



UNIVERSITÉ PARIS-SUD XI

THÈSE

Spécialité : **PHYSIQUE THÉORIQUE**

Présentée
pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Paris XI

par

Cédric Delaunay

Sujet

**Brisure de symétrie électrofaible :
Origine et conséquences**

Soutenue le 2 octobre 2008 devant la commission d'examen :

MM. Sacha Davidson, rapporteur,
Emilian Dudas, rapporteur,
Ulrich Ellwanger, président
Christophe Grojean, directeur de thèse,
Mariano Quirós.

Je voudrais remercier...

... tout d'abord mon directeur de thèse, Christophe Grojean, qui non seulement m'a offert l'opportunité de me plonger dans les mystères de la physique des hautes énergies, mais a aussi su faire preuve d'une patience sans borne au cours de ces trois années de doctorat. Si la condition d'étudiant en thèse est, à certains égards, loin d'être enviable, il réussit le pari d'en réunir autour de moi les meilleures. Pour tout cela je le remercie infiniment. Je ne peux pas ne pas avoir une pensée pour François Delduc qui m'a laissé la chance de réussir mon DEA à l'École Normale Supérieure de Lyon.

Je tiens à remercier aussi l'Institut de Physique Théorique du CEA de Saclay, pour m'avoir accueilli en son sein pendant cette thèse, le Michigan Center for Theoretical Physics et l'université Cornell, où une partie de ce travail a été réalisée, sans oublier la division de physique théorique du CERN pour son accueil durant près de deux années.

C'est avec beaucoup de gratitude que je remercie tous les membres de mon jury de thèse d'avoir accepté d'en suivre la soutenance et plus particulièrement Sacha Davidson et Emilian Dudas pour avoir pris le temps de lire ce manuscrit.

Je suis également extrêmement reconnaissant envers mes autres collaborateurs Csaba Csáki, Yuval Grossmann et James Wells pour leur enseignement de la rigueur nécessaire à une recherche de haut niveau. Je remercie par ailleurs tous ceux qui m'ont permis, à travers de nombreuses discussions, parfois vives mais toujours profitables, d'affûter mes vues sur la physique des particules qui, je l'espère, se reflètent dans ce mémoire. En particulier, j'envoie un grand merci à Guillermo Ballesteros, Michele Frigerio, Pierre Hosteins, Ninh Duc Le, Francesco Riva, Géraldine Servant et John Ward.

Il m'est impossible d'oublier le soutien d'un vieil ami sans qui ce pari un peu fou n'aurait vraisemblablement jamais été tenu. Encore merci Stéphane. Je réserve également de chaleureuses pensées à Naïs pour ce réconfort constant depuis de nombreuses années maintenant.

Enfin, je voudrais dire qu'il ne faut pas, en réalité, trois ans pour faire un doctorat, mais trois générations. Il aura fallu une profonde abnégation, un travail acharné et un immense courage à mes grands-parents pour s'en sortir, partis de rien. Les mêmes qualités n'ont pas été moins nécessaires à mes parents pour me permettre d'écrire ces pages aujourd'hui. Au regard de ces deux vies de labeur et de leurs sacrifices, ceux concédés ces trois dernières années paraissent insignifiants. Pour cette raison et tout l'amour que je vous porte, je vous dédie ce mémoire.

Table des matières

Introduction	1
1 Théories des champs effectives au-delà de l'échelle électrofaible	11
1.1 Qu'est-ce qu'une théorie effective?	11
1.1.1 Construire la théorie effective	12
1.1.2 Action de Wilson et exemple de matching	17
1.2 Le Modèle Standard effectif	23
1.2.1 Exemples de théories effectives des champs	23
1.2.2 Approche effective de la nouvelle physique au-delà de m_W	25
1.2.3 Tests de précisions électrofaibles aux collisionneurs	29
1.3 Paramétrer les corrections effectives au Modèle Standard	32
1.3.1 Les paramètres obliques de Peskin-Takeuchi	33
1.3.2 Corrections (non)-obliques : Une paramétrisation minimale	40
Bibliographie	44
2 Asymétrie matière/antimatière au-delà du Modèle Standard	45
2.1 Introduction à la baryogenèse primordiale	45
2.1.1 Un univers apparemment dépourvu d'antimatière	45
2.1.2 Conditions de Sakharov	48
2.1.3 Les conditions de Sakharov dans le Modèle Standard	49
2.1.4 Mécanisme de Baryogenèse électrofaible	59
2.1.5 Autres mécanismes de baryogenèse	62
2.1.6 Baryogenèse électrofaible au-delà du Modèle Standard	65
2.2 Potentiel quantique non renormalisable à température finie	71
2.2.1 Techniques de calcul du potentiel à une boucle à $T > 0$	71
2.2.2 Potentiel effectif du Higgs à une boucle et $T > 0$	74
2.3 Dynamique de la transition de phase et ondes gravitationnelles	93
2.3.1 Surfusion et renforcement de la transition	93
2.3.2 Production et observation d'ondes gravitationnelles	100
Bibliographie	108
3 Un peu de physique en dimensions supplémentaires	113
3.1 Introduction à la physique des dimensions supplémentaires	113
3.1.1 Pourquoi une dimension supplémentaire?	113
3.1.2 Dimension supplémentaire plate ou courbe?	117
3.2 Un premier exemple avec un champ scalaire	123
3.2.1 Action minimale et conditions aux bords	123
3.2.2 Description effective de la dimension compacte	124

3.3	Dynamique des théories de jauge 5d	128
3.3.1	Théorie de Yang–Mills pure	128
3.3.2	Mécanisme de Higgs localisé	133
3.3.3	Équations de quantification et spectres de masse	136
3.4	Fermions de 4d à 5d	137
3.4.1	Quelques technicalités	137
3.4.2	Principe de moindre action pour les fermions	139
3.4.3	Décomposition de Kaluza–Klein et fonctions d’onde	141
3.4.4	Spectre de masse en l’absence de terme de bord et existence d’un mode zéro	146
3.4.5	Termes localisés et conditions aux bords mixtes	147
3.4.6	Masse des fermions dans une dimension supplémentaire	149
	Bibliographie	156
4	Phénoménologie de la saveur leptonique dans AdS₅	159
4.1	Introduction à la physique de la saveur leptonique	160
4.1.1	Propriétés générales des leptons	160
4.1.2	Changements de saveur et angles de mélange	162
4.1.3	Symétrie de saveur discrète : A ₄ dans une coquille de noix	166
4.2	Modèles de brisure de symétrie électrofaible dans AdS ₅	171
4.2.1	Symétrie custodiale et paramètre ρ	172
4.2.2	Modèles $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$	174
4.3	Un modèle de leptons dans AdS ₅	184
4.3.1	Masses et angles de mélange des leptons à partir d’AdS ₅	184
4.3.2	Stabilité du modèle	193
4.3.3	Test de précisions électrofaible et exploration de l’espace des paramètres	200
4.3.4	Violation de la saveur leptonique	204
	Bibliographie	210
	Conclusion	213
	Publications	215

Introduction

Naturellement, la physique vise à décrire le comportement de la matière qui nous entourent. En ce sens, la physique des particules fournit une description des interactions fondamentales entre ses constituants microscopiques les plus élémentaires, qui sous-tendent *a priori* les diverses dynamiques apparaissant à plus grandes distances. En ce sens, une théorie de physique des particules est un cadre conceptuel duquel émergent un certain nombre de relations connectant plusieurs grandeurs physiques ou observables qu'il est possible de mesurer. En outre, une théorie validée par l'expérience devient intellectuellement intéressante lorsqu'elle relie un très grand nombre de quantités mesurées, c'est-à-dire lorsqu'elle ne possède qu'un nombre restreint de paramètres libres. Par conséquent, l'approche la plus naturelle pour formuler ces connexions consiste à imposer des symétries. Il n'est alors pas rare de se borner à une vision esthétique de ces symétries et d'en oublier les observables qu'elles relie. Outre le caractère hautement subjectif des critères d'esthétisme ou de beauté d'une théorie, concentrer ses efforts uniquement sur ces derniers est une voie dangereuse. Par exemple, il est tentant de penser que le cercle est une figure géométrique esthétique dont la régularité lui confère une certaine attractivité. C'est sans doute ce qui poussa Ptolémée, ainsi que tous les astronomes jusqu'à Copernic, à succomber à la tentation de n'utiliser que lui pour décrire le mouvement des planètes dans un système géocentrique. La complexité apparente des trajectoires observées conduisit à des modélisations alambiquées, en épicycles construites à partir de différents cercles. De sorte que, afin de reproduire les observations, la beauté initiale de la théorie était profondément obscurcie. Bien sûr, les trajectoires célestes furent beaucoup plus simples à étudier dans le système héliocentrique, notamment défendu par Galilée, où le cercle fut remplacé par une figure moins symétrique, l'ellipse. S'il y a une morale à tirer de cet épisode historique, c'est que l'esthétisme scientifique est un luxe, un luxe qu'une théorie ne peut se payer que si elle rend compte avec suffisance de ce que l'on observe. À lui seul, l'esthétisme est alors inutile, voire stérile, car l'observable doit rester au centre de l'attention.

L'avènement du Modèle Standard

Depuis maintenant de nombreuses années, nous savons que le monde qui nous entoure, des molécules composant notre corps jusqu'à celles présentes dans les galaxies les plus lointaines jamais observées, est construit, en tout et pour tout, à partir d'une poignée de particules élémentaires. Aujourd'hui au nombre de douze¹, six quarks et six

¹nombre qui doit en fait, pour chacune d'entre elles, être multiplié par deux chiralités et, seulement pour les quarks, par trois couleurs.

leptons, seulement six d'entre elles sont stables, les quarks up et down formant les noyaux atomiques, l'électron complétant ainsi l'atome ainsi que les trois neutrinos. Nous savons également que ces briques élémentaires n'interagissent que de quatre façons différentes, du moins jusqu'aux plus grandes énergies jamais sondées expérimentalement, que sont les forces nucléaires forte et faible, électromagnétique et la gravitation. Seulement les deux dernières ont une portée macroscopique et régissent le comportement de la matière au-delà de l'échelle de l'atome. De plus, la dynamique quantique et relativiste des interactions forte, faible et électromagnétique est décrite par une théorie des champs dont la précision incroyable avec laquelle elle reproduit les observations lui a valu le titre de Modèle Standard. Ce modèle repose sur l'hypothèse que chacune des trois interactions à distance est véhiculée par l'échange de bosons vecteurs dont la dynamique obéit à une symétrie de jauge. Le groupe de jauge du Modèle Standard $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ implique l'existence de 8 gluons médiateurs de la force de couleur, des bosons faibles W^\pm et Z ainsi que du photon. Il prédit notamment le mariage électrofaible des forces électromagnétique et nucléaire faible à une énergie autour de 100 GeV, à partir de laquelle le photon et le Z ont un comportement similaire. La gravitation, quant à elle, a un statut particulier car il ne s'agit pas à proprement parler d'une interaction, mais tout au plus d'un effet géométrique que l'on associe à la courbure de l'espace-temps. Selon la relativité générale d'Einstein, l'équivalence locale entre la force gravitationnelle et un mouvement accéléré fait de la gravité un simple mirage. Malgré cette approche radicalement différente, l'interaction gravitationnelle peut être formulée, à une échelle microscopique, comme une théorie des champs définie sur un espace-temps plat. La faible courbure se manifestant comme l'échange d'une particule de gravité, le graviton. Ainsi, jusqu'à des énergies de l'ordre d'une centaine de GeV, le Modèle Standard couplé à la gravitation d'Einstein fournit une description valide de toutes les forces de la nature et ce même au niveau quantique, pourvu qu'elles restent dans un régime de faible intensité, le couplage gravitationnel, c'est-à-dire la constante de Newton G_N , étant dimensionnée. En outre, ce modèle, et par là-même la nature qu'il décrit, semble contenir essentiellement deux échelles d'énergie très différentes avec d'un côté l'échelle d'unification électrofaible $m_{EW} \sim 100$ GeV et de l'autre l'énergie naturelle de la gravité, la masse de Planck $M_{Pl} = G_N^{-1/2} \sim 10^{19}$ GeV, soit $m_{EW} \sim 10^{-17} M_{Pl}$. De manière assez intrigante, la chromodynamique quantique régissant l'interaction forte accuse un changement brutal de comportement à une échelle relativement proche de m_{EW} (par rapport à M_{Pl}) en induisant la condensation des quarks en hadrons au dessous de $\Lambda_{QCD} \sim 100$ MeV. La nature semble alors afficher une importante hiérarchie, pas moins de 17 ordres de grandeur dans l'intensité des interactions que nous lui connaissons, faisant de la gravitation une force plus que négligeable à l'échelle électrofaible et en dessous. La raison pour laquelle nous subissons l'attraction gravitationnelle à une échelle macroscopique tient alors uniquement à son impossibilité d'être écrantée à longue distance. L'existence d'une telle hiérarchie est mystérieuse mais n'est pas, *a priori*, problématique en soi. Cet écart de 17 ordres de grandeur est souvent considéré à lui seul comme un problème, néanmoins il paraît important de noter qu'il n'en constitue vraiment un que dans une philosophie unificatrice dans laquelle toutes les échelles d'énergie devraient dériver d'une seule, dite fondamentale. La question soulevée par cette hiérarchie porte alors sur la nature du mécanisme, nécessaire dans cette approche, qui a considérablement affaibli la gravité ou, d'un point de vue opposé, qui a renforcé les trois autres. Dans le cas contraire il s'agit simplement d'un fait dont il faut tenir compte mais pas nécessairement rendre compte. Néanmoins, l'extrême faiblesse de la gravitation devient réellement problématique lorsque l'on s'intéresse de plus près à la brisure de la symétrie électrofaible

$SU(2)_L \times U(1)_Y$.

Quand la hiérarchie devient un problème

L'action des champs de spin 2, 1 et 1/2, invariante sous le groupe de jauge du Modèle Standard s'écrit schématiquement comme :

$$S_{g,A,\psi} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[M_{Pl}^2 R - \frac{1}{4g^2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi \right] \quad (1)$$

où $\psi = \psi_L + \psi_R$. Elle décrit *a priori* les quatre interactions fondamentales jusqu'à des énergies de l'ordre de M_{Pl} . Comme dans toute théorie de jauge, l'invariance sous $SU(2)_L \times U(1)_Y$ de l'action électrofaible impose nécessairement une portée infinie aux interactions faibles, le W et Z sont de masse nulle. De plus, la chiralité de ces interactions, distinguant ψ_L de ψ_R , prédit également des fermions de masse nulle. Cependant, puisque seuls l'électromagnétisme et la gravité sont perceptibles macroscopiquement, les bosons faibles sont nécessairement massifs, afin de rendre compte de la rareté des désintégrations radioactives, et la symétrie électrofaible doit donc être brisée. L'ajout de termes de masse à la main n'est physiquement pas acceptable puisqu'ils correspondraient à une brisure explicite entraînant la perte des propriétés ultra-violettes de la théorie de jauge, notamment sa renormalisabilité. L'unique possibilité est alors une brisure spontanée, dont le mécanisme de Higgs est la paramétrisation la plus simple. On augmente ainsi la théorie ci-dessus d'un champ scalaire chargé sous $SU(2)_L \times U(1)_Y$ dont l'action prend la forme invariante suivante :

$$S_H = \int d^4x \sqrt{-g} \left[|D_\mu H|^2 - m^2 |H|^2 - \lambda |H|^4 - y\bar{\psi}_L H \psi_R + h.c. \right] \quad (2)$$

Lorsque $m^2 < 0$, le Higgs devient tachyonique et développe un condensat homogène dans le vide d'énergie $v_H = (-m^2/\lambda)^{1/2} \sim m_{EW}$, brisant ainsi spontanément la symétrie de jauge. La masse est alors le résultat d'une propagation dans un vide en réalité non vidéé mais rempli d'un condensat homogène. Elle n'est rien d'autre que l'inertie effective qu'affichent les particules en frottant sur le condensat de Higgs auquel elles sont couplées. Ainsi $m_\psi = yv_H$ et $m_{W,Z} \sim gv_H \sim m_{EW}$. Un point capital est que la masse du Higgs doit être légère devant l'échelle de Planck $-m^2 \sim m_{EW}^2 \ll M_{Pl}^2$ pour conserver un sens perturbatif à la théorie $\lambda \lesssim 1$. Or, bien que rien n'interdise une telle hiérarchie entre les deux seuls paramètres dimensionnés de l'action $S_H + S_{g,A,\psi}$, celle-ci n'est pas stable lorsque la théorie entre dans un régime quantique, car la masse du Higgs est extrêmement sensible à la physique ultra-violette. En effet, dès l'ordre d'une boucle, la correction quantique à m^2 est quadratiquement divergente dans l'ultra-violet :

$$\delta m^2 = \frac{\Lambda^2}{32\pi^2} \left[\frac{3}{4}(3g^2 + g'^2) + 6\lambda - 6y^2 \right] + \mathcal{O}(\log \Lambda), \quad (3)$$

où Λ est l'échelle de *cut-off* de la théorie au-delà de laquelle elle perd tout pouvoir prédictif. En présence de la gravité, on a naturellement $\Lambda = M_{Pl}$ et la correction radiative à la masse du Higgs repousse complètement ce champ à l'échelle ultra-violette et la hiérarchie $m_{EW} \ll M_{Pl}$ est détruite, à moins qu'il existe une nouvelle physique à une échelle M proche de l'échelle électrofaible pour remplacer le cut-off gravitationnel.

En ce sens, l'instabilité du Higgs à l'échelle électrofaible associée à l'existence d'une gravité faible prédit l'existence de nouveaux degrés de liberté entre $m_{EW} \lesssim M \ll M_{Pl}$. Une autre motivation importante en faveur d'une nouvelle physique est l'absence de dynamique dans la brisure véhiculé par le mécanisme de Higgs, permettant de comprendre pourquoi $m^2 < 0$. En l'absence de gravité, c'est-à-dire pour $M_{Pl} \rightarrow \infty$, s'il n'existe pas d'autres particules (et/ou force) au-delà du Modèle Standard, la théorie est renormalisable et le cut-off peut être envoyé à l'infini² tout en renormalisant la masse du Higgs à $m_{EW} \sim 100$ GeV. Cette instabilité du Higgs est dû au fait qu'il s'agit d'un champ de spin nul, dont la masse n'est protégé par aucune symétrie, ce qui constitue la source des nombreux modèles de nouvelle physique à l'échelle M conçus pour maintenir un Higgs léger.

Interprétation physique d'un ajustement fin A première vue, si la symétrie électrofaible est brisée par un scalaire fondamental, le problème de hiérarchie à lui seul prédit l'existence de nouvelles particules. Néanmoins, il est toujours possible de jouer l'avocat du diable en considérant qu'une conspiration est à l'œuvre dans la théorie pour préserver un Higgs léger, malgré l'instabilité de la hiérarchie. Une telle conspiration se matérialise en pratique sous la forme d'un ajustement fin des paramètres de la théorie. Par exemple à une boucle, la masse tachyonique totale du Higgs est donnée par :

$$m_{ph}^2 = m^2 + \delta m^2, \text{ avec } \delta m^2 \sim M_{Pl}^2. \quad (4)$$

On peut alors choisir le paramètre du lagrangien m^2 proche de la masse de Planck et tel qu'il compense δm^2 avec une précision aussi grande que $m_{EW}^2/M_{Pl}^2 \sim 10^{-34}$, de sorte que la masse physique m_{ph} reproduise la valeur observée de l'échelle électrofaible m_{EW} . Évidemment, un tel ajustement ou *fine-tuning* doit être refait ordre par ordre en perturbations. Il est alors possible de se placer dans l'optique qu'il n'y a pas de nouvelle physique à une échelle intermédiaire et que la valeur ajustée de m^2 est juste ce qu'elle doit être pour reproduire les observations. Après tout, il ne s'agit ni plus ni moins que d'un paramètre libre de la théorie. On peut cependant avancer l'argument suivant à l'encontre du fine-tuning. Remarquons tout d'abord que l'ajustement à réaliser est seulement incroyablement important dans l'hypothèse où seule la gravitation existe au-delà de m_{EW} . Cette assertion est toutefois spéculative car elle suppose qu'aucun phénomène physique nouveau n'apparaît lorsque 17 ordres de grandeur en énergie sont balayés. Bien que cela soit très peu probable, rien ne l'interdit *a priori*. Néanmoins, la nécessité d'ajuster des paramètres à ce niveau de précision ne peut que témoigner en faveur d'une nouvelle physique pour la raison suivante. Les champs du Modèle Standard sont construits pour rendre compte de ce qui se passe à l'échelle électrofaible et considérer que tout phénomène physique soit paramétré jusqu'à des énergies aussi grandes que M_{Pl} par des degrés de liberté définis 17 ordres de grandeur plus bas est un non-sens. Cela suggère, par exemple, que la physique des noyaux ($L_{noy} \sim 10^{-15}$ m) peut être décrite à l'aide d'éléphants ($L_{elp} \sim$ m) comme objets fondamentaux. Bien sur cela est possible, au prix d'un « dressage » aussi précis que L_{noy}/L_{elp} , mais il est beaucoup plus naturel d'étudier la dynamique du noyau en terme de protons et de neutrons. C'est exactement l'idée que traduit le fine-tuning de la masse du Higgs : le Modèle Standard ne peut être extrapoler jusqu'à M_{Pl} , il doit y avoir une nouvelle physique

²Comme tn QED, la présence d'un facteur $U(1)$ d'hypercharge dans le groupe de jauge du Modèle Standard introduit une nouvelle échelle, le pôle de Landau, pour laquelle $g' \rightarrow \infty$ pour $E = E_L \sim$. La théorie doit donc modifier à haute énergie même en l'absence de gravité.

à une échelle intermédiaire M , qui s'avère plus adéquate pour décrire la brisure de symétrie électrofaible.

Analogie électrodynamique Un analogue à cette situation est la masse de l'électron en électrodynamique classique. Suite au champ électrique qu'il produit autour de lui, l'électron voit sa masse corrigée, lorsque la théorie classique est extrapolée jusqu'au rayon classique de l'électron $r_c \sim 10^{-15}$ m \sim GeV $^{-1}$, d'une contribution beaucoup plus grande que la valeur observée. La masse nue doit alors être ajustée de manière à compenser cette correction jusqu'à $m_e \sim 0,5$ MeV. Or, il est clair aujourd'hui que ce problème n'a plus lieu d'être, dans la théorie quantique, en introduisant un nouveau degré de liberté, le positron, qui apparaît à une énergie de $2m_e$, correspondant à une distance de $r_e \sim m_e^{-1} \sim 10^{-12}$ m. La théorie classique de l'électrodynamique n'est plus valide jusqu'à r_c mais doit être remplacée par QED à partir de r_e et le problème de fine-tuning disparaît, le positron assurant la compensation de la correction électromagnétique au dessus de r_e .

Quelle énergie pour une physique au-delà du Modèle Standard ?

Dans la perspective où le fine-tuning du Modèle Standard est la signature d'une nouvelle physique au-delà, à quelle échelle apparaît-elle ? Des expressions (3) et (4) on déduit que l'absence de fine-tuning requiert le remplacement de M_{Pl} par $M \sim m_{EW}/4\pi \sim$ TeV. Deux possibilités s'offrent alors. Soit le cut-off ultra-violet, c'est-à-dire l'échelle fondamentale de la gravitation, est réellement abaissé au TeV, soit la masse du Higgs est protégée par une symétrie brisée à cette échelle de sorte qu'elle écrante le Higgs de la physique ultra-violette, car, étant à l'œuvre au dessus du TeV, elle y assure l'annulation des termes quadratiquement divergents.

Pourquoi la gravitation est-elle si faible ? Un premier champ d'investigations, destinées à résoudre le problème de hiérarchie, consiste à tenter de comprendre pourquoi la gravité est une interaction si peu intense ou, en d'autres termes, pourquoi $M_{Pl} \gg$ TeV. Dans l'hypothèse où il existait un mécanisme affaiblissant la gravité et portant ainsi la masse de Planck d'une échelle fondamentale au TeV à 10^{19} GeV, le cut-off ultraviolet saturant la masse du Higgs deviendrait alors naturellement le TeV. La gravité étant de nature purement géométrique, cette possibilité n'est réalisable qu'en modifiant la structure de l'espace-temps, notamment en ajoutant des dimensions d'espace supplémentaires. Ainsi, en d dimensions, l'échelle de la gravitation M_d peut-être réduite au TeV tout en conservant une masse de Planck effective de 10^{19} GeV en quatre dimensions. La gravité 4d apparaît alors faible car le couplage gravitationnel se voit dilué dans les dimensions supplémentaires. Le TeV devient ainsi l'échelle fondamentale du Modèle Standard couplé à la gravité dans un espace-temps à $d > 4$ dimensions et la hiérarchie apparente à 4d est stabilisée. Il s'agit des modèles proposés par Arkani-Hamed, Dimopoulos et Dvali (ADD) dans lesquels la gravité est diluée dans un large volume d'espace transverse. Une alternative aux modèles ADD, avancée par Randall et Sundrum (RS), repose sur la courbure d'une dimension supplémentaire qui permet

d'interpréter le TeV comme une échelle de Planck décalée vers le rouge par le déplacement le long de la dimension transverse. Dans le modèle RS, l'échelle M_d est alors proche de M_{Pl} et le Higgs, localisé en un point de la dimension supplémentaire distant de l'origine, n'est sensible qu'à un mirage infrarouge dérivé de l'échelle fondamentale M_d .

Ainsi, les modèles ADD et RS constituent les deux seules solutions s'attaquant au problème de hiérarchie à la source, c'est-à-dire en fournissant un mécanisme d'affaiblissement de la gravitation quadri-dimensionnelle. D'un autre côté, en restant à quatre dimension, la protection de la masse du scalaire par une symétrie est également très riche d'enseignements et s'appuie notamment sur le concept de naturalité de 't Hooft.

Concept de naturalité et écrantage ultra-violet Selon le critère de naturalité de 't Hooft, une théorie physique, valide jusqu'à une échelle d'énergie M , est considérée comme naturelle lorsque tous ses paramètres sont $\mathcal{O}(1)$ en unité de M . Selon ce principe, un paramètre adimensionné c est autorisé à être beaucoup plus petit que l'unité uniquement lorsque la théorie développe une symétrie supplémentaire dans la limite où celui-ci est nul. En ce sens, la symétrie protège ce paramètre en reliant directement sa taille à son échelle de brisure, soit $c = (M_{break}/M)^n$. Ainsi, dès lors que le Modèle Standard est supposé valide jusqu'à M_{Pl} , la faible masse du Higgs est un exemple de paramètre non naturel³. Contrairement à tous les autres paramètres du modèle, elle n'est protégée par aucune symétrie et reçoit des corrections radiatives importantes qui la ramène vers sa valeur naturelle M_{Pl} . C'est une propriété caractéristique des champs scalaires. La raison est très simple. Une symétrie impose des relations précises entre différents degrés de liberté et contribue alors, par essence, à en réduire le nombre. Un champ de spin zéro, n'en contenant qu'un seul, ne peut donc pas être protégé à lui seul par une symétrie sans qu'il soit condamné à disparaître. La situation est radicalement différente pour des fermions de Dirac, dont la masse est un mélange des chiralités droite et gauche $m\bar{\psi}_L\psi_R + h.c.$. Il est alors possible de conserver $m \ll M_{Pl}$ au niveau quantique grâce à la symétrie chirale. En effet, dans la limite $m \rightarrow 0$, l'action de Dirac devient invariante sous la transformation chirale $\psi_L \rightarrow e^{i\alpha}\psi_L$, $\psi_R \rightarrow e^{-i\alpha}\psi_R$. Les corrections radiatives à la masse m , brisant cette symétrie, sont alors naturellement proportionnelles à m et non M_{Pl} . Pour les champs de spin 1, la situation est similaire car l'action de Yang-Mills devient invariante sous les transformations de jauge $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\eta$ dans la limite de masse nulle. Ici encore, lorsque la symétrie de jauge est spontanément brisée, les corrections quantiques sont contrôlées par la masse du boson de jauge.

Protéger le Higgs à l'aide d'une symétrie Une solution au problème de hiérarchie consiste alors utiliser les symétries précédentes pour stabiliser naturellement le Higgs à l'échelle électrofaible, en le reliant à des représentations de spin plus élevé. La supersymétrie, en rassemblant fermions et scalaires dans un seul multiplet chirale, permet de transposer la protection de la symétrie chirale aux scalaires. Par conséquent, les corrections quantiques à leurs masses m_s^2 va comme m_s^2 et la dépendance quadratique en l'échelle de cut-off est éliminée par l'échange de partenaires supersymétriques.

³en présence de la gravitation, un autre cas, non des moins curieux, est celui de la constante cosmologique, pour laquelle une valeur naturelle est $\Lambda_c \sim M_{Pl}^4$. Or, la « pesée » de l'univers réalisé par WMAP et l'analyse des supernovae lointaines indiquent une valeur 120 ordres de grandeur plus faible $\Lambda_c \sim (\text{meV})^4$.

Lorsque la supersymétrie est brisée, cette annulation ne se produit qu'au dessus de l'échelle de brisure M_{SUSY} . Pour le Higgs du Modèle Standard, une stabilisation naturelle sous les corrections radiatives, soit $\delta m^2 \sim m^2 \sim m_{EW}^2$, implique donc $M_{SUSY} \sim \text{TeV}$.

Une autre possibilité consiste à étendre la symétrie de Lorentz à $SO(4, 1)$, et de plonger le Higgs dans un champ de spin 1 en cinq dimensions. Après compactification de la dimension supplémentaire, celui-ci se décompose alors sous $SO(3, 1)$ en un vecteur, décrivant l'interaction de jauge 4d, et un scalaire pouvant jouer le rôle du Higgs. Dans ces modèles, dits d'unification jauge-Higgs, la masse scalaire est protégée localement par la symétrie de jauge 5d et peut être naturellement faible. De plus, la compactification étant un mécanisme de brisure non locale de la symétrie de Lorentz, la masse scalaire est par construction insensible à la physique ultra-violette et reste radiativement finie⁴. Dans ce cas, la masse produite est alors directement donnée par la taille de la dimension supplémentaire multipliée par le couplage de jauge : $m \sim gL^{-1}$, soit $L \sim \text{TeV}^{-1}$ pour $m \sim m_{EW}$ et $g \lesssim \mathcal{O}(1)$.

Par ailleurs, outre la mise en relation du Higgs avec des champs de spin supérieur, l'échelle électrofaible peut également être stabilisée en identifiant ce dernier à un boson de Goldstone se transformant dans le groupe quotient \mathcal{G}/\mathcal{H} d'une symétrie globale \mathcal{G} brisée spontanément en \mathcal{H} à une échelle $f \gtrsim m_{EW}$. Le Higgs est alors protégé par la symétrie de « shift » du modèle σ non linéaire : $H \rightarrow H + \alpha$, interdisant toute interaction autre que dérivative et imposant, en particulier, $m = 0$. Lorsqu'un sous-groupe \mathcal{H} est jaugé pour produire, entre autres, les interactions du Modèle Standard, la symétrie de shift est brisée et un potentiel de Higgs est généré radiativement avec une masse donnée par $m \sim g^2 f / 4\pi$, soit une valeur naturelle pour f autour du TeV. Cette approche a notamment conduit au développement des modèles Little Higgs dont l'exemple le plus simple de motif de brisure est $SU(5)/SO(5)$ où $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_Y$ est jaugé. Les divergences quadratiques provenant du W , du Z et du top sont alors compensées par les nouveaux bosons de jauge et fermions émergeant à l'échelle f .

Enfin, une autre solution au problème de hiérarchie consiste à briser dynamiquement la symétrie électrofaible à l'aide d'une nouvelle interaction de jauge entrant dans un régime de couplage fort au TeV. Le Higgs n'est alors plus un champ fondamental, mais un état lié, pareil aux mésons de QCD, composé des nouveaux fermions associés à cette interaction. Ainsi, étant par essence un degré de liberté infrarouge, le Higgs demeure insensible à l'échelle ultra-violette de la théorie. Les similitudes de ces modèles avec QCD leur vaut l'appellation de modèles de technicouleur. Construit dans les années 70, ils sont typiquement exclus par les tests de précision électrofaible, du moins dans leurs formulations les plus simples, car imposer un Higgs léger induit alors une masse trop faible pour les résonances du secteur fort. Une amélioration notable consiste à plonger le Higgs composite dans un quotient \mathcal{G}/\mathcal{H} . Ainsi, en tant que boson de Goldstone, le Higgs composite est naturellement léger sans nécessairement être accompagné de résonances légères.

⁴Néanmoins, si la (les) dimension(s) supplémentaire(s) sont compactifiées sur des varités contenant des points fixes, telles que S_1/Z_2 en 5d, il est alors possible d'écrire un terme de masse localisé sur un tel point qui reçoit alors des corrections radiatives quadratiquement divergentes.

De l'importance du Higgs en cosmologie

Dans les années 90, la cosmologie est devenue une discipline pleinement mature de physique théorique, notamment grâce aux observations précises réalisées sur les « cendres », visibles encore aujourd'hui, des événements majeurs du passé de notre univers, tels que le découplage matière/rayonnement ou la formation des premiers éléments légers. Malgré cet incroyable bond en avant, la cosmologie moderne laisse encore sans réponse de nombreuses interrogations fondamentales. Suivant le principe copernicien, qui stipule qu'il n'existe aucun lieu privilégié dans l'univers, le modèle cosmologique moderne repose sur l'hypothèse que notre univers est homogène et isotrope au-delà des échelles associées aux plus grandes structures connues, les super-amas de galaxies. A de telles échelles de distance, seule la gravitation, décrite par la relativité générale d'Einstein, joue un rôle majeur dans l'évolution de l'univers. Ceci conduit à décrire notre univers par une métrique à symétrie sphérique de Robertson et Walker :

$$ds^2 = dt^2 - a^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (5)$$

où a est un nombre sans dimension et la courbure spatiale k peut-être positive, négative ou nulle selon que la géométrie 3d soit fermée, ouverte ou plate. Nous savons également, depuis la mise en évidence de la fuite des galaxies par Hubble, que l'univers est en expansion, soit $a = a(t)$, et qu'il fut donc plus chaud et plus dense par le passé, ce qui suggère en outre la possibilité d'un début à son histoire. Les équations d'Einstein dans une telle géométrie se réduisent à un jeu de deux équations d'évolution simples pour le contenu en matière et énergie de notre univers, les équations de Friedmann-Lemaître⁵ :

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi\rho}{3M_{Pl}^2} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (6)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda}{3} - \frac{4\pi\rho}{3M_{Pl}^2} (1 + 3\omega). \quad (7)$$

avec $\omega = p/\rho$ où ρ et p sont respectivement la densité et la pression des fluides homogènes contenus dans l'univers. Dans ce contexte, pourtant simple et *a priori* légitime, la conclusion tirée des données du fond diffus cosmologique et de l'étude de la luminosité des supernovae lointaines est plutôt déconcertante. La matière baryonique composant les étoiles ne représente que 5% du contenu en matière/énergie total. Afin de reproduire l'évolution observée de notre univers, environ 95% de ce contenu est tout bonnement inconnu. Et, fait encore plus intrigant, pas moins de 70% de ce dernier se présente sous une forme d'énergie dite noire dont la propriété caractéristique est de ne pas se diluer avec l'expansion, tout comme le ferait une énergie du vide Λ ou un fluide de pression négative ($\omega < -1/3$). Les quelques 25% restant constituent, quant à eux, une forme de matière non baryonique n'émettant aucune lumière, connue sous le nom de matière noire. Ceci constitue le modèle cosmologique de concordance ou Λ CDM⁶, qualifié parfois de standard, qui prédit notamment que notre univers est récemment entré dans une phase d'expansion accélérée, entretenu par cette mystérieuse énergie noire. Aux grandes énigmes soulevées par l'énergie et la matière noire vient s'ajouter une autre interrogation. Pourquoi y a-t-il de la matière (baryonique ou noire) dans notre

⁵ où Λ est normalisée comme : $S = \int dx \sqrt{-g} [(16\pi)^{-1} M_{Pl}^2 (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_m]$.

⁶ où Λ désigne la constante cosmologique ou plus généralement l'énergie noire et CDM est l'acronyme anglo-saxon pour *cold dark matter* désignant la matière noire.

univers ? En effet, selon la physique des particules chaque particule de matière observée aujourd'hui était nécessairement accompagnée, dans le passé, par son antiparticule, du moins tant qu'elles restaient à l'équilibre thermique. Avec l'expansion, l'univers s'est refroidi et la matière aurait dû s'annihiler presque complètement avec l'antimatière. Puisque, d'une part nous existons et que, d'autre part, la matière représente près de 30% de la densité d'énergie de l'univers, un mécanisme particulier a dû produire cette asymétrie entre matière et antimatière. Une possible explication de la domination de la matière se situe potentiellement dans l'histoire cosmologique du Higgs du Modèle Standard. A haute température, les interactions avec le plasma primordial évaporent son condensat et la symétrie électrofaible est restaurée. La température diminuant, le Higgs subit une transition de phase qui, si du premier ordre, peut être le siège d'un mécanisme de genèse de baryons. Ainsi, non seulement le Higgs serait responsable de la dynamique microscopique des particules élémentaires, mais il aurait bien pu jouer un rôle crucial dans l'histoire de notre univers en assurant un excès important de matière, permettant, à son tour, la formation de structures galactiques.

Ce mémoire de thèse se compose en trois parties distinctes, couvertes par les chapitres 1, 2, 3 et 4 respectivement :

- Le premier chapitre est un rappel des propriétés des théories effectives des champs qui, étant donné la grande diversité des modèles au-delà du Modèle Standard proposés, constituent une approche générique fort commode quant à l'étude des effets d'une nouvelle physique sur les observables mesurées aux collisionneurs. Après avoir rappelé les techniques élémentaires permettant la construction de théories effectives à basse énergie, nous les appliquerons au cas de la physique au-delà du Modèle Standard. Nous détaillerons en particulier les divers opérateurs effectifs de dimension six induisant des déviations aux prédictions du Modèle Standard qu'il est possible de contraindre expérimentalement grâce aux tests de précision électrofaible du LEP. Nous résumerons ensuite les méthodes permettant d'utiliser ces résultats de mesure pour valider, contraindre ou d'exclure les modèles théoriques construits dans le but de stabiliser l'échelle électrofaible. Nous illustrerons ces méthodes par des exemples simples, quoique typiques des modèles réalistes existant dans la littérature.
- Dans le chapitre suivant, nous nous concentrerons sur la baryogenèse électrofaible dans un contexte de théorie effective. Si l'asymétrie matière/antimatière est la conséquence d'une évolution cosmologique particulière du Higgs, l'étude de la dynamique de la transition de phase électrofaible dans ce contexte offre une possibilité, complémentaire aux collisionneurs, d'identifier la forme de la nouvelle physique. Nous calculerons pour cela le potentiel quantique à température finie du Higgs dans l'approximation à une boucle, et ce en présence d'un opérateur de dimension six de la forme $|H|^6$. Nous revisiterons également les espoirs d'observation de signatures en ondes gravitationnelles dans l'espace des paramètres de la théorie effective favorable à la production d'une asymétrie matière/antimatière.
- Enfin les deux derniers chapitres sont consacrés à la physique des dimensions supplémentaires. Après un rapide tour d'horizon de la phénoménologie des modèles ADD et RS, le chapitre 3 rassemble les principales propriétés de la dynamique des champs scalaire, vecteur et de spin 1/2 plongés dans une dimension compacte. Nous étudierons en particulier le rôle joué par les conditions aux bords

des champs dans les mécanismes de brisure de symétrie de jauge et de génération de masse. Dans ce contexte, le chapitre 4 est consacré à la physique de la saveur leptonique dans une géométrie 5d anti de Sitter. Nous y présenterons un modèle complet qui, basé sur la symétrie de saveur discrète A_4 , reproduit de manière naturelle les hiérarchies de masse des leptons et les angles de mélange des neutrinos. Nous montrerons également que ce modèle n'est en conflit ni avec les tests de précision électrofaible, ni avec les contraintes expérimentales sur les processus de changements de saveur.

Chapitre 1

Théories des champs effectives au-delà de l'échelle électrofaible

Nous introduirons dans un premier temps les principaux outils des théories effectives des champs et rappellerons en quoi elles permettent de reconstruire, partant de connaissances à une certaine énergie, la structure d'une théorie plus fondamentale au-delà. Nous discuterons également l'importance du rôle joué par les mesures expérimentales dans la recherche d'une théorie au-delà du Modèle Standard.

1.1 Qu'est-ce qu'une théorie effective ?

Une théorie est dite effective lorsque son pouvoir prédictif est limité à un certain domaine d'énergie, au-delà duquel elle n'est plus valide. En d'autres termes, une théorie effective est une construction qui néglige ouvertement tout phénomène physique, ou degré de liberté, se manifestant à et au-delà d'une certaine échelle E_{max} . Elle reflète le choix de limiter l'étude d'un système physique à des énergies E très inférieures à E_{max} pour lesquelles ces phénomènes sont tout simplement négligeables. C'est la formulation d'un principe intuitif simple : le comportement à l'énergie E d'un système ne dépend pas des détails de sa dynamique à plus haute énergie $E_{max} \gg E$. En physique, les théories effectives sont nombreuses, au point de se demander si toute théorie n'est pas, d'une certaine façon, effective. En effet, lorsqu'on réalise une série d'expériences, la réponse du système étudié ne se fait qu'en dessous d'une certaine échelle d'énergie E_{exp} , fixée par l'expérimentateur. Ainsi, toute construction théorique développée dans le but de rendre compte et, *in fine*, de prédire cette réponse est intrinsèquement limitée par E_{exp} . Rappelons que, par le passé, accroître E_{exp} a souvent conduit à complètement revoir le modèle théorique décrivant le système en question, notamment lorsqu'une nouvelle structure interne fut mise au jour. Par conséquent, une approche pragmatique, revient à supposer qu'une théorie physique est nécessairement paramétrée par au moins deux échelles d'énergie, celle qu'elle décrit, puis celle qui limite la validité de ses prédictions. Cette dernière peut être donnée soit par l'échelle d'une physique connue à haute énergie, que l'on souhaite sciemment négliger, soit par l'énergie maximale ayant expérimentalement sondée un système physique, sans pouvoir détecter de nouveaux degrés de liberté. En ce sens, toute théorie est effective.

Une liste exhaustive de théories effectives serait probablement sans fin, tant cette approche est naturelle et fructueuse. Néanmoins, nous pouvons citer quelques exemples. L'optique géométrique est une description effective de la lumière, valable lorsque la taille caractéristique L des objets interagissant avec celle-ci est beaucoup plus grande que la longueur d'onde λ des ondes électromagnétiques qui la composent. La relativité galiléenne est également une version effective de la relativité d'Einstein que l'on retrouve dans la limite où la vitesse v d'un corps en mouvement est beaucoup plus faible que celle de la lumière c . On peut aussi mentionner la mécanique classique qui peut être vue comme une mécanique quantique effective lorsque l'action S du système est très grande devant le quantum \hbar , c'est-à-dire lorsque le nombre de quanta du système est important. Cette connexion est des plus transparentes dans une formulation d'intégrale de chemins de la mécanique quantique pour laquelle, lorsque $S \gg \hbar$, seul le chemin classique contribue à l'amplitude de probabilité, les autres, représentant les fluctuations quantiques, interférant destructivement. Les exemples précédents illustrent les grandes simplifications apportées par une approche effective dans un régime particulier de la théorie plus fondamentale ou complète. En effet, l'onde électromagnétique est décrite simplement par un rayon lumineux représentant la propagation de son front d'onde, le temps « local » de la relativité restreinte devient universel à tout observateur et, en mécanique quantique, la somme sur une infinité de chemins possibles se réduit à la contribution du seul chemin classique. Cependant, tous ces exemples partagent le même inconvénient, la théorie fondamentale doit être connue pour interpréter les théories antérieures comme étant des versions effectives. Il est en particulier difficile de reconstruire le concept d'onde comme une généralisation du rayon lumineux, de relativiser à chaque observateur le concept de temps à partir d'un temps absolu ou encore de considérer que, pour une particule, toutes les trajectoires sont en réalité permises alors que la mécanique classique est intrinsèquement déterministe. La principale raison est que les formalismes utilisés dans la théorie complète et sa version effective sont radicalement différents. A contrario, les théories des champs constituent le cadre légitime pour l'étude des théories effectives car que se soit à haute ou basse énergie, la théorie s'écrira toujours en termes de champs¹.

1.1.1 Construire la théorie effective

Lorsqu'une théorie contient deux échelles de masse relativement bien séparées $m \ll M$, la dynamique à l'échelle M n'a que peu d'effet sur les observables de la théorie à une énergie $E \sim m$. Dans le cas où ces deux échelles sont rapprochées $m \sim M$, une expérience à une énergie $E \sim m$ excitera également le mode M . Alors, s'ils sont couplés, celui-ci affectera la dynamique du premier par des corrections allant nécessairement comme m/M ou des puissances positives de ce facteur, possédant la propriété de découplage dans la limite $M \rightarrow \infty$. Une théorie effective des champs permet d'évaluer ces corrections à l'échelle m à partir de la connaissance de la physique à l'échelle plus élevée. Supposons une théorie scalaire contenant deux champs de masses très différentes $m \ll M$ et dont l'action est donnée par² :

$$S[\phi, \Phi] = \int dx \left[\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial\Phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{2}M^2\Phi^2 - V(\phi, \Phi) \right] \quad (1.1)$$

¹à moins que leurs excitations ponctuelles ne soient remplacées, à une certaine échelle, par des objets de dimensionnalité supérieure, tels que des cordes ou autres membranes.

²Cet exemple et l'analyse qui en est faite sont inspirés de [6].

avec par exemple :

$$V(\phi, \Phi) = \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \frac{\alpha}{4} \phi^2 \Phi^2 + \frac{\kappa}{2} M \phi^2 \Phi \quad (1.2)$$

où nous avons imposé par simplicité la symétrie discrète $\phi \rightarrow -\phi$. On suppose également $\lambda \sim \alpha \sim \kappa \sim \mathcal{O}(1)$, afin de conserver deux échelles dans la théorie. Nous allons montrer comment l'évaluation des observables physiques de cette théorie se simplifient dans la limite $E \ll M$. A titre d'exemple, calculons l'amplitude de diffusion $2\phi \rightarrow 2\phi$. Au niveau des arbres, d'après le potentiel ci-dessus, celle-ci est donnée par l'échange de Φ dans les voies s, t et u :

$$i\mathcal{A}(2\phi \rightarrow 2\phi) = \lambda + \kappa^2 M^2 \left[\frac{1}{s - M^2} + \frac{1}{t - M^2} + \frac{1}{u - M^2} \right] \quad (1.3)$$

où s, t, u sont les invariants de Mandelstam de la diffusion à deux corps satisfaisant ici $s + t + u = 4m^2$. Dans la limite de basse énergie $s, t, u \ll M^2$, l'amplitude se simplifie comme :

$$i\mathcal{A}(2\phi \rightarrow 2\phi) \simeq \lambda - 3\kappa^2 - 4\kappa^2 \frac{m^2}{M^2} + \mathcal{O}(M^{-4}). \quad (1.4)$$

Non seulement, cette forme est relativement simple mais les corrections engendrées par l'échange de Φ peuvent être prise en compte, jusqu'à l'ordre M^{-2} , par une redéfinition du couplage quartique λ :

$$\lambda \rightarrow \lambda - 3\kappa^2 - 4\kappa^2 \frac{m^2}{M^2}. \quad (1.5)$$

En particulier, ce que l'exemple précédent illustre est la possibilité de décrire, à basse énergie $E \ll M$, la fonction à quatre points impliquant seulement le champ léger ϕ à partir d'une *action effective* de la forme suivante :

$$S_{eff}[\phi] = \int dx \left[\frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{4!} \left(\lambda - 3\kappa^2 - 4\kappa^2 \frac{m^2}{M^2} \right) \phi^4 \right]. \quad (1.6)$$

D'une manière générale, toutes les observables, à tous les ordres en M^{-1} , peuvent s'obtenir, dans la limite de basse énergie, à partir d'une action effective qui est construite en terme du champ ϕ seulement et dont la forme générique est :

$$S_{eff}[\phi] = \int dx \sum_i c_i \frac{\mathcal{O}_i(\phi, \partial\phi)}{M^{d_i-4}} \quad (1.7)$$

où d_i est la dimension de l'opérateur \mathcal{O}_i construit à partir de ϕ et de ses dérivées. Les coefficients sans dimension c_i sont fixés en s'assurant que les amplitudes déduites de S_{eff} reproduisent correctement les résultats obtenus en utilisant l'action complète S , lorsqu'ils sont développés dans la limite $E \ll M$, comme illustrée ci-dessus. Cette mise en correspondance entre les deux lagrangiens porte le nom de *matching*. Insistons également sur le fait que celle-ci est réalisable à tous les ordres en théorie de perturbation, pourvu qu'on se limite à un ordre donnée en puissance de M^{-1} de la série ci-dessus, définissant ainsi le niveau de précision de la théorie effective. Dans ce cas, l'action effective non renormalisable est renormalisée grâce à un nombre fini de contre-terms de dimension inférieure ou égale où plus grand d_i de la troncature réalisée. Il est alors beaucoup plus simple d'utiliser directement l'action effective pour dériver les prédictions de la théorie complète dans un domaine limité en énergie, comme par exemple celui accessible expérimentalement, que d'utiliser cette dernière et de finalement en développer les résultats. Nous allons maintenant présenter les méthodes permettant de calculer l'action effective à un ordre quelconque en M^{-1} à partir de $S[\phi, \Phi]$.

1.1.1.1 Dérivation de l'action effective

Afin d'étudier simultanément toutes les observables de cette théorie, on se concentre sur leur fonctionnelle génératrice :

$$Z[j, J] = \int [\mathcal{D}\phi \mathcal{D}\Phi] \exp [i (S[\phi, \Phi] + j\phi + J\Phi)] \quad (1.8)$$

où l'action S est donnée par (1.1). Toute amplitude physique étant réductible à un ensemble de fonctions de corrélation une particule irréductible (1PI), il est plus commode de travailler avec leur fonctionnelle génératrice Γ définie comme

$$\Gamma[\bar{\phi}, \bar{\Phi}] \equiv -i \log Z[j, J] - j\bar{\phi} - J\bar{\Phi} \quad (1.9)$$

où

$$\bar{\phi} = -i \frac{\delta \log Z}{\delta j} \text{ et } \bar{\Phi} = -i \frac{\delta \log Z}{\delta J}. \quad (1.10)$$

sont les valeurs dans le vide des champs en l'absence de fluctuations quantiques et, plus généralement, elles extrémisent Γ en l'absence de source :

$$\delta\Gamma/\delta\bar{\phi} + j = 0, \quad \delta\Gamma/\delta\bar{\Phi} + J = 0. \quad (1.11)$$

A partir de (1.8) et (1.9), on a alors :

$$\begin{aligned} \exp (i\Gamma[\bar{\phi}, \bar{\Phi}]) &= \int [\mathcal{D}\phi \mathcal{D}\Phi] \exp [i (S[\phi, \Phi] + j(\phi - \bar{\phi}) + J(\Phi - \bar{\Phi}))] \\ &= \int [\mathcal{D}\phi \mathcal{D}\Phi] \exp [i (S[\bar{\phi} + \phi, \bar{\Phi} + \Phi] + j\phi + J\Phi)] \end{aligned} \quad (1.12)$$

où dans la seconde ligne nous avons redéfini les champs comme $\phi \rightarrow \phi + \bar{\phi}$ et $\Phi \rightarrow \bar{\Phi} + \Phi$ de sorte qu'à partir de maintenant ϕ et Φ représentent des fluctuations quantiques autour des valeurs d'arrière-plan, ou de fond, $\bar{\phi}$ et $\bar{\Phi}$. On remarque également que, par construction, Γ est identique à S lorsque les fluctuations quantiques sont absentes. $\bar{\phi}$ et $\bar{\Phi}$ sont alors les solutions classiques des équations du mouvement dérivées de S . En présence de fluctuations, Γ fournit les observables de la théorie en incluant les corrections quantiques.

Nous pouvons maintenant évaluer l'action effective à basse énergie $E \ll M$. Tout d'abord, on pose $J = 0$ afin de se limiter aux corrélateurs où seul ϕ apparaît sur les pattes externes. L'énergie n'étant pas suffisante pour produire une particule Φ réelle, aucune dérivée fonctionnelle par rapport à J ne peut être prise. Par conséquent, $\bar{\Phi}$ est complètement déterminé par l'équation du mouvement :

$$\delta\Gamma/\delta\bar{\Phi} = 0 \rightarrow \bar{\Phi} = \bar{\Phi}(\bar{\phi}). \quad (1.13)$$

On définit alors la fonctionnelle effective suivante [6] :

$$\gamma[\bar{\phi}] \equiv \Gamma[\bar{\phi}, \bar{\Phi}(\bar{\phi})] \quad (1.14)$$

qui génère les fonctions de corrélation 1PI pour le champ léger seulement. Intuitivement cela signifie que la dynamique à basse énergie du champ léger est simplement obtenue de la théorie complète en prenant le champ lourd, qui ne peut être excité, dans sa configuration de fond. L'énergie des interactions est si faible que des particules

associées à ce degré de liberté ne peuvent être créées réellement. $\bar{\Phi}$ reste donc dans sa valeur d'arrière-plan. On peut également relier $\gamma[\bar{\phi}]$ à une action effective $S_{eff}[\phi]$ via la transformée de Legendre inverse $\exp[i(\gamma[\bar{\phi}] + j\bar{\phi})] = Z_{eff}[j]$ avec :

$$Z_{eff}[j] = \int [\mathcal{D}\phi] \exp[i(S_{eff}[\phi] + j\phi)] \quad (1.15)$$

où la source j est ici définie comme $j = -\delta\gamma/\delta\bar{\phi}$. Formellement, on peut aussi définir l'action effective à partir de $Z[j, J]$, en intégrant explicitement sur les degrés de liberté lourds, inobservables à l'échelle $E \sim m$:

$$\exp[iS_{eff}[\phi]] \equiv \int [\mathcal{D}\Phi] \exp[i(S[\phi, \Phi] + J\Phi)]. \quad (1.16)$$

Également ici, $S_{eff} = \gamma$ au niveau des arbres. La relation (1.14) est valable à tous les ordres en perturbation et on peut introduire un développement perturbatif comme :

$$\begin{aligned} \gamma[\bar{\phi}] &= \Gamma[\bar{\phi}, \bar{\Phi}(\bar{\phi})] \\ &= \Gamma_0[\bar{\phi}, \bar{\Phi}_0 + \bar{\Phi}_1 + \dots] + \Gamma_1[\bar{\phi}, \bar{\Phi}_0 + \dots] + \dots \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$= \Gamma_0[\bar{\phi}, \bar{\Phi}_0] + \bar{\Phi}_1 \int dx (\delta\Gamma_0/\delta\bar{\Phi})|_{\bar{\Phi}_0} + \Gamma_1[\bar{\phi}, \bar{\Phi}_0] + \dots \quad (1.18)$$

$$\equiv \gamma_0[\bar{\phi}] + \gamma_1[\bar{\phi}] + \dots \quad (1.19)$$

où l'action à l'arbre et sa correction radiative à une boucle sont données par :

$$\gamma_0[\bar{\phi}] = \Gamma_0[\bar{\phi}, \bar{\Phi}_0], \quad (1.20)$$

$$\gamma_1[\bar{\phi}] = \Gamma_1[\bar{\phi}, \bar{\Phi}_0]. \quad (1.21)$$

À titre d'illustration, on présente le calcul de γ_0 et γ_1 pour l'action (1.1).

Action effective au niveau des arbres Dans l'approximation classique, l'action Γ_0 est égale à S et $\bar{\Phi}_0$ est solution de l'équation du mouvement suivante :

$$\left(\square + M^2 + \alpha \frac{\phi^2}{2}\right) \bar{\Phi}_0 = -\frac{\kappa}{2} M \bar{\phi}^2 \quad (1.22)$$

soit formellement :

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_0(\bar{\phi}) &= -\frac{\kappa}{2} M \left(\square + M^2 + \alpha \frac{\phi^2}{2}\right)^{-1} \bar{\phi}^2 \\ &\simeq -\frac{\kappa}{2M} \left(\phi^2 - \frac{\square \phi^2}{M^2} - \frac{\alpha}{2} \frac{\phi^4}{M^2}\right) + \mathcal{O}(M^{-5}). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Ainsi, l'action effective classique dans le régime $E \ll M$ est donnée à l'ordre M^{-2} par l'expression :

$$\begin{aligned} S_{eff}[\bar{\phi}] &= \int dx \left[\frac{1}{2} (\partial\bar{\phi})^2 - \frac{1}{2} m^2 \bar{\phi}^2 - \frac{1}{4!} (\lambda - 3\kappa^2) \bar{\phi}^4 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8} \frac{\kappa^2}{M^2} \bar{\phi}^2 \square \bar{\phi}^2 - \frac{\alpha \kappa^2}{16} \frac{\bar{\phi}^6}{M^2} \right] + \mathcal{O}(M^{-4}). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Correction à une boucle à l'action effective En présence de fluctuations quantiques, $\gamma \neq S_{eff}$ et la correction à une boucle $\gamma_1[\bar{\phi}]$ de $S_{eff}[\bar{\phi}]$ vaut $\Gamma_1[\bar{\phi}, \bar{\Phi}]$ où Γ_1 est donnée par l'intégrale gaussienne :

$$\Gamma_1[\bar{\phi}, \bar{\Phi}] = \frac{i}{2} \log \text{Det} \left(- \frac{\delta^2 S[\phi, \Phi]}{\delta F_i(x) \delta F_j(y)} \Big|_{\bar{\phi}, \bar{\Phi}} \right) \quad (1.25)$$

avec $F_i = \{\phi, \Phi\}$. De plus,

$$- \frac{\delta^2 S[\phi, \Phi]}{\delta F_i(x) \delta F_j(y)} = [\square \delta_{ij} + m_{ij}^2(\phi, \Phi)] \delta^{(4)}(x - y) \quad (1.26)$$

avec :

$$m_{ij}^2 = \begin{pmatrix} m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi^2 + \alpha \frac{\Phi^2}{2} + \kappa M \Phi & \alpha \phi \Phi + \kappa M \phi \\ \alpha \phi \Phi + \kappa M \phi & M^2 + \alpha \frac{\phi^2}{2} \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

dont les valeurs propres sont

$$m_{\pm}^2 \equiv \frac{1}{2} (m_{11}^2 + m_{22}^2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(m_{11}^2 - m_{22}^2)^2 + 4m_{12}^4} . \quad (1.28)$$

Après les manipulations usuelles³ du déterminant fonctionnel (1.25), on dérive l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \Gamma_1[\bar{\phi}, \bar{\Phi}] &= \frac{1}{2} \int dx \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \sum_{i=\pm} \log(k_E^2 + m_i^2) \\ &= \frac{1}{64\pi^2} \int dx \sum_{i=\pm} m_i^4 \left[\log \left(\frac{m_i^2}{\mu^2} \right) - \frac{3}{2} \right] \end{aligned} \quad (1.29)$$

où la seconde ligne est le résultat dimensionnellement régularisé dans l'ultra-violet de l'intégrale sur le moment euclidien ci-dessus. Enfin, $\gamma_1[\bar{\phi}]$ s'obtient directement en remplaçant $\bar{\Phi}$ par sa valeur de fond classique $\bar{\Phi}_0(\bar{\phi})$ et en développant le résultat en puissance de M^{-1} . Nous décrirons plus loin une autre méthode de calcul de γ_1 , basée sur le matching des fonctions de corrélations générées par $\gamma[\bar{\phi}]$ et $\Gamma[\bar{\phi}, \bar{\Phi}]$ dans la limite $E \ll M$.

1.1.1.2 Opérateurs redondants

A première vue, l'action (1.24) est différente de celle obtenue naïvement en introduction (1.6) où le terme dérivatif $\phi^2 \square \phi^2$ est absent. En effet, à l'ordre M^{-2} , le développement de $\mathcal{A}(2\phi \rightarrow 2\phi)$ ne contient aucune dépendance en p^2 . La raison est qu'en réalité les opérateurs écrits à un ordre donné en M^{-1} ne sont pas tous indépendants. Dit autrement, il existe des combinaisons linéaires d'opérateurs qui affectent les amplitudes de la théorie de la même façon à un ordre donné. La théorie effective écrite en termes des invariants les plus généraux est alors redondante lorsqu'on se limite à un ordre fixe en M^{-1} , les dégénérescences entre certains invariants étant seulement levées à des ordres supérieurs. Cette redondance des opérateurs effectifs à un ordre

³telles que $\log \text{Det} = \text{Tr} \log$, où la trace s'écrit dans l'espace des impulsions comme $\text{Tr} = \int d^4 k / (2\pi)^4$, et la rotation de Wick $t_E = it$ introduisant l'énergie euclidienne $k_E^0 = -ik^0$

M^{-n} peut être formulée comme une invariance des prédictions de la théorie effective sous une redéfinition du champ de la forme :

$$\bar{\phi} \rightarrow \bar{\phi} + M^{-n} f(\bar{\phi}) \quad (1.30)$$

où, par construction, f ne contient aucune puissance négative de M . L'action effective devient alors :

$$\gamma[\bar{\phi}] \rightarrow \gamma[\bar{\phi}] + M^{-n} \int dx f(\bar{\phi}) (\delta\gamma_0/\delta\bar{\phi}) + \mathcal{O}(M^{-n-1}) \quad (1.31)$$

où $\delta\gamma_0/\delta\bar{\phi}$ est l'équation du mouvement pour $\bar{\phi}$ à l'ordre le plus bas en M^{-1} . Ainsi, l'action effective est invariante sous cette redéfinition, qui revient simplement à introduire un terme proportionnel à l'équation du mouvement. Alors qu'un tel terme n'est d'aucune utilité dans le cas général, il permet ici de récrire l'action effective à l'ordre M^{-n} en terme de combinaisons linéaires d'opérateurs différentes qui peuvent s'avérer, pour un choix judicieux de f , plus confortables à manipuler pour dériver les amplitudes à basse énergie. Pour l'exemple à l'arbre ci-dessus, développé jusqu'à l'ordre M^{-2} , on a :

$$\begin{aligned} \delta\gamma_0/\delta\bar{\phi} &= \square\bar{\phi} + m^2\bar{\phi} + \frac{\lambda}{3!}\bar{\phi}^3 + \kappa M\bar{\phi}\bar{\Phi}_0(\bar{\phi}) + \frac{\alpha}{2}\bar{\phi}\bar{\Phi}_0^2(\bar{\phi}) \\ &= \square\bar{\phi} + m^2\bar{\phi} + \left(\frac{\lambda}{3!} - \frac{\kappa^2}{2}\right)\bar{\phi}^3 + \mathcal{O}(M^{-2}) \end{aligned} \quad (1.32)$$

On peut alors éliminer le terme en $\bar{\phi}^2\square\bar{\phi}^2$ de (1.24) au profit d'opérateurs non dérivatifs, en posant :

$$\bar{\phi} \rightarrow \bar{\phi} + M^{-2} f(\bar{\phi}), \text{ avec } f(\bar{\phi}) = -\frac{\kappa^2}{6}\bar{\phi}^3. \quad (1.33)$$

Puisqu'après intégration par partie on a $\bar{\phi}^2\square\bar{\phi}^2 = 4/3\bar{\phi}^3\square\bar{\phi}$, l'action S_{eff} à l'arbre devient :

$$\begin{aligned} S_{eff}[\bar{\phi}] &= \int dx \left[\frac{1}{2}(\partial\bar{\phi})^2 - \frac{1}{2}m^2\bar{\phi}^2 - \frac{1}{4!} \left(\lambda - 3\kappa^2 - 4\kappa^2 \frac{m^2}{M^2} \right) \bar{\phi}^4 \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\alpha}{16} - \frac{\lambda}{36} + \frac{\kappa^2}{12} \right) \frac{\kappa^2}{M^2} \bar{\phi}^6 \right] + \mathcal{O}(M^{-4}). \end{aligned} \quad (1.34)$$

Dans cette nouvelle base des opérateurs effectifs, on retrouve alors naturellement le couplage quartique obtenu en (1.24). La redéfinition précédente du champ est alors totalement équivalente à imposer, pour les termes en M^{-2} , à $\bar{\phi}$ de satisfaire son équation du mouvement au plus bas ordre, donnée ici par :

$$\square\bar{\phi} + m^2\bar{\phi} + \left(\frac{\lambda}{3!} - \frac{\kappa^2}{2}\right)\bar{\phi}^3 = 0. \quad (1.35)$$

1.1.2 Action de Wilson et exemple de matching

Alors que la méthode fonctionnelle précédente est relativement efficace, elle devient rapidement assez lourde lorsque le niveau de précision de la théorie effective requiert l'inclusion de corrections radiatives. Il est beaucoup plus pratique dans ce cas de déterminer les coefficients des opérateurs effectifs directement au niveau des observables, en lui imposant d'en reproduire les prédictions de la théorie complète dans la limite

de basse énergie. Nous définissons alors l'*action effective de Wilson* comme la somme suivante :

$$S_{eff}[\phi] = \int dx \sum_i c_i \frac{\mathcal{O}_i(\phi, \partial\phi)}{M^{d_i-4}} \quad (1.36)$$

où les c_i , les coefficients de Wilson, sont fixées en terme d'observables physiques, ordre par ordre en théorie des perturbations. Cela ressemble étroitement à la procédure usuelle de renormalisation en théorie quantique des champs. Dans ce cas, au niveau quantique, les paramètres du lagrangien sont fixés en terme d'observables physiques, telles qu'une masse ou une constante de couplage, et les prédictions de la théorie ainsi renormalisée, pour d'autres observables, sont parfaitement calculables en terme de ces nouveaux paramètres. En règle général, en théorie quantique des champs, on demande à la théorie d'être renormalisable de manière à n'avoir qu'un nombre fini de paramètres à fixer expérimentalement. En ce qui concerne les théories effectives, la situation est similaire. A un ordre donné en M^{-1} , on utilise des paramètres physiques afin de fixer l'ensemble fini de c_i apparaissant à cet ordre. Le lagrangien effectif peut être alors employé pour faire des prédictions à basse énergie pour d'autres observables. La seule différence est, dans ce cas, l'utilisation de la connaissance de la théorie complète, et non de résultats de mesures, pour déterminer ces paramètres. Ce parallèle est bien plus profond qu'une simple ressemblance de formalisme. Il fournit notamment une meilleure compréhension de la procédure de renormalisation en théorie quantique des champs. Les divergences à courte distance y apparaissent parce que radiativement la théorie s'aventure dans une région ultra-violette que ses degrés de liberté ne permettent pas de résoudre. Il devient alors naturel de définir un domaine de validité de cette dernière en imposant un cut-off ultra-violet Λ . La théorie initiale est devenue effective. Dans ce contexte, la propriété de renormalisabilité, selon laquelle la théorie réécrite en terme d'observables physiques ne dépend plus du cut-off, ne devient qu'une approximation de l'action effective ci-dessus pour $d_i \leq 4$. Ainsi, bien qu'elle soit non renormalisable, la théorie effective est approximativement aussi prédictive qu'une théorie renormalisable, pourvu qu'on se satisfasse d'une précision finie et que la série (1.36) soit tronquée à un ordre fixe correspondant. En outre, l'étrange nature du cut-off Λ devient plus claire en l'identifiant à une véritable échelle physique $\Lambda = M$ à laquelle émergent de nouveaux degrés de liberté. La théorie quantique des champs devient par conséquent plus accessible à l'intuition et sa version effective représente un outil très efficace, pourvu que l'on renonce à conférer (à tort) à la renormalisabilité un sens physique et que la porte à de nouvelles particules dans l'ultra-violet soit laissée ouverte.

Nous allons reprendre l'exemple de la théorie complète définie par (1.1) et réaliser le calcul des c_i à une boucle jusqu'à l'ordre M^{-2} . Le lagrangien effectif le plus général est alors limité à l'ensemble d'opérateurs suivant :

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{c_{4,1}}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{c_2}{2}M^2\phi^2 - \frac{c_{4,2}}{4!}\phi^4 - \frac{c_{6,1}}{4M^2}\phi^2\Box\phi^2 - \frac{c_{6,2}}{M^2}\phi\Box^2\phi - \frac{c_{6,3}}{6!}\frac{\phi^6}{M^2} \quad (1.37)$$

où nous avons également imposé la symétrie discrète $\phi \rightarrow -\phi$. D'autres termes dérivatifs, tels que $\phi^2(\partial\phi)^2$ ou $\phi^3\Box\phi$, n'ont pas été ajoutés puisqu'ils peuvent s'écrire comme une combinaison linéaire des précédents, par une redéfinition des champs. Dans une approche perturbative, les coefficients c_i admettent un développement en série de la forme :

$$c_i = c_i^{(0)} + c_i^{(1)} + \dots \quad (1.38)$$

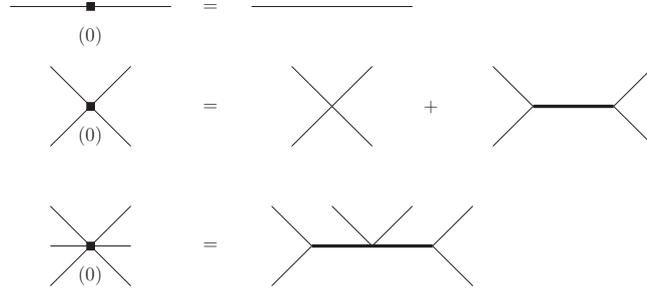


FIG. 1.1 – Traduction en terme de diagrammes de Feynman du matching des amplitudes au niveau des arbres. Une ligne en trait fin (épais) représente le champ ϕ (Φ). Les diagrammes de gauche représentent les prédictions de la théorie effective déduites de celles de la théorie complète obtenues dans la limite de basse énergie des diagrammes de droite. L'indice (0) rappelle l'ordre en perturbation auquel est réalisée la procédure.

On se propose tout d'abord de déterminer les $c_i^{(0)}$ en faisant correspondre les fonctions à n points \mathcal{G}_n , où seul ϕ apparaît sur les pattes externes, des théories complète et effective à l'arbre. En outre, puisque l'ensemble des c_i est fini, seul un nombre restreint (3 à cet ordre) de fonctions de corrélation sera nécessaire. Nous discuterons ensuite comment réaliser le matching à une boucle pour évaluer les corrections $c_i^{(1)}$.

1.1.2.1 Matching à l'arbre

Au niveau des arbres la procédure de matching est résumée diagrammatiquement sur la figure 1.1. On commence par fixer $c_{4,1}^{(0)}$ et $c_2^{(0)}$ en utilisant la fonction à deux points. Dans les deux théories, l'inverse du propagateur est :

$$\begin{aligned} i\mathcal{G}_{2,full} &= p^2 - m^2 \\ i\mathcal{G}_{2,EFT} &= c_{4,1}^{(0)}p^2 - c_2^{(0)}M^2 + \frac{c_{6,2}^{(0)}}{M^2}p^4. \end{aligned}$$

soit :

$$c_{4,1}^{(0)} = 1, \quad c_2^{(0)} = \frac{m^2}{M^2} \quad \text{et} \quad c_{6,2}^{(0)} = 0. \quad (1.39)$$

Remarquons que le coefficient de Wilson correspondant à la masse effective du champ est anormalement faible. Cela reflète l'instabilité du champ scalaire dont l'échelle naturelle est M . Pour le rendre léger, il suffit simplement de choisir à l'arbre $c_2^{(0)} \ll 1$. Ce choix n'est bien sûr pas radiativement stable et conduit au problème de hiérarchie. Passons maintenant aux fonctions à quatre points, qui sont données par :

$$\begin{aligned} i\mathcal{G}_{4,full} &= \lambda + \kappa^2 \frac{M^2}{p^2 - M^2} \simeq \lambda - \kappa^2 \left(3 + \frac{p^2}{M^2} \right) + \dots \\ i\mathcal{G}_{4,EFT} &= c_{4,2}^{(0)} - 2c_{6,1}^{(0)} \frac{p^2}{M^2} \end{aligned}$$

où p^2 est le moment total entrant. Il vient alors :

$$c_{4,2}^{(0)} = \lambda - 3\kappa^2 \quad \text{et} \quad c_{6,1}^{(0)} = \frac{\kappa^2}{2}. \quad (1.40)$$

Puis, la fonction à six points fixe le dernier coefficient via :

$$\begin{aligned} i\mathcal{G}_{6,full} &= 45\alpha\kappa^2 \frac{M^2}{(p^2 - M^2)(q^2 - M^2)} \simeq 45 \frac{\alpha\kappa^2}{M^2} + \dots \\ i\mathcal{G}_{6,EFT} &= \frac{c_{6,3}^{(0)}}{M^2} \end{aligned}$$

d'où l'on tire : $c_{6,3}^{(0)} = 45\alpha\kappa^2$. Finalement, on retrouve la forme (1.24) au niveau classique pour le lagrangien effectif :

$$\mathcal{L}_{eff}^{(0)} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{4!}(\lambda - 3\kappa^2)\phi^4 - \frac{\kappa^2}{8M^2}\phi^2\Box\phi^2 - \frac{\alpha\kappa^2}{16}\frac{\phi^6}{M^2}. \quad (1.41)$$

Nous allons maintenant utilisé le lagrangien précédent pour améliorer le matching jusqu'à l'ordre d'une boucle.

1.1.2.2 Matching des corrections radiatives

Au niveau quantique, le lagrangien effectif est de la forme :

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_{eff}^{(0)} + \mathcal{L}_{eff}^{(1)} + \dots \quad (1.42)$$

où $\mathcal{L}_{eff}^{(0)}$ est le lagrangien classique (1.41) et $\mathcal{L}_{eff}^{(1)}$ est la correction à une boucle paramétrée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff}^{(1)} &= \frac{c_{4,1}^{(1)}}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{c_2^{(1)}}{2}M^2\phi^2 - \frac{c_{4,2}^{(1)}}{4!}\phi^4 \\ &\quad - \frac{c_{6,1}^{(1)}}{4M^2}\phi^2\Box\phi^2 - \frac{c_{6,2}^{(1)}}{M^2}\phi\Box^2\phi - \frac{c_{6,3}^{(1)}}{6!}\frac{\phi^6}{M^2}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Les coefficients de Wilson à une boucle sont également déterminées en faisant correspondre les prédictions des théories complète et effective pour les fonctions de corrélation précédentes, mais cette fois évaluées à une boucle. Dans la théorie complète, les contributions à considérer se limitent aux diagrammes 1PI pour ϕ seulement, noté 1LPI pour 1 « Light » PI, c'est-à-dire à l'ensemble des diagrammes restant connexes après la coupure d'une ligne interne de ϕ . Le calcul dans la théorie effective se fait comme suit :

$$\mathcal{G}_{n,EFT} = \mathcal{G}_{n,EFT}^{(0)} + \mathcal{G}_{n,EFT}^{(1)} + \delta\mathcal{G}_{n,EFT} + \dots \quad (1.44)$$

Le premier terme est l'amplitude obtenue à l'arbre en utilisant le lagrangien effectif classique. Le second est la correction à une boucle à cette amplitude, calculée à l'aide du lagrangien $\mathcal{L}_{eff}^{(0)}$ également. Enfin, $\delta\mathcal{G}_{n,EFT}$ représente les corrections $\mathcal{L}_{eff}^{(1)}$ aux couplages de $\mathcal{L}_{eff}^{(0)}$. En ce sens, $\mathcal{L}_{eff}^{(1)}$ constitue un ensemble de « contre-termes » (finis) à l'arbre qui est ajusté de manière à reproduire les résultats de la théorie complète à une boucle :

$$\mathcal{G}_{n,full} = \mathcal{G}_{n,full}^{(0)} + \mathcal{G}_{n,full}^{(1)} + \dots \quad (1.45)$$

Ainsi, $c_i^{(0)} + c_i^{(1)}$ sont l'exact analogue des couplages renormalisés en théorie quantique des champs, que l'on détermine habituellement en demandant à la théorie quantique de

reproduire les mesures expérimentales réalisées à une échelle donnée. Après le matching à l'arbre, on a $\mathcal{G}_{n,full}^{(0)} = \mathcal{G}_{n,EFT}^{(0)}$. On détermine alors les $c_i^{(1)}$ en imposant :

$$\mathcal{G}_{n,full}^{(1)} = \mathcal{G}_{n,EFT}^{(1)} + \delta\mathcal{G}_{n,EFT}. \quad (1.46)$$

De plus, nous réaliserons ce matching dans le schéma de renormalisation \overline{MS} à l'échelle μ^4 . Bien que, dans l'approximation renormalisable $d_i \leq 4$, le choix du schéma de renormalisation soit arbitraire, il est en revanche beaucoup plus pratique d'utiliser un schéma n'introduisant pas de nouvelle échelle d'énergie sous forme polynomiale lorsque des opérateurs effectifs non renormalisables sont pris en compte. En effet, en introduisant par exemple un cut-off Λ , peuvent apparaître des termes de la forme $\sim \Lambda/M$, rendant caduque le développement effectif pour $\Lambda \sim M$. En outre, même dans le schéma \overline{MS} , les corrections radiatives peuvent introduire des termes logarithmiques de la forme $\log(m^2/M^2)$ dont la présence remet également en question la validité du développement perturbatif pour $m \ll M$. Nous réaliserons alors le matching des amplitudes à l'échelle $\mu = M$ afin d'éliminer ces logarithmes du lagrangien effectif.

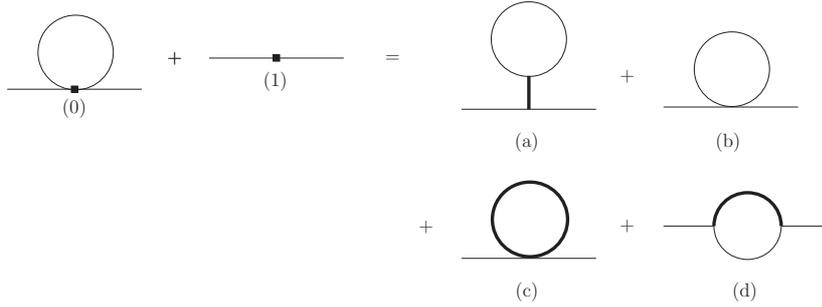


FIG. 1.2 – Diagramme contribuant au matching à une boucle de la fonction à deux points. Du côté de la théorie effective, l'indice (0) indique que les couplages à l'arbre sont utilisés pour évaluer le diagramme à une boucle. Quant à l'indice (1), il représente les contre-termes nécessaires à une boucle pour reproduire correctement la fonction à deux points de la théorie complète.

Pour illustrer la procédure décrite ci-dessus, nous nous limiterons au matching de la fonction à deux points. Les diagrammes 1LPI contribuant à cette fonction de corrélation sont représentés sur la figure 1.2 et l'amplitude s'écrit :

$$\mathcal{G}_{2,full}^{(1)} \equiv \sum_{i=a,b,c,d} \mathcal{G}_{2,full}^{(1),i}. \quad (1.47)$$

⁴On rappelle que ce schéma est défini par la soustraction des termes proportionnels à $C_{UV} \equiv 2/\epsilon - \gamma_E + \log 4\pi$ dans les corrections radiatives régularisées en $d = 4 - \epsilon$ dimensions.

Dans la limite de basse énergie, $p^2 \sim m^2 \ll M^2$, les amplitudes \overline{MS} deviennent :

$$i\mathcal{G}_{2,full}^{(1),a} = -\frac{\kappa^2}{32\pi^2} m^2 \left(\log \frac{m^2}{\mu^2} - 1 \right), \quad (1.48)$$

$$i\mathcal{G}_{2,full}^{(1),b} = \frac{\lambda}{32\pi^2} m^2 \left(\log \frac{m^2}{\mu^2} - 1 \right), \quad (1.49)$$

$$i\mathcal{G}_{2,full}^{(1),c} = \frac{\alpha}{32\pi^2} M^2 \left(\log \frac{M^2}{\mu^2} - 1 \right), \quad (1.50)$$

$$i\mathcal{G}_{2,full}^{(1),d} = \frac{\kappa^2}{16\pi^2} \left[M^2 \left(\log \frac{M^2}{\mu^2} - 1 \right) - m^2 \left(1 + \frac{m^2}{M^2} \right) \log \frac{m^2}{M^2} - \frac{p^2}{2} \left(1 + 3\frac{m^2}{M^2} + 2\frac{m^2}{M^2} \log \frac{m^2}{M^2} \right) - \frac{p^4}{6M^2} \right] + \dots \quad (1.51)$$

La théorie effective ne fournit qu'un seul diagramme à une boucle dont l'amplitude, dans le schéma \overline{MS} est donnée par :

$$i\mathcal{G}_{2,EFT}^{(1)} = \frac{m^2}{32\pi^2} (\lambda - 3\kappa^2) \left(\log \frac{m^2}{\mu^2} - 1 \right) - \frac{\kappa^2}{16\pi^2} \frac{m^2}{M^2} (p^2 + m^2) \left(\log \frac{m^2}{\mu^2} - 1 \right) + \dots \quad (1.52)$$

où la première ligne est la contribution de l'opérateur ϕ^4 au vertex quartique, alors que la seconde est générée par l'opérateur $\phi^2 \square \phi^2$. A cela vient s'ajouter les contre-termes de $\mathcal{L}_{eff}^{(1)}$ contribuant à la fonction à deux points comme :

$$i\delta\mathcal{G}_{2,EFT}(\phi \rightarrow \phi) = c_{4,1}^{(1)} p^2 - c_2^{(1)} M^2 + \frac{c_{6,2}^{(1)}}{M^2} p^4. \quad (1.53)$$

Le matching à une boucle s'appuie sur l'identification des amplitudes précédentes à l'échelle $\mu = M$:

$$\mathcal{G}_{2,EFT}(\mu = M) = \mathcal{G}_{2,full}(\mu = M) \quad (1.54)$$

modulo des corrections d'ordre supérieur en M^{-1} et à boucle. Rassemblant les résultats des amplitudes ci-dessus, on obtient les corrections à une boucle suivantes aux coefficients de Wilson :

$$c_{4,1}^{(1)} = -\frac{\kappa^2}{96\pi^2}, \quad c_2^{(1)} = \frac{1}{32\pi^2} (\alpha + 2\kappa^2) + \frac{\kappa^2}{16\pi^2} \frac{m^2}{M^2} \left(1 + \frac{m^2}{M^2} \right), \quad (1.55)$$

$$c_{6,2}^{(1)} = -\frac{\kappa^2}{32\pi^2} \left(1 + 5\frac{m^2}{M^2} \right), \quad (1.56)$$

pour lesquels toute dépendance en $\log(m^2/M^2)$ a disparu, conservant ainsi le contrôle sur le développement effectif en puissance de M^{-1} , même au niveau quantique. Intéressons nous d'un peu plus près à la masse « renormalisée » à une boucle de ϕ dans la théorie effective. Son expression est donnée par :

$$M^2 \left(c_2^{(0)} + c_2^{(1)} \right) = m^2 + \frac{M^2}{32\pi^2} (\alpha + 2\kappa^2) + \mathcal{O}(M^{-2}) \quad (1.57)$$

et la faible masse classique m se retrouve radiativement repoussée vers l'échelle M . C'est l'instabilité propre aux champs scalaires. Ainsi, pour conserver un sens, à une

boucle, à la hiérarchie $m \ll M$ de la théorie effective, il est nécessaire d'ajuster finement $c_2^{(0)}$ et $c_2^{(1)}$ de façon à ce que la masse renormalisée reste d'ordre $m \ll M$. En particulier $c_2^{(0)}$ et $c_2^{(1)}$ doivent se compenser jusqu'à une précision d'au moins $\mathcal{O}(m^2/M^2)$.

1.2 Le Modèle Standard effectif

Après quelques exemples illustratifs de théories quantiques des champs effectives, nous étendrons au cadre du Modèle Standard les méthodes présentées plus haut. Nous construirons notamment le lagrangien effectif modélisant la nouvelle physique attendue à l'échelle du TeV et présenterons un ensemble réduit d'opérateurs que permet de contraindre les mesures de précisions autour du pôle du Z réalisées par LEP (1 et 2).

1.2.1 Exemples de théories effectives des champs

Il existe de nombreux exemple de théories des champs effectives, pour lesquels les méthodes illustrées plus haut sont employées pour simplifier l'étude phénoménologique à basse énergie d'une théorie connue.

1.2.1.1 Diffusion photon/photon et lagrangien d'Euler-Heisenberg

Pour des énergies nettement inférieures à m_W , l'interaction lumière/matière est essentiellement décrite par le lagrangien de QED :

$$\mathcal{L}_{QED} = i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi - m_e\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (1.58)$$

où le fermion ψ est le champ électronique et m_e la masse de l'électron. Lorsque la lumière a une énergie très inférieure à m_e , il est possible de décrire la diffusion photon/photon par un lagrangien effectif déduit de QED après intégration de l'électron. L'invariance de jauge et de Lorentz implique que la première correction effective au lagrangien de Maxwell soit de dimension huit⁵. On obtient alors :

$$\mathcal{L}_{\gamma\gamma} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{m_e^4} \left[c_1(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})^2 + c_2(F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu})^2 \right] + \mathcal{O}(m_e^{-6}). \quad (1.59)$$

Ce lagrangien effectif a été dérivé pour la première fois par Euler et Heisenberg en 1936 [12]. Les coefficients $c_{1,2}$ sont non nuls à partir d'une boucle seulement et on les obtient en réalisant le matching de la fonction à quatre points représentée par le diagramme boîte de la figure 1.3 en QED. Un calcul direct, suivant la méthode détaillée pour la théorie scalaire précédente, conduit à [12] :

$$c_1 = \frac{\alpha^2}{90}, \quad c_2 = \frac{7\alpha^2}{90} \quad (1.60)$$

où $\alpha \equiv e^2/4\pi$ est la constante de structure fine. Notons que le lagrangien effectif de QED, après intégration de l'électron, contient également deux opérateurs de dimension six modifiant le propagateur du photon :

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{1}{m_e^2} [a_1 F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu} + a_2 \partial_\mu F^{\mu\nu} \partial^\rho F_{\rho\nu}] + \mathcal{L}_{\gamma\gamma}. \quad (1.61)$$

⁵Les termes trilineaire de la forme $e^3 F_{\mu\nu} F^{\nu\rho} F_\rho^\mu$ sont nuls car la théorie effective est, comme QED, invariante sous le conjugaison de charge $e \rightarrow -e$, impliquant $A_\mu \rightarrow -A_\mu$.

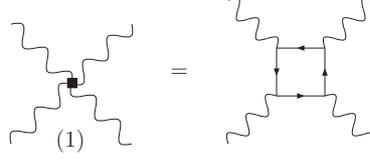


FIG. 1.3 – Diagramme à une boucle en QED produisant, pour $E \ll m_e$, l'interaction effective à quatre photon décrite par le lagrangien d'Euler-Heisenberg.

Cependant de tels opérateurs peuvent être éliminés par une simple redéfinition de A_μ revenant à utiliser l'équation de Maxwell à l'ordre le plus bas $\partial_\nu F^{\nu\mu} = e j_{em}^\mu$. En l'absence de courant électromagnétique externe, constituant la valeur de fond de ψ , les interactions de dimension six sont identiquement nulles. Le lagrangien de Euler-Heisenberg constitue un outil important dans l'étude de l'interaction du vide quantique avec un champ électrique et/ou magnétique extérieur.

1.2.1.2 Théorie de Fermi des interactions faibles

L'exemple de théorie des champs effective le plus populaire est sans doute la théorie de Fermi. Dans les années 1930, Fermi proposa que la désintégration faible du neutron $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$ pouvait se décrire par une interaction effective à quatre fermions [9] et augmenta le lagrangien de QED de l'opérateur suivant :

$$\delta\mathcal{L}_F = -\frac{4G_F}{\sqrt{2}}(\bar{n}\gamma_\mu p)(\bar{\nu}_e\gamma^\mu e) \quad (1.62)$$

où $G_F \simeq 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ est la constante de Fermi. Cette paramétrisation effective n'est plus valable lorsque l'énergie du proton devient de l'ordre de $E \sim G_F^{-1/2} \simeq 100 \text{ GeV}$. En effet, on sait aujourd'hui qu'à cette échelle apparaissent les bosons W et Z et que la théorie effective de Fermi doit être remplacée par l'interaction électrofaible $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Le lagrangien de Fermi s'obtient alors en intégrant le W qui véhicule la désintégration faible du neutron et $G_F \sim m_W^{-2}$. Afin d'éviter les complications dues à l'interaction forte, il est plus pratique de réaliser le matching entre les théories électrofaible et de Fermi pour la désintégration du muon. Dans la théorie électrofaible, le couplage entre les courants leptoniques chargés et le W est de la forme :

$$L_{EW} \supset -\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{l}_L\gamma^\mu\nu_{lL}W_\mu^- + h.c. \quad (1.63)$$

avec $l = e, \mu$ et l'interaction à quatre fermions dans la théorie de Fermi s'écrit :

$$\delta\mathcal{L}_F = -\frac{4G_F}{\sqrt{2}}(\bar{\mu}_L\gamma_\mu\nu_{\mu L})(\bar{\nu}_{eL}\gamma^\mu e_L) \quad (1.64)$$

A partir de la théorie électrofaible, on dérive alors la valeur de la constante de Fermi, pour $E \ll 100 \text{ GeV}$, en faisant correspondre à l'arbre le vertex effectif à quatre fermions avec le diagramme d'échange d'un W , comme illustré figure 1.4. Le propagateur⁶ du

⁶ Dans la jauge de 't Hooft-Feynman, correspondant à une jauge R_ξ pour $\xi = 1$. La procédure étant faite à l'arbre, les fantômes ne contribuent pas et le résultat est indépendant du choix de fixation de jauge.

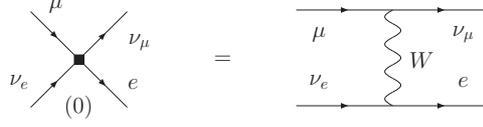


FIG. 1.4 – Matching au niveau des arbres de la constante de Fermi à partir de l'échange d'un boson W dans la théorie électrofaible, véhiculant la désintégration du muon.

W s'écrivant $-i\eta_{\mu\nu}(q^2 - m_W^2)^{-1}$, on obtient alors :

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2}. \quad (1.65)$$

Bien que la théorie électrofaible soit connue et relativement bien testée expérimentalement, la théorie de Fermi s'avère encore très utile pour étudier la désintégration de quarks lourds à basse énergie, notamment en incluant les corrections hadroniques.

La théorie de Fermi est la première tentative de modélisation d'un effet nouveau, non décrit par QED, à partir d'opérateur effectif impliquant les champs de QED. On peut alors à nouveau appliquer cette approche au Modèle Standard, afin de décrire une nouvelle physique au-delà de l'échelle électrofaible pour laquelle, bien que non observée encore aujourd'hui, demeure de fortes motivations théoriques en faveur de son existence.

1.2.2 Approche effective de la nouvelle physique au-delà de m_W

1.2.2.1 Le Modèle Standard en quelques mots

Le Modèle Standard des interactions forte et électrofaible est une théorie des champs renormalisable basée sur le lagrangien suivant⁷ :

$$\mathcal{L}_{SM} = -\frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} - \frac{1}{4}W^{\mu\nu a}W_{\mu\nu}^a - \frac{1}{4}G^{\mu\nu A}G_{\mu\nu}^A \quad (1.66)$$

$$+ i\bar{L}^i\gamma^\mu D_\mu L^i + i\bar{l}_R^i\gamma^\mu D_\mu l_R^i \quad (1.67)$$

$$+ i\bar{Q}^i\gamma^\mu D_\mu Q^i + i\bar{u}_R^i\gamma^\mu D_\mu u_R^i + i\bar{d}_R^i\gamma^\mu D_\mu d_R^i \quad (1.68)$$

$$+ |D_\mu H|^2 - m^2|H|^2 - \lambda|H|^4 \quad (1.69)$$

$$- y_{ij}^l \bar{L}^i H l_R^j - y_{ij}^d \bar{Q}^i H d_R^j - y_{ij}^u \bar{Q}^i \tilde{H} u_R^j + h.c. \quad (1.70)$$

$$+ \frac{g_s^3}{32\pi^2} \theta G^{\mu\nu A} \tilde{G}_{\mu\nu}^A \quad (1.71)$$

avec $i = 1 \dots N_f$, $N_f = 3$. Le lagrangien ci-dessus est écrit dans la base d'interaction où, par définition, les couplages des fermions aux bosons de jauge sont diagonaux. Dans la base des états propres de masse, où les couplages de Yukawa sont diagonaux, on a $l = e, \mu, \tau$, $u = u, c, t$ et $d = d, s, b$. $L^T = (\nu_L, l_L)$ et $Q^T = (u_L, d_L)$ sont les doublets de $SU(2)_L$ et H le doublet scalaire de Higgs avec $\tilde{H} = i\sigma_2 H^*$. $G_{\mu\nu}^A, W_{\mu\nu}^a, B_{\mu\nu}$

⁷ Au niveau quantique apparaissent les champs fantômes de Faddeev-Popov accompagnés des termes de fixations de jauge.

sont les tenseurs cinétiques de $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ respectivement :

$$G_{\mu\nu}^A = \partial_\mu G_\nu^A - \partial_\nu G_\mu^A + g_s f_{ABC} G_\mu^B G_\nu^C, \quad (1.72)$$

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g \epsilon_{abc} W_\mu^b W_\nu^c, \quad (1.73)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \quad (1.74)$$

La dérivée covariante de jauge s'écrit :

$$D_\mu = \partial_\mu - i \frac{1}{2} g_s \lambda^A G_\mu^A - i \frac{1}{2} g \sigma^a W_\mu^a - i g' Y B_\mu \quad (1.75)$$

où les matrices λ^A et σ^a sont celles de Gell-Mann et Pauli lorsqu'appliquées à des représentations fondamentales et sont nulles pour des singulets. Dans le Modèle Standard il n'y a pas de représentations de dimension supérieure à la fondamentale. De plus, seuls les quarks constituent des triplets de couleurs, les particules gauches forment des doublets de $SU(2)$ et les hypercharges sont $Y(L) = -1/2$, $Y(e_R) = -1$, $Y(Q) = 1/6$, $Y(u_R) = 2/3$, $Y(d_R) = -1/3$ et $Y(H) = 1/2$. Le terme θ de QCD est un invariant topologique caractérisant l'état du vide de $SU(3)_c$. Il est *a priori* non nul, quoique nécessairement faible puisqu'il contribue au moment dipolaire électrique du neutron, jusque là resté inobservé. Nous le prendrons nul à partir de maintenant et \mathcal{L}_{SM} est alors CP invariant. De plus, lorsque les couplages de Yukawa sont nuls, le Modèle Standard possède également une grande symétrie globale de saveur $SU(3)^5 = SU(3)_L \times SU(3)_l \times SU(3)_Q \times SU(3)_d \times SU(3)_u$, illustrant la liberté que l'on a de redéfinir les trois états de saveur pour les leptons et les quarks, gauches aussi bien droits, séparément. Enfin, la brisure de la symétrie électrofaible est paramétrée par une valeur dans le vide non nulle du champ Higgs pour $m^2 < 0$, $\langle H \rangle^T = (0, v_H/\sqrt{2})$ avec $v_H = \sqrt{-m^2/\lambda} \simeq 246$ GeV. Dans la phase brisée, où le lagrangien est développé autour du vide stable, les bosons de jauge de $SU(2)_L \times U(1)_Y$ se décomposent en quatre états propres de masse, deux neutres et deux chargés électriquement, définis par les combinaisons linéaires suivantes :

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp i W_\mu^2), \quad (1.76)$$

$$Z_\mu = c_W W_\mu^3 - s_W B_\mu, \quad (1.77)$$

$$A_\mu = s_W W_\mu^3 + c_W B_\mu \quad (1.78)$$

ayant pour masses :

$$m_W = \frac{g v_H}{2}, \quad m_Z = \frac{g v_H}{2 c_W}, \quad m_A = 0 \quad (1.79)$$

où les sinus et cosinus de l'angle de mélange sont donnés par :

$$s_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \text{ et } c_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \quad (1.80)$$

Enfin ces états propres de masse couplent respectivement aux courants fermioniques $j_L^{\mu\pm} = (j_L^{\mu 1} \pm i j_L^{\mu 2})/\sqrt{2}$, $j_Z^\mu = j_L^{\mu 3} - s_W^2 j_Q^\mu$ et $j_Q^\mu = j_L^{\mu 3} + j_Y^\mu$ avec les constantes de couplages g , g/c_W et $e = g s_W = g' c_W$.

1.2.2.2 Premiers pas au-delà

Les tests de précision électrofaible, sensibles également aux corrections hadroniques à haute énergie, ont apportés de solides preuves quant à la validité du Modèle Standard jusqu'à des énergies de l'ordre de 200 GeV. Il reste néanmoins plusieurs faits sur lesquels il faillit à fournir une explication satisfaisante tels que la masse des neutrinos, l'asymétrie matière/antimatière, la stabilité de la hiérarchie $m_W \ll M_{Pl}$ au niveau quantique et, lorsqu'il est couplé minimalement à la gravité, l'extrême faiblesse de la constante cosmologique. Ces lacunes du Modèle Standard conduisent tout naturellement à le voir comme une approximation effective à l'échelle du W d'une théorie plus fondamentale dont la nouvelle dynamique à une échelle $M \gg m_W$ répond aux questions laissées en l'état par le Modèle Standard. Le lagrangien renormalisable \mathcal{L}_{SM} est alors remplacé par un lagrangien effectif de la forme :

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_{SM} + \frac{1}{M}\mathcal{L}_5 + \frac{1}{M^2}\mathcal{L}_6 + \mathcal{O}(M^{-3}) \quad (1.81)$$

Ici, l'échelle M , tout comme les coefficients des opérateurs non renormalisables introduits, n'est pas *a priori* fixée, puisque la physique au-delà du Modèle Standard reste encore inconnue. En revanche, ces nouveaux paramètres peuvent être déterminés par une mesure précise des phénomènes observables auxquels \mathcal{L}_{eff} contribue. Ils sont également calculables une fois qu'un nouveau modèle, à l'échelle du TeV et/ou au-delà, est défini. Ainsi, l'approche effective permet de tester les modèles de nouvelle physique en paramétrant leurs effets d'une façon générique à l'échelle électrofaible. On compare alors ces prédictions effectives avec les résultats de mesures précises obtenus à cette même échelle, et ce sans nécessairement s'aventurer directement dans le régime de haute énergie expérimentalement.

Équations du mouvement Afin d'éliminer les opérateurs redondants de la paramétrisation de \mathcal{L}_{eff} , nous pouvons utiliser les équations du mouvement à l'ordre le plus bas, c'est-à-dire celles du Modèle Standard. Après une simple variation par rapport aux champs, on dérive de \mathcal{L}_{SM} :

$$\bar{L}^i \rightarrow i\gamma^\mu D_\mu L^i + y_{ij}^l H l_R^j = 0, \quad (1.82)$$

$$\bar{l}_R^i \rightarrow i\gamma^\mu D_\mu l_R^i + y_{ij}^{l*} H^\dagger L^j = 0, \quad (1.83)$$

$$\bar{Q}^i \rightarrow i\gamma^\mu D_\mu Q^i + y_{ij}^d H d_R^j + y_{ij}^u \tilde{H} u_R^j = 0, \quad (1.84)$$

$$\bar{d}_R^i \rightarrow i\gamma^\mu D_\mu d_R^i + y_{ij}^{d*} H^\dagger Q^j = 0, \quad (1.85)$$

$$\bar{u}_R^i \rightarrow i\gamma^\mu D_\mu u_R^i + y_{ij}^{u*} \tilde{H}^\dagger Q^j = 0, \quad (1.86)$$

$$H^\dagger \rightarrow D^\mu D_\mu H + m^2 H + 2\lambda(H^\dagger H)H - y_{ij}^{l*} \bar{l}_R^i L^j - y_{ij}^{d*} \bar{d}_R^i Q^j - y_{ij}^u \bar{Q}^i (i\sigma^2) u_R^j = 0, \quad (1.87)$$

$$G_\mu^A \rightarrow D_\nu G^{\nu\mu A} + g_s j_c^{\mu A} = 0, \quad (1.88)$$

$$W_\mu^a \rightarrow D_\nu W^{\nu\mu a} + i\frac{g}{2}(D^\mu H^\dagger \sigma^a H - H^\dagger \sigma^a D^\mu H) + g j_L^{\mu a} = 0, \quad (1.89)$$

$$B_\mu \rightarrow D_\nu B^{\nu\mu} + i\frac{g'}{2}(D^\mu H^\dagger H - H^\dagger D^\mu H) + g' j_Y^\mu = 0. \quad (1.90)$$

où les courants de jauge sont :

$$\begin{aligned}
 j_c^{\mu A} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_f} (\bar{Q}^i \gamma^\mu \lambda^A Q^i + \bar{d}_R^i \gamma^\mu \lambda^A d_R^i + \bar{u}_R^i \gamma^\mu \lambda^A u_R^i), \\
 j_L^{\mu a} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_f} (\bar{L}^i \gamma^\mu \sigma^a L^i + \bar{Q}^i \gamma^\mu \sigma^a Q^i), \\
 j_Y^\mu &= \sum_{i=1}^{N_f} \left(-\frac{1}{2} \bar{L}^i \gamma^\mu L^i - \bar{l}_R^i \gamma^\mu l_R^i + \frac{1}{6} \bar{Q}^i \gamma^\mu Q^i - \frac{1}{3} \bar{d}_R^i \gamma^\mu d_R^i + \frac{2}{3} \bar{u}_R^i \gamma^\mu u_R^i \right).
 \end{aligned}$$

Les expressions ci-dessus sont écrites dans la base d'interaction dans laquelle les couplages des fermions sont diagonaux dans l'espace de saveur. Lorsque les fermions sont redéfinis pour passer dans la base des états propres de masse, des mélanges entre les trois générations apparaissent dans les couplages au W seulement. Une des propriétés importantes du Modèle Standard est qu'il ne contient aucun changement de saveur par courant neutre au niveau des arbres, les couplages au Z restant diagonaux dans les deux bases.

Opérateurs effectif Au premier ordre au-delà du Modèle Standard, il existe un seul opérateur de dimension cinq $SU(2)_L \times U(1)_Y$ invariant :

$$\mathcal{L}_5 = y_{ij}^\nu \bar{L}^c{}^i H \tilde{H}^\dagger L^j + h.c. \quad (1.91)$$

qui génère une masse de Majorana pour les neutrinos gauches du Modèle Standard après la brisure électrofaible :

$$m_\nu = y^\nu \frac{v_H^2}{2M}. \quad (1.92)$$

Les expériences d'oscillation indiquent une échelle de masse des neutrinos inférieure à l'eV. Par conséquent, dans l'hypothèse où les couplages de Yukawa sont $\sim \mathcal{O}(1)$, l'échelle M doit être d'au moins 10^{13} GeV. Cette valeur est relativement proche de l'échelle de grande unification $M_{GUT} \sim 10^{16}$ GeV, dont l'existence pourrait alors être à l'origine de la masse des neutrinos. En outre, dans la perspective de confronter ce Modèle Standard effectif aux données recueillies aux collisionneurs, on peut sereinement négliger cet opérateur dont l'effet, d'ordre $m_W/M < 10^{-11}$, sera imperceptible dans le secteur des neutrinos. Les seules expériences où cet opérateur est observable sont les expériences d'oscillation de neutrinos.

A l'ordre supérieur, les invariants de dimensions six sont très nombreux et \mathcal{L}_6 compte pas moins d'une centaine d'opérateurs distincts. Cet ensemble se réduit à 80 opérateurs linéairement indépendants⁸ en imposant, comme c'est le cas dans le Modèle Standard⁹, la conservation des nombres leptonique et baryonique dans la théorie effective [5]. Dans cette liste, seuls 52 opérateurs conservent les symétries de saveur $SU(3)$ ⁵

⁸ Il persiste cependant une redondance dans le comptage de [5]. En effet, dans le secteur scalaire, les trois opérateurs construits à partir de quatre Higgs et deux dérivées sont reliés par intégration par partie.

⁹ Naturellement, ceci n'est vrai que dans l'approximation classique, car ces symétries sont anormales. Seuls $B - L_l$ sont alors conservées au niveau quantique. Néanmoins, comme nous le rappellerons au chapitre 3, les violations de $B + L_l$ sont des processus non perturbatifs, seulement pertinent à haute température.

et CP , parmi lesquels il y a 18 opérateurs construits exclusivement à partir de champs de quarks et/ou de gluons. Bien qu'*a priori* rien n'impose que CP et la symétrie de saveur ne soient pas violées au-delà du Modèle Standard, supposer leur conservation est en revanche une excellente approximation lorsqu'on se limite aux effets que peut avoir une nouvelle physique à l'échelle du TeV. En effet, les processus violant ces symétries ont des rapports de branchement relativement faibles. Par exemple, la violation de CP observée dans les oscillations de kaons neutres impose que les opérateurs CP impairs soit supprimés par $M > 10^3$ TeV [4]. Le correction au moment dipolaire électrique de l'électron repousse par ailleurs l'échelle de violation de CP à $M > 10^4$ TeV [4]. Également, l'absence d'observation de processus de changement de saveur tel que $\mu \rightarrow e\gamma$, impose que $SU(3)^5$ est brisée à une échelle du même ordre de grandeur $M > 10^4$ TeV. Ainsi, ces opérateurs auront un effet d'au plus 10^{-4} fois l'ordre de grandeur des prédictions du Modèle Standard sur les observables mesurées aux collisionneurs, pour une énergie de l'ordre de 100 GeV (LEP) ou du TeV (LHC). Ils peuvent alors être négligés en première approximation. Il reste ainsi 34 opérateurs indépendants de dimension six dans le secteur électrofaible, listés dans le tableau 1.1. C'est l'ensemble maximal d'opérateurs dominants dont les effets sont susceptibles d'apparaître dans les expériences en collisionneur autour du TeV. Néanmoins, aujourd'hui, après LEP1 et LEP2 mais avant le LHC, seuls certains d'entre eux sont contraints expérimentalement.

1.2.3 Tests de précisions électrofaibles aux collisionneurs

Non seulement LEP consolida l'idée selon laquelle les interactions des particules élémentaires étaient décrites par une théorie de jauge mais, de plus, ces expériences mesurèrent avec une précision si grande, allant jusqu'au pour mille, certaines observables du Modèle Standard qu'il est devenu possible d'estimer les corrections d'une éventuelle physique au-delà. Le LEP ayant été un collisionneur e^+e^- , les expériences LEP1 et LEP2 furent principalement sensibles aux couplages des leptons chargés avec les bosons de jauge électrofaible. Dans le secteur électrofaible, les prédictions du Modèle Standard pour les observables mesurées par LEP sont toutes exprimables en fonctions de seulement trois paramètres au niveau des arbres¹⁰, les couplages de jauge $SU(2)_L \times U(1)_Y$, g et g' respectivement, ainsi que la VEV du Higgs brisant cette symétrie, v_H . On utilise alors les trois observables les mieux connues expérimentalement pour fixer ces derniers [17, 16] :

$$\alpha_{em}^{-1}(q = m_Z) = 128,949 \pm 0,046 \quad (1.93)$$

$$G_F = 1,16639 \pm 0,00001 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \quad (1.94)$$

$$m_Z = 91,1876 \pm 0,0021 \text{ GeV}. \quad (1.95)$$

De plus, LEP1 a permis la mesure d'autres observables à, et sous, le pôle du Z telles que la largeur totale de désintégration du Z ou la masse du W :

$$\Gamma_Z = 2,4952 \pm 0,0023 \text{ GeV} \quad (1.96)$$

$$m_W = 80,398 \pm 0,025 \text{ GeV} \quad (1.97)$$

¹⁰Néanmoins, le Modèle Standard nécessitant le calcul des corrections radiatives pour reproduire convenablement les données, ses prédictions dépendent alors également des 16 autres paramètres libres que sont les masses des 9 fermions, celle du Higgs, les 4 paramètres de la matrice CKM (3 angles de mélange + 1 phase violant CP), g_s et θ_{QCD} .

$\mathcal{O}_{3W} = \epsilon_{abc} W_\mu^{\nu a} W_\nu^{\lambda b} W_\lambda^{\mu c},$	
$\mathcal{O}_{LL}^{(1)} = \frac{1}{2}(\bar{L}\gamma^\mu L)(\bar{L}\gamma_\mu L),$	$\mathcal{O}_{LQ}^{(1)} = (\bar{L}\gamma^\mu L)(\bar{Q}\gamma_\mu Q),$
$\mathcal{O}_{LL}^{(2)} = \frac{1}{2}(\bar{L}\gamma^\mu \sigma^a L)(\bar{L}\gamma_\mu \sigma^a L),$	$\mathcal{O}_{LQ}^{(2)} = (\bar{L}\gamma^\mu \sigma^a L)(\bar{Q}\gamma_\mu \sigma^a Q),$
$\mathcal{O}_{ll} = (\bar{l}_R\gamma^\mu l_R)(\bar{l}_R\gamma_\mu l_R),$	$\mathcal{O}_{lu} = (\bar{l}_R\gamma^\mu l_R)(\bar{u}_R\gamma_\mu u_R),$
$\mathcal{O}_{ld} = (\bar{l}_R\gamma^\mu l_R)(\bar{d}_R\gamma_\mu d_R),$	$\mathcal{O}_{Ll} = (\bar{L}\gamma^\mu L)(\bar{l}_R\gamma_\mu l_R),$
$\mathcal{O}_{Lu} = (\bar{L}\gamma^\mu L)(\bar{u}_R\gamma_\mu u_R),$	$\mathcal{O}_{Ld} = (\bar{L}\gamma^\mu L)(\bar{d}_R\gamma_\mu d_R),$
$\mathcal{O}_{Ql} = (\bar{Q}\gamma^\mu Q)(\bar{l}_R\gamma_\mu l_R),$	
$\mathcal{O}_H = \frac{1}{3}(H^\dagger H)^3,$	$\mathcal{O}_{\partial H} = \frac{1}{2}\partial_\mu(H^\dagger H)\partial^\mu(H^\dagger H),$
$\mathcal{O}_{LW} = i(\bar{L}\gamma^\mu \sigma^a D^\nu L)W_{\mu\nu}^a + h.c.,$	$\mathcal{O}_{LB} = i(\bar{L}\gamma^\mu D^\nu L)B_{\mu\nu} + h.c.,$
$\mathcal{O}_{lB} = i(\bar{l}_R\gamma^\mu D^\nu l_R)B_{\mu\nu} + h.c.,$	$\mathcal{O}_{QW} = i(\bar{Q}\gamma^\mu \sigma^a D^\nu Q)W_{\mu\nu}^a + h.c.,$
$\mathcal{O}_{QB} = i(\bar{Q}\gamma^\mu D^\nu Q)B_{\mu\nu} + h.c.,$	$\mathcal{O}_{uB} = i(\bar{u}_R\gamma^\mu D^\nu u_R)B_{\mu\nu} + h.c.,$
$\mathcal{O}_{dB} = i(\bar{d}_R\gamma^\mu D^\nu d_R)B_{\mu\nu} + h.c.,$	
$\mathcal{O}_{GH} = \frac{1}{2}H^\dagger H G_{\mu\nu}^A G^{\mu\nu A},$	$\mathcal{O}_{WH} = \frac{1}{2}H^\dagger H W_{\mu\nu}^a W^{\mu\nu a},$
$\mathcal{O}_{BH} = \frac{1}{2}H^\dagger H B_{\mu\nu} B^{\mu\nu},$	$\mathcal{O}_{WB} = (H^\dagger \sigma^a H)W_{\mu\nu}^a B^{\mu\nu},$
$\mathcal{O}_{DH}^{(1)} = (D_\mu H^\dagger D^\mu H)(H^\dagger H),$	$\mathcal{O}_{DH}^{(2)} = (D_\mu H^\dagger H)(H^\dagger D^\mu H),$
$\mathcal{O}_{LH}^{(1)} = i(H^\dagger D_\mu H)(\bar{L}\gamma^\mu L) + h.c.,$	$\mathcal{O}_{LH}^{(2)} = i(H^\dagger \sigma^a D_\mu H)(\bar{L}\gamma^\mu \sigma^a L) + h.c.,$
$\mathcal{O}_{QH}^{(1)} = i(H^\dagger D_\mu H)(\bar{Q}\gamma^\mu Q) + h.c.,$	$\mathcal{O}_{QH}^{(2)} = i(H^\dagger \sigma^a D_\mu H)(\bar{Q}\gamma^\mu \sigma^a Q) + h.c.,$
$\mathcal{O}_{uH} = i(H^\dagger D_\mu H)(\bar{u}_R\gamma^\mu u_R) + h.c.,$	$\mathcal{O}_{dH} = i(H^\dagger D_\mu H)(\bar{d}_R\gamma^\mu d_R) + h.c.,$
$\mathcal{O}_{lH} = i(H^\dagger D_\mu H)(\bar{l}_R\gamma^\mu l_R) + h.c.$	

TAB. 1.1 – Liste des 34 opérateurs indépendants de dimension six qui induisent des déviations aux observables électrofaibles susceptibles d'être observées aux collisionneurs. Pour les courants fermioniques, l'indice de génération est implicitement sommé afin de respecter la symétrie de saveur, soit $(\bar{L}\gamma^\mu L) \equiv \sum_{i=1}^{N_f} (\bar{L}^i\gamma^\mu L^i)$, etc... ou les parenthèses représentent la contraction des indices spinoriels. D'autres opérateurs à quatre fermions peuvent également être écrits, comme $(\bar{L}l_R)(\bar{l}_R L)$ ou encore $(\bar{L}\sigma_{\mu\nu} L)(\bar{l}_R\sigma^{\mu\nu} l_R)$, mais ils sont équivalents à ceux présentés ci-dessus, grâce aux identités de Fierz.

avec une précision de l'ordre du pour mille. Seuls 10 des opérateurs de dimensions six de la liste précédente contribuent à ces observables [3] :

$$\mathcal{O}_{WB}, \mathcal{O}_{DH}^{(2)}, \mathcal{O}_{LL}^{(2)}, \mathcal{O}_{LH}^{(1)}, \mathcal{O}_{LH}^{(2)}, \mathcal{O}_{QH}^{(1)}, \mathcal{O}_{QH}^{(2)}, \mathcal{O}_{lH}, \mathcal{O}_{uH}, \mathcal{O}_{dH}. \quad (1.98)$$

En portant l'énergie dans le centre de masse des collisions e^+e^- au dessus de la masse du Z , LEP2 étudia avec une précision de l'ordre du pourcent les processus de diffusion du type $e^+e^- \rightarrow Z \rightarrow ff$, et sonda pour la première fois les opérateurs à quatre fermions construits à partir des courants de jauge :

$$\mathcal{O}_{LL}^{(1)}, \mathcal{O}_{LQ}^{(1)}, \mathcal{O}_{LQ}^{(2)}, \mathcal{O}_{ll}, \mathcal{O}_{lu}, \mathcal{O}_{ld}, \mathcal{O}_{Ll}, \mathcal{O}_{Ql}, \mathcal{O}_{Ld}, \mathcal{O}_{Lu}. \quad (1.99)$$

Par conséquent, après LEP2, la liste d'opérateurs effectifs de dimension six pertinents est réduite de 34 à 20 éléments. Malgré un degré de précision moins élevé que LEP1, les mesures de LEP2 sont tout aussi importantes car les observables concernées, se situant au dessus du pôle du Z , sont plus sensibles à la nouvelle physique.

Les opérateurs restant sont négligeables pour les raisons suivantes. \mathcal{O}_{3W} ne modifie que les auto couplages de jauge mesurés via les processus $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ avec une précision plus faible que le pourcent. Il peut donc être écarté, ne contraignant que très faiblement la nouvelle physique. Tout comme les opérateurs \mathcal{O}_H et $\mathcal{O}_{\partial H}$ que affectent exclusivement le secteur Higgs ayant, jusqu'à présent, échappé à toute détection directe. Cependant, alors que le premier peut s'avérer important dans les processus de diffusion de bosons faibles, possiblement détectables au LHC, les deux derniers modifient la dynamique de la transition de phase électrofaible dans l'univers primordial, qui peut être étudiée en principe via la détection d'ondes gravitationnelles émises lors de cet événement. Nous y consacrerons le chapitre suivant. Ensuite, les effets de \mathcal{O}_{GH} , \mathcal{O}_{WH} , \mathcal{O}_{BH} et $\mathcal{O}_{DH}^{(1)}$ peuvent être réabsorbés par une redéfinition des couplages du Modèle Standard. Enfin, les 7 opérateurs \mathcal{O}_{LW} , \mathcal{O}_{LB} , \mathcal{O}_{lB} , \mathcal{O}_{QW} , \mathcal{O}_{QB} , \mathcal{O}_{uB} et \mathcal{O}_{dB} peuvent aussi être mis de côté car, bien qu'ils affectent les observables mesurées par LEP2, leurs effets interfèrent destructivement avec les contributions du Modèle Standard et sont donc négligeables à l'ordre M^{-2} [11].

1.2.3.1 Base oblique des opérateurs effectifs

Il existe une base des opérateurs effectifs pour laquelle les corrections sont rassemblées dans les propagateurs des bosons de jauge faibles. A l'ordre M^{-2} , les opérateurs contribuant aux self-énergies de W_μ^a et B_μ sont :

$$\mathcal{O}_{WB} = (H^\dagger \sigma^a H) W_{\mu\nu}^a B^{\mu\nu}, \quad \mathcal{O}_{DH}^{(2)} = (D_\mu H^\dagger H)(H^\dagger D^\mu H), \quad (1.100)$$

$$\mathcal{O}_{\partial B} = \frac{1}{2} \partial_\rho B_{\mu\nu} \partial^\rho B^{\mu\nu}, \quad \mathcal{O}_{DW} = \frac{1}{2} D_\rho W_{\mu\nu}^a D^\rho W^{\mu\nu a}. \quad (1.101)$$

D'autres opérateurs bilinéaires comme $F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu}$ ou $\partial_\rho F^{\rho\nu} \partial^\mu F_{\mu\nu}$, avec $F = W, B$, se mettent sous les formes ci-dessus soit après intégration par partie ou utilisation des identités de Bianchi :

$$\partial_\rho B_{\mu\nu} + \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} = 0, \quad (1.102)$$

$$D_\rho W_{\mu\nu}^a + D_\mu W_{\nu\rho}^a + D_\nu W_{\rho\mu}^a = 0. \quad (1.103)$$

Les deux derniers opérateurs n'apparaissent pas dans la liste précédente car ils s'écrivent en terme d'opérateurs y figurant après une redéfinition des champs ou, ce qui est équivalent, par l'utilisation des équations du mouvement pour B_μ et W_μ^a dans le Modèle Standard. Ainsi, à partir de (1.90), (1.89) et l'identité de Bianchi, on obtient les relations :

$$\frac{1}{g^2} \mathcal{O}_{\partial B} - \mathcal{O}_{DH}^{(2)} - \mathcal{O}_{fH}^Y - \mathcal{O}_{ff'}^Y = \frac{1}{2} \mathcal{O}_{DH}^{(1)} + \frac{1}{4} \mathcal{O}_{D^2H}, \quad (1.104)$$

$$\frac{1}{g^2} \mathcal{O}_{DW} + \mathcal{O}_{fH}^L + \mathcal{O}_{ff'}^L = -\mathcal{O}_{3W} + \frac{3}{2} \mathcal{O}_{DH}^{(1)} + \frac{1}{4} \mathcal{O}_{D^2H} \quad (1.105)$$

où

$$\mathcal{O}_{D^2H} = (H^\dagger H)(H^\dagger D_\mu D^\mu H) + h.c. \quad (1.106)$$

et

$$\begin{aligned}
 \mathcal{O}_{fH}^Y &= ij_Y^\mu (H^\dagger D_\mu H) + h.c. - \frac{1}{2} \mathcal{O}_{LH}^{(1)} - \mathcal{O}_{lH} + \frac{1}{6} \mathcal{O}_{QH}^{(1)} - \frac{1}{3} \mathcal{O}_{dH} + \frac{2}{3} \mathcal{O}_{uH} \\
 \mathcal{O}_{fH}^L &= ij_L^{\mu a} (H^\dagger D_\mu \sigma^a H) + h.c. = \frac{1}{2} \mathcal{O}_{LH}^{(2)} + \frac{1}{2} \mathcal{O}_{QH}^{(2)} \\
 \mathcal{O}_{ff'}^Y &= j_Y^\mu j_{Y\mu} = -\frac{1}{4} \mathcal{O}_{LL}^{(1)} + \mathcal{O}_{Ll} - \frac{1}{6} \mathcal{O}_{LQ}^{(1)} - \frac{2}{3} \mathcal{O}_{Lu} + \frac{1}{3} \mathcal{O}_{Ld} - \frac{1}{3} \mathcal{O}_{Ql} - \frac{4}{3} \mathcal{O}_{lu} \\
 &\quad + \frac{2}{3} \mathcal{O}_{ld} + \mathcal{O}_{ll} + \dots \\
 \mathcal{O}_{ff'}^L &= j_L^{\mu a} j_{L\mu}^a = \frac{1}{4} \mathcal{O}_{LL}^{(2)} + \frac{1}{2} \mathcal{O}_{LQ}^{(2)} + \dots
 \end{aligned}$$

Après utilisation de l'équation du mouvement du Higgs, \mathcal{O}_{D^2H} peut être absorbé par une redéfinition des paramètres du potentiel de Higgs et des couplages de Yukawa des fermions et \dots représentent des opérateurs constitués uniquement de champs de quark, sciemment négligés jusqu'à présent. Omettant ainsi les opérateurs ne contribuant pas aux observables de précision, le membre de droite des relations (1.104) et (1.105) se réduit à zéro. Et toute correction aux self-énergies des bosons de jauge est décrite par la table 1.1.

1.2.3.2 Deux combinaisons linéaires non contraintes

Les observables mesurées par LEP1 et LEP2 ne sont donc sensibles qu'à 20 opérateurs de dimension six. Il apparaît toutefois que deux combinaisons linéaires d'entre-eux sont totalement transparentes aux tests de précision électrofaibles car elles s'écrivent en termes d'opérateurs non contraints après utilisation des équations du mouvement [10]. En effet, contractant les équations (1.90), (1.89) par $(iH^\dagger D_\mu H + h.c.)$ et $(iH^\dagger \sigma^a D_\mu H + h.c.)$ respectivement, on dérive les relations suivantes¹¹ :

$$2g' \mathcal{O}_{DH}^{(2)} - \frac{g}{2} \mathcal{O}_{WB} + g' \mathcal{O}_{fH}^Y = g' \mathcal{O}_{BH} - \frac{g'}{2} \mathcal{O}_{D^2H} - g' \mathcal{O}_{DH}^{(1)} + 2\mathcal{O}_{BDH} \quad (1.107)$$

$$-g' \mathcal{O}_{WB} + 2g \mathcal{O}_{fH}^L = g \mathcal{O}_{WH} - g \mathcal{O}_{D^2H} - 6g \mathcal{O}_{DH}^{(1)} + 4\mathcal{O}_{WDH} \quad (1.108)$$

où

$$\mathcal{O}_{BDH} = iB_{\mu\nu} D^\mu H^\dagger D^\nu H, \quad \mathcal{O}_{WDH} = iW_{\mu\nu}^a D^\mu H^\dagger \sigma^a D^\nu H \quad (1.109)$$

sont des opérateurs corrigeant les couplages entre les bosons de jauge, et peuvent également être ignorés dans l'analyse des tests de précision. Ainsi, comme précédemment, le membre de droite des relations ci-dessus est inobservable (ou du moins très peu contraint) à LEP et peut être légitimement éliminé dans ce contexte. En conséquence, la liste dérivée plus haut contient seulement 18 opérateurs indépendants.

1.3 Paramétrer les corrections effectives au Modèle Standard

Nombreux sont les modèles de nouvelle physique dont les effets sur les observables mesurées par LEP sont très majoritairement, si ce n'est exclusivement, rassemblés dans

¹¹ On utilise entre autres les identités de Fierz suivantes : $(\sigma^a)_{ij} (\sigma^a)_{kl} = \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{kj} \delta_{il} - (\sigma^a)_{kj} (\sigma^a)_{il} = 2\delta_{kj} \delta_{il} - \delta_{ij} \delta_{kl}$.

les self-energies de bosons de jauge électrofaibles. De tels corrections aux prédictions du Modèle Standard sont dites *obliques* ou *universelles*. D'une manière générale, c'est le cas lorsque les nouvelles particules du modèle considéré couplent très faiblement aux fermions du Modèle Standard ou seulement aux combinaisons linéaires correspondant aux courants de jauge j_Y, j_L^a . Dans ce cas, on peut alors utiliser les équations du mouvement des bosons de jauge électrofaibles pour transformer toutes les corrections fermioniques en contribution aux self-énergies. L'exemple le plus simple est celui d'un nouveau boson vecteur de masse élevée et couplant aux courants neutres du Modèle Standard. Les modèles cinq-dimensionnels où seuls les bosons de jauge peuvent se propager dans le bulk [2, 3], ainsi que certains modèles Little Higgs [8, 13], entre également dans cette classe. Nous détaillerons dans un premier temps les méthodes de calculs des corrections obliques dans les modèles dits universels. Et puis nous présenterons une extension minimale de cette paramétrisation permettant de prendre également en compte les effets non universels contraints par les tests de précision.

1.3.1 Les paramètres obliques de Peskin-Takeuchi

Nous présentons ici la paramétrisation oblique due à Peskin et Takeuchi [14, 15] des corrections effectives au Modèle Standard. Bien que celle-ci ait été initialement développée pour paramétrer les corrections à une boucle des self-énergies des bosons de jauge, il s'avère également utile pour estimer les contraintes expérimentales sur une nouvelle physique universelle.

1.3.1.1 Lagrangien effectif pour les bosons de jauge

Dans cette base oblique, seuls les propagateurs des bosons de jauge sont affectés par la nouvelle physique. Dans l'espace des impulsions, on écrit le lagrangien effectif quadratique des champs de jauge comme :

$$\mathcal{L}_{eff}^{obl} = -\frac{1}{2}W_\mu^3\Pi_{33}^{\mu\nu}(q)W_\nu^3 - \frac{1}{2}B_\mu\Pi_{00}^{\mu\nu}(q)B_\nu - W_\mu^3\Pi_{30}^{\mu\nu}(q)B_\nu - W_\mu^+\Pi_{+-}^{\mu\nu}(q)W_\nu^- \quad (1.110)$$

où les couplages aux fermions restent, par hypothèse, standards :

$$\mathcal{L}_{eff}^f = gj_L^{\mu a}W_\mu^a + g'j_Y^\mu B_\mu. \quad (1.111)$$

La partie cinétique du lagrangien effectif est volontairement mise sous une forme non invariante sous $SU(2)_L$, ce qui constitue simplement une paramétrisation des corrections obliques dans la phase brisée de la théorie électrofaible. La forme des self-énergies¹² $\Pi_{ij}^{\mu\nu}(q)$ des bosons de jauge est imposée par la covariance de Lorentz :

$$\Pi_{ij}^{\mu\nu}(q) \equiv \Pi_{ij}(q^2)\eta^{\mu\nu} + \Delta_{ij}(q^2)q^\mu q^\nu. \quad (1.112)$$

Le second terme induit une correction supprimée par un facteur $m_f/m_{W,Z}$ par rapport au premier, lorsque $\Pi^{\mu\nu}$ est contracté avec un courant de fermions, car $q_\mu \bar{f}\gamma^\mu f = -m_f \bar{f}f$ via l'équation de Dirac. Cette contribution est négligeable pour les fermions légers observés aux LEP. L'accord du Modèle Standard avec les données expérimentales requérant le calcul de corrections radiatives, les $\Pi(q^2)$ se décomposent essentiellement en deux termes :

$$\Pi(q^2) = \Pi_{tree}(q^2) + \Pi_{1-loop}(q^2) + \dots \quad (1.113)$$

¹²Dans la notation utilisée ici, $\Pi^{\mu\nu}$ inclut également la contribution à l'arbre.

contenant les prédictions du Modèle Standard ainsi que les corrections de la nouvelle physique. Dans l'hypothèse où celle-ci apparaît à une énergie nettement supérieure à l'échelle électrofaible, ses effets sont relativement faibles et il est alors suffisant de les prendre en compte au niveau des arbres, soit $\Pi_{1loop} \rightarrow \Pi_{1-loop}^{SM}$. On considère ainsi seulement Π_{tree} que nous noterons simplement Π par la suite. Cette partie classique admet alors un développement effectif en puissance de q^2 :

$$\Pi_{ij}(q^2) = \Pi_{ij}(0) + q^2 \Pi'_{ij}(0) + \frac{1}{2} q^4 \Pi''_{ij}(0) + \dots \quad (1.114)$$

où les ordres supérieurs conduisent à des corrections trop faibles pour être observées étant donné la précision des mesures réalisées. En effet, un terme bilinéaire d'ordre q^6 est nécessairement supprimé par un facteur M^{-4} et n'est par conséquent non nul que si des opérateurs de dimension huit sont introduits dans le lagrangien effectif. A priori, à l'ordre q^4 , il y a 12 paramètres indépendants. Cependant 3 d'entre eux peuvent être absorbés dans la définition des grandeurs utilisées pour réaliser la comparaison de la théorie avec les données : g , g' et v_H , revenant¹³ à normaliser canoniquement W_μ^\pm et B_μ et à fixer la masse du W :

$$\Pi'_{+-}(0) = 1, \quad \Pi'_{00}(0) = 1, \quad \Pi_{+-}(0) = -m_W^2. \quad (1.115)$$

En outre, dans la phase brisée, le photon est un champ de masse nulle couplant à la charge électrique $Q = T_3 + Y$. Ceci impose deux relations supplémentaires que nous dériverons ci-après. Les 7 paramètres restants sont alors définis par les combinaisons sans dimension suivantes :

$$\hat{S} \equiv \frac{g}{g'} \Pi'_{30}(0), \quad (1.116)$$

$$\hat{T} \equiv m_W^{-2} [\Pi_{33}(0) - \Pi_{+-}(0)], \quad (1.117)$$

$$\hat{U} \equiv \Pi'_{+-}(0) - \Pi'_{33}(0), \quad (1.118)$$

où $S = 4s_W^2 \alpha^{-1} \hat{S} \simeq 119 \hat{S}$, $T = \alpha^{-1} \hat{T} \simeq 129 \hat{T}$ et $U = -4s_W^2 \alpha^{-1} \hat{U} \simeq 119 \hat{U}$ sont les paramètres de Peskin et Takeuchi [15] et :

$$V = \frac{1}{2} m_W^{-2} [\Pi''_{33}(0) - \Pi''_{+-}(0)], \quad W = \frac{1}{2} m_W^{-2} \Pi''_{33}(0), \quad (1.119)$$

$$X = \frac{1}{2} m_W^{-2} \Pi''_{30}(0), \quad Y = \frac{1}{2} m_W^{-2} \Pi''_{00}(0). \quad (1.120)$$

Notons que, par construction, \hat{S} , \hat{T} , \hat{U} , V , X , Y s'annulent (à l'arbre) dans le Modèle Standard et, en présence d'une nouvelle physique oblique à l'échelle $M \gg m_W$, admettent un développement en puissance de M^{-1} . Par ailleurs, \hat{T} , \hat{U} et V sont automatiquement nuls si le modèle contient une symétrie $SU(2)$ custodiale sous laquelle W_μ^a se transforme comme un triplet, imposant $\Pi_{33}(q^2) = \Pi_{+-}(q^2)$. En particulier, le paramètre \hat{T} mesure le rapport des masses des bosons faibles et est relié au paramètre $\rho \equiv m_W^2 / c_W^2 m_Z^2$ par $\rho = 1 + \hat{T}$.

¹³Cette équivalence est plus transparente après la redéfinition $W_\mu^a \rightarrow W_\mu^a/g$, $B_\mu \rightarrow B_\mu/g'$, puisqu'avec cette normalisation ces trois conditions deviennent $\Pi'_{+-}(0) = g^{-2}$, $\Pi'_{00}(0) = g'^{-2}$ et $\Pi_{+-}(0) = -v_H^2/4$.

1.3.1.2 Lien avec les opérateurs de dimension six

Parmi les 7 paramètres obliques, 4 sont produits par les opérateurs de dimension six (1.100) et (1.101). Après brisure spontanée de la symétrie électrofaible, \mathcal{O}_{WB} et $\mathcal{O}_{DH}^{(2)}$ deviennent :

$$\mathcal{O}_{WB} = -\frac{v_H^2}{2} W_{\mu\nu}^3 B^{\mu\nu} + \dots \quad (1.121)$$

$$\mathcal{O}_{DH}^{(2)} = \frac{v_H^4}{16} (gW_\mu^3 - g'B_\mu)(gW^{\mu 3} - g'B^\mu) + \dots \quad (1.122)$$

Ainsi le premier génère un mélange cinétique Z/γ , soit un paramètre S , et le second modifie la masse du Z et produit un paramètre T non nul. On peut alors définir une nouvelle normalisation comme suit :

$$\mathcal{O}_{WB} \equiv 4s_W c_W \alpha^{-1} v_H^2 \mathcal{O}_S, \quad \mathcal{O}_{DH}^{(2)} \equiv -\frac{v_H^2}{2\alpha} \mathcal{O}_T \quad (1.123)$$

de sorte que les paramètres S et T soit directement donnés par les coefficients adimensionnés de \mathcal{O}_S et \mathcal{O}_T dans le lagrangien effectif \mathcal{L}_6 . Les opérateurs (1.101) contiennent tous deux des termes bilinéaires avec 4 dérivées. Ils contribuent donc à l'ordre q^4 à $\Pi_{00}(q^2)$, $\Pi_{33}(q^2)$ et $\Pi_{+-}(q^2)$ respectivement. Ainsi, $\mathcal{O}_{\partial B}$ contribue à Y et \mathcal{O}_{DW} à W , V restant nul par invariance custodiale. De même que pour les deux opérateurs précédents, on peut définir ici :

$$\mathcal{O}_{\partial B} \equiv -m_W^2 \mathcal{O}_Y, \quad \mathcal{O}_{DW} \equiv -m_W^2 \mathcal{O}_W. \quad (1.124)$$

Les 3 paramètres obliques restant sont seulement générés par des opérateurs au moins de dimension huit, pour \hat{U} et X , ou dix, pour V , comme par exemple :

$$\hat{U} : (H^\dagger \sigma^a H)(H^\dagger \sigma^b H) W_{\mu\nu}^a W^{\mu\nu b}, \quad (1.125)$$

$$X : (H^\dagger \sigma^a H) D_\rho W_{\mu\nu}^a \partial^\rho B^{\mu\nu}, \quad (1.126)$$

$$V : (H^\dagger \sigma^a H)(H^\dagger \sigma^b H) D_\rho W_{\mu\nu}^a D^\rho W^{\mu\nu b}. \quad (1.127)$$

On s'attend alors naturellement à ce que ces trois paramètres soit supprimés par rapport aux quatre précédents, à moins que le modèle requiert un ajustement fin des coefficients des opérateurs effectifs. Cette possibilité écartée, d'une simple analyse dimensionnelle l'on déduit :

$$\hat{U} \sim \frac{m_W^2}{M^2} \hat{T}, \quad V \sim \frac{m_W^4}{M^4} \hat{T}, \quad X \sim \frac{m_W^2}{M^2} \hat{S}. \quad (1.128)$$

Si l'échelle de la nouvelle physique M est beaucoup plus grande que la masse du W , alors l'étude des corrections obliques se limite à l'ensemble des paramètres \hat{S} , \hat{T} , W et Y . Les deux premiers brisent $SU(2)_L$ pour $v_H \neq 0$ et sont sensibles au mécanisme de brisure de symétrie électrofaible, alors que les deux derniers « mesurent » seulement les effets de nouveaux bosons de jauge.

1.3.1.3 Contraintes expérimentales

Les mesures de précision de LEP1 contraignent la largeur des fenêtres autorisée expérimentalement pour les paramètres S , T et U à [17] :

$$S = -0,10 \pm 0,10 (-0,08), \quad (1.129)$$

$$T = -0,08 \pm 0,11 (+0,09), \quad (1.130)$$

$$U = +0,15 \pm 0,11 (+0,01). \quad (1.131)$$

Étant donné que le Higgs n'a pas été observé, l'estimation des corrections obliques dépend de la masse du Higgs et les valeurs ci-dessus sont pour $m_H = 117$ GeV, alors que sont reportées entre parenthèses les décalages induits sur les valeurs centrales lorsque $m_H = 300$ GeV est choisi. Ces bornes deviennent encore plus étroites dans la limite $U = 0$, motivé par le fait que typiquement, pour une nouvelle physique à une échelle $M \gg m_W$, on a $U \ll S, T$. Ainsi, pour $U = 0$, S et T sont bornés par [17] :

$$S = -0,04 \pm 0,09 (-0,07), \quad (1.132)$$

$$T = +0,02 \pm 0,09 (+0,09). \quad (1.133)$$

En incluant les mesures de LEP2, il devient également possible de contraindre X , Y et W [3] :

$$X = (-2,3 \pm 3,5) \times 10^{-3}, \quad (1.134)$$

$$Y = (+4,2 \pm 4,9) \times 10^{-3}, \quad (1.135)$$

$$W = (-2,7 \pm 2,0) \times 10^{-3}. \quad (1.136)$$

1.3.1.4 Le photon est de masse nulle et couple à $T_3 + Y$.

Nous dérivons les deux relations entre les self-énergies imposées par la symétrie électromagnétique du vide de la théorie. Afin d'identifier le champ du photon à partir du lagrangien oblique (1.110), nous procédons en deux étapes. Tout d'abord nous redéfinissons les champs B_μ et W_μ^3 de manière à éliminer le mélange cinétique $\Pi'_{30}(0)$. Ensuite, en termes des champs de jauge canoniquement normalisés, nous identifions le photon comme étant la combinaison linéaire de masse nulle. La partie cinétique de \mathcal{L}_{eff} valant pour les champs neutres :

$$\mathcal{L}_{eff}^{kin} = -\frac{q^2}{2} [B_\mu \Pi'_{00} B^\mu + W_\mu^3 \Pi'_{33} W^{\mu 3} + 2W_\mu^3 \Pi'_{30} B^\mu] \quad (1.137)$$

on obtient des normes canoniques avec les redéfinitions suivantes :

$$B_\mu = (\Pi'_{00})^{-1/2} \bar{B}_\mu - \frac{\Pi'_{30}}{\Pi'_{00}} \left(\Pi'_{33} - \frac{\Pi'_{30}{}^2}{\Pi'_{00}} \right)^{-1/2} \bar{W}_\mu^3 \quad (1.138)$$

$$W_\mu^3 = \left(\Pi'_{33} - \frac{\Pi'_{30}{}^2}{\Pi'_{00}} \right)^{-1/2} \bar{W}_\mu^3, \quad (1.139)$$

soit :

$$\mathcal{L}_{eff}^{kin} = -\frac{q^2}{2} [\bar{B}_\mu \bar{B}^\mu + \bar{W}_\mu^3 \bar{W}^{\mu 3}]. \quad (1.140)$$

Les matrices de masses des champs neutres deviennent alors :

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_{eff}^{mass} &= \frac{1}{2} [B_\mu \Pi_{00} B^\mu + W_\mu^3 \Pi_{33} W^{\mu 3} + 2W_\mu^3 \Pi_{30} B^\mu] \\ &\equiv \frac{1}{2} [\bar{B}_\mu \bar{\Pi}_{00} \bar{B}^\mu + \bar{W}_\mu^3 \bar{\Pi}_{33} \bar{W}^{\mu 3} + 2\bar{W}_\mu^3 \bar{\Pi}_{30} \bar{B}^\mu] \end{aligned} \quad (1.141)$$

avec :

$$\bar{\Pi}_{00} = \frac{\Pi_{00}}{\Pi'_{00}}, \quad (1.142)$$

$$\bar{\Pi}_{33} = \left(\Pi'_{33} - \frac{\Pi'^2_{30}}{\Pi'_{00}} \right)^{-1} \left[\Pi_{33} - 2\Pi_{30} \frac{\Pi'_{30}}{\Pi'_{00}} + \Pi_{00} \frac{\Pi'^2_{30}}{\Pi'^2_{00}} \right], \quad (1.143)$$

$$\bar{\Pi}_{30} = (\Pi'_{00})^{-1/2} \left(\Pi'_{33} - \frac{\Pi'^2_{30}}{\Pi'_{00}} \right)^{-1/2} \left[\Pi_{30} - \Pi_{00} \frac{\Pi'_{30}}{\Pi'_{00}} \right]. \quad (1.144)$$

Une des deux valeurs propres, correspondant à la masse du photon, doit être nulle pour préserver la symétrie de l'électromagnétisme dans le vide, soit $\det \bar{\Pi} \equiv \bar{\Pi}_{33} \bar{\Pi}_{00} - \bar{\Pi}_{30}^2 = 0$, d'où l'on dérive une première relation entre les $\Pi_{ij}(0)$:

$$\Pi_{33}(0)\Pi_{00}(0) - \Pi_{30}^2(0) = 0. \quad (1.145)$$

Notons que celle-ci est indépendante de la normalisation des champs. La seconde s'obtient en fixant le couplage du photon à la charge électrique. Les combinaisons linéaires associées au photon et au Z sont données par :

$$A_\mu = s\bar{W}_\mu^3 + c\bar{B}_\mu, \quad Z_\mu = c\bar{W}_\mu^3 - s\bar{B}_\mu \quad (1.146)$$

où les cosinus et sinus de l'angle de mélange sont définis par :

$$c = \bar{\Pi}_{30} (\bar{\Pi}_{00}^2 + \bar{\Pi}_{30}^2)^{-1/2}, \quad s = \bar{\Pi}_{00} (\bar{\Pi}_{00}^2 + \bar{\Pi}_{30}^2)^{-1/2}. \quad (1.147)$$

et sont *a priori* différents des prédictions du Modèle Standard au niveau des arbres : $c \neq c_W$, $s \neq s_W$. Le couplage des fermions au photon s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff}^f &\supset g j_L^{\mu 3} W_\mu^3 + g' j_Y^\mu B_\mu \\ &= g' \left[c(\Pi'_{00})^{-1/2} - s \frac{\Pi'_{30}}{\Pi'_{00}} \left(\Pi'_{33} - \frac{\Pi'^2_{30}}{\Pi'_{00}} \right)^{-1/2} \right] j_Y^\mu A_\mu \\ &\quad + g s \left(\Pi'_{33} - \frac{\Pi'^2_{30}}{\Pi'_{00}} \right)^{-1/2} j_L^{\mu 3} A_\mu + \dots \\ &\equiv e j_Q^\mu A_\mu + \dots \end{aligned}$$

où $j_Q = j_Y + j_L^3$ est le courant électromagnétique associé à $Q = T_3 + Y$ et \dots représente les couplages au Z que nous détaillerons plus loin. Ainsi la charge électrique vaut :

$$e = g s \left(\Pi'_{33} - \frac{\Pi'^2_{30}}{\Pi'_{00}} \right)^{-1/2} \quad (1.148)$$

$$= g' \left[c(\Pi'_{00})^{-1/2} - s \frac{\Pi'_{30}}{\Pi'_{00}} \left(\Pi'_{33} - \frac{\Pi'^2_{30}}{\Pi'_{00}} \right)^{-1/2} \right] \quad (1.149)$$

et le couplage à j_Q implique la seconde relation recherchée entre les $\Pi_{ij}(0)$:

$$g' \Pi_{30}(0) + g \Pi_{00}(0) = 0, \quad (1.150)$$

une fois encore indépendamment de la normalisation utilisée.

1.3.1.5 Corrections obliques pour un champ de jauge lourd

Nous allons maintenant calculer à titre d'exemple les valeurs de ces paramètres dans un exemple académique de nouvelle physique. Nous considérons le cas simple où un champ de jauge abélien X_μ , de masse $M \gg m_W$, est ajouté au Modèle Standard et ne couple qu'aux fermions. On peut voir cette masse comme le résultat de la brisure d'une nouvelle symétrie de jauge à l'échelle M . Nous supposons également, pour simplifier la discussion, que ce dernier couple uniquement au courant d'hypercharge. Après brisure de la symétrie électrofaible, le lagrangien quadratique s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{full} = & -\frac{1}{2}B_\mu(q^2 - t_W^2 m_W^2)B^\mu - \frac{1}{2}W_\mu^a(q^2 - m_W^2)W^{\mu a} - t_W m_W^2 W_\mu^3 B^\mu \\ & -\frac{1}{2}X_\mu(q^2 - M^2)X^\mu + g' j_Y^\mu (B_\mu + X_\mu) + g j_L^{\mu a} W_\mu^a + \dots \end{aligned} \quad (1.151)$$

où \dots désignent des termes n'impliquant que le champ de Higgs, qui n'est ici que spectateur, ou les interactions entre les W_μ^a . Le lagrangien effectif à l'arbre s'obtient en assignant X_μ à sa valeur classique, solution de l'équation du mouvement :

$$(q^2 - M^2)X^\mu - g' j_Y^\mu = 0 \quad (1.152)$$

et il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff} = & -\frac{1}{2}B_\mu(q^2 - t_W^2 m_W^2)B^\mu - \frac{1}{2}W_\mu^a(q^2 - m_W^2)W^{\mu a} - t_W m_W^2 W_\mu^3 B^\mu \\ & + g' j_Y^\mu B_\mu + g j_L^{\mu a} W_\mu^a + \frac{g^2}{2}(q^2 - M^2)^{-1}(j_Y^\mu)^2. \end{aligned} \quad (1.153)$$

Puis l'équation du mouvement pour B_μ :

$$(q^2 - t_W^2 m_W^2)B^\mu - t_W m_W^2 W^{\mu 3} - g' j_Y^\mu = 0 \quad (1.154)$$

permet d'éliminer, à l'ordre M^{-2} , le carré du courant d'hypercharge et ainsi passer dans une base oblique des opérateurs effectifs :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff} = & -\frac{1}{2}B_\mu(q^2 - t_W^2 m_W^2) \left[1 - \frac{q^2 - t_W^2 m_W^2}{q^2 - M^2} \right] B^\mu \\ & -\frac{1}{2}W_\mu^3 \left[(q^2 - m_W^2) - \frac{t_W^2 m_W^4}{q^2 - M^2} \right] W^{\mu 3} \\ & -t_W m_W^2 W_\mu^3 \left[1 - \frac{q^2 - t_W^2 m_W^2}{q^2 - M^2} \right] B^\mu \\ & -W_\mu^+ (q^2 - m_W^2) W^{\mu -} + g' j_Y^\mu B_\mu + g j_L^{\mu a} W_\mu^a. \end{aligned} \quad (1.155)$$

En développant le lagrangien précédent pour $q^2 \ll M^2$ jusqu'à l'ordre M^{-2} , on lit immédiatement les corrections obliques dans ce modèle :

$$\hat{S} = Y = t_W^{-2} \hat{T} = \frac{m_W^2}{M^2}, \quad (1.156)$$

$$\hat{U} = V = W = 0. \quad (1.157)$$

Alors, la contrainte la plus forte provient du paramètre T et pour $m_W \simeq 80$ GeV, $t_W^{-2} \simeq 3$ et étant donné la contrainte expérimentale rappelée plus haut, $T \simeq 119 \hat{T} \sim 0, 1$, on obtient une borne inférieure approximative pour la masse du boson de jauge X_μ :

$$M \gtrsim 5 \text{ TeV}. \quad (1.158)$$

Remarquons enfin que, contrairement à ce qu'impose la paramétrisation précédente des corrections obliques, B_μ n'est pas un champ canoniquement normalisé :

$$\Pi'_{00}(0) = 1 - 2t_W^2 \frac{m_W^2}{M^2} \neq 1 \quad (1.159)$$

Cependant, une redéfinition des champs fixant $\Pi'_{00}(0) = 1$ ne modifie pas les corrections ci-dessus à l'ordre M^{-2} . Enfin, l'exemple précédent est facilement généralisable au cas d'un couplage arbitraire de X_μ aux courants neutres. Ainsi, en réalisant le remplacement suivant dans \mathcal{L}_{full} ci-dessus :

$$g' j_Y^\mu X_\mu \rightarrow (ag' j_Y^\mu + bg j_L^{\mu 3}) X_\mu, \quad (1.160)$$

on obtient par la même procédure les paramètres obliques :

$$\hat{S} = \frac{m_W^2}{M^2} (a^2 + b^2 - 2abc_W^{-1} s_W^{-1}), \quad \hat{T} = \frac{m_W^2}{M^2} (at_W - b)^2, \quad (1.161)$$

$$Y = a^2 \frac{m_W^2}{M^2}, \quad \hat{U} = 2b \frac{m_W^2}{M^2} (b - at_W), \quad (1.162)$$

$$V = W = \frac{b}{a} X = b^2 \frac{m_W^2}{M^2}. \quad (1.163)$$

Le paradoxe du LEP La borne supérieure dérivée précédemment est un exemple typique de contrainte apportée par LEP sur l'échelle de la nouvelle physique, qui ne peut émerger en dessous de $M \sim 5 - 10$ TeV sans induire de trop grandes déviations aux observables de précision électrofaibles. D'un autre côté, le principe de naturalité suggère plutôt $M \sim$ TeV afin de stabiliser l'échelle électrofaible. Les mesures expérimentales dans le secteur électrofaible indique alors que, pour une raison inconnue, la nouvelle physique vit au moins un ordre de grandeur au-dessus de son échelle naturelle. Ceci constitue ce que l'on appelle le petit problème de hiérarchie ou encore le paradoxe du LEP. Ainsi, quelque soit la théorie ultra-violette complétant le Modèle Standard au-delà de m_{EW} , celle-ci incorpore *a priori* un léger ajustement de ses paramètres. Bien qu'il ne s'agisse ici que d'un ordre de grandeur, ce problème mérite une attention toute particulière puisqu'il est soutenu par les observations, contrairement au problème de hiérarchie de jauge, qui n'est grand que sous l'hypothèse où le Modèle Standard est valide jusqu'à M_{Pl} .

1.3.1.6 Intégrer la composante qui ne couple pas aux fermions

Dans l'exemple précédent, pour obtenir le lagrangien oblique, nous avons intégré l'état propre de masse lourd X_μ . On peut remarquer que ce dernier se dérive immédiatement en intégrant la composante de X_μ et B_μ qui ne couple pas au courant d'hypercharge, que nous notons :

$$B_\mu^{out} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (B_\mu - X_\mu). \quad (1.164)$$

A partir de (1.152) et (1.154), l'équation du mouvement pour B_μ^{out} s'écrit :

$$\left[q^2 - \frac{1}{2} (M^2 + t_W^2 m_W^2) \right] B_\mu^{out} + \frac{1}{2} (M^2 - t_W^2 m_W^2) B_\mu^{in} + \frac{t_W}{\sqrt{2}} m_W^2 W_\mu^3 = 0, \quad (1.165)$$

où B^{in} est la combinaison orthogonale à B^{out} :

$$B_\mu^{in} = \frac{1}{\sqrt{2}} (B_\mu + X_\mu). \quad (1.166)$$

En intégrant alors directement B^{out} , le lagrangien effectif se retrouve directement dans la forme oblique (1.155) avec $B \rightarrow B^{in}$ et les corrections obliques obtenues sont les mêmes que si l'on avait intégré l'état propre de masse X_μ .

D'une manière générale, peu importe la combinaison linéaire des champs intégrée, pourvu que le couplage aux fermions reste dans sa forme standard :

$$g' j_Y^\mu B_\mu + g j_L^{\mu a} W_\mu^a. \quad (1.167)$$

Ceci met en lumière le fait qu'en présence d'une nouvelle physique, B_μ et W_μ^a ne sont pas les champs du Modèle Standard, en particulier leurs relations avec le photon et le Z sont différentes comme illustré plus haut, mais seulement des champs d'interpolation qui, dans un contexte de théorie effective, permettent de relier les corrections obliques dues à une nouvelle physique à des observables du Modèle Standard [3]. Alors qu'il est immédiat dans l'exemple précédent d'intégrer X_μ , puisque l'état propre de masse est déjà isolé dans le lagrangien complet, il s'avère en revanche beaucoup utile dans des situations plus complexes de directement intégrer les combinaisons linéaires des champs qui ne couplent pas aux fermions du Modèle Standard. Ceci permet notamment de calculer les corrections obliques de la théorie au-delà du Modèle Standard sans réaliser une procédure de diagonalisation, potentiellement lourde, de la matrice de masse des bosons de jauge [13]. En particulier, dans les modèles à dimensions supplémentaire, cette propriété justifie l'approche holographique du calcul des corrections obliques [2, 1].

1.3.2 Corrections (non)-obliques : Une paramétrisation minimale

Les paramètres obliques constituent une paramétrisation adéquate des corrections au Modèle Standard lorsque la nouvelle physique ultra-violette affecte uniquement les self-énergies des bosons de jauge ou couplent universellement aux fermions standards. Il reste cependant de nombreux modèles dans la littérature pour lesquels ces couplages dévient de l'universalité. C'est notamment le cas lorsque de nouveaux bosons de jauge lourds couplent à des courants fermioniques qui ne sont pas des combinaisons de j_Y et j_L^a . Des corrections non obliques apparaissent également en présence de nouveaux fermions lourds comme par exemple dans les modèles à dimensions supplémentaires dans lesquelles les fermions du Modèle Standard sont autorisés à se propager. Dans ce cas, les corrections effectives sont partagées entre des corrections obliques et des déviations aux couplages des bosons de jauge aux fermions :

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_{eff}^{obl} + \mathcal{L}_{eff}^{cpl} + \dots \quad (1.168)$$

où \mathcal{L}_{eff}^{obl} est de la forme (1.110) et \dots représentent d'autres corrections de la nouvelle physique, comme par exemple les couplages entre bosons de jauge. La procédure habituelle consiste alors à réaliser un fit global des différents coefficients apparaissant dans \mathcal{L}_{eff} à partir des mesures réalisées sur certaines observables du Modèle Standard.

Cependant une telle approche ne permet pas de distinguer quelles sont les observables les plus contraintes de celles pour lesquelles les mesures expérimentales sont beaucoup moins précises. En effet, puisque la majorité des tests de précision a été effectuée à des collisionneurs e^+e^- , les observables impliquant des leptons chargés dans l'état final sont les mieux mesurées et par conséquent apportent de plus fortes contraintes à la physique au delà du Modèle Standard. Alors, seules de très faibles déviations aux couplages standard pour les leptons chargés sont permises expérimentalement et une universalité de ces derniers, par rapport aux quarks et aux neutrinos, peut être supposée en première approximation.

1.3.2.1 Corrections aux vertex

On peut alors construire une base des corrections effectives où toutes les contributions de la nouvelle physique dans le secteur des leptons chargés sont mises sous forme oblique, alors que \mathcal{L}_{eff}^{cpl} paramètre les déviations aux couplages des quarks et des neutrinos, qui sont beaucoup moins bien contraintes expérimentalement [7]. Une telle base s'obtient en utilisant les équations du mouvements des bosons de jauge. Tenant compte également de l'invariance de jauge électromagnétique, on paramètre alors les couplages aux fermions du photon et du Z de la manière suivante :

$$\mathcal{L}_{eff}^{cpl} = \mathcal{L}_{SM}^{cpl} + \delta\mathcal{L}^{cpl} \quad (1.169)$$

avec :

$$\mathcal{L}_{SM}^{cpl} = e j_Q^\mu A_\mu + \frac{g}{c_W} Z_\mu \left(j_L^{\mu 3} - s_W^2 j_Q^\mu \right) + g \left(W_\mu^+ j_L^{\mu +} + h.c. \right) \quad (1.170)$$

$$\delta\mathcal{L}^{cpl} \equiv (\bar{f}\gamma^\mu f) \left[\frac{g}{c_W} Z_\mu \left(\frac{C_f^Z}{m_W^2} (q^2 - m_Z^2) + \delta g_f \right) + e q^2 \frac{C_f^\gamma}{m_W^2} A_\mu \right] \quad (1.171)$$

pour $f = u_L, d_L, u_R, d_R, \nu_L$. Les champs neutres sont ici définis comme les états propres de masse dans une base où le Z n'est pas canoniquement normalisé et se mélange cinétiquement au photon. Ce choix de base assure l'absence de corrections aux couplages des leptons chargés, même après diagonalisation de la matrice de masse des bosons de jauge neutres. Par exemple, dans la base canonique définie dans la section précédente, l'élimination du mélange cinétique modifie le couplage des leptons aux Z . Ainsi, dans la base oblique, le photon A_μ et le Z sont données simplement par :

$$A_\mu = \kappa \left(s\bar{W}_\mu^3 + c\bar{B}_\mu \right), \quad Z_\mu = c\bar{W}_\mu^3 - s\bar{B}_\mu \quad (1.172)$$

avec :

$$c = \Pi_{30}(\Pi_{00}^2 + \Pi_{30}^2)^{-1/2}, \quad s = \Pi_{00}(\Pi_{00}^2 + \Pi_{30}^2)^{-1/2} \quad (1.173)$$

$$\kappa^2 = (\Pi_{00}^2 + \Pi_{33}^2)^{-1} \left[\Pi_{30}^2 \Pi'_{00} - 2\Pi_{00} \Pi_{30} \Pi'_{30} + \Pi_{00}^2 \Pi'_{33} \right] \quad (1.174)$$

où le photon est canoniquement normalisé. La symétrie électromagnétique impose notamment que le couplage à un photon réel ($q^2 = 0$) soit la charge électrique $e = g s \kappa^{-1} = g' c \kappa^{-1}$. Ainsi, en plus des 7 combinaisons obliques, il y a 3 paramètres supplémentaires dans le secteur des neutrinos et 12 pour les quarks. Néanmoins, pour les neutrinos, seul δg_{ν_L} est mesurable à partir du rapport de branchement invisible du Z et on peut montrer que ce paramètre n'est pas indépendant mais s'écrit comme une combinaison de paramètres obliques :

$$\delta g_{\nu_L} = V - \frac{1}{2} \hat{U} - t_W X. \quad (1.175)$$

De même, on démontre la relation suivante dans le secteur des quarks :

$$c_W^2(C_{d_L}^\gamma - C_{u_L}^\gamma) = (C_{d_L}^Z - C_{u_L}^Z) + t_W^{-1}X. \quad (1.176)$$

Le nombre de paramètres indépendants est ainsi ramené à $7 + 11$, correspondant au nombre d'opérateurs de dimension six ($10 + 10 - 2$) pertinents pour les tests de précision électrofaibles. Cette paramétrisation des corrections effectives offre également une lecture claire des observables qu'elles affectent. Si l'on se limite à l'étude des leptons (chargés et neutres), seuls les 7 paramètres obliques sont nécessaires, par construction. Les observables mesurées au pôle du Z ($q^2 = m_Z^2$) qui impliquent des quarks dans l'état final sont prises en compte par les 4 δg . Enfin, les $C^{\gamma,Z}$ ne sont nécessaires que pour l'étude des sections efficaces $\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})$ mesurées à LEP2 au dessus du pôle du Z , ainsi que les observables pertinentes pour la violation de la parité atomique. Comme évoqué précédemment, cette approche offre également l'avantage d'isoler les observables les mieux mesurées et on peut se limiter à l'ensemble des paramètres obliques en première approximation pour tester les modèles de nouvelle physique. Notons néanmoins que dans ce cas, \hat{S}, \hat{T} , etc ne caractérisent pas seulement les corrections universelles générées par ces derniers, mais également leurs effets sur les observables impliquant les leptons chargés. Une conséquence de cette procédure, volontairement non invariante sous $SU(2)_L$, est que les 7 paramètres obliques sont *a priori* de taille similaire, notamment $\hat{S} \sim X$ et $\hat{T} \sim \hat{U} \sim V$, l'argument dimensionnel basé sur le lagrangien effectif $SU(2)_L$ invariant n'étant plus valable. Au delà des leptons chargés, $\Gamma(Z \rightarrow \text{hadrons})$ est également très bien mesurée au pôle du Z . En sommant les contributions des différents quarks à cette observable, il apparaît que la combinaison suivante est également fortement contrainte :

$$\delta\epsilon_q \equiv \delta g_{u_L} - \delta g_{d_L}. \quad (1.177)$$

Au dessus du pôle du Z , il en est également de même pour la combinaison :

$$\delta C_q \equiv C_{u_L}^Z - C_{d_L}^Z. \quad (1.178)$$

De plus, LEP1 a précisément mesuré les processus impliquant le quark bottom dans l'état final, ce qui apporte une contrainte forte sur δg_{d_L} pour la troisième génération, noté δg_{b_L} . Seul la déviation au couplage des bottoms gauches est fortement contrainte car le couplage standard pour les bottoms droits est sensiblement plus faible, ne permettant pas une mesure aussi précise de sa déviation. Par conséquent, les écarts aux prédictions du Modèle Standard, pour les observables les mieux mesurées expérimentalement, sont rassemblés en 10 paramètres :

$$\hat{S}, \hat{T}, \hat{U}, V, W, X, Y, \delta\epsilon_q, \delta C_q, \delta g_{b_L}. \quad (1.179)$$

Un fit global de ces dix paramètres avec les données expérimentales ainsi que leur calcul en termes des coefficients des 18 opérateurs de dimension six pertinents est présenté en [7].

Conclusion

Dès lors qu'il existe deux échelles nettement séparées dans un système physique, les effets à basse énergie des champs vivant à haute énergie peuvent être paramétrés par une théorie effective plus simple, qui est construite en terme des degrés de liberté

légers uniquement. Si la théorie complète est connue, l'action effective s'obtient alors en intégrant les degrés de liberté ne pouvant être directement excités à basse énergie. Par ailleurs, lorsque la physique à basse énergie semble indiquer la présence d'une extension, toutefois inconnue, à une échelle plus élevée, l'approche effective permet alors d'en contraindre les effets, et donc *in fine* d'en deviner la forme, en s'appuyant sur la mesure précise d'observables physiques. Ainsi, tel que le suggère la présence de la gravitation à la masse de Planck ou tout autre nouvelle physique à l'échelle $M \gtrsim \text{TeV}$, dont le rôle est de stabiliser la hiérarchie de jauge, le Modèle Standard est très certainement une approximation effective à l'échelle électrofaible d'une théorie plus fondamentale. Si celle-ci se manifeste autour du TeV, alors le lagrangien effectif du Modèle Standard respecte en très bonne approximation les symétries de saveur $SU(3)^5$, l'invariance sous CP et la conservation des nombres baryonique et leptonique. Dans ce cas, les premières corrections aux prédictions du Modèle Standard sont induites par une série d'opérateurs de dimension six, dont le nombre est réduit de 80 à 34 linéairement indépendants. Les expériences du LEP testèrent la structure du Modèle Standard jusqu'à une précision du pour mille pour un ensemble d'observables électrofaibles autour du pôle du Z auxquelles seulement une vingtaine de ces opérateurs contribuent. En conséquence, les corrections de la nouvelle physique à ces observables sont nécessairement faibles et impliquent typiquement $M \gtrsim 5 - 10 \text{ TeV}$. Nous avons présenté une méthode de calcul des corrections obliques, ou universelles, qui paramètrent les effets d'une nouvelle physique dont les modifications sont concentrées dans les tenseurs de polarisation des bosons de jauge électrofaibles. Après LEP2, il devient également possible de contraindre les déviations non universelles aux couplages des fermions aux bosons de jauge. Dans ce cas, une extension simple de la paramétrisation oblique a été présentée. Enfin, il est important d'insister sur le fait qu'après LEP1 et LEP2, environ une dizaine de combinaisons linéaires des 20 opérateurs effectifs pertinents pour les observables de précision électrofaibles sont relativement contraintes, les corrections obliques l'étant le plus fortement. Les théories au-delà du Modèle Standard peuvent alors contribuer de larges corrections dans les 10 directions restantes sans pour autant être exclues expérimentalement. La mise en route du LHC, outre la production de nouvelles particules, offrira la possibilité de contraindre certaines des combinaisons linéaires auxquelles LEP fut aveugle, notamment en étudiant les processus de diffusion des bosons de jauge longitudinaux. En effet, alors que les amplitudes dans le Modèle Standard sont unitarisées par un Higgs léger, les opérateurs effectifs induisent typiquement de nouveaux termes croissants avec l'énergie dans le centre de masse, dans la région $m_W \ll E \ll M$. Si de telles violations à l'unitarité sont observées, il sera alors possible de contraindre d'autres opérateurs et ainsi compléter l'analyse présentée dans ce chapitre.

Bibliographie

- [1] K. Agashe, C. Csaki, C. Grojean, and M. Reece. The S-parameter in holographic technicolor models. *JHEP*, 12 :003, 2007.
- [2] R. Barbieri, A. Pomarol, and R. Rattazzi. Weakly coupled Higgsless theories and precision electroweak tests. *Phys. Lett.*, B591 :141–149, 2004.
- [3] R. Barbieri, A. Pomarol, R. Rattazzi, and A. Strumia. Electroweak symmetry breaking after LEP1 and LEP2. *Nucl. Phys.*, B703 :127–146, 2004.
- [4] M. Bona et al. Model-independent constraints on Delta F=2 operators and the scale of New Physics. *JHEP*, 03 :049, 2008.
- [5] W. Buchmuller and D. Wyler. Effective Lagrangian Analysis of New Interactions and Flavor Conservation. *Nucl. Phys.*, B268 :621, 1986.
- [6] C. P. Burgess. Introduction to effective field theory. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 57 :329–362, 2007.
- [7] G. Cacciapaglia, C. Csaki, G. Marandella, and A. Strumia. The minimal set of electroweak precision parameters. *Phys. Rev.*, D74 :033011, 2006.
- [8] C. Csaki, J. Hubisz, G. D. Kribs, P. Meade, and J. Terning. Big corrections from a little Higgs. *Phys. Rev.*, D67 :115002, 2003.
- [9] E. Fermi. An attempt of a theory of beta radiation. 1. *Z. Phys.*, 88 :161–177, 1934.
- [10] C. Grojean, W. Skiba, and J. Terning. Disguising the oblique parameters. *Phys. Rev.*, D73 :075008, 2006.
- [11] Z. Han and W. Skiba. Effective theory analysis of precision electroweak data. *Phys. Rev.*, D71 :075009, 2005.
- [12] W. Heisenberg and H. Euler. Consequences of Dirac's theory of positrons. *Z. Phys.*, 98 :714–732, 1936.
- [13] G. Marandella, C. Schappacher, and A. Strumia. Little-Higgs corrections to precision data after LEP2. *Phys. Rev.*, D72 :035014, 2005.
- [14] M. E. Peskin and T. Takeuchi. A New constraint on a strongly interacting Higgs sector. *Phys. Rev. Lett.*, 65 :964–967, 1990.
- [15] M. E. Peskin and T. Takeuchi. Estimation of oblique electroweak corrections. *Phys. Rev.*, D46 :381–409, 1992.
- [16] J. D. Wells. TASI lecture notes : Introduction to precision electroweak analysis. 2005.
- [17] W. M. Yao et al. Review of particle physics. *J. Phys.*, G33 :1–1232, 2006.

Chapitre 2

Asymétrie matière/antimatière au-delà du Modèle Standard

Pourquoi l'univers est majoritairement constitué de matière? La réponse à cette question majeure de la physique fondamentale réside à la frontière de la physique des particules et de la cosmologie primordiale. Nous commençons ce chapitre par une revue des ingrédients nécessaires à la production d'une asymétrie matière/antimatière dans l'univers. Nous nous focaliserons sur le mécanisme de baryogenèse électrofaible qui permet de tester les diverses formes de physique au-delà du Modèle Standard par l'intermédiaire de la transition de phase électrofaible. Nous présenterons ensuite un calcul détaillé du potentiel quantique du Higgs à température finie dans une approche effective de la nouvelle physique. Enfin, après avoir revisité la dynamique de la transition dans ce modèle, nous nous pencherons sur la détection d'ondes gravitationnelles émises lors de cet événement. Nous tenterons ainsi de consolider un des ponts existant entre la cosmologie et la physique des particules, dans l'espoir de comprendre l'origine de la brisure de symétrie électrofaible en observant les « cendres » gravitationnelles du Higgs libérées pendant la transition et baignant l'univers aujourd'hui encore, inaltérées. Cette étude effective de la transition de phase et de ses conséquences observationnelles a donné à la première publication reportée en fin de mémoire.

2.1 Introduction à la baryogenèse primordiale

2.1.1 Un univers apparemment dépourvu d'antimatière

A ce jour, aucune forme naturelle d'antimatière n'a été détectée dans le système solaire excepté les quelques antiprotons observés par l'intermédiaire des cascades de désintégrations qu'ils produisent en entrant dans l'atmosphère terrestre. De la mesure du flux de ces rayons cosmiques on déduit que la densité d'antiprotons est 10^{-4} fois plus faible que celle de protons. On sait cependant que ces particules d'antimatière sont les produits de collisions proton-proton à haute énergie $pp \rightarrow 3p + \bar{p}$, ayant lieu dans le gaz interstellaire de notre galaxie. Elles n'ont donc rien de primordiales. Mais alors d'où provient cette abondance de matière que l'on observe autour de nous? A-t-elle toujours existé ou résulte-t-elle d'une dynamique particulière? Et si cette seconde hypothèse s'avérait exacte, quand l'antimatière aurait-elle disparu de notre univers observable?

Ces interrogations peuvent paraître trop fondamentales et leurs réponses hors de portée de toute explication théorique. En effet, malgré ses succès, la chronologie actuelle de notre univers est peut-être encore trop immature pour faire complète lumière sur cette question. D'ailleurs, la plupart du temps, une telle asymétrie matière/antimatière est tout simplement ajoutée à la main comme condition initiale de notre univers pour en étudier l'évolution depuis la nucléosynthèse primordiale, c'est à dire à partir de $T_{BBN} \sim \text{MeV}$, soit $t_{BBN} \sim 400$ s. Cependant, la physique des hautes énergies qui dirige la dynamique des particules peuplant l'univers dans les toutes premières étapes de son évolution, jusqu'à $T \sim 10^{-9}$ s après le Big Bang grâce au Modèle Standard, nourrit de nombreux espoirs vers une compréhension de la prédominance de la matière sur l'antimatière. Nous présentons tout d'abord les évidences expérimentales de cette asymétrie, avant de décrire le contexte théorique de physique des particules en permettant l'explication.

Une mesure de l'asymétrie matière/antimatière est donnée par le rapport adimensionné :

$$\eta \equiv \frac{n_B - n_{\bar{B}}}{n_\gamma}. \quad (2.1)$$

où n_B , $n_{\bar{B}}$ sont respectivement les densités de baryons et d'antibaryons, alors que $n_\gamma = 2\zeta(3)T^3/\pi^2$ est la densité de photons dans l'univers. Cette définition en terme de densités présente l'avantage d'être constante avec l'expansion de l'univers. Ceci n'est néanmoins vrai que pour des âges avancés de ce dernier car, aux premiers instants de son histoire, l'univers pouvait contenir des particules massives qui ont contribué à la densité de photons après leurs annihilations. η constitue ainsi une paramétrisation invariante de l'asymétrie baryonique pour un univers au moins vieux de t_{BBN} . Remarquons également que l'asymétrie matière/antimatière est paramétrée par une asymétrie purement baryonique. La raison est simplement que les deux méthodes permettant à l'heure actuelle la mesure de l'asymétrie matière/antimatière ne sont sensibles qu'aux baryons. La première est via la nucléosynthèse primordiale, c'est-à-dire la fabrication de noyaux composites formés de plusieurs nucléons. Quant à la seconde, elle repose sur une mesure de la densité d'énergie de matière, essentiellement baryonique¹, présente lors de la recombinaison entre électrons et noyaux pour former les premiers états liés atomiques. Avant la publication de l'analyse des premières données du satellite WMAP [46], la nucléosynthèse fournissait l'unique mesure de l'asymétrie baryonique. En effet l'abondance des éléments légers — notamment D, ³He, ⁴He, B et ⁷Li — produits à cette époque dépend essentiellement de la dynamique des interactions nucléaires² ainsi que de la proportion de baryons présents dans l'univers à $T \sim \text{MeV}$. L'estimation la plus précise est établie à partir de l'abondance du deutérium et on obtient [20] :

$$(5,92 \pm 0,56) \times 10^{-10} < \eta_{BBN} < (6,28 \pm 0,35) \times 10^{-10}. \quad (2.2)$$

La fenêtre est légèrement plus large si l'on souhaite rendre compte également de l'abondance de ⁷Li. Une autre mesure d'asymétrie est obtenue, de façon totalement indépendante, par l'observation du spectre des perturbations en température du fond diffus cosmologique réalisée par WMAP. En effet, la structure en pics du spectre résulte des

¹L'électron étant 2000 fois plus léger que le proton, les oscillations acoustiques de leptons sont complètement négligeables devant les oscillations baryoniques observées par l'expérience WMAP.

²Par exemple, l'énergie de liaison typique des noyaux, étant de l'ordre du MeV, fixe l'échelle de température à laquelle ces derniers peuvent se former sans être détruits par les fluctuations thermiques.

oscillations acoustiques des baryons au moment du découplage avec la radiation, suite à la formation des premiers atomes. Le rapport des amplitudes de ces pics permet une estimation assez précise de la densité d'énergie baryonique contenue dans l'univers. On obtient alors pour η [20] :

$$\eta_{CMB} = (6,14 \pm 0,25) \times 10^{-10}. \quad (2.3)$$

Les modèles de Big Bang prédisent que le rapport η ne doit pas varier depuis la nucléosynthèse primordiale jusqu'à aujourd'hui, puisqu'aucune espèce ne « perd l'équilibre » thermique et ne modifie la densité de photon durant cette période. Ainsi, non seulement les deux mesures précédentes sont l'évidence observationnelle d'une asymétrie baryonique, mais elles constituent également un autre test que passe avec succès le modèle de cosmologie standard.

Du reste, on peut toujours penser que l'asymétrie a toujours été présente par le passé et qu'il s'agit simplement d'un fait et non la conséquence d'un phénomène inconnu. En plus d'être peu satisfaisante d'un point de vue théorique, la physique des particules semble écarter cette possibilité. En effet, le théorème *CPT*, sur lequel elle repose, impose que chaque particule soit accompagnée d'une antiparticule de même masse et de même largeur de désintégration. Si cela était le cas, notre univers ne serait aujourd'hui qu'un immense réservoir de lumière et de matière « gelée » à de très faibles densités suite à l'expansion de l'univers. En effet, dans sa phase la plus primordiale, l'univers est un plasma à très haute température. Si celle-ci est supérieure à $2m_X$, où m_X est la masse d'une espèce X , ses particules sont alors à l'équilibre thermique avec leurs antiparticules. Les photons produits par l'annihilation $X\bar{X} \rightarrow \gamma\gamma$ sont suffisamment énergétiques pour produire à leur tour les paires détruites précédemment via la réaction inverse $\gamma\gamma \rightarrow X\bar{X}$. Ensuite, l'univers en expansion se refroidissant, la diffusion de photons n'est plus assez efficace pour créer de nouvelles paires $X\bar{X}$ lorsque $T \lesssim 2m_X$, l'espèce X est alors hors-équilibre. Particules et antiparticules commencent à disparaître par annihilation, contribuant ainsi à la densité de photons. Enfin, l'expansion aidant, les particules de matière, se faisant de plus en plus rares, finissent par être séparées de leurs partenaires d'antimatière d'une distance suffisamment grande pour que l'annihilation s'arrête, laissant ainsi une densité relique constante dans l'univers. On peut en outre calculer la densité de matière baryonique — et d'antimatière — restante à l'époque de la nucléosynthèse pour un univers initialement symétrique. On trouve alors [64] :

$$\frac{n_B}{n_\gamma} = \frac{n_{\bar{B}}}{n_\gamma} \simeq 10^{-18}, \quad (2.4)$$

ce qui est bien trop faible pour générer les abondances d'éléments légers nécessaires pour rendre compte des grandes structures observées aujourd'hui dans l'univers. Ainsi, bien que l'état actuel de nos connaissances ne permette pas de complètement rejeter l'idée d'un univers initialement symétrique, contenant autant de particules que d'antiparticules, il semble raisonnable d'en faire l'hypothèse. En ce cas, l'asymétrie mesurée, bien qu'étant donnée par un nombre relativement faible, est huit ordres de grandeur plus importante que la valeur prédite par la théorie. Un mécanisme de production de baryons est alors nécessaire pour porter η à hauteur de 10^{-10} en partant d'un univers symétrique.

2.1.2 Conditions de Sakharov

En 1967 Sakharov [66] démontra qu'une théorie microscopique, régissant les interactions du plasma primordial, ne pouvait rendre compte de l'asymétrie baryonique observée aujourd'hui si elle ne satisfaisait pas aux conditions suivantes :

- le nombre baryonique B n'est pas conservé,
- l'univers doit traverser une phase d'hors-équilibre thermique,
- la conjugaison de charge C , ainsi que de sa composition avec la parité CP , ne sont pas des symétries exactes.

La première condition est triviale si on suppose qu'initialement l'univers est dans un état symétrique. Dans ce cas la charge baryonique totale de ce dernier est nulle et le restera, puisqu'aucune interaction ne viole B . Supposons donc que B ne soit pas une quantité conservée et qu'il existe une désintégration du type $X \rightarrow qq$ — où, par définition, X a un nombre baryonique nul — produisant un excès de baryon avec un taux Γ . Une fois cet excès présent dans l'univers, la réaction inverse $qq \rightarrow X$ peut avoir lieu. Si l'univers reste à l'équilibre thermique, alors par définition ces deux réactions ont le même taux :

$$\Gamma(X \rightarrow qq) = \Gamma(qq \rightarrow X) \quad (2.5)$$

et les baryons générés par la première seront aussitôt consommés par la seconde pour maintenir la charge baryonique initiale de l'univers à l'équilibre. Supposons maintenant que les deux premières conditions soient satisfaites et considérons la dernière. Tout d'abord si C est une symétrie exacte, la réaction C -conjuguée $\bar{X} \rightarrow \bar{q}\bar{q}$ générera le même nombre d'antibaryons :

$$\Gamma(X \rightarrow qq) = \Gamma(\bar{X} \rightarrow \bar{q}\bar{q}), \quad (2.6)$$

de sorte qu'aucune asymétrie peut apparaître. Cependant, une violation de C n'est pas suffisante pour produire une asymétrie baryonique ; CP doit également être brisée. Pour voir cela prenons le cas où C et P sont violées mais de manière à ce que CP soit une symétrie exacte. Ainsi X peut posséder deux canaux de désintégration, soit en paire de quarks gauches ($X \rightarrow q_L q_L$) ou droits ($X \rightarrow q_R q_R$) *a priori* différents. Par ailleurs, rappelons qu'un fermion chiral se transforme (grossièrement) sous C et CP comme $q_L \rightarrow \bar{q}_L$ et $q_L \rightarrow \bar{q}_R$ respectivement, où \bar{q}_R est l'antiparticule — de chiralité gauche! — associée à q_R ³. Ainsi une violation de C implique :

$$\Gamma(X \rightarrow q_L q_L) \neq \Gamma(\bar{X} \rightarrow \bar{q}_L \bar{q}_L), \quad \Gamma(X \rightarrow q_R q_R) \neq \Gamma(\bar{X} \rightarrow \bar{q}_R \bar{q}_R), \quad (2.7)$$

tandis que l'invariance sous CP impose :

$$\Gamma(X \rightarrow q_L q_L) = \Gamma(\bar{X} \rightarrow \bar{q}_R \bar{q}_R), \quad \Gamma(X \rightarrow q_R q_R) = \Gamma(\bar{X} \rightarrow \bar{q}_L \bar{q}_L). \quad (2.8)$$

Enfin en sommant sur les deux chiralités, on obtient des égalités précédentes que le nombre baryonique total $B = B_L + B_R$ reste conservé :

$$\Gamma(X \rightarrow q_L q_L) + \Gamma(X \rightarrow q_R q_R) = \Gamma(\bar{X} \rightarrow \bar{q}_L \bar{q}_L) + \Gamma(\bar{X} \rightarrow \bar{q}_R \bar{q}_R). \quad (2.9)$$

Ainsi aucune asymétrie matière/antimatière ne peut voir le jour si l'univers contient X et \bar{X} en proportions égales, ce qui est naturellement le cas selon l'hypothèse que ce dernier se trouve initialement dans un état symétrique. C et CP doivent donc être toutes deux brisées.

³Les indices L, R indiquent la charge d'isospin faible, et non la chiralité.

2.1.3 Les conditions de Sakharov dans le Modèle Standard

2.1.3.1 Violation du nombre baryonique

Au niveau des arbres, les nombres baryonique et leptonique⁴ sont conservés dans le Modèle Standard. Ces lois de conservation classiques sont la conséquence de symétries $U(1)$ globales que le lagrangien respecte accidentellement⁵ après la brisure spontanée de $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Cependant ces symétries sont anormales; elles sont violées au niveau quantique par l'anomalie axiale. Adler, Bell et Jackiw [2, 10] montrèrent qu'un courant fermionique axial $j^{\mu 5} = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi$ qui, bien que conservé par une symétrie classique, recevait radiativement une contribution non nulle à sa divergence lorsqu'il est couplé à un champ de jauge. L'anomalie est exclusivement produite à une boucle par des diagrammes de type triangle. Pour un courant associé à une symétrie de jauge on dérive la contribution suivante :

$$\partial_\mu j^{\mu 5a} = \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 t^a \psi) = \frac{g^2}{4\pi^2} \mathcal{A}^{abc} F_{\mu\nu}^b \tilde{F}^{\mu\nu c} \quad (2.10)$$

où F est le tenseur de jauge, \tilde{F} son dual⁶ et \mathcal{A}^{abc} est le coefficient de l'anomalie donné par :

$$\mathcal{A}^{abc} = \frac{1}{2} \text{tr}[t^a \{t^b, t^c\}] \quad (2.11)$$

où les t^a sont les générateurs du groupe de jauge associé à A_μ^a . Dans le cas d'une symétrie de jauge, la présence d'une anomalie est lourde de conséquence puisqu'elle altère fortement le comportement ultraviolet de la théorie au point de rendre la théorie non renormalisable.

L'anomalie étant purement axiale, un corollaire immédiat est que celle-ci ne viole aucune symétrie respectant la parité, comme par exemple QCD. En revanche les interactions électrofaibles du Modèle Standard sont chirales et violent maximalement cette dernière car seules les fermions gauches respectent l'invariance d'isospin $SU(2)_L$. Ainsi les courants associés à la symétrie $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ne sont *a priori* pas conservés. Néanmoins on peut montrer qu'il existe un choix d'hypercharge pour lequel les anomalies associées aux quarks compensent exactement celles provenant des leptons. L'absence d'anomalie de jauge repose alors uniquement sur le fait qu'il existe dans le Modèle Standard autant de quarks que de leptons chargés sous $SU(2)_L$, en assurant ainsi la cohérence interne au niveau quantique. Une conséquence immédiate de cette intrigante compensation est que les courants baryonique et leptoniques restent néanmoins anormaux et on a :

$$\partial_\mu j_B^\mu = \partial_\mu j_L^\mu = \frac{N_f}{32\pi^2} \left(g^2 W_{\mu\nu}^a \tilde{W}^{a\mu\nu} - g'^2 B_{\mu\nu} \tilde{B}^{\mu\nu} \right) \quad (2.12)$$

où $W_{\mu\nu}^a$, $B_{\mu\nu}$ et g , g' sont les tenseurs et couplages de jauge de $SU(2)_L$ et $U(1)_Y$ respectivement. La symétrie globale $U(1)_B \times U(1)_L$ est alors réduite à U_{B-L} , reflétant une fois encore la compensation des anomalies entre quarks et leptons. Il s'avère que

⁴En l'absence de masses pour les neutrinos, chaque saveur leptonique est séparément conservée.

⁵Ces symétries sont dites accidentelles dans le sens où elles n'existent que parce que la structure du Modèle Standard est ce qu'elle est. Une fois le contenu en matière défini et le groupe de jauge choisi, $U(1)_B$ et $U(1)_L$ apparaissent comme des symétries globales sans qu'elles soient imposées initialement.

⁶défini par $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ où ϵ est le tenseur de rang quatre complètement antisymétrique vérifiant $\epsilon^{0123} = +1$.

le membre de droite de (2.12) n'a aucun effet notable en théorie des perturbations car il s'agit d'une dérivée totale. $W_{\mu\nu}^a \tilde{W}^{a\mu\nu} = \partial_\mu K^\mu$ et $B_{\mu\nu} \tilde{B}^{\mu\nu} = \partial_\mu k^\mu$ avec :

$$K^\mu = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(W_{\nu\rho}^a W_\sigma^a - \frac{g}{3} \epsilon_{abc} W_\nu^a W_\rho^b W_\sigma^c \right), \quad (2.13)$$

$$k^\mu = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B_{\nu\rho} B_\sigma. \quad (2.14)$$

En intégrant (2.12) on peut écrire la variation du nombre baryonique comme :

$$\begin{aligned} B(+\infty) - B(-\infty) &= \int dt' d^3x j_B^0 \\ &= \frac{N_f}{32\pi^2} \left[\int d^3x (g^2 K^0 - g'^2 k^0) \right]_{t'=-\infty}^{t'=+\infty}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Elle est donc générée par un terme de bord qui s'annule à moins que les champs de jauge ne soient dans une configuration topologiquement non triviale à l'infini. Cette condition n'est pas satisfaite perturbativement car, par hypothèse, les champs sont nuls à l'infini. Cependant, en 1976 't Hooft démontra qu'une violation du nombre baryonique peut être engendrée par des effets non perturbatifs tirant partie de la structure topologique du vide de la théorie électrofaible [68]. En effet, bien que l'action électrofaible soit trivialement minimale pour $W_\mu^a = B_\mu = 0$, ce vide n'est pas unique et il existe d'autres configurations dites de jauge pure, $W_\mu^a = ig^{-1} \Omega \partial_\mu \Omega^\dagger \sigma^a$ et $B_\mu = ig'^{-1} \omega \partial_\mu \omega^\dagger$, dégénérées avec la première et qui sont source de violation du nombre baryonique dans le Modèle Standard. Ces configurations sont reliées entre elles par de simples transformations de jauge $\Omega(x)$ et $\omega(x)$ pour $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Par ailleurs le tenseur de jauge abélien $B_{\mu\nu}$ s'annule pour un champ de jauge pure — $k^0 = 0, \forall \omega$ — ainsi la violation de B prend son origine uniquement dans la structure du vide de $SU(2)_L$. En topologie les Ω sont interprétés comme des applications de la sphère S_3 sur le groupe $SU(2)$ et sont ordonnés en différentes classes d'homotopie caractérisées par un invariant topologique : le nombre de Chern-Simmons, N_{CS} . Ce nombre est un entier qui compte le nombre de fois que le champ de jauge « enveloppe » S_3 et pour $SU(2)$ il s'écrit comme :

$$N_{CS}(\Omega) \equiv \frac{g^2}{32\pi^2} \int d^3x K^0 = \frac{g^2}{32\pi^2} \int d^3x \epsilon^{ijk} \left(W_{ij}^a W_k^a - \frac{g}{3} \epsilon_{abc} W_i^a W_j^b W_k^c \right). \quad (2.16)$$

où $W = W(\Omega)$ est un champ de jauge pure. En terme de l'entier de Chern-Simmons, (2.15) se met sous la forme :

$$\Delta B \equiv B(+\infty) - B(-\infty) = N_f [N_{CS}(\Omega_{t=+\infty}) - N_{CS}(\Omega_{t=-\infty})]. \quad (2.17)$$

Ainsi $\Delta B \neq 0$ n'est possible que si le champ de jauge de $SU(2)_L$ réalise une transition d'un vide donné à $t = -\infty$ vers un vide à $t = +\infty$ pour lequel N_{CS} est différent. En outre, le nombre de Chern-Simmons étant un entier, B varie au minimum de N_f unités, de même que L , ce qui correspond à la production simultanée de N_f leptons et $3N_f$ quarks.

La violation du nombre baryonique n'est possible que lors d'une transition d'un vide de $SU(2)_L$ vers un autre topologiquement distinct. Appartenant à des classes d'homotopie différentes, ces deux vides ne peuvent pas être déformés continûment l'un vers l'autre sans recourir à une configuration de champ de plus grande énergie. Il existe donc une certaine barrière de potentiel dans l'espace de configuration des

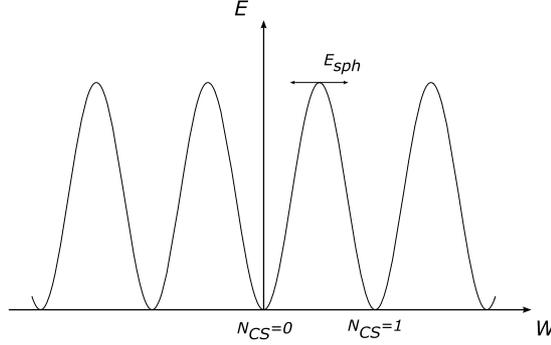


FIG. 2.1 – Représentation schématique de la variation d'énergie du champ de jauge W dans l'espace de configuration. Les minima appartiennent à des classes d'homotopie distinctes et sont séparés par une barrière dont la hauteur correspond à l'énergie du sphaléron.

champs séparant les vides topologiquement différents. Dans le Modèle Standard, le profil d'évolution de l'énergie des champs chargés sous $SU(2)_L$ dans cet espace est extrêmement complexe à déterminer. Néanmoins Klinkhamer et Manton [54, 45] ont démontré l'existence d'un point de selle correspondant à la configuration des champs d'énergie minimale qu'il est nécessaire de franchir pour transiter d'un vide vers un autre avec $\Delta N_{CS} \neq 0$. Une telle configuration s'appelle un sphaléron⁷. C'est une solution classique des équations du mouvement de la théorie électrofaible dont l'énergie est numériquement évaluée à [45] :

$$E_{sph} = \frac{2m_W}{\alpha_w} f \left(\frac{m_h}{m_W} \right) \quad (2.18)$$

où f balaye l'intervalle entre 1,5 et 2,7 lorsque m_h varie de zéro à l'infini et $\alpha_w^{-1} \equiv 4\pi/g^2 \simeq 30$. La figure 2.1 illustre schématiquement l'évolution de l'énergie en fonction du champ W_i . Ainsi, dans le Modèle Standard, $E_{sph} \simeq 10$ TeV. Par ailleurs, afin d'obtenir $\Delta B \sim \mathcal{O}(1)$, comme l'impose (2.17), (2.12) requiert $W_\mu \sim \mathcal{O}(4\pi/g)$, ce qui correspond à une amplitude du champ relativement forte pour une théorie faiblement couplée telle que $SU(2)_L \times U(1)_Y$ pour laquelle $4\pi/g \simeq 20$. Une telle configuration contient alors nécessairement un grand nombre de quanta et ces transitions topologiques peuvent être décrites en première approximation par l'étude semi-classique d'un effet tunnel à travers une barrière d'une hauteur approximative de 10 TeV.

Instanton à température nulle A température nulle un franchissement de cette barrière n'est possible que par effet tunnel quantique qui, dans le contexte des théories de jauge, est contrôlé par les configurations instantons [9]. Dans la théorie de Yang-Mills, un instanton est une solution des équations du mouvement en espace-temps euclidien interpolant entre un vide $N_{CS} = 0$ à $t_E = -\infty$ et $N_{CS} = 1$ à $t_E = +\infty$, comme illustré figure 2.2. Pour $SU(2)_L$, l'action évaluée sur ce type de configuration

⁷ nom tiré du grec ancien $\sigma\phi\alpha\lambda\epsilon\rho\sigma$ signifiant prêt à tomber, caractérisant intuitivement ce qu'est un point de selle, c'est-à-dire une solution instable.

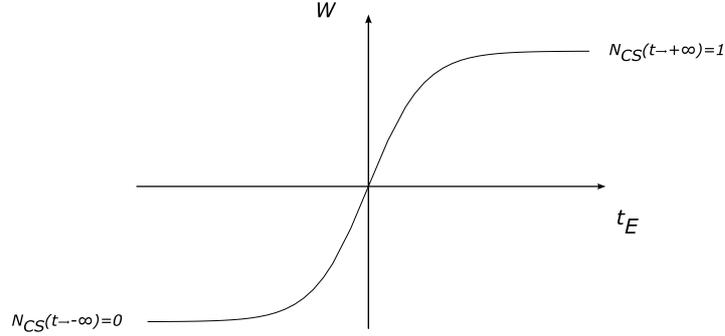


FIG. 2.2 – Configuration instanton en temps euclidien. Le terme instanton désigne une configuration dont l'énergie $\sim \int (\partial W)^2$ est localisée en temps euclidien.

non triviale du champ de jauge vaut : $S_{inst} = 4\pi/\alpha_w$ [68]. Par conséquent la probabilité d'une transition topologique dans la limite semi-classique est donnée par :

$$\mathcal{P}_{inst} \sim e^{-2S_{inst}} = e^{-\frac{8\pi}{\alpha_w}} \sim 10^{-320}, \quad (2.19)$$

rendant la violation de B à température nulle totalement inobservable⁸, ce qui est en réalité bienvenu pour la stabilité du proton dans le cadre Modèle Standard. On comprend facilement une telle suppression de cette probabilité de transition en insistant à nouveau sur le fait que l'instanton est une configuration où le champ a une relativement forte amplitude. L'instanton est donc bâti sur la superposition *cohérente* d'un grand nombre de quanta dont la probabilité d'apparition est essentiellement supprimée par l'exponentielle de ce nombre, ce que traduit (2.19).

Transition topologique à température finie Un fois le Modèle Standard plongé dans un plasma à température T , une transition vide-vide avec $\Delta B \neq 0$ est rendue possible en s'« appuyant » sur les fluctuations thermiques pour « sauter » la barrière [29]. A température finie l'expression (2.18) pour l'énergie du sphaléron devient :

$$E_{sph}(T) = \frac{2m_W(T)}{\alpha_w} f\left(\frac{m_h}{m_W}\right) \sim \frac{\phi(T)}{\alpha_w} \quad (2.20)$$

avec $m_W(T) = g\phi(T)/2$ et la valeur dans le vide du Higgs dépend maintenant de la température car, comme nous verrons un peu plus loin, le minimum du potentiel est modifié par les interactions avec le plasma. En particulier, la symétrie électrofaible peut être restaurée — $\phi(T) = 0$ — si la température est suffisamment élevée. Selon que la théorie soit dans une phase brisée ou symétrique, les probabilités de transition seront sensiblement différentes, c'est pourquoi nous étudierons séparément ces deux cas.

⁸Le calcul précédent n'est pas sensiblement modifié lorsqu'on tient compte de $U(1)_Y$ ou en présence d'un mécanisme de Higgs [3].

Phase brisée Lorsque $\phi(T) \neq 0$ le calcul de la probabilité de transition est relativement aisé dans l'approximation semi-classique. Ainsi la probabilité par unité de volume et de temps de franchir le col défini par le sphaléron est donnée, à l'équilibre thermique, par le traditionnel poids de Boltzmann :

$$\Gamma_{sph}^b \simeq A(T)e^{-E_{sph}(T)/T}. \quad (2.21)$$

Alors que l'exponentielle correspond au résultat classique gaussien, dominant largement le comportement en température de Γ_{sph} dans cette phase, le coefficient $A(T)$ est obtenu en intégrant les fluctuations quantiques et thermiques autour du sphaléron et vaut [18, 19] :

$$A(T) \simeq 2.8 \times 10^5 \kappa T^4 \left(\frac{\alpha_w}{4\pi} \right)^4 \left(\frac{E_{sph}(T)}{f(m_h/m_W)T} \right)^7 \quad (2.22)$$

avec $10^{-4} < \kappa < 10^{-1}$ [28].

Phase symétrique Le calcul du taux de transition dans la phase symétrique est beaucoup plus ardu car il n'est plus possible de développer perturbativement le résultat autour de la solution classique. En effet, l'énergie du sphaléron devenant nulle pour $\phi(T) = 0$, les fluctuations deviennent alors aussi importantes que la configuration sphaléron et doivent être traitées non perturbativement. Ainsi, mis à part une résolution numérique sur réseau, il est seulement possible de faire une estimation naïve de Γ_{sph} dans cette phase en se basant sur une simple analyse dimensionnelle. Tout d'abord la suppression de Boltzmann est absente puisque $E_{sph} = 0$ et on s'attend naturellement à ce que les transitions topologiques violant le nombre baryonique se produisent très fréquemment dans la phase symétrique. On peut alors évaluer grossièrement le taux de transition à partir d'une estimation de la longueur de corrélation et du temps de cohérence de la configuration responsable de cette transition en écrivant :

$$\Gamma_{sph}^s \sim \frac{1}{l^3 t}. \quad (2.23)$$

Intuitivement, un ordre de grandeur de l s'obtient à partir de l'énergie de la configuration du champ de jauge réalisant la transition. Cette énergie est estimée en rappelant que $\Delta B \sim \mathcal{O}(1)$, en utilisant (2.16), requiert :

$$\alpha_w l^3 (\partial W_i) W_i \sim \alpha_w l^3 \frac{W_i}{l} W_i \sim \mathcal{O}(1) \rightarrow W_i \sim \frac{1}{l \sqrt{\alpha_w}}. \quad (2.24)$$

et l'énergie associée s'écrit :

$$E \sim \int d^3x W_{ij}^a W^{aj} \sim l^3 (\partial W_i)^2 \sim \frac{1}{\alpha_w l}. \quad (2.25)$$

On peut alors obtenir le l caractéristique dans la phase symétrique en demandant que le taux de transition ne soit plus supprimé par le poids de Boltzmann :

$$\frac{E}{T} \sim \mathcal{O}(1) \rightarrow l \sim \frac{1}{\alpha_w T}. \quad (2.26)$$

On est ensuite tenté de penser que, puisqu'étant à haute température, le système est ultra-relativiste et que l'invariance de Lorentz impose $t \sim l$. En ce cas on obtient : $\Gamma_{sph} \sim (\alpha_w T)^4$. Cependant en réalité à température finie la symétrie de Lorentz est

brisée car il existe un référentiel privilégié, celui où le bain thermique est au repos. En outre, l'évolution temporelle du champ de jauge se trouve modifiée dans l'infrarouge par la présence du bain car il frotte sur ce dernier. Arnold et al. [6, 8] ont alors montré que ce terme de friction implique en réalité $t \sim 1/\alpha_w^2 T$ soit :

$$\Gamma_{sph}^s \simeq k\alpha_w^5 T^4, \quad (2.27)$$

où k est une constante que des calculs sur réseau estime autour de $k \simeq 30$, numériquement proche de α_w^{-1} .

2.1.3.2 Violation de C et CP

Les interactions électrofaibles distinguent explicitement la chiralité des fermions, puisque seules les particules gauches portent une charge d'isospin faible et que, par conséquent, leurs hypercharges diffèrent de leurs partenaires droits de manière à assurer un couplage au photon de type vecteur après brisure spontanée de $SU(2)_L \times U(1)_Y$. La parité est donc maximalement violée dans le Modèle Standard. En conséquence C l'est également puisque cette transformation remplace chaque particule gauche par son antiparticule de chiralité droite et inversement. Il se trouve cependant que ces deux brisures, bien qu'ayant une origine commune, ne se compensent pas totalement lorsque les fermions sont massifs. En effet un terme de masse de Dirac est de type vecteur et ainsi brise la symétrie chirale des interactions électrofaibles. La composition CP n'est alors pas une symétrie exacte de la théorie comme l'ont notamment montré les expériences d'oscillation des kaons neutres. Dans le Modèle Standard la principale source de violation de CP réside dans l'existence d'un désalignement entre la base des états propres d'interaction et celle des états propres de masse pour les quarks. Dans la première, le couplage des quarks gauches au W est donnée par :

$$\mathcal{L}_W = \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{N_f} \bar{u}_L^i \gamma^\mu d_L^i W_\mu^+ + h.c. \quad (2.28)$$

Après brisure de la symétrie électrofaible, les masses des quarks sont diagonalisées par le jeu de matrices unitaires suivant :

$$\text{diag}(\{m_u^i\}) = U_L^u M_u (U_R^u)^\dagger, \quad (2.29)$$

$$\text{diag}(\{m_d^i\}) = U_L^d M_d (U_R^d)^\dagger. \quad (2.30)$$

Dans la base des états propres de masse les couplages au W ne sont alors plus diagonaux si $U_L^u \neq U_L^d$ et induisent des processus de changement de saveur :

$$\mathcal{L}_W \rightarrow \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{i,j=1}^{N_f} \bar{u}_L^i \gamma^\mu V_{ij} d_L^j W_\mu^+ + h.c. \quad (2.31)$$

où $V \equiv U_L^u (U_L^d)^\dagger$ est la matrice de mélange de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM). V est une matrice $N_f \times N_f$ unitaire contenant N_f^2 paramètres indépendants, dont $N_f(N_f - 1)/2$ angles de mélange et $N_f(N_f + 1)/2$ phases. $2N_f - 1$ d'entre elles peuvent être absorbées en redéfinissant les $2N_f$ champs de la théorie, laissant $(N_f - 1)(N_f - 2)/2$ phases physiques. En outre, on remarque qu'il existe au moins une phase pour $N_f \geq 3$ et qu'ainsi le Modèle Standard, avec ces trois générations, contient une phase physique permettant de rendre compte des processus de violation de CP via les couplages des

quarks au W . Il y a une multitude de paramétrisations différentes de la matrice V et donc autant de définition de la phase violant CP . Jarlskog [42] montra néanmoins qu'il est possible de construire un invariant J permettant de mesurer l'amplitude de violation de CP de la matrice CKM :

$$\begin{aligned} J_{CKM} &\equiv \det ([M_u^2, M_d^2]), \\ &= (m_t^2 - m_c^2)(m_t^2 - m_u^2)(m_c^2 - m_u^2)(m_b^2 - m_s^2)(m_b^2 - m_d^2)(m_s^2 - m_d^2) \\ &\quad \times \Im (V_{11} V_{22} V_{12}^* V_{21}^*). \end{aligned} \quad (2.32)$$

J_{CKM} étant proportionnel aux matrices de masse des quarks, il est trivialement invariant sous les redéfinitions unitaires des quarks modifiant la paramétrisation de V .

2.1.3.3 Hors équilibre thermique au cours d'une transition du premier ordre

Dans le Modèle Standard le potentiel du Higgs brise spontanément la symétrie de jauge $SU(2)_L \times U(1)_Y$ via un terme de masse négatif :

$$V_{SM}(H) = m^2 H^\dagger H + \lambda (H^\dagger H)^2, \quad m^2 < 0, \lambda > 0. \quad (2.33)$$

Le Higgs est alors un tachyon et constitue une fluctuation au dessus d'un vide instable. Ceci traduit la présence d'un condensat homogène dans le vide, $H = H_0 + \delta H$ où $H_0^T = (0, v_0/\sqrt{2})$ avec la valeur dans le vide $v_0 \equiv \sqrt{-m^2/\lambda} \simeq 246$ GeV. δH représente alors une fluctuation quantique qu'il est possible de traiter perturbativement. Elle contient trois bosons de masse nulle et un scalaire physique, le boson de Higgs, de masse $m_h^2 = -2m^2$. Une façon élégante de déterminer la valeur dans le vide consiste à supposer qu'il existe un condensat ϕ minimisant globalement le potentiel V_{SM} pour $\phi = v_0$ en l'absence de fluctuations quantiques :

$$V_{SM}(H) \rightarrow V_0(\phi) = \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4, \quad (2.34)$$

$$V_0'(\phi) = 0 \text{ et } V_0''(\phi) > 0 \rightarrow \phi = v_0. \quad (2.35)$$

Bien que trivial à l'arbre, cette approche simplifie grandement le calcul des corrections quantiques à $V_0(\phi)$ que nous développerons en détail dans la seconde partie de ce chapitre. Cependant le potentiel précédent est seulement pertinent dans le vide, c'est à dire à température nulle. En présence d'un plasma à température T , comme c'est le cas dans l'univers primordial, le potentiel du Higgs V_0 reçoit des corrections suite à l'interaction du condensat avec les particules du bain thermique. On peut estimer la forme de celles-ci par une simple analyse dimensionnelle. Puisque la température est la moyenne de l'énergie cinétique désordonnée des particules du bain, on a $[T] = 1$ et le potentiel à température finie prend la forme :

$$V_T(\phi) \simeq D (T^2 - T_0^2) \phi^2 - ET \phi^3 + \frac{\lambda(\log T)}{4} \phi^4, \quad T_0^2 \equiv \frac{m_h^2}{4D}. \quad (2.36)$$

On remarque deux propriétés essentielles du potentiel thermique à ce stade. Tout d'abord si D est positif et la température suffisamment élevée, $T \gtrsim T_0$, alors l'origine du potentiel redevient stable et la symétrie de jauge est restaurée à haute température ! Il est donc fortement probable qu'il y ait eu une transition depuis une phase symétrique

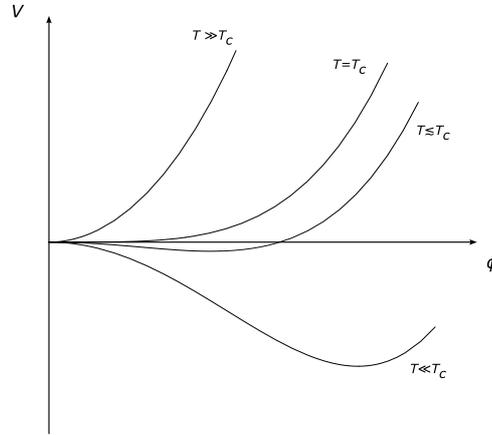


FIG. 2.3 – Évolution du potentiel avec la température lors d'une transition du second ordre. A la température critique le potentiel est plat autour de l'origine et autorise de larges fluctuations.

à haute température vers la phase brisée que l'on connaît aujourd'hui à $T \simeq 0$. ϕ est alors utilisé comme paramètre d'ordre perturbatif de cette transition. De plus, dans ce contexte, le signe de E est crucial car il contrôle l'ordre de la transition. Si $E > 0$, alors il existe une région en ϕ où V_T est contrôlé par le terme cubique négatif pour lequel $V_T'' < 0$. A une température stabilisant l'origine, le potentiel développe ainsi une barrière la séparant d'un second minimum en $\phi \neq 0$. La transition dans ce cas est du premier ordre. Nous verrons que cette barrière joue un rôle capital pour la baryogenèse électrofaible en permettant notamment la mise hors-équilibre thermique du plasma primordial. Enfin pour $E \leq 0$, la courbure du potentiel est toujours positive tant que l'origine est stable et la transition est alors du second ordre. Nous allons maintenant brièvement revoir les caractéristiques élémentaires de ces deux types de transition.

Transition du second ordre Une transition du second ordre est caractérisée par une évolution *continue et homogène* dans l'espace du paramètre d'ordre, de $\phi = 0$ vers $\phi \neq 0$ lorsque la température diminue. En effet, la courbure du potentiel étant toujours partout positive pour $T > T_0$, il n'existe qu'un seul minimum quelque soit T . Pour le cas simplifié où $E = 0$, les différentes étapes de ce type de transition, illustrées en figure 2.3, sont alors les suivantes :

- $T > T_0$: l'univers est dans la phase symétrique.
- $T = T_0$: le potentiel devient relativement plat sur une large région autour de l'origine et ce jusqu'à ce qu'il soit dominé par le couplage quartique positif.
- $T \lesssim T_0$: l'origine devient instable et un nouveau minimum se forme simultanément en $\phi \neq 0$.

La température à laquelle le minimum du potentiel est déplacé vers une position en $\phi \neq 0$ est appelée la température critique T_c , qui est simplement T_0 en l'absence de terme cubique. En conséquence de la platitude du potentiel en $T = T_c$, les fluctuations peuvent être relativement larges et ainsi facilement entraîner le système vers une phase brisée dès lors que la température passe sous sa valeur critique.

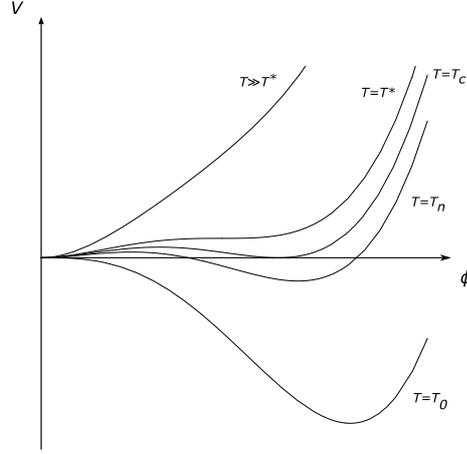


FIG. 2.4 – Évolution du potentiel scalaire en fonction de la température pour une transition de phase de premier ordre.

Transition du premier ordre et hors-équilibre thermique Dû au couplage cubique négatif, le potentiel est extrémal en trois points dans l'intervalle de température $T_0 < T < T_*$. Il présente deux minima en $\phi = 0$ et $\phi = \phi_+$ ainsi qu'un maximum en ϕ_- avec :

$$\phi_{\pm} = \frac{3ET}{2\lambda(T)} \pm \frac{1}{2\lambda(T)} \sqrt{9E^2T^2 - 8\lambda(T)D(T^2 - T_0^2)}. \quad (2.37)$$

T_* est solution de $\phi_+ = \phi_-$ et correspond à la température à laquelle la barrière apparaît :

$$T_*^2 = \frac{T_0^2}{1 - 9E^2/8\lambda(T_*)D}, \quad (2.38)$$

et $\phi_{\pm}(T_*) = 3ET_*/2\lambda(T_*)$. Lorsque le potentiel développe une barrière entre deux minima, la transition est dramatiquement différente. En voici les différentes étapes, schématisées en figure 2.4.

- $T > T_*$: l'unique minimum est à l'origine et l'univers est dans un phase symétrique.
- $T = T_*$: à une température supérieure à T_0 un second minimum se développe localement en ϕ_+ , séparé d'une origine restée stable par une barrière de potentiel centrée en ϕ_- . Le minimum global est toujours symétrique.
- $T = T_c$: les deux minima deviennent dégénérés et le système peut amorcer sa transition vers une phase de symétrie brisée en franchissant la barrière. La transition se produit par nucléation de bulles de phase brisée dans un environnement symétrique.
- $T = T_n$: les bulles s'écrasent sous leur tension superficielle et disparaissent jusqu'à ce qu'elles soient nucléées avec une taille critique suffisamment grande pour qu'elles puissent s'étendre et convertir l'univers dans la phase brisée. C'est le phénomène de surfusion caractéristique des transitions du premier ordre.
- $T = T_0 < T_n$: la transition est *a priori* terminée et l'origine devient instable. La barrière disparaît.

La température critique T_c est donnée par :

$$T_c^2 = \frac{T_0^2}{1 - E^2/\lambda(T_c)D} \quad (2.39)$$

résolvant ainsi $V_T(\phi_+(T_c)) = V_T(0)$. Une analyse détaillée du calcul de T_n sera faite dans la dernière partie de ce chapitre où nous étudierons les conséquences d'une éventuelle surfusion. On néglige pour le moment cet effet, permettant ainsi d'identifier $T_c \simeq T_n$. La température critique est la température à partir de laquelle la phase brisée est la plus favorable énergétiquement. En revanche, contrairement à une transition du second ordre, la barrière empêche les fluctuations du système dans la phase symétrique de l'entraîner continûment vers la phase brisée. La transition se produit par nucléation de bulles générées spontanément par des fluctuations du vide dans la phase symétrique. Il y a donc coexistence des deux phases au cours de la transition, ce qui permet d'obtenir un régime hors-équilibre thermique durant cette période, la phase symétrique étant métastable. Nous verrons dans la prochaine partie comment la présence des bulles permet d'exploiter les conditions de Sakharov et ainsi produire des baryons lors de la transition.

Potentiel effectif dans le Modèle Standard Voyons maintenant quel est l'ordre de la transition dans le Modèle Standard. En calculant les corrections quantique et thermique à une boucle, on évalue les coefficients de (2.36) à [5] :

$$D = \frac{2m_W^2 + m_Z^2 + 2m_t^2}{8v_0^2}, \quad (2.40)$$

$$E = \frac{2m_W^3 + m_Z^3}{4\pi v_0^3}, \quad (2.41)$$

$$T_0^2 = \frac{m_h^2 - 8Bv_0^2}{4D}, \quad B = \frac{3}{64\pi^2 v_0^4} (2m_W^4 + m_Z^4 - 4m_t^4), \quad (2.42)$$

$$\lambda(T) = \lambda - \frac{3}{16\pi^2 v_0^4} \left(2m_W^4 \ln \frac{m_W^2}{a_b T^2} + m_Z^4 \ln \frac{m_Z^2}{a_b T^2} - 4m_t^4 \ln \frac{m_t^2}{a_f T^2} \right) \quad (2.43)$$

avec $\ln a_b = 5,4076$, $\ln a_f = 2,6350$ et B représente les corrections quantiques à la masse négative du Higgs au niveau des arbres. On est dans une situation où $D > 0$ et $E > 0$, il y a donc bien une transition et elle est du premier ordre. On verra notamment que seuls les fluctuations bosoniques sont à l'origine de l'apparition d'une barrière de potentiel. Le potentiel précédent est calculé dans un régime de haute température⁹ $T \gg m_i$ et doit être considéré comme aussi précis que $\mathcal{O}(m_i^3/T^3)$ où m_i est la masse du champ i interagissant avec le condensat.

Ainsi, un calcul perturbatif à une boucle indique que la transition de phase électrofaible dans le Modèle Standard est du premier ordre, en faisant par conséquent un événement particulier où la violation de CP et le sphaléron peuvent être mis à profit pour générer l'asymétrie baryonique.

⁹Nous verrons en détails dans la seconde partie les méthodes perturbatives à température finie permettant le calcul de ces corrections. Le potentiel approché (2.36) est suffisant pour la discussion menée dans cette partie.

2.1.4 Mécanisme de Baryogenèse électrofaible

Nous commençons par présenter succinctement le mécanisme proposé par Cohen et al. [24] qui constitue une explication réaliste de l'origine de l'asymétrie matière/antimatière. En particulier nous verrons comment les trois ingrédients de Sakharov, que contient le Modèle Standard, entrent en jeu dans ce mécanisme. Puis nous discuterons des contraintes apportées au Modèle Standard pour reproduire l'asymétrie observée et verrons que si la baryogenèse électrofaible en est le véritable mécanisme de production, le Modèle Standard doit nécessairement être étendu par une nouvelle physique au delà. Enfin, nous évoquerons rapidement d'autres mécanismes de baryogenèse.

2.1.4.1 Description générale

Si la transition de phase électrofaible est du premier ordre, elle convertit l'univers par nucléation de bulles de phase brisée apparaissant spontanément dans le plasma se trouvant alors dans une phase symétrique métastable. Une bulle est une configuration instable. Elle est le siège d'une compétition énergétique entre son volume, qui l'incite à s'étendre puisque $V(\phi \neq 0) < V(\phi = 0)$, et sa surface, dont la tension tend à la faire disparaître car $(\partial\phi)^2 > 0$. Lorsque les conditions sont favorables à l'expansion des bulles, elles finissent par entrer en collision et percoler de manière à ce que l'univers entier se retrouve dans une phase brisée homogène. En particulier l'interface des bulles avec le plasma qui les entoure est la région clé autour de laquelle a lieu la genèse de l'asymétrie baryonique. Ainsi le « mur » de la bulle, sa propagation, et les interactions du plasma avec celui-ci sont les ingrédients essentiels du mécanisme de baryogenèse électrofaible que nous allons maintenant décrire.

La production de baryons dans la région du mur est décrite par une théorie des

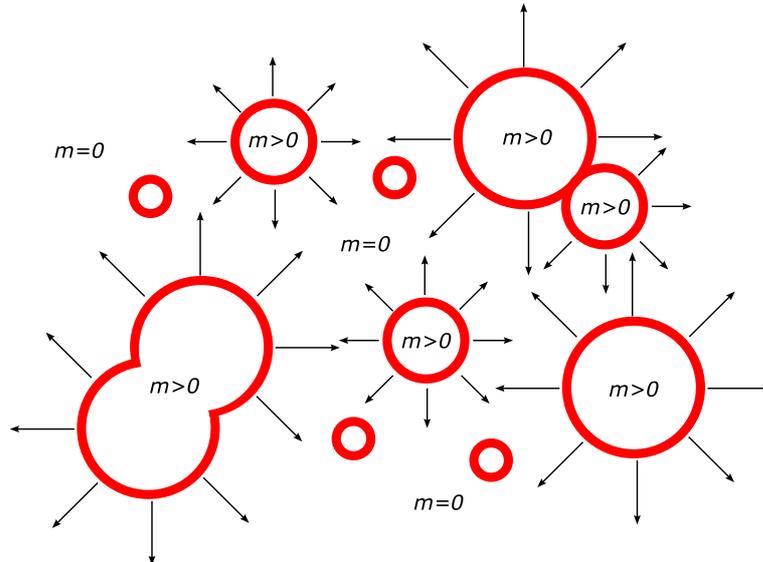


FIG. 2.5 – Illustration de la nucléation et l'expansion de bulles de phase brisée lors d'une transition du premier ordre. Cette figure est adaptée de [20]

champs à température finie et hors-équilibre thermique. Il va alors sans dire qu'il s'agit d'un processus complexe dont l'étude précise n'est pas aisée. Néanmoins, on peut en brosser le schéma général en distinguant trois étapes élémentaires. Tout d'abord rappelons que la masse des particules du plasma est différente selon la phase où elles se trouvent. Ainsi le mur agit alors comme un « dioptré » duquel les particules incidentes sont réfléchies ou transmises selon certaines proportions. Supposons un quark gauche q_L venant de la phase symétrique et se propageant en direction du mur. S'il est réfléchi, son hélicité est inversée — $(x, t) \rightarrow (-x, -t)$ — et il contribue à la densité de quarks droits q_R dans sa phase d'origine. Il en va de même pour les antiquarks. Maintenant si C et CP sont violées alors les quarks (et antiquarks) droits et gauches n'ont pas le même coefficient de réflexion, et il se forme un excès de $q_L + \bar{q}_R$ en amont du mur¹⁰. En aval, dans la phase brisée, cela se traduit par un déficit de quarks et antiquarks gauchers — après tout, ce qui est réfléchi n'est pas transmis — et donc un excès de $q_R + \bar{q}_L$, puisque $\Delta B = 0$ avant la nucléation. La réflexion sur le mur de la bulle n'est ainsi qu'un mécanisme de séparation de charges et aucune asymétrie baryonique n'est produite à ce stade, tout au plus une asymétrie CP de part et d'autre du mur. C'est alors qu'entre en jeu le sphaléron dont le taux de production est beaucoup plus important à l'extérieur de la bulle. Les sphalérons ne couplent qu'à q_L (et \bar{q}_R) et favorisent ainsi la relaxation de l'asymétrie CP en amont du mur, puisqu'il y a plus de q_L dans cette région, et ce faisant la convertisse en asymétrie baryonique. Le point crucial est que ce processus n'a pas lieu à l'intérieur de la bulle car le sphaléron y est supprimé. Enfin, la bulle étant en expansion, les baryons produits diffusent dans la phase brisée. Si les sphalérons ne sont pas assez actifs pour effacer cet excès, l'asymétrie est gelée à sa valeur actuelle.

La suppression du taux de production des sphalérons dans la phase brisée, aussi importante soit-elle, n'est en réalité pas suffisante à elle seule pour préserver l'asymétrie d'une relaxation à la valeur d'équilibre $B = 0$. Il faut également que le sphaléron soit hors-équilibre thermique au moment où l'asymétrie est produite, c'est à dire à la température de la transition T_t . Si l'expansion de l'univers à cet instant est suffisante pour diluer l'asymétrie baryonique, les sphalérons ne pourront pas relaxer à zéro l'excès de matière qui sera alors gelé. Ainsi l'asymétrie baryonique n'est pas détruite si la constante de Hubble H est plus faible que le taux de production dans la phase brisée :

$$\frac{\Gamma_{sph}^b}{T_t^3} \gtrsim H. \quad (2.44)$$

En utilisant les expressions (2.21, 2.22), une analyse détaillée de la dilution de l'asymétrie baryonique permet de réécrire la condition précédente comme [11] :

$$\frac{E_{sph}(T_t)}{T_t} \gtrsim 45, \quad (2.45)$$

qui à son tour se traduit par une contrainte sur la valeur dans le vide du Higgs par l'intermédiaire de (2.20) :

$$\xi_t \equiv \frac{\phi(T_t)}{T_t} \gtrsim 1. \quad (2.46)$$

Par conséquent la survie d'une asymétrie matière/antimatière générée lors de la transition de phase électrofaible nécessite que le condensat $\phi(T_t)$ ainsi produit soit au moins aussi grand que la température. Une telle transition est alors qualifiée de *fortement du premier ordre* et sa « force » est déterminée par le rapport ξ_t .

¹⁰On rappelle que dans la notation utilisée \bar{q}_R est d'hélicité gauche, ou gaucher.

2.1.4.2 Besoin d'une nouvelle physique ?

Comme nous l'avons rappelé, le Modèle Standard possède tous les ingrédients nécessaires à la réalisation du mécanisme précédent dans l'univers primordial. Il contient une source de violation de C et CP et le nombre baryonique n'est pas conservé à haute température. Par ailleurs, l'univers étant en expansion, le vide de la théorie électrofaible finit par évoluer d'une phase symétrique vers une phase où la symétrie est brisée. Une telle transition semble être du premier ordre. Reste maintenant à en calculer la force et évaluer le rapport ξ_t dans le Modèle Standard. En utilisant la forme approchée du potentiel effectif à une boucle présentée ci-dessus, on obtient que la condition d'une transition fortement du premier ordre se traduit par une borne supérieure sur la masse du Higgs :

$$\xi_c = \frac{\phi(T_c)}{T_c} = \frac{4Ev_0^2}{m_h^2} \gtrsim 1 \quad \rightarrow \quad m_h \lesssim 2v_0\sqrt{E} \simeq 48 \text{ GeV}, \quad (2.47)$$

où $E \simeq 10^{-2}$. Évidemment une si faible masse est en total désaccord avec les recherches directes du Higgs menée par LEP2, dont l'absence de succès implique $m_h > 114.4$ GeV [71]. Ainsi la transition de phase est faiblement du premier ordre et toute asymétrie baryonique est détruite dans la phase brisée avant que les sphalérons ne soient découplés. La principale raison de cet échec réside dans la faible hauteur de la barrière de potentiel lors de la transition, caractérisée par le coefficient E . Seuls les bosons contribuent à cette barrière à l'ordre d'une boucle et leurs couplages dans le Modèle Standard sont relativement faibles, d'où $E \sim 10^{-2}$. Par ailleurs, la contrainte précédente est obtenue en supposant que la transition a eu lieu à la température critique et on peut se demander ce qu'il en est lorsque le phénomène de surfusion est pris en compte. Dans ce cas, on a typiquement $T_n < T_c$ et $\phi(T_n) > \phi(T_c)$ ce qui permet d'obtenir une contrainte un peu moins forte sur la masse du Higgs. Cependant, l'effet est peu important dans le Modèle Standard car plus la barrière est faible, plus sa présence est éphémère et on a $T_c \sim T_0$, ce qui implique nécessairement $T_n \sim T_c$. La situation est guère meilleure. On peut noter enfin que le potentiel effectif précédent ne tient pas compte des contributions des scalaires à la barrière, ce qui est justifié a posteriori pour un Higgs léger, $(m_h/m_W)^3 \sim (48/80)^3 \sim 0,2$, mais pas pour un Higgs de 115 GeV, $(115/80)^3 \sim 3$. Dans ce cas on estime naïvement le coefficient E à :

$$E \rightarrow E + \frac{m_h^3}{4\pi v_0^3} \quad (2.48)$$

et on obtient au mieux $m_h \lesssim 49$ GeV car le couplage quartique du Higgs est faible. Pour $m_h = 2\lambda v_0^2 \sim 115$ GeV on a $\lambda \sim 0,2$. En réalité la situation est plus alarmante car le développement perturbatif sur lequel est basée l'analyse précédente n'est pas valide pour un Higgs lourd, $m_h \gtrsim m_W$. La raison est que la constante de couplage ne contrôle plus le développement perturbatif, car l'amplitude de chaque boucle est affectée par la présence du plasma et contient des fluctuations quantiques *et* thermiques. Ainsi, par exemple pour l'interaction de jauge $SU(2)_L$, la constante de couplage g^2 doit être remplacée à température finie par $\rho \equiv g^2 n_B(E)$ où $n_B(E) = 1/(\exp(-E/T) - 1)$ est la distribution de Bose des particules présentes dans le plasma [51, 39]. Pour $E < T$, le développement perturbatif est contrôlé par $\rho \sim g^2 T/E$ qui peut être arbitrairement grand. Dans la phase brisée l'énergie est bornée inférieurement par $m_W(T)$, l'approximation à une boucle est alors seulement valide pour $\rho < 1 \rightarrow 2g\xi^{-1}(T) < 1$. Proche

de la transition, pour $T \simeq T_c$, on obtient à partir de (2.47) :

$$\frac{g^3}{4E} \frac{m_h^2}{m_W^2} < 1 \quad (2.49)$$

et l'approche perturbative paraît injustifiée pour $m_h \gtrsim m_W/2$. Plus quantitativement des calculs sur réseau ont établi qu'il n'y avait pas de transition de phase pour $m_h \simeq 80$ GeV mais simplement une évolution continue avec la température des paramètres de la théorie [43].

Par ailleurs, même pour une transition fortement du premier ordre, le Modèle Standard ne permet pas d'obtenir l'amplitude observée dans l'univers pour l'asymétrie matière/antimatière car la violation de CP est trop faible. En effet, on peut estimer l'amplitude de violation de CP à partir de l'invariant de Jarlskog (2.32) d'où l'on construit le paramètre adimensionné :

$$\delta_{CP} \sim \frac{J_{CKM}}{T_c^{12}} \sim 10^{-20}, \quad (2.50)$$

où on a rapporté J_{CKM} à l'échelle caractéristique d'énergie au moment de la transition de phase $T_c \simeq 100$ GeV. Ainsi dans le Modèle Standard δ_{CP} est beaucoup trop faible pour expliquer une asymétrie baryonique η de l'ordre de 10^{-10} . Cette estimation est assez naïve, néanmoins une analyse plus détaillée en soutient la conclusion [33, 34] : la violation de CP est trop faible dans le Modèle Standard.

Il existe d'autres sources de violation de CP dans le Modèle Standard comme notamment le terme θ de QCD¹¹ :

$$\mathcal{L}_{QCD} \supset g_s^2 \frac{\bar{\theta}}{32\pi^2} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu}. \quad (2.51)$$

Néanmoins cet opérateur est négligeable car il induit une correction au moment dipolaire électrique du neutron pour lequel il n'y aucune véritable évidence observationnelle. $d_e(n)_{exp} \leq 10^{-25} ecm$ impose $\bar{\theta} \lesssim 10^{-10}$. L'origine de cette faible valeur reste aujourd'hui encore inconnue et constitue ce qu'on appelle le problème de forte violation de CP . De plus, les récentes expériences d'oscillation de neutrinos indique désormais clairement qu'ils ont une masse non nulle. En ajoutant un terme de masse pour les neutrinos dans le Modèle Standard, on obtient également une matrice de mélange leptonique de type CKM contenant des phases violant la symétrie CP . En revanche une fois encore, l'amplitude de cette violation sera incroyablement faible car contrôlée par la masse des neutrinos légers.

Ainsi, le mécanisme de baryogenèse électrofaible est invalidé par le Modèle Standard ou, au mieux, requiert l'existence d'une nouvelle physique proche de l'échelle électrofaible pour obtenir à la fois une transition de phase fortement du premier ordre et une source suffisamment importante de violation de CP . A moins que l'asymétrie baryonique ne soit produite par un tout autre mécanisme.

2.1.5 Autres mécanismes de baryogenèse

Lorsqu'une nouvelle physique est supposée compléter la dynamique du Modèle Standard à haute énergie, il existe d'autres mécanismes différents de la baryogenèse

¹¹Cette définition de $\bar{\theta}$ inclut le déterminant de la masse des quarks.

électrofaible permettant d'expliquer l'absence d'antimatière dans notre univers. Nous évoquons brièvement les trois grandes classes de scénarios qui ont suscitées un intérêt important ces dernières années ayant ainsi permis de conclure que ces idées consistent également de sérieux candidats pour rendre compte de ce phénomène. On trouvera une discussion plus détaillée dans des revues récentes sur le sujet comme par exemple [65, 26].

2.1.5.1 Baryogenèse par désintégration hors-équilibre

Il existe de nombreux exemples où, à très haute énergie, de nouvelles particules X couplent aux fermions du Modèle Standard en violant le nombre baryonique, ainsi que C et CP . Si la température du plasma primordial a été telle que ces particules connurent une phase d'équilibre thermique, l'univers refroidissant, elles finirent par se désintégrer hors-équilibre en produisant l'asymétrie baryonique observée aujourd'hui. Un exemple typique de ce mécanisme de désintégration hors-équilibre est la baryogenèse dans les théories de grande unification. Dans ces théories, leptons et quarks sont plongés dans le même multiplet d'un groupe de jauge unificateur G_{GUT} contenant le groupe du Modèle Standard. L'exemple le plus minimal est $SU(5)$. L'échelle d'unification des interactions du Modèle Standard est naïvement estimée par l'évolution sous le groupe de renormalisation de ses trois constantes de jauge à partir de l'échelle électrofaible $m_W \sim 100$ GeV. Le « running » logarithmique implique alors une échelle relativement élevée de l'ordre $M_{GUT} \sim 10^{16}$ GeV. G_{GUT} est ensuite brisé spontanément jusqu'au Modèle Standard par une série de mécanismes de Higgs. Une propriété générale de ces théories est l'existence par construction de bosons de jauge et de Higgs, notés collectivement X , très massifs $m_X \sim M_{GUT}$ et dont les couplages aux fermions violent les nombres leptonique et baryonique, puisque quarks et leptons appartiennent à un même multiplet. En outre, les couplages de Yukawa des scalaires brisant G_{GUT} , contiennent plusieurs phases physiques pouvant violer CP . Ainsi si la température de l'univers a été par le passé aussi élevée que 10^{16} GeV, ces bosons massifs étaient à l'équilibre thermique et relativement abondant dans le plasma primordial. Suite à l'expansion ces bosons perdent l'équilibre thermique et finissent par se désintégrer en des particules du Modèle Standard produisant une asymétrie baryonique non nulle grâce à la présence de couplages violant B , C et CP . Ces bosons étant très massifs, ils créent facilement un nombre important de baryons. Néanmoins il n'est pas garanti que, même à l'équilibre thermique $T \gtrsim m_X$, leur densité soit suffisante pour reproduire $\eta \sim 10^{-10}$. En particulier il faut s'assurer que leur taux de production n'est pas inférieur au taux d'expansion de l'univers à cet instant car, dans le cas contraire, leur densité serait beaucoup trop diluée. La réponse à cette question dépend grandement du modèle d'unification considéré et nécessite une analyse détaillée de l'évolution de l'univers peu après l'inflation dont la compréhension est loin d'être totalement claire encore aujourd'hui. Par ailleurs, étant donnée l'échelle d'énergie à laquelle a lieu cette nouvelle dynamique, on peut reprocher à ces modèles d'être difficilement testable expérimentalement dans un proche futur.

2.1.5.2 Leptogenèse primordiale

Depuis l'observation de l'oscillation des neutrinos du Modèle Standard, on sait tout d'abord qu'ils ont une masse, du moins deux d'entre-eux, et ensuite que celle-ci est très faible $m_{\nu_L} \lesssim$ eV. Ce fait troublant est sans doute le résultat d'un mécanisme de seesaw

où le couplage des neutrinos gauches standards avec d'hypothétiques neutrinos droits très massifs induit une importante suppression de la masse des neutrinos observés. Le mécanisme est relativement simple et consiste à ajouter trois fermions singulets de jauge N_R^i et d'écrire la correction la plus générale au lagrangien du Modèle Standard en leur présence. Les seuls opérateurs renormalisables sont données par :

$$-\mathcal{L}_{seesaw} = y_{ij} \bar{L}_i \tilde{H} N_{R,j} + \frac{1}{2} M_{ij} \overline{N^c}_{R,i} N_{R,j} + h.c. \quad (2.52)$$

où, pour $y \sim \mathcal{O}(1)$ et $M \gg v_0 \simeq 246$ GeV, les états propres de masses des neutrinos sont approximativement ν_L et N_R ayant pour masse respective $m_D M^{-1} m_D^T$ et M avec $m_D = y v_0 / \sqrt{2}$. Afin d'obtenir m_{ν_L} de l'ordre de l'eV, la masse des neutrinos droits doit être au moins de $M \gtrsim 10^{14}$ GeV, proche de l'échelle de grande unification. Le mécanisme de production d'une symétrie est alors sensiblement du même type que le précédent et repose sur la désintégration hors-équilibre d'une particule très lourde. La principale différence avec la baryogenèse en grande unification est qu'ici la désintégration des neutrinos droits produit en premier lieu une asymétrie leptonique, c'est donc un mécanisme de leptogenèse. Cette dernière est ensuite convertie en partie en une asymétrie baryonique par les processus sphalérons violant $B + L$. La violation de CP est assurée par la phase de la matrice de mélange des neutrinos légers, avec une amplitude suffisante pour produire $\eta \simeq 10^{-10}$ si la masse du neutrino droit le plus léger vérifie $M \gtrsim 10^9$ GeV. Enfin, bien que reposant sur une nouvelle physique dans l'UV lointain, ce mécanisme peut être contraint en étudiant précisément les propriétés des neutrinos légers puisque le mécanisme de seesaw fournit un lien direct entre ces deux échelles.

2.1.5.3 Baryogenèse à la Affleck-Dine

Affleck et Dine proposèrent dans les années 80 un mécanisme de baryogenèse reposant sur l'existence de champ scalaire portant une charge baryonique non nulle et développant une grande valeur dans le vide durant l'inflation [4]. Ce condensat de charge baryonique se désintègre ensuite en une asymétrie matière/antimatière immédiatement gelée dans l'univers primordial. Le terrain naturel du mécanisme d'Affleck-Dine est la supersymétrie. En effet, dans les théories supersymétriques, les quarks et les leptons ont des partenaires scalaires portant chacun la même charge baryonique et leptonique. De plus, la supersymétrie impose l'existence de directions dite plates, dans l'espace des champs scalaires, selon lesquelles le potentiel est nul. Plus précisément, il existe une combinaison linéaire des scalaires χ vérifiant $\partial^2 V / \partial \chi^2 = 0$. L'avantage de la supersymétrie est qu'elle prévient le potentiel de recevoir des corrections quantiques selon cette direction. Cependant, durant sa phase inflationnaire, l'univers est dominé par un champ scalaire dont la densité d'énergie dans le vide est non nulle, $\rho_i \sim 3M_{Pl}^2 H^2$, brisant ainsi la supersymétrie. De cette brisure résulte des corrections à la direction plate du potentiel, qui éventuellement développe une grande VEV complexe, ainsi que des interactions non renormalisables violant le nombre baryonique et la symétrie CP . Juste après l'inflation, ce condensat est perturbé par l'expansion de l'univers et oscille autour de l'origine du potentiel, se chargeant alors en nombre baryonique. Puis il finit par se désintégrer totalement en particules du Modèle Standard laissant l'asymétrie matière/antimatière comme seule empreinte de sa charge baryonique initiale. En outre, cette asymétrie est stable car les opérateurs non renormalisables pouvant la relaxer à zéro sont supprimés au moment de l'évaporation du condensat. Bien qu'aucun scénario précis de ce type n'ait été élaboré à ce jour, il est complètement générique et pratique-

ment inévitable en présence d'une direction plate. Par ailleurs ce genre de mécanisme semble très difficile à falsifier, à moins de renoncer à l'existence de la supersymétrie sur laquelle il repose.

2.1.6 Baryogenèse électrofaible au-delà du Modèle Standard

La principale raison de l'échec de la baryogenèse dans le Modèle Standard est la faiblesse de la transition de phase électrofaible. Une transition fortement du premier ordre n'est possible que pour un Higgs très léger $m_h \lesssim 48$ GeV, alors que des calculs non perturbatifs montrent qu'elle devient de plus en plus faible pour un Higgs plus lourd, jusqu'à ce qu'il n'y ait même plus de transition de phase pour $m_h \gtrsim 80$ GeV. Le responsable est la barrière de potentiel qui est beaucoup trop faible dans le Modèle Standard, comme l'indique la valeur du terme cubique qui en contrôle l'apparition : $E \sim 10^{-2}$. La faiblesse de ce coefficient est double. Tout d'abord il est généré à une boucle et est supprimé par un facteur de boucle à température finie $(12\pi)^{-1} \sim 0,025$. Ensuite seuls les degrés de libertés bosoniques¹² contribuent au terme cubique et ils sont trop peu nombreux et couplent relativement faiblement dans le Modèle Standard pour obtenir une hauteur de barrière suffisamment importante.

Ainsi le Modèle Standard ne permet pas de reproduire correctement l'asymétrie matière/antimatière observée dans l'univers. En réalité cet échec est plutôt une bonne nouvelle, puisqu'il requiert l'existence d'une physique ultra-violette encore inconnue et ne demandant qu'à être identifiée. Nous avons vu que dans certaines théories au delà du Modèle Standard, il existe des mécanismes alternatifs de baryogenèse basés sur une dynamique microscopique à très haute énergie $\sim 10^9 - 10^{16}$ GeV. Bien qu'on ne puisse totalement exclure que l'un d'autres eux soit responsable de l'asymétrie baryonique, tous ces scénarios partagent l'inconvénient d'être difficilement testable expérimentalement. Le LHC notamment ne prospectera pas plus loin que quelques TeV. Par ailleurs, l'effervescence suscitée par le problème de hiérarchie de jauge a permis à toute une collection de modèles de voir le jour, avec pour principale motivation de stabiliser le Higgs du Modèle Standard. Ces modèles introduisent alors de nouveaux degrés de liberté et des arguments de naturalité imposent alors qu'une nouvelle physique émerge proche de l'échelle électrofaible \sim TeV. Un corollaire immédiat est que la dynamique de la transition de phase est sensiblement modifiée par la présence de ces états à l'échelle du TeV. De plus de nouvelles sources importantes de violation de CP sont également présentes dans la plupart de ces modèles. La question s'est alors naturellement posée de savoir si la baryogenèse électrofaible pouvait retrouver un second souffle grâce à une description plus complète de la brisure de symétrie de jauge. La réponse est oui et nous commencerons par rappeler quelques résultats pour les cas les plus populaires. On peut également adopter une approche complètement générique et introduire dans le Modèle Standard des opérateurs effectifs paramétrant à l'échelle électrofaible les effets d'une nouvelle physique quelconque apparaissant non loin de cette dernière. Pour l'étude de la transition de phase, l'opérateur dominant est de la forme $|H|^6$. Nous verrons qu'en sa présence la protection de l'asymétrie après la transition implique alors que cet opérateur émerge bien avant l'échelle du TeV, ce qui peut être le signe d'une nature composite du Higgs.

¹²Pour les bosons de jauge, il s'agit seulement des polarisations longitudinales.

2.1.6.1 Quelques exemples

La plupart des modèles proposés pour résoudre le problème de hiérarchie améliore la situation standard en introduisant de nouveaux bosons massifs dans le spectre de la théorie, favorisant ainsi une transition fortement du premier ordre en renforçant l'amplitude de la barrière de potentiel.

MSSM et nMSSM Le MSSM est le premier exemple de modèle supersymétrique réaliste qui stabilise le Higgs à l'échelle électrofaible en introduisant, pour chaque particule de spin s , un partenaire de même masse et de spin $s - 1/2$. Ainsi pour chaque fermion (chiral) du Modèle Standard, un scalaire complexe contribue à la barrière et le coefficient du terme cubique standard (2.41) devient approximativement :

$$E_{MSSM} \simeq E_{SM} + \frac{12m_t^3}{4\pi v_0^3} \sim 0,32 \quad (2.53)$$

où seule la contribution dominante du stop¹³ \tilde{t} est considérée puisque le quark top à de loin le plus important couplage de Yukawa $y_{\tilde{t}} = y_t \sim \mathcal{O}(1)$. En ce cas, la masse du Higgs léger¹⁴ doit satisfaire la contrainte suivante pour éviter la destruction de l'asymétrie par le sphaléron :

$$\xi(T_c) = \frac{4E_{MSSM}v_0^2}{m_h^2} \gtrsim 1 \rightarrow m_h \lesssim 280 \text{ GeV}, \quad (2.54)$$

ce qui est au dessus de la borne inférieure du LEP. En réalité, dans le MSSM, la situation est plus délicate car la supersymétrie n'est pas exactement réalisée dans la nature et doit être brisée. En particulier la matrice de masse des stops reçoit une contribution provenant des termes de brisure douce de la supersymétrie¹⁵ de sorte que $m_{\tilde{t}} \neq m_t$. Après diagonalisation, \tilde{t}_L et \tilde{t}_R ont des masses différentes. On peut alors montrer que seul \tilde{t}_R ¹⁶ contribue à la barrière et que E_{MSSM} devient au mieux [16] :

$$E_{MSSM} \simeq E_{SM} + \frac{6m_{\tilde{t}}^3}{4\pi v_0^3} \left(1 - \frac{|\tilde{A}_t|^2}{m_Q^2} \right) \quad (2.55)$$

où \tilde{A}_t et m_Q^2 sont des paramètres de brisure douce devant satisfaire $|\tilde{A}_t| \ll m_Q$ pour obtenir une transition fortement du premier ordre avec un Higgs autour de 100 GeV. Cette situation en faveur de la baryogenèse correspond à une région de l'espace des paramètres où le stop droit est plus léger que le top $m_{\tilde{t}_R} \sim 100 \text{ GeV}$, laquelle est en revanche défavorable pour la masse du Higgs. En effet, le MSSM nécessite que les corrections à une boucle à la masse du Higgs léger soient importantes pour apporter celle-ci au dessus de la borne du LEP, puisqu'à l'arbre $m_h \leq m_Z \cos \beta$. A une boucle l'expression de la masse du Higgs est donnée par :

$$m_h^2 = m_Z^2 \cos^2 \beta + \frac{3m_t^4}{4\pi^2 v_0^2} \log \left(\frac{m_{\tilde{t}_L}^2 m_{\tilde{t}_R}^2}{m_t^2} \right) \left[1 + \mathcal{O} \left(\frac{|\tilde{A}_t|^2}{m_Q^2} \right) \right] \gtrsim 115 \text{ GeV}. \quad (2.56)$$

¹³Le facteur 12 compte 2 degrés de liberté par scalaire complexe pouvant chacun être de 3 couleurs et 2 chiralités différentes.

¹⁴Le MSSM contient deux doublets de Higgs, par Higgs léger on entend la combinaison linéaire correspondant à l'état léger décrit par le Modèle Standard.

¹⁵Ces termes introduisent également des phases de violation de CP nécessaires pour la baryogenèse.

¹⁶Dans le cas où \tilde{t}_L contribue à la barrière de manière significative, le paramètre $\rho = m_W^2/c_W^2 m_Z^2$ du Modèle Standard dévie très fortement de sa valeur mesurée par les tests de précision électrofaible $\rho - 1 \sim 10^{-3}$. Cette possibilité est ainsi écartée.

Ainsi un stop droit léger implique un ajustement fin des paramètres des paramètres $\tan\beta \sim 1$ et/ou une masse anormalement grande pour le stop gauche $m_{\tilde{t}_L} \gtrsim 2 - 3$ TeV. A ce prix, une analyse précise montre que la baryogenèse est possible dans le MSSM, tout en restant en accord avec les contraintes expérimentales pour les valeurs suivantes [15, 23] :

$$110 \text{ GeV} \lesssim m_h \lesssim 116 \text{ GeV} \quad \text{et} \quad 105 \text{ GeV} \lesssim m_h \lesssim 175 \text{ GeV}. \quad (2.57)$$

Il est cependant possible d'éliminer cette tension entre une forte transition et $m_h \gtrsim 115$ GeV en ajoutant un singulet scalaire supplémentaire au spectre du MSSM. Ce modèle nMSSM permet une transition fortement du premier et un Higgs lourd dans une large région de l'espace des paramètres [57].

Modèles génériques avec 2 doublets de Higgs Une extension minimale du Modèle Standard consiste à introduire un second doublet scalaire de même hypercharge que le Higgs standard. Bien que ce modèle ne constitue pas une solution au problème de hiérarchie — les scalaires ne sont plongés dans aucune représentation protégée par une symétrie — il n'en reste pas moins intéressant pour la baryogenèse électrofaible¹⁷. En effet, il représente une généralisation du secteur de Higgs du MSSM pour laquelle les constantes de couplages des Higgs ne sont pas nécessairement fixées par les couplages de jauge. Cela permet notamment d'éviter la tension apparaissant dans le MSSM. Le Higgs léger peut être plus lourd que le Z au niveau des arbres. Enfin, ce modèle contient trois nouveaux scalaires physiques, deux chargés et un pseudoscalaire, qui contribuent à augmenter la taille de la barrière de potentiel et permettent une transition fortement du premier ordre. De plus, le potentiel des Higgs le plus général contient des phases violant CP . Ainsi un mécanisme de baryogenèse électrofaible est naturellement réalisable dans ces modèles [21, 22].

Unification jauge-Higgs en 5d La plupart des modèles avec dimensions supplémentaires résolvent le problème de hiérarchie en réduisant jusqu'au TeV l'échelle ultra-violette à laquelle le Higgs est sensible radiativement, rendant ainsi naturelle sa présence à l'échelle électrofaible. Il est également possible de le rendre complètement insensible à la physique ultra-violette en le plongeant dans un champ de jauge en $d > 4$. Par exemple, à 5d, le Higgs peut être la composante A_5 d'un champ de jauge qui se comportera comme un scalaire d'un point de vue 4d. Sa masse est alors protégée par la symétrie de jauge 5d et les corrections quantiques qu'elle reçoit résultent de la compactification de l'espace qui brise la symétrie de jauge. Par essence ces corrections sont insensibles à la physique à courte distance, puisque la compactification est un effet non local. Les modèles considérés s'appuient sur une dimension compacte circulaire ou de type orbifold S_1/Z_2 et le potentiel du Higgs est généré par des boucles de Wilson enroulées autour de la dimension compacte [61, 56]. La dynamique de ces boucles à température finie présente une transition du premier ordre qui est identifiée avec la transition de phase électrofaible et dont la force peut être rendue suffisante pour la baryogenèse.

Singulets scalaires L'ajout de champs scalaires dans le Modèle Standard est contraint par les tests de précision électrofaible, notamment le paramètre ρ mesurant le

¹⁷ Il est également très simple de stabiliser une seconde composante scalaire massive en introduisant une nouvelle symétrie globale. Ce modèle contient alors un candidat pour la matière noire.

rapport des masses des bosons W et Z . La contribution générique au paramètre ρ de scalaires vivant dans des représentations quelconque d'isospin faible T_3 , d'hypercharge Y et dont la composante électriquement neutre développe une VEV non nulle est facilement calculable à partir de la dérivée covariante de jauge :

$$\rho = \frac{m_W^2}{c_W^2 m_Z^2} = \frac{\sum_i c_i (4T_3^i(T_3^i + 1) - Y_i^2) |v_i|^2}{\sum_i 2Y_i^2 |v_i|^2} \quad (2.58)$$

où c_i vaut $1/2$ et 1 pour les représentations réelles et complexes respectivement. On remarque alors que ρ vaut automatiquement 1 pour un nombre indéterminé de doublets ($T_3 = 1/2, Y = \pm 1$). Évidemment, les singulets, ne couplant pas aux bosons de jauge, ne contribuent pas à ρ . Ces deux possibilités sont les seules relativement simples. Il est alors possible d'ajouter un nombre arbitraire de ces représentations pour renforcer l'ordre de la transition de phase dans le Modèle Standard. Les modèles avec un seul singulet [62] ou un grand nombre d'entre eux [32] démontrent des phénoménologies favorables pour la baryogenèse électrofaible. En particulier, le modèle étudié en [32] affiche la possibilité d'un phénomène de surfusion relativement important.

2.1.6.2 Motivations pour une approche effective

Nous avons vu qu'il existe de très nombreux modèles, dont les principales classes ont été évoquées ci-dessus, dont la dynamique non standard du Higgs permet d'expliquer l'abondance de matière dans l'univers. Cependant, une étude détaillée pour chacun d'entre eux de la baryogenèse électrofaible est une tâche considérable. Il serait d'un grand avantage de disposer d'une analyse générique, ne serait-ce que pour obtenir une idée claire des ingrédients à introduire au-delà du Modèle Standard pour produire une asymétrie matière/antimatière. L'approche effective est alors l'outil idéal pour répondre à ces questions. Une théorie effective des champs permet l'étude systématique des effets d'une nouvelle physique proche de l'échelle électrofaible *quelque soit sa forme*. Cette approche générique consiste à ajouter une série d'opérateurs non renormalisables au lagrangien du Modèle Standard, qui est alors interprété comme l'ordre zéro d'un développement effectif :

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_{SM} + \sum_i \alpha_i \frac{\mathcal{O}_i}{M^{d_i-4}} \quad (2.59)$$

où M est l'échelle d'émergence de nouveaux degrés de liberté, d_i est la dimension de l'opérateur \mathcal{O}_i . c_i est par conséquent une constante sans dimension. Par construction, la dynamique de toute théorie au-delà du Modèle Standard est décrite par le lagrangien (2.59) pour $E \lesssim M$. Ce dernier s'obtient à partir d'une théorie donnée dans l'UV en intégrant explicitement dans la fonctionnelle génératrice tous les champs de masse $\gtrsim M$. Ainsi la description effective garde les traces de la théorie dont elle dérive à la fois par l'échelle M et dans la valeur des coefficients c_i . Ils sont soit $\mathcal{O}(1)$ ou nuls traduisant respectivement le fait que les nouveaux états vivent tous autour de l'échelle M ou que l'opérateur est interdit par une symétrie supplémentaire de la théorie ultraviolette. On peut alors calculer les prédictions de ce Modèle Standard effectif et utiliser les données expérimentales pour contraindre les paramètres c_i et M et ainsi deviner la structure de la théorie fondamentale au delà du Modèle Standard. Au premier ordre, $d_i = 5$, il est seulement possible d'écrire un terme de masse de Majorana pour les neutrinos qui viole le nombre leptonique, $\Delta L = 2$. On s'en débarrasse facilement en imposant la symétrie globale $U(1)_{B-L}$ qui ne contient pas d'anomalie. Ainsi les corrections dominantes n'apparaissent qu'à $d_i = 6$ où il existe 80 opérateurs linéairement

indépendants [12]. Parmi cette longue liste, seul l'opérateur $|H|^6$ est pertinent pour la transition de phase électrofaible, puisqu'il modifie le potentiel du Higgs directement au niveau des arbres. Les autres opérateurs n'affectant que les couplages des fermions et bosons de jauge au Higgs, ne contribuent qu'à l'ordre d'une boucle. En revanche, les corrections thermiques apparaissant également à cet ordre, il semble inévitable d'en tenir compte dans un calcul du potentiel à température finie. Nous verrons cependant que dans certains cas leurs effets sont sous-dominants et nous les négligerons à partir de maintenant.

Forte barrière et faible cut-off Au niveau des arbres, le potentiel du Higgs s'écrit alors :

$$V(H) = m^2|H|^2 + \lambda|H|^4 + \frac{|H|^6}{M^2} \quad (2.60)$$

où le coefficient $\mathcal{O}(1)$ a été absorbé par une redéfinition de M et on a $m_h^2 = 2\lambda v_0^2 + 3v_0^2/2M^2$. Dans le cas renormalisable, il n'y a pas de transition de phase pour $m_h \gtrsim 115$ GeV. Il est alors nécessaire d'introduire une nouvelle physique non loin de l'échelle électrofaible. Mais jusqu'où peut-on en repousser l'émergence afin d'obtenir la transition fortement du premier ordre requise par la baryogenèse? Une première réponse apportée par l'analyse préliminaire [38] simple indique une valeur assez faible, $M \lesssim 1$ TeV, pour une masse du Higgs aussi lourde que 200 GeV. On peut comprendre ce résultat en remarquant que l'origine de la barrière de potentiel dans ce modèle est sensiblement différente car elle apparaît directement au niveau des arbres et ne souffre pas de la suppression à une boucle que partagent les modèles discutés ci-dessus. En effet, le couplage quartique de (2.60) n'est plus restreint à un signe positif car le terme de dimension six assure un potentiel borné par le bas pour de grandes valeurs du champ. A partir de l'expression précédente de la masse du Higgs au niveau des arbres, on montre facilement l'existence d'une région de l'espace des paramètres (m_h, M) vérifiant $\lambda = m_h^2/2v_0^2 - 3v_0^2/2M^2 < 0$. Pour $m_h \sim 100$ GeV et $v_0 \simeq 250$ GeV, le couplage quartique est négatif dès lors que $M \lesssim$ TeV. La figure 2.6 illustre comment cette contrainte évolue en augmentant la masse du Higgs. C'est la raison pour laquelle les auteurs de [38] trouvèrent une transition fortement du premier ordre dans cette région. On peut également estimer l'amplitude d'un terme de dimension huit dans le potentiel et vérifier dans cette région qu'il est supprimé par rapport au précédent d'un facteur $\sim v_0^2/2M^2 \simeq 0,03$. La survie de l'asymétrie baryonique requiert génériquement une nouvelle physique à relativement faible énergie. Cependant, les tests de précisions électrofaible limitent l'amplitude des opérateurs non renormalisables et imposent $M \gtrsim 5 - 10$ TeV pour toute correction affectant les tenseurs de polarisation des bosons de jauge électrofaible. Ainsi, pour conserver une échelle M au dessous du TeV, la théorie doit être finement ajustée afin que les coefficients c_i des opérateurs affectant les bosons de jauge soient suffisamment supprimés $c_i \ll \mathcal{O}(1)$. Il existe néanmoins une classe de modèle fournissant une explication naturelle à cet ajustement, les modèles de Higgs composite.

Higgs composite Il a été proposé récemment une classe de modèles composites dans lesquels le Higgs émerge à l'échelle électrofaible suite au fort couplage g_ρ d'une nouvelle interaction à l'échelle du TeV [35]. On a ainsi par hypothèse $g_{SM} < g_\rho \lesssim 4\pi$ où la borne supérieure assure que la théorie reste naïvement perturbative puisque $g_\rho^2/16\pi^2 < 1$ où

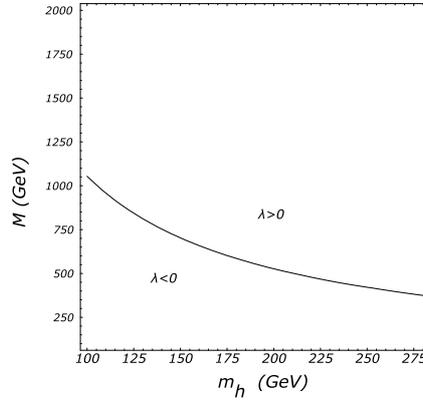


FIG. 2.6 – Signe du couplage quartique du Higgs à l’arbre dans l’espace des paramètres de la théorie effective (m_h, M) . Le couplage négatif pour une faible valeur de l’échelle de cut-off est le signe d’une barrière de potentiel au niveau classique.

$1/16\pi^2$ est le facteur de boucle. Dans ces modèles le Higgs n’est donc pas un champ fondamental mais un état lié résultant de la condensation de nouvelles particules en interaction forte, à la technicouleur. La principale différence est qu’ici le Higgs est un pseudo-boson de Goldstone léger. L’hypothèse centrale repose sur l’existence d’une symétrie globale \mathcal{G} qui est brisée spontanément en un sous-groupe \mathcal{H} par la dynamique du secteur fort. Les « pions » du quotient \mathcal{G}/\mathcal{H} sont alors identifiés avec le doublet de Higgs dont la masse est automatiquement nulle car protégée par la symétrie de « shift » $H \rightarrow H + \text{cste}$ du modèle σ non-linéaire. Lorsqu’un sous-groupe \mathcal{G}_{SM} de \mathcal{H} est jaugé pour obtenir les interactions électrofaible du Modèle Standard, la symétrie de shift est brisée et le Higgs reçoit des corrections à sa masse contrôlées par les couplages de jauge g_{SM} supposés faibles. Il est ainsi naturellement léger car une symétrie est restaurée lorsque sa masse disparaît. Suite au couplage fort il existe deux échelles d’énergie paramétriquement distinctes dans ces théories. La première est la masse m_ρ des résonances fondamentales ρ du secteur fort, alors que la seconde est la constante de désintégration f du modèle σ . Leur séparation est contrôlée par la constante de couplage fort selon la relation suivante :

$$m_\rho = g_\rho f \quad (2.61)$$

A l’échelle électrofaible, les auteurs de [35] montrèrent que les opérateurs effectifs de dimension six, décrivant les effets d’une dynamique forte, ne sont pas tous supprimés par la même échelle. En particulier, quatre d’entre eux sont plus sensibles à sa présence et dominent la théorie effective. En effet, les opérateurs suivant sont supprimés par la constante de désintégration f :

$$|H^\dagger D_\mu H|^2, (\partial_\mu |H|^2)^2, |H|^2 \bar{f}_L H f_R, |H|^6, \quad (2.62)$$

alors que les autres sont contrôlés par la masse m_ρ . De la liste précédente le premier est potentiellement dangereux car il contribue à la correction oblique T qui est extrêmement contrainte par les tests de précision. Néanmoins cet opérateur est automatiquement absent si \mathcal{H} contient une symétrie custodiale $SU(2)_R$. Les deux suivants affectent la phénoménologie standard aux collisionneurs via les processus de diffusion de bosons

de jauge longitudinaux et les canaux de désintégration du Higgs, respectivement. Enfin $|H|^6$ modifie les auto-couplages du Higgs et la dynamique de la transition de phase électrofaible au niveau des arbres. Pour $g_\rho \simeq 4\pi$, on peut alors obtenir naturellement une forte transition de phase avec $500 \text{ GeV} \lesssim f \lesssim 1 \text{ TeV}$ tout en supprimant suffisamment les opérateurs obliques avec $m_\rho > 5 - 10 \text{ TeV}$.

2.2 Potentiel quantique non renormalisable à température finie

Dans cette section nous présentons un calcul complet à une boucle et à température finie du potentiel du Higgs avec une interaction non renormalisable $|H|^6$.

2.2.1 Techniques de calcul du potentiel à une boucle à $T > 0$

On rappelle dans cette section les techniques usuelles permettant le calcul d'un potentiel quantique à température finie. Ces méthodes seront ensuite employées dans le Modèle Standard augmenté d'un terme de dimension six dans le potentiel scalaire.

2.2.1.1 Méthode de champ de fond à température nulle

La méthode originale proposée par Jackiw afin de calculer les corrections à boucles à un potentiel classique est basée sur un développement de l'action autour des valeurs de fond des champs apparaissant dans la théorie. Afin d'en illustrer brièvement le principe, on se concentrera dans un premier sur le cas d'un scalaire réel dont la théorie est définie par la fonctionnelle génératrice suivante :

$$Z[j] \equiv \int [\mathcal{D}\varphi] \exp [i(S[\varphi] + j\varphi)] \quad (2.63)$$

où la notation $\varphi j \equiv \int d^4x \varphi(x) j(x)$ sera utilisée à partir de maintenant, et l'action est $S[\varphi] = \int d^4x [(\partial_\mu \varphi)^2/2 - V_0(\varphi)]$. On décompose alors le champ en une valeur de fond classique homogène et une fluctuation quantique : $\varphi(x) = \phi + h(x)$; puis on intègre cette dernière afin d'obtenir de manière effective la correction engendrée sur le potentiel classique. La valeur de fond ϕ est alors déterminée de façon auto-cohérente en minimisant ce potentiel effectif¹⁸ total. Formellement, on définit la théorie « décalée », dont le champ dynamique est désormais h , en développant l'action autour de sa valeur classique :

$$S[\phi + h] + j(\phi + h) = S[\phi] + j\phi + h \left(\left. \frac{\delta S}{\delta \varphi} \right|_{\varphi=\phi} + j \right) + \frac{1}{2} h_x \left. \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi_x \delta \varphi_y} \right|_{\varphi=\phi} h_y + \dots \quad (2.64)$$

où \dots représente la partie en interaction conduisant à des effets de l'ordre de deux boucles et plus. Par ailleurs, le terme linéaire en h s'annule car directement proportionnel à l'équation du mouvement en présence d'une source. On intègre ensuite explicitement la fluctuation pour obtenir la théorie effective suivante :

$$\begin{aligned} Z[j] &\simeq e^{i(S[\phi]+j\phi)} \times \int [\mathcal{D}h] \exp \left[\frac{i}{2} h_x \left. \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi_x \delta \varphi_y} \right|_{\varphi=\phi} h_y \right] \\ &= e^{i(S[\phi]+j\phi)} \times \text{Det} (\square + V_0''(\phi))^{-\frac{1}{2}} \equiv e^{iS} \text{eff}^{[\phi]}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

¹⁸Ici effectif est à prendre dans le sens « incluant des corrections quantiques ».

L'action effective, qui n'est autre que la transformée de Legendre du logarithme de $Z[j] : S_{eff}[\phi] \equiv -i \log Z[j] - j\phi$, est alors donnée à une boucle par :

$$S_{eff}[\phi] = S[\phi] + \frac{i}{2} Tr \log \left(-\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_x \delta\varphi_y} \Big|_{\varphi=\phi} \right), \quad (2.66)$$

qui se réduit à $S_{eff}[\phi] = -\int d^4x V_{eff}(\phi)$ si ϕ est une configuration homogène dans l'espace et le temps. Dans l'espace des impulsions, le potentiel effectif V_{eff} devient :

$$V_{eff}(\phi) = V_0(\phi) - \frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \log(-k^2 + V_0''(\phi)). \quad (2.67)$$

Enfin la généralisation pour des champs de spin supérieur couplant à la valeur de fond est immédiate et leurs contributions au potentiel effectif s'écrivent :

$$V_{eff}(\phi) = V_0(\phi) + i \sum_{i=\text{champs}} \eta \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \log \det \left(-i\tilde{D}_i(k, \phi) \right), \quad (2.68)$$

où $-i\tilde{D}(k, \phi)$ désigne l'inverse des propagateurs, $\eta = -1/2$ (1) est la puissance du déterminant fonctionnel produit par l'intégrale de chemin gaussienne des fluctuations bosoniques (fermioniques) et \det est un déterminant agissant sur la structure de spin éventuelle des champs considérés.

Il existe également une méthode diagrammatique permettant de calculer le potentiel effectif¹⁹. En effet, l'action effective étant la transformée de Legendre du logarithme de la fonctionnelle génératrice $Z[j]$, elle est elle-même génératrice des fonctions de Green une particule irréductible (1-PI) de la théorie et peut être décomposée autour de $\phi = 0$ comme :

$$S_{eff}[\phi] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \left[\prod_{q=1}^n d^4x_q \right] G^{(n)}(\{x_n\}) \prod_q \phi(x_q). \quad (2.69)$$

où $G^{(n)}$ est une fonction de Green 1-PI à n-points. En passant dans l'espace des impulsions p le potentiel effectif pour un champ homogène s'écrit :

$$V_{eff}(\phi) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi^n}{n!} \mathcal{G}^{(n)}(\{p_n = 0\}) \quad (2.70)$$

avec $\mathcal{G}^{(n)}$ la transformée de Fourier de la fonction de Green $G^{(n)}$. Ainsi par construction le potentiel effectif est une série de diagrammes 1-PI dans l'espace des impulsions où tous les moments extérieurs sont nuls tels que représentés figure 2.7. Notons également que, dans le cas d'une théorie avec brisure spontanée de symétrie, les diagrammes de la figure 2.7 doivent être calculés dans la phase non brisée, le développement du potentiel (2.70) étant réalisé autour de l'origine $\phi = 0$. Ainsi, développé autour d'un vide éloigné de l'origine $\phi = v \neq 0$, le potentiel effectif s'écrira :

$$V_{eff}(\phi) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\phi - v)^n}{n!} \mathcal{G}^{(n)}(\{p_n = 0\}) \quad (2.71)$$

où maintenant les $\mathcal{G}^{(n)}$ désignent les fonctions de Green de la théorie décalée en $\phi = v$.

¹⁹Une excellente introduction à ce type de calcul se trouve dans le cours [63].

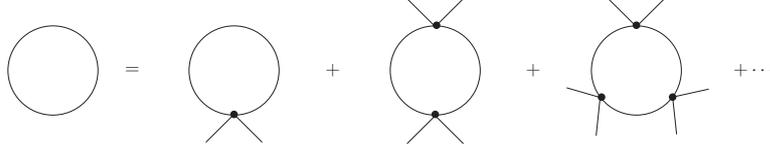


FIG. 2.7 – Décomposition du diagramme vide-vide du potentiel effectif $V_{\text{eff}}(\phi)$ en une série de diagrammes 1-PI dans la théorie $\lambda\phi^4$. Chaque patte externe représente une insertion de ϕ , qui est la composante homogène laissée par le champ dans la limite d'impulsion nulle.

2.2.1.2 Correction à température finie

Lorsque l'espace-temps est rempli d'un bain de particules jouant le rôle d'un réservoir de chaleur à la température T , les fluctuations thermiques engendrent également des corrections au potentiel V_0 . Une façon élégante de sommer à la fois l'effet des fluctuations quantiques et thermiques consiste à compactifier le temps euclidien sur un cercle de rayon $R = 1/2\pi T$. Cette méthode est connue sous le nom de formalisme en temps imaginaire ou euclidien. Cette correspondance se démontre formellement dans une approche fonctionnelle de la mécanique quantique et se base essentiellement sur le fait que la périodicité du temps euclidien en théorie des champs reproduit exactement l'action de la trace sur les états possibles d'un système en mécanique statistique. On peut se faire une intuition plus précise de cette connexion au moyen de l'illustration suivante. Reprenons la théorie scalaire définie par (2.63) mais plaçons nous maintenant en temps imaginaire. Après la rotation de Wick $t_E = it$, la fonctionnelle génératrice devient :

$$Z[j] = \int [\mathcal{D}\phi] \exp \left[- \int d^4 x_E \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + V_0(\phi) + j\phi \right) \right]. \quad (2.72)$$

En restreignant le temps euclidien à l'intervalle fini $-1/2T \leq \tau \leq 1/2T$ et le champ à des configurations statiques, on arrive à :

$$Z[j] = \int [\mathcal{D}\phi] \exp \left[- \frac{1}{T} \int d^3 x \left(\frac{1}{2} \partial_i \phi \partial^i \phi + V_0(\phi) + j\phi \right) \right]. \quad (2.73)$$

En l'absence de source l'intégrale sur l'espace est simplement l'énergie $E[\phi]$ emmagasinée dans une configuration indépendante du temps ϕ d'un système donné, et la fonctionnelle génératrice se réduit à :

$$Z[j = 0] = \int [\mathcal{D}\phi] e^{-E[\phi]/T} \sim \sum_{S=\text{tats}} e^{-E_S/T}, \quad (2.74)$$

qui n'est rien d'autre que la fonction de partition en mécanique statistique où ϕ décrit l'ensemble des états statiques possibles d'un système en équilibre avec un réservoir de chaleur à la température T . Le formalisme en temps imaginaire revient donc à traiter la température comme une borne finie au temps euclidien de la théorie définie dans le vide. La compactification du temps euclidien correspond à une quantification à la Fourier de la composante zéro du moment euclidien, ce qui conduit dans la pratique à remplacer l'intégrale sur l'énergie par une somme sur les modes propres du cercle :

$$\int \frac{dk_{0,E}}{2\pi} f(k_{0,E}) \rightarrow T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(k_{0,E} = \omega_n). \quad (2.75)$$

où les valeurs propres ω_n sont appelées fréquences de Matsubara et valent $2n\pi T$ pour les degrés de liberté bosoniques — périodiques sur le cercle temporel — et $(2n + 1)\pi T$ pour les degrés de liberté fermioniques — antipériodiques sur le cercle. Ainsi les corrections thermiques n'apparaissent qu'à l'ordre des boucles dans le formalisme en temps imaginaire et le potentiel effectif (2.67) devient à température finie :

$$V_{\text{eff}}(\phi, T) = V_0(\phi) + \frac{T}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \log(\omega_n^2 + \vec{k}^2 + V_0''(\phi)). \quad (2.76)$$

On peut également remarquer que la compactification du temps euclidien est une brisure explicite de l'invariance de Lorentz présente à température nulle. Intuitivement la raison est simple. A température non nulle il existe un référentiel privilégié pour décrire l'évolution du système, celui où le bain thermique est au repos. La perte de la symétrie de Lorentz affecte notamment le développement perturbatif usuel à température nulle et implique la nécessité de resommer des classes de diagrammes d'ordres à boucle supérieurs.

2.2.2 Potentiel effectif du Higgs à une boucle et $T > 0$

Le potentiel effectif classique du Higgs du Modèle Standard s'écrit :

$$V(H) = m^2|H|^2 + \lambda|H|^4 + \kappa|H|^6 \quad (2.77)$$

où $\kappa^{-1/2}$ est identifié au niveau des arbres au cut-off Λ de la théorie effective ou plutôt à la constante de désintégration d'un secteur en couplage fort f . Cette seconde hypothèse recevant de fortes motivations physiques, on notera par la suite f l'échelle de suppression de l'opérateur non renormalisable. On choisit également une configuration du vide telle que la partie réelle de la composante neutre du Higgs développe une valeur de fond homogène $\varphi(x) = \phi + h(x)$. Le boson de Higgs physique est représenté par la fluctuation h autour du condensat ϕ qui est défini comme le minimum global du potentiel quantique obtenu après intégration des fluctuations des champs interagissant avec H . On se limitera pour le calcul de ce dernier aux contributions dominantes provenant des bosons de jauge $SU(2)_L \times U(1)_Y$, du quark top ainsi que des bosons scalaires de Higgs et de Goldstone. Les autres fermions étant nettement moins massifs ont un couplage de Yukawa avec le Higgs beaucoup plus faible et leur contribution relative est de l'ordre de $\mathcal{O}(y_b^2/y_t^2) \sim 10^{-3}$ où y_b est le couplage de Yukawa du second quark le plus lourd, après le top, le bottom. Nous évaluons maintenant les corrections quantique et thermique au potentiel du Higgs en présence d'une auto-interaction non renormalisable.

Dans le formalisme rappelé ci-dessus, le potentiel effectif pour la valeur dans le vide du Higgs à une boucle et $T > 0$ s'écrit alors :

$$V_{\text{eff}}(\phi, T) \equiv V_{\text{tree}}(\phi) + \Delta V_1(\phi, T) \quad (2.78)$$

avec

$$V_{\text{tree}}(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4 + \frac{\kappa}{8}\phi^6, \quad (2.79)$$

$$\Delta V_1(\phi, T) = \sum_{i=h,\chi,W,Z,t} \frac{n_i T}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \log \left[\vec{k}^2 + \omega_n^2 + m_i^2(\phi) \right]. \quad (2.80)$$

Les nombres de degrés de liberté des champs sont obtenus en évaluant le déterminant résiduel apparaissant dans l'expression (2.68) et sont donnés par $n_{\{h,\chi,W,Z,t\}} = \{1, 3, 6, 3, -12\}$, où le signe $-$ de l'intégration gaussienne fermionique est inclus dans la définition de n_t . On a choisi de travailler en jauge de Landau — jauge R_ξ avec $\xi = 0$ — pour s'affranchir du couplage des fantômes de Faddeev-Popov associés à $SU(2)_L \times U(1)_Y$. En toute rigueur le potentiel effectif précédent n'est pas invariant de jauge, seul la position de ses extrema l'est, ce qui est essentiellement tout ce dont on a besoin pour étudier la dynamique de la transition de phase qu'il régit. En outre, on peut s'interroger sur la nécessité d'inclure à la fois la contribution des bosons de Goldstone et celle des polarisations longitudinales pour les bosons de jauge W et Z . En effet, il est tentant de penser que ces degrés de liberté ne sont pas indépendants puisque les premiers découplent et sont « absorbés » par les seconds dans la jauge unitaire. Un calcul explicite dans la jauge R_ξ montre qu'il n'en est rien [27]. On peut comprendre qualitativement ce résultat en se rappelant que les champs de Goldstone χ_i sont des fluctuations quantiques autour du minimum de la théorie, alors que leur identification avec les composantes longitudinales des bosons de jauge massifs n'est valable qu'au minimum. Nous avons vu que, dans l'approximation à une boucle de la méthode de champ de fond, seules les fluctuations gaussiennes sont intégrées. Les corrections au potentiel du Higgs qu'elles engendrent dépendent donc seulement des contributions aux masses de ces fluctuations. Pour les champs considérés, et après développement du Higgs autour de $\phi \neq 0$, on obtient les masses suivantes en lisant simplement les termes quadratiques de l'action :

$$m_h^2(\phi) = m^2 + 3\lambda\phi^2 + \frac{15}{4}\kappa\phi^4, \quad (2.81)$$

$$m_\chi^2(\phi) = m^2 + \lambda\phi^2 + \frac{3}{4}\kappa\phi^4, \quad (2.82)$$

$$m_W^2(\phi) = \frac{g^2}{4}\phi^2, \quad m_Z^2(\phi) = \frac{g^2 + g'^2}{4}\phi^2, \quad m_t^2(\phi) = \frac{y_t^2}{2}\phi^2, \quad (2.83)$$

où g , g' et y_t sont les couplages de jauge $SU(2)_L$, $U(1)_Y$ et de Yukawa pour le top respectivement. Les termes de masse pour les bosons de jauge, provenant du terme cinétique $|D_\mu H|^2$, ainsi que pour le top, provenant du terme de Yukawa $y_t \bar{Q}_L H t_R$, sont inchangés par rapport au Modèle Standard. Seuls les masses des scalaires, dérivées du potentiel classique (2.77) contiennent des corrections effectives générées par l'opérateur de dimension six.

En évaluant explicitement le somme sur le modes de Matsubara, la correction (2.80) se décompose en un terme indépendant de la température et une partie qui disparaît lorsque $T \rightarrow 0$ [30] :

$$\Delta V_1(\phi, T) \equiv \Delta V_1^0(\phi) + \Delta V_1^T(\phi, T) \quad (2.84)$$

avec

$$\Delta V_1^0(\phi) = \sum_i \frac{n_i}{2} \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \log [k_E^2 + m_i^2(\phi)] \quad (2.85)$$

$$\Delta V_1^T(\phi, T) = \sum_i \frac{n_i T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \log \left[1 \mp e^{(-\sqrt{k^2 + m_i^2(\phi)/T^2})} \right]. \quad (2.86)$$

$\Delta V_1^0(\phi)$ est donc la correction quantique ordinaire à température nulle. Étant divergente dans l'ultra-violet, on s'y attardera tout d'abord afin de déterminer avec soin les

paramètres renormalisés de la théorie au niveau quantique. On discutera ensuite des corrections thermiques en terme de ces derniers.

2.2.2.1 Corrections quantiques et renormalisation à $T = 0$

Nous avons vu que la correction à une boucle au potentiel classique se réduit au premier terme de (2.84) lorsque la température est nulle. L'intégrale est à la fois quadratiquement et logarithmiquement divergente dans l'UV :

$$\begin{aligned} \int d^4k \log(k^2 + m^2) &\sim \int^{\Lambda^2} d(k^2) (m^2 + k^{-2}m^4 + \dots) \\ &\propto m^2\Lambda^2 + m^4 \log(\Lambda) + \dots \end{aligned} \quad (2.87)$$

avec \dots représentant soit des termes indépendants de ϕ ou disparaissant dans la limite $\Lambda \rightarrow \infty$, où Λ est un régulateur UV. Ce dernier n'est pas *a priori* identifiable à l'échelle de suppression de l'opérateur non renormalisable que l'on a introduit. En effet, et c'est notamment le cas pour un Higgs composite, le cut-off UV de la théorie ne supprime pas nécessairement tous les opérateurs effectifs à basse énergie. Après régularisation en $d = 4 - \epsilon$ dimensions, la correction à une boucle à $T = 0$ devient :

$$\Delta V_1^0(\phi) = \sum_i n_i \frac{m_i^4(\phi)}{64\pi^2} \left[\log \frac{m_i^2(\phi)}{\mu^2} - C_i - C_{UV} \right] \quad (2.88)$$

où $C_i = 5/6$ ($3/2$) pour les bosons de jauge (scalaires et fermions) et $C_{UV} \equiv \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \log 4\pi + \mathcal{O}(\epsilon)$ contient le pôle en ϵ représentant les divergences UV de la correction quantique. On remarque ici un phénomène inhérent aux théories non renormalisables : le terme classique de dimension six requiert des contre-termes de dimension supérieure afin de rendre la théorie finie. Cela implique l'écriture de termes nus de dimension huit au niveau des arbres qui génèrent à leur tour des divergences d'ordre supérieur et ainsi de suite. Généralement la théorie nécessite au niveau quantique une infinité de contre-termes pour conserver des corrections quantiques finies. Dans le cadre des théories effectives, en restant à une énergie suffisamment basse devant le cut-off, on peut simplement s'affranchir des divergences apparaissant au delà de l'ordre correspondant à la précision que l'on s'est donnée de résoudre effectivement. Ainsi seulement un nombre fini de contre-termes est requis pour rendre la théorie prédictive au niveau quantique. La théorie non renormalisable peut alors être renormalisée par la méthode multiplicative usuelle. On va maintenant détailler les résultats obtenus dans les deux procédures de renormalisation les plus usitées, d'une part le schéma de soustraction minimal \overline{MS} et le schéma sur couche de masse d'autre part.

Renormalisation dans le schéma \overline{MS} . Dans le schéma de soustraction minimale, les paramètres nus de la théorie se décomposent en paramètres renormalisés et un jeu de contre-termes $V_{ct}(\phi)$ que l'on fixe de manière à éliminer le terme proportionnel à C_{UV} dans l'expression (2.88). Le potentiel effectif s'écrit alors :

$$\begin{aligned} V_{eff}(\phi) &= \frac{m^2(\mu)}{2}\phi^2 + \frac{\lambda(\mu)}{4}\phi^4 + \frac{\kappa(\mu)}{8}\phi^6 \\ &+ \sum_i n_i \frac{m_i^4(\phi)}{64\pi^2} \left[\log \frac{m_i^2(\phi)}{\mu^2} - C_i \right] \end{aligned} \quad (2.89)$$

où les paramètres renormalisés m^2 , λ et κ évoluent implicitement sous les équations du groupe de renormalisation lorsque l'échelle μ varie, de sorte que le potentiel complet en soit indépendant, du moins jusqu'à l'ordre d'une boucle. Cependant, afin de tester la théorie, il n'en reste pas moins nécessaire de relier les paramètres du lagrangien à des observables physiques. Pour ce faire on impose à une échelle donnée $\mu = \mu_*$ les conditions de renormalisation suivantes :

$$V'_{eff}(\phi = v_0, \mu_*) = 0 \quad (2.90)$$

$$V''_{eff}(\phi = v_0, \mu_*) = m_h^2 \quad (2.91)$$

$$V'''_{eff}(\phi = v_0, \mu_*) = \xi. \quad (2.92)$$

Le membre de gauche de chaque équation est une combinaison des paramètres du lagrangien représentant les prédictions de la théorie, alors que le membre de droite est soit directement le résultat d'une mesure, la masse du Higgs et son couplage cubique, ou relié à une observable mesurée : v_0 peut être relié à la masse du Z par exemple. Ainsi la valeur dans le vide du Higgs dépend du choix d'échelle de renormalisation et on définit v_0 de manière à reproduire la masse physique du Z dans le schéma \overline{MS} à l'échelle $\mu = \mu_*$ dans la jauge de Landau qui s'écrit :

$$m_Z^2 = \frac{g(\mu)^2 + g'(\mu)^2}{4} v(\mu)^2 + \Pi_{ZZ}(m_Z^2, \mu) \quad (2.93)$$

où Π_{ZZ} est la self énergie du Z à une boucle dans la jauge de Landau et on a :

$$g(\mu)^2 = \frac{e(\mu)^2}{s_W^2(\mu)}, \quad g'(\mu)^2 = \frac{e(\mu)^2}{1 - s_W^2(\mu)}. \quad (2.94)$$

La valeur dans le vide du Higgs est alors donnée par :

$$v(\mu)^2 = \frac{4s_W^2(\mu)(1 - s_W^2(\mu))}{e(\mu)^2} (m_Z^2 - \Pi_{ZZ}(m_Z^2, \mu)). \quad (2.95)$$

Pour les intégrales scalaires intervenant dans le calcul de la self énergie on utilise la bibliothèque numérique LoopTools [40]. A l'échelle $\mu = m_Z$ on peut facilement obtenir à partir des dernières mesures de précision électrofaibles les valeurs des diverses grandeurs apparaissant dans l'expression ci-dessus. C'est notamment la raison pour laquelle on choisit d'imposer les conditions de renormalisation à $\mu_* = m_Z$, outre le fait qu'on évite par la même l'apparition de larges logarithmes. Ainsi la valeur de la constante de structure fine dans le schéma \overline{MS} , $\alpha(m_Z^2)_{\overline{MS}} = e(m_Z)^2/4\pi$ est reliée à sa valeur physique à l'échelle du Z par [55] :

$$\alpha^{-1}(m_Z^2)_{\overline{MS}} = \alpha^{-1}(m_Z^2) - 0,982 \quad (2.96)$$

où $\alpha^{-1}(m_Z^2)$ est fourni la collaboration Aleph [1] comme valant :

$$\alpha^{-1}(m_Z^2) = 132,71 - 137,036\Delta\alpha_{had}(m_Z^2). \quad (2.97)$$

avec la correction due aux contributions hadroniques $\Delta\alpha_{had}(m_Z^2) = 0,02758 \pm 0,00035$ [13]. Enfin le sinus de l'angle de mélange électrofaible est fonction de la masse du Higgs, dont la dépendance est donnée par l'approximation suivante [1] :

$$\begin{aligned} s_W^2(m_Z^2) &= 0,2310 + (4,91 \times 10^{-4}) \log\left(\frac{m_h}{100 \text{ GeV}}\right) \\ &+ (3,43 \times 10^{-5}) \log^2\left(\frac{m_h}{100 \text{ GeV}}\right). \end{aligned} \quad (2.98)$$

On obtient alors que $v(\mu_* = m_Z) \equiv v_0 = 246,8$ GeV est une bonne approximation pour une masse du Higgs variant dans l'intervalle $115 \text{ GeV} < m_h \lesssim 300 \text{ GeV}$. On peut maintenant inverser les trois conditions de renormalisation et obtenir les paramètres de la théorie à l'échelle $\mu_* = m_Z$ comme fonctions d'un ensemble de mesures physiques :

$$m_*^2 = m^2(m_h^2, \xi, v_0, \mu_*) \quad (2.99)$$

$$\lambda_* = \lambda(m_h^2, \xi, v_0, \mu_*) \quad (2.100)$$

$$\kappa_* = \kappa(m_h^2, \xi, v_0, \mu_*). \quad (2.101)$$

où on a introduit la notation $m_*^2 \equiv m^2(\mu = \mu_*)$, etc.

Il reste cependant une subtilité importante que la discussion précédente a laissé de côté et qui conduit à l'apparition potentielle de divergences dans l'infrarouge. En effet, dans la jauge de Landau, la masse des bosons de Goldstone tend vers zéro et les dérivées secondes et troisième du potentiel effectif sont divergentes :

$$V''_{\text{eff}}(v_0, \mu_*) \supset \frac{[m_\chi^2(v_0)']^2}{32\pi^2} \log m_\chi^2(v_0), \quad (2.102)$$

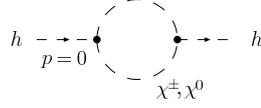
$$V'''_{\text{eff}}(v_0, \mu_*) \supset \frac{3}{32p^2} m_\chi^2(v_0)'' m_\chi^2(v_0)' \log m_\chi^2(v_0) + \frac{[m_\chi^2(v_0)']^3}{32\pi^2} \frac{1}{m_\chi^2(v_0)} \quad (2.103)$$

où $m^2(v_0)' \equiv dm^2(\phi)/d\phi|_{\phi=v_0}$, etc... de sorte que les relations (2.99) sont singulières. En toute rigueur la masse \overline{MS} des bosons de Goldstone n'est pas nulle dans la jauge de Landau. La raison est que la définition utilisée pour v_0 n'en fait pas le minimum du potentiel classique — pour lequel on a bien $m_\chi^2 = 0$ — mais dévie de ce dernier d'une correction de l'ordre d'une boucle. Ainsi la masse des bosons de Goldstone est non nulle, quoique relativement faible à une boucle, dans ce schéma de renormalisation. Lorsque cette dernière est insérée à nouveau dans le potentiel (2.89), on obtient non plus une divergence mais une sensibilité IR anormale, polluant l'analyse numérique du potentiel effectif. Ainsi, bien que formellement finie, il convient néanmoins de régulariser la théorie dans l'infrarouge. On peut comprendre intuitivement ce comportement IR en rappelant que le potentiel effectif détermine la valeur *homogène* dans le vide du Higgs et définit ainsi la dynamique quantique de la théorie à $p = 0$. La présence d'un pôle en ce point rend alors caduque la procédure de renormalisation, ce qui se traduit par l'apparition de divergences. Cela suggère aussi que la théorie doit être définie loin de $p = 0$ au niveau quantique, par exemple sur la couche de masse $p = m_{h,ph}$ où $m_{h,ph}$ est la masse physique du Higgs. En outre le développement (2.71) du potentiel effectif nous apprend que la masse m_h utilisée dans la condition de renormalisation (2.91) n'est pas la masse physique du Higgs mais simplement une fonction à deux points évaluée à $p = 0$:

$$m_h^2 = V''_{\text{eff}}(v_0) = -\mathcal{G}^{(2)}(p = 0). \quad (2.104)$$

où $\mathcal{G}^{(2)}(p^2) = p^2 - (m_{h,R}^2 + \Sigma(p^2))$ est l'inverse du propagateur du Higgs avec $m_{h,R}$ la masse renormalisée et $\Sigma(p^2)$ la self énergie du Higgs. Ainsi imposer (2.91) implique $m_h^2 = m_{h,R}^2 + \Sigma(0)$. La masse physique étant donnée par le pôle du propagateur sur la couche de masse $\mathcal{G}^{(2)}(p^2 = m_{h,ph}^2) = 0$, on obtient la relation suivante entre cette dernière et m_h :

$$m_h^2 = m_{h,ph}^2 - \Sigma(m_{h,ph}^2) + \Sigma(0). \quad (2.105)$$

FIG. 2.8 – Diagramme divergent dans l'IR contribuant à la masse du Higgs à $p = 0$.

Alors, en terme de la masse physique du Higgs, la condition (2.91) devient :

$$V''_{eff}(\phi = v_0, \mu_*) = m_{h,ph}^2 - \Delta\Sigma \quad (2.106)$$

avec $\Delta\Sigma \equiv \Sigma(m_{h,ph}^2) - \Sigma(0)$. On peut remarquer que $\Sigma(0)$ est également singulier dans l'infrarouge. En effet, le diagramme à une boucle de la figure 2.8 contient un terme divergent facilement calculable de la forme :

$$\Sigma(0) \supset \left[\frac{[m_\chi^2(v_0)']^2}{32\pi^2} + \dots \right] \log m_\chi^2(v_0) \quad (2.107)$$

où \dots représentent des termes d'ordre supérieur en $1/f$, et qui compense la divergence de V''_{eff} . Dans le Modèle Standard, exprimer le potentiel effectif en terme de la masse physique est suffisant pour éliminer toutes les divergences IR. Néanmoins en présence de l'opérateur non renormalisable, il est également nécessaire de définir le couplage cubique à un point de renormalisation autre que $p = 0$. Encore une fois (2.71) implique que la dérivée troisième du potentiel correspond à un couplage trilinéaire à $p = 0$:

$$\xi = V'''_{eff}(v_0) = -\mathcal{G}^{(3)}(p_i^2 = 0) \equiv g_{3,R} + \Gamma_3(0) \quad (2.108)$$

où $g_{3,R}$ est un couplage cubique renormalisé et $\Gamma_3(0)$ est la correction à une boucle à la fonction à trois points évaluée à impulsions extérieures nulles. A l'image de la fonction à deux points on peut paramétrer le potentiel avec un couplage cubique défini sur couche de masse et remplacer (2.92) par :

$$V'''_{eff}(\phi = v_0, \mu_*) = \xi_{ph}^2 - \Delta\Gamma \quad (2.109)$$

avec $\Delta\Gamma \equiv \Gamma_3(p_i^2 = m_{h,ph}^2) - \Gamma_3(0)$. Également, on montre facilement que $\Gamma_3(0)$ contient les divergences infrarouges suivantes provenant des diagrammes à une boucle de la figure 2.9 :

$$\begin{aligned} \Gamma_3(0) \supset & \left[\frac{3}{32p_i^2} m_\chi^2(v_0)'' m_\chi^2(v_0)' + \dots \right] \log m_\chi^2(v_0) \\ & + \left[\frac{[m_\chi^2(v_0)']^3}{32\pi^2} + \dots \right] \frac{1}{m_\chi^2(v_0)} \end{aligned} \quad (2.110)$$

où, une fois encore, \dots dénotent des termes d'ordre supérieur. Ainsi définies en terme d'observables sur couche de masse, le potentiel à une boucle est proprement renormalisé et les divergences infrarouges associées aux bosons de Goldstone s'annulent exactement comme elles le doivent puisqu'elles n'étaient que le signe que la théorie quantique avait été définie sur un pôle. Cependant cette définition de ξ_{ph} présente en pratique un inconvénient, elle nécessite le calcul de la fonction à trois point du Higgs dans le

Modèle Standard augmenté d'un opérateur de dimension six dans le potentiel classique. Bien que le calcul de $\Delta\Sigma$ est réalisable analytiquement, il s'avère toutefois très lourd d'entreprendre l'évaluation, même numérique, de $\Delta\Gamma$. En outre, contrairement à la masse, il existe plusieurs définitions physiques du couplage cubique et on peut utiliser cette liberté pour choisir une définition qui allège numériquement la procédure de renormalisation tout en restant éloigné de $p = 0$ afin de s'affranchir des divergences IR. Ainsi on choisit de paramétrer le potentiel quantique à l'aide seulement de la partie régulière dans l'IR de ξ définie comme $\xi_F \equiv \xi - \Gamma_{IR}$ où Γ_{IR} englobe les termes divergents (2.110) de $\Gamma_3(0)$. Par ailleurs on aimerait que le couplage trilineaire tende naturellement vers sa valeur standard, qui est fixée dans le Modèle Standard une fois la masse du Higgs connue, lorsque l'opérateur de dimension six est découplé en envoyant κ à zéro :

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \xi \rightarrow \xi^{SM}(m_{h,ph}) \equiv \xi_F^{SM} + \Gamma_{IR}^{SM}. \quad (2.111)$$

Γ_{IR}^{SM} est donné par la même expression que Γ_{IR} en prenant la masse $m_\chi^2(\phi)$ dans la limite de découplage. Pour $\kappa \neq 0$, on définit la déviation entre ξ_F et ξ_F^{SM} comme suit :

$$\xi_F \equiv \xi_F^{SM}(m_{h,ph}) + \frac{6v_0^3}{f_{ph}^2}. \quad (2.112)$$

L'expression précédente est simplement une reparamétrisation du couplage trilineaire en terme de la constante de désintégration de secteur fortement couplé — avec ξ_F^{SM} une fonction calculable de $m_{h,ph}$ — qui a le bénéfice d'assurer l'identification de $\kappa^{-1/2}$ avec f_{ph} au niveau des arbres.

On rassemble enfin les différentes conditions de renormalisation à imposer pour définir proprement le potentiel effectif quantique :

$$V'_{eff}(\phi = v_0, \mu_* = m_Z) = 0, \quad (2.113)$$

$$V''_{eff}(\phi = v_0, \mu_* = m_Z) = m_{h,ph}^2 - \Delta\Sigma, \quad (2.114)$$

$$V'''_{eff}(\phi = v_0, \mu_* = m_Z) = \xi \equiv \xi_F^{SM}(m_{h,ph}) + \frac{6v_0^3}{f_{ph}^2} + \Gamma_{IR}. \quad (2.115)$$

On inverse alors ces nouvelles équations pour dériver des relations entre les paramètres \overline{MS} du lagrangien et des observables physiques totalement affranchies de divergences infrarouges et dont la limite de découplage est transparente. Nous utiliserons cette paramétrisation de la théorie quantique dans la suite de ce chapitre.

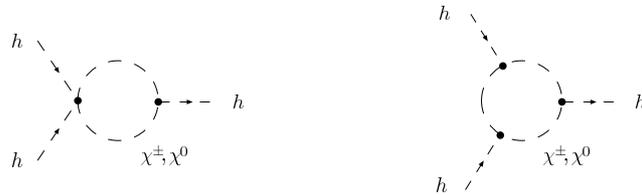


FIG. 2.9 – Diagrammes singuliers dans l'infrarouge contribuant à la fonction à trois points. Le premier contient une divergence logarithmique alors que le second diverge en loi de puissance.

Définition de la théorie renormalisée sur couche de masse. Le schéma de renormalisation sur couche de masse diffère radicalement du précédent au sens où il identifie les paramètres du lagrangien à des observables physiques directement. Comme il s'agit du schéma utilisé habituellement pour le calcul du potentiel du Higgs dans le Modèle Standard, on s'attardera ici en détail sur son extension en présence d'un terme de dimension six. La renormalisation de la théorie sur couche de masse est plus commode lorsqu'on réécrit le potentiel sous la forme :

$$V_{tree}(\phi) = \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v_0^2)^2 + \frac{\kappa}{8} (\phi^2 - v_0^2)^3 + \Delta V_1^0(\phi) + \frac{\delta c_2}{2} \phi^2 + \frac{\delta c_4}{4} \phi^4 + \frac{\delta c_6}{6} \phi^6 \quad (2.116)$$

où la correction à une boucle régularisée est toujours donnée par (2.88). Dans cette paramétrisation, les masses des scalaires deviennent :

$$m_h^2(\phi) = \lambda(3\phi^2 - v_0^2) + 3\kappa(5\phi^4 - 6v_0^2\phi^2 + v_0^4)/4, \quad (2.117)$$

$$m_\chi^2(\phi) = \lambda(\phi^2 - v_0^2) + 3\kappa(\phi^2 - v_0^2)^2/4 \quad (2.118)$$

où v_0 désigne le minimum du potentiel à l'arbre et le schéma sur couche de masse impose que v_0 minimise aussi le potentiel quantique. On a également :

$$\lambda \equiv \frac{m_{h,ph}^2}{2v_0^2}, \quad \kappa \equiv 1/f_{ph}^2. \quad (2.119)$$

Les contre-termes δc_i sont alors définis en imposant les conditions de renormalisation suivantes :

$$V'_{eff}(\phi, T=0) \Big|_{\phi=v_0} = 0, \quad (2.120)$$

$$V''_{eff}(\phi, T=0) \Big|_{\phi=v_0} = m_{h,ph}^2 - \Delta\Sigma, \quad (2.121)$$

$$V'''_{eff}(\phi, T=0) \Big|_{\phi=v_0} = \xi_{ph} - \Delta\Gamma \quad (2.122)$$

où $\Delta\Sigma = \Sigma(m_{h,ph}^2) - \Sigma(0)$ et $\Delta\Gamma = \Gamma_3(m_{h,ph}^2) - \Gamma_3(0)$ sont nécessaires pour passer d'un potentiel effectif à $p=0$ divergent dans l'infrarouge à une définition régulière sur couche de masse $p = m_{h,ph}$, où les observables physiques $m_{h,ph}$ et ξ_{ph} sont définies. Encore une fois, on souhaite avoir une paramétrisation du potentiel en terme d'une observable qui caractérise sa déviation par rapport au cas standard, et on pose :

$$\xi_{ph} \equiv \xi_{ph}^{SM} + \frac{6v_0^3}{f_{ph}^2}, \quad (2.123)$$

ce qui constitue encore ici une simple définition au niveau quantique de la constante de désintégration f_{ph} . Dans le Modèle Standard le couplage cubique est fixé par la masse $m_{h,ph}$ et ξ_{ph}^{SM} est alors complètement déterminé par celle-ci ainsi que d'autres paramètres du modèle :

$$\xi_{ph}^{SM} = \frac{3m_{h,ph}^2}{v_0} + \sum_i \frac{n_i}{32\pi^2} \frac{[m_i^2(v_0)']^3}{m_i^2(v_0)}. \quad (2.124)$$

En fait, puisque $m^2(v_0)$ contient une contribution en $1/f_{ph}^2$, l'expression précédente n'est techniquement égale au couplage cubique standard que pour $f_{ph} \rightarrow \infty$. Néanmoins

c'est tout ce dont on a besoin pour assurer la transparence de la limite de découplage de la nouvelle physique. On peut maintenant résoudre les conditions de renormalisation précédentes et calculer les contre termes en fonction des dérivées du potentiel, de $\Delta\Sigma$ et de $\Delta\Gamma$. Après quelques manipulations élémentaires, le résultat final pour le potentiel renormalisé à une boucle s'écrit :

$$\begin{aligned}
 V_{eff}(\phi) &= \frac{m_h^2}{8v_0^2}(\phi^2 - v_0^2)^2 + \frac{1}{8f^2}(\phi^2 - v_0^2)^3 \\
 &+ \sum_i \frac{n_i}{64\pi^2} \left[m_i^4(\phi) \left(\log \frac{m_i^2(\phi)}{m_i^2(v_0)} - \frac{3}{2} \right) + 2m_i^2(v_0)m_i^2(\phi) \right] \\
 &- \frac{\Delta\Sigma}{8v_0^2}(\phi^2 - v_0^2)^2 + \left[\frac{\Delta\Sigma}{16v_0^4} - \frac{\Delta\Gamma}{48v_0^3} \right] (\phi^2 - v_0^2)^3
 \end{aligned} \tag{2.125}$$

où la dépendance en f_{ph} de la correction à une boucle est seulement contenue dans les masses des scalaires, rendant ainsi la limite de découplage explicite.

Dans le schéma de renormalisation sur couche de masse, les bosons de Goldstone sont exactement de masse nulle. Il en résulte alors que la correction à une boucle exprimée en terme d'observables définies à $p = 0$ — c'est-à-dire en l'absence de $\Delta\Sigma$ et $\Delta\Gamma$ — est logarithmiquement singulière dans l'infrarouge :

$$\Delta V_1^{0(SM)}(\phi) \supset -\frac{n_\chi}{64\pi^2} m_\chi^4(SM)(\phi) \log m_\chi^2 \xrightarrow{m_\chi^2 \rightarrow 0} \infty. \tag{2.126}$$

Par ailleurs, à $p = 0$, la définition de ξ est divergente en $1/m_\chi^2$:

$$\xi_{p=0} \supset \frac{n_\chi}{32\pi^2} \frac{[m_i^2(v_0)]^3}{m_\chi^2} \xrightarrow{m_\chi^2 \rightarrow 0} \infty, \tag{2.127}$$

rendant problématique la paramétrisation du potentiel en terme de celle-ci. Nous allons maintenant décrire comment cette divergence est adoucie en définissant la théorie sur couche de masse, ce qui revient à augmenter le potentiel des termes suivants :

$$\delta V_1(\phi) = -\frac{\Delta\Sigma}{8v_0^2}(\phi^2 - v_0^2)^2 + \left[\frac{\Delta\Sigma}{16v_0^4} - \frac{\Delta\Gamma}{48v_0^3} \right] (\phi^2 - v_0^2)^3. \tag{2.128}$$

Tout d'abord lorsque la masse physique du Higgs est utilisée pour paramétrer la courbure du potentiel, le diagramme de la figure 2.8 contribuant à $\Sigma(0)$ contient la divergence logarithmique suivante :

$$\Sigma(0) \supset \frac{n_\chi}{32\pi^2} \frac{m_{h,ph}^4}{v_0^2} \log m_\chi^2. \tag{2.129}$$

Dans le Modèle Standard cela suffit à compenser (2.126), mais en présence de l'opérateur non renormalisable le couplage cubique ou, ce qui est équivalent, f doit également être défini sur couche de masse et on montre alors que $\Gamma_3(0)$ renferme, au travers des diagrammes de la figure 2.9, les singularités suivantes :

$$\Gamma_3(0) \supset \frac{3n_\chi}{32\pi^2} \frac{m_{h,ph}^4}{v_0^3} \left(1 + \frac{6v_0^4}{m_{h,ph}^2 f_{ph}^2} \right) \log m_\chi^2 \tag{2.130}$$

$$+ \frac{n_\chi}{32\pi^2} \frac{m_{h,ph}^6}{m_\chi^2 v_0^3}. \tag{2.131}$$

Ainsi, la divergence en loi de puissance de $\Gamma_3(0)$ annule celle de (2.127), faisant de ξ_{ph} une quantité proprement définie. Enfin en rassemblant les logarithmes restants, on obtient que $\delta V_1(\phi)$ développe une divergence de la forme :

$$\delta V_1(\phi) \supset \left[\frac{n_\chi}{64\pi^2} m_\chi^4(\phi) + \dots \right] \log m_\chi^2, \quad (2.132)$$

avec \dots désignant des termes d'ordre $\mathcal{O}(f_{ph}^{-4})$, qui compense (2.126) et rend le potentiel (2.125) complètement régulier à la fois dans l'UV et l'IR.

La théorie étant désormais soigneusement définie à $T = 0$, on peut maintenant discuter les corrections à température finie au potentiel du Higgs. On omettra par la suite l'indice $_{ph}$ et chaque fois qu'on évoquera la masse du Higgs et l'échelle f , on se référera implicitement aux quantités physiques définies ci-dessus.

2.2.2.2 Corrections à température finie

En présence d'un bain thermique à la température T , le Higgs diffuse non seulement sur les particules virtuelles du vide — les fluctuations quantiques — mais également sur les particules réelles qui composent le bain. Ainsi, son potentiel reçoit des corrections dues aux fluctuations thermiques données par le second terme de (2.84) :

$$\begin{aligned} \Delta V_1^T(\phi, T) &= \sum_i \frac{n_i T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \log \left[1 \mp e^{(-\sqrt{k^2 + m_i^2(\phi)/T^2})} \right] \\ &\equiv \sum_{i=\text{bosons}} \frac{n_i T^4}{2\pi^2} J_b \left(\frac{m_i^2(\phi)}{T^2} \right) \\ &\quad + \sum_{i=\text{fermions}} \frac{n_i T^4}{2\pi^2} J_f \left(\frac{m_i^2(\phi)}{T^2} \right) \end{aligned} \quad (2.134)$$

où le signe $+$ ($-$) apparaît pour les fluctuations bosoniques (fermioniques). Ces corrections sont finies dans l'ultra-violet et l'infrarouge et les masses s'écrivent dorénavant en terme des paramètres physiques définis à $T = 0$. Dans un régime de haute température où celle-ci est beaucoup plus importante que la masse des fluctuations ($T \gg m_i(\phi)$), les fonctions J se développe comme :

$$J_b(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\pi^2}{12}x - \frac{\pi}{6}x^{3/2} - \frac{x^2}{32} \log \frac{x}{a_b} + \mathcal{O} \left(x^3 \log \frac{x^{3/2}}{\text{cst.}} \right) \quad (2.135)$$

$$J_f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{\pi^2}{24}x - \frac{x^2}{32} \log \frac{x}{a_f} + \mathcal{O} \left(x^3 \log \frac{x^{3/2}}{\text{cst.}} \right) \quad (2.136)$$

avec $\log a_b \simeq 5,4076$ et $\log a_f \simeq 2,6350$. On retrouve explicitement dans cette limite le comportement dicté par l'analyse dimensionnelle réalisée précédemment. Ainsi l'ordre dominant génère un terme de masse positif restaurant la symétrie à haute température et valant :

$$\Delta V_1^T(\phi, T) = \frac{1}{2}cT^2\phi^2 + \dots, \quad (2.137)$$

$$c = \frac{1}{16}(4m_h^2/v_0^2 + 3g^2 + g'^2 + 4y_t^2 - 12v_0^2/f^2). \quad (2.138)$$

Grojean et al. [38] montrèrent qu'en considérant simplement cette contribution à température finie, on pouvait obtenir un transition de phase fortement du premier ordre

tout en gardant un Higgs au dessus de la borne du LEP. On souhaite réaliser ici un calcul plus précis de ces corrections thermiques car on s'intéressera, lorsqu'on viendra à discuter la transition de phase, à des températures proches de la température critique $T_c \lesssim \mathcal{O}(100)$ GeV qui sont relativement du même ordre de grandeur que la masse des particules considérées, par exemple $m_t(\phi \sim v_0) \sim 170$ GeV.

On remarque également que seuls les bosons présents dans le bain thermique génèrent un terme d'interaction cubique linéaire en T , puisque seul J_b contient un terme négatif en $m(\phi)^3$ à haute température modifiant la barrière de potentiel. Cette distinction entre bosons et fermions n'est pas une simple coïncidence et a des implications profondes sur le calcul des corrections thermiques. On verra par la suite qu'elle prend son origine dans le fait que seuls les bosons ont un mode de Matsubara de fréquence nulle à température finie. La conséquence directe est que la présence de ce dernier rend le développement perturbatif invalide car il introduit de nouvelles divergences infrarouge dans la limite de haute température.

Théorie des perturbations et diagrammes « pâquerettes » Il est relativement bien connue qu'en théorie quantique des champs à température finie, le développement perturbatif usuel en puissance d'une faible constante de couplage n'est plus valide suite à la présence de divergence IR induite par des particules de masse nulle [69]. En effet, coupler le système à un bain thermique engendre des fluctuations à longue distance dont les effets dans l'infrarouge sont singuliers en présence de pôles en $p = 0$. On trouve une description détaillée de ce phénomène pour les théories de jauge à température finie dans l'ouvrage de M. Le Bellac : *Thermal Field Theory* et on se limite ici à une présentation rapide et intuitive de celui-ci. Prenons comme simple illustration l'exemple de la théorie $\lambda\phi^4$ sans masse et plongée dans un bain thermique. On montre dans ce cas que, par exemple, la self énergie, qui varie comme λ au premier ordre, reçoit une correction sous dominante $\lambda^{3/2}$ et non λ^2 comme on s'y attendrait naïvement si la théorie des perturbations était valide. Dans notre cas, on perçoit un signe de ce comportement dans l'approximation à haute température des corrections (2.135) à travers l'émergence d'un monôme d'ordre $3/2$. Le lien avec le cas $\lambda\phi^4$ précédent est clair puisqu'on peut toujours interpréter le développement à haute température $T \gg m(\phi)$ comme une limite de masse nulle et le contrôle du développement perturbatif est perdu dans l'infrarouge. La conséquence immédiate est que, telle qu'elle est, la contribution thermique à une boucle (2.133) ne rassemble pas complètement les corrections thermiques sous dominantes d'ordre $3/2$, affectant notamment le terme en $m(\phi)^3$ qui forme la barrière du potentiel. Il existe une série de diagrammes à multiple boucles contribuant avec le même poids et tout se passe comme si l'effet de la température était de « diluer » la correction à une boucle dans les ordres supérieurs, qu'il est nécessaire de resommer. Un point important à remarquer est que cette dilution, apparaissant seulement à température finie, ne se produit que dans l'infrarouge. En 1974, Dolan et Jackiw [30] montrèrent que ces termes d'ordre $3/2$ étaient dilués dans une classe particulière de diagrammes à N boucles, connus sous le nom de diagrammes pâquerettes ou en anneaux²⁰. Cette terminologie se comprend aisément en regardant la topologie formée par ces diagrammes, dont quelques exemples ont été reportés en figure 2.10. Ils correspondent à des diagrammes vide-vide à N boucles où $N - 1$ d'entre elles sont toute annexées à la principale. Par ailleurs, puisque cette dilution est un effet à température finie, il est

²⁰ ces dénominations sont les traductions directes des termes anglais *daisy* et *ring* utilisés dans la littérature.

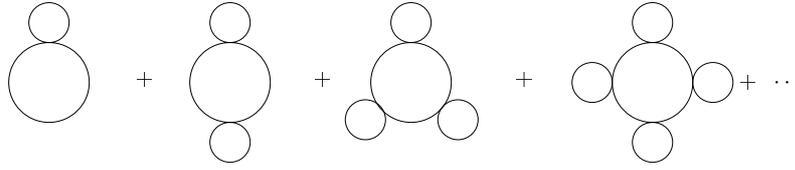


FIG. 2.10 – Quelques exemples génériques de diagrammes pâquerette. Chaque ligne peut représenter un propagateur d'un champ de type soit scalaire, fermionique ou vecteur. Les boucles externes correspondent à des boucles thermiques évaluées dans la limite IR. Bien que chacun de ces diagrammes soit divergent dans l'IR, leur somme est finie dans ce régime.

seulement nécessaire de les resommer dans la limite infrarouge pour laquelle l'impulsion circulant leurs pétales est nulle. Les auteurs de [30] et [17] établirent également que cette classe de diagrammes pouvait être prise en compte en utilisant des propagateurs resommés dans l'IR. C'est ce qu'illustre intuitivement la figure 2.11 où le propagateur resommé, lorsqu'employé pour évaluer le diagramme vide-vide à une boucle, donne immédiatement lieu aux diagrammes pâquerettes de la figure 2.10 une fois les deux extrémités du propagateur identifiées. La première ligne de la figure 2.11 est simplement une écriture diagrammatique d'une équation de Dyson qui peut être résolue à l'ordre d'une boucle dans la limite IR. Finalement cela résulte en une contribution thermique à la masse des fluctuations considérées et les diagrammes pâquerettes sont automatiquement pris en compte en faisant le remplacement $m^2(\phi) \rightarrow m^2(\phi) + \Pi(T)$ dans la correction $\Delta V_1^T(\phi, T)$, où $\Pi(T)$ est la self énergie à une boucle dans la limite infrarouge, également appelée masse de Debye. Il se trouve enfin que seuls les propagateurs bosoniques ont besoin d'être resommés, comme peut le laisser penser le fait que seul J_b développe un terme d'ordre 3/2 brisant le développement perturbatif à haute température. On insiste sur le fait que, dans le Modèle Standard, uniquement ce terme est responsable de l'existence d'une barrière de potentiel à une boucle, rendant la transition de phase du premier ordre et permettant ainsi la genèse de baryons. Il est alors crucial de resommer ces diagrammes car, étant du même ordre de grandeur, leurs contributions modifient sensiblement la force de la transition et ne peuvent donc être négligées. Cette conclusion doit en revanche être relativiser en présence d'un terme non renormalisable puisque dans ce cas la barrière est engendrée directement à l'arbre par l'intermédiaire d'un couplage quartique négatif. La correction standard à une boucle,

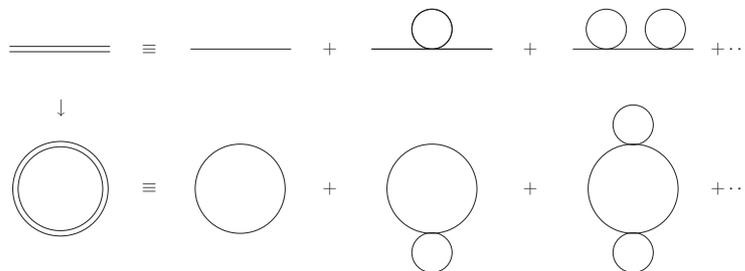


FIG. 2.11 – Illustration diagrammatique de la prise en compte des diagrammes pâquerettes au moyen d'un propagateur resommé à une boucle.

même resommée, ne constitue alors qu'une contribution sous-dominante mais non pour autant négligeable pour l'analyse que nous souhaitons mener.

Nous avons vu que la nécessité d'inclure les diagrammes pâquerette afin de correctement estimer le terme cubique du potentiel est due à des divergences IR à $T \neq 0$, apparaissant lorsque le spectre contient des champs de masse nulle. En outre, même lorsque $m \neq 0$, la condition précédente est néanmoins reproduite dans la limite où la masse devient négligeable devant la température $m \ll T$. Dans un tel régime la correction thermique naïve à une boucle est diluée. En revanche lorsque $m \gtrsim T$ le résultat à une boucle est suffisant car dans ce cas les fluctuations à longue distance apparaissant à température finie ne « frappent » jamais un pôle IR en $p = 0$. Il n'y a donc aucune divergence et le propagateur n'a pas besoin d'être resommé. En d'autres termes les diagrammes pâquerettes deviennent d'ordre supérieur et correspondent à une correction à deux boucles qui peut être négligée. Par conséquent, il est seulement nécessaire d'évaluer $\Pi(T)$ dans la limite de haute température ($T/m \rightarrow \infty$). On est également capable de comprendre maintenant pourquoi les propagateurs fermioniques ne nécessitent aucune resommation. La raison est que seuls les bosons contiennent un mode de Matsubara ω_n de fréquence nulle. On rappelle que pour les bosons $\omega_n = 2n\pi T$ alors que pour les fermions on a $\omega_n = (2n+1)\pi T$. En outre à température finie la masse de chaque mode de Matsubara, définie comme le pôle du propagateur, est donnée par :

$$m_n^2(\phi, T) \equiv m^2(\phi) + k_{0,E}^2 = m^2(\phi) + \omega_n^2. \quad (2.139)$$

Ainsi pour tout mode de fréquence non nulle, ω_n^2 agit comme un terme de masse d'ordre T^2 . A haute température on a alors $m_n \sim T$ et la limite de masse nulle nécessitant une resommation n'est jamais satisfaite. Seuls contribuent à l'apparition de divergences infrarouge à haute température les modes vérifiant $\omega_n = 0$, qui n'existent que pour les bosons avec $n = 0$. C'est également la raison pour laquelle seule la fonction J_b contient un monôme d'ordre $3/2$, qui est la trace d'une invalidité de la théorie des perturbations. En conclusion, les multiples complications surgissant à température finie n'ont pour source que le mode de Matsubara de fréquence nulle. Ce dernier constitue le pôle rencontré dans l'IR et conduit à la dilution de la correction à une boucle discutée ci-dessus.

Calcul des masses de Debye $\Pi(T)$ est la self énergie à une boucle évaluée dans la limite IR et à haute température. Précisons également une chose importante; en cas de brisure spontanée de symétrie, les self énergies doivent être calculées dans la phase symétrique. Cela résulte simplement du fait que $\Pi(T)$ est une resommation de la fonction 1-PI à deux points apparaissant dans le développement (2.71) du potentiel effectif. Dans la théorie $\lambda\phi^4$ la self énergie se réduit au diagramme de la figure 2.12 qu'on évalue à haute température :

$$\begin{aligned} \Pi(T) &= \frac{\lambda}{2} T \sum_n \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{\vec{q}^2 + \omega_n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{m^2(\phi)}{T^2}\right) \right] \\ &= \frac{\lambda}{24} T^2 \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{m^2(\phi)}{T^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.140)$$

Dans le Modèle Standard on doit calculer les self énergies des bosons de jauge et des scalaires de la même manière. Carrington [17] calcula les $\Pi(T)$ pour les bosons de

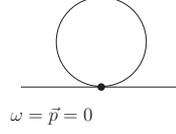


FIG. 2.12 – Diagramme 1-PI à une boucle contribuant à la self énergie dans la théorie $\lambda\phi^4$.

jauges dans la base des états propres d'interaction et montra également que seule la polarisation longitudinale — celle correspondant à la présence d'une masse $m(\phi) \neq 0$ — nécessite d'être resommée. A haute température le photon et le Z ne sont plus des états propres de masse, car la symétrie électrofaible est restaurée dans ce régime. En revanche on peut toujours se placer dans cette base pour évaluer les self énergies pour les polarisations longitudinales. Ainsi le résultat de [17] devient²¹ :

$$\Pi_W(T) = \frac{22}{3} \frac{m_W^2}{v_0^2} T^2 \quad (2.141)$$

$$\Pi_Z(T) = \frac{22}{3} \frac{(m_Z^2 - m_W^2)}{v_0^2} T^2 - m_W^2(\phi) \quad (2.142)$$

$$\Pi_\gamma(T) = m_W^2(\phi) + \frac{22}{3} \frac{m_W^2}{v_0^2} T^2. \quad (2.143)$$

Le fait que le photon devienne massif en recevant une self énergie non nulle à $p = 0$ n'a rien d'anormal car $\Pi(T)$ est calculé dans la limite de haute température pour laquelle il ne constitue plus un état propre de masse. Reste ensuite à estimer les self énergies scalaires, qui sont les seules à dévier du Modèle Standard suite à la présence d'une interaction de dimension six dans le potentiel classique du Higgs. Elles sont données par les mêmes diagrammes présentés en [17] dont le résultat diffère simplement par le fait que le couplage quartique λ du potentiel à l'arbre (2.77) s'écrit après la brisure de symétrie comme :

$$\lambda = \frac{m_h^2}{2v_0^2} - \frac{3v_0^2}{2f^2}, \quad (2.144)$$

où m_h et f sont les observables physiques définies à $T = 0$. Ainsi les masses de Debye scalaires du Modèle Standard sont remplacées par :

$$\Pi_{h,\chi}(T) = \frac{T^2}{4v_0^2} (m_h^2 + 2m_W^2 + m_Z^2 + 2m_t^2) - \frac{3T^2}{4} \frac{v_0^2}{f^2}, \quad (2.145)$$

où $\Pi_h = \Pi_{\chi_i}$ reflète simplement la symétrie $O(4)$ du potentiel classique dans la phase symétrique dans laquelle les self énergies sont calculées.

Comment incorporer les resommations ? Nous avons montré que les diagrammes pâquerettes pouvaient être pris en compte simplement en ajoutant les corrections de Debye à haute température aux masses des fluctuations. La méthode traditionnelle employée dans la littérature consiste à faire le remplacement $m^2(\phi) = m^2(\phi) + \Pi(T)$ pour

²¹Dans le papier de Carrington $\Pi(T)$ est noté $\Pi(0)$ où le zéro correspond à la limite IR prise dans le calcul des self énergies.

tous les modes de Matsubara. C'est la méthode auto-cohérente utilisée par exemple par [7] où la correction à une boucle (2.80) est remplacée par :

$$\Delta V_{1+ring}^{self-con.}(\phi, T) = \sum_i \frac{n_i T}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \log \left[\vec{k}^2 + \omega_n^2 + m_i^2(\phi) + \Pi_i(T) \right]. \quad (2.146)$$

La masse thermique pour les bosons de jauge n'a été ajoutée que les polarisations longitudinales et la somme sur les champs inclue dorénavant le photon à haute température. Pour le quark top dont le propagateur ne requiert pas de resommation dans l'IR, on prend simplement $\Pi_t(T) = 0$. Cependant, lorsque l'on choisit cette approche on remarque que la partie divergente ultra-violette dépend à présent de la température par l'intermédiaire de $\Pi(T)$ et requiert donc l'introduction de contre-termes UV dépendant également de la température pour rendre la théorie quantique finie. En effet, après avoir séparé (2.146) en sommant sur les modes de Matsubara comme nous avons fait pour obtenir (2.84), le terme divergent dans l'UV après régularisation dimensionnelle prend la forme :

$$\begin{aligned} \Delta V_{1+ring}^{0,self-con.} &= \sum_i n_i \frac{(m_i^2(\phi) + \Pi_i(T))^2}{64\pi^2} \left[\log \frac{m_i^2(\phi) + \Pi_i(T)}{\mu^2} \right. \\ &\quad \left. - C_i - C_{UV} \right] \end{aligned} \quad (2.147)$$

où le facteur multipliant C_{UV} est maintenant fonction de la température. Cette technique standard est alors en désaccord total avec l'intuition élémentaire qui conduit à penser que le comportement UV d'une théorie ne doit en rien être affecté par sa dynamique à température finie, c'est à dire dans l'IR. Bien que cette étrange intrication UV/IR n'introduit aucune erreur de calcul en première approximation, on peut néanmoins l'éviter en ajoutant la masse de Debye uniquement pour les modes Matsubara $\omega_n = 0$. Puisqu'après tout ce sont seulement ces modes de masse nulle qui induisent les divergences IR nécessitant la resommation des diagrammes pâquerettes à une boucle. Ainsi les corrections d'ordre supérieur recherchées sont entièrement récoltées en resommant seulement les modes zéros de Matsubara dans l'infrarouge. Suivant cette approche, (2.146) est alors remplacé par :

$$\begin{aligned} \Delta V_{1+ring}(\phi, T) &= \sum_i \frac{n_i T}{2} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \log \left[\vec{k}^2 + \omega_n^2 + m_i^2(\phi) \right] \right. \\ &\quad \left. + \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \log \left[\vec{k}^2 + m_i^2(\phi) + \Pi_i(T) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.148)$$

$$\equiv \Delta V_1(\phi, T) + \Delta V_{ring}(\phi, T) \quad (2.149)$$

où la somme exclue les modes zéros, lesquels se retrouvent écrits sur la seconde ligne de l'expression ci-dessus. On peut facilement en extraire la partie correspondant aux diagrammes d'ordres supérieurs que l'on trouve égale à :

$$\begin{aligned} \Delta V_{ring}(\phi, T) &= \sum_i \frac{\bar{n}_i T}{4\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \log \left[1 + \frac{\Pi_i(T)}{k^2 + m_i^2(\phi)} \right] \\ &= \sum_i \frac{\bar{n}_i T}{12\pi} \left[m_i^3(\phi) - (m_i^2(\phi) + \Pi_i(T))^{3/2} \right], \end{aligned} \quad (2.150)$$

modulo une constante infinie affectant l'énergie du vide qui a été négligée, étant indépendante de la valeur de fond ϕ . En outre, on a $\bar{n}_{\{h,\chi,W,Z,\gamma,t\}} = \{1, 3, 2, 1, 1, 0\}$, explicitant l'absence de resommation à la fois pour les fermions et les composantes transverses des bosons de jauge. On remarque également explicitement que ΔV_{ring} inclut un monôme d'ordre $3/2$, démontrant a posteriori l'invalidité du développement perturbatif avancée plus haut.

Finalement la correction thermique complète au potentiel effectif du Higgs à une boucle s'écrit²² :

$$\begin{aligned}
V_{eff}(\phi) &= \frac{m_*^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda_*}{4}\phi^4 + \frac{\kappa_*}{8}\phi^6 \\
&+ \sum_{i=h,\chi,W,Z,t} n_i \frac{m_i^4(\phi)}{64\pi^2} \left[\log \frac{m_i^2(\phi)}{\mu_*^2} - C_i \right] \\
&+ \sum_{i=\text{bosons}} \frac{n_i T^4}{2\pi^2} J_b \left(\frac{m_i^2(\phi)}{T^2} \right) + \sum_{i=\text{fermions}} \frac{n_i T^4}{2\pi^2} J_f \left(\frac{m_i^2(\phi)}{T^2} \right) \\
&+ \sum_{i=h,\chi,W,Z,\gamma} \frac{\bar{n}_i T}{12\pi} \left[m_i^3(\phi) - (m_i^2(\phi) + \Pi_i(T))^{3/2} \right]. \quad (2.151)
\end{aligned}$$

Insistons enfin sur le fait que cette dernière contient l'ensemble des contributions à une boucle à la barrière de potentiel contrôlant la force de la transition de phase. On reporte sur la figure 2.13 un tracé du potentiel V_{eff} autour de la température critique, mettant notamment en évidence la nécessité de considérer la forme intégrale de ΔV_1^T plutôt que son développement à haute température. Avant d'aborder la dynamique de la transitions de phase, nous nous penchons un moment sur la partie imaginaire du potentiel effectif, en discutons son interprétation physique et, enfin, montrons que celle-ci n'est négligeable que lorsque les resommations des ordres supérieurs sont effectuées.

2.2.2.3 Réalité du potentiel quantique

Lorsque les masses carrées des scalaires deviennent négatives, les diverses contributions au potentiel quantique que nous avons calculées développent des parties imaginaires. Elles traduisent l'instabilité de la théorie développée autour de certaines valeurs de ϕ . Weinberg et al. démontrèrent que la partie imaginaire du potentiel pouvait s'interpréter comme l'inverse du temps de vie de certaines configurations du champ [70] :

$$e^{iV(\phi)} = e^{i\Re V(\phi)} \times e^{-\Im V(\phi)}, \quad (2.152)$$

où $\Im V(\phi) \equiv \Gamma/V$ a la dimension d'une largeur de désintégration par unité de volume. On peut alors se poser la question suivante : qu'est-ce qui se désintègre et en quoi au bout d'un temps moyen Γ^{-1} ? Dans la théorie $\lambda\phi^4$ Weinberg et al. montrèrent que la partie imaginaire traduit, après intégration des fluctuations quantiques, la possibilité qu'ont certaines d'entre elles de se désintégrer en d'autres modes d'impulsions différentes, suite à l'auto-interaction du champ. On peut sans doute intuitiver ce résultat en considérant la situation analogue suivante en physique du solide. Supposons une onde plane électromagnétique d'impulsion k en incidence sur un cristal quelconque

²²L'expression pour le schéma sur couche de masse s'obtient en remplaçant la première ligne par (2.125)

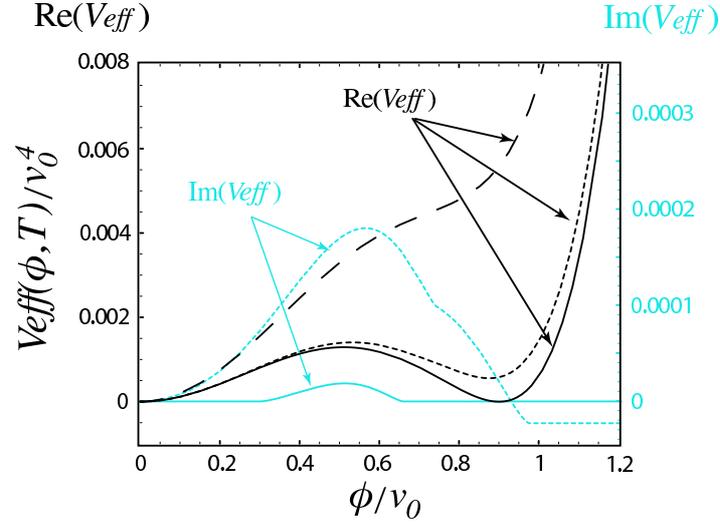


FIG. 2.13 – Tracés de potentiels effectifs à une boucle autour de la température critique pour $m_h = 115$ GeV et $f = 620$ GeV, obtenus dans différentes approximations comparées au résultat exact discuté dans le texte. En noir sont représentées les parties réelles de ces potentiels. La courbe en tiret est le potentiel (2.137) utilisé par les auteurs de [38] et où seule la masse thermique du Higgs a été prise en compte, alors que les courbes pleine et pointillée représentent le potentiel complet à une boucle (2.151) avec (pleine) et sans resommations (pointillée). En bleu sont également tracées les parties imaginaires, où la courbe pleine est pour le potentiel complet à une boucle (avec resommation). Quant à la courbe pointillée, elle représente la partie imaginaire des diagrammes pâquerettes seulement. Ceci illustre l’annulation entre les importantes parties imaginaires issues de ΔV_1^T et ΔV_{ring} .

d’indice optique $n_0(k)$ réel. En présence de vibrations, et après intégration de celles-ci, l’indice effectif du cristal vu par la lumière s’écrit comme : $n_0(k) \rightarrow n_{eff}(k) = \Re n_{eff}(k) + \Im n_{eff}(k)$ où la partie imaginaire caractérise l’absorption de la lumière par les phonons du cristal. Mais cette absorption est simplement le résultat effectif de la diffusion *inélastique* de l’onde plane incidente sur un phonon du cristal d’impulsion $\delta k \neq 0$, de sorte que l’onde plane initiale est réémise avec une impulsion $k + \delta k$. Ainsi on peut interpréter la partie imaginaire de l’indice optique effectif comme la « désintégration » d’un mode électromagnétique en un autre suite à l’interaction photon/phonon. Pour la valeur dans le vide du Higgs, la partie imaginaire du potentiel effectif peut par analogie être vue comme la désintégration d’une fluctuation du champ de Higgs en d’autres particules rendue possible par les couplages du Modèle Standard. En pratique, tout comme on peut négliger l’absorption de la lumière lorsque celle-ci est faible, l’évolution de ϕ peut être décrite par la partie réelle du potentiel quantique V_{eff} tant que sa partie imaginaire est relativement faible devant celle-ci. Dans le cas contraire, paramétrer la transition de phase au moyen de $V_{eff}(\phi)$ n’est simplement plus valable puisque son calcul repose sur l’intégration de fluctuations quantiques stables en première approximation. Nous allons tout d’abord détailler les différentes parties imaginaires développées à $T = 0$ et à température finie. On montrera enfin que la condition de stabilité requise plus haut n’est sensiblement satisfaite qu’une fois les diagrammes

pâquerettes inclus dans le calcul de V_{eff} .

Partie imaginaire à $T = 0$ A température nulle, le logarithme de la correction à une boucle () conduit, et ce quelque soit le schéma de renormalisation, à la partie imaginaire²³ suivante :

$$\Im m [\Delta V_1^0(\phi)] = \sum_{i=h,\chi} \Theta(-m_i^2(\phi)) \frac{n_i |m_i(\phi)|^4}{64\pi} \quad (2.153)$$

où $\Theta(-m_i^2(\phi))$ est la fonction de Heaviside valant 1 lorsque le champ i est tachyonique et 0 sinon. En particulier le boson de Higgs peut avoir une masse carrée négative lorsque sa valeur dans le vide ϕ se trouve dans une région où le potentiel n'est pas convexe. En effet, selon la valeur de la constante de désintégration f , soit l'origine est instable ($f^2 > 3v_0^4/2m_h^2$), soit une barrière de potentiel sépare deux minima locaux ($f^2 < 3v_0^4/2m_h^2$). Les bosons de Goldstone sont également tachyoniques pour certaines valeurs de ϕ et participent donc à la partie imaginaire (2.153). Nous allons maintenant montrer que cette dernière est compensée par une autre contribution provenant des corrections thermiques.

Contribution à $T \neq 0$ et resommations Les corrections à une boucle (2.133) et les diagrammes à boucles multiples resommés en (2.150) présentent tous deux des parties imaginaires lorsque les scalaires sont tachyoniques. Dans la limite de haute température la contribution de (2.133) à la partie imaginaire est facilement dérivable à partir du développement (2.135) :

$$\Im m [\Delta V_1^T(\phi, T)] \xrightarrow{\frac{|m_i(\phi)|}{T} \rightarrow 0} \sum_{i=h,\chi} \Theta(-m_i^2(\phi)) n_i \left[-\frac{|m_i(\phi)|^4}{64\pi} + \frac{|m_i(\phi)|^3 T}{12\pi} \right]. \quad (2.154)$$

Le premier terme élimine ainsi la partie imaginaire issue du logarithme à $T = 0$ (2.153), alors que le second n'est seulement compensé qu'une fois les diagrammes pâquerettes pris en compte, puisqu'ils génèrent une partie imaginaire donnée par :

$$\Im m [\Delta V_{ring}(\phi, T)] = - \sum_{i=h,\chi} \Theta(-m_i^2(\phi)) \frac{n_i T}{12\pi} |m_i(\phi)|^3 \quad (2.155)$$

pour toute température satisfaisant $m_i^2(\phi) + \Pi_i(T) > 0$ quelque soit ϕ . De plus il est possible de prouver explicitement que cette annulation des parties imaginaires, bien connue dans la limite de haute température, se produit tout aussi exactement pour des températures beaucoup plus basses $T \sim |m_i(\phi)|$, notamment proches de la température critique. En effet, on peut extraire sans trop de difficultés la partie imaginaire de ΔV_1^T directement depuis la forme intégrale (2.133) et on obtient :

$$\begin{aligned} \Im m [\Delta V_1^T(\phi, T)] &= \sum_{i=h,\chi} \Theta(-m_i^2(\phi)) \frac{n_i T^4}{4\pi^2} \\ &\times \int_0^{\frac{|m_i(\phi)|}{T}} dx x^2 \left((4n+1)\pi - \sqrt{\frac{|m_i(\phi)|^2}{T^2} - x^2} \right) \end{aligned} \quad (2.156)$$

²³On utilise la partie imaginaire du logarithme définie dans le feuillet principal du plan complexe, vérifiant $-\pi < \Im m \log \leq \pi$.

où n est un entier positif assurant que

$$-\pi < \frac{1}{2} \left(\pi - \sqrt{\frac{|m_i^2(\phi)|}{T^2} - x^2} \right) + 2n\pi \leq \pi, \quad (2.157)$$

c'est à dire que l'on reste toujours dans le feuillet principal en prenant la partie imaginaire du logarithme, dont la coupure a été choisie sur le demi axe des réels négatifs du plan complexe. On peut en outre facilement montrer à partir de l'encadrement précédent que $n = 0$ pour $T > T_\pi \equiv |m_i(\phi)|/3\pi$, et dans ce régime de température la partie imaginaire précédente devient alors :

$$\begin{aligned} \Im m [\Delta V_1^T(\phi, T)] &= \sum_{i=h,\chi} \Theta(-m_i^2(\phi)) \frac{n_i T^4}{4\pi^2} \\ &\times \int_0^{\frac{|m_i(\phi)|}{T}} dx x^2 \left(\pi - \sqrt{\frac{|m_i(\phi)|^2}{T^2} - x^2} \right), \\ &= \sum_{i=h,\chi} \Theta(-m_i^2(\phi)) n_i \left[-\frac{|m_i(\phi)|^4}{64\pi} + \frac{|m_i(\phi)|^3 T}{12\pi} \right]. \end{aligned} \quad (2.158)$$

On obtient ainsi la même annulation entre les diverses parties imaginaires que celle discutée ci-dessus à haute température, et ce pour des températures aussi basses que $T_\pi \sim |m_i(\phi)| \sim 100$ GeV. Par souci de complétude, on considère enfin le cas des très basses température. Dès que la température est inférieure à T_π , l'encadrement (2.157) nous indique qu'il devient nécessaire d'ajouter des multiples de 2π à la partie imaginaire du logarithme de manière à rester dans le feuillet principal. Ainsi, mettre (2.157) sous la forme :

$$-2\pi < (4n+1)\pi - \sqrt{\frac{|m_i(\phi)|^2}{T^2} - x^2} \leq 2\pi, \quad (2.159)$$

permet d'écrire dans la limite $n \rightarrow \infty$:

$$|\Im m [\Delta V_1^T(\phi, T)]| \leq \left| \sum_{i=h,\chi} \Theta(-m_i^2(\phi)) n_i \frac{|m_i(\phi)|^3 T}{6\pi} \right| \quad (2.160)$$

d'où l'on conclut que $\Im m [\Delta V_1^T(\phi, T)]$ s'annule nécessairement lorsque T tend vers zéro, comme il se doit.

Malgré les multiples compensations évoquées jusqu'à présent, le potentiel n'est pas réel partout car il existe une gamme de température et de ϕ pour lesquels on a $m_i^2(\phi) + \Pi_i(T) < 0$. En pareil cas, le second terme de (2.150) développe à son tour une partie imaginaire, que rien ne vient éliminer. Dans le Modèle Standard ce terme est automatiquement réel lorsque la température est suffisante pour métastabiliser l'origine du potentiel, car les scalaires ne deviennent tachyoniques que pour une masse carrée négative, laquelle contrôle la forme du potentiel autour de l'origine. Ainsi, le potentiel standard est réel tout le long de la transition de phase. En revanche avec un terme effectif de dimension six dans le potentiel, les masses scalaires peuvent également être négatives pour un couplage quartique négatif et par conséquent il demeure une partie imaginaire autour de la température de transition. Nous avons néanmoins vérifiée que cette dernière était toujours suffisamment faible en regard de la partie réelle

pour des températures pertinentes pour la transition de phase. C'est essentiellement dû aux diverses annulations entre les contributions à $T = 0$ et $T \neq 0$, rendues possibles une fois les resommations effectuées dans l'infrarouge. L'exemple de la figure 2.13 illustre également cette nette suppression. Ceci conforte la validité de la partie réelle du potentiel, que nous avons calculé précédemment, pour l'étude de la dynamique la transition de phase.

2.3 Dynamique de la transition de phase et ondes gravitationnelles

Nous pouvons maintenant utiliser le potentiel à température finie en présence d'une interaction non renormalisable pour étudier en détail la dynamique effective de la transition de phase électrofaible au delà du Modèle Standard. Non seulement notre analyse confirme le résultat de [38] mais elle la complète de diverses façons. Nous décrirons tout d'abord le rôle important joué par la surfusion dans le renforcement de la transition de phase. Puis nous en détaillerons les conséquences en faveur d'une éventuelle observation d'ondes gravitationnelles primordiales, véritables empreintes de la physique du Higgs dans le ciel.

Nous présenterons nos résultats dans l'espace des paramètres libres de la théorie. Ainsi, dans le plan (m_h, f) , où m_h est la masse physique du Higgs et f la constante du secteur fort à boucle, nous identifions numériquement une région où la transition est du premier ordre. Nous définissons tout d'abord une limite inférieure $f_{min}(m_h)$ en demandant à ce que la symétrie électrofaible soit brisée à $T = 0$ et restaurée à haute température²⁴. On obtient également une borne supérieure $f_{max}(m_h)$ au dessus de laquelle la transition est très probablement soit du second ordre, soit remplacée par une évolution continue semblable au Modèle Standard. En général, déterminer cette dernière n'est pas une tâche aisée car elle requiert un traitement non perturbatif du potentiel effectif non renormalisable lorsque la transition n'est que faiblement du premier ordre [43]. En effet, perturbativement, la transition de phase apparaît toujours du premier ordre, même si très faiblement. Néanmoins, nous savons que pour des valeurs de f relativement grandes, le potentiel est dominé par la partie renormalisable et la transition reprend sa dynamique standard, qui n'est qu'un simple « crossover » pour $m_h \gtrsim 80$ GeV. Nous estimons alors $f_{max}(m_h)$ en considérant que lorsque la transition est aussi faible que dans le Modèle Standard pour $m_h = 80$ GeV, elle n'est plus du premier ordre non perturbativement. Pour de faibles valeurs de f , la transition est fortement du premier ordre au niveau des arbres. Il est alors fort probable que les corrections quantiques, même larges, ne détruisent pas la barrière de potentiel et que la théorie reste perturbative à température finie, pareillement au cas du Modèle Standard pour un Higgs léger.

2.3.1 Surfusion et renforcement de la transition

Les transitions de phase du premier ordre se réalisent donc par la nucléation, dans un environnement métastable, de bulles de phase stable. Le vide brisé devient énergétiquement favorable lorsque l'univers refroidit jusqu'à la température critique T_c . Des bulles commencent alors à apparaître sous l'impulsion des fluctuations quantiques et

²⁴Pour cela on impose que la correction thermique au terme de masse du potentiel soit positive dans la limite de haute température.

thermiques pénétrant la barrière de potentiel. La taille des bulles à la nucléation est directement déterminée par l'énergie libre disponible et exploitable par ces fluctuations. Par conséquent, la transition n'est pas amorcée exactement à T_c car le Higgs n'a pas d'énergie libre à cette température $V(0) - V(\phi(T_c)) = 0$. A quelle température démarre alors la nucléation ? Une bulle est une configuration instable dont le devenir est déterminé par une compétition entre sa surface, dont la tension tend à la réduire et la faire disparaître, et son volume, qui renferme une phase énergétiquement plus favorable. La bulle gagne ainsi de l'énergie en développant une région de phase brisée mais doit, pour cela, payer le prix de l'interface la maintenant isolée de la phase symétrique. Pour $T \lesssim T_c$, l'énergie libérée est faible et les bulles sont de petite taille. La tension de surface domine alors énergétiquement la dynamique des bulles, les faisant disparaître presque aussitôt après qu'elles se sont formées. Lorsque la température diminue, l'énergie libre augmente et les bulles sont plus grosses. A partir d'une taille critique, cette énergie est suffisante pour vaincre la tension de surface et les bulles croissent jusqu'à ce qu'elles entrent en collision les unes avec les autres, puis percolent achevant ainsi la conversion de l'univers dans la phase brisée. La température pour laquelle le volume l'emporte sur la surface est la température de nucléation T_n . Son éloignement avec la température critique fixe l'ampleur de ce phénomène de surfusion qui a pour effet de retarder la transition de phase.

2.3.1.1 Calcul de la température de nucléation

Solution de bounce Une bulle est une configuration classique du champ ϕ en espace-temps euclidien qui interpole entre le minimum global $\phi_t \neq 0$ correspondant à la phase brisée et un minimum symétrique métastable situé en $\phi_f = 0$. Dans une approche semi-classique, la probabilité par unité de volume et de temps Γ de former une bulle est déterminée par l'intégrale de chemin évaluée sur la configuration de la bulle ϕ_b :

$$\Gamma \simeq A e^{-S_E^b[\phi_b]} \quad (2.161)$$

où le coefficient A est le déterminant fonctionnel des fluctuations quantiques autour de ϕ_b . Étant instable, la bulle constitue une solution en point de selle de l'action euclidienne scalaire :

$$S_E^b = \int_{-1/2T}^{1/2T} dt_E \int d^3x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + V(\phi, T) \right], \quad (2.162)$$

où nous utilisons pour $V(\phi, T)$ le potentiel effectif à une boucle (2.151) calculé dans le schéma \overline{MS} . A température nulle, la configuration ϕ_b décrivant la bulle est appelée un « bounce » car elle correspond à un rebond en temps euclidien entre les deux minima. En effet, Coleman [25, 14] montra que l'action S_E^b représente alors le mouvement d'une « particule » classique, de position ϕ , partant de ϕ_f en $t_E = -\infty$ pour se rendre en ϕ_t à $t_E = 0$ et revenir en ϕ_f à $t_E = +\infty$. Les rebond impose notamment que sa vitesse $\partial\phi$ soit nulle en $t_E = 0$. Le bounce est alors l'analogie scalaire des instantons de la théorie de Yang-Mills. L'action euclidienne est minimale lorsque le bounce est $O(4)$ -symétrique. Il prend alors la forme d'une 3-sphère de rayon $\rho = \sqrt{r^2 + t_E^2}$ résolvant l'équation du mouvement :

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right] \phi(\rho) - \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad (2.163)$$

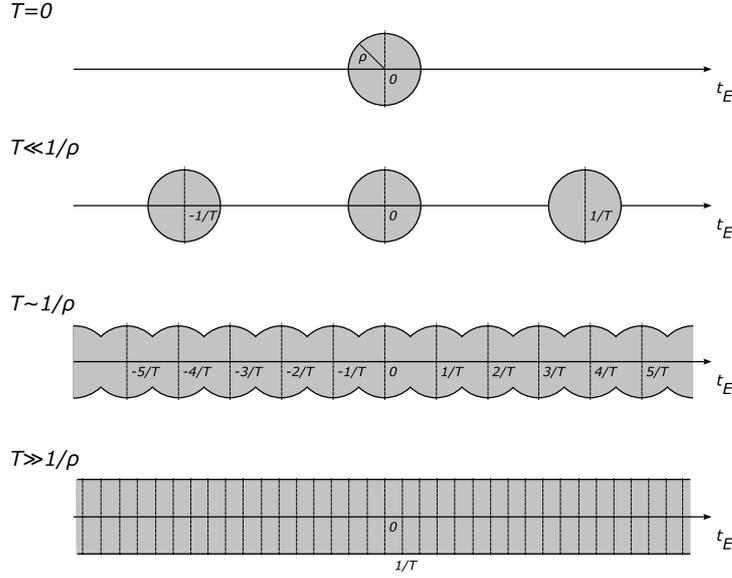


FIG. 2.14 – Recouvrement du bounce en temps imaginaire périodique. A haute température cette configuration devient indépendante du temps.

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\phi(\rho \rightarrow \infty) = \phi_f = 0, \quad \phi'(\rho = 0) = 0. \quad (2.164)$$

Elles sont la généralisation invariante de Lorentz des conditions de rebond évoquées ci-dessus. Pour $T > 0$, le temps euclidien est compactifié $t_E \sim 1/T$. Ainsi, lorsque le rayon de la bulle devient du même ordre de grandeur que l'inverse de la température, le bounce subit un recouvrement en temps euclidien et Linde [52, 53] montra qu'à haute température ϕ_b est constant en temps imaginaire, comme illustré figure 2.14, et ne rebondit plus. Dans ce cas l'action S_E^b se factorise comme :

$$S_E^b = \frac{1}{T} \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\vec{\nabla}\phi)^2 + V(\phi, T) \right] \equiv \frac{S_3^b}{T}, \quad (2.165)$$

et S_3^b représente l'énergie emmagasinée dans la bulle. Le terme cinétique est l'énergie de courbure contenue dans le mur alors que le potentiel traduit le gain énergétique acquis en volume par la bulle. A haute température le bounce²⁵ devient alors une solution $O(3)$ -symétrique extrémisant son énergie :

$$S_3^b = \int_0^\infty dr \, 4\pi r^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 + V(\phi, T) \right] \quad (2.166)$$

et résolvant :

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right] \phi(r) - \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad (2.167)$$

avec les conditions aux limites :

$$\phi(r \rightarrow \infty) = \phi_f = 0, \quad \phi'(r = 0) = 0. \quad (2.168)$$

²⁵Dans ce cas, la configuration est statique et il ne s'agit plus d'un rebond. Le terme de bounce est alors inapproprié et il faudrait en toute rigueur parler de bulle critique.

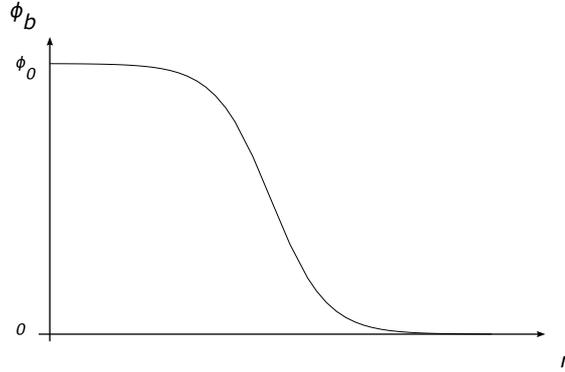


FIG. 2.15 – Configuration du bounce représentant le profil de la VEV pour une bulle nucléée à haute température en $r = 0$.

Ces deux conditions sont la limite à haute température de celles caractérisant le bounce à $T = 0$ obtenues en posant $t_E = 0$. C'est cette seconde solution, dont la forme typique est représentée figure 2.15, que nous utiliserons pour étudier la nucléation de bulle. Nous verrons néanmoins que lorsque la surfusion est très importante et la transition de phase sensiblement retardée, la température devient alors du même ordre que l'inverse du rayon de la bulle. Dans ce cas la solution $O(4)$ a la moindre action et sera alors prise en compte pour l'étude de la nucléation.

Résolution numérique du bounce L'équation (2.167) n'est pas aisée à résoudre car elle est singulière à l'origine et les conditions (2.168) sont imposées en des bords distincts. En particulier, la position initiale $\phi_b(r = 0) \equiv \phi_0$ est inconnue. La résolution numérique est alors inévitable même pour les potentiels les plus simples²⁶. On reporte brièvement ici la méthode que nous avons implémentée pour évaluer numériquement le bounce $\phi_b(r)$ pour un potentiel quelconque. Nous procédons en deux étapes. Tout d'abord nous calculons une solution régulière autour de l'origine que l'on utilise pour reporter la seconde condition de (2.168) proche de la singularité en $r = \epsilon$. Nous utilisons ensuite une méthode d'essai/erreur pour déterminer la position ϕ_0 . La condition en $r = 0$ est cruciale pour établir la forme de la solution autour de l'origine. En effet, la dérivée nulle du champ en ce point autorise une solution régulière dans son voisinage. En développant le bounce comme $\phi_b(r) = \phi_0 + \delta\phi_b(r)$ avec $\delta\phi_b(r = 0) = 0$, $\delta\phi_b$ est alors solution de :

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - V_0'' \right] \delta\phi_b - V_0' + \mathcal{O}(\delta\phi_b^2) = 0, \quad (2.169)$$

²⁶ Lorsque les deux minima du potentiel sont pratiquement dégénérés, il est possible d'utiliser une approximation de mur fin pour estimer l'action sur le bounce [25]. Également, pour une très forte transition, une approximation de mur épais devient valable. Dans les deux cas, la résolution numérique du bounce n'est pas nécessaire, simplifiant grandement l'étude de la transition. Néanmoins, pour la majeure partie de l'espace des paramètres, aucune des deux approximations ne sera valide.

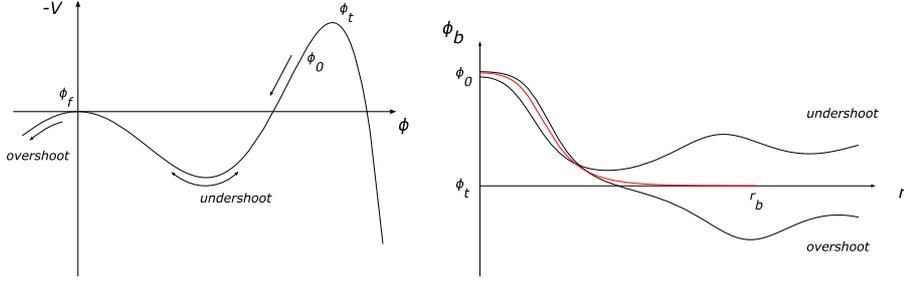


FIG. 2.16 – Mouvement d’une particule classique dans un potentiel $-V$. ϕ représente sa position et r paramètre le temps dans cette analogie. A droite sont représentées des solutions typiques de l’équation du mouvement. Lorsque ϕ_0 est trop faible, la particule n’atteint le sommet de la bosse à l’origine, retombe et oscille dans le puits. La solution est « undershooté ». A contrario, quand ϕ_0 est très proche de ϕ_t , la particule a trop d’énergie potentielle. Elle finit par franchir la bosse et oscille dans le symétrique du puits pour des valeurs négatives de ϕ . La solution est alors « overshooté ». Une solution optimale, représentée en rouge, est obtenu lorsque la particule approche asymptotiquement le sommet de la bosse et réalise le bounce.

où $V'_0 \equiv \partial V(\phi = \phi_0, T)/\partial \phi$, etc. Ainsi autour de l’origine on a :

$$\phi_b(r) = \phi_0 + \frac{V'_0}{V''_0} \left(\frac{\sinh(\sqrt{V''_0} r)}{\sqrt{V''_0} r} - 1 \right) \simeq \phi_0 + \frac{V'_0}{6} r^2 + \mathcal{O}(r^4). \quad (2.170)$$

On peut alors utiliser cette solution pour réécrire les conditions aux limites en un point régulier $r = \epsilon$ non loin de l’origine :

$$\phi_b(\epsilon) = \phi_0 + \frac{V'_0}{6} \epsilon^2, \quad \phi'_b(\epsilon) = \frac{V'_0}{3} \epsilon \quad (2.171)$$

et ainsi résoudre l’équation du bounce dans la région régulière $[\epsilon, +\infty[$. On emploie numériquement pour cela une méthode de tir qui recherche de manière récursive la valeur optimale ϕ_0 . La technique est relativement simple, elle consiste à choisir une valeur initiale pour le *paramètre de tir* ϕ_0 entre ϕ_f et ϕ_t , à résoudre l’équation du bounce à partir des conditions (2.171) et, enfin, à ajuster ϕ_0 jusqu’à ce que la solution se rapproche asymptotiquement de ϕ_f en l’infini. Dans la pratique, $[\epsilon, +\infty[$ est remplacé par un intervalle fini $[r_m, r_M]$ vérifiant $r_m \ll r_c$ et $r_M \gg r_c$ où r_c est une longueur caractéristique du bounce. Nous choisissons de définir r_c comme étant la distance à partir de laquelle l’approximation (2.169) n’est plus valable, les non linéarités devenant comparable au terme linéaire : $V''_0 \delta \phi_b(r_c) \sim \frac{1}{2} V'''_0 \delta \phi_b(r_c)^2$. En utilisant $\delta \phi_b(r) \simeq V'_0 r^2/6$ on obtient facilement :

$$r_c = \frac{2\sqrt{3V''_0}}{\sqrt{V'_0 V'''_0}}. \quad (2.172)$$

En outre, on évalue numériquement l’énergie S_3^b en intégrant sur l’intervalle $[r_m, r_b]$ où r_b est la distance où le bounce est le plus proche de ϕ_f . Cette troncature constitue une bonne approximation de S_3^b car l’intégrand est pratiquement nul pour $r > r_b$. En effet la variation de ϕ_b est négligeable loin du mur de la bulle et le potentiel s’annule à ϕ_f . Enfin, la même méthode de résolution peut être employée à basse température lorsque le bounce est $O(4)$ -symétrique.

Critère de nucléation Nous avons vu que T_n est déterminée par l'évolution en température de l'énergie des bulles S_3^b . Proche de la température critique, le taux de nucléation de bulle est donnée par :

$$\Gamma \simeq A(T)e^{-S_3^b(T)/T} \quad (2.173)$$

où le déterminant vaut à température finie $A(T) \simeq \eta T^4$ par simple analyse dimensionnelle. Les fluctuations étant nettement sous-dominantes devant la poids de Boltzmann classique, une valeur exacte de η n'est pas nécessaire et on prendra dans la suite $\eta \sim 1$. La croissance de bulles critiques dépend de leur taille à l'instant de la nucléation. En outre, l'énergie S_3^b est une fonction rapidement variable de T autour de la température critique. Par conséquent, la bulle n'est pas insensible à l'expansion de l'univers, induisant un faible changement de température pendant la transition. L'expansion dilatant les volumes, elle finit par favoriser la nucléation de bulle de taille critique pouvant croître et convertir l'univers dans la phase brisée. On considère alors que la nucléation s'amorce dès que la probabilité de former au moins une bulle critique dans un volume d'horizon devient importante [5] :

$$P = \int_{t_c}^{t_n} dt V_h \Gamma \sim \mathcal{O}(1), \quad (2.174)$$

où t_c est l'instant correspondant à la température critique, pour laquelle les bulles commencent à apparaître spontanément, et t_n est l'instant recherché du début de la nucléation. Le volume d'horizon V_h est un volume causal au delà duquel les corps sont séparés du centre d'un intervalle de genre espace : $V_h \sim d_h(t)^3$ avec $d_h(t) = a(t) \int^t dt' / a(t')$ la distance d'horizon à l'instant t . Cette condition garantit également la percolation des bulles. En effet, puisque la probabilité de nucléation dans un volume d'horizon est importante, de nombreuses bulles y sont nucléées. Elles s'étendent ensuite à une vitesse proche de celle de la lumière et entrent en collision malgré l'expansion de l'univers car la distance les séparant est inférieure à l'horizon. A $T \sim 100$ GeV, et ce jusqu'à environ $T \sim$ eV, l'univers est dominé par le rayonnement. Durant cette période le facteur d'échelle varie comme $a(t) \sim t^{1/2}$ et le temps cosmologique est relié à la température de l'univers par :

$$t = \zeta(T) \frac{M_{Pl}}{T^2}, \quad \zeta \equiv \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{45}{\pi g(T)}} \quad (2.175)$$

où $g(T)$ est le nombre de degré de liberté présent à l'équilibre thermique dans le plasma à température T . L'horizon $d_h(t)$ prend la forme : $d_h(t) = 2t$. La probabilité de former une bulle critique devient alors :

$$P \simeq (2\zeta_* M_{Pl}^4) \int_{T_n}^{T_c} \frac{dT}{T^5} e^{-S_3^b(T)/T} \sim \mathcal{O}(1), \quad (2.176)$$

où $\zeta_* \sim \zeta(100 \text{ GeV}) \simeq 1/34$ dans le Modèle Standard et dont la faible variation entre T_c et T_n est négligeable. En remarquant que $S_3^b(T)/T$ est une fonction fortement piquée autour de $T = T_c$, on dérive alors numériquement de l'expression précédente la contrainte suivante :

$$\frac{S_3^b(T_n)}{T_n} \sim 135 \quad (2.177)$$

définissant ainsi la température de nucléation T_n pour la transition de phase électro- faible.

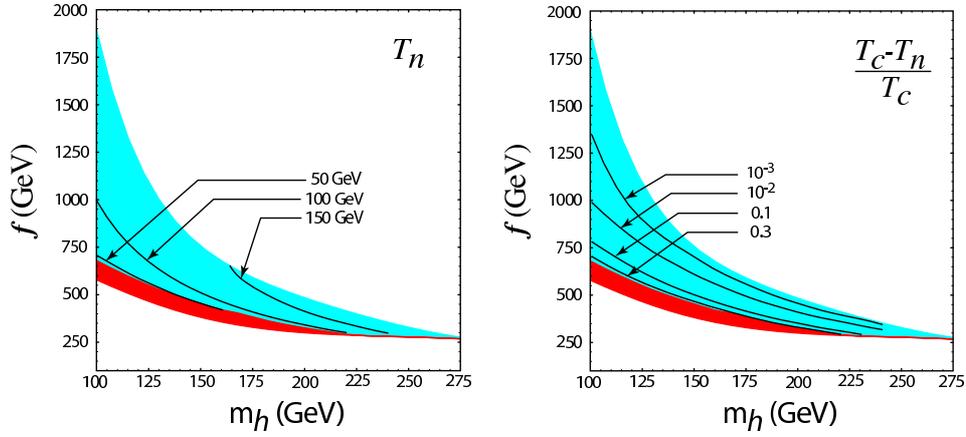


FIG. 2.17 – Tracé des contours de la température de nucléation T_n (gauche) et de l'écart relatif $\epsilon_T = (T_c - T_n)/T_c$ à la température critique dans le région de l'espace des paramètres admettant une transition de phase du premier ordre. Sous la bande rouge la symétrie électrofaible reste intacte à $T = 0$, et au dessus de la région bleue la transition de phase est soit du second ordre ou n'a tout simplement pas lieu.

2.3.1.2 Bénéfice de la surfusion pour l'asymétrie baryonique

La figure 2.17 présente les contours de la température de nucléation obtenue avec le potentiel non renormalisable à une boucle. Elle met en évidence un retard à la nucléation dû à un effet de surfusion important pour de faibles valeurs de la constante de désintégration f . De plus, la bande rouge délimite une région de l'espace des paramètres pour lesquels l'univers reste piégé dans une phase symétrique métastable. La surfusion est telle qu'aucune bulle critique n'est nucléée et la transition n'est jamais amorcée. L'importante surfusion se manifestant dans ce modèle est directement corrélée à la présence d'une barrière à température nulle pour de faibles valeurs de f . La transition du premier ordre devant se produire avant la disparition de la barrière, elle peut alors être sensiblement retardée par rapport à la température critique si celle-ci persiste jusque dans les basses températures. Par ailleurs, cette surfusion est un effet important génériquement pour les transitions de phase fortement du premier ordre, comme le montre notre approche effective. En effet, plus la barrière de potentiel est grande, plus la VEV du Higgs a besoin d'accumuler de l'énergie libre, c'est à dire de refroidir en dessous de T_c , afin de pouvoir produire les configurations permettant de franchir la barrière. Ainsi, bien que cet effet est habituellement négligée dans le Modèle Standard car la transition est faiblement du premier ordre, il joue un rôle majeur pour de fortes transitions. La surfusion constitue alors un allié précieux pour l'asymétrie baryonique. Lorsque la transition est retardée, les baryons produit lors de la nucléation dans la phase symétrique pénètrent dans la phase brisée à une température où les sphalérons sont moins actifs qu'à T_c et par la même moins offensif pour l'asymétrie matière/antimatière. En outre, un autre avantage de la surfusion dans ce modèle est qu'elle permet la sauvegarde de l'asymétrie jusqu'à des valeurs de l'échelle effective f plus élevée que celles estimées par [38]. La figure 2.18, reportant les contours de $\xi_n (> \xi_c)$ dans l'espace des paramètres, montre ainsi qu'il est possible de protéger l'asymétrie pour une échelle de suppression au-delà du TeV, tout en conservant la masse du Higgs au dessus à la

borne du LEP.

2.3.2 Production et observation d'ondes gravitationnelles

Les ondes gravitationnelles prédites par la relativité générale n'ont encore jamais été observées directement. Néanmoins le pulsar PSR 1913+16 découvert par Hulse et Taylor [41] en 1974 constitue une solide preuve de leur existence. Ce système binaire est composé (vraisemblablement) de deux étoiles à neutron en révolution l'une autour de l'autre avec une période décroissant légèrement à chaque orbite. Selon la relativité générale, la perte de moment cinétique du système est le résultat de l'émission d'ondes gravitationnelles due à sa symétrie axiale. Tout comme une toupie est freiné par l'air et lui communique son énergie cinétique sous forme d'ondes de pression, le système binaire « frotte » sur le tissu spatio-temporel et lui transmet son énergie en émettant des ondes gravitationnelles. Pour le pulsar d'Hulse et Taylor, la variation de la période mesurée depuis plus de trente ans affiche un accord parfait avec la prédiction de la relativité générale. Ainsi la construction d'une première génération de détecteurs a été entreprise dans les années 90. Les expériences américaine LIGO et franco-italienne VIRGO ont pour mission d'observer le spectre d'onde gravitationnelle émises par des sources astrophysiques de type système binaire pour, entre autre, confirmer l'observation d'Hulse et Taylor.

Il est également fort probable que l'univers primordial fut le siège d'événements tellement violents que des ondes gravitationnelles aient pu être émises dans les premiers instants de son histoire. Parmi ces événements se trouve l'inflation, cette phase très brève ($\sim 10^{-33}$ s) où l'univers s'est exponentiellement dilaté. Les fluctuations quantiques du champ dominant l'univers pendant cette période, l'inflaton, couplent à la métrique et induisent des perturbations de densité de matière qu'il est possible de mesurer dans les fluctuations de température du fond diffus cosmologique. En outre,

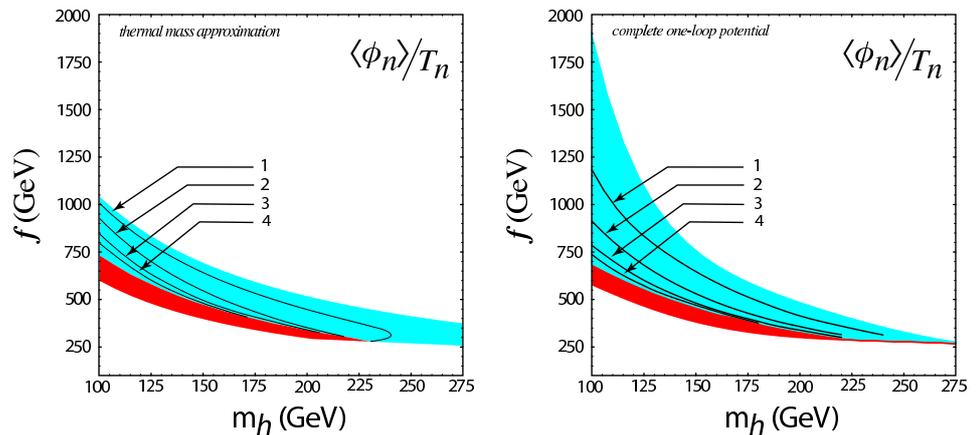


FIG. 2.18 – Tracé des contours du rapport $\xi_n = \langle \phi(T_n) \rangle / T_n$ qui caractérise la force de la transition de phase, en utilisant l'approximation de la masse thermique de [38] (gauche) et le potentiel complet à une boucle (droite). Dans le second cas la région admettant une transition du premier ordre est nettement élargie car les corrections thermiques sont sous-estimées dans l'approximation de haute température.

les fluctuations de l'inflaton ont également laissé une empreinte gravitationnelle sous la forme d'un spectre d'ondes stochastique caractérisant l'aspect aléatoire des fluctuations quantiques dont l'impulsion est indéterminée. Les transitions de phase du premier ordre sont également sources d'ondes gravitationnelles primordiales et, parmi elles, la transition électrofaible est la prometteuse en terme d'observabilité [50, 44, 37]. En ce sens, dans les années à venir, des expériences d'interférométrie spatiale verront le jour, comme le projet LISA, ainsi que le BigBang Observer (BBO) dont la mission sera également d'observer les traces gravitationnelles de l'inflation.

2.3.2.1 Ondes gravitationnelles lors d'une transition du premier ordre

A la température de nucléation, les bulles formées se dilatent et, ce faisant, relâchent dans leur environnement l'énergie libre produite par le passage dans la phase brisée. Une partie de cette *chaleur latente* est absorbée par le mur qui accélère sa propagation jusqu'à ce qu'il entre en collision avec une autre bulle. Ensuite l'énergie restante est libérée dans le plasma primordial y générant ainsi des mouvements turbulents. Ces deux phénomènes sont d'importantes sources d'ondes gravitationnelles. En effet, lorsqu'elles entrent en collision, la symétrie sphérique des bulles est brisée et une partie de l'énergie cinétique de leurs murs est alors convertie en rayonnement gravitationnel [49, 48]. Enfin, étant de nature chaotique, les turbulences du plasma ne sont pas invariante sous rotations et émettent également des ondes gravitationnelles [47, 31]. Nous allons maintenant rappeler quelques éléments nécessaires au calcul des spectres d'émission dans ces deux cas.

Définition de la densité d'énergie $\Omega_{GW}(f)$ Comme toute source d'énergie dans l'univers, le spectre d'ondes gravitationnelles est caractérisée par le rapport de la densité d'énergie contenue dans les ondes gravitationnelles à la densité critique correspondant à un univers plat :

$$\Omega_{GW} \equiv \frac{\rho_{GW}}{\rho_c}. \quad (2.178)$$

Dans le cas d'une source non stochastique, comme lors d'une transition de phase du premier ordre, le spectre n'est pas uniforme en fréquence. Il est alors commode de développer Ω_{GW} en bande de fréquence :

$$\Omega_{GW} = \int d(\log f) \Omega_{GW}(f), \quad \Omega_{GW}(f) \equiv \frac{1}{\rho_c} \frac{d\rho_{GW}}{d(\log f)}. \quad (2.179)$$

$\Omega_{GW}(f)$ est alors déterminé à l'aide de la formule du quadrupole qui relie la puissance émise en ondes gravitationnelles au moment quadrupolaire du tenseur d'énergie-impulsion de la source. Durant la transition de phase, les ondes gravitationnelles sont émises autour d'une fréquence caractéristique f_* approximativement donnée par l'inverse de la durée de la transition, qui est l'unique échelle de temps dans ce phénomène. Puis, ces ondes se propagent dans l'univers jusqu'à nos jours pratiquement sans interagir avec le milieu qu'elles traversent. Suite à l'expansion, leur fréquence est décalée vers le rouge comme $a(t)^{-1}$ où a est le facteur d'échelle de FRW. Ainsi, le pic du spectre se retrouve aujourd'hui à la fréquence :

$$\begin{aligned} f &= f_* \frac{a_*}{a_0} = f_* \left(\frac{g_{s0}}{g_{s*}} \right)^{1/3} \frac{T_0}{T_*} \\ &\simeq 6 \times 10^{-3} \left(\frac{g_*}{100} \right)^{1/6} \frac{T_*}{100 \text{ GeV}} \frac{f_*}{H_*} \text{ mHz}. \end{aligned} \quad (2.180)$$

où l'adiabaticité de son expansion, impliquant $S \sim a^3 g_s(T) T^3 = \text{cste}$, a été utilisée, ainsi que le fait que ce dernier est dominé par le rayonnement la majeure partie du temps entre le début de la transition $T_* \sim 100 \text{ GeV}$ et aujourd'hui $T_0 \sim 2 \times 10^{-13} \text{ GeV}$. La densité d'énergie varie comme a^{-4} et la densité critique comme H^2 et on obtient aujourd'hui :

$$\Omega_{GW} = \frac{\rho_{GW}}{\rho_c} = \Omega_{GW*} \left(\frac{a_*}{a_0} \right)^4 \left(\frac{H_*}{H_0} \right)^2 \simeq 1.67 \times 10^{-5} h^{-2} \left(\frac{100}{g_*} \right)^{1/3} \Omega_{GW*}, \quad (2.181)$$

où $H_0 \simeq 2.13h \times 10^{-42} \text{ GeV}$ est la constante de Hubble de nos jours. Ω_{GW} est la fraction de la densité d'énergie contenue dans l'univers actuel sous forme d'ondes gravitationnelles provenant de la transition.

Calcul du spectre de collision et turbulence Intuitivement on conçoit facilement que la densité d'énergie en ondes gravitationnelles sera importante lorsque de grandes quantités d'énergie se déplacent rapidement et longtemps. En ce sens, on montre que le spectre issu des collisions de bulles est essentiellement contrôlé par trois paramètres [44] caractérisant la dynamique de la transition de phase. Le premier est le taux de variation dans le temps, dénoté β , du taux de nucléation $\Gamma \sim e^{S_3^b/T}$, correspondant à l'inverse de la durée de la transition $\beta \equiv -d(S_3/T)/dt|_{t_*}$. Le second paramètre pertinent est la densité de chaleur latente ϵ libérée lors de la transition rapportée à la densité d'énergie du rayonnement au moment de la transition : $\alpha \equiv \epsilon/\rho_{rad}$. Enfin, la vitesse v_b de propagation du mur de la bulle, dans le référentiel du plasma et à l'instant de la collision, est la dernière grandeur complétant le trio énergie/vitesse/temps qui détermine l'amplitude caractéristique du spectre $\Omega_{GW}(f)$. Pour la turbulence, une autre grandeur s'avère également importante, la vitesse u_s des mouvements turbulents du fluide.

Après décalage vers le rouge jusqu'à notre époque, la valeur de la densité d'énergie d'ondes gravitationnelles dues à la collision est donnée approximativement, à la fréquence du pic, par [44] :

$$\Omega_{\text{coll}} h^2(f_{\text{coll}}) \simeq 1.1 \times 10^{-6} \kappa^2 \left[\frac{H_*}{\beta} \right]^2 \left[\frac{\alpha}{1+\alpha} \right]^2 \left[\frac{v_b^3}{0.24 + v_b^3} \right] \left[\frac{100}{g_*} \right]^{1/3}, \quad (2.182)$$

pour une fréquence de pic [44] :

$$f_{\text{coll}} \simeq 5.2 \times 10^{-3} \left[\frac{\beta}{H_*} \right] \left[\frac{T_*}{100 \text{ GeV}} \right] \left[\frac{g_*}{100} \right]^{1/6} \text{ mHz}. \quad (2.183)$$

κ mesure la fraction de chaleur latente convertie en énergie cinétique dans le fluide primordial, H_* et g_* sont respectivement le taux d'expansion et le nombre de degré de liberté à l'équilibre thermique dans le plasma à la température T_* . Quant au spectre de turbulence, il est caractérisé par la densité d'énergie suivante, toujours à la fréquence du pic :

$$\Omega_{\text{turb}} h^2(f_{\text{turb}}) \simeq 1.4 \times 10^{-4} u_s^5 v_b^2 \left[\frac{H_*}{\beta} \right]^2 \left[\frac{100}{g_*} \right]^{1/3} \quad (2.184)$$

avec comme fréquence de pic pour la turbulence :

$$f_{\text{turb}} \simeq 3.4 \times 10^{-3} \frac{u_s}{v_b} \left[\frac{\beta}{H_*} \right] \left[\frac{T_*}{100 \text{ GeV}} \right] \left[\frac{g_*}{100} \right]^{1/6} \text{ mHz}. \quad (2.185)$$

Notons qu'en effet β , l'inverse de la durée de la transition, fixe grossièrement la fréquence à laquelle le rayonnement gravitationnel est majoritairement émis. L'évolution en fréquence du spectre de collision dans le voisinage du pic monte comme $f^{2,8}$ en amont et chute comme $f^{-1,8}$ en aval du pic. Quant au spectre de turbulence il s'élève comme f^2 et tombe comme $f^{-3,5}$ de part et d'autre du pic. Les grandeurs T_* et g_* ont été normalisées aux valeurs typiques qu'elles prennent lors de la transition de phase électrofaible. On remarque enfin que le maximum des densités d'énergie se situe dans le mHz, ce qui correspond précisément à la gamme de fréquences où la sensibilité de LISA est maximale. Ainsi, la possibilité d'observer les ondes gravitationnelles provenant de la transition de phase du Higgs suscite de grands espoirs, car cela permettrait une étude cosmologique de la dynamique de brisure de symétrie électrofaible!

2.3.2.2 Empreintes du potentiel effectif dans le spectre d'ondes gravitationnelles

Nous allons maintenant expliciter les liens entre le potentiel effectif du Higgs contrôlant la transition et le spectre d'ondes gravitationnelles décrit ci-dessus. Tout d'abord, il est important de distinguer deux régimes de production des ondes dépendant de la vitesse du mur et donc indirectement de la force de la transition de phase. Pour v_b inférieure à la vitesse du son dans le plasma c_s , valant $1/\sqrt{3}$ à l'époque de la domination du rayonnement, les bulles croissent dans un régime de déflagration, alors que lorsque $v_b > c_s$, le mur se propage à une vitesse supersonique et les bulles entrent dans un régime de détonation. Dans ce dernier cas, il est possible d'exprimer v_b , u_s et κ en fonction de paramètres du potentiel. Puisqu'on s'intéresse au cas où la transition de phase est fortement du premier ordre, on se concentrera par la suite sur le régime de détonation. En effet, la transition étant forte, elle libère une quantité importante de chaleur latente susceptible de propulser le mur des bulles à des vitesses supersoniques.

Vers une modélisation à deux variables On montre que dans le régime de détonation $v_b > c_s$, les vitesses du mur et du fluide, ainsi que le facteur κ s'écrivent comme des fonctions de la chaleur latente α relâchée lors de la transition [44, 60, 67] :

$$v_b(\alpha) = \frac{1/\sqrt{3} + \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha/3}}{1 + \alpha}, \quad u_s(\alpha) \simeq \sqrt{\frac{\kappa\alpha}{\frac{4}{3} + \kappa\alpha}}, \quad (2.186)$$

$$\kappa(\alpha) \simeq \frac{1}{1 + 0.715\alpha} \left[0.715\alpha + \frac{4}{27} \sqrt{\frac{3\alpha}{2}} \right]. \quad (2.187)$$

Le spectre d'ondes gravitationnelles est alors complètement déterminé par deux paramètres α et β , dont les expressions ne dépendent que du potentiel effectif du Higgs pendant la transition.

β est défini comme le taux de variation temporelle du taux de nucléation et on a :

$$\beta \equiv - \left. \frac{d}{dt} \left(\frac{S_3^b}{T} \right) \right|_{t_*} \approx \left. \frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dt} \right|_{t_*} \quad (2.188)$$

qui, en utilisant l'adiabaticité de l'expansion, $dT/dt = -TH$, devient :

$$\frac{\beta}{H_*} = T_* \left. \frac{d}{dT} \left(\frac{S_3^b}{T} \right) \right|_{T_*}, \quad (2.189)$$

où T_* est la température de la transition qu'on prendra égale à la température T_n évaluée selon la méthode décrite précédemment. La chaleur latente ϵ est la somme de deux contributions. La première est la variation d'énergie libre ΔV entre les vides symétrique et brisée, alors que la seconde est la variation d'entropie ΔS entre ces deux phases :

$$\epsilon = -\Delta V - T\Delta S = \left[-\Delta V + T \frac{\partial V}{\partial T} \right] \Big|_{T_n}, \quad (2.190)$$

où on a utilisé la relation de Maxwell : $\Delta S = -\partial V / \partial T$. Enfin la densité d'énergie du rayonnement normalisant ϵ est donnée par :

$$\rho_{rad} = \frac{\pi^2}{g_*} T_n^4 \quad (2.191)$$

avec $g_* \simeq 100$. V est le potentiel effectif à une boucle et température calculé en présence d'une interaction non renormalisable.

Conditions d'observabilité Dans le régime de détonation, la donnée de deux paramètres fixe la forme du spectre d'ondes gravitationnelles. En se rappelant que une forte chaleur latente et une longue transition contribue à une importante densité d'énergie en ondes gravitationnelles, on s'attend à ce que leur observation soit favorisée par α maximal et β/H_n minimal. On s'intéresse seulement aux trois expériences susceptibles de détecter des ondes gravitationnelles d'origine cosmologique : Advanced LIGO, LISA et BBO. Les sensibilités maximales de ces trois détecteurs sont approximativement :

$$\text{Adv. LIGO} : \Omega h^2(f \sim 10\text{Hz}) \sim 10^{-10}, \quad (2.192)$$

$$\text{LISA} : \Omega h^2(f \sim 10^{-3}\text{Hz}) \sim 10^{-11}, \quad (2.193)$$

$$\text{BBO} : \Omega h^2(f \sim 10^{-1}\text{Hz}) \sim 10^{-17}. \quad (2.194)$$

LISA est la prochaine série de satellites qui sondera les ondes gravitationnelles dans la gamme de fréquence correspondant à la transition de phase électrofaible. Une analyse récente [37] montre que pour être observable à LISA, la transition doit être relativement forte, requérant typiquement $\alpha \sim \mathcal{O}(1)$ et $\beta/H \sim \mathcal{O}(100)$ pour obtenir $\Omega h^2 \gtrsim 10^{-10}$.

2.3.2.3 Peut-on voir le Higgs dans le ciel ?

L'observation à LISA des empreintes gravitationnelles du Higgs nécessite une forte transition de phase du Higgs, concordant ainsi avec les prérequis de la baryogenèse électrofaible. Nous présentons les résultats obtenus pour les paramètres déterminant le spectre d'ondes gravitationnelles dans le cas d'une transition de phase basée sur le potentiel non renormalisable calculé dans ce chapitre. Puis, nous discutons les possibilités d'observation aux interféromètres spatiaux. Enfin, nous commentons l'éventuelle pertinence du régime de déflagration en cas d'une transition fortement du premier ordre.

Bienfaits et inconvénient de la surfusion Nous avons reporté sur la figure 2.19 les contours de la chaleur latente et de l'inverse de la durée de la transition dans la région de l'espace des paramètres favorable à une transition du premier ordre. Nous trouvons que génériquement la dynamique de la transition au delà du Modèle Standard génère de trop faibles ondes gravitationnelles excepté pour une région très réduite du

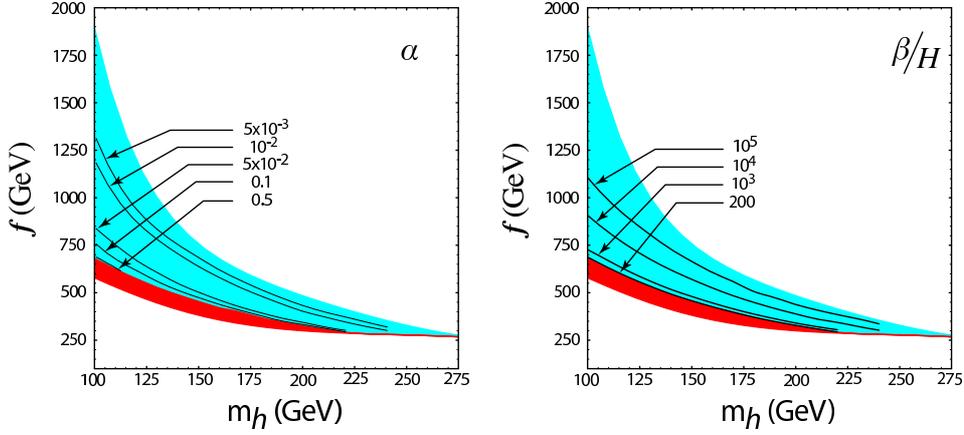


FIG. 2.19 – Tracé des contours des quantités dérivées du potentiel effectif caractérisant le spectre d’ondes gravitationnelles. α est la chaleur latente relâchée lors de la nucléation et de l’expansion des bulles, alors que β/H mesure la durée de la transition de phase.

plan (m_h, f) . En effet on peut voir que pour une masse du Higgs légèrement au dessus de la borne du LEP, $m_h \gtrsim 115$ GeV, et une constante de désintégration relativement faible, $f \sim 650$ GeV on obtient au mieux $\alpha \sim 0,5$ et $\beta/H \sim 100$. Dans cette région, la température de nucléation correspondante est d’environ 50 GeV d’après la figure 2.17. Ainsi la détectabilité est probablement hors de portée de LISA. En effet, LISA nécessite au moins $\alpha > 0,6$ pour $\beta/H \sim 100$ afin d’observer le pic de turbulence, alors que le pic de collision commence à apparaître pour $\alpha > 0,8$. Par ailleurs, même si la transition peut être rendue suffisamment forte pour obtenir $\Omega_{GW} h^2 \simeq 10^{10}$, grâce à une surfusion importante, cette dernière a pour effet de décaler les pics vers des fréquences inférieures à 0,1 mHz, comme l’illustre l’exemple de la figure 2.20. En effet, d’après (2.183,2.185) les fréquences des pics varient approximativement comme :

$$f_{pics} \sim \text{mHz} \left[\frac{T_n}{100 \text{ GeV}} \right], \quad (2.195)$$

pour $\beta/H \sim 100$. Or pour $T_n \sim 50$ GeV, le bruit de l’interféromètre LISA ne permet plus de résoudre le signal. En revanche, toujours pour $\beta/H \sim 100$, BBO devrait être tout à fait capable de détecter les deux pics pour peu qu’ α soit supérieur à 0,3.

Ainsi, le bénéfice de la surfusion concernant le renforcement de la transition, et la protection de l’asymétrie baryonique pour $m_h \gtrsim 115$ GeV et $f \sim 1$ TeV, s’accompagne d’un effet néfaste pour l’observabilité à LISA des traces gravitationnelles du Higgs en repoussant le spectre dans le bruit du détecteur.

Friction et régime de déflagration Il n’est en revanche pas exclu que la conclusion précédente soit un peu trop pessimiste. En effet, elle repose sur l’hypothèse que les bulles s’étendent dans un régime de détonation où la vitesse du mur est supersonique. Néanmoins on sait que la propagation du mur est ralentie par un effet de friction sur le plasma qu’il traverse. Moore et al. [59, 58] montrèrent que pour une transition faiblement du premier ordre, la friction est peu importante, et la vitesse est faible

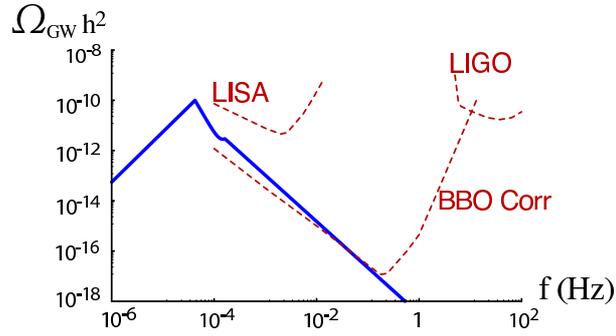


FIG. 2.20 – Spectre d’ondes gravitationnelles produit pendant la transition de phase électrofaible. On peut voir les contributions de la turbulence (pic de gauche) et des effets de collisions (pic de droite émergeant de la queue du pic de turbulence). Ce tracé est pour $m_h = 115$ GeV et $f \simeq 600$ GeV pour lesquels on a $\alpha = 0,51$, $\beta/H = 89$ et $T_n = 39$ GeV. On remarque que les valeurs de α et β/H nécessaires pour obtenir un fort signal impliquent une faible température de nucléation (< 100 GeV) suite à la surfusion, ce qui rend les ondes difficiles à détecter.

$v_b \sim 10^{-2} \ll c_s$ suite au peu de chaleur latente libérée. Lorsque la transition devient fortement du premier ordre, nous avons supposé que la chaleur latente était suffisante pour entrer dans un régime de détonation $v_b > c_s$. Néanmoins, l’effet de la friction dans ce régime est totalement inconnu, le travail de Moore étant limité à une approximation de faible vitesse du mur. Intuitivement on serait tenté de penser que la vitesse étant plus grande, les frottements du mur sur le plasma sont plus importants. En ce cas, les bulles pourraient ne jamais entrer en détonation. Le calcul du terme de friction et de la vitesse du mur semble alors nécessaire pour justifier complètement l’hypothèse d’un régime de détonation utilisée dans notre analyse de l’observabilité.

Conclusion

Bien que le Modèle Standard contiennent les ingrédients élémentaires permettant de générer, lors de la transition de phase électrofaible, l’asymétrie matière/antimatière observée dans notre univers, il apparaît néanmoins nécessaire de faire appel à une nouvelle physique au delà. Une étude générique de ces effets est réalisée au moyen d’une approche effective consistant à introduire une interaction non renormalisable $|H|^6$ dans le lagrangien du Modèle Standard. En ce cas, la préservation de l’asymétrie créée lors la transition requiert une échelle de suppression M pour cet opérateur relativement faible \lesssim TeV, ce qui est naturellement le cas pour un Higgs composite, où M est remplacé par la constante de désintégration d’un secteur fortement couplé²⁷. Nous avons ensuite présenté un calcul complet des corrections quantiques et thermiques à une boucle au potentiel du Higgs en présence d’une interaction non renormalisable. En particulier, plusieurs schémas de renormalisation ont été définis à $T = 0$ qui permettent également

²⁷ Dans le cas d’un Higgs composite, un second opérateur de dimension six, dominant la théorie effective, peut contribuer à la transition de phase. Il s’agit néanmoins d’un opérateur dérivatif $(\partial_\mu |H|)^2$ ne modifiant que la norme du Higgs et des Goldstone. Ainsi ses effets n’apparaissent qu’à une boucle et sont, en couplage faible, nettement supprimés par rapport à $|H|^6$ qui induit directement une barrière de potentiel à l’arbre. En conséquence, la dynamique de la transition n’en est que peu affecté [36].

de s'affranchir de divergences infrarouges. A température finie, les méthodes usuelles de resommation de diagramme paquettes ont été employés afin à la fois d'estimer précisément la barrière de potentiel et de minimiser la partie imaginaire de ce dernier. Puis, nous avons étudié la dynamique de la transition de phase dans ce modèle effectif et mis en lumière le rôle important joué par le phénomène de surfusion. Nous avons montré que celui-ci facilite la survie de l'asymétrie baryonique après la transition et ce pour une échelle f aussi grande que le TeV, tout en satisfaisant les diverses contraintes expérimentales. Enfin, une prospection des possibilités d'observation d'ondes gravitationnelles émises pendant la transition de phase a été menée. Nous avons pu conclure que leur détection est assez improbable à la prochaine génération d'interféromètre spatial LISA, principalement dû à un décalage du spectre vers les fréquences bruitées du détecteur, engendré par l'importante surfusion nécessaire à l'obtention d'un signal suffisant.

Bibliographie

- [1] Precision electroweak measurements on the Z resonance. *Phys. Rept.*, 427 :257, 2006.
- [2] S. L. Adler. Axial vector vertex in spinor electrodynamics. *Phys. Rev.*, 177 :2426–2438, 1969.
- [3] I. Affleck. On constrained instantons. *Nucl. Phys.*, B191 :429, 1981.
- [4] I. Affleck and M. Dine. A New Mechanism for Baryogenesis. *Nucl. Phys.*, B249 :361, 1985.
- [5] G. W. Anderson and L. J. Hall. The Electroweak phase transition and baryogenesis. *Phys. Rev.*, D45 :2685–2698, 1992.
- [6] P. Arnold. B violation in the hot standard model. 1997.
- [7] P. Arnold and O. Espinosa. The Effective potential and first order phase transitions : Beyond leading-order. *Phys. Rev.*, D47 :3546–3579, 1993.
- [8] P. Arnold, D. Son, and L. G. Yaffe. The hot baryon violation rate is $O(\alpha(w)^{**5} T^{**4})$. *Phys. Rev.*, D55 :6264–6273, 1997.
- [9] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz, and Y. S. Tyupkin. Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations. *Phys. Lett.*, B59 :85–87, 1975.
- [10] J. S. Bell and R. Jackiw. A PCAC puzzle : $\pi_0 \rightarrow \gamma\gamma$ in the sigma model. *Nuovo Cim.*, A60 :47–61, 1969.
- [11] A. I. Bochkarev and M. E. Shaposhnikov. Electroweak Production of Baryon Asymmetry and Upper Bounds on the Higgs and Top Masses. *Mod. Phys. Lett.*, A2 :417, 1987.
- [12] W. Buchmuller and D. Wyler. Effective Lagrangian Analysis of New Interactions and Flavor Conservation. *Nucl. Phys.*, B268 :621, 1986.
- [13] H. Burkhardt and B. Pietrzyk. Low energy hadronic contribution to the QED vacuum polarization. *Phys. Rev.*, D72 :057501, 2005.
- [14] J. Callan, Curtis G. and S. R. Coleman. The Fate of the False Vacuum. 2. First Quantum Corrections. *Phys. Rev.*, D16 :1762–1768, 1977.
- [15] M. S. Carena, J. M. Moreno, M. Quiros, M. Seco, and C. E. M. Wagner. Supersymmetric CP-violating currents and electroweak baryogenesis. *Nucl. Phys.*, B599 :158–184, 2001.
- [16] M. S. Carena, M. Quiros, and C. E. M. Wagner. Opening the Window for Electroweak Baryogenesis. *Phys. Lett.*, B380 :81–91, 1996.
- [17] M. E. Carrington. The Effective potential at finite temperature in the Standard Model. *Phys. Rev.*, D45 :2933–2944, 1992.
- [18] L. Carson, X. Li, L. D. McLerran, and R.-T. Wang. Exact Computation of the Small Fluctuation Determinant Around a Sphaleron. *Phys. Rev.*, D42 :2127–2143, 1990.
- [19] L. Carson and L. D. McLerran. Approximate Computation of the Small Fluctuation Determinant Around a Sphaleron. *Phys. Rev.*, D41 :647, 1990.
- [20] J. M. Cline. Baryogenesis. 2006.
- [21] J. M. Cline, K. Kainulainen, and A. P. Vischer. Dynamics of two Higgs doublet CP violation and baryogenesis at the electroweak phase transition. *Phys. Rev.*, D54 :2451–2472, 1996.

-
- [22] J. M. Cline and P.-A. Lemieux. Electroweak phase transition in two Higgs doublet models. *Phys. Rev.*, D55 :3873–3881, 1997.
- [23] J. M. Cline and G. D. Moore. Supersymmetric electroweak phase transition : Baryogenesis versus experimental constraints. *Phys. Rev. Lett.*, 81 :3315–3318, 1998.
- [24] A. G. Cohen, D. B. Kaplan, and A. E. Nelson. Baryogenesis at the weak phase transition. *Nucl. Phys.*, B349 :727–742, 1991.
- [25] S. R. Coleman. The Fate of the False Vacuum. 1. Semiclassical Theory. *Phys. Rev.*, D15 :2929–2936, 1977.
- [26] S. Davidson, E. Nardi, and Y. Nir. Leptogenesis. 2008.
- [27] C. Delaunay, C. Grojean, and J. D. Wells. Dynamics of Non-renormalizable Electroweak Symmetry Breaking. *JHEP*, 04 :029, 2008.
- [28] M. Dine, P. Huet, and J. Singleton, Robert L. Baryogenesis at the electroweak scale. *Nucl. Phys.*, B375 :625–648, 1992.
- [29] M. Dine, O. Lechtenfeld, B. Sakita, W. Fischler, and J. Polchinski. Baryon Number Violation at High Temperature in the Standard Model. *Nucl. Phys.*, B342 :381–408, 1990.
- [30] L. Dolan and R. Jackiw. Symmetry Behavior at Finite Temperature. *Phys. Rev.*, D9 :3320–3341, 1974.
- [31] A. D. Dolgov, D. Grasso, and A. Nicolis. Relic backgrounds of gravitational waves from cosmic turbulence. *Phys. Rev.*, D66 :103505, 2002.
- [32] J. R. Espinosa and M. Quiros. Novel effects in electroweak breaking from a hidden sector. *Phys. Rev.*, D76 :076004, 2007.
- [33] G. R. Farrar and M. E. Shaposhnikov. Baryon asymmetry of the universe in the standard electroweak theory. *Phys. Rev.*, D50 :774, 1994.
- [34] M. B. Gavela, P. Hernandez, J. Orloff, and O. Pene. Standard model CP violation and baryon asymmetry. *Mod. Phys. Lett.*, A9 :795–810, 1994.
- [35] G. F. Giudice, C. Grojean, A. Pomarol, and R. Rattazzi. The Strongly-Interacting Light Higgs. *JHEP*, 06 :045, 2007.
- [36] B. Grinstein and M. Trott. Electroweak Baryogenesis with a Pseudo-Goldstone Higgs. 2008.
- [37] C. Grojean and G. Servant. Gravitational waves from phase transitions at the electroweak scale and beyond. *Phys. Rev.*, D75 :043507, 2007.
- [38] C. Grojean, G. Servant, and J. D. Wells. First-order electroweak phase transition in the standard model with a low cutoff. *Phys. Rev.*, D71 :036001, 2005.
- [39] D. J. Gross, R. D. Pisarski, and L. G. Yaffe. QCD and Instantons at Finite Temperature. *Rev. Mod. Phys.*, 53 :43, 1981.
- [40] T. Hahn and M. Perez-Victoria. Automatized one-loop calculations in four and D dimensions. *Comput. Phys. Commun.*, 118 :153–165, 1999.
- [41] R. A. Hulse and J. H. Taylor. Discovery of a pulsar in a binary system. *Astrophys. J.*, 195 :L51–L53, 1975.
- [42] C. Jarlskog. Commutator of the Quark Mass Matrices in the Standard Electroweak Model and a Measure of Maximal CP Violation. *Phys. Rev. Lett.*, 55 :1039, 1985.

- [43] K. Kajantie, M. Laine, K. Rummukainen, and M. E. Shaposhnikov. Is there a hot electroweak phase transition at $m(H) > \text{approx. } m(W)$? *Phys. Rev. Lett.*, 77 :2887–2890, 1996.
- [44] M. Kamionkowski, A. Kosowsky, and M. S. Turner. Gravitational radiation from first order phase transitions. *Phys. Rev.*, D49 :2837–2851, 1994.
- [45] F. R. Klinkhamer and N. S. Manton. A Saddle Point Solution in the Weinberg-Salam Theory. *Phys. Rev.*, D30 :2212, 1984.
- [46] E. Komatsu et al. Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations :Cosmological Interpretation. 2008.
- [47] A. Kosowsky, A. Mack, and T. Kahniashvili. Gravitational radiation from cosmological turbulence. *Phys. Rev.*, D66 :024030, 2002.
- [48] A. Kosowsky and M. S. Turner. Gravitational radiation from colliding vacuum bubbles : envelope approximation to many bubble collisions. *Phys. Rev.*, D47 :4372–4391, 1993.
- [49] A. Kosowsky, M. S. Turner, and R. Watkins. Gravitational radiation from colliding vacuum bubbles. *Phys. Rev.*, D45 :4514–4535, 1992.
- [50] A. Kosowsky, M. S. Turner, and R. Watkins. Gravitational waves from first order cosmological phase transitions. *Phys. Rev. Lett.*, 69 :2026–2029, 1992.
- [51] A. D. Linde. Infrared Problem in Thermodynamics of the Yang-Mills Gas. *Phys. Lett.*, B96 :289, 1980.
- [52] A. D. Linde. Fate of the False Vacuum at Finite Temperature : Theory and Applications. *Phys. Lett.*, B100 :37, 1981.
- [53] A. D. Linde. Decay of the False Vacuum at Finite Temperature. *Nucl. Phys.*, B216 :421, 1983.
- [54] N. S. Manton. Topology in the Weinberg-Salam Theory. *Phys. Rev.*, D28 :2019, 1983.
- [55] W. J. Marciano. Precision electroweak measurements and the Higgs mass. 2004.
- [56] N. Maru and K. Takenaga. Aspects of phase transition in gauge-Higgs unification at finite temperature. *Phys. Rev.*, D72 :046003, 2005.
- [57] A. Menon, D. E. Morrissey, and C. E. M. Wagner. Electroweak baryogenesis and dark matter in the nMSSM. *Phys. Rev.*, D70 :035005, 2004.
- [58] G. D. Moore. Electroweak bubble wall friction : Analytic results. *JHEP*, 03 :006, 2000.
- [59] G. D. Moore and T. Prokopec. How fast can the wall move? A Study of the electroweak phase transition dynamics. *Phys. Rev.*, D52 :7182–7204, 1995.
- [60] A. Nicolis. Relic gravitational waves from colliding bubbles and cosmic turbulence. *Class. Quant. Grav.*, 21 :L27, 2004.
- [61] G. Panico and M. Serone. The electroweak phase transition on orbifolds with gauge- Higgs unification. *JHEP*, 05 :024, 2005.
- [62] S. Profumo, M. J. Ramsey-Musolf, and G. Shaughnessy. Singlet Higgs Phenomenology and the Electroweak Phase Transition. *JHEP*, 08 :010, 2007.
- [63] M. Quiros. Finite temperature field theory and phase transitions. 1999.
- [64] A. Riotto. Theories of baryogenesis. 1998.

-
- [65] A. Riotto and M. Trodden. Recent progress in baryogenesis. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 49 :35–75, 1999.
- [66] A. D. Sakharov. Violation of CP Invariance, c Asymmetry, and Baryon Asymmetry of the Universe. *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 5 :32–35, 1967.
- [67] P. J. Steinhardt. Relativistic Detonation Waves and Bubble Growth in False Vacuum Decay. *Phys. Rev.*, D25 :2074, 1982.
- [68] G. 't Hooft. Symmetry breaking through Bell-Jackiw anomalies. *Phys. Rev. Lett.*, 37 :8–11, 1976.
- [69] K. Takahashi. Perturbative Calculations at Finite Temperatures. *Z. Phys.*, C26 :601–613, 1985.
- [70] E. J. Weinberg and A.-q. Wu. Understanding Complex Perturbative Effective Potentials. *Phys. Rev.*, D36 :2474, 1987.
- [71] W. M. Yao et al. Review of particle physics. *J. Phys.*, G33 :1–1232, 2006.

Chapitre 3

Un peu de physique en dimensions supplémentaires

Nous consacrons ce chapitre à la description d’abord élémentaire, puis plus détaillée, de la dynamique de théories des champs dans un espace-temps muni de plus de trois dimensions spatiales. Nous discuterons notamment les motivations modernes en faveur de l’existence de dimensions supplémentaires et présenterons les nouvelles solutions qu’elles offrent au problème de hiérarchie. Nous nous limiterons alors aux phénoménologies les plus simples basées sur un espace-temps 5d. Après avoir introduit, dans le cas scalaire, les ingrédients fondamentaux sur lesquels s’appuie tout modèle physique défini sur un espace compact, nous en détaillerons les réalisations pour des spins supérieurs, comme les champs de Yang–Mills et les fermions de spin $1/2$. Dans tous les cas, nous insistons principalement sur la généralisation du principe de moindre action en présence d’une dimension compacte, ainsi que sur les contraintes dynamiques que celui-ci impose sur les différentes conditions aux bords des champs. Nous montrons également comment la compactification, par les conditions aux bords, constitue la source d’un nouveau mécanisme de brisure de symétrie et de génération de masses.

3.1 Introduction à la physique des dimensions supplémentaires

Cette section constitue une rapide introduction aux dimensions supplémentaires, de leur origine historique jusqu’aux espoirs qu’elles ont récemment apportés en physique fondamentale.

3.1.1 Pourquoi une dimension supplémentaire ?

3.1.1.1 Un peu d’histoire

Dans les années 1920, Kaluza [12] et Klein [14] furent les premiers à émettre l’hypothèse de l’existence d’une dimension d’espace supplémentaire. Leur principale motivation était d’unifier les deux seules forces identifiées comme fondamentale à l’époque,

la gravitation et l'électromagnétisme. La gravitation venant tout juste d'être reformulée par Einstein comme une courbure de l'espace-temps, les similitudes entre les deux types d'interactions conduisirent Kaluza à interpréter également la force électromagnétique comme un effet purement géométrique. Kaluza réalisa qu'en 5d la métrique contient, d'un point de vue quadri-dimensionnel, un vecteur $g_{5\mu}$ pouvant jouer le rôle d'un quadri-potentiel électromagnétique. Quelques années plus tard, Klein améliorera cette idée en compactifiant cette dimension supplémentaire selon un cercle de rayon fini. Cette approche présente deux avantages majeurs. Le premier est évident, l'espace ne balayant à notre échelle que trois directions, la compactification permet alors de camoufler ce nouveau degré de liberté. Par ailleurs, l'isométrie du cercle est exactement la symétrie de jauge $U(1)$ de l'électromagnétisme. La conséquence immédiate est que l'invariance par difféomorphisme en cinq dimensions se décompose en une théorie 4d généralement covariante décrivant la gravité et une théorie de jauge $U(1)$ modélisant l'électromagnétisme ! Hélas la théorie échoue à reproduire une phénoménologie des plus élémentaires, tel que l'électron, puisqu'elle impose que la masse de toute particule chargée soit un multiple entier de celle de Planck, soit $m_e \gtrsim 10^{19}$ GeV. Dans les années 80 de nouveaux efforts dans cette direction ont été entrepris avec l'espoir ambitieux de générer le groupe de jauge du Modèle Standard à partir des isométries d'un espace compact. Witten [24] montra que pour se faire ce dernier devait être au moins de dimension sept. Malheureusement ce type de construction souffrent de sévères problèmes, comme notamment la difficulté d'obtenir des fermions chiraux [23]. Ainsi, l'idée initiale de Kaluza et Klein, pourtant élémentaire, peine énormément à fournir une description géométrique correcte des interactions observées dans la nature. On comprend néanmoins intuitivement la raison de ces difficultés en rappelant ce qui est à l'origine du succès de la relativité générale : le principe d'équivalence. Le principe d'équivalence est la traduction d'une observation simple : tout corps « tombe » avec la même accélération dans un champ gravitationnel quel que soit sa masse ou sa densité d'énergie. C'est précisément cette universalité du mouvement qui permet la géométrisation de la gravitation car il est alors possible *localement* de se placer dans un référentiel où toute interaction gravitationnelle est absente. Effectuer en chaque point, ces changements locaux de coordonnées conduisent naturellement au concept d'espace-temps courbe, dans lequel la force de gravitation a disparu. Les autres interactions, en revanche, ne jouissent malheureusement pas de cette même universalité, l'accélération dépendant généralement de la charge. Il n'existe par conséquent aucun changement de coordonnées les éliminant, ce qui explique qu'il soit hautement non trivial d'en développer une formulation géométrique.

3.1.1.2 Motivation moderne et solution au problème de hiérarchie

Il fut réalisé dans les années 80 [16], puis largement développé dans la décennie suivante, que l'existence de dimensions supplémentaires permet de relier deux des interrogations centrales de la physique fondamentale moderne :

- Pourquoi la gravité est-elle si faible ou, en d'autres termes, pourquoi la masse de Planck est-elle si grande devant l'échelle électrofaible $M_{Pl} \gg m_W$?
- Comment stabiliser le Higgs, et par là-même toute la physique électrofaible, à la masse du W ?

La gravitation, se matérialisant comme une courbure de l'espace-temps, est, par essence, sensible à sa dimensionnalité. La fait qu'elle puisse alors s'échapper dans des dimensions supplémentaires constitue une explication naturelle à sa faiblesse apparente en quatre dimensions. Le lien avec le problème de hiérarchie est moins trivial mais, *in fine*, tout

aussi simple. Jusque là l'approche consistait à rendre le Higgs insensible à une échelle ultra-violette élevée. Les dimensions supplémentaires offrent alors une solution radicalement différente en permettant d'abaisser cette échelle jusqu'au TeV. En effet, dans un espace-temps de $d > 4$ dimensions, l'échelle fondamentale des interactions, gravitation incluse, n'est pas nécessairement la masse de Planck rencontrée à 4d mais peut être sensiblement plus faible, la petitesse du couplage gravitationnel effectif provenant de la propagation de la gravité dans l'espace compact. Par conséquent, l'échelle ultra-violette vers laquelle est repoussé le Modèle Standard reste le TeV, même en incluant de la gravitation de façon effective à basse énergie. Ainsi, contrairement aux approches supersymétrique et composite, le Higgs est toujours instable, simplement, ici, l'espace compact a réduit l'ampleur de l'instabilité. Les dimensions supplémentaires réalisent alors typiquement une solution simultanée aux deux aspects du problème de hiérarchie. Partant d'une échelle fondamentale de l'ordre du TeV, elles permettent d'affaiblir naturellement l'interaction gravitationnelle et, ce faisant, brise le lien inextricable en quatre dimensions entre l'échelle de la gravitation et le cut-off ultra-violet des corrections quantiques déstabilisant le Higgs.

Il existe plusieurs façons de réaliser les propriétés évoquées ci-dessus. La première repose sur une simple extension à $d > 4$ de l'espace-temps Minkowskien de la relativité 4d dont la métrique devient¹ :

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - \sum_{i=1}^n dy_i^2 \quad (3.1)$$

où les y_i sont limités à l'intervalle $[0, L_i]$. En conséquence, les dimensions supplémentaires n'ont pas de courbure et restent, même après la compactification, topologiquement équivalentes à un plan de dimension $n = d - 4$. La solution au problème de hiérarchie dans ce contexte a été proposée par Arkani-Hamed, Dimopoulos et Dvali (ADD) [3]. L'idée directrice est que la gravité apparaît faible en quatre dimensions car elle est « diluée » dans un grand volume d'espace interne. Le Modèle Standard est localisée sur une brane 4d et son couplage au graviton en est ainsi affaibli. Dans ce modèle, le TeV est l'échelle fondamentale et constitue donc le cut-off 4d de la théorie effective du Modèle Standard. Quant à la masse de Planck, elle est beaucoup plus grande car la gravité se propage uniformément dans toutes les directions de l'espace. Néanmoins, dans sa version minimale 5d, la résolution complète du problème de hiérarchie, requiert une dimension supplémentaire très grande. Ainsi, bien que le Higgs reste radiativement à basse énergie, la hiérarchie d'échelle M_{Pl}/m_W reste en quelque sorte inexplicée dans ce modèle qui n'en fournit tout au plus qu'une reformulation géométrique. La question « pourquoi la gravité est-elle si faible ? » est alors remaquillée en « pourquoi la dimension supplémentaire est-elle si grande ? »

Peu de temps après, Randall et Sundrum (RS) remarquèrent que les deux facettes du problème de hiérarchie peuvent être résolus à l'aide d'une dimension supplémentaire de petite taille, mais courbe [20] dont la géométrie est basée sur une métrique anti de Sitter en cinq dimensions :

$$ds^2 = e^{-2ky} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dy^2, \quad (3.2)$$

¹La signature de la métrique $\eta_{\mu\nu}$ est $(+, -, -, -)$.

où k est la courbure d'AdS₅. Cette métrique affiche une grande similarité avec celle d'un trou noir dont la solution la plus simple en quatre dimensions est celle de Schwarzschild :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{M}{2M_{Pl}^2 r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{M}{2M_{Pl}^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (3.3)$$

où M est la masse du trou noir centré en $r = 0$ et $d\Omega^2$ est l'élément de surface de la sphère S_2 . A r constant², la métrique de Schwarzschild se réduit simplement à $ds^2 = (1 - M/2M_{Pl}^2 r) dt^2$. Supposons que l'horizon du trou noir soit entouré d'un gaz de dihydrogène chaud, dont les électrons se désexcitent en émettant principalement un rayonnement électromagnétique de fréquence propre ω . Pour une molécule de gaz à la distance r , le rayonnement émis sera reçu à l'infini à la fréquence $\omega(r)$ décalée vers le rouge par la métrique du trou noir : $\omega(r)/\omega(\infty) = \sqrt{1 - M/2M_{Pl}^2 r}$. Ainsi, pour un même système physique, la courbure radiale de la métrique génère une hiérarchie de fréquence, et donc d'énergie, de plus en plus importante alors que r se rapproche de l'horizon. La métrique de Randall–Sundrum présente la même propriété où la distance radiale est dans ce cas remplacée par la position le long de la dimension supplémentaire. A y constant, la métrique (3.2) devient $ds^2 = e^{-2ky} dx^\mu dx^\nu$ et tout moment k_μ en $y = \infty$ s'accroît d'un facteur e^{-ky} en remontant la dimension supplémentaire vers $y = 0$. Autrement dit, dans la métrique de Randall–Sundrum, tout système physique placé selon y se comporte comme s'il existait une sorte de trou noir en $y = 0$. En particulier il voit sa dynamique décalée vers le rouge en se déplaçant vers les y croissants. C'est l'essence de la solution au problème de hiérarchie dans ce modèle. Avant cela, remarquons que la réponse que Randall et Sundrum apportèrent à la petitesse de l'interaction gravitationnelle est radicalement différente de l'approche ADD. Ici, la gravité ne doit plus être nécessairement diluée dans un grand volume compact car elle est principalement localisée dans la région $y = 0$. La masse de Planck est l'échelle fondamentale à cinq dimension, ainsi qu'en $y = 0$, alors que le TeV n'en est qu'une image décalée vers le rouge, grâce au facteur de courbure e^{-ky} de la métrique, le long de la dimension supplémentaire. Dans ce modèle, le Modèle Standard est localisé en $y = L$ où le cut-off naturel peut être choisi comme étant le TeV pour une taille relativement faible de la dimension compacte $L \gtrsim k^{-1}$.

Par ailleurs, bien que dans leurs versions originales ces modèles supposent que tous les champs du Modèle Standard sont confinés sur un brane 4d bordant l'espace compact, il fut réalisé assez rapidement que seul le Higgs devait y voir sa propagation interdite³ afin de résoudre le problème de hiérarchie. La raison en est intuitivement simple, puisque le Higgs est le seul à nécessiter un écrantage ultra-violet. Dans le cas Minkowskien, plonger tous les champs du Modèle Standard dans le bulk donna naissance aux modèles dits de dimensions supplémentaires universelles (UED). Notamment, lorsque les champs de jauge sont plongés dans des dimensions supplémentaires, de nouveaux mécanismes de brisure de symétrie sont possibles, véhiculés par la compactification. Nous verrons également comment la propagation des spineurs dans l'espace compact permet de produire naturellement les hiérarchies de masses observées pour les fermions du Modèle Standard. Mais avant d'aborder ces mécanismes, nous allons maintenant revoir plus en détail les diverses propriétés des dimensions supplémentaires évoquées ci-dessus pour les modèles ADD et RS.

²Nous négligeons ici les degrés de liberté angulaires.

³Ce dernier peut toutefois s'y propager également pourvu que son profil reste piqué sur la brane.

3.1.2 Dimension supplémentaire plate ou courbe ?

A première vue, l'ajout de dimensions supplémentaires offre un grand nombre de libertés nouvelles. Elles peuvent être plates, courbes, de taille et en nombre modulable. S'offre également le choix de localiser certains champs sur un bord ou au contraire d'en autoriser la propagation dans l'espace compact. Cependant ces multiples possibilités se retrouvent assujetties à de nombreuses contraintes lorsque les modèles à dimensions supplémentaires sont confrontés aux observations. Motivés par le problème de hiérarchie, les années 90 ont vu émerger deux classes de modèles reposant sur l'existence de dimensions supplémentaires : d'un coté les modèles ADD où celles-ci sont plates et les modèles RS basés sur une géométrie courbe anti de Sitter en cinq dimensions. Dans les années qui suivirent l'apparition de ces nouvelles constructions, de nombreux travaux mirent en évidence plusieurs avantages en faveur d'un espace-temps AdS₅. Nous revoyons ci-dessous quelques propriétés génériques qui témoignèrent en faveur d'une dimension courbe.

3.1.2.1 Dimensions plates et modèles ADD

Un Higgs léger dans un grande dimension supplémentaire L'existence d'une dimension supplémentaire plate présente plusieurs inconvénients. Tout d'abord, cette dimension doit être relativement grande pour suffisamment « diluer » la gravité et ainsi expliquer la hiérarchie de jauge $M_{Pl}/m_W \sim 10^{17}$. En effet, en présence de dimensions supplémentaires plates, la masse de Planck est réduite de l'échelle de masse fondamentale de la théorie, notée M_* , par le large volume de l'espace interne. En $d = 4 + n$ dimensions, l'action non renormalisable de la gravitation :

$$S_{EH}^d = -M_*^{d-2} \int d^d x \sqrt{g^{(d)}} R^{(d)} \quad (3.4)$$

est contrôlée de façon naturelle par l'échelle fondamentale M_* , alors qu'à 4d la gravité est décrite par la masse de Planck :

$$S_{EH}^4 = -M_{Pl}^2 \int d^4 x \sqrt{g^{(4)}} R^{(4)}. \quad (3.5)$$

Si les n dimensions supplémentaires sont compactes et de même taille $\sim L$ alors S_{EH}^4 émerge de manière effective de S_{EH}^d pour des énergies $E \ll 1/L$ et M_{Pl} est une échelle dérivée de M_* dans ce régime. La relation entre ces deux échelles s'obtient à partir de la métrique d dimensionnelle qui, si les dimensions compactes sont plates, s'écrit comme :

$$ds^2 = g_{MN}^{(d)} dx^M dx^N = g_{\mu\nu}^{(4)} dx^\mu dx^\nu - r^2 d\Omega_n^2 \quad (3.6)$$

où $d\Omega_n^2$ désigne collectivement les coordonnées angulaires balayant la surface de l'espace interne, que l'on a choisi comme un tore S_1^n de rayon unique $r = L/2\pi$. Les fluctuations de métrique sur le tore ont été négligées car on souhaite simplement savoir comme la gravité à 4d est plongée dans la théorie à d dimensions. A partir de la métrique ci-dessus, on déduit les relations suivantes :

$$\sqrt{g^{(d)}} = r^n \sqrt{g^{(4)}}, \quad R^{(d)} = R^{(4)} \quad (3.7)$$

permettant ainsi de relier S_{EH}^4 à S_{EH}^d pour $E \ll 1/r$:

$$\begin{aligned} S_{EH}^d &= -M_*^{d-2} \int d\Omega_n r^n \int d^4x \sqrt{g^{(4)}} R^{(4)} + \dots \\ &\simeq -M_{Pl}^2 \int d^4x \sqrt{g^{(4)}} R^{(4)} \end{aligned} \quad (3.8)$$

où \dots désignent les autres polarisations du graviton $g^{(d)}$. La masse de Planck est alors déterminée par :

$$M_{Pl}^2 = M_*^{n+2} \int d\Omega_n r^n = M_*^{n+2} (2\pi r)^n \quad (3.9)$$

où $(2\pi r)^n$ est le volume du tore S_1^n . Maintenant si on choisit $M_* \sim \text{TeV}$ afin de stabiliser naturellement le Higgs à l'échelle électrofaible, la taille des dimensions supplémentaires est automatiquement fixée par la masse de Planck et on obtient⁴ :

$$\begin{aligned} n = 1 &\rightarrow r \sim 10^{28} \text{ GeV}^{-1} \sim 10^{12} \text{ m} \\ n = 2 &\rightarrow r \sim 10^{12} \text{ GeV}^{-1} \sim 100 \text{ } \mu\text{m} \\ n = 3 &\rightarrow r \sim 10^7 \text{ GeV}^{-1} \sim 10 \text{ } \text{Å} \end{aligned}$$

Si l'espace contenait une seule dimension supplémentaire, elle devrait être aussi grande que le système solaire⁵. Pour une dimension de cette taille, la gravitation apparaîtrait cinq-dimensionnelle à notre échelle $E \gg 1/r$ et la dynamique de notre système solaire serait grandement différente. En outre, on peut contraindre la taille (et donc le nombre) des dimensions supplémentaires plates en mesurant avec précision les déviations à la loi de Newton usuelle à 4d ($F \sim r^{-2}$). À l'aide d'une balance de torsion, une expérience de type Cavendish récente [13] a conclu que cette loi restait valable jusqu'à des distances aussi courtes que $r = 54 \mu\text{m}$. Ainsi pour constituer une solution naturelle au problème de hiérarchie, l'espace compact doit être muni d'au moins trois dimensions $n \geq 3$.

Dilution des couplages de jauge Un autre problème apparaît également lorsque les champs de jauge sont autorisés à se propager dans les dimensions supplémentaires. En effet, pareillement à la constante de Newton, les couplages de jauge sont également dilués dans l'espace interne. En répétant la procédure d'identification précédente pour $E \ll 1/r$, l'action de Yang–Mills peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} S_{YM}^d &= -\frac{1}{4g_*^2} \int d^d x \sqrt{g^{(d)}} F_{MN} F^{MN} \\ &\simeq -\frac{1}{4g_*^2} \int d\Omega_n r^n \int d^4x \sqrt{g^{(4)}} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

Le couplage g_* a une dimension de masse $2 - d/2$ et sous l'hypothèse raisonnable que M_* fixe également l'échelle des interactions de jauge on a : $g_* \sim M_*^{-n/2}$. Ainsi, le couplage de jauge effectif sans dimension à 4d devient :

$$\frac{1}{g_4^2} \sim (2\pi r)^n M_*^n. \quad (3.11)$$

⁴ $1m/\hbar c \simeq 5 \times 10^{15} \text{ GeV}^{-1}$.

⁵ La distance Soleil-Pluton est de l'ordre de $\sim 30 \text{ ua}$, soit $6 \times 10^{12} \text{ m}$.

En combinant cette relation avec (3.9), on peut éliminer M_* et dériver la taille maximale des dimensions supplémentaires de manière à ce que le couplage de jauge effectif g_4 reste $\sim \mathcal{O}(1)$ malgré la dilution. On trouve alors :

$$r \sim \frac{1}{2\pi M_{Pl}} g_4^{\frac{n+2}{n}} \quad (3.12)$$

Alors, la taille naturelle d'une dimension supplémentaire plate est $1/M_{Pl}$ et ce quelque soit l'échelle fondamentale M_* . Par conséquent, pour des dimensions suffisamment larges permettant de résoudre le problème de hiérarchie, la théorie de jauge devient trop faiblement couplée. Cela semble indiquer que les champs de jauge doivent être confinés sur un bord 4d de l'espace compact et il n'est alors plus possible d'utiliser ce dernier pour briser une symétrie de jauge par l'intermédiaire de conditions aux bords.

Autres inconvénients d'une dimension plate On rencontre également d'autres problèmes lorsque les champs de jauge se propagent dans des dimensions supplémentaires plates. Par exemple, l'évolution des constantes de couplage n'est plus logarithmique mais varie en loi de puissance [8, 7]. C'est une conséquence du fait que le couplage de jauge est dimensionné pour $d > 4$ et évolue avec l'énergie directement au niveau des arbres. Ainsi l'échelle d'une éventuelle unification des interactions se retrouve abaissée légèrement au dessus du TeV. Si tant est qu'une unification soit possible à cette échelle, elle induirait une instabilité du proton beaucoup trop importante. On peut mentionner enfin l'apparition de nouvelles contributions aux processus de changement de saveur — notamment $\mu \rightarrow e\gamma$ ou $b \rightarrow s\gamma$ — médiés par les résonnances de Kaluza–Klein. La masse de ces particules étant proche de $M_* \sim \text{TeV}$, les rapports de branchement de ces processus violeraient alors les bornes expérimentales de plusieurs ordres de grandeurs.

3.1.2.2 Dimension courbée et modèles RS

Peu après le développement des modèles ADD, Randall et Sundrum explorèrent les nouvelles possibilités qu'offrent les géométries dites non factorisables qui ne peuvent s'écrire comme un produit direct de l'espace Minkowskien 4d usuel avec un espace compact transverse. Ils obtinrent alors la métrique (3.2) comme solution des équations d'Einstein 5d, sous l'unique hypothèse que la constante cosmologique 4d soit exactement nulle. Ils mirent également en évidence deux propriétés cruciales de cette géométrie que sont la localisation de la gravitation et la résolution du problème de hiérarchie.

Localisation de la gravité dans AdS_5 La façon rigoureuse d'établir ce mécanisme de localisation de la gravité consiste à résoudre explicitement les équations du mouvement de l'action d'Einstein-Hilbert 5d. Il existe néanmoins un moyen plus direct permettant de mettre en évidence ce phénomène. Pour cela, nous allons généraliser au cas courbe l'expression (3.9) et ainsi dériver la masse de Planck émergent à quatre dimensions à partir d'une géométrie 5d donnée par (3.2). Les fluctuations 4d de la métrique peuvent être paramétrées comme :

$$ds^2 = e^{-2ky} g_{\mu\nu}^{(4)} dx^\mu dx^\nu - dy^2. \quad (3.13)$$

On obtient alors :

$$\sqrt{g^{(5)}} = e^{-4ky} \sqrt{g^{(4)}}, \quad R^{(5)} = e^{2ky} R^{(4)} \quad (3.14)$$

et la masse de Planck effective 4d est déterminée par l'échelle fondamentale M_* selon la relation :

$$M_{Pl}^2 = M_*^3 \int_0^L dy e^{-2ky} = \frac{M_*^3}{2k} (1 - e^{-2kL}). \quad (3.15)$$

Dans la limite où l'espace est dépourvu de courbure, $k \rightarrow 0$, on retrouve le résultat ADD pour $n = 1$, $M_{Pl}^2 = LM_*^3$. Également, on remarque que, dans ce cas, augmenter la taille L de la dimension compacte revient à accroître M_{Pl} et la gravité 4d devient de plus en plus faiblement couplée à basse énergie. De plus, dans la limite de décompactification $L \rightarrow \infty$, la gravitation se retrouve infiniment diluée et découple totalement de la physique à basse énergie, $M_{Pl} \rightarrow \infty$. Il est alors clair que la gravitation disparaît dans cette limite car le graviton est uniformément réparti dans l'espace compact, ce qui rend ses couplages sensibles à la longueur de compactification L . La situation est en revanche relativement différente dans AdS_5 . Dans cette géométrie, une conséquence cruciale du facteur de courbure est de conserver la masse de Planck finie dans la limite de décompactification :

$$M_{Pl}^2 \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{M_*^3}{2k}. \quad (3.16)$$

Ce résultat traduit simplement le fait que le graviton est principalement localisé dans l'ultra-violet, ce que montre clairement l'intégrale (3.15) dont l'intégrant est exponentiellement piqué autour de $y = 0$, alors qu'il est constant en l'absence de courbure. C'est la raison pour laquelle la brane $y = 0$ est souvent appelée la brane Planck. Dans AdS_5 , l'échelle de la gravitation est donc principalement fournie par la courbure plutôt que par la taille de la dimension supplémentaire. Cette propriété constitue un avantage considérable sur les modèles ADD concernant le problème de hiérarchie, car elle permet de dissocier la hiérarchie d'échelle d'énergie observée à 4d de la taille de l'espace compact, en introduisant une seconde échelle k . Randall et Sundrum proposèrent alors deux modèles distincts. Le premier, noté RS2, se concentre uniquement sur la gravitation. Il ne possède qu'une seule brane en $y = 0$ et l'échelle de la gravité reste finie et faible, grâce au mécanisme de localisation, même en présence d'une dimension supplémentaire infinie [21]. La seconde version⁶ de ce modèle comporte une seconde brane en $y = L$ et apporte une solution nouvelle au problème de hiérarchie. Avant d'en présenter la solution dans cette tranche d' AdS_5 , nous insistons sur un dernier point. Le résultat précédent (3.15) est uniquement valide dans un régime où la théorie effective 4d est applicable, c'est-à-dire pour $E \ll M_*$. Notamment, la courbure k , d'où le mécanisme de localisation tire son origine, doit être nettement inférieure à l'échelle fondamentale M_* afin de garantir la validité de la relation (3.15) à basse énergie. En pratique, on choisit environ un ou deux ordre de grandeur afin de ne pas réintroduire une nouvelle hiérarchie importante en les deux échelles d'énergie du modèle : $k/M_* \lesssim 0,1 - 0,01$.

Alléger le Higgs par un red-shift gravitationnel Le mécanisme de localisation implique que la gravité soit de plus en plus faible lorsqu'on s'éloigne de la brane de Planck. Alors, afin de rendre naturellement compte de la petitesse du couplage gravitationnel de la matière à basse énergie, il suffit d'en localiser les champs à une distance

⁶Celle-ci est, en réalité, chronologiquement antérieure à la première, ce que respecte la notation RS1,2.

suffisante de la brane de Planck. On introduit alors une seconde brane en $y = L$ sur laquelle les champs du Modèle Standard sont confinés, ce qui leur confère un recouvrement faible avec le graviton. En particulier, sur cette brane vit un champ de Higgs dont l'action localisée s'écrit :

$$S_H = \int d^4x \sqrt{\hat{g}} \left[\hat{g}^{\mu\nu} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda \left(H^\dagger H - \frac{v_H^2}{2} \right)^2 \right] \Big|_{z=R'}. \quad (3.17)$$

où $\hat{g}_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x, y = L)$ est la métrique induite sur la brane par la géométrie 5d. Pour la métrique (3.2), l'action S_H devient :

$$S_H = \int d^4x \left[e^{-2ky} D_\mu H^\dagger D^\mu H - \lambda e^{-4ky} \left(H^\dagger H - \frac{v_H^2}{2} \right)^2 \right] \Big|_{y=L}. \quad (3.18)$$

Il est alors nécessaire de redéfinir le champ de Higgs de manière à le normaliser canoniquement $H \rightarrow e^{kL} H$ et il vient :

$$S_H \rightarrow \int d^4x \left[D_\mu H^\dagger D^\mu H - \lambda \left(H^\dagger H - \frac{e^{-2kL} v_H^2}{2} \right)^2 \right] \quad (3.19)$$

où la VEV du Higgs est maintenant donnée par $\tilde{v}_H = e^{-kL} v_H$. La courbure AdS offre l'opportunité de générer une masse pour le Higgs, et par là-même pour toutes les particules du Modèle Standard, à une échelle relativement basse. En effet, bien qu'une valeur naturelle pour v_H soit donnée par l'échelle fondamentale $M_* \gtrsim M_{Pl}$, la courbure de la métrique implique un décalage vers le rouge de cette dernière jusqu'à éventuellement l'échelle électrofaible. Par ailleurs la taille de la dimension supplémentaire nécessaire à la réalisation d'un tel redshift est relativement faible :

$$\frac{\tilde{v}_H}{v_H} \sim \frac{250 \text{ GeV}}{M_{Pl}} \rightarrow e^{-kL} \sim 10^{-17} \rightarrow kL \sim 40. \quad (3.20)$$

Ainsi pour $k \sim M_{Pl}$, la hiérarchie de jauge est obtenue naturellement avec une petite dimension supplémentaire $L \sim M_{Pl}^{-1}$ à un ordre de grandeur près. En particulier, la VEV du Higgs est stable radiativement puisque toutes les échelles d'énergie, y compris le cut-off ultra-violet, sont décalées vers le rouge par le facteur de courbure exponentiel. Pour cette raison, la brane $y = L$ est appelée la brane électrofaible ou du TeV.

Quelques propriétés en faveur d'une tranche d'anti de Sitter Tous les problèmes évoqués dans le cas ADD peuvent être évités en courbant la dimension supplémentaire et en considérant par exemple une géométrie AdS₅. Dans ce cas, la hiérarchie entre les échelles de Planck et de Fermi peut être produite avec une dimension relativement courte $L \sim 1/M_{Pl}$, évitant ainsi la dilution des couplages de jauge, dont le « running » apparaît par ailleurs logarithmique suite à la courbure d'AdS [9, 10, 19, 18]. Enfin, lorsque les fermions sont plongés dans le bulk, les processus de changements de saveur sont naturellement supprimés grâce au faible recouvrement des fermions du Modèle Standard avec les états véhiculant ces processus. Outre toutes ces propriétés, une forte motivation physique pour une telle géométrie 5d reste sans aucun doute la correspondance AdS/CFT.

3.1.2.3 Correspondance AdS/CFT

Dans le contexte des théories de supercordes, Maldacena [15] remarqua que certaines versions de ces théories, formulées sur un espace compact de géométrie $\text{AdS}_5 \times S^5$, étaient équivalentes, dans certaines limites, à des théories de Yang–Mills $\mathcal{N} = 4$ supersymétriques en quatre dimensions. En particulier, la *conjecture* stipule que, dans un régime de fort couplage de jauge, la théorie de Yang–Mills est équivalente à une théorie des cordes faiblement couplée et vice versa, fournissant ainsi un nouvel espoir de calculabilité en théorie de jauge. Cette correspondance apparaît notamment dans le fait que la théorie $\mathcal{N} = 4$ SYM est invariante conforme⁷ tout comme la géométrie anti de Sitter. En effet, la métrique AdS_5 (3.2) peut s'écrire sous une forme manifestement invariante d'échelle en introduisant la coordonnée conforme z définie comme :

$$z(y) = k^{-1}e^{ky} \rightarrow y(z) = k^{-1} \log(kz), \quad dy = \frac{dz}{kz} \quad (3.21)$$

pour laquelle la métrique de Randall et Sundrum prend la forme :

$$ds^2 = \left(\frac{1}{kz} \right)^2 (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dz^2), \quad (3.22)$$

Ainsi, en plus de satisfaire à l'invariance de Poincaré à 5d, la métrique précédente est laissée invariante par le changement d'échelle :

$$z \rightarrow \alpha z, \quad x_\mu \rightarrow \alpha x_\mu \quad (3.23)$$

pour $0 < z < \infty$. Cette correspondance a été rapidement extrapolée à des modèles phénoménologiques de théorie des champs dans AdS_5 en s'appuyant sur une observation simple : se déplacer le long de la dimension supplémentaire correspond à changer l'énergie des interactions à 4d. En effet, pour un changement d'échelle en z , la transformation précédente impose que x_μ soit modifié de la même façon. De plus, d'après la mécanique quantique, plus la taille du système est réduite plus son impulsion, donc son énergie est assujettie à de grandes fluctuations. Un changement d'échelle en x_μ implique alors nécessairement un changement d'échelle inverse en énergie. Ainsi, $z \rightarrow 0$ est équivalent à $E \rightarrow \infty$ et l'espace AdS_5 constitue une paramétrisation de l'évolution avec l'énergie d'une théorie conforme à quatre dimensions. La raison pour laquelle cette correspondance joue un rôle important est que la physique au-delà de l'échelle électrofaible peut paraître en première approximation invariante d'échelle, du moins jusqu'à ce que la gravitation entre en jeu à partir de $E \sim M_{Pl}$. En effet, pour des énergies vérifiant $\text{TeV} \ll E \ll M_{Pl}$, la théorie ne dépend que faiblement de l'échelle d'énergie car rien⁸ ne suggère l'existence de nouvelles particules entre le TeV et M_{Pl} . L'approche 5d dans une géométrie anti de Sitter fournit alors une formulation très utile de la physique au-delà du Modèle Standard et de son apparente invariance conforme. Dans ce langage, le fait que la théorie microscopique ne soit plus invariante d'échelle autour du TeV et de la masse de Planck implique une troncature de l'espace AdS_5 et par conséquent une compactification de la dimension supplémentaire. On introduit alors une coupure en $z = R \sim M_{Pl}^{-1}$ qui représente simplement l'échelle de cut-off UV de la théorie conforme auquel la gravitation quantique émerge. A ce stade, la théorie reste conforme jusque $E \rightarrow 0$. Pour rendre compte de l'échelle électrofaible, on introduit également une coupure en $z = R' \sim \text{TeV}^{-1}$ correspondant à une brisure spontanée

⁷La fonction β est nulle pour $\mathcal{N} = 4$.

⁸Vue depuis le TeV, l'échelle de grande unification peut être assimilée à l'échelle de Planck. Par ailleurs, l'échelle naturelle d'une nouvelle physique stabilisant le Higgs est le TeV.

dans l'IR de l'invariance conforme. Puisqu'il n'y a aucune échelle intermédiaire dans le spectre, cette brisure doit résulter de la dynamique de la théorie conforme elle-même. Une possibilité est que la théorie devient fortement couplée, à la QCD, et forme des condensats, c'est à dire des états liés composites, à l'échelle du TeV [22, 4]. Cela semble indiquer que l'échelle de brisure électrofaible est générée par un secteur en couplage fort au TeV, qui devient alors, selon cette perspective, une échelle composite générée dynamiquement et non une échelle fondamentale.

Une autre propriété importante de la correspondance AdS/CFT est qu'une symétrie globale dans la théorie conforme 4d est décrite par la même symétrie mais jaugée dans le bulk d'AdS₅. Une façon de s'en convaincre consiste à introduire à 5d une symétrie de jauge G et de la briser dans un sous-groupe H sur un bord, au moyen d'une condition Dirichlet⁹ pour les directions de G correspondant à G/H . Il n'y a alors pas de mode zéro de masse nulle associé à G/H et, par conséquent, ce n'est pas une symétrie de jauge dans la théorie effective quadri-dimensionnelle. En revanche, on remarque que les résonances de Kaluza–Klein garde une trace de la symétrie de jauge G dans le bulk en respectant G/H de manière globale. H étant une symétrie de jauge à 4d, la théorie effective est alors invariante sous les transformations globales G , ce qui justifie la correspondance.

3.2 Un premier exemple avec un champ scalaire

Nous poursuivons par la description d'un exemple simple, un champ scalaire dans un espace Minkowskien 5d, nous permettant d'introduire des concepts clés tels que les conditions aux bords et la décomposition en états de Kaluza-Klein. La dynamique d'un champ plongé dans un espace-temps muni d'une dimension d'espace supplémentaire compacte est très riche. On discutera notamment l'importance du rôle joué par les conditions que doit satisfaire le champ aux bords de la dimension compacte. En effet, pour une dimension non compacte, il est habituellement imposé que le champ s'annule à l'infini, ce qui traduit simplement le fait que les interactions ont lieu dans une région bien délimitée dans l'espace et le temps. Cependant en présence d'une dimension de taille finie, la situation est loin d'être aussi simple. En effet, forcer l'annulation des champs aux bords n'est plus motivé d'un point de vue physique, puisqu'il n'est plus nécessairement possible de « s'éloigner » du lieu d'interaction le long de cette direction. Ainsi, l'ensemble des conditions aux bords permises doit être étendu pour une dimension compacte. Par exemple, si celle-ci est enroulée sur un cercle de rayon r , une généralisation triviale consiste à identifier la valeur du champ — et de ses dérivées — aux deux bords. Dans tous les cas la dynamique de la théorie doit satisfaire au principe de moindre action partout dans l'espace-temps, *y compris sur les bords*. Par conséquent, les conditions aux bords les plus générales peuvent être vues comme déterminées par les équations du mouvement de la théorie sur les bords.

3.2.1 Action minimale et conditions aux bords

Commençons par étudier la dynamique d'un champ scalaire neutre ϕ dans un espace-temps plat à cinq dimensions [11, 6]. La métrique est celle de Minkowski définie

⁹Nous verrons, lorsque nous décrirons les mécanismes de brisures de symétries de jauge à cinq dimensions, comment générer naturellement de telles conditions.

comme :

$$ds^2 = \eta_{MN} dx^M dx^N \quad (3.24)$$

avec $\eta_{MN} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1, -1)$. On adopte à partir de maintenant les notations suivantes pour les coordonnées d'espace-temps. Les lettres romaines majuscules représentent les différentes coordonnées cinq-dimensionnelles valant $M = 0, 1, 2, 3$ ou 5 et en quatre dimensions on utilise les traditionnelles lettres grecques minuscules, $\mu = 0, 1, 2, 3$. Enfin la cinquième coordonnée, notée y , est limitée à l'intervalle $[0, L]$. On notera collectivement par la suite les quatre coordonnées non compactes par x . En l'absence d'opérateur localisé sur les bords, l'action de la théorie s'écrit :

$$S = \int d^4x \int_0^L dy \left(\frac{1}{2} \partial_M \phi \partial^M \phi - V(\phi) \right), \quad (3.25)$$

et sa variation prend la forme suivante :

$$\delta S = \int d^4x \int_0^L dy \left(-\partial_M \partial^M \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) \delta \phi - \left[\int d^4x (\partial_5 \phi) \delta \phi \right]_0^L \quad (3.26)$$

où le terme de bord apparaît suite à l'intégration par partie du terme cinétique. Le principe de moindre action impose $\delta S = 0$. Le premier terme n'est rien d'autre que l'équation du mouvement habituelle, mais ici dans le bulk : $\partial_M \partial^M \phi + \partial V / \partial \phi = 0$, alors que le second ne s'annule que si $(\partial_5 \phi) \delta \phi = 0$ pour $y = 0, L$. Deux possibilités s'offrent alors :

- $\partial_5 \phi = 0$, une condition de type Neumann ou
- $\phi = 0$, une condition de type Dirichlet conduisant à $\delta \phi = 0$. Le champ étant imposé nul, il ne peut donc pas varier.

La première condition est qualifiée de naturelle car elle ne repose *a priori* sur aucune hypothèse sur $\delta \phi$, alors que la seconde peut paraître ad-hoc. Néanmoins, on peut réinterpréter de manière naturelle la condition Dirichlet en modifiant la dynamique de la théorie sur le bord, par exemple en ajoutant à l'action (3.25) un terme de masse localisé en $y = 0$ ou L :

$$S \rightarrow S - \int d^4x \frac{1}{2} M^2 \phi^2 |_{y=0, L}. \quad (3.27)$$

La variation de l'action sur le bord devient alors :

$$\int d^4x (\partial_5 \phi \mp M^2 \phi) \delta \phi |_{y=0, L} \quad (3.28)$$

où le signe $- (+)$ est pour une masse localisée en $y = 0$ ($y = L$). Maintenant, on voit immédiatement que dans la limite où $M \rightarrow \infty$ on retrouve une condition Dirichlet $\phi = 0$ tout en gardant arbitraire $\delta \phi$ sur le bord. Pour M finie, on a simplement un mélange des conditions de type Neumann et Dirichlet, et une variation de M permet de passer de l'une à l'autre continûment. Ce type de condition aux bords sera très utile lorsqu'on considérera les modèles avec brisure de symétrie.

3.2.2 Description effective de la dimension compacte

Depuis l'atome jusqu'aux échelles cosmologiques, l'espace qui nous entoure nous apparaît tridimensionnel. Il est donc clair qu'une dimension supplémentaire ne peut être introduite sans prendre le moindre soin. L'approche naturelle consiste à compactifier

cette dimension, de la rendre de taille finie et relativement courte, de sorte que sa présence ne soit révélée qu'à haute énergie, restant ainsi en accord de manière effective avec le nombre de dimensions observées à des échelles de distance plus grandes¹⁰. Supposons en effet qu'il existe une dimension supplémentaire de taille L et que, dans cet espace-temps 5d, sont étudiées les interactions d'un système donné. On peut alors identifier deux régimes pour lesquels la dynamique de ce dernier est très différente, selon que l'énergie d'interaction mise en jeu E est faible ou non devant L^{-1} . Lorsque $E \gtrsim L^{-1}$, les relations usuelles d'Heisenberg nous indiquent que l'interaction a lieu sur une distance caractéristique $l \lesssim L$. Par conséquent sa dynamique reste insensible à la compactification car elle n'est pas suffisamment « étalée » dans l'espace pour pouvoir sonder sa finitude dans une certaine direction. Dans ce cas, puisque toutes les directions spatiales paraissent équivalentes, la description à courte distance des phénomènes physiques se fait naturellement en terme de champs en cinq dimensions $\phi(x, y)$ et l'intervalle $[0, L]$ dans l'action (3.25) peut être étendu à \mathbb{R} sans modifier la dynamique du système dans ce régime d'énergie. En revanche dans la situation opposée où $E \ll L^{-1}$, le système interagit sur une distance caractéristique beaucoup plus grande $l \gg L$, de sorte que la compactification de l'espace lui est révélée. De plus, sa dynamique lui faisant balayer un volume majoritairement quadri-dimensionnel, une paramétrisation en terme de champ 5d devient inadéquate car elle introduit des degrés de liberté que la trop faible énergie mise en jeu ne permet pas d'exciter. Enfin, dans la limite $E \rightarrow 0$ le système subit une dynamique purement quadri-dimensionnelle et la dimension supplémentaire est totalement découplée, $L = 0$.

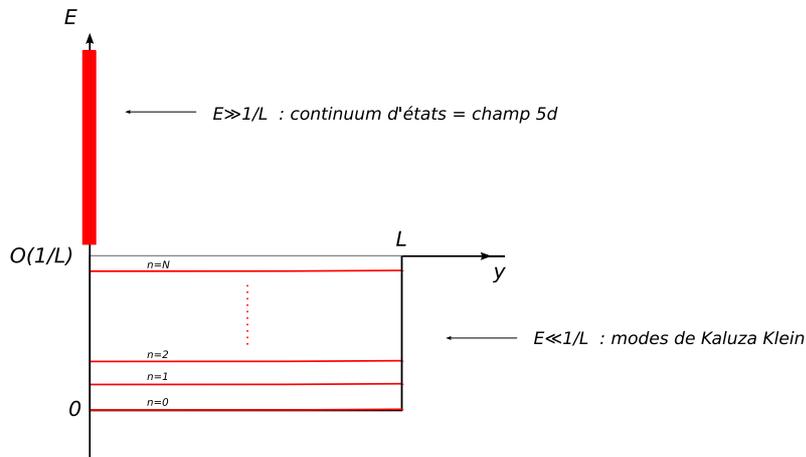


FIG. 3.1 – Représentation imagée de la dynamique d'un champ dans une dimension supplémentaire compacte. La compactification de l'espace sur une distance L est vue comme le confinement du champ dans un puits de potentiel dont la profondeur est de $O(L^{-1})$.

¹⁰Il existe en réalité une autre possibilité consistant à confiner tous les champs sur un bord 4d et leur interdire toute propagation orthogonale à ce dernier. En ce cas, la dimension supplémentaire peut être (semi-)infinie, et sa présence reste imperceptible à basse énergie simplement parce que les champs ne peuvent y pénétrer en profondeur.

3.2.2.1 Décomposition en modes de Kaluza–Klein

On peut formaliser aisément ce comportement à basse énergie en décomposant les degrés de liberté du champ associés à la présence d'une dimension supplémentaire compacte et ainsi réécrire le champ 5d initial comme :

$$\phi(x, y) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x) f_n(y). \quad (3.29)$$

Un telle écriture est connue sous le nom de *décomposition de Kaluza–Klein*. Les $\phi_n(x)$ sont des champs 4d appelés modes de Kaluza–Klein et ils sont quantifiés si la dimension supplémentaire est compacte. Cette quantification est l'exact analogue de celle survenant en physique ondulatoire, où contraindre la propagation d'un champ dans une direction résulte en une quantification de la composante de son impulsion dans cette direction. Dans notre cas, les modes de Kaluza–Klein sont alors les modes propres associés au carré de l'opérateur $P_{M=5}$ générant les translations selon y . L'invariance par translation étant brisée par la compactification, l'impulsion p_5 est quantifiée et on a :

$$P_5^2 |\phi_n(x)\rangle = m_n^2 |\phi_n(x)\rangle, \quad (3.30)$$

où la valeur propre est notée m_n^2 car il s'agit d'une correction à la masse de ϕ_n d'un point de vue quadri-dimensionnel. En effet, la norme carrée de la cinq-impulsion s'écrit $p^2 = p_4^2 - p_5^2 = m_0^2$, où m_0 est la masse 5d¹¹ de ϕ et p_4 la quadri-impulsion usuelle. Or, après compactification, p_5^2 est quantifié et on réinterprète la précédente relation d'un point de vue 4d en écrivant la quadri-impulsion des modes de Kaluza–Klein comme $p_4^2 = m_0^2 + m_n^2$. Un champ fondamental apparaît donc en quatre dimension comme une tour de champs massifs et ce même dans la limite $m_0 \rightarrow 0$! Cette remarquable propriété a été largement exploitée dans la littérature car elle permet, notamment dans les théories de jauge, la génération de particules massives en l'absence de champ scalaire fondamental. Enfin, $f_n(y)$ est la fonction d'onde du mode ϕ_n car elle mesure l'amplitude de probabilité de trouver le champ $\phi(x, y)$ dans l'état n à la position y : $\langle \phi_n(x') | \phi(x, y) \rangle = f_n(y) \delta^{(4)}(x' - x)$. La fonction d'onde définit ainsi avec quel « profil » le mode ϕ_n s'étend dans la dimension supplémentaire et informe éventuellement sur l'endroit où le mode est majoritairement localisé. Alors, de même qu'en mécanique quantique la dynamique d'une particule est entièrement encodée dans sa fonction d'onde, nous verrons que les f_n jouent un rôle primordial dans l'étude phénoménologique des modèles avec dimensions supplémentaires.

Calcul des fonctions d'onde La forme explicite des f_n n'est pas déterminée *a priori* et dépend de la géométrie (locale et globale) de la dimension supplémentaire. Un moyen simple de calculer la fonction d'onde s'appuie sur le fait que $\phi(x, y)$ doit satisfaire son équation du mouvement. En particulier, après compactification, la partie sans interaction de celle-ci doit se réduire en un jeu d'équations du mouvement de même spin en 4d. Chaque mode de Kaluza–Klein de masse $\tilde{m}_n^2 = m_0^2 + m_n^2$, comme le suggère la règle de quantification $p_5^2 = m_n^2$, doit alors satisfaire l'équation du mouvement suivante :

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_0^2 + m_n^2) \phi_n = 0 \quad (3.31)$$

¹¹ Pour un champ scalaire le paramètre de masse est toujours de dimension de masse 1 en cinq dimensions.

Ainsi l'équation du mouvement en volume $(\partial_M \partial^M + m_0^2)\phi(x, y) = 0$ se réduit à une simple équation d'onde pour f_n une fois la décomposition en modes de Kaluza–Klein imposée :

$$f_n''(y) + m_n^2 f_n(y) = 0, \quad \forall x. \quad (3.32)$$

Les solutions sont de la forme : $f_n(y) = A_n \cos(m_n y) + B_n \sin(m_n y)$ et les coefficients A_n, B_n ainsi que le spectre de masse sont déterminés par les conditions aux bords et la condition que ϕ_n soit canoniquement normalisé. Par exemple si y est enroulé sur un cercle de rayon $r = L/2\pi$, les conditions aux bords sont périodiques. On a alors $f_n(0) = f_n(L)$ et $f_n'(0) = f_n'(L)$. Dans ce cas particulier on trouve :

$$f_0(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \text{ et } f_{n>0}(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi r}} \cos(m_n y) \quad (3.33)$$

avec $m_n = n/r$. Dans le cas où $m_0 = 0$, il existe un mode de masse nulle pour $n = 0$ qu'on appelle un mode zéro. Ces modes zéros auront un rôle phénoménologique majeur à jouer car ils pourront naturellement être identifiés aux particules légères observées dans la nature. Une propriété intéressante des modes zéros est que leur fonction d'onde est uniforme ou « plate » : $f_0(y) = A_0$. Ainsi, si le champ satisfait une condition de type Dirichlet sur un bord $\phi = 0$, il ne contient pas de mode de masse nulle, puisque sa fonction d'onde est constante et s'annule en un point. Ceci illustre l'importance des conditions aux bords Dirichlet évoquée ci-dessus concernant la génération de termes de masse à partir de la compactification.

3.2.2.2 Action effective en quatre dimensions

Voyons enfin comment s'écrit l'action cinq-dimensionnelle (3.25) en termes des états de Kaluza–Klein à quatre dimensions. Insérant (3.29) dans (3.25) on obtient :

$$S = \frac{1}{2} \sum_{n,m} \int_0^L dy \int d^4x [f_n f_m (\partial_\mu \phi_n \partial^\mu \phi_m - m_0^2 \phi_n \phi_m) - f_n' f_m' \phi_n \phi_m] + \dots \quad (3.34)$$

où \dots représente d'éventuels termes d'interaction entre les modes de Kaluza–Klein. On peut ensuite tirer profit du fait que les f_n constituent une base de solutions orthonormées de l'équation d'onde et vérifient la relation :

$$\int_0^L dy f_n(y) f_m(y) = \delta_{nm}. \quad (3.35)$$

Cependant, il est nécessaire dans un premier temps de remanier le dernier terme pour lui donner une forme plus appropriée. En intégrant ce dernier par partie et utilisant l'équation d'onde $f_n'' = -m_n^2 f_n$, l'action devient¹² :

$$S = \frac{1}{2} \sum_n \int d^4x [\partial_\mu \phi_n \partial^\mu \phi_n - (m_0^2 + m_n^2) \phi_n^2] + \dots \quad (3.36)$$

après avoir intégré explicitement la dimension supplémentaire et utilisé la relation (3.35). Dans la limite où $m_0 \ll L^{-1}$ on peut également estimer, pour un processus d'énergie E , le nombre N de modes de Kaluza–Klein qu'il est possible d'exciter : $N \sim E/m_{KK}$, où m_{KK} est la différence de masse typique entre deux modes.

¹²L'intégration par partie génère également un terme de bord de la forme $[f_n' f_m]_0^L$ qui s'annule nécessairement puisque le champ satisfait soit une condition Neumann ou Dirichlet aux bords.

Comme l'illustre le cas d'une dimension circulaire considéré ci-dessus, on a typiquement $m_{KK} \sim L^{-1}$. Par conséquent, pour $E \ll L^{-1}$, seul le mode zéro est accessible et la théorie apparaît effectivement comme quadri-dimensionnelle. On peut alors obtenir son action effective en intégrant tous les autres modes de Kaluza–Klein dont la présence se manifesterait au travers d'opérateurs non renormalisables, et dont les effets produits seront supprimés par un facteur au plus d'ordre $\mathcal{O}(EL)$. Enfin, pour $E \gg L^{-1}$, il est nécessaire de considérer un grand nombre de modes de Kaluza–Klein pour rendre compte de la dynamique des interactions, ce qui traduit le fait que le système ressent de moins en moins la compacité de l'espace et requiert une description purement cinq-dimensionnelle. Remarquons pour conclure que, comme l'illustre la figure 3.1, la physique d'une dimension supplémentaire compacte présente beaucoup de ressemblances avec le confinement d'une particule dans un puits de potentiel, dont la profondeur est contrôlée ici par L^{-1} . Dans le puits ($E \lesssim L^{-1}$), p_5 est quantifié et le système est décrit à l'aide de N modes de Kaluza–Klein. Au dessus du puits ($E \gtrsim L^{-1}$), l'espace paraît infini et on a alors un continuum d'états correspondant à l'infinité de degré de liberté d'un champ 5d.

3.3 Dynamique des théories de jauge 5d

3.3.1 Théorie de Yang–Mills pure

Nous allons revoir maintenant la dynamique d'une théorie de jauge dans un espace-temps muni d'une cinquième dimension compacte de type espace. On se limite à la situation simplifiée où les tranches quadri-dimensionnelles de cet espace-temps sont plates de manière à reproduire l'invariance globale de Poincaré observée à 4d. En d'autres termes, cela correspond au choix d'un vide dépourvu de constante cosmologique en $d = 4$ au dessus duquel la gravitation est également négligée. L'action de Yang–Mills pour le groupe $SU(N)$ plongée dans une géométrie courbe à cinq dimensions s'écrit :

$$S_{YM} = -\frac{1}{4} \int d^5x \sqrt{g} g^{MP} g^{NQ} F_{MN}^a F_{PQ}^a \quad (3.37)$$

avec $F_{MN}^a = \partial_M A_N^a - \partial_N A_M^a + g_5 f^{abc} A_M^b A_N^c$ où la dérivée généralement covariante du champ de jauge $\nabla_M A_N = \partial_M A_N - \Gamma_{MN}^P A_P$ se réduit à une dérivée usuelle car la connexion est symétrique sous l'échange $M \leftrightarrow N$. g est le déterminant de la métrique g_{MN} dont g^{MN} est l'inverse satisfaisant : $g_{MP} g^{PN} = \delta_N^M$. g_5 est le couplage de jauge de dimension de masse¹³ $-1/2$ et f^{abc} sont les constantes de structure du groupe de jauge. On utilisera la métrique générique suivante :

$$ds^2 = \omega(z)^2 (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dz^2) \quad (3.38)$$

exprimée en terme de la coordonnée conforme z limitée à l'intervalle $R \leq z \leq R'$ et reliée à la coordonnée physique y par $y(z) = \int_R^z dz' \omega(z')$. On considérera par la

¹³En d dimensions le terme cinétique contient un terme quadratique $(\partial A)^2$ conduisant à $[A] = d/2 - 1$, ainsi qu'un terme d'interaction de la forme $g_d (\partial A) A A$ duquel on déduit la dimension du couplage de jauge $[g_d] = 2 - d/2$. Par conséquent pour $d > 4$, $g_d < 0$ et la théorie est non renormalisable. Elle perd toute prédictibilité dans l'ultra-violet car elle devient fortement couplée dans ce régime. Dans l'infrarouge, elle constitue néanmoins une théorie effective calculable perturbativement et l'action (3.37) doit être vue comme une approximation de cette dernière où les invariant de dimensions > 5 sont négligés.

suite les limites suivantes : $\omega(z) = 1$ ($R = 0$), correspondant à un espace-temps plat et $\omega(z) = R/z$ définissant une géométrie anti de Sitter à cinq dimensions où $R^{-1} = k$ est la courbure d'AdS₅ engendrée par une constante cosmologique négative $\Lambda_5 = -12M_{Pl}^3/R^2$. Pour la métrique conformément plate ci-dessus, l'action de Yang–Mills prend la forme :

$$S_{YM} = -\frac{1}{4} \int d^5x \omega (F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + 2F_{\mu 5}^a F^{a\mu 5}) \quad (3.39)$$

où $F_{55} = 0$ par antisymétrie du tenseur de jauge. Un point important est que le second terme donnera lieu à un mélange cinétique entre les modes de Kaluza–Klein de A_μ et A_5 après intégration de la dimension compacte :

$$S_{YM} \supset - \int d^5x \partial_\mu (\omega A_5^a) \partial_5 A^{a\mu} \quad (3.40)$$

Il faut donc éliminer ce terme d'une manière ou d'une autre. Un autre aspect omis jusqu'à présent est la nécessité de fixer la jauge au niveau quantique. La procédure habituelle de Faddeev-Popov consiste à introduire un terme fixation de jauge dans le lagrangien¹⁴. Ainsi on peut faire un choix de fixation de jauge qui compense exactement le mélange cinétique présent dans l'action de Yang-Mills¹⁵. On se place ainsi dans la jauge R_ξ en introduisant le terme de fixation suivant :

$$S_{fg} = -\frac{1}{2\xi} \int d^5x \omega [\partial_\mu A^{a\mu} - \xi \omega^{-1} \partial_5 (\omega A_5^a)]^2. \quad (3.41)$$

Ce terme est choisi tel que la partie indépendante de A_5 corresponde à la jauge de Lorentz en quatre dimensions. Une fixation de jauge de Lorentz à 5d ne présente guère d'intérêt ici puisque celle-ci est brisée par la compactification. Également, comme à 4d, la fixation de jauge n'est pas invariante de jauge. S_{fg} contient un terme qui, après intégration par partie, compense le mélange (3.40) :

$$\begin{aligned} S_{fg} &\supset \int d^5x \partial_\mu A^{a\mu} \partial_5 (\omega A_5^a) \\ &= \int d^5x \partial_5 A^{a\mu} \partial_\mu (\omega A_5^a) + \int d^4x [\omega A_5^a \partial_\mu A^{a\mu}]_R^{R'}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Cependant, l'élimination n'est pas complète car l'intégration par partie a réintroduit un mélange localisé sur le bord. On peut néanmoins réitérer la procédure et fixer différemment la jauge sur le bord en ajoutant les termes de fixation de jauge localisés :

$$S_{fg}^b = -\frac{1}{2\xi_b} \int d^4x \left\{ \omega (\partial_\mu A^{a\mu} \mp \xi_b A_5^a)^2 \right\}_{z=R, R'} \quad (3.43)$$

où + (−) correspond au bord $z = R'$ ($z = R$)¹⁶. Ainsi, S_{fg}^b annule exactement le mélange sur le bord produit par S_{fg} :

$$S_{fg}^b \supset - \int d^4x [\omega \partial_\mu A^{a\mu} A_5^a]_R^{R'} \quad (3.44)$$

¹⁴Les champs fantômes de Faddeev-Popov doivent également être introduits pour conserver une trace au niveau quantique de la symétrie de jauge, malgré la fixation. Ces derniers n'apparaissent pas au niveau des arbres et la phénoménologie des théories de jauge en $d = 5$ ne s'aventurant que rarement dans les corrections à boucles, on omettra par la suite ces degrés de liberté. [17] présente une discussion élémentaire des fantômes en cinq dimensions.

¹⁵Cette approche est inspirée de celle utilisée pour la brisure spontanée d'une théorie de jauge. Dans ce cas, le terme cinétique du Higgs génère après brisure un mélange quadratique entre les champs de Goldstone et de jauge. On choisit alors de fixer la jauge de manière à ce que le mélange disparaisse.

¹⁶A priori le paramètre de fixation ξ_b peut être différent sur les deux bords. Le choix particulier fait ici n'aura guère d'importance car on se placera assez rapidement dans la jauge unitaire $\xi = \xi_b \rightarrow \infty$.

et l'action complète $S = S_{YM} + S_{fg} + S_{fg}^b$ est affranchie de mélange cinétique dans le bulk *et* sur les bords. Il reste maintenant à évaluer la variation de celle-ci afin de déterminer les conditions aux bords auxquelles les champs A_μ^a et A_5 doivent satisfaire pour se plier au principe de moindre action. La variation de S_{YM} s'écrit comme :

$$\begin{aligned} \delta S_{YM} &= \int dx^5 \omega \left[\delta A^{a\nu} \left(D^\mu F_{\mu\nu}^a - D_5 F_{5\nu}^a - \frac{\omega'}{\omega} F_{5\nu}^a \right) - \delta A_5^a (D^\mu F_{\mu 5}^a) \right] \\ &\quad - \int d^4x \left[\omega \delta A^{a\mu} F_{\mu 5}^a \right]_{R'}^{R'} \end{aligned} \quad (3.45)$$

où le terme de bord apparaît après intégration par partie du terme cinétique et $D^M F_{MN}^a = \partial^M F_{MN}^a + g_5 f^{abc} A^{bM} F_{MN}^c$ est la dérivée covariante de jauge. Tandis que les variations des divers termes de fixation de jauge sont données par :

$$\begin{aligned} \delta S_{fg} &= \int d^5x \left\{ \omega \delta A^{a\nu} \left[\frac{1}{\xi} \partial_\mu \partial_\nu A^{a\mu} - \omega^{-1} \partial_5 (\omega \partial_\nu A_5^a) \right] \right. \\ &\quad \left. - \omega \delta A_5^a [\partial_5 \partial_\mu A^{a\mu} - \xi \partial_5 (\omega^{-1} \partial_5 (\omega A_5^a))] \right\} \\ &\quad + \int d^4x \left[\omega \delta A_5^a (\partial_\mu A^{a\mu} - \xi \omega^{-1} \partial_5 (\omega A_5^a)) \right]_{R'}^{R'}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

ainsi que :

$$\begin{aligned} \delta S_{fg}^b &= \int d^4x \left\{ \omega \delta A^{a\nu} \left(\frac{1}{\xi_b} \partial_\mu \partial_\nu A^{a\mu} \mp \partial_\nu A_5^a \right) \right. \\ &\quad \left. - \omega \delta A_5^a (\xi_b A_5^a \mp \partial_\mu A^{a\mu}) \right\}_{z=R, R'}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Rassemblant les termes de (3.45), (3.46) et (3.47), on obtient les équations du mouvement en volume :

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta A^{a\nu}} = 0 &\rightarrow D^M F_{M\nu}^a - \frac{\omega'}{\omega} F_{5\nu}^a + \frac{1}{\xi} \partial_\nu \partial_\mu A^{a\mu} \\ &\quad - \omega^{-1} \partial_5 (\omega \partial_\nu A_5^a) = 0, \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\frac{\delta S}{\delta A_5^a} = 0 \rightarrow D^\mu F_{\mu 5}^a + \partial_5 \partial_\mu A^{a\mu} - \xi \partial_5 (\omega^{-1} \partial_5 (\omega A_5^a)) = 0. \quad (3.49)$$

et imposer l'annulation des variations sur le bord conduit aux conditions suivantes :

$$\left. \frac{\delta S}{\delta A^{a\nu}} \right|_b = 0 \rightarrow \frac{1}{\xi_b} \partial_\mu \partial_\nu A^{a\mu} \pm F_{\nu 5}^a \mp \partial_\nu A_5^a = 0, \quad (3.50)$$

$$\left. \frac{\delta S}{\delta A_5^a} \right|_b = 0 \rightarrow \xi_b A_5^a \mp \xi \omega^{-1} \partial_5 (\omega A_5^a) = 0. \quad (3.51)$$

Les conditions aux bords déterminent les fonctions d'onde pour les modes de Kaluza–Klein qui, par définition, diagonalisent la partie libre de l'action effective. On obtient donc ces conditions en se limitant aux termes quadratiques de (3.50) et (3.51) :

$$\left. \frac{\delta S_{libre}}{\delta A^{a\nu}} \right|_b = 0 \rightarrow \frac{\delta S}{\delta A^{a\nu}} \partial_5 A_\nu^a \pm \frac{1}{\xi_b} \partial_\mu \partial_\nu A^{a\mu} = 0, \quad (3.52)$$

$$\left. \frac{\delta S_{libre}}{\delta A_5^a} \right|_b = 0 \rightarrow \xi \omega^{-1} \partial_5 (\omega A_5^a) \mp \xi_b A_5^a = 0. \quad (3.53)$$

Enfin, en se plaçant dans la jauge unitaire sur le bord ($\xi_b \rightarrow \infty$), les conditions précédentes deviennent :

$$\partial_5 A_\nu^a|_{z=R,R'} = A_5^a|_{z=R,R'} = 0. \quad (3.54)$$

Notons tout d'abord que ces conditions sont indépendantes de la courbure ω de la dimension supplémentaire. Il s'agit par ailleurs de conditions aux bords dites naturelles que l'on obtient pour des variations arbitraires des champs. Pareillement au cas scalaire, on pourrait imposer une condition Dirichlet pour A_μ qui satisfait trivialement aux équations du mouvement sur le bord, puisque $\delta A_\mu = 0$. En revanche, s'inspirant toujours du cas scalaire, on peut obtenir une condition de type $A_\mu = 0$ en introduisant un terme de masse localisée sur le bord. Un tel terme briserait explicitement la symétrie de jauge sur le bord, il est donc nécessaire de générer cette masse spontanément via la dynamique d'un champ scalaire localisé sur le bord.

3.3.1.1 Modes de Kaluza–Klein

Décrivons maintenant le spectre de Kaluza–Klein de la théorie de jauge. Le champ de jauge de masse nulle A_M contient trois degrés de liberté physiques (les trois polarisations transverses à la direction de propagation du champ) se redistribuant d'un point de vue quadri-dimensionnel en un vecteur A_μ (deux polarisations) et un scalaire A_5 (une seule polarisation). Après compactification, A_μ et A_5 génèrent chacun leur propre tour d'états de Kaluza–Klein. Et ces champs à quatre dimensions sont *massifs* ! Par conséquent, suite à la compactification, chaque mode de A_μ doit absorber un troisième degré de liberté, qui n'est autre que celui contenu dans A_5 . On peut intuitivement comprendre ce résultat en le comparant au phénomène de brisure spontanée en $d = 4$. En effet, lorsqu'un champ scalaire fondamental brise spontanément une symétrie de jauge selon une direction du groupe, alors la composante scalaire associée à cette direction — le boson de Goldstone — est « absorbée » par le champ de jauge devenu massif pour former sa composante longitudinale. Ici, c'est la compactification d'une direction de l'espace, brisant l'invariance par translation, qui produit une tour de champs de jauge massifs en $d = 4$ et chaque étage de celle-ci absorbe le champ scalaire associé à la direction compacte, A_5 . On peut également se convaincre de l'existence de ce mécanisme de Higgs extra-dimensionnel en regardant d'un peu plus près l'équation du mouvement satisfaite par A_5 et en particulier comment ce champ se propage dans la jauge unitaire. L'inverse du propagateur est défini par la partie libre de (3.49) :

$$[\square_4 - \xi \partial_5 (\omega^{-1} \partial_5 (\omega \cdot))] A_5^a = 0. \quad (3.55)$$

où $\square_4 = \partial_\mu \partial^\mu$. Il convient alors de distinguer séparément le mode zéro et les résonances massives et on introduit la décomposition suivante :

$$A_5^a(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,5}^a(x) h_n(z). \quad (3.56)$$

Les modes de Kaluza-klein de A_5 se transforment comme des scalaires de $SO(3,1)$ et vérifient l'équation du mouvement $(\square_4 + m_n^2) A_{n,5} = 0$. Le propagateur précédent conduit à l'équation d'onde suivante :

$$[m_n^2 + \xi \partial_5 (\omega^{-1} \partial_5 (\omega \cdot))] h_n = 0. \quad (3.57)$$

On remarque alors que le mode zéro de masse nulle se propage quelque soit la jauge ξ et vérifie :

$$\partial_5 (\omega^{-1} \partial_5 (\omega h_0)) = 0. \quad (3.58)$$

En revanche, les modes $n \neq 0$ apparaissent avec une masse dépendante de jauge $m_n \propto \sqrt{\xi}$ qui devient infinie dans la jauge unitaire, forçant ainsi $h_n(z) = 0$. Ceci illustre le mécanisme évoqué plus haut. Les modes massifs de A_5 découpent dans la jauge unitaire et deviennent les composantes longitudinales des modes massifs de A_μ . Par conséquent, le spectre de Kaluza–Klein d’un champ de jauge consiste en une tour de vecteurs A_μ plus éventuellement un scalaire, le mode zéro associé à A_5 .

Il reste enfin à dériver l’équation d’onde déterminant les fonctions d’ondes des modes de Kaluza–Klein de A_μ dont la décomposition s’écrit comme :

$$A_\mu^a(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,\mu}^a(x) f_n(z). \quad (3.59)$$

Les modes de Kaluza–Klein $A_{n,\mu}$ diagonalisent l’action quadratique, par conséquent leur fonction d’onde est déterminée par la partie libre de l’équation du mouvement (3.48) :

$$\left[(\square_4 - \omega^{-1} \partial_5 (\omega \partial_5)) \eta^{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\mu \partial^\nu \right] A_\mu^a = 0. \quad (3.60)$$

En imposant en outre que la dynamique de chaque mode soit définie par l’équation du mouvement usuelle en $d = 4$ d’un vecteur massif¹⁷ dans la jauge R_ξ :

$$\left[\eta_{\mu\nu} (\square_4 + m_n^2) - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\mu \partial_\nu \right] A_n^{a\mu} = 0, \quad (3.61)$$

on obtient l’équation d’onde suivante :

$$f_n''(z) + \frac{\omega'(z)}{\omega(z)} f_n'(z) + m_n^2 f_n(z) = 0. \quad (3.62)$$

Dans les deux limites évoquées ci-dessus, M_5 et AdS_5 , celle-ci devient :

$$\omega(z) = 1 \quad \rightarrow \quad f_n''(z) + m_n^2 f_n(z) = 0, \quad (3.63)$$

$$\omega(z) = \frac{R}{z} \quad \rightarrow \quad f_n''(z) - z^{-1} f_n'(z) + m_n^2 f_n(z) = 0. \quad (3.64)$$

dont les solutions sont de la forme :

$$M_5 \quad \rightarrow \quad f_n(z) = A_n \cos(m_n z) + B_n \sin(m_n z), \quad (3.65)$$

$$AdS_5 \quad \rightarrow \quad f_n(z) = z [A_n J_1(m_n z) + B_n Y_1(m_n z)] \quad (3.66)$$

où J_1 et Y_1 sont les fonctions de Bessel d’ordre 1 de première et deuxième espèce respectivement. On remarque également que dans les deux cas, le mode de masse nulle a une fonction d’onde plate, puisque les fonctions de Bessel d’ordre 1 admettent le développement suivant à l’origine :

$$J_1(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}, \quad Y_1(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{2}{\pi x}. \quad (3.67)$$

Ainsi, dans AdS_5 , le premier terme de f_n s’annule¹⁸ dans la limite $m_n \rightarrow 0$ alors que le second est constant en z .

¹⁷Le champ de jauge en $d = 5$ étant sans masse, la masse de chaque mode de Kaluza–Klein est exclusivement celle issue de la quantification $p_5^2 = m_n^2$.

¹⁸ceci requiert également que A_n soit au plus proportionnel à m_n^0 , ce qui est toujours le cas.

3.3.2 Mécanisme de Higgs localisé

Les conditions aux bords naturelles pour le champ de jauge sont de type Neumann pour A_μ et Dirichlet pour A_5 de sorte que seul le vecteur possède un mode de masse nulle. Sa présence traduit le fait qu'il persiste en quatre dimensions une invariance de jauge résiduelle : $A_{0,\mu} \rightarrow A_{0,\mu} + \partial_\mu \eta$, alors que les résonances massives de Kaluza–Klein sont le résultat de la brisure engendrée par la compactification de la symétrie de jauge initiale en $d = 5$. Ainsi, avec des conditions aux bords de type Neumann, la compactification de la dimension supplémentaire ne brise pas la symétrie de jauge associée au mode zéro, qui est celle se manifestant à basse énergie¹⁹. Formuler en ces termes, on perçoit immédiatement la possibilité de briser des symétries de jauge en $d = 4$ en compactifiant convenablement la dimension supplémentaire : il suffit simplement d'imposer une condition aux bords Dirichlet pour A_μ de manière à se débarrasser de son mode de masse nulle. La théorie de jauge effective qui émergera en quatre dimensions aura alors seulement des résonances massives. Forcer une condition Dirichlet correspond à une brisure explicite de la symétrie ce qui, tout comme en quatre dimensions, n'est pas souhaitable si l'on souhaite préserver un comportement régulier dans l'ultra-violet de la théorie. Une façon simple de s'en convaincre consiste à se rappeler qu'une telle condition au bord s'obtient naturellement en ajoutant un terme de masse localisé sur le bord et en découplant celle-ci en l'envoyant à l'infini. Évidemment, un tel terme de masse n'est pas invariant de jauge, mais on peut néanmoins le générer spontanément via un mécanisme de Higgs sur le bord. On se propose de décrire dans un premier temps la dynamique de brisure spontanée sur un bord d'une symétrie de jauge, pour ensuite en discuter les bénéfices vis-à-vis d'un mécanisme de Higgs quadri-dimensionnel.

3.3.2.1 Action scalaire sur le bord

On étend donc l'action de Yang–Mills décrite précédemment en ajoutant, par exemple sur le bord $z = R'$, un champ scalaire vivant dans une quelconque représentation non triviale r de $SU(N)$ et dont la dynamique est décrite par le lagrangien suivant :

$$\begin{aligned} S_\phi &= \int d^5x \sqrt{\hat{g}} \left[\frac{1}{2} \hat{g}^{\mu\nu} D_\mu \phi_i D_\nu \phi_i - V(\phi_i) \right] \delta(z - R') \\ &= \int d^4x \left[\omega^4 \left(\frac{1}{2} \omega^{-2} (D_\mu \phi_i)^2 - V(\phi_i) \right) \right]_{z=R'} \end{aligned} \quad (3.68)$$

où $\hat{g}_{\mu\nu}(x) \equiv g_{\mu\nu}(x, z = R')$ est la métrique induite sur le bord. On a choisi d'exprimer le champ scalaire complexe comme un jeu de N composantes réelles ϕ_i . La dérivée covariante de jauge s'écrit alors :

$$D_\mu \phi_i = \partial_\mu \phi_i + g_5 A_\mu^a t_{ij}^a \phi_j \quad (3.69)$$

avec t^a sont des matrices réelles symétriques reliées aux générateurs T^a de la représentation r par la relation $t^a = -iT^a$. On obtient une norme canonique pour ϕ_i après avoir redéfini $\phi_i \rightarrow \omega^{-1} \phi_i$ et l'action devient :

$$S_\phi = \int d^4x \left[\frac{1}{2} D_\mu \phi_i D^\mu \phi_i - \omega^4 V(\omega^{-1} \phi_i) \right]_{z=R'} , \quad (3.70)$$

¹⁹ c'est à dire pour $E \ll L^{-1}$ avec $L = \int_R^{R'} dz \omega(z)$ la longueur physique de la dimension supplémentaire.

Si on choisit le potentiel tel qu'il déstabilise l'origine et soit minimal pour $\phi_i = \langle \phi_i \rangle \neq 0$, alors, en développant le champ autour du véritable vide $\phi_i = \langle \phi_i \rangle + \chi_i$, l'action sur le bord devient :

$$S_\phi = \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \chi_i)^2 + g_5 \partial_\mu \chi_i A^{a\mu} F_i^a + \frac{g_5^2}{2} F_i^a F_i^b A_\mu^a A^{b\mu} - \tilde{V}(\chi_i) \right] \quad (3.71)$$

avec $F_i^a \equiv \omega^{-1} t_{ij}^a \langle \phi_j \rangle$. Comme d'habitude la brisure spontanée a introduit un mélange quadratique scalaire/vecteur qu'on élimine facilement en remplaçant le terme de fixation de jauge (3.43) par l'extension suivante sur le bord R' :

$$S_{fg}^b|_{z=R'} \rightarrow -\frac{1}{2\xi_b} \int d^4x \omega \left[\partial_\mu A^{a\mu} + \xi_b (A_5^a - g_5 \omega^{-1} F_i^a \chi_i) \right]^2. \quad (3.72)$$

Ce dernier contient désormais les termes nécessaires pour annuler tous les mélanges cinétiques entre vecteur et scalaires provenant de (3.41) et (3.71) :

$$S_{fg}^b|_{z=R'} \supset - \int d^4x \omega \partial_\mu A^{a\mu} A_5^a - g_5 F_i^a \int d^4x A^{a\mu} \partial_\mu \chi_i. \quad (3.73)$$

La présence de ϕ_i affecte les conditions aux bords en $z = R'$ en générant spontanément la matrice de masse $F_i F_i \propto \omega^{-2} \langle \phi_i \rangle^2$ pour le champs de jauge A_μ .

3.3.2.2 Génération spontanée de conditions aux bords Dirichlet

En évaluant à nouveau la variation de l'action totale $S \rightarrow S + S_\phi$, où S_{fg}^b est maintenant donné par (3.72), on dérive sur le bord les équations du mouvement suivantes pour les différents champs :

$$\left. \frac{\delta S}{\delta A^{a\nu}} \right|_{R'} = 0 \rightarrow \partial_5 A_\nu^a + \frac{1}{\xi_b} \partial_\mu \partial_\nu A^{a\mu} + g_5^2 \omega^{-1} F_i^a F_i^b A^{b\nu} = 0, \quad (3.74)$$

$$\left. \frac{\delta S}{\delta A_5^a} \right|_{R'} = 0 \rightarrow \xi \omega^{-1} \partial_5 (\omega A_5^a) + \xi_b A_5^a \omega - g_5 \xi_b F_i^a \chi_i = 0, \quad (3.75)$$

$$\left. \frac{\delta S}{\delta \chi_i} \right|_{R'} = 0 \rightarrow \square_4 \chi_i + m_{ij}^2 \chi_j + g_5 \omega^{-1} \xi_b F_i^a F_j^a \chi_j - g_5 \xi_b F_i^a A_5^a = 0 \quad (3.76)$$

où m_{ij}^2 est la matrice de masse pour χ_i :

$$m_{ij}^2 \equiv \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right|_{\phi_i = \langle \phi_i \rangle} \propto \omega^{-2} \langle \phi_i \rangle \langle \phi_j \rangle. \quad (3.77)$$

Dans la jauge unitaire $\xi, \xi_b \rightarrow \infty$, la condition au bord naturelle pour A_μ prend la forme suivante :

$$\partial_5 A_\mu^a = -\mathcal{V}^{ab} A_\mu^b, \quad \mathcal{V}^{ab} \equiv g_5^2 \omega^{-1} (R') F_i^a F_i^b. \quad (3.78)$$

Ainsi la VEV du Higgs sur le bord permet d'interpoler entre les conditions Neumann et Dirichlet. Pour $\mathcal{V} = 0$ la symétrie n'est pas brisée et la condition au bord redevient de type Neumann. En revanche pour $\mathcal{V} \rightarrow \infty$ le champ A_μ doit s'annuler au bord. Pour A_5 , la situation est un peu plus compliquée car son équation du mouvement et celle de

χ_i sont couplées. Dans la jauge unitaire sur le bord l'équation du mouvement pour χ impose la contrainte suivante :

$$gF_i^a \chi_i - \omega A_5^a = 0 \quad (3.79)$$

sous laquelle l'équation du mouvement pour A_5 se réduit à :

$$\xi \omega^{-1} \partial_5 (\omega A_5) = 0. \quad (3.80)$$

Ainsi dans la jauge unitaire en volume on obtient $\partial_5(\omega A_5) = 0$ et A_5 satisfait une condition Neumann.

3.3.2.3 Limite de découplage et restauration de l'unitarité perturbative

Dans un modèle de brisure électrofaible à 4d, comme par exemple dans le Modèle Standard, la masse des bosons de jauge est proportionnelle à la VEV du Higgs qui brise spontanément la symétrie, $m \sim v$. De plus, le rapport de la masse du Higgs à cette dernière est indépendant de v , si bien que le boson scalaire est tenu de vivre à la même échelle que les bosons de jauge. A 5d, la situation est différente car la compactification constitue une seconde source de production de masse $m \sim 1/R'$. En l'absence de terme de bord, le principe de moindre action assure l'existence d'un mode zéro pour A_μ véhiculant ainsi une interaction de jauge à longue portée à 4d. En revanche, pour une condition au bord Dirichlet, ce mode est éliminé et l'interaction est alors véhiculée par une résonance de Kaluza–Klein massive de portée finie $\sim R'$. La symétrie de jauge est brisée simplement en imposant $A_\mu = 0$ sur un bord. Cette condition n'est en revanche pas naturelle et correspond à une brisure explicite de la symétrie. Cependant, nous venons de montrer qu'elle peut être générée par un mécanisme de Higgs usuel, localisé sur le bord. Une propriété cruciale est qu'ici la masse du boson de jauge est issue de deux mécanismes distincts $m \sim v + 1/R'$. Il n'est alors plus nécessaire de conserver un scalaire léger dans la théorie. On peut découpler totalement ce dernier et conserver une masse finie pour les bosons de jauge. Dans ce cas, la limite de découplage est affublée du titre de limite *Higgsless* [6]. Dans cette limite, Csaki et al. montrèrent notamment que l'échelle de violation de l'unitarité perturbative, dans les amplitudes de diffusion des bosons de jauge longitudinaux, est repoussée jusqu'au cut-off UV de la théorie de jauge 5d, sa restauration à basse énergie étant assurée par l'échange des états de Kaluza–Klein pourvu que les couplages de jauge satisfont aux règles de somme suivantes²⁰ :

$$g_{nnnn}^2 = \sum_k g_{nnk}^2, \quad (3.81)$$

$$4m_n^2 g_{nnnn}^2 = 3 \sum_k m_k^2 g_{nnk}^2. \quad (3.82)$$

g_{nnnn}^2 est le couplage quartique caractérisant l'interaction de contact entre quatre états de Kaluza–Klein $A_{n,\mu}$, alors que g_{nnk} est le couplage cubique entre deux états n entrants (ou sortant) et l'état k échangé. Ils sont donnés, dans la théorie effective 4d, par les intégrales de recouvrement entre les fonctions d'onde des divers modes, après

²⁰Ces règles sont dérivées en demandant à ce que les termes croissants comme E^4 et E^2 s'annulent à l'arbre pour la diffusion de deux bosons de jauge $A_{n,\mu}$

insertion de la décomposition de Kaluza–Klein :

$$g_{nnnn}^2 = g_5^2 \int_R^{R'} dz \omega(z) f_n(z)^4, \quad (3.83)$$

$$g_{nnk} = g_5 \int_R^{R'} dz \omega(z) f_n(z)^2 f_k(z). \quad (3.84)$$

Les fonctions d'onde dépendent bien évidemment des conditions aux bords imposées, mais on montre que la première règle de somme ci-dessus est toujours vraie pourvu que les f_n constituent un ensemble complet de solutions orthogonales à l'équation d'onde, ce qui est toujours le cas. La seconde relation n'est en revanche satisfaite que pour des conditions aux bords Neumann et/ou Dirichlet. Ainsi, pour \mathcal{V} finie et une condition au bord du type (3.78), il demeure des termes croissants comme E^2 dans les amplitudes de diffusion. En revanche, il est alors possible d'échanger un scalaire de Higgs dont la masse, dans ce cas, est également finie. On montre alors que la contribution de ce nouvel échange annule le terme en E^2 précédent. Les amplitudes sont donc unitarisées non seulement en présence d'un Higgs sur le bord, mais également dans la limite Higgsless. Cela illustre encore une fois la séparation, réalisée par la compactification, entre les masses des bosons de jauge (introduisant des composantes longitudinales pouvant violer l'unitarité) et la VEV du Higgs.

3.3.3 Équations de quantification et spectres de masse

Nous pouvons à présent déduire des diverses conditions aux bords Neumann et/ou Dirichlet les masses des états de Kaluza–Klein pour le champ de vecteur A_μ . Nous nous cantonnerons au cas Minkowskien et anti de Sitter. Dans la limite où les VEV scalaires sont soit nulles ou infinies, il existe quatre combinaisons de conditions aux bords distinctes que nous notons comme $[++]$, $[--]$, $[+-]$ et $[-+]$ selon que A_μ (signe $-$) ou $\partial_5 A_\mu$ (signe $+$) s'annule en $z = R$ (premier signe) ou $z = R'$ (second signe). Nous avons vu que les fonctions d'onde des modes de masse nulle sont nécessairement plates dans M_5 et AdS_5 . Ainsi le cas $[++]$ possède un mode zéro. Les masses des résonances sont données par les équations de quantification suivantes, que l'on déduit des fonctions d'onde (3.65) et (3.66) :

$$M_5 : \begin{cases} [++] & \rightarrow \sin(m_n R') = 0 \\ [--] & \rightarrow \sin(m_n R') = 0 \\ [+-] & \rightarrow \cos(m_n R') = 0 \\ [-+] & \rightarrow \cos(m_n R') = 0 \end{cases} \quad (3.85)$$

$$AdS_5 : \begin{cases} [++] & \rightarrow R_0(m_n) - R'_0(m_n) = 0 \\ [--] & \rightarrow R'_1(m_n) - R_1(m_n) = 0 \\ [+-] & \rightarrow R_0(m_n) - R'_1(m_n) = 0 \\ [-+] & \rightarrow R'_0(m_n) - R_1(m_n) = 0 \end{cases} \quad (3.86)$$

avec :

$$R_i(m_n) \equiv \frac{Y_i(m_n R)}{J_i(m_n R)}, \quad R'_i(m_n) \equiv \frac{Y_i(m_n R')}{J_i(m_n R')}. \quad (3.87)$$

En résolvant ces équations de quantification, on obtient les spectres de masse suivants pour le cas plat :

$$[++][--] \rightarrow m_n R' = n\pi, \quad (3.88)$$

$$[+-][-+] \rightarrow m_n R' = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad (3.89)$$

pour $n > 0$. Alors que les masses des états de Kaluza–Klein sont approximativement données par :

$$[++] \rightarrow m_n R' \simeq 2, 45; 5, 56; 8, 70; 11, 8 \dots \quad (3.90)$$

$$[--] \rightarrow m_n R' \simeq 3, 83; 7, 02; 10, 2; 13, 3 \dots \quad (3.91)$$

$$[+-] \rightarrow m_n R' \simeq 0, 235; 3, 88; 7, 06; 10, 2 \dots \quad (3.92)$$

$$[-+] \rightarrow m_n R' \simeq 2, 41; 5, 52; 8, 65; 11, 8 \dots \quad (3.93)$$

pour $R/R' = 10^{-16}$ avec une faible dépendance logarithmique en ce rapport. On remarque notamment que dans AdS_5 , lorsque la symétrie de jauge est seulement brisée en R' , c'est-à-dire pour une condition $[-+]$, le premier mode massif est sensiblement plus léger que $1/R'$ et qu'il existe un gap beaucoup plus grand avec les résonances suivantes. Cette propriété aura son importance lorsque nous décrirons des modèles phénoménologiques de brisure de symétrie électrofaible.

3.4 Fermions de 4d à 5d

3.4.1 Quelques technicalités

En quatre dimensions, les spineurs sont des représentations irréductibles du groupe de double recouvrement $SL(2, \mathbb{C})$ (simplement connexe) du groupe de Lorentz $SO(3, 1)$ (doublement connexe)²¹ : $SL(2, \mathbb{C})/Z_2$. Ainsi, un spineur est en quelque sorte la « racine carrée » d'un vecteur de $SO(3, 1)$. Le groupe $SL(2, \mathbb{C})$ est isomorphe à $SU(2) \times SU(2)$ où les paramètres des transformations des deux $SU(2)$ sont reliés par la conjugaison complexe. Les représentations de $SL(2, \mathbb{C})$ sont alors étiquetées selon leurs charges sous les deux $SU(2)$: (n, m) . Les deux représentations irréductibles sont ainsi $(1/2, 0)$ et $(0, 1/2)$. Elles correspondent à des spineurs à deux composantes de chiralité opposée, les spineurs de Weyl, notés respectivement χ_α et $\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$ où α est un indice du premier $SU(2)$ et $\dot{\alpha}$ du second. Ces deux représentations sont dites chirales. En outre, la somme directe $(1/2, 1/2) = (1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ est un fermion (réductible) à quatre composantes de type vecteur. C'est le traditionnel fermion de Dirac qui s'écrit en terme des spineurs de Weyl précédents comme :

$$\Psi = \Psi_L + \Psi_R = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \Psi_L = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \quad (3.94)$$

C'est la représentation spinorielle minimale qui permet de construire une théorie invariante de Lorentz et sous la transformation discrète de parité. Les transformations de Lorentz pour les spineurs de Dirac sont représentées par le commutateur des matrices γ^μ qui satisfaisent une algèbre de Clifford basée sur la relation :

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta_{\mu\nu} \quad (3.95)$$

²¹Plus précisément de sa branche propre et orthochrone.

où γ^μ est la « racine carrée » de l'identité. La définition des γ^μ vérifiant cette relation n'est pas unique. Nous utiliserons par la suite la représentation de Weyl et écrivons :

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (3.96)$$

où $\sigma^0 = \bar{\sigma}^0 = -\mathbf{1}$ et $\sigma^i = -\bar{\sigma}^i$ sont les trois matrices de Pauli. La transformation de parité est, quant à elle, générée par une matrice γ^5 qui s'écrit dans la représentation de Weyl comme :

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad (3.97)$$

avec $\gamma^5 \Psi_{L,R} = \mp i \Psi_{L,R}$. Par conséquent les fermions chiraux sont les états propres de l'opérateur γ^5 . On définit ainsi les projecteurs chiraux $P_{L,R} = (1 \mp i\gamma^5)/2$ vérifiant $P_{L,R}\Psi = \Psi_{L,R}$ de même que les propriétés usuelles des projecteurs $P_L^2 = P_R^2 = \mathbf{1}$ et $P_L P_R = P_R P_L = 0$.

3.4.1.1 Fermions en espace-temps courbe

Une subtilité apparaît lorsque l'on souhaite décrire la dynamique d'un fermion dans un espace-temps courbe. En effet, alors qu'il est possible d'étendre les représentations tensorielles du groupe de Lorentz à des représentations généralement covariante, il n'existe pas d'équivalent de la représentation spinorielle de $SO(d-1, 1)$ définie sur l'espace tangent d'une variété Riemannienne. En d'autres termes l'invariance par difféomorphisme n'admet que des représentations tensorielles et les fermions ne sont définis qu'en espace-temps plat. Néanmoins, un espace-temps courbe est localement plat en relativité générale. Ainsi, pour plonger un fermion dans une variété Riemannienne, il suffit de définir localement une représentation spinorielle de $SO(d-1, 1)$ et d'utiliser une sorte de « béquille » pour la transporter d'un point à un autre de l'espace-temps. L'objet servant à ajuster localement le spineur à la courbure est la tétrade : $e_a^M(x)$, où M est une coordonnée de l'espace-temps courbe et a désigne une coordonnée d'un espace-temps Minkowskien en d dimensions. La tétrade est alors le lien entre le référentiel des géodésiques, correspondant localement à un espace-temps plat η^{ab} , et la variété courbe. Elle vérifie alors par construction :

$$e_a^M(x)e_{Mb}(x) = \eta_{ab}, \quad e_a^M(x)e_b^N(x)\eta^{ab} = g^{MN} \quad (3.98)$$

et permet de relier en chaque point une représentation généralement covariante à une représentation de $SO(d-1, 1)$, comme par exemple un vecteur de l'espace tangent et un vecteur de Lorentz $V^a \equiv e_M^a(x)V^M$. Intuitivement, le formalisme de la tétrade, étant défini localement, correspond à jauger les transformations de Lorentz. Il est par conséquent nécessaire d'augmenter la dérivée ordinaire d'une connexion, où d'un champ de jauge, afin qu'elle soit généralement covariante. Ainsi, pour un vecteur de Lorentz V^a défini dans le référentiel des géodésiques, on a :

$$\nabla_M V^a = (\partial_M \delta_b^a + \omega_{Mb}^a) V^b \quad (3.99)$$

où le champ de jauge ω_{Mb}^a est appelé la connexion de spin que l'on relie à la connexion affine, représentée par les symboles de Christoffel $\Gamma_{\mu b}^a$, selon :

$$\omega_{Mb}^a = \Gamma_{Mb}^a - e_b^N \partial_M e_N^a. \quad (3.100)$$

La construction de la dérivée covariante d'un spineur de Lorentz est réalisée en imposant la covariance de la dérivée ∇_a . On obtient alors que :

$$\nabla_M \Psi = (\partial_M + \Gamma_M) \Psi, \quad \Gamma_M \equiv -\frac{i}{4} \omega_{\mu}^{ab} \Sigma_{ab} \quad (3.101)$$

où $\Sigma_{ab} = i[\gamma_a, \gamma_b]/2$ est la matrice de spin de Dirac. Enfin, on peut écrire le terme cinétique de l'équation de Dirac en espace-temps courbe comme $i\gamma^M(x)\nabla_M\Psi$ avec $\gamma^M(x) \equiv e_a^M(x)\gamma^a$ où les γ^a sont les matrices de Dirac en espace-temps plat.

3.4.1.2 Problème de la chiralité en d=5

Une généralisation simple de l'algèbre de Clifford en $d = 5$:

$$\{\mathcal{G}^M, \mathcal{G}^N\} = 2\eta_{MN} \quad (3.102)$$

est possible avec $\mathcal{G}_\mu = \gamma_\mu$ et $\mathcal{G}_5 = \gamma_5$. La transformation de parité fait partie intégrante de l'algèbre des matrices de Dirac. Ainsi, la plus petite représentation spinorielle en cinq dimensions décrit un fermion de Dirac qui se décompose comme $(1/2, 1/2)$ en $d = 4$ et contient donc les deux chiralités. Il n'y a donc pas de fermion chiral en 5d ! Néanmoins, après compactification, nous verrons qu'il est possible de projeter une des deux chiralités en dehors du spectre des états de Kaluza–Klein, permettant la construction de fermions chiraux 4d à partir de fermions vecteurs en cinq dimensions.

3.4.2 Principe de moindre action pour les fermions

L'action d'un fermion de Dirac dans un espace-temps courbe à cinq dimensions s'écrit :

$$S_\Psi = \int d^5x \sqrt{g} \left[\frac{i}{2} (\bar{\Psi} e_a^M \gamma^a \nabla_M \Psi - \nabla_M \bar{\Psi} e_a^M \gamma^a \Psi) - m \bar{\Psi} \Psi \right], \quad (3.103)$$

avec :

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma^0 = \begin{pmatrix} \psi & \bar{\chi} \end{pmatrix} \quad (3.104)$$

où $\bar{\chi}_\alpha \equiv (\chi_\alpha)^*$ et $\psi^\alpha \equiv (\bar{\psi}^{\dot{\alpha}})^*$ suite à la conjugaison complexe reliant les deux $SU(2)$ de $SL(2, \mathbb{C})$. On a également utilisé la forme originale symétrique du terme cinétique afin d'obtenir une densité lagrangienne explicitement réelle. Ensuite, de même que pour le champ de jauge, nous avons négligé le couplage à la gravité à 4d. Nous nous plaçons également ici dans une métrique conformément plate donnée par (3.38). En particulier, nous considérerons éventuellement les limites correspondant à une dimension supplémentaire plate ($\omega = 1$) et à une géométrie non factorisable AdS_5 ($\omega = R/z$).

3.4.2.1 Conditions aux bords

Avant de développer l'action S_Ψ en terme des spineurs de Weyl, la première chose à calculer est la connexion de spin apparaissant dans la dérivée généralement covariante du fermion.

Connexion de spin dans une dimension courbe A partir de la métrique (3.38) on obtient facilement que les seuls symboles de Christoffel non nuls sont :

$$\Gamma_{\mu 5}^{\nu} = \frac{\omega'}{\omega} \delta_{\mu}^{\nu}, \quad \Gamma_{\mu\nu}^5 = \frac{\omega'}{\omega} \eta_{\mu\nu} \text{ et } \Gamma_{55}^5 = \frac{\omega'}{\omega}. \quad (3.105)$$

La tétrade²², dérivée de la métrique par l'intermédiaire de (3.98), s'écrit : $e_M^a = \omega \delta_M^a$. Partant de (3.100) et (3.101), on arrive finalement à :

$$\Gamma_5 = 0 \quad \text{et} \quad \Gamma_{\mu} = \frac{i}{2} \frac{\omega'}{\omega} \gamma_5 \gamma_{\mu} \quad (3.106)$$

et la connexion de spin s'annule dans l'action (3.103).

Suite à l'annulation de la connexion de spin, l'action S_{Ψ} devient :

$$S_{\Psi} = \int d^5 x \omega^4 \left[i \bar{\Psi} \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \Psi + \frac{i}{2} (\bar{\Psi} \gamma^5 \partial_5 \Psi - \partial_5 \bar{\Psi} \gamma^5 \Psi) - m \omega \bar{\Psi} \Psi \right] \quad (3.107)$$

après intégration par partie du terme cinétique en ∂_{μ} . En terme des spineurs de Weyl à deux composantes, l'action se décompose²³ :

$$S_{\Psi} = \int d^5 x \omega^4 \left[-i \bar{\chi} \bar{\sigma}^{\mu} \partial_{\mu} \chi - i \psi \sigma^{\mu} \partial_{\mu} \bar{\psi} + m \omega (\psi \chi + \bar{\chi} \bar{\psi}) + (\psi \partial_5 \chi - \bar{\chi} \partial_5 \bar{\psi}) - 2 \frac{\omega'}{\omega} (\bar{\chi} \bar{\psi} - \psi \chi) \right] + \frac{1}{2} \int d^4 x [\omega^4 (\bar{\chi} \bar{\psi} - \psi \chi)]_{R'}^R. \quad (3.108)$$

où le dernier terme est généré par l'intégration par partie du terme cinétique en ∂_5 . Comme précédemment, l'annulation de la variation de l'action fournit les équations du mouvement, ainsi que les conditions aux bords, et il vient :

$$\frac{\delta S_{\Psi}}{\delta \bar{\chi}} = 0 \quad \rightarrow \quad i \bar{\sigma}^{\mu} \partial_{\mu} \chi + \partial_5 \bar{\psi} - m_{+} \bar{\psi} = 0, \quad (3.109)$$

$$\frac{\delta S_{\Psi}}{\delta \bar{\psi}} = 0 \quad \rightarrow \quad i \sigma^{\mu} \partial_{\mu} \bar{\psi} - \partial_5 \chi - m_{-} \chi = 0. \quad (3.110)$$

où $m_{\pm} = m \omega \mp 2 \omega' / \omega$ qui se réduit à $m_{\pm} = m$ pour le cas plat et $m_{\pm} = (c \pm 2) / z$ pour AdS_5 , avec $c \equiv m R$ la masse dans le bulk de Ψ , exprimée en unité de courbure $1/R$. La variation sur le bord donne :

$$\delta S_{\Psi}^b = \frac{1}{2} \int d^4 x [\omega^4 (\delta \chi \psi - \delta \psi \chi - \delta \bar{\psi} \bar{\chi} + \delta \bar{\chi} \bar{\psi})]_{R'}^R. \quad (3.111)$$

Ainsi, celle-ci est nulle si un des deux spineurs de Weyl satisfait une condition Dirichlet²⁴ :

$$\bar{\psi}|_{R,R'} = 0 \quad \text{ou} \quad \chi|_{R,R'} = 0. \quad (3.112)$$

²²ou ici le fünfbein, de l'allemand « cinq jambes » ce qui reflète le fait que la tétrade est une base orthonormée de l'espace tangent. On utilise également les termes *vierbein* et *vielbein* en quatre et d dimensions.

²³ $\chi \psi \equiv \epsilon^{\alpha\beta} \chi_{\alpha} \psi_{\beta} = \chi^{\beta} \psi_{\beta} = \epsilon^{\beta\alpha} \chi_{\alpha} \epsilon_{\beta\gamma} \psi^{\gamma} = -\epsilon^{\alpha\beta} \epsilon_{\beta\gamma} \chi_{\alpha} \psi^{\gamma} = -\delta_{\gamma}^{\alpha} \chi_{\alpha} \psi^{\gamma} = -\chi_{\alpha} \psi^{\alpha} = \psi^{\alpha} \chi_{\alpha} = \psi \chi$ où on a utilisé le fait que χ_{α} est une variation de Grassmann anticommutable. $\epsilon \propto i \sigma_2$. Le même type de relation s'applique pour les indices pointés : $\bar{\chi} \bar{\psi} \equiv \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = -\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\psi} \bar{\chi}$.

²⁴Rappelons que, dans ce cas, $\chi = 0$ implique $\delta \chi = 0$ et $\bar{\chi} = \delta \bar{\chi} = 0$ par conjugaison complexe.

On pourrait alors penser que si, par exemple, $\bar{\psi} = 0$, le champ χ peut prendre une valeur arbitraire sur le bord. En réalité, une fois la condition aux bord choisie pour $\bar{\psi}$, celle de χ est automatiquement fixée par l'équation du mouvement (et vice versa) car l'équation de Dirac est du premier ordre en dérivée. Ainsi, en imposant les conditions (3.112), on obtient pour le second spineur :

$$(\partial_5 + m_-)\chi|_{R,R'} = 0 \quad \text{ou} \quad (\partial_5 - m_+)\bar{\psi}|_{R,R'} = 0 \quad (3.113)$$

respectivement. Si un des deux spineurs de Weyl vérifie une condition Dirichlet alors l'autre doit nécessairement satisfaire une condition de type mixte, comme l'impose l'équation du mouvement. Une conséquence importante est alors l'existence d'un mode zéro chiral en 4d.

3.4.3 Décomposition de Kaluza–Klein et fonctions d'onde

Pour un fermion de Dirac Ψ_D en $d = 5$, on développe séparément les deux spineurs de Weyl qui le composent, puisque les fermions sont chiraux à 4d et qu'*a priori* χ et $\bar{\psi}$ sont indépendants. C'est par ailleurs nécessairement le cas lorsque Ψ_D est une représentation complexe d'un groupe de jauge, $\Psi_D^c \neq \Psi_D$. La décomposition de Kaluza–Klein s'écrit alors :

$$\chi = \sum_n g_n(z)\chi_n(x), \quad \bar{\psi} = \sum_n f_n(z)\bar{\psi}_n(x) \quad (3.114)$$

où chaque paire de modes vérifie un jeu d'équations de Dirac 4d couplées puisque le fermion est massif après compactification :

$$i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi_n - m_n \bar{\psi}_n = 0, \quad i\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}_n - m_n \chi_n = 0. \quad (3.115)$$

De plus, demander que les modes de Kaluza–Klein soient canoniquement normalisés à 4d impose :

$$\int_R^{R'} dz \omega(z)^4 g_n(z) g_m(z) = \delta_{nm}, \quad \int_R^{R'} dz \omega(z)^4 f_n(z) f_m(z) = \delta_{nm}. \quad (3.116)$$

Les équations du mouvement (3.109) et (3.110) se réduisent alors à de simples équations d'ondes pour le mode n :

$$f'_n(z) + m_n g_n(z) - m_+ f_n(z) = 0, \quad g'_n(z) - m_n f_n(z) + m_- g_n(z) = 0. \quad (3.117)$$

On découple ces équations par substitution, ce qui revient à prendre le « carré » de l'équation de Dirac, et on obtient les équations du second ordre suivantes :

$$g''_n(z) - [m_+ - m_-] g'_n(z) + [m_n^2 + m'_- - m_+ m_-] g_n(z) = 0, \quad (3.118)$$

$$f''_n(z) - [m_+ - m_-] f'_n(z) + [m_n^2 - m'_+ - m_+ m_-] f_n(z) = 0. \quad (3.119)$$

Si les conditions aux bords autorisent l'existence d'un mode zéro de masse nulle alors les équations d'ondes pour ce dernier se découpent, l'équation de Dirac se séparant en deux équations de Weyl, et on a :

$$f'_0(z) - m_+ f_0(z) = 0, \quad g'_0(z) + m_- g_0(z) = 0 \quad (3.120)$$

dont les solutions s'écrivent :

$$f_0(z) = a_0 e^{\int_R^z dz' m_+(z')}, \quad g_0(z) = b_0 e^{-\int_R^z dz' m_-(z')}. \quad (3.121)$$

Ainsi, contrairement au cas scalaire, la masse dans le bulk du fermion ne contribue pas à la masse du mode zéro, puisque c'est une mode chiral, mais contrôle plutôt sa localisation dans la dimension supplémentaire. Cela permet notamment d'obtenir des hiérarchies de masse pour les fermions de façon naturelle, en éloignant plus ou moins les modes zéros de l'endroit où leur masse est générée. Intéressons nous un instant sur les conditions d'existence de ces modes de masse nulle. Lorsque $m_n = 0$, les équations du mouvement du premier ordre sont découplées et une condition Dirichlet, comme par exemple $\bar{\psi}|_R = 0$, implique nécessairement $a_0 = 0$. Il n'y a alors pas de mode zéro pour $\bar{\psi}$. En revanche, la condition pour χ étant $(\partial_5 + m_-)\chi|_R = 0$, son équation du mouvement (3.120) est satisfaite par la solution $g_0(z)$ donnée par (3.121) quelque soit b_0 . Il existe donc nécessairement un mode zéro pour χ , à la condition que sa fonction d'onde ne soit pas contrainte de s'annuler en $z = R'$. En conclusion, bien qu'*a priori* sa fonction d'onde ne soit pas plate, un mode zéro est éliminé dès qu'une condition Dirichlet est imposée au spineur de Weyl associé *en au moins un des deux bords*. Ceci prouve l'existence d'un mode chiral à 4d obtenu depuis un fermion de Dirac 5d par la compactification. Enfin, pour $\bar{\psi}|_{R,R'} = 0$, l'action (3.108) prend la forme effective suivante à 4d :

$$- \int d^4x \left[i\bar{\chi}_0 \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi_0 + \sum_{n \geq 1} i\bar{\chi}_n \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi_n + i\psi_n \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}_n - m_n (\psi_n \chi_n + \bar{\chi}_n \bar{\psi}_n) \right] \quad (3.122)$$

d'où les formes équivalentes pour d'autres jeux de conditions aux bords s'en déduisent aisément.

3.4.3.1 Cas plat $\omega(z) = 1$

Pour une dimension compacte dépourvue de courbure, on a $m_\pm = m$ et les équation d'ondes se simplifient sensiblement :

$$g_n''(z) + k_n^2 g_n(z) = 0, \quad f_n''(z) + k_n^2 f_n(z) = 0 \quad (3.123)$$

avec $k_n^2 \equiv m_n^2 - m^2$. Les solutions sont alors de la forme :

$$g_n(z) = A_n c(|k_n|z) + B_n s(|k_n|z), \quad (3.124)$$

$$f_n(z) = C_n c(|k_n|z) + D_n s(|k_n|z) \quad (3.125)$$

où c et s sont les fonctions cosinus et sinus simples pour $k_n^2 > 0$ devenant hyperboliques pour $k_n^2 < 0$. Par ailleurs, les équations du mouvement étant du premier ordre, les coefficients ne sont pas tous indépendants. En insérant les solutions précédentes dans les équations (3.117), on dérive les relations suivantes :

$$k_n^2 > 0 : \quad \begin{cases} mC_n - k_n D_n - A_n m_n = 0 \\ k_n C_n + m D_n - m_n B_n = 0 \end{cases}, \quad (3.126)$$

$$k_n^2 < 0 : \quad \begin{cases} mC_n - k_n D_n - A_n m_n = 0 \\ -k_n C_n + m D_n - m_n B_n = 0 \end{cases}. \quad (3.127)$$

Pour les modes zéros, les fonctions d'ondes (3.121) se réduisent à de simples exponentielles localisées sur un des deux bords selon le signe de la masse m :

$$f_0(z) = a_0 e^{mz}, \quad g_0(z) = b_0 e^{-mz} \quad (3.128)$$

où les constantes de normalisation sont déterminées par (3.116) :

$$a_0 = \sqrt{\frac{2m}{e^{2mR'} - 1}}, \quad b_0 = \sqrt{\frac{2m}{1 - e^{-2mR'}}}. \quad (3.129)$$

Un mode zéro de type χ sera alors piqué en $z = 0$ ($z = R'$) pour $m > 0$ ($m < 0$) et inversement pour un mode de type ψ . On remarque également qu'en général il n'existe pas de mode plat pour les fermions, à moins que $m = 0$. Par ailleurs, dans ce cas particulier, on a $k_n = m_n > 0$ et les fonctions d'ondes se simplifient en :

$$g_n(z) = A_n \cos(m_n z) + B_n \sin(m_n z), \quad (3.130)$$

$$f_n(z) = B_n \cos(m_n z) - A_n \sin(m_n z). \quad (3.131)$$

3.4.3.2 Cas AdS₅ $\omega(z) = R/z$

Lorsque l'espace-temps 5d a une géométrie anti de Sitter, m_{\pm} vaut $(c \pm 2)/z$ et les équations d'ondes deviennent :

$$g_n''(z) - \frac{4}{z} g_n'(z) + g_n(z) \left[m_n^2 - \frac{(c^2 + c - 6)}{z^2} \right] = 0, \quad (3.132)$$

$$f_n''(z) - \frac{4}{z} f_n'(z) + f_n(z) \left[m_n^2 - \frac{(c^2 - c - 6)}{z^2} \right] = 0. \quad (3.133)$$

En multipliant chaque ligne par z^2 on reconnaît immédiatement un jeu d'équations de Bessel et les solutions sont :

$$g_n(z) = z^{5/2} [A_n J_{c+1/2}(m_n z) + B_n Y_{c+1/2}(m_n z)], \quad (3.134)$$

$$f_n(z) = z^{5/2} [C_n J_{c-1/2}(m_n z) + D_n Y_{c-1/2}(m_n z)] \quad (3.135)$$

où J et Y sont les fonctions de Bessel respectivement de première et seconde espèce. Une fois encore, les équations du mouvement du premier ordre imposent les deux relations suivantes entre les quatre coefficients :

$$A_n = C_n, \quad B_n = D_n. \quad (3.136)$$

Lorsque nous considérerons uniquement les modes légers, vérifiant $m_n \ll 1/R'$, nous utiliserons des développements de ces fonctions d'onde autour de $m_n \sim 0$. Dans ce cas, il est alors préférable de travailler dans une base où les fonctions de Bessel ont un comportement régulier en zéro. On réécrit alors Y comme une combinaison de J grâce à la relation :

$$Y_{\nu}(z) = \frac{J_{\nu}(z) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)} \quad (3.137)$$

valable tant que ν est différent d'un entier. Ainsi, pour $c \neq n + 1/2$ avec n entier, on a :

$$Y_{c \pm 1/2}(m_n z) = \mp J_{c \pm 1/2}(m_n z) \tan(c\pi) - J_{c \mp 1/2}(m_n z) \sec c\pi \quad (3.138)$$

et on peut écrire les solutions de l'équation d'onde dans une base composée uniquement de J comme :

$$g_n(z) = z^{5/2} [\bar{A}_n J_{c+1/2}(m_n z) + \bar{B}_n J_{-c-1/2}(m_n z)], \quad (3.139)$$

$$f_n(z) = z^{5/2} [\bar{C}_n J_{c-1/2}(m_n z) + \bar{D}_n J_{-c+1/2}(m_n z)] \quad (3.140)$$

avec :

$$\bar{A}_n \equiv A_n - B_n \tan(c\pi), \quad \bar{B}_n \equiv -B_n \sec(c\pi), \quad (3.141)$$

$$\bar{C}_n \equiv C_n + D_n \tan(c\pi), \quad \bar{D}_n \equiv -D_n \sec(c\pi), \quad (3.142)$$

$$(3.143)$$

satisfaisant les conditions : $\bar{A}_n = \bar{C}_n$ et $\bar{B}_n = -\bar{D}_n$. Dans cette base, on dérive des fonctions d'onde approchées pour les modes légers en utilisant :

$$J_\nu(x) \underset{x \sim 0}{=} x^\nu \left[\frac{2^{-\nu}}{\Gamma(1+\nu)} - \frac{2^{-\nu-2}}{\Gamma(\nu+2)} x^2 + \mathcal{O}(x^3) \right]. \quad (3.144)$$

On montre alors que les fonctions (3.139) se mettent sous la forme :

$$g_n(z) \simeq \tilde{A}_n z^2 \left(\frac{m_n z^{c+1}}{2c+1} \right) + \tilde{B}_n z^{2-c} \left(1 - \frac{m_n^2 z^2}{2(1-2c)} \right) + \mathcal{O}(m_n^4), \quad (3.145)$$

$$f_n(z) \simeq \tilde{A}_n z^{2+c} \left(1 - \frac{m_n^2 z^2}{2(1+2c)} \right) - \tilde{B}_n z^2 \left(\frac{m_n z^{1-c}}{1-2c} \right) + \mathcal{O}(m_n^4) \quad (3.146)$$

où :

$$\tilde{A}_n = \bar{A}_n \left[\frac{m_n^{c-1/2}}{2^{c-1/2} \Gamma(c+1/2)} \right], \quad \tilde{B}_n = \bar{B}_n \left[\frac{2^{c+1/2} m_n^{-c-1/2}}{\Gamma(1/2-c)} \right]. \quad (3.147)$$

Enfin, pour les éventuels modes zéros, les fonctions d'onde (3.121) deviennent pour AdS₅ :

$$f_0(z) = a_0 \left(\frac{z}{R} \right)^{c+2}, \quad g_0(z) = b_0 \left(\frac{z}{R} \right)^{-c+2} \quad (3.148)$$

On remarque une fois encore que la masse de Dirac c ne contribue pas à la masse des modes zéros mais affecte seulement leur localisation le long de la dimension courbe. Une façon simple de voir comment ces modes sont répartis selon z en fonction de c consiste à regarder sous quelles conditions le mode zéro reste normalisable lorsqu'on décompactifie la dimension supplémentaire. Par exemple, pour un mode zéro de type χ , obtenu pour une condition au bord $\bar{\psi} = 0$, la condition de normalisation (3.116) s'écrit :

$$a_0^2 \int_R^{R'} dz \left(\frac{R}{z} \right)^4 \left(\frac{z}{R} \right)^{4-2c} = a_0^2 \int_R^{R'} dz \left(\frac{z}{R} \right)^{-2c} = 1 \quad (3.149)$$

Dans la limite où R' est envoyé à l'infini, l'intégrale converge seulement pour $c > 1/2$ indiquant dans ce cas que le mode zéro est localisé sur l'autre bord en $z = R$. Pareillement, dans la limite $R \rightarrow 0$, le mode n'est normalisable que pour $c < 1/2$ et se retrouve donc localisé en $z = R'$. Répétant cet argument pour un mode zéro de type $\bar{\psi}$, on obtient que ce dernier est localisé en $z = R$ ($z = R'$) pour $c < -1/2$ ($c > -1/2$). Enfin pour une tranche finie d'AdS₅, les constantes de normalisation sont données par :

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{R}} \frac{\sqrt{1+2c}}{\sqrt{(R'/R)^{1+2c} - 1}}, \quad b_0 = \frac{1}{\sqrt{R}} \frac{\sqrt{2c-1}}{\sqrt{1 - (R'/R)^{2c-1}}}. \quad (3.150)$$

3.4.3.3 Fermions de Majorana

La décomposition précédente est valable pour un spineur de Dirac pour lequel les deux spineurs de Weyl sont indépendants. Cependant pour un fermion ne portant aucune charge, réalisant ainsi une représentation réelle d'un groupe de jauge, on peut construire, à partir d'un seul spineur de Weyl, un spineur Ψ_M à quatre composantes de type Majorana vérifiant $\Psi_M^c = \Psi_M$. Dans ce cas les modes de Kaluza–Klein χ_n et $\bar{\psi}_n$ sont reliés par la conjugaison complexe : $\bar{\psi}_n = \bar{\chi}_n$. La décomposition (3.114) doit être remplacée par :

$$\chi = \sum_n g_n(z) \chi_n(x), \quad \bar{\psi} = \sum_n f_n(z) \bar{\chi}_n(x) \quad (3.151)$$

où maintenant chaque mode χ_n satisfait une équation 4d de Majorana :

$$i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi_n - m_n^* \bar{\chi}_n = 0, \quad i\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\chi}_n - m_n \chi_n = 0. \quad (3.152)$$

où la masse de Majorana $m_n = |m_n| e^{i\theta_n}$ contient éventuellement une phase non nulle. Répétant la même procédure que pour des modes de Dirac on obtient les équations d'ondes :

$$g_n''(z) - [m_+ - m_-] g_n'(z) + [|m_n|^2 + m'_- - m_+ m_-] g_n(z) = 0, \quad (3.153)$$

$$f_n''(z) - [m_+ - m_-] f_n'(z) + [|m_n|^2 - m'_+ - m_+ m_-] f_n(z) = 0. \quad (3.154)$$

De plus, les deux spineurs de Weyl étant maintenant conjugués complexes l'un de l'autre, la condition de normalisation canonique s'écrit :

$$\int_R^{R'} dz \omega(z)^4 [g_n(z)^* g_m(z) + f_n(z) f_m(z)^*] = \delta_{nm} \quad (3.155)$$

alors que l'action effective 4d devient :

$$- \int d^4x \left[i\bar{\chi}_0 \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi_0 + \sum_{n \geq 1} i\bar{\chi}_n \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi_n - \frac{1}{2} (m_n \chi_n \chi_n - m_n^* \bar{\chi}_n \bar{\chi}_n) \right] \quad (3.156)$$

où nous avons utilisé l'égalité²⁵ :

$$i \int d^4x \chi \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\chi} = i \int d^4x \bar{\chi} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi \quad (3.157)$$

qui traduit simplement le fait que χ et $\bar{\chi}$ sont des représentations complexes conjuguées de $SL(2, \mathbb{C})$. Le mode zéro disparaît dès lors que χ ou $\bar{\psi}$ satisfait une condition Dirichlet sur un bord.

Cas plat Les solutions sont les mêmes qu'en (3.124) avec désormais $k_n^2 = |m_n|^2 - m^2$ et les coefficients satisfont aux relations (3.126) où k_n est donné par l'expression précédente. En particulier, dans le cas $m = 0$, on a $A_n = -e^{-i\theta_n} D_n$ et $B_n = e^{-i\theta_n} C_n$.

²⁵ vraie modulo un terme de bord s'annulant à l'infini.

Cas AdS₅ Pareillement aux modes de Dirac, on montre que les fonctions d'onde sont données par :

$$g_n(z) = z^{5/2} [\bar{A}_n J_{c+1/2}(|m_n|z) + \bar{B}_n J_{-c-1/2}(|m_n|z)], \quad (3.158)$$

$$f_n(z) = z^{5/2} [\bar{C}_n J_{c-1/2}(|m_n|z) + \bar{D}_n J_{-c+1/2}(|m_n|z)] \quad (3.159)$$

avec $\bar{C}_n = \bar{A}_n e^{-i\theta_n}$ et $\bar{D}_n = -\bar{B}_n e^{-i\theta_n}$.

3.4.4 Spectre de masse en l'absence de terme de bord et existence d'un mode zéro

L'équation de quantification de la masse est déterminée par les conditions aux bords. A partir de (3.112) et (3.113), on peut construire quatre situations différentes selon les conditions aux bords des deux spineurs de Weyl. Nous noterons ces possibilités comme $[++]$, $[--]$, $[+-]$ et $[-+]$. Un signe $+$ ($-$) correspond à une condition Neumann pour la composante χ ($\bar{\psi}$) et le premier (second) signe s'applique au bord $z = R$ ($z = R'$). On s'intéresse dans un premier temps à la présence de mode zéro pour ces quatre jeux de conditions aux bords. Pour $[++]$ ($[--]$), on a $f_0(R) = f_0(R') = 0$ ($g_0(R) = g_0(R') = 0$), soit $a_0 = 0$ ($b_0 = 0$) et il demeure un mode zéro pour χ ($\bar{\psi}$). En revanche, $[+-]$ ($[-+]$) implique $f_0(R) = g_0(R') = 0$ ($g_0(R) = f_0(R') = 0$) forçant $a_0 = b_0 = 0$, il n'y a donc pas de mode zéro dans ce cas. On retiendra ici deux choses importantes. Tout d'abord, dès qu'un spineur de Weyl satisfait une condition Dirichlet sur un au moins un bord, il n'a pas de mode zéro. Puis, en imposant des conditions du type $[++]$ ou $[--]$, on génère un fermion chiral de masse nulle dans le spectre à basse énergie, de chiralité gauche ou droite respectivement. Pour les résonances massives, les équations de quantification s'écrivent :

$$M_5 : \begin{cases} [++] \rightarrow s(k_n R') = 0 \\ [--] \rightarrow s(k_n R') = 0 \\ [+-] \rightarrow m t(k_n R') - k_n = 0 \\ [-+] \rightarrow m t(k_n R') + k_n = 0 \end{cases} \quad (3.160)$$

$$\text{AdS}_5 : \begin{cases} [++] \rightarrow R'_-(c, m_n) - R_-(c, m_n) = 0 \\ [--] \rightarrow R'_+(c, m_n) - R_+(c, m_n) = 0 \\ [+-] \rightarrow R'_+(c, m_n) + R_-(c, m_n) = 0 \\ [-+] \rightarrow R'_-(c, m_n) + R_+(c, m_n) = 0 \end{cases} \quad (3.161)$$

avec $t \equiv c/s$ et :

$$R_{\pm}(c, m_n) \equiv \frac{J_{c\pm 1/2}(m_n R)}{J_{-c\mp 1/2}(m_n R)}, \quad R'_{\pm}(c, m_n) \equiv \frac{J_{c\pm 1/2}(m_n R')}{J_{-c\mp 1/2}(m_n R')}. \quad (3.162)$$

Le cas AdS₅ représentant la phénoménologie la plus intéressante, on a reporté sur la figure 3.2 l'évolution de la masse m_1 avec le paramètre c pour les quatre jeux de conditions aux bords. Ainsi, le spectre de Kaluza–Klein consiste en une tour de fermions de Dirac (à quatre composantes) massifs avec éventuellement un fermion de Weyl (à deux composantes) de masse nulle. Enfin, bien qu'il n'y ait pas de mode zéro dans les $[+-]$ et $[-+]$, le premier mode de Kaluza–Klein massif peut être extrêmement léger dans AdS₅ pour $c > 1/2$ et $c < -1/2$ respectivement. Cette propriété est due à la courbure anti de Sitter et n'apparaît pas dans le cas plat où $m_{KK} \sim 1/R'$. Ce mode de Kaluza–Klein exponentiellement léger a été envisagé comme un candidat à la matière noire dans [2, 1].

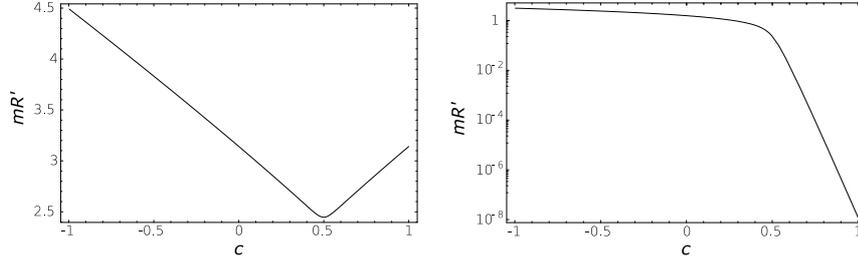


FIG. 3.2 – Variation de la masse de la première excitation de Kaluza–Klein avec la masse dans le bulk c . À gauche pour des conditions $[++]$ et à droite pour $[-+]$, avec dans les deux cas $R^{-1} = M_{Pl}$ et $R'^{-1} = 500$ GeV. Les conditions $[--]$ et $[-+]$ s’obtiennent à partir de $[++]$ et $[-+]$ en prenant $c \rightarrow -c$.

3.4.5 Termes localisés et conditions aux bords mixtes

En l’absence de terme localisé sur les bords, le principe de moindre action appliqué aux fermions de Dirac à 5d impose naturellement les conditions aux bords suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{\psi}|_{R,R'} = 0, & \quad \text{ou} \quad (\partial_5 - m_+) \bar{\psi}|_{R,R'} = 0, \\ (\partial_5 + m_-) \chi|_{R,R'} = 0, & \quad \chi = 0. \end{aligned} \quad (3.163)$$

Néanmoins, ce ne sont pas les conditions les plus générales assurant l’annulation de la variation (3.111) sur le bord. En particulier, une combinaison linéaire quelconque des deux possibilités précédentes satisfait également au principe de moindre action²⁶ :

$$(c\chi + s\psi)|_{R,R'} = 0 \quad (3.164)$$

où c et s peuvent prendre des valeurs différentes en chaque bord. Le choix d’une combinaison linéaire particulière peut sembler ad-hoc et, pareillement au cas scalaire, on aimerait construire une dynamique sur le bord pour laquelle la condition mixte (3.164) émerge naturellement.

Une difficulté supplémentaire apparaît lorsqu’une dynamique localisée est introduite pour un fermion. En effet, l’équation du mouvement n’étant que du premier ordre, le spineur n’est pas continu au point où un opérateur est localisé. Par conséquent, modifier la dynamique directement sur le bord n’est pas aisé car le champ et sa dérivée sont alors des quantités indépendantes dû à la discontinuité. Une dérivation transparente [5] consiste à localiser les opérateurs sur une brane légèrement décalée du bord, en $z = R + \epsilon$ ou $z = R' - \epsilon$, pour les traiter plutôt comme une modification des équations du mouvement, laissant les conditions aux bords inchangées. On peut alors calculer le « saut » du champ à la discontinuité, puis, en prenant la limite $\epsilon \rightarrow 0$ en déduire comment la condition au bord est modifiée par la présence des opérateurs localisés.

²⁶Notons qu’il est possible d’écrire des conditions aux bords encore plus générales en mélangeant les composantes des spineurs de Weyl. On montre notamment que $\delta S_\Psi = 0$ avec $\psi_\alpha|_{R,R'} = (M_\alpha^\beta \chi_\beta + N_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\chi}^{\dot{\beta}})|_{R,R'}$ pourvu que les matrices M et N vérifient $M_\alpha^\beta = s_M \epsilon^{\beta\gamma} M_\gamma^\delta \epsilon_{\delta\alpha}$ et $N_{\alpha\dot{\beta}} = s_N N_{\alpha\dot{\beta}}^*$. s_M et s_N valant ± 1 selon le nombre de dérivées contenues dans M et N qu’il est nécessaire d’intégrer par partie.

3.4.5.1 Masse de Majorana en $z = R$

Nous considérons le cas où une masse de Majorana M pour χ est localisée proche de $z = R$. Notons qu'en présence d'une symétrie de jauge, l'introduction d'une masse de Majorana n'est possible que si χ se transforme dans une représentation réelle du groupe. On impose également des conditions aux bords $[++]$. L'action S_Ψ est alors augmentée du terme :

$$S_M = \frac{1}{2} \int d^5x \sqrt{\hat{g}} R (M\chi\chi + M^*\bar{\chi}\bar{\chi}) \delta(z - z_\epsilon) \quad (3.165)$$

avec $z_\epsilon \equiv R + \epsilon$ et $\hat{g} = \omega(z)^8$ est le déterminant de la métrique induite sur une brane 4d : $\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ où g_{MN} est la métrique 5d définie par (3.38). Puisque la dimension de masse d'un fermion est égale à 2 en 5d²⁷, un facteur R a été ajouté afin que M ait la dimension d'une masse 4d²⁸. Les équations du mouvement (3.109) sont alors modifiées par la présence de S_M et deviennent :

$$i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi + \partial_5 \bar{\psi} - m_+ \bar{\psi} - M^* R \bar{\chi} \delta(z - z_\epsilon) = 0, \quad (3.166)$$

$$i\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi} - \partial_5 \chi - m_- \chi = 0. \quad (3.167)$$

Ainsi, par l'intermédiaire de l'équation de Dirac, un terme localisé pour χ induit une discontinuité pour $\bar{\psi}$. En effet, en intégrant sur z la première des deux équations précédentes, on obtient :

$$\bar{\psi}(z) = -i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \int^z dz' \chi(z') + \int^z dz' m_+(z') \bar{\psi}(z') + M^* R \bar{\chi}(z_\epsilon) \theta(z - z_\epsilon) \quad (3.168)$$

où $\theta(x)$ est la fonction de Heaviside valant 0 pour $x < 0$ et 1 partout ailleurs. La présence de la fonction θ implique que χ est continue alors que $\bar{\psi}$ a une discontinuité finie que l'on calcule facilement à partir de l'équation précédente en évaluant $\bar{\psi}$ de part et d'autre de z_ϵ :

$$\begin{aligned} [\bar{\psi}]|_{z_\epsilon} &\equiv \lim_{z_\epsilon^\pm \rightarrow z_\epsilon} \bar{\psi}(z = z_{\epsilon+}) - \bar{\psi}(z = z_{\epsilon-}) \\ &= M^* R \bar{\chi}(z_\epsilon). \end{aligned} \quad (3.169)$$

Les deux premiers termes du membre de droite de (3.168) ne contribuent pas à $[\bar{\psi}]|_{z_\epsilon}$ car ils sont continus en $z = z_\epsilon$. En effet, χ lui-même ne présente pas de discontinuité et l'intégrale d'une fonction discontinue est continue. On remarque, en utilisant le résultat précédent dans la seconde équation de (3.166), qu'en revanche la dérivée de χ a une discontinuité :

$$[\partial_5 \chi]|_{z_\epsilon} = i\sigma^\mu \partial_\mu [\bar{\psi}]|_{z_\epsilon}. \quad (3.170)$$

Enfin, en faisant tendre la brane en z_ϵ vers le bord $z = R$, la condition + sur ce bord est modifiée comme :

$$\bar{\psi}|_R = M^* R \bar{\chi}|_R, \quad (\partial_5 + m_-) \chi|_R = i\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}|_R \quad (3.171)$$

qui est de la forme mixte (3.164) avec $M^* R = -s/c$. On dispose ainsi d'une interprétation physique pour les conditions + et - que l'on retrouve naturellement pour $M = 0$

²⁷ En d dimensions, $[\bar{\Psi}\gamma\partial\Psi] = d$ soit $[\Psi] = (d-1)/2$.

²⁸ Dans la limite d'une dimension plate, $R = 0$ et on le remplacera par R' qui est la seule échelle de distance apparaissant dans ce cas.

et $M \rightarrow \infty$ respectivement.

On montre également facilement qu'une procédure similaire pour la condition $[-]$ avec une masse de Majorana pour ψ :

$$S_M = \frac{1}{2} \int d^5x \sqrt{\hat{g}} R (M\psi\psi + M^* \bar{\psi}\bar{\psi}) \delta(z - z_\epsilon) \quad (3.172)$$

conduit aux conditions aux bords suivantes :

$$\chi|_R = -MR\psi|_R, (\partial_5 - m_+) \bar{\psi}|_R = -i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi|_R. \quad (3.173)$$

3.4.5.2 Terme cinétique en $z = R$

On peut également obtenir d'autres conditions aux bords en introduisant un terme cinétique localisé :

$$S_K = - \int d^5x \sqrt{\hat{g}} (i\bar{\chi} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi) R^{-1} \delta(z - z_\epsilon). \quad (3.174)$$

Les équations du mouvement prennent dans ce cas la forme :

$$i [1 + R^{-1} \delta(z - z_\epsilon)] \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi + \partial_5 \bar{\psi} - m_+ \bar{\psi} = 0, \quad (3.175)$$

$$i\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi} - \partial_5 \chi - m_- \chi = 0. \quad (3.176)$$

Puis, suivant la procédure précédente et intégrant sur la fonction δ , on obtient une fois encore une discontinuité pour $\bar{\psi}$ et $\partial_5 \chi$ qui valent dans ce cas :

$$[\bar{\psi}]|_{z_\epsilon} = -iR^{-1} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi(z_\epsilon), [\partial_5 \chi]|_{z_\epsilon} = i\sigma^\mu \partial_\mu [\bar{\psi}]|_{z_\epsilon}. \quad (3.177)$$

Ainsi partant d'une condition $+$, on obtient les conditions aux bords suivantes, dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\bar{\psi}|_R = -iR^{-1} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi|_R, (\partial_5 + m_-) \chi|_R = i\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}|_R. \quad (3.178)$$

Les deux modifications présentées ci-dessus constituent les exemples les plus simples de conditions aux bords générales $\psi_\alpha = \left(M_\alpha^\beta \chi_\beta + N_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\chi}^{\dot{\beta}} \right)$ avec $M_\alpha^\beta = MR\delta_\alpha^\beta$ et $N_{\alpha\dot{\beta}} = iR^{-1} \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \partial_\mu$.

3.4.6 Masse des fermions dans une dimension supplémentaire

Les conditions aux bords naturelles $[++]$, etc... — résolvent le problème initial de la chiralité à 5d en éliminant du spectre de Kaluza–Klein un des modes zéros du fermion de Dirac, laissant un seul mode chiral de masse nulle. Nous souhaitons alors montrer comment, en introduisant une dynamique localisée sur le bord, on peut générer des termes de masse pour ces modes zéros. Nous traiterons dans un premier temps le cas d'un fermion chargé, tel que l'électron, puis nous présenterons une réalisation en dimension supplémentaire du mécanisme de seesaw pour le neutrino.

3.4.6.1 Masse de Dirac en $z = R'$ et masse de l'électron

Nous étudions ici la possibilité de générer, à partir de modes zéros chiraux, un fermion vecteur, comme par exemple l'électron de Dirac, dont la masse est relativement faible, $m \ll 1/R'$. Puisqu'au mieux les conditions aux bords n'autorisent qu'un seul mode zéro chirale 4d par fermion de Dirac en 5d, le second étant projeté hors du spectre par l'équation du mouvement, il est nécessaire d'introduire deux spineurs à 5d pour obtenir les deux chiralités. On introduit alors deux fermions de Dirac Ψ_1 et Ψ_2 dans le bulk et on choisit leurs conditions aux bords de sorte qu'il existe à 4d un mode zéro gauche χ_1 et droit $\bar{\psi}_2$, soit $\Psi_1 \sim [++]$ et $\Psi_2 \sim [--]$. On se place dans une base où la matrice de Dirac dans l'espace 1,2 est diagonale, puisque même en présence d'un mélange il est toujours possible de s'y rendre en réalisant une rotation des champs. A ce stade, les modes zéros chiraux sont sans masse. Nous allons maintenant montrer comment produire une masse de Dirac reliant ces deux modes en introduisant un mélange près du bord $z = R'$:

$$\begin{aligned} S_D &= - \int d^5x \sqrt{\hat{g}} m_D R' (\bar{\Psi}_1 \Psi_2 + \bar{\Psi}_2 \Psi_1) \delta(z - z_\epsilon), \\ &= \int d^5x \omega^4 m_D R' (\psi_2 \chi_1 + \psi_1 \chi_2 + \bar{\chi}_1 \bar{\psi}_2 + \bar{\chi}_2 \bar{\psi}_1) \delta(z - z_\epsilon) \end{aligned} \quad (3.179)$$

avec $z_\epsilon = R' - \epsilon$. Notons qu'en général ce mélange ne peut être éliminé par une redéfinition des champs sans réintroduire un mélange dans le bulk. Les équations du mouvement sont alors données par :

$$i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi_{1,2} + \partial_5 \bar{\psi}_{1,2} - m_+ \bar{\psi}_{1,2} - m_D R' \bar{\psi}_{2,1} \delta(z - z_\epsilon) = 0, \quad (3.180)$$

$$i\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}_{1,2} - \partial_5 \chi_{1,2} - m_- \chi_{1,2} - m_D R' \bar{\chi}_{2,1} \delta(z - z_\epsilon) = 0. \quad (3.181)$$

A cause du mélange entre 1 et 2, les quatre spineurs de Weyl sont maintenant discontinus, une fonction δ apparaissant dans chaque équation. Il est alors difficile d'utiliser la prescription précédente et traiter les champs et leurs dérivées comme indépendants semble inévitable. Néanmoins, z_ϵ est proche de R' où les champs satisfont par hypothèse les conditions $\bar{\psi}_1 = \chi_2 = 0$. On peut alors utiliser celles-ci pour simplifier les équations précédentes. En effet, dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$, elle deviennent :

$$i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi_1 + \partial_5 \bar{\psi}_1 - m_+ \bar{\psi}_1 - m_D R' \bar{\psi}_2 \delta(z - R') = 0, \quad (3.182)$$

$$i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi_2 + \partial_5 \bar{\psi}_2 - m_+ \bar{\psi}_2 = 0, \quad (3.183)$$

$$i\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}_1 - \partial_5 \chi_1 - m_- \chi_1 = 0, \quad (3.184)$$

$$i\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}_2 - \partial_5 \chi_2 - m_- \chi_2 - m_D R' \bar{\chi}_1 \delta(z - R') = 0. \quad (3.185)$$

Ainsi, après avoir imposé les conditions aux bords, seuls $\bar{\psi}_1$ et χ_2 sont discontinus. On peut alors décaler à nouveau S_D de ϵ par rapport à R' et évaluer les conditions de « saut » pour ces deux spineurs. En intégrant les équations contenant un δ , on obtient alors :

$$[\bar{\psi}_1]_{z_\epsilon} = m_D R' \bar{\psi}_2(z_\epsilon), \quad [\chi_2]_{z_\epsilon} = -m_D R' \chi_1(z_\epsilon) \quad (3.186)$$

et les deux dernières équations permettent de calculer les discontinuités des dérivées de χ_1 et $\bar{\psi}_2$:

$$[\partial_5 \chi_1]_{z_\epsilon} = i\sigma^\mu \partial_\mu [\bar{\psi}_1]_{z_\epsilon}, \quad [\partial_5 \bar{\psi}_2]_{z_\epsilon} = -i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu [\chi_2]_{z_\epsilon}. \quad (3.187)$$

Enfin, en prenant $\epsilon \rightarrow 0$, on identifie les conditions aux bords induites par le mélange de Dirac en $z = R'$:

$$z = R' : \quad \begin{aligned} \bar{\psi}_1 &= m_D R' \bar{\psi}_2, \quad \chi_2 = -m_D R' \chi_1, \\ (\partial_5 + m_-) \chi_1 &= i\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}_1, \\ (\partial_5 - m_+) \bar{\psi}_2 &= -i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi_2. \end{aligned} \quad (3.188)$$

$$z = R : \quad \begin{aligned} \bar{\psi}_1 &= 0, \quad \chi_2 = 0, \\ (\partial_5 + m_-) \chi_1 &= 0, \\ (\partial_5 - m_+) \bar{\psi}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.189)$$

De ces conditions on déduit que le mélange sur le bord identifie les modes de Kaluza–Klein de Ψ_1 avec ceux de Ψ_2 . En effet, étant valable quelque soit la position x sur le bord, une condition du type $\chi_1(x, R') = a\chi_2(x, R')$ implique $g_{1,n}(R') = ag_{2,n}(R')$ et $\chi_{1,n}(x) = \chi_{2,n}(x) \equiv \chi_n(x)$. En particulier $\chi_{1,n}$ et $\chi_{2,n}$ ont la même masse m_n . La décomposition de Kaluza–Klein s'écrit alors :

$$\chi_1(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_{1,n}(z) \chi_n(x), \quad \bar{\psi}_1(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{1,n} \bar{\psi}_n(x), \quad (3.190)$$

$$\chi_2(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_{2,n}(z) \chi_n(x), \quad \bar{\psi}_2(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{2,n} \bar{\psi}_n(x). \quad (3.191)$$

Enfin, pour les modes zéros ces nouvelles conditions aux bords résultent en une masse de Dirac que nous calculerons pour les métriques plate et AdS₅. Par conséquent, partant de deux tours indépendantes de fermions de Dirac avec, à leurs pieds, deux fermions de Weyl de masse nulle, le mélange sur le bord a réduit le spectre à une seule tour de fermions massifs, où la masse du plus léger est proportionnelle à ce mélange.

Cas plat En l'absence de masse dans le bulk $m_{1,2} = 0$, les conditions précédentes se réduisent à :

$$f_{1,n}(0) = 0, \quad g_{2,n}(0) = 0 \quad (3.192)$$

$$f_{1,n}(R') - m_D R' f_{2,n}(R') = 0, \quad g_{1,n}(R') + m_D R' g_{2,n}(R') = 0 \quad (3.193)$$

d'où l'on déduit, avec les expressions (3.131) des fonctions d'onde, l'équation de quantification suivante :

$$\tan(m_n R') = m_D R'. \quad (3.194)$$

On s'attend à trouver la masse m du mode le plus léger comme proportionnelle à m_D , puisque c'est le mélange sur le bord qui apparie les deux modes zéros pour former un fermion de Dirac massif. De plus, les fonctions d'onde pour $m_{1,2} = 0$ sont plates (3.128) dans la limite $m_D = 0$. Par conséquent, leur recouvrement avec le bord où le mélange est présent est $\mathcal{O}(1)$ et $m \sim \mathcal{O}(m_D)$. Ainsi, dans la limite où $m \sim m_D \ll 1/R'$, $\tan(mR') \sim mR'$ et la masse mode le plus léger est simplement m_D . Ce résultat n'est valable que dans la limite où m_D est très inférieur à l'échelle naturelle $1/R'$ sur le bord et cette hiérarchie peut paraître arbitraire. Il est cependant possible, à partir de $m_D \simeq 1/R'$, de générer une masse $m \ll 1/R'$ en délocalisant initialement les modes zéros du bord $z = R'$, par l'intermédiaire de masse non nulle dans le bulk. Par exemple, pour $m_1 > 0$, $m_2 < 0$ et $|m_{1,2}| \simeq R'^{-1}$, les fonctions d'onde sont exponentiellement supprimées et on obtient $m \sim e^{-m_1 R'} e^{m_2 R'} m_D \ll 1/R'$, tout en gardant $m_1 \sim m_2 \sim m_D \sim 1/R'$.

Cas AdS₅ Nous allons utiliser ici la courbure de la dimension supplémentaire pour produire une masse légère. En choisissant les masses 5d telles que $c_1 > 1/2$ et $c_2 < -1/2$, les fonctions d'onde des modes zéros sont localisées près du bord $z = R$ et ont un recouvrement supprimé avec le mélange en $z = R'$. Par conséquent, pour $m_D \sim 1/R'$, on peut utiliser la forme approchée (3.145) des fonctions d'onde, valable pour $m_n \ll 1/R'$. Les conditions aux bords sont :

$$f_{1,n}(R) = 0, \quad g_{2,n}(R) = 0 \quad (3.195)$$

$$f_{1,n}(R') - m_D R' f_{2,n}(R') = 0, \quad g_{1,n}(R') + m_D R' g_{2,n}(R') = 0 \quad (3.196)$$

et, restant à l'ordre quadratique en m_n , on obtient une équation de quantification de la forme :

$$\begin{aligned} m_n^2 \left[1 - \left(\frac{R}{R'} \right)^{2c_1-1} \right] \left[1 - \left(\frac{R}{R'} \right)^{1-2c_2} \right] \\ = m_D^2 (2c_2 + 1)(1 - 2c_1) \left(\frac{R}{R'} \right)^{2(c_1-c_2-1)}. \end{aligned} \quad (3.197)$$

Et, pour $c_1 > 1/2$, $c_2 < -1/2$ et $R/R' \ll 1$, la masse du mode léger vaut :

$$m \simeq m_D \sqrt{-1 - 2c_2} \sqrt{2c_1 - 1} \left(\frac{R}{R'} \right)^{c_1 - c_2 - 1}. \quad (3.198)$$

On retrouve plus directement ce résultat en remarquant que les modes zéros, localisés dans l'UV, sont relativement insensibles à l'apparition d'un terme de mélange IR, ce qui est justifié par $m \ll m_D$. Si l'on se concentre uniquement sur le mode léger, on peut alors traiter le terme de bord comme une perturbation aux modes zéros chiraux. Comme c'est l'usage en théorie des perturbations en mécanique quantique, on obtient, au premier ordre, la valeur propre perturbée en projetant la perturbation sur la fonction d'onde non perturbée. Ici, on obtient la masse m en insérant les fonctions d'onde des modes zéros en l'absence de perturbation directement dans le mélange sur le bord. Dans cette approximation, dite des modes zéros (ZMA), on a alors :

$$\begin{aligned} m &\simeq m_D R' \int dz [\omega^4 f_{2,0}(z) g_{1,0}(z)] \delta(z - R') \\ &= m_D \left(\frac{R}{R'} \right)^4 \left(\frac{R'}{R} \right) \left(\frac{R'}{R} \right)^{c_2 - c_1 + 4} \\ &\quad \times \frac{\sqrt{1 + 2c_2}}{\sqrt{(R'/R)^{1+2c_2} - 1}} \frac{\sqrt{2c_1 - 1}}{\sqrt{1 - (R'/R)^{2c_1 - 1}}} \\ &= m_D \frac{\sqrt{-1 - 2c_2}}{\sqrt{1 - (R'/R)^{-1-2c_2}}} \frac{\sqrt{2c_1 - 1}}{\sqrt{1 - (R'/R)^{2c_1 - 1}}} \left(\frac{R}{R'} \right)^{c_1 - c_2 - 1} \end{aligned} \quad (3.199)$$

qui, pour $R \ll R'$, se réduit à (3.198) au premier ordre. Cette approximation pour les fermions légers simplifie grandement le calcul des masses en évitant la résolution des conditions aux bords.

3.4.6.2 Mécanisme de seesaw et masse du neutrino

Supposons maintenant que $\Psi_{1,2}$ décrivent des neutrinos. Le mode zéro de χ_1 est alors un neutrino gauche et celui de $\bar{\psi}_2$ un neutrino droit. En ajoutant un mélange

de Dirac sur le bord $z = R'$, on génère un terme de masse de Dirac reliant ces deux neutrinos de chiralités opposées. Dans l'hypothèse où Ψ_2 est dans une représentation réelle du groupe de jauge sur le bord $z = R$, on peut alors y écrire un terme de masse de Majorana. En outre, si celle-ci est beaucoup plus grande que la masse de Dirac, on se retrouve avec une réalisation naturelle du mécanisme de seesaw dans le contexte des dimensions supplémentaires. Nous verrons comment cette hiérarchie peut être obtenue pour une dimension plate ou courbe, mais dans un premier temps établissons les conditions aux bords.

A l'action en volume S_Ψ on ajoute alors les termes localisés suivant :

$$S_D = \int d^5x \omega^4 m_D R' (\psi_2 \chi_1 + \psi_1 \chi_2 + \bar{\chi}_1 \bar{\psi}_2 + \bar{\chi}_2 \bar{\psi}_1) \delta(z - R') \quad (3.200)$$

$$S_M = \frac{1}{2} \int d^5x \omega^4 R (M \psi_2 \psi_2 + M^* \bar{\psi}_2 \bar{\psi}_2) \delta(z - R). \quad (3.201)$$

Nous avons déjà dérivé séparément les conditions aux bords pour une masse de Majorana en $z = R$, ainsi qu'un mélange de Dirac en $z = R'$. Il suffit donc de rassembler les résultats obtenus ci-dessus et on a :

$$z = R' : \quad \begin{aligned} \bar{\psi}_1 &= m_D R' \bar{\psi}_2, \quad \chi_2 = -m_D R' \chi_1, \\ (\partial_5 + m_-) \chi_1 &= i \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}_1, \\ (\partial_5 - m_+) \psi_2 &= -i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi_2 \end{aligned} \quad (3.202)$$

$$z = R : \quad \begin{aligned} \bar{\psi}_1 &= 0, \quad \chi_2 = -MR \psi_2 \\ (\partial_5 + m_-) \chi_1 &= 0, \\ (\partial_5 - m_+) \bar{\psi}_2 &= -i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi_2. \end{aligned} \quad (3.203)$$

Ainsi, non seulement les tours de Kaluza–Klein 1 et 2 sont identifiées par le mélange de Dirac sur le bord R' , mais les états χ et $\bar{\psi}$ ne sont plus indépendants mais reliés par la conjugaison complexe. Il ne reste alors plus qu'une tour de neutrinos de type Majorana. La décomposition de Kaluza–Klein devient :

$$\chi_1(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_{1,n}(z) \psi_n(x), \quad \bar{\psi}_1(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{1,n} \bar{\psi}_n(x), \quad (3.204)$$

$$\chi_2(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_{2,n}(z) \psi_n(x), \quad \bar{\psi}_2(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{2,n} \bar{\psi}_n(x). \quad (3.205)$$

Nous allons maintenant calculer la masse de l'état le plus léger que l'on pourra identifier au neutrino observé.

Cas plat Les conditions aux bords imposent :

$$f_{1,n}(0) = 0, \quad g_{2,n}(0) = -MR' f_{2,n}(0) \quad (3.206)$$

$$f_{1,n}(R') - m_D R' f_{2,n}(R') = 0, \quad g_{1,n}(R') + m_D R' g_{2,n}(R') = 0 \quad (3.207)$$

où on a remplacé MR par MR' . Par simplicité, on se limite une fois encore au cas où les masses dans le bulk sont nulles. On obtient alors l'équation de quantification suivante :

$$(m_D R')^2 [1 + MR' \tan(m_n R')] = \tan(m_n R') [\tan(m_n R') - MR']. \quad (3.208)$$

Puis, dans la limite où $m_D \ll 1/R' \ll M$, la masse du neutrino léger devient :

$$m \simeq -\frac{m_D^2}{M} \quad (3.209)$$

ce qui n'est autre que la formule de seesaw pour laquelle la masse du neutrino léger (pratiquement gauche) est supprimée par celle, élevée, du neutrino droit. On peut également obtenir cette suppression de manière naturelle avec $m_D \sim M \sim 1/R'$, en réintroduisant des masses non nulles dans le bulk. Ainsi pour $m_1 > 0$ et $m_2 < 0$, la masse de Dirac est supprimée par un facteur exponentiel provenant des fonctions d'onde en $z = R'$: $m_D \rightarrow m_D e^{-m_1 R'} e^{m_2 R'}$ alors que la masse de Majorana est inchangée car la fonction d'onde est $\mathcal{O}(1)$ en $z = 0$. En ce cas, la masse du neutrino est un facteur m_D/M fois plus petite que la masse de l'électron $\sim m_D$, où une valeur naturelle pour ce rapport est $m_e/\text{TeV} \sim 10^{-6}$.

Cas AdS_5 Pour une dimension courbe, on suppose également que les modes zéro sont délocalisés du bord $z = R'$, soit $c_1 > 1/2$ et $c_2 < -1/2$. Par conséquent, $mR' \ll 1$ et on peut à nouveau utiliser les fonctions d'ondes approchées (3.145). Dans ce cas, les conditions aux bords :

$$f_{1,n}(R) = 0, \quad g_{2,n}(R) = -MRf_{2,n}(R) \quad (3.210)$$

$$f_{1,n}(R') - m_D R' f_{2,n}(R') = 0, \quad g_{1,n}(R') + m_D R' g_{2,n}(R') = 0 \quad (3.211)$$

conduisent, à l'ordre quadratique en m_n , à l'équation de quantification :

$$\begin{aligned} & \frac{m_n^2}{2c_2 + 1} + m_D^2 (1 - c_1) \left(\frac{R}{R'} \right)^{2(c_1 - c_2 - 1)} \\ & = -Mm_n \left[1 - (1 - 2c_1) \frac{m_D^2 m_n R}{1 - 2c_2} \left(\frac{R}{R'} \right)^{2(c_1 - c_2 - 1)} \right]. \end{aligned} \quad (3.212)$$

L'échelle naturelle pour M est maintenant $1/R \gg 1/R'$, alors que $m_D \sim 1/R'$. Alors dans la limite où $m_n \ll m_D \ll M$, la masse du neutrino léger devient :

$$m \simeq (2c_1 - 1) \frac{m_D^2}{M} \left(\frac{R}{R'} \right)^{2(c_1 - c_2 - 1)}, \quad (3.213)$$

et est supprimée par la masse de Majorana en $z = R$. Le mécanisme est encore plus transparent dans l'approximation ZMA. En effet, en injectant les fonctions d'onde des modes zéros dans les termes de bord, on dérive en $z = R'$ une masse de Dirac reliant χ_1 à ψ_2 donnée par :

$$\begin{aligned} m_{12} & \simeq m_D R' \int dz [\omega^4 f_{2,0}(z) g_{1,0}(z)] \delta(z - R') \\ & = m_D \sqrt{-1 - 2c_2} \sqrt{2c_1 - 1} \left(\frac{R}{R'} \right)^{c_1 - c_2 - 1}. \end{aligned} \quad (3.214)$$

Le terme en $z = R$ fournit, quant à lui, une masse de Majorana pour ψ_2 valant :

$$\begin{aligned} M_2 & \simeq MR \int dz [\omega^4 f_{2,0}(z)^2] \delta(z - R) \\ & = -M \frac{1 + 2c_2}{1 - (R/R')^{-1 - 2c_2}} \simeq -M(1 + 2c_2). \end{aligned} \quad (3.215)$$

On obtient alors dans la base χ_1, ψ_2 , une matrice de masse caractéristique du mécanisme de seesaw :

$$\begin{pmatrix} 0 & m_{12} \\ m_{12} & M_2 \end{pmatrix} \quad (3.216)$$

dont la valeur propre légère m , pour $M \sim R^{-1}$ et $m_D \sim R'^{-1}$, est approximativement donnée par la formule de seesaw :

$$m \simeq \frac{m_{12}^2}{M_2} = (2c_1 - 1) \frac{m_D^2}{M} \left(\frac{R}{R'} \right)^{2(c_1 - c_2 - 1)}. \quad (3.217)$$

Remarquons enfin que la masse de Majorana M_2 peut être ajustée par rapport à $M \sim R^{-1}$ en localisant légèrement ψ_2 vers le bord IR $c_2 \gtrsim -1/2$.

Conclusions

Munis de dimensions d'espace supplémentaires, les modèles ADD et RS ouvrent une nouvelle voie vers la résolution du problème de hiérarchie, non pas en stabilisant le Higgs (comme en supersymétrie) mais en le rendant sensible à une échelle ultra-violette faible, de l'ordre du TeV. Cette propriété est rendue possible en attaquant ce problème du côté de la faiblesse de l'interaction gravitationnelle en quatre dimensions. Dans le modèle ADD, l'échelle fondamentale 5d est le TeV et la masse de Planck 4d apparaît nettement plus grande suite à la dilution de la gravité dans l'espace compact. Le cut-off UV du Higgs est alors le TeV et non M_{Pl} . Pour une seule dimension supplémentaire, le modèle est déjà exclu car il requiert une dimension compacte de la taille du système solaire pour résoudre naturellement le problème de hiérarchie. Il pêche également à expliquer complètement la faiblesse de la gravitation, puisqu'il nécessite une dimension de taille bien supérieure à la valeur naïve $L = \text{TeV}^{-1}$. En ce sens, le modèle RS fournit une explication plus aboutie du problème de hiérarchie en localisant exponentiellement la gravité sur un bord 4d d'une dimension supplémentaire courbe. Les interactions gravitationnelles apparaissent alors faibles en un point suffisamment éloigné. De plus, la courbure $k \sim M_{Pl}$ de la métrique implique également un effet de décalage vers le rouge exponentiel de toutes les échelles d'énergie en se déplaçant le long de la dimension supplémentaire. Alors, en localisant le Higgs à une distance relativement courte de l'origine de cette dernière, ses corrections quantiques se voient coupées à une énergie de l'ordre du TeV pour $kL \sim 40$. En conséquence, pour une masse fondamentale 5d légèrement supérieure à M_{Pl} , la hiérarchie de jauge est produite sans aucune hiérarchie initiale. Enfin, outre les multiples propriétés favorables à une géométrie AdS_5 , la correspondance AdS/CFT fournit un lien direct entre les modèles RS et l'hypothèse selon laquelle le TeV serait en réalité une échelle composite émergeant de la brisure dynamique d'une symétrie conforme présente au-delà du Modèle Standard.

Par ailleurs, dans le cas d'un espace-temps 5d de courbure quelconque $\omega(z)$, nous avons rappelé les possibilités nouvelles qu'offre une dimension compacte quant à la brisure de symétries de jauge, avec ou sans scalaire fondamental, et la génération de fermions chiraux. Ces mécanismes reposent sur l'imposition de conditions aux bords Dirichlet que l'on obtient naturellement en localisant des dynamiques relativement simples sur les bords. Également, pour les fermions, nous avons montré comment tirer profit de la localisation des modes zéros pour produire les hiérarchies de masses observées, y compris pour les neutrinos grâce à un mécanisme de type seesaw.

Bibliographie

- [1] K. Agashe and G. Servant. Warped unification, proton stability and dark matter. *Phys. Rev. Lett.*, 93 :231805, 2004.
- [2] K. Agashe and G. Servant. Baryon number in warped GUTs : Model building and (dark matter related) phenomenology. *JCAP*, 0502 :002, 2005.
- [3] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. R. Dvali. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. *Phys. Lett.*, B429 :263–272, 1998.
- [4] N. Arkani-Hamed, M. Porrati, and L. Randall. Holography and phenomenology. *JHEP*, 08 :017, 2001.
- [5] C. Csaki, C. Grojean, J. Hubisz, Y. Shirman, and J. Terning. Fermions on an interval : Quark and lepton masses without a Higgs. *Phys. Rev.*, D70 :015012, 2004.
- [6] C. Csaki, C. Grojean, H. Murayama, L. Pilo, and J. Terning. Gauge theories on an interval : Unitarity without a Higgs. *Phys. Rev.*, D69 :055006, 2004.
- [7] K. R. Dienes, E. Dudas, and T. Gherghetta. Extra spacetime dimensions and unification. *Phys. Lett.*, B436 :55–65, 1998.
- [8] K. R. Dienes, E. Dudas, and T. Gherghetta. Grand unification at intermediate mass scales through extra dimensions. *Nucl. Phys.*, B537 :47–108, 1999.
- [9] W. D. Goldberger and I. Z. Rothstein. High energy field theory in truncated AdS backgrounds. *Phys. Rev. Lett.*, 89 :131601, 2002.
- [10] W. D. Goldberger and I. Z. Rothstein. Effective field theory and unification in AdS backgrounds. *Phys. Rev.*, D68 :125011, 2003.
- [11] A. Hebecker and J. March-Russell. The structure of GUT breaking by orbifolding. *Nucl. Phys.*, B625 :128–150, 2002.
- [12] T. Kaluza. On the Problem of Unity in Physics. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1921 :966–972, 1921.
- [13] D. J. Kapner et al. Tests of the gravitational inverse-square law below the dark-energy length scale. *Phys. Rev. Lett.*, 98 :021101, 2007.
- [14] O. Klein. Quantum theory and five-dimensional theory of relativity. *Z. Phys.*, 37 :895–906, 1926.
- [15] J. M. Maldacena. The large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2 :231–252, 1998.
- [16] N. S. Manton. A New Six-Dimensional Approach to the Weinberg-Salam Model. *Nucl. Phys.*, B158 :141, 1979.
- [17] A. Muck, A. Pilaftsis, and R. Ruckl. Minimal higher-dimensional extensions of the standard model and electroweak observables. *Phys. Rev.*, D65 :085037, 2002.
- [18] A. Pomarol. Grand unified theories without the desert. *Phys. Rev. Lett.*, 85 :4004–4007, 2000.
- [19] L. Randall and M. D. Schwartz. Quantum field theory and unification in AdS5. *JHEP*, 11 :003, 2001.
- [20] L. Randall and R. Sundrum. A large mass hierarchy from a small extra dimension. *Phys. Rev. Lett.*, 83 :3370–3373, 1999.
- [21] L. Randall and R. Sundrum. An alternative to compactification. *Phys. Rev. Lett.*, 83 :4690–4693, 1999.

- [22] R. Rattazzi and A. Zaffaroni. Comments on the holographic picture of the Randall-Sundrum model. *JHEP*, 04 :021, 2001.
- [23] E. Witten. Fermion Quantum Numbers in Kaluza-Klein Theory. Lecture given at Shelter Island II Conf., Shelter Island, N.Y., 1-2 Jun 1983.
- [24] E. Witten. Search for a realistic Kaluza-Klein theory. *Nucl. Phys.*, B186 :412, 1981.

Chapitre 4

Phénoménologie de la saveur leptonique dans AdS_5

Nous exploitons dans ce chapitre les diverses propriétés qu’offre la dynamique des champs fermioniques et de jauge plongés dans un espace-temps AdS_5 , telles que la brisure de symétrie par conditions aux bords et la génération naturelle de hiérarchie de masses, tout en stabilisant l’échelle électrofaible. En particulier, nous montrons comment obtenir un modèle de la saveur leptonique relativement simple, radiativement stable et à l’abri de toutes contraintes expérimentales. Le tout de façon naturelle, sans introduire à la main aucune hiérarchie. D’une manière générale, pour les fermions, la géométrie AdS_5 prédit naturellement une suppression des probabilités de changements de saveur, c’est-à-dire une matrice de mélange approximativement diagonale, dès lors que les fermions ont un spectre de masse hiérarchique. En effet, dans ce cas, leurs fonctions d’ondes doivent avoir des profils différents le long de la dimension supplémentaire et n’ont qu’un faible recouvrement, ce qui a pour conséquence de réduire les éléments non diagonaux des matrices de mélange, dont l’amplitude est contrôlée par celui-ci. Ainsi, pour les quarks, la hiérarchie de masses implique une matrice CKM quasi-diagonale, et ce pour des couplages de Yukawa quelconques ou « anarchique ». La géométrie courbe à elle seule permet de reproduire les données de saveur hadronique [14, 19, 18]. Le cas des leptons est en ce sens radicalement différent car les mélanges sont beaucoup plus importants, malgré la hiérarchie de masse des leptons chargés. Dans un espace-temps anti de Sitter, il est alors nécessaire de faire appel à une symétrie de saveur dans ce secteur. Nous démarrons le chapitre par une revue de nos connaissances actuelles sur la saveur leptonique et notamment les oscillations de neutrinos. Nous rappelons comment cette dernière peut être reproduite en supposant l’existence d’une symétrie de saveur discrète. Puis, guidés par la correspondance AdS/CFT , nous détaillons le contexte cinq-dimensionnel le plus favorable à la mise en œuvre de ce type de symétries, dont l’exemple le plus simple, basé sur le groupe A_4 , est présenté [17]. Enfin, nous étudions les diverses prédictions de ce modèle de la saveur leptonique dans AdS_5 et justifions sa validité en le confrontant aux mesures expérimentales contraignant ce secteur de la physique des particules. Le travail décrit dans ce chapitre est l’objet de la seconde publication reportée en fin de ce mémoire.

4.1 Introduction à la physique de la saveur leptonique

4.1.1 Propriétés générales des leptons

4.1.1.1 Leptons chargés et hiérarchie de masse

Les leptons sont composés de trois particules chargées e , μ et τ dont les masses s'étalent sur plusieurs ordres de grandeur, tout en étant nettement inférieures à l'échelle électrofaible. Elles sont par ailleurs connues avec une incroyable précision, notamment pour les états les plus légers [33] :

$$m_e = 0,51099892 \pm 0,00000004 \text{ MeV}, \quad (4.1)$$

$$m_\mu = 105,658369 \pm 0,000009 \text{ MeV}, \quad (4.2)$$

$$m_\tau = 1776,99_{-0,26}^{+0,29} \text{ MeV} \quad (4.3)$$

avec $m_{e,\mu,\tau} \ll m_W$. Le Modèle Standard n'apporte aucune information et ne contient aucun indice sur l'origine de cette hiérarchie.

4.1.1.2 Oscillations des neutrinos

Les leptons gauches étant sensibles à l'interaction faible, ils viennent en doublets de $SU(2)_L$ et sont accompagnés de leur neutrino respectif $\nu_{e,\mu,\tau}$. Ces particules, prédites par Pauli en 1930 pour rétablir la conservation de l'énergie dans la désintégration β du neutron $n \rightarrow p + \bar{\nu}_e + e^-$, ne furent observées pour la première fois qu'en 1955 via la réaction inverse $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$ où les antineutrinos initiaux étaient produits par un réacteur à fission nucléaire. Très vite s'est posée la question de leur masse. On pensa tout d'abord qu'il fut fort probable que la masse des neutrinos soit nulle, et c'est ce qu'on supposa lors de la construction du Modèle Standard, dans les années 60. Une vingtaine d'années plus tard, une étude fine de la cinématique de la désintégration β du tritium conclut que la masse du neutrino électronique était inférieure à l'eV [27]. Cependant, dès 1957, Pontecorvo [31, 32] réalisa que des neutrinos massifs pouvaient osciller, et ainsi changer de saveur, au cours de leur propagation¹. En particulier, si celle-ci se fait sur une distance suffisamment longue, il est alors possible de contraindre la masse des neutrinos en dessous de l'eV. Ceci s'explique simplement par les inégalités d'Heisenberg. En effet, comme de coutume en mécanique quantique, la fréquence d'oscillation d'une superposition de deux états propres est donnée par leur différence d'énergie $f_{osc} \sim \Delta E$. Or, pour une superposition d'impulsion relativiste², on a :

$$E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2} \simeq p + \frac{m_i^2}{2p} \rightarrow \Delta E \simeq \frac{\Delta m^2}{2p} \sim \frac{\Delta m^2}{2E} \quad (4.4)$$

Ainsi, l'observation d'oscillations de longueur d'onde $L_{osc} \sim f_{osc}^{-1}$, après une distance de propagation L permet la mise en évidence d'une masse Δm aussi faible que \sqrt{EL}^{-1} , correspondant à $L \simeq L_{osc}$. Si $L \ll L_{osc}$ les neutrinos n'ont pratiquement pas oscillé et aucun effet n'est observable. De même, si $L \gg L_{osc}$, le grand nombre de cycles réalisées avant la détection se moyenne à zéro et les oscillations ne peuvent être observées. Il est alors crucial que Δm soit tel que $L \sim L_{osc}$ pour espérer mettre en évidence

¹Cet effet fut par la suite développé plus en détail par Maki et al. en 1962 [29].

²Cette approximation est justifiée par la contrainte $m < 1$ eV et par le fait que l'énergie typique d'une réaction nucléaire produisant le neutrino est $E \sim 1$ MeV

un comportement oscillatoire. L'estimation précédente indique que plus la distance de propagation est grande, et/ou l'énergie du neutrino faible, plus la différence de masse mesurable est petite. La chasse aux neutrinos fut alors rouverte et la recherche d'oscillations de saveur entreprise.

Mises en évidence expérimentale des oscillations de saveur Il existe plusieurs sources naturelles de neutrinos. Par exemple, les réactions thermonucléaires solaires alimentant le Soleil — et la Terre — en énergie thermique produisent un flux de neutrinos électroniques par l'intermédiaire de la réaction de fusion $4p \rightarrow {}^4\text{He} + 2e^+ + 2\nu_e + \gamma$. A partir de la luminosité du Soleil on déduit facilement la température de sa surface, qui, ajoutée à la connaissance des réactions thermonucléaires régissant la dynamique stellaire, permet de déterminer l'énergie typique de cette réaction à l'équilibre thermique. On obtient alors assez précisément le flux de neutrino émis par notre étoile et donc le flux reçu à la surface de la Terre. Leur énergie moyenne étant estimée à environ 0,6 MeV et la Terre orbitant à une distance de l'ordre de $10^{11} \text{ m} \sim 10^{-17} \text{ eV}^{-1}$ du Soleil, l'expression précédente implique qu'il est en principe possible, en présence d'oscillation, de sonder des masses de l'ordre de 10^{-5} eV . Plusieurs expériences de détection de neutrinos solaires ont été menées depuis la mine de Homestake en 1968 jusqu'aux détecteurs japonais (Super-)Kamiokande toujours en prise de données³. Leur méthode de détection s'appuyait sur les réactions élémentaires suivantes : la capture d'un neutrino électronique par un neutron $\nu_e + n \rightarrow p + e^-$ et/ou sa diffusion élastique sur un électron $\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$. Alors que la première n'est possible que par l'échange d'un W , la seconde est *a priori* sensible aux autres saveurs via l'échange d'un Z . Néanmoins la section efficace reste relativement dominée par un courant chargé. Les différentes informations obtenues s'accordèrent toutes sur la disparition d'environ la moitié du flux de neutrinos électroniques attendu en provenance du Soleil, ce qui constitua ce qui fut nommé le problème du neutrino solaire. Une remise en cause des modèles d'évolution stellaire était alors envisageable. Cependant, en 1999 fut lancée l'expérience SNO, offrant pour la première fois une sensibilité de détection sur les trois saveurs. Il fut alors observé, pour la première fois, non seulement la disparition de ν_e mais aussi l'apparition de ν_μ et ν_τ — de manière indiscernable — tout en étant en accord avec les modèles de dynamique solaire. Cette mise en évidence de l'oscillation des neutrinos solaires constitue une preuve fiable et robuste du caractère massif des neutrinos, tel que l'avait imaginé Pontecorvo près de quarante ans auparavant. Enfin, les derniers résultats de Super-Kamiokande [23] rapportèrent une différence de masse solaire de :

$$\Delta m_{sol}^2 = 8,0 \pm 0,3 \times 10^{-5} \text{ eV}^2, \quad (4.5)$$

responsable d'oscillations de la forme $\nu_e \rightarrow \nu_{\mu,\tau}$.

Également, des rayons cosmiques, en large majorité composés de protons, entrent régulièrement en collision avec les molécules de la haute atmosphère terrestre. De ces collisions à très haute énergie — jusqu'à 10^{11} GeV — résultent des hadrons instables, principalement des pions, qui se désintègrent ensuite en cascades et dont les derniers produits peuvent être détectés au sol. En particulier, des neutrinos à haute énergie sont créés, principalement via les réactions de désintégrations $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ et $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$. Les neutrinos tau n'étant pratiquement pas produits dans la

³Pour une revue détaillée des modes opératoires de ces expériences, et de bien d'autres, se reporter à [20].

cascade. Le flux total de neutrinos est difficile à estimer précisément et est connu aujourd'hui à $\sim 10\%$ près. En revanche le rapport des flux de chaque saveur est établi à $\sim 5\%$ et ce paramètre peut être utilisé pour une mesure robuste⁴. En outre, comme l'indiquent les deux réactions précédentes, on obtient environ deux fois plus de neutrinos muoniques qu'électroniques. On peut également estimer la plus petite différence de masse mesurable dans ce cas, en utilisant la relation $\Delta m \sim \sqrt{EL}^{-1}$. Les neutrinos atmosphériques balayent une gamme d'énergie autour de $10^2 - 10^5$ MeV et sont produit à une altitude située entre $10^4 - 10^7$ m, d'où l'on déduit $\Delta m \gtrsim 1 - 10^{-3}$ eV. Kamiokande et son extension Super-Kamiokande sont parmi les rares expériences à pouvoir détecter les neutrinos en provenance de l'atmosphère. La distance de la source étant considérablement plus faible que pour les neutrinos solaires, le flux atmosphérique apparaît nettement plus isotrope que le flux solaire, qui peut donc être facilement retranché. Les résultats reportés par ces expériences sont également en désaccord avec les prédictions faites par analyse Monte-Carlo des cascades de désintégrations et mettent en évidence une disparition de ν_μ . C'est un autre signe du phénomène d'oscillations. Avec les récentes analyses de la collaboration Super-Kamiokande, le meilleur fit penche en faveur d'une apparition de ν_τ avec une différence de masse donnée par [23] :

$$\Delta m_{atm}^2 = 1,9 - 3 \times 10^{-3} \text{ eV}^2. \quad (4.6)$$

D'autres expériences sur Terre ont été, ou sont encore, menées à partir de faisceaux de neutrino artificiels produits par des réacteurs à fission, telles que Gosden, Bugey ou CHOOZ, ou par collision de protons accélérés comme KARMEN et LSND. Les expériences en réacteur sont capables d'observer des disparitions de saveur, malgré leurs distances de propagation réduites, jusqu'à $L \sim \text{km}$ pour CHOOZ, grâce à la faible énergie $E \sim \text{MeV}$ des neutrinos émis. Pour les neutrinos issus d'accélérateurs à protons, il est difficile d'atteindre une résolution de $\Delta m^2 \sim \Delta m_{sol,atm}^2$. En revanche ces expériences sont sensibles à la présence de neutrinos stériles.

4.1.2 Changements de saveur et angles de mélange.

Par construction, le Modèle Standard prédit une masse nulle pour les neutrinos car il ne contient pas de singulet de jauge correspondant au neutrino droit. On ne peut alors écrire de terme de masse de Dirac. Cependant, s'agissant d'une particule électriquement neutre, il est possible d'écrire un terme de masse de Majorana seulement à partir de la chiralité gauche :

$$\frac{y'_{ij}}{M} \tilde{H}^\dagger H \overline{L^c}_i L_j + h.c. \quad (4.7)$$

où M est une échelle d'énergie supprimant cet opérateur de dimension cinq. Si le Modèle Standard est une théorie complète des interactions à haute énergie, ce terme non renormalisable ne peut donc être écrit dans le lagrangien. De plus, une telle interaction n'est pas générée radiativement — avec $M \rightarrow m_W$ — puisqu'elle viole la conservation du nombre leptonique de deux unités, ce qui est interdit par la symétrie globale non anormale $U(1)_{B-L}$ du Modèle Standard, puisque $\Delta(B-L) = -2$. En revanche, s'il existe une nouvelle physique au-delà de l'échelle électrofaible, rien n'impose *a priori* qu'elle respecte les symétries accidentelles du Modèle Standard et l'émergence d'une

⁴La raison est essentiellement que le rapport dépend moins de spectre initial en rayons cosmiques et plus des réactions de désintégrations nucléaires qui sont mieux connues.

masse de Majorana de la forme (4.7) est typiquement inévitable dans la théorie effective à basse énergie, notamment après un mécanisme de seesaw.

L'existence d'une matrice de masse pour les neutrinos impliquent nécessairement l'existence de mélanges de saveur⁵, notamment lorsque cette dernière n'est pas alignée avec celles des leptons chargés. Typiquement après la brisure électrofaible, on obtient les termes de masses⁶ suivants :

$$-\mathcal{L}_m = \sum_{i,j=1}^{N_f} \bar{l}_L^i (M_l)_{ij} l_R^j + \frac{1}{2} \bar{\nu}_L^c (M_\nu)_{ij} \nu_L^j + h.c. \quad (4.8)$$

où les matrices M_l et M_ν sont diagonalisées au moyen de matrices unitaires comme :

$$\text{diag}(\{m_l^i\}) = U_L^l M_l (U_R^l)^\dagger, \quad (4.9)$$

$$\text{diag}(\{m_\alpha\}) = U_L^\nu M_\nu (U_L^\nu)^\dagger \quad (4.10)$$

où les m_α , avec $\alpha = 1, 2, 3$ sont définies comme réelles positives et ordonnées de manière à satisfaire :

$$m_1 < m_2, \Delta m_{12}^2 < |\Delta m_{13}^2| \quad (4.11)$$

avec $\Delta m_{\alpha\beta}^2 \equiv m_\beta^2 - m_\alpha^2$. Par conséquent, tout comme pour les quarks, dans la base des propres de masses, les couplages au W ne sont pas diagonaux :

$$\mathcal{L}_W = \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_i^{N_f} \bar{l}^i \gamma^\mu \nu_L^i W_\mu^- + h.c., \quad (4.12)$$

$$\rightarrow \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{i,\alpha=1}^{N_f} \bar{l}^i \gamma^\mu V_{i\alpha} \nu_L^\alpha W_\mu^- + h.c. \quad (4.13)$$

où $V \equiv U_L^l (U_L^\nu)^\dagger$ est la matrice de mélange de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata. C'est l'exact analogue leptonique de la matrice CKM pour les quarks. V est une matrice unitaire de taille $N_f \times N_f$ paramétrée par $N_f(N_f - 1)/2$ angles et $N_f(N_f + 1)/2$ phases complexes dont seulement N_f peuvent être éliminées en redéfinissant les champs des leptons chargés. En effet, toute redéfinition des neutrinos par une phase impliquerait une apparition de celle-ci dans la matrice de masse, qui est choisie réelle par convention. Il reste alors $N_f(N_f - 1)/2$ phases physiques dont $N_f - 1$ d'entre elles sont de type Majorana multipliant les valeurs propres réelles positives m_α . Pour $N_f = 3$, V est habituellement paramétrée comme $V \equiv UP$ avec $P = \text{diag}(1, e^{i\phi_1}, e^{i(\phi_2+\delta)})$ et :

$$\begin{aligned} U &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où c_{ij} (s_{ij}) désigne le cosinus (sinus) des angles de mélange $0 < \theta_{ij} < \pi/4$.

⁵A moins que celle-ci soit diagonale et de valeurs propres toutes dégénérées.

⁶Notons que rien n'interdit l'existence de neutrinos légers singulets de jauge. Ces neutrinos, qualifiés de stériles car insensibles à la physique électrofaible, ne seront pas considérés ici. Notons que leurs possibles existences est contrainte par les observations des fluctuations du fond diffus cosmologique. Les derniers résultats de WMAP [26] indiquent un nombre effectif d'espèces de particules ultra-relativistes, autre que le photon et apparentées à des neutrinos, de l'ordre de $N_{eff} = 4,4 \pm 1,5$ à 68% de niveau de confiance.

Formalisme d'oscillation Les états propres de masse sont des superpositions cohérentes des états propres de saveur définies par :

$$|\nu_L^i\rangle = \sum_{\alpha} V_{i\alpha} |\nu_L^{\alpha}\rangle, \text{ et } |\nu_L^{\alpha}\rangle = \sum_i V_{i\alpha}^* |\nu_L^i\rangle \quad (4.14)$$

avec $i = e, \mu, \tau$ et $\alpha = 1, 2, 3$. Ainsi, la matrice de mélange PMNS définit l'amplitude de probabilité associée à un changement de saveur. En effet, considérons un état de saveur ν_L^i produit par une réaction faible quelconque. Il constitue un paquet d'ondes composé des trois états propres de masse ν_L^{α} dans des proportions définies par $V_{i\alpha}$. Les états propres non dégénérés se propageant à des vitesses de phases différentes, ces proportions sont modifiées après un temps t et deviennent $e^{-iE_{\alpha}t} V_{i\alpha}$ avec $E_{\alpha} \simeq p + m_{\alpha}^2/2p$. Il existe alors une probabilité non nulle pour que l'état initial ν_L^i ait oscillé vers une saveur différente ν_L^j . Par définition, l'amplitude de probabilité est donnée par :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \langle \nu_L^j | \nu_L^i(t) \rangle = \sum_{\alpha, \beta} \langle \nu_L^j | V_{j\beta}^* V_{i\alpha} e^{-iE_{\alpha}t} | \nu_L^{\alpha} \rangle \\ &= \sum_{\alpha} V_{i\alpha} V_{j\alpha}^* e^{-iE_{\alpha}t} \end{aligned} \quad (4.15)$$

qui est nulle si les m_{α} sont dégénérés, par unitarité de V . Le module carré donne la probabilité suivante :

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \sum_{\alpha, \beta} V_{i\alpha} V_{j\alpha}^* V_{j\beta} V_{i\beta}^* e^{i(E_{\beta} - E_{\alpha})t} \\ &= \delta_{ij} + \sum_{\alpha \neq \beta} \Re \left[V_{i\alpha} V_{j\alpha}^* V_{j\beta} V_{i\beta}^* e^{i(E_{\beta} - E_{\alpha})t} \right] \\ &= \delta_{ij} - 4 \sum_{\alpha < \beta} \Re \left[V_{i\alpha} V_{j\alpha}^* V_{j\beta} V_{i\beta}^* \right] \sin^2(\Delta_{\alpha\beta}) \\ &\quad + 2 \sum_{\alpha < \beta} \Im \left[V_{i\alpha} V_{j\alpha}^* V_{j\beta} V_{i\beta}^* \right] \sin(2\Delta_{\alpha\beta}) \end{aligned} \quad (4.16)$$

avec :

$$\Delta_{\alpha\beta} \equiv \frac{\Delta m_{\alpha\beta}^2 t}{4p} \sim \frac{\Delta m_{\alpha\beta}^2 L}{4E} \quad (4.17)$$

où on a utilisé $L \sim t$ et $p \sim E$ pour des particules ultra-relativistes. Notons que le dernier terme de (4.16) est nul en l'absence de violation de CP . Le calcul de la probabilité P_{ij} montre que, non seulement une expérience d'oscillation peut mesurer la différence de masse carrée grâce à la fréquence d'oscillation, mais permet également d'obtenir une information sur les angles de mélanges en mesurant la perte de flux de neutrinos d'une saveur donnée. La probabilité (4.16) n'est valable que pour une propagation dans le vide. Elle constitue cependant une très bonne approximation pour l'étude des neutrinos solaires et atmosphériques. Nous allons maintenant présenter comment ces expériences contraignent les divers paramètres introduit ci-dessus.

Rappel des principaux résultats expérimentaux Nous avons vu que l'étude des neutrinos solaires et atmosphériques a mis en évidence deux différences de masse relativement distinctes $\Delta m_{atm}^2 \simeq 25 \Delta m_{sol}^2$. Traditionnellement, il est choisi d'ordonner les masses tel que $\Delta m_{12}^2 < |\Delta m_{13}^2|$. Ainsi, par convention, les neutrinos solaires

déterminent le mélange entre ν_L^1 et ν_L^2 , soit $\Delta m_{sol}^2 = \Delta m_{12}^2 > 0$. Par conséquent, on a également $|\Delta m_{23}^2| \simeq |\Delta m_{13}^2| \gg \Delta m_{12}^2$ et le spectre contient deux états rapprochés et un troisième sensiblement plus éloigné. A ce stade, deux ordres de masse différents sont possibles selon que ν_L^3 est plus léger ou plus lourd que le couple $\nu_L^{1,2}$:

$$\begin{aligned} \Delta m_{sol}^2 = \Delta m_{12}^2 &\ll \Delta m_{23}^2 \simeq \Delta m_{13}^2 = \Delta m_{atm}^2 > 0, \\ \Delta m_{sol}^2 = \Delta m_{12}^2 &\ll -\Delta m_{13}^2 \simeq -\Delta m_{23}^2 = \Delta m_{atm}^2 > 0, \end{aligned} \quad (4.18)$$

Tel qu'illustré sur la figure 4.1, le premier correspond à une hiérarchie normale⁷ et le second définit une hiérarchie inversée. Il est par ailleurs de coutume⁸ de fixer $|\Delta m_{23}^2| = \Delta m_{atm}^2$ pour les deux types de hiérarchie. Néanmoins, bien qu'aujourd'hui aucune expérience ne permette de distinguer Δm_{13}^2 de Δm_{23}^2 , il est possible qu'à l'avenir l'on puisse mesurer précisément les trois fréquences d'oscillation. Si tel est un jour le cas, la classification (4.18) ci-dessus prévaudra. Concernant les angles de mélange, le fait qu'il

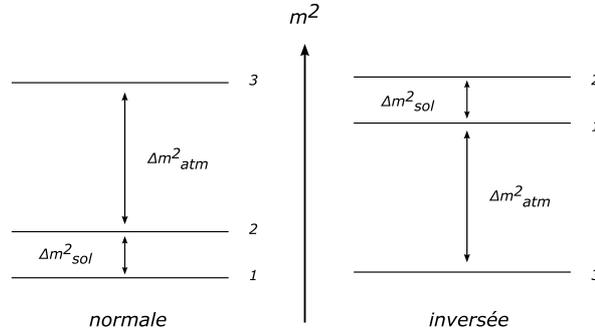


FIG. 4.1 – Différents ordres de masse entre lesquels les données actuelles ne permettent pas encore de trancher.

existe essentiellement deux fréquences d'oscillation distinctes simplifie grandement la situation. Par exemple pour les neutrinos solaires $L \gg L_{osc}^{23}$ et ce type d'oscillations se moyennent à zéro entre le Soleil et la Terre de sorte que ces détecteurs sont uniquement sensibles à θ_{12} et θ_{13} . Pareillement, la distance L_{osc}^{12} est beaucoup plus grande que la distance de propagation caractéristique des neutrinos atmosphériques qui ne dépendent alors que de θ_{23} et θ_{13} . L'angle θ_{13} est contraint par l'expérience en réacteur CHOOZ [7] et sa valeur est relativement faible :

$$\sin^2(2\theta_{13}) < 0,19 \quad (4.19)$$

soit $\theta_{13} < 13^\circ$. Dans la limite $\theta_{13} \rightarrow 0$, les analyses des neutrinos solaire et atmosphérique se réduisent toutes deux à une oscillation entre deux états ν_a et ν_b . Dans ce cas, négligeant toute violation de CP , la matrice de mélange dépend d'un seul paramètre :

$$V \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

⁷Au sens strict cet ordre autorise également un spectre quasi-dégénéré dans le cas peu naturel où les différences de masses sont nettement inférieures à toutes les masses : $m_1 \simeq m_2 \simeq m_3 \gg \sqrt{\Delta m_{12}^2}, \sqrt{\Delta m_{13}^2}$.

⁸C'est par exemple le cas dans [33].

et il n'y a qu'une différence de masse Δm^2 . Notons que l'échange de ν_a avec ν_b est équivalent aux transformations $\Delta m^2 \rightarrow -\Delta m^2$ accompagné de $\theta \rightarrow \pi/2 - \theta$. Dans cette situation simplifiée, la probabilité P_{ij} devient :

$$P_{ij} = \delta_{ij} - (2\delta_{ij} - 1) \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\Delta m^2 L}{4E}\right). \quad (4.21)$$

La probabilité est invariante sous les deux transformations précédentes appliquées séparément. Par conséquent, les expériences d'oscillation ne sont sensible qu'aux paramètres suivant $(|\Delta m^2|, \sin^2(2\theta))$. Ainsi SNO [4] et Super-Kamiokande [8] contraignent séparément les angles solaire et atmosphérique :

$$\sin^2(2\theta_{12}) = 0,86_{-0,04}^{+0,03}, \quad \sin^2(2\theta_{23}) > 0,92 \quad (4.22)$$

soit respectivement $\theta_{12} \simeq 34^\circ$ et $\theta_{23} \simeq 37^\circ$. Les mélanges leptoniques apparaissent alors relativement importants et les entrées de la matrice de mélange affichent des valeurs toutes approximativement $\sim \mathcal{O}(1)$:

$$|U| = \begin{pmatrix} 0,80 - 0,82 & 0,54 - 0,56 & < 0,23 \\ 0,56 - 0,45 & 0,59 - 0,66 & 0,59 - 0,60 \\ 0,19 - 0,33 & 0,50 - 0,60 & 0,78 - 0,80 \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

A première vue, ces éléments de matrices semblent totalement aléatoires ou « anarchiques ». Néanmoins, Harrison, Perkins et Scott [22] remarquèrent que la matrice U relativement bien approchés par une matrice de mélange qualifiée de *tri-bimaximale* donnée par⁹

$$U_{HPS} = \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

correspondant à $\theta_{13} = 0$, $\theta_{23} = \pi/4$ et $\sin^2(2\theta_{12}) = 8/9$. Le terme tri-bimaximal englobant simplement le mélange bimaximal entre ν_L^μ et ν_L^τ à l'échelle atmosphérique, ainsi que le mélange trimaximal de ν_L^e avec ν_L^μ et ν_L^τ à l'échelle solaire. Il est en général assez difficile d'obtenir deux angles de mélange larges simultanément, car la hiérarchie de masses des leptons chargés impose naturellement une hiérarchisation des mélanges de saveur, tout comme dans le secteur des quarks. Cependant, Ma et al. montrèrent qu'une certaine classe de symétries discrètes de saveur, dont la plus simple est la symétrie A_4 , permet de retrouver exactement, au niveau des arbres, la forme U_{HPS} précédente [28, 11].

4.1.3 Symétrie de saveur discrète : A_4 dans une coquille de noix

Les phénomènes de changement de saveur sont théoriquement relativement mal compris. Certainement parce qu'il n'y a encore aujourd'hui aucune justification pour l'existence de trois générations distinctes ou, en d'autres termes, la dynamique du Modèle Standard en est pratiquement transparente¹⁰. La compréhension des mélanges de saveur est alors des plus élusives car aucun principe dynamique fondamental ne permet

⁹ avec $\sqrt{2/3} \simeq 0,82$, $1/\sqrt{3} \simeq 0,58$, $1/\sqrt{6} \simeq 0,41$ et $1/\sqrt{2} \simeq 0,71$.

¹⁰ Les deux familles les plus instables ne contribuent en effet que radiativement sur les interactions régissant le comportement de la plus légère.

d'en prédire la structure. Dans ce contexte, la meilleure approche consiste à introduire une ou plusieurs symétries globales afin de relier la forme des matrices de mélange à la structure d'un groupe. Les premières tentatives de paramétrisation de la physique de la saveur reposèrent sur des symétries continues. Puis, il s'est avéré fructueux de considérer les nouvelles possibilités qu'offrent des symétries discrètes, comme par exemple A_4 notamment pour les neutrinos, mais également pour les quarks [24], dont l'usage s'est popularisé ces dernières années. Nous rappelons tout d'abord quelques propriétés élémentaires du groupe A_4 , avant d'en présenter une utilisation simple permettant de dériver une structure de type U_{HPS} .

4.1.3.1 Rudiments sur A_4

A_4 est le groupe des perturbations paires de rang quatre $(1234) \rightarrow (n_1 n_2 n_3 n_4)$. Il possède $4!/2 = 12$ éléments, reliés entre eux par deux générateurs élémentaires $S = (4321)$ et $T = (2314)$ vérifiant :

$$S^2 = T^3 = (ST)^3 = 1. \quad (4.25)$$

Ces douze éléments se répartissent en quatre classes d'équivalence¹¹ C_i définies par le nombre d'applications de T :

$$\begin{aligned} C_1 & : I = (1234) \\ C_2 & : T = (2314), ST = (4132), TS = (3214), STS = (1423) \\ C_3 & : T^2 = (3124), ST^2 = (4213), T^2S = (2431), TST = (1342) \\ C_4 & : S = ST^3 = (4321), T^2ST = (3412), TST^2 = (2143) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Géométriquement, les transformations de A_4 correspondent à la permutation des sommets d'un tétraèdre et A_4 constitue alors un sous-groupe discret du groupe des rotations $SO(3)$ laissant invariante la sphère complète circonscrite au tétraèdre. Pour un groupe fini, la somme des carrés des dimensions d_r des représentations irréductibles r est égale au nombre d'éléments du groupe $\sum_r d_r^2 = 12$. Il n'existe ainsi que quatre représentations irréductibles, une 3 de dimension trois et trois unidimensionnelles notées $1, 1', 1''$ et vérifiant $1'^* = 1''$. La table de multiplication du groupe s'obtient directement à partir des caractères du groupe. Un caractère est un nombre χ_g^r associé à la représentation r de chaque élément g du groupe. χ_g^r est notamment défini comme la trace de la matrice représentant g dans la représentation r et est identique pour toutes représentations équivalentes. Pour A_4 , on dérive alors la liste des caractères présentée dans la table (4.1.3.1). Les caractères permettent très simplement de déterminer les décompositions de produits de représentations. Par construction, les caractères d'un produit tensoriel de représentations sont les produits des caractères de chaque facteur. Également, par propriété de la trace, les caractères d'une somme directe de représentations sont les sommes des caractères de chaque terme. Par conséquent, si $r_a \otimes r_b = r_1 \oplus r_2 \oplus \dots \oplus r_n$ alors $\chi_{r_a \otimes r_b} = \chi_{r_a} \chi_{r_b} = \sum_{i=1}^n \chi_{r_i}$. Les produits des représentations irréductibles se décomposent alors comme suit :

$$\begin{aligned} 1' \times 1'' &= 1, & 1 \times 3 &= 3 \\ 1' \times 1' &= 1'', & 1' \times 3 &= 3 \\ 1'' \times 1'' &= 1', & 1'' \times 3 &= 3 \\ 3_x \times 3_y &= 3_1 + 3_2 + 1 + 1' + 1'' \end{aligned} \quad (4.27)$$

¹¹Les éléments h et k appartiennent à la même classe s'il existe dans le groupe un élément g tel que $ghg^{-1} = h$.

classe	χ_1	$\chi_{1'}$	$\chi_{1''}$	χ_3
C_1	1	1	1	3
C_2	1	ω	ω^2	0
C_3	1	ω^2	ω	0
C_4	1	1	1	-1

TAB. 4.1 – Table des caractères du groupe A_4 où $\omega \equiv e^{2i\pi/3}$ est la racine cubique de l'unité satisfaisant $1 + \omega + \omega^2 = 0$ et $\omega^* = \omega^2$.

où pour la dernière ligne, avec $3_x \sim (x_1, x_2, x_3)$, $3_y \sim (y_1, y_2, y_3)$ et dans une base où S est diagonal :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

soit :

$$S : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, -x_2, -x_3) \quad (4.29)$$

$$T : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_2, x_3, x_1) \quad (4.30)$$

on a :

$$1 \sim x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \quad (4.31)$$

$$1' \sim x_1 y_1 + \omega^2 x_2 y_2 + \omega x_3 y_3 \quad (4.32)$$

$$1'' \sim x_1 y_1 + \omega x_2 y_2 + \omega^2 x_3 y_3 \quad (4.33)$$

$$3_1 \sim (x_2 y_3, x_3 y_1, x_1 y_2) \quad (4.34)$$

$$3_2 \sim (x_3 y_2, x_1 y_3, x_2 y_1). \quad (4.35)$$

En outre, pour $3 \sim (x_1, x_2, x_3)$ et $1' \sim u$, $3 \times 1' = 3 \sim u(x_1, \omega x_2, \omega^2 x_3)$. De même pour $3 \times 1''$ avec $\omega \rightarrow \omega^2$. Enfin, pour les trois représentations unidimensionnelles les générateurs sont représentés par :

$$1 : S = 1, T = 1, \quad (4.36)$$

$$1' : S = 1, T = \omega, \quad (4.37)$$

$$1'' : S = 1, T = \omega^2. \quad (4.38)$$

4.1.3.2 U_{HPS} à partir de A_4

Le groupe A_4 possède donc trois représentations irréductibles de dimension un et une de dimension trois. Il semble alors parfaitement adapté pour trois générations. Nous revoyons ici la construction typique à 4d inspirée¹² de celle décrite par Altarelli et Feruglio [5, 6] et pour laquelle les leptons gauches $L^T = (\nu_L, l_L)$ sont assignés à une

¹²En particulier, nous considérons seulement un doublet de Higgs.

3 de A_4 , alors que les trois leptons chargés l_R^i singulets de $SU(2)_L$ vivent dans une 1, 1' et 1'' pour $i = e, \mu, \tau$ respectivement. La symétrie A_4 est brisée spontanément par trois singulets de jauge scalaires. Deux d'entre eux, ϕ et ϕ' , se transforment comme des triplets sous A_4 alors que le troisième, ξ , est un singulet. L'introduction de deux triplets différents est importante car elle permet de véhiculer la brisure de A_4 dans des directions distinctes pour les leptons chargés et les neutrinos. La symétrie A_4 contraint alors les couplages de Yukawa du Modèle Standard, produisant les masses des leptons chargés, ainsi que les masses de Majorana non renormalisables provenant d'une quelconque nouvelle physique à une échelle Λ . Les interactions de Yukawa se réduisent aux invariants suivants :

$$-L_Y = \frac{y_e}{\Lambda} (\bar{L}\phi') H e_R + \frac{y_\mu}{\Lambda} (\bar{L}\phi')'' H \mu_R + \frac{y_\tau}{\Lambda} (\bar{L}\phi')' H \tau_R \quad (4.39)$$

$$\frac{x_s}{2\Lambda^2} \xi \tilde{H}^\dagger H (\bar{L}^c L) + \frac{x_t}{2\Lambda^2} \tilde{H}^\dagger H (\phi' \bar{L}^c L) + h.c. + \dots \quad (4.40)$$

où \dots dénotent des opérateurs d'ordre supérieur en Λ^{-1} . Pour les produits de triplets sous A_4 on a noté $()$, $()'$ et $()''$ les composantes se transformant comme 1, 1' et 1'' respectivement. On remarquera que plusieurs opérateurs, *a priori* aussi dominants que les précédents, sont absents. Par exemple, l'invariant de dimension cinq $\tilde{H}^\dagger H (\bar{L}^c L)$ apporterait une contribution dominante, proportionnelle à l'identité, à la matrice de masse des neutrinos, ce qui la rendrait diagonale au premier ordre en Λ . Également, tous les termes obtenus par l'échange de ϕ avec ϕ' n'ont pas été écrits. Leur absence est cruciale dans cette construction et nécessite l'ajout de symétries de saveur supplémentaires pour s'en assurer. Il y a alors plusieurs choix de symétries possibles pour cela. L'exemple le plus simple consiste à introduire une symétrie Z_4 sous laquelle les fermions se transforment comme $l_R^i \rightarrow i l_R^i$, $L \rightarrow iL$ et $\phi \rightarrow -\phi$ alors que ϕ' et ξ ne portent pas de charge sous cette symétrie. Dans ce cas, il est facile de montrer que le lagrangien de Yukawa le plus général invariant sous $A_4 \times Z_4$ est donné par (4.39) aux ordres les plus bas en Λ^{-1} . Enfin, bien que l'introduction d'un singulet puisse paraître inutile, ξ joue un rôle important dans la procédure de minimisation du potentiel scalaire $V(\phi, \phi', \xi)$ responsable de la brisure spontanée de A_4 . En particulier, il facilite la réalisation d'un alignement des VEVs des triplets dans des directions différentes. Ainsi, les auteurs de [5] montrèrent qu'il existe une région de l'espace des paramètres du potentiel V pour laquelle ϕ , ϕ' et ξ développent les valeurs dans le vide suivantes :

$$\langle \phi \rangle = (v, 0, 0), \quad \langle \phi' \rangle = (v', v', v'), \quad \langle \xi \rangle = u. \quad (4.41)$$

avec $v, v', u \lesssim \Lambda$. Étant donné les lois de transformation (4.29, 4.30) d'un triplet sous les générateurs de A_4 , on remarque que la première VEV le brise en son sous-groupe Z_2 généré par S alors que la seconde, invariante sous T , en préserve un sous-groupe Z_3 . Quant à la dernière, elle brise simultanément S et T , réduisant complètement la symétrie A_4 . Après la brisure électrofaible, ces valeurs dans le vide produisent les matrices de masse suivantes pour les leptons chargés et les neutrinos :

$$M_l = \frac{v' v_H}{\sqrt{2}\Lambda} \begin{pmatrix} y_e & y_\mu & y_\tau \\ y_e & \omega y_\mu & \omega^2 y_\tau \\ y_e & \omega^2 y_\mu & \omega y_\tau \end{pmatrix}, \quad M_\nu = \frac{v_H^2}{2\Lambda} \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & t \\ 0 & t & s \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

avec $s \equiv x_s u / \Lambda$ et $t \equiv x_t v / \Lambda$. La matrice des leptons chargés est diagonalisée par $U_R^l = \mathbf{1}$ et $U_L^l = V_4^*$ où $V_4 = V_4^T$ est la matrice unitaire permettant de passer de la

base où S est diagonal à la base où T est diagonal :

$$V_4 \equiv \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix}. \quad (4.43)$$

Toute approche basée sur A_4 présente l'intérêt de faire de V_4 la matrice qui diagonalise les leptons chargés, découplant ainsi les masses de ces derniers du processus de diagonalisation des neutrinos. Une autre propriété remarquable est qu'il est inutile de redéfinir les leptons droits, ce qui permet de ne pas générer les changements de saveur par courant neutre qui apparaissent génériquement dans les constructions au-delà du Modèle Standard. Cette propriété n'avait pas été remarquée jusqu'à présent et nous en présenterons, ci-après, une illustration dans un modèle 5d. Après diagonalisation, les masses des leptons sont :

$$m_e = y_e \frac{\sqrt{3}v'v_H}{\sqrt{2}\Lambda}, \quad m_\mu = y_\mu \frac{\sqrt{3}v'v_H}{\sqrt{2}\Lambda}, \quad m_\tau = y_\tau \frac{\sqrt{3}v'v_H}{\sqrt{2}\Lambda}. \quad (4.44)$$

La hiérarchie de masse peut alors être produite en introduisant une autre symétrie de saveur continue $U(1)_F$ sous laquelle seuls les leptons droits sont chargés avec $F = 0, 2, 3-4$ pour τ_R, μ_R et e_R respectivement. On brise alors spontanément cette symétrie à l'aide d'un scalaire θ — singulet de jauge et de $A_4 \times Z_4$ — de charge -1 dont la VEV satisfait $\langle \theta \rangle / \Lambda \equiv \lambda \ll 1$. Ainsi, partant de couplages de Yukawa d'ordre un dans le lagrangien, on obtient la hiérarchie suivante dans les couplages effectifs après brisure de $U(1)_F$:

$$y_\tau \simeq \mathcal{O}(1), \quad y_\mu \simeq \mathcal{O}(\lambda^2), \quad y_e \simeq \mathcal{O}(\lambda^{3-4}). \quad (4.45)$$

Dans la base des leptons chargés diagonaux, la matrice de masse de Majorana des neutrinos devient :

$$M_\nu \rightarrow V_4^* M_\nu V_4 = \frac{v_H^2}{2\Lambda} \begin{pmatrix} s + 2t/3 & -t/3 & -t/3 \\ -t/3 & 2t/3 & s - t/3 \\ -t/3 & s - t/3 & 2t/3 \end{pmatrix}. \quad (4.46)$$

que l'on diagonalise à l'aide de $U = U_{HPS}$:

$$U^T M_\nu U = \frac{v_H^2}{2\Lambda} \text{diag}(s + t, s, -s + t). \quad (4.47)$$

Notons que la matrice M_ν ci-dessus — après diagonalisation des leptons chargés — n'est qu'un cas particulier de la forme la plus générale diagonalisée par U_{HPS} :

$$M_\nu = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & c & d \\ b & d & c \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

avec a, b, c, d réels et vérifiant $a + b - c - d = 0$. Dans le cas contraire, la forme précédente assure seulement $\theta_{13} = 0$ et $\theta_{23} = \pi/4$. A cet ordre, les trois masses de neutrinos sont déterminées par seulement deux paramètres que l'on fixe en imposant les différences de masse solaire et atmosphérique. Ainsi, l'échelle de masse absolue des neutrinos constitue une prédiction de cette classe de modèles. La structure de la matrice de mélange repose essentiellement sur l'alignement particulier des VEVs

de ϕ et ϕ' . Dans la version originale 4d, cet ajustement non trivial est relativement difficile à obtenir. La situation est rendue beaucoup plus simple par l'introduction d'une dimension supplémentaire [5]. En ce cas, la brisure de A_4 peut être réalisée sur les bords et les deux triplets séparés par le bulk. Les VEVs nécessaires sont alors générés indépendamment de façon très simple en brisant A_4 d'un coté en Z_2 pour les masses des leptons et de l'autre en Z_3 pour les neutrinos.

Le modèle précédent peut également être étendu pour fournir un mécanisme de seesaw. En effet, en introduisant trois neutrinos droits N_R^i se transformant comme un triplet de A_4 et de charge i sous Z_4 , (4.39) est remplacé par :

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y &= \frac{y_e}{\Lambda} (\bar{L}\phi') H e_R + \frac{y_\mu}{\Lambda} (\bar{L}\phi')'' H \mu_R + \frac{y_\tau}{\Lambda} (\bar{L}\phi')' H \tau_R \\ &+ \frac{y_s}{2} \xi (\bar{N}_R^c N_R) + \frac{y_t}{2} (\phi \bar{N}_R^c N_R) \\ &+ y_\nu (\bar{L} N_R) \tilde{H} + h.c. + \dots \end{aligned} \quad (4.49)$$

La structure requise pour la matrice de Majorana est maintenant transférée aux singulets N_R et la masse de Dirac est diagonale à l'ordre le plus bas. Dans la phase brisée, et après le mécanisme de seesaw, les masses des neutrinos sont données par la matrice suivante :

$$M_\nu = -m_\nu^D M_N^{-1} (m_\nu^D)^T \quad (4.50)$$

avec :

$$m_\nu^D = \frac{y_\nu v_H}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_N = u \begin{pmatrix} y_s & 0 & 0 \\ 0 & y_s & y_t v/u \\ 0 & y_t v/u & y_s \end{pmatrix}. \quad (4.51)$$

M_N et son inverse ayant une structure semblable et m_ν^D étant diagonal, M_ν possède alors la forme requise (4.42) pour obtenir U_{HPS} après diagonalisation des leptons chargés :

$$M_\nu = \frac{y_\nu^2 v_H^2}{2u} \begin{pmatrix} 1/y_s & 0 & 0 \\ 0 & y_s/\Delta & y_t v/(u\Delta) \\ 0 & y_t v/(u\Delta) & y_s/\Delta \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

avec $\Delta \equiv y_s^2 - y_t^2 (v/u)^2$. On retrouve ainsi la matrice (4.42) lorsque l'échelle de brisure de A_4 est celle du seesaw, $u \sim v \sim \Lambda$.

Nous nous tournons maintenant vers une description d'un modèle cinq-dimensionnel dont la phénoménologie dans le secteur de jauge est en bon accord avec les tests de précision électrofaible. Nous détaillerons par la suite comment tirer avantage de la dimension supplémentaire pour rendre l'implantation de la symétrie A_4 plus naturelle.

4.2 Modèles de brisure de symétrie électrofaible dans AdS₅

Dans cette section, nous verrons comment utiliser les dynamiques détaillées dans le chapitre précédent pour construire un modèle 5d réaliste de brisure de symétrie électrofaible qui, tout en résolvant le problème de hiérarchie, permet de passer avec succès les tests de précision électrofaible. Nous discutons, tout d'abord, le rôle primordial

joué par la symétrie custodiale dans la construction de modèles de brisure de symétrie électrofaible en accord avec les mesures de précision au pôle du Z réalisées au LEP. Ensuite, nous présentons en détail le secteur de jauge et fermionique nécessaire à la reproduction du Modèle Standard à basse énergie.

4.2.1 Symétrie custodiale et paramètre ρ

Des multiples observables du Modèle Standard, les masses des bosons de jauge figurent parmi les plus contraintes par les tests de précision électrofaible. En particulier, leur rapport ρ a été mesuré avec une grande précision et vérifie la relation suivante [1] :

$$\rho \equiv \frac{m_W^2}{c_W^2 m_Z^2} = 1 + \mathcal{O}(10^{-3}). \quad (4.53)$$

Dans le Modèle Standard, le mécanisme de Higgs assure $\rho = 1$ exactement au niveau des arbres. Cette propriété n'est pas accidentelle et a été identifiée comme résultant d'une symétrie, la symétrie custodiale. Dans les modèles à dimensions supplémentaires les masses de bosons de jauge ne sont plus données directement, contrairement au Modèle Standard, par les couplages de jauge mais par la compactification $m_{W,Z} \sim 1/R'$ et obtenir $\rho = 1$ n'est pas trivial. En premier lieu, nous rappelons ce qu'est la symétrie custodiale dans le Modèle Standard avant de présenter, guidés par la correspondance AdS/CFT, comment elle peut être implémenter à cinq dimensions.

4.2.1.1 Invariance custodiale dans le Modèle Standard

La symétrie custodiale apparaît dans le secteur de Higgs pour lequel l'invariance de jauge impose que le potentiel soit une fonction de $H^\dagger H$ seulement :

$$V_H = \lambda \left(H^\dagger H - \frac{v_H^2}{2} \right)^2. \quad (4.54)$$

Le Higgs étant un doublet complexe, il contient quatre degrés de liberté et $H^\dagger H$ est en fait invariant sous une quelconque rotation de ses quatre composantes. Le potentiel du Higgs possède alors une symétrie globale générée par le groupe $SO(4)$ isomorphe à $SU(2)_L \times SU(2)_R$. L'origine de cette symétrie supplémentaire $SU(2)_R$ repose sur la pseudo-réalité de la représentation fondamentale de $SU(2)$. Le doublet H et son conjugué complexe $\tilde{H} \equiv i\sigma_2 H^*$ se transforment exactement de la même façon sous $SU(2)$. On peut alors utiliser indifféremment H ou \tilde{H} pour paramétrer la brisure de symétrie électrofaible. C'est précisément ce que reflète l'invariance globale sous $SU(2)_R$ qui n'est autre que l'échange de H avec \tilde{H} . Cette relation est beaucoup plus transparente lorsqu'on écrit le Higgs comme un bi-doublet sous les deux $SU(2)$. On construit alors à partir de H une matrice 2×2 :

$$\mathcal{H} \equiv (\tilde{H} \ H) = \begin{pmatrix} H_0^* & H_+ \\ -H_+^* & H_0 \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

sur laquelle la symétrie $SU(2)_L \times SU(2)_R$ agit comme : $\mathcal{H} \rightarrow U_L \mathcal{H} U_R^\dagger$. Le potentiel se met alors sous une forme trivialement invariant sous $SU(2)_L \times SU(2)_R$,

$$V_H = \frac{\lambda}{4} (\text{tr} \mathcal{H}^\dagger \mathcal{H} - v_H^2)^2, \quad (4.56)$$

puisque $\mathcal{H}^\dagger \mathcal{H} = (H^\dagger H) \mathbf{1}_{2 \times 2}$. Pour $v_H \neq 0$, la valeur dans le vide de \mathcal{H} s'obtient directement de celle de H :

$$\langle H \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v_H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \rightarrow \langle \mathcal{H} \rangle = \frac{v_H}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

et la symétrie $SU(2)_L \times SU(2)_R$ est brisée dans son sous groupe diagonal $SU(2)_D$ pour lequel $U_L = U_R$. La symétrie $SU(2)_D$ restante est la symétrie custodiale. On montre que sous cette dernière les bosons W^a de $SU(2)_L$ se transforme comme un triplet et doivent avoir la même masse. La masse de W^3 s'obtient à partir de la masse du Z après rotation vers la base (W^3, B) et on a $m_{W^3} = m_Z c_W$. Enfin la symétrie custodiale imposant $m_{W^{1,2}} = m_{W^3} = m_W$, le paramètre ρ est automatiquement égal à 1. En réalité, $SU(2)_D$ est seulement une symétrie exacte du secteur du Higgs, et non du lagrangien complet du Modèle Standard. Elle est notamment violée par l'interaction d'hypercharge, puisque $Y(H) = -Y(\tilde{H})$ suite à la conjugaison complexe, et par les couplages de Yukawa qui ne sont pas invariants sous l'« échange custodial » $\tilde{H} \leftrightarrow H$ lorsque les masses des fermions d'un même doublet sont différentes, $y_u \neq y_d$. Les déviations à $\rho = 1$ apparaissent alors seulement radiativement dans le Modèle Standard et sont nécessairement faibles, puisque logarithmiques.

4.2.1.2 Réalisation à 5d

On souhaite obtenir une modélisation du secteur électrofaible du Modèle Standard dont le mécanisme de brisure soit globalement invariant sous $SU(2)_L \times SU(2)_R$, afin de garantir une valeur acceptable du paramètre ρ dans la phase brisée. Dans un espace-temps anti de Sitter à cinq dimensions, la correspondance AdS/CFT nous indique que cette symétrie doit être jaugée dans le bulk. La théorie effective doit seulement contenir les modes de masse nulle correspondant aux champs de jauge du Modèle Standard. Par conséquent $SU(2)_L \times SU(2)_R$ doit être brisé en $SU(2)_L \times U(1)_Y$ sur un des bords au moyen de conditions Dirichlet. Ce ne peut être sur le bord IR car il traduit la brisure spontanée de l'invariance conforme au TeV qui véhicule à son tour la brisure de la symétrie électrofaible. La symétrie de jauge $SU(2)_L \times U(1)_Y$ doit alors être restaurer dans la limite où le bord IR est découplé et envoyé à l'infini. Ainsi, le groupe de jauge du Modèle Standard doit émerger à l'échelle ultraviolette sur le bord de Planck. Il reste ensuite à réaliser la brisure électrofaible. Pour ce faire, on élimine tous les modes zéros 4d de $SU(2)_L \times U(1)_Y$ excepté le photon de la symétrie $U(1)_{em}$ en brisant sur le bord IR, via le traditionnel mécanisme de Higgs, $SU(2)_L \times SU(2)_R$ en $SU(2)_D$, préservant ainsi la symétrie custodiale. Enfin, on note que le schéma de brisure précédent implique que $U(1)_Y$ soit un sous-groupe de $SU(2)_R$. Dans ce cas, les seules hypercharges possibles sont $\pm 1/2$, ce qui ne permet pas de reproduire correctement les charges électriques observées lorsque des fermions sont introduits dans la théorie. Il est alors nécessaire de jauger également un groupe $U(1)$ dans le bulk afin d'ajuster correctement l'hypercharge. Toujours en suivant la correspondance AdS/CFT, un choix naturel est la symétrie globale $U(1)_{B-L}$ du Modèle Standard qui assure la conservation de la différence des nombres baryonique et leptonique. $U(1)_{B-L}$ est un sous-groupe sans anomalie de la symétrie classique $U(1)_B \times U(1)_L$ qui peut donc être rendue locale dans le bulk sans perdre l'invariance de jauge au niveau quantique. Ainsi, sur le bord UV, on a $U(1)_Y \subset SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$, l'hypercharge est alors fixée par la relation $Y = (B - L)/2 + T_{3R}$, alors que $U(1)_{B-L}$ reste intacte sur le bord IR. La figure 4.2 illustre les différentes symétries de jauge vivant sur les bords et dans

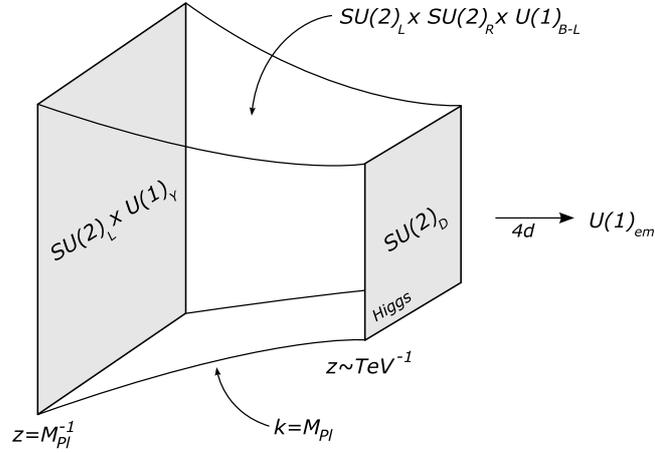


FIG. 4.2 – Symétries de jauge dans le bulk et sur les bords. Dans l’infrarouge, le Higgs brise $SU(2)_L \times SU(2)_R \rightarrow SU(2)_D$ alors que dans l’ultra-violet $SU(2)_R \times U(1)_{B-L} \rightarrow U(1)_Y$ par des conditions aux bords appropriées. $U(1)_{em}$ est l’unique symétrie exacte en quatre dimensions.

le bulk. Munie d’une invariance custodiale, la phénoménologie de ce modèle est alors en bonne position pour satisfaire aux les différents tests de précision électrofaible. Il constitue alors une base solide pour attaquer les problèmes de saveur dans le secteur des fermions. Avant cela, nous détaillerons le spectre de Kaluza-Klein du secteur de jauge et discuterons de quelques propriétés importantes de ce type de constructions.

4.2.2 Modèles $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$

Suivant les motivations énumérées jusqu’à présent, nous nous plaçons à partir de maintenant et pour le reste de ce chapitre dans l’environnement suivant. L’espace-temps est une tranche d’AdS₅, délimitée par un bord UV en $z = R \sim M_{Pl}^{-1}$ et un bord IR en $z = R' \sim \text{TeV}^{-1}$, dans laquelle tous les champs peuvent se propager, hormis le Higgs. La symétrie de jauge à cinq dimensions est $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$. Nous décrirons en détail la brisure de cette symétrie et évoquerons la validité de ce modèle vis-à-vis des contraintes expérimentales dans le secteur de jauge. Enfin nous nous pencherons sur le contenu en matière à introduire pour reproduire les propriétés des fermions observés à 4d.

4.2.2.1 Spectre des bosons de jauge

Nous revoyons dans un premier temps le jeu de conditions aux bords nécessaires pour réduire la symétrie de jauge 5d jusqu’à l’ $U(1)_{em}$ observé à 4d. Ensuite, nous discuterons brièvement le spectre de Kaluza-Klein des bosons de jauge ainsi que les corrections obliques dans ce type de modèles.

Conditions aux bords Pour commencer, éliminons la brane IR ou, en d’autres termes, restaurons la symétrie électrofaible à 4d. L’espace AdS₅ est alors simplement

borné par un bord UV. A ce stade la théorie effective 4d doit être $SU(2)_L \times U(1)_Y$ symétrique. Puisque le modèle contient une symétrie de jauge plus large à cinq dimensions, il faut éliminer certains modes zéros. Nous avons vu que la fonction d'onde d'un mode zéro de spin 1 est plate dans AdS₅ et qu'il suffit que le champ de jauge vérifie une condition Dirichlet ($A_\mu = 0$) en un point pour que le mode zéro soit identiquement nul. On impose alors les conditions aux bords suivantes sur le bord UV :

$$z = R \quad : \quad \begin{aligned} \partial_5 A_{L,\mu}^a &= 0, & A_{R,\mu}^\pm &= 0, \\ (g_{5R} A_{R,\mu}^3 - \tilde{g}_5 X_\mu) &= 0, & \partial_5 (\tilde{g}_5 A_{R,\mu}^3 + g_{5R} X_\mu) &= 0 \end{aligned} \quad (4.58)$$

où $A^\pm \equiv (A^1 \mp iA^2)/\sqrt{2}$. On a noté A_L^a , A_R^a et X les champs de jauge de $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ avec g_{5L} , g_{5R} et comme couplage de jauge respectifs. Les conditions pour A_5 n'ont pas été explicitées car elles sont simplement de type opposé, comme l'impose le principe de moindre action sur le bord. On se place par ailleurs dans la jauge unitaire où les résonances de A_5 sont découplées. La lecture des conditions précédentes se fait comme suit. Les trois directions de $SU(2)_L$ satisfont une condition naturelle de type Neumann et cette symétrie de jauge est intacte à 4d. Ensuite, les composantes chargées $A_{R,\mu}^{a=1,2}$ de $SU(2)_R$ ont une condition Dirichlet et ne présentent pas de mode zéro à basse énergie. Quant aux deux dernières conditions, elle reflète simplement le fait que la combinaison des composantes neutres $A_{R,\mu}^{a=3}$ et X_μ correspondant à l'hypercharge $Y = T_{3R} + (B - L)/2$ a un mode de masse nulle, alors que la direction orthogonale est brisée. Les conditions Dirichlet peuvent être obtenues dans la limite de découplage d'une VEV sur le bord $z = R$. Par exemple, un scalaire ϕ dans la représentation $(\mathbf{1}_L, \mathbf{2}_R)_1$ du groupe de jauge développant une valeur dans le vide de la forme $\langle \phi^T \rangle = (0, v/\sqrt{2})$ brise $SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ en $U(1)_Y$. En présence d'un mécanisme de Higgs, les conditions aux bords sont données par (3.78) avec dans ce cas :

$$g_5 F_i^a = \frac{v}{2} \begin{pmatrix} g_{5R} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{5R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{5R} & 0 \\ 0 & 0 & -\tilde{g}_5 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.59)$$

d'où l'on déduit les conditions (4.58) dans la limite $v \rightarrow \infty$. La symétrie $SU(2)_L \times U(1)_Y$ est ensuite réduite à $U(1)_{em}$ en brisant $SU(2)_L \times SU(2)_R$ en $SU(2)_D$ sur le bord IR. La symétrie custodiale $SU(2)_D$ est brisée sur le bord UV mais elle demeure néanmoins dans la théorie effective de manière approchée sous sa forme globale, assurant un paramètre ρ proche de l'unité. Pareillement au Modèle Standard, pour réaliser spontanément la brisure, on introduit en $z = R'$ un bi-doublet de Higgs $\mathcal{H} \sim (\mathbf{2}_L, \mathbf{2}_R)_0$ dont les composantes neutres développent une valeur dans le vide de la forme (4.57). L'action du Higgs sur le bord prend la forme :

$$S_{\mathcal{H}} = \int d^5 \sqrt{g_{IR}} [g_{IR}^{\mu\nu} \text{tr}(D_\mu \mathcal{H}^\dagger D_\nu \mathcal{H}) - V(\mathcal{H})] \delta(z - R') \quad (4.60)$$

où g_{IR} est la métrique induite sur le bord et V est le potentiel en chapeau mexicain (4.56). Le Higgs se transformant comme une $(\mathbf{2}, \mathbf{2})_0$ sous le groupe de jauge — $\mathcal{H} \rightarrow U_L \mathcal{H} U_R^\dagger$ —, la dérivée covariante s'écrit :

$$D_\mu \mathcal{H} = \partial_\mu \mathcal{H} - ig_{5L} A_{L,\mu}^a T_L^a \mathcal{H} + ig_{5R} \mathcal{H} T_R^a \quad (4.61)$$

avec $T_L^a = T_R^a = \sigma^a/2$. On en déduit alors la matrice F suivante :

$$g_5 F_i^a = \frac{v_H}{2} \begin{pmatrix} g_{5L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{5L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{5L} & 0 \\ -g_{5R} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g_{5R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g_{5R} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.62)$$

et les conditions aux bords s'écrivent :

$$z = R' \quad : \quad \partial_5 X_\mu = 0, \quad \partial_5 (g_{5R} A_{L,\mu}^a + g_{5L} A_{R,\mu}^a) = 0, \quad (4.63)$$

$$\partial_5 (g_{5L} A_{L,\mu}^a - g_{5R} A_{R,\mu}^a) = -\mathcal{V}_H (g_{5L} A_{L,\mu}^a - g_{5R} A_{R,\mu}^a) \quad (4.64)$$

avec $\mathcal{V}_H \equiv (g_{5L}^2 + g_{5R}^2)(R'/R)v_H^2/4$. Enfin, rappelons que l'action du secteur de jauge dans AdS₅, incluant un mécanisme de Higgs sur le bord IR, s'écrit :

$$S_A = -\frac{1}{4} \int d^4x \int_R^{R'} dz \left(\frac{R}{z} \right) [(L_{MN}^a)^2 + (R_{MN}^a)^2 + (X_{MN})^2] \\ + \int d^4x \left[\text{tr} |D_\mu \mathcal{H}|^2 - \frac{\lambda}{4} \left(\text{tr} |\mathcal{H}|^2 - v_H^2 \right)^2 \right]_{z=R'} \quad (4.65)$$

où L_{MN}^a , R_{MN}^a et X_{MN} sont les tenseurs de jauge de $A_{L,M}^a$, $A_{R,M}^a$ et X_M respectivement, avec $L_{MN}^a = \partial_M A_{L,N}^a - \partial_N A_{L,M}^a + g_{5L} \epsilon^{abc} A_{L,M}^b A_{L,N}^c$, etc...

Modes de Kaluza-Klein et masses On peut maintenant écrire la décomposition de Kaluza-Klein résultant des conditions (4.58) et (4.63). Concentrons nous dans un premier sur les modes zéros. La seule symétrie qui n'est brisée sur aucun des deux bords est $U(1)_{em} \subset SU(2)_L \times U(1)_Y$, il reste donc dans le spectre un mode de masse nulle correspondant au photon. Suite aux diverses identifications des modes de Kaluza-Klein par les conditions aux bords, les états propres de masse 4d sont repartis dans plusieurs bosons de jauge 5d. Une simple lecture des conditions aux bords conduit à la décomposition suivante :

$$A_{L,\mu}^\pm(x, z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{L,\pm}(z) W_{k,\mu}^\pm(x), \quad (4.66)$$

$$A_{R,\mu}^\pm(x, z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{R,\pm}(z) W_{k,\mu}^\pm(x), \quad (4.67)$$

$$X_\mu(x, z) = a_0 \gamma_\mu(x) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^X(z) Z_{k,\mu}(x), \quad (4.68)$$

$$A_{L,\mu}^3(x, z) = \frac{\tilde{g}_5}{g_{5L}} a_0 \gamma_\mu(x) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{L,3}(z) Z_{k,\mu}(x), \quad (4.69)$$

$$A_{R,\mu}^3(x, z) = \frac{\tilde{g}_5}{g_{5R}} a_0 \gamma_\mu(x) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{R,3}(z) Z_{k,\mu}(x). \quad (4.70)$$

Les modes chargés électriquement sont interprétés comme le W , accompagné de ses résonances. Pour les composantes neutres, le mode zéro et le mode massif le plus léger

sont identifiés au photon et au Z respectivement. Quant à leurs résonances de Kaluza-Klein elles sont collectivement représentées comme des excitations du Z . On rappelle que les fonctions d'ondes sont de la forme : $a_k^V(z) = z [A_k^V J_1(m_k z) + B_k^V Y_1(m_k z)]$. En imposant les conditions aux bords, on dérive les équations de quantification définissant les masses de la théorie. La situation décrite jusqu'à maintenant est relativement complexe. On se limitera à titre d'illustration à la limite Higgsless où $\mathcal{V} \rightarrow \infty$, laissant la résolution du cas général à une éventuelle étude numérique. En supposant également par mesure de simplicité $g_{5L} = g_{5R} \equiv g_5$, on obtient les équations de quantification suivantes pour les modes chargés :

$$(R_0 - R'_0)(R_1 - R'_1) + (R'_1 - R_0)(R'_0 - R_1) = 0 \quad (4.71)$$

et les modes neutres :

$$2\tilde{g}_5(R_0 - R'_1)(R'_0 - R_1) = g_5^2 [(R_0 - R'_0)(R_1 - R'_1) + (R'_1 - R_0)(R'_0 - R_1)], \quad (4.72)$$

où l'on a défini $R_i \equiv Y_i(mR)/J_i(mR)$ et $R'_i \equiv Y_i(mR')/J_i(mR')$. Il existe également une troisième tour de Kaluza-Klein correspondant aux excitations massives du photon : $R_0 - R'_0 = 0$. Dans la limite $mR \ll 1$ et $\log(R'/R) \gg 1$ on obtient la masse du W en développant la première équation au premier ordre en ces deux quantités :

$$m_W^2 \simeq \frac{1}{R'^2 \log(R'/R)}. \quad (4.73)$$

La masse du W ne dépend pas des constantes de couplage de jauge et est utilisée pour fixer la taille de la tranche d'AdS₅. Si $R^{-1} = M_{Pl} = 10^{19}$ GeV, alors $R'^{-1} \simeq 500$ GeV et $\log(R'/R) \sim 37$ justifiant l'approximation. Sous les mêmes hypothèses, on dérive la masse du Z de la seconde relation¹³ :

$$m_Z^2 \simeq \frac{g_5^2 + 2\tilde{g}_5^2}{g_5^2 + \tilde{g}_5^2} \frac{1}{R'^2 \log(R'/R)}. \quad (4.74)$$

Le rapport des masses des bosons faibles dépend alors uniquement des couplages de jauge 5d dont la valeur doit être déterminée en faisant correspondre les interactions de jauge 5d avec la théorie 4d. Cette procédure porte le nom de « matching » et nous en présenterons plusieurs versions après avoir introduit le spectre fermionique. On peut cependant obtenir ces relations en première approximation en utilisant le fait que les fonctions d'onde du W et du Z ne sont que légèrement perturbées autour de la brane du TeV par la présence de v_H . Elles sont alors approximativement plates et une estimation des couplages 4d s'obtient en normalisant les termes cinétiques¹⁴ :

$$\frac{1}{g^2} \sim \frac{1}{g_{5L}^2} \int_R^{R'} dz (R/z) = R \frac{\log(R'/R)}{g_{5L}^2}, \quad (4.75)$$

$$\frac{1}{g'^2} \sim \left(\frac{1}{g_{5R}^2} + \frac{1}{\tilde{g}_5^2} \right) \int_R^{R'} dz (R/z) = R \log(R'/R) \left(\frac{1}{g_{5R}^2} + \frac{1}{\tilde{g}_5^2} \right). \quad (4.76)$$

Également, les premières résonances de Kaluza-Klein se situent approximativement à :

$$m_{W_{KK}}^2 \simeq \frac{4}{R'^2} \simeq m_{Z_{KK}} \quad (4.77)$$

¹³La troisième équation de quantification ne contient pas de mode léger puisque ce dernier aurait été le photon qui est en fait de masse nulle.

¹⁴On se place ici dans une base où le W a une norme non canonique.

où la dernière relation est une conséquence de la symétrie custodiale. La suppression en $\log(R'/R)$ des masses des bosons de jauge du Modèle Standard est une conséquence directe de la courbure anti de Sitter. Pour le voir, il suffit d'estimer la masse des bosons de jauge en utilisant la correspondance AdS/CFT. Cette dernière indique que la masse du W et du Z est issue de la brisure spontanée en $z = R'$ de l'invariance conforme 4d, soit $m_W^2 = g^2/R'^2$ et $m_Z = (g^2 + g'^2)/R'^2$. En outre, les couplages de jauge effectifs sont données en première approximation par (4.75) et (4.76). Une valeur naturelle pour les g_5^{-2} étant $\sim M_{Pl} \sim R^{-1}$, on retrouve alors la suppression en $\log(R'/R)$ des masses (4.73) et (4.74). Ainsi, la courbure permet de légèrement repousser les résonances de Kaluza-Klein dans l'UV par rapport au cas plat où $g_4^{-2} \sim Lg_{5L}^{-2}$, ce qui réduit les corrections obliques dans ce modèle. En outre, cela fournit une solution naturelle au petit problème de hiérarchie, puisque la masse des excitations de Kaluza-Klein est naturellement supérieure d'un ordre de grandeur au TeV, qui est l'échelle saturant les corrections radiatives à la masse du Higgs.

4.2.2.2 Fermions et couplages de jauge

Contenu en matière du Modèle Standard Les fermions du Modèle Standard sont chiraux et de tels états peuvent être représentés par les modes zéros des fermions de Dirac dans le bulk. En outre, les équations du mouvement pour un spin 1/2 ne permettent pas l'existence simultanée des deux fermions de Weyl de masse nulle et il est alors nécessaire d'introduire à 5d un fermion de Dirac par fermion chiral du Modèle Standard. Le groupe de jauge étant $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$, les fermions droits, tout comme les gauches sont assemblés en doublet. En particulier, ce modèle contient un neutrino droit. Pour chaque génération, on a donc besoin de deux doublets de leptons ainsi que de deux doublets de quarks que l'on note $\Psi_L^l, \Psi_R^l, \Psi_L^q$ et Ψ_R^q . Afin d'éviter toute confusion, on insiste sur le fait que, dans cette notation, L, R désigne sous quelle $SU(2)$ le fermion est chargé, et non sa chiralité. Chaque fermion de Dirac contient deux fermions de Weyl dont les modes zéros, que l'on sélectionne par un choix approprié de conditions aux bords, fournissent les états chiraux avant la brisure de symétrie électrofaible. En utilisant la notation décrite dans le chapitre précédent, ces derniers sont obtenus grâce aux conditions suivantes :

$$\Psi_L^l = \begin{pmatrix} \chi_L^l & [++] \\ \bar{\psi}_L^l & [--] \end{pmatrix} : \quad \chi_L^l = \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi}_L^l = \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_L \\ \tilde{l}_L \end{pmatrix}, \quad (4.78)$$

$$\Psi_R^l = \begin{pmatrix} \chi_R^l & [--] \\ \bar{\psi}_R^l & [++] \end{pmatrix} : \quad \chi_R^l = \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_R \\ \tilde{l}_R \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi}_R^l = \begin{pmatrix} \nu_R \\ l_R \end{pmatrix}, \quad (4.79)$$

$$\Psi_L^q = \begin{pmatrix} \chi_L^q & [++] \\ \bar{\psi}_L^q & [--] \end{pmatrix} : \quad \chi_L^q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi}_L^q = \begin{pmatrix} \tilde{u}_L \\ \tilde{d}_L \end{pmatrix}, \quad (4.80)$$

$$\Psi_R^q = \begin{pmatrix} \chi_R^q & [--] \\ \bar{\psi}_R^q & [++] \end{pmatrix} : \quad \chi_R^q = \begin{pmatrix} \tilde{u}_R \\ \tilde{d}_R \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi}_R^q = \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \end{pmatrix}. \quad (4.81)$$

Seules les composantes satisfaisant une condition Neumann aux deux bords $[++]$ contiennent un mode de masse nulle. Comme l'impose l'équation de Dirac, les deux spineurs de Weyl d'un fermion de Dirac doivent satisfaire des conditions opposées. Ainsi les fermions partenaires $[- -]$, marqués d'un \sim , possèdent seulement des modes massifs. Les charges de ces fermions sous les divers groupes de jauge dans le bulk et sur les bords sont énumérées dans le tableau (4.2). C'est le contenu en matière minimal nécessaire

fermion	bulk (L, R) _{B-L}	UV L _Y	IR D _{B-L}	4d Q
$\chi_L^l = \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix}$	(2, 1) ₋₁	2 _{-1/2}	2 ₋₁	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
$\bar{\psi}_R^l = \begin{pmatrix} \nu_R \\ l_R \end{pmatrix}$	(1, 2) ₋₁	$\begin{pmatrix} \mathbf{1}_0 \\ \mathbf{1}_{-1/2} \end{pmatrix}$	2 ₋₁	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
$\chi_L^q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	(2, 1) _{1/3}	2 _{1/6}	2 _{1/3}	$\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$
$\bar{\psi}_R^q = \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \end{pmatrix}$	(1, 2) _{1/3}	$\begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2/3} \\ \mathbf{1}_{-1/3} \end{pmatrix}$	2 _{1/3}	$\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$

$$Y = T_{3R} + \frac{1}{2}(B - L) \quad Q = T_{3L} + Y$$

TAB. 4.2 – Fermions et charges de jauge. Seul les fermions de Weyl développant un mode zéro sont indiqués et les partenaires associés ont par construction les mêmes charges.

pour la description d'une seule génération. Cependant, ce ne sont pas les conditions aux bords les plus générales respectant la symétrie de jauge. En effet, $SU(2)_R$ étant brisé en $z = R$, les composantes d'un doublet $\mathbf{2}_R$ sont singulets de jauge sur ce bord et ne sont pas astreintes à satisfaire les mêmes conditions aux bords. On peut alors imposer séparément ces dernières comme :

$$\bar{\psi}_R^l = \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_R & [-+] \\ l_R & [++] \end{pmatrix} \quad (4.82)$$

Dans cet exemple particulier, le neutrino droit satisfait au moins une condition Dirichlet et le mode zéro disparaît du spectre, justifiant l'ajout d'un \sim . Plus généralement, pour modéliser les effets de changement de saveur, nous serons amenés à ajouter d'autres symétries de saveur dans le bulk pour lesquelles les particules droites n'ont pas nécessairement le même nombre quantique. En introduisant alors deux doublets de $SU(2)_R$ au lieu d'un seul, il est possible de sélectionner les deux modes zéros de chiralité droite dans un doublet différent à 5d, ce qui permet de leur associer des nombres quantiques de saveur distincts.

Génération de masses sur le bord IR Par définition, les fermions chiraux sont sans masse¹⁵. Nous avons présenté dans la section précédente un moyen de générer une masse de Dirac reliant ces modes zéros en introduisant un mélange de Dirac sur un bord. Ici, ces termes de bord ne peuvent s'écrire qu'en $z = R'$ car c'est le seul point de la dimension supplémentaire où la symétrie de jauge est de type vecteur. En outre, sur le bord IR, la symétrie chirale $SU(2)_L \times SU(2)_R$ est brisée spontanément par un mécanisme de Higgs et, en ce cas, une simple masse de Dirac en constituerait

¹⁵On rappelle que la masse dans le bulk est simplement un paramètre définissant leur localisation.

une brisure explicite. Elle ne peut être ajoutée telle quelle, mais doit également être générée spontanément via une interaction de Yukawa reliant le bi-doublet de Higgs à Ψ_L et Ψ_R , représentant collectivement les quarks et les leptons :

$$S_{Dirac} = - \int d^5x \sqrt{g_{IR}} \left[\frac{y}{\Lambda'} \bar{\Psi}_L \mathcal{H} \Psi_R + h.c. \right] \delta(z - R') \quad (4.83)$$

où g_{IR} est le déterminant de la métrique induite en $z = R'$ et y un couplage de Yukawa sans dimension que l'on choisira réel pour le moment. Ψ étant de dimension de masse deux, cette interaction est non renormalisable et est supprimé par une échelle de cut-off Λ' . Une valeur naturelle est $\Lambda' \sim R'^{-1}$ qui est l'échelle fondamentale sur le bord IR¹⁶. Après brisure spontanée sur le bord, l'action S_{Dirac} fournit le mélange requis :

$$\begin{aligned} S_{Dirac} &\rightarrow - \int d^4x \omega^4 \left[\frac{y}{\sqrt{2}} \frac{v_H}{\Lambda'} \bar{\Psi}_L \Psi_R + h.c. \right] \\ &= \int d^4x \omega^4 m_D R' [\psi_R \chi_L + \psi_L \chi_R + h.c.], \end{aligned} \quad (4.84)$$

avec $\omega = R/R'$ et :

$$m_D \equiv \frac{y}{\sqrt{2}} \frac{v_H}{R' \Lambda'}, \quad (4.85)$$

et génère ainsi une masse de Dirac donnée par l'expression (3.198) :

$$m \simeq m_D \sqrt{-1 - 2c_R} \sqrt{2c_L - 1} \left(\frac{R}{R'} \right)^{c_L - c_R - 1} \quad (4.86)$$

pour des fermions légers localisés en $z = R$, $c_L > 1/2$ et $c_R < -1/2$. Comme nous l'avons déjà souligné auparavant, la localisation permet d'expliquer de manière simple la hiérarchie de masse des fermions. En effet, à partir d'un couplage de Yukawa sur le bord $y \sim \mathcal{O}(1)$, on génère un couplage effectif à 4d

$$y_{eff} \equiv y \sqrt{-1 - 2c_R} \sqrt{2c_L - 1} \left(\frac{R}{R'} \right)^{c_L - c_R - 1} \quad (4.87)$$

qui peut être réduit de plusieurs ordres de grandeur, comme l'illustre la figure 4.3, grâce à la courbure d'AdS₅. Ainsi, plus les fermions sont localisés loin du mélange IR, plus la masse est supprimée par rapport à l'échelle électrofaible.

Couplages vecteurs/fermions Dans la théorie effective 4d, les couplages entre bosons de jauge et fermions sont obtenus en prenant l'intégrale sur la dimension supplémentaire du produit des fonctions d'onde apparaissant dans les dérivées covariantes des fermions. Le terme cinétique dans le bulk s'écrit :

$$i \int d^5x \left(\frac{R}{z} \right)^4 (\bar{\Psi}_L \gamma^\mu D_\mu^L \Psi_L + \bar{\Psi}_R \gamma^\mu D_\mu^R \Psi_R) \quad (4.88)$$

où les dérivées $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ covariantes s'écrivent :

$$D_\mu^L = \partial_\mu - i \frac{g_{5L}}{\sqrt{2}} \left(T_L^+ A_{L,\mu}^+ + T_L^- A_{L,\mu}^- \right) - i g_{5L} T_{3L} A_{L,\mu}^3 - i \frac{\tilde{g}_5}{2} (B - L) X_\mu \quad (4.89)$$

¹⁶Néanmoins, pour $y \sim \mathcal{O}(1)$, on peut dériver une valeur maximale du cut-off en demandant à ce que l'interaction de Yukawa reste perturbative. Nous détaillerons cette contrainte dans la dernière partie de ce chapitre où nous présenterons les méthodes d'analyses dimensionnelles naïves (NDA).

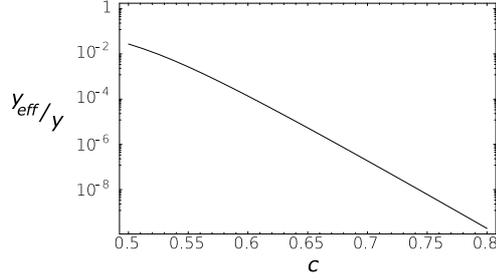


FIG. 4.3 – Réduction du couplage de Yukawa en fonction de la délocalisation des modes zéros, pour $c \equiv c_L = -c_R$.

et D_μ^R est donnée par une expression similaire avec $L \rightarrow R$. Après insertion des différentes décompositions de Kaluza-Klein et développement des termes cinétiques, les couplages des fermions aux bosons de jauge massifs se mettent sous la forme :

$$\int d^4x \sum_{k \geq 1} \left(J_{k,+}^\mu W_{k,\mu}^- + J_{k,-}^\mu W_{k,\mu}^+ + J_{k,0}^\mu Z_{k,\mu} \right) \quad (4.90)$$

alors que le couplage au photon s'écrit :

$$e \int d^4x J_{em}^\mu \gamma_\mu. \quad (4.91)$$

La charge électrique est définie par la constante de couplage associée au groupe $U(1)$ généré par $Q = T_{3L} + (B - L)/2$ pour les fermions gauches et $Q = T_{3R} + (B - L)/2$ pour les fermions droits. En développant la dérivée covariante ci-dessus, on obtient $e \equiv \tilde{g}_5 a_0$, où la constante de normalisation a_0 peut être déterminée en normalisant canoniquement le photon à 4d :

$$a_0^2 \left(1 + \frac{\tilde{g}_5}{g_{5L}} + \frac{\tilde{g}_5}{g_{5R}} \right) \int_R^{R'} dz (R/z). \quad (4.92)$$

La charge électrique s'écrit alors comme une fonction des couplages de jauge 5d :

$$\frac{1}{e^2} \equiv \left(\frac{1}{g_{5R}^2} + \frac{1}{g_{5L}^2} + \frac{1}{\tilde{g}_5^2} \right) R \log(R'/R). \quad (4.93)$$

Les courants chargés et neutres sont alors donnés par¹⁷ :

$$J_{k,+}^\mu = \sum_{n,m} G_{n,m,k}^+ \bar{l}_{L,n} \bar{\sigma}^\mu \nu_{L,m} + F_{n,m}^+ l_{R,n} \sigma^\mu \bar{\nu}_{L,m} \quad (4.94)$$

$$J_{k,-}^\mu = \sum_{n,m} G_{n,m,k}^- \bar{\nu}_{L,n} \bar{\sigma}^\mu l_{L,m} + F_{n,m,k}^- \nu_{L,n} \sigma^\mu \bar{l}_{R,m} \quad (4.95)$$

$$J_{k,0}^\mu = \sum_{n,m} E_{n,m,k}^R l_{R,n} \sigma^\mu \bar{l}_{R,m} + E_{n,m,k}^L \bar{l}_{L,n} \bar{\sigma}^\mu l_{L,m} \\ + N_{n,m,k} \bar{\nu}_{L,n} \bar{\sigma}^\mu \nu_{L,m} \quad (4.96)$$

¹⁷La relation $\int d^4x \nu \sigma^\mu A_\mu \bar{\nu} = \int d^4x \bar{\nu} \bar{\sigma}^\mu A_\mu \nu$ a été utilisée.

alors que le courant électromagnétique est identique à sa valeur standard, puisque l'électromagnétisme n'est pas brisé par la compactification, la fonction d'onde du photon étant plate :

$$J_{k,em}^\mu = e \sum_n \bar{l}_{L,n} \bar{\sigma}^\mu l_{L,n} + l_{R,n} \sigma^\mu \bar{l}_{R,n}. \quad (4.97)$$

Les expressions précédentes prennent en compte uniquement les leptons sur lesquels nous porterons notre attention plus particulièrement. Néanmoins, une généralisation aux quarks est immédiate. Pour les leptons, nous avons utilisé la décomposition de Kaluza-Klein suivante :

$$\chi_L^l = \sum_n g_{L,n}^l(z) l_{L,n}(x), \quad \bar{\psi}_L^l = \sum_n f_{L,n}^l(z) l_{R,n}(x), \quad (4.98)$$

$$\chi_R^l = \sum_n g_{R,n}^l(z) l_{L,n}(x), \quad \bar{\psi}_R^l = \sum_n f_{R,n}^l(z) l_{R,n}(x), \quad (4.99)$$

$$\chi_L^\nu = \sum_n g_{L,n}^\nu(z) \nu_{L,n}(x), \quad \bar{\psi}_L^\nu = \sum_n f_L^\nu(z) \bar{\nu}_{L,n}(x), \quad (4.100)$$

$$\chi_R^\nu = \sum_n g_{R,n}^\nu(z) \nu_{L,n}(x), \quad \bar{\psi}_R^\nu = \sum_n f_{R,n}^\nu(z) \bar{\nu}_{L,n}(x) \quad (4.101)$$

qui est celle résultant des conditions aux bords en présence de mélange de Dirac sur la brane IR, identifiant les modes L et R , et de Majorana sur la brane UV, impliquant un mécanisme de seesaw et rendant ainsi les neutrinos de type Majorana. Les couplages effectifs F^\pm , G^\pm , $E^{L,R}$ et N sont alors donnés par les intégrales de recouvrements suivantes :

$$G_{n,m,k}^+ = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int dz \omega^4 \left[g_{5L} a_k^{L,-} g_{L,n}^l g_{L,m}^\nu + g_{5R} a_k^{R,-} g_{R,n}^l g_{R,m}^\nu \right] \quad (4.102)$$

$$F_{n,m,k}^+ = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int dz \omega^4 \left[g_{5L} a_k^{L,-} f_{L,n}^l f_{L,m}^\nu + g_{5R} a_k^{R,-} f_{R,n}^l f_{R,m}^\nu \right] \quad (4.103)$$

$$G_{n,m,k}^- = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int dz \omega^4 \left[g_{5L} a_k^{L,+} g_{L,n}^{\nu*} g_{L,m}^l + g_{5R} a_k^{R,+} g_{R,n}^{\nu*} g_{R,m}^l \right] \quad (4.104)$$

$$F_{n,m,k}^- = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int dz \omega^4 \left[g_{5L} a_k^{L,+} f_{L,n}^{\nu*} f_{L,m}^l + g_{5R} a_k^{R,+} f_{R,n}^{\nu*} f_{R,m}^l \right] \quad (4.105)$$

$$E_{n,m,k}^R = \frac{1}{2} \int dz \omega^4 \left[\left(g_{5L} a_k^{L,3} + \tilde{g}_5 a_k^X \right) f_{L,n}^l f_{L,m}^l + \left(g_{5R} a_k^{R,3} + \tilde{g}_5 a_k^X \right) f_{R,n}^l f_{R,m}^l \right] \quad (4.106)$$

$$E_{n,m,k}^L = \frac{1}{2} \int dz \omega^4 \left[\left(g_{5L} a_k^{L,3} + \tilde{g}_5 a_k^X \right) g_{L,n}^l g_{L,m}^l + \left(g_{5R} a_k^{R,3} + \tilde{g}_5 a_k^X \right) g_{R,n}^l g_{R,m}^l \right] \quad (4.107)$$

$$N_{n,m,k} = -\frac{1}{2} \int dz \omega^4 \left[\left(g_{5L} a_k^{L,3} - \tilde{g}_5 a_k \right) \left(g_{L,n}^{\nu*} g_{L,m}^\nu - f_{L,n}^{\nu*} f_{L,m}^\nu \right) + \left(g_{5R} a_k^{R,3} - \tilde{g}_5 a_k^X \right) \left(g_{R,n}^{\nu*} g_{R,m}^\nu - f_{R,n}^{\nu*} f_{R,m}^\nu \right) \right] \quad (4.108)$$

où l'intégration se fait sur l'intervalle $[R, R']$ et avec $\omega(z) = R/z$. On note ainsi que, puisque le W^\pm physique n'est pas seulement constitué de A_L^\pm mais contient également une légère composante non nulle de A_R^\pm , les particules droites couplent aux bosons

vecteurs chargés. Néanmoins, le couplage est extrêmement supprimé suite au faible recouvrement des fonctions d'onde, puisque A_R^\pm s'annule sur le bord UV où sont localisés les fermions du Modèle Standard. Remarquons que pour des fonctions d'onde plates pour les bosons de jauge, toutes ces intégrales se réduisent à des conditions de normalisation pour les fermions de Kaluza-Klein et deviennent simplement proportionnelles à δ_{nm} .

Matching des constantes de couplages de jauge Jusqu'à présent les observables du modèle sont décrites en termes de paramètres cinq-dimensionnels. Afin d'en tester les prédictions il faut exprimer ces derniers en fonction de grandeurs physiques 4d. Par exemple, dans la limite Higgsless, nous avons vu que la masse du W permet de fixer l'échelle IR R' en fonction de R . En revanche d'autres observables, entre autres la masse du Z , requièrent *a priori* qu'on identifie les constantes de couplage 5d en termes de couplages 4d. Cette procédure de « matching » consiste à relier g_{5L} et \tilde{g}_5 à leur valeur effective 4d dans le Modèle Standard. Cependant, de tels équivalents n'existent pas dans la théorie 4d puisque la symétrie de jauge dans le bulk a été brisée par les conditions aux bords lors de la compactification. Également, $SU(2)_R$ n'étant pas une symétrie de jauge dans le Modèle Standard le couplage g_{5R} reste un paramètre libre de la théorie que l'on réécrit comme $r \equiv g_{5L}/g_{5R}$. Le matching est alors plus ou moins arbitraire et dépend du type de prédictions que l'on souhaite comparer aux mesures expérimentales. A basse énergie, le modèle précédent est décrit par une théorie effective 4d qui contient des corrections aux prédictions du Modèle Standard. Par exemple, pour estimer ces corrections sous leur forme *oblique*, on fixe les couplages aux fermions des bosons faibles W , Z et du photon à leurs valeurs standards. Ainsi, les déviations au Modèle Standard sont totalement incluses dans les tenseurs de polarisation des bosons de jauges. La procédure consiste à introduire un fermion de référence se transformant comme $(\mathbf{2}_L, \mathbf{1}_R)_q$ et imitant les couplages des fermions physiques. Une fois R' fixé, on a besoin alors de trois conditions ne dépendant de la normalisation des bosons de jauge pour déterminer v_H , g_{5L} et \tilde{g}_5 . On peut alors choisir de reproduire les valeurs du Modèle Standard pour la masse du W , la charge électrique (4.93) — car la symétrie exacte $U(1)_{em}$ permet de normaliser canoniquement le photon — et le rapport des parties T_{3L} et Y du couplage du Z au fermion de référence. La définition de la charge électrique est commune à tous les choix de conditions de matching car elle caractérise la seule symétrie de jauge exacte à la fois à 5d et à 4d.

A contrario, on peut choisir de reporter les corrections au Modèles Standard dans les couplages des bosons de jauge aux fermions et de normaliser canoniquement les tenseurs de polarisation. Ceci permet de tester le modèle dans son secteur fermionique, lequel pouvant, notamment, contenir des corrections non universelles n'apparaissant pas comme obliques. C'est le choix que nous ferons dans la dernière section lorsque nous construirons un modèle rendant compte de la phénoménologie des leptons. Nous choisissons de reproduire trois des paramètres parmi les mieux mesurés au LEP que sont m_W , m_Z et la constante de structure fine à l'échelle du Z $\alpha(m_Z)$. Selon [33] on a :

$$m_W = 80,403 \pm 0,029 \text{ GeV}, \quad m_Z = 91,1876 \pm 0,0021 \text{ GeV}, \quad (4.109)$$

$$\alpha^{-1}(m_Z) = 127,904 \pm 0,019. \quad (4.110)$$

En fixant tout d'abord la charge électrique $e \equiv \sqrt{4\pi\alpha}$, on écrit \tilde{g}_5 comme une fonction de g_5 . Puis, d'une simple lecture des conditions aux bords pour A^\pm , on remarque que la

masse W détermine le produit $g_{5L}v_H$. Ensuite, ces deux relations, une fois insérées dans l'équation de quantification pour les bosons neutres, permettent de trouver la VEV du Higgs comme une fonction de m_W , m_Z et e . Enfin, pour complètement déterminer les fonctions d'ondes, nous imposons des normes canoniques pour les bosons de jauge :

$$\int dz(R/z) \left[a_1^{L,\pm}(z)^2 + a_1^{R,\pm}(z)^2 \right] = 1 \quad (4.111)$$

$$\int dz(R/z) \left[a_1^{L,3}(z)^2 + a_1^{R,3}(z)^2 + a_1^X(z)^2 \right] = 1. \quad (4.112)$$

4.3 Un modèle de leptons dans AdS₅

Cette section est consacrée à la présentation d'un modèle reproduisant les propriétés essentielles de la physique de la saveur leptonique. Nous détaillons la réalisation de la symétrie discrète A_4 dans le modèle de brisure de symétrie décrit ci-dessus et en décrivons les multiples avantages dans ce contexte. Nous étudions également la stabilité de ses prédictions sous les corrections quantiques et effectives et montrons comment ce modèle passe les tests de précision électrofaible, tout en s'affranchissant des contraintes provenant des processus de changement de saveur.

4.3.1 Masses et angles de mélange des leptons à partir d'AdS₅

Nous présentons ici une utilisation simple de la symétrie de saveur A_4 dans le contexte cinq-dimensionnel que nous avons décrit plus haut. Nous rappelons que $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ est la symétrie locale plongée dans une tranche d'un espace-temps anti de Sitter dont l'élément de ligne 5d est :

$$ds^2 = \left(\frac{R}{z} \right)^2 (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dz^2) \quad (4.113)$$

délimitée par une brane UV en $z = R = M_{Pl}^{-1}$ et en $z = R' \sim \text{TeV}^{-1}$ par une brane IR sur laquelle est localisé un bi-doublet de Higgs \mathcal{H} . A cela nous ajoutons dans le bulk la symétrie de saveur $A_4 \times Z_2$ où le rôle de la symétrie Z_2 sera d'éviter que certains opérateurs ne contribuent à la brisure de A_4 à l'ordre dominant. Remarquons que selon la correspondance AdS/CFT, cette symétrie globale, nécessaire dans la théorie effective 4d, devrait être jaugée dans l'espace anti de Sitter 5d, tout comme le $SU(2)_R$ custodial. Cependant, un des avantages de A_4 est qu'il s'agit d'une symétrie discrète ne requérant aucun champ de jauge pour rendre la théorie localement invariante. Nous pouvons ainsi traiter la symétrie de saveur comme globale dans le bulk sans nous préoccuper de la présence d'éventuels bosons vecteurs de saveur. La figure 4.4 récapitule les différentes symétries de jauge et de saveur plongées dans AdS₅.

4.3.1.1 Lagrangien fermionique

La symétrie de jauge dans le bulk incluant un facteur $SU(2)_R$, ce modèle contient naturellement¹⁸ un neutrino droit. Nous souhaitons plonger les leptons 5d dans les

¹⁸Notons toutefois qu'il existe un choix de conditions aux bords pouvant éliminer ce mode zéro.

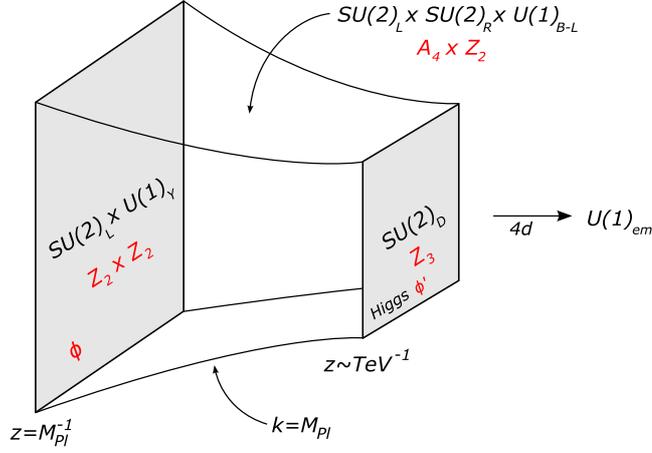


FIG. 4.4 – Tranche d’anti de Sitter illustrant (en rouge) les symétries de saveur discrètes considérées dans le texte.

mêmes représentations de A_4 que celles utilisées à 4d de manière à reproduire immédiatement la matrice de mélange U_{HPS} à l’ordre le plus bas. En ce sens, il est en particulier nécessaire d’introduire deux doublets droits pour chaque génération afin qu’électron et neutrino droit puissent être pris dans des représentations de saveur distinctes. On introduit alors dans le bulk les trois copies des spineurs de Dirac suivants :

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} L \text{ } [++] \\ \psi_L \end{pmatrix}, \quad (4.114)$$

$$\Psi_{R,1} \equiv \Psi_l = \begin{pmatrix} \chi_{R,1} \\ \tilde{\nu}_R \text{ } [-+] \\ l_R \text{ } [++] \end{pmatrix}, \quad \Psi_{R,2} \equiv \Psi_\nu = \begin{pmatrix} \chi_{R,2} \\ \nu_R \text{ } [++] \\ \tilde{l}_R \text{ } [-+] \end{pmatrix} \quad (4.115)$$

où seules les composantes de Weyl non tildées possèdent un mode zéro. Les trois doublets gauches Ψ_L forment alors une 3 sous A_4 , tout comme les trois Ψ_ν incluant les neutrinos droits. Les leptons chargés de chiralité droite $\Psi_{e,\mu,\tau}$ se transforme comme 1, 1', 1'' respectivement. Ces fermions ont également des masses 5d, néanmoins, grâce la symétrie de saveur, il n’y a que cinq paramètres indépendants c_L , $c_{e,\mu,\tau}$ et c_ν . Par ailleurs, certains fermions dépourvus de mode de masse nulle ont des conditions aux bords de type $[+-]$ — pour les spineurs de Weyl χ — qui pouvant contenir un mode de Kaluza-Klein extrêmement léger si $c > 1/2$. Ici, ce problème est écarté par le fait que les modes zéros droits qui satisfont de telles conditions doivent être localisés proche du bord UV, soit $c_{e,\mu,\tau}, c_\nu \lesssim -1/2$, pour que le faible recouvrement avec le Higgs génère les faibles masses observées après brisure. On introduit également sur les bords deux scalaires ϕ (UV) et ϕ' (IR) triplet de A_4 et singulets de jauge pour briser spontanément sur chaque bord la symétrie de saveur selon des directions différentes. Sur la brane UV, la VEV de ϕ brise A_4 en Z_2 alors que cette symétrie est réduite à Z_3 sur le bord IR par la VEV de ϕ' . Dans la base où le générateur S de A_4 est diagonal, ces directions sont obtenues au moyen des VEV suivantes :

$$\langle \phi' \rangle = (v', v', v'), \quad \langle \phi \rangle = (v, 0, 0). \quad (4.116)$$

On remarque également que ce sont les VEVs les plus générales qui préservent respectivement les sous-groupes Z_3 et Z_2 de A_4 , modulo les permutations de la base de la

représentation triplet. Les termes de Yukawa les plus généraux sur le bords s'écrivent alors :

$$-S_{UV}^Y = \frac{1}{2} \int d^4x \left[\frac{M}{\Lambda} \nu_R \nu_R + \frac{x_\nu}{\Lambda} (\phi \nu_R \nu_R) + h.c. + \dots \right]_{z=R} \quad (4.117)$$

$$-S_{IR}^Y = \int d^4x \left(\frac{R}{R'} \right)^4 \left[\frac{y_e}{\Lambda'^2} (\bar{\Psi}_L \phi') \mathcal{H} \Psi_e + \frac{y_\mu}{\Lambda'^2} (\bar{\Psi}_L \phi')'' \mathcal{H} \Psi_\mu + \frac{y_\tau}{\Lambda'^2} (\bar{\Psi}_L \phi')' \mathcal{H} \Psi_\tau + \frac{y_\nu}{\Lambda'} (\bar{\Psi}_L \mathcal{H} \Psi_\nu) + h.c. + \dots \right]_{z=R'} \quad (4.118)$$

où \dots sont des invariants d'ordre supérieur dont les effets seront étudié en détail par la suite. En particulier, la symétrie Z_2 permet d'éliminer sur le bord IR un invariant de dimension six, de la forme $(\bar{\Psi}_L \phi' \Psi_\nu)$, pourvu que Ψ_L , Ψ_ν et ϕ' soient impairs et les autres champs pairs sous Z_2 . Après la brisure des symétries de jauge et de saveur, les couplages ci-dessus se réduisent à des mélanges de Dirac et des masses de Majorana sur les bords. En généralisant simplement les descriptions faites précédemment, il en résulte les conditions aux bords suivantes¹⁹ :

$$z = R : \quad \begin{aligned} \bar{\psi}_L^{l,\nu} &= \chi_{R,1}^l = \tilde{l}_R = \tilde{\nu}_R = 0, \\ \chi_{R,2}^\nu &= R \mathcal{M}_M \cdot \bar{\nu}_R, \end{aligned} \quad (4.119)$$

$$z = R' : \quad \begin{aligned} \bar{\psi}_L &= -R' \mathcal{M}_D^l \cdot \bar{\psi}_{R,1} - R' \mathcal{M}_D^\nu \cdot \bar{\psi}_{R,2}, \\ \chi_{R,1} &= R' \mathcal{M}_D^l \cdot \chi_L, \quad \chi_{R,2} = R' \mathcal{M}_D^\nu \cdot \chi_L. \end{aligned} \quad (4.120)$$

où $\bar{\nu}_R \sim \psi$ et avec les matrices suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_D^l &= \frac{v' v_H}{R' \Lambda'^2} \begin{pmatrix} y_e & y_\mu & y_\tau \\ y_e & \omega y_\mu & \omega^2 y_\tau \\ y_e & \omega^2 y_\mu & \omega y_\tau \end{pmatrix}, \\ \mathcal{M}_D^\nu &= y_\nu \frac{v_H}{R' \Lambda'} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{M}_M &= R^{-1} \begin{pmatrix} \epsilon_s & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_s & \epsilon_t \\ 0 & \epsilon_t & \epsilon_s \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.121)$$

où $\epsilon_s \equiv M/\Lambda$ et $\epsilon_t \equiv x_\nu v/\Lambda$. A ce stade, Le spectre de masse et, *in fine*, la matrice de mélange, sont déterminés en écrivant la décomposition de Kaluza-Klein, puis en résolvant les conditions aux bords. Nous pouvons cependant obtenir une solution approchée dans la limite où les modes qui seraient zéros en l'absence de termes de bords sont beaucoup plus légers que l'échelle électrofaible. Nous avons vu qu'il est possible dans ce cas de traiter les termes de bords comme une perturbation et de dériver les masses légères, au premier ordre en perturbation, en insérant directement les fonctions d'ondes des modes zéros dans ces derniers. Ce développement perturbatif définit ce que nous avons appelé l'approximation des modes zéros. Pour les leptons, la masse la plus élevée est celle du τ , avec $m_\tau \sim \text{GeV}$. Ainsi l'approximation ZMA est aussi précise que $m_\tau R' \sim 10^{-3}$ pour les états légers. C'est l'approche que nous suivrons à partir de maintenant. Néanmoins, nous présenterons également la résolution complète des conditions aux bords qui s'avèrera utile pour estimer le spectre des résonances de Kaluza-Klein au-delà des fermions du Modèle Standard.

¹⁹Sur le brane IR elles sont exprimées en termes des doublets de $SU(2)$.

4.3.1.2 Zero mode approximation

Dans l'approximation de mode zéro, seuls L , l_R et ν_R ont un mode de masse nulle. Les masses effectives pour ces modes sont alors simplement données par les termes de bords (4.117) et (4.118) :

$$-S_m = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \nu_R^T M_N \nu_R + \bar{l}_L M_l l_R + \bar{\nu}_L m_\nu^D \nu_R + h.c. \right] + \dots \quad (4.122)$$

où \dots représente les excitations de Kaluza-Klein dont le spectre ne peut être résolu dans cette approximation. Le bord UV fournit la matrice de Majorana suivante pour les neutrinos droits :

$$M_N = F_{-\nu}^2 R^{-1} \begin{pmatrix} \epsilon_s & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_s & \epsilon_t \\ 0 & \epsilon_t & \epsilon_s \end{pmatrix}, \quad (4.123)$$

alors que les masses de Dirac provenant du bord IR sont :

$$M_l = f_L \frac{v_H v'}{\sqrt{2} R' \Lambda'^2} \begin{pmatrix} y_e f_{-e} & y_\mu f_{-\mu} & y_\tau f_{-\tau} \\ y_e f_{-e} & \omega y_\mu f_{-\mu} & \omega^2 y_\tau f_{-\tau} \\ y_e f_{-e} & \omega^2 y_\mu f_{-\mu} & \omega y_\tau f_{-\tau} \end{pmatrix}, \quad (4.124)$$

$$m_\nu^D = y_\nu f_L f_{-\nu} \frac{v_H}{\sqrt{2} R' \Lambda'} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.125)$$

Nous avons introduit la notation suivante pour les fonctions d'ondes des modes zéros sur les bords $f_i = f_{c_i}$, $f_{-i} = f_{-c_i}$ et $F_{-i} = F_{-c_i}$ avec :

$$f_c = \frac{\sqrt{1-2c}}{\sqrt{1-(R/R')^{1-2c}}}, \quad F_c = \frac{\sqrt{2c-1}}{\sqrt{1-(R/R')^{2c-1}}}. \quad (4.126)$$

Les fonctions f et F incluent également les facteurs de métrique induite sur les bords IR et UV respectivement. Elles sont reliées aux fonctions d'ondes $f_0(z)$ et $g_0(z)$ définies en (3.148) par :

$$g_0(z) = \frac{1}{\sqrt{R'}} \left(\frac{z}{R} \right)^2 \left(\frac{z}{R'} \right)^{-c} f_c = \frac{1}{\sqrt{R}} \left(\frac{z}{R} \right)^{2-c} F_c \quad (4.127)$$

et $f_0(z)$ s'obtient à partir de l'expression précédente simplement en remplaçant c par $-c$. Après intégration des neutrinos droits, et la réalisation du mécanisme de seesaw, l'action S_m devient :

$$-S_m \rightarrow \int d^4x \left[\frac{1}{2} \nu_L^T M_\nu \nu_L + \bar{l}_L M_l l_R + h.c. \right] + \dots \quad (4.128)$$

avec :

$$\begin{aligned} M_\nu &\equiv -m_\nu^D M_N^{-1} (m_\nu^D)^T \\ &= -y_\nu^2 \frac{v_H^2 R}{2 \Lambda'^2 R'^2} \frac{f_L^2 f_{-\nu}^2}{F_{-\nu}^2} \begin{pmatrix} 1/\epsilon_s & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_s/\Delta & -\epsilon_t/\Delta \\ 0 & -\epsilon_t/\Delta & \epsilon_s/\Delta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.129)$$

où $\Delta \equiv \epsilon_s^2 - \epsilon_t^2$. L'échelle de seesaw peut être naturellement réduite au dessous $R^{-1} = M_{Pl}$ en délocalisant légèrement le neutrino droit de la brane UV²⁰ avec $c_\nu \gtrsim -1/2$.

²⁰tout en évitant l'introduction d'un état de Kaluza-Klein léger en imposant $c_\nu \ll 1/2$.

Selon le dictionnaire AdS/CFT, cela correspond à accroître l'aspect composite des neutrinos droits. La procédure de diagonalisation est identique à celle présentée en quatre dimensions, la matrice des leptons chargés est diagonalisée par $L \rightarrow V_4 L$, alors qu'aucune rotation n'est requise pour les leptons droits. Les masses des leptons chargés sont alors :

$$V_4^* M_l = f_L \frac{\sqrt{3} v_H v'}{\sqrt{2} R' \Lambda'^2} \begin{pmatrix} y_e f_{-e} & 0 & 0 \\ 0 & y_\mu f_{-\mu} & 0 \\ 0 & 0 & y_\tau f_{-\tau} \end{pmatrix}. \quad (4.130)$$

La hiérarchie de masse est assurée par le mécanisme usuel de localisation des fonctions d'onde. Le plongement des fermions dans A_4 autorise le choix de trois c différents pour les doublets droits contenant les modes zéros des leptons chargés. De plus, par construction, la matrice de mélange est tri-bimaximale et les états propres de masse des neutrinos sont :

$$U_{HPS}^T V_4^* M_\nu V_4^* U_{HPS} = -\tilde{m} \begin{pmatrix} \frac{1}{\epsilon_s + \epsilon_t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\epsilon_s} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\epsilon_t - \epsilon_s} \end{pmatrix} \equiv \text{diag}(m_1, m_2, m_3), \quad (4.131)$$

où l'échelle de masse globale est donnée par la combinaison de fonctions d'onde suivante :

$$\tilde{m} \equiv y_\nu^2 \frac{v_H^2 R}{2 \Lambda'^2 R'^2} \frac{f_L^2 f_{-\nu}^2}{F_{-\nu}^2}. \quad (4.132)$$

Ainsi comme dans tout modèle basé sur A_4 , les trois masses de neutrino sont déterminées par seulement deux masses de Majorana, placées ici sur le bord UV. Afin de fixer ces paramètres en fonction des données sur les oscillations, nous calculons les différences de masse carrée suivantes :

$$\Delta m_{12}^2 \equiv |m_2|^2 - |m_1|^2 = \left| \frac{\tilde{m}}{\epsilon_s} \right|^2 \frac{r(r+2)}{(1+r)^2} \quad (4.133)$$

$$\Delta m_{23}^2 \equiv |m_3|^2 - |m_2|^2 = \left| \frac{\tilde{m}}{\epsilon_s} \right|^2 \frac{r(2-r)}{(1-r)^2} \quad (4.134)$$

$$\Delta m_{13}^2 \equiv |m_3|^2 - |m_1|^2 = \left| \frac{\tilde{m}}{\epsilon_s} \right|^2 \frac{4r}{(1-r)^2 (1+r)^2} \quad (4.135)$$

où l'on a posé $r \equiv \epsilon_t/\epsilon_s$. Les signes de Δm_{ij}^2 et ainsi l'ordre des états propres de masses sont reportés figure 4.5, selon la valeur de r . Les rapports r et \tilde{m}/ϵ_s sont déterminés par les fréquences d'oscillation solaire et atmosphérique $|\Delta m_{12}^2| = \Delta m_{sol}^2$, $|\Delta m_{23}^2| = \Delta m_{atm}^2$. En combinant (4.133) avec (4.134), on trouve r comme solution de l'équation :

$$r^3 - 3r - 2 \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = 0 \quad (4.136)$$

avec, selon les signes de Δm_{ij}^2 illustrés sur la figure 4.5, $x = \Delta m_{sol}^2/\Delta m_{atm}^2$ pour $|r| < 2$ ou $x = -\Delta m_{sol}^2/\Delta m_{atm}^2$ lorsque $|r| > 2$. On peut ensuite inverser l'une des deux relations précédentes pour obtenir ϵ_s , comme par exemple :

$$\epsilon_s = \frac{\tilde{m}}{\sqrt{\Delta m_{atm}^2}} / \sqrt{\left| 1 - \frac{1}{(1-r)^2} \right|}. \quad (4.137)$$

En utilisant les valeurs suivantes pour les différences de masse solaire et atmosphérique :

$$\Delta m_{sol}^2 \simeq 7,9 \times 10^{-5} \text{ eV}^2, \quad \Delta m_{atm}^2 \simeq 2,6 \times 10^{-3} \text{ eV}^2, \quad (4.138)$$

on trouve quatre solutions possibles pour r qui sont :

$$r \simeq \{0, 79; 1, 19; -2, 01; -1, 99\}. \quad (4.139)$$

Les deux premières solutions correspondent à une hiérarchie de masses normale, alors que les deux dernières mènent à une hiérarchie inversée. Nous présentons, à titre d'exemple, les valeurs numériques du spectre de masse obtenues pour un jeu de paramètres du modèle qui permet de reproduire une phénoménologie correcte pour les leptons légers. Nous fixons la brane IR à $R'^{-1} = 1,5 \text{ TeV}$ pour garder des bosons de jauge de Kaluza-Klein à portée du LHC, $m_{KK} = 3 - 4 \text{ TeV}$. La procédure de matching des couplages de jauge dans le bulk est réalisée de manière à retrouver les masses physiques des bosons faibles²¹, $m_W = 80,403 \text{ GeV}$ et $m_Z = 91,1876 \text{ GeV}$, ainsi que la constante de structure fine à la masse du Z , $\alpha_{em}^{-1}(m_Z) = 128$. En conséquence, la VEV v_H est de $255,5 \text{ GeV}$. Cette valeur est légèrement plus élevée que dans le Modèle Standard notamment parce que la fonction d'onde du Z est légèrement refoulée de la brane IR à cause de la VEV du Higgs sur ce bord [13]. Les masses des leptons chargés sont correctement reproduites pour le choix de paramètres suivants :

$$c_L = 0,51, \quad c_e = -0,75, \quad c_\mu = -0,59, \quad c_\tau = -0,51 \quad (4.140)$$

$$y_e = 1.53, \quad y_\mu = 1.55, \quad y_\tau = 3.04 \quad (4.141)$$

pour lesquels on obtient $m_e = 0.511 \text{ MeV}$, $m_\mu = 106 \text{ MeV}$ et $m_\tau = 1.77 \text{ GeV}$, avec $\Lambda' = R'^{-1}$ et $v'R' = 0.1$. Comme nous le montrerons plus loin, le modèle définit sur ce point de l'espace des paramètres passe tous les tests leptoniques de précision électrofaible tout en gardant le contrôle sur la perturbativité de la théorie jusqu'à $E = 3m_{KK}$. Enfin, pour $\Lambda = R^{-1}$, $x_\nu = 1$ et $c_\nu = -0,37$, les masses des neutrinos ainsi que les masses de Majorana sur le bord UV, pour les quatre solutions (4.139), sont données par²² :

²¹Nous considérerons ici le cas simplifié où $g_{5R} = g_{5L}$.

²²Les phases de Majorana ont été négligées.

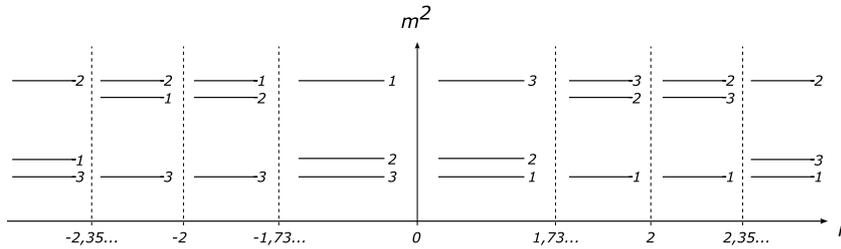


FIG. 4.5 – Types de hiérarchie de masse des neutrinos en fonction du rapport $r = \epsilon_t/\epsilon_s$ des masses de Majorana sur la brane UV. On peut définir des solutions vérifiant $\Delta m_{12}^2 > 0$ pour tout r en échangeant ν_L^1 et ν_L^2 lorsque $m_2 < m_1$. Comme nous l'avons déjà remarqué, cela implique également le changement $\theta_{12} \rightarrow \pi/2 - \theta_{12}$ pour l'angle de mélange sous lequel $\sin^2(2\theta_{12})$ est invariant.

r	m_1 (meV)	m_2 (meV)	m_3 (meV)	MR	vR
-2,01	53	54	18	-0,015	0,030
-1,99	55	54	18	-0,015	0,029
0,79	6,0	11	52	0,074	0,059
1,19	4,5	10	52	0,079	0,095

On remarque que la levée de dégénérescence des neutrinos requiert deux masses de Majorana du même ordre de grandeur sur la brane en $z = R$, $M \sim v$. Puisque la première est issue d'un opérateur de dimension quatre et la seconde d'un terme de dimension cinq, on s'attendrait à ce que v soit au moins un ordre de grandeur inférieur à M pour justifier un développement effectif des couplages de Yukawa. Cependant, ce problème peut être évité en dérivant la masse M de la VEV d'un champ scalaire ξ singulet de A_4 avec $\langle \xi \rangle = M$. Les deux opérateurs ont alors même dimension et M est naturellement du même ordre de grandeur que v .

4.3.1.3 Résolution complète des conditions aux bords

Nous rappelons ici brièvement les spectres de Kaluza-Klein obtenus en résolvant numériquement les conditions aux bords (4.119).

Leptons chargés On définit la base des états propres de saveur en diagonalisant les mélanges sur le bord IR par les redéfinitions suivantes :

$$\Psi_L \rightarrow V_4 \Psi_L, \quad \Psi_{R,2} \rightarrow V_4 \Psi_{R,2} \quad (4.142)$$

où V_4 est la matrice unitaire de A_4 définie en (4.43). En conséquence, les conditions aux bords deviennent ($l_i = e, \mu, \tau$) :

$$z = R \quad : \quad \bar{\psi}_L^{l_i} = \chi_{R,1}^{l_i} = \tilde{l}_R^i = 0, \quad (4.143)$$

$$z = R' \quad : \quad \begin{aligned} \bar{\psi}_L^{l_i} &= -R' m_D^{l_i} l_R^i - R' m_D^\nu \tilde{l}_R^i, \\ \chi_{R,1}^{l_i} &= R' m_D^{l_i} l_L^i, \quad \chi_{R,2}^{l_i} = R' m_D^\nu l_L^i \end{aligned} \quad (4.144)$$

où :

$$\text{diag} \left(\{m_D^{l_i}\} \right) = V_4^* \mathcal{M}_D^l, \quad m_D^\nu \mathbf{1} = V_4^* \mathcal{M}_D^\nu V_4 \quad (4.145)$$

avec $m_D^{l_i} = \sqrt{3} y_{l_i} v' v_H R'^{-1} / \Lambda'^2$ et $m_D^\nu = y_\nu v_H R'^{-1} / \Lambda'$. Suite aux multiples mélanges entre les fermions sur le bord IR, la décomposition de Kaluza-Klein dans cette base s'écrit :

$$l_L^i(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_{L,n}^{l_i}(z) l_{L,n}^i(x), \quad \bar{\psi}_L^{l_i}(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{L,n}^{l_i}(z) l_{R,n}^i(x), \quad (4.146)$$

$$\chi_{R,1}^{l_i}(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_{R,1,n}^{l_i}(z) l_{L,n}^i(x), \quad l_R^i(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{R,1,n}^{l_i}(z) l_{R,n}^i(x), \quad (4.147)$$

$$\chi_{R,2}^{l_i}(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_{R,2,n}^{l_i}(z) l_{L,n}^i(x), \quad \tilde{l}_R^i(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{R,2,n}^{l_i}(z) l_{R,n}^i(x). \quad (4.148)$$

Les six tours de spineurs de Weyl initiales sont ainsi réduites, dans la théorie effective 4d, en deux tours dont les états, pour chaque niveau, sont reliés entre eux par une masse de Dirac m_n^l . Les états propres de chiralité gauches (droites) $l_{L,n}^i$ ($l_{R,n}^i$) sont alors principalement constitués de l_L^i (l_R^i) mais contiennent également une faible proportion de $\chi_{R,1}^i$ et $\chi_{R,2}^i$ ($\bar{\psi}_L^i$ et \tilde{l}_R^i) suite au mélange sur le bord. En outre, la normalisation canonique des états de Kaluza-Klein $l_{L,n}^i$ et $l_{R,n}^i$ requiert, pour tout $l^i = e, \mu, \tau$:

$$\int_R^{R'} dz (R/z)^4 \sum_X g_{X,n}^{l^i}(z)^2 = 1, \quad (4.149)$$

$$\int_R^{R'} dz (R/z)^4 \sum_X f_{X,n}^{l^i}(z)^2 = 1 \quad (4.150)$$

où X désigne collectivement $L, R, 1$ et $R, 2$. Ce sont deux conditions ne sont pas indépendantes car il ne subsiste qu'une seule constante de normalisation lorsqu'il existe un mélange de Dirac sur le bord. Dans la pratique, elles permettent alors de vérifier que la décomposition de Kaluza-Klein a été correctement réalisée. Enfin, on choisit de travailler dans la base suivante pour les fonctions d'ondes dans AdS₅ :

$$g_{X,n}^{l^i} = z^{5/2} \left[A_{X,n}^{l^i} J_{c_X^i+1/2}(m_n^l z) + B_{X,n}^{l^i} J_{-c_X^i-1/2}(m_n^l z) \right], \quad (4.151)$$

$$f_{X,n}^{l^i} = z^{5/2} \left[A_{X,n}^{l^i} J_{c_X^i-1/2}(m_n^l z) - B_{X,n}^{l^i} J_{-c_X^i+1/2}(m_n^l z) \right] \quad (4.152)$$

où $c_L^i = c_L$, $c_{R,1}^i = c_{e,\mu,\tau}$ et $c_{R,2}^i = c_\nu$. Notons ainsi que la symétrie A₄ impose que les fonctions d'ondes $(g, f)_L^i$ ne diffèrent d'une saveur à l'autre que par la masse m_n^l , de même pour $(g, f)_{R,2}^i$. Voici le spectre obtenu pour le jeu de paramètres défini auparavant :

$n = 0$	$m_e = 0, 511 \text{ MeV}$	$m_\mu = 106 \text{ MeV}$	$m_\tau = 1, 77 \text{ GeV}$
$n = 1$	$m_1^e = 3, 225 \text{ TeV}$	$m_1^\mu = 3, 225 \text{ TeV}$	$m_1^\tau = 3, 222 \text{ TeV}$
$n = 2$	$m_2^e = 3, 738 \text{ TeV}$	$m_2^\mu = 3, 721 \text{ TeV}$	$m_2^\tau = 3, 617 \text{ TeV}$
$n = 3$	$m_3^e = 4, 176 \text{ TeV}$	$m_3^\mu = 3, 836 \text{ TeV}$	$m_3^\tau = 3, 802 \text{ TeV}$
$n \geq 4$	$m_n^l > 4, 5 \text{ TeV}$.		

Neutrinos Après les redéfinitions (4.142), les conditions aux bords pour les champs de neutrinos sont toutes diagonales, sauf une sur la brane UV :

$$z = R : \quad \begin{aligned} \bar{\psi}_L^{\nu_i} &= \tilde{\nu}_R^i = 0, \\ \chi_{R,2}^{\nu_i} &= (V_4^* \mathcal{M}_M V_4^*)_{ij} \tilde{\nu}_R^j, \end{aligned} \quad (4.153)$$

$$z = R' : \quad \begin{aligned} \bar{\psi}_L^{\nu_i} &= -m_D^{l^i} \tilde{\nu}_R^i - m_D^\nu \nu_R^i, \\ \chi_{R,1}^{\nu_i} &= m_D^{l^i} \nu_L^i, \quad \chi_{R,2}^{\nu_i} = m_D^\nu \nu_L^i. \end{aligned} \quad (4.154)$$

Dans la base des états de saveur, la matrice de Majorana sur la brane UV est diagonalisée par U_{HPS} . En redéfinissant les champs de neutrinos comme :

$$\Psi_X^\nu = (\chi_X^\nu, \bar{\psi}_X^\nu)^T \rightarrow U_{HPS} \Psi_X^\nu, \quad (4.155)$$

on obtient des conditions aux bords partout diagonales, définissant ainsi la base des états propres de masses pour les neutrinos :

$$z = R \quad : \quad \begin{aligned} \bar{\psi}_L^{\nu_\alpha} &= \tilde{\nu}_R^\alpha = 0, \\ \chi_{R,2}^{\nu_\alpha} &= M_M^\alpha \bar{\nu}_R^\alpha, \end{aligned} \quad (4.156)$$

$$z = R' \quad : \quad \begin{aligned} \bar{\psi}_L^{\nu_\alpha} &= -m_D^{l_\alpha} \tilde{\nu}_R^\alpha - m_D^{\nu_\alpha} \nu_R^\alpha, \\ \chi_{R,1}^{\nu_\alpha} &= m_D^{l_\alpha} \nu_L^{\nu_\alpha}, \quad \chi_{R,2}^{\nu_\alpha} = m_D^{\nu_\alpha} \nu_L^{\nu_\alpha} \end{aligned} \quad (4.157)$$

avec $\alpha = \{1, 2, 3\}$, $m_D^{l_\alpha} = m_D^e$, etc... et :

$$\text{diag}(\{M_M^\alpha\}) = U_{HPS}^T (V_4^* \mathcal{M}_M V_4^*) U_{HPS} \quad (4.158)$$

où $M_M^\alpha \equiv \{\epsilon_s + \epsilon_t, \epsilon_s, -\epsilon_s + \epsilon_t\}$. De même que pour les leptons chargés, les mélanges de Dirac en $z = R'$ fusionnent les six tours de Weyl en seulement deux tours de chiralité différente. En revanche, pour les neutrinos, le mélange de Majorana en $z = R$ impose que celles-ci soient reliées par la conjugaison complexe, et les masses peuvent éventuellement contenir des phases complexes non nulles. Ainsi, la décomposition de Kaluza-Klein prend la forme²³ :

$$\nu_L^i(x, z) = U_{i\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} g_{L,n}^{\nu_\alpha}(z) \nu_{L,n}^\alpha(x), \quad \bar{\psi}_L^{\nu_i}(x, z) = U_{i\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} f_{L,n}^{\nu_\alpha}(z) \bar{\nu}_{L,n}^\alpha(x), \quad (4.159)$$

$$\chi_{R,1}^{\nu_i}(x, z) = U_{i\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} g_{R,1,n}^{\nu_\alpha}(z) \nu_{L,n}^\alpha(x), \quad \tilde{\nu}_R^i(x, z) = U_{i\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} f_{R,1,n}^{\nu_\alpha}(z) \bar{\nu}_{L,n}^\alpha(x), \quad (4.160)$$

$$\chi_{R,2}^{\nu_i}(x, z) = U_{i\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} g_{R,2,n}^{\nu_\alpha}(z) \nu_{L,n}^\alpha(x), \quad \nu_R^i(x, z) = U_{i\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} f_{R,2,n}^{\nu_\alpha}(z) \bar{\nu}_{L,n}^\alpha(x). \quad (4.161)$$

Les fonctions d'ondes sont données par :

$$g_{X,n}^{\nu_\alpha}(z) = z^{5/2} \left[A_{X,n}^{\nu_\alpha} J_{c_X^\alpha + 1/2}(|m_n^{\nu_\alpha}|z) + B_{X,n}^{\nu_\alpha} J_{-c_X^\alpha - 1/2}(|m_n^{\nu_\alpha}|z) \right], \quad (4.162)$$

$$f_{X,n}^{\nu_\alpha}(z) = z^{5/2} \left[\bar{A}_{X,n}^{\nu_\alpha} J_{c_X^\alpha - 1/2}(|m_n^{\nu_\alpha}|z) - \bar{B}_{X,n}^{\nu_\alpha} J_{-c_X^\alpha + 1/2}(|m_n^{\nu_\alpha}|z) \right] \quad (4.163)$$

où $(\bar{A}, \bar{B}) = (A, B)e^{-i\theta_n^\alpha}$ et avec $m_n^{\nu_\alpha} = |m_n^{\nu_\alpha}|e^{i\theta_n^\alpha}$. Seule une condition aux bords n'est pas diagonale dans les bases des leptons chargés ($l_i = e, \mu, \tau$) et des neutrinos ($\alpha = 1, 2, 3$). Toute la dépendance en la structure de saveur est portée par les constantes d'intégration $(A, B)_{X,n}^{\nu_\alpha}$ et l'ordre des fonctions de Bessel est identique dans les deux bases, soit $c_L^\alpha = c_L$, $c_{R,1}^\alpha = c_{e,\mu,\tau}$ et $c_{R,2}^\alpha = c_\nu$. En outre, puisqu'il n'existe qu'un seul fermion de Weyl indépendant pour chaque niveau, la condition de normalisation s'écrit :

$$\int_R^{R'} dz (R/z)^4 \sum_X \left[|g_{X,n}^{\nu_\alpha}(z)|^2 + |f_{X,n}^{\nu_\alpha}(z)|^2 \right] = 1. \quad (4.164)$$

Pour la solution $r = 0, 79$ et avec le jeu de paramètres précédents, on évalue numériquement les masses des premiers neutrinos de Kaluza-Klein à :

²³La somme sur α est implicite.

$n = 0$	$m_1 = 6,0 \text{ meV}$	$m_2 = 11 \text{ meV}$	$m_3 = 52 \text{ meV}$
$n = 1$	$m_{1,1} = 3,225 \text{ TeV}$	$m_{2,1} = 3,225 \text{ TeV}$	$m_{3,1} = 3,223 \text{ TeV}$
$n = 2$	$m_{1,2} = 3,738 \text{ TeV}$	$m_{2,2} = 3,721 \text{ TeV}$	$m_{3,2} = 3,585 \text{ TeV}$
$n = 3$	$m_{1,3} = 4,176 \text{ TeV}$	$m_{2,3} = 3,835 \text{ TeV}$	$m_{3,3} = 3,790 \text{ TeV}$
$n \geq 4$	$m_{\alpha,n} > 4,5 \text{ TeV}$.		

Couplages au W et matrice de mélange On peut maintenant facilement généraliser au cas de plusieurs familles avec mélanges de saveur les expressions (4.102) et (4.103) des couplages aux W . Étant donné les différentes décompositions de Kaluza-Klein ci-dessus, on a alors :

$$J_{k,+}^\mu = \sum_{n,m} G_{n,m,k}^{+,i\alpha} \bar{l}_{L,n}^i \bar{\sigma}^\mu \nu_{L,m}^\alpha + F_{n,m}^{+,i\alpha} l_{R,n}^i \sigma^\mu \bar{\nu}_{L,m}^\alpha \quad (4.165)$$

avec :

$$G_{n,m,k}^{+,i\alpha} = -\frac{U_{i\alpha}}{\sqrt{2}} \int dz \omega^4 \left[g_{5L} a_k^{L,-} g_{L,n}^{l_i} g_{L,m}^{\nu_\alpha} + g_{5R} a_k^{R,-} g_{R,n}^{l_i} g_{R,m}^{\nu_\alpha} \right], \quad (4.166)$$

$$F_{n,m,k}^{+,i\alpha} = -\frac{U_{i\alpha}}{\sqrt{2}} \int dz \omega^4 \left[g_{5L} a_k^{L,-} f_{L,n}^{l_i} f_{L,m}^{\nu_\alpha} + g_{5R} a_k^{R,-} f_{R,n}^{l_i} f_{R,m}^{\nu_\alpha} \right] \quad (4.167)$$

où U est la matrice HPS. Par conséquent, à cause des termes sur les bords mixant les états des différentes tours de Kaluza-Klein, la matrice de mélange est devenue de taille infinie connectant, non seulement les trois saveurs, mais également les différents étages des tours de Kaluza-Klein. Les couplages au W^- du Modèle Standard incluant les changements de saveurs sont contenu dans la matrice²⁴ $G_{n,m,1}^{+,i\alpha}$. Le premier bloc 3×3 pour $n = m = 1$ correspondant aux fermions du Modèle Standard est donnée par U_{HPS} à une légère déformation de fonctions d'onde près due aux termes de bords. Comme ces dernières diffèrent de celles des modes zéros en l'absence de termes de bord d'au plus un facteur $m_\tau R' \sim 10^{-3}$, les déviations à la forme HPS dérivée dans l'approximation ZMA sont inférieures à $\mathcal{O}(10^{-6})$. Une remarque importante pour les résonances de Kaluza-Klein est que U_{HPS} est la matrice qui diagonalise directement les conditions au bord UV pour les neutrinos. Ainsi le motif des mélanges de saveurs pour chaque niveau $n = m \geq 2$ est également de type HPS approximativement, avec néanmoins un couplage global réduit par rapport aux fermions légers.

4.3.2 Stabilité du modèle

Les invariants de plus bas ordres (4.117) et (4.118) reproduisent parfaitement la matrice de mélange tri-bimaximale de Harrison-Perkins-Scott, ainsi que les hiérarchies de masses des leptons. Néanmoins, pour qu'une telle construction ait un sens, il est nécessaire de s'assurer que la structure particulière qu'elle prédit à l'ordre dominant ne soit pas déstabilisée par les corrections d'ordre supérieur sur les bords et/ou par d'inévitables corrections radiatives. En outre, une motivation supplémentaire pour évaluer ces corrections est que le motif défini par U_{HPS} n'est qu'une approximation des résultats

²⁴La matrice $F_{n,m,1}^{+,i\alpha}$ contrôle les couplages des fermions droits au W^- , qui sont supprimés par l'orthogonalité approchée des fonctions d'onde, du moins pour les leptons légers.

de mesures d'oscillation. En particulier les déviations à la forme tri-bimaximale peuvent générer un angle θ_{13} non nul, ce que de futures expériences pourraient mettre en évidence. Nous nous penchons, dans un premier temps, sur les corrections issues d'opérateurs effectifs d'ordre sous-dominant sur les bords. Et puis, nous discuterons de la validité du développement perturbatif dans ce modèle, assurant ainsi la stabilité sous les corrections à boucle de la structure U_{HPS} dérivée à l'arbre.

4.3.2.1 Ajout d'opérateurs d'ordre supérieur

Nous montrons tout d'abord que les principaux effets des invariants sous A_4 de dimension supérieure ou égale à six sur la brane de Planck sont la génération d'un angle θ_{13} différent de zéro et d'une déviation de θ_{12} de sa valeur maximale. Puis, nous établirons que seul θ_{12} est modifié par l'ajout d'opérateurs effectifs sur la brane du TeV.

Bord UV Commençons par écrire la forme la plus générale des invariants A_4 de dimension supérieure que l'on peut construire en $z = R$:

$$-\delta\mathcal{L}_{UV} = \sum_{n \geq 2} \lambda_n \frac{\phi^n}{\Lambda^n} \nu_R \nu_R + \text{h.c.} \quad (4.168)$$

avec n insertions possibles de ϕ . Puisque un produit de deux triplets contient un invariant sous A_4 , il existe alors au moins un invariant pour chaque terme de $\delta\mathcal{L}_{UV}$. On peut par ailleurs grandement simplifier la correction ci-dessus en remarquant que la VEV de ϕ préserve un sous-groupe Z_2 de A_4 , $\langle \phi \rangle = (v, 0, 0)$. Ainsi, il est facile de montrer que ϕ^3 se transforme dans le vide comme ϕ . En effet, selon la décomposition (4.27) d'un produit 3×3 , ϕ^2 se transforme comme :

$$\phi^2 = (v, 0, 0) \times (v, 0, 0) \sim 1, 1', 1'' = v^2 \quad (4.169)$$

et ϕ^3 est alors proportionnel à un triplet :

$$\phi \times \phi^2 \rightarrow \begin{cases} 3 \times 1 & = 3 \sim v^2(v, 0, 0) \\ 3 \times 1' & = 3 \sim v^2(v, 0, 0) \\ 3 \times 1'' & = 3 \sim v^2(v, 0, 0) \end{cases} \quad (4.170)$$

qui n'est autre que ϕ . Il est alors possible de réabsorber la quasi-totalité des effets d'ordre supérieur par une redéfinition des paramètres écrits à l'ordre dominant, excepté pour l'opérateur suivant :

$$-\delta\mathcal{L}_{UV} = \lambda_2 \frac{\phi^2}{\Lambda^2} \nu_R \nu_R + \text{h.c.} \quad (4.171)$$

duquel on extrait trois invariants différents. D'après la table de multiplication (4.27) de A_4 on a :

$$\phi \nu_R \nu_R \supset (\nu_R^1 \nu_R^1 + \alpha \nu_R^2 \nu_R^2 + \alpha^* \nu_R^3 \nu_R^3) (v, 0, 0) \sim 3 \quad (4.172)$$

avec $\alpha = \{1, \omega, \omega^2\}$, soit :

$$\phi^2 \nu_R \nu_R \supset v^2 (\nu_R^1 \nu_R^1 + \alpha \nu_R^2 \nu_R^2 + \alpha^* \nu_R^3 \nu_R^3) \sim 1. \quad (4.173)$$

Après brisure de la symétrie de saveur, cette correction introduit, pour une combinaison linéaire arbitraire des trois invariants précédents, des éléments diagonaux complexes pour la matrice de Majorana et la forme (4.123) est remplacée par :

$$M_N = F_{-\nu}^2 R^{-1} \begin{pmatrix} \epsilon_s + \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_s + \delta_2 & \epsilon_t \\ 0 & \epsilon_t & \epsilon_s + \delta_2^* \end{pmatrix} \quad (4.174)$$

où $\delta_i \sim \mathcal{O}(v^2/\Lambda^2)$ et δ_1 est réel. Si δ_2 était également réel, les mélanges seraient toujours donnés par U_{HPS} , puisque la matrice de masse des neutrinos, dans la base des leptons chargés diagonaux, serait toujours de la forme générique (4.48)²⁵. C'est donc la partie imaginaire de δ_2 qui est responsable notamment d'un angle θ_{13} non nul, dont le sinus vaut typiquement $\sin(\theta_{13}) \sim \mathcal{O}(v^2/\Lambda^2)$. Nous répétons maintenant la même analyse pour la brane du TeV.

Bord IR En $z = R'$, la forme la plus générale de la correction aux couplages de Yukawa (4.118) s'écrit :

$$-\delta\mathcal{L}_{IR} = \sum_{i=e,\mu,\tau} \sum_{n \geq 2} \lambda'_{i,n} \bar{\Psi}_L \frac{\phi'^n}{\Lambda^{n+1}} H\Psi_i + \sum_{n \geq 1} \kappa_n \bar{\Psi}_L \frac{\phi'^n}{\Lambda^{n+1}} H\Psi_\nu + \text{h.c.} \quad (4.175)$$

Ici également, le fait que la VEV de ϕ' préserve un sous-groupe Z_3 , permet d'isoler les effets non triviaux des opérateurs ci-dessus. On peut montrer en effet que, puisque $\langle \phi' \rangle = (v', v', v')$, ϕ'^2 se transforme sous A_4 comme $1 + \phi'$ dans le vide. Encore une fois, une simple lecture de la table (4.27) permet d'écrire :

$$\phi' \times \phi' = (v', v', v') \times (v', v', v') \sim \begin{cases} 1 & = 3v'^2 \\ 3 & = v'(v', v', v') \end{cases} \quad (4.176)$$

où les termes se transformant comme $1'$ et $1''$ sont identiquement nuls puisque $1 + \omega + \omega^2 = 0$. Le produit ϕ'^2 se transforme alors comme la combinaison d'un singulet et d'un triplet qui ne peut être que ϕ' lui-même, comme l'impose la symétrie non brisée Z_3 . Ainsi, les effets non triviaux de $\delta\mathcal{L}_{IR}$, ne pouvant être absorbés par une redéfinition des paramètres à l'ordre dominant, prennent leur origine dans les opérateurs ne possédant qu'une seule insertion de ϕ' . $\delta\mathcal{L}_{IR}$ se réduit donc à :

$$-\delta\mathcal{L}_{IR} = \frac{\kappa_1}{\Lambda^2} \bar{\Psi}_L \phi' H\Psi_\nu + \text{h.c.} \quad (4.177)$$

Cet opérateur n'est seulement supprimé que d'une puissance de v'/Λ' par rapport à l'ordre dominant et peut alors sensiblement déstabiliser le motif tri-bimaximal. En effet, pour l'exemple numérique précédent, on s'attend naturellement à une correction aux éléments de matrice U de l'ordre de $v'/\Lambda' = 0,1$, soit autour de 10%. Néanmoins ce terme est précisément celui que nous avons interdit en imposant une symétrie Z_2 supplémentaire, sous laquelle seuls Ψ_L , Ψ_ν et ϕ' sont impairs. De plus, puisque $\phi'^2 \sim 1 + \phi'$, le prochain opérateur pair sous Z_2 générera la même correction mais avec un facteur de suppression supplémentaire. Par conséquent, (4.177) doit être remplacé par :

$$-\delta\mathcal{L}_{IR} = \frac{\kappa_2}{\Lambda'^3} \bar{\Psi}_L \phi'^2 H\Psi_\nu, \quad (4.178)$$

²⁵dont les entrées vérifieraient la relation $a + b - c - d = 0$.

ce qui conduit à une correction aux mélanges, pour $v'/\Lambda' = 0, 1$, de l'ordre du pourcent. Nous pouvons montrer que cet opérateur induit des éléments de matrice non diagonaux pour la masse de Dirac des neutrinos par l'intermédiaire de trois invariants linéairement indépendants. En effet, on a :

$$\phi' \nu_L \nu_R \supset \begin{cases} (\nu_L^1 \nu_R^1 + \alpha \nu_L^2 \nu_R^2 + \alpha^* \nu_L^3 \nu_R^3) (v', v' \alpha^*, v' \alpha) \sim 3 \\ v' (\nu_L^3 \nu_R^1, \nu_L^1 \nu_R^2, \nu_L^2 \nu_R^3) \sim 3 \\ v' (\nu_L^1 \nu_R^2, \nu_L^2 \nu_R^3, \nu_L^3 \nu_R^1) \sim 3 \\ \nu_L \leftrightarrow \nu_R \end{cases} \quad (4.179)$$

où $\alpha = \{1, \omega, \omega^2\}$, soit :

$$\phi'^2 \nu_L \nu_R \supset \begin{cases} 3v'^2 (\nu_L^1 \nu_R^1 + \nu_L^2 \nu_R^2 + \nu_L^3 \nu_R^3) \sim 1 \\ v'^2 (\nu_L^3 \nu_R^1 + \nu_L^1 \nu_R^2 + \nu_L^2 \nu_R^3) \sim 1 \\ v'^2 (\nu_L^1 \nu_R^2 + \nu_L^2 \nu_R^3 + \nu_L^3 \nu_R^1) \sim 1 \\ \nu_L \leftrightarrow \nu_R \end{cases} \quad (4.180)$$

Ainsi, pour une combinaison linéaire arbitraire de ces invariants, la matrice diagonale (4.125) devient :

$$m_\nu^D = y_\nu f_L f_{-\nu} \frac{v_H}{\sqrt{2} R' \Lambda'} \begin{pmatrix} 1 + \epsilon_1 & \epsilon_2 & \epsilon_3 \\ \epsilon_3 & 1 + \epsilon_1 & \epsilon_2 \\ \epsilon_2 & \epsilon_3 & 1 + \epsilon_1 \end{pmatrix}, \quad (4.181)$$

avec $\epsilon_i \sim \mathcal{O}(v'^2/\Lambda'^2)$ réels. Nous allons vérifier qu'avec cette correction uniquement θ_{12} est modifié par rapport à sa valeur HPS. Pour la matrice m_ν^D ci-dessus et M_N donnée à l'ordre dominant par (4.123), on obtient après le seesaw une matrice de Majorana pour les neutrinos gauches de la forme suivante²⁶ :

$$M_\nu = \begin{pmatrix} a & b & b^* \\ b & c & d \\ b^* & d & c^* \end{pmatrix}. \quad (4.182)$$

On remarque que, même pour couplages réels sur le bord, cette matrice a néanmoins des entrées complexes dues à des facteurs ω qui ne se compensent plus exactement lorsque les doublets gauches sont redéfinis au moyen de V_4 . Notons également que, pour b et c réels, la matrice ci-dessus à la forme générique (4.48) diagonalisée par $\theta_{13} = 0$ et $\theta_{23} = \pi/4$. En général, M_ν est matrice complexe symétrique 3×3 qui contient 12 paramètres indépendants, dont 3 valeurs propres réelles, 3 angles de mélange et 6 phases. En outre, nous avons toujours la liberté de redéfinir les champs de neutrinos de manière à en absorber 3 d'entre elles. En conséquence, avec la redéfinition de phase $\nu_L^i \rightarrow e^{i\phi_i} \nu_L^i$, la matrice de masse prend la forme :

$$M_\nu = \begin{pmatrix} a e^{2i\phi_1} & |b| e^{i(\phi_b + \phi_1 + \phi_2)} & |b| e^{i(\phi_1 + \phi_2 - \phi_b)} \\ |b| e^{i(\phi_b + \phi_1 + \phi_2)} & |c| e^{i(2\phi_2 + \phi_c)} & d e^{i(\phi_2 + \phi_3)} \\ |b| e^{i(\phi_1 + \phi_2 - \phi_b)} & d e^{i(\phi_2 + \phi_3)} & |c| e^{i(2\phi_3 - \phi_c)} \end{pmatrix}. \quad (4.183)$$

Il n'est alors pas difficile de voir que cette dernière peut être rendue réelle en choisissant $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = -\phi_3$ et $\phi_3 = \phi_b$, pourvu que la relation $2\phi_b = \phi_c$ soit vraie. Enfin, bien que les expressions des paramètres a, b, c, d en terme des couplages de Yukawa soient

²⁶ dans la base des leptons chargés diagonaux

assez lourde, vérifier que cette dernière est satisfaite dans ce modèle est immédiat. Ceci complète la preuve que seul θ_{12} est affecté par la présence d'opérateur de dimension supérieure sur le bord IR et dévie de sa valeur HPS de $\mathcal{O}(v'^2/\Lambda'^2)$.

Nous illustrerons par un exemple numérique les diverses corrections aux angles de mélange lorsque nous évoquerons les contraintes de que les tests de précision électrofaible apportent à ce modèle. Avant d'estimer les corrections radiatives, on peut insister à ce stade sur deux points importants. Tout d'abord, l'unique source générant $\theta_{13} \neq 0$ provient d'un seul terme sur le bord UV supprimé par rapport à l'ordre dominant par un facteur $\mathcal{O}(v^2/\Lambda^2)$. Par conséquent, la faible valeur de θ_{13} est une prédiction naturelle de ce modèle. Deuxièmement, grâce à la symétrie de saveur Z_3 préservée sur la brane IR, aucune correction d'ordre supérieur ne vient modifier la matrice de masse des leptons chargés, qui est alors toujours diagonalisée sans redéfinir les doublets droits $\Psi_{e,\mu,\tau}$. La conséquence immédiate en est l'absence de changement de saveur par courant neutre au niveau des arbres, même en présence d'opérateurs effectifs sur les bords.

4.3.2.2 Analyse dimensionnelle naïve et perturbativité

Nous dérivons ici les contraintes que doivent satisfaire les différents couplages sur les bords de manière à préserver la perturbativité du modèle, assurant, par là-même, la stabilité de ses prédictions sous de faibles corrections radiatives. Nous utilisons pour cela l'analyse dimensionnelle naïve (NDA) [30] afin d'estimer la taille maximale des opérateurs sur les branes. La méthode est relativement simple et permet d'évaluer pour quelle valeur de son couplage classique une interaction devient fortement couplée. Cela se produit typiquement lorsque la correction à boucle d'une amplitude donnée devient du même ordre de grandeur que sa contribution à l'arbre. Par exemple, dans la théorie scalaire $\lambda\phi^4$, la correction à une boucle au couplage quartique λ est estimée via NDA à $\sim \lambda^2/16\pi^2$, où seuls l'intensité du couplage au vertex et le facteur de boucle sont pris en compte. L'interaction reste alors dans un régime de couplage faible tant que la correction radiative est inférieure à la valeur classique, c'est-à-dire pour $\lambda \ll 16\pi^2$. Cette approche est relativement naïve dans le sens où elle néglige à la fois les multiplicités des diagrammes et les logarithmes d'ordre un incluant l'évolution avec l'énergie des couplages. Ainsi, l'analyse NDA peut, *in fine*, induire une erreur aussi importante qu'un ordre de grandeur et doit être employée avec précaution, en gardant à l'esprit qu'il s'agit juste d'une estimation.

Bord IR Comme nous l'avons montré précédemment, les couplages les plus généraux sur le brane IR sont données par :

$$-\mathcal{L}_{IR} = \frac{y_\nu}{\Lambda'} \bar{\Psi}_L H \Psi_\nu + \frac{y_{e,\mu,\tau}}{\Lambda'^2} \bar{\Psi}_L H \phi' \Psi_{e,\mu,\tau} + \frac{\kappa_2}{2\Lambda'^3} \bar{\Psi}_L H \phi'^2 \Psi_\nu + \text{h.c.} \quad (4.184)$$

Nous souhaitons que la théorie reste perturbative jusqu'à l'échelle $E_N = Nm_{KK}$ où m_{KK} est la masse de la première résonance de Kaluza-Klein pour les bosons de jauge. Ceci correspond approximativement à garder les N premiers états de Kaluza-Klein dans un régime de couplage faible, afin de conserver un sens perturbatif à la dimension supplémentaire, et nous choisissons $N = 3$. Nous pouvons alors considérer que, tant que les corrections radiatives restent inférieures aux couplages IR à l'arbre jusqu'à

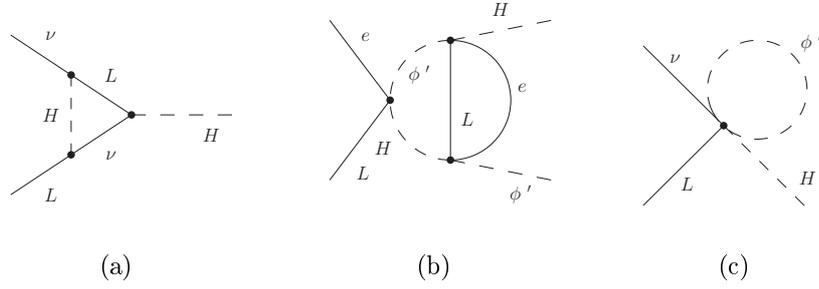


FIG. 4.6 – Diagrammes à boucles corrigeant les vertex localisés sur la brane du TeV utilisés pour les estimations NDA.

une énergie E_N , la structure de masses et de mélanges qu'ils définissent au niveau classique est stable. Par exemple, pour le premier des trois opérateurs de \mathcal{L}_{IR} fournit une correction à une boucle à son propre vertex, comme illustré sur la figure 4.6a, ce qui implique :

$$\frac{y_\nu^3}{16\pi^2} \frac{E_N^3}{\Lambda'^3} \leq y_\nu \frac{E_N}{\Lambda'}, \quad (4.185)$$

où des facteurs E_N ont été ajoutés de manière à prendre en compte le running linéaire du couplage dimensionné. En rappelant que la masse de Kaluza-Klein est d'environ $m_{KK} R' \simeq 2$, on déduit de la condition précédente la contrainte de perturbativité :

$$y_\nu \leq 2 \quad (4.186)$$

pour $\Lambda' = R'^{-1}$. De même, pour le second opérateur, la première correction radiative à sa valeur classique arrive à deux boucles par l'intermédiaire du diagramme de la figure 4.6b. On obtient alors :

$$\frac{y_e^3}{(16\pi^2)^2} \frac{E_N^6}{\Lambda'^6} \leq y_e \frac{E_N^2}{\Lambda'^2} \rightarrow y_e \leq 4 \quad (4.187)$$

où, encore une fois, $\Lambda' = R'^{-1}$. Enfin, le dernier opérateur contribue à une boucle une correction au premier opérateur, comme indiqué figure 4.6c, ce qui implique la contrainte :

$$\frac{\kappa_2}{16\pi^2} \frac{E_N^3}{\Lambda'^3} \leq y_\nu \frac{E_N}{\Lambda'} \rightarrow \kappa_2 \leq 4y_\nu \leq 8. \quad (4.188)$$

Ce dernier résultat permet notamment de raffiner l'estimation faite précédemment sur la correction au sinus de l'angle θ_{12} qui est supprimée par rapport à la prédiction HPS d'au moins un facteur de $4(v'R')^2$.

Bord UV Nous pouvons à présent répéter les mêmes arguments pour les opérateurs localisés la brane de Planck qui sont donnés par :

$$-\mathcal{L}_{UV} = \frac{M}{2\Lambda} \psi_\nu \psi_\nu + x_\nu \frac{\phi}{2\Lambda} \psi_\nu \psi_\nu + \lambda_2 \frac{\phi^2}{4\Lambda^2} \psi_\nu \psi_\nu + \text{h.c.} \quad (4.189)$$

Et, afin de garder sous contrôle leurs corrections quantiques, nous demanderons que la

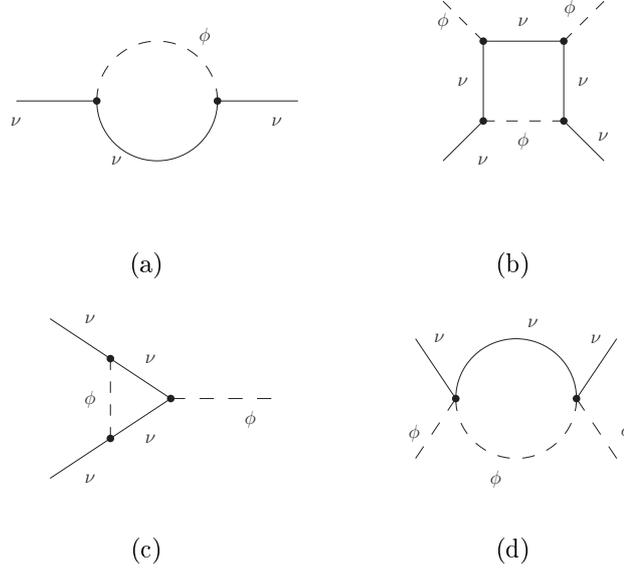


FIG. 4.7 – Diagrammes à boucle illustrant les estimations NDA des corrections quantiques sur la brane de Planck.

théorie reste perturbative jusqu'à l'échelle de masse naturelle sur ce bord, $E = R^{-1} = M_{Pl}$. Concentrons-nous sur le dernier opérateur de la liste ci-dessus. Il contribue à une boucle à son propre vertex, via par exemple le diagramme représenté en figure 4.7d, et il vient :

$$\lambda_2 \leq 4\pi, \quad (4.190)$$

où l'on a choisi $\Lambda = R^{-1}$. Ensuite, le second opérateur induit, à une boucle, une correction à la masse M , au troisième opérateur, ainsi qu'à son propre vertex, soit, d'après les diagrammes (4.7a,4.7b,4.7c) :

$$x_\nu \leq 4\pi\sqrt{\epsilon_s}, \quad x_\nu \leq \lambda_2^{1/4}\sqrt{4\pi} \leq (4\pi)^{3/4} \sim 7, \quad x_\nu \leq 4\pi. \quad (4.191)$$

Nous avons par ailleurs montré dans la section précédente que les hiérarchies observées pour les masses des neutrinos nécessitent $\epsilon_s \sim \epsilon_t$ avec $\epsilon_t = x_\nu(vR)$. Par conséquent, et en supposant un facteur $vR \sim 0,1$, afin d'éviter une suppression trop importante de $\sin\theta_{13}$, la première des trois relations ci-dessus peut se réécrire comme :

$$x_\nu \leq 16\pi^2(vR) \sim 15. \quad (4.192)$$

Ainsi on déduit la contrainte de perturbativité suivante :

$$x_\nu \leq 7. \quad (4.193)$$

Nous allons à présent montrer que notre modèle passe tous les tests de précision électrofaible pour une large région de l'espace des paramètres, tout en respectant les contraintes de perturbativité décrites dans cette section, ce qui assure la stabilité de ses prédictions sous les corrections radiatives.

4.3.3 Test de précisions électrofaible et exploration de l'espace des paramètres

Nous présentons tout d'abord les contraintes imposées au secteur leptonique du modèle par les mesures de précision au pôle du Z . Puis, dans la région de l'espace des paramètres affranchies de ces dernières, nous calculons les déviations maximales à la structure HPS résultant des opérateurs de dimension supérieure sur les bords.

4.3.3.1 Couplages des leptons chargés au Z

Les tests de précision électrofaible constituent les plus fortes contraintes imposées aux modèles de nouvelle physique à l'échelle du TeV. La conclusion générique pour les modèles de type Randall-Sundrum incorporant une symétrie custodiale est que les contraintes de précision électrofaible y sont satisfaites pour une masse des bosons de jauge de Kaluza-Klein vérifiant $m_{KK} \geq 3$ TeV [3]. Cette contrainte provient essentiellement du paramètre S de la théorie effective. Le calcul des corrections au Modèle Standard est en général réalisé dans la base oblique où les couplages aux fermions sont normalisés à leurs valeurs standards. Ici nous allons utiliser une base différente où les bosons de jauge sont canoniquement normalisés et les corrections incluses dans les couplages aux fermions. Cela permet ainsi d'appliquer les contraintes des mesures de précision dans le secteur leptonique qui est le centre de notre attention dans ce travail. En outre, cette méthode présente l'avantage de considérablement simplifier la procédure de matching des couplages de jauge. Dans ce schéma, où g_{5L} que nous identifions à g_{5R} , \tilde{g}_5 et v_H sont fixés par m_Z , m_W et la charge électrique e , toutes les corrections sont contenues dans les vertices reliant fermions et bosons de jauge que l'on calcule en évaluant les intégrales de recouvrement des fonctions d'onde. Nous nous concentrons essentiellement sur les couplages des leptons chargés au Z dans l'approximation ZMA. Depuis LEP, ces derniers sont de loin les mieux mesurés expérimentalement. Les couplages des neutrinos au Z sont beaucoup moins bien connus car les neutrinos interagissent trop faiblement et échappent à toute détection directe. Leurs couplages sont alors mesurés en estimant l'énergie manquante que l'on reconstruit en imposant la conservation de l'énergie lors des collisions. Dans la littérature, le couplage des fermions au Z est paramétré comme :

$$\begin{aligned} & \frac{g}{2c_W} \bar{\Psi} \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma^5) \Psi Z_\mu \\ &= -\frac{g}{2c_W} \bar{\chi} \bar{\sigma}^\mu (g_V + g_A) \chi Z_\mu - \frac{g}{2c_W} \psi \sigma^\mu (g_V - g_A) \bar{\psi} Z_\mu \end{aligned} \quad (4.194)$$

$$\equiv -g_Z^L \bar{\chi} \bar{\sigma}^\mu \chi Z_\mu - g_Z^R \psi \sigma^\mu \bar{\psi} Z_\mu \quad (4.195)$$

où $g_Z^{L,R}$ sont définis en terme de $g_{V,A}$ par les combinaisons linéaires suivantes :

$$g_Z^L = \frac{em_Z}{2m_W \sqrt{1 - \frac{m_W^2}{m_Z^2}}} (g_V + g_A), \quad (4.196)$$

$$g_Z^R = \frac{em_Z}{2m_W \sqrt{1 - \frac{m_W^2}{m_Z^2}}} (g_V - g_A). \quad (4.197)$$

Les couplages vecteur et axial pour les leptons chargés ont été mesurés à [33] :

$$g_V = -0,03783 \pm 0,00041 \quad (4.198)$$

$$g_A = -0,50123 \pm 0,00026 \quad . \quad (4.199)$$

Dans l'approximation des modes zéros les intégrales de recouvrement (4.106) et (4.107) prennent la forme :

$$g_Z^L \simeq \frac{1}{2} \int_R^{R'} dz \left(\frac{R}{z} \right)^4 \left[[g_{5L} a^{L,3}(z) + \tilde{g}_5 a^X(z)] g_{L,0}^l(z)^2 \right] \quad (4.200)$$

$$g_Z^{R,i} \simeq \frac{1}{2} \int_R^{R'} dz \left(\frac{R}{z} \right)^4 \left[[g_{5R} a^{R,3}(z) + \tilde{g}_5 a^X(z)] f_{R,1,0}^{l,i}(z)^2 \right]. \quad (4.201)$$

Les fonctions d'onde ne dépendent que de la masse dans le bulk des fermions, c'est-à-dire des paramètres c . En outre, une fois la symétrie A_4 imposée, la fonction d'onde $g_{L,0}^l$ est universelle et dépend seulement de $c_L > 1/2$ pour les trois générations. En revanche, les couplages des leptons droits dépendent de la saveur puisque leur hiérarchie de masse impose $c_e \lesssim c_\mu \lesssim c_\tau < -1/2$. Nous comparons alors ces couplages aux prédictions du Modèle Standard qui s'écrivent :

$$g_{Z,SM}^L = e \left(\frac{1}{2} - \frac{m_W^2}{m_Z^2} \right) \frac{m_Z}{m_W \sqrt{1 - \frac{m_W^2}{m_Z^2}}}, \quad (4.202)$$

$$g_{Z,SM}^R = e \frac{m_Z}{m_W} \sqrt{1 - \frac{m_W^2}{m_Z^2}}, \quad (4.203)$$

correspondant à $g_V = T_{3L} - 2Qs_W^2$ et $g_A = T_{3L}$ avec $T_{3L} = -1/2$ et $Q = -1$ pour les leptons chargés. Dans AdS, les déviations par rapport aux couplages standards sont dues à la fonction d'onde du Z qui n'est pas plate à proximité de la brane IR où se trouve la VEV du Higgs. Ainsi, dans la limite où la masse du Z est nulle, pour $v_H \rightarrow 0$, tous les couplages leptoniques du Z sont universels car les intégrales de recouvrement se réduisent dans ce cas à de simples conditions de normalisation pour les fermions. Enfin, puisque le τ est le plus lourd, sa fonction d'onde est la moins supprimée près de la brane du TeV, en faisant le lepton le plus sensible à la non platitude du Z . Alors, on s'attend à une plus grande déviation dans le couplage du τ au Z . Afin de rester en accord avec les incertitudes de mesures ci-dessus, on demande à ce que les couplages leptoniques dans ce modèle ne dévie pas plus de 0,2% des prédictions du Modèle Standard. Le couplage axial est le plus contraint expérimentalement avec une incertitude relative de $\sim 0,1\%$. C'est l'écart maximal que l'on devrait alors naïvement imposer. Cependant, il y a plusieurs détails qui n'ont pas été pris en compte jusqu'à présent, comme par exemple l'évolution avec l'énergie des couplages de Yukawa, et donc des masses des leptons. Notamment, le couplage de Yukawa du τ est plus faible à $E = m_Z$ que sur couche de masse, $E = m_\tau$. Or, plus le fermion est lourd, plus son couplage au Z dévie de sa valeur standard. Ainsi, afin de prendre approximativement cet effet en compte, nous relaxons la contrainte de 0,1% à 0,2%. In fine, ces contraintes n'étant de toutes façons pas trop sévères, ce changement ne présente rien de préjudiciable. La figure 4.8 présente l'écart relatif des couplages aux Z des fermions droit et gauche par rapport à leurs valeur standards en fonction de c . On remarque que les $c_{e,\mu,\tau}$ peuvent être aussi éloignés de $-1/2$ que nécessaire pour reproduire la hiérarchie de masse des leptons chargés. Cependant, c_L doit être relativement proche de $1/2$ pour rester en accord avec les tests de précision électrofaible. Le fait qu'il soit préférable pour c_L de rester autour de $1/2$ peut paraître surprenant au premier abord car augmenter c_L signifie délocaliser les fermions gauches de la brane du TeV où la fonction d'onde du Z est perturbée. Néanmoins, pour les conditions de matching utilisées, les vertices fermion/boson de

auge contiennent également un paramètre oblique S . Dans les modèles de type Randall-Sundrum, une contribution au paramètre S provient des couplages des résonances de Kaluza-Klein des bosons de jauge avec les fermions [3]. De plus, puisque la fonction d'onde du Z est pratiquement plate et qu'elle est orthogonale à celles de ses résonances, le recouvrement des bosons de Kaluza-Klein avec les fermions sera faible si les fonctions d'onde des fermions sont également plates. Ainsi, le paramètre S est minimal pour $c_L \sim 1/2$. En réalité, il s'agit plutôt d'une bonne nouvelle puisque, afin de conserver le Yukawa de τ dans un régime perturbatif, il est de toutes façons nécessaire de le rendre le plus sensible possible à la VEV du Higgs dans l'infrarouge, avec $c_L \sim 1/2$. Par conséquent, la figure 4.8 permet de conclure que ce modèle passe aisément les tests de précision électrofaible dans le secteur leptonique avec $R'^{-1} = 1,5$ TeV, soit des résonances fermioniques de l'ordre de 3 TeV.

4.3.3.2 Balayage numérique de l'espace des paramètres

Nous souhaitons ici illustrer le fait que les angles de mélange, altérés de leurs valeurs HPS par la présence d'opérateurs effectifs sur les bords, restent néanmoins dans la fenêtre autorisée par les résultats actuels des expériences d'oscillation de neutrinos. Commençons par passer en revue les divers paramètres du modèle. Une fois la position des branes fixées de manière à résoudre le problème de hiérarchie de jauge, il reste 12 paramètres libres dans notre construction : 5 masses c , 5 couplages de Yukawa et 2 VEV v et v' . Comme nous l'avons montré, l'ajout d'opérateur d'ordre supérieur apporte 6 paramètres supplémentaires. Nous utilisons les valeurs mesurées des masses des leptons chargés ainsi que les valeurs optimales des hiérarchies de masse des neutrinos observées expérimentalement pour fixer 5 des paramètres apparaissant aux ordres dominants. Cependant, il demeure encore un grand nombre de degrés de liberté, ce qui nous contraint à ajouter quelques hypothèses simplificatrices dans le but de sensiblement réduire l'espace des paramètres à explorer. Ceci permet notamment de se concentrer sur les principales prédictions du modèle sans pour autant entrer dans les détails de la structure fine des opérateurs sous-dominants. Tout d'abord, nous imposons $c_\tau = -c_L$

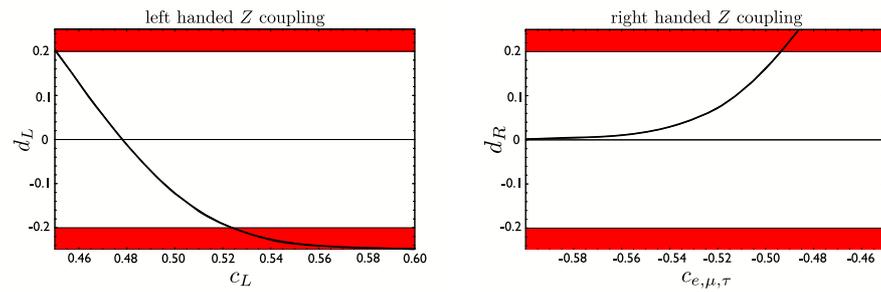


FIG. 4.8 – Déviations relatives par rapport au Modèle Standard des couplages au Z de l_L and l_R en fonction de la masse dans le bulk c . Les valeurs de $d_L = (g_Z^L - g_{Z,SM}^L)/g_{Z,SM}^L$ et $d_R = (g_Z^R - g_{Z,SM}^R)/g_{Z,SM}^R$ sont représentées en pourcent. Ces courbes sont celles obtenues pour $R'^{-1} = 1,5$ TeV avec $m_W = 80,403$ GeV, $m_Z = 91,1876$ GeV et $e = e(\mu = m_Z) = \sqrt{4\pi/128}$ comme observables physiques. Les bandes rouges sont exclues par les mesures de précision électrofaible.

et choisissons de conserver c_L comme paramètre libre, ce qui permet de garder un oeil sur le paramètre S . Également, nous considérons le cas où les couplages de Yukawa sur la brane IR saturent leur limite de perturbativité $y_{e,\mu,\tau} = 2y_\nu = 4$. En conséquence, imposer $m_{e,\mu,\tau}$ revient à fixer v' et $c_{e,\mu}$ comme des fonctions de c_L . Ainsi, tous les effets provenant de la brane du TeV sont encodés dans le seul paramètre c_L , dont la valeur est contrainte par les tests de précision. Sur le bord UV, les différences de masses solaire et atmosphérique déterminent le rapport ϵ_s/ϵ_t ainsi que l'échelle de masse absolue des neutrino \tilde{m}/ϵ_s . Alors, en prenant $x_\nu = 1$, on obtient v comme une fonction de c_ν , qui se retrouve être l'unique paramètre libre sur cette brane. Rappelons en outre que le produit $(vR)^2$ contrôle la taille de l'angle θ_{13} généré par les corrections d'ordre supérieur. Nous pouvons alors tracer les contours des angles de mélange dans le plan (c_L, c_ν) , comme illustré sur la figure 4.3.3.2. Les deux lignes horizontales sont pour des valeurs de $\sin^2(2\theta_{12})$ de 0,90 et 0,95 (de haut en bas) dans le cas où seuls les opérateurs sous-dominants de la brane IR sont considérés, avec $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ et $\epsilon_3 = 8(v'R')^2$. Les lignes obliques sont les contours de $\sin^2(2\theta_{13}) = 0,01$ et 0,19 (de gauche à droite) et ceux de $\sin^2(2\theta_{12}) = 0,90$ et 0,95 (de gauche à droite également) générés par les masses de Majorana d'ordre supérieur sur le bord UV, avec $\delta_1 = \delta_2 = 0$ and $\delta_3 = 4\pi(vR)^2$. Nous avons considéré séparément les corrections issues des bords IR, pour θ_{12} , et UV,

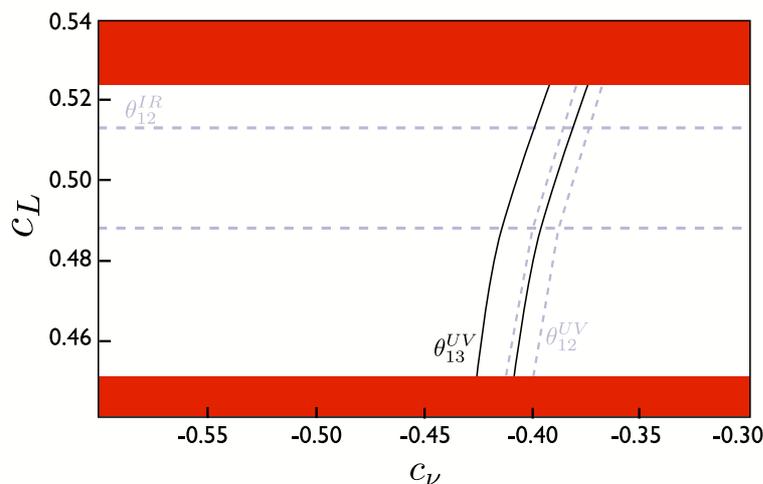


FIG. 4.9 – Représentation graphique des angles de mélanges. L'espace des paramètres a été réduit au plan (c_L, c_ν) . Les régions rouges sont exclues par les contraintes de précision électrofaible sur le couplage au Z . Les contours représentent les valeurs les plus importantes obtenues en présence d'opérateur de dimension supérieure sur les bords.

pour tous les angles. De plus, et ceux afin de démontrer la robustesse de la structure tri-bimaximale obtenue à l'ordre dominant, nous avons sélectionné le cas le plus défavorable pour lequel les opérateurs d'ordre supérieur saturent leur borne perturbative. En conclusion, la figure 4.3.3.2 montre que, même lorsque les déviations à la forme HPS sont les plus larges possibles, il reste toujours une région non négligeable de l'espace

des paramètres satisfaisant les contraintes dérivées des expériences d'oscillation :

$$\sin^2(2\theta_{13}) < 0,19 \quad (90\% \text{ CL}), \quad (4.204)$$

$$\sin^2(2\theta_{23}) > 0,92 \quad (90\% \text{ CL}), \quad (4.205)$$

$$0,73 \leq \sin^2(2\theta_{12}) \leq 0,95 \quad (3\sigma). \quad (4.206)$$

Évidemment, dans la limite où les opérateurs sous-dominant ont de plus faibles couplages, la matrice de mélange est donnée par U_{HPS} avec une plus grande précision.

4.3.4 Violation de la saveur leptonique

Les modèles de physique au-delà de l'échelle électrofaible apportent généralement de nouvelles sources de violation de saveur. Ces derniers ne sont alors viables que si l'échelle de violation est repoussée à des valeurs suffisamment élevées pour satisfaire les contraintes expérimentales dans ce secteur. Il existe typiquement deux types de sources de changements de saveur pour les leptons. Tout d'abord, les processus de violation de saveur peuvent être véhiculés soit par l'intermédiaire de particules neutres de masse élevée, comme un nouveau boson de jauge de Kaluza-Klein, ou bien via des couplages au Z non diagonaux dans l'espace de saveur. Ces deux processus par courant neutre apparaissent directement au niveau des arbres. Le premier émerge de manière effective, après intégration explicite du boson médiateur sous la forme d'une interaction non renormalisable à quatre fermions, dont l'exemple le plus contraint expérimentalement est $\mu \rightarrow 3e$ avec :

$$B_{exp}(\mu \rightarrow 3e) < 1,0 \times 10^{-12} \quad (90\% \text{ CL}). \quad (4.207)$$

Également, les interactions de courant chargé peuvent induire à une boucle des désintégrations pour lesquelles les évidences expérimentales sont assez rares, comme par exemple $\mu \rightarrow e\gamma$ dont le rapport de branchement est soumis à la plus forte contrainte²⁷ dans le secteur leptonique [12] :

$$B_{exp}(\mu \rightarrow e\gamma) < 1,2 \times 10^{-11} \quad (90\% \text{ CL}). \quad (4.208)$$

Dans le contexte des modèles AdS₅, les opérateurs à quatre fermions violant la saveur ont été considérés pour la première fois par Agashe et al. [2]. Leur principale conclusion est que l'échelle des processus de changements de saveur est d'au moins 5 TeV, et d'autant plus élevée que les couplages de Yukawa sur les bords sont faibles. Nous commencerons par montrer comment la symétrie de saveur A_4 impose nécessairement l'absence de changements de saveur au niveau des arbres, satisfaisant ainsi automatiquement la contrainte (4.207). Nous montrerons ensuite que le modèle de saveur leptonique considéré ci-dessus reste en accord avec (4.208) pour $m_{KK}^l \simeq 3$ TeV.

4.3.4.1 Absence de changements de saveur par courant neutre

Les changements de saveur par courant neutre prennent source dans les couplages des fermions légers à la tour de Kaluza-Klein du Z . Si ces derniers ne sont pas universels, mais varient d'une saveur à l'autre, il en résultera des couplages non diagonaux dans la base des états propres de masse et donc une violation de la saveur au niveau des arbres

²⁷ A titre de comparaison, les contraintes équivalentes pour la désintégration du τ sont estimées à $B_{exp}(\tau \rightarrow e\gamma) < 1,1 \times 10^{-7}$ [10] et $B_{exp}(\tau \rightarrow \mu\gamma) < 6,8 \times 10^{-8}$ [9] à 90% de niveau de confiance.

via l'échange du Z et/ou de ses résonances de Kaluza-Klein. Dans la base des états propres d'interactions, les termes cinétiques dans le bulk sont diagonaux dans l'espace de saveur et les couplages aux Z des leptons chargés sont de la forme :

$$g_{Z,k}^L \sum_{i=1}^{N_f} \bar{l}_L^i \bar{\sigma}^\mu l_L^i Z_{k,\mu} + \sum_{i=1}^{N_f} g_{Z,k}^{R,i} l_R^i \sigma^\mu \bar{l}_R^i Z_{k,\mu} \quad (4.209)$$

avec $g_{Z,k}^L \equiv E_{0,0,k}^L$ et $g_{Z,k}^R \equiv E_{0,0,k}^R$, où les $E_{n,m,k}$ sont données par les expressions (4.106) et (4.106) qui se réduisent dans l'approximation ZMA à :

$$g_{Z,k}^L = \frac{1}{2} \int dz (R/z)^4 \left(g_{5L} a_k^{L,3}(z) + \tilde{g}_5 a_k^X(z) \right) g_{L,0}^L(z)^2, \quad (4.210)$$

$$g_{Z,k}^{R,i} = \frac{1}{2} \int dz (R/z)^4 \left(g_{5R} a_k^{R,3}(z) + \tilde{g}_5 a_k^X(z) \right) f_{R,1,0}^{l_i}(z)^2. \quad (4.211)$$

Suite au choix de représentations de A_4 , dans lesquelles les leptons ont été plongés, les fonctions d'onde pour les fermions gauches sont universelles dans l'approximation des modes zéros, puisque qu'elles ne dépendent que d'un seul paramètre de masse c_L . Par conséquent, les sources possibles de changements de saveur se limitent aux couplages des leptons droits, dont les fonctions d'onde dépendent nécessairement de la saveur lorsqu'on souhaite générer la hiérarchie de masse par le mécanisme de localisation dans AdS₅. On passe alors dans la base des leptons chargés diagonaux en réalisant les rotations suivantes des champs :

$$l_L^i \rightarrow (V_4)_{ij} l_L^j, \quad l_R^i \rightarrow \delta_{ij} l_R^j, \quad (4.212)$$

et les couplages aux Z s'écrivent :

$$g_{Z,k}^L \sum_{i=1}^{N_f} \bar{l}_L^i (V_4^*)_{ik} \bar{\sigma}^\mu (V_4)_{kj} l_L^j Z_{k,\mu} + \sum_{i=1}^{N_f} g_{Z,k}^{R,i} l_R^i \sigma^\mu \bar{l}_R^i Z_{k,\mu} \quad (4.213)$$

$$= g_{Z,k}^L \sum_{i=1}^{N_f} \bar{l}_L^i \bar{\sigma}^\mu l_L^i Z_{k,\mu} + \sum_{i=1}^{N_f} g_{Z,k}^{R,i} l_R^i \sigma^\mu \bar{l}_R^i Z_{k,\mu} \quad (4.214)$$

où l'unitarité de V_4 a été utilisée. Les couplages des fermions légers à la tour du Z restent diagonaux dans l'espace de saveur, même dans la base des états propres de masse. Le fait que seuls les champs gauches doivent être redéfinis peut paraître anodin mais constitue en réalité une propriété remarquable des modèles A_4 impliquant l'absence de changements de saveur par courant neutre. Ainsi, la symétrie A_4 garantit automatiquement les deux conditions nécessaires à la conservation de la saveur au niveau des arbres qui sont l'universalité des couplages gauches *et* l'absence de redéfinition des champs droits. De plus, nous insistons sur l'exactitude de ce résultat à tous les ordres sur les bords, puisque nous avons montré qu'aucune correction sous-dominante sur la brane IR ne modifiait la matrice de masse des leptons chargés.

4.3.4.2 $\mu \rightarrow e\gamma$

Nous présentons maintenant une estimation du rapport de branchement de la désintégration rare du muon en $e + \gamma$ dans ce modèle. Ce processus est induit à une boucle par l'échange de bosons de jauge chargés, tel qu'illustré figure 4.10, et dont les couplages violent la conservation de la saveur. Il existe en général d'autres contributions dominantes via l'échange de courant neutre [2], mais nous venons de montrer

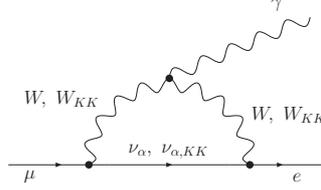


FIG. 4.10 – Diagramme à une boucle contribuant à $\mu \rightarrow e\gamma$ par l'intermédiaire de courants chargés. En plus de l'échange d'un W et d'un neutrino du Modèle Standard, dans AdS₅ ce processus reçoit d'importantes corrections par l'échange de résonances de Kaluza-Klein à l'échelle du TeV.

qu'elles sont nulles dans ce modèle. Le rapport de branchement résultant de l'échange de neutrinos massifs et d'un W a été calculé par Cheng et Li [16, 15] et il se réduit à l'expression²⁸ :

$$B(\mu \rightarrow e\gamma) \equiv \frac{\Gamma(\mu \rightarrow e\gamma)}{\Gamma(\mu \rightarrow e\nu\bar{\nu})} = \frac{3\alpha}{8\pi} \left| \sum_{\alpha} U_{\mu\alpha}^* U_{e\alpha} F\left(\frac{m_{\nu_{\alpha}}^2}{m_W^2}\right) \right|^2 \quad (4.215)$$

où α est la constante de structure fine, U est la matrice PMNS, $m_{\nu_{\alpha}}$ la masse du neutrino échangé et la fonction F est donnée par :

$$F(z) = \frac{1}{6(1-z)^4} (10 - 43z + 78z^2 - 49z^3 + 18z^3 \log z + 4z^4). \quad (4.216)$$

On remarque ici que ce n'est pas la masse des neutrinos mais les différences de masse qui induisent un rapport de branchement non nul. En effet, pour un spectre de masse universel $m_{\nu_{\alpha}} = m$, l'expression précédente s'annule par unitarité de la matrice de mélange.

Estimation dans le Modèle Standard Les différences de masses des neutrinos légers sont relativement faibles $\Delta m_{atm}^2 \sim 10^{-3} \text{ eV}^2$, avec $m_{\nu_{\alpha}} \lesssim 1 \text{ eV}$. Dans la limite $m_{\nu} \ll m_W$, la fonction F est approchée par :

$$F(z) \underset{z \ll 1}{\sim} \frac{5}{3} - \frac{z}{2}. \quad (4.217)$$

Le premier terme s'annulant par unitarité de la matrice de mélange, et ses éléments étant tous approximativement d'ordre un, on obtient :

$$B_{SM}(\mu \rightarrow e\gamma) \lesssim \frac{3\alpha}{32\pi} \left| \frac{\Delta m_{atm}^2}{m_W^2} \right|^2 \simeq 10^{-51}, \quad (4.218)$$

où la plus grande différence de masse a été utilisée et la masse absolue des neutrinos disparaît par unitarité de U . Ce résultat est très nettement inférieur à la borne expérimentale (4.208) et certainement hors de portée de futures mesures.

²⁸sous l'hypothèse que l'interaction $l/W/\nu$ soit contrôlée par le couplage de jauge g du Modèle Standard. Par ailleurs, le taux de désintégration en $e\gamma$ varie comme g^4/m_W^4 , alors que $\Gamma(\mu \rightarrow e\nu\bar{\nu})$ est proportionnel au carré de la constante de Fermi. C'est la raison pour laquelle le couplage g n'apparaît pas dans le rapport de branchement.

Dans le Modèle Standard, la contribution aux désintégrations rares est extrêmement faible car les neutrinos sont très légers²⁹. En revanche, la situation est très différente en présence de particules massives, comme les neutrinos de Kaluza-Klein, mais également les résonances des W . Par exemple, dans le modèle original de Grossman et Neubert [21], les grandes différences de masse entre les neutrinos de Kaluza-Klein et leurs couplages aux W du même ordre de grandeur que ceux des neutrinos légers conduisent à de trop grandes contributions au rapport de branchement précédent. Plus quantitativement, Kitano [25] montra que dans ce cas, la masse des neutrinos de Kaluza-Klein doit être au moins de 25 TeV pour satisfaire la contrainte (4.208). Dans notre modèle, $R'^{-1} = 1,5$ TeV implique $m_{\nu_{KK}} \sim 3$ TeV, bien en deçà de la borne inférieure précédente. Cependant, cette contrainte est nettement relaxée dans notre cas grâce à la localisation des fermions légers près de la brane de Planck. Par l'orthogonalité des fonctions d'onde, les neutrinos de Kaluza-Klein se retrouvent localisés près de la brane du TeV, affaiblissant ainsi leurs couplages avec le W et les fermions du Modèle Standard qui sont eux localisés dans l'ultra-violet. Il s'agit d'une propriété générique des modèles de dimension supplémentaire où les fermions se propagent dans le bulk.

Échange de neutrinos de Kaluza-Klein Nous allons estimer dans un premier temps l'amplitude induite à une boucle par l'échange d'un W standard et de neutrinos de Kaluza-Klein. Pour chaque niveau de la tour de Kaluza-Klein des neutrinos, la matrice de mélange est approximativement identique à celle échangeant les saveurs des neutrinos du Modèle Standard. C'est une des conséquences de A_4 , résultant du fait que la rotation U_{HPS} est appliquée au champ 5d, et non simplement aux modes légers, pour diagonaliser les conditions aux bords des fermions. En revanche dans ce cas, le couplage global n'est plus g mais gf_L où le facteur de suppression f_L , donné par (4.126) avec $c = c_L$, provient de la délocalisation des leptons chargés du Modèle Standard loin du bord où les neutrinos de Kaluza-Klein sont principalement localisés. Par conséquent, leurs contributions au rapport de branchement contient un facteur f_L^4 . Puisque $m_{\nu_{KK}} \simeq 3$ TeV $\gg m_W$, la fonction F doit être prise cette fois dans la limite $z \gg 1$:

$$F(z) \underset{z \gg 1}{\sim} \frac{2}{3} + 3 \frac{\log z}{z}. \quad (4.219)$$

et on obtient :

$$B_{\nu_{KK}}(\mu \rightarrow e\gamma) \simeq \frac{27\alpha}{8\pi} f_L^4 \left| \sum_{\alpha} U_{\mu\alpha}^* U_{e\alpha} \frac{m_W^2}{m_{\nu_{KK}^{\alpha}}^2} \log \left(\frac{m_{\nu_{KK}^{\alpha}}^2}{m_W^2} \right) \right|^2 \quad (4.220)$$

où, ici encore, le terme constant disparaît par unitarité de la matrice U . De plus, en isolant les différences de masse des neutrinos, $m_{\nu_{KK}^{\alpha}} = m_{\nu_{KK}} + \delta m_{\nu_{KK}^{\alpha}}$ avec $\delta m_{KK} \ll m_{KK}$, on peut réécrire l'expression précédente sous la forme simplifiée suivante :

$$B_{\nu_{KK}}(\mu \rightarrow e\gamma) \simeq \frac{54\alpha}{\pi} f_L^4 \left| \sum_{\alpha} U_{\mu\alpha}^* U_{e\alpha} \frac{m_W^2}{m_{\nu_{KK}}^2} \frac{\delta m_{\nu_{KK}^{\alpha}}}{m_{\nu_{KK}}} \log \frac{m_{\nu_{KK}}}{m_W} \right|^2 \quad (4.221)$$

$$\lesssim \frac{54\alpha}{\pi} f_L^4 \frac{m_W^4}{m_{\nu_{KK}}^4} \frac{\delta m_{\nu_{KK}}^2}{m_{\nu_{KK}}^2} \log^2 \frac{m_{\nu_{KK}}}{m_W} \quad (4.222)$$

où l'unitarité de U , dont les entrées sont également ici d'ordre un, a été utilisée. Il reste maintenant à déterminer une borne supérieure pour $\delta m_{\nu_{KK}}$. Contrairement aux modes

²⁹Rappelons qu'il n'y a pas de changements de saveur par courant neutre dans le Modèle Standard.

légers, les hiérarchies de masses entre les différentes saveurs des résonances de Kaluza-Klein ne sont pas données par un mécanisme de localisation. Par l'orthogonalité des fonctions d'onde, les neutrinos de Kaluza-Klein sont tous localisés dans l'infrarouge et ont un recouvrement approximativement universel avec la brane du TeV. Ainsi, pour un même niveau, leurs écarts de masse proviennent de leurs différents couplages de Yukawa avec la VEV du Higgs sur ce bord. Ces modes n'étant pas supprimés sur la brane du TeV, on estime alors ces différences à [2] :

$$\frac{\delta m_{\nu_{KK}}^2}{m_{\nu_{KK}}^2} \simeq \frac{y^2}{2} \frac{v_H^2}{m_{\nu_{KK}}^2}. \quad (4.223)$$

La différence de masse la plus importante sera alors entre les résonances du τ et celles de l'électron et du muon. Enfin, même en se plaçant dans le cas le plus défavorable où $y_\tau \sim 3$, saturant alors son régime de couplage faible, et $c_L \sim 0,5$, correspondant à une moindre suppression du couplage $W/\nu_{KK}/l$, on déduit de (4.222) un rapport de branchement d'environ deux ordres de grandeur inférieur à la limite expérimentale :

$$B_{\nu_{KK}}(\mu \rightarrow e\gamma) \lesssim 10^{-13}. \quad (4.224)$$

Échange de W de Kaluza-Klein Lorsque seule une résonance de la W est échangée, la contribution aux processus de désintégrations rares est encore plus faible que dans le Modèle Standard, puisque $m_{W_{KK}} \simeq 3 \text{ TeV} \gg m_W$. On obtient en revanche une contribution non négligeable lorsque celle-ci est accompagnée d'un neutrino de Kaluza-Klein. Nous avons vu dans la limite Higgsless que l'écart de masse entre la W et sa première résonance est donné par :

$$\frac{m_{W_{KK}}^2}{m_W^2} \sim \log(R'/R). \quad (4.225)$$

De plus, la correspondance AdS/CFT nous permet d'estimer que la masse des bosons de jauge est donnée par l'échelle de brisure R' de la symétrie conforme dans l'infrarouge, soit $m \simeq g_4/R'$. On peut alors considérer que le couplage de jauge effectif g_4 pour les modes de Kaluza-Klein est renforcé d'un facteur $\sqrt{\log(R'/R)} \sim 6$ par rapport à g . Le facteur de suppression provenant de la délocalisation des fermions légers étant toujours présent, on obtient un couplage $W_{KK}/\nu_{KK}/l$ d'au plus $gf_L \sqrt{\log(R'/R)}$. On s'attend alors à une contribution environ 6^4 fois plus importante que dans le cas précédent. Néanmoins, la fonction F doit être maintenant développée autour de $m_{W_{KK}} \sim m_{\nu_{KK}}$ où elle vaut approximativement :

$$F(z) \underset{z \sim 1}{\sim} \frac{17}{12} + \frac{3}{20}(1-z). \quad (4.226)$$

Répétant les mêmes simplifications réalisées auparavant, on déduit alors³⁰ :

$$B_{W_{KK}}(\mu \rightarrow e\gamma) \lesssim \frac{27\alpha}{800\pi} f_L^4 \frac{m_W^4}{m_{W_{KK}}^4} \frac{m_{\nu_{KK}}^4}{m_{W_{KK}}^4} \frac{\delta m_{\nu_{KK}}^2}{m_{\nu_{KK}}^2} \log^2 \frac{R'}{R} \simeq 10^{-13}, \quad (4.227)$$

ce qui reste encore deux ordres de grandeur sous la limite (4.208) pour $m_{KK} \sim 3 \text{ TeV}$.

³⁰Un facteur $m_W^4/m_{W_{KK}}^4$ a également été ajouté pour tenir compte du fait que $\Gamma(\mu \rightarrow e\gamma)$ est proportionnel à l'inverse de la quatrième puissance du boson de jauge échangé.

Les estimations précédentes semblent indiquer que ce modèle n'entretient en conflit avec aucune contrainte expérimentale sur les processus de violation de saveur. Néanmoins, puisqu'elles restent numériquement peu éloignées des bornes expérimentales, il serait intéressant de réaliser un calcul détaillé du diagramme (4.10), ainsi que du rapport de branchement en résultant, notamment en prenant en compte les sommes sur tous les états de Kaluza-Klein. Également, une analyse générale dans les modèles Randall-Sundrum incluant des neutrinos de Majorana dans le bulk serait des plus bienvenues.

Conclusions

Depuis maintenant plusieurs années, de nombreuses expériences nous ont confirmé que les neutrinos du Modèle Standard sont des particules massives. Comme le montra Pontecorvo, leurs faibles masses non dégénérées leur permettent d'osciller d'une saveur à l'autre au cours de leur propagation ce qui met en évidence l'existence de processus de changements de saveur dans le secteur des leptons. En revanche, contrairement aux quarks, les angles de mélanges entre différentes générations de neutrinos sont relativement grands. La structure particulière de ces mélanges nécessite alors l'introduction d'une symétrie de saveur qui, sous une forme discrète telle A_4 , permet de reproduire aisément la phénoménologie observée des oscillations de neutrinos. Nous avons montré comment la mise en place de cette symétrie dans un espace-temps 5d anti de Sitter permet de générer naturellement une matrice de mélange tri-bimaximale et de rendre compte des hiérarchies de masses pour les leptons chargés et les neutrinos. Par ailleurs, ce modèle présente de nombreux avantages par rapport à la construction en quatre dimensions initiales. Tout d'abord, la structure du vide nécessaire à la brisure de A_4 dans une direction phénoménologiquement acceptable est automatiquement obtenue en séparant spatialement les VEVs des scalaires dans la dimension supplémentaire. Ensuite, ce modèle permet d'expliquer la faiblesse des masses des neutrinos en exploitant le mécanisme de seesaw intrinsèque à AdS_5 . Les hiérarchies de masses des leptons chargés sont correctement reproduites à partir de couplages de Yukawa d'ordre un, en faisant usage du mécanisme de localisation des fermions. De plus, les prédictions faites au niveau classique apparaissent parfaitement stables sous les corrections quantiques et l'ajout d'opérateurs non renormalisables sur les bords. Enfin, nous avons montré comment ce modèle simple de la saveur leptonique est en parfait accord à la fois avec les tests de précision électrofaible et les contraintes de changements de saveur dans les processus de désintégrations rares.

Bibliographie

- [1] Precision electroweak measurements on the Z resonance. *Phys. Rept.*, 427 :257, 2006.
- [2] K. Agashe, A. E. Blechman, and F. Petriello. Probing the Randall-Sundrum geometric origin of flavor with lepton flavor violation. *Phys. Rev.*, D74 :053011, 2006.
- [3] K. Agashe, A. Delgado, M. J. May, and R. Sundrum. RS1, custodial isospin and precision tests. *JHEP*, 08 :050, 2003.
- [4] B. Aharmim et al. A search for periodicities in the B-8 solar neutrino flux measured by the Sudbury Neutrino Observatory. *Phys. Rev.*, D72 :052010, 2005.
- [5] G. Altarelli and F. Feruglio. Tri-bimaximal neutrino mixing from discrete symmetry in extra dimensions. *Nucl. Phys.*, B720 :64–88, 2005.
- [6] G. Altarelli and F. Feruglio. Tri-bimaximal neutrino mixing, A(4) and the modular symmetry. *Nucl. Phys.*, B741 :215–235, 2006.
- [7] M. Apollonio et al. Limits on neutrino oscillations from the CHOOZ experiment. *Phys. Lett.*, B466 :415–430, 1999.
- [8] Y. Ashie et al. A measurement of atmospheric neutrino oscillation parameters by Super-Kamiokande I. *Phys. Rev.*, D71 :112005, 2005.
- [9] B. Aubert et al. Search for lepton flavor violation in the decay $\tau \rightarrow \mu\gamma$. *Phys. Rev. Lett.*, 95 :041802, 2005.
- [10] B. Aubert et al. Search for lepton flavor violation in the decay $\tau^\pm \rightarrow e^\pm\gamma$. *Phys. Rev. Lett.*, 96 :041801, 2006.
- [11] K. S. Babu, E. Ma, and J. W. F. Valle. Underlying A(4) symmetry for the neutrino mass matrix and the quark mixing matrix. *Phys. Lett.*, B552 :207–213, 2003.
- [12] M. L. Brooks et al. New limit for the family-number non-conserving decay $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$. *Phys. Rev. Lett.*, 83 :1521–1524, 1999.
- [13] G. Cacciapaglia, C. Csaki, G. Marandella, and J. Terning. The gaugephobic Higgs. *JHEP*, 02 :036, 2007.
- [14] G. Cacciapaglia et al. A GIM Mechanism from Extra Dimensions. *JHEP*, 04 :006, 2008.
- [15] T.-P. Cheng and L.-F. Li. Muon Number Nonconservation Effects in a Gauge Theory with V A Currents and Heavy Neutral Leptons. *Phys. Rev.*, D16 :1425, 1977.
- [16] T. P. Cheng and L.-F. Li. Nonconservation of Separate mu - Lepton and e - Lepton Numbers in Gauge Theories with v+a Currents. *Phys. Rev. Lett.*, 38 :381, 1977.
- [17] C. Csaki, C. Delaunay, C. Grojean, and Y. Grossman. A Model of Lepton Masses from a Warped Extra Dimension. 2008.
- [18] C. Csaki, A. Falkowski, and A. Weiler. A Simple Flavor Protection for RS. 2008.
- [19] C. Csaki, A. Falkowski, and A. Weiler. The Flavor of the Composite Pseudo-Goldstone Higgs. 2008.
- [20] M. C. Gonzalez-Garcia and Y. Nir. Developments in neutrino physics. *Rev. Mod. Phys.*, 75 :345–402, 2003.
- [21] Y. Grossman and M. Neubert. Neutrino masses and mixings in non-factorizable geometry. *Phys. Lett.*, B474 :361–371, 2000.

-
- [22] P. F. Harrison, D. H. Perkins, and W. G. Scott. Tri-bimaximal mixing and the neutrino oscillation data. *Phys. Lett.*, B530 :167, 2002.
- [23] J. Hosaka et al. Solar neutrino measurements in Super-Kamiokande-I. *Phys. Rev.*, D73 :112001, 2006.
- [24] S. F. King and M. Malinsky. A(4) family symmetry and quark-lepton unification. *Phys. Lett.*, B645 :351–357, 2007.
- [25] R. Kitano. Lepton flavor violation in the Randall-Sundrum model with bulk neutrinos. *Phys. Lett.*, B481 :39–44, 2000.
- [26] E. Komatsu et al. Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations :Cosmological Interpretation. 2008.
- [27] V. A. Lyubimov, E. G. Novikov, V. Z. Nozik, E. F. Tretyakov, and V. S. Kosik. An Estimate of the electron-Neutrino Mass from the beta Spectrum of Tritium in the Valine Molecule. *Phys. Lett.*, B94 :266–268, 1980.
- [28] E. Ma and G. Rajasekaran. Softly broken A(4) symmetry for nearly degenerate neutrino masses. *Phys. Rev.*, D64 :113012, 2001.
- [29] Z. Maki, M. Nakagawa, and S. Sakata. Remarks on the unified model of elementary particles. *Prog. Theor. Phys.*, 28 :870, 1962.
- [30] A. Manohar and H. Georgi. Chiral Quarks and the Nonrelativistic Quark Model. *Nucl. Phys.*, B234 :189, 1984.
- [31] B. Pontecorvo. Mesonium and antimesonium. *Sov. Phys. JETP*, 6 :429, 1957.
- [32] B. Pontecorvo. Inverse beta processes and nonconservation of lepton charge. *Sov. Phys. JETP*, 7 :172–173, 1958.
- [33] W. M. Yao et al. Review of particle physics. *J. Phys.*, G33 :1–1232, 2006.

Conclusion

Le Higgs apparaît comme la pierre angulaire de la physique des hautes énergies, pouvant être à la fois à l'origine de l'excès de matière ayant permis la formation des structures de notre univers et semblant contrôler la brisure de la symétrie électrofaible. Par ailleurs, lorsque sa stabilité à basse énergie est assurée par la présence d'une dimension d'espace supplémentaire, celle-ci permet alors de répondre naturellement à la plupart des interrogations concernant la physique de la saveur qui sont laissées en suspens par le Modèle Standard, y compris dans le secteur des neutrinos. C'est pourquoi c'est avec plus que de l'impatience que le boson de Higgs est attendu au LHC dans les années à venir, si le Tevatron ne met pas la main dessus en premier. Contrairement à ce dernier, l'énergie fournie par le LHC dans le centre de masse des collisions est de l'ordre de 14 TeV. Ainsi, le rôle du LHC est en réalité double, puisque, au plus du Higgs, il devrait permettre la détection des particules responsables de la stabilisation de la hiérarchie de jauge, dont l'échelle naturelle est prédite autour du TeV. Par ailleurs, l'étude cosmologique de la transition de phase électrofaible apporte un espoir complémentaire, voire alternatif aux expériences en collisionneurs, quant à la détermination du potentiel de Higgs et *in fine* du mécanisme de brisure électrofaible. En effet, bien que le Higgs, s'il existe, devrait être produit et observé au LHC, il sera extrêmement difficile d'en mesurer les autocouplages et ainsi reconstruire son potentiel. Dans ce cas, la mesure du spectre d'ondes gravitationnelles provenant de la transition de phase électrofaible, étant une signature directe de ce potentiel, constitue une approche très prometteuse. Si cette transition s'est déroulée à une température de l'ordre du TeV, les futurs interféromètres spatiaux LISA et BBO seront susceptibles de détecter les cendres gravitationnelles du Higgs.

La physique fondamentale entrera ainsi bientôt dans une nouvelle ère expérimentale, durant laquelle, nous l'espérons, de nombreux voiles seront enfin levés sur ses mystères les plus intrigants. En ce sens, les réponses tant attendues ne verront certainement le jour qu'en traitant de concert les problématiques de physique des particules et de la cosmologie primordiale.

Publications

Dynamics of non-renormalizable electroweak symmetry breaking

Cédric Delaunay,^{ab} Christophe Grojean^{ab} and James D. Wells^{ac}

^a*CERN, Theory Division, CH 1211, Geneva 23, Switzerland*

^b*Service de Physique Théorique, CEA Saclay,
F91191, Gif-sur-Yvette, France*

^c*Michigan Center for Theoretical Physics (MCTP),
Physics Department, University of Michigan, Ann Arbor, MI 48109, U.S.A.
E-mail: cedric.delaunay@cern.ch, christophe.grojean@cern.ch,
james.wells@cern.ch*

ABSTRACT: We compute the complete one-loop finite temperature effective potential for electroweak symmetry breaking in the Standard Model with a Higgs potential supplemented by higher dimensional operators as generated for instance in composite Higgs and Little Higgs models. We detail the resolution of several issues that arise, such as the cancellation of infrared divergences at higher order and imaginary contributions to the potential. We follow the dynamics of the phase transition, including the nucleation of bubbles and the effects of supercooling. We characterize the region of parameter space consistent with a strong first-order phase transition which may be relevant to electroweak baryogenesis. Finally, we investigate the prospects of present and future gravity wave detectors to see the effects of a strong first-order electroweak phase transition.

KEYWORDS: Thermal Field Theory, Cosmology of Theories beyond the SM, Baryogenesis, Higgs Physics.

Contents

1. Introduction	2
2. One-loop finite temperature effective potential	3
2.1 Zero temperature corrections	5
2.2 Finite temperature corrections	7
2.2.1 Breakdown of perturbation theory and ring diagrams	7
2.2.2 Incorporating the ring corrections	9
2.3 Reality of the quantum potential	11
2.3.1 Imaginary part at $T = 0$	11
2.3.2 Imaginary part at $T \neq 0$	12
3. Dynamics of the electroweak phase transition	12
3.1 The onset of nucleation and EW baryogenesis	13
3.1.1 When does the nucleation start?	13
3.1.2 Saving the baryon-asymmetry from wash-out	15
3.2 Gravitational waves	16
3.2.1 Characterizing the spectrum	17
3.2.2 Observability at interferometry experiments	17
4. Conclusions	19
A. On-shell renormalization of the $T = 0$ potential	20
B. Cancellation of Goldstone boson IR divergences	21
B.1 Review of the SM case	22
B.2 Generalization to the non-renormalizable potential	24
C. Review of $T \neq 0$ one-loop Higgs potential	25
C.1 The one-loop potential from the background field method	25
C.2 Turning on the temperature in the effective potential	27
C.3 Gauge degrees of freedom in Landau gauge	28
C.4 Cancellation of imaginary parts at small temperature	29

1. Introduction

The baryon asymmetry of the universe remains a mystery. Many ideas have been formulated in the literature, yet much uncertainty remains as to how the baryon asymmetry could arise. It is not even clear at what scale the initial asymmetry is produced. The Sakharov conditions for baryogenesis are baryon number violation, C and CP violation, and a departure from equilibrium. The Standard Model (SM) does not exhibit these conditions at nearly the strength required to produce the observed asymmetry given our standard cosmological assumptions, and thus it is expected that we must go beyond the SM in order to explain the asymmetry.

The last Sakharov condition, departure from equilibrium, implies the necessity of a strong first-order phase transition. Since we know that the electroweak symmetry must be broken it is tempting to assume that the corresponding phase transition can satisfy this condition. As noted above, the SM is inadequate, but how far beyond the SM must one go to find the necessary out of equilibrium dynamics? This question has been addressed by a number of authors (e.g., see [1] for studies of the dynamics of the electroweak phase transition in various recent models). In ref. [2] it was shown that if the Higgs potential is augmented merely by a H^6 operator, it can generate a strong first-order electroweak phase transition. As one can intuit, the scale suppressing this non-renormalizable operator must be in the neighborhood of the electroweak scale in order to generate a substantive effect on the phase transition dynamics. A tree-level analysis of this theory was conducted in [2], with some further refinements in [3], and it was concluded that a strong first order phase transition is possible even with a Higgs boson as massive as 200 GeV. Of course, for the presence of this H^6 operator to be compatible with electroweak (EW) precision data, a higher scale should suppress other dimension six operators, in particular those leading to oblique corrections. The analysis of [4] shows that the low energy effective theories of strongly interacting models, where a light composite Higgs emerges as a pseudo-Goldstone boson, have precisely this structure and single out H^6 as one of the dominant dimension six operators,¹ being suppressed by the decay constant of the strong sector, parametrically lighter than the cutoff scale of the model. For a fixed value of the strong decay constant, the compatibility with precision EW data is ensured by pushing the masses of vector resonances above 2.5 TeV [4]. In that case a decay constant as low as 300 GeV would be compatible with precision measurements. Our analysis should also apply to study the dynamics of electroweak symmetry breaking in Little Higgs models, and to the more general cases where the H^6 operator is generated by integrating out a heavy massive scalar field. However, some extra fine-tunings might be needed in that case to evade EW precision data.

In this publication we extend the results of [2, 3] in several ways. First, we re-analyze the theory using the full finite temperature effective (nonrenormalizable) Higgs potential at

¹In the case of a strongly interacting light Higgs boson, the general effective lagrangian includes four operators that are genuinely sensitive to the strong dynamics [4], i.e. suppressed by the strong decay constant and not the masses of the heavy resonances or the cutoff scale of the strong sector. In this context we can concentrate on the H^6 operator since it is the only one that affects the shape of the potential at tree-level, and thus it has significant effects on the dynamics of the phase transition as we shall see.

one-loop. Second, we study the nucleation of broken phase bubbles and consider the effects of supercooling on the electroweak phase transition (EWPT) within this more complete analysis. This is an important dynamical consideration of the phase transition that can in principle have dramatic consequences to when (and if) the phase transition happens. Finally, we investigate whether or not the gravitational waves emitted at the nucleation time can be detected by present and future interferometry experiments, which would provide another way to study the origin of EW symmetry breaking and another way to test the composite nature of the Higgs. We consider each of these points in the following three sections, and then make some concluding remarks.

2. One-loop finite temperature effective potential

Once non-renormalizable interactions are allowed in the theory, as in our case, complete renormalization requires that the infinite set of higher-order operators be considered. However, one is able to truncate the list of needed operators in a perturbative expansion of the inverse cutoff scale. To study the effect of new physics on the Higgs potential in this effective field theory context, it is sufficient to work at the order Λ^{-2} where Λ is the cutoff scale suppressing the effective operators. Higher dimensional operators will be sufficiently irrelevant to our problem and can be ignored.

Our analysis is focussed on operators that affect the Higgs self-interactions. These effective interactions parametrize the new physics responsible for EW symmetry breaking that become fully dynamical at about the scale Λ . Thus they can be used to generically constrain beyond-the-SM physics affecting the Higgs sector. Though EW precision measurements put severe constraints on the set of operators affecting the weak bosons' polarization tensors, the effective Higgs self-interactions are almost completely free parameters since the Higgs sector has not yet been probed directly by experiment. Thus the scale suppressing the operator H^6 we will focus on can be significantly lower than the cutoff scale of the (strongly coupled) model. This is in particular the case of composite Higgs models when the Higgs emerges from a strongly-interacting sector as a light pseudo-Goldstone boson [4]. The scale suppressing the H^6 operator is then f , the decay constant of the strong sector, a quantity 4π smaller than the cutoff scale.

We start with the following classical effective potential for the SM Higgs [5]:

$$V(H) = m^2|H|^2 + \lambda|H|^4 + \kappa|H|^6 \tag{2.1}$$

where $H^T = (\chi_1 + i\chi_2, \varphi + i\chi_3) / \sqrt{2}$ which develops a vacuum expectation value (VEV) equal to $v_0 \simeq 246 \text{ GeV}$. $\kappa^{-1/2}$ is identified at tree level with the decay constant of the strong sector — the details of this identification at one-loop are described later. We choose a vacuum configuration where only the real part of the neutral component has a constant background value: $\varphi = \phi + h$. The physical Higgs boson is h , and we use the traditional background field method [6] to evaluate the quantum potential for ϕ at one-loop. We focus on the main relevant contributions coming from the $SU(2)_L \times U(1)_Y$ gauge bosons, the top quark, and the Higgs and Goldstone scalars.

As we briefly review in appendix C, the quantum potential for the background value up to one-loop order at finite temperature in the Landau gauge (where ghosts decouple) is

$$V_{\text{eff}}(\phi, T) \equiv V_{\text{tree}}(\phi) + \Delta V_1(\phi, T) \quad (2.2)$$

with

$$V_{\text{tree}}(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4 + \frac{\kappa}{8}\phi^6, \quad (2.3)$$

$$\Delta V_1(\phi, T) = \sum_{i=h,\chi,W,Z,t} \frac{n_i T}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \log \left[\vec{k}^2 + \omega_n^2 + m_i^2(\phi) \right] \quad (2.4)$$

where $k_E = (\omega_n, \vec{k})$ is the euclidean loop 4-momentum, ω_n are the Matsubara frequencies in the imaginary time formalism, where $\omega_n = 2n\pi T$ for bosons (periodic on the euclidean time circle) and $\omega_n = (2n+1)\pi T$ for fermions (anti-periodic on the euclidean time circle). The numbers of degrees of freedom for the relevant fields are $n_{\{h,\chi,W,Z,t\}} = \{1, 3, 6, 3, -12\}$. We include the fermion-loop minus sign in the definition of n_t .

Note that in the Landau gauge one must count all three degrees of freedom of each massive vector boson *and* the one degree of freedom of each Goldstone scalar. This may be qualitatively understood by recalling that the χ_i Goldstone fields are independent quantum fluctuations away from the zero-temperature minimum. We present a quantitative argument showing this is not double counting in appendix C.

We obtain the background-dependent masses appearing in (2.4) by expanding the theory about the background value ϕ and reading off the quadratic terms for the various quantum fluctuations. In our dimension-six model the masses are

$$m_h^2(\phi) = m^2 + 3\lambda\phi^2 + \frac{15}{4}\kappa\phi^4, \quad (2.5)$$

$$m_\chi^2(\phi) = m^2 + \lambda\phi^2 + \frac{3}{4}\kappa\phi^4, \quad (2.6)$$

$$m_W^2(\phi) = \frac{g^2}{4}\phi^2, \quad m_Z^2(\phi) = \frac{g^2 + g'^2}{4}\phi^2, \quad m_t^2(\phi) = \frac{y_t^2}{2}\phi^2, \quad (2.7)$$

where g, g' and y_t are the $SU(2)_L$, $U(1)_Y$ and top Yukawa couplings respectively. At the zero-temperature minimum one recovers $m_h^2(v_0) = m^2$ and $m_\chi^2(v_0) = 0$. Note that the expressions for the masses of the weak bosons (from the Higgs kinetic term) and the top quark (from the Yukawa coupling) are unchanged compared to the SM, and (2.7) are written to confirm our conventions.

The one-loop correction (2.4) splits into a zero-temperature part and a T -dependent part [7, 8] which vanishes as $T \rightarrow 0$:

$$\Delta V_1(\phi, T) \equiv \Delta V_1^0(\phi) + \Delta V_1^T(\phi, T) \quad (2.8)$$

with

$$\Delta V_1^0(\phi) = \sum_{i=h,\chi,W,Z,t} \frac{n_i}{2} \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \log [k_E^2 + m_i^2(\phi)] \quad (2.9)$$

$$\Delta V_1^T(\phi, T) = \sum_{i=h,\chi,W,Z,t} \frac{n_i T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \log \left[1 \mp e^{\left(-\sqrt{k^2 + m_i^2(\phi)}/T\right)} \right]. \quad (2.10)$$

$\Delta V_1^0(\phi)$ is precisely the ordinary zero temperature effective potential (note that $\Delta V_1^T(\phi, T) \rightarrow 0$ as $T \rightarrow 0$). The $T = 0$ part, being UV-divergent, will be considered first in order to properly determine the renormalized parameters of the quantum theory. The finite temperature corrections will be treated afterwards.

2.1 Zero temperature corrections

At zero temperature the correction (2.4) reduces to the first term of (2.8),

$$\Delta V_1(\phi, T = 0) \equiv \Delta V_1^0(\phi) = \sum_{i=h,\chi,W,Z,t} n_i \frac{m_i^4(\phi)}{64\pi^2} \left[\log \frac{m_i^2(\phi)}{\mu^2} - C_i - C_{UV} \right] \quad (2.11)$$

which has been regularized in $4 - \epsilon$ dimensions, $C_i = 5/6$ ($3/2$) for gauge bosons (scalars and fermions) and $C_{UV} \equiv \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \log 4\pi + \mathcal{O}(\epsilon)$.

We work in the \overline{MS} scheme to renormalize and evaluate our potential (see the appendix A for an alternative, but ultimately equivalent, on-shell scheme approach). The full one-loop effective potential is

$$V_{\text{eff}}(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4 + \frac{\kappa}{8}\phi^6 + \Delta V_1^0(\phi) \quad (2.12)$$

where the parameters of this potential (m^2, λ, κ) are bare parameters, but an implicit δV_{CT} will cancel their infinite pieces, leaving the finite pieces as the renormalized parameters.

To determine the parameters of the lagrangian in terms of physical quantities, we must impose renormalization conditions at some chosen scale μ_* . The renormalization conditions are

$$V'_{\text{eff}}(\phi = v_0, \mu_*) = 0 \quad (2.13)$$

$$V''_{\text{eff}}(\phi = v_0, \mu_*) = m_h^2 \quad (2.14)$$

$$V'''_{\text{eff}}(\phi = v_0, \mu_*) = \xi \quad (2.15)$$

The left side of each equation is the theory computation, and depends on the parameters of the theory (m^2, λ, κ). The right side of each equation is a measurement (m_h and ξ) or related to a measurement ($V'(v_0) = 0$ is a requirement that the potential is at a minimum which recovers the correct Z boson mass). The VEV depends on the choice of scale as well. We define v_0 to be equal to the VEV of the Higgs field in the Landau gauge at $\mu = m_Z$ such that the \overline{MS} Z mass is recovered. Performing our computations with the latest electroweak precision measurements [9], we find $v_0 = 246.8 \text{ GeV}$ to a good approximation for a Higgs mass in our range of interest ($115 \text{ GeV} < m_h \lesssim 300 \text{ GeV}$). This Higgs VEV is close to the 246.2 GeV value in [10].

We can invert these equations to obtain the theory parameters as a function of measurements:

$$m_*^2 = m^2(m_h^2, \xi, v_0, \mu_*) \quad (2.16)$$

$$\lambda_* = \lambda(m_h^2, \xi, v_0, \mu_*) \quad (2.17)$$

$$\kappa_* = \kappa(m_h^2, \xi, v_0, \mu_*) \quad (2.18)$$

Note, the parameters have scale dependence, and we have defined $m_*^2 \equiv m^2(\mu_*)$, etc.

Up to now we have glossed over some important subtleties. The physical Higgs mass must be defined at $p^2 = m_h^2$, whereas the one-loop effective potential is constructed for $p = 0$. To take account of this, and retain the label m_h^2 for the physical Higgs boson mass, we need to rewrite the renormalization condition as

$$m_h^2 \rightarrow m_h^2 - \Sigma(m_h^2) + \Sigma(0), \tag{2.19}$$

where $\Sigma(p^2)$ is the two-point function of the Higgs boson (numerically, we used the LoopTools software [11] to evaluate this two-point function). This approach has the added benefit that the IR singularity in $V''_{\text{eff}}(v_0)$ as the Goldstone mass goes to zero is canceled by the IR singularity in $\Sigma(0)$. We discuss these IR singularity issues in more detail in the appendix B.

The physical parameter ξ is not a unique choice for how to parametrize the measured tri-Higgs coupling, and we wish to rewrite it in a more convenient manner. First, like the Higgs mass, the Higgs tri-scalar coupling has IR divergences at $p = 0$ when the Goldstone bosons become massless. These IR divergences are also not dangerous because they are matched by the IR divergences of $V'''_{\text{eff}}(v_0)$, and cancel in measured cross-sections. Thus, it is convenient to separate out this IR divergence when parametrizing the tri-Higgs coupling observable: $\xi \equiv \xi_F + \Gamma_{\text{IR}}$, where Γ_{IR} contains IR sensitive Goldstone terms.² Furthermore, since the tri-Higgs coupling ξ in the SM is fixed once the Higgs mass is known, we would like our convention to reflect this manifestly in the decoupling limit of $\kappa \rightarrow 0$,

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \xi \rightarrow \xi^{\text{SM}} \equiv \xi_F^{\text{SM}} + \Gamma_{\text{IR}}^{\text{SM}} \tag{2.20}$$

For finite values of κ , the deviations of ξ_F from ξ_F^{SM} can be defined by convention to be

$$\xi_F \equiv \xi_F^{\text{SM}} + \frac{6v_0^3}{f^2} \tag{2.21}$$

This convention (i.e., the factor of 6) ensures that $\kappa^{-1/2}$ can be identified directly as the decay constant of the strong sector, f , at tree level. Putting these elements together, we can now rewrite the third renormalization condition as

$$V'''_{\text{eff}}(v_0) = \xi \equiv \xi_F^{\text{SM}} + \frac{6v_0^3}{f^2} + \Gamma_{\text{IR}}. \tag{2.22}$$

We emphasize that eq. (2.22) is merely a reparametrization of the tri-Higgs physical observable in terms of the decay constant, f , rather than ξ for the benefits described above, and that ξ_F^{SM} is a computable function of m_h .

Following the prescription provided above, all the parameters of our Higgs potential (m^2, λ, κ) can now be written in terms of physical observables (v_0, m_h, f) . Thus, we are now able to analyze the potential using physical observables as inputs.

²Explicitly, Γ_{IR} is given by $\Gamma_{\text{IR}} = \frac{n_\chi}{32\pi^2} \left[3m_\chi^2(v_0)''m_\chi^2(v_0)' \log m_\chi^2(v_0) + \frac{[m_\chi^2(v_0)']^3}{m_\chi^2(v_0)} \right]$, where $m_\chi^2(\phi) = m_*^2 + \lambda_*\phi^2 + \frac{3}{4}\kappa_*\phi^4$. $\Gamma_{\text{IR}}^{\text{SM}}$ is given by the above expression where the limit $\kappa_* \rightarrow 0$ is taken in $m_\chi^2(\phi)$.

2.2 Finite temperature corrections

From the splitting (2.8) of the full one-loop effective potential into a $T = 0$ part and a $T \neq 0$ part, we get that the latter finite temperature component is:

$$\begin{aligned} \Delta V_1^T(\phi, T) &= \sum_{i=h,\chi,W,Z,t} \frac{n_i T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \log \left[1 \mp e^{-\sqrt{k^2 + m_i^2(\phi)/T^2}} \right] \\ &\equiv \sum_{i=\text{bosons}} \frac{n_i T^4}{2\pi^2} J_b \left(\frac{m_i^2(\phi)}{T^2} \right) + \sum_{i=\text{fermions}} \frac{n_i T^4}{2\pi^2} J_f \left(\frac{m_i^2(\phi)}{T^2} \right) \end{aligned} \quad (2.23)$$

where the upper (lower) sign stands for bosons (fermions). In the high-temperature regime ($T \gg m_i(\phi)$), the J_i function expansions are

$$J_b(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\pi^2}{12}x - \frac{\pi}{6}x^{3/2} - \frac{x^2}{32} \log \frac{x}{a_b} + \mathcal{O} \left(x^3 \log \frac{x^{3/2}}{\text{cst.}} \right) \quad (2.24)$$

$$J_f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{\pi^2}{24}x - \frac{x^2}{32} \log \frac{x}{a_f} + \mathcal{O} \left(x^3 \log \frac{x^{3/2}}{\text{cst.}} \right) \quad (2.25)$$

with $\log a_b \simeq 5.4076$ and $\log a_f \simeq 2.6350$. Note that in [2] only the first terms in (2.24) and (2.25) were retained, which leads to the following approximate thermal one-loop correction:

$$\Delta V_{1,GSW}^T(\phi, T) \equiv \sum_{i=\text{bosons}} \frac{n_i T^2 m_i^2(\phi)}{24} + \sum_{i=\text{fermions}} \frac{n_f T^2 m_i^2(\phi)}{48} \simeq \frac{1}{2} c T^2 \phi^2 + \dots, \quad (2.26)$$

with $c = (4m_h^2/v_0^2 + 3g^2 + g'^2 + 4y_t^2 - 12v_0^2/f^2)/16$.

The dominant contributions gathered in (2.26) are simply a (positive) thermal mass which (meta)-stabilizes the origin of the potential at high temperature. This approximation was sufficient in [2], and further refined in [3], to demonstrate the possibility of a strong first order PT within an effective extension of the SM. Figure (1) shows the discrepancy between the complete thermal correction and the high-temperature expansion around the critical temperature, illustrating the worthwhileness of using the integrals of (2.23) for the more detailed analysis.

2.2.1 Breakdown of perturbation theory and ring diagrams

In thermal quantum field theory, the traditional perturbative expansion in terms of small coupling constants breaks down due to IR-divergences (inherent in massless models) generated by long-range fluctuations appearing as soon as one moves to finite temperature [12]. For instance, taking massless $\lambda\phi^4$ theory at finite temperature, one can show that the self-energy, which goes like λ at first order, receives a subleading $\lambda^{3/2}$ correction and not λ^2 as one would expect [13]. For our case, in the high-temperature expansion, or equivalently small mass expansion, of the thermal bosonic corrections (2.24), we also see a sign of this perturbation theory breakdown through the emergence of a monomial term of order $3/2$. The main consequence is that, as it stands, we cannot trust the completeness of the one-loop result (2.23) because there are some higher-loop corrections of the same order [7], as

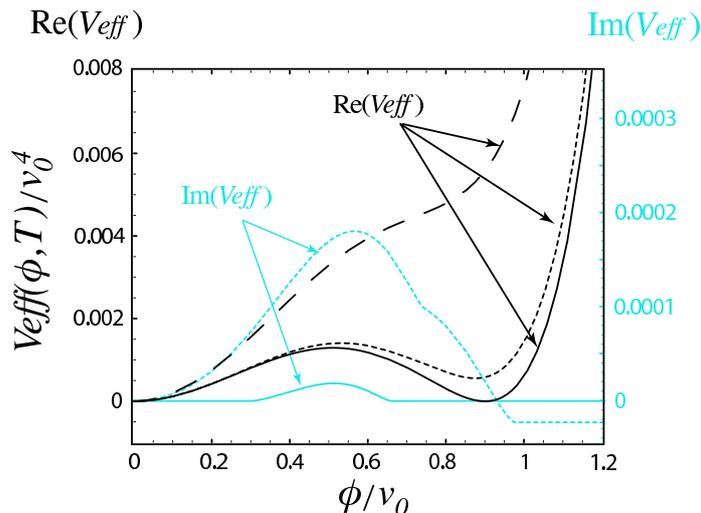


Figure 1: Different potentials close to the critical temperature for $m_h = 115$ GeV and $f = 620$ GeV (f is the decay constant of the strong sector the Higgs emerges from). The dashed curve is the potential of [2] which includes only the thermal mass term of the Higgs, while the solid and dotted ones represent the full one-loop potential with (solid) and without (dotted) the ring diagram contributions. In blue, we have also plotted the imaginary part of the full one-loop potential with the ring contributions (solid blue) as well as the imaginary part of the ring contributions alone (dashed blue). This illustrates the cancelation of the large imaginary parts between the ring and the one-loop contributions, while there still exists an additional and smaller imaginary part for some values of ϕ due to a negative quartic coupling (see the discussion in section 2.3.2 for details). An imaginary part of the potential can be interpreted as a decay rate of some quantum states of the scalar fields to some others but the imaginary part of the full potential is always tiny compared to the real part around the transition temperature and the system is stable enough throughout the entire time of the transition.

if the effect of temperature is to “dilute” the one-loop correction to some multi-loop orders in the IR. Furthermore the leading part of these multi-loop corrections is all contained in the so-called ring (or daisy) diagrams shown in figure (2). They are N -loop diagrams where $N - 1$ of them are “ring attached” to a main one. Since this “loop-dilution” is a finite temperature effect, the ring diagrams only need to be resummed in the IR-limit of vanishing momenta running in their petals [7]. It is also well-known that they can be taken into account by using propagators resummed in the IR [14]. By solving a Dyson-like equation, this turns out to simply shift the bosonic masses by a T -dependent constant as $m_b^2(\phi) \rightarrow m_b^2(\phi) + \Pi_b(T)$, where $\Pi_b(T)$ is the self-energy of the (bosonic) field b in the IR limit, $\omega = \vec{p} = 0$, known as a Debye mass ($\Pi_b(T)$ is labeled as $\Pi_b(0)$ in [14]).

The higher-loop ring diagrams are needed due to IR divergences (i.e., $m \lesssim T$). On the other hand, the one-loop result is trustworthy for massive (i.e., $m \gtrsim T$) particles, because the long-range fluctuations arising at finite temperature will never hit an IR mass-pole in such cases. Hence the ring diagrams will only contribute significantly at high-temperature ($T/m \rightarrow \infty$) where the particles can be approximated as nearly massless. Also, this

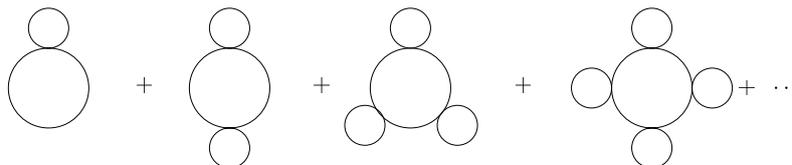


Figure 2: Some generic examples of ring diagrams where each solid line may represent either a scalar, a fermion or a gauge field. The small loops correspond to thermal loops in the IR limit. They are all separately IR divergent, but their sum is IR finite.

allows us to understand why only the bosonic degrees of freedom feel the breakdown of the perturbative expansion.³ The reason is that only bosonic fields have a vanishing Matsubara frequency, recalling that ω_n equals $2\pi nT$ for bosons and $(2n + 1)\pi T$ for fermions. Only this particular (zero-)mode will behave as a massless degree of freedom and generate IR-divergences at high-temperature, while the other (non zero-)modes ω_n act as a mass of order T and thus lead to negligible contributions. Therefore the fermionic propagators need not be resummed, because fermions do not have pole-mass in the IR.

Applying the techniques of [14] to our theory, we compute the finite temperature mass shifts (Debye masses) that are needed in the ring diagram resummation:

$$\Pi_{h,\chi}(T) = \frac{T^2}{4v_0^2} (m_h^2 + 2m_W^2 + m_Z^2 + 2m_t^2) - \frac{3T^2}{4} \frac{v_0^2}{f^2} \tag{2.27}$$

$$\Pi_W(T) = \frac{22}{3} \frac{m_W^2}{v_0^2} T^2 \tag{2.28}$$

$$\Pi_Z(T) = \frac{22}{3} \frac{(m_Z^2 - m_W^2)}{v_0^2} T^2 - m_W^2(\phi) \tag{2.29}$$

$$\Pi_\gamma(T) = m_W^2(\phi) + \frac{22}{3} \frac{m_W^2}{v_0^2} T^2. \tag{2.30}$$

Note that these $\Pi(T)$'s are computed in the high-temperature limit of the unbroken phase which is justified by the ring diagrams being irrelevant for $T \lesssim m_i(\phi)$ as we have discussed. At high temperature the photon and Z are not mass eigenstates, but one can treat them as mass eigenstates in this computation with the above-given Debye masses and obtain the correct resummed potential.

2.2.2 Incorporating the ring corrections

The traditional way the ring diagrams are implemented in the literature consists in shifting all the Matsubara modes for the bosonic fields. This is the so-called self-consistent

³In the gauge sector, only the longitudinal polarizations demonstrate this same breakdown of perturbation theory [14].

method [15] where the potential (2.4) is replaced by

$$\Delta V_{1+ring}^{self-con.}(\phi, T) = \sum_{i=h,\chi,W,Z,\gamma,t} \frac{n_i T}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \log \left[\vec{k}^2 + \omega_n^2 + m_i^2(\phi) + \Pi_i(T) \right]. \quad (2.31)$$

The thermal shift of the gauge masses only for the longitudinal polarizations is understood, and $\Pi_t(T)$ is simply zero. However, when applying this approach the UV divergent part becomes T -dependent through the $\Pi(T)$ and requires T -dependent counter-terms to be made finite. Indeed after doing to (2.31) the same splitting procedure we did to get (2.8), and after dimensionally regularizing the UV-divergent part, we get the following result:

$$\Delta V_{1+ring}^{0,self-con.} = \sum_{i=h,\chi,W,Z,t} n_i \frac{(m_i^2(\phi) + \Pi_i(T))^2}{64\pi^2} \left[\log \frac{m_i^2(\phi) + \Pi_i(T)}{\mu^2} - C_i - C_{UV} \right] \quad (2.32)$$

where the C_{UV} factor depends on T . This standard technique clashes with physical intuition since it would mean that the UV behavior of the theory depends on the IR dynamics. Although this mixing is not introducing any calculational errors to our working approximation, one can avoid it by simply shifting only the $\omega_n = 0$ Matsubara modes which carry the leading contribution from the ring diagrams relevant at one-loop order.

As argued above, the dilution of the one-loop correction happens only for massless modes. Hence all the corrections we seek within the ring diagrams are gathered when resumming only the zero-mode of the propagator in the IR. Doing so, (2.4) is to be replaced by

$$\begin{aligned} \Delta V_{1+ring}(\phi, T) &= \sum_{i=h,\chi,W,Z,\gamma,t} \frac{n_i T}{2} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \log \left[\vec{k}^2 + \omega_n^2 + m_i^2(\phi) \right] \right. \\ &\quad \left. + \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \log \left[\vec{k}^2 + m_i^2(\phi) + \Pi_i(T) \right] \right\} \quad (2.33) \end{aligned}$$

$$\equiv \Delta V_1(\phi, T) + \Delta V_{ring}(\phi, T) \quad (2.34)$$

where the prime means that the zero modes are excluded from the sum. We can easily extract the ring part from the last expression and we find

$$\begin{aligned} \Delta V_{ring}(\phi, T) &= \sum_{i=h,\chi,W,Z,\gamma} \frac{\bar{n}_i T}{4\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \log \left[1 + \frac{\Pi_i(T)}{k^2 + m_i^2(\phi)} \right] \\ &= \sum_{i=h,\chi,W,Z,\gamma} \frac{\bar{n}_i T}{12\pi} \left[m_i^3(\phi) - (m_i^2(\phi) + \Pi_i(T))^{3/2} \right], \quad (2.35) \end{aligned}$$

where an irrelevant (infinite) constant has been ignored in the second line, and $\bar{n}_{\{h,\chi,W,Z,\gamma\}} = \{1, 3, 2, 1, 1\}$. Notice that ΔV_{ring} includes a monomial of order 3/2 which proves a posteriori the existence of a perturbation theory breakdown in evaluating the Higgs potential. Furthermore, these extra corrections modify the cubic term in $m_i(\phi)$,

which partly controls⁴ the strength of the first order phase transition. Thus, the addition of these terms is critical for our analysis of the electroweak phase transition.

In summary, the full T -dependent renormalized effective potential at one-loop is

$$\begin{aligned}
 V_{\text{eff}}(\phi) = & \frac{m_*^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda_*}{4}\phi^4 + \frac{\kappa_*}{8}\phi^6 + \sum_{i=h,\chi,W,Z,t} n_i \frac{m_i^4(\phi)}{64\pi^2} \left[\log \frac{m_i^2(\phi)}{\mu_*^2} - C_i \right] \\
 & + \sum_{i=\text{bosons}} \frac{n_i T^4}{2\pi^2} J_b \left(\frac{m_i^2(\phi)}{T^2} \right) + \sum_{i=\text{fermions}} \frac{n_i T^4}{2\pi^2} J_f \left(\frac{m_i^2(\phi)}{T^2} \right) \\
 & + \sum_{i=h,\chi,W,Z,\gamma} \frac{\bar{n}_i T}{12\pi} \left[m_i^3(\phi) - (m_i^2(\phi) + \Pi_i(T))^{3/2} \right]
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

where definitions of all terms are given above. This is the potential we analyze for the remainder of the article.

2.3 Reality of the quantum potential

As the scalar masses become negative, the various contributions we obtained for the quantum potential develop some imaginary parts which we discuss below for both the $T = 0$ and $T \neq 0$ cases.

2.3.1 Imaginary part at $T = 0$

In the zero-temperature limit, the logarithm of (2.36) leads to the following scheme-independent imaginary part⁵

$$\Im m [\Delta V_1^0(\phi)] = \sum_{i=h,\chi} \Theta(-m_i^2(\phi)) \frac{n_i |m_i(\phi)|^4}{64\pi} \tag{2.37}$$

where $\Theta(-m_i^2(\phi))$ is the Heaviside function which equals 1 when the field i is tachyonic, and zero otherwise. The Higgs boson can obtain a negative mass squared for some values of its VEV, originating from the fact that the classical potential is not convex everywhere. Indeed, depending on the cutoff value, either the origin is unstable ($f^2 > 3v_0^4/2m_h^2$) or a potential barrier separates two local minima ($f^2 < 3v_0^4/2m_h^2$), both of which lead to concave regions of the effective potential as a function of the VEV. A similar analysis shows that the Goldstone boson can become tachyonic for some values of the VEV as well, leading to another contribution to the imaginary part of the effective potential. However, we shall see shortly that the imaginary part (2.37) exactly cancels out with another contribution coming from the finite temperature corrections for the temperature range we are interested in for the phase transition.

⁴The negative quartic coupling, of course, is another source of a potential barrier for the first-order phase transition.

⁵On the principal sheet, the imaginary part of the logarithm is taken to satisfy $-\pi < \Im m \log \leq \pi$.

2.3.2 Imaginary part at $T \neq 0$

At finite temperature both the integrals of (2.23) and the ring contributions (2.35) are spoiled by imaginary parts when scalar fields are tachyons. In the high-temperature limit, the imaginary part of (2.23) is (see (2.24)):

$$\Im m [\Delta V_1^T(\phi, T)] \xrightarrow{\frac{|m_i(\phi)|}{T} \rightarrow 0} \sum_{i=h,\chi} \Theta(-m_i^2(\phi)) n_i \left[-\frac{|m_i(\phi)|^4}{64\pi} + \frac{|m_i(\phi)|^3 T}{12\pi} \right]. \quad (2.38)$$

The first term cancels the imaginary part from the logarithm of the $T = 0$ potential correction (2.37), while the second is only compensated when the ring diagrams are added, since their imaginary part is given by

$$\Im m [\Delta V_{\text{ring}}(\phi, T)] = - \sum_{i=h,\chi} \Theta(-m_i^2(\phi)) \frac{n_i T}{12\pi} |m_i(\phi)|^3 \quad (2.39)$$

as long as the temperature satisfies $m_i^2(\phi) + \Pi_i(T) > 0$ for all ϕ . Although somewhat more complicated algebraically to show (see appendix C.4 for details), this cancellation occurs also for smaller temperatures of order $T \sim |m_i(\phi)|$.

Nevertheless and despite this cancellation, the potential is not everywhere real because for some values of T and ϕ^2 , $m_i^2(\phi) + \Pi_i(T) < 0$ and the second term of the ring correction (2.35) becomes imaginary. In the SM this term does not lead to an imaginary part once the temperature (meta)stabilizes the origin since the SM scalars could only become tachyonic for a negative quadratic coupling in the Higgs potential. Thus, the SM potential is real as long as the origin is (meta)stable. On the other hand, with the additional H^6 piece in the potential, the scalar masses can be negative also through a negative quartic coupling, allowing this additional imaginary part to the potential at temperature around the critical temperature.

An imaginary part of the potential can be interpreted as a decay rate of some quantum states of the scalar fields to some others [16]. Thus, one can rely on the real part of the potential as long as its imaginary part remains small enough to consider the field stable during the phase transition, in which case it can be discarded. We checked that the imaginary part of the one-loop potential is always tiny compared to the real part around the transition temperature, thanks to the previously demonstrated cancellations of large imaginary pieces. Thus, we conclude that the system is stable enough throughout the entire time of the transition, and that its dynamics is driven by the real part of the one-loop potential we computed.

3. Dynamics of the electroweak phase transition

Now that we have the formalism developed for our analysis of the finite temperature Higgs potential at one loop, we are in the position to study the dynamics of the phase transition. One of our first considerations must be the analysis of when (and if) the phase transition actually occurs. This is not simply a matter of determining the temperature at which the symmetry breaking minimum becomes the global minimum. An analysis of the energetics

of bubble formation must be undertaken for a more complete picture. The nucleated bubbles can then undergo collisions and the surrounding plasma experience turbulence, which generate gravity waves that could possibly be detected in experiments. We discuss these issues in this section.

Throughout this section, we report our numerical results of various relevant quantities as contour plots that scan the allowed region of the parameter space (m_h, f) . We recall that m_h is the physical Higgs mass while f is the decay constant of the strong sector (or more generally the energy scale suppressing the H^6 operator) physically defined through the triple Higgs self-interaction as defined in the previous sections, and we work in the \overline{MS} scheme for $\mu = m_Z$. The bounds delimiting the region of first-order phase transition are both numerically computed using the complete one-loop potential at finite temperature. The lower one is set by requiring that EW symmetry is broken at $T = 0$ and restores at high temperature, while above the upper bound the Higgs vacuum is likely to undergo a second-order phase transition or a smooth crossover. In general, determining the latter is not an easy task as it requires a non-perturbative analysis of the effective potential when the transition is not strongly first-order [17]. Indeed, the phase transition always appears first-order at the perturbative level, even though very weakly. Moreover, as f increases one tends to recover the SM potential, which leads non-perturbatively to a continuous crossover, instead of a weak first-order transition at one-loop, for $m_h \gtrsim 80$ GeV [18]. We estimated the upper bound by considering that as soon as the phase transition is as weak as in the SM for $m_h = 80$ GeV, it is likely to be a crossover.

3.1 The onset of nucleation and EW baryogenesis

The effective potential ensures the presence of a potential barrier at finite temperature which is a necessary ingredient to have a first-order phase transition. It proceeds by spontaneous nucleation of non-vanishing VEV bubbles into a surrounding symmetric metastable vacuum. As soon as the universe cools down to a critical temperature T_c the symmetry-breaking vacuum becomes energetically favorable and then thermal fluctuations allow the bubbles to form. However, the temperature of the transition is not necessarily close to T_c . Once created, a bubble needs some free energy, which is unavailable at T_c , in order to maintain its interface with the symmetric phase surrounding it. It turns out that for T just below T_c it is often the case that the bubbles are too small and surface tension makes them collapse and disappear. Hence the phase transition effectively starts at a smaller temperature when enough free energy is available to permit the nucleation of sufficiently large bubbles that can grow and convert the entire universe into the broken phase. This supercooling phenomenon can substantially delay the phase transition and thus modify the spectrum of gravity waves significantly, as we shall discuss shortly (important supercooling effects were also observed in some of the analyses of ref. [1])

3.1.1 When does the nucleation start?

Although the probability to tunnel via the excitation of SU(2) instantons is very tiny, about $\exp(-\mathcal{O}(100))$, the decay of the false vacuum can nonetheless proceed through thermal fluctuations which help to overcome the potential barrier. The rate per unit of space-time

for this process is given in the semi-classical WKB approximation by $\Gamma \sim e^{-S_E}$ where S_E is the euclidean action for the Higgs VEV evaluated on the so-called bounce solution of the euclidean equation of motion [19]. For temperatures much higher than their inverse radius, the bubbles overlap in euclidean time and feel the IR breaking of Lorentz symmetry [20, 21], in which case the bounce⁶ solution is $O(3)$ -symmetric and is the solution of

$$\frac{d^2\phi_b}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi_b}{dr} + \frac{\partial V(\phi_b, T)}{\partial \phi_b} = 0, \quad (3.1)$$

subject to the boundary conditions

$$\phi_b(r \rightarrow \infty) = 0 \quad \text{and} \quad \frac{d\phi_b(r=0)}{dr} = 0. \quad (3.2)$$

The bounce solution physically represents the Higgs VEV profile of a static unstable (either expanding or shrinking) bubble, and r measures the distance from the bubble center. For such a static solution of the equation of motion, the action factorizes as $S_E = S_3/T$, with

$$S_3 = \int dr 4\pi r^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_b}{dr} \right)^2 + V(\phi_b, T) \right]. \quad (3.3)$$

Moreover for small temperatures of the order of the bubble size, we replace the $O(3)$ bounce for the $O(4)$ -symmetric solution which minimizes the action when the breaking of Lorentz symmetry is not significant. Finally we use the traditional overshooting/undershooting method to numerically solve the equation of motion.

There is a supercooling effect that can delay the onset of the first order phase transition to temperatures much smaller than 100 GeV. A first order phase transition can only proceed in the presence of a potential barrier separating the two vacua and the nucleation could potentially start at a temperature T_n far below that of T_c . This is especially likely in the case where the barrier persists down to $T = 0$. One can consider that the nucleation starts at the time when the probability of creating at least one bubble per horizon volume is of order one [31]. This condition guarantees the percolation of bubbles in the early universe and translates into the following criterion for determining the nucleation temperature [22]:

$$\frac{S_3(T_n)}{T_n} \sim -4 \log \left(\frac{T_n}{m_{Pl}} \right) \implies \frac{S_3(T_n)}{T_n} \sim \mathcal{O}(130 - 140) \text{ for } T_n \sim 100 \text{ GeV}. \quad (3.4)$$

where $m_{Pl} \equiv M_{Pl}/\sqrt{8\pi}$ is the reduced Planck mass.

The contours of constant nucleation temperature are reported in the left panel of figure 3. We point out that there exists a region (painted red in figure 3) with low f and $m_h \lesssim 225$ GeV such that the criterion eq. (3.4) is not satisfied, meaning that the expansion of the universe does not permit the bubbles to percolate. Thus the nucleation never starts and the universe remains trapped in a symmetric vacuum. In addition, the right panel of figure 3 helps one to realize further the numerical significance of the supercooling effect

⁶Strictly speaking, it is no longer a bounce but rather a critical bubble as it corresponds to a static field configuration.

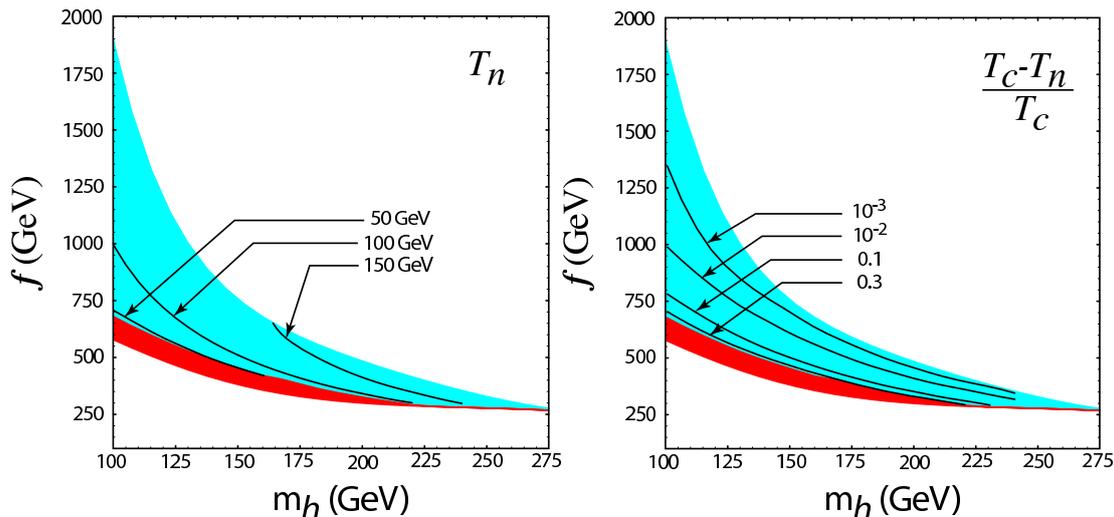


Figure 3: The left panel of this figure shows contours of the nucleation temperature T_n in the allowed region for an EW symmetry-breaking first order phase transition (f is the decay constant of the strong sector the Higgs emerges from, and m_h is the physical Higgs mass). Below the red lower bound the EW symmetry remains intact in the vacuum while above the blue upper one the phase transition is second order or not even occurs. Within the red band, the universe is trapped in a metastable vacuum since no expanding bubble is nucleated and the transition never proceeds. The contours are from left to right for $T_n = \{50, 100, 150\}$ GeV. The right panel of this figure shows contours of the relative deviation of the nucleation temperature from the critical one: $\epsilon_T = (T_c - T_n)/T_c$. This measures the degree to which the phase transition is delayed by the overcooling effect. The contours are, from above, for $\epsilon_T = \{10^{-3}, 10^{-2}, 0.1, 0.3\}$.

by plotting the deviation of the nucleation temperature T_n from T_c . We see that, for large values of f , the deviation is not significant since the potential barrier disappears at a temperature not much less than the critical one. On the another hand, as soon as one lowers f , the barrier persists to lower and lower temperatures, making the supercooling delay of the phase transition important. Thus the knowledge of the nucleation temperature becomes necessary to clearly understand the dynamics of the phase transition in this region.

3.1.2 Saving the baryon-asymmetry from wash-out

Understanding the dynamics of the phase transition is a worthy endeavor on its own; however, one of the key reasons for understanding the nature of the EW phase transition is to determine if a baryon asymmetry can be produced and survive the process. Calculations in the previous sections enable us to refine some of the results of [2], where the possibility of a strong first order phase transition was first demonstrated. The strength of the transition is characterized by the crucial ratio $\langle\phi(T)\rangle/T$, which controls the sphaleron production rate in the broken phase. For $\langle\phi(T)\rangle/T > 1$, the transition is strongly first-order as any baryon-asymmetry produced at that time is ensured not to be washed out by the $B + L$ violating sphaleron processes.

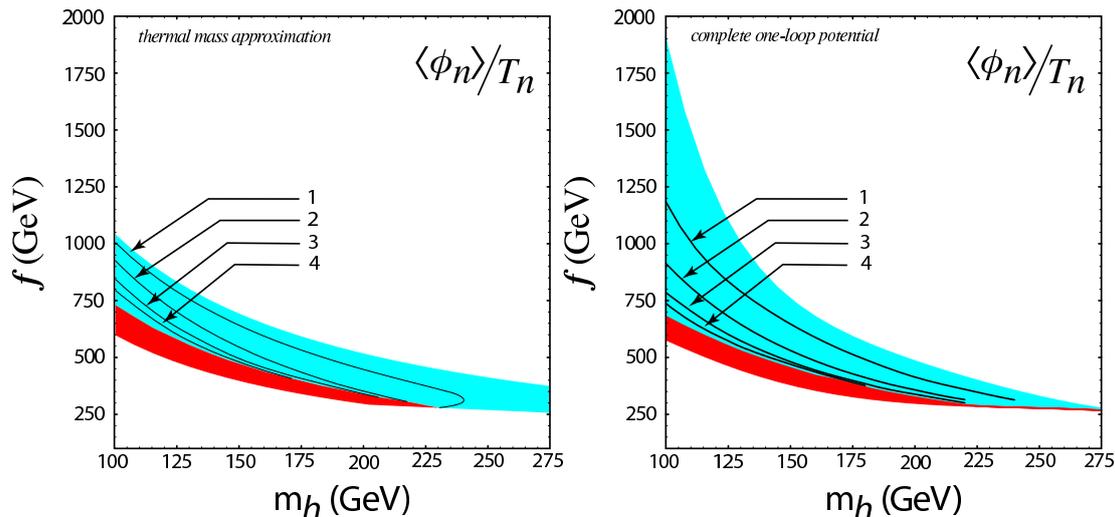


Figure 4: Plot of the ratio $\xi_n = \langle\phi(T_n)\rangle/T_n$ characterizing the strength of the phase transition using the thermal mass approximation of [2] (left) and the complete one-loop potential (right). The contours are for $\xi_n = \{1, 2, 3, 4\}$ from top to bottom. f is the decay constant of the strong sector the Higgs emerges from, and m_h is the physical Higgs mass.

At present we are ready to compute $\langle\phi(T)\rangle/T$ at the nucleation temperature in the cases where only the thermal masses are included and where the complete one-loop potential is used. This allows us to compare the effect on the wash-out criterion of the supercooling of the phase transition and the usefulness of the one-loop potential. The contour plots of figure (4) show the common fact that the lower the value of f , the stronger the phase transition for a fixed Higgs mass. The qualitative result of considering the temperature delay from T_c to $T = T_n$ is that for a given point in the parameters plane, the phase transition is generically stronger at T_n . Indeed not only is the nucleation temperature potentially much smaller than T_c , but also the value of the Higgs VEV grows as the universe cools down.

Another important result for the baryon-asymmetry of the universe, is that it can be saved from the wash-out through sphaleron processes, namely $\langle\phi(T)\rangle/T > 1$, for a not-so-small value of f . Indeed, in order to allow baryogenesis during the EWPT in the approximation of [2] some fine-tuning might be required in some approaches without any particular dynamics to make the suppression scale of the dimension six operator in the Higgs sector relatively smaller than the TeV scale required in the gauge sector to pass EW precision measurements. But the full one-loop potential tells us that for values of the Higgs mass above the current experimental bound f can be larger — as large as 1.2 TeV — and the baryon-asymmetry can still freeze out.

3.2 Gravitational waves

As a bubble expands a part of the latent heat released accelerates the bubble wall and introduces turbulent motions in the hot plasma. After bubbles collide, spherical symmetry

is broken. This enables gravitational radiation to be emitted. The turbulence of the plasma after bubble collisions is another important source of gravitational radiation (see [23] for an introduction to the physics of gravity waves). In the following, we characterize the spectrum of gravitational radiation that one can expect from the first order phase transition we have detailed in this article. We compare these results with the sensitivities of current gravity wave detectors, and of proposed gravity wave detectors of the future.

3.2.1 Characterizing the spectrum

Previous studies [24–26] of the gravity wave spectrum culminate in showing that it can be fully characterized by the knowledge of only two parameters derived ultimately from the effective potential.⁷ The first one is the rate of time-variation of the nucleation rate, named β . Its inverse gives the duration of the phase transition, therefore defining the characteristic frequency of the spectrum. The second important parameter, α , measures the ratio of the latent heat to the energy density of the dominant kind, which is radiation at the epoch considered: $\alpha \equiv \epsilon/\rho_{\text{rad}}$. They are both numerically computed from the effective action S_3/T at the nucleation temperature as follows. The time-dependence of the rate of nucleation is mainly concentrated in the effective action and β is defined by $\beta \equiv -dS_E/dt|_{t_n}$. Using the adiabaticity of the universe one obtain the following dimensionless parameter:

$$\frac{\beta}{H_n} = T_n \frac{d}{dT} \left(\frac{S_3}{T} \right) \Big|_{T_n}, \quad (3.5)$$

where H_n is the expansion rate when nucleation starts. The latent energy is the sum of the amount of energy ΔV separating the metastable vacuum to the stable one and the entropy variation ΔS between these two phases. Hence one has:

$$\epsilon = -\Delta V - T\Delta S = \left[-\Delta V + T \frac{\partial V}{\partial T} \right] \Big|_{T_n}. \quad (3.6)$$

The left and right panels of figure 5 show contours of constant α and β/H_n , respectively, at the time of nucleation.

3.2.2 Observability at interferometry experiments

Future interferometry experiments could offer us a way to observe the EWPT. A detailed analysis of the potential to directly see gravitational waves from the first-order phase transition can be compared with the sensitivity expected from the correlated third generation LIGO detector on earth and the LISA and BBO detectors in space. A general analysis that we utilize has been presented in [22], where both bubble collisions and turbulent motions

⁷This conclusion is valid under the assumption of detonation. However, in practice the bubble expand in a thermal bath and not in the vacuum and friction effects taking place in the plasma slow down the bubble velocity. Therefore, it might be important to consider the deflagration regime as in ref. [27]. When the phase transition is weakly first order, we obtained under the approximations of [28] a wall velocity lower than the speed of sound. However, in the interesting region where the phase transition gets stronger, we approach the detonation regime and the approximations of [28] have to be refined to accurately compute the wall velocity.

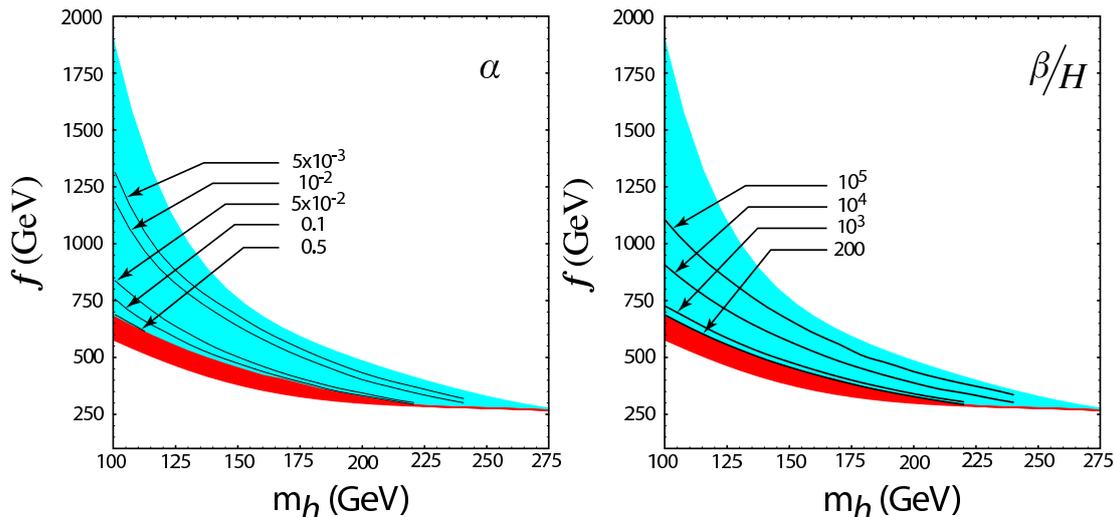


Figure 5: The panel on the left contains contours of the latent heat $\alpha = \{5 \cdot 10^{-3}, 10^{-2}, 5 \cdot 10^{-2}, 0.1, 0.5\}$ from top to bottom. The panel on the right draws contours of the parameter, β/H_n , measuring the duration of the phase transition. From above one has $\beta/H_n = \{10^5, 10^4, 10^3, 200\}$. f is the decay constant of the strong sector the Higgs emerges from, and m_h is the physical Higgs mass.

were considered. Qualitatively, gravity-wave detectors will give us a better chance to observe the phase transition today if the latent heat energy released is large and the emission lasts a long time. This can be understood easily by recalling that the power spectrum is given by the square of the quadrupole moment of the source which in turns scales as the kinetic energy over the time of emission [29]. In other words, typically α has to be $\mathcal{O}(1)$ and β/H as small as $\mathcal{O}(100)$ to get a sufficiently high energy density $\Omega h^2 \gtrsim 10^{-10}$.

Relying on our effective (nonrenormalizable) potential approach, we find that generically the dynamics of the first order EWPT beyond the SM generate too weak gravity waves to observe except for a tiny region of the parameter space. Namely, by looking closely at figures 5 one can see that for a Higgs mass slightly above the LEP2 bound, $m_h \gtrsim 115$ GeV, and a relatively low scale, $f \sim 650$ GeV, we get at best $\alpha \sim 0.5$ and $\beta/H \sim 100$. The corresponding nucleation temperature in this region is about 50 GeV, according to Fig 3. For such a temperature scale, only LISA and BBO will be sensitive to the emitted spectrum of gravity waves, according to the results presented in figures 3 and 4 of [22]. Its detectability is probably beyond the capability of LISA. This result is in qualitative agreement with the results of [30]. Indeed LISA requires at least values of $\alpha > 0.6$ for $\beta/H \sim 100$ in order to see the characteristic peak from turbulence while the collision peak starts to be probed for $\alpha > 0.8$. On the other hand, BBO should be able to observe both peaks if α is around 0.3 (keeping $\beta/H \sim 100$).

Thus it seems that one will have to wait until the launching of the second generation of space-based interferometers to really study the EWPT through gravity wave detectors within this framework. Moreover this would be possible only in the maximizing case where

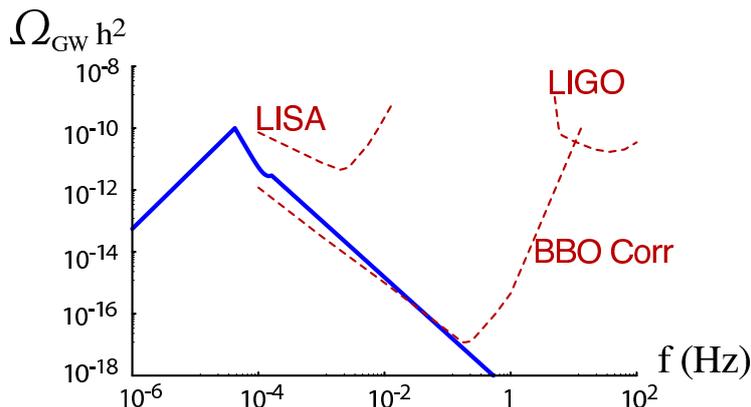


Figure 6: Example of gravity wave spectrum produced during the EW phase transition both by turbulence (left peak) and collision effects (right peak slightly emerging from the tail of the turbulence spectrum). This plot is for $m_h = 115$ GeV and $f \simeq 600$ GeV where $\alpha = 0.51$, $\beta/H = 89$ and $T_n = 39$ GeV. Note that suitable values of α , β/H to get a strong signal always imply a small nucleation temperature (< 100 GeV) due to important overcooling effects that drag the peak below the lower bound of the space-based detectors frequency band ($\simeq 10^{-4}$ Hz), making the gravity waves delicate to observe.

the Higgs mass is close to its current experimental bound and the composite scale of the Higgs is relatively low.

4. Conclusions

In this article we have reported on a complete computation of the one-loop finite temperature effective potential in models where the Higgs boson is composite and emerges as a light pseudo-Goldstone boson of a strongly interacting sector (our analysis could also be relevant for studying the dynamics of electroweak symmetry breaking in Little Higgs theories). These models are characterized by higher dimensional operators in the Higgs sector suppressed by the strong decay constant, f , a scale parametrically smaller than the cutoff of the strong sector. Interestingly, by following the details of the phase transition dynamics, the parameter space of a strong first-order phase transition has actually grown for large value of f , and shrunk for small value of f cutoff, compared to the tree-level result found in [2]. It has grown at the higher end by going beyond the high temperature approximation. The parameter space has shrunk on the lower end, since we found that bubbles cannot be nucleated well enough there to overcome the effects of an expanding universe. We encountered some subtleties along the way, including infrared singularities and imaginary components to the potential, that were resolved.

It was also necessary to compute the details of the phase transition dynamics in order to investigate the possibility of detecting gravitational radiation from the first order phase transition occurring in the early universe. After bubbles are nucleated, their collisions and subsequent turbulence in the plasma give rise to gravity waves. In the assumption of a detonation regime, the effects depend on only two parameters, the latent heat α and the

duration of the phase transition β^{-1} , both of which can be determined by solving the bounce equation, and analyzing the full one-loop finite temperature effective potential at the scale of the nucleation temperature. Although LIGO and LISA are likely not sensitive to these effects, we found that BBO, a planned second generation experiment of space-based interferometers, could be sensitive to the gravity waves produced during this phase transition.

Acknowledgments

We thank J.R. Espinosa, S. Martin, M. Perelstein, M. Serone and G. Servant for helpful conversations. We also want to thank T. Hahn for his help with the LoopTools software. This work is supported in part by the Department of Energy and the Michigan Center for Theoretical Physics (MCTP), by the RTN European Program MRTN-CT-2004-503369, by the EU FP6 Marie Curie RTN “UniverseNet” (MRTN-CT-2006-035863) and by the CNRS/USA exchange grant 3503.

A. On-shell renormalization of the $T = 0$ potential

The on-shell scheme identifies lagrangian parameters as physical parameter (i.e., observables). It is the scheme employed by [31], although we augment that discussion by describing a self-consistent approach with higher order operators, and describe the details of how IR divergences from massless Goldstone bosons cancel.

Renormalizing our theory in the on-shell scheme is most convenient when we begin by writing the full potential in the following form:

$$V_{\text{tree}}(\phi) = \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v_0^2)^2 + \frac{\kappa}{8} (\phi^2 - v_0^2)^3 + \Delta V_1^0(\phi) + \frac{\delta c_2}{2} \phi^2 + \frac{\delta c_4}{4} \phi^4 + \frac{\delta c_6}{6} \phi^6 \quad (\text{A.1})$$

where

$$\Delta V_1(\phi, T = 0) \equiv \Delta V_1^0(\phi) = \sum_{i=h,\chi,W,Z,t} \frac{n_i}{2} \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \log [k_E^2 + m_i^2(\phi)] \quad (\text{A.2})$$

$$= \sum_{i=h,\chi,W,Z,t} n_i \frac{m_i^4(\phi)}{64\pi^2} \left[\log \frac{m_i^2(\phi)}{\mu^2} - C_i - C_{UV} \right] \quad (\text{A.3})$$

which has been regularized in $4-\epsilon$ dimensions, $C_i = 5/6$ ($3/2$) for gauge bosons (scalars and fermions) and $C_{UV} \equiv \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \log 4\pi + \mathcal{O}(\epsilon)$. In this parametrization of the tree-potential, the scalar ϕ -dependent masses are: $m_h^2(\phi) = \lambda(3\phi^2 - v_0^2) + 3\kappa(5\phi^4 - 6v_0^2\phi^2 + v_0^4)/4$ and $m_\chi^2(\phi) = \lambda(\phi^2 - v_0^2) + 3\kappa(\phi^2 - v_0^2)^2/4$. The on-shell scheme imposes that v_0 is the vacuum expectation of the Higgs field, $\lambda \equiv \frac{m_h^2}{2v_0^2}$, and $\kappa \equiv 1/f^2$. The precise meaning of f^2 is defined below.

The counter terms, δc_i , are determined by the renormalization conditions:

$$\left. \frac{dV_{\text{eff}}(\phi, T=0)}{d\phi} \right|_{\phi=v_0} = 0, \tag{A.4}$$

$$\left. \frac{d^2V_{\text{eff}}(\phi, T=0)}{d\phi^2} \right|_{\phi=v_0} = m_h^2 - \Delta\Sigma, \tag{A.5}$$

$$\left. \frac{d^3V_{\text{eff}}(\phi, T=0)}{d\phi^3} \right|_{\phi=v_0} = \xi_{\text{phys}} - \Delta\Gamma \tag{A.6}$$

where $\Delta\Sigma = \Sigma(m_h) - \Sigma(0)$ and $\Delta\Gamma = \Gamma(m_h) - \Gamma(0)$ are needed to take us from the IR-sensitive and unphysical $p = 0$ limit of the effective potential to $p^2 = m_h^2$, where physical observables m_h and the tri-Higgs coupling ξ_{phys} are defined. Detailed computations demonstrating the cancellation of the IR divergences in this scheme are presented in appendix B.

We wish to have a more direct physical parameter that parametrizes deviations from the SM, and so we redefine

$$\xi_{\text{phys}} \equiv \xi_{\text{phys}}^{\text{SM}} + \frac{6v_0^3}{f^2} \tag{A.7}$$

which constitutes the definition of the physical observable f . Recall that the tri-Higgs coupling in the SM is fixed with knowledge of m_h , and thus $\xi_{\text{phys}}^{\text{SM}}$ is determined completely by m_h and the other parameters of the SM:

$$\xi_{\text{phys}}^{\text{SM}} = \frac{3m_h^2}{v_0} + \sum_i \frac{n_i}{32\pi^2} \frac{[m_i^2(v_0)]^3}{m_i^2(v_0)}. \tag{A.8}$$

Since $m^2(v_0)$ depends on $1/f^2$, this expression is technically equal to the SM one only in the limit of $f^2 \rightarrow \infty$, which is all that we need for the analysis to be self-consistent.

We are now able to invert the renormalization conditions and compute the counter terms, which depend on the various derivatives of $V_1^0(\phi)$, $\Delta\Sigma$, and $\Delta\Gamma$. Upon expanding the result, one can express the renormalized full one-loop potential as

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}(\phi) = & \frac{m_h^2}{8v_0^2}(\phi^2 - v_0^2)^2 + \frac{1}{8f^2}(\phi^2 - v_0^2)^3 \\ & + \sum_{i=h,\chi,W,Z,t} \frac{n_i}{64\pi^2} \left[m_i^4(\phi) \left(\log \frac{m_i^2(\phi)}{m_i^2(v_0)} - \frac{3}{2} \right) + 2m_i^2(v_0)m_i^2(\phi) \right] \\ & + \frac{1}{16} (7\Delta\Sigma - v_0\Delta\Gamma) \phi^2 + \frac{1}{16v_0^2} (-5\Delta\Sigma + v_0\Delta\Gamma) \phi^4 + \frac{1}{48v_0^4} (3\Delta\Sigma - v_0\Delta\Gamma) \phi^6 \end{aligned} \tag{A.9}$$

where all the f -dependence of the loop-order contribution to the potential is contained in the field-dependent masses, making the continuity of the decoupling limit explicit.

B. Cancellation of Goldstone boson IR divergences

In this appendix, we gather the detailed computations for the results mentioned in appendix A about smoothing the Goldstone IR singularity in the one-loop potential at zero temperature. First, we shall briefly recall how one moves from zero-momentum to on-shell scheme in the SM, as a warm-up for the dimension-six operator discussion that will come afterwards.

B.1 Review of the SM case

In the SM the loop-integral of (A.2) can be renormalized by imposing the two conditions

$$\left. \frac{dV_{\text{eff}}(\phi, T=0)}{d\phi} \right|_{\phi=v_0} = 0, \tag{B.1}$$

$$\left. \frac{d^2V_{\text{eff}}(\phi, T=0)}{d\phi^2} \right|_{\phi=v_0} = m_{h,0}^2, \tag{B.2}$$

which leads to the traditional form of the effective potential

$$V_{\text{eff}}^{(SM)}(\phi) = \frac{m_{h,0}^2}{8v_0^2}(\phi^2 - v_0^2)^2 + \sum_i \frac{n_i}{64\pi^2} \left[m_i^4(\phi) \left(\log \frac{m_i^2(\phi)}{m_i^2(v_0)} - \frac{3}{2} \right) + 2m_i^2(v_0)m_i^2(\phi) \right] \tag{B.3}$$

where the scalar masses must be evaluated in the decoupling limit of the dimension-six operator ($f \rightarrow \infty$). As we will review, $m_{h,0}$ is an off-shell Higgs mass defined at $p = 0$. This is fine to use as long as no massless particle couples to the Higgs field [31]. If such particles like the Goldstone bosons are to be taken into account, one must move away from zero-momentum to avoid the pole-mass at $p = 0$ that makes both $m_{h,0}$ and the one-loop potential IR divergent.

In order to see how this can be done, we recall that near the symmetry breaking minimum ($\phi = v_0$) the renormalized effective potential can always be expanded in terms of 1PI-Green functions evaluated at vanishing external momentum as follow:

$$V_{\text{eff}}(\phi, T=0) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\phi - v_0)^n}{n!} \mathcal{G}^{(n)}(p_i^2 = 0), \tag{B.4}$$

where $\mathcal{G}^{(n)}(p_i^2)$ are the n -legs renormalized 1PI Green functions for the physical Higgs scalar evaluated about the true vacuum (i.e., in the shifted theory). This expansion directly follows from the fact that the effective action may be interpreted as a generating functional of these 1PI Green functions. Hence the second derivative of the effective potential at v_0 is simply the renormalized two-point function at zero-momentum:

$$\left. \frac{d^2V_{\text{eff}}(\phi, T=0)}{d\phi^2} \right|_{\phi=v_0} = -\mathcal{G}^{(2)}(p^2 = 0). \tag{B.5}$$

Given that the two-point function (the inverse propagator) of the Higgs is

$$\mathcal{G}^{(2)}(p^2) = p^2 - (m_{h,R}^2 + \Sigma(p^2)), \tag{B.6}$$

where $m_{h,R}^2$ and $\Sigma(p^2)$ are the renormalized Higgs mass and one-loop Higgs self-energy, we see that imposing the renormalization condition (B.2) leads to

$$m_{h,0}^2 = m_{h,R}^2 + \Sigma(p^2 = 0). \tag{B.7}$$

justifying that $m_{h,0}$ is to be understood as the zero-momentum Higgs mass. In order to circumvent the IR divergences a natural choice would be to express the right-hand side

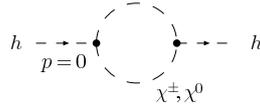


Figure 7: IR divergent diagram contributing to $\Sigma(p^2 = 0)$.

of (B.2) in terms of physical parameters. The physical Higgs mass (m_h) is defined as the pole of the one-loop resummed propagator ($\mathcal{G}^{(2)}(p^2 = m_h^2) = 0$) and is given by solving the self-consistent equation:

$$m_h^2 = m_{h,R}^2 + \Sigma(p^2 = m_h^2). \quad (\text{B.8})$$

This allows us to rewrite (B.5) as

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 V_{\text{eff}}(\phi, T=0)}{d\phi^2} \right|_{\phi=v_0} &= m_{h,R}^2 + \Sigma(p^2 = 0), \\ &= m_h^2 - \Delta\Sigma \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

with $\Delta\Sigma \equiv \Sigma(p^2 = m_h^2) - \Sigma(p^2 = 0)$.

When $\Delta\Sigma$ is absent the UV-finite one-loop correction at zero temperature for the SM has an IR divergent piece coming from the Goldstone contribution:

$$\Delta V_1^{0(SM)}(\phi)^{(IR\,div)} = -\frac{n_\chi}{64\pi^2} m_\chi^4(SM)(\phi) \log m_\chi^2 \xrightarrow{m_\chi^2 \rightarrow 0} \infty \quad (\text{B.10})$$

where $m_\chi^2 \equiv m_\chi^2(SM)(v_0)$ will be kept non-zero as a regulator in what follows. Moving to the on-shell renormalization scheme (i.e., replacing (B.2) by (A.5)) results in the addition of the following term to $V_{\text{eff}}^{(SM)}$:

$$\delta V_{1,(SM)}(\phi) = -\frac{\Delta\Sigma(SM)}{8v_0^2} (\phi^2 - v_0^2)^2 \quad (\text{B.11})$$

Now $\Sigma^{(SM)}(p^2 = 0)$ receives an IR singularity from the diagram depicted in figure 7 which can be easily calculated to give:

$$\Sigma_{(IR\,div)}^{(SM)}(p^2 = 0) = \frac{n_\chi}{32\pi^2} \frac{m_h^4}{v_0^2} \log m_\chi^2. \quad (\text{B.12})$$

Combining (B.12) with (B.11), one gets the following IR divergent contribution to the potential (up to an irrelevant ϕ -independent term):

$$\delta V_{1,(SM)}(\phi)^{(IR\,div)} = \frac{n_\chi}{64\pi^2} m_\chi^4(SM)(\phi) \log m_\chi^2, \quad (\text{B.13})$$

which exactly cancels out (B.10).

B.2 Generalization to the non-renormalizable potential

The presence of the dimension six interaction at tree-level forces us to set one more derivative of the potential to an extra measurable quantity. Focusing only on the decoupling limit this can be accomplished by

$$\left. \frac{d^3 V_{\text{eff}}(\phi, T=0)}{d\phi^3} \right|_{\phi=v_0} = \xi_0, \quad (\text{B.14})$$

where

$$\xi_0 \equiv \frac{3m_{h,0}^2}{v_0} + \frac{6v_0^3}{f_0^2} + \sum_i \frac{n_i}{32\pi^2} \frac{[m_i^2(v_0)']^3}{m_i^2(v_0)}. \quad (\text{B.15})$$

As can be easily checked, defining only the Higgs mass on-shell does not smooth out entirely the bad IR behavior of the one-loop potential in the non-renormalizable case. In fact f , being another parameter to be fixed at the quantum level, needs also to be renormalized away from zero-momentum to avoid the Goldstone pole, which is done by defining the renormalized three-point function of the Higgs boson on-shell. As for the two-point function, from (B.4) one gets

$$\left. \frac{d^3 V_{\text{eff}}(\phi, T=0)}{d\phi^3} \right|_{\phi=v_0} = -\mathcal{G}^{(3)}(p_i^2=0) \quad (\text{B.16})$$

where p_i denotes the external momenta of the three-point function. $\mathcal{G}^{(3)}$ can be split into a tree-level coupling and a one-loop correction as

$$\mathcal{G}^{(3)}(p_i^2) = -g_3 - \Gamma_3(p_i^2) \quad (\text{B.17})$$

where g_3 is the renormalized cubic self-couplings of the Higgs at tree-level. Similarly to the Higgs mass, we see that imposing (B.14) implies working with a parameter ξ_0 , or rather f_0 through (B.15), defined at zero-momentum which leads again to IR divergent behavior. We propose defining an on-shell cubic coupling at one-loop by⁸

$$\xi_{\text{phys}} \equiv -\mathcal{G}^{(3)}(p_i^2 = m_h^2) = g_3 + \Gamma_3(p_i^2 = m_h^2), \quad (\text{B.18})$$

which translates into an on-shell (physical) definition of f by means of (A.7). Finally by expressing (B.14) in terms of physical parameters, we get the on-shell renormalization condition of (A.6)

$$\left. \frac{d^3 V_{\text{eff}}(\phi, T=0)}{d\phi^3} \right|_{\phi=v_0} = g_3 + \Gamma_3(p_i^2=0), \quad (\text{B.19})$$

$$= \xi_{\text{phys}} - \Delta\Gamma_3 \quad (\text{B.20})$$

where $\Delta\Gamma \equiv \Gamma_3(p_i^2 = m_h^2) - \Gamma_3(p_i^2 = 0)$.

⁸Other physical definitions of the cubic coupling are possible, so long as they move away from zero-momentum to solve the IR issue.

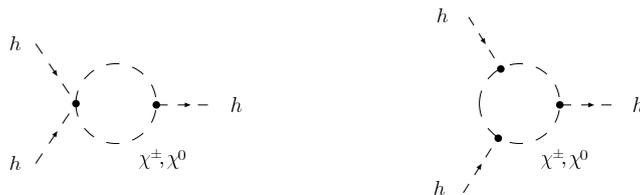


Figure 8: IR divergent diagram contributing to $\Gamma_3(p_i^2 = 0)$. All the momenta are assumed to be zero in the external lines.

Now by enforcing the three renormalization conditions (A.4), (A.5) and (A.6) to set the counter-terms, we find that the zero-momentum potential is augmented by

$$\delta V_1(\phi) = -\frac{\Delta\Sigma}{8v_0^2} (\phi^2 - v_0^2)^2 + \left[\frac{\Delta\Sigma}{16v_0^4} - \frac{\Delta\Gamma}{48v_0^3} \right] (\phi^2 - v_0^2)^3 \quad (\text{B.21})$$

We recall that in terms of $m_{h,0}$ and ξ_0 the effective potential develops a logarithmic IR singularity of the same form as in the SM but with f -dependent masses:

$$\Delta V_1^0(\phi)^{(IR\ div)} = -\frac{n_\chi}{64\pi^2} m_\chi^4(\phi) \log m_\chi^2, \quad (\text{B.22})$$

while ξ_0 defined in (B.15) has a power-law divergence. Nonetheless $\Gamma_3(p_i^2 = 0)$ contains IR-divergent parts from the diagrams of figure 8 which are

$$\Gamma_3(p_i^2 = 0)^{(IR\ div)} = \frac{3n_\chi}{32\pi^2} \frac{m_h^4}{v_0^3} \left(1 + \frac{6v_0^4}{m_h^2 f^2} \right) \log m_\chi^2 + \frac{n_\chi}{32\pi^2} \frac{m_h^6}{m_\chi^2 v_0^3}. \quad (\text{B.23})$$

Hence the power-law divergence of $\Delta\Gamma$ cancels with the one of (B.15) making ξ_{phys} a well-defined quantity. The remaining logarithmic divergence of the three-point function along with the one from the self-energy, which turns out to be the same as in the SM,

$$\Sigma_{(IR\ div)}(p^2 = 0) = \frac{n_\chi}{32\pi^2} \frac{m_h^4}{v_0^2} \log m_\chi^2, \quad (\text{B.24})$$

gives after some simple algebra (up to irrelevant constant and $\mathcal{O}(f^{-4})$ terms)

$$\delta V_1(\phi)^{(IR\ div)} = \frac{n_\chi}{64\pi^2} m_\chi^4(\phi) \log m_\chi^2 \quad (\text{B.25})$$

which cancels with eq. (B.22).

Finally, one finds that this procedure also leads to a UV and IR finite potential when a different higher derivative is chosen as a third renormalization condition.

C. Review of $T \neq 0$ one-loop Higgs potential

C.1 The one-loop potential from the background field method

The original method proposed by Jackiw in [6] to compute loop corrections to the classical potential is based upon expanding the action about (constant) background values for the

various fields appearing in the theory. In our case only the neutral Higgs component has a non-vanishing VEV, and we recall here in a concise way how this method allows one to derive the one-loop correction given in (2.4). At the start, we consider the $T = 0$ correction, and discuss the finite T corrections in the next subsection of this appendix.

As an illustration we focus on a simple self-interacting scalar (real) field theory defined by the following generating functional:

$$Z[j] \equiv \int [\mathcal{D}\phi] \exp [i(S[\phi] + j\phi)] \tag{C.1}$$

where the notation $\varphi j \equiv \int d^4x \varphi(x) j(x)$ will be assumed throughout this appendix, and the action is $S[\varphi] = \int d^4x [(\partial_\mu \varphi)^2/2 - V_0(\varphi)]$. Then one shifts the field by a x -independent background value ($\varphi(x) = \phi + h(x)$) where ϕ is assumed to be a classical field configuration and h represents a quantum fluctuation about it. We will now integrate out this fluctuation to get its effect on the potential up to one-loop order. To do so, one defines the shifted theory (whose dynamical field is now h) by expanding the action about its classical value:

$$S[\phi + h] + j(\phi + h) = S[\phi] + j\phi + h \left(\frac{\delta S}{\delta \varphi} \Big|_{\varphi=\phi} + j \right) + \frac{1}{2} h_x \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi_x \delta \varphi_y} \Big|_{\varphi=\phi} h_y + \dots \tag{C.2}$$

where thanks to the equation of motion in the presence of a source the linear term vanishes. The \dots stand for higher (than quadratic) orders in h which lead to (at most) two-loop corrections [6]. One also easily obtains after an integration by parts that

$$\frac{\delta^2 S}{\delta \varphi_x \delta \varphi_y} \Big|_{\varphi=\phi} = -(\square + V_0''(\phi)) \delta^4(x - y). \tag{C.3}$$

Plugging this expansion back into (C.1) one obtains

$$\begin{aligned} Z[j] &\simeq e^{i(S[\phi]+j\phi)} \times \int [Dh] \exp \left[\frac{i}{2} h_x \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi_x \delta \varphi_y} \Big|_{\varphi=\phi} h_y \right] \\ &= e^{i(S[\phi]+j\phi)} \times \text{Det} (\square + V_0''(\phi))^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{C.4}$$

We recall that by definition the effective action is the Legendre-transform of the logarithm of $Z[j]$

$$S_{\text{eff}}[\phi] \equiv -i \log Z[j] - j\phi, \tag{C.5}$$

which in our case, including the quantum fluctuations at one-loop, takes the form:

$$S_{\text{eff}}[\phi] = S[\phi] + \frac{i}{2} \text{Tr} \log \left(-\frac{\delta^2 S}{\delta \varphi_x \delta \varphi_y} \Big|_{\varphi=\phi} \right). \tag{C.6}$$

Moreover S_{eff} can always admit a derivative expansion of the form:

$$S_{\text{eff}}[\phi] \equiv \int d^4x [-V_{\text{eff}}(\phi) + A(\phi)(\partial_\mu \phi)^2 + \dots], \tag{C.7}$$

which defines precisely what one calls the effective potential. Since ϕ is an homogeneous configuration in space-time, this simplifies to:

$$S_{\text{eff}}[\phi] = -\mathcal{V}V_{\text{eff}}(\phi), \tag{C.8}$$

where \mathcal{V} is the volume of space-time we choose to keep finite for the moment. Besides, this homogeneity preserves the diagonality of (C.3) in momentum-space, which allows us to evaluate the trace in (C.6). This leads to the following expression for the effective potential:

$$V_{\text{eff}}(\phi) = V_0(\phi) - \frac{i}{2} \mathcal{V}^{-1} \sum_k \log(-k^2 + V_0''(\phi)) \quad (\text{C.9})$$

where the sum is over the eigenvalues of the \square operator in momentum-space. Finally by taking the limit of infinite space-time volume, one gets the well-known result:

$$V_{\text{eff}}(\phi) = V_0(\phi) - \frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \log(-k^2 + V_0''(\phi)). \quad (\text{C.10})$$

The generalization for fields of higher spin that couple to ϕ is

$$V_{\text{eff}}(\phi) = V_0(\phi) + i \sum_{i=\text{fields}} \eta \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \log \det \left(-i \tilde{D}_i(k, \phi) \right), \quad (\text{C.11})$$

where $-i \tilde{D}(k, \phi)$ is the inverse propagator, $\eta = -1/2$ (1) for bosons (fermions) is the power of the functional determinant, and the \det denotes an eventual determinant acting on either Lorentz or Dirac indices.

C.2 Turning on the temperature in the effective potential

The imaginary time formalism to go from quantum statistics at zero-temperature to thermal quantum statistics is by compactification of the euclidean time dimension on a circle of radius $R = 1/2\pi T$. This correspondence is formally obtained in the path integral formulation of quantum mechanics [13]. However, it is worthwhile to give a quick intuitive argument.

We begin with the generating functional for a scalar field in euclidean space-time ($\tau = it$):

$$Z[j] = \int [\mathcal{D}\phi] \exp \left[- \int d^4x_E \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + V_0(\phi) + j\phi \right) \right]. \quad (\text{C.12})$$

Now requiring the euclidean time to lie in the interval $-1/2T \leq \tau \leq 1/2T$, and restricting the field ϕ to static configurations, one ends up with

$$Z[j] = \int [\mathcal{D}\phi] \exp \left[- \frac{1}{T} \int d^3x \left(\frac{1}{2} \partial_i \phi \partial^i \phi + V_0(\phi) + j\phi \right) \right]. \quad (\text{C.13})$$

For vanishing source the space integral is nothing else but the energy ($E[\phi]$) stored in a (time-independent) field configuration ϕ , and the generating functional reduces to

$$Z[j = 0] = \int [\mathcal{D}\phi] e^{-\frac{E[\phi]}{T}} \sim \sum_{S=\text{all states}} e^{-E_S/T}, \quad (\text{C.14})$$

which is the common partition function of statistical mechanics where ϕ describes all possible (static) configurations of a given system in equilibrium with a heat reservoir at temperature T .

Therefore the prescription to follow as soon as temperature is switched on is rather simple. It consists of Fourier expanding the fields among its eigen (Matsubara) frequencies ω_n and discretizing the imaginary time integrals by the following replacement rule:

$$\int \frac{dk_{0,E}}{2\pi} f(k_{0,E}) \rightarrow T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(k_{0,E} = \omega_n). \quad (\text{C.15})$$

For instance, applying (C.15) to momentum integral in (C.10) to implement the finite temperature correction leads to a potential of the form presented in (2.4):

$$V_{\text{eff}}(\phi, T) = V_0(\phi) + \frac{T}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \log(\omega_n^2 + \vec{k}^2 + V_0''(\phi)). \quad (\text{C.16})$$

C.3 Gauge degrees of freedom in Landau gauge

Recalling the Goldstone equivalence theorem of gauge theory, one might doubt the necessity of counting the longitudinal polarization of a (massive) gauge field and its associated Goldstone mode as independent degrees of freedom when computing the effective potential in the Landau gauge. Here we clarify this fact in the simple case of an abelian Higgs model. To do so, we explicitly compute the one-loop contributions of the U(1)-gauge, ghost and Goldstone fields to the Higgs potential in the R_ξ gauge. The effective potential turns out to be gauge-dependent, however there is no need to worry since it is not a physical observable. We work at $T = 0$ but the following discussion can be driven the same way when the temperature is turned on, since we never evaluate momentum integrals.

We begin with the gauge field (A_μ). It will affect the Higgs potential at one-loop through the following term:

$$\Delta V_1^A(\phi) = -\frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \log \det \left(-i\tilde{D}_{\mu\nu}^{-1}(k) \right), \quad (\text{C.17})$$

where \det acts on Lorentz indices. In the R_ξ gauge the inverse propagator has the usual expression in momentum space:

$$-i\tilde{D}_{\mu\nu}^{-1}(k) = (-k^2 + m_A^2(\phi)) \Pi_{\mu\nu}^T(k) + \frac{1}{\xi} (-k^2 + \xi m_A^2(\phi)) \Pi_{\mu\nu}^L(k) \quad (\text{C.18})$$

with $\Pi_{\mu\nu}^T(k) = \eta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2$ and $\Pi_{\mu\nu}^L(k) = k_\mu k_\nu / k^2$ being the transverse and longitudinal projectors respectively. Since the traces of $\hat{\Pi}^{T,L} = 3, 1$ and the determinant are invariants, we can move to a basis where the matrices $\hat{\Pi} = C\Pi C^{-1}$ are diagonal and read:

$$\hat{\Pi}^T = \text{diag}(0, 1, 1, 1) \quad , \quad \hat{\Pi}^L = \text{diag}(1, 0, 0, 0) \quad (\text{C.19})$$

In this basis the determinant can be easily evaluated and gives:

$$\Delta V_1^A(\phi) = -\frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [3 \log(-k^2 + m_A^2(\phi)) + \log(-k^2 + \xi m_A^2(\phi)) + \log \xi] \quad (\text{C.20})$$

Now we move to the Goldstone boson (χ) and ghost contributions which are

$$\Delta V_1^{\chi+ghost}(\phi) = -\frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \log \left(-i\tilde{D}_\chi^{-1}(k) \right) + i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \log \left(-i\tilde{D}_{\text{ghost}}^{-1}(k) \right). \quad (\text{C.21})$$

Given that, in the abelian Higgs model, the inverse propagators are

$$-i\tilde{D}_\chi^{-1}(k) = k^2 - m_\chi^2(\phi) - \xi m_A^2(\phi), \quad (\text{C.22})$$

$$-i\tilde{D}_{\text{ghost}}^{-1}(k) = k^2 - \xi m_A^2(\phi), \quad (\text{C.23})$$

with m_χ the mass the Goldstone receives from its Higgs couplings, we obtain

$$\Delta V_1^{\chi+ghost}(\phi) = \frac{i}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\log(-k^2 + \xi m_A^2(\phi)) + i\pi - \log\left(1 + \frac{m_\chi^2(\phi)}{-k^2 + \xi m_A^2(\phi)}\right) \right]. \quad (\text{C.24})$$

Gathering (C.20) and (C.24) together, we see the first terms of each expression cancel out, leaving only (in euclidean space)

$$\Delta V_1^{A+\chi+ghost}(\phi) = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \left[3 \log(k_E^2 + m_A^2(\phi)) + \log\left(1 + \frac{m_\chi^2(\phi)}{k_E^2 + \xi m_A^2(\phi)}\right) \right] + \dots, \quad (\text{C.25})$$

where \dots stand for constant terms irrelevant for the potential. Taking $\xi = 0$ to move to the Landau gauge, the last expression reduces to (up to an infinite constant)

$$\Delta V_{1,\xi=0}^{A+\chi+ghost}(\phi) = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} [3 \log(k_E^2 + m_A^2(\phi)) + \log(k_E^2 + m_\chi^2(\phi))] + \dots, \quad (\text{C.26})$$

from which one clearly sees that, in this gauge, the factor of 3 for the massive gauge field is not altered by the addition of the Goldstone contribution.

Another physically meaningful fixing choice is the unitary gauge $\xi \rightarrow \infty$. Sending the gauge fixing parameter to infinity in (C.25) implies the decoupling of the Goldstone contribution, as it should:

$$\Delta V_{1,\xi \rightarrow \infty}^{A+\chi+ghost}(\phi) = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} [3 \log(k_E^2 + m_A^2(\phi))] + \dots, \quad (\text{C.27})$$

Again the degrees of freedom of the gauge field are still 3 in this gauge.

From this discussion we see that interpreting the factors in front of the log as the number of polarization states for the corresponding field is only (accidentally) true in both $\xi = 0, \infty$ gauges. Indeed, if one takes for instance the 't Hooft gauge ($\xi = 1$) the results are

$$\Delta V_{1,\xi=1}^{A+\chi+ghost}(\phi) = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} [2 \log(k_E^2 + m_A^2(\phi)) + \log(k_E^2 + m_\chi^2(\phi) + m_A^2(\phi))] + \dots, \quad (\text{C.28})$$

where now the “degrees of freedom” of A_μ reduce from 3 to 2 by this gauge choice.

C.4 Cancellation of imaginary parts at small temperature

In section 2.3.2, we have shown that in the high temperature limit, a cancellation occurs between imaginary parts of the one-loop potential and the ring corrections. Here we want

to show that this cancellation occurs also for smaller temperatures of order $T \sim |m_i(\phi)|$. Indeed by working out the integrals of (2.23) in order to isolate its imaginary part, we get

$$\Im m [\Delta V_1^T(\phi, T)] = \sum_{i=h,\chi} \Theta(-m_i^2(\phi)) \frac{n_i T^4}{4\pi^2} \int_0^{\frac{|m_i(\phi)|}{T}} dx x^2 \left((4n+1)\pi - \sqrt{\frac{|m_i(\phi)|^2}{T^2} - x^2} \right),$$

where n is a positive integer which ensures that

$$-\pi < \frac{1}{2} \left(\pi - \sqrt{\frac{|m_i^2(\phi)|}{T^2} - x^2} \right) + 2n\pi \leq \pi \tag{C.29}$$

so that one stays on the principal sheet when taking the imaginary part of the logarithm, whose branch is assumed to lie on the negative real axis of the complex plane. We can easily show that $n = 0$ as long as $T > T_\pi \equiv |m_i(\phi)|/3\pi$, in which case the imaginary part becomes

$$\begin{aligned} \Im m [\Delta V_1^T(\phi, T)] &= \sum_{i=h,\chi} \Theta(-m_i^2(\phi)) \frac{n_i T^4}{4\pi^2} \int_0^{\frac{|m_i(\phi)|}{T}} dx x^2 \left(\pi - \sqrt{\frac{|m_i(\phi)|^2}{T^2} - x^2} \right), \\ &= \sum_{i=h,\chi} \Theta(-m_i^2(\phi)) n_i \left[-\frac{|m_i(\phi)|^4}{64\pi} + \frac{|m_i(\phi)|^3 T}{12\pi} \right] \end{aligned} \tag{C.30}$$

and reproduces the same cancellation with (2.39) and (2.37) as in the high temperature regime.

For completeness we now consider the case of very low temperatures. As the temperature cools down below T_π , one begins needing to shift the imaginary part of the log by multiples of 2π to remain on the principal sheet of the complex plane. Furthermore, from (C.29) we see that

$$-2\pi < (4n+1)\pi - \sqrt{\frac{|m_i(\phi)|^2}{T^2} - x^2} \leq 2\pi. \tag{C.31}$$

Thus

$$-\sum_{i=h,\chi} \Theta(-m_i^2(\phi)) n_i \frac{|m_i(\phi)|^3 T}{6\pi} < \Im m [\Delta V_1^T(\phi, T)] \leq \sum_{i=h,\chi} \Theta(-m_i^2(\phi)) n_i \frac{|m_i(\phi)|^3 T}{6\pi} \tag{C.32}$$

and we conclude that $\Im m [\Delta V_1^T(\phi, T)]$ vanishes as T goes to zero, as it should.

References

- [1] P. Creminelli, A. Nicolis and R. Rattazzi, *Holography and the electroweak phase transition*, *JHEP* **03** (2002) 051 [[hep-th/0107141](#)];
- J.R. Espinosa, M. Losada and A. Riotto, *Symmetry nonrestoration at high temperature in little Higgs models*, *Phys. Rev.* **D 72** (2005) 043520 [[hep-ph/0409070](#)];
- M.S. Carena, A. Megevand, M. Quirós and C.E.M. Wagner, *Electroweak baryogenesis and new TeV fermions*, *Nucl. Phys.* **B 716** (2005) 319 [[hep-ph/0410352](#)];

- G. Panico and M. Serone, *The electroweak phase transition on orbifolds with gauge-Higgs unification*, *JHEP* **05** (2005) 024 [[hep-ph/0502255](#)];
- N. Maru and K. Takenaga, *Aspects of phase transition in gauge-Higgs unification at finite temperature*, *Phys. Rev. D* **72** (2005) 046003 [[hep-th/0505066](#)];
- L. Randall and G. Servant, *Gravitational waves from warped spacetime*, *JHEP* **05** (2007) 054 [[hep-ph/0607158](#)];
- J. Shu, T.M.P. Tait and C.E.M. Wagner, *Baryogenesis from an earlier phase transition*, *Phys. Rev. D* **75** (2007) 063510 [[hep-ph/0610375](#)];
- J.R. Espinosa and M. Quirós, *Novel effects in electroweak breaking from a hidden sector*, *Phys. Rev. D* **76** (2007) 076004 [[hep-ph/0701145](#)];
- G. Nardini, M. Quirós and A. Wulzer, *A confining strong first-order electroweak phase transition*, *JHEP* **09** (2007) 077 [[arXiv:0706.3388](#)];
- B. Hassanain, J. March-Russell and M. Schwelling, *Warped deformed throats have faster (electroweak) phase transitions*, *JHEP* **10** (2007) 089 [[arXiv:0708.2060](#)];
- S. Profumo, M.J. Ramsey-Musolf and G. Shaughnessy, *Singlet Higgs phenomenology and the electroweak phase transition*, *JHEP* **08** (2007) 010 [[arXiv:0705.2425](#)].
- [2] C. Grojean, G. Servant and J.D. Wells, *First-order electroweak phase transition in the standard model with a low cutoff*, *Phys. Rev. D* **71** (2005) 036001 [[hep-ph/0407019](#)].
- [3] D. Bodeker, L. Fromme, S.J. Huber and M. Seniuch, *The baryon asymmetry in the standard model with a low cut-off*, *JHEP* **02** (2005) 026 [[hep-ph/0412366](#)].
- [4] G.F. Giudice, C. Grojean, A. Pomarol and R. Rattazzi, *The strongly-interacting light Higgs*, *JHEP* **06** (2007) 045 [[hep-ph/0703164](#)].
- [5] For other effects of a H^6 operator, see B. Grzadkowski, J. Pliszka and J. Wudka, *Higgs-boson mass limits and precise measurements beyond the standard model*, *Phys. Rev. D* **69** (2004) 033001 [[hep-ph/0307338](#)];
- X.-M. Zhang, *Operators analysis for Higgs potential and cosmological bound on Higgs mass*, *Phys. Rev. D* **47** (1993) 3065 [[hep-ph/9301277](#)];
- X. Zhang, B.L. Young and S.K. Lee, *Electroweak sphaleron for effective theory in the limit of large Higgs boson mass*, *Phys. Rev. D* **51** (1995) 5327 [[hep-ph/9406322](#)].
- [6] R. Jackiw, *Functional evaluation of the effective potential*, *Phys. Rev. D* **9** (1974) 1686.
- [7] L. Dolan and R. Jackiw, *Symmetry behavior at finite temperature*, *Phys. Rev. D* **9** (1974) 3320.
- [8] For a good pedagogical review, see M. Quirós, *Finite temperature field theory and phase transitions*, [hep-ph/9901312](#).
- [9] ALEPH collaboration, J. Alcaraz et al., *A combination of preliminary electroweak measurements and constraints on the standard model*, [hep-ex/0612034](#).
- [10] H. Arason et al., *Renormalization group study of the standard model and its extensions. 1. The standard model*, *Phys. Rev. D* **46** (1992) 3945.
- [11] T. Hahn and M. Pérez-Victoria, *Automatized one-loop calculations in four and D dimensions*, *Comput. Phys. Commun.* **118** (1999) 153 [[hep-ph/9807565](#)].
- [12] K. Takahashi, *Perturbative calculations at finite temperatures*, *Z. Physik C* **26** (1985) 601.
- [13] M. Le Bellac, *Thermal field theory*, Cambridge University Press, Cambridge U.K. (1996).

- [14] M.E. Carrington, *The effective potential at finite temperature in the standard model*, *Phys. Rev. D* **45** (1992) 2933.
- [15] P. Arnold and O. Espinosa, *The effective potential and first order phase transitions: beyond leading-order*, *Phys. Rev. D* **47** (1993) 3546 [*Erratum ibid.* **50** (1994) 6662] [[hep-ph/9212235](#)].
- [16] E.J. Weinberg and A.-Q. Wu, *Understanding complex perturbative effective potentials*, *Phys. Rev. D* **36** (1987) 2474.
- [17] K. Kajantie, M. Laine, K. Rummukainen and M.E. Shaposhnikov, *The electroweak phase transition: a non-perturbative analysis*, *Nucl. Phys. B* **466** (1996) 189 [[hep-lat/9510020](#)]; *A non-perturbative analysis of the finite T phase transition in $SU(2) \times U(1)$ electroweak theory*, *Nucl. Phys. B* **493** (1997) 413 [[hep-lat/9612006](#)].
- [18] K. Kajantie, M. Laine, K. Rummukainen and M.E. Shaposhnikov, *Is there a hot electroweak phase transition at $m(H) > \text{approx. } m(W)$?*, *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 2887 [[hep-ph/9605288](#)].
- [19] S.R. Coleman, *The fate of the false vacuum. 1. Semiclassical theory*, *Phys. Rev. D* **15** (1977) 2929 [*Erratum ibid.* **16** (1977) 1248].
- [20] A.D. Linde, *Decay of the false vacuum at finite temperature*, *Nucl. Phys. B* **216** (1983) 421 [*Erratum ibid.* **223** (1983) 544].
- [21] A.D. Linde, *Fate of the false vacuum at finite temperature: theory and applications*, *Phys. Lett. B* **100** (1981) 37.
- [22] C. Grojean and G. Servant, *Gravitational waves from phase transitions at the electroweak scale and beyond*, *Phys. Rev. D* **75** (2007) 043507 [[hep-ph/0607107](#)].
- [23] A. Buonanno, *Gravitational waves*, [arXiv:0709.4682](#).
- [24] A. Kosowsky, M.S. Turner and R. Watkins, *Gravitational waves from first order cosmological phase transitions*, *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 2026; *Gravitational radiation from colliding vacuum bubbles*, *Phys. Rev. D* **45** (1992) 4514;
A. Kosowsky and M.S. Turner, *Gravitational radiation from colliding vacuum bubbles: envelope approximation to many bubble collisions*, *Phys. Rev. D* **47** (1993) 4372 [[astro-ph/9211004](#)];
M. Kamionkowski, A. Kosowsky and M.S. Turner, *Gravitational radiation from first order phase transitions*, *Phys. Rev. D* **49** (1994) 2837 [[astro-ph/9310044](#)];
A. Kosowsky, A. Mack and T. Kahniashvili, *Gravitational radiation from cosmological turbulence*, *Phys. Rev. D* **66** (2002) 024030 [[astro-ph/0111483](#)].
- [25] A.D. Dolgov, D. Grasso and A. Nicolis, *Relic backgrounds of gravitational waves from cosmic turbulence*, *Phys. Rev. D* **66** (2002) 103505 [[astro-ph/0206461](#)];
R. Apreda, M. Maggiore, A. Nicolis and A. Riotto, *Gravitational waves from electroweak phase transitions*, *Nucl. Phys. B* **631** (2002) 342 [[gr-qc/0107033](#)];
A. Nicolis, *Relic gravitational waves from colliding bubbles and cosmic turbulence*, *Class. and Quant. Grav.* **21** (2004) L27 [[gr-qc/0303084](#)].
- [26] C. Caprini and R. Durrer, *Gravitational waves from stochastic relativistic sources: primordial turbulence and magnetic fields*, *Phys. Rev. D* **74** (2006) 063521 [[astro-ph/0603476](#)];
G. Gogoberidze, T. Kahniashvili and A. Kosowsky, *The spectrum of gravitational radiation from primordial turbulence*, *Phys. Rev. D* **76** (2007) 083002 [[arXiv:0705.1733](#)].

- [27] C. Caprini, R. Durrer and G. Servant, *Gravitational wave generation from bubble collisions in first-order phase transitions: an analytic approach*, [arXiv:0711.2593](#).
- [28] G.D. Moore, *Electroweak bubble wall friction: analytic results*, *JHEP* **03** (2000) 006 [[hep-ph/0001274](#)].
- [29] C. Delaunay, C. Grojean and G. Servant, *The Higgs in the sky: production of gravitational waves during a first-order phase transition*, *AIP Conf. Proc.* **903** (2007) 24.
- [30] S.J. Huber and T. Konstandin, *Production of gravitational waves in the NMSSM*, [arXiv:0709.2091](#).
- [31] G.W. Anderson and L.J. Hall, *The electroweak phase transition and baryogenesis*, *Phys. Rev. D* **45** (1992) 2685.

A model of lepton masses from a warped extra dimension

Csaba Csáki,^{ab} Cédric Delaunay,^{cd} Christophe Grojean^{cd} and Yuval Grossman^a

^a*Institute for High Energy Phenomenology,
Newman Laboratory of Elementary Particle Physics, Cornell University,
Ithaca, NY 14853, U.S.A.*

^b*Kavli Institute for Theoretical Physics, University of California,
Santa Barbara, CA 93106, U.S.A.*

^c*Theory Division, CERN,
CH-1211 Geneva 23, Switzerland*

^d*Institut de Physique Théorique, CEA, IPhT,
F-91191 Gif-sur-Yvette, France
E-mail: csaki@lepp.cornell.edu, cedric.delaunay@cea.fr,
christophe.grojean@cern.ch, yuvalg@lepp.cornell.edu*

ABSTRACT: In order to explain the non-hierarchical neutrino mixing angles and the absence of lepton flavor violating processes in the context of warped extra dimensions one needs to introduce bulk flavor symmetries. We present a simple model of lepton masses and mixings in RS models based on the A_4 non-abelian discrete symmetry. The virtues of this choice are:

- (i) the natural appearance of the tri-bimaximal mixing pattern;
- (ii) the complete absence of tree-level flavor violations in the neutral sector;
- (iii) the absence of flavor gauge bosons;
- (iv) the hierarchies in the charged lepton masses are explained via wave-function overlaps.

We present the minimal field content and symmetry breaking pattern necessary to obtain a successful model of this type. The bounds from electroweak precision measurements allow the KK mass scale to be as low as ~ 3 TeV. Tree-level lepton flavor violation is absent in this model, while the loop induced $\mu \rightarrow e\gamma$ branching fraction is safely below the experimental bound.

KEYWORDS: Beyond Standard Model, Neutrino Physics, Field Theories in Higher Dimensions, Rare Decays.

Contents

1. Introduction	1
2. The setup	3
3. Higher order corrections and perturbativity bounds	8
4. Numerical scans and electroweak precision bounds	11
5. Constraints from lepton flavor violation	13
6. Conclusions	16
A. Summary of A_4 group theory	17
B. $\theta_{13} = 0$ and $\theta_{23} = \pi/4$ at any order on IR brane	18
C. Review of gauge breaking via BCs	18

1. Introduction

Warped extra dimensions [1] provide a simple framework for fermion masses: exponential hierarchies are naturally generated due to the overlap of fermion and Higgs wave functions [2, 3], implementing the split fermion idea of [4]. In the simplest 5D “anarchic” approach [5, 6], where both the 5D bulk masses and the brane Yukawa couplings are assumed to be random, one generates a hierarchy both in the 4D standard model (SM) fermion masses and their mixing angles. This seems to fit the observed pattern of quark mixings and masses very well, since both the CKM matrix and quark masses show a hierarchical pattern. The lepton sector, however, is different: two of the observed neutrino mixing angles are close to maximal, rather than being hierarchical [7]. This suggests that one needs to radically change the implementation of fermion masses in warped extra dimensional models in order to achieve the correct lepton mixing pattern. Instead of a fully 5D anarchical approach, it calls for partial flavor symmetries, which will make sure that two of the neutrino mixing angles are not small, but close to maximal. The usual hierarchies can still be used to generate the hierarchies in charged lepton sector.

In fact, the necessary appearance of flavor symmetries is welcome for these models. Anarchic 5D flavor structure necessarily gives rise to flavor changing neutral currents (FCNC’s) in the quark sector, and to lepton flavor violation (LFV) in the lepton sector at tree-level [3, 5, 8, 6]. While these flavor violations are suppressed by the so-called RS-GIM

mechanism [8, 6], the KK mass scale still has to be as large as 20 TeV in order to safely suppress FCNC's in the quark sector [9]. In the lepton sector the anarchic approach [10] imposes a bound of order 10 TeV on the KK mass scale [11]. These bounds imply that the theory is out of reach for the LHC and unlikely to be useful for solving the (little) hierarchy problem. Reduction of these bounds require additional flavor symmetries [12, 13]. For the leptons, we have seen that such flavor symmetries are necessary to begin with, to protect the mixing angles from becoming hierarchical. The aim of this paper is to show that we can indeed use these flavor symmetries in the lepton sector to eliminate the LFV bounds on the model, and at the same time get a realistic pattern of masses and mixings. Recently, an alternative approach to lepton masses in RS was proposed in [14] (following the suggestion of [15]), which however does not readily explain the appearance of the large (non-hierarchical) neutrino mixing angles.

For our model, we pick the most popular global symmetry used in neutrino model building, an A_4 discrete symmetry [16, 17]. This, by the virtue of being discrete, has the added benefit that no additional gauge bosons have to be introduced, even if the symmetry is gauged. From the many studies of the implications of the A_4 symmetry in 4D models we expect that this symmetry can give the correct mixing structure. The mass hierarchies in the charged sector can still be generated as usual in RS models via fermion overlaps. The mass hierarchy in the neutrino sector is not that large, and can be readily incorporated by choosing $\mathcal{O}(1)$ factors in the neutrino mass matrix. Finally, since A_4 is a non-abelian discrete symmetry it has the potential of greatly reducing bounds from LFV. The reason for that is that by using a non-singlet representation under A_4 we can force the bulk wave functions of some of the left handed fields to be universal.

Indeed, we find that with appropriate choice of representations, the tri-bimaximal mixing pattern [18] characteristic of the A_4 symmetry can be reproduced by the leading order operators. Higher order terms can result in non-zero θ_{13} , while maintaining the predictions for θ_{12}, θ_{23} within the experimentally allowed range. Most importantly, our A_4 based model eliminates all tree-level sources for LFV. In fact, LFV is completely absent in the neutral current interactions, and shows up only through charged currents involving neutrino mixing. In the original RS neutrino mass model of [2] these loops turn out to be problematic [19], since the interaction of the heavy KK neutrinos with the SM fields is unsuppressed. In our model, by putting the charged leptons in the bulk (and peaked on the UV brane) these couplings are strongly suppressed and the bounds from loop induced decays are significantly reduced. The most important experimental bounds in the lepton sector are those from the electroweak precision (EWP) constraints. They are, however, quite mild, with KK masses of order 3 TeV generically allowed as in most other RS models.

The above arguments show that introducing the discrete non-abelian lepton flavor symmetry greatly improves over the generic RS lepton flavor models. Moreover, they are also improving the straight 4D implementations of A_4 neutrino models in several aspects. First, they explain the hierarchy in the charged lepton sector. Second, by putting one A_4 breaking VEV on the UV brane (breaking the group to Z_2), and the other on the IR (breaking it to Z_3) questions regarding vacuum alignment are eliminated. Finally, the appearance of the correct right handed neutrino mass scale (somewhat below M_{Pl} and

	$SU(2)_L$	$SU(2)_R$	$U(1)_{B-L}$	A_4	Z_2
Ψ_L	\square	1	-1	3	-
$\Psi_{e,\mu,\tau}$	1	\square	-1	$1, 1', 1''$	+
Ψ_ν	1	\square	-1	3	-
$H (IR)$	\square	\square	0	1	+
$\phi' (IR)$	1	1	0	3	-
$\phi (UV)$	1	1	0	3	+

Table 1: Fields and their gauge and flavor charges.

M_{GUT}) can be explained by the partial compositeness of the right handed neutrino.

The paper is organized as follows: in section 2 we give the general setup, introduce the A_4 representations and calculate the mixing matrices at leading order. In section 3 we show the effects of higher dimensional operators on the mixing angles. In section 4 we present a numerical scan of the parameter space and discuss the electroweak precision bounds. In section 5 we show that LFV is completely absent at the tree-level in this model, and estimate the loop induced $\mu \rightarrow e\gamma$ branching fraction. We conclude in section 6.

2. The setup

We are assuming an AdS_5 bulk metric

$$ds^2 = \left(\frac{R}{z}\right)^2 (dx_\mu dx_\nu \eta^{\mu\nu} - dz^2), \quad (2.1)$$

with a UV brane at $z = R$ (R is also the AdS curvature scale) and an IR brane at $z = R'$. The magnitude of the scales is given by $R^{-1} \sim M_{Pl}$ and $R'^{-1} \sim 1 \text{ TeV}$. The electroweak gauge group is extended to an $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ gauge symmetry in the bulk to incorporate custodial symmetry [20]. This symmetry is reduced on the UV brane to the SM group $SU(2)_L \times U(1)_Y$, while it breaks down to $SU(2)_D \times U(1)_{B-L}$ on the IR brane.

The matter content is summarized in table 1. We assume that there is a separate doublet for every SM lepton, including the right handed neutrino: an $SU(2)_L$ doublet, Ψ_L , for every left handed doublet L , a separate $SU(2)_R$ doublet $\Psi_{e,\mu,\tau}$ for every right handed charged lepton, e, μ, τ , and a right handed doublet Ψ_ν for every right handed neutrino ν . A 5D fermion correspond to 2 Weyl fermions of opposite chirality in 4D:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

In the KK decomposition, 4D chirality follows from the boundary conditions at the two end points of the extra dimension. The Lorentz structure forces χ and ψ to have opposite boundary conditions while a massless mode appears only for Neumann boundary condition at both ends. For a complete description of fermionic boundary conditions see [21]. The profile of the would-be zero mode is then entirely dictated by the 5D mass of Ψ . Conventionally, this mass is normalized as c/R and for $c > 1/2$ (resp. $c < -1/2$), a χ -zero mode

(resp. ψ -zero mode) is exponentially localized on the UV brane. In our setup, we assume that the boundary conditions (in the absence of the localized mass terms) are chosen as:

$$\Psi_L = \left(L \begin{bmatrix} +, + \end{bmatrix} \right) \Psi_{e,\mu,\tau} = \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_{e,\mu,\tau} \begin{bmatrix} +, - \end{bmatrix} \\ e, \mu, \tau \begin{bmatrix} -, - \end{bmatrix} \end{pmatrix} \Psi_\nu = \begin{pmatrix} \nu \begin{bmatrix} -, - \end{bmatrix} \\ \tilde{l} \begin{bmatrix} +, - \end{bmatrix} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

where $[\pm]$ refers to a Neumann (Dirichlet) boundary condition on both branes for the χ component, while the $\bar{\psi}$ ones simply have the opposite conditions. Hence there is a left handed zero mode for the left handed doublets in Ψ_L , and a single right handed zero mode in $\Psi_{e,\mu,\tau}$ and Ψ_ν each.¹ These fields have bulk masses (in units of the AdS curvature) given by c_L, c_e and c_ν . For the general case these would be hermitian 3×3 flavor matrices. This is not the case here as we impose an $A_4 \times Z_2$ global symmetry in the bulk of the theory. In order to get the correct neutrino mass spectrum, we assign the three charged lepton doublets as well as the three right handed neutrinos to the 3 dimensional representation of A_4 . Thus for these fields there is just one common c -parameter each: c_L and c_ν . On the other hand, we assign the right handed charged leptons to the three inequivalent one dimensional representations of A_4 : $1+1'+1''$. Thus there are three separate c 's in this sector: c_e, c_μ and c_τ . The purpose of the Z_2 symmetry is to eliminate certain brane localized operators that would otherwise contribute to the mass matrices at leading order.

The symmetry breaking is achieved via brane localized scalars. Besides the SM Higgs, H , that is localized on the IR brane, we assume the following scalars to break the discrete symmetries: ϕ on the UV brane and ϕ' on the IR brane, both of which are in the 3 of A_4 . We assume that these two scalars develop VEVs in different directions: ϕ breaks A_4 to Z_2 , while ϕ' to Z_3 . This is achieved by the VEVs

$$\langle \phi' \rangle = (v', v', v'), \quad \langle \phi \rangle = (v, 0, 0), \quad (2.4)$$

in the basis where the generator corresponding to generator S of A_4 is diagonal (see appendix A for summary on A_4). Note, that once such a basis is chosen, these are the most general VEVs which preserve Z_3 and Z_2 subgroups of A_4 respectively, up to a trivial permutation of the basis.

We now write the most general Yukawa terms respecting both gauge and flavor symmetries (in addition one needs to write localized kinetic and potential terms for the localized scalars):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{UV} &= -\frac{M}{2\Lambda} \psi_\nu \psi_\nu - x_\nu \frac{\phi}{2\Lambda} \psi_\nu \psi_\nu + \text{h.c.} + \dots, \\ \mathcal{L}_{IR} &= -\frac{y_\nu}{\Lambda'} \bar{\Psi}_L H \Psi_\nu - \frac{y_e}{\Lambda'^2} (\bar{\Psi}_L \phi') H \Psi_e - \frac{y_\mu}{\Lambda'^2} (\bar{\Psi}_L \phi'') H \Psi_\mu - \frac{y_\tau}{\Lambda'^2} (\bar{\Psi}_L \phi')' H \Psi_\tau + \text{h.c.} + \dots, \end{aligned} \quad (2.5)$$

where $\Psi^T = (\chi, \bar{\psi})$ and \dots stands for higher dimensional operators. We use the notation of [17] for writing A_4 -invariants: $(\cdot), (\cdot)'$ and $(\cdot)''$ denote the terms of 3×3 that transform as $1, 1'$ and $1''$ respectively, see appendix A.

¹It is well known that the $[-]$ boundary conditions (for a χ -type Weyl fermion) can lead to an extremely light KK-state for $c > 1/2$. Here we are safe from this problem as the right handed zero modes which satisfy this type of boundary conditions are localized close to the UV brane, i.e. $c < -1/2$.

Once the electroweak and A_4 symmetries are spontaneously broken, the boundary terms lead to boundary conditions mixing all fermions. Then, the spectrum is obtained by solving the bulk equation of motion in the presence of these mixed boundary conditions. The light modes, however, are quite insensitive to the boundary terms, and so they can be treated as a small perturbation. Hence to leading order the low energy spectrum may be obtained by using the zero mode wave functions. This defines the Zero Mode Approximation (ZMA) whose accuracy depends on how light the light masses are. As the largest mass is that of the τ , about 1 GeV, the ZMA turns out to be as accurate as $m_\tau R' \simeq 10^{-3}$ for zero mode masses.

To follow the conventional RS literature we introduce the RS flavor functions f and F ; these give the wave functions of the zero mode fermions on the IR and UV branes:

$$\chi_c(z) = \frac{1}{\sqrt{R'}} \left(\frac{z}{R}\right)^2 \left(\frac{z}{R'}\right)^{-c} f_c = \frac{1}{\sqrt{R}} \left(\frac{z}{R}\right)^{2-c} F_c \quad \text{and} \quad \psi_c(z) = \chi_{-c}(z), \quad (2.6)$$

with

$$f_c = \frac{\sqrt{1-2c}}{\sqrt{1-(R/R')^{1-2c}}}, \quad F_c = \frac{\sqrt{2c-1}}{\sqrt{1-(R/R')^{2c-1}}}. \quad (2.7)$$

The IR boundary terms of (2.6) lead to the following Dirac mass matrices for the zero mode charged leptons and neutrinos:

$$\mathcal{M}_{\mathbf{D}}^e = f_L \frac{v_H v'}{\sqrt{2} R' \Lambda'^2} \begin{pmatrix} y_e f_{-e} & y_\mu f_{-\mu} & y_\tau f_{-\tau} \\ y_e f_{-e} & \omega y_\mu f_{-\mu} & \omega^2 y_\tau f_{-\tau} \\ y_e f_{-e} & \omega^2 y_\mu f_{-\mu} & \omega y_\tau f_{-\tau} \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

$$\mathcal{M}_{\mathbf{D}}^\nu = y_\nu f_L f_{-\nu} \frac{v_H}{\sqrt{2} R' \Lambda'} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

where we have introduced the shorthanded notation $f_i = f_{c_i}$ and $f_{-i} = f_{-c_i}$, ω is the cubic root of unity, $\omega = e^{2\pi i/3}$, and $v_H \sim 250$ GeV. The UV terms of (2.6) generate a Majorana mass matrix for right handed neutrinos of the form:

$$\mathcal{M}_{\mathbf{M}}^\nu = F_{-\nu}^2 R^{-1} \begin{pmatrix} \epsilon_s & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_s & \epsilon_t \\ 0 & \epsilon_t & \epsilon_s \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

with $\epsilon_s \equiv M/\Lambda$ and $\epsilon_t \equiv x_\nu v/\Lambda$.

Note, that while the mass hierarchy in the charged lepton sector is generated via the wave function overlaps in the usual way, the non-degeneracy in the neutrino sector is actually due to the two different kind of Majorana term allowed on the UV brane. As discuss below, the required neutrino mass hierarchy will actually require $\epsilon_s \sim \epsilon_t$. This is more naturally achieved if the singlet Majorana mass is actually also originating from an operator with a singlet scalar field VEV. This could for example be enforced by imposing an additional Z_3 global symmetry, and an additional scalar field ξ with VEV $\langle \xi \rangle = M$.

After integrating out the heavy right handed neutrinos, one ends up with a seesaw type Majorana mass matrix of the left handed neutrinos

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{M}}_{\mathbf{M}}^{\nu} &\equiv -\mathcal{M}_{\mathbf{D}}^{\nu} \cdot (\mathcal{M}_{\mathbf{M}}^{\nu})^{-1} \cdot (\mathcal{M}_{\mathbf{D}}^{\nu})^T \\ &= -y_{\nu}^2 \frac{v_H^2 R}{2\Lambda'^2 R'^2} \frac{f_L^2 f_{-\nu}^2}{F_{-\nu}^2} \begin{pmatrix} 1/\epsilon_s & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_s/\Delta & -\epsilon_t/\Delta \\ 0 & -\epsilon_t/\Delta & \epsilon_s/\Delta \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

with $\Delta \equiv \epsilon_s^2 - \epsilon_t^2$. The diagonalization procedure is the same as that of usual A_4 four-dimensional models. The charged lepton mass matrix becomes diagonal once the left-handed fields have been rotated as $L \rightarrow \mathbf{V} \cdot L$ with

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

a symmetric unitary matrix. We emphasize already here the most important properties of the A_4 mass matrices: the left handed rotation needed for diagonalizing the mass matrix is independent of the actual magnitudes of the masses, and the right handed rotation is the unit matrix (i.e. no right handed rotation is necessary). Therefore, the charged lepton masses are

$$\mathbf{V}^* \cdot \mathcal{M}_{\mathbf{D}}^e = f_L \frac{\sqrt{3} v_H v'}{\sqrt{2} R' \Lambda'^2} \begin{pmatrix} y_e f_{-e} & 0 & 0 \\ 0 & y_{\mu} f_{-\mu} & 0 \\ 0 & 0 & y_{\tau} f_{-\tau} \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

The charged lepton mass hierarchies are due to the hierarchies on $f_{-e, -\mu, -\tau}$ and the A_4 embedding of the right handed charged leptons allows for three different c 's which can be set to generate the physical charged lepton masses.

Next we move to the light neutrino sector. We work in the basis of diagonal charged leptons which is obtained by performing the rotation on the entire left-handed doublet with \mathbf{V} . Then, the light neutrino Majorana mass matrix is diagonalized by the Harrison-Perkins-Scott (HPS) matrix [18]

$$U_{\text{HPS}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

corresponding to $\theta_{13} = 0$, $\sin^2(2\theta_{12}) = 8/9$ and $\theta_{23} = \pi/4$. This tri-bimaximal mixing matrix is very close to the the best fit obtained from present oscillation data. The neutrino mass eigenstates are

$$U_{\text{HPS}}^T \cdot \mathbf{V}^* \cdot \tilde{\mathcal{M}}_{\mathbf{M}}^{\nu} \cdot \mathbf{V} \cdot U_{\text{HPS}} = -\tilde{m} \begin{pmatrix} \frac{1}{\epsilon_s + \epsilon_t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\epsilon_s} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\epsilon_t - \epsilon_s} \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

where the overall mass scale is set by the combination

$$\tilde{m} \equiv y_{\nu}^2 \frac{v_H^2 R}{2\Lambda'^2 R'^2} \frac{f_L^2 f_{-\nu}^2}{F_{-\nu}^2}, \quad (2.16)$$

The neutrino mass-squared splittings are given by

$$\Delta m_{12}^2 \equiv |m_1|^2 - |m_2|^2 = \left| \frac{\tilde{m}}{\epsilon_s} \right|^2 \left[\frac{1}{(1+r)^2} - 1 \right], \quad (2.17)$$

$$\Delta m_{23}^2 \equiv |m_2|^2 - |m_3|^2 = \left| \frac{\tilde{m}}{\epsilon_s} \right|^2 \left[1 - \frac{1}{(1-r)^2} \right], \quad (2.18)$$

with $r \equiv \epsilon_t/\epsilon_s$, $|\Delta m_{12}^2| = \Delta m_{\text{sol}}^2$ and $|\Delta m_{23}^2| = \Delta m_{\text{atm}}^2$. Combining the last two relations we see that r solves the following algebraic equation:

$$r^3 - 3r - 2 \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = 0, \quad (2.19)$$

where $x = \Delta m_{\text{sol}}^2/\Delta m_{\text{atm}}^2$ for $|r| < 2$ or $x = -\Delta m_{\text{sol}}^2/\Delta m_{\text{atm}}^2$ when $|r| > 2$. Finally, ϵ_s is found by inverting one of the two relations, for instance,

$$\epsilon_s = \frac{\tilde{m}}{\sqrt{\Delta m_{\text{atm}}^2}} \times \left(\left| 1 - \frac{1}{(1-r)^2} \right| \right)^{-1/2}. \quad (2.20)$$

When we impose the measured values [7] for the mass splittings

$$\Delta m_{\text{sol}}^2 \simeq 7.9 \times 10^{-5} \text{ eV}^2, \quad \Delta m_{\text{atm}}^2 \simeq 2.6 \times 10^{-3} \text{ eV}^2, \quad (2.21)$$

we find four solutions for the neutrino mass spectrum corresponding to

$$r \approx \{0.79, 1.19, -2.01, -1.99\}. \quad (2.22)$$

The first (last) 2 solutions lead to a normal (inverted) hierarchy spectrum. Another general feature of A_4 is a prediction of the absolute neutrino mass scale, \tilde{m} . We find that the mass of the heaviest neutrino ends up being slightly above the atmospheric splitting.

We close this section by presenting a set of numerical values for the Lagrangian parameters which reproduce the mass spectra. The brane positions are $R^{-1} = 10^{19} \text{ GeV}$ and $R'^{-1} = 1.5 \text{ TeV}$, in order to keep the KK gauge bosons (with $m_{KK} = 3 - 4 \text{ TeV}$) in the reach of the LHC. The Higgs VEV turns out to be $v_H = 255.5 \text{ GeV}$, which is obtained after matching the bulk gauge couplings such that the weak boson masses as well as the fine-structure constant at the Z pole take their physical values: $m_W = 80.40 \text{ GeV}$, $m_Z = 91.19 \text{ GeV}$ and $\alpha_{\text{em}}^{-1}(m_Z) = 128$. As usual [22], we get a Higgs VEV slightly above the SM value due to the suppression of the W, Z wave functions on the IR brane and the additional contributions to the gauge boson masses from the wave function curvature terms.

The charged lepton masses are reproduced using the following choice of parameters: $c_L = 0.51$, $c_e = -0.75$, $c_\mu = -0.59$, $c_\tau = -0.51$, $y_e = 1.53$, $y_\mu = 1.55$, $y_\tau = 3.04$. Indeed, together with $\Lambda' = R'^{-1}$ and $v'R' = 0.1$, one gets $m_e = 0.511 \text{ MeV}$, $m_\mu = 106 \text{ MeV}$ and $m_\tau = 1.77 \text{ GeV}$. We show later on that the model defined with this set of parameters passes all leptonic electroweak precision bounds while perturbation theory remains under control up to $E = 3m_{KK}$. As we saw above, in the neutrino sector the solar and atmospheric mass splittings, eq. (2.21), reduce the ratio r to only four possible values, eq. (2.22). The corresponding mass spectra, as well as the Majorana masses on the UV brane (for $\Lambda = R^{-1}$, $x_\nu = 1$ and $c_\nu = -0.37$), are reported in table 2.

r	m_1	m_2	m_3	MR	vR
-2.01	53	54	18	-0.015	0.030
-1.99	55	54	18	-0.015	0.029
0.79	6.0	11	52	0.074	0.059
1.19	4.5	10	52	0.079	0.095

Table 2: Approximate numerical values of the neutrino masses and UV VEVs for the 4 possible solutions of $r \equiv \epsilon_t/\epsilon_s$. The masses are given in units of 10^{-3} eV.

3. Higher order corrections and perturbativity bounds

After spontaneous breaking of A_4 the lowest dimensional boundary terms of (2.6) generate the tri-bimaximal pattern for the mixing angles as well as the charged lepton and neutrino mass hierarchies. In order to consider this construction as really meaningful, it is necessary to study its stability under corrections from higher dimensional terms on the branes as well as radiative corrections. Another motivation for looking at deviations from tri-bimaximal mixings is the possibility to get a non-zero θ_{13} , in case it turns out to be non-vanishing experimentally.

We focus first on the UV brane and show that the effects of higher dimensional A_4 invariants lead to the same pattern for the Majorana mass matrix, except that some entries become complex. This is the only source of non-zero θ_{13} in this model. We start with writing down the most general higher order operators allowed on the UV boundary:

$$-\delta\mathcal{L}_{\text{UV}} = \sum_{n \geq 2} \lambda_n \frac{\phi^n}{\Lambda^n} \psi_\nu \psi_\nu + \text{h.c.} \quad (3.1)$$

with n insertions of ϕ . Now due to the Z_2 -preserving VEV $\langle \phi \rangle = (v, 0, 0)$, it is straightforward to show that ϕ^3 transforms as ϕ under A_4 . Thus all the higher order effects that cannot be reabsorbed into a redefinition of the lowest order parameters arise from one operator:

$$-\delta\mathcal{L}_{\text{UV}} = \lambda_2 \frac{\phi^2}{\Lambda^2} \psi_\nu \psi_\nu + \text{h.c.} \quad (3.2)$$

This term contains actually three independent A_4 invariants which lead to complex diagonal elements of the Majorana mass matrix and the pattern of (2.10) is to be replaced by:

$$\mathcal{M}_{\text{M}}^\nu = F_{-\nu}^2 R^{-1} \begin{pmatrix} \epsilon_s + \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_s + \delta_2 & \epsilon_t \\ 0 & \epsilon_t & \epsilon_s + \delta_2^* \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

with $\delta_i \sim \mathcal{O}(v^2/\Lambda^2)$ and δ_1 real. The complex entries induce both a deviation of θ_{12} from its maximal value and a non-zero $\sin(\theta_{13})$ of $\mathcal{O}(\delta)$.

On the IR brane, we show that the higher order corrections can only affect θ_{12} , as long as Z_3 remains unbroken on this boundary. Again we start with the most general higher dimensional invariants which take the following form:

$$-\delta\mathcal{L}_{\text{IR}} = \sum_{i=e,\mu,\tau} \sum_{n \geq 2} \lambda'_{i,n} \bar{\Psi}_L \frac{\phi^n}{\Lambda^{n+1}} H \Psi_i + \sum_{n \geq 1} \kappa_n \bar{\Psi}_L \frac{\phi^n}{\Lambda^{n+1}} H \Psi_\nu + \text{h.c.} \quad (3.4)$$

Since $\langle \phi' \rangle = (v', v', v')$ is Z_3 symmetric, ϕ'^2 transforms as $1 + \phi'$. Then non-trivial corrections reduce to terms with only one ϕ' insertion:

$$-\delta\mathcal{L}_{\text{IR}} = \frac{\kappa_1}{\Lambda'^2} \bar{\Psi}_L \phi' H \Psi_\nu + \text{h.c.} \quad (3.5)$$

Since it is suppressed by only one power of (v'/Λ') compared to the lowest order terms, this operator may easily destabilize the HPS pattern. The extra Z_2 flavor symmetry is useful here, as we now discuss. We choose the A_4 triplets odd under this additional Z_2 , and then this operator is forbidden by the Z_2 symmetry. However, since $\phi'^2 = 1 + \phi'$, the next Z_2 even operator generates the same type of correction as the one linear in ϕ' but with a higher suppression factor. In that case (3.5) has to be replaced by

$$-\delta\mathcal{L}_{\text{IR}} = \frac{\kappa_2}{\Lambda'^3} \bar{\Psi}_L \phi'^2 H \Psi_\nu. \quad (3.6)$$

This operator corrects the Dirac neutrino mass matrix by introducing off diagonal elements of $\mathcal{O}(v'^2/\Lambda'^2)$. As this term contains three independent $A_4 \times Z_2$ invariants, the diagonal Dirac matrix of (2.9) becomes:

$$\mathcal{M}_{\mathbf{D}}^\nu = y_\nu f_L f_{-\nu} \frac{v_H}{\sqrt{2} R' \Lambda'} \begin{pmatrix} 1 + \epsilon_1 & \epsilon_2 & \epsilon_3 \\ \epsilon_3 & 1 + \epsilon_1 & \epsilon_2 \\ \epsilon_2 & \epsilon_3 & 1 + \epsilon_1 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

with $\epsilon_i \sim \mathcal{O}(v'^2/\Lambda'^2)$. One can easily check (see appendix B) that only $\sin(\theta_{12})$ is affected and its deviation from the HPS prediction is of $\mathcal{O}(v'^2/\Lambda'^2)$.

There is another important feature we want to stress at that point, which is the fact that there is no correction to the charged lepton mass matrix. This means that the $\Psi_{e,\mu,\tau}$ fields need not be rotated again to get to the diagonal charged leptons basis even in the presence of these higher order terms. As we shall see in section 5, an immediate consequence is the absence of tree level LVF in this model, even when higher dimensional operators on are considered.

We close this section by presenting an NDA estimates for the allowed sizes of the IR brane localized operators. These bounds are important for estimating how large the deviations from the HPS mixing matrix could actually be. For this purpose, we write down again the most general Lagrangian on the IR brane

$$-\mathcal{L}_{\text{IR}} = \frac{y_\nu}{\Lambda'} \bar{\Psi}_L H \Psi_\nu + \frac{y_{e,\mu,\tau}}{\Lambda'^2} \bar{\Psi}_L H \phi' \Psi_{e,\mu,\tau} + \frac{\kappa_2}{2\Lambda'^3} \bar{\Psi}_L H \phi'^2 \Psi_\nu + \text{h.c.} \quad (3.8)$$

We require that the theory remains perturbative up to scale $E_N = N m_{KK}$, which corresponds to the first N^{th} KK modes of the theory being weakly coupled. We should require $N \geq 3$, such that at least the first few KK modes can be treated in perturbation theory. We can then systematically require that by the time this energy E_N is reached all loop corrections are still smaller than the lowest order terms. For example, for the first operator above there is a one loop correction to the Yukawa vertex itself (figure 1a), which implies

$$\frac{y_\nu^3}{16\pi^2} \frac{E_N^3}{\Lambda'^3} \leq y_\nu \frac{E_N}{\Lambda'}, \quad (3.9)$$

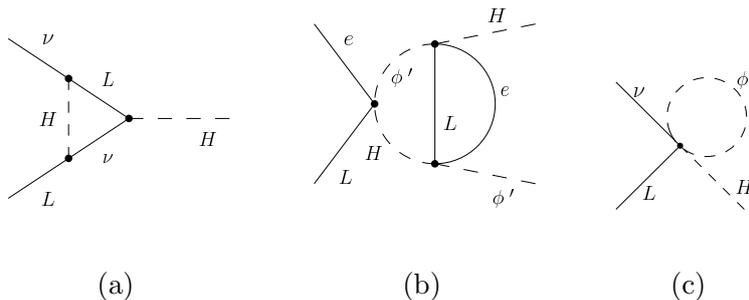


Figure 1: Loop diagrams correcting the operators localized on the IR brane which are relevant for NDA estimates.

where the linear running of the coupling has been taken into account. Recalling $m_{KK}R' \simeq 2$, this implies for $\Lambda' = R'^{-1}$ the perturbativity constraint

$$y_\nu \leq 2. \quad (3.10)$$

Similarly, for the second operator there is a two-loop correction to the tree-level operator (figure 1b), we get

$$\frac{y_e^3}{(16\pi^2)^2} \frac{E_N^6}{\Lambda'^6} \leq y_e \frac{E_N^2}{\Lambda'^2} \rightarrow y_e \leq 4 \quad (3.11)$$

again for $\Lambda' = R'^{-1}$. Finally, the third operator gives a one-loop correction to the first operator (figure 1c), which implies the relation

$$\frac{\kappa_2}{16\pi^2} \frac{E_N^3}{\Lambda'^3} \leq y_\nu \frac{E_N}{\Lambda'} \rightarrow \kappa_2 \leq 4y_\nu \leq 8. \quad (3.12)$$

We can then estimate that the higher dimensional terms corrections to $\sin(\theta_{12})$ are suppressed compared to the lowest order term by at least $4(v'R')^2$.

We now apply the same arguments on the UV brane where we have

$$-\mathcal{L}_{UV} = \frac{M}{2\Lambda} \psi_\nu \psi_\nu + x_\nu \frac{\phi}{2\Lambda} \psi_\nu \psi_\nu + \lambda_2 \frac{\phi^2}{4\Lambda^2} \psi_\nu \psi_\nu + \text{h.c.} \quad (3.13)$$

We require that the theory remains perturbative up to the natural scale on that boundary, namely until $E = R^{-1}$. First of all we focus on the last operator which contribute at one loop to its own vertex (figure 2d) which implies the usual constraint

$$\lambda_2 \leq 4\pi, \quad (3.14)$$

where we assumed $\Lambda = R^{-1}$. On the other hand, the second operator induces one-loop corrections to the mass M , the third operator, as well as its own vertex. From the diagrams of figures 2a, 2b and 2c we derive the following relations:

$$x_\nu \leq 4\pi\sqrt{\epsilon_s}, \quad x_\nu \leq \lambda_2^{1/4} \sqrt{4\pi} \leq (4\pi)^{3/4} \sim 7, \quad x_\nu \leq 4\pi. \quad (3.15)$$

We showed in the previous section that in order to reproduce the observed hierarchical neutrino mass splittings, one must have $\epsilon_s \sim \epsilon_t$ with $\epsilon_t = x_\nu(vR)$. Hence assuming a not

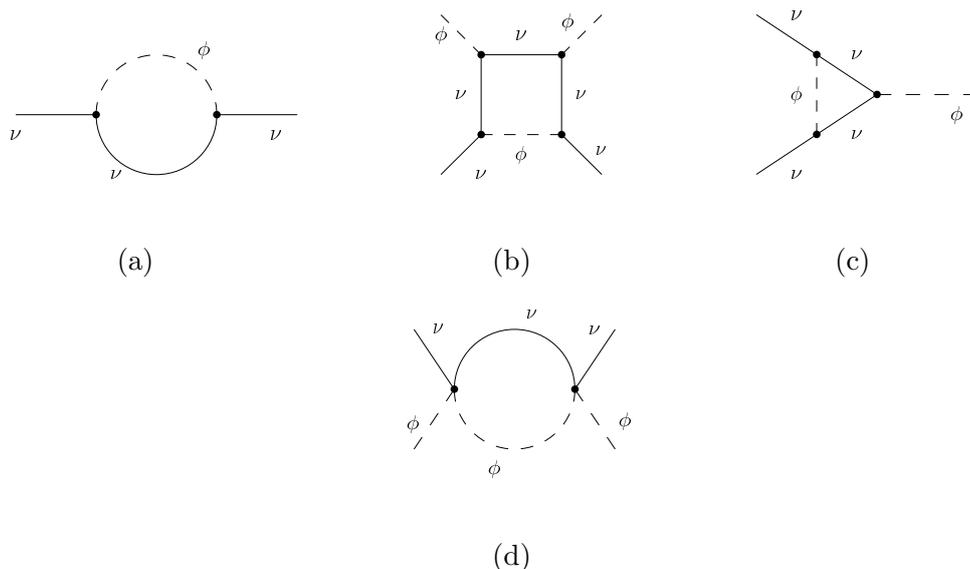


Figure 2: Loop diagrams illustrating the NDA estimates on the UV brane.

so small suppression factor $vR \sim 0.1$, such that θ_{13} is not dramatically tiny, the first of the above relations rewrites as $x_\nu \leq 16\pi^2(vR) \sim 15$. Thus we end up with the perturbative constraint

$$x_\nu \leq 7. \tag{3.16}$$

4. Numerical scans and electroweak precision bounds

One of the main constraints in models with new physics at the TeV scale are the electroweak precision measurements (EWPM). For RS models with custodial symmetry the generic bound on the KK scale is about $m_{KK} \geq 3 \text{ TeV}$, mostly from the contribution to the S-parameter [20]. Here we will check that the lepton sector of our model indeed passes these tests for KK scales of order 3 TeV.^{2,3}

The simplest way of checking the electroweak precision constraints in an RS model with bulk fields is to canonically normalize the SM gauge fields, and to determine the parameters g_5 , g'_5 and v_H by requiring that the measured values of M_W, M_Z and the electromagnetic coupling e are reproduced. This choice is somewhat unconventional, since M_W is less accurately measured than G_F , however it simplifies the matching of the 5D parameters to the observables significantly. In this scheme all corrections to electroweak precision observables will be contained in the fermion-gauge boson vertices, which can be simply calculated by wave function overlaps, and compared to the SM predictions in terms

²It is possible to cancel the S-parameter by tuning all LH bulk fermion masses to be ~ 0.5 [23], as it is necessary in higgsless models [24]. In this case however one does not get any mass hierarchies and those need to be introduced by hand as in [12].

³See also [25] for an attempt to reproduce the lepton masses and mixings with a lower KK mass scale.

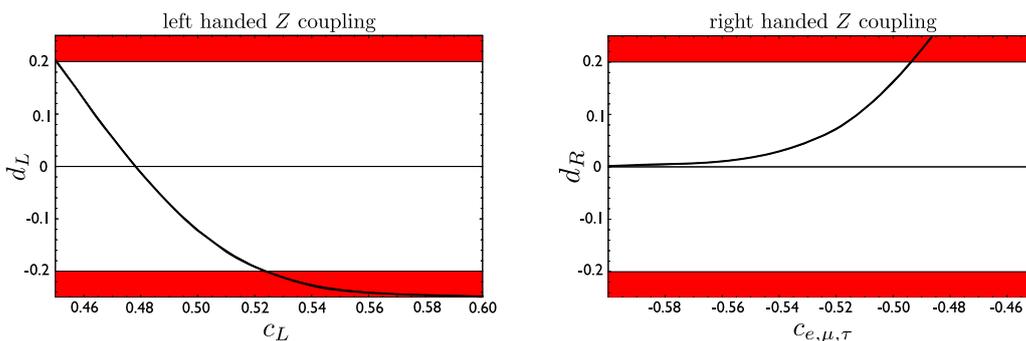


Figure 3: Deviation from SM Z couplings of l_L and l_R as function of c 's. $d_L = (g_Z^L - g_{Z,SM}^L)/g_{Z,SM}^L$ and $d_R = (g_Z^R - g_{Z,SM}^R)/g_{Z,SM}^R$ are plotted in percent units. We took $R'^{-1} = 1.5$ TeV and used $m_W = 80.403$ GeV, $m_Z = 91.1876$ GeV and $e = e(\mu = m_Z) = \sqrt{4\pi/128}$ as physical input observables. The red regions are excluded by EWPM in the leptonic sector.

of the above input parameters, which for the lepton- Z -couplings are

$$g_{Z,SM}^L = e \left(\frac{1}{2} - \frac{m_W^2}{m_Z^2} \right) \frac{m_Z}{m_W \sqrt{1 - \frac{m_W^2}{m_Z^2}}}, \quad (4.1)$$

$$g_{Z,SM}^R = e \frac{m_Z}{m_W} \sqrt{1 - \frac{m_W^2}{m_Z^2}}. \quad (4.2)$$

In a warped extra dimension the couplings of the left and right handed charged leptons are:

$$g_Z^L \simeq \frac{1}{2} \int_R^{R'} dz \left(\frac{R}{z} \right)^4 \left[[g_{5L} a^{L,3}(z, m_Z) + \tilde{g}_5 a^X(z, m_Z)] \chi_{c_L}(z)^2 \right] \quad (4.3)$$

$$g_Z^{R,i} \simeq \frac{1}{2} \int_R^{R'} dz \left(\frac{R}{z} \right)^4 \left[[g_{5R} a^{R,3}(z, m_Z) + \tilde{g}_5 a^X(z, m_Z)] \psi_{c_i}(z)^2 \right]. \quad (4.4)$$

with $a(z, m_Z)$ the wave functions of the three neutral gauge fields containing the physical Z , while the various g_5 's denote the bulk gauge couplings.⁴ The origin of the deviations from the SM predictions is the non-flatness of the Z wave function. If the Z boson was massless, its wave function would be flat and the lepton couplings would become universal thanks to the orthonormality of their wave functions. However as soon as the A_4 symmetry is imposed, the left handed lepton couplings remain flavor blind. In the ZMA the Z coupling depends only on the bulk mass parameter c_L . As usual we assume that the SM leptons are localized on the UV brane, $c_L > 1/2$, $c_{e,\mu,\tau} < -1/2$. Since the τ is the heaviest lepton, it has to be localized closest to the IR brane, so it will be most sensitive to the non-flatness of the Z close to the IR brane, and so one expect the biggest deviations in the τ couplings.

⁴For completeness we review in appendix C how this quantities are calculated in terms of physical observables.

The couplings of the charged leptons have been measured very precisely at the LEP experiment [7]. Here we will require that all lepton couplings are within 0.2% of the SM prediction. The plots of figure 3 show the deviation of the charged lepton couplings to the Z from their SM values as a function of the c 's. We see that, while the $c_{e,\mu,\tau}$ can be as close to $-1/2$ as required to reproduce the charged fermion hierarchy, c_L cannot depart too much from $1/2$ to remain within the experimental bound. The fact that c_L is preferred to be close to $1/2$ may be surprising at first, but we remind the reader that these vertex corrections also include the S-parameter. This is actually a welcome fact, since in order to keep the τ Yukawa coupling perturbative we have to take c_L close to $1/2$ anyway. Thus we conclude from figure 3 that with a 3 TeV KK mass scale the electroweak precision constraints in the lepton sector are safely satisfied.

Next we want to scan over the model's parameters and show explicitly that the neutrino mixing angles, which deviate from the HPS pattern in the presence of higher order operators, are within the allowed range of the existing results of the neutrino experiments. Once the usual RS solution to the hierarchy problem is imposed, we still have 12 free parameters in our setup: 5 c 's, 5 Yukawas and 2 VEVs relevant for lepton masses v, v' , while adding higher order operators brings 6 more coupling constants. We use the measured lepton masses and the best fit neutrino mass splittings to fix 5 of the lowest order parameters, which leaves still a lot of freedom to explore. Therefore we add some mild assumptions in order to simplify the parameter space and to try to only focus on the main predictions without having to go into the details of the structure of the higher dimensional operators. First of all we impose $c_\tau = -c_L$ and keep c_L as a free parameter. We also take the Yukawas on the IR brane to saturate the perturbative bounds: $y_{e,\mu,\tau} = 2y_\nu = 4$. Thus imposing $m_\tau = 1.77$ GeV, $m_e = 0.511$ MeV and $m_\mu = 106$ MeV in turn fixes v' and $c_{e,\mu}$ as functions of c_L . Hence all IR brane effects will be encoded in one parameter c_L , which is constrained by the EWPM as discussed above. On the UV brane the solar and atmospheric splittings fix the ratio M/v and the overall neutrino mass scale. Then taking $x_\nu = 1$ we end up with $v = v(c_\nu)$ as the only free parameter on this boundary. Furthermore, $(vR)^2$ controls the size of θ_{13} generated through higher order corrections. Finally we present in figure 4 some contours of the mixing angles in the plane (c_L, c_ν) when one among the possible combinations of higher order invariants are included on both branes. We considered separately the effect on θ_{12} from the IR brane and the predictions for all angles from the UV brane. In order to demonstrate the robustness of the tri-bimaximal pattern under higher order corrections in this model we have selected the worst case where these operators saturate their perturbative limits, namely for $\lambda_2 = 4\pi$ and $\kappa_2 = 8$. We conclude from figure 4 that, even when the deviations from HPS angles are the largest possible, there is still a viable region satisfying the constraints $\sin^2(2\theta_{13}) < 0.19$ (90CL), $\sin^2(2\theta_{23}) > 0.92$ (90CL) and $0.73 \leq \sin^2(2\theta_{12}) \leq 0.95$ (3σ) [7, 26]. Obviously the smaller the higher order terms are the closer one would get to the HPS pattern.

5. Constraints from lepton flavor violation

Flavor models usually predict new sources of flavor violations, and so are only viable when the flavor scale is pushed to very high values. The flavor scale for quarks in the usual

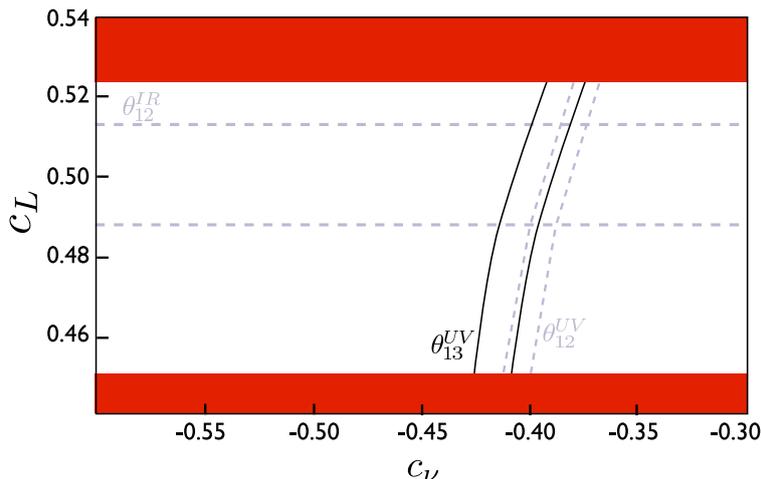


Figure 4: Scan of the parameter space reduced to (c_L, c_ν) as motivated in the text. The red regions are excluded by electroweak precision constraint on the Z coupling. We then show within this region some contours of the mixing angles delineating the largest values we typically obtain in the presence of higher dimensional corrections. The two horizontal contours are for the following values of $\sin^2(2\theta_{12}) = 0.90, 0.95$ (from bottom to top) where only the IR higher dimensional operator is added with $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ and $\epsilon_3 = 8(v'R')^2$. The oblique lines are contours of $\sin^2(2\theta_{13}) = 0.01, 0.19$ (from left to right) and contours of $\sin^2(2\theta_{12}) = 0.90, 0.95$ (from left to right) generated by the higher order Majorana mass on the UV brane, for $\delta_1 = \delta_2 = 0$ and $\delta_3 = 4\pi(vR)^2$.

anarchic RS flavor models is around 20 TeV [9]. Thus it is very important to understand what the possible sources of lepton flavor violation (LFV) are in this model of lepton masses. Generically there are two types of LFV sources: tree-level LFV via the exchange of heavy neutral particles (like Z') or off-diagonal Z couplings, or loop induced rare decays via charged current interactions.

Tree-level LFV operators have been considered in [11] (see also [27]), and it was found that the lepton flavor scale is at least 5 TeV, and larger for smaller brane Yukawa couplings. We will first show here that the structure of the A_4 symmetry used here is such that all tree-level sources of lepton flavor violation are absent in this theory. This can be seen in the following way. By the choice of the A_4 representation the wave functions of the left handed SM fermions are flavor universal (since they have the same c_L). So the only source of flavor violations in the charged lepton sector is the choice of different $c_{e,\mu,\tau}$ necessary for the mass hierarchies, and the brane Yukawa matrix (2.8). The couplings to the neutral bulk fields like the KK tower of the Z are controlled by the $c_{e,\mu,\tau}$, and will be non-universal. Thus any RH rotation to diagonalize the brane Yukawa matrix would induce tree-level LFV's. However, we have seen that one of the magic properties of the A_4 models is that the charged lepton mass matrix is diagonalized by a single left handed rotation, and no right handed rotation is necessary to diagonalize the mass matrix, as described in (2.13). The left-handed rotation is harmless, since the bulk wave functions are universal in the LH sector, while in the dangerous RH sector there is no rotation necessary. This implies that there is a basis where the kinetic terms and the mass terms for the charged leptons

are simultaneously diagonal, and so as a consequence there is no tree-level LFV in this model. The lepton embedding in A_4 provided us with the necessary conditions to ensure the absence of LFV, namely universal left handed c 's *and* the absence of redefinition of the right handed fields. Moreover we want to stress that this result remains unchanged once higher dimensional brane operators are considered as they were shown not to affect the rotation matrices of the charged leptons.

Thus all lepton flavor violation arises from charged current interactions. In the SM loops involving neutrinos give extremely small contributions to rare decays, however in the presence of heavy KK neutrinos this is no longer the case. For example in the case of the original neutrino mass model of [2] the large splittings of the heavy neutrinos, together with their unsuppressed couplings to the SM fields yield a large loop-induced $\mu \rightarrow e\gamma$ rate. In fact, Kitano [19] showed that a bound of $m_{KK} > 25$ TeV applies in this case. In our case however there is a generic softening of this bound, due to the fact that the SM fermions are now localized close to the UV brane, and therefore the charged current interactions with the KK neutrinos will be suppressed. This will happen generically in any model with bulk fermions. For the particular case of the A_4 model the situation is even better: since the second Yukawa coupling of the charged leptons involving the right handed neutrinos is uniform due to the A_4 representations, the interactions with all higgses (neutral or charged) will be diagonalized in the same basis where the masses are diagonalized. So one only needs to consider the exchange of charged W's and their KK towers, together with KK neutrinos. In fact, just as in the SM the loop induced contribution here will be finite. The reason for that is that the allowed additional brane localized counter term is of the form $LH\phi'\sigma^{\mu\nu}e_RF_{\mu\nu}$, and this will be diagonalized once the charged lepton mass matrix is diagonal. This is again a specific property of the structure of the A_4 invariants.

Next we will give a rough estimate of the KK mass bound from these processes. We will focus on loop induced $\mu \rightarrow e\gamma$ decays via to exchange of a W-bosons and KK neutrinos. The branching fraction from the exchange of a heavy neutrino and a W was calculated by Cheng and Li [28] and is given by (assuming the coupling to the W given by the usual SM gauge coupling g):

$$B(\mu \rightarrow e\gamma) = \frac{3\alpha}{8\pi} \left| \sum_i U_{\mu i}^* U_{ei} F\left(\frac{m_i^2}{M_W^2}\right) \right|^2 \tag{5.1}$$

where the sum over i indicates the sum over a generation of KK fermions, U is the PMNS mixing matrix between the SM charged leptons and a generation of KK neutrinos, and the function F is given by

$$F(z) = \frac{1}{6(1-z)^4} (10 - 43z + 78z^2 - 49z^3 + 18z^3 \log z + 4z^4). \tag{5.2}$$

First we specify to the case of the exchange of a SM W and a KK mode neutrino. For $z \gg 1$ the approximate expression is $F(z) \approx \frac{2}{3} + 3\frac{\log z}{z}$. Also, the coupling between the zero mode SM fermions, a KK neutrino and the zero mode W is suppressed at least by one factor of f_L , so there is an overall f_L^4 appearing in the rate. This is the main difference compared to the analysis of [19]: there all SM fermions were localized on the TeV brane,

so the interaction with a KK neutrino was unsuppressed. The leading term drops out due to the unitarity of U , and so we are left with the approximation

$$B(\mu \rightarrow e\gamma) < f_L^4 \frac{54\alpha}{\pi} \frac{m_W^4}{m_{KK}^4} \frac{\delta m_{KK}^2}{m_{KK}^2} \log^2 \frac{m_{KK}}{m_W}, \quad (5.3)$$

where δm_{KK} is the characteristic splitting among the KK modes in a given generation, given by $\frac{\delta m_{KK}^2}{m_{KK}^2} \approx \frac{y^2 v_H^2}{2m_{KK}^2}$. We find, that even for Yukawa coupling close to the perturbative limit $y \sim 3$, and c_L close to the composite case $c_L = 0.5$ the branching ratio is two orders of magnitude below the experimental bound of 10^{-11} for a KK mass scale of 3 TeV.

A slightly bigger contribution is obtained using the diagram where in addition to the KK neutrino one exchanges a KK W. In this case the gauge coupling could be as large as $gf_L \sqrt{\log R'/R}$. In addition the branching ratio (5.1) is suppressed by $(m_W/m_{KK})^4$ since the decay rate $\Gamma(\mu \rightarrow e\gamma)$ scales as the fourth inverse power of the exchanged gauge boson mass. One needs to take the function $F(z)$ at values $z \sim 1$ for which it is approximately given by $F(z \sim 1) \sim \frac{17}{12} + \frac{3}{20}(1-z)$. The universal piece drops out again due to the unitarity of U and we get an upper bound to the resulting branching fraction of order

$$B(\mu \rightarrow e\gamma) < f_L^4 \frac{27\alpha}{800\pi} \frac{m_W^4}{m_{KK}^4} \frac{\delta m_{KK}^2}{m_{KK}^2} \log^2 \frac{R'}{R}, \quad (5.4)$$

which again numerically is smaller than 10^{-13} for a 3 TeV KK mass. Clearly since the numerical contributions turn out to be not that far from experimentally interesting region it would be very interesting to perform a more detailed calculation of the $\mu \rightarrow e\gamma$ branching fraction in this model, including complete sums over KK towers (and also in general RS models with bulk fermions and Majorana neutrinos).

6. Conclusions

Warped extra dimensions provide a successful framework for flavor models: hierarchies in the masses and the mixing angles are naturally generated. Since neutrinos do not show hierarchies in the mixing angles, and only a mild hierarchy in the mass spectrum, one should introduce additional symmetries in the lepton sector. In this paper we have augmented the lepton sector of the RS model with the most successful and economical global symmetry used for neutrino mass models, the discrete non-abelian group A_4 . With appropriate assignments of the A_4 representations we can naturally achieve a successful lepton mixing pattern, while the charged lepton mass hierarchy is implemented as usual in RS models via wave function overlap. The A_4 symmetry also eliminates all tree-level sources of LFV in the neutral current sector, and so significantly lowers the bound on the KK mass scale. LFV appears only through charged current loops, and we estimated that the rate of $\mu \rightarrow e\gamma$ is safely below the current experimental bound. So the most significant bounds on this model come from the EWP measurements, and as usual with KK mass scales of order 3 TeV these corrections will be also safely within the experimental bounds.

Acknowledgments

We thank Tony Gherghetta, Matt Reece and Andi Weiler for useful discussions, and to Andi Weiler for comments on the manuscript. The research of C.C. and Y.G. is supported in part by the NSF grant PHY-0355005. C.C. was supported in part by the NSF grant PHY05-51164 at the KITP. The research of C.D. and C.G. is supported in part by the RTN European Program MRTN-CT-2004-503369, by the EU FP6 Marie Curie RTN “UniverseNet” (MRTN-CT-2006-035863) and by the CNRS/USA exchange grant 3503.

A. Summary of A_4 group theory

A_4 is an $SO(3)$ subgroup which leaves the tetrahedron invariant. It has 12 elements, two generators (S, T) connecting all of them, and four irreducible representations: one three-dimensional (3) and three one-dimensional ($1, 1'$ and $1''$, with $(1')^* = 1''$). Their products decompose as:

$$\begin{aligned}
 1' \times 1'' &= 1, & 1 \times 3 &= 3 \\
 1' \times 1' &= 1'', & 1' \times 3 &= 3 \\
 1'' \times 1'' &= 1', & 1'' \times 3 &= 3 \\
 3_x \times 3_y &= 3_1 + 3_2 + 1 + 1' + 1'' & & (A.1)
 \end{aligned}$$

where for the last line, with $3_x = (x_1, x_2, x_3)$, $3_y = (y_1, y_2, y_3)$ and working in a basis where the three-dimensional representation of S is diagonal:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A.2)$$

one has:

$$1 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \quad (A.3)$$

$$1' = x_1 y_1 + \omega^2 x_2 y_2 + \omega x_3 y_3 \quad (A.4)$$

$$1'' = x_1 y_1 + \omega x_2 y_2 + \omega^2 x_3 y_3 \quad (A.5)$$

$$3_1 = (x_2 y_3, x_3 y_1, x_1 y_2) \quad (A.6)$$

$$3_2 = (x_3 y_2, x_1 y_3, x_2 y_1) \quad (A.7)$$

with $\omega = e^{2\pi i/3}$ the cubic root of unity, satisfying:

$$1 + \omega + \omega^2 = 0, \quad \omega^* = \omega^2. \quad (A.8)$$

Note also that one has: $3 \times 1' = 3 \sim u(x_1, \omega x_2, \omega^2 x_3)$, where $u \sim 1'$. The same holds for $3 \times 1''$ with $\omega \rightarrow \omega^2$.

B. $\theta_{13} = 0$ and $\theta_{23} = \pi/4$ at any order on IR brane

We explicitly show in this section that the higher dimensional operators on the IR brane only affect θ_{12} . We recall that the Dirac mass matrix on the IR brane in presence of higher orders is of the form:

$$\mathcal{M}_{\mathbf{D}}^{\nu} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

while at lowest order the Majorana mass matrix on the UV is:

$$\mathcal{M}_{\mathbf{M}}^{\nu} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & d \\ 0 & d & a \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

After the seesaw the Majorana mass matrix for the left-handed neutrinos (in the basis of diagonal charged leptons) shows the following pattern:

$$\tilde{\mathcal{M}}_{\nu} = \begin{pmatrix} b & c & c^* \\ c & g & f \\ c^* & f & g^* \end{pmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

Note that even for real input parameters this matrix has complex entries due to $\omega = e^{2i\pi/3}$ factors that do not cancel out when the left-handed doublet is rotated with \mathbf{V} . If c and g were real, the Majorana mass matrix would be diagonalized with $\theta_{13} = 0$ and $\theta_{23} = \pi/4$. In general it is a 3×3 complex symmetric matrix which thus contains 12 independent parameters. They are the 3 real eigenvalues, the 3 mixing angles and 6 phases. Moreover one can always redefine the neutrino fields to absorb 3 of them, leaving only 2 Majorana phases and a CKM one. Thus with the redefinition $\nu_i \rightarrow e^{i\phi_i} \nu_i$ the mass matrix becomes:

$$\tilde{\mathcal{M}}_{\nu} = \begin{pmatrix} b e^{2i\phi_1} & |c| e^{i(\phi_c + \phi_1 + \phi_2)} & |c| e^{i(\phi_1 + \phi_2 - \phi_c)} \\ |c| e^{i(\phi_c + \phi_1 + \phi_2)} & |g| e^{i(2\phi_2 + \phi_g)} & f e^{i(\phi_2 + \phi_3)} \\ |c| e^{i(\phi_1 + \phi_2 - \phi_c)} & f e^{i(\phi_2 + \phi_3)} & |g| e^{i(2\phi_3 - \phi_g)} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

It is now not difficult to see that this matrix can be made real with $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = -\phi_3$ and $\phi_3 = \phi_c$ provided that the relation $2\phi_c = \phi_g$ holds. Although the expressions of these phases in terms of the input parameters are quite cumbersome, we checked that the latter relation is satisfied in our model. Therefore we conclude that the most general higher dimensional corrections on the IR brane can only modify θ_{12} from its HPS value.

C. Review of gauge breaking via BCs

We shortly review here how the bulk $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ gauge symmetry is broken in this setup. The main goal is to define how to get the gauge boson profiles as we will need them to compute the W and Z couplings to the standard model fermions. We note A^L , A^R and A^X as well as g_{5L} , g_{5R} and \tilde{g}_5 the gauge fields and coupling constants associated with

$SU(2)_L$, $SU(2)_R$ and $U(1)_{B-L}$ respectively. On the UV brane, the gauge symmetry breaks down to the SM gauge group $SU(2)_L \times U(1)_Y$ from Dirichlet BC⁵ for the $SU(2)_R$ fields:

$$z = R : \begin{cases} A_\mu^{R,\pm} = \partial_z A_\mu^{L,\pm} = 0 \\ \partial_z A_\mu^{L,3} = 0 \\ \tilde{g}_5 A_\mu^X - g_{5R} A_\mu^{R,3} = 0 \\ \partial_z (g_{5R} A_\mu^X + \tilde{g}_5 A_\mu^{R,3}) = 0 \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

where $A^\pm \equiv (A^1 \mp iA^2)/\sqrt{2}$. The chiral $SU(2)$'s are broken to the vectorial subgroup on the IR brane by the finite VEV of a Higgs bidoublet $\langle h \rangle = \text{diag}(v_H, v_H)/2$, and the resulting (mixed) BCs are:

$$z = R' : \begin{cases} \partial_z (g_{5L} A_\mu^{L,a} - g_{5R} A_\mu^{R,a}) + \mathcal{V} (g_{5L} A_\mu^{L,a} - g_{5R} A_\mu^{R,a}) = 0 \\ \partial_z (g_{5R} A_\mu^{L,a} + g_{5L} A_\mu^{R,a}) = 0 \\ \partial_z A_\mu^X = 0 \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

where $\mathcal{V} = (R'/R)(g_{5L}^2 + g_{5R}^2)v_H^2/4$. The fifth components of the gauge fields have opposite BC. Obviously, these BCs allow for a massless (flat) mode which is nothing else but the photon field associated with the unbroken $U(1)$ of the (compactified) effective theory, and the KK decomposition is of the form:

$$A_\mu^{L,R,\pm}(x, z) = a^{L,R}(z, m_W) W_\mu^\pm(x) + \dots \quad (\text{C.3})$$

$$A_\mu^{L,R,3}(x, z) = \frac{\tilde{g}_5}{g_{5L,R}} a_0 \gamma_\mu(x) + a^{L,R,3}(z, m_Z) Z_\mu(x) + \dots \quad (\text{C.4})$$

$$A_\mu^X(x, z) = a_0 \gamma_\mu(x) + a^X(z, m_Z) Z_\mu(x) + \dots \quad (\text{C.5})$$

where the \dots stand for heavier KK resonances, and the wave functions are given by $a(z, m) = z(AJ_1(mz) + BY_1(mz))$.

Yet remains the definition of the 5D gauge couplings. For this we have to match the latter on the 4D SM couplings. The fact that there is no $SU(2)_L \times U(1)_Y$ symmetry in the effective 4D action makes the definition of the SM couplings somehow arbitrary. As matching conditions, we choose to recover the measured values of m_W , m_Z and the electric charge e . After having fixed the values of R , R' and the ratio of the left/right gauge couplings, $r \equiv g_{5L}/g_{5R}$, three parameters remain to be determined by the matching procedure, namely g_{5L} , \tilde{g}_5 and v_H . To fit them we proceed as follows. First, we relate \tilde{g}_5 and g_{5L} by imposing that the (canonically normalized) photon couples to the electric charge $Q = T_{3,L} + T_{3,R} - Q_{B-L}/2$. Given the KK decomposition above we get:

$$\frac{1}{e^2} = \left(\frac{1+r^2}{g_{5L}^2} + \frac{1}{\tilde{g}_5^2} \right) R \log(R'/R). \quad (\text{C.6})$$

Then, the charged boson quantization equation fixes the product $g_{5L}v_H$ as a function of m_W . And plugging back these two relations into the neutral boson quantization equation

⁵This can be thought as being the result of a Higgs mechanism in the limit where the localized scalar is decoupled.

allows to find the Higgs VEV as a function of m_Z , m_W and e . Finally to fully determine the wave-functions we need to make the W and the Z are canonical fields by imposing:

$$\int_R^R dz \left(\frac{R}{z} \right) [a^{L,\pm}(z, m_W)^2 + a^{R,\pm}(z, m_W)^2] = 1 \quad (\text{C.7})$$

$$\int_R^R dz \left(\frac{R}{z} \right) [a^{L,3}(z, m_Z)^2 + a^{R,3}(z, m_Z)^2 + a^X(z, m_Z)^2] = 1. \quad (\text{C.8})$$

References

- [1] L. Randall and R. Sundrum, *A large mass hierarchy from a small extra dimension*, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 3370 [[hep-ph/9905221](#)].
- [2] Y. Grossman and M. Neubert, *Neutrino masses and mixings in non-factorizable geometry*, *Phys. Lett.* **B 474** (2000) 361 [[hep-ph/9912408](#)].
- [3] T. Gherghetta and A. Pomarol, *Bulk fields and supersymmetry in a slice of AdS*, *Nucl. Phys.* **B 586** (2000) 141 [[hep-ph/0003129](#)].
- [4] N. Arkani-Hamed and M. Schmaltz, *Hierarchies without symmetries from extra dimensions*, *Phys. Rev.* **D 61** (2000) 033005 [[hep-ph/9903417](#)].
- [5] S.J. Huber and Q. Shafi, *Fermion masses, mixings and proton decay in a Randall-Sundrum model*, *Phys. Lett.* **B 498** (2001) 256 [[hep-ph/0010195](#)];
S.J. Huber, *Flavor violation and warped geometry*, *Nucl. Phys.* **B 666** (2003) 269 [[hep-ph/0303183](#)].
- [6] K. Agashe, G. Perez and A. Soni, *B-factory signals for a warped extra dimension*, *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004) 201804 [[hep-ph/0406101](#)]; *Flavor structure of warped extra dimension models*, *Phys. Rev.* **D 71** (2005) 016002 [[hep-ph/0408134](#)].
- [7] PARTICLE DATA GROUP collaboration, W.M. Yao et al., *Review of particle physics*, *J. Phys.* **G 33** (2006) 1.
- [8] G. Burdman, *Flavor violation in warped extra dimensions and CP asymmetries in B decays*, *Phys. Lett.* **B 590** (2004) 86 [[hep-ph/0310144](#)].
- [9] C. Csáki, A. Falkowski and A. Weiler, *The flavor of the composite pseudo-Goldstone Higgs*, *JHEP* **09** (2008) 008 [[arXiv:0804.1954](#)].
- [10] S.J. Huber and Q. Shafi, *Majorana neutrinos in a warped 5D standard model*, *Phys. Lett.* **B 544** (2002) 295 [[hep-ph/0205327](#)]; *Seesaw mechanism in warped geometry*, *Phys. Lett.* **B 583** (2004) 293 [[hep-ph/0309252](#)].
- [11] K. Agashe, A.E. Blechman and F. Petriello, *Probing the Randall-Sundrum geometric origin of flavor with lepton flavor violation*, *Phys. Rev.* **D 74** (2006) 053011 [[hep-ph/0606021](#)].
- [12] G. Cacciapaglia et al., *A GIM mechanism from extra dimensions*, *JHEP* **04** (2008) 006 [[arXiv:0709.1714](#)].
- [13] C. Csáki, A. Falkowski and A. Weiler, *A simple flavor protection for RS*, [arXiv:0806.3757](#);
C. Csáki, Y. Grossman, G. Perez, Z. Surujon and A. Weiler, to appear.
- [14] M.-C. Chen and H.-B. Yu, *Minimal flavor violation in the lepton sector of the Randall-Sundrum model*, [arXiv:0804.2503](#).

- [15] A.L. Fitzpatrick, G. Perez and L. Randall, *Flavor from minimal flavor violation & a viable Randall-Sundrum model*, arXiv:0710.1869.
- [16] E. Ma and G. Rajasekaran, *Softly broken A_4 symmetry for nearly degenerate neutrino masses*, *Phys. Rev. D* **64** (2001) 113012 [[hep-ph/0106291](#)];
K.S. Babu, E. Ma and J.W.F. Valle, *Underlying A_4 symmetry for the neutrino mass matrix and the quark mixing matrix*, *Phys. Lett. B* **552** (2003) 207 [[hep-ph/0206292](#)];
E. Ma, *A_4 origin of the neutrino mass matrix*, *Phys. Rev. D* **70** (2004) 031901 [[hep-ph/0404199](#)].
- [17] G. Altarelli and F. Feruglio, *Tri-bimaximal neutrino mixing from discrete symmetry in extra dimensions*, *Nucl. Phys. B* **720** (2005) 64 [[hep-ph/0504165](#)]; *Tri-bimaximal neutrino mixing, A_4 and the modular symmetry*, *Nucl. Phys. B* **741** (2006) 215 [[hep-ph/0512103](#)].
- [18] P.F. Harrison, D.H. Perkins and W.G. Scott, *Tri-bimaximal mixing and the neutrino oscillation data*, *Phys. Lett. B* **530** (2002) 167 [[hep-ph/0202074](#)].
- [19] R. Kitano, *Lepton flavor violation in the Randall-Sundrum model with bulk neutrinos*, *Phys. Lett. B* **481** (2000) 39 [[hep-ph/0002279](#)].
- [20] K. Agashe, A. Delgado, M.J. May and R. Sundrum, *RS1, custodial isospin and precision tests*, *JHEP* **08** (2003) 050 [[hep-ph/0308036](#)].
- [21] C. Csáki, C. Grojean, J. Hubisz, Y. Shirman and J. Terning, *Fermions on an interval: quark and lepton masses without a Higgs*, *Phys. Rev. D* **70** (2004) 015012 [[hep-ph/0310355](#)].
- [22] G. Cacciapaglia, C. Csáki, G. Marandella and J. Terning, *The gaugephobic Higgs*, *JHEP* **02** (2007) 036 [[hep-ph/0611358](#)].
- [23] G. Cacciapaglia, C. Csáki, C. Grojean and J. Terning, *Curing the ills of Higgsless models: the S parameter and unitarity*, *Phys. Rev. D* **71** (2005) 035015 [[hep-ph/0409126](#)];
R. Foadi, S. Gopalakrishna and C. Schmidt, *Effects of fermion localization in Higgsless theories and electroweak constraints*, *Phys. Lett. B* **606** (2005) 157 [[hep-ph/0409266](#)].
- [24] C. Csáki, C. Grojean, L. Pilo and J. Terning, *Towards a realistic model of Higgsless electroweak symmetry breaking*, *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004) 101802 [[hep-ph/0308038](#)].
- [25] G. Moreau and J.I. Silva-Marcos, *Neutrinos in warped extra dimensions*, *JHEP* **01** (2006) 048 [[hep-ph/0507145](#)].
- [26] M. Maltoni, T. Schwetz, M.A. Tortola and J.W.F. Valle, *Status of global fits to neutrino oscillations*, *New J. Phys.* **6** (2004) 122 [[hep-ph/0405172](#)].
- [27] G. Moreau and J.I. Silva-Marcos, *Flavour physics of the RS model with KK masses reachable at LHC*, *JHEP* **03** (2006) 090 [[hep-ph/0602155](#)].
- [28] T.P. Cheng and L.F. Li, *Nonconservation of separate μ - lepton and e - lepton numbers in gauge theories with $V+A$ currents*, *Phys. Rev. Lett.* **38** (1977) 381; *Muon number nonconservation effects in a gauge theory with $V A$ currents and heavy neutral leptons*, *Phys. Rev. D* **16** (1977) 1425.