UNIVERSITÉ PARIS-SUD
FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

Spécialité :

Mathématiques

(option Physique Mathématique)

Mémoire présenté par

Stéphane Nonnenmacher

en vue d'obtenir

l'Habilition à diriger les recherches

:

Présenté le 5 juin 2009 à Orsay, devant le jury composé de :

Mlle Viviane Baladi,	Directeur de Recherche, CNRS
M. Nicolas Burq,	Professeur, Université Paris-Sud
M. Patrick Gérard,	Professeur, Université Paris-Sud
M. Frédéric Klopp,	Professeur, Université Paris-Nord
M. Vesselin Petkov,	Professeur, Université Bordeaux I
M. Steve Zelditch,	Professeur, Université Johns Hopkins

après lecture des rapports de MM. Bernard Helffer, Steve Zelditch et Peter Sarnak.

Table des matières

Remerciements

Je dédie ce condensé de mes travaux des 10 dernières années à mon épouse Marion. Elle en a supporté les conséquences les plus néfastes (humeur lunatique, incapacité à prendre du recul), tout en nous permettant, par sa disponibilité et son enthousiasme, de profiter de longs séjours à l'étranger (à Berkeley, Bristol et Montréal), et je l'en remercie. Par son regard extérieur, elle m'a aussi permis de réaliser à quel point la communauté des (enseignants-)chercheurs est singulière dans notre société, non seulement par l'objet de son activité, mais également par son mode de fonctionnement (très international, et basé sur des personnalités individuelles, en absence quasi-totale de rapports hiérarchiques). Cette constatation m'a permis d'apprécier d'autant plus notre métier.

Je souhaite aussi réaffirmer l'affection que je porte à mes parents, leurs encouragements n'ont pas faibli depuis mes études.

Pour éviter de faire des jaloux, je ne citerai pas les amis qui m'ont également, par leurs encouragements et leur affection, soutenu durant ces années à travers lesquelles j'ai migré vers des contrées plus mathématiques.

Cette migration s'est accomplie en parallèle avec l'un de mes plus anciens (et non moins estimés) collaborateurs, Frédédic Faure. Ses intuitions physiques, que j'ai parfois considérées avec un certain scepticisme, se sont la plupart du temps révélées profondes et riches de conséquences.

Mon interaction avec Maciej Zworski est plus récente, mais non moins fructueuse. Je salue sa patience et sa générosité (aussi bien mathématique que gastronomique), grâce auxquelles j'ai pu mettre un pied dans les arcanes de la théorie des résonances. Sans son enthousiasme, je n'aurais probablement pas eu le courage d'affronter les difficultés techniques de l'analyse semiclassique pour parvenir à nos fins. Par son intermédiaire, j'ai entr'aperçu certaines subtilités des EDP dont j'ignorais totalement l'existence.

Un autre bastion mathématique m'a été entr'ouvert, celui de la théorie moderne des systèmes dynamiques (chaotiques), grâce à des remarques et des références très pertinentes de Viviane Baladi. Depuis, nos chemins se sont croisés de plus en plus souvent. Je la remercie aussi d'avoir permis, par sa présence, de panacher quelque peu un jury fortement EDPiste.

Une rencontre scientifique décisive a été celle de Nalini Anantharaman. Son ingénieuse adaptation des méthodes de la théorie ergodique à la mécanique quantique a ouvert de nouvelles voies, je lui suis gré de m'en avoir offert la primeur.

J'ai eu la chance de bénéficier de la première manne de l'ANR, à travers un projet commun avec trois «jeunes chercheurs(ses)» précités, ainsi que Colin Guillarmou, Frédéric Naud, et Dominique Spehner. Nos réunions et échanges réguliers au cours des trois dernières années m'ont permis, là encore, de «solidifier» mes frêles fondations mathématiques. Je les remercie de leur disponibilité et de leur enthousiasme.

Après les «jeunes», parlons un peu des «très jeunes». Un collaborateur inattendu fut Lech Wolowski : en thèse à UC Davis, il prit l'initiative d'entamer une collaboration outre-Atlantique, et se montra ensuite d'une efficacité redoutable. J'ai aussi apprécié de collaborer avec Marcel Novaes, dont la rigueur et la précision d'analyse m'ont impressionné.

N'ayant pas assumé de tâches d'enseignement depuis mon postdoc, mon contact principal avec la gent étudiante a consisté à superviser des stages de maîtrise, DEA ou mastère. Les nombreuses questions posées alternativement par Thomas Picot, Mathieu Rubin et Emmanuel Schenck m'ont souvent remis les idées en place. Je les remercie de leur patience face à ma pédagogie sommaire et mes monologues sans fin. En particulier, je salue l'audace d'Emmanuel, pour avoir «essuyé les plâtres» en travaillant avec moi.

Honneur aux «moins» jeunes m'ayant soutenu au long de ces années. André Voros, mon «père scientifique», m'a laissé voler de mes propres ailes dès mon retour à Saclay, tout en manifestant son intérêt à mon travail, et apportant des commentaires constructifs. Je l'en remercie chaleureusement. Durant ces années, j'ai aussi été constamment encouragé par les «auteurs» de l'ergodicité quantique, Steve Zelditch et Yves Colin de Verdière. En particulier, le premier m'a permis d'effectuer un séjour au MSRI en 2003, dont j'ai tiré grand profit. Il a aussi accepté de faire partie du jury, en dépit d'un agenda assez chargé, et je l'en remercie. Le second a montré un appétit insatiable face aux résultats en construction dans le domaine du chaos quantique, et plus généralement du semiclassique. Son enthousiasme mathématique reste pour moi un exemple. Un soutien fort m'a aussi été apporté, et plusieurs fois réitéré, par Zeev Rudnick et Peter Sarnak. Les discussions avec eux m'ont apporté une indispensable stimulation et une exigence de qualité.

Plus récemment, j'ai aussi pu bénéficié de discussions très constructives avec Nicolas Burq et Vesselin Petkov sur les questions de résonances quantiques, ou plus généralement des problèmes d'EDP. Celles-ci s'efforcent de combler mes lacunes sur ce domaine. D'autre part je les remercie d'avoir accepté de faire partie du jury. J'en suis également gré à Patrick Gérard et Frédéric Klopp, et je remercie Bernard Helffer d'avoir soutenu ma présentation de cette habilitation.

Malgré ma dérive vers les mathématiques, je n'oublie pas mes collègues et amis physiciens. En particulier, je continue d'entretenir des contacts réguliers avec les «Argentins» du chaos quantique, Marcos Saraceno, Eduardo Vergini, et leurs collègues du TANDAR. L'accueil qu'ils m'ont réservé lors de mes séjours là-bas m'a laissé un souvenir très chaleureux. Je dois également remercier mes collègues et amis de la «Bristol school of mathematics», qui est devenue en quelques années un pôle de recherche extrêmement actif dans le domaine, en mélangeant harmonieusement physiciens et mathématiciens Mes séjours là-bas ont toujours été très stimulants, en particulier grâce à l'attention de Jonathan Keating, Jens Marklof, Roman Schubert, Martin Sieber et Jonathan Robbins. Parmi des physiciens plus proches de nous, je mentionnerai particulièrement les «Orséens» Oriol Bohigas et Eugene Bogomolny, dont j'admire l'éternelle curiosité.

Je n'oublie pas non plus mes collègues de Cologne, où j'ai séjourné durant 2 ans : Martin Zirnbauer, dont le projet de recherche (trop ?) ambitieux continue de me trotter dans la tête ; Burkhard Seif, Yasha Shnir et Jan Budczies, qui m'ont initié à un autre monde (QCD sur réseau) et ont rendu mon adaptation outre-Rhin plus facile.

Enfin, il me reste à remercier les «très proches», c'est-à-dire mes collègues de l'Institut (ex-Service) de Physique Théorique de Saclay. Ils n'ont pas bronché (publiquement) face à la dérive mathématique de mes recherches, et m'y ont même parfois encouragé (!) Des remerciements particuliers sont à adresser au personnel administratif (la «vie» du labo), c'est-à-dire Sylvie Zaffanella, Laure Sauboy, Catherine Cataldi, Loïc Bervas, Anne-Marie Arnold, ainsi qu'aux documentalistes Marc Gingold, Bruno Savelli et Alexandre Thaumoux pour leurs aides multiples.

CHAPITRE 1

Introduction

1. Plan du manuscrit

Si on fait exception de quelques travaux relatifs à la chromodynamique quantique sur réseau (articles[1] [**5,22**]), accomplis lors ou à la suite de mon séjour postdoctoral à Cologne, ma recherche depuis ma thèse s'est concentrée sur l'étude de systèmes dynamiques chaotiques, et de leur version quantique. Elle appartient donc essentiellement au domaine du «chaos quantique» (une terminologie surtout utilisée en physique). Le seul article ne traitant pas des aspects quantiques est [**9**], qui étudie exclusivement le comportement de systèmes dynamiques classiques bruitées.

Le domaine du chaos quantique regroupe l'étude de systèmes quantiques à un petit nombre de degrés de liberté, dont le système dynamique classique associé (flot hamiltonien engendré par un hamiltonien $p(x,\xi)$ ou transformation canonique) présente une dynamique chaotique. En utilisant notre connaissance des propriétés dynamiques du système classique (par exemple, des propriétés ergodiques, de comportement aux temps longs), on cherche à obtenir des informations qualitatives et quantitatives sur le système quantique. Cette recherche se place naturellement dans le cadre de l'analyse semiclassique. Le système quantique est typiquement un opérateur pseudodifférentiel $P(\hbar)$ qui dépend explicitement d'un petit paramètre $\hbar > 0$ (la «constante de Planck»), et qu'on interprète comme le quantifié du hamiltonien p. Les informations obtenues sont valables asymptotiquement, dans la limite où $\hbar$ est «petit». Il faut garder à l'esprit que la limite $\hbar \to 0$ est singulière : même à $\hbar$ petit, le système quantique ne peut pas être considéré comme une perturbation du système dynamique classique. L'objectif (et l'intérêt) de l'analyse semiclassique consiste donc à «contourner» cette limite singulière, en utilisant des outils adéquats pour comparer deux types de systèmes de natures très différentes.

Pourquoi se focaliser sur des systèmes chaotiques ? D'une part, une dynamique chaotique possède un nombre minimal de quantités conservées (à l'opposé d'un système Liouville-intégrable). En ce sens, il est «générique». En conséquence, le hamiltonien quantique $P(\hbar)$ est réllement un opérateur (pseudo)différentiel de dimension $d > 1$, dont le spectre est difficile à déterminer. D'un autre côté, parmi les systèmes «loin d'être intégrables», les systèmes chaotiques peuvent parfois apparaître comme les plus simples, ou en tout cas les mieux compris. La théorie des systèmes dynamiques, fortement développée depuis les années 1960, nous fournit une bonne description des propriétés ergodiques de ces systèmes (ergodicité, mélange exponentiel, théorème central limite). Cette théorie a aussi forgé des indicateurs dynamiques (entropies, pressions) permettant de quantifier ces propriétés

[1] Les références en chiffres gras correspondent à ma liste de publications, insérée en appendice.

ergodiques. Comme on le verra plus bas, les progrès obtenus dans la compréhension des systèmes quantiques correspondants résultent souvent d'une adaptation et utilisation judicieuses de certains de ces indicateurs.

Mes travaux peuvent être divisés en trois parties.

- Dans les cas où la couche d'énergie $p^{-1}(E)$ est compacte (par exemple, dans le cas du flot géodésique sur une variété compacte), le spectre du hamiltonien quantique $P(\hbar)$ dans un voisinage de E est composé d'énergies propres discrètes $(E_n(\hbar))$ relatives à des modes propres $\big(\psi_n(\hbar) \in L^2(X)\big)$. Une partie de mon travail a porté sur la structure (dans l'espace des phases) des modes propres $\psi_n(\hbar)$, dans les cas où le flot classique est très chaotique (Anosov). Les modes propres sont principalement décrits par le biais de *mesures semiclassiques,* qui sont des mesures de probabilité sur l'espace des phases, invariantes par le flot classique, et qui rendent compte de la distribution microlocale des modes propres, dans la limite semiclassique. Ces travaux sont décrits plus en détail dans le chapitre 2.
- Par contre, si le système est «ouvert», de sorte que les particules peuvent s'échapper à l'infini (système de diffusion quantique), alors le spectre de $P(\hbar)$ est absolument continu sur $\mathbb{R}^+$. On peut tout de même mettre en évidence des résonances discrètes, sortes de valeurs propres généralisées à valeurs complexes, qui influencent la dynamique aux temps longs. L'étude des résonances quantiques est plus récente que celle des spectres réels. Cette étude procède généralement par la déformation du hamiltonien autoadjoint $P(\hbar)$ en un opérateur non autoadjoint $P_\theta(\hbar)$, dont les résonances sont devenues les valeurs propres L^2. L'analyse spectrale d'un tel opérateur est plus ardue que dans le cadre autoadjoint, et les résultats sont moins précis. Mes travaux sur ce sujet ont porté sur la distribution semiclassique des résonances et la structure microlocale des «modes propres» associés, dans les cas où le flot classique est chaotique sur l'ensemble capté. Ils sont décrits dans le chapitre 3.
- Je me suis aussi intéressé aux propriétés des systèmes dynamiques à temps discret (classiques ou quantiques) en présence de «bruit». Ici, le bruit est représenté par un opérateur de lissage agissant à chaque pas de temps, entre deux itérations de la dynamique. J'ai étudié le lien entre les propriétés dynamiques du système non bruité (dynamique régulière/chaotique), et les propriétés spectrales ou de décroissance aux temps longs, du système bruité. On notera que la limite de faible bruit présente des similitudes avec la limite semiclassique. Au niveau quantique, le bruit peut décrire, de façon effective, l'interaction du système avec un «environnement», comme le font certains modèles effectifs de type Lindblad. Les résultats sont décrits dans le chapitre 4.

Avant de présenter mes travaux, je fournis dans la section suivante quelques rappels d'analyse semiclassique, de chaos quantique, de manière à fixer les notations. J'introduis également les systèmes dynamiques qui m'ont intéressé en particulier.

2. Quelques rappels de «chaos quantique»

2.1. Mécanique classique et quantique. Limite semiclassique. Appelons X l'espace physique du système (l'espace de configuration), qui peut être l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$, ou une variété riemannienne plus générale de dimension $d > 1$. Les équations de mouvement d'une particule classique évoluant sur X sont décrites par une fonction de Hamilton $p(x,\xi)$ sur l'espace des phases $T^*X \ni (x,\xi)$ (espace des positions et des impulsions). La dynamique est alors donnée par les équations de Hamilton

$$(\dot{x},\dot{\xi}) = H_p(x,\xi) = \left(\frac{\partial p}{\partial \xi}, -\frac{\partial p}{\partial x}\right),$$

dont la solution donne le flot hamiltonien $\rho = (x,\xi) \mapsto \Phi^t(\rho)$ sur l'espace des phases (on suppose que le flot et bien défini, $\forall t \in \mathbb{R}$). Chaque couche d'énergie $p^{-1}(E) \subset T^*X$ est invariante par le flot.

Le système quantique correspondant est décrit par une fonction d'onde $\psi(t) \in L^2(X)$, dont la dépendance temporelle est régie par l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt}\psi(t) = P(\hbar)\,\psi(t). \tag{1}$$

Nous nous plaçons dans le formalisme semiclassique : cette équation dépend d'un petit paramètre $\hbar > 0$. L'opérateur $P(\hbar)$ apparaissant dans le membre de droite est le hamiltonien quantique ; c'est un opérateur (pseudo)différentiel sur X, obtenu à partir du hamiltonien classique $p(x,\xi)$ par un processus de *quantification* dépendant explicitement de $\hbar$ [**DS99**]. On considèrera des quantifications réelles, telles que $P(\hbar) = \mathrm{Op}_\hbar(p)$ est un opérateur symétrique sur $L^2(X)$ lorsque p est une fonction réelle. La solution de l'équation (1) donne le flot de Schrödinger $\psi(t) = U_\hbar^t\psi(0)$, où le propagateur

$$U_\hbar^t = e^{-itP_\hbar/\hbar}$$

forme un groupe unitaire sur $L^2(X)$. Pour $X = \mathbb{R}^d$, la quantification la plus «standard» est la quantification de Weyl $P_\hbar = \mathrm{Op}_\hbar^W(p)$, donnée par

$$\left[\mathrm{Op}_\hbar^W(p)\psi\right](x) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi/\hbar}\, p\Big(\frac{x+y}{2},\xi\Big)\,\psi(y)\,\frac{dy\,d\xi}{(2\pi\hbar)^d}. \tag{2}$$

On considèrera aussi les quantifications d'anti-Wick[2] associés à des familles d'états cohérents gaussiens. Ces quantifications sont non seulement réelles, mais aussi positives ($P(\hbar)$ est un opérateur positif si $p \geq 0$). Les différentes $\hbar$-quantifications que nous considèrerons sont équivalentes[3] dans la limite semiclassique, au sens suivant :

$$\forall a \in C_c^\infty(T^*X), \qquad \left\|\mathrm{Op}_\hbar^1(a) - \mathrm{Op}_\hbar^2(a)\right\|_{\mathcal{L}(L^2)} \xrightarrow{\hbar\to 0} 0 \tag{3}$$

L'analyse semiclassique se donne pour tâche d'étudier les propriétés de ces opérateurs, dans la limite $\hbar \to 0$, dite limite semiclassique. On ne considèrera donc pas un unique opérateur $P(\hbar)$, mais la famille d'opérateurs $(P(\hbar))_{\hbar\to 0}$.

2.2. Principe de correspondance. Le principe de correspondance entre les dynamiques classique et quantique peut être énoncé à travers l'évolution des *observables*. Une observable classique est une fonction $a \in C^\infty(T^*X)$ (qu'on supposera souvent à support compact). On peut interpréter ses valeurs $\big(a \circ \Phi^t(\rho)\big)_{t\in\mathbb{R}}$ prises le long d'une trajectoire, de deux manières : soit c'est le point ρ qui évolue par le flot

[2] plutôt appelées «de Wick» en mathématique

[3] Ce n'est pas le cas de la quantification de Walsh sur le 2-tore, que nous utilisons dans [**12, 14**] : même dans la limite semiclassique celle-ci reste très différente des quantifications de Weyl ou d'anti-Wick.

$\Phi^t(\rho)$, soit le point reste fixe, mais c'est l'observable a qui évolue de façon duale, par

$$a(t) = \Phi^{t*} a = a \circ \Phi^t.$$

Au niveau quantique, l'observable correspondante est l'opérateur $A(\hbar) = \mathrm{Op}_\hbar(a)$; sa valeur moyenne sur l'état évolué $\psi(t)$ est donnée par l'élément de matrice $\langle \psi(t), A(\hbar)\psi(t)\rangle$. Ici aussi, on peut interpréter cette valeur moyenne de façon duale, en ne faisant pas évoluer la fonction d'onde, mais l'observable, selon l'évolution d'Heisenberg

$$A(\hbar, t) = U_\hbar^{-t}\, A(\hbar)\, U_\hbar^t. \tag{4}$$

Le principe de correspondance établit une équivalence approximative entre les évolutions des observables classiques et quantiques *: l'évolution des observables commute approximativement avec la quantification.* Mathématiquement, ce principe prend la forme du *théorème d'Egorov* : en supposant que l'observable a appartient à une classe de fonctions «sympatique» (par exemple, $a \in C_c^\infty(T^*X)$), on a alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \|A(\hbar, t) - \mathrm{Op}_\hbar(a(t))\|_{\mathcal{L}(L^2)} \xrightarrow{\hbar \to 0} 0.$$

Cette propriété reste valable si le temps d'évolution $t = t(\hbar)$ varie dans la limite $\hbar \to 0$, tout en restant inférieur (en valeur absolue) au *temps d'Ehrenfest*

$$T_E = T_E(\hbar) = \frac{|\log \hbar|}{\lambda_{\max}}. \tag{5}$$

Ici $\lambda_{\max}$ est le plus grand coefficient d'expansion du flot classique, considéré par rapport au support de l'observable a :

$$\lambda_{\max} = \sup_{\rho \in \mathrm{supp}(a)} \limsup_{t \to \pm\infty} \frac{\log \|d\Phi^t(\rho)\|}{|t|}. \tag{6}$$

On voit que la régularité du flot classique influence la correspondance : plus le flot est instable, moins longue longue dure la correspondance.

Ce temps d'Ehrenfest est au cœur des résultats fins concernant l'analyse spectrale des opérateurs $P(\hbar)$.

2.3. Analyse spectrale du flot quantique. On s'intéresse aux *invariants* du flot de Schrödinger, autrement dit au *spectre* de l'opérateur hamiltonien $P(\hbar)$. Dans les cas où la surface d'énergie $p^{-1}(E) \subset T^*X$ est compacte, pour $\hbar$ assez petit le spectre de $P(\hbar)$ est purement discret dans un voisinage de E, et composé de modes propres orthonormés $(\psi_n(\hbar))$ associés aux énergies propres $(E_n(\hbar))$. Un des objectifs principaux du «chaos quantique» est de décrire ce spectre, aussi précisément que possible, dans les situations où on ne dispose pas de formule explicite, ni même approximative, pour (ψ_n, E_n). C'est en particulier le cas lorsque $d = dim(X) \geq 2$, et que le flot sur $p^{-1}(E)$ est chaotique.

Le spectre (ψ_n, E_n) correspond aux propriétés «au temps $t \to \infty$» du flot de Schrödinger. Il est donc naturel, pour chercher à comprendre ce spectre, de se servir de notre connaissance des propriétés aux temps longs du flot classique, et du principe de correspondance. Cependant, une difficulté incontournable vient du fait que la correspondance n'est valable que pour des temps relativement courts $|t| \leq T_E$: les limites $\hbar \to 0$ et $t \to \infty$ ne commutent pas.

En utilisant la correspondance pour des temps finis, on peut déduire des propriétés «en moyenne» du spectre. Par exemple, la densité de valeurs propres $E_n(\hbar)$

autour d'une énergie E est donnée asymptotiquement par la *loi de Weyl*

$$\forall \epsilon > 0, \qquad \#\{n,\ |E_n(\hbar) - E| \leq \epsilon\} = (2\pi\hbar)^{-d} \left(\int_{|p(x,\xi)-E|\leq\epsilon} dx\, d\xi + o(1) \right). \tag{7}$$

La loi de Weyl concerne la distribution *macroscopique* des énergies propres (à l'échelle 1, ou échelle classique). Elle ne dépend pas des caractéristiques du flot Φ^t. À l'autre extrémité, lorsque le flot classique est chaotique, la conjecture de Bohigas-Gianonni-Schmit [**BGS84**] décrit la distribution *microscopique* des énergies propres (c'est-à-dire leur distribution à l'échelle de l'écart moyen entre les niveaux $\Delta E \sim C\hbar^d$). Cette conjecture prédit que les écarts $(E_{n+1}(\hbar) - E_n(\hbar))$ (renormalisés correctement) sont *statistiquement* distribués comme les écarts entre les valeurs propres de certaines familles de matrices hermitiennes aléatoires. De même, il a été conjecturé par Berry [**Ber77**] que les propriétés statistiques *microscopiques* (à l'échelle $\hbar$) des états propres correspondants sont similaires à celles de superpositions aléatoires d'ondes planes de longueur d'onde $\sim \hbar$.

3. Différents types de dynamiques hamiltoniennes

3.1. Flots intégrables. Certains flots sont complètement intégrables aux niveaux classique et quantique [**VuN03**]. Classiquement, cela signifie qu'il existe d observables $p_1, \ldots, p_d$ indépendantes et en involution (c'est-à-dire commutant au sens des crochets de Poisson), dont l'hamiltonien $p_1 = p$. Cela implique que l'espace des phases (de dimension $2d$) est partitionné[4] en tores de dimension d (tores d'Arnold-Liouville) invariants par le flot, chaque tore étant défini par d équations $p_i(x,\xi) = I_i$. Le mouvement sur chaque tore est périodique ou quasipériodique, donc très régulier. L'intégrabilité est préservée au niveau quantique si ces d observables (des constantes du mouvement) se quantifient en d opérateurs (auto-adjoints) $P_1(\hbar), \ldots, P_d(\hbar)$ commutant mutuellement. Il est alors naturel de considérer le spectre joint de ces d opérateurs, ce qui nous ramène effectivement à des problèmes quantiques en dimension 1. Les méthodes WKB permettent alors de construire ce spectre avec une grande précision : des quasimodes[5] de précision $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$ peuvent être construits explicitement, chacun étant un état Lagrangien associé à un tore invariant satisfaisant des règles de Bohr-Sommerfeld. Si on oublie le problème de l'effet tunnel entre les tores, les modes propres sont $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$-proches des quasimodes.

3.2. Des tores KAM au chaos. Si on perturbe un tel système intégrable, on détruit le feuilletage de l'espace des phases en tores invariants. Le paysage est alors plus complexe, et hiérarchisé : il subsiste encore des tores invariants (dits tores KAM), qui sont séparés par des «régions chaotiques». On a déjà du mal à analyser la dynamique classique en-dehors de ces tores. Si on renforce la perturbation, les tores KAM disparaissent tous (mais à l'opposé, des «îlots de stabilité» peuvent apparaître au milieu d'une zone chaotique de l'espace des phases). Au niveau quantique, on sait encore construire des quasimodes associés aux tores KAM [**Laz93**], mais on ne sait pas si les vrais modes propres leur ressemblent. On ne connaît presque rien du spectre microlocalisé en-dehors de ces tores.

[4] en dehors de singularités

[5] Un quasimode ψ d'énergie E et de précision ϵ est un état satisfaisant $\|(P_\hbar - E)\psi\| \leq \epsilon\, \|\psi\|$.

3.3. Flots chaotiques. Face à la complexité de la dynamique KAM, il se révèle plus simple de considérer des flots hamiltoniens «totalement chaotiques». Ici «chaotique» peut avoir plusieurs significations plus ou moins précises. La propriété minimale est l'*ergodicité* du flot sur la couche d'énergie $p^{-1}(E)$, par rapport à la mesure de Liouville dL (c'est la mesure obtenue en conditionnant la mesure $dxd\xi$ sur la couche d'énergie). Des propriétés plus précises sont souvent invoquées : la propriété de mélange (plus ou moins rapide), autrement dit la décroissance des corrélations dynamiques $\int a(t)b\,dL - \int a\,dL \int b\,dL$ entre deux observables a, b. Les flots «les plus chaotiques» qu'on peut construire sont uniformément hyperboliques (Anosov). En tout point $\rho \in p^{-1}(E)$, l'espace tangent $T_\rho p^{-1}(E)$ se scinde en des sous-espaces stable, instable, et neutre :

$$T_\rho p^{-1}(E) = E^u_\rho \oplus E^s_\rho \oplus H_p(\rho). \tag{8}$$

Les espaces stable/instable sont définis par la contraction (expansion) de la linéarisée du flot :

$$\left\| d\Phi^t \restriction_{E^s} \right\| \leq Ce^{-\lambda t}, \qquad \left\| d\Phi^{-t} \restriction_{E^u} \right\| \leq Ce^{-\lambda t}, \quad \forall t > 0. \tag{9}$$

De tels flots ont des propriétés ergodiques assez bien comprises. Le mélange est exponentiellement rapide. De plus, on connaît assez bien les mesures de probabilité invariantes. On se servira de cette connaissance pour analyser le spectre quantique.

3.4. Un exemple : le flot géodésique en courbure négative. Un exemple de flot Anosov est le flot géodésique sur une variété riemannienne compacte de courbure (strictement) négative. Ce flot est associé à l'hamiltonien décrivant une particule libre sur X, $p(x, \xi) = \frac{1}{2} |\xi|_x^2$. La couche d'énergie $p^{-1}(1/2) = \{|\xi|_x = 1\} = S^*X$, correspond à une particule libre de vitesse 1. Ici, $|\xi|_x$ est la norme sur la fibre du cotangent $T^*_x X$ induite par la métrique riemannienne. Une courbure négative implique que ce flot est uniformément hyperbolique (Anosov).

Une quantification «naturelle» du flot géodésique est donnée par l'opérateur de Laplace-Beltrami, qu'on normalise par

$$P(\hbar) = -\frac{\hbar^2 \Delta}{2}.$$

Un état propre ψ_n du laplacien Δ, de valeur propre $-\lambda_n \leq 0$, satisfait donc l'équation

$$P(\hbar)\,\psi = \frac{1}{2}\,\psi, \quad \text{pour un paramètre semiclassique } \hbar = \hbar_n = \lambda_n^{-1/2}. \tag{10}$$

On notera souvent cet état $\psi = \psi_n = \psi_\hbar$. Les articles **[16,25]** sont consacrés à l'étude des états propres de ce système.

Un cas particulier est constitué par les variétés de courbure constante -1, obtenues en quotientant l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^d$ par un sous-groupe discret Γ de $SL(d, \mathbb{R})$: $X = \Gamma \backslash \mathbb{H}^d$. Cette structure algébrique fournit des outils spécifiques à l'étude du laplacien sur ces variétés. Certains sous-groupes Γ possèdent de surcroît des propriétés arithmétiques remarquables. C'est le cas par exemple du groupe modulaire $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z}) \subset SL(2, \mathbb{R})$. Dans le cas le plus favorable (Γ un groupe de congruence), la structure arithmétique fournit une algèbre commutative d'opérateurs (dits «de Hecke») $(T_k)_{k \geq 1}$ sur $L^2(X)$, qui commutent avec le laplacien. Il est alors possible de considérer les états propres joints de tous ces opérateurs, appelés modes propres de Hecke. Les propriétés arithmétiques de ces modes fournissent un puissant outil d'analyse (v.chap. 2, §2).

Une autre classe de flots géodésiques intéresse plus les physiciens : il s'agit des billards euclidiens, autrement dit de domaines bornés connexes $X \subset \mathbb{R}^d$. La particule suit des lignes droites à l'intérieur de X, et rebondit de façon spéculaire sur les bords. Le système quantique associé est le laplacien sur X, avec des conditions de bord de Dirichlet ou Neumann. Les caractéristiques de la dynamique dépendent uniquement de la forme de X (ou de son bord). On connait des formes menant à un flot ergodique et mélangeant : c'est le cas du billard de Sinai, et du «stade» de Bunimovich, tous deux dans le plan. Ces deux exemples ne sont pas des flots Anosov : ils contiennent une famille (à un paramètre) d'orbites périodiques marginalement stables (dites orbites «bouncing ball»). Les modes propres de ces billards peuvent être calculés numériquement de façon efficace, en utilisant un opérateur intégral induit sur le bord. L'étude numérique des modes propres du «stade» ont, les premières, mais en évidence la concentration (partielle) de certains modes le long d'orbites périodiques instables [**Hel84**]. Ce phénomène, baptisé «cicatrice»[6] par Heller, reste encore mal défini sur le plan mathématique.

4. Systèmes dynamiques à temps discret : applications chaotiques

4.1. Transformations canoniques chaotiques. Un flot chaotique possède une direction neutre, celle du vecteur H_p engendrant le flot. Cette direction neutre complique l'analyse, aussi bien aux niveaux classique que quantique. L'hyperbolicité de la dynamique est manifeste transversalement à ce vecteur. C'est pour cette raison que, plutôt que le flot entier sur la couche d'énergie $p^{-1}(E)$, on n'étudie souvent que le passage du flot à travers certaines sections Σ transverses à H_p, appelées sections de Poincaré. L'application de premier retour sur la section est appelée application de Poincaré. La section Σ peut être munie d'une structure symplectique, préservée par l'application de premier retour : cette dernière est donc localement un difféomorphisme symplectique, qui est uniformément hyperbolique (l'espace tangent $T_\rho \Sigma = \tilde{E}^u_\rho \oplus \tilde{E}^s_\rho$, où les espaces (in)stables satisfont des propriétés similaires à (9)).

Par extension, on peut directement partir d'une variété symplectique compacte (par exemple le tore bidimensionnel, ou 2-tore), et construire un difféomorphisme symplectique sur cet espace des phases, engendrant une dynamique chaotique. Les propriétés ergodiques des difféomorphismes sont en général plus simples à analyser que celles des flots. De plus, on connait des exemples simples de difféomorphismes très chaotiques (Anosov), le plus connu étant la transformation du «chat d'Arnold» sur le 2-tore. On nommera ainsi une transformation linéraire

$$(x,\xi) \mapsto S(x,\xi), \quad \text{où} \quad S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) \tag{11}$$

est une matrice hyperbolique, c'est-à-dire satisfaisant $|\mathrm{tr}\, S| > 2$. Cette transformation, initialement définie sur l'espace $\mathbb{R}^2$, se projette bien sur le 2-tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \ni (x,\xi)$. Du fait de sa linéarité, les propriétés chaotiques de la dynamique peuvent être montrées par de simples manipulations algébriques. Par exemple, les directions stable et instable sont les mêmes en tout point $(x,\xi) \in \mathbb{T}^2$, données par les vecteurs propres de la matrice S.

[6] en anglais, «scar».

Une autre transformation chaotique bien connue sur le 2-tore est la «transformation du boulanger»

$$(x,\xi) \mapsto B_2(x,\xi) = \begin{cases} (2x, \xi/2), & 0 \leq x < 1/2 \\ (2x-1, (\xi+1)/2), & 1/2 \leq x < 1 \end{cases}. \tag{12}$$

Cette bijection est linéaire par morceaux mais discontinue. La partition du tore en les deux rectangles ci-dessus permet de représenter B_2 par une *dynamique symbolique* très simple : le décalage sur les suites binaires bi-infinies, correspondant à la représentation en base 2 de la position et de l'impulsion.

4.2. Applications quantiques sur le 2-tore. On cherche à *quantifier* une telle transformation symplectique, c'est-à-dire lui associer une famille de propagateurs unitaires $(U_\hbar)_\hbar$ dépendant d'un petit paramètre $\hbar$. La compacité de l'espace des phases implique que l'espace de Hilbert (des états quantiques) est de dimension *finie*, et dépend explicitement de $\hbar$. Par exemple, les espaces de Hilbert quantiques $\mathcal{H}_\hbar$ associés au 2-tore sont de dimension finie $N \in \mathbb{N}$, correspondant à des valeurs discrètes de la constante de Planck :

$$\hbar = (2\pi N)^{-1}.$$

Intuitivement, cette formule vient du fait qu'un état quantique occupe un volume $\sim 2\pi\hbar$ du tore. Les observables $a \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ peuvent être naturellement quantifiées en des opérateurs $\mathrm{Op}_N(a)$ (qui sont en fait des matrices hermitiennes $N \times N$).

Il n'existe pas de formalisme standard pour quantifier sur $\mathcal{H}_\hbar$ un difféomorphisme symplectique κ. On dispose seulement de recettes adaptées à certaines transformations. La transformation du chat d'Arnold (11) a été quantifiées par [**HanBer80**] en restreignant sur $\mathcal{H}_\hbar$ la représentation métaplectique $U_\hbar(S)$ de la matrice symplectique S : on obtient alors une matrice $N \times N$ unitaire $U_\hbar(S)$. On verra plus loin que cette famille de propagateurs quantiques possède des propriétés remarquables, mais non-génériques. Pour obtenir une transformation générique, on perturbe la dynamique de S en la composant avec le flot au temps 1 engendré par un hamiltonien $p \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$: si p est suffisamment petit, alors l'application composée $e^{H_p} \circ S$ (un «chat d'Arnold perturbé») conserve la propriété d'Anosov. Une quantification de cette transformation consiste à composer $U_\hbar(S)$ avec le flot de Schrödinger (au temps 1) de l'hamiltonien quantique $\mathrm{Op}_\hbar(p)$: on obtient le «chat d'Arnold perturbé quantique» $e^{-i\,\mathrm{Op}_\hbar(p)/\hbar}\, U_\hbar(S)$ [**BDB96**]

L'application du boulanger (12) a été quantifiée «à la main» par Balasz-Voros [**BV89**], en utilisant la transformée de Fourier discrète $(F_N)_{mn} = N^{-1/2} e^{-2i\pi mn/N}$: pour une dimension quantique N paire, ils prennent comme propagateur unitaire sur $\mathcal{H}_N$ la matrice

$$U_\hbar(B_2) = F_N^{-1} \begin{pmatrix} F_{N/2} & 0 \\ 0 & F_{N/2} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Dans tous les cas, le propagateur $U_\hbar(\kappa)$ a de bonnes propriétés semiclassiques. Dans le cas d'un difféomorphisme κ, $U_\hbar(\kappa)$ est un opérateur intégral de Fourier (OIF) associé au graphe de κ. Dans [**12**] nous développons le formalisme des OIF sur les espaces quantiques associés au tore, et traitons spécifiquement le cas de la transformation du boulanger, en tenant compte de ses discontinuités.

Les applications quantiques ont été utilisées comme des modèles simplifiés de systèmes quantiques classiquement chaotiques [**DEG03**]. D'une part, on connaît mieux les propriétés de la dynamique classique que pour les flots. D'autre part, il est plus simple d'étudier numériquement le spectre $(\psi_n(\hbar), e^{i\theta_n(\hbar)})_{n=1,\dots,N}$ des matrices finies $U_\hbar(\kappa)$, que celui d'opérateurs de dimension inifinie $P(\hbar)$. Enfin, pour certains de ces modèles (chat d'Arnold, boulanger quantifié «à la Walsh»), on dispose d'informations très précises sur le spectre, grâce aux riches propriétés algébriques et arithmétiques des propagateurs [**DEG03**].

CHAPITRE 2

Travaux sur l'ergodicité quantique

Ce chapitre est consacré à mes travaux sur les systèmes quantiques dont le correspondant classique est fortement chaotique (Anosov) sur un espace des phases (ou une couche d'énergie) compact. Je me suis essentiellement intéressé aux propriétés de localisation des modes propres quantiques. Pour établir la connection avec la dynamique classique, il est naturel d'étudier la localisation dans l'espace des phases (positions et impulsions). On représente pour cela les modes propres par des distributions vivant sur l'espace des phases (appelées distributions microlocales). Les valeurs d'adhérence faibles de ces distributions, dans la limite $\hbar \to 0$, sont l'objet principal de mes investigations. On les appelle «mesures semiclassiques» du système.

1. Ergodicité quantique

1.1. Un outil pour décrire les modes propres : les mesures semiclassiques. Comme on l'a vu plus haut, les seuls systèmes pour lesquels on a une bonne compréhension des modes propres sont les systèmes totalement intégrables : on dispose alors de formules asymptotiques WKB pour les modes propres (ou au moins pour les quasimodes $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$) et leurs énergies. À l'opposé, pour un système classiquement chaotique, notre connaissance des modes propres est beaucoup moins précise. Elle se résume souvent à la description des *mesures semiclassiques* du système : ce sont des mesures de probabilité sur T^*X, représentant les propriétés asymptotiques de localisation des modes propres dans l'espace des phases, dans la limite semiclassique.

Une telle mesure est définie à partir d'une suite semiclassique $(\psi_\hbar)_{\hbar\to 0}$ de modes propres des opérateurs $P(\hbar)$, d'énergies propres $E_\hbar = E + o(1)$. On construit tout d'abord une mesure (ou distribution) $\mu_{\psi_\hbar,\hbar}$ sur T^*X associée aux fonctions d'onde $\psi_\hbar$ et dépendant aussi explicitement de $\hbar$ (nous noterons ces distributions $\mu_{\psi,\hbar}$). Cette construction peut se faire par dualité, en utilisant une $\hbar$-quantification des observables (v. chap. 1, §2.1) :

$$\forall a \in C_0^\infty(T^*X), \qquad \mu_{\psi,\hbar}(a) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \psi_\hbar, \mathrm{Op}_\hbar(a)\psi_\hbar\rangle.$$

Lorsque $X = \mathbb{R}^d$ et que $\mathrm{Op}_\hbar$ est la quantification de Weyl (2), on appelle $\mu_{\psi,\hbar}$ la *distribution de Wigner* associée à l'état $\psi_\hbar$; en général ce n'est pas une mesure positive, mais elle a le bon goût de se projeter (le long des fibres de T^*X) sur la mesure de probabilité de présence de la particule sur X, $|\psi_\hbar(x)|^2\, dx$. Si on choisit une quantification positive, comme la quantification anti-Wick, alors $\mu_{\psi,\hbar}$ est une mesure de probabilité appelée la *mesure de Husimi* de $\psi_\hbar$. Dans tous les cas, $\mu_{\psi,\hbar}$ est appelée une mesure (ou distribution) microlocale, car elle ne décrit pas seulement les propriétés de localisation de $\psi_\hbar$ dans l'espace de position, mais également dans l'espace des impulsions (l'impulsion de la particule dépend des variations locale de la phase de $\psi_\hbar(x)$).

Une *mesure semiclassique* μ associée à la suite $(\psi_\hbar)_{\hbar\to 0}$ est une valeur d'adhérence de la suite $(\mu_{\psi,\hbar})_{\hbar\to 0}$ par rapport à la topologie faible-$*$. Autrement dit, il existe une sous-suite $(\psi_{\hbar_j})_{\hbar_j\to 0}$ extraite de $(\psi_\hbar)_{\hbar\to 0}$, telle que pour toute observable $a \in C_c^\infty(T^*X)$, on a $\mu_{\psi,\hbar_j}(a) \stackrel{\hbar_j\to 0}{\longrightarrow} \mu(a)$. On montre aisément que μ est une mesure de probabilité portée par la couche d'énergie $p^{-1}(E)$, et qu'elle est invariante par le champ de vecteurs H_p. Grâce à l'équivalence semiclassique (3) entre les différentes quantifications, la mesure μ ne dépend pas du choix de la quantification utilisée pour définir les $\mu_{\psi,\hbar}$. Une mesure semiclassique est donc un objet «classique» (une mesure invariante), qui décrit les propriétés asymptotiques de localisation des modes propres quantiques. Par nature, elle ne décrit que les propriétés *macroscopiques* (à l'échelle 1) de ces modes propres, en ignorant totalement leurs fluctuations à l'échelle $\hbar$. Elle est donc beaucoup moins précise qu'une formule explicite du type WKB. Cependant, dans le cas de systèmes classiquement chaotiques, la compréhension de ces mesures constitue déjà une question non-triviale. On sait qu'il existe, pour un système fortement chaotique, de nombreuses mesures invariantes. La question centrale qu'on se pose est donc :

> Quelles mesures invariantes apparaissent comme des mesures semiclassiques ? Autrement dit, vers quelles mesures invariantes «convergent» les modes propres dans la limite semiclassique ?

1.2. Ergodicité quantique. Les premiers résultats sur cette question concernent le flot géodésique sur une variété riemannienne X. Si ce flot est ergodique (par exemple, si la courbure est strictement négative), alors dans la limite semiclassique «presque tous» les états propres $(\psi_n)_{n\geq 0}$ du laplacien sont *asymptotiquement équidistribués sur* X. Plus précisément,

Théorème. **[Schn74, Zel87, CdV85]**
Supposons que le flot géodésique sur X est ergodique par rapport à la mesure de Lebesgue. Alors il existe une sous-suite $(n_j)_{j\geq 0} \subset \mathbb{N}$ de densité 1, telle que

$$\forall f \in L^\infty(X), \qquad \int_X f(x)\, |\psi_{n_j}(x)|^2\, dx \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} \int_X f(x)\, dx. \tag{14}$$

L'énoncé ci-dessus est celui de Shnirelman, qui ne considère que les propriétés de localisation sur X. Si on construit les mesures microlocales $\mu_{\psi_n,\hbar_n}$ associées aux modes propres (ψ_n) en utilisant le paramètre semiclassique «naturel» $\hbar_n$ (v. Eq.(10)), alors la sous-suite de densité 1 (ψ_{n_j}) est associée à une unique mesure semiclassique, qui est la mesure de Liouville dL sur la couche d'énergie S^*X :

$$\forall a \in C_0^\infty(T^*X), \quad \mu_{\psi_{n_j},\hbar_{n_j}}(a) \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} \int_{S^*X} a\, dL. \tag{15}$$

Ce résultat est plus précis que (14), puisqu'il montre que les états ψ_{n_j} sont asymptotiquement équidistribués non seulement en position, mais également en impulsion.

Cette propriété microlocale a été appelée *ergodicité quantique* par Zelditch. Elle a été généralisée à des flots hamiltoniens non géodésiques, ergodiques sur une couche d'énergie $p^{-1}(E)$ **[HMR87]** : on considère alors les suites de modes propres

$(\psi(\hbar_n))_{\hbar_n\to 0}$ d'énergies $E(\hbar_n) = E + o(1)$. Elle a aussi été étendue aux flots géodésiques sur les variétés à bord (billards) **[GerLei93, ZelZwo96]** et aux applications quantiques (v. §4). La preuve de cette propriété est en effet suffisamment robuste pour pouvoir être transposée à différents contextes. Dans tous les cas, le coeur de la preuve consiste à montrer que la *variance* des éléments de matrice $\langle\psi(\hbar_n), \mathrm{Op}_{\hbar_n}(a)\psi(\hbar_n)\rangle$,

$$Var_N(a) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N}\sum_{1\le n\le N}\left|\langle\psi(\hbar_n), \mathrm{Op}_{\hbar_n}(a)\psi(\hbar_n)\rangle - \int a\,dL\right|^2,$$

converge vera zéro dans la limite semiclassique $N\to\infty$.

1.3. Ergodicité quantique pour le boulanger. Dans l'article **[11]** nous prouvons le théorème de Shnirelman pour l'application du boulanger sur le 2-tore quantifiée à la Balasz-Voros (13). En effet, cette transformation très simple avait été beaucoup étudiée par les physiciens, mais la propriété d'ergodicité quantique n'était toujours pas établie, la complication principale étant due aux discontinuités de la transformation. Ces complications sont similaires à celles rencontrées avec les billards ergodiques tels le «stade»). Nous obtenons en fait un résultat plus précis que l'ergodicité quantique, qui était connu dans le cas du laplacien sur les surfaces de courbure négative constante **[Zel94]**, et a ensuite été généralisé à d'autres systèmes **[Schu06, Schu08]** :

THÉORÈME. *Pour tout* $N = (2\pi\hbar)^{-1} \ge 1$, *on note* $(\psi_n(\hbar))_{n=1,\dots,N}$ *une base propre de la matrice* $U_\hbar(B_2)$. *Alors la variance quantique*

$$Var_N(a) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left|\langle\psi_n(\hbar), \mathrm{Op}_\hbar(a)\psi_n(\hbar)\rangle - \int a\,dL\right|^2$$

décroît semiclassiquement comme $\mathcal{O}(|\log\hbar|^{-1})$.

2. Ergodicité quantique unique ou «suite exceptionnelles» ?

Le théorème d'ergodicité quantique montre donc que, si le flot (ou la transformation) classique est ergodique, alors *presque* tous les états propres quantiques deviennent équidistribués sur S^*X, dans la limite semiclassique. La question naturelle est celle de la présence ou non de **suites exceptionnelles** d'états propres $(\psi_{n_j})_{n_j\to\infty}$, associées à des mesures semiclassiques différentes de Liouville. Dans le cas des flots géodésiques sur les variétés de courbure négative[1], Rudnick-Sarnak **[RS94]** ont conjecturé que pour toute base orthonormée $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la seule mesure semiclassique est la mesure de Liouville. Cette propriété conjecturelle a été appelée *ergodicité quantique unique.*

Dans le même article, ils considèrent le cas des *surfaces arithmétiques* $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$, où Γ est un sous-groupe de congruence : ils montrent que les mesures semiclassiques associées à une base orthonormée $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formée de modes propres de Hecke (v. chap. 1, §3.4) ne contiennent pas de composante singulière sur les orbites périodiques. Lindenstrauss **[Lin06]** a finalement montré que la seule mesure semiclassique associée à une base de Hecke est la mesure de Liouville.

[1]Un tel flot possède de nombreuses mesures invariantes différentes de Liouville, par exemple les mesures singulières portées par une unique géodésique périodique, mais aussi des mesures purement fractales.

L'ergodicité quantique unique a aussi été montrée pour les états propres «de Hecke» d'une transformation d'un «chat d'Arnold» $S \in SL(2, \mathbb{Z})$ du 2-tore. Ces bases propres sont formées d'états propres communs d'une famille commutative d'opérateurs unitaires sur $\mathcal{H}_\hbar$, contenant le propagateur $U_\hbar(S)$ [**KR00**].

2.1. Des contre-exemples à l'ergodicité quantique unique. Dans [**6**] nous considérons aussi un «chat d'Arnold», mais nous construisons des contre-exemples explicites à la conjecture d'ergodicité quantique unique.

THÉORÈME. *Il existe une famille $(\psi(\hbar_n))_{\hbar_n \to 0}$ de modes propres des propagateurs $U_{\hbar_n}(S)$, pour laquelle la mesure semiclassique associée vaut*

$$\mu = \frac{1}{2}(\delta_{\mathcal{P}} + dL). \tag{16}$$

Ici, $dL = dx d\xi$ est la mesure de Liouville sur le tore, et $\delta_{\mathcal{P}}$ est la mesure de Dirac sur une orbite périodique (instable) de la transformation.

Autrement dit, les états $\psi(\hbar_n)$ sont à moitié localisés sur l'orbite $\mathcal{P}$, et à moitié équidistribués. Ils sont construits explicitement, comme une superposition des évolués d'un état cohérent gaussien localisé dans un voisinage de rayon $\sim \sqrt{\hbar}$ d'un point de $\mathcal{P}$. On fait évoluer cet état (dans le futur et le passé) jusqu'au temps d'Ehrenfest (5) ($\lambda_{\max}$ est l'exposant de Lyapunov positif de S). L'état évolué reste localisé pour les temps $-T_E/2 < t < T_E/2$. Pour les temps $T_E/2 < |t| < T_E$, il se délocalise le long des variétés stable et instable et remplit rapidement tout le tore. Par conséquent, l'état obtenu en sommant sur l'intervalle de temps $[-T_E, T_E]$ est à moitié localisé, à moitié équidistribué. On utilise ensuite une propriété très particulière du propagateur $U_\hbar(S)$. Il est *périodique*[2], et pour certaines valeurs ($\hbar_n \to 0$) la période $T_{\hbar_n}$ vaut $2T_E + \mathcal{O}(1)$, de sorte que la superposition construite ci-dessus devient un état propre de $U_{\hbar_n}(S)$. Signalons que pour ces valeurs $\hbar_n$, les valeurs propres du propagateur $U_{\hbar_n}(S)$ ont une grande multiplicité (d'ordre $(\hbar|\log\hbar|)^{-1}$). On a donc beaucoup de liberté pour construire des modes propres. Par un argument de densité, on peut exhiber des mesures semiclassiques de la forme $\mu = \frac{1}{2}(\nu + dL)$, où ν est une mesure invariante quelconque.

La construction ci-dessus ne fonctionne que pour des applications quantiques très particulières, et n'est absolument pas transposable aux flots. Il s'agit du premier système Anosov pour lequel la conjecture d'ergodicité quantique unique est mise en défaut.

Dans [**14**] nous construisons une quantification «non standard» de la transformation du boulanger (12), appelée quantification de Walsh [3]. Cette quantification, valable uniquement en dimension $N = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, est spécifiquement adaptée à la transformation du boulanger : elle est «calquée» sur la dynamique symbolique conjuguée à $B2$ (décalage sur les suites binaires bi-infinies). Elle revient en fait à remplacer, dans (13), les transformées de Fourier discrètes F_N, $F_{N/2}$, par les transformées de Fourier-Walsh W_N, $W_{N/2}$ (c'est-à-dire, remplacer la sinusoïde par une fonction créneau). Cela correspond donc à une nouvelle convention (certainement moins «physique») de la relation entre positions et impulsions quantiques. Pour définir les mesures semiclassiques associés aux états propres de $U_\hbar^{Walsh}(B_2)$,

[2]Il existe un entier $T_\hbar > 0$ et une phase $\theta_\hbar$ tels que $U_\hbar(S)^{T_\hbar} = e^{i\theta_\hbar} Id$.

[3]Cette quantification du boulanger a aussi été introduite dans des études relatives à l'information quantique [**SchaCav00**].

il est cohérent d'utiliser une version «Walsh» des mesures de Husimi. Le mérite principal de cette quantification est de rendre le modèle soluble : le spectre de $U_\hbar^{Walsh}(B_2)$ peut être calculé explicitement. Les propagateurs $U_\hbar^{Walsh}(B)$ ont des propriétés similaires aux «chats d'Arnold quantiques» $U_{\hbar_n}(S)$ décrits ci-dessus : ils sont périodiques, de périodes $2T_E$), et on peut construire des états propres similaires, associés à une mesure semiclassique $\mu = \frac{1}{2}(\delta_{\mathcal{P}} + dL)$. Pour ce boulanger Walsh-quantifié, nous avons également exhibé des mesures semiclassiques *purement fractales* (ne contenant pas de composante de Liouville), et dont le support est un sous-ensemble fractal du 2-tore. Nous ignorons si de telles mesures semiclassiques existent dans le cas du «chat d'Arnold».

3. Contraintes sur les mesures semiclassiques

Après avoir exhibé des mesures semiclassiques différentes de Liouville pour ces applications quantiques particulières, nous pouvons reconsidérer la question posée au bas de la §1.1. Notre objectif va consister à montrer que les mesures semiclassiques possèdent nécessairement certains propriétés qui ne sont pas satisfaites par n'importe quelle mesure invariante.

3.1. Mesures semiclassiques du «chat d'Arnold». Dans [**8**], nous montrons que les mesures semiclassiques semi-localisées (16) du «chat d'Arnold» sont «maximalement localisées». Plus précisément, toute mesure invariante d'un difféomorphisme Anosov sur $\mathbb{T}^2$ peut se décomposer en

$$\mu = \mu_{pp} + \mu_{sc} + \mu_{Liouv},$$

où $\mu_{pp} = \sum_k \alpha_k \delta_{\mathcal{P}_k}$ est la partie purement ponctuelle localisée sur des orbites périodiques, μ_{Liouv} est un multiple de dL, et μ_{sc} est une composante singulière continue.

Théorème. *Supposons que μ est une mesure semiclassique pour une transformation du «chat d'Arnold» S. Alors, la décomposition ci-dessus satisfait l'inégalité*

$$\mu_{Liouv}(\mathbb{T}^2) \geq \mu_{pp}(\mathbb{T}^2),$$

qui implique en particulier $\mu_{pp}(\mathbb{T}^2) \leq 1/2$.

Ce résultat a été récemment raffiné par S.Brooks [**Broo08**], en utilisant la notion d'entropie. Nous retrouverons d'ailleurs le facteur 1/2 dans les estimées entropiques décrites plus bas.

Ce résultat utilise une propriété spécifique du «chat d'Arnold» : une transition localisation-délocalisation au temps d'Ehrenfest (5). Précisément, si $(\psi(\hbar) \in \mathcal{H}_\hbar)_{\hbar\to 0}$ est une suite d'états microlocalisés en un point $\rho_0 \in \mathbb{T}^2$, alors les états $(U_\hbar^n \psi(\hbar))$ sont asymptotiquement équidistribués sur $\mathbb{T}^2$ si on prend des temps $n = n(\hbar) = T_E + \mathcal{O}(1)$. Cette propriété n'est pas transposable aux transformations ou flots non-linéaires, ni même aux symplectomorphismes de tores de dimension supérieure. Par contre, le théorème ci-dessus est valable pour la Walsh-quantification du boulanger [**14**].

3.2. Entropies des mesures semiclassiques. Dans [**14**], nous appliquons au système du boulanger Walsh-quantifié la méthode entropique introduite par N.Anantharaman pour le cas des flots géodésiques Anosov [**Ana08**]. Cette méthode consiste à obtenir une borne inférieure non-triviale sur l'entropie de Kolmogorov-Sinai des mesures semiclassiques. Rappelons brièvement les propriétés de l'entropie $h_{KS}(\mu)$ d'une mesure invariante μ (pour un flot ou une transformation Anosov) :

- pour toute mesure invariante μ, $h_{KS}(\mu) \in [0, h_{top}]$, où h_{top} est l'entropie topologique de la transformation. L'application $\mu \mapsto h_{KS}(\mu)$ est affine.
- pour une mesure $\delta_{\mathcal{P}}$ portée par une orbite périodique, on a $h_{KS}(\delta_{\mathcal{P}}) = 0$.
- l'inégalité de Ruelle-Pesin affirme que

$$h_{KS}(\mu) \leq \int \log J^u(\rho) d\mu(\rho), \tag{17}$$

  où $J^u(\rho)$ est le jacobien instable : $J^u(\rho) = \det d\Phi^1(\rho) \restriction_{E^u(\rho)}$. L'égalité est atteinte uniquement si $\mu = dL$.

Ainsi, une borne inférieure strictement positive sur $h_{KS}(\mu)$ fournit une contrainte non-triviale sur la localisation de μ : celle-ci ne peut être uniquement supportée par un ensemble dénombrable d'orbites périodiques.

La méthode utilisée dans **[Ana08]** (que nous adaptons au cas du boulanger Walsh-quantifié) permet de montrer que l'entropie d'une mesure semiclassique est strictement positive. Elle montre aussi que le support de μ ne peut être trop «fin», au sens où l'*entropie topologique* de la transformation restreinte à ce support satisfait $h_{top}(\operatorname{supp}\mu) \geq \min_\rho \frac{\log J^u(\rho)}{2}$. Dans le cas du «chat d'Arnolde» ou du boulanger, cette inégalité s'écrit

$$h_{top}(\operatorname{supp}\mu) \geq \frac{\lambda}{2}, \tag{18}$$

où $\lambda > 0$ est le coefficient d'expansion (uniforme). Notons que l'entropie topologique du tore entier vaut $h_{top}(\mathbb{T}^2) = \lambda$. Cette inégalité est saturée par certaines mesures semiclassiques fractales du boulanger Walsh-quantifié.

Dans **[14]** nous introduisons un nouvel outil, le *principe d'incertitude entropique*, qui nous permet d'obtenir une borne inférieure explicite pour l'entropie des mesures semiclassiques. Pour le boulanger, cette borne s'écrit

$$h_{KS}(\mu) \geq \frac{\lambda}{2}.$$

Elle implique en particulier la borne (18). Cette borne est saturée par les mesures semiclassiques semi-localisées (16).

Dans les articles **[16,25]** nous appliquons ce principe d'incertitude entropique au cas des flots géodésiques Anosov.

THÉORÈME. *Soit X une variété riemannienne compacte de dimension d, dont le flot géodésique est Anosov. Alors, toute mesure semiclassique associée aux modes propres du laplacien satisfait la borne inférieure :*

$$h_{KS}(\mu) \geq \int \log J^u(\rho) d\mu(\rho) - \frac{(d-1)\lambda_{\max}}{2}. \tag{19}$$

Ici, $\lambda_{\max}$ est le coefficient d'expansion maximal (6), et $J^u(\rho)$ le jacobien instable. Dans le cas d'une variété de courbure constante -1, la borne s'écrit

$$h_{KS}(\mu) \geq \frac{d-1}{2} = \frac{h_{top}}{2}.$$

Bien que la stratégie de preuve soit identique à celle utilisée pour le boulanger Walsh-quantifié, sa mise en œuvre est beaucoup plus technique, et utilise des propriétés fines de l'analyse semiclassique. Notons que si la courbure (et donc le jacobien instable) varie beaucoup sur X, le membre de droite de (19) peut devenir négatif, et la contrainte triviale (l'entropie étant forcément positive). Nous pensons que la borne optimale pour un système Anosov quelconque est

$$h_{KS}(\mu) \geq \frac{1}{2} \int \log J^u(\rho) d\mu(\rho). \tag{20}$$

Cette borne a été montrée récemment par G.Rivière **[Riv08]** pour les surfaces de dimension 2 de courbure négative ou nulle, et par B.Gutkin pour un modèle de boulanger Walsh-quantifié non-symétrique **[Gut08]**, où il exhibe des mesures semiclassiques saturant l'inégalité.

Compte tenu de l'inégalité de Ruelle-Pesin (17), pour prouver l'ergodicité quantique unique (qui est conjecturée dans le cas des flots géodésiques) il faudrait retirer le facteur 1/2 dans le membre de droite de (20). Ce retrait réclame des hypothèses supplémentaires à celle d'Anosov (v. la discussion dans le chap. 5).

3.3. Éléments de preuve. Donnons quelques étapes de la preuve de (19). L'entropie $h_{KS}(\mu)$ est construite en considérant une partition $P = \{P_k\}$de la couche d'énergie $S^*X = \bigsqcup_{k=1}^{K} P_k$, où on suppose les P_k de diamètres «petits». Cette partition est ensuite *raffinée* par le flot Φ^t en une suite de partitions

$$P^{(n)} = \left\{ P_{a_0 a_1 \cdots a_{n-1}} \stackrel{\text{def}}{=} P_{a_0} \cap \Phi^{-1}(P_{a_1}) \cap \cdots \Phi^{-n+1}(P_{a_{n-1}}) \,,\; a_i = 1, \ldots, K \right\}, \quad n \geq 1,$$

chaque élément $P_{a_0 a_1 \cdots a_{n-1}}$ contenant les particules qui partagent la même «histoire» entre les temps 0 et $n-1$. On définit alors une entropie associée à chaque raffinement et à la mesure invariante μ :

$$h_n(\mu, P) = h(\mu, P^{(n)}) = - \sum_{a_0, \ldots, a_{n-1}} \mu(P_{a_0 a_1 \cdots a_{n-1}}) \log \mu(P_{a_0 a_1 \cdots a_{n-1}}).$$

En utilisant la sous-additivité des entropies $h_n(\mu, P)$, on obtient l'entropie de Kolmogorov-Sinai de la mesure μ :

$$h_{KS}(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} h_n(\mu, P) = \inf_n \frac{1}{n} h_n(\mu, P).$$

Cette entropie correspond au taux moyen de décroissance exponentielle (par rapport à n) des poids $\mu(P_{a_0 a_1 \cdots a_{n-1}})$. Elle est indépendante de la partition P, dès lors que les P_k sont assez petits. L'entropie est donc strictement positive si ces poids décroissent tous exponentiellement vite.

Au niveau quantique, on adapte cette construction en considérant une **partition quantique** correspondant à la partition P : il s'agit d'une famille d'opérateurs $\left\{ \hat{P}_k \right\}$ sur $L^2(X)$, satisfaisant la résolution de l'identité

$$\sum_{k=1}^{K} \hat{P}_k^* \hat{P}_k = Id. \tag{21}$$

Grâce à cette relation, les poids quantiques $\{\|\hat{P}_k \psi_\hbar\|^2,\ k = 1, \ldots, K\}$ somment à l'unité (ici $\psi_\hbar$ est le mode propre (10) du laplacien, normalisé à l'unité). On peut donc définir une **entropie quantique**

$$h(\psi_\hbar, \hat{P}) = - \sum_{k=1}^{K} \left\| \hat{P}_k \psi_\hbar \right\|^2 \log \left\| \hat{P}_k \psi_\hbar \right\|^2$$

Ces poids sont raffinés par le flot de Schrödinger : au temps n, au poids classique $\mu(P_{a_0 a_1 \cdots a_{n-1}})$ correspond le poids quantique $\left\|\hat{P}_{a_{n-1}} \cdots U\hat{P}_{a_1} U\hat{P}_{a_0}\psi_\hbar\right\|^2$, où $U = e^{i\hbar\Delta/2}$ est le propagateur de Schrödinger au temps 1. Les entropies quantiques correspondantes sont notées $h_n(\psi_\hbar, \hat{P})$. C'est sur elles qu'on va obtenir une borne non triviale, par le biais d'un **principe d'incertitude entropique**, un avatar du théorème d'interpolation de Riesz-Thorin apparu dans la littérature sur les fondements de la mécanique quantique.

Proposition. *[Principe d'incertitude entropique] Soient $\hat{\tau} = (\hat{\tau}_k)_{k=1,\ldots,K}$ et $\hat{\pi} = (\hat{\pi}_k)_{k=1,\ldots,K}$ deux partitions quantiques d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ (c'est-à-dire que ces familles d'opérateurs satisfont (21)). Alors, pour tout état normalisé $\psi \in \mathcal{H}$, les entropies quantiques de ψ relativement à ces partitions satisfont :*

$$h(\psi, \hat{\tau}) + h(\psi, \hat{\pi}) \geq -2 \log \sup_{j,k} \|\hat{\tau}_j \hat{\pi}_k^*\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} . \tag{22}$$

Dans notre cas, les partitions adéquates $\hat{\tau}$, $\hat{\pi}$ sont construites à partir des raffinements $\hat{P}^{(n)}$ d'ordre $n = T_E + \mathcal{O}(1)$. Les normes $\|\hat{\tau}_j \hat{\pi}_k^*\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$ sont bornées grâce à *l'estimée dispersive hyperbolique* ci-dessous.

Proposition. *[Estimée dispersive hyperbolique, cas de courbure -1]*
Fixons $\mathcal{K} > 0$ arbitrairement grand et $\delta > 0$ arbitrairement petit. Pour $\hbar$ assez petit, on prend $\chi_\hbar \in C_c^\infty(T^*X)$ supportée sur un voisinage de S^*X de largeur $\hbar^{1-\delta}$. Alors, pour tout temps $m \leq \mathcal{K}|\log\hbar|$, les poids quantiques au temps m satisfont tous

$$\left\|\hat{P}_{a_{m-1}} \cdots U\hat{P}_{a_1} U\hat{P}_{a_0} \operatorname{Op}_\hbar(\chi_\hbar)\right\| \leq C\, \hbar^{-(d-1+\delta)/2}\, e^{-m(d-1)/2}. \tag{23}$$

Comme $\mathcal{K}$ est arbitraire, cette borne est valable, et non triviale, pour des temps *supérieurs au temps d'Ehrenfest* $T_E = |\log\hbar|$. On verra dans la section suivante qu'une estimée similaire joue un rôle déterminant pour les systèmes diffusifs. Cette borne est prouvée en calculant, étape par étape, le développement WKB du noyau de l'opérateur $\hat{P}_{a_{n-1}} \cdots U\hat{P}_{a_1} U\hat{P}_{a_0} \operatorname{Op}_\hbar(\chi_\hbar)$, à un ordre fini (suffisamment grand) en $\hbar$. Il est crucial de «projeter» (appliquer les opérateurs $\hat{P}_k$) à chaque étape de temps. Cette estimée montre qu'un état initialement localisé se disperse (voit sa norme L^2 locale diminuer) sous l'action répétée du flot U et des $\hat{P}_k$; cette dispersion résulte de l'hyperbolicité du flot géodésique et du principe d'incertitude.

On peut finalement injecter l'estimée (23) dans le membre de droite de (22) : on obtient une borne inférieure non-triviale pour les entropies quantiques $h_n(\psi_\hbar, \hat{P})$ (avec $n \leq T_E$), qu'on parvient à rapatrier sur les entropies classiques $\frac{1}{n} h_n(\mu, P)$ en utilisant le théorème d'Egorov, puis sur leur limite $h_{KS}(\mu)$.

CHAPITRE 3

Systèmes de diffusion chaotique

Sous l'impulsion de (et en collaboration avec) M.Zworski, je me suis intéressé aux systèmes de diffusion du type suivant : l'espace de configuration X est une variété riemannienne qui est équivalente à $\mathbb{R}^d$ en-dehors d'une «zone d'interaction» compacte, mais peut avoir une géométrie plus compliquée à l'intérieur de cette zone. Le hamiltonien engendrant le flot classique Φ^t est de la forme $p(x,\xi) = \frac{\xi^2}{2} + V(x)$, avec un potentiel $V(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ supporté dans la zone d'interaction.

L'opérateur quantique correspondant est $P(\hbar) = -\frac{\hbar^2\Delta}{2} + V(x)$, agissant sur $L^2(X)$. Son spectre sur $\mathbb{R}^+$ est alors purement absolument continu. Cependant, la résolvante $(P(\hbar) - z)^{-1} : L^2_{comp} \to L^2_{loc}$, définie dans le demi-plan physique $\{\Im z > 0\}$, admet un prolongement méromorphe à travers $\mathbb{R}^+$ vers le demi-plan non-physique $\{\Im z < 0\}$; les pôles $\{z_j(\hbar)\}$ de ce prolongement sont appelés des *résonances.* Ces résonances déterminent en partie le comportement du système pour les temps longs. À chaque résonance $z_j(\hbar)$ est associé un état résonnant (ou «état métastable») $\psi_j(\hbar)$ qui n'est pas dans L^2, mais qui formellement satisfait l'équation $P(\hbar)\psi_j(\hbar) = z_j(\hbar)\psi_j(\hbar)$, de sorte que ψ_j décroit exponentiellement sous l'action du flot de Schrödinger, à un taux $\frac{|\Im z_j|}{\hbar}$. En physique, le temps $\tau_j = \frac{\hbar}{|\Im z_j|}$ est appelé le temps de demi-vie de l'état métastable ψ_j.

1. Distribution des résonances : loi de Weyl fractale

Une activité intense en physique mathématique s'est attachée à comprendre la distribution des résonances $\{z_j(\hbar)\}$ dans la limite semiclassique. On s'intéresse particulièrement (mais pas uniquement) aux résonances à distance $\mathcal{O}(\hbar)$ de l'axe réel, correspondant à des temps de demi-vie «longs» (bornés inférieurement par une constante positive). Dans la limite semiclassique, leur distribution est gouvernée par le flot hamiltonien engendré par le hamiltonien $p(x,\xi)$. Lorsque ce flot présente des trajectoires «captées», on s'attend au niveau quantique à trouver des états résonnants de temps de demi-vie longs. Dans cette optique, Sjöstrand [**Sjo90**] et Sjöstrand-Zworski [**SZ07**] ont montré une borne supérieure pour la densité de résonances proches du réel, dans les cas où le flot sur l'ensemble K_E des trajectoires captées (à une certaine énergie $E > 0$) est *uniformément hyperbolique.* L'ensemble capté K_E a alors généralement une structure multifractale.

Théorème. [**SZ07**]*Supposons que pour une certaine énergie $E > 0$, l'ensemble capté K_E du flot engendré par $p(x,\xi)$ soit un ensemble hyperbolique de dimension de Minkowski* $\dim K_E = 2\gamma + 1$. *Alors, on a la borne supérieure suivante sur le nombre de résonances proches de E (comptées avec leur multiplicité) :*

$$(24) \qquad \forall C, \forall \epsilon > 0, \exists C', \quad \sharp\{z_j(\hbar),\ |z_j(\hbar) - E| \le C\hbar\} \le C'\hbar^{-\gamma-\epsilon}, \quad \hbar \le \hbar_0.$$

En dimension $d = 2$, on peut prendre $\epsilon = 0$.

Intuitivement, cette borne supérieure correspond au nombre d'états quantiques pouvant «habiter» un $\sqrt{\hbar}$-voisinage de K_E. Elle montre que si K_E est «fin», il ne peut y avoir beaucoup de résonances proches de l'axe réel. Il est conjecturé que la borne supérieure $\hbar^{-\gamma}$ est en fait une estimée, une **loi de Weyl fractale** [**LZ02**]. Cependant, les bornes inférieures rigoureuses qu'on a pu montrer sont nettement plus petites (sauf dans le cas trivial d'une seule trajectoire captée, correspondant à $\gamma = 0$: on dispose alors de formules de Bohr-Sommerfeld pour décrire les résonances [**GeSj87**]).

1.1. Applications quantiques ouvertes : un modèle discret de diffusion quantique. Mon premier travail sur ce sujet [**12,13**], a consisté à construire et analyser des modèles d'«applications quantiques ouvertes» sur le 2-tore, dont les caractéristiques dynamiques et spectrales devraient se rapprocher des systèmes de diffusion décrits ci-dessus. Une «application ouverte» est obtenue à partir d'une bijection canonique du tore, en «perçant un trou» à travers lequel la particule «s'échappe à l'infini» sans espoir de retour. La transformation inverse possède alors elle aussi un «trou» (particules arrivant de l'infini). On peut alors définir l'ensemble capté, formé des points ne tombant jamais dans le trou (ni dans le passé, ni dans le futur). Lorsque la transformation a des propriétés hyperboliques, cet ensemble est généralement fractal, comme dans le cas de la diffusion chaotique. Notons qu'une telle «application ouverte» s'obtient naturellement à partir d'une section de Poincaré du flot Φ^t décrit ci-dessus.

On peut quantifier ces applications ouvertes en utilisant les mêmes méthodes que dans le cas des applications «fermées» (bijectives) (v. chap. 1, §4.2). On obtient une suite de propagateurs $(U_\hbar)_{\hbar\to 0}$ de dimensions finies $N \sim \hbar^{-1}$, mais qui sont maintenant *sous-unitaires* (la sous-unitarité est due à la perte de probabilité à chaque pas de temps, du fait des particules «tombant dans le trou»). Nous pensons que le spectre de ces propagateurs a les mêmes propriétés semiclassiques que les spectres de résonances ci-dessus : les valeurs propres $\{\lambda_j(\hbar)\}$ de $U_\hbar$ doivent être comparées à $\left\{e^{-iz_j(\hbar)/\hbar},\ z_j(\hbar) \in \operatorname{Spec} P(\hbar),\ |\Re z_j - E| \leq C\hbar\right\}$. Au lieu de compter les résonances dans les disques $\{|z_j(\hbar) - E| \leq C\hbar\}$ comme dans (24), on compte les valeurs prores de $U_\hbar$ dans les anneaux $\{0 < c \leq |\lambda_j(\hbar)| \leq 1\}$.

1.1.1. *Boulanger ouvert quantique.* Nous nous sommes focalisés sur un modèle de «boulanger ouvert»

$$(x,\xi) \mapsto B_3(x,\xi) = \begin{cases} (3x, \xi/3), & 0 \leq x < 1/3 \\ (3x-2, (\xi+2)/3), & 2/3 \leq x < 1 \end{cases}, \tag{25}$$

qui résulte d'un «boulanger fermé» dans lequel on a percé un trou sur le rectangle central $\mathcal{T} = \{1/3 \leq x < 2/3\}$. L'ensemble capté K est l'intersection de l'ensemble captés dans le futur $\Gamma^- = \bigcap_{n\geq 1} B_3^{-n}(\mathbb{T}^2)$, et de l'ensemble capté dans le passé $\Gamma^+ = \bigcap_{n\geq 1} B_3^{n}(\mathbb{T}^2)$. En utilisant la représentation des réels en base 3 (qui conjugue B_3 à un décalage sur les suites ternaires), on voit facilement que $\Gamma^\pm$ est le produit d'un ensemble de Cantor par l'intervalle, et K est le produit de deux Cantor. Sa dimension de Hausdorff (ou de Minkowski) vaut $2\frac{\log 2}{\log 3}$. Le propagateur quantique $U_\hbar(B_3)$ est très similaire à celui du boulanger fermé : au lieu de (13), on prend (pour N un multiple de 3) la matrice sous-unitaire

$$U_\hbar(B_3) = F_N^{-1} \begin{pmatrix} F_{N/3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{N/3} \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Après avoir vérifié que ces propagateurs sont effectivement des opérateurs intégraux de Fourier sur le tore associés à la transformation (25), nous avons procédé à une étude numérique de leurs spectres. Nous obtenons que, pour tout $0 < c < 1$, la loi de Weyl fractale

$$\sharp \{0 < c \leq |\lambda_j(\hbar)| \leq 1\} = (C(c) + o(1))\, \hbar^{-\gamma},$$

est vérifiée sur plusieurs décades de $\hbar^{-1}$ si on prend $\gamma = \frac{\log 2}{\log 3}$, ce qui correspond à la dimension de Hausdorff $2\frac{\log 2}{\log 3}$ de l'ensemble capté. Nous ne comprenons pas vraiment la structure du facteur $C(c)$. Notons qu'une loi fractale a aussi été observée pour une autre application quantique ouverte sur le tore, la transformation du «rotateur pulsé» [**SchT04**]. Dans [**15**] nous avons analysé des variantes asymétriques du boulanger ouvert, et vérifié que la dimension fractale intervenant dans la loi de Weyl est bien la dimension de Hausdorff, et non une autre dimension multifractale (toutes ces dimensions sont identiques pour le boulanger symétrique (25) mais diffèrent dans les cas asymétriques).

1.1.2. *Boulanger ouvert quantifié à la Walsh.* Dans [**12,13**] nous construisons la quantification de Walsh pour le boulanger (25), valable lorsque la dimension de l'espace quantique est de la forme $N = (2\pi\hbar)^{-1} = 3^k$, $k \in \mathbb{N}$ (v. chap. 2, §2.1). Dans ces cas-là, le modèle obtenu $U_\hbar^{Walsh}(B_3)$ est complètement soluble : son spectre est explicite, et vérifie la loi de Weyl fractale attendue.

Théorème. *Pour les dimensions quantiques $N = 3^k$, le spectre de $U_\hbar^{Walsh}(B_3)$ se scinde en un noyau généralisé de dimension $3^k - 2^k$, et un spectre non-trivial contenu dans un anneau $\{0 < r_{\min} \leq |\lambda_j| \leq r_{\max} \leq 1\}$, de dimension 2^k.*

Dans la limite semiclassique $k \to \infty$, le spectre non-trivial se concentre sur le cercle $\{|\lambda| = r_0\}$, pour un certain rayon $r_{\min} < r_0 < r_{\max}$.

On remarque que $2^k = C\hbar^{-\log 2/\log 3}$. Il s'agit du premier système (certes, très peu générique) pour lequel la loi de Weyl fractale est vérifiée rigoureusement.

Cependant, considérons le «boulanger ouvert»

$$(x,\xi) \mapsto B_4(x,\xi) = \begin{cases} (4x, \xi/4), & 0 \leq x < 1/4 \\ (4x-2, (\xi+2)/4), & 1/2 \leq x < 3/4 \end{cases}, \tag{27}$$

qui a un ensemble capté de dimension $2\gamma = 1$. On peut le Walsh-quantifier pour des dimensions $N = 4^k$. On trouve alors que l'opérateur $U_\hbar^{Walsh}(B_4)$ a une valeur propre simple en 1, le reste étant un noyau généralisé. Autrement dit, pour cet exemple la loi de Weyl n'est pas vérifiée (ou elle l'est, avec un préfacteur $C(c) \equiv 0$) !

Pour ce modèle $U_\hbar^{Walsh}(B_4)$, nous avons aussi calculé explicitement le «bruit de grenaille quantique» [**12**]. Cette quantité est importante en physique mésoscopique, elle décrit les fluctuations de courant à travers une cavité ou un fil mésoscopique. Pour une cavité chaotique, il existe des prédictions pour ce bruit de grenaille, provenant de la théorie des matrices aléatoires, ainsi que des calculs semiclassique (non rigoureux) utilisant la formule des traces de Gutzwiller. Pour notre modèle simple (mais déterministe), le calcul du bruit de grenaille se révèle assez fastidieux, mais débouche sur un résultat intéressant : à 10% près, nous obtenons le résultat prédit par les matrices aléatoires.

2. Mesures semiclassiques associées aux états résonnants

2.1. Mesures quasi-invariantes. Dans **[15]** nous nous sommes intéressés à la répartition sur le tore des états propres (à droite) $\psi_j(\hbar)$ du «boulanger ouvert quantique» (26). Nous étudions pour cela les mesures de Husimi de ces états, et cherchons à comprendre la nature de leurs limites semiclassiques, c'est-à-dire les mesures semiclassiques associées aux suites $(\psi_{j(\hbar)}(\hbar))_{\hbar\to 0}$. Voici une version simplifiée de notre résultat.

THÉORÈME 2.1. *Supposons qu'une mesure semiclassique μ associée à la suite $(\psi_{j(\hbar)}(\hbar))_{\hbar\to 0}$ ne charge ni l'ensemble des points de discontinuité de B^{-1}, ni l'image de cet ensemble par B^{-1}. Alors*

(i) μ est supportée par l'ensemble capté dans le futur, Γ^+

(ii) il existe $\Lambda \in [0,1]$ tel que

$$B^*\mu = \Lambda\,\mu. \tag{28}$$

(iii) les valeurs propres correspondantes $(\lambda_{j(\hbar)}(\hbar))_{\hbar\to 0}$ satisfont

$$\lim_{\hbar\to 0} |\lambda_{j(\hbar)}(\hbar)| = \sqrt{\Lambda}. \tag{29}$$

La propriété (ii) montre que μ est une mesure quasi-invariante (invariante à un taux de décroissance Λ près). Nous appellerons Λ-mesure toute mesure de probabilité satisfaisant l'équation (28). La propriété (iii) montre que les états résonnants décroissent (en tant que densités $|\psi_j|^2$) asymptotiquement au même taux que μ.

Une analyse similaire a été faite dans **[18]** sur les suites de résonnances (proches d'une énergie E) d'un hamiltonien de diffusion $P(\hbar)$, tel que l'ensemble capté K_E soit hyperbolique. On peut aisément définir une mesure semiclassique μ associée à la suite d'états résonnants correspondants. Cette mesure n'a de sens physique (et n'est normalisable) que dans un voisinage de la zone d'interaction.

THÉORÈME. *Considérons une suite $(\psi_{j(\hbar)}(\hbar))_{\hbar\to 0}$ d'états résonnants de $P(\hbar)$, telle que les résonances associées satisfont $z_{j(\hbar)}(\hbar) = E + \mathcal{O}(\hbar)$, et une mesure semiclassique associée μ. Alors,*

(i) μ satisfait la version infinitésimale de (28),

$$\mathcal{L}_{H_p}\mu = \lambda\mu,$$

où $\mathcal{L}_{H_p}$ est la dérivée de Lie du champ hamiltonien H_p. λ est le taux de décroissance de μ.

(ii) les résonances satisfont une relation similaire à (29) :

$$\lim_{\hbar\to 0} \frac{\Im z_j(\hbar)}{\hbar} = -\lambda/2.$$

2.2. Classification des mesures semiclassiques des systèmes ouverts. À partir de ces résultats, nous nous sommes interrogés sur la *classification* de ces mesures semiclassiques. Existe-t-il un analogue (même faible) avec le théorème de Shnirelman ? Si oui, quelle mesure tient le rôle de la mesure de Liouville ?

Pour $\Lambda < 1$, la classification des Λ-mesures est très différente (et en un sens, plus simple) que celle des mesures invariantes ($\Lambda = 1$) **[DY07]**. Par exemple, on peut facilement construire des Λ-mesures purement ponctuelles. Il existe une Λ-mesure particulière, qu'on appelle «mesure SRB[1]», car elle peut être obtenue en propageant une mesure lisse sur le tore, comme la mesure SRB d'une transformation Anosov. Cette mesure SRB est associée à un taux de décroissance $\Lambda_{SRB} < 1$, qu'on appelle souvent *le* taux de décroissance du système (car il correspond au taux de décroissance d'une mesure initiale lisse). Un étude numérique du boulanger ouvert [**KNPS07**] semble montrer que, si on somme les mesures de Husimi d'un certain nombre d'états résonnants «les plus stables», on obtient une mesure qui ressemble à μ_{SRB}.

Au niveau des états individuels, μ_{SRB} ne peut au mieux correspondre qu'aux suites d'états $(\psi_{j(\hbar)}(\hbar))_{\hbar\to 0}$, dont les taux de décroissance convergent vers Λ_{SRB}. Dans notre étude numérique, la densité de résonances varie de manière lisse en fonction du module $|\lambda_j|$ (en particulier, elle ne présente pas de pic singulier proche de Λ_{SRB}), donc heuristiquement les suites ci-dessus ne sont composées que d'une petite fraction de modes résonnants.

Pour chaque $\Lambda \in [0, 1]$, on considère des suites de résonances $(\lambda_{j(\hbar)}(\hbar))$ satisfaisant (29), et leurs mesures semiclassiques associées. On peut alors se poser les questions suivantes :

(1) quelles Λ-mesures sont réalisées comme mesures semiclassiques ?
(2) parmi ces Λ-mesures, en existe-t-il une qui soit «favorisée» par le système quantique (comme pour les transformations unitaires) ? Ou au contraire a-t-on plutôt une «démocratie» parmi les Λ-mesures autorisées ?
(3) en particulier, la mesure SRB joue-t-elle un rôle dominant lorsque $\Lambda = \Lambda_{SRB}$?

Ces questions peuvent naturellement s'appliquer aux spectres de résonances. Pour le boulanger ouvert (26), nous ne disposons que d'une étude numérique (sommaire) des mesures de Husimi des états propres. Nous n'avons pas décelé de forme dominante parmi les mesures des états ayant des taux $|\lambda_j|$ comparables. Il semble néanmoins que des mesures semiclassiques purement ponctuelles soient exclues.

Pour tenter de répondre aux questions ci-dessus, nous avons étudié rigoureusement le modèle soluble du boulanger ouvert quantifié à la Walsh. Pour ce modèle, les états propres ont une expression explicite. Notons que la plupart des valeurs propres sont très dégénérées, donc on s'attend à trouver plus de mesures semiclassiques que dans un système générique ayant un spectre simple. L'étude des mesures semiclassiques a été entamée dans [**15**], et a été approfondie dans [**17**]. Nous avons obtenu les résultats suivants :

(1) rappelons que les valeurs propres non-triviales de $U_\hbar^{Walsh}(B_3)$ sont contenues dans un anneau $\{0 < r_{\min} \leq |\lambda_j| \leq r_{\max} \leq 1\}$. Nous montrons qu'il existe une *unique* mesure semiclassique associée à la valeur extrême $\Lambda = r_{\max}^2$ (resp. $\Lambda = {r_{\min}}^2$). Autrement dit, toutes les suites semiclassiques $(\psi_{j(\hbar)}(\hbar))$ dont les valeurs propres satisfont $|\lambda_{j(\hbar)}(\hbar)| \to r_{\max}$ (resp. $|\lambda_{j(\hbar)}(\hbar)| \to r_{\min}$) ont les mêmes propriétés de localisation.
(2) Par contre, pour tout $\Lambda \in ({r_{\min}}^2, {r_{\max}}^2)$, il existe de nombreuses mesures semiclassiques de taux Λ. Ceci pourrait être dû à la grande multiplicité des valeurs propres $\lambda_j(\hbar)$ correspondantes.

[1]Pour Sinai-Ruelle-Bowen.

(3) nous exhibons une classe de mesures semiclassiques ayant des propriétés multifractales simples (contenant les mesures semiclassiques «extrêmes» mentionnées ci-dessus).

(4) On vérifie que $\Lambda_{SRB} \in ({r_{\min}}^2, {r_{\max}}^2)$, et qu'il existe des suites $|\lambda_{j(\hbar)}(\hbar)|^2 \to \Lambda_{SRB}$. Malgré tout, nous ignorons si μ_{SRB} apparaît comme mesure semiclassique du système. Elle ne fait pas partie de la classe de mesures simples exhibées ci-dessus.

Il me semble très difficile (sinon impossible) de tirer, à partir de ce modèle non-générique, des conclusions ou même des conjectures relatives aux mesures semiclassiques associées aux résonances d'un hamiltonien $P(\hbar)$.

3. Bande sans résonances pour un ensemble capté «fin»

Ikawa [**Ika88**] et Gaspard-Rice [**GR89**] ont étudié la diffusion par n obstacles strictement convexes dans $\mathbb{R}^d$ (avec $n \geq 3$), avec comme système quantique correspondant le laplacien de Dirichlet sur le complémentaire X des obstacles. Du fait de la convexité des obstacles, l'ensemble capté $K \subset S^*X$ du flot géodésique est un ensemble hyperbolique fractal.

Ikawa et Gaspard-Rice ont montré que, si K est suffisamment «fin», alors le laplacien admet une bande sans résonances de largeur finie sous l'axe réel. Le critère d'apparition de cette bande est donné par une certaine **pression topologique** du flot sur K. La pression topologique $\mathcal{P}(f)$ est un nombre réel associé au flot sur K et à une fonction f Hölder-continue sur K. On peut la définir de façon variationnelle, à partir des entropies de KS :

$$\mathcal{P}(f) = \sup_{\mu} \left(h_{KS}(\mu) + \int_K f \, d\mu \right),$$

où le supremum est pris sur toutes les mesures de probabilité sur K invariantes par le flot.

Le critère d'Ikawa-Gaspard-Rice est le suivant : si la pression $\mathcal{P}(-\frac{1}{2}\log J^u)$ est négative (rappelons que $J^u(\rho) = \det\big(d\Phi^1 \restriction_{E^u(\rho)}\big)$ est le jacobien instable du flot Φ^1), alors pour tout $\epsilon > 0$ les résonances $z_j = k_j^2$ de $-\Delta$ satisfont :

$$\Im k_j \leq \mathcal{P}(-\frac{1}{2}\log J^u) + \epsilon \quad \text{pour } \Re k_j \text{ assez grand.}$$

Pour des obstacles dans le plan ($d = 2$), la négativité de la pression est équivalente au fait que l'ensemble capté sur est de dimension de Hausdorff strictement inférieure à 2 (d'où un critère de «finesse» de l'ensemble capté).

Dans [**18**], nous montrons l'analogue de ce résultat dans le cas de la diffusion par un potentiel lisse, pour lequel, à une certaine énergie $E > 0$, l'ensemble capté $K_E \subset p^{-1}(E)$ est hyperbolique.

THÉORÈME. *Supposons que la pression topologique $\mathcal{P}(-\frac{1}{2}\log J^u)$ associée au flot hamiltonien sur K_E est strictement négative. Alors,*

(i) pour tout $C, \epsilon > 0$, les résonances de la forme $|z_j(\hbar) - E| \leq C\hbar$ satisfont :

$$\Im z_j(\hbar) \leq \hbar \left(\mathcal{P}(-\frac{1}{2}\log J^u) + \epsilon \right), \qquad \hbar < \hbar_\epsilon. \tag{30}$$

(ii) **[26]** *nous obtenons également une estimée de la résolvante (tronquée par une fonction $\chi \in C_c^\infty(X)$) dans la bande sans résonance sous l'axe réel :*

$$\|\chi(P(\hbar)-z)^{-1}\chi\| \leq C\,\hbar^{-1+c_E\,\Im z/\hbar}|\log\hbar|\,,\quad |\Re z-E|\leq C'\hbar,\ \ 0\geq\frac{\Im z}{\hbar}\geq P(-\frac{1}{2}\log J^u)+\epsilon.$$

La constante $c_E > 0$ est explicite.

Ces deux résultats généralisent le cas où l'ensemble piégé consiste en une seule orbite instable. Dans ce cas-là, on peut se ramener à une forme normale au voisinage de l'orbite. Cette forme normale fournit une formule asymptotique de type Bohr-Sommerfeld pour les résonances proches de E [**GeSj87**].

3.1. Éléments de preuve. Par une déformation dans le complexe en dehors de la zone d'interaction, nous nous ramenons d'abord à un opérateur $P_\theta(\hbar)$ pour lequel les résonances proches de $\mathbb{R}$ sont devenues des valeurs propres L^2 [**HS86**] Il est ensuite nécessaire de conjuguer $P_\theta(\hbar)$ par un opérateur pseudodifférentiel $e^{\mathrm{Op}_\hbar(G)/\hbar}$, où G est une fonction de fuite ad hoc : cela permet de réduire la partie anti-autoadjointe positive de $P_\theta(\hbar)$ près de la couche d'énergie E. On tronque enfin cet opérateur sur une bande d'énergie $[E-\epsilon, E+\epsilon]$ par un cutoff $\chi(\hbar)$. Ces deux dernières modifications permettent au propagateur

$$U = U_\hbar = \exp(-i\chi(\hbar)P_{\theta,G}(\hbar)\chi(\hbar)/\hbar),$$

de satisfaire la borne $\|U_\hbar\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C$ uniforme en $\hbar$. De plus, pour un état propre $(\psi_j(\hbar), z_j(\hbar))$ de $P_{\theta,G}(\hbar)$ de valeur propre $z_j(\hbar) \in D(E, C\hbar)$, l'action de ce propagateur est quasiment identique à celle de $e^{-iP_{\theta,G}(\hbar)/\hbar}$: pour des temps $n \leq \mathcal{K}\log\hbar^{-1}$, on a

$$U_\hbar^n\psi_j(\hbar) = e^{-inz_j(\hbar)/\hbar}\psi_j(\hbar) + \mathcal{O}(\hbar^\infty). \tag{31}$$

Notre objectif est d'obtenir une borne supérieure pour le membre de gauche. Pour cela, nous utilisons des outils de [**Ana08**] : nous construisons une partition quantique $\left\{\hat{P}_k\right\}$ satisfaisant $\sum_k \hat{P}_k = Id$, qui «quantifie» une partition classique $\{P_k\}$ de $p^{-1}(E)$ adaptée à la dynamique. Le propagateur au temps n peut se décomposer en un ensemble de «chemins»

$$U^n = \sum_{a_0,\ldots,a_{n-1}} U\hat{P}_{a_{n-1}}\cdots U\hat{P}_{a_1}U\hat{P}_{a_0},$$

chaque chemin correspondant à un faisceau de trajectoires classiques. On montre que la somme est dominée par les «chemins captés», correspondant à des orbites qui restent proches de K_E pendant toute l'évolution. Pour estimer la contribution de ces chemins individuels, nous montrons une *estimée dispersive hyperbolique* similaire à (23) : cela est possible grâce à l'hyperbolicité du flot sur K_E. En utilisant l'inégalité triangulaire, on borne ainsi la norme de (31) par la somme des estimées dispersives sur les «chemins captés». Cette somme s'exprime finalement en termes de la pression : pour des temps $n \sim \mathcal{K}\log\hbar^{-1}$ avec $\mathcal{K} \gg 1$ indépendant de $\hbar$, la somme des normes est majorée par $\exp\left\{n\left(\mathcal{P}(-\frac{1}{2}\log J^u)+\epsilon\right)\right\}$. En prenant les normes dans (31), on a donc obtenu

$$\exp\left\{n\Im z_j(\hbar)/\hbar\right\} + \mathcal{O}(\hbar^\infty) \leq \exp\left\{n\left(\mathcal{P}(-\frac{1}{2}\log J^u)+\epsilon\right)\right\},$$

ce qui prouve (30).

CHAPITRE 4

Applications (quantiques) bruitées

Lors de mon séjour postdoctoral à Cologne, je me suis intéressé à une méthode visant à prouver la conjecture de Bohigas-Gianonni-Schmit dans le cas des application quantiques chaotiques. Cette conjecture affirme que, si une transformation classique κ est chaotique, alors dans la limite semiclassique les valeurs propres $\left(e^{i\theta_j(\hbar)}\right)$ du propagateur quantique $U_\hbar(\kappa)$ sont statistiquement distribuées (à l'échelle de l'écart moyen entre niveaux) de façon similaires aux valeurs propres de matrices aléatoires. Une «preuve» de cette conjecture a été proposée dans [**ASAA96**], utilisant des méthodes de théorie de champs développées dans le cadre d'études portant sur les systèmes mésoscopiques désordonnés. Notre objectif (ambitieux) était de chercher à rendre rigoureuse cette preuve, moyennant certains aménagements de la conjecture. En particulier, nous cherchions à montrer que cette statistique spectrale est valable génériquement, par rapport à une famille d'applications quantiques dépendant d'un nombre *fini* de paramètres (tandis que les matrices aléatoires dépendent d'un nombre de paramètres $\sim \hbar^{-2}$). Cet objectif n'a pas été atteint, la «preuve» de [**ASAA96**] contenant des approximations impossibles à justifier [**4**]. Néanmoins, l'argument final de cette «preuve» était un problème bien posé de trou spectral («gap») concernant une version «bruitée» de la transformation $U_\hbar(\kappa)$. Je reviendrai sur cette question dans la section 2. Avant de traiter la question quantique, on peut déjà se poser le problème au niveau classique. Par la suite, j'ai entamé une collaboration avec A.Fannjiang et L.Wolowski sur des questions proches. Il ne s'agissait plus d'étudier le spectre des applications bruitées, mais leur *temps de relaxation.*

1. Transformation bruitée sur le tore

Considérons un difféomorphisme symplectique κ sur le tore $\mathbb{T}^2$. On va considérer les perturbations de κ de la forme

$$\kappa_v = t_v \circ \kappa,$$

où t_v est la translation sur le tore par le vecteur $v \in \mathbb{T}^2$. Cette transformation agit sur les observables $a \in L^2(\mathbb{T}^2)$ par $\kappa_v^* a = a \circ \kappa_v$. On suppose que les translations t_v sont choisies de façon aléatoire et indépendamment à chaque pas de temps, selon une distribution donnée par une densité de probabilité $g_\varepsilon(v)$. On suppose que g_ε est centrée en l'origine, symétrique, et supportée dans la boule de rayon ε[1]. On s'intéressera surtout à la limite de faible bruit $\varepsilon \ll 1$.

La transformation κ bruitée agit de la façon suivante sur les observables :

$$a \mapsto T_\varepsilon(a) \stackrel{\text{def}}{=} \int (a \circ \kappa_v\,)\, g_\varepsilon(v) dv,$$

[1]Dans [**9**] nous considérons des densités de probabilité g_ε plus générales, admettant un moment d'ordre positif.

et peut se décomposer en

$$T_\varepsilon(a) = G_\varepsilon \circ \kappa^*(a), \tag{32}$$

où G_ε est «l'opérateur de bruit»

$$a \mapsto G_\varepsilon(a) \stackrel{\text{def}}{=} \int (a \circ t_v)\ g_\varepsilon(v) dv = \int a(\cdot + v)\, g_\varepsilon(v) dv. \tag{33}$$

Cet opérateur autoadjoint est diagonalisé par les modes de Fourier $e_k(\rho) = e^{2i\pi k\cdot\rho}$: pour tout $k \in \mathbb{Z}^2$, le mode e_k est associé à la valeur propre $\hat{g}_\varepsilon(k)$; par conséquent, les modes $|k| \gg \varepsilon^{-1}$ sont fortement réduits, et G_ε est un opérateur compact. L'unité est une valeur propre simple, associée à la fonction constante. Dans le régime $\varepsilon \ll 1$, les valeurs propres correspondant aux «petits» modes de Fourier $0 \neq k = \mathcal{O}(1)$ sont de la forme $1 - \mathcal{O}_k(\varepsilon^2)$: ces modes sont donc presque invariants.

Lorsqu'on compose de bruit à la dynamique déterministe κ^*, on obtient donc l'opérateur de «transport bruité» T_ε. C'est un opérateur non-normal sur $L^2(\mathbb{T}^2)$, compact, de norme 1, qui admet une valeur propre simple en 1, associée à la fonction constante, toutes les autres valeurs propres étant a priori dans un disque $\left\{|\lambda| \leq 1 - C\varepsilon^2\right\}$. On s'intéresse à la distance («gap») entre la seconde valeur propre et le cercle unité. De façon équivalente, on cherche à évaluer,dans la limite de faible bruit, le rayon spectral de $T_{\varepsilon \restriction L^2_0}$, où $L^2_0 = L^2_0(\mathbb{T}^2)$ est l'espace des fonctions L^2 de moyenne nulle sur le tore. On sait déjà que cette distance est $\geq C\,\varepsilon^2$, indépendamment de la transformation κ.

1.1. Relation spectre-dynamique. Le spectre de T_ε dépend fortement du type de dynamique engendrée par κ (dynamique chaotique contre dynamique régulière). Ces propriétés spectrales sont étudiées dans [**7**], en particulier en se servant d'exemples simples pour lesquels le spectre peut être calculé explicitement. Ces exemples sont très chaotiques (symplectomorphismes hyperboliques $S \in SL(2,\mathbb{Z})$), peu chaotiques (translations irrationnelles) ou réguliers (symplectomorphismes paraboliques ou elliptiques, éventuellement perturbés).

Nous rappelons aussi un résultat de Blank-Keller-Liverani [**BKL03**] concernant les transformations κ Anosov : ils montrent que le spectre de T_ε dans une couronne $\{0 < r \leq |\lambda| \leq 1\}$ converge, dans la limite de faible bruit, vers le spectre des **résonances de Ruelle-Pollicott**, qui décrit le mélange exponentiel de κ. Par conséquent, le «gap» converge, dans la limite $\varepsilon \to 0$, vers le gap entre 1 et la résonances de RP la plus proche.

Le cas des transformations «régulières» est (paradoxalement) moins bien compris. Il semble toutefois que le gap décroisse vers zéro dans la limite $\varepsilon \to 0$. C'est ce que nous suggèrent les exemples de transformations que nous traitons dans [**7**], et pour lesquelles nous pouvons calculer le gap : celui-ci décroît généralement comme $\sim \varepsilon^2$. Le gap décroît aussi dans le cas d'une translation irrationnelle, qui est ergodique mais non mélangeante. Une preuve rigoureuse de cette «fermeture du gap», sous des hypothèses raisonnables de régularité de la dynamique, fait cependant défaut.

1.2. Temps de relaxation. En collaboration avec A.Fannjiang et L.Wolowski, je me suis aussi intéressé aux propriétés de l'évolution bruitée T_ε^n aux «temps intermédiaires», pour lesquels le spectre ne fournit pas beaucoup d'information. Plus précisément, dans [**9**] nous avons analysé le comportement du *temps de relaxation*

τ_ε : c'est le temps à partir duquel la norme $\left\|(T_{\varepsilon\restriction L^2_0})^n\right\|$ décroît de façon significative (devient $\leq 1/2$). C'est donc le temps à partir duquel une densité initiale $a(x,\xi)$ a déjà significativement relaxé vers sa valeur limite, qui est la fonction constante $\bar{a} \equiv \int_{\mathbb{T}^2} a$.

Comme T_ε est un opérateur non-normal, ce temps n'est pas directement relié au spectre de T_ε, mais plutôt à son «pseudospectre» [**ET05**]. Nous obtenons plusieurs critères dynamiques sur κ fournissant des informations sur le temps τ_ε. J'en cite ici quelques-uns.

(1) Pour tout κ, le temps de dissipation diverge dans la limite $\varepsilon \to 0$:
$$C\varepsilon^{-2} \geq \tau_\varepsilon \geq c\log\varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon \to 0.$$
(ε^{-2} correspond au temps de relaxation pour $\kappa = Id$).

(2) Si κ admet un mode propre non-constant de valeur propre $|\lambda| = 1$ (κ non faiblement mélangeant), et que ce mode est Sobolev-régulier, alors la relaxation est «lente» : $\tau_\varepsilon \geq \epsilon^{-\alpha}$ pour un certain exposant $\alpha > 0$.

(3) Au contraire, si κ est exponentiellement mélangeant (par exemple, κ Anosov), alors $\tau_\varepsilon \leq C\log\varepsilon^{-1}$: la relaxation est «rapide». Pour un symplectomorphisme hyperbolique, on a une estimation $\tau_\varepsilon \sim C\log\varepsilon^{-1}$, avec une constante C explicite.

2. Applications quantiques bruitées

Comme expliqué au chap. 1, §4, la $\hbar$-quantification de κ et des translations t_v sur le tore produit une suite de propagateurs unitaires $U_\hbar(\kappa)$ et $U_\hbar(t_v)$ agissant sur des espaces quantiques $\mathcal{H}_\hbar$ de dimension $N \sim \hbar^{-1}$. On peut alors quantifier la perturbation κ_v par
$$U_\hbar(\kappa_v) = U_\hbar(t_v)\, U_\hbar(\kappa).$$
Comme en (4), la transformation des observables quantiques $A_\hbar = \mathrm{Op}_\hbar(a) \in \mathcal{H}_\hbar \otimes \mathcal{H}_\hbar^*$ est donnée par l'action adjointe $\mathcal{U}_\hbar(\kappa_v)$[2]
$$A_\hbar \mapsto \mathcal{U}_\hbar(\kappa_v) A_\hbar \stackrel{\text{def}}{=} U_\hbar^*(\kappa_v)\, A_\hbar\, U_\hbar(\kappa_v).$$
Dans ce contexte, il est naturel de munir l'espace des observables (matrices $N \times N$) de la norme Hilbert-Schmidt. $\mathcal{U}_\hbar(\kappa_v)$ est alors unitaire, de spectre $\left\{e^{i(\theta_j-\theta_{j'})},\ j,j' = 1,\ldots,N\right\}$, où $\left\{e^{i\theta_j}, j = 1,\ldots,N\right\}$ est le spectre de $U_\hbar(\kappa_v)$. En particulier, la valeur propre 1 a une multiplicité au moins égale à N.

Par analogie avec le cas classique, on s'intéresse à la *moyenne* des superopérateurs $\mathcal{U}_\hbar(\kappa_v)$ par rapport à la distribution $g_\varepsilon(v)$, c'est-à-dire à l'opérateur

$$\mathcal{T}_{\hbar,\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \int \mathcal{U}_\hbar(\kappa_v)\, g_\varepsilon(v)dv = \mathcal{G}_{\hbar,\varepsilon} \circ \mathcal{U}_\hbar(\kappa) \tag{34}$$

agissant sur $\mathcal{H}_\hbar \otimes \mathcal{H}_\hbar^*$. La décomposition du membre de droite fait apparaître l'«opérateur de bruit quantique» :
$$\mathcal{G}_{\hbar,\varepsilon} = F_{\hbar,\varepsilon} \int \mathcal{U}_\hbar(t_v)\, g_\varepsilon(v)dv\,,$$

[2]En mécanique quantique on appelle parfois $\mathcal{U}_\hbar(\kappa_v)$ un «superopérateur» pour le différencier des simples «opérateurs» agissant sur $\mathcal{H}_\hbar$.

où le facteur de renormalisation $F_{\hbar,\varepsilon} > 0$ est nécessaire si on veut s'assurer de la conservation de la trace, c'est-à-dire $\mathcal{G}_{\hbar,\varepsilon}(I) = I$. Ce facteur converge vers 1 dans la limite $\hbar/\varepsilon \to 0$.

Des opérateurs du type de $\mathcal{T}_{\hbar,\varepsilon}$ apparaissent dans certains modèles de *décohérence quantique* [**BPS02**], rendant compte de l'interaction d'un «petit système» (en général de dimension N assez petite, ayant une dynamique interne $\mathcal{U}_\hbar$) avec un «environnement» (en général de dimension grande ou infinie). Au lieu de traiter le système total, on cherche à rendre compte de cette interaction par le biais d'un opérateur effectif agissant sur le petit système, ayant la forme de $\mathcal{G}_{\hbar,\varepsilon}$.

2.1. Spectre et temps de relaxation quantiques. Nous nous sommes posé les mêmes questions que pour les transformations bruitées classiques T_ε : à quoi ressemble le spectre de $\mathcal{T}_{\hbar,\varepsilon}$, en particulier lorsqu'on considère simultanément les limites de faible bruit ($\varepsilon \to 0$) et semiclassique ($\hbar \to 0$) ? Clairement, ces deux limites ne commutent pas.

Comme dans le cas classique, le spectre de l'opérateur de bruit $\mathcal{G}_{\hbar,\varepsilon}$ est explicite : ses modes propres correspondent aux modes de Fourier quantiques $\mathrm{Op}_\hbar(e_k)$, où le vecteur d'onde k varie dans $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$. Les valeurs propres $\gamma_k(\varepsilon,\hbar)$ sont obtenues en périodisant la fonction $\hat{g}_\varepsilon(k)$. À vecteur k fixé, on trouve que $\gamma_k(\varepsilon,\hbar) \to \hat{g}_\varepsilon(k)$ dans la limite $\hbar \to 0$, $\hbar/\varepsilon \to 0$.

En fixant $\varepsilon > 0$, on a montré dans [**7**] que l'opérateur $\mathcal{T}_{\varepsilon,\hbar}$ converge (dans un sens précis) vers son analogue classique T_ε dans la limite $\hbar \to 0$.

THÉORÈME. *Fixons le niveau de bruit $\varepsilon > 0$, et un cutoff $0 < r < 1$. Alors, dans la limite $\hbar \to 0$, le spectre de $\mathcal{T}_{\varepsilon,\hbar}$ dans la couronne $\{0 < r \leq |\lambda| \leq 1\}$ converge uniformément vers celui de T_ε.*

Par conséquent, si κ est une transformation Anosov, en utilisant le résultat de gap de [**BKL03**] on déduit que l'opérateur quantique $\mathcal{T}_{\hbar,\varepsilon}$ admet aussi, pour $\varepsilon > 0$ fixé et $\hbar \to 0$, un gap fini entre sa valeur propre 1 (simple) et le reste du spectre. Il est probable que ce gap persiste si on prend $\varepsilon = \varepsilon(\hbar) \to 0$ assez lentement. Ce résultat a constitué la motivation première de mon travail sur ces questions : le gap spectral de $\mathcal{T}_{\hbar,\varepsilon}$ était au coeur de la «preuve» de [**ASAA96**]. Un tel gap, de même que la convergence spectrale mentionnée ci-dessus, avaient été observé numériquement dans [**MWH01**].

Dans [**10**] nous étudions le temps de relaxation de $\mathcal{T}_{\hbar,\varepsilon}$, pour κ une transformation Anosov sur le tore. Par analogie au cas classique, ce temps est celui pour lequel la norme $\|(\mathcal{T}_{\hbar,\varepsilon\restriction HS_0})^n\|$[3] devient plus petite que 1/2. Nous identifions plusieurs régimes pour lesquels ε et $\hbar$ tendent vers zéro simultanément.

(1) Le régime «très quantique» correspond à un taux de bruit $\varepsilon < \hbar$. Le bruit est alors «invisible» au niveau quantique, et la relaxation est très lente, voire absente (si la densité g_ε est à support compact).
(2) Au contraire, si $\varepsilon > \hbar^\alpha$ (pour un certain $0 < \alpha \leq 1$), on se trouve dans un régime semiclassique : le temps de relaxation se comporte comme au niveau classique, c'est-à-dire comme $C \log \varepsilon^{-1}$.

[3] HS_0 est l'espace des observables quantiques de trace nulle, muni de la norme Hilbert-Schmidt.

CHAPITRE 5

Conclusions et perspectives

Chacun des trois thèmes de recherche décrits plus haut laisse de nombreux points d'interrogation, qui pourraient donner lieu à de futurs développements.

- la classification des mesures semiclassiques de systèmes Anosov reste partielle. Dans le cas des flots géodésiques non-arithmétiques, la conjecture d'ergodicité quantique unique reste ouverte, et semble crédible au vu des résultats numériques. Cependant, comme indiqué à la fin du chap. 2, §3.2, la méthode développée dans **[16,25]** ne peut permettre de montrer la conjecture. Il faut pour cela ajouter des hypothèses supplémentaires concernant le flot (peut-être une hypothèse de généricité). La preuve de Lindenstrauss concernant les états propres de Hecke de surfaces arithmétiques utilise une infinité de symétries (opérateurs de Hecke).

  Dans un premier temps, on peut chercher à généraliser l'estimée (20) au cas des variétés Anosov (ou éventuellement des variétés de courbure négative ou nulle) en dimension $d \geq 3$. La difficulté provient du fait qu'il existe en tout point $(d-1)$ directions instables, l'instabilité variant en fonction de la direction.

  Une autre généralisation intéressante serait de considérer des variétés à bord non lisses, afin d'inclure des billards chaotiques (non Anosov) comme le stade de Bunimovich. Bien sûr, on s'attend à avoir des problèmes lorsque les géodésiques rencontrent une singularité du bord. Hassell a récemment montré que la plupart des stades ne vérifient pas l'ergodicité quantique unique **[Hass08]** ; on pense que les états propres exceptionnels correspondent à des modes «bouncing ball» localisés le long des orbites verticales marginalement stables. L'estimée (20) resterait valable dans le cas d'une mesure invariante portée par ces orbites (les deux membres de l'inégalité sont nuls).
- Le système de diffusion chaotique étudié dans le chapitre 3, ainsi que le modèle-jouet de «boulanger ouvert», fournit une sorte d'interpolation entre des systèmes ayant un ensemble capté K simple (une seule orbite périodique), et les systèmes Anosov pour lesquels toute la couche d'énergie est captée. La complexité de la dynamique sur K est équivalente au cas Anosov, de sorte qu'il n'existe pas de «forme normale», contrairement au cas d'une seule orbite. Cependant, lorsque l'ensemble capté forme est de dimension topologique 1, la réduction du flot classique en une application de premier retour sur une section de Poincaré (méthode utilisée couramment en théorie ergodique) peut se transporter au niveau quantique. On relie alors l'hamiltonien quantique à une famille d'applications quantiques, qui quantifient l'application de premier retour[1]. J'ai l'espoir que cette réduction facilite l'obtention de résultats

[1]travail en préparation avec J.Sjöstrand et M.Zworski.

originaux sur le spectre de résonances, par exemple une borne inférieure pour la loi de Weyl fractale dans le cas d'un système «générique». Cette méthode pourrait aussi permettre d'améliorer légèrement le «gap», comme dans le cas des obstacles convexes [**PetSto08**]

Je m'intéresse depuis peu à d'autres types de systèmes chaotiques non-conservatifs, comme l'équation des ondes amorties sur une variété compacte (ou une cavité). On peut ramener l'étude spectrale du semi-groupe à celle d'un opérateur de Schrödinger non auto-adjoint. Dans les cas où le flot géodésique est chaotique, la distribution des valeurs propres donne lieu à des questions intéressantes [**Sjo00**]. Mon étudiant Emmanuel Schenck a montré la présence d'un «gap» dans le spectre, dépendant également d'une certaine pression topologique, en adaptant la preuve de [**18**]. Sur le plan dynamique, ce type de système est en effet assez proche des systèmes diffusifs du chapitre 3 : au lieu de «partir à l'infini» ou de «disparaître dans un trou», les rayons sont continûment amortis. Dans [**20**] nous avons adapté le modèle d'application quantique à cette situation amortie (l'application quantique est alors «partiellement ouverte»), et étudié le spectre.

Dans les deux cas (diffusif ou amorti), on s'intéresse au spectre d'un opérateur intégral de Fourier non unitaire, associé à une transformation chaotique. De manière générale, on peut espérer obtenir un résultat sur la densité semiclassique des valeurs propres, en fonction de la structure de l'ensemble capté ou de l'amortissement, au moins pour un système «générique» (souvenons-nous du contre-exemple fourni par la Walsh-quantification du boulanger (27)).

Enfin, comme il a été récemment montré [**FR06, FRS08**], ces questions spectrales rejoignent celles posées dans la théorie des systèmes chaotiques classiques : les opérateurs de Perron-Frobenius associés à une transformation Anosov, peuvent aussi s'interpréter comme des OIF, de sorte que les résonances de Ruelle-Pollicott sont un cas particulier de résonances quantiques. Toute information générale sur les secondes fournit donc des renseignements sur les premières.

- Les questions spectrales et de relaxation pour des transformations bruitées se transposent sans difficulté aux *flots bruités*, autrement dit aux équations de convection-diffusion du type

$$\partial_t \phi(x,t) + u(x) \cdot \nabla \phi(x,t) - \varepsilon \Delta \phi(x,t) = 0, \tag{35}$$

avec $u(x)$ un champ de vitesses fixé, de divergence nulle, sur un espace des phases compact X. Le dernier terme (viscosité/chaleur/diffusion) est l'analogue de l'opérateur (33). En absence de flot, la relaxation est donnée par l'équation de la chaleur sur X, en particulier le temps de relaxation sera d'ordre ε^{-1}. Ce type de système a été analysé par [**CKRZ08**], dans l'hypothèse où le flot engendré par le champ de vecteurs $u(x)$ est faiblement mélangeant : on obtient alors une accélération de la relaxation. Cependant, ces résultats (certes, assez généraux), ne donnent pas d'estimées sur le comportement du temps de relaxation lorsque $\varepsilon \to 0$. Je pense que, si le flot est Anosov, ou au moins rapidement mélangeant, alors ce temps devrait être d'ordre $\log \varepsilon$, comme nous l'avons montré pour les transformation bruitées à temps discret. La compréhension de la relaxation pour des équations linéaires du type (35) est intéressante dans l'analyse des extensions du type réaction-diffusion (consistant à rajouter un terme non-linéaire $f(\phi)$ dans le membre de droite).

On peut également se poser des questions sur le spectre de l'opérateur $u(x) \cdot \nabla - \varepsilon\Delta$, qui contient une partie hermitienne (diffusion) et anti-hermitienne (convection). Y a-t-il un gap entre la valeur propre nulle et le reste du spectre ? Il est raisonnable de penser que, dans le cas d'un flot Anosov, le spectre de cet opérateur converge (dans une fenêtre de fréquences) vers les résonances de Ruelle-Pollicott du système non-bruité, dans la limite $\varepsilon \to 0$. Un tel résultat de «stabilité spectrale stochastique» est peut-être accessible en utilisant les méthodes semiclassiques de [**Tsu08, FRS08**].

Liste de Publications de Stéphane Nonnenmacher

Publications dans revues à comité de lecture :

(1) S. N. and A. Voros, *Eigenstate structures around a hyperbolic point*, J. Phys. **A 30**, 295-315 (1997)

(2) S. N., *Crystal properties of eigenstates for quantum cat maps*, Nonlinearity *10*, 1569-1598 (1997)

(3) S. N. and A. Voros, *Chaotic eigenfunctions in phase space*, J. Stat. Phys. **92** 431–518 (1998)

(4) S. N. and M.R. Zirnbauer, *Det-Det Correlations for Quantum Maps : Dual Pair and Saddle-Point Analyses*, J. Math. Phys. **43** 2214–2240 (2002)

(5) J. Budczies, S. N., Ya. Shnir, M.R. Zirnbauer, *(1+1)-dimensional Baryons from the SU(N) Color-Flavor Transformation*, Nucl. Phys. **B 635** 309-356 (2002)

(6) F. Faure, S. N. and S. De Bièvre, *Scarred eigenstates for quantum cat maps of minimal periods*, Commun. Math. Phys. **239** 449-492 (2003)

(7) S. N., *Spectral properties of noisy classical and quantum propagators*, Nonlinearity **16** 1685-1713 (2003)

(8) F. Faure, S. N., *On the Maximal Scarring for Quantum Cat Map Eigenstates* , Commun. Math. Phys. **245** 201-214 (2004)

(9) A. Fannjiang, S. N., L. Wolowski, *Dissipation time and decay of correlations*, Nonlinearity **17** 1481-1508 (2004)

(10) A. Fannjiang, S. N., L. Wolowski, *Relaxation time of quantized toral maps* , Ann. Henri Poincaré **7** 161-198 (2006)

(11) B. Winn, M. Degli Esposti, S. N., *Quantum variance and ergodicity for the baker's map*, Commun. Math. Phys. **263** 325-352 (2006)

(12) S. N., M. Zworski, *Distribution of resonances for open quantum maps*, Commun. Math. Phys. **269** 311-365 (2007)

(13) S. N., M. Zworski, *Fractal Weyl laws in discrete models of chaotic scattering*, J. Phys. **A 38** 10683-10702 (2005)

(14) N. Anantharaman, S. N., *Entropy of Semiclassical Measures of the Walsh-Quantized Baker's Map*, Ann. Henri Poincaré **8** 37-74 (2007)

(15) S. N., M. Rubin, *Resonant eigenstates in quantum chaotic scattering*, Nonlinearity **20** 1387-1420 (2007)

(16) N. Anantharaman, S. N., *Half–delocalization of eigenfunctions for the Laplacian on an Anosov manifold,* Ann. Inst. Fourier **57** 2465-2523 (2007)

(17) J.P. Keating, S. N., M. Novaes, M. Sieber, *On the resonance eigenstates of an open quantum baker map*, Nonlinearity 21 2591-2624 (2008)

(18) S. N., M. Zworski, *Quantum decay rates in chaotic scattering*, accepté par Acta Math (2008)

(19) S. N., *Some open questions in "wave chaos"*, Nonlinearity **21** T113-T121 (2008) (invité)

(20) S. N., E. Schenck, *Resonance distribution in open quantum chaotic systems*, Phys. Rev. **E 78**, 045202(R) (2008)

(21) N. Anantharaman, S. N., *Vibrations chaotiques et grosses balafres*, à paraître dans la Gazette des mathématiciens (2009) (invité)

Actes de colloques :

(22) S. N., Ya. Shnir, *The Color-Flavor Transformation of Induced QCD*, Proc. to the 5th Intern. Conf. *Quark confinement and the hadron spectrum*, Gargnano, Garda Lake, Italy (2002)

(23) S. N., M. Zworski, *Fractal Weyl law for open chaotic maps*, Proc. to the Conf. *Mathematical Physics of Quantum Mechanics (QMath9)*, Giens, France (2004)

(24) S. N., M. Zworski, *Quantum decay rates in chaotic scattering*, Séminaire X-EDP Ecole polytechnique, Palaiseau, France (2006)

(25) N. Anantharaman, H. Koch, S. N., *Entropy of eigenfunctions*, Proc. to the *International Congress on Mathematical Physics (ICMP 2006)*, Rio de Janeiro, Brasil (2006)

Prépublication :

(26) S. N., M. Zworski, *Semiclassical resolvent estimates in chaotic scattering* (2009)

Bibliographie

[Ana08] N.Anantharaman, *Entropy and the localization of eigenfunctions*, Ann. of Math. **168**, 435-475 (2008)

[ASAA96] A.V.Andreev, B.D.Simons, O.Agam et B.L.Altshuler, *Semiclassical field theory approach to quantum chaos* Nucl. Phys. **B 482**, 536-566 (1996)

[BV89] N.Balasz et A.Voros, *The quantized baker's transformation*, Ann. Phys. (NY) **190**, 1-31 (1989)

[Ber77] M.V.Berry, *Regular and irregular semiclassical wave functions*, J. Phys. A : Math. Gen. **10**, 2083-91 (1977)

[BPS02] P.Bianucci, J.P.Paz et M.Saraceno, *Decoherence for classically chaotic quantum systems*, Phys. Rev **E 65**, 046226 (2002)

[BKL03] M.Blank, G.Keller et C.Liverani, *Ruelle-Perron-Frobenius spectrum for Anosov maps*, Nonlinearity **15**, 1905-1973 (2003)

[BGS84] O.Bohigas, M.-J.Gianonni et C.Schmit, *Characterization of Chaotic Quantum Spectra and Universality of Level Fluctuation Laws*, Phys. Rev. Lett. **52**, 1-4 (1984)

[BDB96] A.Bouzouina et S.De Bièvre, *Equipartition of the eigenfunctions of quantized ergodic maps on the torus*, Commun. Math. Phys. **178**, 83-105 (1996)

[Broo08] Sh.Brooks, *On the entropy of quantum limits for 2-dimensional cat maps*, preprint 2008

[CdV85] Y.Colin de Verdière, *Ergodicité et fonctions propres du Laplacien*, Commun. Math. Phys. **102**, 597-502 (1985)

[CKRZ08] P.Constantin, A.Kiselev, L.Ryzhik et A.Zlatos, *Diffusion and mixing in fluid flow*, Ann. of Maths. **168**, 643-674 (2008)

[DY07] M.F.Demers et L.-S.Young, *Escape rates and conditionally invariant measures*, Nonlinearity **19**, 377-397 (2006)

[DEG03] M.Degli Esposti et S.Graffi (eds), The mathematical aspects of quantum maps, Springer, 2003

[DS99] M.Dimassi et J.Sjöstrand, Spectral asymptotics in the semi-classical limit, Cambridge University Press, 1999

[ET05] M.Embree et L.N.Trefethen, Spectra and pseudospectra, Princeton University Press, 2005

[FW03] A.Fannjiang et L.Wolowski, *Noise induced dissipation in Lebesgue-measure preserving maps on d-dimensional torus*, J. Stat. Phys. **113**, 335-378 (2003)

[FR06] F.Faure et N.Roy, *Ruelle-Pollicott resonances for real analytic hyperbolic map*, Nonlinearity **19**, 1233-1252, (2006)

[FRS08] F.Faure, N.Roy et J.Sjöstrand, *Semi-classical approach for Anosov diffeomorphisms and Ruelle resonances*, Open Math. J. **1**, 35-81 (2008)

[GR89] P.Gaspard et S.A.Rice, *Semiclassical quantization of the scattering from a classically chaotic repellor*, J. Chem. Phys. **90**, 2242-2254 (1989)

[GeSj87] C.Gérard et J.Sjöstrand, *Semiclassical resonances generated by a closed trajectory of hyperbolic type*, Commun. Math. Phys. **108**, 391-421 (1987)

[GerLei93] P.Gérard et G.Leichtnam, *Ergodic properties of eigenfunctions for the Dirichlet problem*, Duke Math. J. **71**, 559-607 (1993)

[Gut08] B.Gutkin, *Entropic bounds on semiclassical measures for quantized one-dimensional maps*, preprint 2008 (`arXiv :0802.3400`)

[HanBer80] J.H.Hannay et M.V.Berry, *Quantization of linear maps-Fresnel diffraction by a periodic grating*, Physica **D1**,267-290 (1980)

[Hass08] A.Hassell, *Ergodic billards that are not quantum uniquely ergodic* (with an appendix by L.Hillairet), preprint 2008 (`arXiv :0807.0666v3`)

[HMR87] B.Helffer, A.Martinez et D.Robert, *Ergodicité et limite semi-classique*, Commun. Math. Phys. **109**, 313-326 (1987)

[HS86] B.Helffer et J.Sjöstrand, *Résonances en limite semiclassique*, Bull. de la SMF **114(3)**, Mémoire 24/25 (1986)

[Hel84] E.J.Heller, *Bound-state eigenfunctions of classically chaotic hamiltonian systems : scars of periodic orbits*, Phys. Rev. Lett. **53**, 1515-1518 (1984)

[Ika88] M.Ikawa, *Decay of solutions of the wave equation in the exterior of several convex bodies*, Ann. Inst. Fourier **38**, 113-146 (1988)

[KNPS07] J.Keating, M.Novaes, S.Prado et M.Sieber, *Semiclassical structure of chaotic resonance eigenfunctions*, Phys. Rev. Lett. **97**, 150406 (2007)

[KR00] P.Kurlberg et Z.Rudnick, *Hecke theory and equidistribution for the quantization of linear maps of the torus*, Duke Math. J. **103**, 47-77 (2000)

[Laz93] V.F.Lazutkin, KAM theory and semiclassical approximations to eigenfunctions (Addendum by A.Shnirelman), Springer, 1993

[LZ02] K.Lin et M.Zworski, *Quantum resonances in chaotic scattering*, Chem. Phys. Lett. **355**, 201 (2002)

[Lin06] E.Lindenstrauss, *Invariant measures and arithmetic quantum unique ergodicity*, Ann. of Math. **163**, 165-219 (2006)

[MWH01] C.Manderfeld, J.Weber et F.Haake, *Classical versus quantum time evolution of (quasi-) probability densities at limited phase-space resolution*, J. Phys. A :Math. Gen. **34**, 9893-905 (2001)

[PetSto08] V.Petkov et L.Stoyanov, *Analytic continuation of the resolvent of the Laplacian and the dynamical zeta function*, preprint 2007 (`http ;//www.math.u-bordeaux1.fr/~petkov/publications/publi2.html`)

[Riv08] G.Rivière, *Entropy of semiclassical measures in dimension 2*, preprint 2008 (`arXiv :0809.0230`)

[RS94] Z.Rudnick et P.Sarnak, *The behaviour of eigenstates of arithmetic hyperbolic manifolds*, Commun. Math. Phys. **161**, 195-213 (1994)

[SchaCav00] R.Schack et C.M.Caves, *Shifts on a finite qubit string : a class of quantum baker's maps*, Appl. Algebra Eng. Commun. Comput. **10**, 305-10 (2000)

[Schn74] A.Schnirelman, *Ergodic properties of eigenfunctions*, Uspekhi Mat. Nauk **29**, 181-182 (1974)

[SchT04] H.Schomerus et J. Tworzydlo, *Quantum-to-classical crossover of quasi-bound states in open quantum systems*, Phys. Rev. Lett. **93**, 154102 (2004)

[Schu06] R.Schubert, *Upper bounds on the rate of quantum ergodicity*, Ann. Henri Poincaré **7**, 1085-1098 (2006)

[Schu08] R.Schubert, *On the rate of quantum ergodicity for quantized maps*, Ann. Henri Poincaré **9**, 1455-1477 (2008)

[Sjo90] J.Sjöstrand, *Geometric bounds on the density of resonances for semiclassical problems*, Duke Math. J. **60**, 1-57 (1990)

[Sjo00] J.Sjöstrand, *Asymptotic distribution of eigenfrequencies for damped wave equations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **36** 573-611 (2000)

[SZ07] J.Sjöstrand et M.Zworski, *Fractal upper bounds on the density of semiclassical resonances*, Duke Math. J. **137**, 381-459 (2007)

[Tsu08] M.Tsujii, *Quasi-compactness of transfer operators for contact Anosov flows*, preprint 2008 (`arXiv :0806.0732`).

[VuN03] S.Vũ Ngọc, *Systèmes intégrables semi-classiques : du local au global*, thèse d'habilitation à diriger des recherches, Université Joseph Fourier, 2003 (`http ://perso.univ-rennes1.fr/san.vu-ngoc/documents/publis.html`)

[Zel87] S.Zelditch, *Uniform distribution of the eigenfunctions on compact hyperbolic surfaces*, Duke Math. J. **55**, 919-941 (1987)

[Zel94] S.Zelditch, *On the rate of quantum ergodicity. I. Upper bounds*, Commun. Math. Phys. **160**, 81-92 (1994)

[ZelZwo96] S.Zelditch et M.Zworski, *Ergodicity of eigenfunctions for ergodic billiards*, Commun. Math. Phys. **175**, 673-682 (1996)