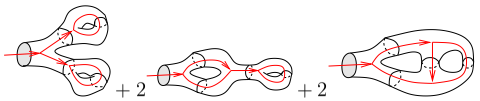
The second order free energy reads

$$\begin{aligned}-2F^{(2)} \quad = \quad & \operatorname*{Res}_{p\to\mathbf{a}}\operatorname*{Res}_{q\to\mathbf{a}}\operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}}\operatorname*{Res}_{s\to\mathbf{a}}\frac{\Phi(p)dE_q(p)}{\omega(q)}\frac{dE_r(q)}{\omega(r)}\frac{dE_s(\overline{q})}{\omega(s)}B(r,\overline{r})B(s,\overline{s})\\
&+\operatorname*{Res}_{p\to\mathbf{a}}\operatorname*{Res}_{q\to\mathbf{a}}\operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}}\operatorname*{Res}_{s\to\mathbf{a}}\frac{\Phi(p)dE_q(p)}{\omega(q)}\frac{dE_r(q)}{\omega(r)}\frac{\Phi(p)dE_s(\overline{r})}{\omega(s)}B(r,\overline{q})B(s,\overline{s})\\
&+\operatorname*{Res}_{p\to\mathbf{a}}\operatorname*{Res}_{q\to\mathbf{a}}\operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}}\operatorname*{Res}_{s\to\mathbf{a}}\frac{\Phi(p)dE_q(p)}{\omega(q)}\frac{dE_r(q)}{\omega(r)}\frac{dE_s(r)}{\omega(s)}[B(\overline{q},\overline{r})B(s,\overline{s})\\
&+B(\overline{s},\overline{q})B(s,\overline{r})+B(s,\overline{q})B(\overline{s},\overline{r})]\end{aligned}$$
$$(4-49)$$

4.7 Remark: Teichmuller pant gluings

Every Riemann surface of genus g with k punctures can be decomposed into $2g+k$ pants whose boundaries are $3g+k$ closed geodesics (in the metric with constant negative curvature). The number of ways (in the combinatorial sense) of gluing $2g+k$ pants by their boundaries is clearly the same as the number of diagrams of $\mathcal{G}_k^{(g)}$, and each diagram corresponds to one pant decomposition.

Example with $k=1$ and $g=2$:

$W_1^{(2)} =$ 

5 Variations of the curve

The goal of this section is to study how the various $F^{(g)}$ and correlation functions change under the variations of moduli of the curve.

Consider an infinitesimal variation of the curve $\mathcal{E}\to\mathcal{E}+\delta\mathcal{E}$. It induces a variation of the function $y(x)$ at fixed x:

$$\delta_\Omega\, y|_x\, dx = -\Omega. \qquad (5\text{-}1)$$

If we use a local coordinate z, we may prefer to work at fixed z instead of fixed x, we have a Poisson structure:

$$\delta_\Omega\, y|_z\, dx - \delta_\Omega\, x|_z\, dy = -\Omega \qquad (5\text{-}2)$$

The possible Ω's can be classified as first type (holomorphic), second type (residueless, and vanishing $\mathcal{A}$-cycles) and third type (only simple poles and vanishing $\mathcal{A}$-cycles), see [12] for this classification.

5.1 Rauch variational formula

Equation 5-2 implies that the variation of position of a branch point a_i is given by:

$$\delta_\Omega\, x(a_i) = \frac{\Omega(a_i)}{dy(a_i)}. \qquad (5\text{-}3)$$

We assume here that $\frac{\Omega}{dy}$ has no pole at branchpoints. Then, Rauch variational formula [68, 47] implies that the change of the Bergmann kernel is

$$\begin{aligned}\delta_\Omega \underline{B}(p,q)|_{x(p),x(q)} &= \sum_i \frac{\Omega(a_i)}{dy(a_i)}\operatorname*{Res}_{r\to a_i}\frac{\underline{B}(r,p)\underline{B}(r,q)}{dx(r)}\\
&= \sum_i \operatorname*{Res}_{r\to a_i}\frac{\Omega(r)\underline{B}(r,p)\underline{B}(r,q)}{dx(r)dy(r)}. \qquad (5\text{-}4)\end{aligned}$$

In particular after integrating over a $\underline{\mathcal{B}}$-cycle we have:

$$\delta_\Omega du(p)|_{x(p)} = \sum_i \operatorname*{Res}_{r\to a_i}\frac{\Omega(r)\underline{B}(r,p)du(r)}{dx(r)dy(r)}, \qquad (5-5)$$

and integrating again over a $\underline{\mathcal{B}}$-cycle:

$$\delta_\Omega \tau = 2i\pi\sum_i \operatorname*{Res}_{r\to a_i}\frac{\Omega(r)du(r)du^t(r)}{dx(r)dy(r)}. \qquad (5-6)$$

Let us compute the variations of the κ-modified Bergmann kernel:

$$\begin{aligned}\delta_\Omega B(p,q)|_{x(p),x(q)} &= \delta_\Omega \underline{B}(p,q)|_{x(p),x(q)} + 2i\pi\ \delta_\Omega du^t(p)\big|_{x(p)}\ \kappa du(q)\\
&\quad +2i\pi du^t(p)\,\kappa\ \delta_\Omega du(q)|_{x(q)}\\
&= \operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}}\frac{\Omega(r)\underline{B}(r,p)\underline{B}(r,q)}{dx(r)dy(r)}\\
&\quad +2i\pi\operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}}\frac{\Omega(r)\underline{B}(r,p)du^t(r)\kappa du(q)}{dx(r)dy(r)}\\
&\quad +2i\pi\operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}}\frac{\Omega(r)\underline{B}(r,q)du^t(p)\,\kappa\, du(r)}{dx(r)dy(r)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}} \frac{\Omega(r)\underline{B}(r,p)\underline{B}(r,q)}{dx(r)dy(r)} \\
&\quad + \operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}} \frac{\Omega(r)\underline{B}(r,p)(B(r,q)-\underline{B}(r,q))}{dx(r)dy(r)} \\
&\quad + \operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}} \frac{\Omega(r)(B(r,p)-\underline{B}(r,p))\underline{B}(r,q)}{dx(r)dy(r)} \\
&= \operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}} \frac{\Omega(r)B(r,p)B(r,q)}{dx(r)dy(r)} \\
&\quad + 4\pi^2 \operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}} \frac{\Omega(r)du^t(p)\kappa du(r)du^t(r)\kappa du(q)}{dx(r)dy(r)} \\
&= \operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}} \frac{\Omega(r)B(r,p)B(r,q)}{dx(r)dy(r)} - 2i\pi\, du^t(p)\kappa\, \delta_\Omega\tau\, \kappa du(q) \qquad (5\text{-}7)
\end{aligned}
$$

i.e.

$$
\begin{aligned}
\left(\delta_\Omega + \operatorname{tr}\left(\kappa\,\delta_\Omega\tau\,\kappa\frac{\partial}{\partial\kappa}\right)\right)_{x(p),x(q)} B(p,q) &= \operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}} \frac{\Omega(r)B(r,p)B(r,q)}{dx(r)dy(r)} \\
&= -2\operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}} \frac{\Omega(r)dE_r(p)B(r,q)}{\omega(r)}.
\end{aligned}
\qquad (5-8)
$$

We thus define the **covariant variation**:

$$
\boxed{D_\Omega = \delta_\Omega + \operatorname{tr}\left(\kappa\,\delta_\Omega\tau\,\kappa\frac{\partial}{\partial\kappa}\right).} \qquad (5\text{-}9)
$$

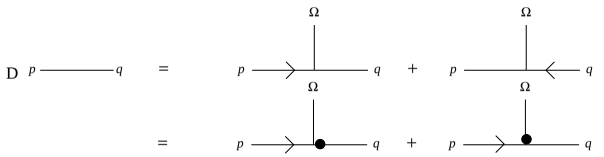
It is more convenient to rewrite Eq. (5-8) as follows:

$$
\begin{aligned}
D_\Omega B(p,q) &= -2\operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}} \frac{\Omega(r)dE_r(p)B(r,q)}{\omega(r)} \\
&= -2\operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}} \operatorname*{Res}_{s\to r} \frac{\Omega(r)dE_r(p)B(s,q)}{(y(r)-y(\overline{r}))(x(s)-x(r))} \\
&= 2\operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}} \operatorname*{Res}_{s\to\overline{r}} \frac{\Omega(r)dE_r(p)B(s,q)}{(y(r)-y(\overline{r}))(x(s)-x(r))} \\
&= 2\operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}} \frac{\Omega(r)dE_r(p)B(\overline{r},q)}{\omega(r)} \\
&= \operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}} \frac{dE_r(p)}{\omega(r)}\left[\Omega(r)B(\overline{r},q)+\Omega(\overline{r})B(r,q)\right]. \qquad (5\text{-}10)
\end{aligned}
$$

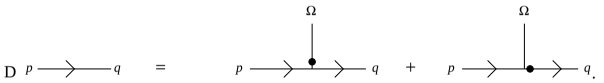
because now we recognize the propagator and vertex of def.4.1. Similarly, by integrating once with respect to q, near a branch point a_j we get:

$$
\begin{aligned}
D_\Omega\, dE_q(p)\big|_{x(p),x(q)} &= -2\operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}} \frac{dE_r(p)}{\omega(r)}\,\Omega(r)dE_q(r) \\
&= \operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}} \frac{dE_r(p)}{\omega(r)}\left[\Omega(r)dE_q(\overline{r})+\Omega(\overline{r})dE_q(r)\right]
\end{aligned}
\qquad (5-11)
$$

Those two relations can be depicted:



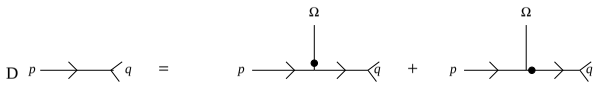
and



From this last variation, one can compute the covariant variations of the correlation functions and free energies through the following lemma:

Lemma 5.1 *For any symmetric bilinear form $f(q,p)=f(p,q)$:*

$$
\begin{aligned}
D_\Omega\left(\operatorname*{Res}_{q\to\mathbf{a}} \frac{dE_q(p)}{\omega(q)}\, f(q,\overline{q})\right)_{x(p)} &= 2\sum_{i,j} \operatorname*{Res}_{r\to a_i} \operatorname*{Res}_{q\to a_j} \frac{dE_r(p)}{\omega(r)}\,\Omega(r)\,\frac{dE_q(r)}{\omega(q)}\, f(q,\overline{q}) \\
&\quad + \sum_j \operatorname*{Res}_{q\to a_j} \frac{dE_q(p)}{\omega(q)}\, D_\Omega\left(f(q,\overline{q})\right)_{x(q)}.
\end{aligned}
\qquad (5-12)
$$



Graphically, this means that taking the variation of a diagram just consists in adding a leg Ω in all possible edges of the graph. In particular if Ω can be written as:

$$
\Omega(p) = \int_{\partial\Omega} B(p,q)\Lambda(q) \qquad (5\text{-}13)
$$

where the path $\partial\Omega$ does not intersect small circles around branch-points[8], then we have:

[8] This excludes the case where Ω corresponds to the variation of an hard edge, cf [36, 16, 12].

Theorem 5.1 *Variations of correlation functions and free energies: For $g+k>1$ we have*

$$\boxed{D_\Omega W_k^{(g)}(p_1,\dots,p_k)\Big|_{x(p_i)} = \int_{\partial\Omega} W_{k+1}^{(g)}(p_1,\dots,p_k,q)\Lambda(q)} \tag{5-14}$$

and, for $g\geq 1$,

$$\boxed{D_\Omega F^{(g)} = -\int_{\partial\Omega} W_1^{(g)}(p)\Lambda(p).} \tag{5-15}$$

This theorem is proved in appendix B. It follows directely from lemma 4.1 and lemma 5.1.

5.2 Loop insertion operator

In particular for any point q lying away from the branch-points, if we choose

$$\Omega(p) = B(p,q) \tag{5-16}$$

we call $D_{B(.,q)}$ the **loop insertion operator**, by analogy with matrix models [7, 39].

It acts on the correlation functions and free energies as follows:

Theorem 5.2

$$D_B\, W_k^{(g)}(p_1,\dots,p_k) = W_{k+1}^{(g)}(p_1,\dots,p_k,q) \tag{5-17}$$

$$D_B\, F^{(g)} = -W_1^{(g)}(q) \tag{5-18}$$

and

$$D_B\, F^{(0)} = y(q)dx(q) + \frac{1}{4i\pi}\left(\kappa\oint_{\mathcal{B}} ydx\right)^t \oint_{\mathcal{B}}\oint_{\mathcal{B}} W_{3,0}\kappa\oint_{\mathcal{B}} ydx. \tag{5-19}$$

Thus, the loop insertion operator, adds one leg to correlation functions.

5.3 Variations with respect to the moduli

Let us consider canonical variations of the curve corresponding to each moduli of the curve defined in section 3.4. We use Eq. (3-65)

$$ydx = \sum_{\alpha,k} t_{\alpha,k}B_{\alpha,k} + \sum_\alpha t_\alpha dS_{\alpha,o} + 2i\pi\sum_i \epsilon_i du_i(p) \tag{5-20}$$

to identify the Ω's corresponding to varying only one modulus.

Variation of filling fractions

Consider the variation of the curve

$$\Omega(p) = -2i\pi du_i(p) = -\oint_{\mathcal{B}_i} B(p,q). \tag{5-21}$$

i.e. $\partial\Omega=\mathcal{B}_i$ and $\Lambda=-1$. It is such that:

$$\delta_\Omega\epsilon_j = \delta_{ij} \qquad , \qquad \delta_\Omega t_\alpha = 0 \qquad , \qquad \delta_\Omega V_\alpha = 0. \tag{5-22}$$

Therefore it is equivalent to varying only the filling fraction $\epsilon_i = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{A}_i} ydx$:

$$D_{-2i\pi du_i} = \frac{\partial}{\partial\epsilon_i} \tag{5-23}$$

Theorem 5.1 gives

$$\frac{\partial}{\partial\epsilon_i} W_k^{(g)}(p_1,\dots,p_k) = -\oint_{\mathcal{B}_i} W_{k+1}^{(g)}(p_1,\dots,p_k,q), \tag{5-24}$$

and

$$\frac{\partial}{\partial\epsilon_i} F^{(g)} = \oint_{\mathcal{B}_i} W_1^{(g)}(q), \tag{5-25}$$

and

$$\frac{\partial}{\partial\epsilon_i} F^{(0)} = -\oint_{\mathcal{B}_j} ydx + \frac{1}{4i\pi}\left(\kappa\oint_{\mathcal{B}} ydx\right)^t \delta_{-2i\pi du_i}(\tau)\,\kappa\oint_{\mathcal{B}} ydx. \tag{5-26}$$

Variation of temperatures

Let α and α' be two distinct poles of ydx. Consider the variation of the curve

$$\Omega(p) = -dS_{\alpha,\alpha'}(p) = \int_\alpha^{\alpha'} B(p,q) \qquad , \qquad \text{i.e. } \partial\Omega=[\alpha,\alpha'] \ , \ \Lambda=1 \tag{5-27}$$

It is such that:

$$\delta_\Omega\epsilon_j = 0 \qquad , \qquad \delta_\Omega t_\beta = \delta_{\alpha,\beta}-\delta_{\alpha',\beta} \qquad , \qquad \delta_\Omega V_\beta = 0. \tag{5-28}$$

Therefore it is equivalent to varying only the temperatures t_α and $t_{\alpha'}$:

$$D_{-dS_{\alpha,\alpha'}} = \frac{\partial}{\partial t_\alpha} - \frac{\partial}{\partial t'_\alpha} \tag{5-29}$$

Notice that it is impossible to vary only one temperature t_α since we have $\sum_\beta t_\beta = 0$.

Theorem 5.1 gives

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} - \frac{\partial}{\partial t'_\alpha}\right) W_k^{(g)}(p_1,\dots,p_k) = \int_\alpha^{\alpha'} W_{k+1}^{(g)}(p_1,\dots,p_k,q), \tag{5-30}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} - \frac{\partial}{\partial t'_\alpha}\right) F^{(g)} = \int_{\alpha'}^{\alpha} W_1^{(g)}(q) \tag{5-31}$$

and

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} - \frac{\partial}{\partial t'_\alpha}\right) F^{(o)} = \mu_\alpha - \mu_{\alpha'} + \frac{1}{4i\pi}\left(\kappa\oint_{\mathcal{B}} ydx\right)^t \delta_{-dS_{\alpha,\alpha'}}(\tau)\,\kappa\oint_{\mathcal{B}} ydx. \tag{5-32}$$

Variation of the moduli of the poles

Let α be a pole of ydx. Consider the variation of the curve

$$\Omega(p) = -B_{\alpha,k} = \operatorname*{Res}_{\alpha} B(p,q) z_\alpha^k(q), \tag{5-33}$$

i.e. $\partial\Omega$ is a small circle around α and $\Lambda = \frac{1}{2i\pi} z_\alpha^k$. It is such that:

$$\delta_\Omega \epsilon_j = 0 \qquad , \qquad \delta_\Omega t_\beta = 0 \qquad , \qquad \delta_\Omega t_{\beta,k'} = \delta_{\alpha,\beta}\delta_{k,k'} \tag{5-34}$$

Therefore it is equivalent to varying only the coefficient $t_{\alpha,k}$:

$$D_{-B_{\alpha,k}} = \frac{\partial}{\partial t_{\alpha,k}} \tag{5-35}$$

Theorem 5.1 gives

$$\frac{\partial}{\partial t_{\alpha,k}} W_k^{(g)}(p_1,\dots,p_k) = \operatorname*{Res}_{\alpha} z_\alpha^k(q) W_{k+1}^{(g)}(p_1,\dots,p_k,q), \tag{5-36}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_{\alpha,k}} F^{(g)} = -\operatorname*{Res}_{\alpha} z_\alpha^k(q) W_1^{(g)}(q) \tag{5-37}$$

and

$$\frac{\partial}{\partial t_{\alpha,k}} F^{(o)} = \operatorname*{Res}_{\alpha} ydx z_\alpha^k + \frac{1}{4i\pi}\left(\kappa \oint_{\mathcal{B}} ydx\right)^t \delta_{B_{\alpha,k}}(\tau)\, \kappa \oint_{\mathcal{B}} ydx. \tag{5-38}$$

5.4 Homogeneity

Theorem 5.3 *For $g > 1$, we have the homogeneity property:*

$$(2-2g)F^{(g)} = \sum_{\alpha,k} t_{\alpha,k}\frac{\partial}{\partial t_{\alpha,k}}F^{(g)} + \sum_\alpha t_\alpha \frac{\partial}{t_\alpha} F^{(g)} + \sum_i \epsilon_i \frac{\partial}{\partial \epsilon_i} F^{(g)} \tag{5-39}$$

i.e. $F^{(g)}$ is homogeneous of degree $2-2g$.

The proof is given in appendix B.

5.5 Variations of $F^{(0)}$ with respect to the moduli.

In this section we compute the first and second deriatives of $F^{(0)}$ with respect to the moduli of the curve. This paragraph is only for bookkeeping since those expressions have been known for some time [63, 12, 13]. Here we set $\kappa = 0$.

First derivatives of $F^{(0)}$.

$$\frac{\partial F^{(0)}}{\partial t_{\alpha,k}} = \operatorname*{Res}_{\alpha} z_\alpha^k\, ydx \tag{5-40}$$

$$\frac{\partial F^{(0)}}{\partial t_{\alpha,\beta}} = \left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha} - \frac{\partial}{\partial t_\beta}\right) F^{(0)} = \mu_\alpha - \mu_\beta \tag{5-41}$$

$$\frac{\partial F^{(0)}}{\partial \epsilon_i} = -\oint_{\mathcal{B}_i} ydx \tag{5-42}$$

Second derivatives of $F^{(0)}$.

$$\frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial t_{\alpha,k}\partial t_{\beta,l}} = (\delta_{\alpha,\beta}-1) \operatorname*{Res}_{p\to\alpha} \operatorname*{Res}_{q\to\beta} z_\alpha(p)^k B(p,q) z_\beta(q)^l \tag{5-43}$$

$$\frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial t_{\alpha,k}\partial t_{\gamma,\beta}} = \operatorname*{Res}_{\alpha} z_\alpha^k dS_{\gamma,\beta} \tag{5-44}$$

$$\frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial t_{\alpha,k}\partial \epsilon_i} = 2i\pi \operatorname*{Res}_{\alpha} z_\alpha^k du_i = -\oint_{\mathcal{B}_i} B_{\alpha,k} \tag{5-45}$$

$$\frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial \epsilon_i \partial t_{\alpha,\beta}} = 2i\pi(u_i(\beta) - u_i(\alpha)) \tag{5-46}$$

$$\frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial \epsilon_i \partial \epsilon_j} = 0 \;\; (-2i\pi\tau_{ij} \; for \; \underline{F}^{(0)}) \tag{5-47}$$

$$\frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial t_{\alpha,\beta}^2} = \ln\left(d\zeta_\alpha(\alpha) d\zeta_\beta(\beta) E(\alpha,\beta)^2\right) \tag{5-48}$$

$$\frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial t_{\alpha,\beta}\partial t_{\alpha,\gamma}} = \ln\left(\frac{d\zeta_\alpha(\alpha)E(\alpha,\beta)E(\alpha,\gamma)}{E(\beta,\gamma)}\right) \tag{5-49}$$

$$\frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial t_{\alpha,\beta}\partial t_{\delta,\gamma}} = \ln\left(\frac{E(\delta,\beta)E(\alpha,\gamma)}{E(\alpha,\delta)E(\beta,\gamma)}\right) \tag{5-50}$$

where $\zeta_\alpha = \frac{1}{z_\alpha}$ is a local coordinate around the pole α.

Remark 5.1 The definition of $F^{(0)}$ given in Eq. (4-13) is nothing but the homogeneity property since it is written in terms of the first derivatives. One can also write a formula focusing more on the second order derivatives of $F^{(0)}$:

$$\begin{aligned} F^{(0)} \quad = \quad & -\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} \operatorname*{Res}_{p\to\alpha} \operatorname*{Res}_{q\to\beta} V_\alpha(p) B(p,q) V_\beta(q) + \sum_{\alpha,\beta} t_\beta \operatorname*{Res}_{\alpha} V_\alpha dS_{\beta,o} \\ & -\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} t_\alpha t_\beta \ln(\gamma_{\alpha,\beta}) - \frac{1}{2}\epsilon^t \oint_{\mathcal{B}} ydx \end{aligned} \tag{5-51}$$

where

$$\ln \gamma_{\alpha,\alpha} = -\int_\alpha^o (dS_{\alpha,o'} + \frac{dz_\alpha}{z_\alpha}) + \ln(z_\alpha(o)) \tag{5-52}$$

and

$$\ln \gamma_{\alpha,\beta} = \ln\left(\frac{E(\alpha,\beta)E(o,o')}{E(\alpha,o')E(\beta,o)}\right). \tag{5-53}$$

One can notice that, in these terms,

$$\frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial t_{\alpha,\beta}^2} = \ln(\gamma_{\alpha,\alpha}\gamma_{\beta,\beta}). \tag{5-54}$$

6 Variations with respect to κ and modular transformations

6.1 Variations with respect to κ

We have introduced the matrix κ in order to easily compute modular transformations of our functions. Somehow variations of κ play the role of infinitesimal modular transformations. Therefore it is important to compute $\partial/\partial\kappa$, and we will use this result in section 6.2.

First, notice that $W_k^{(g)}(p_1,\dots,p_k)$ is a polynomial in κ of degree $3g+2k-3$, and $F^{(g)}$ is a polynomial in κ of degree $3g-3$ for $g>1$ (number of propagators in a graph of $\mathcal{G}_k^{(g)}$).

Theorem 6.1

$$\boxed{\begin{array}{rcl} 2i\pi \frac{\partial}{\partial \kappa_{ij}} W_k^{(g)}(\mathbf{p_K}) & = & \frac{1}{2}\oint_{r\in\mathcal{B}_j}\oint_{s\in\mathcal{B}_i} W_{k+2}^{(g-1)}(\mathbf{p_K},r,s) \\ & & +\frac{1}{2}\sum_h \sum_{L\subset K} \oint_{r\in\mathcal{B}_i} W_{|L|+1}^{(h)}(\mathbf{p_L},r)\oint_{s\in\mathcal{B}_j} W_{k-|L|+1}^{(g-h)}(\mathbf{p_{K/L}},s) \end{array}} \tag{6-1}$$

and in particular for $g\geq 2$:

$$\boxed{-2i\pi\frac{\partial}{\partial\kappa_{ij}}F^{(g)} = \frac{1}{2}\oint_{r\in\mathcal{B}_j}\oint_{s\in\mathcal{B}_i} W_2^{(g-1)}(r,s) + \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{g-1}\oint_{r\in\mathcal{B}_i} W_1^{(h)}(r)\oint_{s\in\mathcal{B}_j} W_1^{(g-h)}(s)} \tag{6-2}$$

and

$$\frac{\partial}{\partial\kappa_{ij}}F^{(1)} = \frac{1}{\kappa_{ji}}. \tag{6-3}$$

This theorem is proved in Appendix B

Notice that these equations are to be compared with the Kodaira–Spencer theory [1, 2, 11, 42].

6.2 Modular transformations

Consider a modular change of cycles:

$$\begin{pmatrix}\underline{\mathcal{A}}\\ \underline{\mathcal{B}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\delta_{\mathcal{A},\mathcal{A}'} & \delta_{\mathcal{A},\mathcal{B}'}\\ \delta_{\mathcal{B},\mathcal{A}'} & \delta_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underline{\mathcal{A}}'\\ \underline{\mathcal{B}}'\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix}\underline{\mathcal{A}}'\\ \underline{\mathcal{B}}'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\delta_{\mathcal{A}',\mathcal{A}} & \delta_{\mathcal{A}',\mathcal{B}}\\ \delta_{\mathcal{B}',\mathcal{A}} & \delta_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underline{\mathcal{A}}\\ \underline{\mathcal{B}}\end{pmatrix} \tag{6-4}$$

where $\delta_{\mathcal{A}',\mathcal{A}} = \delta^t_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, $\delta_{\mathcal{A}',\mathcal{B}} = -\delta^t_{\mathcal{A},\mathcal{B}'}$, $\delta_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \delta^t_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}$, $\delta_{\mathcal{B}',\mathcal{A}} = -\delta^t_{\mathcal{B},\mathcal{A}'}$ and the matrices $\delta_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}, \delta_{\mathcal{A},\mathcal{B}'}, \delta_{\mathcal{B},\mathcal{A}'}, \delta_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ have integer coefficients and satisfy $\delta_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}\delta^t_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} - \delta_{\mathcal{B},\mathcal{A}'}\delta^t_{\mathcal{A},\mathcal{B}'} = Id$.

Under this transformation of the cycle homology basis, the Abel map and the matrix of period change like:

$$du' = \mathcal{J}du \quad , \quad du = \mathcal{J}^{-1}du' \tag{6-5}$$

with $\mathcal{J} = (\delta^t_{\mathcal{A},\mathcal{A}'} + \tau'\delta^t_{\mathcal{A},\mathcal{B}'}) = (\delta_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} - \tau\delta_{\mathcal{A},\mathcal{B}'})^{-1}$ and

$$\tau' = (\delta_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} - \tau\delta_{\mathcal{A},\mathcal{B}'})^{-1}(-\delta_{\mathcal{B},\mathcal{A}'} + \tau\delta_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}) \quad , \quad \tau = (\delta^t_{\mathcal{A},\mathcal{A}'} + \tau'\delta^t_{\mathcal{A},\mathcal{B}'})^{-1}(\delta^t_{\mathcal{B},\mathcal{A}'} + \tau'\delta^t_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}). \tag{6-6}$$

Let us define the following symmetric matrix:

$$\widehat{\kappa} = \widehat{\kappa}^t = (\delta_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\delta^{-1}_{\mathcal{A},\mathcal{B}'} - \tau)^{-1} = \delta_{\mathcal{A},\mathcal{B}'}\mathcal{J} \tag{6-7}$$

it is such that the Bergmann kernel changes like:

$$\underline{B}' = \underline{B} + 2i\pi\, du^t\widehat{\kappa}du. \tag{6-8}$$

The κ-modified Bergmann kernel changes like:

$$\begin{array}{rcl} B'(p,q) & = & \underline{B}(p,q) + 2i\pi\left[du'^t(p)\kappa du'(q) + du^t(p)\widehat{\kappa}du(q)\right] \\ & = & \underline{B}(p,q) + 2i\pi du^t(p)\left(\widehat{\kappa} + \mathcal{J}^t\kappa\mathcal{J}\right)du(q). \end{array} \tag{6-9}$$

In other words, the effect of a modular change of cycles is equivalent to a change $\kappa \to \widehat{\kappa} + \mathcal{J}^t\kappa\mathcal{J}$ in the definition of the kernel $B(p,q)$.

Thus, the modular variations of the free energies satisfy the following theorem:

Theorem 6.2 *For $g\geq 2$ the modular transformation of the free energies $F^{(g)}$ consists in changing κ to $\widehat{\kappa} + \mathcal{J}^t\kappa\mathcal{J}$ in the definitions of the modified Bergmann kernel and Abelian differential.*

The first correction $F^{(1)}$ changes like:

$$F^{(1)'} = F^{(1)} - \frac{1}{2}\ln(\delta_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} - \tau\delta_{\mathcal{A},\mathcal{B}'}). \tag{6-10}$$

An equivalent way of saying the same thing, is that: if we change the basis of cycles and change the matrix $\kappa \to \mathcal{J}^{t-1}(\kappa - \widehat{\kappa})\mathcal{J}^{-1}$, then the $F^{(g)}$'s are unchanged for $g>1$.

proof:

The result for $g \geq 2$ comes directly from the variation of the Bergmann kernel.

$F^{(1)}$ depends on the cycles only through the Bergmann tau function. Since,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln(\tau_{B'x})}{\partial x(a_i)} - \frac{\partial \ln(\tau_{Bx})}{\partial x(a_i)} &= \operatorname*{Res}_{p\to a_i} \frac{\underline{B}'(p,\overline{p}) - \underline{B}(p,\overline{p})}{dx(p)} \\
&= 2i\pi \operatorname*{Res}_{p\to a_i} \frac{du^t(p)\widehat{\kappa}du(\overline{p})}{dx(p)} \\
&= -2i\pi \operatorname*{Res}_{p\to a_i} \frac{du^t(p)\widehat{\kappa}du(p)}{dx(p)} \\
&= -\operatorname{Tr}\kappa\frac{\partial\tau}{\partial x(a_i)} \\
&= -\operatorname{Tr}(\delta_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} - \tau\delta_{\mathcal{A}\mathcal{B}'})^{-1}\frac{\partial\tau\delta_{\mathcal{A}\mathcal{B}'}}{\partial x(a_i)} \\
&= \frac{\partial \ln\det(\delta_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} - \tau\delta_{\mathcal{A}\mathcal{B}'})}{\partial x(a_i)}
\end{aligned} \tag{6-11}$$

and this characterizes the Bergmann tau function totally (up to a general multiplicative factor), one obtains the second result of the theorem. □

Remark 6.1 The transformation of leading order $F^{(0)}$ is more complicated and its computation is more involved as the final result depends explicitely on the position of the poles α in the fundamental domain. Let us just mention that it depends on all the parameters of the modular transformation explicitely.

Theorem 6.3 *If one chooses $\kappa = \frac{i}{2\,\mathrm{Im}\tau}$, then $F^{(g)}(\kappa)$ is modular invariant.*

proof:

It is well known that for that value of κ, the modified Bergmann kernel is the Schiffer kernel and is modular invariant. Indeed, it is easy to check that if $\kappa = \frac{i}{2\,\mathrm{Im}\tau}$ one has $\hat{\kappa} + \mathcal{J}^t\kappa\mathcal{J} = \frac{i}{2\,\mathrm{Im}\tau'}$.

Since the only modular dependence of $F^{(g)}$ for $g \geq 1$ is in the Bergmann kernel, this proves the modular invariance of the $F^{(g)}$'s.

□

7 Symplectic invariance

The following theorem is mostly the reason why we call $F^{(g)}$'s invariants of the curve. This theorem seems to be rather important and it has beautiful applications as we will see in section 10.4.1.

Theorem 7.1 *The following transformations of $\mathcal{E}$ leave the $F^{(g)}$'s unchanged:*

- $x \to \frac{ax+b}{cx+d}$ *and* $y \to \frac{(cx+d)^2}{ad-bc}y$.
- $y \to y + R(x)$ *where R is any rational function.*
- $y \to y$ *and* $x \to -x$.
- $y \to x$ *and* $x \to y$.

Notice that these are transformations which conserve the symplectic form

$$|dx \wedge dy| \tag{7-1}$$

In particular we have the $PSL_2(\mathbf{C})$ invariance:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad , \qquad (ad-bc)^2 = 1 \tag{7-2}$$

That symplectic invariance seems to be a very powerful tool to see if different matrix models have the same topological expansion. For example, in section 10.4.1 we show how symplectic invariance can be used to provide a new and very easy proof of some properties of the Kontsevitch integral.

proof:

Invariance under the first 2 transformations is obvious from the definitions, because the only x and y dependance of the $W_k^{(g)}$'s is in $\omega(q) = (y(q) - y(\overline{q}))dx(q)$ which is clearly unchanged under the first 2 transformations (notice that the transformation $x \to \frac{ax+b}{cx+d}$ conserves the branchpoints). In fact the first 2 transformations leave $W_k^{(g)}$ unchanged.

In the 3rd transformation the only thing which changes is the sign of ω, and it is easy to see that $W_k^{(g)}$ is multiplied by $(-1)^{2g-2+k} = (-1)^k$, and $F^{(g)}$ is multiplied by $(-1)^{2g-2} = 1$.

The 4th transformation is the difficult one. The proof consists in building some "mixed correlation functions", and seeing that their definition by inverting the roles of x and y lead to the same objetcs. Since it is long and involves new results in the framework of matrix model, it is written in a separate paper [43].

The case of $F^{(0)}$ and $F^{(1)}$ are done separately in appendix C. □

8 Singular limits

Consider a 1-parameter family of algebraic curves:

$$\mathcal{E}(x, y, t) \tag{8-1}$$

such that the curve at $t=0$ has a singular branchpoint a with a p/q rational singularity, i.e. in some local coordinate z near a we have:

$$\left\{ \begin{array}{l} t = 0 \\ x(z) \sim x(a) + (z-a)^q \\ y(z) \sim y(a) + (z-a)^p \end{array} \right. \tag{8-2}$$

At $t \neq 0$, the singularity is smoothed, and we have (the local parameter is now $\zeta = z\, t^{-\nu}$):

$$\left\{ \begin{array}{l} x(z,t) \sim x(a) + t^{q\nu}\ Q(\zeta) + o(t^{q\nu}) \\ y(z,t) \sim y(a) + t^{p\nu}\ P(\zeta) + o(t^{p\nu}) \end{array} \right. \tag{8-3}$$

where Q is a polynomial of degree q and P is a polynomial of degree p, and where ν is some exponent which depends on the choice of the parameter t.

The curve

$$\mathcal{E}_{\rm sing}(\xi,\eta) = \left\{ \begin{array}{l} \xi(\zeta) = Q(\zeta) \\ \eta(\zeta) = P(\zeta) \end{array} \right. = \text{Resultant}(Q-\xi, P-\eta) \tag{8-4}$$

is called the singular spectral curve.

One observes that $F^{(g)}(\mathcal{E})$ is singular in the small t limit, and it behaves like

$$F^{(g)}(\mathcal{E}(t)) \sim t^{\gamma_g} F^{(g)}_{\rm sing} + o(t^{\gamma_g}) \qquad , \text{ for } g \geq 2 \tag{8-5}$$

$$F^{(1)}(\mathcal{E}(t)) \sim -\frac{1}{24}\,(p-1)(q-1)\nu\,\ln(t) + O(1) \qquad , \text{ for } g = 1 \tag{8-6}$$

$F^{(g)}_{\rm sing}$ is called the double scaling limit of $F^{(g)}$. The exponent γ_g and $F^{(g)}_{\rm sing}$ are given by the following theorem:

Theorem 8.1 *Singular limits:*

$$\boxed{F^{(g)}_{\rm sing}(\mathcal{E}) = F^{(g)}(\mathcal{E}_{\rm sing}) \qquad , \text{ for } g \geq 2} \tag{8-7}$$

and

$$\gamma_g = (2-2g)(p+q)\nu. \tag{8-8}$$

In other words, our construction of $F^{(g)}$ commutes with the singular limit.

proof:

It is easy to see that the most singular term in the limit of the Bergmann kernel in that regime, behaves like t^0, and thus $dE_{z'}(z)$ as well. The denominator $((y(z)-y(\overline{z}))dx(z)$ in the recursion behaves like $t^{\nu(p+q)}(P(\zeta)-P(\overline{\zeta}))Q'(\zeta)d\zeta$, and by recursion on k and g, we easily see that:

$$W^{(g)}_k(z_1,\dots,z_k) \sim t^{(2-2g-k)(p+q)\nu}\ \omega^{(g)}_k(\zeta_1,\dots,\zeta_k) \tag{8-9}$$

if all z_i's are close to a, and is subdominant if some z_i's are not in the vicinity of a. The leading contribution to $W^{(g)}_k$ is thus obtained by taking z' and $\overline{z}'$ in the vicinity of a only in eq.4-9, i.e. $\omega^{(g)}_k(\zeta_1,\dots,\zeta_k)$ obey the same recursion formula as eq.4-9, with the curve $\mathcal{E}_{\rm sing}$. The same holds for the free energy.

□

9 Integrability

Here, we prove that Z is a tau-function, because it satisfies some Hirota equation.

9.1 Baker-Akhiezer function

Given two points ξ and η in the fundamental domain, we define the following kernel as a formal series in $1/N$:

$$K_N(\xi,\eta) = \frac{\mathrm{e}^{-N\int_\eta^\xi y dx}}{E(\xi,\eta)\,\sqrt{dx(\xi)dx(\eta)}} \exp\left(-\sum_{g=0}^{\infty} \sum_{l=1,2-2g-l<0}^{\infty} \frac{1}{l!}\, N^{2-2g-l} \int_\eta^\xi \int_\eta^\xi \dots \int_\eta^\xi W^{(g)}_l(p_1,\dots,p_l) \right) \tag{9-1}$$

where the integration path lies in the fundamental domain.

This kernel has the following properties:

- Notice that $(x(\xi)-x(\eta))K_N(\xi,\eta) \to 1$ when $\eta \to \xi$.
- We have:
$$\lim_{\eta\to\xi} \left(K_N(\xi,\eta) - \frac{1}{(x(\xi)-x(\eta))} \right) = -Ny(\xi) + \frac{W_1(\xi)}{dx(\xi)} \tag{9-2}$$
where $W_1 = \sum_{g=1}^{\infty} N^{1-2g} W^{(g)}_1$.
- we have:
$$K_N(\xi,\eta) = K_{-N}(\eta,\xi) \tag{9-3}$$
- One may think that K_N is singular at branchpoints because $\ln K_N$ has poles, however, using the singular limit theorem 8.1, we see that the leading behavior of all $W^{(g)}_l$'s is given by the $W^{(g)}_l$'s of the Airy curve $y=\sqrt{x}$ described in section 10.5. Therefore, near a branchpoint a, when $\xi,\eta \to a$, to leading order K_N is the Tracy-Widom kernel [72]:
$$K_N(\xi,\eta) \sim \frac{Ai(\hat{\xi})Ai'(\hat{\eta}) - Ai'(\hat{\xi})Ai(\hat{\eta})}{\hat{\xi}-\hat{\eta}}$$

$$\hat{\xi} = N^{2/3}(x(\xi) - x(a)) \qquad , \qquad \hat{\eta} = N^{2/3}(x(\eta) - x(a)) \tag{9-4}$$

In other words, K_N is not singular near branchpoints.

- The only singularities of $K_N(\xi,\eta)$ are essential singularities at all the poles of ydx, with a singular part equal to $\exp(-N\int_\eta^\xi ydx)$, as well as a simple pole at $\xi = \eta$.

Then, given a pole α of ydx, we define for ξ in the vicinity of α:

$$\begin{aligned}\psi_{\alpha,N}(\xi) &= \frac{\mathrm{e}^{-N\,V_\alpha(\xi)}\mathrm{e}^{-N\int_\alpha^\xi (ydx - dV_\alpha + t_\alpha \frac{dz_\alpha}{z_\alpha})}}{E(\xi,\alpha)\sqrt{dx(\xi)d\zeta_\alpha(\alpha)}}\,(z_\alpha(\xi))^{Nt_\alpha} \\ &\quad \exp\left(-\sum_{g=0}^{\infty}\sum_{l=1,2-2g-l<0}^{\infty}\frac{1}{l!}\,N^{2-2g-l}\int_\alpha^\xi\int_\alpha^\xi\cdots\int_\alpha^\xi W_l^{(g)}(p_1,\dots,p_l)\right) \\ &= \lim_{\eta\to\alpha}\left(K(\xi,\eta)\sqrt{\frac{dx(\eta)}{d\zeta_\alpha(\eta)}}\,\mathrm{e}^{-NV_\alpha(\eta)}\,(z_\alpha(\eta))^{Nt_\alpha}\right)\end{aligned} \tag{9-5}$$

where ζ_α is the local parameter near α, $\zeta_\alpha = \frac{1}{z_\alpha}$, and $\phi_{\alpha,N}(\xi) = \psi_{\alpha,-N}(\xi)$.

They have the following properties:

- $\psi_{\alpha,N}$ was defined only in the vicinity of α, but it can be easily analytically continued to the whole curve, by choosing an arbitrary point o in the vicinity of α and writing:

$$\begin{aligned}&\int_\alpha^\xi (ydx - dV_\alpha + t_\alpha\frac{dz_\alpha}{z_\alpha}) + V_\alpha(\xi) - t_\alpha\ln(z_\alpha(\xi)) \\ &= \int_o^\xi ydx + \int_\alpha^o (ydx - dV_\alpha + t_\alpha\frac{dz_\alpha}{z_\alpha}) + V_\alpha(o) - t_\alpha\ln(z_\alpha(o))\end{aligned} \tag{9-6}$$

- Using the singular limit theorem 8.1 near branchpoints, we see that the leading behavior of all $W_l^{(g)}$'s is given by the $W_l^{(g)}$'s of the Airy curve $y = \sqrt{x}$ described in section 10.5. Therefore, near a branchpoint a, when $\xi,\eta \to a$ we have:

$$\psi_{\alpha,N}(\xi) \sim C\,Ai(\hat{\xi}) \qquad , \qquad \hat{\xi} = N^{2/3}(x(\xi) - x(a)) \tag{9-7}$$

where C is some normalization constant ($C = \psi_{\alpha,N}(a)/Ai(0)$). In other words, $\psi_{\alpha,N}$ is not singular near branchpoints.

- The only singularities of $\psi_{\alpha,N}$ are essential singularities at all the poles of ydx, with a singular part equal to $\exp(-N\int^\xi ydx)$.

This is why we call those formal functions Baker-Akhiezer functions (cf [9]).

Remark 9.1 In fact, those functions are exactly Baker-Akhiezer functions only when the curve has genus $\not{g} = 0$. In the general case, the Baker-Akhiezer functions must also have the property that they take the same value after going around a non-trivial cycle. It is not difficult to multiply $\psi_{\alpha,N}$ by the appropriate θ function in order to fulfill that property. However, if we do that, we destroy the $1/N^2$ expansion.

This is why the $\psi_{\alpha,N}$ defined above can be called a "formal Baker-Akhiezer function". This definition is sufficient to find a formal Hirota equation, valid only order by order in $1/N^2$.

9.2 Sato relation

Given two points ξ and η on $\overline{\Sigma}$, and a complex number r, we define the curve:

$$\mathcal{E} + r[\xi,-\eta] = \left\{\left(x(p), y(p) + r\frac{dS_{\xi,\eta}(p)}{dx(p)}\right) \quad , \; p \in \Sigma\right\} \tag{9-8}$$

The differential $ydx + rdS_{\xi,\eta}$ has the same $\mathcal{A}$-contour integrals as ydx, the same poles with the same singular part, plus two additional simple poles, one located at $p = \xi$ with residue r, and one at $p = \eta$ with residue $-r$.

We have Sato's relation:

Theorem 9.1

$$K_N(\xi,\eta) = \frac{Z_N(\mathcal{E} + \frac{1}{N}[\xi,-\eta])}{Z_N(\mathcal{E})} \qquad , \qquad \psi_{\alpha,N}(\xi) = \frac{Z_N(\mathcal{E} + \frac{1}{N}[\xi,\alpha])}{Z_N(\mathcal{E})} \tag{9-9}$$

Indeed, the definition of K_N is the formal Taylor expansion in powers of $r = 1/N$ of the RHS.

9.3 Hirota equation

Consider two algebraic curve $\mathcal{E}(x,y)$ and $\tilde{\mathcal{E}}(x,y)$ with the same conformal structure (i.e. the same compact Riemann surface $\overline{\Sigma}$), then we have an Hirota bilinear relation:

Theorem 9.2 *We have the bilinear relation:*

$$\operatorname*{Res}_{\eta\to\zeta} dx(\eta)\,K_N(\xi,\eta)\,\tilde{K}_{\tilde{N}}(\eta,\zeta) = K_N(\xi,\zeta) \tag{9-10}$$

and also:

$$\operatorname*{Res}_{\xi\to\alpha} dx(\xi)\,\psi_{\alpha,N}(\xi)\,\tilde{\psi}_{\alpha,-\tilde{N}}(\xi) = 0 \qquad \text{if } \tilde{N}\tilde{t}_\alpha > Nt_\alpha + 1 \tag{9-11}$$

which takes exactly the form of the Hirota equation [9, 60].

It is important to notice that this Hirota equation makes sense only order by order in its $1/N^2$ expansion. In the way we have obtained it, it is meaningless for finite N (appart maybe from the genus zero case $\not{g} = 0$, under the condition that the $1/N^2$ series is convergent). Therefore, we have a "formal Hirota equation".

10 Application: topological expansion of matrix models

In this section, we show how the objects defined in section.4.2.4 (i.e. $\kappa = 0$) correspond to the terms of the topological expansion of the free energy and correlation functions of various matrix models when one considers appropriate curves $\mathcal{E}(x, y)$. Notice that in all this section we consider $\kappa = 0$.

10.1 Formal 1-matrix model

The formal 1-matrix model (cf [41]), is known to be the generating function which enumerates maps of given topology since the work of [14], then [8, 25, 52]. Its topological expansion was computed in several steps. The authors of [7] introduced a recursive algorithm to compute the $F^{(g)}$'s, only in the 1-cut case (i.e. $\mathbf{g} = 0$), and then the method was extended to other cases [3, 4]. The computation of the subleading term $F^{(1)}$ was done in general by Chekhov [15]. The computation to all orders of the correlation functions was found in [33], and the free energies in [17].

10.1.1 Definition

Definition 10.1 Formal 1-matrix model.

Consider a "semi-classical" potential $V(x)$, i.e. such that $V'(x)$ is a rational function. Let $D(x)$ be its denominator, i.e. $D(x)V'(x)$ is a polynomial of degree d, and let $X_1, \dots, X_d$ be its zeroes:

$$D(x)V'(x) = \prod_{i=1}^{d}(x - X_i) \tag{10-1}$$

We write:

$$\delta V_i(x) = V(x) - V(X_i) - \frac{1}{2}V''(X_i)(x - X_i)^2 \tag{10-2}$$

Choose an integer n, and a $d-$partition of n, $\vec{n} = \{n_1, \dots, n_d\}$, such that

$$\sum_{j=1}^{d} n_j = n. \tag{10-3}$$

The following gaussian integral (where each matrix M_i is of size n_i) is a polynomial in T of the form:

$$\frac{(-1)^l n^l}{l!\, T^l} e^{-\frac{n}{T}\sum_i n_i V(X_i)} \int dM_1 \dots dM_d \prod_{i=1}^{d} \mathrm{e}^{-\frac{nV''(X_i)}{2T}\mathrm{Tr}\,(M_i - X_i \mathbf{1}_{n_i})^2} \prod_{i>j} \det(M_i \otimes \mathbf{1}_{n_j} - \mathbf{1}_{n_i} \otimes M_j)^2 \, (\sum_i \mathrm{Tr}\, \delta V_i(M_i))^l$$

$$= \sum_{k=l/2}^{dl/2} A_{k,l} T^k \tag{10-4}$$

We define the formal matrix integral as the formal power series in T:

$$Z_{1\mathrm{MM}} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k (\sum_{j=0}^{2k} A_{k,j}). \tag{10-5}$$

One can also define its formal logarithm, i.e. the free energy

$$F_{1\mathrm{MM}} = -\ln Z_{1\mathrm{MM}} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k B_k \tag{10-6}$$

It is a standard computation discovered by 't Hooft ([71, 41]), that, for fixed $\epsilon_i = \frac{Tn_i}{n}$, for every k, $n^{-2}B_k$ is a polynomial in $1/n^2$:

$$B_k(n_1, \dots, n_d) = \sum_{g=0}^{g_{\max}(k)} B_{k,g}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_d) \left(\frac{n}{T}\right)^{2-2g} \tag{10-7}$$

Thus we define the following formal power series in T:

$$F^{(g)}_{1\mathrm{MM}} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k B_{k,g}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_d) \tag{10-8}$$

Remark: Here, the question of convergence of those series is not relevant. It is well known that each $F^{(g)}_{1\mathrm{MM}}$ is a convergent series (because it is written in terms of algebraic functions of T), but $F_{1\mathrm{MM}}$ is not.

10.1.2 Loop equations and classical spectral curve

It is easy to see (this property holds for each power of T because it holds for gaussian integrals) that the formal matrix integral satisfies, order by order in powers of T, the loop equations (i.e. Virasoro constraints), which can be written (see [26, 24]):

$$y(x)^2 + \frac{T^2}{n^2}\omega_2(x, x) = \frac{V'(x)^2}{4} - \frac{T}{n}\left\langle \mathrm{Tr}\, \frac{V'(x) - V'(M)}{x - M} \right\rangle \tag{10-9}$$

where $y(x) = \frac{V'(x)}{2} - \frac{T}{n}\left\langle \mathrm{Tr}\, \frac{1}{x-M} \right\rangle$ and $\omega_2(x, x') = \left\langle \mathrm{Tr}\, \frac{1}{x-M}\, \mathrm{Tr}\, \frac{1}{x'-M} \right\rangle_c$. where the expectation value $< . >$ is defined in a formal way similar to F.

If one identifies the coefficients of n^0 in each side, one gets an algebraic equation (here hyperelliptical), which is called the "classical spectral curve":

$$\mathcal{E}_{1\mathrm{MM}}(x, y) = D(x)^2 (y^2 - \frac{1}{4}V'^2(x) + P(x)) \tag{10-10}$$

where $D(x)P(x)$ is a polynomial of degree at most $\deg(D(x)V'(x))-1$, and completely determined by the condition that the polynomial $P(x)$ is a formal power series in powers of T such that at $T=0$:

$$P(x,T=0)=\sum_{i=1}^{d}\epsilon_i\frac{V'(x)}{x-X_i} \tag{10-11}$$

It is such that there exist some contours $\mathcal{A}_i$, $i=1,\dots,d$ such that:

$$\frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{A}_i} ydx=\epsilon_i \tag{10-12}$$

Notice that the genus $\mathbf{g}$ of the curve $\mathcal{E}_{1\mathrm{MM}}$ is the number of non vanishing ϵ_i's minus one.

Most often in the litterature, V is chosen polynomial such that $V'(0)=0$, and only the 1-cut case is considered, with only one non-vanishing filling fraction at $X=0$. The resulting curve has genus $\mathbf{g}=0$. This is the case which is relevant for enumerating polygonal surfaces.

It was proved in [33, 17], in the case of polynomial potentials only (but it is clear that it can be extended to the semiclassical case), that one has:

Theorem 10.1

$$\boxed{F^{(g)}_{1\mathrm{MM}}=\underline{F}^{(g)}(\mathcal{E}_{1\mathrm{MM}})} \tag{10-13}$$

This proves that $F^{(g)}$ (which we recall is a formal power series in T) genericaly has a finite radius of convergence $T<T_c$.

We also have:

$$\left\langle \mathrm{Tr}\,\frac{1}{x(p_1)-M}\,\dots\,\mathrm{Tr}\,\frac{1}{x(p_k)-M}\right\rangle_{\mathrm{c}} = \sum_{g=0}^{\infty}N^{2-k-2g}\frac{\underline{W}_k^{(g)}(p_1,\dots,p_k)}{dx(p_1)\dots dx(p_k)} +\delta_{k,1}\,N(\frac{1}{2}V'(x(p_1))-y(p_1)) -\frac{\delta_{k,2}}{(x(p_1)-x(p_2))^2} \tag{10-14}$$

10.2 2-matrix model

The formal 2-matrix model is known to be the generating function which counts bicolored maps (let us say the 2 colors are + or -, thus it is an Ising model on a random map), it was introduced by Kazakov [54]. The loop equations were first written in [69].

$F^{(0)}$ was computed in [63, 13, 12, 38]. $F^{(1)}$ was first found in [34] for the $\mathbf{g}=0$ case, the in [35] for $\mathbf{g}=1$, then in [37] for arbitrary $\mathbf{g}$. Then higher orders for the correlation functions were first derived in [40], and the $F^{(g)}$'s for $g\geq 2$ were first found in [19]. During the same time it became clear that matrix models topological expansion was closely related to algebraic geometry [55, 22, 23, 21].

10.2.1 Definition

Definition 10.2 *Similarly, consider V_1' and V_2' two rational functions with respective denominators $D_1(x)$ and $D_2(x)$. The equation:*

$$\left\{\begin{array}{l} V_1'(X_i)=Y_i \\ V_2'(Y_i)=X_i \end{array}\right. \qquad i=1,\dots,d \tag{10-15}$$

has $d=\deg(V_1'D_1)*\deg(V_2'D_2)$ solutions. We then write:

$$\delta V_{1,i}(x)=V_1(x)-V_1(X_i)-Y_i(x-X_i)-\frac{V_1''(X_i)}{2}(x-X_i)^2 \tag{10-16}$$

et

$$\delta V_{2,i}(y)=V_2(y)-V_2(Y_i)-X_i(y-Y_i)-\frac{V_2''(Y_i)}{2}(y-Y_i)^2 \tag{10-17}$$

We then choose an integer n, and a $d-$partition of n:

$$n=\sum_{i=1}^{d}n_i. \tag{10-18}$$

The following gaussian integral (where each matrix M_i or $\tilde{M}_i$ is of size n_i) is a polynomial in T of the form:

$$\begin{aligned}&\frac{(-1)^l n^l}{l!\,T^l}\,e^{-\frac{n}{T}\sum_i n_i\mathrm{Tr}\,(V_1(X_i)+V_2(Y_i)-X_iY_i)}\int dM_1\dots dM_d d\tilde{M}_1\dots d\tilde{M}_d\\ &\prod_{i=1}^{d}\mathrm{e}^{-\frac{n}{T}\mathrm{Tr}\left(\frac{V_1''(X_i)}{2}(M_i-X_i\mathbf{1}_{n_i})^2+\frac{V_2''(Y_i)}{2}(\tilde{M}_i-Y_i\mathbf{1}_{n_i})^2-(M_i-X_i\mathbf{1}_{n_i})(\tilde{M}_i-Y_i\mathbf{1}_{n_i})\right)}\\ &\prod_{i>j}\det(M_i\otimes\mathbf{1}_{n_j}-\mathbf{1}_{n_i}\otimes M_j)\ \prod_{i>j}\det(\tilde{M}_i\otimes\mathbf{1}_{n_j}-\mathbf{1}_{n_i}\otimes\tilde{M}_j)\\ &(\sum_i\mathrm{Tr}\,\delta V_{1,i}(M_i)+\delta V_{2,i}(\tilde{M}_i))^l\\ =&\sum_{k=l/2}^{dl/2}A_{k,l}T^k\end{aligned} \tag{10-19}$$

Similarly to the 1-matrix case, we can define the formal 2-matrix model as a formal power series in powers of T (see [41]):

$$Z_{2\mathrm{MM}}=\sum_{k=0}^{\infty}T^k(\sum_{j=0}^{2k}A_{k,j}). \tag{10-20}$$

One can also define its formal logarithm, i.e. the free energy

$$F_{2\mathrm{MM}} = -\ln Z_{2\mathrm{MM}} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k B_k \tag{10-21}$$

Again, it is a standard computation ([71, 41]), that, for fixed $\epsilon_i = \frac{Tn_i}{n}$, for every k, $n^{-2}B_k$ is a polynomial in $1/n^2$:

$$B_k(n_1,\dots,n_d) = \sum_{g=0}^{g_{\max}(k)} B_{k,g}(\epsilon_1,\dots,\epsilon_d)\ \left(\frac{n}{T}\right)^{2-2g} \tag{10-22}$$

Thus we define the following formal power series in T:

$$F^{(g)}_{2\mathrm{MM}} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k B_{k,g}(\epsilon_1,\dots,\epsilon_d) \tag{10-23}$$

10.2.2 Loop equations and classical spectral curve

Again, the formal 2-matrix integral satisfies, order by order in powers of T, the loop equations (i.e. W-algebra constraints), which can be written (see [26, 24]):

$$(y-y(x))U(x,y) + \frac{T^2}{n^2}U(x,y;x) = E(x,y) \tag{10-24}$$

where $y(x) = V_1'(x) - \frac{T}{n}\left\langle \mathrm{Tr}\,\frac{1}{x-M_1}\right\rangle$, $U(x,y) = x - V_2'(y) + \frac{T}{n}\left\langle \mathrm{Tr}\,\frac{1}{x-M_1}\,\frac{V_2'(y)-V_2'(M_2)}{y-M_2}\right\rangle$ and $U(x,y;x') = \left\langle \mathrm{Tr}\,\frac{1}{x-M_1}\,\frac{V_2'(y)-V_2'(M_2)}{y-M_2}\ \mathrm{Tr}\,\frac{1}{x'-M_1}\right\rangle_c$, and $E(x,y) = (y-V_1'(x))(x - V_2'(y)) - \frac{T}{n}\left\langle \mathrm{Tr}\,\frac{V_1'(x)-V_1'(M_1)}{x-M_1}\,\frac{V_2'(y)-V_2'(M_2)}{y-M_2}\right\rangle + T$, and where the expectation value $< . >$ is defined in a formal way similar to F.

If one chooses $y = y(x)$ and identifies the coefficients of n^0 in each side, one gets an algebraic equation $\mathcal{E}_{2\mathrm{MM}}(x,y) = 0$, which is called the "classical spectral curve" [34, 35]:

$$\mathcal{E}_{2\mathrm{MM}}(x,y) = D_1(x)\,D_2(y)\,((V_1'(x)-y)(V_2'(y)-x) - P(x,y) + T) \tag{10-25}$$

where $D_1(x)\,D_2(y)P(x,y)$ is a polynomial of degree $\le \deg(D_1V_1')$ in x and a polynomial of degree $\le \deg(D_2V_2')$ in y, and with fixed filling fractions:

$$\frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{A}_I} y\,dx = T\frac{n_I}{N} = \epsilon_I \qquad , \qquad \sum_I \epsilon_I = T \tag{10-26}$$

and such that in the limit $T \to 0$ and $\forall I\ \epsilon_I \to 0$, one has:

$$y \sim V_1'(x) - \sum_i \frac{\epsilon_i}{x-X_i} + O(T^2) \qquad , \qquad x \sim V_2'(y) - \sum_i \frac{\epsilon_i}{y-Y_i} + O(T^2). \tag{10-27}$$

Then one has:

Theorem 10.2

$$\boxed{F^{(g)}_{2\mathrm{MM}} = \underline{F}^{(g)}(\mathcal{E}_{2\mathrm{MM}})} \tag{10-28}$$

proof:

This theorem was proved in [40, 19]. □

Again, this proves a posteriori, that $F^{(g)}_{2\mathrm{MM}}$ (which we recall is a formal power series in T) genericaly has a finite radius of convergence $T < T_c$.

We also have:

$$\left\langle \mathrm{Tr}\,\frac{1}{x(p_1)-M_1}\ \dots\ \mathrm{Tr}\,\frac{1}{x(p_k)-M_1}\right\rangle_c = \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-k-2g}\frac{W_k^{(g)}(p_1,\dots,p_k)}{dx(p_1)\dots dx(p_k)} + \delta_{k,1}\,N(V'(x(p_1)) - y(p_1)) - \frac{\delta_{k,2}}{(x(p_1)-x(p_2))^2}. \tag{10-29}$$

Remark that the 1-Matrix model is a special case of the 2-matrix model with V_2 a quadratic polynomial.

10.3 Double scaling limits of matrix models, minimal CFT

It is well known that double scaling limits of the 1-matrix model, or 2-matrix models are in relationship with (p,q) minimal models of conformal field theory [59, 26, 20].

We have seen that as long as the curve is regular, all the $F^{(g)}$'s can be computed. This shows that the radius of convergence in T of $F^{(g)}(T)$ is reached for singular curves. So far, only rational singularities have been studied in detail.

Thus, consider the case where the potentials V_1 and V_2 are fine-tuned so that the curve $\mathcal{E}_{2\mathrm{MM}}$ has a p/q singularity at $T = T_c$ (notice that for the one matrix model one necessarily has $q = 2$):

$$\begin{cases} T = T_c \\ x(z) \sim_{p\to a} x(a) + (z-z(a))^q \\ y(z) \sim_{p\to a} y(a) + (z-z(a))^p \end{cases} \tag{10-30}$$

We can use the notation of section 8 with $t = T - T_c$, and thus at $t \neq 0$, the singularity is resolved, and we have (the local parameter is now $\zeta = zt^{-\nu}$):

$$\begin{cases} x(z,t) \sim x(a) + t^{q\nu}\,Q(\zeta) + o(t^{q\nu}) \\ y(z,t) \sim y(a) + t^{p\nu}\,P(\zeta) + o(t^{p\nu}) \\ \zeta = zt^{-\nu} \end{cases} \tag{10-31}$$

where Q is a polynomial of degree q and P is a polynomial of degree p.

The curve

$$\mathcal{E}_{\rm sing}(\xi,\eta) = \left\{ \begin{array}{l} \xi = Q(\zeta) \\ \eta = P(\zeta) \end{array} \right. = \text{Resultant}(Q-\xi, P-\eta) \tag{10-32}$$

is called the singular spectral curve.

The dependence on T of the 2-Matrix model is such that:

$$\left.\frac{d}{dT} y dx\right|_x = dS_{\infty_x,\infty_y} \tag{10-33}$$

where ∞_x and ∞_y are the 2 common poles of x and y. They are far away from branch-points, and in particular from the singularity. This means that in the vicinity of the singularity we have:

$$\left.\frac{d}{dT} y dx\right|_x \sim C\, t^\nu\, d\zeta + O(t^{2\nu}) \tag{10-34}$$

where C is some constant of order 1. After substitution with the limit eq.10-31 this implies the Poisson relation[9]:

$$pP(\zeta)Q'(\zeta) - qQ(\zeta)P'(\zeta) = \frac{C}{\nu}\, t^{1-(p+q-1)\nu} \tag{10-35}$$

and therefore

$$\nu = \frac{1}{p+q-1}. \tag{10-36}$$

Thereom 8.1 proves that:

$$F^{(g)}_{\rm 2MM}(T) \underset{T\to T_c}{\sim} (T-T_c)^{(2-2g)(p+q)/(p+q-1)} F^{(g)}(\mathcal{E}_{\rm sing}) \qquad , \text{ for } g \geq 2 \tag{10-37}$$

We also have:

$$F^{(0)}_{\rm 2MM}(T) \underset{T\to T_c}{\sim} \frac{C^2}{2} \frac{(p+q-1)^2}{(p+q)(p+q+1)} (T-T_c)^{2+2\nu} + \text{reg} \qquad , \text{ for } g = 0 \tag{10-38}$$

$$F^{(1)}_{\rm 2MM}(T) \underset{T\to T_c}{\sim} -\frac{1}{24} (p-1)(q-1)\nu \ln(T-T_c) + O(1) \qquad , \text{ for } g = 1 \tag{10-39}$$

We thus have a way to compute explicitely the double scaling limit of $F^{(g)}_{\rm 2MM}$.

10.3.1 (p,q) minimal models

Let us study in more details the curve $\mathcal{E}_{(p,q)}$ (cf [20]).

As we have seen above, the curve for the (p,q) minimal model is of the form:

$$\mathcal{E}_{(p,q)}(x,y) = \left\{ \begin{array}{l} x = Q(\zeta) \\ y = P(\zeta) \end{array} \right. = \text{Resultant}(Q-x, P-y) \tag{10-40}$$

[9] This Poisson relation is well known and can be found in [20, 26]

where P and Q are polynomials of respective degrees p and q, satisfying:

$$pPQ' - qQP' = \frac{t_1}{\nu} \tag{10-41}$$

The solution of which can be written [26]:

$$P = (Q^{p/q})_+ \tag{10-42}$$

and

$$(Q^{p/q})_- = \frac{t_1}{q}\zeta^{1-q} + O(\zeta^{-q}), \tag{10-43}$$

where we have used the notations $f = f_+ + f_-$, with f_+ and f_- denoting respectively the positive and the negative part of the Laurent series of f. This last equation implies $q-2$ equations for the coefficients of Q.

The curve $\mathcal{E}_{(p,q)}$ has genus zero $\mathbf{g} = 0$, and is such that x and y have only one pole $\alpha = \infty$. The Bergmann kernel is:

$$B(\zeta_1,\zeta_2) = \frac{d\zeta_1\, d\zeta_2}{(\zeta_1-\zeta_2)^2}. \tag{10-44}$$

The moduli (of the pole) of that curve are the Q_k and P_k such that:

$$Q(\zeta) = \sum_{k=0}^{q} Q_k \zeta^k \qquad , \qquad P(\zeta) = \sum_{k=0}^{p} P_k \zeta^k \tag{10-45}$$

by a translation on ζ, we can assume that $Q_{q-1} = 0$, and by a rescaling of ζ we can assume that $Q_{q-2} = -qQ_q$, and the Poisson Eq. (10-41) implies that $P_{p-1} = 0$ and $P_{p-2} = -pP_p$, thus:

$$Q_{q-1} = P_{p-1} = 0 \qquad , \qquad \frac{Q_{q-2}}{Q_q} = -q \qquad , \qquad \frac{P_{p-2}}{P_p} = -p. \tag{10-46}$$

We find:

$$F^{(0)}(\mathcal{E}_{(p,q)}) = 0. \tag{10-47}$$

10.3.2 Other times

More generaly [26], we can deform the (p,q) minimal model with $p+q-2$ times $t_1,\ldots,t_{p+q-2}$. For this purpose, one considers $Q(\zeta)$ a degree q monic polynomial,

$$Q(\zeta) = \zeta^q + \sum_{j=0}^{q-2} u_{q-j}\zeta^j \tag{10-48}$$

whose coefficients $u_2, \dots, u_q$ are determined as functions of $q-1$ parameters, $t_1, \dots, t_{q-1}$, by the following requirement:

$$(Q^{p/q})_- = \sum_{j=1}^{q-2} \frac{q-j}{q} t_{q-j} Q^{-j/q} + \frac{t_1}{q}\zeta^{1-q} + O(\zeta^{-q}). \tag{10-49}$$

Then we define the degree p monic polynomial $P(\zeta)$ by:

$$P = \zeta^p + \sum_{j=0}^{p-2} v_{p-j}\zeta^j = Q_+^{p/q} - \sum_{j=1}^{p-1} \frac{j+q}{q} t_{q+j-1} Q_+^{j/q} \tag{10-50}$$

which depends on $p-1$ other times $t_q, \dots, t_{q+p-2}$.

The corresponding classical spectral curve is:

$$\mathcal{E}_{(p,q)}(x,y) = \text{Resultant}(x-Q, y-P). \tag{10-51}$$

and depends on times $t_1, \dots, t_{p+q-2}$. One can check that if $t_2 = t_3 = \dots = t_{p+q-1} = 0$, one recovers the (p,q) minimal model.

It is well knwon that this curve is the spectral curve of the dispersionless Witham hierarchy [64].

10.3.3 Examples of minimal models

• **Airy curve** $(2,1)$

The classical spectral curve for the $(2,1)$ minimal model is

$$\mathcal{E}_{(2,1)}(x,y) = y^2 + t_1 - x. \tag{10-52}$$

$$Q(\zeta) = \zeta^2 + t_1 \qquad , \qquad P(\zeta) = \zeta \tag{10-53}$$

It is studied with particular care in section 10.5 since it describes the behaviour of a generic curve around the branch points, and thus coincides with Tracy-Widom law [72].

• **Pure gravity** $(3,2)$

$$Q(\zeta) = \zeta^2 - 2v \qquad , \qquad P(\zeta) = \zeta^3 - 3v\zeta \qquad , \qquad t_1 = 3v^2 \tag{10-54}$$

The classical spectral curve is:

$$\mathcal{E}_{(3,2)}(x,y) = x^3 - 3v^2 x - y^2 + 2v^3 \tag{10-55}$$

and is studied in details in section 10.6 .

• **Ising model** $(4,3)$

$$Q(\zeta) = \zeta^3 - 3v\zeta - 3w \qquad , \qquad P(\zeta) = \zeta^4 - 4v\zeta^2 - 4w\zeta + 2v^2 - \frac{5}{3}t_5(\zeta^2 - 2v) \tag{10-56}$$

with:

$$t_1 = 4v^3 + 6w^2 \qquad , \qquad t_2 = 6vw. \tag{10-57}$$

The classical spectral curve is

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{(4,3)}(x,y) \;=\; & x^4 - y^3 - 4v^3x^2 + 3v^4 y + 2v^6 \\ & +12wv(-xy + v^2x) + 6w^2(-x^2 + 2vy - 4v^3) + 8w^3x - 3w^4. \\ & +5t_5(-x^2y - v^2x^2 + 2v^3y + 2v^5 - 2wyx + 2v^2wx + 3w^2y - 17v^2w^2) \\ & +\frac{25}{3}t_5^2(v^2y + 2v^4 - 4vwx - 12vw^2) \\ & +\frac{125}{27}t_5^3(-x^2 + 2v^3 - 6wx - 9w^2)\end{aligned} \tag{10-58}$$

The variations with respect to the moduli t_5, t_2 and t_1 correspond respectively to the variations of the form ydx

$$\Omega_5 = -d\Lambda_5 = d(\zeta^5 - 5v\zeta^3 + 10v^2\zeta), \tag{10-59}$$

$$\Omega_1 = -d\Lambda_1 = d(\zeta + \frac{5}{12}\,\frac{t_5}{v^3 - w^2}\,(2v^2\zeta + 2vw - w\zeta^2)), \tag{10-60}$$

and

$$\Omega_2 = -d\Lambda_2 = d(\zeta^2 + \frac{5}{6}\,\frac{t_5}{v^3 - w^2}\,(v^2\zeta^2 - 2vw\zeta - 2w^2)) \tag{10-61}$$

in the notations of section 5.

• **Unitary models** $(q+1,q)$

$$\mathcal{E}_{(q+1,q)}(x,y) = T_{q+1}(x) - T_q(y) \tag{10-62}$$

$$Q(\zeta) = T_q(\zeta) \qquad , \qquad P(\zeta) = T_{q+1}(\zeta) \tag{10-63}$$

where T_p is the p^{th} Tchebychev's polynomial.

10.4 Matrix model with external field

Define the formal matrix model with external field [78]:

$$Z_{\text{Mext}} = \int dM\ \mathrm{e}^{-N\,\text{Tr}\,(V(M) - M\hat{\Lambda})} \tag{10-64}$$

where $V'(x)$ is a rational function with denominator $D(x)$, and $\hat{\Lambda}$ is a fixed $N \times N$ matrix. Consider its topological expansion (in the sense of a formal integral as in the 1-matrix case above [41]):

$$F_{\text{Mext}} = -\ln Z_{\text{Mext}} = \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} F^{(g)}_{\text{Mext}}. \tag{10-65}$$

Let us assume that $\hat{\Lambda}$ has s distinct eigenvalues $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_s$ with respective multiplicities $m_1, \dots, m_s$ such that $\sum_i m_i = N$. The minimal polynomial of $\hat{\Lambda}$ is:

$$S(y) = \prod_i (y - \hat{\lambda}_i). \tag{10-66}$$

Define the classical curve obtained by "removing" the $1/N^2$ connected term in the loop equations:

$$\mathcal{E}_{\text{Mext}}(x,y) = ((V'(x) - y)S(y) - P(x,y))D(x) \tag{10-67}$$

where

$$P(x,y) = \frac{1}{N}\left\langle \operatorname{Tr} \frac{V'(x) - V'(M)}{x - M} \frac{S(y) - S(\hat{\Lambda})}{y - \hat{\Lambda}} \right\rangle \tag{10-68}$$

so that $P(x,y)D(x)$ is a polynomial in both x and y.

Then one has:

Theorem 10.3

$$\boxed{F^{(g)}_{\text{Mext}} = \underline{F}^{(g)}(\mathcal{E}_{\text{Mext}})} \tag{10-69}$$

proof:

This theorem is proved in appendix D, and the proof is very similar to that of the 2-matrix case above, see [19]. □

10.4.1 Application to Kontsevitch integral

The Kontsevitch integral is known to be the generating function which computes intersection numbers of moduli space of Riemann surfaces (see [58, 21]). It is defined as:

$$Z_{\text{Kontsevitch}} = \int dM \ \mathrm{e}^{-N \operatorname{Tr}\left(\frac{M^3}{3} - M(\Lambda^2 + t_1)\right)} \qquad , \qquad t_1 = \frac{1}{N} \operatorname{Tr} \frac{1}{\Lambda} \tag{10-70}$$

where Λ has eigenvalues $\lambda_1, \dots, \lambda_N$. Thus it is Z_{Mext} with $V(x) = x^3/3$ and $\hat{\Lambda} = \Lambda^2 + t_1$. Its classical curve is:

$$\mathcal{E}_{\text{Kontsevitch}}(x,y) = (x^2 - y)S(y) - xS_1(y) - S_2(y) \tag{10-71}$$

where $S_1(y)$ and $S_2(y)$ are polynomials in y of degree at most $s-1$.

If we assume that the curve has genus zero (which is the case if we want the $F^{(g)}_{\text{Kontsevitch}}$ to be the generating functions for intersection numbers), then we can find explicitely a rational parametrization:

$$\mathcal{E}_{\text{Kontsevitch}}(x,y) = \begin{cases} x(z) = z + \frac{1}{2N} \operatorname{Tr} \frac{1}{\Lambda} \frac{1}{z - \Lambda} \\ y(z) = z^2 + \frac{1}{N} \operatorname{Tr} \frac{1}{\Lambda} \end{cases} . \tag{10-72}$$

Using the symplectic invariance of theorem 7.1, we may exchange the roles of x and y. There is a unique branch point in y, solution of $y'(z) = 0$, located at $z = 0$. Since the formulae for $F^{(g)}$ consist in taking residues of rational functions at the branch point, we may consider the Taylor expansion of $x(z)$ near $z = 0$, i.e.

$$\mathcal{E}_{\text{Kontsevitch}}(x,y) = \begin{cases} x(z) = z - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} t_{k+2} z^k \\ y(z) = z^2 + t_1 \end{cases} \tag{10-73}$$

where we have defined the Kontsevitch times:

$$t_k = \frac{1}{N} \operatorname{Tr} \Lambda^{-k} \tag{10-74}$$

so that:

$$\boxed{F^{(g)}_{\text{Kontsevitch}} = F^{(g)}(\mathcal{E}_{\text{Kontsevitch}})} \tag{10-75}$$

Again, using symplectic invariance of theorem 7.1, we may add to $x(z)$ any rational function of $y(z)$, i.e. we immediately get a 1-line proof of the following well-known theorem:

Theorem 10.4 *$F^{(g)}_{\text{Kontsevitch}}$ depends only on the odd times t_{2k+1}, with $k \le 3g-2$:*

$$\boxed{F^{(g)}_{\text{Kontsevitch}} = F^{(g)}_{\text{Kontsevitch}}(t_1, t_3, t_5, \dots, t_{6g-3})} \tag{10-76}$$

And, if we assume that $t_k = 0$ for $k \ge p+2$, the curve is:

$$\begin{cases} x(z) = z - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{p} t_{k+2} z^k \\ y(z) = z^2 + t_1 \end{cases} \tag{10-77}$$

which is identical to the curve of the $(p,2)$ model of section 10.3.1, and which is well known to satisfy KdV hierarchy. Thus, again we have a 1-line proof of the well known result:

Theorem 10.5 *$Z_{\text{Kontsevitch}}$ is a KdV hierarchy tau function.*

• **Examples: the first few correlation functions**

For Kontsevitch's curve we have:

$$B(z,z') = \frac{dz\,dz'}{(z-z')^2} \qquad , \qquad dE_z(z') = \frac{z\,dz'}{z^2-z'^2}\ ,\ \omega(z) = 2z^2 dz\,(2 - \sum_j t_{2j+3}\,z^{2j}) \tag{10-78}$$

and the only branchpoint is located at $z = 0$.

From the def.4.2 we easily get the first correlation functions:

$$W_1^{(1)}(z) = -\frac{dz}{8(2-t_3)}\left(\frac{1}{z^4} + \frac{t_5}{(2-t_3)z^2}\right), \tag{10-79}$$

$$W_3^{(0)}(z_1,z_2,z_3) = -\frac{1}{2-t_3}\,\frac{dz_1\,dz_2\,dz_3}{z_1^2 z_2^2 z_3^2}, \tag{10-80}$$

$$W_2^{(1)}(z_1,z_2) = \frac{dz_1\,dz_2}{8(2-t_3)^4 z_1^6 z_2^6}\Big[(2-t_3)^2(5z_1^4+5z_2^4+3z_1^2z_2^2) + 6t_5^2 z_1^4 z_2^4 + (2-t_3)(6t_5 z_1^4 z_2^2 + 6t_5 z_1^2 z_2^4 + 5t_7 z_1^4 z_2^4)\Big] \tag{10-81}$$

and

$$W_1^{(2)}(z) = -\frac{dz}{128(2-t_3)^7 z^{10}}\Big[252\,t_5^4 z^8 + 12\,t_5^2 z^6(2-t_3)(50\,t_7 z^2 + 21\,t_5) + z^4(2-t_3)^2(252\,t_5^2 + 348\,t_5 t_7 z^2 + 145\,t_7^2 z^4 + 308\,t_5 t_9 z^4) + z^2(2-t_3)(203\,t_5 + 145\,z^2 t_7 + 105\,z^4 t_9 + 105\,z^6 t_{11}) + 105\,(2-t_3)^4\Big]. \tag{10-82}$$

The first and second order free energies are found:

$$F^{(1)}_{\text{Kontsevitch}} = -\frac{1}{24}\ln\left(1 - \frac{t_3}{2}\right) \tag{10-83}$$

and

$$F^{(2)}_{\text{Kontsevitch}} = \frac{1}{1920}\,\frac{252\,t_5^3 + 435\,t_5 t_7(2-t_3) + 175\,t_9(2-t_3)^2}{(2-t_3)^5}. \tag{10-84}$$

which coincide with expressions previously found in the litterature [49].

10.5 Example: Airy curve

The curve $y = \sqrt{x}$ is particularly important, because it corresponds to the leading behaviour of any generic curve near its branch points. It is also the minimal model $(1,2)$ (cf [26, 28]), also called Tracy-Widom law [72].

Consider the curve

$$\mathcal{E}(x,y) = y^2 - x. \tag{10-85}$$

We chose the uniformization $p = y$:

$$\begin{cases} x(p) = p^2 \\ y(p) = p \end{cases} \tag{10-86}$$

There is only one pole $\alpha = \infty$, and there is only one branch point located at $a = 0$, the conjugated point is $\overline{p} = -p$. The Bergmann kernel is the Bergmann kernel of the Riemann sphere:

$$B(p,q) = \frac{dp\,dq}{(p-q)^2} \qquad , \qquad dE_q(p) = \frac{q\,dp}{q^2-p^2} \qquad , \qquad \omega(q) = 4q^2 dq \tag{10-87}$$

It is easy to see that all correlation functions with $2g + k \geq 3$ are of the form:

$$W_k^{(g)}(p_1,\dots,p_k) = \omega_k^{(g)}(p_1^2,\dots,p_k^2)\,dp_1\dots dp_k \tag{10-88}$$

Moreover, the diagrammatic rules are clearly homogenous, so that the function $W_1^{(g)}(p)$ must be a homogeneous function of p. It is easy to find that:

$$W_1^{(g)}(p) = \frac{c_g\,dp}{p^{6g-2}} \tag{10-89}$$

and the total $1-$point function is

$$W_1(p,N) = -Nydx + \sum_{g=1}^{\infty} N^{1-2g} W_1^{(g)}(p) = W_1(N^{\frac{1}{3}}p, 1). \tag{10-90}$$

Similarly, the total $2-$point function is

$$W_2(p,q,N) = \sum_{g=0}^{\infty} N^{-2g} W_2^{(g)}(p,q) = W_2(N^{\frac{1}{3}}p, N^{\frac{1}{3}}q, 1) \tag{10-91}$$

and in general

$$W_k(p_1,\dots,p_k,N) = \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g-k} W_k^{(g)}(p_1,\dots,p_k) = W_k(N^{\frac{1}{3}}p_1,\dots,N^{\frac{1}{3}}p_k,1). \tag{10-92}$$

The solution of the recursion def.4.2 can be found explicitely in terms of the Airy function.

Consider $g(x) = Ai'(x)/Ai(x)$ where $Ai(x)$ is the Airy function, i.e. $g'(x)+g^2(x) = x = p^2$. In terms of the variable p we write:

$$f(p) = g(p^2) \qquad , \qquad f^2 + \frac{f'}{2p} = p^2. \tag{10-93}$$

It can be expanded for large p:

$$f(p) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k p^{1-3k} = p - \frac{1}{4p^2} - \frac{9}{32p^5} + \dots \tag{10-94}$$

where the coefficients in the expansion satisfy

$$\frac{4-3k}{2} f_{k-1} + \sum_{j=0}^{k} f_j f_{k-j} = \delta_{k,0}. \tag{10-95}$$

The solution of the recursion def.4.2 for the $1-$point function is:

$$W_1(p,1) = -2\frac{p^2 - f(p)f(-p)}{f(p)-f(-p)}\, pdp = -2p^2 dp + \frac{dp}{(2p)^4} + \frac{9!!\, dp}{3^2\,(2p)^{10}} + \frac{15!!}{3^4\,(2p)^{16}} \dots \tag{10-96}$$

$$W_2(p,p',1) = -4\,\frac{(f(p)-f(p'))\,(f(-p)-f(-p'))}{(p^2-p'^2)^2\,(f(p)-f(-p))\,(f(p')-f(-p'))}\, pdp\, p'dp' \tag{10-97}$$

In particular

$$W_2(p,p,1) = \frac{f'(p)f'(-p)}{(f(p)-f(-p))^2}\, dp^2 \tag{10-98}$$

so that:

$$W_2(p,p,1) + W_1(p,1)^2 = 4p^4\, dp^2 = x\, dx^2 \tag{10-99}$$

Similarly we find for instance (with obvious cyclic conventions for the indices):

$$\begin{array}{rl} & W_3(p_1,p_2,p_3,1) \\ = & \frac{dx_1 dx_2 dx_3}{(p_3^2-p_2^2)(p_3^2-p_1^2)(p_2^2-p_1^2)} \times \\ & \times \frac{\sum_{i=1}^{3} f(p_i)f(-p_i)(f(p_{i-1})+f(-p_{i-1})-f(p_{i+1})-f(-p_{i+1}))}{(f(p_1)-f(-p_1))(f(p_2)-f(-p_2))(f(p_3)-f(-p_3))} \\ = & \frac{dp_1\, dp_2\, dp_3}{2\, p_1^2 p_2^2 p_3^2} + \frac{dp_1\, dp_2\, dp_3}{2^6\, p_1^8 p_2^8 p_3^8} + \dots \end{array} \tag{10-100}$$

and one can easily find similar expressions for all W_k's.

In fact all correlation functions can be written with a determinantal formula [31, 32], with the Tracy-Widom kernel [72]:

$$K(x,x') = \frac{Ai(x)Ai'(x') - Ai'(x)Ai(x')}{x-x'} \tag{10-101}$$

The fact that the Baker–Akhiezer function is $Ai(x)$ and satisfies the differential equation $Ai'' = xAi$ can be seen as a consequence of the Hirota equation theorem.9.2.

Remark 10.1 To large N leading order the first term $W_k^{(0)}$ can be written in terms of Ferrer diagrams (Young diagrams):

$$W_k^{(0)}(p_1,\dots,p_k) = \frac{k-3!}{2^{k-2}} \prod_j \frac{dp_j}{p_j^2} \sum_{|\lambda|=k-3} M_\lambda(1/p_i^2) \prod_j \frac{2\lambda_j+1!!}{\lambda_j!}\, \frac{1}{n_j(\lambda)!} \tag{10-102}$$

where λ is a Ferrer diagram, $n_i(\lambda) = \#\{j \,/\, \lambda_j = i\}$, and M_λ are the elementary monomial symetric polynomials:

$$M_\lambda(z_i) = \sum_{i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_{k-3}} z_{i_1}^{\lambda_1} \dots z_{i_{k-3}}^{\lambda_{k-3}}. \tag{10-103}$$

For instance with $k=4$ there is only one diagram (1), and $M_{(1)}(z_1,z_2,z_3,z_4) = z_1+z_2+z_3+z_4$, and:

$$W_4^{(0)}(p_1,p_2,p_3,p_4) = \frac{3}{4}\, \frac{dp_1\, dp_2\, dp_3\, dp_4}{p_1^2 p_2^2 p_3^2 p_4^2} \left(\frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2} + \frac{1}{p_3^2} + \frac{1}{p_4^2}\right). \tag{10-104}$$

Remark 10.2 The free energies are all vanishing for that curve:

$$\forall g \quad F^{(g)} = 0. \tag{10-105}$$

10.6 Example: pure gravity (3,2)

In this section we study in details the $(3,2)$ minimal model, also called pure gravity [26].

It corresponds to the curve

$$\mathcal{E}_{(3,2)} = \left\{ \begin{array}{l} x(z) = z^2 - 2v \\ y(z) = z^3 - 3vz \\ t_1 = 3v^2 \end{array} \right. . \tag{10-106}$$

We recognize Tchebychev's polynomials T_2 and T_3, which satisfy the Poisson relation Eq. (10-41) . Up to a rescaling $z = \sqrt{v}\, p$, the curve reads:

$$\mathcal{E}_{(3,2)} = \left\{ \begin{array}{l} x(p) = v(p^2-2) \\ y(z) = v^{3/2}(p^3-3p) \\ t_1 = 3v^2 \end{array} \right. . \tag{10-107}$$

There is only one x-branch point at $p=0$, and the conjugated point is $\overline{p} = -p$. The Bergmann kernel is the Bergmann kernel of the Riemann sphere:

$$B(p,q) = \frac{dp\, dq}{(p-q)^2} \qquad , \qquad dE_q(p) = \frac{q\, dp}{q^2-p^2} \tag{10-108}$$

$$\omega(q) = (y(q) - y(\overline{q}))dx(q) = 4v^{5/2}\,(q^2-3)\,q^2\,dq \tag{10-109}$$

$$\Phi(q) = v^{5/2}(\frac{2\,q^5}{5} - 2q^3) \tag{10-110}$$

Under a variation of t_1 we have:

$$\Omega_1(p) = -\left.\frac{\partial y(p)dx(p)}{\partial t_1}\right|_{x(p)} = v^{1/2}\,dp = -v^{1/2}\ \operatorname*{Res}_{\infty} qB(p,q) \qquad , \qquad \Lambda_1(q) = -v^{1/2}\,q \tag{10-111}$$

so the effect of $\partial/\partial t_1$ is equivalent to:

$$\left.\frac{\partial}{\partial t_1} W_k^{(g)}\right|_x = -v^{1/2}\ \operatorname*{Res}_{q\to\infty} qW_{k+1}^{(g)} \tag{10-112}$$

10.6.1 Some correlation functions

Using def.4.2, we find:

$$W_3^{(0)}(p_1,p_2,p_3) = -\frac{v^{-5/2}}{6}\ \frac{dp_1dp_2dp_3}{p_1^2p_2^2p_3^2} \tag{10-113}$$

$$W_1^{(1)}(p) = -\frac{v^{-5/2}}{(12)^2}\,\frac{p^2+3}{p^4}\,dp \tag{10-114}$$

$$W_2^{(1)}(p,q) = v^{-5}\ \frac{15q^4+15p^4+6p^4q^2+2p^4q^4+9p^2q^2+6p^2q^4}{2^5\,3^3\ p^6\,q^6}\,dp\,dq \tag{10-115}$$

$$W_1^{(2)}(p) = -v^{-15/2}\ 7\frac{135+87p^2+36p^4+12p^6+4p^8}{2^{10}\,3^5\,p^{10}}\,dp \tag{10-116}$$

$$W_4^{(0)}(p_1,p_2,p_3,p_4) = \frac{v^{-5}}{9p_1^2p_2^2p_3^2p_4^2}\left(1+3\sum_i\frac{1}{p_i^2}\right)\,dp_1dp_2dp_3dp_4 \tag{10-117}$$

$$\frac{W_5^{(0)}(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5)}{dp_1dp_2dp_3dp_4dp_5} = \frac{v^{-15/2}}{9p_1^2p_2^2p_3^2p_4^2p_5^2}\left(1+3\sum_i\frac{1}{p_i^2}+6\sum_{i<j}\frac{1}{p_i^2p_j^2}+5\sum_i\frac{1}{p_i^4}\right) \tag{10-118}$$

etc...

Using def.4.3, and eq.10-112, we find from eq.10-113:

$$\frac{\partial^3F^{(0)}}{\partial t_1^3} = -\frac{1}{6v} = -\frac{1}{2\sqrt{3t_1}} \longrightarrow \frac{\partial^2F^{(0)}}{\partial t_1^2} = -\frac{t_1^{1/2}}{\sqrt{3}} \tag{10-119}$$

and using eq.10-114:

$$\frac{\partial F^{(1)}}{\partial t_1} = -\frac{1}{(12)^2v^2} = -\frac{1}{48t_1} \longrightarrow \frac{\partial^2F^{(1)}}{\partial t_1^2} = \frac{1}{48\,t_1^2} \tag{10-120}$$

as well as using eq.10-116:

$$\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t_1} = -v^{-7}\ \frac{7}{2^8\,3^5} = -\frac{7}{2^8\,3^{3/2}\,t_1^{7/2}} \longrightarrow \frac{\partial^2F^{(2)}}{\partial t_1^2} = \frac{49}{2^9\,3^{3/2}\,t_1^{9/2}}. \tag{10-121}$$

We may thus verify that the second derivative of the free energy:

$$u = \frac{\partial^2F}{\partial t_1^2} = \sum_{g=0}^{\infty} t_1^{(1-5g)/2}u^{(g)} \qquad , \qquad F^{(g)} = \frac{4u^{(g)}}{5(1-g)(3-5g)}\,. \tag{10-122}$$

satisfies the Painlevé equation to the first orders:

$$u^2 + \frac{1}{6}u'' = \frac{1}{3}t_1. \tag{10-123}$$

It is well known that this equation is satisfied to all orders [26], and here this can be seen as a consequence of the Hirota equation theorem. 9.2.

11 Conclusion

In this paper, we have constructed an infinite family of invariants of algebraic curves. By construction, these invariants coincide with the topological expansion of matrix integrals in the special case where the algebraic curve is the large N part of the matrix integral's spectral curve. But we emphasize again that the construction presented here goes beyond matrix models.

Our invariants are defined only in terms of algebraic geometry, and they have many interesting properties, like homogeneity, and integrability (they obey some Hirota equation).

The problem of computing the $F^{(g)}$'s for matrix models is an old problem which was addressed many times, and which found more and more elaborate answers [7]. We claim that ours is more efficient, because it contains all multicut cases, and various types of matrix models at once. Also, even in the simplest cases (1-matrix model, 1 cut), our expressions are simpler than what existed before [7]. Our $F^{(g)}$'s are defined recursively, like those of [7], but the recursions are much easier to handle, and it is much easier to deduce properties to any order g from our construction.

The efficiency of our method becomes striking when one wants to compare different models (Kontsevitch and KdV for instance), or when one wants to take singular limits. Another important application of our method, is to prove that our $F^{(g)}$'s provide a solution to the holomorphic anomaly equations of [11] in topological string theory, thus confirming the Dijkgraaf Vafa correspondence. We claim that this can be proved easily from our work, and we present it in a coming paper [42]. It would also be

interesting to compare our free energies with the D-Modules considered in [5, 6] as partition functions of a unified matrix M-theory by checking that they indeed satisfy the equations of [6].

One of the reasons our method is very efficient also, is that it can be represented diagrammatically, without equations, and thus very easy to remember.

Perspectives and generalizations:

- The first thing one could think about is to understand what our $F^{(g)}$'s compute in algebraic geometry. There has been some attempts to recognize the first few of them $F^{(1)}$ as the Dedekind function [29, 30], $F^{(2)}$ as the Eisenstein series [50], but the answer for higher g is still obscure. Also a combinatoric interpretation is missing.

- Beyond that, it would be important to understand the combinatorics behind our diagrammatic construction. Since all diagrams are obtained from trees, it seems to be related to Schaeffer's method for counting maps [70], but this issue needs to be investigated further.

- Double scaling limits of matrix models are in relationship with conformal field theory (CFT), and in particular minimal models. It would be interesting to compare our formulae with those obtained directely from CFT [28, 76, 77], and, since higher genus CFT is far less known, maybe our method can bring something new to CFT.

- Also, the link between formal matrix models (i.e. those defined as combinatorial generating functions, for which it makes sense to consider a topological expansion, cf. [41]), and actual convergent matrix integrals needs to be better understood. The difficulty lies beyond any order in perturbation, and integrability could play a key role in understanding the relationship in more details.

- It would be interesting to check that the topological expansion for the chain of matrices [38], is also given by the same $F^{(g)}$'s. This is an open question, but there are strong evidences that the answer is positive. For instance it is easy to see from [38] that $F^{(0)}$ and some of the first few correlation functions are indeed the same.

- It would be interesting also to extend our construction to other types of matrix models, for instance non-hermitian (real symmetric or quaternionic). A first attempt was done in [18]. Another possible extension is towards the $O(n)$ matrix model, whose large N limit is known in terms of an agebraic curve [44, 45]. To leading order, the $O(n)$ matrix model solution looks very similar to that of the 1-matrix model, except that correlation functions are no longer meromorphic functions on the curve. Instead they gain a phase shift after going around a non-trivial cycle. This would probably allow to define a twisted version of our construction.

Acknowledgements

We would like to thank Mina Aganagic, Michel Bergère, Leonid Chekhov, Philippe Di Francesco, Robert Dijkgraaf, Aleix Prats Ferrer, Ivan Kostov, Amir Kashani-Poor, Marcos Mariño, Andrei Okounkov, Pierre Vanhove, Jean-Bernard Zuber, for fruitful discussions on this subject. This work is partly supported by the Enigma European network MRT-CT-2004-5652, by the ANR project Géométrie et intégrabilité en physique mathématique ANR-05-BLAN-0029-01, by the Enrage European network MRTN-CT-2004-005616, by the European Science foundation through the Misgam program, by the French and Japaneese governments through PAI Sakurav, by the Quebec government with the FQRNT.

A Properties of correlation functions

In this section we prove the theorems stated in section 4.4.

We use very much the following obvious properties:

$$\sum_i B(p^i,q) = \frac{dx(p)dx(q)}{(x(p)-x(q))^2}, \tag{A-1}$$

$$\frac{dE_{\overline{q}}(p)}{\omega(\overline{q})} = \frac{dE_q(p)}{\omega(q)}, \tag{A-2}$$

and

$$\lim_{q\to a_i} \frac{dE_q(p)}{\omega(q)}\,dx(q) = -\frac{1}{2}\lim_{q\to a_i}\frac{B(p,q)}{dy(q)}\,dx(q). \tag{A-3}$$

The third one is nothing but De L'Hôpital's rule.

Theorem 4.1 proof:

From the definition 4.2, we have:

$$\begin{aligned}
W_3^{(0)}(p,p_1,p_2) &= \operatorname*{Res}_{q\to\mathbf{a}} \frac{dE_q(p)}{\omega(q)}\Big(B(q,p_1)B(\overline{q},p_2)+B(q,p_2)B(\overline{q},p_1)\Big)\\
&= 2\operatorname*{Res}_{q\to\mathbf{a}} \frac{dE_q(p)}{\omega(q)}B(q,p_1)B(\overline{q},p_2)\\
&= 2\operatorname*{Res}_{q\to\mathbf{a}}\operatorname*{Res}_{r\to\overline{q}} \frac{dE_q(p)}{(y(q)-y(\overline{q}))(x(r)-x(q))}B(q,p_1)B(r,p_2)\\
&= -2\operatorname*{Res}_{q\to\mathbf{a}}\operatorname*{Res}_{r\to q} \frac{dE_q(p)}{(y(q)-y(\overline{q}))(x(r)-x(q))}B(q,p_1)B(r,p_2)\\
&= -2\operatorname*{Res}_{q\to\mathbf{a}} \frac{dE_q(p)}{\omega(q)}B(q,p_1)B(q,p_2)\\
&= \operatorname*{Res}_{q\to\mathbf{a}} \frac{B(q,p)B(q,p_1)B(q,p_2)}{dx(q)dy(q)}
\end{aligned} \tag{A-4}$$

where we have used Eq. (A-2), Eq. (A-1) and Eq. (A-3). □

Theorem 4.2 proof:

It is obvious from the definition that if p is away from branchpoints, the residues are finite integrals, and $W_{k+1}^{(g)}$ is finite. The only poles can be obtained when p pinches an integration contour, i.e. at branch points.

Then, it is easy to see by recursion on k and g that it holds for any p_i.

□

Theorem 4.3 proof:

The first one is a property of $dE_q(p)$, and the second one follows from recursion on k and g, and it holds for $W_2^{(0)} = B$. □

Theorem 4.4 proof:

The case $k=1, g=0$ comes from Eq. (A-1), and by integration:

$$\sum_i dE_q(p^i) = 0 \tag{A-5}$$

which proves equation 4-23. Then, it is clear from the iterative definition of $W_{k+1}^{(g)}$ for $k\geq 1$, that the dependance of $W_{k+1}^{(g)}(p_1,p,p_2,\ldots,p_k)$ in p is a sum of integrals involving only the following quantities:

$$\sum_j \operatorname*{Res}_{q\to a_j} \frac{dE_{j,q}(q_1)}{\omega_j(q)} B(q,p)\, W_{l+1}^{(g)}(q,q_2,\ldots,q_l) \tag{A-6}$$

for some $q_1,\ldots,q_l$[10]. Using equation A-1 we have to compute:

$$\begin{aligned}
&\sum_i\sum_j \operatorname*{Res}_{q\to a_j} \frac{dE_{j,q}(q_1)}{\omega_j(q)} B(q,p^i)\, W_{l+1}^{(g)}(q,q_2,\ldots,q_l)\\
&= \sum_j \operatorname*{Res}_{q\to a_j} \frac{dE_{j,q}(q_1)}{\omega_j(q)}\frac{dx(q)dx(p)}{(x(q)-x(p))^2}\, W_{l+1}^{(g)}(q,q_2,\ldots,q_l)\\
&= \frac{1}{2}\sum_j \operatorname*{Res}_{q\to a_j} \frac{dE_{j,q}(q_1)}{\omega_j(q)}\frac{dx(q)dx(p)}{(x(q)-x(p))^2}\,\Big(W_{l+1}^{(g)}(q,q_2,\ldots,q_l)+W_{l+1}^{(g)}(\overline{q},q_2,\ldots,q_l)\Big)\\
&= -\frac{1}{2}\sum_{q^i\neq q,\overline{q}}\sum_j \operatorname*{Res}_{q\to a_j} \frac{dE_{j,q}(q_1)}{\omega_j(q)}\frac{dx(q)dx(p)}{(x(q)-x(p))^2}\, W_{l+1}^{(g)}(q^i,q_2,\ldots,q_l)\\
&= 0
\end{aligned} \tag{A-7}$$

where the second equality holds due to A-2, the third equality holds due to equation 4-23, and the last equality holds because that last expression has no poles at the branchpoints. This proves equation 4-24. □

Theorem 4.5 proof:

It is clearly a rational function of $x(p)$ because it is a symmetric sum on all sheets. From theorem 4.2, the RHS may have poles at branch points, and/or at the poles of some $y(p^i)$, and/or when $x(p)=x(p_l)$ for some l. Let us prove that the poles at branch points actualy cancel.

Let us denote in this section:

$$U_k^{(g)}(q,q',p_K) = \sum_{m=0}^{g}\sum_{J\subset K} W_{j+1}^{(m)}(q,p_J)W_{k-j+1}^{(g-m)}(q',p_{K/J}) + W_{k+2}^{(g-1)}(q,q',p_K). \tag{A-8}$$

From theorem 4.4, we have:

$$\sum_i U_k^{(g)}(q^i,q^i,p_K)$$

[10]Since it may not be clear which branch point dE and ω refers to, one indicates it with an index.

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_i \sum_{l\neq i} U_k^{(g)}(q^l, q^i, p_K) \\
&= -U_k^{(g)}(q, \overline{q}, p_K) - U_k^{(g)}(\overline{q}, q, p_K) - \sum_{q^i \neq q, \overline{q}} (U_k^{(g)}(q, q^i, p_K) + U_k^{(g)}(\overline{q}, q^i, p_K)) \\
&\quad - \sum_{q^i \neq q, \overline{q}} (U_k^{(g)}(q^i, q, p_K) + U_k^{(g)}(q^i, \overline{q}, p_K)) - \sum_{q^i \neq q, \overline{q}} \sum_{l \neq i, q^l \neq, q, \overline{q}} U_k^{(g)}(q^l, q^i, p_K)
\end{aligned}
\tag{$A-9$}
$$

and from theorem 4.4 and theorem 4.2, only the first two terms have poles at branch points, and thus:

$$
\begin{aligned}
& -\sum_i \sum_j \operatorname*{Res}_{q \to a_j} \frac{dE_{j,q}(p)}{\omega_j(q)} U_k^{(g)}(q^i, q^i, p_K) \\
&= \sum_j \operatorname*{Res}_{q \to a_j} \frac{dE_{j,q}(p)}{\omega_j(q)} \left(U_k^{(g)}(q, \overline{q}, p_K) + U_k^{(g)}(\overline{q}, q, p_K) \right) \\
&= 2 \sum_j \operatorname*{Res}_{q \to a_j} \frac{dE_{j,q}(p)}{\omega_j(q)} U_k^{(g)}(q, \overline{q}, p_K) \\
&= 2 W_{k+1}^{(g)}(p, p_K)
\end{aligned}
\tag{A-10}
$$

where the last equality holds from the definition of $W_{k+1}^{(g)}$. Thus we have:

$$
W_{k+1}^{(g)}(p, p_K) = -\frac{1}{2} \sum_j \operatorname*{Res}_{q \to a_j} \frac{dE_{j,q}(p)}{\omega_j(q)} \left(\sum_i U_k^{(g)}(q^i, q^i, p_K) \right).
\tag{$A-11$}
$$

Then we rewrite it in terms of $P_k^{(g)}$ above:

$$
\begin{aligned}
& W_{k+1}^{(g)}(p, p_K) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_j \operatorname*{Res}_{q \to a_j} \frac{dE_{j,q}(p)}{\omega_j(q)} \Big(P_k^{(g)}(x(q), p_K)\, dx(q)^2 \\
&\qquad + 2 \sum_i y(q^i) dx(q) W_{k+1}^{(g)}(q^i, p_K) \Big) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_j \operatorname*{Res}_{q \to a_j} \frac{dE_{j,q}(p)}{\omega_j(q)} \Big(P_k^{(g)}(x(q), p_K)\, dx(q)^2 + 2y(q) dx(q) W_{k+1}^{(g)}(q, p_K) \\
&\qquad + 2y(\overline{q}) dx(q) W_{k+1}^{(g)}(\overline{q}, p_K) \Big) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_j \operatorname*{Res}_{q \to a_j} \frac{dE_{j,q}(p)}{\omega_j(q)} \Big(P_k^{(g)}(x(q), p_K)\, dx(q)^2 \\
&\qquad + 2(y(q) - y(\overline{q})) dx(q) W_{k+1}^{(g)}(q, p_K) \Big)
\end{aligned}
\tag{$A-12$}
$$

where we have used theorem 4.4 again. That gives

$$
\begin{aligned}
W_{k+1}^{(g)}(p, p_K) &= -\frac{1}{2} \sum_j \operatorname*{Res}_{q \to a_j} \frac{dE_{j,q}(p)}{\omega_j(q)} P_k^{(g)}(x(q), p_K)\, dx(q)^2 \\
&\quad - \sum_j \operatorname*{Res}_{q \to a_j} dE_{j,q}(p)\, W_{k+1}^{(g)}(q, p_K).
\end{aligned}
\tag{$A-13$}
$$

Let us compute that last integral:

$$
\begin{aligned}
& \sum_j \operatorname*{Res}_{q \to a_j} dE_{j,q}(p)\, W_{k+1}^{(g)}(q, p_K) \\
&= -\operatorname*{Res}_{q \to p} dE_{j,q}(p)\, W_{k+1}^{(g)}(q, p_K) + \frac{1}{2i\pi} \sum_i \oint_{q' \in \underline{\mathcal{B}}_i} B(p, q') \oint_{\underline{\mathcal{A}}_i} W_{k+1}^{(g)}(q, p_K) \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi} \sum_i \oint_{q' \in \underline{\mathcal{A}}_i} B(p, q') \oint_{\underline{\mathcal{B}}_i} W_{k+1}^{(g)}(q, p_K) \\
&= -\operatorname*{Res}_{q \to p} dE_{j,q}(p)\, W_{k+1}^{(g)}(q, p_K) + \sum_i du_i(p) \oint_{\mathcal{A}_i} W_{k+1}^{(g)}(q, p_K) \\
&= -\operatorname*{Res}_{q \to p} dE_{j,q}(p)\, W_{k+1}^{(g)}(q, p_K) \\
&= -W_{k+1}^{(g)}(p, p_K)
\end{aligned}
\tag{A-14}
$$

where we have deformed the contour of integration using Riemann bilinear identity, and then we have used theorem 4.3. Thus we have:

$$
\sum_j \operatorname*{Res}_{q \to a_j} \frac{dE_{j,q}(p)}{\omega_j(q)} P_k^{(g)}(x(q), p_K)\, dx(q)^2 = 0.
\tag{A-15}
$$

Since this holds for any p, we can write for any $m \geq 0$:

$$
\begin{aligned}
0 &= \operatorname*{Res}_{p \to a_i} (y(p) - y(a_i))\, (x(p) - x(a_i))^m \sum_j \operatorname*{Res}_{q \to a_j} \frac{dE_{j,q}(p)}{\omega_j(q)} P_k^{(g)}(x(q), p_K)\, dx(q)^2 \\
&= -\operatorname*{Res}_{q \to a_i} \operatorname*{Res}_{p \to q, \overline{q}} \frac{dE_{j,q}(p)}{\omega_j(q)} (y(p) - y(a_i))\, (x(p) - x(a_i))^m\, P_k^{(g)}(x(q), p_K)\, dx(q)^2 \\
&= -\operatorname*{Res}_{q \to a_i} dx(q)\, (x(q) - x(a_i))^m\, P_k^{(g)}(x(q), p_K)
\end{aligned}
\tag{$A-16$}
$$

which proves that $P_k^{(g)}(x(q), p_K)$ can have no pole at $q = a_i$.

□

Theorem 4.6 proof:

Assume this is proved for $h < g$, and at g, it is proved for $l < k$. Then we have:

$$
\begin{aligned}
& W_2^{(g)}(p_1, p_2) \\
&= \sum_i \operatorname*{Res}_{q \to a_i} \frac{dE_q(p_1)}{\omega(q)} \Big[2 \sum_{m=0}^{g} W_2^{(m)}(q, p_2) W_1^{(g-m)}(\overline{q}) + W_3^{(g-1)}(q, \overline{q}, p_2) \Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \sum_i \operatorname*{Res}_{q\to a_i} \frac{dE_q(p_1)}{\omega(q)} B(q,p_2)\, W_1^{(g)}(\overline{q}) \\
& + \sum_i \operatorname*{Res}_{q\to a_i} \sum_{i'} \operatorname*{Res}_{q'\to a_{i'}} \frac{dE_q(p_1)}{\omega(q)} \frac{dE_{i',q'}(p_2)}{\omega_{i'}(q')} \Big[2\sum_{m'=0}^{g-1} W_2^{(m')}(q',q) W_2^{(g-m'-1)}(\overline{q}',\overline{q}) \\
& \quad + 2\sum_{m=1}^{g} W_1^{(g-m)}(\overline{q}) W_3^{(m-1)}(q',\overline{q}',q) + 2\sum_{m'=0}^{g-1} W_3^{(m')}(q',q,\overline{q}) W_1^{(g-m'-1)}(\overline{q}') \\
& \quad + 4\sum_{m=1}^{g}\sum_{m'=0}^{m} W_2^{(m')}(q',q) W_1^{(m-m')}(\overline{q}') W_1^{(g-m)}(\overline{q}) + W_4^{(g-2)}(q,q',\overline{q},\overline{q}') \Big]
\end{aligned}
\tag{$A-17$}
$$

and $W_2^{(g)}(p_2,p_1)$ is given by the same integral except that the order for computing residues is reversed, the residue in q is computed before q'. The difference is thus obtained by pushing the contour of q' through the contour of q, and is obtained as the residue at $q=q'$. Notice that only $W_2^{(0)}(q,q')$ has a pole at $q=q'$, all the other $W_k^{(g)}$ have no poles at $q=q'$ from theorem 4.2. Thus we have:

$$
\begin{aligned}
& W_2^{(g)}(p_1,p_2) - W_2^{(g)}(p_2,p_1) - \textstyle\sum_i \operatorname{Res}_{q\to a_i} \frac{dE_q(p_1)\, B(q,p_2) - dE_q(p_2)\, B(q,p_1)}{\omega(q)} W_1^{(g)}(\overline{q}) \\
& = \textstyle\sum_i \operatorname{Res}_{q\to a_i} \operatorname{Res}_{q'\to q} \frac{dE_q(p_1)}{\omega(q)} \frac{dE_{q'}(p_2)}{\omega_i(q')} B(q,q') \\
& \quad \Big[4\sum_{m=0}^{g} W_1^{(m)}(\overline{q}') W_1^{(g-m)}(\overline{q}) + 2W_2^{(g-1)}(\overline{q}',\overline{q}) \Big] \\
& = 2\textstyle\sum_i \operatorname{Res}_{q\to a_i} \operatorname{Res}_{q'\to q} \frac{dE_q(p_1)}{\omega(q)} \frac{dE_{q'}(p_2)}{\omega_i(q')} B(q,q')\, U_0^{(g)}(\overline{q},\overline{q}') \\
& = \textstyle\sum_i \operatorname{Res}_{q\to a_i} \operatorname{Res}_{q'\to q} \frac{dE_q(p_1)}{\omega(q)} \frac{dE_{q'}(p_2)}{\omega_i(q')} B(q,q') \left(U_0^{(g)}(q,q') + U_0^{(g)}(\overline{q},\overline{q}') \right)
\end{aligned}
\tag{A-18}
$$

where we have used the notation of theorem 4.5.

Similarly, for higher values of k, we find:

$$
\begin{aligned}
& W_{2+k}^{(g)}(p_1,p_2,p_K) - W_{2+k}^{(g)}(p_2,p_1,p_K) \\
& \quad - \sum_i \operatorname*{Res}_{q\to a_i} \frac{dE_q(p_1)\, B(q,p_2) - dE_q(p_2)\, B(q,p_1)}{\omega(q)} W_{k+1}^{(g)}(\overline{q},p_K) \\
= \quad & \sum_i \operatorname*{Res}_{q\to a_i} \operatorname*{Res}_{q'\to q} \frac{dE_q(p_1)}{\omega(q)} \frac{dE_{q'}(p_2)}{\omega_i(q')} B(q,q') \left(U_k^{(g)}(q,q',p_K) + U_k^{(g)}(\overline{q},\overline{q}',p_K) \right)
\end{aligned}
\tag{$A-19$}
$$

Then it gives:

$$
\begin{aligned}
& W_{2+k}^{(g)}(p_1,p_2,p_K) - W_{2+k}^{(g)}(p_2,p_1,p_K) \\
& \quad - \sum_i \operatorname*{Res}_{q\to a_i} \frac{dE_q(p_1)\, B(q,p_2) - dE_q(p_2)\, B(q,p_1)}{\omega(q)} W_{k+1}^{(g)}(\overline{q},p_K) \\
= \quad & \sum_i \operatorname*{Res}_{q\to a_i} \frac{dE_q(p_1)}{\omega(q)} d_{q'} \left(\frac{dE_{q'}(p_2)}{\omega_i(q')} \left(U_k^{(g)}(q,q',p_K) + U_k^{(g)}(\overline{q},\overline{q}',p_K) \right) \right)_{q'=q}
\end{aligned}
\tag{$A-20$}
$$

and by integrating half of it by parts we get:

$$
\begin{aligned}
& W_{2+k}^{(g)}(p_1,p_2,p_K) - W_{2+k}^{(g)}(p_2,p_1,p_K) \\
& = -\textstyle\sum_i \operatorname{Res}_{q\to a_i} \frac{B(q,p_1)dE_q(p_2) - B(q,p_2)dE_q(p_1)}{\omega(q)^2} \left(U_k^{(g)}(q,q,p_K) + U_k^{(g)}(\overline{q},\overline{q},p_K) \right) \\
& + \textstyle\sum_i \operatorname{Res}_{q\to a_i} \frac{dE_q(p_1)\, B(q,p_2) - dE_q(p_2)\, B(q,p_1)}{\omega(q)} W_{k+1}^{(g)}(\overline{q},p_K)
\end{aligned}
\tag{A-21}
$$

Now we use the following Lemma:

Lemma A.1 *If $f(q,q')$ is localy a bilinear differential near a branchpoint a_i, with no poles, and symmetric in q and $\overline{q}$, and in q' and $\overline{q}'$, then:*

$$
\operatorname*{Res}_{q\to a_i} \frac{B(q,p_1)dE_q(p_2) - B(q,p_2)dE_q(p_1)}{\omega(q)^2} f(q,q) = 0. \tag{A-22}
$$

Proof of the Lemma:

The residue is a simple pole, and we can use formula A-3, that gives:

$$
\begin{aligned}
& \operatorname*{Res}_{q\to a_i} \frac{B(q,p_1)dE_q(p_2) - B(q,p_2)dE_q(p_1)}{\omega(q)^2} f(q,q) \\
= \quad & \operatorname*{Res}_{q\to a_i} \frac{B(q,p_1)B(q,p_2) - B(q,p_2)B(q,p_1)}{\omega(q)dy(q)dx(q)} f(q,q) \\
= \quad & 0
\end{aligned}
\tag{A-23}
$$

□.

Using this Lemma, as well as theorem 4.5, we get:

$$
\begin{aligned}
& W_{2+k}^{(g)}(p_1,p_2,p_K) - W_{2+k}^{(g)}(p_2,p_1,p_K) \\
& = -\textstyle\sum_i \operatorname{Res}_{q\to a_i} \frac{B(q,p_1)dE_q(p_2) - B(q,p_2)dE_q(p_1)}{\omega(q)^2} (y(q) - y(\overline{q}))dx(q) W_{k+1}^{(g)}(q,p_K) \\
& + \textstyle\sum_i \operatorname{Res}_{q\to a_i} \frac{dE_q(p_1)\, B(q,p_2) - dE_q(p_2)\, B(q,p_1)}{\omega(q)} W_{k+1}^{(g)}(\overline{q},p_K) \\
& = 0.
\end{aligned}
\tag{A-24}
$$

□

Corollary 4.1 proof:

For any rational function $R(x)$ with no pole at $x(a_i)$ we have:

$$
\begin{aligned}
& \operatorname*{Res}_{a_i} R(x(p)) W_{k+1}^{(g)}(p,p_1,\dots,p_k) \\
= \quad & \frac{1}{2} \operatorname*{Res}_{a_i} R(x(p)) \left(W_{k+1}^{(g)}(p,p_1,\dots,p_k) + W_{k+1}^{(g)}(\overline{p},p_1,\dots,p_k) \right) \\
= \quad & 0
\end{aligned}
\tag{A-25}
$$

due to theorem 4.4.

For $m=0,1$ compute

$$
\sum_\alpha \operatorname*{Res}_{p\to\alpha} x(p)^m y(p) W_{k+1}^{(g)}(p,p_K)
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\sum_{\alpha}\operatorname*{Res}_{p\to\alpha}\frac{x(p)^m}{dx(p)}\Big(-2y(p)dx(p)W_{k+1}^{(g)}(p,p_K)+\\
&\qquad +\sum_{h=0}^{g}\sum_{I\subset K}W_{|I|+1}^{(h)}(p,p_I)W_{k-|I|+1}^{(g-h)}(p,p_{K/I})+W_{k+2}^{(g-1)}(p,p,p_K)\Big)\\
&= \frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{p\to a_i,p_K}\frac{x(p)^m}{dx(p)}\Big(-2y(p)dx(p)W_{k+1}^{(g)}(p,p_K)+\\
&\qquad +\sum_{h=0}^{g}\sum_{I\subset K}W_{|I|+1}^{(h)}(p,p_I)W_{k-|I|+1}^{(g-h)}(p,p_{K/I})+W_{k+2}^{(g-1)}(p,p,p_K)\Big)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\operatorname*{Res}_{p\to p_j}\frac{x(p)^m}{dx(p)}\Big(B(p,p_j)W_k^{(g)}(p,p_{K/\{j\}})\Big)\\
&\quad +\frac{1}{2}\sum_{i}\operatorname*{Res}_{p\to a_i}\frac{x(p)^m}{dx(p)}\Big(-2y(p)dx(p)W_{k+1}^{(g)}(p,p_K)+\\
&\qquad +\sum_{h=0}^{g}\sum_{I\subset K}W_{|I|+1}^{(h)}(p,p_I)W_{k-|I|+1}^{(g-h)}(p,p_{K/I})+W_{k+2}^{(g-1)}(p,p,p_K)\Big)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}d_{p_j}\Big(\frac{x(p_j)^m\,W_k^{(g)}(p_K)}{dx(p_j)}\Big)\\
&\quad +\frac{1}{4}\sum_{i}\operatorname*{Res}_{p\to a_i}\frac{x(p)^m}{dx(p)}\Big(-2y(p)dx(p)W_{k+1}^{(g)}(p,p_K)+\\
&\qquad +\sum_{h=0}^{g}\sum_{I\subset K}W_{|I|+1}^{(h)}(p,p_I)W_{k-|I|+1}^{(g-h)}(p,p_{K/I})+W_{k+2}^{(g-1)}(p,p,p_K)\Big)\\
&\quad +\frac{1}{4}\sum_{i}\operatorname*{Res}_{p\to a_i}\frac{x(p)^m}{dx(p)}\Big(-2y(\overline{p})dx(p)W_{k+1}^{(g)}(\overline{p},p_K)+\\
&\qquad +\sum_{h=0}^{g}\sum_{I\subset K}W_{|I|+1}^{(h)}(\overline{p},p_I)W_{k-|I|+1}^{(g-h)}(\overline{p},p_{K/I})+W_{k+2}^{(g-1)}(\overline{p},\overline{p},p_K)\Big)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}d_{p_j}\Big(\frac{x(p_j)^m\,W_k^{(g)}(p_K)}{dx(p_j)}\Big)\\
&\quad +\frac{1}{4}\sum_{i}\operatorname*{Res}_{p\to a_i}\frac{x(p)^m}{dx(p)}\Big(P_k^{(g)}(x(p),p_K)dx^2(p)\Big)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}d_{p_j}\Big(\frac{x(p_j)^m\,W_k^{(g)}(p_K)}{dx(p_j)}\Big)
\end{aligned}
\qquad (A-26)
$$

due to theorem 4.5. □

Theorem 4.7 proof:

The case $k=1$, $g=0$ is easy:

$$\operatorname*{Res}_{p_2\to p_1}\Phi(p)B(p_1,p_2)=d\Phi(p_2)=y(p_1)dx(p_1). \qquad \text{(A-27)}$$

We prove the theorem by recursion on g and k. Suppose it is proved for all k' for $g'\le g-1$, and for $k'\le k-1$ if $g'=g$. We write $K=\{1,\dots,k\}$ and $K'=\{1,\dots,k-1\}$. Then we have from Eq. (4-9):

$$
\begin{aligned}
&\operatorname*{Res}_{p_k\to\mathbf{a}}\Phi(p_k)W_{k+1}^{(g)}(p,p_1,\dots,p_k)\\
&= \operatorname*{Res}_{p_k\to\mathbf{a}}\operatorname*{Res}_{q\to\mathbf{a}}\Phi(p_k)\frac{dE_q(p)}{\omega(q)}\Big(\sum_{m=0}^{g}\sum_{J\subset K'}W_{j+2}^{(m)}(q,p_J,p_k)W_{k-j}^{(g-m)}(\overline{q},p_{K'/J})\\
&\qquad +\sum_{m=0}^{g}\sum_{J\subset K'}W_{j+1}^{(m)}(q,p_J)W_{k-j+1}^{(g-m)}(\overline{q},p_{K'/J},p_k)+W_{k+2}^{(g-1)}(q,\overline{q},p_{K'},p_k)\Big).
\end{aligned}
\qquad (A-28)
$$

Then we exchange the contours of integration:

$$\operatorname*{Res}_{p_k\to\mathbf{a}}\operatorname*{Res}_{q\to\mathbf{a}}=\operatorname*{Res}_{q\to\mathbf{a}}\operatorname*{Res}_{p_k\to\mathbf{a}}+\operatorname*{Res}_{q\to\mathbf{a}}\operatorname*{Res}_{p_k\to q,\overline{q}}. \qquad \text{(A-29)}$$

Thus

$$
\begin{aligned}
&\operatorname*{Res}_{p_k\to\mathbf{a}}\Phi(p_k)W_{k+1}^{(g)}(p,p_1,\dots,p_k)\\
&= \operatorname*{Res}_{q\to\mathbf{a}}\operatorname*{Res}_{p_k\to\mathbf{a}}\Phi(p_k)\frac{dE_q(p)}{\omega(q)}\Big(\sum_{m=0}^{g}\sum_{J\subset K'}W_{j+2}^{(m)}(q,p_J,p_k)W_{k-j}^{(g-m)}(\overline{q},p_{K'/J})\\
&\qquad +\sum_{m=0}^{g}\sum_{J\subset K'}W_{j+1}^{(m)}(q,p_J)W_{k-j+1}^{(g-m)}(\overline{q},p_{K'/J},p_k)+W_{k+2}^{(g-1)}(q,\overline{q},p_{K'},p_k)\Big)\\
&\quad +\operatorname*{Res}_{q\to\mathbf{a}}\operatorname*{Res}_{p_k\to q,\overline{q}}\Phi(p_k)\frac{dE_q(p)}{\omega(q)}\Big(\sum_{m=0}^{g}\sum_{J\subset K'}W_{j+2}^{(m)}(q,p_J,p_k)W_{k-j}^{(g-m)}(\overline{q},p_{K'/J})\\
&\qquad +\sum_{m=0}^{g}\sum_{J\subset K'}W_{j+1}^{(m)}(q,p_J)W_{k-j+1}^{(g-m)}(\overline{q},p_{K'/J},p_k)+W_{k+2}^{(g-1)}(q,\overline{q},p_{K'},p_k)\Big).
\end{aligned}
\qquad (A-30)
$$

The first term is computed from the recursion hypothesis, and the second term can exist only if the correlation function containing p_k has poles at $p_k=q$ or $p_k=\overline{q}$, and from theorem 4.2, this can happen only if the correlation function containing p_k is a

Bergmann kernel. That gives:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Res}_{p_k\to\mathbf{a}}\,\Phi(p_k)W_{k+1}^{(g)}(p,p_1,\dots,p_k)\\
&=\mathrm{Res}_{q\to\mathbf{a}}\,\tfrac{dE_q(p)}{\omega(q)}\Big(\quad\sum_{m=0}^{g}\sum_{J\subset K'}(2m+(j+1)-2)W_{j+1}^{(m)}(q,p_J)W_{k-j}^{(g-m)}(\overline{q},p_{K'/J})\\
&\quad+\sum_{m=0}^{g}\sum_{J\subset K'}(2(g-m)+(k-j)-2)W_{j+1}^{(m)}(q,p_J)W_{k-j}^{(g-m)}(\overline{q},p_{K'/J})\\
&\quad+(2(g-1)+k+1-2)W_{k+1}^{(g-1)}(q,\overline{q},p_{K'})\Big)\\
&+\mathrm{Res}_{q\to\mathbf{a}}\,\mathrm{Res}_{p_k\to q,\overline{q}}\,\Phi(p_k)\,\tfrac{dE_q(p)}{\omega(q)}\Big(\quad B(q,p_k)W_{k+1}^{(g)}(\overline{q},p_{K'})+W_k^{(g)}(q,p_{K'})B(\overline{q},p_k)\Big)\\
&=(2g+k-3)\;\mathrm{Res}_{q\to\mathbf{a}}\,\tfrac{dE_q(p)}{\omega(q)}\Big(\sum_{m=0}^{g}\sum_{J\subset K'}W_{j+1}^{(m)}(q,p_J)W_{k-j}^{(g-m)}(\overline{q},p_{K'/J})\\
&\quad+W_{k+1}^{(g-1)}(q,\overline{q},p_{K'})\Big)\\
&+\mathrm{Res}_{q\to\mathbf{a}}\,\tfrac{dE_q(p)}{y(q)-y(\overline{q})}\Big(y(q)W_{k+1}^{(g)}(\overline{q},p_{K'})+y(\overline{q})W_k^{(g)}(q,p_{K'})\Big)\\
&=(2g+k-3)\,W_k(p,p_1\dots,p_{k-1})\\
&+\mathrm{Res}_{q\to\mathbf{a}}\,\tfrac{dE_q(p)}{y(q)-y(\overline{q})}\Big(y(q)(W_{k+1}^{(g)}(\overline{q},p_{K'})+W_k^{(g)}(q,p_{K'}))+(y(\overline{q})-y(q))W_k^{(g)}(q,p_{K'})\Big)\\
&=(2g+k-3)\,W_k(p,p_1\dots,p_{k-1})\\
&+\mathrm{Res}_{q\to\mathbf{a}}\,\tfrac{dE_q(p)}{y(q)-y(\overline{q})}\,(y(\overline{q})-y(q))W_k^{(g)}(q,p_{K'})\\
&=(2g+k-3)\,W_k(p,p_1\dots,p_{k-1})-\mathrm{Res}_{q\to\mathbf{a}}\,dE_q(p)\,W_k^{(g)}(q,p_{K'})\\
&=(2g+k-3)\,W_k(p,p_1\dots,p_{k-1})+\tfrac{1}{2}\;\mathrm{Res}_{q\to\mathbf{a}}\,dS_{q,o}(p)\,W_k^{(g)}(q,p_{K'})\\
&\quad-\tfrac{1}{2}\;\mathrm{Res}_{q\to\mathbf{a}}\,dS_{\overline{q},o}(p)\,W_k^{(g)}(q,p_{K'})\\
&=(2g+k-3)\,W_k(p,p_1\dots,p_{k-1})+\tfrac{1}{2}\;\mathrm{Res}_{q\to\mathbf{a}}\,dS_{q,o}(p)\,W_k^{(g)}(q,p_{K'})\\
&\quad-\tfrac{1}{2}\;\mathrm{Res}_{q\to\mathbf{a}}\,dS_{q,o}(p)\,W_k^{(g)}(\overline{q},p_{K'})\\
&=(2g+k-3)\,W_k(p,p_1\dots,p_{k-1})+\mathrm{Res}_{q\to\mathbf{a}}\,dS_{q,o}(p)\,W_k^{(g)}(q,p_{K'})\\
&=(2g+k-3)\,W_k(p,p_1\dots,p_{k-1})-\mathrm{Res}_{q\to p}\,dS_{q,o}(p)\,W_k^{(g)}(q,p_{K'})\\
&-\tfrac{1}{2i\pi}\sum_j\Big(\oint_{\underline{\mathcal{B}}_j}B(q,p)\oint_{\underline{\mathcal{A}}_j}W_k^{(g)}(q,p_{K'})-\oint_{\underline{\mathcal{A}}_j}B(q,p)\oint_{\underline{\mathcal{B}}_j}W_k^{(g)}(q,p_{K'})\Big)\\
&=(2g+k-3)\,W_k(p,p_1\dots,p_{k-1})-\mathrm{Res}_{q\to p}\,dS_{q,o}(p)\,W_k^{(g)}(q,p_{K'})\\
&-du^t(p)\;\Big((1+\kappa\tau)\oint_{\underline{\mathcal{A}}}W_k^{(g)}(q,p_{K'})-\kappa\oint_{\underline{\mathcal{B}}}W_k^{(g)}(q,p_{K'})\Big)\\
&=(2g+k-3)\,W_k(p,p_1\dots,p_{k-1})-\mathrm{Res}_{q\to p}\,dS_{q,o}(p)\,W_k^{(g)}(q,p_{K'})\\
&\quad-du^t(p)\;\oint_{\mathcal{A}}W_k^{(g)}(q,p_{K'})\\
&=(2g+k-3)\,W_k(p,p_1\dots,p_{k-1})-\mathrm{Res}_{q\to p}\,dS_{q,o}(p)\,W_k^{(g)}(q,p_{K'})\\
&=(2g+k-2)\,W_k(p,p_1\dots,p_{k-1})
\end{aligned}
\tag{A-31}
$$

□

B Variation of the curve

In this appendix, we proove the theorems stated in sections (5) and section (6.1).

Lemma 5.1 proof:

$$
\begin{aligned}
&D_\Omega\,\Big(\textstyle\sum_j\mathrm{Res}_{q\to a_j}\,\frac{dE_q(p)}{\omega(q)}\,f(q,\overline{q})\Big)_{x(p)}\\
&=\textstyle\sum_j\mathrm{Res}_{q\to a_j}\,\frac{dE_q(p)}{\omega(q)}\;D_\Omega\left(f(q,\overline{q})\right)_{x(q)}-\sum_j\mathrm{Res}_{q\to a_j}\,\frac{dE_q(p)}{(\omega(q))^2}\,(\Omega(q)-\Omega(\overline{q}))\,f(q,\overline{q})\\
&+2\textstyle\sum_j\mathrm{Res}_{q\to a_j}\sum_i\mathrm{Res}_{r\to a_i}\,\frac{dE_r(p)}{\omega(r)}\,\Omega(r)\,\frac{dE_q(r)}{\omega(q)}\,f(q,\overline{q})\\
&=\textstyle\sum_j\mathrm{Res}_{q\to a_j}\,\frac{dE_q(p)}{\omega(q)}\;D_\Omega\left(f(q,\overline{q})\right)_{x(q)}-2\sum_j\mathrm{Res}_{q\to a_j}\,\frac{dE_q(p)}{(\omega(q))^2}\,\Omega(q)\,f(q,\overline{q})\\
&+2\textstyle\sum_j\mathrm{Res}_{q\to a_j}\sum_i\mathrm{Res}_{r\to a_i}\,\frac{dE_r(p)}{\omega(r)}\,\Omega(r)\,\frac{dE_q(r)}{\omega(q)}\,f(q,\overline{q})\\
&=\textstyle\sum_j\mathrm{Res}_{q\to a_j}\,\frac{dE_q(p)}{\omega(q)}\;D_\Omega\left(f(q,\overline{q})\right)_{x(q)}-2\sum_j\mathrm{Res}_{q\to a_j}\,\mathrm{Res}_{r\to q}\,\frac{dE_q(r)dE_r(p)}{\omega(q)\omega(r)}\,\Omega(r)\,f(q,\overline{q})\\
&+2\textstyle\sum_j\mathrm{Res}_{q\to a_j}\sum_i\mathrm{Res}_{r\to a_i}\,\frac{dE_r(p)}{\omega(r)}\,\Omega(r)\,\frac{dE_q(r)}{\omega(q)}\,f(q,\overline{q})\\
&=\textstyle\sum_j\mathrm{Res}_{q\to a_j}\,\frac{dE_q(p)}{\omega(q)}\;D_\Omega\left(f(q,\overline{q})\right)_{x(q)}\\
&+2\textstyle\sum_i\mathrm{Res}_{r\to a_i}\sum_j\mathrm{Res}_{q\to a_j}\,\frac{dE_r(p)}{\omega(r)}\,\Omega(r)\,\frac{dE_q(r)}{\omega(q)}\,f(q,\overline{q})
\end{aligned}
\tag{B-1}
$$

□

Theorem 5.1 proof:

This theorem straightforwardly comes from the diagrammatic rules described in the preceding paragraph except for the variation of $F^{(1)}$.

Let us prove it for $F^{(1)}$ with $\Omega(p)=\int_{\mathcal{C}}B(p,q)\Lambda(q)$. One has

$$
\begin{aligned}
-\textstyle\int_{\mathcal{C}}W_1^{(g)}(p)\Lambda(p)\;&=\;-\mathrm{Res}_{q\to\mathbf{a}}\,\frac{\int_{\mathcal{C}}dE_q(p)\Lambda(p)}{\omega(q)}B(q,\overline{q})\\
&=\;-\mathrm{Res}_{q\to\mathbf{a}}\,\frac{\int_{\mathcal{C}}dE_q(p)\Lambda(p)dz_i(q)dz_i(\overline{q})}{\omega(q)}\left[\frac{1}{(z(q)-z(\overline{q}))^2}+\frac{1}{6}S_B(q)\right]
\end{aligned}
\tag{B-2}
$$

where z_i is a local variable near the branch point a_i and S_B is the corresponding Bergmann projective connection. Since the last term has a simple pole at the branch point a_i, one can write

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{Res}_{q\to\mathbf{a}}\,\frac{\int_{\mathcal{C}}dE_q(p)\Lambda(p)dz_i(q)dz_i(\overline{q})}{\omega(q)}\frac{1}{6}S_B(q)\;&=\;-\frac{1}{2}\sum_i\frac{\Omega(a_i)}{dy(a_i)}\,\mathrm{Res}_{q\to a_i}\,\frac{B(q,\overline{q})}{dx(q)}\\
&=\;-\frac{1}{2}\delta_\Omega ln\tau_{Bx}.
\end{aligned}
\tag{B-3}
$$

On the other hand, one can express the first term thanks to the local variables z_i and compute

$$
-\mathrm{Res}_{q\to\mathbf{a}}\,\frac{\int_{\mathcal{C}}dE_q(p)\Lambda(p)dz_i(q)dz_i(\overline{q})}{\omega(q)(z(q)-z(\overline{q}))^2}\;=\;-\frac{1}{24}\delta_\Omega(y'(a_i))
\tag{B-4}
$$

provided that $z_i(q)-z_i(\overline{q})=2z_i(q)$. □

Theorem (5.3) proof:

Using theorem 4.7, we have:

$$(2-2g)F^{(g)} = -\operatorname*{Res}_{\mathbf{a}} \Phi W_1^{(g)} \tag{B-5}$$

and using eq.3-63, we can choose for any arbitrary o':

$$\Phi(p) = -\sum_\alpha \operatorname*{Res}_\alpha V_\alpha dS_{p,o'} + \sum_\alpha t_\alpha \int_o^\alpha dS_{p,o'} + \sum_i \epsilon_i \oint_{\mathcal{B}_i} dS_{p,o'} \tag{B-6}$$

which implies:

$$\begin{array}{l}(2-2g)F^{(g)} = -\operatorname{Res}_{\mathbf{a}} \Phi W_1^{(g)} \\ = \sum_\alpha \operatorname{Res}_{p\to\mathbf{a}} \operatorname{Res}_{q\to\alpha} V_\alpha(q) dS_{p,o'}(q) W_1^{(g)}(p) - \sum_\alpha t_\alpha \operatorname{Res}_{p\to\mathbf{a}} \int_{q=o}^\alpha dS_{p,o'}(q) W_1^{(g)}(p) \\ - \sum_i \epsilon_i \operatorname{Res}_{p\to\mathbf{a}} \oint_{q\in\mathcal{B}_i} dS_{p,o'}(q) W_1^{(g)}(p).\end{array} \tag{B-7}$$

Since the poles α and the branch points a_i do not coincide, one can exchange the order of integration. Then, one can move the integration contours for p in order to integrate only around the last pole $p \to q$:

$$\begin{array}{l}(2-2g)F^{(g)} \\ = \sum_\alpha t_\alpha \int_{q=o}^\alpha \operatorname{Res}_{p\to q} dS_{p,o'}(q) W_1^{(g)}(p) - \sum_\alpha \operatorname{Res}_{q\to\alpha} \operatorname{Res}_{p\to q} V_\alpha(q) dS_{p,o'}(q) W_1^{(g)}(p) \\ + \sum_i \epsilon_i \oint_{q\in\mathcal{B}_i} \operatorname{Res}_{p\to q} dS_{p,o'}(q) W_1^{(g)}(p) \\ = \sum_\alpha \operatorname{Res}_{q\to\alpha} V_\alpha(q) W_1^{(g)}(q) - \sum_\alpha t_\alpha \int_{q=o}^\alpha W_1^{(g)}(q) - \sum_i \epsilon_i \oint_{q\in\mathcal{B}_i} W_1^{(g)}(q).\end{array} \tag{B-8}$$

□

Theorem (6.1) proof:

We have

$$\begin{aligned} 2i\pi \frac{\partial}{\partial \kappa_{ij}} W_2^{(0)}(p_1,p_2) &= \frac{1}{2}(2i\pi)^2 (du_i(p_1)du_j(p_2) + du_i(p_2)du_j(p_1)) \\ &= \frac{1}{2}\oint_{r\in\mathcal{B}_j}\oint_{s\in\mathcal{B}_i} (B(p_1,r)B(p_2,s) + B(p_2,r)B(p_1,s)). \end{aligned} \tag{B-9}$$

Thus the theorem holds for $k=2$ and $g=0$. And by integration we get

$$\begin{aligned} -2i\pi \frac{\partial}{\partial \kappa_{ij}} dE_q(p) &= 2(i\pi)^2 (du_i(p)(u_j(q) - u_j(\overline{q})) + du_j(p)(u_i(q) - u_i(\overline{q}))) \\ &= -\frac{1}{2}\oint_{r\in\mathcal{B}_i}\oint_{s\in\mathcal{B}_j} (B(p,r)dE_q(s) + B(p,s)dE_q(r)). \end{aligned} \tag{B-10}$$

$$\begin{array}{ll} & 2i\pi \frac{\partial}{\partial \kappa_{ij}} W_{k+1}^{(g)}(p,p_K) \\ = & 2i\pi \frac{\partial}{\partial \kappa_{ij}} \operatorname{Res}_{q\to\mathbf{a}} \frac{dE_q(p)}{(y(q)-y(\overline{q}))dx(q)} \left(W_{k+2}^{(g-1)}(q,\overline{q},p_K) + \sum W_{j+1}^{(h)}(q,p_J) W_{k-j+1}^{(g-h)}(\overline{q},p_{K/J}) \right) \\ = & \frac{1}{2}\oint_{r\in\mathcal{B}_i}\oint_{s\in\mathcal{B}_j} \operatorname{Res}_{q\to\mathbf{a}} \frac{B(p,r)dE_q(s)+B(p,s)dE_q(r)}{(y(q)-y(\overline{q}))dx(q)} \left(W_{k+2}^{(g-1)}(q,\overline{q},p_K) \right. \\ & \qquad \left. + \sum W_{j+1}^{(h)}(q,p_J) W_{k-j+1}^{(g-h)}(\overline{q},p_{K/J}) \right) \\ & + \operatorname{Res}_{q\to\mathbf{a}} \frac{dE_q(p)}{(y(q)-y(\overline{q}))dx(q)} \left(2i\pi \frac{\partial}{\partial \kappa_{ij}} W_{k+2}^{(g-1)}(q,\overline{q},p_K) \right) \\ & + \operatorname{Res}_{q\to\mathbf{a}} \frac{dE_q(p)}{(y(q)-y(\overline{q}))dx(q)} \left(\sum 2i\pi \frac{\partial}{\partial \kappa_{ij}} W_{j+1}^{(h)}(q,p_J) W_{k-j+1}^{(g-h)}(\overline{q},p_{K/J}) \right) \\ & + \operatorname{Res}_{q\to\mathbf{a}} \frac{dE_q(p)}{(y(q)-y(\overline{q}))dx(q)} \left(\sum W_{j+1}^{(h)}(q,p_J) 2i\pi \frac{\partial}{\partial \kappa_{ij}} W_{k-j+1}^{(g-h)}(\overline{q},p_{K/J}) \right) \\ = & \frac{1}{2}\oint_{r\in\mathcal{B}_i}\oint_{s\in\mathcal{B}_j} \left(B(p,r) W_{k+1}^{(g)}(s,p_K) + B(p,s) W_{k+1}^{(g)}(r,p_K) \right) \\ & + \frac{1}{2}\oint_{r\in\mathcal{B}_i}\oint_{s\in\mathcal{B}_j} \operatorname{Res}_{q\to\mathbf{a}} \frac{dE_q(p)}{(y(q)-y(\overline{q}))dx(q)} \left(W_{k+4}^{(g-2)}(q,\overline{q},p_K,r,s) \right. \\ & \left. + 2W_{j+3}^{(h)}(q,\overline{q},p_J,r) W_{k-j+1}^{(g-1-h)}(p_{K/J},s) + 2W_{j+2}^{(h)}(q,p_J,r) W_{k-j+2}^{(g-1-h)}(\overline{q},p_{K/J},s) \right) \\ & + \frac{1}{2}\oint_{r\in\mathcal{B}_i}\oint_{s\in\mathcal{B}_j} \operatorname{Res}_{q\to\mathbf{a}} \frac{dE_q(p)}{(y(q)-y(\overline{q}))dx(q)} \sum_J W_{k-j+1}^{(g-h)}(\overline{q},p_{K/J}) \times \\ & \qquad \times \left(W_{j+3}^{(h-1)}(q,p_J,r,s) + 2\sum_L W_{l+2}^{(m)}(q,p_L,r) W_{k-j-l+1}^{(h-m)}(p_{K/(J\cup L)},s) \right) \\ & + \frac{1}{2}\oint_{r\in\mathcal{B}_i}\oint_{s\in\mathcal{B}_j} \operatorname{Res}_{q\to\mathbf{a}} \frac{dE_q(p)}{(y(q)-y(\overline{q}))dx(q)} \sum_J W_{k-j+1}^{(g-h)}(q,p_{K/J}) \times \\ & \qquad \times \left(W_{j+3}^{(h-1)}(\overline{q},p_J,r,s) + 2\sum_L W_{l+2}^{(m)}(\overline{q},p_L,r) W_{k-j-l+1}^{(h-m)}(p_{K/(J\cup L)},s) \right) \end{array} \tag{B-11}$$

We regroup together all terms with 2 W's and all terms with 3 W's:

$$\begin{array}{ll} & 2i\pi \frac{\partial}{\partial \kappa_{ij}} W_{k+1}^{(g)}(p,p_K) \\ = & \frac{1}{2}\oint_{r\in\mathcal{B}_i}\oint_{s\in\mathcal{B}_j} \left(B(p,r) W_{k+1}^{(g)}(s,p_K) + B(p,s) W_{k+1}^{(g)}(r,p_K) \right) \\ & + \oint_{r\in\mathcal{B}_i}\oint_{s\in\mathcal{B}_j} \operatorname{Res}_{q\to\mathbf{a}} \frac{dE_q(p)}{(y(q)-y(\overline{q}))dx(q)} \sum_J W_{j+3}^{(h-1)}(q,p_J,r,s) W_{k-j+1}^{(g-h)}(\overline{q},p_{K/J}) \\ & + \oint_{r\in\mathcal{B}_i}\oint_{s\in\mathcal{B}_j} \operatorname{Res}_{q\to\mathbf{a}} \frac{dE_q(p)}{(y(q)-y(\overline{q}))dx(q)} \left(W_{j+2}^{(h)}(q,p_J,r) W_{k-j+2}^{(g-1-h)}(\overline{q},p_{K/J},s) \right) \\ & + \frac{1}{2}\oint_{r\in\mathcal{B}_i}\oint_{s\in\mathcal{B}_j} \operatorname{Res}_{q\to\mathbf{a}} \frac{dE_q(p)}{(y(q)-y(\overline{q}))dx(q)} W_{k+4}^{(g-2)}(q,\overline{q},p_K,r,s) \\ & + \oint_{r\in\mathcal{B}_i}\oint_{s\in\mathcal{B}_j} \operatorname{Res}_{q\to\mathbf{a}} \frac{dE_q(p)}{(y(q)-y(\overline{q}))dx(q)} \times \\ & \qquad \times \left(\sum_J \sum_L W_{l+2}^{(m)}(\overline{q},p_L,r) W_{k-j-l+1}^{(h-m)}(p_{K/(J\cup L)},s) W_{k-j+1}^{(g-h)}(q,p_{K/J}) \right) \\ & + \oint_{r\in\mathcal{B}_i}\oint_{s\in\mathcal{B}_j} \operatorname{Res}_{q\to\mathbf{a}} \frac{dE_q(p)}{(y(q)-y(\overline{q}))dx(q)} \times \\ & \qquad \times \left(\sum_J \sum_L W_{l+2}^{(m)}(q,p_L,r) W_{k-j-l+1}^{(h-m)}(p_{K/(J\cup L)},s) W_{k-j+1}^{(g-h)}(\overline{q},p_{K/J}) \right) \\ & + \frac{1}{2}\oint_{r\in\mathcal{B}_i}\oint_{s\in\mathcal{B}_j} \operatorname{Res}_{q\to\mathbf{a}} \frac{dE_q(p)}{(y(q)-y(\overline{q}))dx(q)} \left(2W_{j+3}^{(h)}(q,\overline{q},p_J,r) W_{k-j+1}^{(g-1-h)}(p_{K/J},s) \right) \end{array} \tag{B-12}$$

We recognize the recursion relation eq.4-9 in lines 2 to 5, and in lines 6 to 8, and this gives the theorem.

The theorem for the free energies, is easy obtained using theorem 4.7. □

C Proof of the symplectic invariance of $F^{(0)}$ and $F^{(1)}$

C.1 $F^{(1)}$

Let us study how $F^{(1)}$ is changed under the exchange of the roles of x and y. For this purpose, we define the images of $F^{(1)}$ and $W_1^{(1)}(p)$ under this transormation, i.e.

$$\widehat{W}_1^{(1)}(p) := -\operatorname*{Res}_{q\to \mathbf{b}} \frac{\int_{\tilde{q}}^{q} B(p,\xi)}{2(x(q)-x(\tilde{q}))dy(q)} B(q,\tilde{q}) \tag{C-1}$$

and

$$\widehat{F}^{(1)} = -\frac{1}{2} ln \tau_{By} - \frac{1}{24} ln \prod_j x'(b_j) \tag{C-2}$$

where $\mathbf{b}$ denotes the set of y-branch points, $\tilde{q}$ is the only point satisfying $y(q)=y(\tilde{q})$ and approaching a branch point b_j when $q \to b_j$, τ_{By} is the Bergmann tau function associated to y and $x'(b_j) = \frac{dx(b_j)}{d\tilde{z}_j(b_j)}$. According to theorem 5.1, for any variation Ω of the curve, the variation of the free energy reads

$$\delta_\Omega \widehat{F}^{(1)} = \int_{\mathcal{C}} \widehat{W}_1^{(1)}(p)\Lambda(p). \tag{C-3}$$

Thus, the variation of the difference between the two "free energies" reads

$$\delta_\Omega \left(F^{(1)} - \widehat{F}^{(1)} \right) = \int_{\mathcal{C}} \left(W_1^{(1)}(p) + \widehat{W}_1^{(1)}(p) \right) \Lambda(p). \tag{C-4}$$

In order to evaluate this quantity, one needs the following lemma:

Lemma C.1 *For any choice of variable z:*

$$W_1^{(1)}(p) + \widehat{W}_1^{(1)}(p) = \frac{1}{24} d_p \left[\frac{1}{x'y'} \left(2S_{Bz}(p) + \frac{x''y''}{x'y'} + \frac{x''^2}{x'^2} - \frac{x'''}{x'} + \frac{y''^2}{y'^2} - \frac{y'''}{y'} \right) \right] \tag{C-5}$$

where the derivatives are taken with respect to the variable z and S_{Bz} denotes the Bergmann projective connection associated to z.

proof:

From the definitions , one easily derives that

$$W_1^{(1)}(p) + \widehat{W}_1^{(1)}(p) = \operatorname*{Res}_{q\to p} \frac{B(p,q)}{(x(p)-x(q))(y(p)-y(q))}. \tag{C-6}$$

Let us now expand the integrand in terms of an arbitrary local variable z when $p \to q$. The different factors read

$$\frac{B(p,q)}{dz(p)dz(q)} = \frac{1}{(z(p)-z(q))^2} + \frac{1}{6} S_{Bz}(p) - \frac{z(p)-z(q)}{12} S'_{Bz}(p) + O((z(p)-z(q))^2) \tag{C-7}$$

and

$$\begin{aligned} \frac{1}{y(p)-y(q)} \quad = \quad & \frac{1}{(z(p)-z(q))y'(p)} \Big[1 - (z(p)-z(q)) \frac{y''}{2y'} \\ & + (z(p)-z(q))^2 \left(\frac{y''^2}{4y'^2} - \frac{y'''}{6y'} \right) \\ & + \frac{(z(p)-z(q))^3}{24} \left(-\frac{y''''}{y'} + 4\frac{y'''y''}{y'^2} - \frac{3y''^3}{y'^3} \right) \\ & + O((z(p)-z(q))^4) \Big]. \end{aligned} \tag{C-8}$$

Inserting it altogether inside Eq. (C-6), one can explicitly compute the residues and one recognizes the formula C-5. □

We can now prove the following theorem stating the symmetry of $F^{(1)}$ under the exchange of $x \leftrightarrow y$:

Lemma C.2 *The two free energies transform in the same way under any variation of the moduli of the curve:*

$$\delta_\Omega F^{(1)} = \delta_\Omega \widehat{F}^{(1)} \tag{C-9}$$

proof:

We already know that

$$\delta_\Omega \left(F^{(1)} - \widehat{F}^{(1)} \right) = \int_{p\in\mathcal{C}} \frac{1}{24} d_p \left[\frac{1}{x'y'} \left(2S_{Bz}(p) + \frac{x''y''}{x'y'} + \frac{x''^2}{x'^2} - \frac{x'''}{x'} + \frac{y''^2}{y'^2} - \frac{y'''}{y'} \right) \right] \Lambda(p) \tag{C-10}$$

for an arbitrary variable z.

We just have to check that this quantity vanishes for the transformations corresponding to varying the moduli of the curve. Because the function inside the differential wrt p vanishes at the poles of ydx, one can check that it is indeed the case. □

Thus the first correction to the free energy satisfies the following variation under symplectic transformations:

Theorem C.1 *$F^{(1)}$ does not change under the following transformations of $\mathcal{E}$:*

- *$y \to y + R(x)$ where R is a rational function.*
- *$y \to cy$ and $x \to \frac{1}{c}x$ where c is a non-zero complex number.*
- *$x \to x + R(y)$ where R is a rational function.*
- *$y \to x$ and $x \to y$.*

$F^{(1)}$ is shifted by a multiple of $i\pi/12$ when $\mathcal{E}$ is changed by $x \to -x$.

proof:

The first transformation is obvious from the definition since neither $ln\tau_{Bx}$ nor $y'(a_i)$ changes.

The second one follows from theorem 2 in [37] for $f = x$ and $g = \frac{x}{c}$ which shows that the variations of $ln(\tau_{Bx})$ and $y'(a_i)$ compensate.

The fourth one is nothing but lemma (C.2) and it gives the third one when combined with the first.

The last transformation holds because $ln\tau_{Bx}$ is left unchanged and $y'(a_i)$ changes sign.

□

C.2 $F^{(0)}$

Theorem C.2 *$F^{(0)}$ does not change under the following transformations of $\mathcal{E}$:*

- *$y \to y + \mathcal{P}(x)$ where $\mathcal{P}$ is a polynomial.*
- *$y \to y$ and $x \to -x$.*
- *$y \to cy$ and $x \to \frac{1}{c}x$ where c is a non-zero complex number.*
- *$x \to x + \mathcal{P}(y)$ where $\mathcal{P}$ is a polynomial.*
- *$y \to x$ and $x \to y$.*

proof:

The second and third transformations come from the structure of $F^{(0)}$ which is bilinear in objects proportionnal to ydx.

One can obtain the last one following the same method as for $F^{(1)}$: we compute the variation of the difference of the two free energies under the changes of the moduli of $\mathcal{E}$ and show that they vanish.

Let us now show the first invariance. In this case, the variation of the free energy is $\delta_{\mathcal{P}(x)dx}F^{(0)}$. Since $\mathcal{P}(x)$ is a polynomial one can write it

$$\mathcal{P}(x(p)) = \operatorname*{Res}_{q\to p} B(p,q)\mathcal{Q}(x(q)) = -\sum_{\alpha} \operatorname*{Res}_{q\to\alpha} B(p,q)\mathcal{Q}(x(q)), \tag{C-11}$$

where $\mathcal{Q}(x)$ is also a polynomial in x. Then, theorem (5.1) implies the invariance of $F^{(0)}$ under this transformation.

The fourth transformation is a combination of the first and the last one.

□

D Matrix model with an external field

We consider the matrix model with external field defined in section (10.4):

$$Z(\Lambda) := \int_{H_n} dM\, e^{-NTr(V(M)-M\widehat{\Lambda})} \tag{D-1}$$

where we assume that $\widetilde{\Lambda}$ is the diagonal matrix:

$$\widehat{\Lambda} = \mathrm{diag}\,(\overbrace{\widehat{\lambda}_1,\ldots,\widehat{\lambda}_1}^{n_1},\overbrace{\widehat{\lambda}_2,\ldots,\widehat{\lambda}_2}^{n_2},\ldots,\overbrace{\widehat{\lambda}_s,\ldots,\widehat{\lambda}_s}^{n_s}) \tag{D-2}$$

and $V'(x)$ is a rational fraction with denominator $D(x)$: $V'(x) = \frac{\sum_{k=0}^{d} g_k x^k}{D(x)}$.

In particular, the polynomial $S(y) := \prod_{i=1}^{s}(y - \widehat{\lambda}_i)$ is the minimal polynomial of $\widetilde{\Lambda}$.

We define the correlation functions $\overline{w}_k(x_1,\ldots,x_k) := N^{k-2}\left\langle \prod_{i=1}^{k} \mathrm{tr}\,\frac{1}{x_i - M}\right\rangle_c$ and their $1/N^2$ expansion

$$\overline{w}_k(\mathbf{x}_K) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{N^{2h}}\,\overline{w}_k^{(h)}(\mathbf{x}_K). \tag{D-3}$$

We also define the auxiliary functions

$$\overline{u}_k(x,y;\mathbf{x}_K) := N^{|K|-1}\left\langle \mathrm{tr}\,\frac{1}{x-M}\frac{S(y)-S(\Lambda)}{y-\Lambda}\prod_{r=1}^{|K|}\mathrm{tr}\,\frac{1}{x_{i_r}-M}\right\rangle_c \tag{D-4}$$

and

$$P_k(x,y;\mathbf{x}_K) := N^{|K|-1}\left\langle \mathrm{tr}\,\frac{V'(x)-V'(M_1)}{x-M}\frac{S(y)-S(\Lambda)}{y-\Lambda}\prod_{r=1}^{|K|}\mathrm{tr}\,\frac{1}{x_{i_r}-M}\right\rangle_c. \tag{D-5}$$

Notice that $\overline{u}_{k,}(x,y;\mathbf{x}_K)$ is a polynomial in y of degree $s-1$, and $D(x)P_k(x,y;\mathbf{x}_K)$ is a polynomial in x of degree $d-1$ and in y of degree $s-1$ (note that P_0 corresponds to P in Eq. (10-68)).

It is convenient to renormalize those functions, and define:

$$u_k(x,y;\mathbf{x}_K) := \overline{u}_k(x,y;\mathbf{x}_K) - \delta_{k,0}S(y) \tag{D-6}$$

and

$$w_k(\mathbf{x}_K) := \overline{w}_k(\mathbf{x}_K) + \frac{\delta_{k,2}}{(x_1-x_2)^2}. \tag{D-7}$$

D.1 Loop equations

Consider the change of variables

$$\delta M = \frac{1}{x-M}\frac{S(y)-S(\Lambda)}{y-\Lambda}. \tag{D-8}$$

You get the loop equation

$$\overline{w}_1(x)\overline{u}_0(x,y)+\frac{1}{N^2}\overline{u}_1(x,y;x) = V'(x)\overline{u}_0(x,y)-P_0(x,y)-y\overline{u}_0(x,y)+S(y)\overline{w}_1(x) \quad \text{(D-9)}$$

i.e.

$$(y+\overline{w}_1(x)-V'(x))(\overline{u}_0(x,y)-S(y))+\frac{1}{N^2}\overline{u}_1(x,y;x) = (V'(x)-y)S(y)-P_0(x,y). \quad \text{(D-10)}$$

We define the polynomial both in x and y

$$E_{Mext}(x,y) \coloneqq ((V'(x)-y)S(y)-P_0(x,y))\,D(x) \quad \text{(D-11)}$$

and

$$Y(x) \coloneqq V'(x)-\overline{w}_1(x). \quad \text{(D-12)}$$

The loop equation thus implies:

$$(y-Y(x))u_0(x,y)D(x)+\frac{1}{N^2}u_1(x,y;x)D(x) = E_{Mext}(x,y) \quad \text{(D-13)}$$

and in particular

$$E_{Mext}(x,Y(x)) = \frac{1}{N^2}u_1(x,Y(x);x)D(x). \quad \text{(D-14)}$$

The leading order of the topological expansion reads

$$E^{(0)}_{Mext}(x,Y(x)) = 0 \quad \text{(D-15)}$$

which defines an algebraic curve.

D.2 Leading order algebraic curve

Let us study the curve $\mathcal{E}_{Mext}(x,y) = E^{(0)}_{Mext}(x,y) = 0$ defining a compact Riemann surface $\overline{\Sigma}$ and two functions x and y defined on it.

Because y is a solution of a degree $s+1$ equation, $\mathcal{E}_{Mext}(x,y)$ has $s+1$ x-sheets. The sheets can be identified by their large x behavior:

- in the physical sheet, we have $Y(x) \sim V'(x) - 1/x + O(1/x^2)$
- in the other sheets, $Y(x) \sim \widehat{\lambda}_i + \frac{n_i}{N}\frac{1}{x} + O(1/x^2)$

Let us note by $p^i \in \overline{\Sigma}$ with $i = 0 \dots s$ the different points of the curve whose x-projection are $x(p)$, i.e.

$$\forall i,j \quad x(p^i) = x(p^j). \quad \text{(D-16)}$$

The superscript 0 corresponds to the point in the physical sheet.

From the correlation functions previously defined on the x and y projections, one defines the corresponding meromorphic 1-forms on the curve as follows:

$$W_k(\mathbf{p_K}) \coloneqq w_k(\mathbf{x}(\mathbf{p_K}))\,dx(p_1)\dots dx(p_k) \quad \text{(D-17)}$$

and

$$U_k(p,y;\mathbf{p_K}) \coloneqq u_k(x(p),y;\mathbf{x}(\mathbf{p_K}))\,dx(p)dx(p_1)\dots dx(p_k) \quad \text{(D-18)}$$

as well as there topological expansions

$$W_k(\mathbf{p_K}) = \sum_{h=0}^{\infty} N^{2-2h}\,W_k^{(h)}(\mathbf{p_K}) \quad \text{and} \quad U_k(p,y;\mathbf{p_K}) = \sum_{h=0}^{\infty} N^{2-2h}\,U_k^{(h)}(p,y;\mathbf{p_K}). \quad \text{(D-19)}$$

D.2.1 Filling fractions and genus

The curve has a genus $g \le ds-1$ and we work with fixed filling fractions

$$\epsilon_I \coloneqq \frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{A}_I} y dx. \quad \text{(D-20)}$$

D.2.2 Subleading loop equations

Consider the topological expansion of the loop equation Eq. (D-14). It reads, for $h \ge 1$:

$$\begin{aligned} E^{(h)}(x,y) \quad = \quad & D(x)(y-Y(x))u_0^{(h)}(x,y) + D(x)w_{1,0}^{(h)}(x)u_0^{(0)}(x,y) \\ & + D(x)\sum_{m=1}^{h-1} w_{1,0}^{(m)}(x)u_0^{(h-m)}(x,y) + D(x)u_1^{(h-1)}(x,y;x), \end{aligned} \quad (D-21)$$

where $E^{(h)}(x,y)$ is the h'th term in the $\hbar^2$-expansion of the spectral curve.

D.3 Diagrammatic rules for the correlation functions and the free energy

In this section, one proves that the correlation functions' and the free energy's topological expansion of this model do coincide with the $\underline{W}_k^{(h)}$'s and $\underline{F}^{(h)}$'s defined following the definitions of Eq. (4-15) and Eq. (4-16) for the classical spectral curve $\mathcal{E}_{Mext}(x,y) = 0$.

D.3.1 The semi-classical spectral curve

Let us reexpress the semi-classical spectral curve (i.e. the whole formal series $E_{Mext}(x,y)$) in terms of the classical one $E^{(0)}_{Mext}(x,y)$.

Theorem D.1

$$\begin{aligned} E_{Mext}(x,y) \quad &= \quad -D(x)\,\text{“}\left\langle \prod_{i=0}^{s}(y-V'(x(p))+\tfrac{1}{N}\,\mathrm{Tr}\,\tfrac{1}{x(p^{(i)})-M})\right\rangle'' \\ &= \quad D(x)\,[(V'(x)-y)S(y)-P_0(x,y)] \end{aligned} \quad \text{(D-22)}$$

and

$$U_0(p,y) = -\text{“}\left\langle \prod_{i=1}^{s}(y - V'(x(p)) + \frac{1}{N}\,\mathrm{Tr}\,\frac{1}{x(p^{(i)}) - M})\right\rangle'' \qquad \text{(D-23)}$$

where “ < . >″ means that one replace $\overline{w}_2$ by w_2 in the expansion.

proof:

One proves that the $\frac{1}{N^2}$-expansions of

$$\widetilde{E}(x,y) = -D(x)\left\langle \prod_{i=0}^{s}(y - V'(x(p)) + \frac{1}{N}\,\mathrm{Tr}\,\frac{1}{x(p^{(i)}) - M})\right\rangle \qquad \text{(D-24)}$$

and

$$\widetilde{U}(p,y) = -D(x)\left\langle \prod_{i=1}^{s}(y - V'(x(p)) + \frac{1}{N}\,\mathrm{Tr}\,\frac{1}{x(p^{(i)}) - M})\right\rangle \qquad \text{(D-25)}$$

coincide with the expansion of $E_{Mext}(x,y)$ and $U_0(p,y)$.

Let the topological expansions be

$$\widetilde{E}(x,y) = \sum_g N^{-2g}\widetilde{E}^{(g)}(x,y) \quad , \quad \widetilde{U}(p,y) = \sum_g N^{-2g}\widetilde{U}^{(g)}(p,y). \qquad \text{(D-26)}$$

Expanding the expressions of $\widetilde{E}(x,y)$ and $\widetilde{U}(p,y)$ into cumulants, one recovers

$$\begin{aligned}\widetilde{E}^{(h)}(x,y) \quad &= \quad (y - Y(x))D(x)\widetilde{U}_0^{(h)}(x,y) + D(x)w_1^{(h)}(x)\widetilde{U}_0^{(0)}(x,y)\\ &\quad + D(x)\sum_{m=1}^{h-1} w_1^{(m)}(x)\widetilde{U}_0^{(h-m)}(x,y) + D(x)\widetilde{U}_1^{(h-1)}(x,y;x),\end{aligned} \qquad (D-27)$$

which coincides with Eq. (D-21).

One easily proves that this system of equations admits a unique solution thanks to the polynomial properties of $\widetilde{U}(p,y)$ and that the leading orders $h = 0$ coincide. The proof is extremely similar to that for the 2-matrix model (cf. theorem 1 in [19]). □

D.3.2 Diagrammatic solution

One has:

$$W_2^{(0)}(p_1,p_2) = \underline{B}(p_1,p_2) \qquad \text{(D-28)}$$

where $\underline{B}$ is the Bergmann kernel of the algebraic curve $\mathcal{E}_{Mext}$.

The coefficient of y^s of Eq. (D-22), divided by $D(x)$, is:

$$V'(x) + \sum_i \Lambda_i = \sum_i Y(p^i). \qquad \text{(D-29)}$$

It implies that

$$\frac{dx(p)dx(q)}{(x(p)-x(q))^2} = \sum_i W_2^{(0)}(p^i,q) \quad \text{and} \quad \forall h > 1\,,\ \sum_i W_2^{(h)}(p^i,q) = 0, \qquad \text{(D-30)}$$

i.e.

$$\overline{\omega}_2(p,q) + \sum_{i=1}^{s}\omega_2(p^i,q) = 0. \qquad \text{(D-31)}$$

The coefficient of y^{s-1} is:

$$\sum_{i<j} Y(p^i)Y(p^j) + \frac{1}{N^2}\omega_2(p^i,p^j) = V'(x)\sum_i \Lambda_i + \sum_{i<j}\Lambda_i\Lambda_j + \frac{1}{N}\left\langle \mathrm{tr}\,\frac{V'(x) - V'(M_1)}{x - M_1}\right\rangle. \qquad \text{(D-32)}$$

Notice that:

$$\begin{aligned}&\sum_{i<j}\left(Y(p^i)Y(p^j) + \frac{1}{N^2}\omega_2(p^i,p^j)\right)\\ = \quad &\frac{1}{2}\sum_i\left(Y(p^i)(V'(x) + \sum_j \Lambda_j - Y(p^i)) - \frac{1}{N^2}\overline{\omega}_2(p^i,p^i)\right)\\ = \quad &\frac{1}{2}(V'(x) + \sum_j \Lambda_j)^2 - \frac{1}{2}\sum_i\left(Y(p^i)^2 + \frac{1}{N^2}\overline{\omega}_2(p^i,p^i)\right).\end{aligned} \qquad (D-33)$$

Thus:

$$V'(x)^2 + \sum_i \Lambda_i^2 - \frac{2}{N}\left\langle \mathrm{tr}\,\frac{V'(x) - V'(M_1)}{x - M_1}\right\rangle = \sum_i\left(Y(p^i)^2 + \frac{1}{N^2}\overline{\omega}_2(p^i,p^i)\right). \qquad \text{(D-34)}$$

Notice that the LHS is the ratio of a polynomial in x and $D(x)$: $\frac{Q(x)}{D(x)} = V'(x)^2 + \sum_i \Lambda_i^2 - \frac{2}{N}\left\langle \mathrm{tr}\,\frac{V'(x)-V'(M_1)}{x-M_1}\right\rangle$.

The topological expansion of this equation reads for $h \geq 1$

$$\boxed{\begin{array}{l}2\sum_{i=0}^{d_2} y(p^i)W_{1,0}^{(h)}(p^i)dx(p)\\ = \sum_{i=0}^{d_2}\sum_{m=1}^{h-1} W_{1,0}^{(m)}(p^i)W_{1,0}^{(h-m)}(p^i) + \sum_{i=0}^{d_2}\overline{W}_{2,0}^{(h-1)}(p^i,p^i) + 2\frac{Q^{(h)}(x(p))dx(p)^2}{D(x(p))}.\end{array}} \qquad \text{(D-35)}$$

From now on, following the lines of [19], one multiplies these equations by $\frac{1}{2}\frac{dE_{p,\overline{p}}(q)}{y(p)-y(\overline{p})}$, takes the residues when $p \to \mu_\alpha$ and sums over all the branch points and obtains:

$$W_{1,0}^{(h)}(q) = \sum_\alpha \mathop{\mathrm{Res}}_{p\to\mu_\alpha} \frac{\frac{1}{2}dE_{p,\overline{p}}(q)(W_{2,0}^{(h-1)}(p,\overline{p}) + \sum_{m=1}^{h-1} W_{1,0}^{(m)}(p)W_{1,0}^{(h-m)}(\overline{p}))}{(y(p) - y(\overline{p}))dx(p)}. \qquad \text{(D-36)}$$

Differentiating wrt the potential $V(x_i)$, one can finally write down an expression for the correlation functions:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} W_{k+1,0}^{(h)}(q,p_K) & = & \sum_\alpha \mathrm{Res}_{\,p\to\mu_\alpha} \frac{\frac{1}{2}dE_{p,\overline{p}}(q)}{(y(p)-y(\overline{p}))\,dx(p)} \Big(W_{k+1,0}^{(h-1)}(p,\overline{p},p_K) + \\ & & + \sum_{j,m} W_{j+1,0}^{(m)}(p,p_J)\, W_{k+1-j,0}^{(h-m)}(\overline{p},p_{K-J}) \Big) \,. \end{array}} \qquad \text{(D-37)}$$

This coincides with the reccursive definition 4-15 and ensures the equality of the correlation functions with the former defined special "loop functions".

Keeping on following [19], one finds that the topological expansion of the free energy also coincides with the special free energies defined on 4-16, that is the τ-function of the algebraic curve.

References

[1] M.Aganagic, V.Bouchard and A.Klemm, "Topological strings and (almost) modular forms", hep-th/0607100.

[2] M.Aganagic, R.Dijkgraaf, A.Klemm, M.Mariño and C.Vafa, "Topological strings and integrable hierarchies", *Commun. Math. Phys.* **261** (2006) 451, hep-th/0312085.

[3] G.Akemann, "Higher genus correlators for the Hermitian matrix model with multiple cuts", *Nucl. Phys.* **B482** (1996) 403, hep-th/9606004

[4] G.Akemann and J.Ambjørn, "New universal spectral correlators", *J.Phys.* **A29** (1996) L555–L560, cond-mat/9606129.

[5] A.Alexandrov, A.Mironov and A.Morozov, " M-Theory of Matrix Models", hep-th/0605171.

[6] A.Alexandrov, A.Mironov and A.Morozov, "Instantons and Merons in Matrix Models", hep-th/0608228.

[7] J.Ambjørn, L.Chekhov, C.F.Kristjansen and Yu.Makeenko, "Matrix model calculations beyond the spherical limit", *Nucl.Phys.* **B404** (1993) 127–172; Erratum ibid. **B449** (1995) 681, hep-th/9302014.

[8] J. Ambjørn, B. Durhuus, J. Fröhlich, "Diseases of triangulated random surface models, and possible cures", Nuclear Physics B, Volume 257, p. 433-449.

[9] O. Babelon, D. Bernard, M. Talon, *Introduction to Classical Integrable Systems* (Cambridge University Press).

[10] S. Bergman, M. Schiffer, "Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics", Academic Press Inc., Publishers, New York, NY, 1953.

[11] M.Bershadsky, S.Cecotti, H.Ooguri and C.Vafa, "Kodaira-Spencer theory of gravity and exact results for quantum string amplitudes", *Commun. Math. Phys.* **165** (1994) 311.

[12] M. Bertola, "Two-matrix model with semiclassical potentials and extended Whitham hierarchy", *J.Phys.* **A39** 8823-8856 (2006), hep-th/0511295.

[13] M. Bertola, "Free Energy of the Two-Matrix Model/dToda Tau-Function", preprint CRM-2921 (2003), hep-th/0306184.

[14] E. Brezin, C. Itzykson, G. Parisi, and J.B. Zuber, *Comm. Math. Phys.* **59**, 35 (1978).

[15] L.Chekhov, "Genus one corrections to multi-cut matrix model solutions", *Theor. Math. Phys.* **141** (2004) 1640–1653, hep-th/0401089.

[16] L. Chekhov, "Matrix models with hard walls: Geometry and solutions", *J.Phys.* **A39** (2006) 8857-8894, hep-th/0602013.

[17] L.Chekhov, B.Eynard, "Hermitian matrix model free energy: Feynman graph technique for all genera", *J. High Energy Phys.* **JHEP03** (2006) 014, hep-th/0504116.

[18] L.Chekhov, B.Eynard, "Matrix eigenvalue model: Feynman graph technique for all genera", *J. High Energy Phys.* **JHEP 0612** (2006) 026, math-ph/0604014.

[19] L.Chekhov, B.Eynard and N.Orantin, "Free energy topological expansion for the 2-matrix model", *J. High Energy Phys.* **JHEP12** (2006) 053, math-ph/0603003.

[20] J.M.Daul, V.Kazakov, I.Kostov, "Rational Theories of 2D Gravity from the Two-Matrix Model", *Nucl.Phys.* **B409** (1993) 311-338, hep-th/9303093.

[21] R.Dijkgraaf, "Intersection theory, integrable hierarchies and topological field theory", in J.Frohlich and al. (eds), *New symmetry principles in quantum field theory*, Plenum Press, p.95; hep-th/9201003.

[22] R.Dijkgraaf and C.Vafa, "Matrix Models, Topological Strings, and Supersymmetric Gauge Theories", *Nucl.Phys.* **644** (2002) 3–20, hep-th/0206255; "On Geometry and Matrix Models", *Nucl.Phys.* **644** (2002) 21–39, hep-th/0207106; "A Perturbative Window into Non-Perturbative Physics", hep-th/0208048.

[23] R.Dijkgraaf and E.Witten, "Mean field theory, topological field theory, and multimatrix models", *Nucl.Phys.* **B342** (1990) 486–522.

[24] F. David, "Loop equations and nonperturbative effects in two-dimensional quantum gravity". *Mod.Phys.Lett.* **A5** (1990) 1019.

[25] F. David, "Planar diagrams, two-dimensional lattice gravity and surface models", Nuclear Physics B, Volume 257, p. 45-58.

[26] P. Di Francesco, P. Ginsparg, J. Zinn-Justin, "2D Gravity and Random Matrices", *Phys. Rep.* **254**, 1 (1995).

[27] P. Di Francesco, "2D gravity, matrix models and graph combinatorics", Lecture given in Les Houches, *applications of random matrices in physics*, june 2004, math-ph/0406013.

[28] P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Sénéchal, "Conformal field theory", Springer, 1999.

[29] B. Dubrovin, "Geometry of 2D topological field theories", *Integrable Systems and Quantum Groups*, Montecalini, Terme, 1993. Editor: M.Francaviglia, S. Greco and *Springer Lecture Notes in Math.* **1620** (1996), 120348.

[30] B.Dubrovin, Y.Zhang, "Bihamiltonian Hierarchies in 2D Topological Field Theory At One-Loop Approximation", *Commun.Math.Phys.* **198** (1998) 311-361, hep-th/9712232.

[31] F.J. Dyson, "correlations between the eigenvales of a random matrix", Comm. Math. Phys. **19** (1970) 235-50.

[32] B. Eynard, M.L. Mehta, "Matrices coupled in a chain: eigenvalue correlations", J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998) 4449-4456.

[33] B. Eynard, "Topological expansion for the 1-hermitian matrix model correlation functions", JHEP/024A/0904, hep-th/0407261.

[34] B. Eynard, "Large N expansion of the 2-matrix model", *JHEP* **01** (2003) 051, hep-th/0210047.

[35] B. Eynard, "Large N expansion of the 2-matrix model, multicut case", preprint SPHT03/106, ccsd-00000521, math-ph/0307052.

[36] B.Eynard, "Loop equations for the semiclassical 2-matrix model with hard edges", *J.Stat.Mech.* **0510** (2005) P006, math-ph/0504002.

[37] B. Eynard, A. Kokotov, and D. Korotkin, "$1/N^2$ corrections to free energy in Hermitian two-matrix model", hep-th/0401166.

[38] B. Eynard, "Master loop equations, free energy and correlations for the chain of matrices", *J. High Energy Phys.* **JHEP11**(2003)018, xxx, hep-th/0309036, ccsd-00000572.

[39] B. Eynard "An introduction to random matrices", lectures given at Saclay, October 2000, notes available at http://www-spht.cea.fr/articles/t01/014/.

[40] B.Eynard, N.Orantin, "Topological expansion of the 2-matrix model correlation functions: diagrammatic rules for a residue formula", *J. High Energy Phys.* **JHEP12**(2005)034, math-ph/0504058.

[41] B.Eynard, " Formal matrix integrals and combinatorics of maps", math-ph/0611087.

[42] B.Eynard, M.Mariño, N.Orantin, "Holomorphic anomaly and matrix models", hep-th/0702110.

[43] B.Eynard, N.Orantin, "Mixed traces and free energy symetry", in preparation.

[44] B. Eynard, C. Kristjansen, "Exact solution of the O(n) model on a random lattice", Nuc. Phys. B455 577-618, (1995), hep-th/9506193.

[45] B. Eynard, C. Kristjansen, "More on the exact solution of the O(n) model on a random lattice, and an investigation of the case —n—¿2", Nuc. Phys. B466 463-487, (1996), hep-th/9512052.

[46] H.M. Farkas, I. Kra, "Riemann surfaces" 2nd edition, Springer Verlag, 1992.

[47] J.D. Fay, "Theta functions on Riemann surfaces", Springer Verlag, 1973.

[48] J.D. Fay, "Fourrier coefficients of the resolvent for a Fuchsian group", J. Reine Angew. Math. **293/294** (1977) 143-203.

[49] C.Itzykson, J.B.Zuber, "Combinatorics of the Modular Group II: The Kontsevich integrals", *Int.J.Mod.Phys.* **A7** (1992) 5661-5705, hep-th/9201001 .

[50] M. x. Huang, A.Klemm, S.Quackenbush, "Topological String Theory on Compact Calabi-Yau: Modularity and Boundary Conditions", hep-th/0612125.

[51] VA Kazakov, IK Kostov, AA Migdal, "Critical properties of randomly triangulated planar random surfaces", Physics Letters B, 1985.

[52] V.A. Kazakov, "Bilocal regularization of models of random surfaces" Physics Letters B, Volume 150, Issue 4, p. 282-284.

[53] V.A. Kazakov, "The appearance of matter fields from quantum fluctuations of 2D-garvity", Modern Physics Letters A, Vol. 4, No. 22 (1989) 2125-2139.

[54] V.A. Kazakov, "Ising model on a dynamical planar random lattice: exact solution", *Phys Lett.* **A119**, 140-144 (1986).

[55] V.A. Kazakov, A. Marshakov, "Complex Curve of the Two Matrix Model and its Tau-function", *J.Phys.* **A36** (2003) 3107-3136, hep-th/0211236.

[56] S.Kharchev, A.Marshakov, "On $p-q$ duality and explicit solutions in $c<1$ 2d gravity models", hep-th/9303100.

[57] V.G. Knizhnik, A.M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov, Mod. Phys. Lett **A3** (1988) 819.

[58] M.Kontsevitch, "Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function", *Funk. Anal. Prilozh.* **25** (1991) 50-57; Max-Planck Institut preprint MPI/91-47, MPI/91-77.

[59] I.K.Kostov, " Conformal field theory techniques in random matrix models", hep-th/9907060.

[60] I.K. Kostov, "Bilinear functional equations in 2d quantum gravity", hep-th/9602117.

[61] A.Kokotov, D.Korotkin, " Bergmann tau-function on Hurwitz spaces and its applications", math-ph/0310008.

[62] A.Kokotov, D.Korotkin, " Tau functions on Hurwitz spaces", *Math. Phys., Analysis and Geom.* **7** (2004), no. 1, 47-96 ,math-ph/0202034.

[63] I.Krichever "The τ-function of the universal Whitham hierarchy, matrix models and topological field theories", *Commun.Pure Appl.Math.* **47** (1992) 437; hep-th/9205110

[64] I.M. Krichever, "The τ-function of the universal Whitham hierarchy, matrix models and topological field theories", hep-th/9205110.

[65] M. Mariño, "Les Houches lectures on matrix models and topological strings", Lecture given in Les Houches, *applications of random matrices in physics*, june 2004, hep-th/0410165.

[66] A.Marshakov, A.Mironov, A.Morozov, "On Equivalence of Topological and Quantum 2d Gravity", *Phys. Lett.* **B274** (1992) 280, hep-th/9201011.

[67] M.L. Mehta, *Random Matrices*,2nd edition, (Academic Press, New York, 1991).

[68] H.E. Rauch, " Weierstrass points, branch points, and moduli of Riemann surfaces", *Comm. Pure Appl. Math.*, **12** (1959) 543-560.

[69] M. Staudacher, " Combinatorial solution of the 2-matrix model", *Phys. Lett.* **B305** (1993) 332-338.

[70] G. Schaeffer, "Bijective census and random generation of Eulerian planar maps", *Electronic Journal of Combinatorics* **4** (1997) R20; see also "Conjugaison d'arbres et cartes combinatoires alèatoires", PhD Thesis, Universitè Bordeaux I (1998).

[71] G. 't Hooft, *Nuc. Phys.* **B72**, 461 (1974).

[72] C. Traicy, H. Widom, "Level-spacing distributions and the Airy kernel", Comm. Math. Phys. **159** (1994) 151-174.

[73] W.T. Tutte, "A census of planar triangulations", *Can. J. Math.* **14** (1962) 21-38.

[74] W.T. Tutte, "A census of planar maps", *Can. J. Math.* **15** (1963) 249-271.

[75] Z.X. Wang, D.R. Guo, "Special Functions", World Scientific, 1989.

[76] A.B. Zamolodchikov, Al.B.Zamolodchikov, "Structure Constants and Conformal Bootstrap in Liouville Field Theory", Journal-ref: Nucl.Phys. B477 (1996) 577-605, hep-th/9506136.

[77] Al. Zamolodchikov, "On the Three-point Function in Minimal Liouville Gravity", hep-th/0505063.

[78] P. Zinn-Justin, "Universality of correlation functions of hermitian random matrices in an external field", Commun. Math. Phys. 194, 631-650 (1998), cond-mat/9705044.

5 Holomorphic anomaly and matrix models

arXiv:hep-th/0702110v2 7 Mar 2007

CERN-PH-TH/2007-031
SPhT-T07/020

Holomorphic anomaly and matrix models

Bertrand Eynard[a], Marcos Mariño[b1] and Nicolas Orantin[a]

[a] Service de Physique Théorique de Saclay
F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France
eynard@spht.saclay.cea.fr, orantin@spht.saclay.cea.fr

[b]Department of Physics, Theory Division, CERN
CH-1211 Geneva, Switzerland
marcos@mail.cern.ch

Abstract

The genus g free energies of matrix models can be promoted to modular invariant, non-holomorphic amplitudes which only depend on the geometry of the classical spectral curve. We show that these non-holomorphic amplitudes satisfy the holomorphic anomaly equations of Bershadsky, Cecotti, Ooguri and Vafa. We derive as well holomorphic anomaly equations for the open string sector. These results provide evidence at all genera for the Dijkgraaf–Vafa conjecture relating matrix models to type B topological strings on certain local Calabi–Yau threefolds.

[1]Also at Departamento de Matemática, IST, Lisboa, Portugal

Contents

1 Introduction and conclusions **1**

2 Holomorphic anomaly and topological strings **3**
2.1 The holomorphic anomaly equations 3
2.2 The local Calabi–Yau case and the Dijkgraaf–Vafa conjecture 6

3 Review of matrix models **8**
3.1 Formal matrix models and algebraic geometry 8
3.2 Variations of the matrix model free energies 10
3.2.1 Variations wrt filling fractions 13

4 Holomorphic anomaly equations and matrix models **14**
4.1 A direct proof 14
4.2 A combinatorial proof 16

1 Introduction and conclusions

Topological string theory has been a fascinating laboratory to explore issues in string theory with important connections to other branches of physics and mathematics. The basic problem in topological string theory is to compute and understand closed and open string amplitudes on different geometric backgrounds. Particularly important among these are Calabi–Yau (CY) manifolds. Different techniques have been developed for the computation of these amplitudes. For type B topological strings on CY manifolds, a powerful method to solve the closed sector of the model are the holomorphic anomaly equations of [6]. These equations control the $\bar{t}$-dependence of the closed string amplitudes $F^{(g)}(t,\bar{t})$, and when combined with extra boundary conditions, they lead to explicit answers, see [18, 16] for recent progress in this direction.

On the other hand, in some special backgrounds one can use large N dualities and geometric transitions to compute the holomorphic limit of $F^{(g)}(t,\bar{t})$, which will be denoted by $F^{(g)}(t)$. In a groundbreaking paper [10], Dijkgraaf and Vafa conjectured that on certain noncompact Calabi–Yau manifolds, where the geometry reduces to a complex curve, the $F^{(g)}(t)$ are given by the genus g free energies of a matrix model in the $1/N$ expansion (see [23] for a review). The curve encoding the CY geometry is then identified as the classical spectral curve of the matrix model. Given the connection between topological strings and type II superstrings, this has made possible to compute certain protected quantities in supersymmetric gauge theories by using matrix model technology. The connection between

topological strings on noncompact CY manifolds and matrix models has been extended recently to the mirrors of toric geometries [24].

The conjecture of Dijkgraaf and Vafa was verified at the planar level in [10], and at genus one in [21, 11]. In the simple case of the cubic matrix model, evidence for the conjecture was given at genus two in [17], where it was shown that the matrix model expression for $F^{(g)}(t)$ is the holomorphic limit of a particular solution to the holomorphic anomaly equations for the corresponding local curve.

In this paper we will give further evidence for the Dijkgraaf–Vafa conjecture and the related results of [24], by using recent advances in the solution of matrix models at all orders in the $1/N$ expansion obtained in [12, 14, 8] and more recently in [15]. One of the outcomes of these advances is that, as explained in [15], one can extrapolate the matrix model procedure and define a series of amplitudes $F^{(g)}(t)$ and correlation functions $W_g(p_k)$ for any algebraic curve $H(x,y) = 0$. When this curve is the classical spectral curve of a matrix model, one obtains in this way the $1/N$ expansion of the free energies and correlation functions. Using the results of [15], we will show that it is possible to construct non-holomorphic free energies $F^{(g)}(t,\bar{t})$ and correlation functions which satisfy the following conditions:

- In the holomorphic limit $\bar{t} \to \infty$ they reduce to the holomorphic amplitudes $F^{(g)}(t)$ associated to the spectral curve.
- They are invariant with respect to the symplectic modular group of the curve. This is in contrast to their holomorphic limit, which does not have good modular properties [15].
- They satisfy the holomorphic anomaly equations of [6].

This gives a procedure to obtain the full non-holomorphic couplings $F^{(g)}(t,\bar{t})$ in the context of matrix models, by using the requirement of modular invariance as in [1, 9], and shows that these couplings obey the equations of [6] that characterize topological string amplitudes. This implies in particular that the matrix model free energy at genus g (extended non-holomorphically in this way) must be equal to the type B free energy of the noncompact Calabi–Yau manifolds considered in [10, 24], up to a holomorphic modular invariant quantity. Proving the Dijkgraaf–Vafa conjecture reduces now to proving that these holomorphic invariant functions vanish at all genera.

An interesting spinoff of our work is that we can determine the holomorphic anomaly equations for *open* string amplitudes with respect to the closed moduli $\bar{t}$, at least in the local case. A direct string theory derivation of these equations has shown to be rather elusive [6, 4], and we expect them to be useful in future investigations of the open sector in

the general case. The equations we find turn out to be closely related to the holomorphic anomaly equation for correlation functions obtained in [6], as we will explain in section 4.

This work has other interesting implications. If one considers the hyperelliptic curves that appear in Seiberg–Witten theory as classical spectral curves of a matrix model, the amplitudes $F^{(g)}$ constructed with the recursive procedure of [15] should be closely related to the gravitational couplings of Seiberg–Witten theory introduced by Nekrasov in [26]. It is known that these gravitational couplings can be promoted to non-holomorphic quantities that satisfy the holomorphic anomaly equations associated to the Seiberg–Witten curve [17, 16]. It follows from the results in this paper that these gravitational couplings differ from the $F^{(g)}$ of the spectral curve at most in a holomorphic, modular invariant object, and it is natural to conjecture that they are in fact equal.

Our work also leaves some open problems. First of all, although it goes a long way towards proving the conjecture in [10], it would be nice to finish the proof by fixing the remaining ambiguity. At a more conceptual level, the $\bar{t}$ dependence of the amplitudes has been introduced, following [15], by requiring modular invariance and modifying the recursive construction of [15] accordingly. It would be very interesting to find a more intrinsic way to introduce this non-holomorphic dependence in the theories which are defined by matrix integrals. This might shed some light on the problem of background independence in topological string theory and of the wavefunction behavior of the topological string partition function [29].

The organization of this paper is as follows. In section 2 we review the holomorphic anomaly equations and the connections between topological strings and matrix models. Most of the technology needed in this paper has been developed in [15], and section 3 contains some results of that paper which will be essential in our derivation. Section 4 contains the derivation of the holomorphic anomaly equations. We actually provide a direct derivation and also a combinatorial derivation which makes contact with the recent results of [1].

2 Holomorphic anomaly and topological strings

2.1 The holomorphic anomaly equations

Topological string theory on Calabi–Yau threefolds (see [23, 25, 28]) for recent reviews) is defined by coupling the twisted $\mathcal{N} = 2$ sigma model to topological gravity and it comes in two versions: the A model (related to Gromov–Witten theory) and the B–model (related to deformations of complex structures). The topological amplitudes depend on a set of moduli that can be regarded as marginal deformations of the underlying $\mathcal{N} = 2$ theory. If we denote the chiral and antichiral operators of the theory that correspond to marginal directions by

$\phi_I, \bar{\phi}_{\overline{I}}$, $I = 1, \cdots, n$, we can deform the action in the standard way by using their descendants

$$S_{\mathcal{N}=2} = S(0) + \sum_{I=1}^{n} t^I \int_{\Sigma_g} \phi_I^{(2)} + \sum_{I=1}^{n} \overline{t}^{\overline{I}} \int_{\Sigma_g} \overline{\phi}_I^{(2)} \tag{2.1}$$

In the closed string sector we are interested in computing the genus g free energy $F^{(g)}$ as well as the correlation functions of integrated chiral operators,

$$C^{(g)}_{I_1 \cdots I_n} = \langle \int_{\Sigma_g} \phi_{I_1}^{(2)} \cdots \int_{\Sigma_g} \phi_{I_n}^{(2)} \rangle \tag{2.2}$$

Since the $\overline{t}$ perturbation of the action can be written as a BRST-exact term with respect to the topological symmetry of the theory, one expects $F^{(g)}$ and the correlation functions to be $\overline{t}$-independent. However, as discovered in [5, 6], this is not the case once the twisted $\mathcal{N} = 2$ sigma model is coupled to gravity. The BRST-exact terms give a boundary contribution that can be evaluated recursively, and one finds holomorphic anomaly equations for the $\overline{t}$ dependence of the amplitudes.

In order to write down the holomorphic anomaly equations, we need some basic ingredients from special geometry. The Zamolodchikov metric on the moduli space of marginal deformations is Kähler and can be derived from a Kähler function

$$G_{I\overline{J}} = \partial_I \partial_{\overline{J}} K. \tag{2.3}$$

The amplitude at genus zero F_0, also called the prepotential, leads to a holomorphic three point function

$$C_{IJK} = \frac{\partial^3 F_0}{\partial t^I \partial t^J \partial t^K}. \tag{2.4}$$

The holomorphic two–point coupling is given by

$$\tau_{IJ} = \frac{\partial^2 F_0}{\partial t^I \partial t^J} \tag{2.5}$$

and plays an important role, as we will see later. Out of these quantities one can define a tensor

$$C^{IJ}_{\overline{K}} = \mathrm{e}^{2K} G^{I\overline{M}} G^{J\overline{N}} \overline{C}_{\overline{MNK}}. \tag{2.6}$$

The Zamolodchikov metric (2.3) defines a connection on moduli space with Christoffel symbols

$$\Gamma^K_{IJ} = G^{K\overline{M}} \partial_I G_{J\overline{M}}, \quad \Gamma^{\overline{K}}_{\overline{IJ}} = G^{M\overline{K}} \partial_{\overline{I}} G_{M\overline{J}}. \tag{2.7}$$

It turns out that the $F^{(g)}$ are sections of a line bundle $\mathcal{L}^{2-2g}$ on the moduli space, and the covariant derivative acting on them is given by

$$D_I = \partial_I - \Gamma_I + (2-2g)\partial_I K, \tag{2.8}$$

where K is the Kähler function appearing in (2.3). With these ingredients, the holomorphic anomaly equations of [6] can be written as

$$\partial_{\overline{K}} F^{(g)} = \frac{1}{2} C^{IJ}_{\overline{K}} \Big(D_I D_J F_{g-1} + \sum_{h=1}^{g-1} D_I F_h D_J F_{g-h} \Big), \quad g \geq 2. \tag{2.9}$$

The equation for $g = 1$ is slightly different and reads

$$\partial_I \partial_{\bar{J}} F_1 = \frac{1}{2} C_{IKL} C^{KL}_{\overline{J}} - \Big(\frac{\chi}{24} - 1 \Big) G_{I\overline{J}}. \tag{2.10}$$

Of course, the holomorphic anomaly equations determine $F^{(g)}(t, \overline{t})$ only up to a holomorphic function of the moduli. This integration constant is called the holomorphic ambiguity. The holomorphic limit of $F^{(g)}(t, \overline{t})$ is defined as

$$F^{(g)}(t) = \lim_{\overline{t} \to \infty} F^{(g)}(t, \overline{t}). \tag{2.11}$$

This is the limit which is for example appropriate to make contact with Gromov–Witten theory, in the A model. It has been observed [9, 1] that the non-holomorphic couplings $F^{(g)}(t, \overline{t})$ are invariant under the symmetry group acting naturally on the moduli space. In contrast, the holomorphic limit (2.11) breaks the modularity properties.

We finally point out that the correlation functions (2.2) can be written as covariant derivatives of the $F^{(g)}(t, \overline{t})$:

$$C^{(g)}_{I_1 \cdots I_n} = D_{I_1} \cdots D_{I_n} F^{(g)}, \tag{2.12}$$

and they satisfy the holomorphic anomaly equation

$$\begin{aligned} \partial_{\overline{K}} C^{(g)}_{I_1 \cdots I_n} = \frac{1}{2} C^{MN}_{\overline{K}} \Big(& C^{(g-1)}_{MNI_1 \cdots I_n} + \sum_{r=0}^{g} \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{s!(n-s)!} \sum_{\sigma \in S_n} C^{(r)}_{MI_{\sigma(1)} \cdots I_{\sigma(s)}} C^{(g-r)}_{NI_{\sigma(s+1)} \cdots I_{\sigma(n)}} \Big) \\ & - (2g - 2 + n - 1) \sum_{s=1}^{n} G_{\overline{K} I_s} C^{(g)}_{I_1 \cdots I_{s-1} I_{s+1} \cdots I_n}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

2.2 The local Calabi–Yau case and the Dijkgraaf–Vafa conjecture

A particularly interesting class of topological strings are those defined on non–compact Calabi–Yau manifolds. These are commonly referred to as local Calabi–Yau manifolds. In the local B model the Calabi–Yau geometry is encoded in a Riemann surface Σ_n of genus n [20] (this should not be confused with the worldsheet of the string), and the resulting structure is significantly simpler than in the global case. The number of moduli is given by n, the genus of the curve, and they can be parametrized by

$$t^I \propto \int_{A^I} y(x)\mathrm{d}x, \quad I = 1, \cdots, n, \tag{2.14}$$

where A^I are the compact A-cycles of Σ_n, and $y(x)\mathrm{d}x$ is a meromorphic one-form on Σ_n which can be constructed from the equation for the spectral curve. The proportionality constant in (2.14) will be determined below by a detailed comparison with the matrix model results. The imaginary part of the two-point coupling (2.5) is now a positive definite matrix, and the Zamolodchikov metric is simply given by

$$G_{I\bar{J}} = -\mathrm{i}(\tau - \bar{\tau})_{IJ}. \tag{2.15}$$

As noticed in [22, 17, 1], the holomorphic anomaly equations also simplify in the local case. First of all, the tensor $C_{\overline{K}}^{IJ}$ entering in (2.9) is now simply given by

$$C_{\overline{K}}^{IJ} = G^{I\overline{M}} G^{J\overline{N}} C_{\overline{MNK}} = -[(\tau - \bar{\tau})^{-1}]^{IM}[(\tau - \bar{\tau})^{-1}]^{JN} C_{\overline{MNK}}. \tag{2.16}$$

The covariant derivative acting on the $F^{(g)}$ amplitudes involves now only the Christoffel symbol (i.e. the term involving $\partial_I K$ is no longer present). Notice that the Christoffel symbol can be written as

$$\Gamma_{IJ}^L = [(\tau - \bar{\tau})^{-1}]^{LM} \partial_I \tau_{JM}, \tag{2.17}$$

With these modifications, the holomorphic anomaly for $F^{(g)}$, $g \geq 2$ is still given by (2.9). For $g = 1$ the last term of (2.10) is not present. The holomorphic anomaly equations for the correlation functions are given by (2.13) but the contribution of the last line is absent in the local case.

Since it will be useful later one, we now write the holomorphic anomaly equations for $g \geq 2$, in the local case, in terms of a generating functional. We introduce,

$$Z = \exp\Big[\sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} F^{(g)}(t)\Big], \tag{2.18}$$

where N plays the role of a genus–counting parameter. We also define,

$$\tilde{Z} = \exp\big\{-N^2 F^{(0)} - F^{(1)}\big\} Z, \quad \hat{Z} = \exp\big\{-N^2 F^{(0)}\big\} Z. \tag{2.19}$$

For $g \geq 2$ we want to express the antiholomorphic derivative of $\tilde{Z}$ in terms of $\hat{Z}$. Using that

$$\partial_{IJ}^2 \log \hat{Z} = \frac{1}{\hat{Z}} \partial_{IJ}^2 \hat{Z} - \frac{1}{\hat{Z}^2} \partial_I \hat{Z} \partial_J \hat{Z} \tag{2.20}$$

we can write (2.9) in the local case as

$$\frac{1}{\tilde{Z}} \partial_{\overline{K}} \tilde{Z} = -\frac{1}{2N^2} \frac{1}{\hat{Z}} C_{\overline{K}}^{IJ} \Big(\partial_{IJ}^2 \hat{Z} - \Gamma_{IJ}^K \partial_K \hat{Z} \Big). \tag{2.21}$$

In the local case, when the Calabi–Yau geometry reduces to a Riemann surface Σ_n of genus n, the natural group acting on the moduli space is the mapping class group, and there is an induced action of the symplectic modular group

$$\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{Z}) \tag{2.22}$$

on the topological string amplitudes $F^{(g)}(t, \overline{t})$ and their holomorphic limit. The non- holomorphic amplitudes $F^{(g)}(t, \overline{t})$ of the local geometry turn out to be modular invariant under the action of this group [17, 1, 9], while the $F^{(g)}(t)$ do not have good modular properties.

An interesting class of local Calabi–Yau backgrounds are the ones described by the equation

$$uv = H(x, y), \quad H(x, y) = y^2 - (W'(x))^2 + f(x) \tag{2.23}$$

where $W(x), f(x)$ are polynomials of degree $d + 1$, $d - 1$ respectively. The Riemann surface $H(x, y) = 0$ associated to this geometry is the hyperelliptic curve

$$y^2 = (W'(x))^2 - f(x) \tag{2.24}$$

of genus $n = d - 1$. Dijkgraaf and Vafa conjectured in [10] (see [23] for a review) that the holomorphic amplitudes $F^{(g)}(t)$ of type B topological string theory on the backgrounds of the form (2.23) are given by the $1/N$ expansion of a matrix model with spectral curve (2.24). This is in fact a matrix model with potential $W(x)$ and generically with $d - 1$ cuts around its extrema. This conjecture has been verified at the planar level in [10], at genus one in [21, 11], and at genus two in [17].

Another interesting class of local geometries is given by the mirrors of toric Calabi–Yau manifolds. In this case, the Riemann surface is a complex curve in "exponentiated" variables which can be written in the form

$$y^2 = M^2(x) \prod_{i=1}^{\ell} (x - x_i), \tag{2.25}$$

where $M(x)$ is in this case a transcendental function. As shown in [15] and reviewed below, one can generalize the matrix model idea and associate a series of free energies $F^{(g)}(t)$ and correlation functions to any algebraic curve. It was recently proposed in [24] that holomorphic open and closed type B topological string amplitudes for the mirrors of toric background are given by the correlation functions and free energies, respectively, associated to the spectral curve (2.25) with the procedure of [15].

We then see that, for local CY backgrounds, where the geometry reduces to a complex curve, the holomorphic limit of topological string amplitudes in the B model has been conjectured to be given by the free energies and correlation functions associated to the complex curve by the recursive procedure of [15]. In the example (2.23) this coincides with the $1/N$ expansion of the free energy and correlators of a matrix model with potential $W(x)$. In the rest of this paper we will give strong support to this conjecture by showing that the quantities defined in [15] can be extended to non-holomorphic objects which have good modular properties and satisfy the holomorphic anomaly equation (2.9) in the local case.

3 Review of matrix models

3.1 Formal matrix models and algebraic geometry

Random matrix models became very popular in the 80's and 90's after it was discovered by 't Hooft [27] and then in [7] that the Feynman graphs of Hermitian matrix integrals are in fact discrete surfaces. Formal random matrix models are thus generating functions which count discrete maps of given topology. For instance the 1 matrix integral:

$$Z_{\rm 1MM} = \int dM\ e^{-\frac{N}{t}\,{\rm Tr}\,V(M)} \tag{3.1}$$

counts discrete maps made of triangles, squares, ... k-gones where $k \leq \deg V$. The 2 matrix integral

$$Z_{\rm 2MM} = \int dM_1\, dM_2\ e^{-\frac{N}{t}\,{\rm Tr}\,(V_1(M_1)+V_2(M_2)-M_1M_2)} \tag{3.2}$$

counts discrete maps made of polygons of two possible colors (or call it two possible spins $\pm$). It was introduced by Kazakov [19] as an Ising model on a random map.

In all cases, the formal integral is defined as a formal series in its small t expansion, and it turns out that to any order in t, one has a "topological expansion":

$$F_{\rm MM} = \ln Z_{\rm MM} = \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} F^{(g)} \tag{3.3}$$

where $F^{(g)}$ is the generating function which counts maps of genus g. (see [13] for a review on this subject).

The goal was then to compute explicitly the coefficients $F^{(g)}$ in that expansion. Many methods have been invented, but the only one which has really succeeded so far is the so-called loop equation method which just amounts to integrate by parts or equivalently write Ward identities or Virasoro (or W-algebra) constraints. It was soon realized that loop equations allow in principle to find $F^{(g)}$ for any g [3, 2], but a more explicit solution (which can be represented diagrammatically) was found only recently first for the 1-matrix model [12], then for the 2-matrix model [14, 8], and more recently for the matrix model with external field [15].

Then it was understood in [15], that the solution of matrix models loop equation extends beyond the context of matrix models and is in fact a property of algebraic geometry in general. The diagrammatic method of [15] allows to compute explicitly all the free energies $F^{(g)}$ appearing in (3.3) as well as all correlation functions (generating functions of discrete open surfaces of genus g with k boundaries):

$$\left\langle {\rm Tr}\,\frac{dx_1}{x_1 - M} \dots {\rm Tr}\,\frac{dx_k}{x_k - M} \right\rangle = \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g-k}\, W_k^{(g)}(x_1, \dots x_k) \tag{3.4}$$

where the mean value refers to the measure in (3.1) and the variables x_i are fugacities associated to the lengths of boundaries.

Let us now give a brief summary of the construction of [15].

Given an arbitrary algebraic curve $H(x, y) = 0$, of genus n, one constructs recursively a sequence of multilinear symmetric meromorphic forms $W_k^{(g)}$ and some scalars $F^{(g)}$'s in terms of residues localized at branchpoints of the curve.

Many properties of those $W_k^{(g)}$'s and $F^{(g)}$'s are described in [15], in particular variations of conformal structure, integrable structure, invariance under symplectic transformations of the curve, homogeneity, and the one which interests us now is modular transformations.

Indeed, the construction of [15] is based on the Bergmann kernel, which is defined for a given canonical basis of cycles. When one changes the basis of cycles, the Bergmann kernel changes, and the $W_k^{(g)}$'s and $F^{(g)}$'s change accordingly. In [15], a "modified" Bergmann kernel was introduced in order to easily take into account those modular changes. The modified Bergmann kernel depends on an arbitrary complex symmetric matrix κ, and a modular change of cycles merely amounts (as far as only the Bergmann kernel is concerned) to a change of κ. Since the $W_k^{(g)}$'s and $F^{(g)}$'s modular dependence is only in the Bergmann kernel, their modular properties are entirely encoded in their κ dependence. Thus in [15],

the following quantities were computed:

$$\frac{\partial W_k^{(g)}}{\partial \kappa} \qquad \text{and} \quad \frac{\partial F^{(g)}}{\partial \kappa} \tag{3.5}$$

and they showed a striking similarity with holomorphic anomaly equations.

The goal of this article is to prove that indeed one can derive the holomorphic anomaly equation from the construction of [15].

3.2 Variations of the matrix model free energies

Let us consider an algebraic curve $H(x,y)$ of genus n and a canonical basis of cycles on it:

$$\forall i,j = 1\dots n \quad , \quad \underline{\mathcal{A}}_i \cap \underline{\mathcal{B}}_j = \delta_{ij} \quad , \quad \underline{\mathcal{A}}_i \cap \underline{\mathcal{A}}_j = 0 \quad , \quad \underline{\mathcal{B}}_i \cap \underline{\mathcal{B}}_j = 0. \tag{3.6}$$

There are n linearly independant holomorphic forms $\mathrm{d}u_i$ on $H(x,y)$ normalized on the $\underline{\mathcal{A}}$-cycles:

$$\forall i,j = 1\dots n \quad , \quad \oint_{\underline{\mathcal{A}}_i} \mathrm{d}u_j = \delta_{ij} \tag{3.7}$$

and the Riemann matrix of period τ is a symmetric $n \times n$ matrix defined by

$$\oint_{\underline{\mathcal{B}}_j} \mathrm{d}u_i = \tau_{ij}. \tag{3.8}$$

Bergmann kernel

There exists a unique bilinear form $\underline{B}(p,q)$ with a unique double pole at $p=q$ without residue and normalized on the $\underline{\mathcal{A}}$ cycles:

$$\underline{B}(p,q) \underset{p\to q}{\sim} \frac{\mathrm{d}z(p)\mathrm{d}z(q)}{(z(p)-z(q))^2} + \text{finite} \quad , \quad \oint_{\underline{\mathcal{A}}} \underline{B} = 0. \tag{3.9}$$

where z is any local parameter. $\underline{B}$ is often referred to as the **Bergmann kernel** in the literature. For instance, on a torus, $\underline{B}$ is the Weierstrass function.

Let us now introduce a new set of cycles, depending on an arbitrary complex symmetric matrix κ:

$$\mathcal{B} := \underline{\mathcal{B}} - \tau \underline{\mathcal{A}} \quad , \quad \mathcal{A} := \underline{\mathcal{A}} - \kappa \mathcal{B} \tag{3.10}$$

and define a $\kappa-$modified Bergmann kernel normalized on these new cycles by the constraints:

$$B(p,q) \sim_{p\to q} \frac{\mathrm{d}z(p)\mathrm{d}z(q)}{(z(p)-z(q))^2} + \text{finite} \quad , \quad \oint_{\mathcal{A}} B = 0. \tag{3.11}$$

This definition implies the relation:

$$B(p,q) = \underline{B}(p,q) + 2i\pi \sum_{i,j} \mathrm{d}u_i(p)\, \kappa_{ij}\, \mathrm{d}u_j(q). \tag{3.12}$$

Under a modular transformation:

$$\tau \to (C-\tau D)^{-1}(\tau E - F) \quad , \quad E^tC - F^tD = \mathrm{Id} \quad , \quad C^tD = D^tC \quad , \quad E^tF = F^tE \tag{3.13}$$

the Bergmann kernel $\underline{B}$ changes, as well as the κ-modified Bergmann kernel, and the change is equivalent to a change of κ:

$$\kappa \to D(C-\tau D)^{-1} + \left((C-\tau D)^{-1}\right)^t \kappa (C-\tau D)^{-1} \tag{3.14}$$

Therefore, the action of a modular transformation is equivalent to a change of κ, and all modular properties of the Bergmann kernel, and thus of the $F^{(g)}$'s are encoded in the κ dependence.

One can verify that if $\kappa = (\overline{\tau}-\tau)^{-1}$, then the Bergmann kernel is modular invariant (see for instance a proof in [15]).

Filling fractions

We also introduce the filling fractions

$$\epsilon_i := \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \oint_{\underline{\mathcal{A}}_i} y\mathrm{d}x. \tag{3.15}$$

Branch points

Let us also consider the branch points a_i defined by $\mathrm{d}x(a_i) = 0$. When a point p approaches a branch point a_i, there exists a unique point $\overline{p}$ such that $x(p) = x(\overline{p})$ and $\overline{p} \to a_i$. Notice that $\overline{p}$ is defined locally near any branchpoint, but not globally (except for hyperelliptical curves of the form $y^2 = P(x)$).

The free energies and correlation functions are recursively defined as follows:

Correlation functions

$$W_k^{(g)} = 0 \quad \text{if } g < 0 \tag{3.16}$$

$$W_1^{(0)}(p) = 0 \tag{3.17}$$

$$W_2^{(0)}(p_1,p_2) = B(p_1,p_2) \tag{3.18}$$

and

$$W_{k+1}^{(g)}(p,p_1,\dots,p_k)$$
$$= \sum_i \operatorname*{Res}_{q\to a_i} \frac{\mathrm{d}E_q(p)}{\omega(q)} \Big(\sum_{m=0}^{g} \sum_{J\subset K} W_{j+1}^{(m)}(q,p_J) W_{k-j+1}^{(g-m)}(\overline{q},p_{K/J}) + W_{k+2}^{(g-1)}(q,\overline{q},p_K) \Big) \tag{3.19}$$

with the notations (q being near a branchpoint):

$$\omega(q) = (y(q)-y(\overline{q}))\mathrm{d}x(q), \qquad \mathrm{d}E_q(p) = \frac{1}{2}\int_q^{\overline{q}} B(\xi,p) \tag{3.20}$$

where the integration path lies entirely in a vicinity of a_i. If $J=\{i_1,i_2,\dots,i_j\}$ is a set of indices, we write $p_J=\{p_{i_1},p_{i_2},\dots,p_{i_j}\}$, and in the equation above we have $K=\{1,2,\dots,k\}$ and the summation over J is among all subsets of K.

It is important to notice that by construction, all $W_k^{(g)}$'s have vanishing $\mathcal{A}$-cycle integrals:

$$\oint_{\mathcal{A}} W_k^{(g)} = 0 \tag{3.21}$$

which implies:

$$\oint_{\underline{\mathcal{A}}} W_k^{(g)} = \kappa \oint_{\mathcal{B}} W_k^{(g)} \tag{3.22}$$

Free energies.

For $g>1$

$$F^{(g)} = \frac{1}{2g-2} \sum_i \operatorname*{Res}_{q\to a_i} \Phi(q) W_1^{(g)}(q). \tag{3.23}$$

where $\Phi(q)=\int^q y\mathrm{d}x$ is any antiderivative of $y\mathrm{d}x$, i.e.

$$\mathrm{d}\Phi = y\mathrm{d}x \tag{3.24}$$

remark: it is proved in [15] that

$$W_k^{(g)} = \frac{1}{2g+k-2} \sum_i \operatorname*{Res}_{a_i} \Phi W_{k+1}^{(g)}. \tag{3.25}$$

so that $F^{(g)}$ can be regarded as $F^{(g)}=W_0^{(g)}$.

Modular transformations and κ dependence.

From their definitions, it is clear that the only modular dependence, and also the only κ dependence of the $W_k^{(g)}$'s is through the Bergmann kernel, and therefore, a modular transformation is equivalent to a change of κ. Moreover, each $W_k^{(g)}$ is a polynomial in κ of degree at most $3g-3+2k$. In order to study modular transformations of the $W_k^{(g)}$'s, or their κ dependence, it is convenient to compute $\partial W_k^{(g)}/\partial\kappa$. This was done in [15] and the result is:

$$2\mathrm{i}\pi \frac{\partial}{\partial \kappa_{ij}} W_k^{(g)}(p_K) = \frac{1}{2}\oint_{r\in\mathcal{B}_j}\oint_{s\in\mathcal{B}_i} W_{k+2}^{(g-1)}(p_K,r,s) + \frac{1}{2}\sum_h \sum_{L\subset K} \oint_{r\in\mathcal{B}_i} W_{|L|+1}^{(h)}(p_L,r) \oint_{s\in\mathcal{B}_j} W_{k-|L|+1}^{(g-h)}(p_{K/L},s) \tag{3.26}$$

and in particular for $k=0$:

$$2\mathrm{i}\pi \frac{\partial}{\partial\kappa_{ij}} F^{(g)} = \frac{1}{2}\oint_{r\in\mathcal{B}_j}\oint_{s\in\mathcal{B}_i} W_2^{(g-1)}(r,s) + \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{g-1} \oint_{r\in\mathcal{B}_i} W_1^{(h)}(r) \oint_{s\in\mathcal{B}_j} W_1^{(g-h)}(s) \qquad g\geq 2. \tag{3.27}$$

Also, notice that if $\kappa=(\overline{\tau}-\tau)^{-1}$, then all $W_k^{(g)}$'s and $F^{(g)}$'s (with $2g+k\geq 2$) are modular invariant.

3.2.1 Variations wrt filling fractions

The variation of the Bergmann kernel wrt filling fractions follows from Rauch variational formula, and it was computed in [15] that (in fact in [15], κ was considered a constant, and thus we just have to add an extra $\partial\kappa/\partial\epsilon$ term):

$$\frac{\partial B(p,q)}{\partial\epsilon} = \operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}} \frac{B(r,p)B(r,q)\mathrm{d}u(r)}{\mathrm{d}x(r)\mathrm{d}y(r)} - 2\mathrm{i}\pi\,\mathrm{d}u^t(p)\kappa\frac{\partial\tau}{\partial\epsilon}\kappa\mathrm{d}u(q) + 2\mathrm{i}\pi\,\mathrm{d}u^t(p)\frac{\partial\kappa}{\partial\epsilon}\mathrm{d}u(q) \tag{3.28}$$

which was written using an operator in [15]:

$$\Delta_\epsilon = \partial_\epsilon + \Big(\kappa\frac{\partial\tau}{\partial\epsilon}\kappa - \frac{\partial\kappa}{\partial\epsilon}\Big)\frac{\partial}{\partial\kappa} \tag{3.29}$$

so that:

$$\Delta_\epsilon B(p,q) = \operatorname*{Res}_{r\to\mathbf{a}} \frac{B(r,p)B(r,q)\mathrm{d}u(r)}{\mathrm{d}x(r)\mathrm{d}y(r)} \tag{3.30}$$

This property was sufficient to ensure in [15], that:

$$\Delta_\epsilon W_k^{(g)} = -\oint_{\mathcal{B}} W_{k+1}^{(g)} \tag{3.31}$$

4 Holomorphic anomaly equations and matrix models

In this section we give two proofs of the holomorphic anomaly equation for matrix models.

In the following, we consider the choice

$$\kappa = -\frac{1}{\tau - \overline{\tau}} \tag{4.1}$$

in which case the $F^{(g)}$'s and $W_k^{(g)}$'s are modular invariant [15] but not holomorphic.

4.1 A direct proof

We first consider the variation with respect to $\overline{\epsilon}$. The only antiholomorphic dependence of $W_k^{(g)}$ on $\overline{\epsilon}$ comes from its dependence on $\kappa = 1/(\overline{\tau} - \tau)$, therefore

$$\frac{\partial W_k^{(g)}}{\partial \overline{\epsilon}} = \frac{\partial \kappa}{\partial \overline{\epsilon}} \frac{\partial W_k^{(g)}}{\partial \kappa} \quad , \quad \frac{\partial \kappa}{\partial \overline{\epsilon}} = -\kappa \frac{\partial \overline{\tau}}{\partial \overline{\epsilon}} \kappa \quad , \quad \frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial \epsilon^2} = 2\mathrm{i}\pi\tau \tag{4.2}$$

so that

$$\frac{\partial W_k^{(g)}}{\partial \overline{\epsilon}} = -\frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \kappa \frac{\partial^3 \overline{F}^{(0)}}{\partial \overline{\epsilon}^3} \kappa \frac{\partial W_k^{(g)}}{\partial \kappa}. \tag{4.3}$$

Then, using eq. (3.26):

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_k^{(g)}}{\partial \overline{\epsilon}} &= -\frac{1}{(2\mathrm{i}\pi)^2} \kappa \frac{\partial^3 \overline{F}^{(0)}}{\partial \overline{\epsilon}^3} \kappa \, \frac{1}{2} \oint_{r \in \mathcal{B}_j} \oint_{s \in \mathcal{B}_i} \Big(W_{k+2}^{(g-1)}(p_K, r, s) \\ &\quad + \sum_h \sum_{L \subset K} W_{|L|+1}^{(h)}(p_L, r) W_{k-|L|+1}^{(g-h)}(p_{K/L}, s) \Big) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Notice that with $\kappa = 1/(\overline{\tau} - \tau)$, which satisfies:

$$\kappa \frac{\partial \tau}{\partial \epsilon} \kappa = \frac{\partial \kappa}{\partial \epsilon} \tag{4.5}$$

the differential operator Δ of eq. (3.30) reduces to the usual derivative $\Delta_{\epsilon_I} = \partial / \partial \epsilon_I$, and therefore using eq. (3.31):

$$\frac{\partial W_k^{(g)}}{\partial \epsilon} = -\oint_{\mathcal{B}} W_{k+1}^{(g)} = -\oint_{\underline{\mathcal{B}}} W_{k+1}^{(g)} + \tau \oint_{\underline{\mathcal{A}}} W_{k+1}^{(g)} \tag{4.6}$$

Acting again with ∂_ϵ we find (we use 3.22):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W_k^{(g)}}{\partial \epsilon^2} &= \oint_{\mathcal{B}} \oint_{\mathcal{B}} W_{k+2}^{(g)} + \frac{\partial \tau}{\partial \epsilon} \oint_{\underline{\mathcal{A}}} W_{k+1}^{(g)} \\ &= \oint_{\mathcal{B}} \oint_{\mathcal{B}} W_{k+2}^{(g)} + \frac{\partial \tau}{\partial \epsilon} \kappa \oint_{\mathcal{B}} W_{k+1}^{(g)} \end{aligned} \tag{4.7}$$

and therefore:

$$\frac{\partial^2 W_k^{(g)}}{\partial \epsilon^2} + \frac{\partial \tau}{\partial \epsilon} \kappa \frac{\partial W_k^{(g)}}{\partial \epsilon} = \oint_{\mathcal{B}} \oint_{\mathcal{B}} W_{k+2}^{(g)} \tag{4.8}$$

Finally we get the equation:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_k^{(g)}}{\partial \overline{\epsilon}} &= -\frac{1}{(2\mathrm{i}\pi)^2} \kappa \frac{\partial^3 \overline{F}^{(0)}}{\partial \overline{\epsilon}^3} \kappa \, \frac{1}{2} \Big(\frac{\partial^2 W_k^{(g-1)}}{\partial \epsilon^2} + \frac{\partial \tau}{\partial \epsilon} \kappa \frac{\partial W_k^{(g-1)}}{\partial \epsilon} \\ &\quad + \sum_h \sum_{L \subset K} \frac{\partial W_l^{(h)}}{\partial \epsilon} \frac{\partial W_{k-l}^{(g-h)}}{\partial \epsilon} \Big) \end{aligned} \tag{4.9}$$

If we normalize the moduli as:

$$t^I = (2\mathrm{i}\pi)^{\frac{1}{2}} \epsilon^I. \tag{4.10}$$

that last equation reads:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_k^{(g)}}{\partial \overline{t}} &= -\kappa \frac{\partial^3 \overline{F}^{(0)}}{\partial \overline{t}^3} \kappa \, \frac{1}{2} \Big(\frac{\partial^2 W_k^{(g-1)}}{\partial t^2} + \frac{\partial \tau}{\partial t} \kappa \frac{\partial W_k^{(g-1)}}{\partial t} \\ &\quad + \sum_h \sum_{L \subset K} \frac{\partial W_l^{(h)}}{\partial t} \frac{\partial W_{k-l}^{(g-h)}}{\partial t} \Big) \end{aligned} \tag{4.11}$$

For the free energy, we set $k = 0$:

$$\frac{\partial F^{(g)}}{\partial \overline{t}} = -\kappa \frac{\partial^3 \overline{F}^{(0)}}{\partial \overline{t}^3} \kappa \, \frac{1}{2} \Big(\frac{\partial^2 F^{(g-1)}}{\partial t^2} + \frac{\partial \tau}{\partial t} \kappa \frac{\partial F^{(g-1)}}{\partial t} + \sum_{h=1}^{g-1} \frac{\partial F^{(h)}}{\partial t} \frac{\partial F^{(g-h)}}{\partial t} \Big) \tag{4.12}$$

Since

$$-\kappa^{IM} \frac{\partial^3 \overline{F}^{(0)}}{\partial \overline{t}^{\overline{M}} \partial \overline{t}^{\overline{N}} \partial \overline{t}^{\overline{K}}} \kappa^{JN} = C_{\overline{K}}^{IJ}, \qquad \frac{\partial \tau_{JM}}{\partial t^I} \kappa^{KM} = -\Gamma_{IJ}^K \tag{4.13}$$

we recover the holomorphic anomaly equation (2.9) for the free energies. The holomorphic anomaly equation for the correlation functions can be written as

$$\partial_{\overline{K}} W_k^{(g)} = \frac{1}{2} C_{\overline{K}}^{IJ} \Big(D_I D_J W_k^{(g-1)} + \sum_h \sum_{L \subset K} D_I W_l^{(h)} D_J W_{k-l}^{(g-h)} \Big). \tag{4.14}$$

In the context of topological string theory, these correlation functions correspond to open string amplitudes (see [24] for explicit results in the case of mirrors of toric CY manifolds), therefore the above equations can be regarded as holomorphic anomaly equations for open string amplitudes. These equations have been discussed in a general context in [6, 4], and they are obtained by looking at the degenerations of Riemann surfaces with boundaries. The result (4.14) seems to indicates that the only degenerations that contribute in this case are the ones which involve closed string intermediate states. The first term in the r.h.s. of (4.14) corresponds to a node, while the sum in the second term corresponds to all the possible splittings of the Riemann surface $\Sigma_{g,k}$ into two Riemann surfaces $\Sigma_{h,l}$ and $\Sigma_{g-h,k-l}$.

It is also easy to show that the correlation functions (2.12) are given by

$$C^{(g)}_{I_1\cdots I_k} = \frac{(-1)^k}{(2\mathrm{i}\pi)^{\frac{k}{2}}} \oint_{\mathcal{B}_{I_1}} \cdots \oint_{\mathcal{B}_{I_k}} W^{(g)}_k(p_K) \tag{4.15}$$

since the covariant derivative $D_I = \partial_I - \Gamma_I$ commutes with $\oint_{\mathcal{B}}$ when acting on a differential $f(p)\mathrm{d}p$ with vanishing $\mathcal{A}$-cycle integrals:

$$\begin{aligned} D_I \oint_{\mathcal{B}} f(p)\mathrm{d}p &= \oint_{\mathcal{B}} D_I f(p)\mathrm{d}p + D_I\left(\oint_{\mathcal{B}}\right) f(p)\mathrm{d}p \\ &= \oint_{\mathcal{B}} D_I f(p)\mathrm{d}p - \Gamma_I \oint_{\mathcal{B}} f(p)\mathrm{d}p - \partial_I\tau \oint_{\underline{\underline{\mathcal{A}}}} f(p)\mathrm{d}p \\ &= \oint_{\mathcal{B}} D_I f(p)\mathrm{d}p - \Gamma_I \oint_{\mathcal{B}} f(p)\mathrm{d}p - \partial_I\tau\,\kappa \oint_{\underline{\mathcal{B}}} f(p)\mathrm{d}p \\ &= \oint_{\mathcal{B}} D_I f(p)\mathrm{d}p \end{aligned} \tag{4.16}$$

Note that the last equality requires explicitly the condition

$$\oint_{\mathcal{A}} f(p)\mathrm{d}p = \oint_{\underline{\mathcal{A}}} f(p)\mathrm{d}p - \kappa \oint_{\mathcal{B}} f(p)\mathrm{d}p = 0. \tag{4.17}$$

If we now integrate (4.14) over the cycles $B_{I_1}, \cdots, B_{I_k}$, one finds the holomorphic anomaly equation for the correlation function (2.13) in the local case (i.e. without the last line). This indicates again that the open string anomaly equations (4.14) involve only the closed string sector in the intermediate states.

4.2 A combinatorial proof

In the previous section we have given a simple proof of the holomorphic anomaly equations. In [1] (see also [9]) it was noticed that these equations have a canonical solution of the form

$$F^{(g)}(t,\bar{t}) = F^{(g)}(t) + \Gamma_g((\mathrm{Im}\,\tau)^{-1}, \partial_{I_1}\cdots\partial_{I_m}F_{r<g}), \tag{4.18}$$

where Γ_g is a polynomial functional in $(\mathrm{Im}\,\tau)^{-1}$ and in the derivatives of lower genera holomorphic free energies. In [1], the coefficients of Γ_g were interpreted diagrammatically as the possible degeneracies of a genus g Riemann surface. In this canonical solution, the anti-holomorphic dependence of $F^{(g)}(t,\bar{t})$ enters only through $\mathrm{Im}\,\tau$. We will now show that this canonical solution can be obtained by iterating (3.26). This can be used to obtain a second proof of the holomorphic anomaly equations.

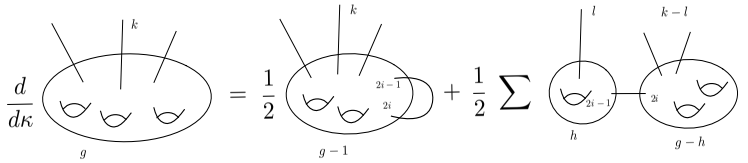


Figure 1: A graphic representation of the equation (3.26).

Let $F^{(g)}(t,\kappa=0)$ be the holomorphic free energy of the matrix model at genus g. When we turn on κ we get the κ-dependent function

$$F^{(g)}(t,\kappa) = \sum_{m=0}^{3g-3} \kappa^m \frac{1}{m!}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\kappa^m} F^{(g)}(t,0). \tag{4.19}$$

The successive derivatives of $F^{(g)}(t,\kappa)$ at $\kappa=0$ can be easily computed by iterating (3.26). We take into account that at $\kappa=0$ we can substitute the contour integrals of the correlation functions W^g_k by ordinary (*not* covariant) derivatives of $F^{(g)}$, as it follows from (4.7). It is convenient to represent (3.26) graphically, so that the terms obtained in the iteration are represented by graphs. This representation is shown in Fig. 1. Since the number of legs generated in this way is always even, we have labeled the connecting legs by $2i-1$ and $2i$. The result of the iteration is simply (this is easily seen from the graphical representation in Fig. 1):

$$F^{(g)}(t,\kappa) = \sum_{m=0}^{3g-3} \sum_{I_1,\ldots,I_{2m}=1}^{n} \kappa_{I_1,I_2}\ldots\kappa_{I_{2m-1},I_{2m}} \frac{1}{2^m\,m!} \sum_{G_m} A_{G_m}, \tag{4.20}$$

where G_m is a connected degenerate surface with m propagators connecting $2m$ points labelled by $1,\ldots,2m$, and in such a way that the point labeled by $2i-1$ is connected by a propagator to the point labeled by $2i$, $i=1,\cdots,m$. Each of these surfaces leads to a term

A_{G_m}. These terms are constructed as follows: if G_m is made out of r Riemann surfaces of genera $g_1, \cdots, g_r$ with $n_1, \cdots, n_r$ punctures, respectively, (such that $\sum n_i = 2m$), and if the n_i punctures of the i^{th} Riemann surface are labeled $J_i = \{J_{i,1}, \ldots, J_{i,n_i}\}$, then

$$A_{G_m} = \prod_{i=1}^{r} \partial_{I_{J_{i,1}}} \cdots \partial_{I_{J_{i,n_i}}} F^{(g_i)}(t,0). \tag{4.21}$$

As an example of this procedure, we show in Fig. 2 the graphs that contribute to $F_2(t,\kappa)$.

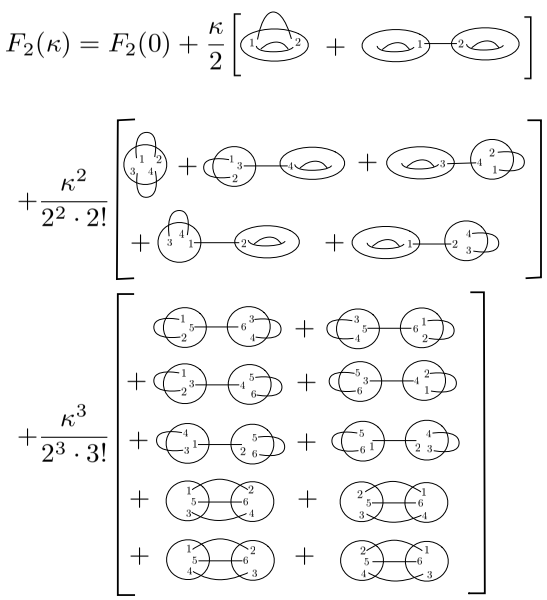


Figure 2: The graphs that contribute to $F_2(t,\kappa)$ after iterating Fig. 1.

Combinatorics

Notice because of the sum over indices $I_1, \ldots, I_{2m}$ in (4.20), many graphs G_m's give the same contribution to $F^{(g)}(t,\kappa)$, and thus they better be computed only once with a multiplicity factor. The multiplicity factor is thus $\mathcal{N}_{G_m}/(2^m\, m!)$, where $\mathcal{N}_{G_m}$ is the number of inequivalent ways of relabeling the $2m$ punctures so that the puncture $2i-1$ is linked by a propagator to $2i$ for all $i = 1, \ldots, m$. Then notice that:

$$\frac{1}{2^m\, m!} = \frac{(2m-1)!!}{2m!} \tag{4.22}$$

and notice that $(2m-1)!!\mathcal{N}_{G_m}$ is the number of inequivalent ways of relabeling the $2m$ punctures (without any constraint on the labels of punctures which are linked together), i.e. it is the number of inequivalent pairings (compatible with G_m) of $2m$ points. This is exactly the multiplicity factor arising from Wick's theorem, i.e. $F^{(g)}(t,\kappa)$ is exactly the Feynman graph expansion of an integral whose propagator is $N^{-2}\kappa$ and whose vertices are the $N^{2-2g_i}\, \partial_{I_{J_{i,1}}} \cdots \partial_{I_{J_{i,n_i}}} F^{(g_i)}(t,0)$.

Notice that because we have chosen $W_1^{(0)} = 0$ and $\oint_{\mathcal{B}} \oint_{\mathcal{B}} W_2^{(0)} = 0$, A_m vanishes if G_m contains surfaces of genus zero with less than 3 punctures. Therefore there is no vertices corresponding to the first and second derivative of $F^{(0)}$.

Notice also that the recursive application of Fig. 1 generates only connected graphs G_m's, and thus we are in fact computing the Feynman graph expansion of the log of an integral.

Therefore

$$F(t,\kappa) = \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} F^{(g)}(t,\kappa) = \ln\left(Z(t,\kappa)\right) \tag{4.23}$$

is exactly the Feynman graph expansion the following integral

$$\begin{aligned} Z(t,\kappa) = \int \mathrm{d}\eta \exp\Big\{ & -\frac{1}{2} N^2 (\eta - t)\kappa^{-1}(\eta - t) + F(\eta, 0) - N^2(\eta - t)^I \partial_I F^{(0)}(t,0) \\ & - \frac{1}{2} N^2 (\eta - t)^I \partial^2_{IJ} F^{(0)}(t,0)(\eta - t)^J \Big\}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Indeed, the Feynman graph expansion, is nothing but the saddle point approximation, and here the saddle point equation to large N leading order is $\kappa^{-1}_{IJ}(\eta - t)^J - \partial_I F^{(0)}(\eta, 0) + \partial_I F^{(0)}(t,0) + \partial^2_{IJ} F^{(0)}(t,0)(\eta - t)^J = 0$, which is clearly satisfied at $\eta = t$. The propagator is simply

$$\frac{\kappa_{IJ}}{N^2} \tag{4.25}$$

and the vertices are given by

$$\frac{N^{2-2g}}{k!} \partial_{I_1} \cdots \partial_{I_k} F^{(g)}(t), \tag{4.26}$$

where $k \geq 3$ for $g = 0$ and $k \geq 1$ for $g \geq 1$.

We will now show that, for the choice $\kappa = (\overline{\tau} - \tau)^{-1}$, the generating functional (4.24) satisfies the holomorphic anomaly equations of [6] in the local case. We first note that there is a cancellation,

$$Z(t, (\overline{\tau} - \tau)^{-1}) = \int \mathrm{d}\eta \exp\Big\{ -\frac{1}{2} N^2 (\eta - t) \bar{\tau} (\eta - t) + F(\eta, 0) - N^2 (\eta - t)^I \partial_I F^{(0)}(t, 0) \Big\} \quad (4.27)$$

We compute now:

$$\frac{1}{Z} \partial_I Z = N^2 \, (\bar{\tau}_{IJ} - \tau_{IJ}) \, \langle (\eta - t)^J \rangle + N^2 \partial_I F^{(0)}, \quad (4.28)$$

where $\langle \, \rangle$ denotes an average in the integral (4.27). It follows that,

$$\frac{1}{\hat{Z}} \partial_I \hat{Z} = N^2 \, (\bar{\tau}_{IJ} - \tau_{IJ}) \, \langle (\eta - t)^J \rangle, \quad (4.29)$$

and

$$\frac{1}{\hat{Z}} \partial^2_{JI} \hat{Z} = -N^2 (\bar{\tau}_{IJ} - \tau_{IJ}) - N^2 \partial_J \tau_{IK} \langle (\eta - t)^K \rangle + N^4 (\tau - \bar{\tau})_{IK} (\tau - \bar{\tau})_{JL} \langle (\eta - t)^K (\eta - t)^L \rangle. \quad (4.30)$$

On the other hand, we compute:

$$\frac{1}{\tilde{Z}} \partial_{\overline{K}} \tilde{Z} = -\frac{1}{2} N^2 C_{\overline{IJK}} \langle (\eta - t)^I (\eta - t)^J \rangle + \frac{1}{2} \partial_{\overline{K}} \Delta \quad (4.31)$$

where

$$C_{\overline{IJK}} = \partial_{\overline{K}} \bar{\tau}_{IJ}. \quad (4.32)$$

and

$$\Delta = \log \, \det \kappa^{-1} \quad (4.33)$$

and we used that the non-holomorphic $F^{(1)}(\kappa)$ generated by the integral (4.27) is

$$F^{(1)}(t, \kappa) = F^{(1)}(t) + \Delta(\kappa). \quad (4.34)$$

We express now the quadratic average in (4.31) in term of the double derivative (4.30). If we use

$$\partial_{\overline{K}} \Delta = \kappa^{IJ} \partial_{\overline{K}} \bar{\tau}_{IJ}, \quad (4.35)$$

we finally find that

$$\frac{N^2}{\tilde{Z}} \partial_{\overline{K}} \tilde{Z} = \frac{1}{2\hat{Z}} C^{IJ}_{\overline{K}} \Big(\partial^2_{IJ} \hat{Z} - \Gamma^L_{IJ} \partial_L \hat{Z} \Big), \quad (4.36)$$

where the tensor $C^{IJ}_{\overline{K}}$ and the Christoffel symbol Γ^L_{IJ} are given by (2.16) and (2.17), respectively. In other words we obtain the holomorphic anomaly equations (2.21) which is equivalent to (2.9).

The expansion in [1] is precisely the one that is obtained by expanding the integral (4.24). This means that the iteration of Fig. 1 leads to a representation of $F^{(g)}(t, \kappa)$ which agrees with the canonical solution of [1] for the choice (4.1).

Acknowledgments

We would like to thank Mina Aganagic, Robert Dijkgraaf, Amir Kashani-Poor, Albrecht Klemm, Andrei Okounkov and Pierre Vanhove for useful and fruitful discussions on this subject. This work is partly supported by the Enigma European network MRT-CT-2004-5652, by the ANR project Géométrie et intégrabilité en physique mathématique ANR-05-BLAN-0029-01, by the Enrage European network MRTN-CT-2004-005616, by the European Science Foundation through the Misgam program, by the French and Japaneese governments through PAI Sakurav, by the Quebec government with the FQRNT.

References

[1] M. Aganagic, V. Bouchard and A. Klemm, "Topological strings and (almost) modular forms," arXiv:hep-th/0607100.

[2] G. Akemann, "Higher genus correlators for the Hermitian matrix model with multiple cuts," Nucl. Phys. B **482**, 403 (1996) [arXiv:hep-th/9606004].

[3] J. Ambjorn, L. Chekhov, C. F. Kristjansen and Y. Makeenko, "Matrix model calculations beyond the spherical limit," Nucl. Phys. B **404**, 127 (1993) [Erratum-ibid. B **449**, 681 (1995)] [arXiv:hep-th/9302014].

[4] I. Antoniadis, K. S. Narain and T. R. Taylor, "Open string topological amplitudes and gaugino masses," Nucl. Phys. B **729**, 235 (2005) [arXiv:hep-th/0507244].

[5] M. Bershadsky, S. Cecotti, H. Ooguri and C. Vafa, "Holomorphic anomalies in topological field theories," Nucl. Phys. B **405**, 279 (1993) [arXiv:hep-th/9302103].

[6] M. Bershadsky, S. Cecotti, H. Ooguri and C. Vafa, "Kodaira-Spencer theory of gravity and exact results for quantum string amplitudes," Commun. Math. Phys. **165**, 311 (1994) [arXiv:hep-th/9309140].

[7] E. Brézin, C. Itzykson, G. Parisi and J. B. Zuber, "Planar Diagrams," Commun. Math. Phys. **59**, 35 (1978).

[8] L. Chekhov, B. Eynard and N. Orantin, "Free energy topological expansion for the 2-matrix model," JHEP **0612**, 053 (2006) [arXiv:math-ph/0603003].

[9] B. de Wit, G. Lopes Cardoso, D. Lust, T. Mohaupt and S. J. Rey, "Higher-order gravitational couplings and modular forms in N = 2, D = 4 heterotic string compactifications," Nucl. Phys. B **481**, 353 (1996) [arXiv:hep-th/9607184].

[10] R. Dijkgraaf and C. Vafa, "Matrix models, topological strings, and supersymmetric gauge theories," Nucl. Phys. B **644**, 3 (2002) [arXiv:hep-th/0206255].

[11] R. Dijkgraaf, A. Sinkovics and M. Temurhan, "Matrix models and gravitational corrections," Adv. Theor. Math. Phys. **7**, 1155 (2004) [arXiv:hep-th/0211241].

[12] B. Eynard, "Topological expansion for the 1-hermitian matrix model correlation functions," arXiv:hep-th/0407261.

[13] B. Eynard, "Formal matrix integrals and combinatorics of maps," arXiv:math-ph/0611087.

[14] B. Eynard and N. Orantin, "Topological expansion of the 2-matrix model correlation functions: Diagrammatic rules for a residue formula," JHEP **0512**, 034 (2005) [arXiv:math-ph/0504058].

[15] B. Eynard and N. Orantin, "Invariants of algebraic curves and topological expansion", arXiv:math-ph/0702045.

[16] T. Grimm, A. Klemm, M. Mariño and M. Weiss, "Direct integration of the topological string," to appear.

[17] M. x. Huang and A. Klemm, "Holomorphic anomaly in gauge theories and matrix models," arXiv:hep-th/0605195.

[18] M. x. Huang, A. Klemm and S. Quackenbush, "Topological string theory on compact Calabi-Yau: Modularity and boundary conditions," arXiv:hep-th/0612125.

[19] V. A. Kazakov, "Ising model on a dynamical planar random lattice: Exact solution," Phys. Lett. A **119**, 140 (1986).

[20] A. Klemm, W. Lerche, P. Mayr, C. Vafa and N. P. Warner, "Self-Dual Strings and N=2 Supersymmetric Field Theory," Nucl. Phys. B **477**, 746 (1996) [arXiv:hep-th/9604034].

[21] A. Klemm, M. Mariño and S. Theisen, "Gravitational corrections in supersymmetric gauge theory and matrix models," JHEP **0303**, 051 (2003) [arXiv:hep-th/0211216].

[22] A. Klemm and E. Zaslow, "Local mirror symmetry at higher genus," arXiv:hep-th/9906046.

[23] M. Mariño, "Les Houches lectures on matrix models and topological strings," arXiv:hep-th/0410165.

[24] M. Mariño, "Open string amplitudes and large order behavior in topological string theory," arXiv:hep-th/0612127.

[25] A. Neitzke and C. Vafa, "Topological strings and their physical applications," arXiv:hep-th/0410178.

[26] N. A. Nekrasov, "Seiberg-Witten prepotential from instanton counting," Adv. Theor. Math. Phys. **7**, 831 (2004) [arXiv:hep-th/0206161].

[27] G. 't Hooft, "A planar diagram theory for strong interactions," Nucl. Phys. B **72** (1974) 461.

[28] M. Vonk, "A mini-course on topological strings," arXiv:hep-th/0504147.

[29] E. Witten, "Quantum background independence in string theory," arXiv:hep-th/9306122.

6 Topological expansion of mixed correlations in the hermitian 2 Matrix Model and x-y symmetry of the F_g invariants

arXiv:0705.0958v1 [math-ph] 7 May 2007

SPhT-T07/055

Topological expansion of mixed correlations in the hermitian 2 Matrix Model and x-y symmetry of the F_g algebraic invariants.

B. Eynard[1], *N. Orantin*[2]

Service de Physique Théorique de Saclay,
F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France.

Abstract: We compute expectation values of mixed traces containing both matrices in a two matrix model, i.e. generating function for counting bicolored discrete surfaces with non uniform boundary conditions. As an application, we prove the $x-y$ symmetry of [21].

[1] E-mail: eynard@spht.saclay.cea.fr
[2] E-mail: orantin@spht.saclay.cea.fr

1 Introduction

Formal matrix integrals can be regarded as an efficient toy model to explore the link between algebraic geometry and integrable systems [31, 3]. The theory of quantum gravity [12, 11, 27] is based on the idea that matrix models provide a generating function to measure "volumes" of moduli spaces of Riemann surfaces, and random matrix models were introduced in the 80's [6] as a discretized version of 2d quantum gravity, i.e. conformal field theory coupled to gravity.

The formal matrix integral is at the same time a tau-function of some integrable hierarchy [12], and it has a 't Hoof topological expansion [33, 12, 1]:

$$\ln \int_{\text{formal}} dM \mathrm{e}^{-N \operatorname{Tr} V(M)} = \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} F^{(g)} \tag{1-1}$$

which is related to algebraic geometry (see [5, 3, 29, 14]).

In a recent work [13, 7, 19, 8, 21], we have developped a method to compute the $F^{(g)}$'s for various formal hermitian matrix models (1-matrix model, 2-matrix model, matrix model with an external field, double scaling limits of 2-matrix model) out of the data of an algebraic equation (called the classical spectral curve):

$$\mathcal{E}(x,y) = 0 \qquad , \qquad \mathcal{E} = \text{polynomial}. \tag{1-2}$$

The construction of [21] extends beyond matrix models, and the $F^{(g)}$'s can be computed for any algebraic equation of the type $\mathcal{E}(x,y)=0$.

However the construction of [21] assumes an embedding of the curve into $\mathbf{C}^2$, i.e. the choice of 2 meromorphic functions x and y on the curve. It was claimed in [21] that $F^{(g)}$ is invariant under the exchange $x \leftrightarrow y$, and the proof was announced to be published separately.

This is what we do in the present paper, together with additional results.

Mixed correlations

In order to prove this claim, we first explore the case where the $F^{(g)}$'s come from a formal 2-matrix model (the symmetry $x \leftrightarrow y$ holds almost by definition in that case, see [8]). We write the loop equation relations (W-algebra) [32, 18], which we solve, and we are led to define new mixed correlation functions ($W_{k,l}$ and $H_{k,l}$ below), which did not appear in [21].

In the application of the 2-matrix model to quantum gravity and conformal field theory, those mixed correlation functions were known to play an important role in the understanding of boundary operators. But their explicit computation has been a challenge until recently. The main reason is that they don't reduce to eigenvalues

of the matrices, and could not be computed by standard methods. The first explicit computations were obtained in [4] and [17]. Here in this paper, we show how to compute the topological expansion of a family of mixed correlation functions of the 2-matrix model. In a coming work [23], we shall show how to compute all mixed correlations, and introduce a link with group theory and Bethe ansatz (this is a generalization of [22]).

Then, for the general case (i.e. if $\mathcal{E}$ was not obtained from a matrix model), we mimic those mixed correlation functions and that allows to prove the $x \leftrightarrow y$ symmetry of $F^{(g)}$.

2 Mixed traces of matrix models

Consider the formal 2-matrix integral[3]:

$$Z = \int dM_1\, dM_2\ \mathrm{e}^{-N\,\mathrm{tr}\,(V_1(M_1)+V_2(M_2)-M_1\,M_2)} \tag{2-1}$$

where we assume in this section that V_1 is a polynomial of degree d_1+1 and V_2 is a polynomial of degree d_2+1.

Our goal is to compute the following connected expectation values:

$$\begin{aligned} & \overline{W}_{k,l}(x_1,\dots,x_k|y_1,\dots,y_l) \\ = & \left\langle \mathrm{tr}\,\frac{1}{x_1-M_1}\,\mathrm{tr}\,\frac{1}{x_2-M_1}\dots\mathrm{tr}\,\frac{1}{x_k-M_1}\ \ \mathrm{tr}\,\frac{1}{y_1-M_2}\,\mathrm{tr}\,\frac{1}{y_2-M_2}\dots\mathrm{tr}\,\frac{1}{y_l-M_2}\right\rangle_c \\ = & \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g-k-l}\,\overline{W}_{k,l}^{(g)}(x_1,\dots,x_k|y_1,\dots,y_l). \end{aligned} \tag{2-2}$$

and

$$\begin{aligned} & \overline{H}_{k,l}(x,y;x_1,\dots,x_k|y_1,\dots,y_l) \\ = & \left\langle \mathrm{tr}\,\frac{1}{x-M_1}\frac{1}{y-M_2}\ \mathrm{tr}\,\frac{1}{x_1-M_1}\dots\mathrm{tr}\,\frac{1}{x_k-M_1}\ \ \mathrm{tr}\,\frac{1}{y_1-M_2}\dots\mathrm{tr}\,\frac{1}{y_l-M_2}\right\rangle_c \\ = & \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g-k-l-1}\,\overline{H}_{k,l}^{(g)}(x,y;x_1,\dots,x_k|y_1,\dots,y_l) \end{aligned} \tag{2-3}$$

$\overline{W}_{k,l}^{(g)}$ is the generating function which counts connected genus g bi-colored discrete surfaces with k boundaries of the first color, and l boundaries of the second color. $\overline{H}_{k,l}^{(g)}$ is the generating function which counts genus g bi-colored discrete surfaces with

[3] A formal integral is defined as a formal power series in some expansion parameter t, as explained in [20] or [21]. Formal matrix integrals always have a $1/N^2$ expansion order by order in t, called the topological expansion.

k boundaries of the first color, and l boundaries of the second color, and one additional boundary which carries the 2 colors. The power of N in both cases is the Euler characteristic of such surfaces. The 2-matrix model was introduced in [28] as a discrete version of the Ising model on a random surface.

Notice that in $\overline{H}_{k,l}^{(g)}$, the first trace contains both matrices M_1 and M_2, we call it a **mixed trace** because it cannot be expressed in terms of eigenvalues of M_1 and M_2. In applications of matrix models to conformal field theories, such objects correspond to the insertion of a pair of boundary operators, and are thus very interesting. $\overline{H}_{0,0}^{(0)}$ was computed in many works [18, 9], and in the context of convergent integrals (instead of formal integrals), $\overline{H}_{0,0}$ was computed in [4, 17, 2].

The $\overline{W}_{k,0}^{(g)}$'s were already computed in [13, 19, 8], and are given by the algebraic invariants defined in [21], they are the non mixed traces.

It is known (see for instance [8]) that all those functions are multivalued functions of their x or y variables, and they are in fact functions living on a Riemann surface called the spectral curve of equation:

$$\mathcal{E}(x,y) = 0. \tag{2-4}$$

On this curve, we chose a canonical basis of cycles[4] $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{B}_j = \delta_{i,j}$, $i,j = 1,\dots\mathcal{G}$, where $\mathcal{G}$ denotes the genus of the curve $\mathcal{E}$. We will note by p^i (resp. $\tilde{p}^i$) the different points of $\mathcal{E}$ whose projection in the complex plane by the meromorphic function x (resp. y) are equal:

$$\forall i = 1\dots d_2\,,\ x(p^i) = x(p^0) \qquad , \qquad \forall i = 1\dots d_1\,,\ y(\tilde{p}^i) = x(\tilde{p}^0), \tag{2-5}$$

where the superscript 0 refers to the x- and y-physical sheets.

It is thus more convenient to redefine $\overline{W}_{k,l}^{(g)}$ and $\overline{H}_{k,l}^{(g)}$ in terms of meromorphic forms on the curve:

$$\begin{aligned} & W_{k,l}^{(g)}(p_1,\dots,p_k|q_1,\dots,q_l) \\ = & \overline{W}_{k,l}^{(g)}(x(p_1),\dots,x(p_k)|y(q_1),\dots,y(q_l))\ dx(p_1)\dots dx(p_k)dy(q_1)\dots dy(q_l) \\ & +\delta_{g,0}\delta_{k,1}\delta_{l,0}(y(p_1)-V_1'(x(p_1)))dx(p_1)+\delta_{g,0}\delta_{k,0}\delta_{l,1}(x(q_1)-V_2'(y(q_1)))dy(q_1) \\ & +\frac{\delta_{g,0}\delta_{k,2}\delta_{l,0}\ dx(p_1)dx(p_2)}{(x(p_1)-x(p_2))^2} \\ & +\frac{\delta_{g,0}\delta_{k,0}\delta_{l,2}\ dy(q_1)dy(q_2)}{(y(q_1)-y(q_2))^2} \end{aligned} \tag{2-6}$$

[4] All required definitions relative to algebraic geometry can be found in [21] or more generally in [25, 24]. We will use all along these notes the notations of [21]. The $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$-cycles may be the modified cycles of [21].

where the p_i's and q_j's are now points on the curve $\mathcal{E}$, instead of points in the complex plane. We have also "renormalized the unstable functions" with $2-2g-k-l \geq 0$.

With those notations we have [8, 5]:

$$W_{1,0}^{(0)} = W_{0,1}^{(0)} = 0, \tag{2-7}$$

$$W_{2,0}^{(0)}(p,q) = -W_{1,1}^{(0)}(p,q) = W_{0,2}^{(0)}(p,q) = B(p,q) \tag{2-8}$$

where B is the Bergmann kernel, i.e. the unique bilinear form on $\mathcal{E}$ with a double pole at $p=q$ and no other pole, with vanishing residue, and normalized on $\mathcal{A}$-cycles:

$$B(p,q) \underset{p\to q}{\sim} \frac{dz(p)dz(q)}{(z(p)-z(q))^2} + \text{finite} \qquad , \qquad \forall i = 1\dots\mathcal{G}\,,\ \oint_{\mathcal{A}} B = 0. \tag{2-9}$$

We also define the differentials corresponding to the mixed correlation functions:

$$\begin{aligned} & H_{k,l}^{(g)}(p,q;p_1,\dots,p_k|q_1,\dots,q_l) \\ = \ & \overline{H}_{k,l}^{(g)}(x(p),y(q);x(p_1),\dots,x(p_k)|y(q_1),\dots,y(q_l))\ dx(p_1)\dots dx(p_k)dy(q_1)\dots dy(q_l) \\ & +\delta_{g,0}\delta_{k,0}\delta_{l,0} \end{aligned} \tag{2-10}$$

and we normalize them by the leading order of the simplest mixed correlation function:

$$h_{k,l}^{(g)}(p,q;p_1,\dots,p_k|q_1,\dots,q_l) = \frac{H_{k,l}^{(g)}(p,q;p_1,\dots,p_k|q_1,\dots,q_l)}{H_{0,0}^{(0)}(p,q)}. \tag{2-11}$$

It is well known [14, 18, 9] (and it can be rederived from Eq. (2-18) and Eq. (2-21) below) that:

$$H_{0,0}^{(0)}(p,q) = \frac{\mathcal{E}(x(p),y(q))}{(x(p)-x(q))(y(p)-y(q))}. \tag{2-12}$$

We also need to introduce:

$$\begin{aligned} & U_{k,l}(p,y;p_1,\dots,p_k|q_1,\dots,q_l) \\ = \ & \Big\langle \operatorname{tr}\frac{1}{x(p)-M_1}\frac{V_2'(y)-V_2'(M_2)}{y-M_2}\ \operatorname{tr}\frac{dx(p_1)}{x(p_1)-M_1}\dots\operatorname{tr}\frac{dx(p_k)}{x(p_k)-M_1} \\ & \operatorname{tr}\frac{dy(q_1)}{y(q_1)-M_2}\dots\operatorname{tr}\frac{dy(q_l)}{y(q_l)-M_2}\Big\rangle_c \\ & +\delta_{g,0}\delta_{k,0}\delta_{l,0}(V_2'(y)-x(p)) \\ = \ & \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g-k-l-1}\, U_{k,l}^{(g)}(p,y;p_1,\dots,p_k|q_1,\dots,q_l), \end{aligned} \tag{2-13}$$

which is a polynomial of y of degree at most d_2-1,

$$\begin{aligned} & \tilde{U}_{k,l}(x,q;p_1,\dots,p_k|q_1,\dots,q_l) \\ = \ & \Big\langle \operatorname{tr}\frac{V_1'(x)-V_1'(M_1)}{x-M_1}\frac{1}{y(q)-M_2}\ \operatorname{tr}\frac{dx(p_1)}{x(p_1)-M_1}\dots\operatorname{tr}\frac{dx(p_k)}{x(p_k)-M_1} \\ & \operatorname{tr}\frac{dy(q_1)}{y(q_1)-M_2}\dots\operatorname{tr}\frac{dy(q_l)}{y(q_l)-M_2}\Big\rangle_c \\ & +\delta_{g,0}\delta_{k,0}\delta_{l,0}(V_1'(x)-y(p)) \\ = \ & \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g-k-l-1}\, \tilde{U}_{k,l}^{(g)}(x,q;p_1,\dots,p_k|q_1,\dots,q_l), \end{aligned} \tag{2-14}$$

which is a polynomial of x of degree at most d_1-1 and

$$\begin{aligned} & -E_{k,l}(x,y;p_1,\dots,p_k|q_1,\dots,q_l) \\ = \ & \Big\langle \operatorname{tr}\frac{V_1'(x)-V_1'(M_1)}{x-M_1}\frac{V_2'(y)-V_2'(M_2)}{y-M_2}\ \operatorname{tr}\frac{dx(p_1)}{x(p_1)-M_1}\dots\operatorname{tr}\frac{dx(p_k)}{x(p_k)-M_1} \\ & \operatorname{tr}\frac{dy(q_1)}{y(q_1)-M_2}\dots\operatorname{tr}\frac{dy(q_l)}{y(q_l)-M_2}\Big\rangle_c \\ & +\delta_{g,0}\delta_{k,0}\delta_{l,0}((V_1'(x)-y(p))(V_2'(y)-x(p))-1) \\ = \ & -\sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g-k-l-1}\, E_{k,l}^{(g)}(x,y;p_1,\dots,p_k|q_1,\dots,q_l), \end{aligned} \tag{2-15}$$

which is a polynomial of x of degree d_1-1 and of y of degree d_2-1.

We have:

$$E_{0,0}^{(0)}(x,y) = \mathcal{E}(x,y) \qquad , \qquad U_{0,0}^{(0)}(p,y) = \frac{\mathcal{E}(x(p),y)}{y-y(p)} \qquad , \qquad \tilde{U}_{0,0}^{(0)}(x,q) = \frac{\mathcal{E}(x,y(q))}{x-x(q)}, \tag{2-16}$$

and

$$P_{0,0}^{(0)}(x,y) = -\mathcal{E}(x,y). \tag{2-17}$$

2.1 Loop equations

In order to obtain a closed set of equations computing these mixed correlation functions, we consider 4 families of loop equations [32, 18, 16] corresponding to different infinitesimal changes of variables $M_i \to M_i + \epsilon\delta M_i$ in the matrix integral.

$\delta M_2 = \frac{1}{x(p)-M_1}\frac{1}{y(q)-M_2}\prod_{i=1}^{k}\operatorname{tr}\frac{1}{x(p_i)-M_1}\prod_{j=1}^{l}\operatorname{tr}\frac{1}{y(q_j)-M_2}$ gives:

$$\begin{aligned} -U_{k,l}^{(g)}(p,y(q);\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) \ = \ & (x(p)-x(q))H_{k,l}^{(g)}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) \\ & +\sum_{h}\sum_{I,J}\frac{W_{i,j+1}^{(h)}(\mathbf{p_I}|\mathbf{q_J},q)H_{k-i,l-j}^{(g-h)}(p,q;\mathbf{p_{K/I}}|\mathbf{q_{L/J}})}{dy(q)} \\ & +\frac{H_{k,l+1}^{(g-1)}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L},q)}{dy(q)} \\ & -\sum_{n} d_{q_n}\frac{H_{k,l-1}^{(g)}(p,q_n;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_{L/\{n\}}})}{y(q)-y(q_n)} \end{aligned} \tag{2-18}$$

$\delta M_1 = \frac{1}{x(p)-M_1}\frac{1}{y(q)-M_2}\prod_{i=1}^{k}\mathrm{tr}\,\frac{1}{x(p_i)-M_1}\prod_{j=1}^{l}\mathrm{tr}\,\frac{1}{y(q_j)-M_2}$ gives:

$$\begin{aligned}
-\tilde{U}^{(g)}_{k,l}(x(p),q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) &= (y(q)-y(p))H^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) \\
&+\sum_h\sum_{I,J}\frac{W^{(h)}_{i+1,j}(p,\mathbf{p_I}|\mathbf{q_J})H^{(g-h)}_{k-i,l-j}(p,q;\mathbf{p_{K/I}}|\mathbf{q_{L/J}})}{dx(p)} \\
&+\frac{H^{(g-1)}_{k+1,l}(p,q;p,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})}{dx(p)} \\
&-\sum_m d_{p_m}\frac{H^{(g)}_{k-1,l}(p_m,q;\mathbf{p_{K/\{m\}}}|\mathbf{q_L})}{x(p)-x(p_m)} \qquad (2\text{-}19)
\end{aligned}$$

$\delta M_2 = \frac{V_1'(x(p))-V_1'(M_1)}{x(p)-M_1}\frac{1}{y(q)-M_2}\prod_{i=1}^{k}\mathrm{tr}\,\frac{1}{x(p_i)-M_1}\prod_{j=1}^{l}\mathrm{tr}\,\frac{1}{y(q_j)-M_2}$ gives:

$$\begin{aligned}
E^{(g)}_{k,l}(x(p),y(q);\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) &= (x(p)-x(q))\tilde{U}^{(g)}_{k,l}(x(p),q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) \\
&+\sum_h\sum_{I,J}\frac{\check{W}^{(h)}_{i,j+1}(\mathbf{p_I}|\mathbf{q_J},q)\tilde{U}^{(g-h)}_{k-i,l-j}(x(p),q;\mathbf{p_{K/I}}|\mathbf{q_{L/J}})}{dy(q)} \\
&+\frac{\tilde{U}^{(g-1)}_{k,l+1}(x(p),q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L},q)}{dy(q)} \\
&-\sum_m d_{q_m}\frac{\tilde{U}^{(g)}_{k,l-1}(x(p),q_m;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_{L/\{m\}}})}{y(q)-y(q_m)} \\
&-\sum_m d_{p_m}H^{(g)}_{k-1,l}(p_m,q;\mathbf{p_{K/\{m\}}}|\mathbf{q_L}) \qquad (2\text{-}20)
\end{aligned}$$

and $\delta M_1 = \frac{1}{x(p)-M_1}\frac{V_2'(y(q))-V_2'(M_2)}{y(q)-M_2}\prod_{i=1}^{k}\mathrm{tr}\,\frac{1}{x(p_i)-M_1}\prod_{j=1}^{l}\mathrm{tr}\,\frac{1}{y(q_j)-M_2}$ gives:

$$\begin{aligned}
E^{(g)}_{k,l}(x(p),y(q);\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) &= (y(q)-y(p))U^{(g)}_{k,l}(p,y(q);\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) \\
&+\sum_h\sum_{I,J}\frac{W^{(h)}_{i+1,j}(p,\mathbf{p_I}|\mathbf{q_J})U^{(g-h)}_{k-i,l-j}(p,y(q);\mathbf{p_{K/I}}|\mathbf{q_{L/J}})}{dx(p)} \\
&+\frac{U^{(g-1)}_{k+1,l}(p,y(q);p,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})}{dx(p)} \\
&-\sum_m d_{p_m}\frac{U^{(g)}_{k-1,l}(p_m,y(q);\mathbf{p_{K/\{m\}}}|\mathbf{q_L})}{x(p)-x(p_m)} \\
&-\sum_m d_{q_m}H^{(g)}_{k,l-1}(p,q_m;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_{L/\{m\}}}). \qquad (2\text{-}21)
\end{aligned}$$

Those loop equations can be seen to be equivalent to W-algebra constraints [10, 12], or to a generalization of Tutte's equations for the combinatorics of discrete surfaces [34, 35].

2.2 Solution of loop equations

Theorem 2.1 *The solution of loop equations is such that:*

$$\begin{aligned}
&h^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) \\
=\ &\operatorname*{Res}_{r\to\tilde{q}^j,p,\mathbf{p_K}}\frac{1}{(x(p)-x(r))(y(r)-y(q))}\Big(h^{(g-1)}_{k+1,l}(r,q;r,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) \\
&+\sum_h\sum_{I\subset K}\sum_{J\subset L}W^{(h)}_{i+1,j}(r,\mathbf{p_I}|\mathbf{q_J})h^{(g-h)}_{k-i,l-j}(r,q;\mathbf{p_{K/I}}|\mathbf{q_{L/J}})\Big), \qquad (2-22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&W^{(g)}_{k,l+1}(\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L},q) \\
=\ &\operatorname*{Res}_{r\to\tilde{q}^j,\mathbf{p_K}}\frac{dy(q)}{(y(r)-y(q))}\Big(h^{(g-1)}_{k+1,l}(r,q;r,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) \\
&+\sum_h\sum_{I\subset K}\sum_{J\subset L}W^{(h)}_{i+1,j}(r,\mathbf{p_I}|\mathbf{q_J})h^{(g-h)}_{k-i,l-j}(r,q;\mathbf{p_{K/I}}|\mathbf{q_{L/J}})\Big). \qquad (2-23)
\end{aligned}$$

where $\operatorname*{Res}_{r\to\tilde{q}^j}$ *means that one takes the residues around all the points* $\tilde{q}^j \neq q$ *such that* $y(\tilde{q}^j) = y(q)$.

Given the initial conditions:

$$h^{(0)}_{0,0} = 1 \qquad , \qquad W^{(g)}_{k,0}(p_1,\dots,p_k) = W^{(g)}_k(p_1,\dots,p_k)\Big|_{\mathcal{E}} \qquad (2\text{-}24)$$

where $W^{(g)}_k(p_1,\dots,p_k)\Big|_{\mathcal{E}}$ is the function defined in [21], the above system is triangular and computes univocally any $h^{(g)}_{k,l}$ and $W^{(g)}_{k,l}$ in at most $k+l+\frac{g^2}{2}$ steps.

One easily proves by recursion on $2g+k+l$ that:

$$H^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) \text{ has poles } \begin{cases} \text{in } p = a, q, \mathbf{q_L} \\ \text{in } q = b, p, \mathbf{p_K} \\ \text{in } p_j = a, q, \mathbf{q_L} \\ \text{in } q_j = b, p, \mathbf{p_K} \end{cases} \qquad (2\text{-}25)$$

and

$$W^{(g)}_{k,l}(\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) \text{ has poles } \begin{cases} \text{in } p_j = a, \mathbf{q_L} \\ \text{in } q_j = b, \mathbf{p_K} \end{cases} \qquad (2\text{-}26)$$

proof:

Since $\tilde{U}^{(g)}_{k,l}(x(p),q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})$ is a polynomial in $x(p)$ of degree at most d_1-2, it is given by the Lagrange interpolation formula:

$$\tilde{U}^{(g)}_{k,l}(x(p),q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) \qquad = \qquad \tilde{U}^{(0)}_{0,0}(x(p),q)\sum_{j=1}^{d_1}\frac{\tilde{U}^{(g)}_{k,l}(x(\tilde{q}^j),q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})}{(x(p)-x(\tilde{q}^j))\tilde{U}^{(0)}_{0,0\,x}(x(\tilde{q}^j),q)}$$

$$= \tilde{U}^{(0)}_{0,0}(x(p),q)\sum_{j=1}^{d_1}\operatorname*{Res}_{r\to\tilde{q}^j}\frac{\tilde{U}^{(g)}_{k,l}(x(\tilde{q}^j),q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})\,dx(r)}{(x(p)-x(r))\,\tilde{U}^{(0)}_{0,0}(x(r),q)}. \tag{2-27}$$

Then we replace $\tilde{U}^{(g)}_{k,l}(x(\tilde{q}^j),q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})$ by its value from the loop equation 2-19:

$$\begin{aligned}\tilde{U}^{(g)}_{k,l}(x(p),q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) &= -\sum_{j=1}^{d_1}\operatorname{Res}_{r\to\tilde{q}^j}\frac{\tilde{U}^{(0)}_{0,0}(x(p),q)}{(x(p)-x(r))\,\tilde{U}^{(0)}_{0,0}(x(r),q)}\Bigg[\\ &\sum_h\sum_{I,J}W^{(h)}_{i+1,j}(r,\mathbf{p_I}|\mathbf{q_J})H^{(g-h)}_{k-i,l-j}(r,q;\mathbf{p_{K/I}}|\mathbf{q_{L/J}})\\ &+H^{(g-1)}_{k+1,l}(r,q;r,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})-\sum_m d_{p_m}\frac{H^{(g)}_{k-1,l}(p_m,q;\mathbf{p_{K/\{m\}}}|\mathbf{q_L})\,dx(r)}{x(r)-x(p_m)}\Bigg]\end{aligned} \tag{2-28}$$

Notice that the same residue computed at $r\to p$ gives the terms in the RHS of the loop equation 2-19, and therefore:

$$\begin{aligned}&(y(q)-y(p))H^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})\\ =\ &\operatorname*{Res}_{r\to p,\tilde{q}^j}\frac{\tilde{U}^{(0)}_{0,0}(x(p),q)}{(x(p)-x(r))\,\tilde{U}^{(0)}_{0,0}(x(r),q)}\Bigg[\\ &\sum_h\sum_{I,J}W^{(h)}_{i+1,j}(r,\mathbf{p_I}|\mathbf{q_J})H^{(g-h)}_{k-i,l-j}(r,q;\mathbf{p_{K/I}}|\mathbf{q_{L/J}})\\ &+H^{(g-1)}_{k+1,l}(r,q;r,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})-\sum_m d_{p_m}\frac{H^{(g)}_{k-1,l}(p_m,q;\mathbf{p_{K/\{m\}}}|\mathbf{q_L})\,dx(r)}{x(r)-x(p_m)}\Bigg].\end{aligned} \tag{2-29}$$

Moreover the last term $d_{p_m}\frac{H^{(g)}_{k-1,l}(p_m,q;\mathbf{p_{K/\{m\}}}|\mathbf{q_L})\,dx(r)}{x(r)-x(p_m)}$ can be computed explicitely:

$$\begin{aligned}&d_{p_m}\operatorname{Res}_{r\to p,\tilde{q}^j}\frac{\tilde{U}^{(0)}_{0,0}(x(p),q)}{(x(p)-x(r))\,\tilde{U}^{(0)}_{0,0}(x(r),q)}\frac{H^{(g)}_{k-1,l}(p_m,q;\mathbf{p_{K/\{m\}}}|\mathbf{q_L})\,dx(r)}{x(r)-x(p_m)}\\ &=d_{p_m}\operatorname{Res}_{r\to p,\tilde{q}^j}\frac{\mathcal{E}(x(p),y(q))(x(r)-x(q))}{(x(p)-x(r))(x(p)-x(q))\,\mathcal{E}(x(r),y(q))}\frac{H^{(g)}_{k-1,l}(p_m,q;\mathbf{p_{K/\{m\}}}|\mathbf{q_L})\,dx(r)}{x(r)-x(p_m)}.\end{aligned} \tag{2-30}$$

Under this form, one can see that the integrant is a rational function of $x(r)$. Thus, the residue can be computed on the complex plane obtained by the projection x and we can move the integration contours on the complex plane instead of the curve $\mathcal{E}$ itself. This term is then equal to:

$$\begin{aligned}&d_{p_m}\operatorname*{Res}_{x\to x(p),x(\tilde{q}^j)}\frac{\mathcal{E}(x(p),y(q))(x-x(q))}{(x(p)-x)(x(p)-x(q))\,\mathcal{E}(x,y(q))}\frac{H^{(g)}_{k-1,l}(p_m,q;\mathbf{p_{K/\{m\}}}|\mathbf{q_L})\,dx}{x-x(p_m)}\\ =\ &-d_{p_m}\operatorname*{Res}_{x\to x(p_m)}\frac{\mathcal{E}(x(p),y(q))(x-x(q))}{(x(p)-x)(x(p)-x(q))\,\mathcal{E}(x,y(q))}\frac{H^{(g)}_{k-1,l}(p_m,q;\mathbf{p_{K/\{m\}}}|\mathbf{q_L})\,dx}{x-x(p_m)}\\ =\ &-d_{p_m}\frac{\mathcal{E}(x(p),y(q))(x(p_m)-x(q))}{(x(p)-x(p_m))(x(p)-x(q))\,\mathcal{E}(x(p_m),y(q))}H^{(g)}_{k-1,l}(p_m,q;\mathbf{p_{K/\{m\}}}|\mathbf{q_L})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=\ &-\operatorname*{Res}_{r\to p_m}\frac{\tilde{U}^{(0)}_{0,0}(x(p),q)}{(x(p)-x(r))\,\tilde{U}^{(0)}_{0,0}(x(r),q)}H^{(g)}_{k-1,l}(r,q;\mathbf{p_{K/\{m\}}}|\mathbf{q_L})W^{(0)}_{2,0}(r,p_m)\\ =\ &-\operatorname*{Res}_{r\to p_m}\frac{\tilde{U}^{(0)}_{0,0}(x(p),q)}{(x(p)-x(r))\,\tilde{U}^{(0)}_{0,0}(x(r),q)}\Big(\sum_{h,I,J}W^{(h)}_{i+1,j}(r,\mathbf{p_I}|\mathbf{q_J})H^{(g-h)}_{k-i,l-j}(r,q;\mathbf{p_{K/I}}|\mathbf{q_{L/J}})\\ &+H^{(g-1)}_{k+1,l}(r,q;r,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})\Big),\end{aligned} \tag{2-31}$$

where the last equality holds thanks to the loop equation Eq. (2-19). Therefore:

$$\begin{aligned}(y(q)-y(p))H^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) &= \operatorname*{Res}_{r\to p,\tilde{q}^j,\mathbf{p_K}}\frac{\tilde{U}^{(0)}_{0,0}(x(p),q)}{(x(p)-x(r))\,\tilde{U}^{(0)}_{0,0}(x(r),q)}\Big(\\ &\sum_h\sum_{I,J}W^{(h)}_{i+1,j}(r,\mathbf{p_I}|\mathbf{q_J})H^{(g-h)}_{k-i,l-j}(r,q;\mathbf{p_{K/I}}|\mathbf{q_{L/J}})\\ &+H^{(g-1)}_{k+1,l}(r,q;r,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})\Big).\end{aligned} \tag{2-32}$$

If we divide by $\tilde{U}^{(0)}_{0,0}(x(p),q)$ we obtain:

$$\begin{aligned}-h^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) &= \operatorname*{Res}_{r\to p,\tilde{q}^j,p_K}\frac{1}{(x(p)-x(r))\,(y(r)-y(q))}\Big(\\ &\sum_h\sum_{I,J}W^{(h)}_{i+1,j}(r,\mathbf{p_I}|\mathbf{q_J})h^{(g-h)}_{k-i,l-j}(r,q;\mathbf{p_{K/I}}|\mathbf{q_{L/J}})\\ &+h^{(g-1)}_{k+1,l}(r,q;r,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})\Big).\end{aligned} \tag{2-33}$$

The other half of the theorem is obtained from the fact that for large x:

$$\operatorname{tr}\frac{1}{x-M_1}\frac{1}{y-M_2}\to\frac{1}{x}\operatorname{tr}\frac{1}{y-M_2} \tag{2-34}$$

and thus:

$$H^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})\to\frac{1}{x(p)}\frac{W^{(g)}_{k,l+1}(\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L},q)}{dy(q)} \tag{2-35}$$

when $p\to\infty_x$[5]. □

2.3 Examples, first few terms

Let us solve the recursive definition and give explicit formulae for the simplest functions.

Example $W^{(0)}_{1,1}$:

In particular, definitions Eq. (2-22) and Eq. (2-23) give:

$$W^{(0)}_{1,1}(p_1|q) = \operatorname*{Res}_{r\to\tilde{q}^j,p_1}\frac{dy(q)\,B(r,p_1)}{(y(r)-y(q))}$$

[5] ∞_x is the only point on the curve where the meromorphic function x has a simple pole (see [15] for further details).

$$
\begin{aligned}
&= -\operatorname*{Res}_{r\to q}\frac{dy(q)\,B(r,p_1)}{(y(r)-y(q))}\\
&= -B(q,p_1). \qquad (2\text{-}36)
\end{aligned}
$$

Therefore we recover:

$$W_{2,0}^{(0)}(p_1,q)+W_{1,1}^{(0)}(p_1|q)=0. \qquad (2\text{-}37)$$

Example $H_{1,0}^{(0)}$:

$$
\begin{aligned}
h_{1,0}^{(0)}(p,q;p_1) &= \operatorname*{Res}_{r\to\tilde{q}^j,p,p_1}\frac{B(r,p_1)}{(x(p)-x(r))(y(r)-y(q))}\\
&= -\operatorname*{Res}_{r\to p^i,q}\frac{B(r,p_1)}{(x(p)-x(r))(y(r)-y(q))}. \qquad (2\text{-}38)
\end{aligned}
$$

Example $H_{0,1}^{(0)}$:

$$
\begin{aligned}
h_{0,1}^{(0)}(p,q;p_1) &= \operatorname*{Res}_{r\to\tilde{q}^j,p}\frac{W_{1,1}^{(0)}(r|p_1)}{(x(p)-x(r))(y(r)-y(q))}\\
&= -\operatorname*{Res}_{r\to\tilde{q}^j,p}\frac{B(r,p_1)}{(x(p)-x(r))(y(r)-y(q))}\\
&= \operatorname*{Res}_{r\to p^i,q,p_1}\frac{B(r,p_1)}{(x(p)-x(r))(y(r)-y(q))}. \qquad (2\text{-}39)
\end{aligned}
$$

Moreover we have:

$$
\begin{aligned}
h_{1,0}^{(0)}(p,q;p_1)+h_{0,1}^{(0)}(p,q;p_1) &= \operatorname*{Res}_{r\to p_1}\frac{B(r,p_1)}{(x(p)-x(r))(y(r)-y(q))}\\
&= d_{p_1}\left(\frac{1}{(x(p)-x(p_1))(y(p_1)-y(q))}\right). \qquad (2\text{-}40)
\end{aligned}
$$

Example $W_{2,1}^{(0)}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{W_{2,1}^{(0)}(p_1,p_2|q)}{dy(q)} &= \operatorname{Res}_{r\to\tilde{q}^j,p_1,p_2}\frac{B(r,p_1)h_{1,0}^{(0)}(r,q;p_2)+B(r,p_2)h_{1,0}^{(0)}(r,q;p_1)+W_{3,0}^{(0)}(r,p_1,p_2)}{(y(r)-y(q))}\\
&= -\operatorname{Res}_{r\to q,\mathbf{a}}\frac{B(r,p_1)h_{1,0}^{(0)}(r,q;p_2)+B(r,p_2)h_{1,0}^{(0)}(r,q;p_1)+W_{3,0}^{(0)}(r,p_1,p_2)}{(y(r)-y(q))}. \qquad (2\text{-}41)
\end{aligned}
$$

2.4 Conclusion of section 2

Therefore, through theorem 2.1, we have an effective explicit method to compute any $H_{k,l}^{(g)}$ and any $W_{k,l}^{(g)}$ for the 2-matrix model.

This is an interesting result in itself, since none of those quantities were computed before, and those quantities are of importance in applications of random matrices to combinatorics of maps with colored boundaries, i.e. boundary conformal field theory.

An important remark, is that we have chosen to emphasize the role of the loop equation 2-19, rather than equation 2-18, i.e. we have used the Lagrange interpolation formula for a polynomial in x, whereas we could have done the same thing with a polynomial in y. In other words, we have chosen the x-representation rather than the y-representation, although both methods **must** give the same answer. In particular, given $W_{k,0}$, theorem 2.1 allows to compute $W_{0,l}$. $W_{k,0}$ can be computed with the method of [8, 21] using the x-representation, while $W_{0,l}$ can be computed with the method of [8, 21] using the y-representation, i.e. under the exchange

$$x \leftrightarrow y \quad . \qquad (2\text{-}42)$$

Therefore, in the following section, we improve the result of theorem 2.1, in order to prove that the diagrammatic rules of [8, 21] are indeed symmetric under the exchange of x and y. In other words we prove theorem 7.1 of [21], as announced in that article.

3 Proof of the symmetry x-y of the algebraic invariants $F^{(g)}(\mathcal{E})$

Consider the two algebraic curves:

$$\hat{\mathcal{E}}(x,y)=\mathcal{E}(x,y) \qquad \text{and} \qquad \check{\mathcal{E}}(x,y)=\mathcal{E}(y,x) \qquad (3\text{-}1)$$

In [21], for any curve $\mathcal{E}$ an infinite sequence of invariants $F^{(g)}$ was defined. Here we consider those invariants for the 2 curves $\hat{\mathcal{E}}$ and $\check{\mathcal{E}}$.

In this section we prove the following theorem (which was announced in [21]):

Theorem 3.1 *Symmetry under the exchange $x \leftrightarrow y$:*

$$\boxed{F^{(g)}(\hat{\mathcal{E}})=F^{(g)}(\check{\mathcal{E}})} \qquad (3\text{-}2)$$

where the functional $F^{(g)}(\mathcal{E})$ is defined for any curve $\mathcal{E}(x,y)$ in [21].

3.1 Preliminaries

For the curve $\hat{\mathcal{E}}(x,y)=0$, we have defined in [21] an infinite sequence of meromorphic forms:

$$\hat{W}_k^{(g)}(p_1,\dots,p_k)=W_k^{(g)}(p_1,\dots,p_k)\Big|_{\hat{\mathcal{E}}} \qquad (3\text{-}3)$$

with poles only at the zeroes $\mathbf{a}=\{a_i\}$ of dx, and some free energies

$$\hat{F}^{(g)}=\frac{1}{2-2g}\operatorname*{Res}_{p\to\mathbf{a}}\Phi(p)\hat{W}_1^{(g)}(p) \qquad (3\text{-}4)$$

where Φ is any antiderivative of ydx, $d\Phi = ydx$ and $\operatorname*{Res}_{p\to\mathbf{a}}$ stands for $\sum_i \operatorname*{Res}_{p\to a_i}$.

And likewise, for the curve $\check{\mathcal{E}}(x,y) = 0$, we have defined an infinite sequence of meromorphic forms:

$$\check{W}_k^{(g)}(q_1,\dots,q_k) = W_k^{(g)}(q_1,\dots,q_k)\Big|_{\mathcal{E}} \tag{3-5}$$

with poles only at the zeroes $\mathbf{b} = \{b_i\}$ of dy, and some free energies

$$\check{F}^{(g)} = \frac{1}{2-2g}\operatorname*{Res}_{q\to\mathbf{b}} \Psi(q)\check{W}_1^{(g)}(q) \tag{3-6}$$

where $d\Psi = xdy$.

Our first step is to extend those forms into two families of multilinear meromorphic forms similar to those of section 2 (i.e. mimicking the mixed traces of matrix models):

$$\hat{W}_{k,l}^{(g)}(p_1,\dots,p_k|q_1,\dots,q_l) \qquad \text{and} \qquad \check{W}_{k,l}^{(g)}(p_1,\dots,p_k|q_1,\dots,q_l) \tag{3-7}$$

such that:

$$\hat{W}_{k,0}^{(g)} = \hat{W}_k^{(g)} \qquad , \qquad \check{W}_{0,l}^{(g)} = \check{W}_l^{(g)}. \tag{3-8}$$

Our second step, is to prove that:

$$\hat{W}_{k,l}^{(g)} = \check{W}_{k,l}^{(g)}. \tag{3-9}$$

Our third step, is to prove that:

$$\hat{W}_{k+1,l}^{(g)}(\mathbf{p_K},p|\mathbf{q_L}) + \check{W}_{k,l+1}^{(g)}(\mathbf{p_K}|p,\mathbf{q_L}) = d_p\left(\frac{A_{k,l}^{(g)}(p;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})}{dx(p)dy(p)}\right) \tag{3-10}$$

where $A_{k,l}^{(g)}(p;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})$ has poles of degree at most 2 at the poles of ydx, so that in particular for $k=l=0$ we have:

$$\hat{W}_{1,0}^{(g)}(p) + \check{W}_{0,1}^{(g)}(p) = d_p\left(\frac{A_{0,0}^{(g)}(p)}{dx(p)dy(p)}\right) \tag{3-11}$$

where $A_{0,0}^{(g)}$ has poles of degree at most 2 at the poles of ydx.

This last step is sufficent to prove that

$$\hat{F}^{(g)} = \check{F}^{(g)}. \tag{3-12}$$

3.2 Definitions of mixed correlators $\hat{W}_{k,l}^{(g)}$ and $\check{W}_{k,l}^{(g)}$

We define the initial terms:

$$\hat{E}_{0,0}^{(0)}(x,y) = \check{E}_{0,0}^{(0)}(x,y) = \mathcal{E}(x,y), \tag{3-13}$$

$$\hat{H}_{0,0}^{(0)}(p,q) = \check{H}_{0,0}^{(0)}(p,q) = \frac{\mathcal{E}(x(p),y(q))}{(x(p)-x(q))(y(p)-y(q))}, \tag{3-14}$$

$$\hat{W}_{1,0}^{(0)}(p) = \hat{W}_{0,1}^{(0)}(p) = \check{W}_{1,0}^{(0)}(p) = \check{W}_{0,1}^{(0)}(p) = 0, \tag{3-15}$$

$$\hat{W}_{2,0}^{(0)}(p,q) = \hat{W}_{0,2}^{(0)}(p,q) = -\hat{W}_{1,1}^{(0)}(p,q) = B(p,q), \tag{3-16}$$

and

$$\check{W}_{2,0}^{(0)}(p,q) = \check{W}_{0,2}^{(0)}(p,q) = -\check{W}_{1,1}^{(0)}(p,q) = B(p,q). \tag{3-17}$$

Let us define recursively the following quantities for any $g,k,l \geq 0$:

$$\begin{aligned}
&J_{k,l}^{(g)}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) := \\
&\sum_{m_1,m_2=0}^{k}\sum_{n_1,n_2=0}^{l}\sum_{h,h'=1}^{g}\hat{W}_{m_1+1,n_1}^{(h)}(p,\mathbf{p_{M_1}}|\mathbf{q_{N_1}})\times \\
&\qquad\times\check{W}_{m_2,n_2+1}^{(h')}(\mathbf{p_{M_2}}|\mathbf{q_{N_2}},q)H_{k-m_1-m_2,l-n_1-n_2}^{(g-h-h')}(p,q;\mathbf{p_{K/\{M_1\cup M_2\}}}|\mathbf{q_{L/\{N_1\cup N_2\}}}) \\
&+\sum_{h=1}^{g-1}\Big[(x(p)-x(q))\hat{W}_{1,0}^{(h)}(p)dy(q)+(y(q)-y(p))\check{W}_{0,1}^{(h)}(q)dx(p)\Big]H_{k,l}^{(g-h)}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) \\
&+\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0;mn\neq kl}^{l}\sum_{h=0}^{g}H_{k-m,l-n}^{(g-h)}(p,q;\mathbf{p_{K/M}}|\mathbf{q_{L/N}})\times \\
&\quad\times\Big[(x(p)-x(q))\hat{W}_{m+1,n}^{(h)}(p,\mathbf{p_M}|\mathbf{q_N})dy(q)+(y(q)-y(p))\check{W}_{m,n+1}^{(h)}(\mathbf{p_M}|\mathbf{q_N},q)dx(p)\Big] \\
&+(x(p)-x(q))H_{k+1,l}^{(g-1)}(p,q;p,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})dy(q)+(y(q)-y(p))H_{k,l+1}^{(g-1)}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L},q)dx(p) \\
&+\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{l}\sum_{h=0}^{g-1}\Big[\hat{W}_{m+1,n}^{(h)}(p,\mathbf{p_M}|\mathbf{q_N})H_{k-m,l-n+1}^{(g-h-1)}(p,q;\mathbf{p_{K/M}}|\mathbf{q_{L/N}},q) \\
&+\tfrac{1}{2}\Big(\hat{W}_{m+1,n+1}^{(h)}(p,\mathbf{p_M}|\mathbf{q_N},q)+\check{W}_{m+1,n+1}^{(h)}(p,\mathbf{p_M}|\mathbf{q_N},q)\Big)H_{k-m,l-n}^{(g-h-1)}(p,q;\mathbf{p_{K/M}}|\mathbf{q_{L/N}}) \\
&+\check{W}_{m,n+1}^{(h)}(\mathbf{p_M}|\mathbf{q_N},q)H_{k-m+1,l-n}^{(g-h-1)}(p,q;p,\mathbf{p_{K/M}}|\mathbf{q_{L/N}})\Big]+H_{k+1,l+1}^{(g-2)}(p,q;p,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L},q)
\end{aligned} \tag{3-18}$$

and

$$\begin{aligned}
&\mathcal{J}^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) := J^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})\\
&-\sum_{\alpha=1}^{k} d_{p_\alpha}\left\{\tfrac{dx(p)}{x(p)-x(p_\alpha)}\left[(x(p_\alpha)-x(q))dy(q)\,H^{(g)}_{k-1,l}(p_\alpha,q;\mathbf{p_{K-\{\alpha\}}}|\mathbf{q_L})\right.\right.\\
&+\sum_{h=1}^{g}\check{W}^{(h)}_{0,1}(q)H^{(g-h)}_{k-1,l}(p_\alpha,q;\mathbf{p_{K-\{\alpha\}}}|\mathbf{q_L})\\
&\left.\left.+\sum_{h}\sum_{i,j=0}^{<kl} H^{(g-h)}_{i-1,j}(p_\alpha,q;\mathbf{p_{I-\{\alpha\}}}|\mathbf{q_J})\check{W}^{(h)}_{k-i,l-j+1}(\mathbf{p_{K-I}}|\mathbf{q_{L-J}},q)\right]\right\}\\
&-\sum_{\beta=1}^{l} d_{q_\beta}\left\{\tfrac{dy(q)}{y(q)-y(q_\beta)}\left[(y(q_\beta)-y(p))dx(p)\,H_{k,l-1}(p,q_\beta;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_{L-\{\beta\}}})\right.\right.\\
&+\sum_{h=1}^{g}\hat{W}^{(h)}_{1,0}(p)H^{(g-h)}_{k,l-1}(p,q_\beta;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_{L-\{\beta\}}})\\
&\left.\left.+\sum_{i,j=0}^{<kl}\sum_{h} H^{(g-h)}_{i,j-1}(p,q_\beta;\mathbf{p_I}|\mathbf{q_{J-\{\beta\}}})\hat{W}^{h}_{k-i+1,l-j}(p,\mathbf{p_{K-I}}|\mathbf{q_{L-J}})\right]\right\}\\
&+\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{l} d_{p_\alpha}d_{q_\beta}\left\{\tfrac{dx(p)}{x(p)-x(p_\alpha)}\tfrac{dy(q)}{y(q)-y(q_\beta)}H_{k-1,l-1}(p_\alpha,q_\beta;\mathbf{p_{K-\{\alpha\}}}|\mathbf{q_{L-\{\beta\}}})\right\}\\
&-\sum_{\alpha=1}^{k} d_{p_\alpha}\left(\tfrac{H^{(g-1)}_{k-1,l+1}(p_\alpha,q;\mathbf{p_{K-\{\alpha\}}}|\mathbf{q_L},q)dx(p)}{x(p)-x(p_\alpha)}\right)-\sum_{\beta=1}^{l} d_{q_\beta}\left(\tfrac{H^{(g-1)}_{k+1,l-1}(p,q_\beta;p,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_{L-\{\beta\}}})dy(q)}{y(q)-y(q_\beta)}\right).
\end{aligned} \tag{3-19}$$

Remark 3.1 Those expressions are not as complicated as they look. They are inspired from section 2. In the matrix model case of section 2, those expressions contain nearly all the terms we would obtain from inserting loop equation 2-19 into loop equation 2-20, or equivalently, from inserting loop equation 2-18 into loop equation 2-21. However, here we are not in a matrix model, and we don't assume any of the equations 2-19 to 2-21, in fact we are going to prove them.

Now we define:

$$\begin{aligned}
&\hat{W}^{(g)}_{k+1,l}(p,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})\\
:=\quad &\operatorname*{Res}_{s\to\mathbf{a},\mathbf{q_L}} dS_{s,o}(p)\left[\frac{1}{d_1}\sum_{j=1}^{d_1}\frac{\mathcal{J}^{(g)}_{k,l}(s,\tilde{s}^j;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})}{U^{(0)}_{0,0}(s,y(s))dy(s)}+\frac{1}{d_2}\sum_{i=1}^{d_2}\frac{\mathcal{J}^{(g)}_{k,l}(s^i,s;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})}{\tilde{U}^{(0)}_{0,0}(x(s),s)dx(s)}\right],
\end{aligned} \tag{3-20}$$

$$\begin{aligned}
&\hat{W}^{(g)}_{k,l+1}(\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L},q)\\
:=\quad &\operatorname*{Res}_{s\to\mathbf{b},\mathbf{p_K}} dS_{s,o}(q)\left[\frac{1}{d_1}\sum_{j=1}^{d_1}\frac{\mathcal{J}^{(g)}_{k,l}(s,\tilde{s}^j;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})}{U^{(0)}_{0,0}(s,y(s))dy(s)}+\frac{1}{d_2}\sum_{i=1}^{d_2}\frac{\mathcal{J}^{(g)}_{k,l}(s^i,s;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})}{\tilde{U}^{(0)}_{0,0}(x(s),s)dx(s)}\right],
\end{aligned} \tag{3-21}$$

$$\begin{aligned}
&G^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})\\
&:= J^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})+H^{(0)}_{0,0}(p,q)\\
&\left[(x(p)-x(q))\hat{W}^{(g)}_{k+1,l}(p,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})dy(q)+(y(q)-y(p))\check{W}^{(g)}_{k,l+1}(\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L},q)dx(p)\right],
\end{aligned} \tag{3-22}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{G}^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})\\
&:= \mathcal{J}^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})+H^{(0)}_{0,0}(p,q)\\
&\left[(x(p)-x(q))\hat{W}^{(g)}_{k+1,l}(p,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})dy(q)+(y(q)-y(p))\check{W}^{(g)}_{k,l+1}(\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L},q)dx(p)\right],
\end{aligned} \tag{3-23}$$

$$\frac{\widehat{H}^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})}{\mathcal{E}(x(p),y(q))} := \operatorname*{Res}_{r\to q,p^i}\frac{\mathcal{G}^{(g)}_{k,l}(p,r;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})}{(y(q)-y(p))(y(q)-y(r))(x(p)-x(r))H^{(0)}_{0,0}(p,r)dx(p)}, \tag{3-24}$$

$$\frac{\check{H}^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})}{\mathcal{E}(x(p),y(q))} := \operatorname*{Res}_{r\to p,\tilde{q}^j}\frac{\mathcal{G}^{(g)}_{k,l}(r,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})}{(x(p)-x(q))(x(p)-x(r))(y(q)-y(r))H^{(0)}_{0,0}(r,q)dy(q)}, \tag{3-25}$$

and

$$H^{(g)}_{k,l} = \frac{\hat{H}^{(g)}_{k,l}+\check{H}^{(g)}_{k,l}}{2} \tag{3-26}$$

(we prove below that $\hat{H}^{(g)}_{k,l}=\check{H}^{(g)}_{k,l}=H^{(g)}_{k,l}$) as well as

$$\frac{\widehat{E}^{(g)}_{k,l}(p,q,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})}{\mathcal{E}(x(p),y(q))} := \operatorname*{Res}_{r\to p^i}\frac{\mathcal{G}^{(g)}_{k,l}(p,r;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})}{(y(q)-y(p))(y(q)-y(r))(x(p)-x(r))H^{(0)}_{0,0}(p,r)dx(p)}, \tag{3-27}$$

$$\frac{\check{E}^{(g)}_{k,l}(p,q,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})}{\mathcal{E}(x(p),y(q))} := \operatorname*{Res}_{r\to\tilde{q}^j}\frac{\mathcal{G}^{(g)}_{k,l}(r,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})}{(x(p)-x(q))(x(p)-x(r))(y(q)-y(r))H^{(0)}_{0,0}(r,q)dy(q)}, \tag{3-28}$$

$$\begin{aligned}
-\tilde{U}^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) \quad := \quad &(y(q)-y(p))H^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})\\
&+\sum_{h}\sum_{I,J}\frac{\hat{W}^{(h)}_{i+1,j}(p,\mathbf{p_I}|\mathbf{q_J})H^{(g-h)}_{k-i,l-j}(p,q;\mathbf{p_{K/I}}|\mathbf{q_{L/J}})}{dx(p)}\\
&+\frac{H^{(g-1)}_{k+1,l}(p,q;p,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})}{dx(p)^2}\\
&-\sum_{m} d_{p_m}\frac{H^{(g)}_{k-1,l}(p_m,q;\mathbf{p_{K/\{m\}}}|\mathbf{q_L})}{x(p)-x(p_m)}
\end{aligned} \tag{3-29}$$

and

$$
\begin{aligned}
-U^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) \quad := \quad & (x(p)-x(q))H^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) \\
& + \sum_h \sum_{I,J} \frac{\check{W}^{(h)}_{i,j+1}(\mathbf{p_I}|\mathbf{q_J},q) H^{(g-h)}_{k-i,l-j}(p,q;\mathbf{p_{K/I}}|\mathbf{q_{L/J}})}{dy(q)} \\
& + \frac{H^{(g-1)}_{k,l+1}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L},q)}{dy(q)^2} \\
& - \sum_n d_{q_n} \frac{H^{(g)}_{k,l-1}(p,q_n;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_{L/\{n\}}})}{y(q)-y(q_n)}.
\end{aligned}
\tag{3-30}
$$

Those definitions form a triangular system of definitions, and each term is well defined in a unique recursive way.

Remark 3.2 Definitions eq.3-29 and eq.3-30 coincide with loop equation 2-19 and 2-18 in the matrix model case, i.e. when $\mathcal{E}$ is the classical spectral curve of the 2 matrix model.

3.3 Theorems

Theorem 3.2 *For $2g+k+l \geq 3$, one has the following properties:*

- $\hat{W}^{(g)}_{k,l}(\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})$ *(resp.* $\check{W}^{(g)}_{k,l}(\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})$*) has poles only when* $p_i \to \mathbf{a}, \mathbf{q_L}$ *and* $q_j \to \mathbf{b}, \mathbf{p_K}$*;*
- *in any of the $k+l$ variables, the $\mathcal{A}$-cycle integrals vanish:* $\oint_{\mathcal{A}} \hat{W}^{(g)}_{k,l} = \oint_{\mathcal{A}} \check{W}^{(g)}_{k,l} = 0$*;*
- $\widehat{H}^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) = \check{H}^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})$ *has poles only when* $p \to q, \mathbf{a}, \mathbf{q_L}$ *and* $q \to p, \mathbf{b}, \mathbf{p_K}$*, and*

  $$\widehat{E}^{(g)}_{k,l}(x(p),q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) = \check{E}^{(g)}_{k,l}(p,y(q);\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) := E^{(g)}(x(p),y(q);\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) \tag{3-31}$$

  is a polynomial of degree d_1-1 in $x(p)$ and d_2-1 in $y(q)$;
- $U^{(g)}_{k,l}(p,y(q);\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})$ *(resp.* $\widetilde{U}^{(g)}_{k,l}(x(p),q;\mathbf{p_K};\mathbf{q_L})$*) is a polynomial in $y(q)$ (resp. $x(p)$) of degree d_2-1 (resp. d_1-1).*

proof:

Let us proceed by induction on $2g+k+l$. Suppose that the properties are satisfied for any g',k',l' such that $2g'+k'+l' < 2g+k+l$. Let us prove that they are true for g,k,l. In order to make the proof more readable, we split it into pieces. Nevertheless, **for every step, the global recursion hypothesis is needed**.

We need the following lemma:

Lemma 3.1 *The quantity*

$$f^{(g)}_{k,l}(s;\mathbf{p_K};\mathbf{q_L}) := \frac{\mathcal{J}^{(g)}_{k,l}(s,\tilde{s}^j;\mathbf{p_K};\mathbf{q_L})}{U^{(0)}_{0,0}(s,y(s))dy(s)} \tag{3-32}$$

is independent of $j \neq 0$, it is a meromorphic one-form in the variable s, with poles at $s = \mathbf{a}, \mathbf{q_L}$, and it vanishes to order at least $\deg(ydx)-1$ near the poles of ydx.

Similarly, the quantity

$$\tilde{f}^{(g)}_{k,l}(s;\mathbf{p_K};\mathbf{q_L}) := \frac{\mathcal{J}^{(g)}_{k,l}(s^i,s;\mathbf{p_K};\mathbf{q_L})}{\widetilde{U}^{(0)}_{0,0}(x(s),s)dx(s)}. \tag{3-33}$$

is independent of $i \neq 0$, it is a meromorphic one-form in the variable s, with poles at $s = \mathbf{b}, \mathbf{q_L}$, and it vanishes to order at least $\deg(xdy)-1$ near the poles of xdy.

Moreover one has:

$$\oint_{\mathcal{A}} \left(f^{(g)}_{k,l}(s;\mathbf{p_K};\mathbf{q_L}) + \tilde{f}^{(g)}_{k,l}(s;\mathbf{p_K};\mathbf{q_L}) \right) = 0, \tag{3-34}$$

$$\oint_{\mathcal{B}} \left(f^{(g)}_{k,l}(s;\mathbf{p_K};\mathbf{q_L}) + \tilde{f}^{(g)}_{k,l}(s;\mathbf{p_K};\mathbf{q_L}) \right) = 0 \tag{3-35}$$

and:

$$
\begin{aligned}
& f^{(g)}_{k,l}(s;\mathbf{p_K};\mathbf{q_L}) + \tilde{f}^{(g)}_{k,l}(s;\mathbf{p_K};\mathbf{q_L}) \\
= & \operatorname*{Res}_{q \to \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{p_K},\mathbf{q_L}} dS_{q,o}(s) \Big(f^{(g)}_{k,l}(q;\mathbf{p_K};\mathbf{q_L}) + \tilde{f}^{(g)}_{k,l}(q;\mathbf{p_K};\mathbf{q_L}) \Big).
\end{aligned}
\tag{3-36}
$$

Proof of the lemma:

First of all, One can remark that the definition of $\mathcal{J}^{(g)}_{k,l}$ involves only quantities whose properties are known by the recursion hypothesis. One can note that it can be

written under the following forms:

$$
\begin{aligned}
&J^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K};\mathbf{q_L})\\
&:= -\sum_{h=1}^{g-1}\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{l}\check{W}^{(h)}_{m,n+1}(\mathbf{p_M};q,\mathbf{q_N})\widetilde{U}^{g-h}_{k-m,l-n}(x(p),q;\mathbf{p_{K/M}},\mathbf{q_{L/N}})dx(p)\\
&-\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0,(m,n)\neq(0,0)}^{l}\check{W}^{(0)}_{m,n+1}(\mathbf{p_M};q,\mathbf{q_N})\widetilde{U}^{g}_{k-m,l-n}(x(p),q;\mathbf{p_{K/M}},\mathbf{q_{L/N}})dx(p)\\
&-\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0,(m,n)\neq(k,l)}^{l}\check{W}^{(g)}_{m,n+1}(\mathbf{p_M};q,\mathbf{q_N})\widetilde{U}^{0}_{k-m,l-n}(x(p),q;\mathbf{p_{K/M}},\mathbf{q_{L/N}})dx(p)\\
&-\widetilde{U}^{(g-1)}_{k,l+1}(x(p),q;\mathbf{p_K};q,\mathbf{q_L})dx(p)\\
&+\sum_{h=1}^{g-1}\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{l}d_{p_\alpha}\left(\frac{\check{W}^{(h)}_{m,n+1}(\mathbf{p_M};q,\mathbf{q_N})H^{g-h}_{k-m-1,l-n}(p_\alpha,q;\mathbf{p_{K/M/\{\alpha\}}},\mathbf{q_{L/N}})dx(p)}{x(p)-x(p_\alpha)}\right)\\
&+\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0,(m,n)\neq(0,0)}^{l}d_{p_\alpha}\left(\frac{\check{W}^{(0)}_{m,n+1}(\mathbf{p_M};q,\mathbf{q_N})H^{g}_{k-m-1,l-n}(p_\alpha,q;\mathbf{p_{K/M/\{\alpha\}}},\mathbf{q_{L/N}})dx(p)}{x(p)-x(p_\alpha)}\right)\\
&+\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0,(m,n)\neq(k,l)}^{l}d_{p_\alpha}\left(\frac{\check{W}^{(g)}_{m,n+1}(\mathbf{p_M};q,\mathbf{q_N})H^{0}_{k-m-1,l-n}(p_\alpha,q;\mathbf{p_{K/M/\{\alpha\}}},\mathbf{q_{L/N}})dx(p)}{x(p)-x(p_\alpha)}\right)\\
&+d_{p_\alpha}\left(\frac{H^{(g-1)}_{k-1,l+1}(p_\alpha,q;\mathbf{p_{K/\{\alpha\}}};q,\mathbf{q_L})dx(p)}{x(p)-x(p_\alpha)}\right)\\
&+(x(p)-x(q))\left[\sum_{h=1}^{g-1}\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{l}\hat{W}^{(h)}_{m+1,n}(p,\mathbf{p_M};\mathbf{q_N})dy(q)H^{(g-h)}_{k-m,l-n}(p,q;\mathbf{p_{K/M}};\mathbf{q_{L/N}})\right.\\
&+\textstyle\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0,(m,n)\neq(k,l)}^{l}\hat{W}^{(0)}_{m+1,n}(p,\mathbf{p_M};\mathbf{q_N})dy(q)H^{(g)}_{k-m,l-n}(p,q;\mathbf{p_{K/M}};\mathbf{q_{L/N}})\\
&+\textstyle\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0,(m,n)\neq(0,0)}^{l}\hat{W}^{(g)}_{m+1,n}(p,\mathbf{p_M};\mathbf{q_N})dy(q)H^{(0)}_{k-m,l-n}(p,q;\mathbf{p_{K/M}};\mathbf{q_{L/N}})\\
&\left.+H^{(g-1)}_{k+1,l}(p,q;p,\mathbf{p_K};\mathbf{q_L})dy(q)\right]
\end{aligned}
\tag{3-37}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{J}^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K};\mathbf{q_L})\\
&=-\sum_{h=1}^{g-1}\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{l}\check{W}^{(h)}_{m,n+1}(\mathbf{p_M};q,\mathbf{q_N})\widetilde{U}^{g-h}_{k-m,l-n}(x(p),q;\mathbf{p_{K/m}},\mathbf{q_{L/N}})dx(p)\\
&-\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0,(m,n)\neq(0,0)}^{l}\check{W}^{(0)}_{m,n+1}(\mathbf{p_M};q,\mathbf{q_N})\widetilde{U}^{g}_{k-m,l-n}(x(p),q;\mathbf{p_{K/m}},\mathbf{q_{L/N}})dx(p)\\
&-\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0,(m,n)\neq(k,l)}^{l}\check{W}^{(g)}_{m,n+1}(\mathbf{p_M};q,\mathbf{q_N})\widetilde{U}^{0}_{k-m,l-n}(x(p),q;\mathbf{p_{K/m}},\mathbf{q_{L/N}})dx(p)\\
&-\widetilde{U}^{(g-1)}_{k,l+1}(x(p),q;\mathbf{p_K};q,\mathbf{q_L})dx(p)\\
&+d_{q_\beta}\left(\frac{\widetilde{U}^{(g)}_{k,l-1}(p,q_\beta;\mathbf{p_K};\mathbf{q_{L/\{\beta\}}})}{y(q)-y(q_\beta)}dx(p)dy(q)\right)\\
&-d_{p_\alpha}\left(\frac{x(p_\alpha)-x(q)}{x(p)-x(p_\alpha)}H^{(g)}_{k-1,l}(p_\alpha,q;\mathbf{p_{K:\{\alpha\}}},\mathbf{q_L})dx(p)dy(q)\right)\\
&+(x(p)-x(q))\left[\sum_{h=1}^{g-1}\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{l}\hat{W}^{(h)}_{m+1,n}(p,\mathbf{p_M};\mathbf{q_N})dy(q)H^{(g-h)}_{k-m,l-n}(p,q;\mathbf{p_{K/M}};\mathbf{q_{L/N}})\right.\\
&+\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0,(m,n)\neq(k,l)}^{l}\hat{W}^{(0)}_{m+1,n}(p,\mathbf{p_M};\mathbf{q_N})dy(q)H^{(g)}_{k-m,l-n}(p,q;\mathbf{p_{K/M}};\mathbf{q_{L/N}})\\
&+\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0,(m,n)\neq(0,0)}^{l}\hat{W}^{(g)}_{m+1,n}(p,\mathbf{p_M};\mathbf{q_N})dy(q)H^{(0)}_{k-m,l-n}(p,q;\mathbf{p_{K/M}};\mathbf{q_{L/N}})\\
&\left.+H^{(g-1)}_{k+1,l}(p,q;p,\mathbf{p_K};\mathbf{q_L})\right]dy(q).
\end{aligned}
\tag{3-38}
$$

Thanks to the properties implied by the recursion hypothesis (U and $\tilde{U}$ are polynomials), one has:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{J}^{(g)}_{k,l}(q^i,q;\mathbf{p_K};\mathbf{q_L})\\
=\quad&-\sum_{h=1}^{g-1}\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{l}\check{W}^{(h)}_{m,n+1}(\mathbf{p_M};q,\mathbf{q_N})\widetilde{U}^{g-h}_{k-m,l-n}(x(q),q;\mathbf{p_{K/M}},\mathbf{q_{L/N}})dx(q)\\
&-\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0,(m,n)\neq(0,0)}^{l}\check{W}^{(0)}_{m,n+1}(\mathbf{p_M};q,\mathbf{q_N})\widetilde{U}^{g}_{k-m,l-n}(x(q),q;\mathbf{p_{K/M}},\mathbf{q_{L/N}})dx(q)\\
&-\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0,(m,n)\neq(k,l)}^{l}\check{W}^{(g)}_{m,n+1}(\mathbf{p_M};q,\mathbf{q_N})\widetilde{U}^{0}_{k-m,l-n}(x(q),q;\mathbf{p_{K/M}},\mathbf{q_{L/N}})dx(q)\\
&-\widetilde{U}^{(g-1)}_{k,l+1}(x(q),q;\mathbf{p_K};q,\mathbf{q_L})dx(q)\\
&+d_{q_\beta}\left(\frac{\widetilde{U}^{(g)}_{k,l-1}(x(q),q_\beta;\mathbf{p_K};\mathbf{q_{L/\{\beta\}}})}{y(q)-y(q_\beta)}\right)dx(q)dy(q)\\
&+d_{p_\alpha}\left(H^{(g)}_{k-1,l}(p_\alpha,q;\mathbf{p_{K/\{\alpha\}}},\mathbf{q_L})\right)dx(q)dy(q)
\end{aligned}
\tag{3-39}
$$

for any non vanishing i. Thus this quantity does not depend on i, and $\tilde{f}$ is clearly a meromorphic 1-form, whose poles can be easily seen on this expression using the recursion hypothesis.

The same considerations give the equivalent through the exchange of $x \leftrightarrow y$:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{J}^{(g)}_{k,l}(p,\tilde{p}^j;\mathbf{p_K};\mathbf{q_L}) \\
= \quad & -\sum_{h=1}^{g-1}\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{l}\hat{W}^{(h)}_{m+1,n}(p,\mathbf{p_M};\mathbf{q_N})U^{g-h}_{k-m,l-n}(p,y(p);\mathbf{p_{K/M}},\mathbf{q_{L/N}})dy(p) \\
& -\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0,(m,n)\neq(0,0)}^{l}\hat{W}^{(0)}_{m+1,n}(p,\mathbf{p_M};\mathbf{q_N})U^{g}_{k-m,l-n}(p,y(p);\mathbf{p_{K/M}},\mathbf{q_{L/N}})dy(p) \\
& -\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0,(m,n)\neq(k,l)}^{l}\hat{W}^{(g)}_{m+1,n}(p,\mathbf{p_M};\mathbf{q_N})U^{0}_{k-m,l-n}(p,y(p);\mathbf{p_{K/M}},\mathbf{q_{L/N}})dy(p) \\
& -U^{(g-1)}_{k+1,l}(p,y(p);p,\mathbf{p_K};\mathbf{q_L})dy(p) \\
& +d_{p_\alpha}\left(\frac{U^{(g)}_{k-1,l}(p_\alpha,y(p);\mathbf{p_{K/\{\alpha\}}};\mathbf{q_L})}{x(p)-x(p_\alpha)}\right)dx(p)dy(p) \\
& +d_{q_\beta}\left(H^{(g)}_{k,l-1}(p,q_\beta;\mathbf{p_{K/\{\alpha\}}},\mathbf{q_{L/\{\beta\}}})\right)dx(p)dy(p)
\end{aligned} \tag{3-40}$$

This quantity does not depend on j, and f is clearly a meromorphic 1-form, whose poles can be easily seen on this expression using the recursion hypothesis.

The fact that the $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ cycle integrals vanish comes from the symmetry $x \leftrightarrow y$. Indeed under the symmetry $x \leftrightarrow y$, f is changed to $\tilde{f}$ and $\tilde{f}$ is changed to f. At the same time the $\mathcal{A}$-cycles are changed to $-\mathcal{A}$ because $2i\pi\epsilon = \oint_{\mathcal{A}} y dx = -\oint_{\mathcal{A}} x dy$, and the $\mathcal{B}$-cycles are changed to $-\mathcal{B}$ in order to form a canonical basis. Therefore, the $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ cycle integrals of $f+\tilde{f}$ vanish.

Equation 3-36 simply comes from Cauchy residue formula and Riemann's bilinear identity.

The fact that f vanishes to order at least $\deg(ydx)-1$ near a pole α of ydx follows from the definition of $\mathcal{J}$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\mathcal{J}^{(g)}_{k,l}(p,\tilde{p}^j;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})}{dx(p)dy(p)} \sim_{p\to\alpha} \\
\sim_{p\to\alpha} \quad & \frac{x(p)-x(\tilde{p}^j)}{dx(p)}\Big(\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{l}\sum_{h=0}^{g}\hat{W}^{(h)}_{m+1,n}(p,\mathbf{p_M}|\mathbf{q_N})H^{(g-h)}_{k-m,l-n}(p,\tilde{p}^j;\mathbf{p_{K/M}}|\mathbf{q_{L/N}}) \\
& +H^{(g-1)}_{k+1,l}(p,\tilde{p}^j;p,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})\Big) \\
& -\sum_{\alpha=1}^{k}d_{p_\alpha}\left(\frac{(x(p_\alpha)-x(\tilde{p}^j))}{x(p)-x(p_\alpha)}H^{(g)}_{k-1,l}(p_\alpha,\tilde{p}^j;\mathbf{p_{K-\{\alpha\}}}|\mathbf{q_L})\right)
\end{aligned}$$

$$-\sum_{\beta=1}^{l}d_{q_\beta}\left(\frac{(y(q_\beta)-y(p))}{y(p)-y(q_\beta)}H_{k,l-1}(p,q_\beta;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_{L-\{\beta\}}})\right) \tag{3-41}$$

which is at most finite if p approaches a pole α of ydx. Then it implies that $f^{(g)}_{k,l}(p;\mathbf{p_K};\mathbf{q_L}) = \frac{\mathcal{J}^{(g)}_{k,l}(p,\tilde{p}^j;\mathbf{p_K};\mathbf{q_L})}{U^{(0)}_{0,0}(s,y(s))dy(p)}$ vanishes at order at least $\deg(ydx)-1$.

The same holds for $\tilde{f}$.

□

- **$W^{(g)}_{k,l}$ has poles only when $p_i \to \mathbf{a}, \mathbf{q_L}$ and $q_j \to \mathbf{b}, \mathbf{p_K}$, and $\oint_{\mathcal{A}} W^{(g)}_{k,l} = 0$.**

From the definition eq.3-20, it is clear that $\hat{W}^{(g)}_{k+1,l}(p,p_1,\dots,p_k|q_1,\dots,q_l)$ is finite when p is not close to a branch point or to one of the q_j's, and becomes infinite only if the integration contour is pinched. Thus in the variable p, the only poles of $\hat{W}^{(g)}_{k+1,l}(p,p_1,\dots,p_k|q_1,\dots,q_l)$ are at $p=\mathbf{a},\mathbf{q_L}$.

The poles of $\hat{W}^{(g)}_{k+1,l}(p,p_1,\dots,p_k|q_1,\dots,q_l)$ in any other variable, follow from the recursion hypothesis, and thus they are at $p_i=\mathbf{a},\mathbf{q_L}$, and at $q_j=\mathbf{b},p,\mathbf{p_K}$.

The fact that $\oint_{\mathcal{A}}\hat{W}^{(g)}_{k+1,l}=0$ when one integrates over the first variable comes from the fact that this is a property of dS, and in the other variables it comes from the recursion hypothesis.

By a symmetric argument, the same holds for $\check{W}^{(g)}_{k,l+1}(p_1,\dots,p_k|q_1,\dots,q_l,p)$, and we see that $\hat{W}^{(g)}_{k,l}$ and $\check{W}^{(g)}_{k,l}$ have the same poles.

We have (from the Cauchy residue formula and Riemann bilinear identity):

$$\hat{W}^{(g)}_{k+1,l}(p,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})+\check{W}^{(g)}_{k,l+1}(\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L},p) = f^{(g)}_{k,l}(p;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})+\tilde{f}^{(g)}_{k,l}(p;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}). \tag{3-42}$$

- **$\widehat{H}^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) = \check{H}^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})$.**

One has:

$$\begin{aligned}
& \tfrac{\widehat{H}^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K};\mathbf{q_L})}{\mathcal{E}(x(p),y(q))} = \\
& = \mathrm{Res}_{r\to q,p^i}\frac{\mathcal{G}^{(g)}_{k,l}(p,r;\mathbf{p_K};\mathbf{q_L})}{(y(q)-y(p))(y(q)-y(r))(x(p)-x(r))H^{(0)}_{0,0}(p,r)dx(p)} \\
& = \mathrm{Res}_{r\to q,p^i}\mathrm{Res}_{s\to p}\frac{\mathcal{G}^{(g)}_{k,l}(s,r;\mathbf{p_K};\mathbf{q_L})}{(y(q)-y(p))(y(q)-y(r))(x(s)-x(r))(x(s)-x(p))H^{(0)}_{0,0}(s,r)} \\
& = \mathrm{Res}_{r\to q,p^i}\mathrm{Res}_{s\to p,\tilde{q}^j}\frac{\mathcal{G}^{(g)}_{k,l}(s,r;\mathbf{p_K};\mathbf{q_L})}{(y(q)-y(p))(y(q)-y(r))(x(s)-x(r))(x(s)-x(p))H^{(0)}_{0,0}(s,r)}
\end{aligned} \tag{3-43}$$

where the last equality holds because the integrant has no pole when $s \to \tilde{q}^j$. Then

$$\begin{aligned}
&\frac{\widehat{H}^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K};\mathbf{q_L})}{\mathcal{E}(x(p),y(q))} = \\
&= \operatorname{Res}_{r\to q,p^i} \operatorname{Res}_{s\to p,\tilde{q}^j} \frac{\mathcal{G}^{(g)}_{k,l}(s,r;\mathbf{p_K};\mathbf{q_L})}{(y(q)-y(r))(x(s)-x(p))H^{(0)}_{0,0}(s,r)} \Big[\frac{1}{(y(r)-y(s))(x(p)-x(q))} \\
&\quad + \frac{1}{(x(s)-x(r))(y(q)-y(p))} - \frac{1}{(y(r)-y(s))(x(p)-x(q))}\Big] \\
&= \operatorname{Res}_{r\to q,p^i} \operatorname{Res}_{s\to p,\tilde{q}^j} \frac{\mathcal{G}^{(g)}_{k,l}(s,r;\mathbf{p_K};\mathbf{q_L})}{(y(q)-y(r))(x(s)-x(p))(y(r)-y(s))(x(p)-x(q))H^{(0)}_{0,0}(s,r)} \\
&+ \sum_{i=1}^{d_2} \frac{\mathcal{G}^{(g)}_{k,l}(p,p^i;\mathbf{p_K};\mathbf{q_L})}{(y(q)-y(p))(y(q)-y(p^i))H^{(0)}_{0,0}(p,p^i)dx(p)^2}.
\end{aligned} \tag{3-44}$$

Note that the first term corresponds exactly to $\frac{\check{H}^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K};\mathbf{q_L})}{\mathcal{E}(x(p),y(q))}$ with the integration contours for r and s exchanged. However, the poles of the integrand are known and thus:

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{r\to q,p^i}\operatorname*{Res}_{s\to p,\tilde{q}^j} &= \operatorname*{Res}_{r\to q}\operatorname*{Res}_{s\to p} + \operatorname*{Res}_{r\to p^i}\operatorname*{Res}_{s\to \tilde{q}^j} + \operatorname*{Res}_{r\to q}\operatorname*{Res}_{s\to \tilde{q}^j} + \operatorname*{Res}_{r\to p^i}\operatorname*{Res}_{s\to p} \\
&= \operatorname*{Res}_{s\to p}\operatorname*{Res}_{r\to q} + \operatorname*{Res}_{s\to \tilde{q}^j}\operatorname*{Res}_{r\to p^i} + \sum_{j\neq 0}\operatorname*{Res}_{\tilde{r}^j\to \tilde{q}^j}\operatorname*{Res}_{s\to \tilde{q}^j} + \sum_{i\neq 0}\operatorname*{Res}_{r^i\to p}\operatorname*{Res}_{s\to p} \\
&= \operatorname*{Res}_{s\to p}\operatorname*{Res}_{r\to q} + \operatorname*{Res}_{s\to \tilde{q}^j}\operatorname*{Res}_{r\to p^i} + \sum_{j\neq 0}\operatorname*{Res}_{s\to \tilde{q}^j}\operatorname*{Res}_{\tilde{r}^j\to \tilde{q}^j} + \sum_{j\neq 0}\operatorname*{Res}_{s\to \tilde{q}^j}\operatorname*{Res}_{\tilde{r}^j\to s} \\
&\quad + \sum_{i\neq 0}\operatorname*{Res}_{s\to p}\operatorname*{Res}_{r^i\to p} + \sum_{i\neq 0}\operatorname*{Res}_{s\to p}\operatorname*{Res}_{r^i\to s} \\
&= \operatorname*{Res}_{s\to p,\tilde{q}^j}\operatorname*{Res}_{r\to q,p^i} + \sum_{j\neq 0}\operatorname*{Res}_{s\to \tilde{q}^j}\operatorname*{Res}_{\tilde{r}^j\to s} + \sum_{i\neq 0}\operatorname*{Res}_{s\to p}\operatorname*{Res}_{r^i\to s}.
\end{aligned} \tag{3-45}$$

The last term does not contribute because the integrant is regular when $r^i \to s$, thus

$$\begin{aligned}
&\frac{\widehat{H}^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K};\mathbf{q_L})}{\mathcal{E}(x(p),y(q))} \\
&= \frac{\check{H}^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K};\mathbf{q_L})}{\mathcal{E}(x(p),y(q))} + \sum_{i=1}^{d_2} \frac{\mathcal{G}^{(g)}_{k,l}(p,p^i;\mathbf{p_K};\mathbf{q_L})}{(y(q)-y(p))(y(q)-y(p^i))H^{(0)}_{0,0}(p,p^i)dx(p)^2} \\
&+ \sum_{j\neq 0} \operatorname{Res}_{s\to\tilde{q}^j} \operatorname{Res}_{\tilde{r}^j\to s} \frac{\mathcal{G}^{(g)}_{k,l}(s,r;\mathbf{p_K};\mathbf{q_L})}{(y(q)-y(r))(x(s)-x(p))(y(r)-y(s))(x(p)-x(q))H^{(0)}_{0,0}(s,r)} \\
&= \frac{\check{H}^{(g)}(p,y(q))}{\mathcal{E}(x(p),y(q))} + \sum_{i=1}^{d_2} \frac{\mathcal{G}^{(g)}_{k,l}(p,p^i;\mathbf{p_K};\mathbf{q_L})}{(y(q)-y(p))(y(q)-y(p^i))H^{(0)}_{0,0}(p,p^i)dx(p)^2} \\
&+ \sum_{j=1}^{d_1} \frac{\mathcal{G}^{(g)}_{k,l}(\tilde{q}^j,q;\mathbf{p_K};\mathbf{q_L})}{(x(p)-x(q))(x(\tilde{q}^j)-x(p))H^{(0)}_{0,0}(\tilde{q}^j,q)dy(q)^2} \\
&= \frac{\check{H}^{(g)}(p,y(q))}{\mathcal{E}(x(p),y(q))} \\
&+ \sum_{i=1}^{d_2} \frac{(y(p)-y(p^i))}{(y(q)-y(p))(y(q)-y(p^i))} \frac{\tilde{f}^{(g)}_{k,l}(p^i;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) - \check{W}^{(g)}_{k,l+1}(\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L},p^i)}{dx(p)} \\
&+ \sum_{j=1}^{d_1} \frac{(x(q)-x(\tilde{q}^j))}{(x(p)-x(q))(x(p)-x(\tilde{q}^j))} \frac{f^{(g)}_{k,l}(\tilde{q}^j|\mathbf{p_K};\mathbf{q_L}) - \check{W}^{(g)}_{k+1,l}(\tilde{q}^j,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})}{dy(q)}
\end{aligned} \tag{3-46}$$

Notice from Eq. (3-42), that

$$g^{(g)}_{k,l}(s;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) := \tilde{f}^{(g)}_{k,l}(s;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) - \check{W}^{(g)}_{k,l+1}(\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L},s)$$

$$= -f^{(g)}_{k,l}(s;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) + \hat{W}^{(g)}_{k+1,l}(s,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) \tag{3-47}$$

is a holomorphic 1-form in s, i.e. it has no poles. We have:

$$\begin{aligned}
&\frac{\widehat{H}^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})}{\mathcal{E}(x(p),y(q))} - \frac{\check{H}^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})}{\mathcal{E}(x(p),y(q))} \\
&= \sum_{i=1}^{d_2} \frac{(y(p)-y(p^i))}{(y(q)-y(p))(y(q)-y(p^i))} \frac{g^{(g)}_{k,l}(p^i;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})}{dx(p)} \\
&\quad - \sum_{j=1}^{d_1} \frac{(x(q)-x(\tilde{q}^j))}{(x(p)-x(q))(x(p)-x(\tilde{q}^j))} \frac{g^{(g)}_{k,l}(\tilde{q}^j;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})}{dy(q)} \\
&= \sum_{i=1}^{d_2} \operatorname*{Res}_{s\to p^i} \frac{(y(p)-y(s))}{(y(q)-y(p))(y(q)-y(s))} \frac{g^{(g)}_{k,l}(s;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})}{(x(s)-x(p))} \\
&\quad - \sum_{j=1}^{d_1} \operatorname*{Res}_{s\to\tilde{q}^j} \frac{(x(q)-x(s))}{(x(p)-x(q))(x(p)-x(s))} \frac{g^{(g)}_{k,l}(s;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})}{(y(s)-y(q))} \\
&= \sum_{i=0}^{d_2} \operatorname*{Res}_{s\to p^i} \Big(\frac{(x(q)-x(s))}{(x(p)-x(q))} + \frac{(y(p)-y(s))}{(y(q)-y(p))}\Big) \frac{g^{(g)}_{k,l}(s;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})}{(x(s)-x(p))(y(q)-y(s))} \\
&= \sum_{i=0}^{d_2} \operatorname*{Res}_{s\to p^i} \Big(\frac{1}{(x(p)-x(q))(y(q)-y(s))} - \frac{1}{(x(p)-x(s))(y(q)-y(s))} \\
&\quad + \frac{1}{(x(s)-x(p))(y(q)-y(p))} - \frac{1}{(x(s)-x(p))(y(q)-y(s))}\Big) g^{(g)}_{k,l}(s;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) \\
&= \sum_{i=0}^{d_2} \operatorname*{Res}_{s\to p^i} \frac{1}{(x(s)-x(p))(y(q)-y(p))} g^{(g)}_{k,l}(s;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3-48}$$

Therefore $\widehat{H}^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) = \check{H}^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) = H^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})$.

- $\widehat{E}^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) = \check{E}^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})$.

We have from Eq. (3-27)

$$\widehat{E}^{(g)}_{k,l}(p,q,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) = (x(p)-x(q))(y(p)-y(q))\widehat{H}^{(g)}_{k,l}(p,q,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) - \frac{\mathcal{G}^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})}{dx(p)dy(q)}, \tag{3-49}$$

and from Eq. (3-28):

$$\check{E}^{(g)}_{k,l}(p,q,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) = (x(p)-x(q))(y(p)-y(q))\check{H}^{(g)}_{k,l}(p,q,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) - \frac{\mathcal{G}^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})}{dx(p)dy(q)}, \tag{3-50}$$

so that $\widehat{E}^{(g)}_{k,l} = \check{E}^{(g)}_{k,l}$.

Moreover, one can see from Eq. (3-27) that $\widehat{E}^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})$ is a polynomial of $y(q)$ while $\check{E}^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})$ is a polynomial of $x(p)$, therefore

$$E^{(g)}_{k,l}(x(p),y(q);\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) = \widehat{E}^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) = \check{E}^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) \tag{3-51}$$

is a polynomial in two variables.

•$U^{(g)}_{k,l}$ and $\tilde{U}^{(g)}_{k,l}$ are polynomials.

Eq. (3-49), Eq. (3-50), Eq. (3-37) and Eq. (3-38) imply that

$$\begin{aligned}
& E^{(g)}_{k,l}(x(p),y(q);\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) \\
= \;& (x(p)-x(q))\tilde{U}^{(g)}_{k,l}(x(p),q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) \\
& + \sum_h \sum_{I,J} \frac{\check{W}^{(h)}_{i,j+1}(\mathbf{p_I};\mathbf{q_J},q)\tilde{U}^{(g-h)}_{k-i,l-j}(x(p),q;\mathbf{p_{K/I}}|\mathbf{q_{L/J}})}{dy(q)} \\
& + \frac{\tilde{U}^{(g-1)}_{k,l+1}(x(p),q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L},q)}{dy(q)} \\
& - \sum_m d_{q_m} \frac{\tilde{U}^{(g)}_{k,l-1}(x(p),q_m;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_{L/\{m\}}})}{y(q)-y(q_m)} \\
& - \sum_m d_{p_m} H^{(g)}_{k-1,l}(p_m,q;\mathbf{p_{K/\{m\}}}|\mathbf{q_L})
\end{aligned} \tag{3-52}$$

and

$$\begin{aligned}
& E^{(g)}_{k,l}(x(p),y(q);\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) \\
= \;& (y(q)-y(p))U^{(g)}_{k,l}(p,y(q);\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) \\
& + \sum_h \sum_{I,J} \frac{\hat{W}^{(h)}_{i+1,j}(p,\mathbf{p_I};\mathbf{q_J})U^{(g-h)}_{k-i,l-j}(p,y(q);\mathbf{p_{K/I}}|\mathbf{q_{L/J}})}{dx(p)} \\
& + \frac{U^{(g-1)}_{k+1,l}(p,y(q);p,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})}{dx(p)} \\
& - \sum_m d_{p_m} \frac{U^{(g)}_{k-1,l}(p_m,y(q);\mathbf{p_{K/\{m\}}}|\mathbf{q_L})}{x(p)-x(p_m)} \\
& - \sum_m d_{q_m} H^{(g)}_{k,l-1}(p,q_m;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_{L/\{m\}}})
\end{aligned} \tag{3-53}$$

from which (together with the recursion hypothesis), we deduce that $U^{(g)}_{k,l}$ and $\tilde{U}^{(g)}_{k,l}$ are polynomials.

This proves the theorem 3.2. □

Theorem 3.3 *Symmetry of the $W^{(g)}_{k,l}$.*

For any k,l,g we have:

$$\hat{W}^{(g-1)}_{k+1,l+1}(p,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L},q) = \check{W}^{(g-1)}_{k+1,l+1}(p,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L},q) \tag{3-54}$$

proof:

Let us prove it by recursion on $2g+k+l$. Assume we have already proved it for any g',k',l' such that $2g'+k'+l' < 2g+k+l$.

Insert Eq. (3-30) into Eq. (3-53) in order to eliminate the U's, and then insert the result into Eq. (3-49). Most of the terms cancel (in fact the definitions of $J^{(g)}_{k,l}$, $\mathcal{J}^{(g)}_{k,l}$, $G^{(g)}_{k,l}$ were designed for that purpose), and using the recursion hypothesis, the only term left is:

$$\check{W}^{(g-1)}_{k+1,l+1}(p,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L},q) = \frac{1}{2}\left(\check{W}^{(g-1)}_{k+1,l+1}(p,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L},q) + \hat{W}^{(g-1)}_{k+1,l+1}(p,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L},q)\right) \tag{3-55}$$

which proves the theorem. □

Corollary 3.1 $\hat{W}^{(g)}_{k,l}(\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) = \check{W}^{(g)}_{k,l}(\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})$ *is a symmetric function of its variables $p_1,\dots,p_k$, and a symmetric function of its variables $q_1,\dots,q_l$.*

proof:

It is clear from the definitions that $\check{W}^{(g)}_{k,l}(\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})$ is a symmetric function of its variables $p_1,\dots,p_k$, and that $\hat{W}^{(g)}_{k,l}(\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})$ is a symmetric function of its variables $q_1,\dots,q_l$. □

Now, we prove the following theorem:

Theorem 3.4

$$\hat{W}^{(g)}_{k,0}(\mathbf{p_K}|) = \hat{W}^{(g)}_{k}(\mathbf{p_K}) \tag{3-56}$$

and

$$\check{W}^{(g)}_{0,l}(|\mathbf{q_L}) = \check{W}^{(g)}_{l}(\mathbf{q_L}). \tag{3-57}$$

proof:

Write Eq. (3-53) for l=0:

$$\begin{aligned}
& E^{(g)}_{k,0}(x(p),y(q);\mathbf{p_K}) \\
= \;& (y(q)-y(p))U^{(g)}_{k,0}(p,y(q);\mathbf{p_K}) \\
& + \sum_h \sum_I \frac{\hat{W}^{(h)}_{i+1,0}(p,\mathbf{p_I})U^{(g-h)}_{k-i,0}(p,y(q);\mathbf{p_{K/I}})}{dx(p)} \\
& + \frac{U^{(g-1)}_{k+1,0}(p,y(q);p,\mathbf{p_K})}{dx(p)} - \sum_m d_{p_m} \frac{U^{(g)}_{k-1,0}(p_m,y(q);\mathbf{p_{K/\{m\}}})}{x(p)-x(p_m)}.
\end{aligned}$$

$(3-58)$

Using Lemma B.2, we obtain:

$$\hat{W}^{(g)}_{k,0}(\mathbf{p_K}|) = \hat{W}^{(g)}_{k}(\mathbf{p_K}) \tag{3-59}$$

The other equality is obtained by writing Eq. (3-52) for $k=0$ and exchanging the roles of x and y in the Lemma B.2.

□

Theorem 3.5

$$\hat{W}^{(g)}_{k+1,l}(p,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) + \check{W}^{(g)}_{k,l+1}(\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L},p) = d_p \frac{A^{(g)}_{k,l}(p;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})}{dx(p)dy(p)} \tag{3-60}$$

where $A^{(g)}_{k,l}(p;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})$ has at most simple poles when $p \to \alpha$.

proof:

From Eq. (3-42), it is easy to see that all contour integrals of $\hat{W}^{(g)}_{k+1,l}(p,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) + \check{W}^{(g)}_{k,l+1}(\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L},p)$ are vanishing, and thus it is the differential of some function.

The fact that $A^{(g)}_{k,l}(p;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})$ has at most simple poles when $p \to \alpha$, follows from lemma 3.1.

□

Theorem 3.6

$$\operatorname*{Res}_{p\to\alpha} x(p)y(p)\hat{W}^{(g)}_{k+1,l}(p,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) = 0, \tag{3-61}$$

$$\operatorname*{Res}_{p\to\alpha} x(p)y(p)\hat{W}^{(g)}_{k,l+1}(\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L},p) = 0. \tag{3-62}$$

proof:

By definition:

$$\hat{W}^{(g)}_{k+1,l}(p,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) = \operatorname*{Res}_{s\to\mathbf{a},\mathbf{q_L}} dS_{s,o}(p)\, f^{(g)}_{k,l}(s;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) \tag{3-63}$$

and we have:

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{Res}_{p\to\alpha} x(p)y(p)\hat{W}^{(g)}_{k+1,l}(p,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) \\
=\ & \operatorname*{Res}_{p\to\alpha}\operatorname*{Res}_{s\to\mathbf{a},\mathbf{q_L}} x(p)y(p)dS_{s,o}(p)\, f^{(g)}_{k,l}(s;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) \\
=\ & \operatorname*{Res}_{s\to\mathbf{a},\mathbf{q_L}}\operatorname*{Res}_{p\to\alpha} x(p)y(p)dS_{s,o}(p)\, f^{(g)}_{k,l}(s;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) \\
=\ & -\operatorname*{Res}_{s\to\mathbf{a},\mathbf{q_L}} (x(s)y(s)-x(o)y(o))\, f^{(g)}_{k,l}(s;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})
\end{aligned} \tag{3-64}$$

since $f^{(g)}_{k,l}$ vanishes near the poles of ydx to order at least $\deg ydx - 1$, the expression above has no other poles than $\mathbf{a},\mathbf{q_L}$, and thus the total residue is zero.

□

Theorem 3.7 *For any k,l,g such that $k+l+g \le 1$, one has*

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{p\to\mathbf{a},\mathbf{q_L}} \Phi(p)\hat{W}^{(g)}_{k+1,l}(p,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) &= \operatorname{Res}_{q\to\mathbf{b},\mathbf{p_K}} \Psi(q)\check{W}^{(g)}_{k,l+1}(\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L},q) \\
&= (2-2g-k-l)\hat{W}^{(g)}_{k,l}(\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}).
\end{aligned} \tag{3-65}$$

proof:

We have:

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{Res}_{p\to\mathbf{a},\mathbf{q_L}} \Phi(p)\hat{W}^{(g)}_{k+1,l}(p,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) - \operatorname*{Res}_{p\to\mathbf{b},\mathbf{p_K}} \Psi(p)\check{W}^{(g)}_{k,l+1}(\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L},p) \\
=\ & \operatorname*{Res}_{p\to\mathbf{a},\mathbf{q_L}} x(p)y(p)\hat{W}^{(g)}_{k+1,l}(p,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) - \operatorname*{Res}_{p\to\mathbf{a},\mathbf{q_L}} \Psi(p)\hat{W}^{(g)}_{k+1,l}(p,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) \\
&\quad - \operatorname*{Res}_{p\to\mathbf{b},\mathbf{p_K}} \Psi(p)\check{W}^{(g)}_{k,l+1}(\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L},p) \\
=\ & -\operatorname*{Res}_{p\to\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{p_K},\mathbf{q_L}} \Psi(p)(\hat{W}^{(g)}_{k+1,l}(p,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) + \check{W}^{(g)}_{k,l+1}(\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L},p)) \\
=\ & \operatorname*{Res}_{p\to\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{p_K},\mathbf{q_L}} x(p)dy(p)\frac{A^{(g)}_{k,l}(p;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})}{dx(p)dy(p)} \\
=\ & -\operatorname*{Res}_{p\to\alpha} x(p)dy(p)\frac{A^{(g)}_{k,l}(p;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})}{dx(p)dy(p)} \\
=\ & 0.
\end{aligned} \tag{3-66}$$

The fact that $\operatorname{Res}_{p\to\mathbf{a},\mathbf{q_L}} \Phi(p)\hat{W}^{(g)}_{k+1,l}(p,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) = (2-2g-k-l)\hat{W}^{(g)}_{k,l}(\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})$, can be proved by recursion on $2g+k+l$ and using corolary 3.1.

□

This allows to prove our main theorem:

Theorem 3.8 *The $F^{(g)}$'s are symmetric under the exchange $x \leftrightarrow y$:*

$$\boxed{\hat{F}^{(g)} = \check{F}^{(g)}} \tag{3-67}$$

proof:

Indeed, we have:

$$(2-2g)\hat{F}^{(g)} = \operatorname*{Res}_{\mathbf{a}} \Phi(p)\hat{W}^{(g)}_{1,0}(p) \qquad , \qquad (2-2g)\check{F}^{(g)} = \operatorname*{Res}_{\mathbf{b}} \Psi(p)\check{W}^{(g)}_{0,1}(p). \tag{3-68}$$

□

3.4 Additional properties

The following theorem relates H and W:

Theorem 3.9 *We have:*

$$\hat{W}^{(g)}_{k+1,l}(p,\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L}) = \operatorname*{Res}_{q\to\alpha} \frac{H^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})}{H^{(0)}_{0,0}(p,q)} dy(q) \tag{3-69}$$

$$\check{W}^{(g)}_{k,l+1}(\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L},q) = \operatorname*{Res}_{p\to\alpha} \frac{H^{(g)}_{k,l}(p,q;\mathbf{p_K}|\mathbf{q_L})}{H^{(0)}_{0,0}(p,q)} dx(p). \tag{3-70}$$

proof:

Multiply equation 3-30 by $dx(p)dy(q)/(y(q)-y(p))H^{(0)}_{0,0}(p,q)$ and take the residues at $q\to\alpha$.

□

Remark 3.3 This theorem was expected from the matrix model property that

$$\operatorname{tr}\frac{1}{x-M_1}\frac{1}{y-M_2} \to \frac{1}{x}\operatorname{tr}\frac{1}{y-M_2} \tag{3-71}$$

when $x\to\infty$.

4 Conclusion

In this article, we have proved the $x\leftrightarrow y$ symmetry which was announced in [21]. This symmetry has many applications, for instance in [21] it was used to recover the $(p,q)\leftrightarrow(q,p)$ duality of minimal models [30], or to give a very short proof that Kontsevitch integral indeed depends only on odd times and satisfies KdV hierarchy [26].

In addition we have shown how to compute some family of mixed correlation functions of the 2-matrix model.

This could open the route to some matrix model approach to the understanding of boundary conformal field theory in higher genus. In a forthcoming article, we shall introduce a similar algebraic geometry method to compute all possible mixed correlation functions [23].

This work also raises many questions, and calls the following prospects:

• It would be interesting to see what the $H_{k,l}$ and $W_{k,l}$ correspond to for other matrix models (e.g. Kontsevitch's integral, chain of matrices), although we may guess that they also correspond to mixed traces expectation values in those cases.

• More interesting would be to understand what the $H^{(g)}_{k,l}$ and $W^{(g)}_{k,l}$ compute in algebraic geometry. Those should correspond to "volume" or "intersection numbers of some moduli spaces" ?

Acknowledgements

We would like to thank Michel Bergère and Aleix Prats Ferrer for fruitful discussions on this subject. This work is partly supported by the Enigma European network MRT-CT-2004-5652, by the ANR project Géométrie et intégrabilité en physique mathématique ANR-05-BLAN-0029-01, by the Enrage European network MRTN-CT-2004-005616, by the European Science foundation through the Misgam program, by the French and Japaneese governments through PAI Sakura, by the Quebec government with the FQRNT.

Appendix A Spectral curve

We recall that the curve $\mathcal{E}(x,y)$, called the classical spectral curve, is given by a polynomial of the form:

$$\mathcal{E}(x,y) = \sum_{j=0}^{d_2+1} \mathcal{E}_j(x) y^j \tag{1-1}$$

We define the "quantum spectral curve" as the formal power series:

$$\mathcal{E}_N(x,y) = \sum_g N^{-2g}\, \mathcal{E}^{(g)}(x,y) \tag{1-2}$$

where

$$\mathcal{E}^{(g)}(x,y) = \mathcal{E}_{d_2+1}(x) \sum_{r=1}^{d_2} \sum_{J_1\cup\ldots\cup J_r = K} \sum_{g_1,\ldots,g_r} \delta_{\sum_l (g_l+|J_l|-1),g} \prod_{l=1}^{r} \tilde{W}^{(g_l)}_{|J_l|}(p^{J_l}) \tag{1-3}$$

with

$$K = \{1,\ldots,d_2\} \tag{1-4}$$

and

$$\tilde{W}^{(g)}_k(p_K) := W^{(g)}_k(p_K) + \delta_{k,1}\delta_{g,0}(y - Y(p_1)) \tag{1-5}$$

where $W^{(g)}_k(p_K)$ is the meromorphic form defined in [21] for the curve $\mathcal{E}(x,y)$.

Lemma A.1 *For any g, $\mathcal{E}^{(g)}(x,y)$ is a polynomial in x and y, whose degrees are at most those of $\mathcal{E}$.*

proof:

It is clear that $\mathcal{E}_N(x,y)$ is a polynomial in y, and a rational function of x. Let us prove that $\mathcal{E}^{(g)}(x,y)$ is indeed a polynomial in x for $g \geq 1$. The coefficient of y^k in $\mathcal{E}^{(g)}(x,y)$ is:

$$\begin{aligned} &\tfrac{\mathcal{E}^{(g)}_k(x)}{\mathcal{E}_{d_2+1}(x)} \\ &= \sum_{J_0\subset K, |J_0|=k} \prod_{j\in J_0} y(p^j) \sum_{r=1}^{d_2-k} \sum_{J_1\cup\ldots\cup J_r = K/J_0} \sum_{g_1,\ldots,g_r} \delta_{\sum_l (g_l+|J_l|-1),g} \prod_{l=1}^{r} W_{|J_l|}{}^{(g_l)}(p^{J_l}) \end{aligned} \tag{1-6}$$

First, notice that the product of W's can have poles only at branch-points, and the product of y's can have poles only at poles of y. The poles of y which are not poles of x, are killed by the prefactor $\mathcal{E}_{d_2+1}(x)$, as they are in the classical curve $\mathcal{E}(x,y)$. Let us consider the poles at a branch-point a. The only terms which might diverge at $p \to a$ are of either of the following forms

- $(W^{(h)}_{1+|J|}(p,p^J) + W^{(h)}_{1+|J|}(\bar{p},p^J)) \times$ (reg) where reg means a term with no poles at $p \to a$. This term is regular because of theorem 4.4 in [21].
- or $(W^{(g_1)}_{1+|J_1|}(p,p^{J_1}) W^{(h-g_1)}_{1+|J|-|J_1|}(\bar{p},p^{J/J_1}) + W^{(h-1)}_{2+|J|}(p,\bar{p},p^J)) \times$ (reg) again, this expression is regular when $p \to a$, because of theorems 4.4 and 4.5 in [21].

Thus, we have proved that $\mathcal{E}^{(g)}_k(x)$ is a rational function of x whose only poles are the poles of x, i.e. it is a polynomial in x.

Consider a pole ∞_x of x, the behavior of $\mathcal{E}^{(g)}(x(p),y(p))$ when $p \to \infty_x$ is at most that of $\sum_{J_0\subset K} \prod_{j\in J_0} y(p^j)$. Notice that J_0 cannot be equal to K itself, because the product of the corresponding W's vanishes (it contains no term), and $|J_0|$ cannot be equal to $|K|-1$, because the prefactor vanishes due to theorem 4.4 in [21]. Thus, $|J_0| \leq |K|-2$, which implies that $\mathcal{E}^{(g)}(x(p),y(p))dx(p)$ has a pole of degree at most that of $\mathcal{E}_y(x(p),y(p))$, i.e. $\mathcal{E}^{(g)}(x(p),y(p))$ is contained in the Newton's polytope of $\mathcal{E}(x,y)$. This means that

$$\frac{\mathcal{E}^{(g)}(x(p),y(p))}{\mathcal{E}_y(x(p),y(p))} dx(p) \tag{1-7}$$

is a holomorphic differential.

□

Appendix B Lemma: unicity of the solution of loop equations

Lemma B.2 *The system of equations:*

$$\begin{aligned} & E^{(g)}_k(x(p),y(q);\mathbf{p_K}) \\ = \;& (y(q)-y(p))U^{(g)}_k(p,y(q);\mathbf{p_K}) \\ & + \sum_h \sum_I \frac{W^{(h)}_{i+1}(p,\mathbf{p_I}) U^{(g-h)}_{k-i}(p,y(q);\mathbf{p_{K/I}})}{dx(p)} \\ & + \frac{U^{(g-1)}_{k+1}(p,y(q);p,\mathbf{p_K})}{dx(p)} - \sum_m d_{p_m} \frac{U^{(g)}_{k-1}(p_m,y(q);\mathbf{p_{K/\{m\}}})}{x(p)-x(p_m)} \end{aligned} \tag{2-1}$$

where:

- *if $2g+k>2$, $W^{(g)}_{k+1}(p,\mathbf{p_K})$ has poles only at branchpoints in any of its variables, and vanishing $\mathcal{A}$-cycle integrals,*
- *$E^{(g)}_k(x(p),y(q);\mathbf{p_K})$ is a polynomial in $x(p)$ of degree at most d_1-1, and a polynomials in $y(q)$ of degree at most d_2-1,*

- $U_k^{(g)}(p, y(q); \mathbf{p_K})$ *is a polynomials in* $y(q)$ *of degree at most* $d_2 - 1$,

has a unique solution.

This solution is such that

$$W_k^{(g)}(\mathbf{p_K}) = \hat{W}_k^{(g)}(\mathbf{p_K}). \tag{2-2}$$

Proof of the Lemma:

Unicity:

We prove it by recursion on $2g + k$. Assume it is already proved for any g', k' such that $2g' + k < 2g + k$.

At $p = q$, Eq. (2-1) gives:

$$\begin{aligned} W_{k+1}^{(g)}(p, \mathbf{p_K}) \quad = \quad & \frac{E_k^{(g)}(x(p), y(p); \mathbf{p_K}) dx(p)}{U_0^{(0)}(p, y(p))} \\ & - \sum_h \sum_I \frac{W_{i+1}^{(h)}(p, \mathbf{p_I}) U_{k-i}^{(g-h)}(p, y(p); \mathbf{p_{K/I}})}{U_0^{(0)}(p, y(p))} \\ & - \frac{U_{k+1}^{(g-1)}(p, y(p); p, \mathbf{p_K})}{U_0^{(0)}(p, y(p))} + \sum_m d_{p_m} \frac{U_{k-1}^{(g)}(p_m, y(p); \mathbf{p_{K/\{m\}}}) dx(p)}{(x(p) - x(p_m)) U_0^{(0)}(p, y(p))}. \end{aligned} \tag{2-3}$$

Then write Cauchy residue formula:

$$W_{k+1}^{(g)}(p, \mathbf{p_K}) = - \operatorname*{Res}_{r \to p} dS_{r,o}(p)\ W_{k+1}^{(g)}(r, \mathbf{p_K}). \tag{2-4}$$

Since we know the poles of $W_{k+1}^{(g)}(p, \mathbf{p_K})$ and its $\mathcal{A}$-cycle integrals, we may move the integration contour using Riemann's bilinear identity and get:

$$W_{k+1}^{(g)}(p, \mathbf{p_K}) = \operatorname*{Res}_{r \to \mathbf{a}} dS_{r,o}(p)\ W_{k+1}^{(g)}(r, \mathbf{p_K}). \tag{2-5}$$

Now, we replace $W_{k+1}^{(g)}(r, \mathbf{p_K})$ by its value in Eq. (2-3). We see that the term $\frac{E_k^{(g)}(x(r), y(r); \mathbf{p_K}) dx(r)}{U_0^{(0)}(r, y(r))}$ has no pole at the branchpoints and does not contribute to the residue, and similarly the las term of Eq. (2-3) does not contribute to the residue. We get:

$$\begin{aligned} W_{k+1}^{(g)}(p, \mathbf{p_K}) \quad = \quad & - \operatorname*{Res}_{r \to \mathbf{a}} \frac{dS_{r,o}(p)}{U_0^{(0)}(p, y(p))} \Big(U_{k+1}^{(g-1)}(r, y(r); p, \mathbf{p_K}) \\ & + \sum_h \sum_I W_{i+1}^{(h)}(r, \mathbf{p_I}) U_{k-i}^{(g-h)}(r, y(r); \mathbf{p_{K/I}}) \Big). \end{aligned} \tag{2-6}$$

Since all the terms in the RHS are already known from the recursion hypothesis, this determines $W_{k+1}^{(g)}(p, \mathbf{p_K})$ uniquely. Then, we write Eq. (2-1) for $p = \tilde{q}^j$ with $j = 1, \dots, d_1$:

$$E_k^{(g)}(x(\tilde{q}^j), y(q); \mathbf{p_K})$$

$$\begin{aligned} = \quad & \sum_h \sum_I \frac{W_{i+1}^{(h)}(\tilde{q}^j, \mathbf{p_I}) U_{k-i}^{(g-h)}(\tilde{q}^j, y(q); \mathbf{p_{K/I}})}{dx(\tilde{q}^j)} \\ & + \frac{U_{k+1}^{(g-1)}(\tilde{q}^j, y(q); \tilde{q}^j, \mathbf{p_K})}{dx(\tilde{q}^j)} - \sum_m d_{p_m} \frac{U_{k-1}^{(g)}(p_m, y(q); \mathbf{p_{K/\{m\}}})}{x(\tilde{q}^j) - x(p_m)} \end{aligned} \tag{2-7}$$

since all terms in the RHS are uniquely determined, so is the LHS. And since $E_k^{(g)}(x(p), y(q); \mathbf{p_K})$ is a polynomial in $x(p)$ of degree $d_1 - 1$ and we know its value in d_1 points, then $E_k^{(g)}(x(p), y(q); \mathbf{p_K})$ is uniquely determined.

Then, using Eq. (2-1) once again, we uniquely determine $U_k^{(g)}(p, y(q); \mathbf{p_K})$.

This proves the unicity for g and k.

Existence:

Start from the meromorphic form $W_k^{(g)}(p_K)$ defined in [21] for the curve $\mathcal{E}(x, y)$, and define:

$$\tilde{W}_k^{(g)}(p_K) := W_k^{(g)}(p_K)/dx(p_K) + \delta_{k,1}\delta_{g,0}(y - y(p_1)) \tag{2-8}$$

Then, let $K_0 = \{0, 1, \dots, d_2\} \cup K$ and $K_1 = \{1, \dots, d_2\} \cup K$, and define:

$$\mathcal{E}_k^{(g)}(x(p^0), y; p_K) = \mathcal{E}_{d_2+1}(x) \sum_{r=1}^{d_2+1+k} \sum_{J_1 \cup \dots \cup J_r = K_0} \sum_{g_1, \dots, g_r} \delta_{\sum_l (g_l + |J_l| - 1), g} \prod_{l=1}^{r} \tilde{W}_{|J_l|}^{(g_l)}(p^{J_l}) \tag{2-9}$$

and:

$$U_k^{(g)}(p^0, y; p_K) = \mathcal{E}_{d_2+1}(x) \sum_{r=1}^{d_2+k} \sum_{J_1 \cup \dots \cup J_r = K_1} \sum_{g_1, \dots, g_r} \delta_{\sum_l (g_l + |J_l| - 1), g} \prod_{l=1}^{r} \tilde{W}_{|J_l|}^{(g_l)}(p^{J_l}). \tag{2-10}$$

It is clear that both $\mathcal{E}_k^{(g)}(x, y; p_K)$ and $U_k^{(g)}(p, y; p_K)$ are polynomials in y of degree at most $d_2 - 1$. Following the same line as in lemma A.1, it is easy to get that $\mathcal{E}_k^{(g)}(x, y; p_K)$ is also a polynomial in x of degree at most $d_1 - 1$.

Therefore, the functions $\mathcal{E}_k^{(g)}(x, y; p_K)$, $U_k^{(g)}(p, y; p_K)$ and $W_k^{(g)}(p_K)$ obey the requirements of lemma B.2, and eq.2-1 is clearly satisfied from the definitions of $\mathcal{E}_k^{(g)}(x, y; p_K)$ and $U_k^{(g)}(p, y; p_K)$. Thus, we have found an explicit solution of the system of lemma B.2, which proves the existence.

References

[1] J.Ambjørn, L.Chekhov, C.F.Kristjansen and Yu.Makeenko, "Matrix model calculations beyond the spherical limit", *Nucl.Phys.* **B404** (1993) 127–172; Erratum ibid. **B449** (1995) 681, hep-th/9302014.

[2] M. Bergère and B. Eynard, "Mixed correlation function and spectral curve for the 2-matrix model", *J.* Phys. A: Math. Gen. **39** No 49 (8 December 2006) 15091-15134, math-ph/0605010.

[3] M. Bertola, "Two-matrix model with semiclassical potentials and extended Whitham hierarchy", *J.Phys.* **A39** 8823-8856 (2006), hep-th/0511295.

[4] M. Bertola, B. Eynard, " Mixed Correlation functions of the 2-Matrix Model", *J.* Phys. **A36** (2003) 7733-7750, hep-th/0303161.

[5] M. Bertola, "Free Energy of the Two-Matrix Model/dToda Tau-Function", preprint CRM-2921 (2003), hep-th/0306184.

[6] E. Brezin, C. Itzykson, G. Parisi, and J. Zuber, *Comm. Math. Phys.* **59**, 35 (1978).

[7] L.Chekhov, B.Eynard, "Hermitian matrix model free energy: Feynman graph technique for all genera", *J. High Energy Phys.* **JHEP03** (2006) 014, hep-th/0504116.

[8] L.Chekhov, B.Eynard and N.Orantin, "Free energy topological expansion for the 2-matrix model", *J. High Energy Phys.* **JHEP12** (2006) 053, math-ph/0603003.

[9] J.M.Daul, V.Kazakov, I.Kostov, "Rational Theories of 2D Gravity from the Two-Matrix Model", *Nucl.Phys.* **B409** (1993) 311-338, hep-th/9303093.

[10] F. David, "Loop equations and nonperturbative effects in two-dimensional quantum gravity". *Mod.Phys.Lett.* **A5** (1990) 1019.

[11] F. David, "Planar diagrams, two-dimensional lattice gravity and surface models", Nuclear Physics B, Volume 257, p. 45-58.

[12] P. Di Francesco, P. Ginsparg, J. Zinn-Justin, "2D Gravity and Random Matrices", *Phys. Rep.* **254**, 1 (1995).

[13] B. Eynard, "Topological expansion for the 1-hermitian matrix model correlation functions", JHEP/024A/0904, hep-th/0407261.

[14] B. Eynard, "Large N expansion of the 2-matrix model", *JHEP* **01** (2003) 051, hep-th/0210047.

[15] B. Eynard, "Large N expansion of the 2-matrix model, multicut case", preprint SPHT03/106, ccsd-00000521, math-ph/0307052.

[16] B.Eynard, "Loop equations for the semiclassical 2-matrix model with hard edges", *J.Stat.Mech.* **0510** (2005) P006, math-ph/0504002.

[17] B. Eynard, A. Prats Ferrer, "2-matrix versus complex matrix model, integrals over the unitary group as triangular integrals", *C*ommun.Math.Phys. **264** (2006) 115-144, hep-th/0502041.

[18] B. Eynard, "Master loop equations, free energy and correlations for the chain of matrices", *J. High Energy Phys.* **JHEP11**(2003)018, hep-th/0309036.

[19] B.Eynard, N.Orantin, "Topological expansion of the 2-matrix model correlation functions: diagrammatic rules for a residue formula", *J. High Energy Phys.* **JHEP12**(2005)034, math-ph/0504058.

[20] B.Eynard, " Formal matrix integrals and combinatorics of maps", math-ph/0611087.

[21] B.Eynard, N.Orantin, "Invariants of algebraic curves and topological expansion", math-ph/0702045.

[22] B. Eynard, N. Orantin, "Mixed correlation functions in the 2-matrix model, and the Bethe ansatz", *J*HEP **0508** (2005) 028, hep-th/0504029.

[23] B. Eyner, N. Orantin, "Whole topological expnasion of any correlation function in the two matrix model", in preparation.

[24] H.M. Farkas, I. Kra, "Riemann surfaces" 2nd edition, Springer Verlag, 1992.

[25] J.D. Fay, "Theta functions on Riemann surfaces", Springer Verlag, 1973.

[26] C.Itzykson, J.B.Zuber, "Combinatorics of the Modular Group II: The Kontsevich integrals", *Int.J.Mod.Phys.* **A7** (1992) 5661-5705, hep-th/9201001 .

[27] V.A. Kazakov, "Bilocal regularization of models of random surfaces" Physics Letters B, Volume 150, Issue 4, p. 282-284.

[28] V.A. Kazakov, "Ising model on a dynamical planar random lattice: exact solution", *Phys Lett.* **A119**, 140-144 (1986).

[29] V.A. Kazakov, A. Marshakov, "Complex Curve of the Two Matrix Model and its Tau-function", *J.Phys.* **A36** (2003) 3107-3136, hep-th/0211236.

[30] S.Kharchev, A.Marshakov, "On $p-q$ duality and explicit solutions in $c<1$ 2d gravity models", hep-th/9303100.

[31] I.Krichever "The τ-function of the universal Whitham hierarchy, matrix models and topological field theories", *Commun.Pure Appl.Math.* **47** (1992) 437; hep-th/9205110

[32] M. Staudacher, " Combinatorial solution of the 2-matrix model", *Phys. Lett.* **B305** (1993) 332-338.

[33] G. 't Hooft, *Nuc. Phys.* **B72**, 461 (1974).

[34] W.T. Tutte, "A census of planar triangulations", *Can. J. Math.* **14** (1962) 21-38.

[35] W.T. Tutte, "A census of planar maps", *Can. J. Math.* **15** (1963) 249-271.

7 Weil-Petersson volume of moduli space, Mirzakhani's recursion and matrix models

arXiv:0705.3600v1 [math-ph] 24 May 2007

SPT-07/065

Weil-Petersson volume of moduli spaces, Mirzakhani's recursion and matrix models

B. Eynard[1], *N. Orantin*[2]

Service de Physique Théorique de Saclay,
F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France.

Abstract

We prove that Mirzakhani's recursions for the volumes of moduli space of Riemann surfaces are a special case of random matrix recursion relations, and therefore we confirm again that Kontsevich's integral is a generating function for those volumes. As an application, we propose a formula for the Weil-Petersson volume $\mathrm{Vol}(\mathcal{M}_{g,0})$.

1 Introduction

Let

$$\begin{aligned} V_{g,n}(L_1,\dots,L_n) &= \mathrm{Vol}(\mathcal{M}_{g,n}) \\ &= \sum_{d_0+\dots+d_n=3g-3+n} \left(\prod_{i=0}^{n}\frac{1}{d_i!}\right) \left\langle \kappa_1^{d_0}\tau_{d_1}\dots\tau_{d_n}\right\rangle_{g,n} L_1^{2d_1}\dots L_n^{2d_n} \end{aligned} \qquad (1-1)$$

denote the volume of the moduli space of curves of genus g, with n geodesic boundaries of lengths $L_1,\dots,L_n$, measured with the Weil-Petersson metrics. Using Teichmuller pants decomposition and hyperbolic geometry, M. Mirzakhani [4] has found a recursion relation among the $V_{g,n}$'s, which allows to compute all of them in a recursive manner. It was then observed [5] that this recursion relation is equivalent to Virasoro constraints.

[1] E-mail: bertrand.eynard@cea.fr
[2] E-mail: orantin@cea.fr

In fact, Mirzakhani's recursion relation takes a form [3] which is amazingly similar to the recursion relation obeyed by matrix models correlation functions ([1, 2]) and which were indeed initialy derived from loop equations [1], i.e. Virasoro constraints.

Here we make this observation more precise, and we prove that after Laplace transform, Mirzakhani's recursion is **identical** to the recursion of [2] for the Kontsevich integral with times (Kontsevich's integral depends only on odd times):

$$Z(t_k) = \int dM\, \mathrm{e}^{-N\,\mathrm{Tr}\,[\frac{M^3}{3}+\Lambda M^2]} \qquad , \qquad t_{2k+3} = \frac{1}{N}\,\mathrm{Tr}\,\Lambda^{-(2k+3)} = \frac{(2\pi)^{2k}\,(-1)^k}{(2k+1)!} + 2\delta_{k,0}. \qquad (1\text{-}2)$$

2 Laplace transform

Define the Laplace transforms of the $V_{g,n}$'s:

$$\begin{aligned} & W_n^g(z_1,\dots,z_n) \\ = \;& 2^{-m_{g,n}} \int_0^\infty dL_1\dots dL_n \mathrm{e}^{-\sum_i z_i L_i} \prod_{i=1}^n L_i \;\; V_{g,n}(L_1,\dots,L_n) \\ = \;& 2^{-m_{g,n}} \sum_{d_0+\dots+d_n=3g-3+n} \left(\prod_{i=0}^{n}\frac{1}{d_i!}\right) \left\langle \kappa_1^{d_0}\tau_{d_1}\dots\tau_{d_n}\right\rangle_{g,n} \frac{(2d_1+1)!}{z_1^{2d_1+2}}\dots\frac{(2d_n+1)!}{z_n^{2d_n+2}} \end{aligned} \qquad (2-1)$$

where (see [4]) $m_{g,n} = \delta_{g,1}\delta_{n,1}$.

Since the $V_{g,n}$'s are even polynomials of the L_i's, of degree $2d_{g,n}$ where

$$d_{g,n} = \dim \mathcal{M}_{g,n} = 3g-3+n \qquad (2\text{-}2)$$

the W_n^g's are even polynomials of the $1/z_i$'s of degree $2d_{g,n}+2$. Let us also define:

$$W_1^0 = 0 \qquad (2\text{-}3)$$

$$W_2^0(z_1,z_2) = \frac{1}{(z_1-z_2)^2} \qquad (2\text{-}4)$$

and

$$dE_u(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-u}-\frac{1}{z+u}\right). \qquad (2\text{-}5)$$

We prove the following theorems:

Theorem 2.1 *For any $2g-2+n+1>0$, the W_{n+1}^g satisfy the recursion relation*

$$\boxed{W_{n+1}^g(z,K) = \mathrm{Res}_{\,u\to 0}\, \frac{\pi dE_u(z)}{u\sin 2\pi u}\Big[\sum_{h=0}^g \sum_{J\subset K} W_{1+|J|}^h(u,J)W_{1+n-|J|}^{g-h}(-u,K/J) + W_{n+2}^{g-1}(u,-u,K)\Big]} \qquad (2\text{-}6)$$

where the RHS includes all possible W_k^h, including $W_1^0 = 0$ and W_2^0, and where

$$K = \{z_1, \dots, z_n\} \tag{2-7}$$

is a set of n variables.

proof:

This relation is merely the Laplace transform of Mirzakhani's recursion. See the appendix for a detailed proof. □

Corollary 2.1 *W_n^g are the invariants defined in [2] for the curve:*

$$\begin{cases} x(z) = z^2 \\ -2y(z) = \frac{\sin(2\pi z)}{2\pi} = z - 2\frac{\pi^2}{3}z^3 + \frac{2\pi^4}{15}z^5 - \frac{4\pi^6}{315}z^7 + \frac{2\pi^8}{2835}z^9 + \dots \end{cases} \tag{2-8}$$

which is a special case of Kontsevich's curve:

$$Z(t_k) = \int dM\, \mathrm{e}^{-N\,\mathrm{Tr}\,[\frac{M^3}{3}+\Lambda M^2]} \qquad , \qquad t_k = \frac{1}{N}\,\mathrm{Tr}\,\Lambda^{-k} = \frac{(2\pi)^{k-3}\ \sin(\pi k/2)}{(k-2)!} \tag{2-9}$$

For instance we have:

$$\ln Z(t_k) = \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} W_0^g \tag{2-10}$$

(W_0^g is often noted $-F_g$ in the litterature).

proof:

Eq. 2-6 is precisely the definiton of the invariants of [2] for the curve

$$\begin{cases} x(z) = z^2 \\ -2y(z) = \frac{\sin(2\pi z)}{2\pi} = z - 2\frac{\pi^2}{3}z^3 + \frac{2\pi^4}{15}z^5 - \frac{4\pi^6}{315}z^7 + \frac{2\pi^8}{2835}z^9 + \dots \end{cases} \tag{2-11}$$

And it was proved in [2] that this curve is a special case of Kontsevich's curve:

$$\begin{cases} x(z) = z^2 \\ y(z) = z - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty} t_{j+2} z^j \end{cases} \tag{2-12}$$

which corresponds to the computation of the topological expansion of the Kontsevich integral:

$$Z(t_k) = \int dM\, \mathrm{e}^{-N\,\mathrm{Tr}\,[\frac{M^3}{3}+\Lambda M^2]} \qquad , \qquad t_k = \frac{1}{N}\,\mathrm{Tr}\,\Lambda^{-k} \tag{2-13}$$

$$\ln Z(t_k) = -\sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} F_g \tag{2-14}$$

□

Theorem 2.2 *For any $2g-2+n>0$ we have:*

$$(2g-2+n)\,W_n^g(K) = \frac{1}{4\pi^2}\ \mathop{\mathrm{Res}}_{u\to 0}\left(u\cos(2\pi u) - \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi u)\right)\ W_{n+1}^g(u,K) \tag{2-15}$$

or in inverse Laplace transform:

$$\boxed{(2g-2+n)\,V_{g,n}(K) = \frac{1}{2i\pi}\,V'_{g,n+1}(K, 2i\pi)} \tag{2-16}$$

where $'$ means the derivative with respect to the $n+1^{\text{th}}$ variable.

proof:

This is a mere application of theorem 4.7. in [2], as well as its Laplace transform. □

In particular with $n=0$ we get:

$$V_{g,0} = \mathrm{Vol}(\mathcal{M}_{g,0}) = \frac{1}{2g-2}\ \frac{V'_{g,1}(2i\pi)}{2i\pi} \tag{2-17}$$

for instance for $g=2$:

$$V_{2,0} = \frac{43\pi^6}{2160}. \tag{2-18}$$

2.1 Examples

From [4] we get:

$$W_3^0 = \frac{1}{z_1^2 z_2^2 z_3^2} \tag{2-19}$$

$$W_1^1 = \frac{1}{8z_1^4} + \frac{\pi^2}{12 z_1^2} \tag{2-20}$$

$$W_4^0 = \frac{1}{z_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^2}\left(2\pi^2 + 3(\frac{1}{z_1^2}+\frac{1}{z_2^2}+\frac{1}{z_3^2}+\frac{1}{z_4^2})\right) \tag{2-21}$$

$$W_2^1 = \frac{1}{z_1^2 z_2^2}\left(\frac{\pi^4}{4} + \frac{\pi^2}{2}(\frac{1}{z_1^2}+\frac{1}{z_2^2}) + \frac{5}{8z_1^4} + \frac{5}{8z_2^4} + \frac{3}{8z_1^2 z_2^2}\right) \tag{2-22}$$

$$W_5^0 = \frac{1}{z_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^2 z_5^2}\left(10\pi^4 + 18\pi^2\sum_i \frac{1}{z_i^2} + 15\sum_i \frac{1}{z_i^4} + 18\sum_{i<j}\frac{1}{z_i^2 z_j^2}\right) \tag{2-23}$$

$$W_1^2 = \frac{1}{192 z_1^2}\left(29\pi^8 + \frac{338\pi^6}{5z_1^2} + \frac{139\pi^4}{z_1^4} + \frac{203\pi^2}{z_1^6} + \frac{315}{2z_1^8}\right) \tag{2-24}$$

Those functions are the same as those which appear in section 10.4.1 of [2], for the Kontsevich curve with times:

$$t_3 - 2 = 1, t_5 = -\frac{2\pi^2}{3}, t_7 = \frac{2\pi^4}{15}, t_9 = -\frac{4\pi^6}{315}, t_{11} = \frac{2\pi^8}{2835}, \dots \tag{2-25}$$

i.e. the rational curve:

$$\mathcal{E}_K = \begin{cases} x(z) = z^2 \\ -2y(z) = \frac{\sin(2\pi z)}{2\pi} = z - 2\frac{\pi^2}{3}z^3 + \frac{2\pi^4}{15}z^5 - \frac{4\pi^6}{315}z^7 + \frac{2\pi^8}{2835}z^9 + \dots \end{cases} \tag{2-26}$$

It is to be noted that those t_k's are closely related to the β_k's of [5, 3].

3 Conclusion

We have shown that, after Laplace transform, Mirzakhani's recursions are nothing but the solution of loop equations (i.e. Virasoro constraints) for the Kontsevich integral with some given set of times. It would be interesting to understand what the invariants of [2] compute for an arbitrary spectral curve (for instance for other Kontsevich times).

Acknowledgements

This work is partly supported by the Enigma European network MRT-CT-2004-5652, by the ANR project Géométrie et intégrabilité en physique mathématique ANR-05-BLAN-0029-01, by the Enrage European network MRTN-CT-2004-005616, by the European Science foundation through the Misgam program, by the French and Japaneese governments through PAI Sakura, by the Quebec government with the FQRNT.

Appendix A Laplace transform of the equations

Let us write:

$$L_K = \{L_1, \dots, L_n\} \tag{1-1}$$

$$H_n^g(x, y, L_K) = xyV_{g-1,n+2}(x, y, L_K) + \sum_{h=0}^{g}\sum_{J\in K} xV_{h,1+|J|}(x, L_J)yV_{g-h,n+1-|J|}(y, L_{K/J}) \tag{1-2}$$

where all the $V_{h,k}$ terms in the RHS are such that $2h + k - 2 > 0$ (i.e. stable curves only), as well as their laplace transform:

$$\widetilde{H}_n^{(g)}(z, z', L_K) := \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy e^{-zx} e^{-z'y} H_n^g(x, y, L_K). \tag{1-3}$$

Mirzakhani's recursion reads:

$$\begin{aligned} 2LV_{g,n+1}(L, L_K) &= \int_0^L dt \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy K(x+y, t) H_n^g(x, y, L_K) \\ &+ \sum_{m=1}^{n} \int_0^L dt \int_0^\infty dx (K(x, t+L_m) + K(x, t-L_m)) x V_{g,n-1}(x, \hat{L}_m) \end{aligned} \tag{1-4}$$

where

$$K(x, t) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{\left(\frac{x+t}{2}\right)}} + \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{\left(\frac{x-t}{2}\right)}} \tag{1-5}$$

and $\hat{L}_m = L_K / \{L_m\}$.

Let $\tilde{H}_n^g$ be the Laplace transform of H_n^g with respect to x and y.

The Laplace transform of the first term in eq.1-4 is:

$$\begin{aligned} & \sum_{\epsilon=\pm 1} \int_0^\infty dL\, \mathrm{e}^{-zL} \int_0^L dt \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{\frac{x+y+\epsilon t}{2}}}\ H_n^g(x, y, L_K) \\ = & \sum_{\epsilon=\pm 1} \int_0^\infty dt \int_t^\infty dL\, \mathrm{e}^{-zL} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{\frac{x+y+\epsilon t}{2}}}\ H_n^g(x, y, L_K) \\ = & \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{1}{z} \int_0^\infty dt\, \mathrm{e}^{-zt} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{\frac{x+y+\epsilon t}{2}}}\ H_n^g(x, y, L_K) \\ = & -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{z} \int_0^\infty dt\, \mathrm{e}^{-zt} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy (-1)^j \mathrm{e}^{-\frac{j}{2}(x+y+t)}\ H_n^g(x, y, L_K) \\ & + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{z} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \int_{x+y}^\infty dt\, \mathrm{e}^{-zt} (-1)^j \mathrm{e}^{\frac{j}{2}(x+y-t)}\ H_n^g(x, y, L_K) \\ & - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{z} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \int_0^{x+y} dt\, \mathrm{e}^{-zt} (-1)^j \mathrm{e}^{-\frac{j}{2}(x+y-t)}\ H_n^g(x, y, L_K) \\ = & -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{z} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \frac{(-1)^j}{z + \frac{j}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{j}{2}(x+y)}\ H_n^g(x, y, L_K) \\ & + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{z} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \frac{(-1)^j}{z + \frac{j}{2}} \mathrm{e}^{-z(x+y)}\ H_n^g(x, y, L_K) \\ & - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{z} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \frac{(-1)^j}{z - \frac{j}{2}} (1 - \mathrm{e}^{-(z-\frac{j}{2})(x+y)}) \mathrm{e}^{-\frac{j}{2}(x+y)}\ H_n^g(x, y, L_K) \\ = & -2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{z^2 - \left(\frac{j}{2}\right)^2}\ \tilde{H}_n^g(\frac{j}{2}, \frac{j}{2}, L_K) + \frac{1}{z^2}\ \tilde{H}_n^g(z, z, L_K) \\ & + 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{z^2 - \left(\frac{j}{2}\right)^2}\ \tilde{H}_n^g(z, z, L_K) \\ = & -2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{z^2 - \left(\frac{j}{2}\right)^2}\ \tilde{H}_n^g(\frac{j}{2}, \frac{j}{2}, L_K) + \frac{2\pi}{z \sin 2\pi z}\ \tilde{H}_n^g(z, z, L_K) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\operatorname*{Res}_{u\to z} + \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname*{Res}_{u\to \pm\frac{j}{2}}\right) \frac{du}{u-z}\,\frac{2\pi}{u\sin(2\pi u)}\;\tilde{H}_n^g(u,u,L_K)\\
&= \operatorname*{Res}_{u\to 0} \frac{du}{z-u}\,\frac{2\pi}{u\sin(2\pi u)}\;\tilde{H}_n^g(u,u,L_K)\\
&= \operatorname*{Res}_{u\to 0} \frac{2\pi\,du}{u\sin(2\pi u)}\,dE_u(z)\;\tilde{H}_n^g(u,u,L_K)
\end{aligned}
\tag{1-6}
$$

Using the notation

$$
R(x,t,L_m) := (K(x,t+L_m)+K(x,t-L_m)), \tag{1-7}
$$

the Laplace transform of the second term in eq.1-4 is:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty dL_m \mathrm{e}^{-z_m L_m}\int_0^\infty dL\,\mathrm{e}^{-zL}\int_0^L dt\int_0^\infty dx R(x,t,L_m)xV_{g,n-1}(x,\hat{L}_m)\\
=\;& \frac{1}{z}\int_0^\infty dx\int_0^\infty dL_m\mathrm{e}^{-z_m L_m}\int_0^\infty dt\,\mathrm{e}^{-zt}\,R(x,t,L_m)xV_{g,n-1}(x,\hat{L}_m)\\
=\;& \frac{1}{z}\int_0^\infty dx\int_0^\infty dL_m\mathrm{e}^{-z_m L_m}\int_{L_m}^\infty dt\,\mathrm{e}^{-z(t-L_m)}\,K(x,t)xV_{g,n-1}(x,\hat{L}_m)\\
&+\frac{1}{z}\int_0^\infty dx\int_0^\infty dL_m\mathrm{e}^{-z_m L_m}\int_{-L_m}^\infty dt\,\mathrm{e}^{-z(t+L_m)}\,K(x,t)xV_{g,n-1}(x,\hat{L}_m)\\
=\;& \frac{1}{z}\int_0^\infty dx\int_0^\infty dt\,\mathrm{e}^{-zt}\int_0^t dL_m\mathrm{e}^{-(z_m-z)L_m}\,K(x,t)xV_{g,n-1}(x,\hat{L}_m)\\
&+\frac{1}{z}\int_0^\infty dx\int_0^\infty dt\,\mathrm{e}^{-zt}\int_0^\infty dL_m\mathrm{e}^{-(z_m+z)L_m}\,K(x,t)xV_{g,n-1}(x,\hat{L}_m)\\
&+\frac{1}{z}\int_0^\infty dx\int_{-\infty}^0 dt\,\mathrm{e}^{-zt}\int_{-t}^\infty dL_m\mathrm{e}^{-(z_m+z)L_m}\,K(x,t)xV_{g,n-1}(x,\hat{L}_m)\\
=\;& \frac{1}{z}\int_0^\infty dx\int_0^\infty dt\,\frac{\mathrm{e}^{-zt}-\mathrm{e}^{-z_m t}}{z_m-z}\,K(x,t)xV_{g,n-1}(x,\hat{L}_m)\\
&+\frac{1}{z}\int_0^\infty dx\int_0^\infty dt\,\frac{\mathrm{e}^{-zt}+\mathrm{e}^{z_m t}}{z_m+z}\,K(x,t)xV_{g,n-1}(x,\hat{L}_m)\\
&+\frac{1}{z}\int_0^\infty dx\int_0^\infty dt\,\frac{\mathrm{e}^{-z_m t}}{z_m+z}\,K(x,t)xV_{g,n-1}(x,\hat{L}_m)\\
=\;& \frac{1}{z}\int_0^\infty dx\int_0^\infty dt\,\left(\frac{\mathrm{e}^{-zt}-\mathrm{e}^{-z_m t}}{z_m-z}+\frac{\mathrm{e}^{-zt}+\mathrm{e}^{-z_m t}}{z_m+z}\right)\,K(x,t)xV_{g,n-1}(x,\hat{L}_m)\\
=\;& \frac{1}{z}\int_0^\infty dx\int_0^\infty dt\,\frac{2z_m\mathrm{e}^{-zt}-2z\mathrm{e}^{-z_m t}}{(z_m^2-z^2)}\,\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{x+t}{2}}}\,xV_{g,n-1}(x,\hat{L}_m)\\
&+\frac{1}{z}\int_0^\infty dx\int_0^x dt\,\frac{2z_m\mathrm{e}^{-zt}-2z\mathrm{e}^{-z_m t}}{(z_m^2-z^2)}\,\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{x-t}{2}}}\,xV_{g,n-1}(x,\hat{L}_m)\\
&+\frac{1}{z}\int_0^\infty dx\int_x^\infty dt\,\frac{2z_m\mathrm{e}^{-zt}-2z\mathrm{e}^{-z_m t}}{(z_m^2-z^2)}\,\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{x-t}{2}}}\,xV_{g,n-1}(x,\hat{L}_m)\\
=\;& -\sum_{j=1}^\infty\frac{(-1)^j}{z}\int_0^\infty dx\int_0^\infty dt\,\frac{2z_m\mathrm{e}^{-zt}-2z\mathrm{e}^{-z_m t}}{(z_m^2-z^2)}\,\mathrm{e}^{-\frac{j}{2}(x+t)}\,xV_{g,n-1}(x,\hat{L}_m)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=\;& -\sum_{j=1}^\infty\frac{(-1)^j}{z}\int_0^\infty dx\int_0^x dt\,\frac{2z_m\mathrm{e}^{-zt}-2z\mathrm{e}^{-z_m t}}{(z_m^2-z^2)}\,\mathrm{e}^{-\frac{j}{2}(x-t)}\,xV_{g,n-1}(x,\hat{L}_m)\\
&+\sum_{j=0}^\infty\frac{(-1)^j}{z}\int_0^\infty dx\int_x^\infty dt\,\frac{2z_m\mathrm{e}^{-zt}-2z\mathrm{e}^{-z_m t}}{(z_m^2-z^2)}\,\mathrm{e}^{\frac{j}{2}(x-t)}\,xV_{g,n-1}(x,\hat{L}_m)\\
=\;& -\sum_{j=1}^\infty\frac{(-1)^j}{z}\int_0^\infty dx\,\frac{\frac{2z_m}{z+\frac{j}{2}}-\frac{2z}{z_m+\frac{j}{2}}}{(z_m^2-z^2)}\,\mathrm{e}^{-\frac{j}{2}x}\,xV_{g,n-1}(x,\hat{L}_m)\\
&-\sum_{j=1}^\infty\frac{(-1)^j}{z}\int_0^\infty dx\int_0^x dt\,\frac{2z_m\,\frac{\mathrm{e}^{-\frac{j}{2}x}-\mathrm{e}^{-zx}}{z-\frac{j}{2}}-2z\,\frac{\mathrm{e}^{-\frac{j}{2}x}-\mathrm{e}^{-z_m x}}{z_m-\frac{j}{2}}}{(z_m^2-z^2)}\,xV_{g,n-1}(x,\hat{L}_m)\\
&+\sum_{j=0}^\infty\frac{(-1)^j}{z}\int_0^\infty dx\int_x^\infty dt\,\frac{\frac{2z_m\mathrm{e}^{-zx}}{z+\frac{j}{2}}-\frac{2z\mathrm{e}^{-z_m x}}{z_m+\frac{j}{2}}}{(z_m^2-z^2)}\,xV_{g,n-1}(x,\hat{L}_m)\\
=\;& -2\sum_{j=1}^\infty\frac{(-1)^j}{z}\,\frac{z+z_m+\frac{j}{2}}{(z_m+z)(z+\frac{j}{2})(z_m+\frac{j}{2})}\,W_{g,n-1}(\frac{j}{2},\hat{L}_m)\\
&-2\sum_{j=1}^\infty\frac{(-1)^j}{z}\,\frac{z+z_m-\frac{j}{2}}{(z_m+z)(z-\frac{j}{2})(z_m-\frac{j}{2})}\,W_{g,n-1}(\frac{j}{2},\hat{L}_m)\\
&+2\sum_{j=1}^\infty\frac{(-1)^j}{z}\,\frac{z_m}{(z-\frac{j}{2})(z_m^2-z^2)}\,W_{g,n-1}(z,\hat{L}_m)\\
&-2\sum_{j=1}^\infty(-1)^j\,\frac{1}{(z_m-\frac{j}{2})(z_m^2-z^2)}\,W_{g,n-1}(z_m,\hat{L}_m)\\
&+2\sum_{j=0}^\infty\frac{(-1)^j}{z}\,\frac{z_m}{(z+\frac{j}{2})(z_m^2-z^2)}\,W_{g,n-1}(z,\hat{L}_m)\\
&-2\sum_{j=0}^\infty(-1)^j\,\frac{1}{(z_m+\frac{j}{2})(z_m^2-z^2)}\,W_{g,n-1}(z_m,\hat{L}_m)\\
=\;& -4\sum_{j=1}^\infty\operatorname*{Res}_{u\to\pm j}\frac{\pi du}{\sin 2\pi u}\,\frac{1}{z}\,\frac{z+z_m+u}{(z_m+z)(z+u)(z_m+u)}\,W_{g,n-1}(u,\hat{L}_m)\\
&+4\,\frac{z_m\pi}{z\sin(2\pi z)(z_m^2-z^2)}\,W_{g,n-1}(z,\hat{L}_m)\\
&-4\,\frac{\pi}{\sin(2\pi z_m)\,(z_m^2-z^2)}\,W_{g,n-1}(z_m,\hat{L}_m)\\
=\;& -4\sum_{j=1}^\infty\operatorname*{Res}_{u\to\pm\frac{j}{2}}\frac{\pi du}{\sin 2\pi u}\,\frac{z_m}{(z^2-u^2)(z_m^2-u^2)}\,W_{g,n-1}(u,\hat{L}_m)\\
&-4\operatorname*{Res}_{u\to z,z_m}\frac{\pi du}{\sin 2\pi u}\,\frac{z_m}{(z_m^2-u^2)(z^2-u^2)}\,W_{g,n-1}(u,\hat{L}_m)\\
=\;& 4\operatorname*{Res}_{u\to 0}\frac{\pi du}{\sin 2\pi u}\,\frac{z_m}{(z^2-u^2)(z_m^2-u^2)}\,W_{g,n-1}(u,\hat{L}_m)\\
=\;& 2\operatorname*{Res}_{u\to 0}\frac{\pi du}{2u\sin 2\pi u}\,\left(\frac{1}{z-u}-\frac{1}{z+u}\right)\,\left(\frac{1}{z_m-u}+\frac{1}{z_m+u}\right)\,W_{g,n-1}(u,\hat{L}_m)
\end{aligned}
$$

$$= \quad 4 \operatorname*{Res}_{u\to 0} \frac{\pi du}{2u \sin 2\pi u} \left(\frac{1}{z-u} - \frac{1}{z+u}\right) \frac{1}{z_m - u} W_{g,n-1}(u, \hat{L}_m)$$
$$(1-8)$$

After taking the derivative with respect to z_m that gives the expected term:

$$\operatorname*{Res}_{u\to 0} \frac{2\pi du}{u \sin 2\pi u} \, dE_u(z) \; 2\, W_2^0(u, z_m) W_{g,n-1}(u, \hat{L}_m) \tag{1-9}$$

and therefore the Laplace transform of Eq. (1-4) gives the relation Eq. (2-6).

References

[1] B. Eynard, "Topological expansion for the 1-hermitian matrix model correlation functions", JHEP/024A/0904, hep-th/0407261.

[2] B.Eynard, N.Orantin, "Invariants of algebraic curves and topological expansion", math-ph/0702045.

[3] K. Liu, H. Xu, "A simple proof of Mirzakhani's recursion formula of Weil-Petersson volumes", math.AG/0705.2086.

[4] M. Mirzakhani, "Simple geodesics and Weil-Petersson volumes of moduli spaces of bordered Riemann surfaces", Invent. Math. 167, 179-222 (2007).

[5] M. Mulase, B. Safnuk, "Mirzakhani's recursion relations, Virasoro constraints and the KdV hierarchy", math.AG/0101147.

Bibliographie

[1] M.Aganagic, V.Bouchard and A.Klemm, "Topological strings and (almost) modular forms", hep-th/0607100.

[2] M.Aganagic, R.Dijkgraaf, A.Klemm, M.Mariño and C.Vafa, "Topological strings and integrable hierarchies", *Commun. Math. Phys.* **261** (2006) 451, hep-th/0312085.

[3] G.Akemann, "Universal correlators for multi-arc complex matrix models", *Nucl. Phys.* **B507** (1997) 475, hep-th/9702005.

[4] G.Akemann, "Higher genus correlators for the Hermitian matrix model with multiple cuts", *Nucl. Phys.* **B482** (1996) 403, hep-th/9606004.

[5] G.Akemann and J.Ambjørn, "New universal spectral correlators", *J.Phys.* **A29** (1996) L555–L560, cond-mat/9606129.

[6] A.Alexandrov, A.Mironov and A.Morozov, " M-Theory of Matrix Models", hep-th/0605171.

[7] A.Alexandrov, A.Mironov and A.Morozov, "Instantons and Merons in Matrix Models", hep-th/0608228.

[8] J.Ambjørn, L.Chekhov, C.F.Kristjansen and Yu.Makeenko, "Matrix model calculations beyond the spherical limit", *Nucl.Phys.* **B404** (1993) 127–172 ; Erratum ibid. **B449** (1995) 681, hep-th/9302014.

[9] J. Ambjørn, B. Durhuus, J. Fröhlich, "Diseases of triangulated random surface models, and possible cures", *Nucl. Phys.* **B257**, p. 433-449.

[10] J.Ambjørn, C.F.Kristjansen, "From 1-matrix model to Kontsevich model", *Mod. Phys. Lett.* **A8**(1993)2875, hep-th/9307063.

[11] O. Babelon, " Petite introduction aux systèmes intégrables classiques et quantiques", cours donné à Saclay, Janvier 2007, notes disponibles à http ://www.lpthe.jussieu.fr/ babelon/saclay/2007.pdf.

[12] O. Babelon, D. Bernard, M. Talon, *Introduction to Classical Integrable Systems* (Cambridge University Press).

[13] T.Banks, M.R.Douglas, N.Seiberg, S.H.Shenker, *Phys. Lett.* **B238**(1990)279.

[14] S. Bergman, M. Schiffer, "Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics", Academic Press Inc., Publishers, New York, NY, 1953.

[15] M.Bershadsky, S.Cecotti, H.Ooguri and C.Vafa, "Kodaira-Spencer theory of gravity and exact results for quantum string amplitudes", *Commun. Math. Phys.* **165** (1994) 311.

[16] M. Bertola, "Two-matrix model with semiclassical potentials and extended Whitham hierarchy", *J.Phys.* **A39** 8823-8856 (2006), hep-th/0511295.

[17] M. Bertola, "Free Energy of the Two-Matrix Model/dToda Tau-Function", preprint CRM-2921 (2003), hep-th/0306184.

[18] G. Bonnet, F. David, B. Eynard, "Breakdown of universality in multi-cut matrix models", *J.Phys.* **A33** 6739-6768 (2000).

[19] V.Bouchard, "Toric Geometry and String Theory", *Oxford University DPhil Thesis*, hep-th/0609123.

[20] D.V.Boulatov, V.A.Kazakov, "The Ising model on a random planar lattice : the structure of phase transition and the exact critical exponents", *Phys. Lett.* **B186**(1987)379.

[21] E. Brézin, N. Deo, *Phys. Rev.* **E59** (1999) 3901, cond-mat/9805096.

[22] E. Brézin, C. Itzykson, G. Parisi, and J.B. Zuber, *Comm. Math. Phys.* **59**, 35 (1978).

[23] E. Brézin, V.A. Kazakov, *Phys. Lett.* **B236**(1990)144.

[24] L.Cantini, notes privées.

[25] L.Chekhov, "Genus one corrections to multi-cut matrix model solutions", *Theor. Math. Phys.* **141** (2004) 1640–1653, hep-th/0401089.

[26] L. Chekhov, "Matrix models with hard walls : Geometry and solutions", *J.Phys.* **A39** (2006) 8857-8894, hep-th/0602013.

[27] L.Chekhov, B.Eynard, "Hermitian matrix model free energy : Feynman graph technique for all genera", *J. High Energy Phys.* **JHEP03** (2006) 014, hep-th/0504116.

[28] L.Chekhov, B.Eynard, "Matrix eigenvalue model : Feynman graph technique for all genera", *J. High Energy Phys.* **JHEP 0612** (2006) 026, math-ph/0604014.

[29] J.M.Daul, V.Kazakov, I.Kostov, "Rational Theories of 2D Gravity from the Two-Matrix Model", *Nucl.Phys.* **B409** (1993) 311-338, hep-th/9303093.

[30] F. David, "Planar diagrams, two-dimensional lattice gravity and surface models", *Nucl.Phys.* **B257**(1985)45.

[31] P. Deligne, D. Mumford, "The irreducibility ofthe space ofcurves of given genus", *IHES***36**(1969)75.

[32] N. Deo, *Nucl. Phs.* **B504**(1997)609, cond-mat/9703136.

[33] R.Dijkgraaf, "Intersection theory, integrable hierarchies and topological field theory", in J.Frohlich and al. (eds), *New symmetry principles in quantum field theory*, Plenum Press, p.95 ; hep-th/9201003.

[34] P. Di Francesco, P. Ginsparg, J. Zinn-Justin, "2D Gravity and Random Matrices", *Phys. Rep.* **254**, 1 (1995).

[35] P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Sénéchal, "Conformal field theory", Springer, 1999.

[36] R.Dijkgraaf and C.Vafa, "Matrix Models, Topological Strings, and Supersymmetric Gauge Theories", *Nucl.Phys.* **B644** (2002) 3–20, hep-th/0206255 ; "On Geometry and Matrix Models", *Nucl.Phys.* **B644** (2002) 21–39, hep-th/0207106 ; "A Perturbative Window into Non-Perturbative Physics", hep-th/0208048.

[37] R.Dijkgraaf, A.Sinkovics, M.Temurhan, "Matrix models and gravitational corrections", *Adv. Theor. Math. Phys.* **7**(2004)1155, hep-th/0211241.

[38] M. Douglas, *Phys. Lett.* **B238**(1990)176.

[39] M. Douglas, S. Shenker, *Nucl. Phys.* **B335**(1990)635.

[40] F.J. Dyson, "correlations between the eigenvales of a random matrix", Comm. Math. Phys. **19** (1970) 235-50.

[41] B. Eynard, M.L. Mehta, "Matrices coupled in a chain : eigenvalue correlations", J. Phys. A : Math. Gen. **31** (1998) 4449-4456.

[42] B. Eynard, "Topological expansion for the 1-hermitian matrix model correlation functions", JHEP/024A/0904, hep-th/0407261.

[43] B. Eynard, "Large N expansion of the 2-matrix model", *JHEP* **01** (2003) 051, hep-th/0210047.

[44] B.Eynard, "Loop equations for the semiclassical 2-matrix model with hard edges", *J.Stat.Mech.* **0510** (2005) P006, math-ph/0504002.

[45] B. Eynard, A. Kokotov, and D. Korotkin, "$1/N^2$ corrections to free energy in Hermitian two-matrix model", hep-th/0401166.

[46] B. Eynard, "Master loop equations, free energy and correlations for the chain of matrices", *J. High Energy Phys.* **JHEP11**(2003)018, xxx, hep-th/0309036, ccsd-00000572.

[47] B. Eynard "An introduction to random matrices", cours donné à Saclay, Octobre 2000, notes disponibles à http ://www-spht.cea.fr/articles/t01/014/.

[48] B.Eynard, A.Prats Ferrer, *Comm. Math. Phys.* **264**(2005) 115, hep-th/0502041.

[49] B.Eynard, " Formal matrix integrals and combinatorics of maps", math-ph/0611087.

[50] B. Eynard, "The 2-matrix model, biorthogonal polynomials, Riemann-Hilbert problem, and algebraic geometry", thèse d'habilitation de l'Université Paris 7, en français, math-ph/0504034.

[51] B.Eynard, N.Orantin, "Topological expansion of mixed correlation function in the hermitian 2 matrix model", en préparation.

[52] H.M. Farkas, I. Kra, "Riemann surfaces" 2nd edition, Springer Verlag, 1992.

[53] J.D. Fay, "Theta functions on Riemann surfaces", Springer Verlag, 1973.

[54] M. Green, J. Schwarz, E. Witten, *Superstring theory*, Cambridge University Press (1987).

[55] D. Gross, A. Migdal, *Phys. Rev. Lett.* **64**(1990)127 ; *Nucl. Phys.* **B340**(1990)333.

[56] Harish-Chandra, *Amer. J. Math.* **79** (1957) 87.

[57] K.Hori, S.Katz, A.Klemm, R.Pandharipande, R.Thomas, C.Vafa, R.Vakil, E.Zaslow, "Mirror symmetry", American Mathematical Society, 2003.

[58] M.x.Huang, A.Klemm, "Holomorphic anomaly in gauge theories and matrix models", hep-th/0605195.

[59] C.Itzykson, J.B.Zuber, *J. Math. Phys.* **21** (1980) 411.

[60] C.Itzykson, J.M.Drouffe, *Théorie statistique des champs*, Inter Editions, ed. du CNRS (1989).

[61] C.Itzykson, J.B.Zuber, "Combinatorics of the Modular Group II : The Kontsevich integrals", *Int.J.Mod.Phys.* **A7** (1992) 5661-5705, hep-th/9201001 .

[62] V.G. Kac, *Spinger lecture notes in physics* **94**(1979)441.

[63] E. Kanzieper, V. Freilikher, *Phys. Rev.* **E57** (1998) 6604, cond-mat/9709309.

[64] V.A. Kazakov, I. Kostov, A.A. Migdal, "Critical properties of randomly triangulated planar random surfaces", *Physics Letters* **B**, 1985.

[65] V.A. Kazakov, "Bilocal regularization of models of random surfaces" *Physics Letters B* **150**(1985), Issue 4, p. 282-284.

[66] V.A. Kazakov, "Ising model on a dynamical planar random lattice : exact solution", *Phys Lett.* **A119**, 140-144 (1986).

[67] V.A. Kazakov, A. Marshakov, "Complex Curve of the Two Matrix Model and its Tau-function", *J.Phys.* **A36** (2003) 3107-3136, hep-th/0211236.

[68] S.Kharchev, A.Marshakov, "On $p-q$ duality and explicit solutions in $c<1$ 2d gravity models", hep-th/9303100.

[69] A.Klemm, W.Lerche, P.Mayr, C.Vafa, N.P.Warner, "Self-dual Strings and N=2 Supersymmetric Field Theory", *Nucl. Phys.* **B477**(1996)746, hep-th/9604034.

[70] A.Klemm, M.Mariño, S.Theisen, "Gravitational corrections in supersymetric gauge theory and matrix models', *JHEP* **0303**(2003)051, hep-th/0211216.

[71] V.G. Knizhnik, A.M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov, Mod. Phys. Lett **A3** (1988) 819.

[72] M.Kontsevich, "Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function", *Funk. Anal. Prilozh.* **25** (1991) 50-57 ; Max-Planck Institut preprint MPI/91-47, MPI/91-77.

[73] I.K.Kostov, " Conformal field theory techniques in random matrix models", hep-th/9907060.

[74] I.K. Kostov, "Bilinear functional equations in 2d quantum gravity", hep-th/9602117.

[75] A.Kokotov, D.Korotkin, " Bergmann tau-function on Hurwitz spaces and its applications", math-ph/0310008.

[76] A.Kokotov, D.Korotkin, " Tau functions on Hurwitz spaces", *Math. Phys., Analysis and Geom.* **7** (2004), no. 1, 47-96 ,math-ph/0202034.

[77] I.Krichever "The τ-function of the universal Whitham hierarchy, matrix models and topological field theories", *Commun.Pure Appl.Math.* **47** (1992) 437 ; hep-th/9205110

[78] J.M.F.Labatista, P.M.Llatas, "Topological matter in two dimensions", *Nucl. Phys.* **B379**(1992)220, hep-th/9112051.

[79] A.S.Losev, A.Marshakov, N.Nekrasov, "Small Instantons, Little Strings and Free Fermions", hep-th/0302191.

[80] M. Mariño, *Chern-Simons Theory, Matrix Models, and Topological Strings* (International Series of Monographs on Physics, 131, Oxford University Press).

[81] M. Mariño, "Les Houches lectures on matrix models and topological strings", Lecture given in Les Houches, *applications of random matrices in physics*, june 2004, hep-th/0410165.

[82] M. Mariño, "Open string amplitudes and large order behavior in topological string theory", hep-th/0612127.

[83] A.Marshakov, A.Mironov, A.Morozov, "On Equivalence of Topological and Quantum 2d Gravity", *Phys. Lett.* **B274** (1992) 280, hep-th/9201011.

[84] M.L. Mehta, *Random Matrices*,2nd edition, (Academic Press, New York, 1991).

[85] M.L. Mehta, *Commun. Math. Phys.* **14**((1986)21.

[86] A.A. Migdal, *Phys. Rep.* **102**(1983)199.

[87] M. Mirzakhani, "Simple geodesics and Weil-Petersson volumes of moduli space of bordered Riemann surfaces", preprint.

[88] M. Mirzakhani, "Weil-Petersson volumes and intersection theory on the moduli space of curves", preprint.

[89] A. Morozov, *Mod. Phys. Lett.* **A7** (1992) 3503, hep-th/9209074.

[90] N.Nekrasov, "Seiberg-Witten prepotential from instanton counting", *Adv. Theor. Math. Phys.* **7**, 831(2004), hep-th/0206161.

[91] N.Nekrasov, A.Okounkov, "Seiberg-Witten Theory and Random Partitions", hep-th/0306238.

[92] A. Neveu, J.H. Schwarz, *Nucl. Phys.* **B31** 86.

[93] A.Okounkov, R.Pandharipande, "Gromov-Witten theory, Hurwitz numbers, and Matrix models,I", math/0101147.

[94] A.M. Polyakov, *Phys. Lett.***B103**(1981)207.

[95] P. Ramond, " Dual theory for fermions", *Phys. Rev.* **D3**(1971)2415.

[96] H.E. Rauch, " Weierstrass points, branch points, and moduli of Riemann surfaces", *Comm. Pure Appl. Math.*, **12** (1959) 543-560.

[97] S. Shatashvili, preprint IASSNS-HEP-92/61.

[98] N.Seiberg, E.Witten, "Electric-Magnetic Duality, Monopole Condensation, And Confinement In N=2 Supersymmetric Yang-Mills Theory", hep-th/9401087.

[99] M. Staudacher, " Combinatorial solution of the 2-matrix model", *Phys. Lett.* **B305** (1993) 332-338.

[100] G. 't Hooft, *Nuc. Phys.* **B72**, 461 (1974).

[101] C. Tracy, H. Widom, "Level-spacing distributions and the Airy kernel", Comm. Math. Phys. **159** (1994) 151-174.

[102] W.T. Tutte, "A census of planar triangulations", *Can. J. Math.* **14** (1962) 21-38.

[103] W.T. Tutte, "A census of planar maps", *Can. J. Math.* **15** (1963) 249-271.

[104] Z.X. Wang, D.R. Guo, "Special Functions", World Scientific, 1989.

[105] E. P. Wigner, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **47** (1951) 790, reprinted in C. E. Porter, *Statistical theories of spectra : fluctuation* (Academic Press, New-York, 1965).

[106] E.Witten, "Topological Sigma Models", *Com. Math. Phys.* **118**(1988)411.

[107] E.Witten, "Mirror manifolds and topological field theory", hep-th/9112056.

[108] E. Witten, "Two-dimensional gravity and inersection theory on moduli space", *Surveys in Differential Geometry* **1**(1990)243.

[109] P. Zinn-Justin, "Universality of correlation functions of hermitian random matrices in an external field", Commun. Math. Phys. 194, 631-650 (1998), cond-mat/9705044.