

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Spécialité
PHYSIQUE THÉORIQUE

École doctorale 107

présentée par
M. Sylvain Prolhac
pour obtenir le titre de
DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Sujet de la thèse :

Méthodes exactes pour le modèle d'exclusion asymétrique

soutenue le 23 septembre 2009

devant le jury composé de :

M. Olivier Babelon	Président
M. Thierry Bodineau	Examineur
M. David Dean	Rapporteur
M. Nikolai Kitanine	Rapporteur
M. Jean-Marc Luck	Examineur
M. Kirone Mallick	Directeur de thèse

Table des matières

Table des matière	i
Remerciements	v
Introduction	1
I Résultats généraux sur le modèle d'exclusion asymétrique	3
1 Le modèle d'exclusion asymétrique	5
1.1 Définition du modèle d'exclusion asymétrique	5
1.1.1 Modèle de Katz-Lebowitz-Spohn	5
1.1.2 Modèle d'exclusion asymétrique sur un anneau	7
1.1.3 Conditions aux bords	8
1.1.4 Variantes du modèle	10
1.2 Modèles reliés au modèle d'exclusion	10
1.2.1 Modèles de croissance	10
1.2.2 Équations d'Edwards-Wilkinson et de Kardar-Parisi-Zhang	12
1.2.3 Polymère dirigé en milieu aléatoire	14
1.2.4 Modèle à six vertex	17
1.2.5 Processus zero range	19
2 Quelques résultats connus pour le modèle d'exclusion asymétrique	23
2.1 Dynamique du modèle d'exclusion	23
2.1.1 Équation maîtresse	23
2.1.2 Graphe de la dynamique	24
2.1.3 Relaxation vers l'état stationnaire	26
2.2 Mesure stationnaire	27
2.2.1 Bilan détaillé	27
2.2.2 Modèle sur un anneau	29
2.2.3 Modèle ouvert	30
2.3 Fluctuations de la densité locale	30
2.3.1 Lien avec l'énergie libre pour un système à l'équilibre	30
2.3.2 Modèle sur un anneau	32
2.3.3 Modèle ouvert	33
2.4 Valeur moyenne du courant	34
2.4.1 Modèle sur un anneau	35
2.4.2 Modèle ouvert	35
2.5 Fluctuations du courant	37
2.5.1 Équation maîtresse déformée	37
2.5.2 Cumulants du courant	38
2.5.3 Fonction de grandes déviations du courant	40

2.5.4	Calcul des fluctuations du courant	41
2.5.5	Symétries naturelles du modèle d'exclusion	42
3	Ansatz de Bethe pour le modèle d'exclusion asymétrique	47
3.1	Ansatz de Bethe en coordonnées	47
3.1.1	Intégrabilité du modèle d'exclusion asymétrique	47
3.1.2	Ansatz de Bethe en coordonnées pour diagonaliser la matrice $M(\gamma)$. . .	49
3.1.3	Modèle totalement asymétrique	54
3.1.4	Invariances des équations de Bethe	56
3.2	Fluctuations du courant pour un système à une particule	58
3.2.1	Calcul direct	58
3.2.2	Calcul par Ansatz de Bethe	59
3.2.3	Propriétés de la fonction de grandes déviations du courant	60
3.3	Fluctuations du courant du modèle totalement asymétrique	61
II	Fluctuations du courant dans le modèle partiellement asymétrique	67
4	Résumé des résultats sur les cumulants du courant du modèle d'exclusion	69
4.1	Régime de faible asymétrie et régime de forte asymétrie	69
4.2	Cumulants du courant	70
4.2.1	Constante de diffusion	70
4.2.2	Troisième cumulant	71
4.2.3	Cumulants d'ordre plus élevé	72
4.3	Modèle faiblement asymétrique	73
4.3.1	Transition de phase	75
4.3.2	Position de la transition de phase	78
4.4	Expression combinatoire pour les cumulants du courant	79
5	Ansatz de Bethe fonctionnel pour le modèle d'exclusion asymétrique	81
5.1	Formulation fonctionnelle des équations de Bethe	81
5.1.1	Passage à l'équation fonctionnelle	81
5.1.2	Invariances de l'équation de Bethe fonctionnelle	84
5.1.3	Solutions de l'équation de Bethe fonctionnelle pour $n = 1$	87
5.1.4	Application au modèle totalement asymétrique	87
5.2	Développement perturbatif de l'équation de Bethe fonctionnelle	90
5.2.1	Premier ordre	92
5.2.2	Deuxième ordre	92
5.2.3	Valeur moyenne du courant et constante de diffusion	93
5.3	Résolution systématique ordre par ordre	93
5.3.1	Reformulation de l'équation de Bethe fonctionnelle	94
5.3.2	Développement perturbatif en γ et élimination de $R(t)$	94
5.3.3	Résolution itérative de l'équation pour $A(t)$	95
5.3.4	Reformulation de la solution itérative	96
5.3.5	Expression exacte pour les trois premiers cumulants du courant	97
5.3.6	Expression des cumulants du courant à la limite thermodynamique . . .	98
5.4	Fluctuations du courant dans la limite faiblement asymétrique	100
5.4.1	Régularisation de l'équation fonctionnelle en $x = 1$	101
5.4.2	Équation fonctionnelle pour $\tilde{A}(y)$	102
5.4.3	Inversion de l'opérateur Δ	103
5.4.4	Solution des équations fonctionnelles	105
5.4.5	Fonction génératrice des cumulants du courant	106

5.5	Résolution numérique des équations de Bethe	108
5.5.1	Résolution numérique de l'équation de Bethe fonctionnelle	108
5.5.2	Évolution des racines de Bethe en fonction de γ	109
5.5.3	Argument pour l'annulation des racines de Bethe	111
6	Formule combinatoire pour les cumulants du courant	113
6.1	Structure de l'expression des premiers cumulants	114
6.1.1	Formules de taille finie	114
6.1.2	Limite thermodynamique	116
6.1.3	Quatrième cumulant du courant	117
6.2	Expression paramétrique des fluctuations du courant	120
6.2.1	Définition des arbres	120
6.2.2	Fonctions agissant sur des arbres	122
6.2.3	Sommation sur les arbres	125
6.2.4	Conjecture pour le polynôme Q	129
6.2.5	Forme paramétrique pour la fonction $E(\gamma)$	130
6.2.6	Limite totalement asymétrique	133
6.2.7	Limite thermodynamique ($1 - x$ fini)	134
6.3	Expression exacte des cumulants du courant	135
6.3.1	Définition des forêts	136
6.3.2	Sommation sur les forêts	137
6.3.3	Forme explicite des cumulants du courant	139
6.3.4	Limite thermodynamique ($1 - x \sim 1/\sqrt{L}$)	140
6.A	Preuve de l'équivalence des deux définitions de $W_\varphi^{\eta,\xi}(g)$	142
6.A.a	Changements de variables correspondant à des changements d'arbres	142
6.A.b	Exemple 1 : arbre linéaire avec des nœuds composites de taille 1	143
6.A.c	Exemple 2 : arbre ramifié avec des nœuds composites de taille > 1	145
6.B	Indépendance de $W_\varphi^{\eta,\xi}(g)$ par rapport au choix de la fonction θ	146
6.C	Dérivation de l'expression explicite de $E(\gamma)$	147
6.C.a	Élimination de B_λ dans l'expression paramétrique de $E(\gamma)$	147
6.C.b	Expression de $E(\gamma)$ comme une somme sur des forêts	148
III	Modèle d'exclusion asymétrique à plusieurs classes de particules	153
7	Le modèle d'exclusion asymétrique à plusieurs classes de particules	155
7.1	Définition du modèle	155
7.2	Couplage entre deux modèles d'exclusion	156
7.3	Chocs	157
7.4	Matrice de Markov	158
7.5	Mesure stationnaire	158
7.6	Fluctuations du courant	159
7.7	Intégrabilité	161
8	Mesure stationnaire du modèle d'exclusion asymétrique	163
8.1	Modèle ouvert	163
8.1.1	Ansatz matriciel	163
8.1.2	Preuve de l'Ansatz matriciel : « matrices chapeau »	164
8.1.3	Représentation explicite de l'algèbre des matrices D et E	166
8.1.4	Calcul explicite des probabilités stationnaires	169
8.1.5	Calcul de la normalisation Z_L	170
8.1.6	Valeur moyenne du courant et diagramme de phase	171

8.2	Modèle à deux classes de particules	172
8.2.1	Ansatz matriciel	172
8.2.2	Preuve de l'Ansatz matriciel	173
8.2.3	Représentation explicite des matrices D , A et E	174
8.2.4	Calcul explicite des probabilités stationnaires	175
8.3	Modèle à N classes de particules	177
8.3.1	Modèle totalement asymétrique : construction de Ferrari et Martin . . .	177
8.3.2	Modèle partiellement asymétrique : Ansatz matriciel	179
8.3.3	Preuve de l'Ansatz matriciel	180
8.3.4	Calcul explicite des probabilités stationnaires	181
8.3.5	Matrice de transfert	181
9	Ansatz de Bethe algébrique pour le modèle d'exclusion asymétrique	185
9.1	Lien entre la matrice de Markov et le hamiltonien de la chaîne de spin XXZ . .	185
9.1.1	Matrice de Markov locale	185
9.1.2	Chaîne de spin XXZ	186
9.2	Famille de matrices de transfert pour le modèle à une classe de particules . . .	188
9.2.1	Opérateurs locaux : opérateur de Lax et matrice R	188
9.2.2	Matrice de monodromie et matrice de transfert	191
9.2.3	Lien avec le modèle à six vertex	192
9.2.4	Lien avec la matrice de Markov	193
9.2.5	Relation de Yang-Baxter et commutation des matrices de transfert . . .	194
9.2.6	Opérateurs de la matrice de monodromie	196
9.2.7	Matrice de transfert inhomogène	196
9.3	Ansatz de Bethe algébrique	197
9.3.1	Ansatz de Bethe algébrique pour la matrice de transfert homogène . . .	197
9.3.2	Application de $t(\lambda)$ sur le vecteur $ \psi(\{\tilde{z}\})\rangle$	198
9.3.3	Équations de Bethe	199
9.3.4	Ansatz de Bethe algébrique pour la matrice de transfert inhomogène . .	201
9.3.5	Valeur propre de $t(\lambda)$ et équation de Bethe fonctionnelle	201
9.4	Matrice de transfert pour le modèle à N classes de particules	202
9.4.1	Opérateur de Lax et matrice R	203
9.4.2	Matrice de monodromie et matrice de transfert	204
9.4.3	Equation de Yang-Baxter	204
9.4.4	Opérateurs de la matrice de monodromie	205
9.5	Ansatz de Bethe emboîté	207
9.5.1	Construction du vecteur propre : première étape	207
9.5.2	Itération de la procédure : Ansatz de Bethe emboîté	214
9.5.3	Équation de Bethe fonctionnelle	217
9.A	Algèbre des opérateurs de la matrice de monodromie	219
9.A.a	Une classe de particules	219
9.A.b	Plusieurs classes de particules	219
	Conclusion	221
	Bibliographie	223
	Résumé	231
IV	Annexe : articles publiés pendant la thèse	233

Remerciements

J'aimerais tout d'abord remercier David Dean et Nikolai Kitanine d'avoir bien voulu être les rapporteurs de cette thèse. Je remercie aussi Olivier Babelon, Thierry Bodineau et Jean-Marc Luck pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse.

Je remercie les membres de l'IPhT de m'avoir accueilli dans ce laboratoire, en particulier Henri Orland, Catherine Cataldi, Jean-Yves Ollitrault, Laure Sauboy et Sylvie Zaffanella.

Je tiens à exprimer ma gratitude à Kirone Mallick pour avoir encadré ma thèse. Sa gentillesse et sa patience m'ont permis d'effectuer cette thèse dans des conditions idéales. Cela a été un plaisir de résoudre des problèmes avec lui durant ces trois dernières années.

Je remercie également Olivier Golinelli, Martin Evans et Arvind Ayyer pour les discussions fructueuses que j'ai eues avec eux.

Je salue enfin tous les thésards présents à l'IPhT pendant mes trois années de thèse : Alexei, Pierre, Nicolas, Cristian, Constantin, Adel, Guillaume, Michaël, Jean-Emile, Thomas, Emmanuel, Dmytro, Jérôme, Clément, Olivier, Laura, Jeanne, Clément, Jean-Marie, Gaëtan, Carolin, Emeline, Grégory, Enrico, Hélène, Sophie, Francesco et Arthur.

Introduction

À l'échelle microscopique, un système physique est décrit par un très grand nombre de degrés de liberté. À l'échelle macroscopique, un petit nombre de variables suffit en revanche à caractériser l'état du système. Le passage de la description microscopique à la description macroscopique est l'objet de la physique statistique. Pour les systèmes à l'équilibre thermodynamique, le lien entre ces deux échelles est fourni par la mesure de Boltzmann-Gibbs, qui spécifie la probabilité d'observer un micro-état donné du système à une certaine température. Pour les systèmes loin de l'équilibre, par contre, aucune théorie générale ne permet pour l'instant d'exprimer la probabilité d'observer les micro-états. Même dans un état stationnaire, pour lequel ces probabilités ne dépendent pas du temps, la mesure stationnaire n'est dans la plupart des cas pas connue.

L'analyse de modèles simples a souvent été utile pour appréhender la physique des systèmes à l'équilibre thermodynamique. Par exemple, le modèle d'Ising a joué un rôle majeur dans la compréhension des phénomènes collectifs. En particulier, la solution du modèle bidimensionnel par Onsager a définitivement établi que les transitions de phase d'un système physique pouvaient être expliquées par la variation continue d'un paramètre du modèle microscopique sous-jacent. Plus tard, le groupe de renormalisation a formalisé le concept d'universalité et a permis de comprendre que la résolution d'un modèle particulier donnait accès, dans la limite thermodynamique, à un comportement partagé par toute une classe de modèles ayant les mêmes symétries.

Dans le but de mieux connaître la physique des systèmes hors d'équilibre, il est ainsi naturel de considérer des modèles simples pouvant jouer le même rôle que le modèle d'Ising pour les systèmes à l'équilibre. Les gaz sur réseau font partie des modèles les plus étudiés à cet effet. Ils font intervenir des particules classiques se déplaçant de manière aléatoire sur les sites d'un réseau. Ces modèles sont en général définis par leur dynamique, c'est à dire par l'ensemble des taux avec lesquels les particules se déplacent sur le réseau. Dans le cas particulier des processus d'exclusion, les particules sont des particules à cœur dur qui sont soumises à la contrainte qu'un site ne peut être occupé que par au plus une particule à la fois.

La présente thèse traite essentiellement du modèle d'exclusion asymétrique unidimensionnel, qui possède la propriété très intéressante d'être exactement soluble. Nous verrons en effet qu'il est relié à des chaînes de spin intégrables ainsi qu'à des modèles de vertex, et qu'il peut ainsi être analysé par l'Ansatz de Bethe introduit par Hans Bethe en 1931 pour la chaîne de spin de Heisenberg. Ceci nous permettra d'obtenir des expressions exactes pour diverses quantités importantes relatives à ce modèle.

Cette thèse est découpée en quatre parties. La première partie rappelle quelques résultats généraux concernant le modèle d'exclusion asymétrique. La deuxième partie est consacrée au calcul des fluctuations du courant dans le modèle partiellement asymétrique sur un anneau. La troisième partie traite certains aspects du modèle d'exclusion à plusieurs classes de particules. Enfin, la quatrième partie regroupe les cinq articles présentant les résultats obtenus durant cette thèse.

La première partie est composée de trois chapitres. Dans le chapitre 1, nous définirons le modèle d'exclusion asymétrique et nous montrerons qu'il est relié à un certain nombre de modèles importants de la physique statistique. Nous verrons en particulier qu'il peut être interprété comme un modèle de croissance, et appartient ainsi à la classe d'universalité de l'équation Kardar-Parisi-Zhang. Dans le chapitre 2, nous rappellerons que l'évolution dans le temps de la probabilité d'observer un micro-état donné du système s'écrit sous la forme d'une équation maîtresse. Nous verrons aussi que le calcul des fluctuations du courant se ramène au calcul de la valeur propre maximale d'une déformation de la matrice de Markov du système. Enfin, dans le chapitre 3, nous montrerons que l'Ansatz de Bethe peut être utilisé pour diagonaliser la matrice de Markov du modèle d'exclusion. Nous rappellerons alors le calcul des fluctuations du courant dans le cas particulier pour lequel les particules se déplacent dans une seule direction.

La deuxième partie est consacrée au calcul des fluctuations du courant pour le modèle d'exclusion partiellement asymétrique sur un anneau. Dans ce modèle, les particules se déplacent à la fois vers l'avant et vers l'arrière, mais avec un biais de telle sorte qu'il s'établisse un courant global dans le système. Cette partie se divise en trois chapitres. Le chapitre 4 résume les résultats qui seront obtenus dans la suite de cette partie pour les fluctuations du courant du modèle d'exclusion partiellement asymétrique. Le chapitre 5 de cette partie explique ensuite les résultats exacts obtenus dans les articles [1, 2, 3] pour les cumulants du courant en utilisant une formulation fonctionnelle des équations de Bethe. Enfin, le chapitre 6 présente une expression exacte conjecturée pour tous les cumulants du courant du modèle partiellement asymétrique [4]. Cette conjecture fait intervenir des objets combinatoires (arbres et forêts).

La troisième partie de cette thèse est consacrée principalement au modèle d'exclusion à plusieurs classes de particules. Elle est aussi composée de trois chapitres. Dans le chapitre 7, nous présenterons le modèle d'exclusion à plusieurs classes de particules, et les raisons pour lesquelles ce modèle a été étudié. Dans le chapitre 8, nous décrirons l'Ansatz matriciel utilisé pour exprimer les probabilités stationnaires du modèle d'exclusion asymétrique. Après avoir rappelé le cas du modèle ouvert avec une seule classe de particules, nous donnerons la solution dans le cas du modèle à plusieurs classes de particules sur un anneau qui a été obtenue dans [5]. Enfin, dans le chapitre 9, nous présenterons la formulation algébrique de l'Ansatz de Bethe. Nous commencerons par décrire le cas du modèle à une classe de particules, puis nous donnerons la généralisation au modèle avec un nombre arbitraire de classes de particules.

Première partie

Résultats généraux sur le modèle
d'exclusion asymétrique

Chapitre 1

Le modèle d'exclusion asymétrique

Dans ce premier chapitre, nous présentons le modèle d'exclusion asymétrique, que nous allons étudier dans cette thèse. Après avoir défini le modèle ainsi que quelques unes de ses variantes, nous verrons qu'il est relié à plusieurs autres modèles très étudiés de la physique statistique. Nous écrirons ensuite l'équation maîtresse gouvernant l'évolution de la probabilité de chacun des micro-états du système, et nous nous intéresserons en particulier à l'état stationnaire du système et aux fluctuations du courant.

1.1 Définition du modèle d'exclusion asymétrique

Le modèle d'exclusion asymétrique (ASEP, pour *Asymmetric Simple Exclusion Process*) est l'un des modèles les plus simples de particules en interaction présentant un état stationnaire hors d'équilibre. Il s'agit d'un processus stochastique décrivant l'évolution de particules classiques se déplaçant localement sur les sites d'un réseau unidimensionnel, avec la contrainte d'exclusion qui impose que chaque site ne peut être occupé que par au plus une particule. Il fait ainsi partie des modèles de gaz sur réseau définis par Katz, Lebowitz et Spohn dans [6, 7]. Il a été beaucoup étudié par le passé, à la fois par des mathématiciens [8, 9, 10], des physiciens [11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19] et des biophysiciens [20, 21, 22], en particulier parce qu'il s'agit de l'un des rares modèles de la physique statistique hors d'équilibre qui soit *exactement soluble*, ce qui signifie que certaines de ses propriétés peuvent être calculées exactement. Il a aussi été utilisé comme point de départ pour modéliser certains phénomènes physiques, comme par exemple la conductivité par saut dans des milieux unidimensionnels [23], pour décrire des systèmes à l'interface entre la physique et la biologie, comme les moteurs moléculaires cellulaires [24], ou encore pour étudier des problèmes de trafic routier [25].

Dans cette section, nous allons tout d'abord définir le modèle de gaz sur réseau de Katz-Lebowitz-Spohn, puis le modèle d'exclusion asymétrique sur un anneau qui en est un cas particulier. Nous introduirons ensuite le modèle d'exclusion avec d'autres types de conditions aux bords. Enfin, nous mentionnerons brièvement quelques variantes du modèle.

1.1.1 Modèle de Katz-Lebowitz-Spohn

Le modèle d'Ising, introduit à l'origine pour étudier les propriétés de certains matériaux ferromagnétiques, a joué un rôle important dans la compréhension de la physique des systèmes à l'équilibre thermodynamique. On considérera ici le modèle d'Ising sur un réseau cubique de dimension d avec des conditions aux bords périodiques. À chaque nœud i du réseau est associé un spin classique S_i pouvant prendre les valeurs $+1$ et -1 . À chaque configuration $\mathcal{C}$ des spins spécifiée par les valeurs des S_i , on associe une énergie

$$H(\mathcal{C}) = -\frac{J}{4} \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j, \quad (1.1)$$

la somme étant effectuée sur les liens $\langle i, j \rangle$ du réseau. Si $J > 0$, le modèle est ferromagnétique, tandis que pour $J < 0$ il s'agit du modèle antiferromagnétique. On considère le modèle d'Ising à l'équilibre thermodynamique, en contact avec un thermostat à température T . La probabilité d'observer une configuration $\mathcal{C}$ des spins est alors donnée par le facteur de Boltzmann

$$P_{eq}(\mathcal{C}) = \frac{e^{-H(\mathcal{C})/kT}}{Z} . \quad (1.2)$$

Le modèle d'Ising peut être vu comme un modèle décrivant un gaz de particules à cœur dur sur réseau. On peut en effet poser $S_i = 2\tau_i - 1$, et interpréter la variable τ_i comme le nombre d'occupation du site i : $\tau_i = 0$ correspondra à un site vide et $\tau_i = 1$ à un site occupé par une particule. En fonction des variables τ_i , l'énergie d'une configuration $\mathcal{C}$ s'écrit

$$H(\mathcal{C}) - H(0) = -J \sum_{\langle i, j \rangle} \tau_i \tau_j , \quad (1.3)$$

où la constante H_0 est indépendante de $\mathcal{C}$ si l'on ne considère que des configurations avec un nombre $n = \sum_i \tau_i$ fixé de particules. On constate que pour le modèle avec $J > 0$, les particules s'attirent, tandis qu'elles se repoussent si $J < 0$.

Le modèle de gaz sur réseau que nous venons de présenter décrit exclusivement le système physique à l'équilibre thermodynamique. La dynamique sous-jacente qui permet au système d'atteindre cet état d'équilibre n'est pas spécifiée. Nous allons maintenant définir une dynamique pour ce modèle. Nous modifierons ensuite cette dynamique de telle sorte que l'état stationnaire atteint aux temps longs ne soit pas un état d'équilibre. Nous obtiendrons alors le modèle de gaz sur réseau de Katz-Lebowitz-Spohn.

On introduit une dynamique en temps continu sur l'espace des configurations du système, avec des taux de transition $w_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}}$ entre les configurations. Dans un intervalle de temps infinitésimal dt , la probabilité de passer de la configuration $\mathcal{C}$ à la configuration $\mathcal{C}'$ est alors égale à $dt w_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}}$. Cette dynamique doit être telle que le système atteigne aux temps longs l'état stationnaire défini par les poids de Boltzmann (1.2). Une manière simple d'assurer cela consiste à choisir des taux de transition qui vérifient le bilan détaillé (voir la section 2.2 du chapitre 2) :

$$\frac{w_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}'}}{w_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}}} = \frac{P_{eq}(\mathcal{C})}{P_{eq}(\mathcal{C}')} = e^{-(H(\mathcal{C}) - H(\mathcal{C}'))/kT} . \quad (1.4)$$

Comme on cherche à décrire les déplacements de particules, il est naturel d'imposer la contrainte supplémentaire qu'une particule au site i ne puisse se déplacer dans un intervalle de temps infinitésimal que sur l'un des $2d$ sites voisins du site i (voir figure 1.1). On considérera alors que les seuls taux de transition non nuls sont ceux qui échangent les nombres d'occupation τ_i et τ_j de deux sites voisins i et j si $\tau_i \neq \tau_j$.

Nous venons de définir la dynamique d'un système atteignant aux temps longs un état d'équilibre. Nous allons maintenant la modifier de telle sorte que le système atteigne aux temps longs un état stationnaire hors d'équilibre, caractérisé par la présence de courants macroscopiques. Ceci peut être effectué en ajoutant un champ externe $\vec{E}$ au modèle, qui va tendre à déplacer les particules selon une certaine direction privilégiée. Pour des particules chargées électriquement, on peut par exemple voir le champ $\vec{E}$ comme un champ électrique externe appliqué au système. Une manière naturelle d'incorporer un tel champ externe au modèle est d'ajouter dans l'équation (1.4) du bilan détaillé le travail de la force électrique, en plus de la variation d'énergie $\Delta H(\mathcal{C}) = H(\mathcal{C}) - H(\mathcal{C}')$ entre deux configurations. On est alors conduit à choisir des taux de transition qui vérifient

$$\frac{w_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}'}}{w_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}}} = e^{-(\Delta H + \vec{E} \cdot \vec{\Delta l})/kT} , \quad (1.5)$$

où $\vec{\Delta l}$ est le vecteur déplacement de la particule qui a changé de site entre la configuration $\mathcal{C}$ et la configuration $\mathcal{C}'$. Il s'agit du modèle introduit par Katz, Lebowitz et Spohn dans [6, 7] pour

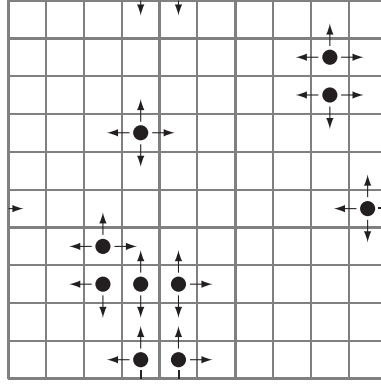


FIG. 1.1 – Déplacements possibles des particules dans le modèle de Katz-Lebowitz-Spohn à deux dimensions. Les lignes grises représentent le réseau dual du réseau sur lequel se déplacent les particules.

décrire certains types de conducteurs ioniques.

Le champ externe $\vec{E}$ implique la présence d'un courant de particules dans le système, même dans l'état stationnaire. Ce modèle ne décrit donc plus aux temps longs un système à l'équilibre thermodynamique. De plus, les probabilités stationnaires ne s'expriment plus simplement en fonction des taux de transition.

Le cas particulier $J = 0$ du modèle Katz-Lebowitz-Spohn est le modèle d'exclusion asymétrique. Il est défini entièrement en se donnant les $2d$ taux de transition correspondant aux $2d$ sites qu'une particule peut atteindre en se déplaçant. On note qu'il s'agit toujours d'un modèle de particules en interaction, les interactions des particules s'effectuant à travers la contrainte d'exclusion qui empêche deux particules de se trouver sur le même site. Dans cette thèse, nous nous intéresserons au modèle unidimensionnel, qui est exactement soluble.

1.1.2 Modèle d'exclusion asymétrique sur un anneau

On considère un réseau unidimensionnel de L sites, numérotés de 1 à L , avec des conditions aux bords périodiques. Le réseau a ainsi la forme d'un anneau orienté, sur lequel on place n particules classiques. La contrainte d'exclusion impose qu'un site ne peut pas être occupé par plus d'une particule à la fois. Un site i donné du réseau possède donc deux états possibles : il peut soit être vide, et on lui associera dans ce cas le nombre d'occupation $\tau_i = 0$, soit être occupé par une unique particule, et on lui associera alors le nombre d'occupation $\tau_i = 1$. L'ensemble Ω des configurations du système correspond au nombre de façons possibles de choisir les n sites occupés par des particules. Le nombre de configurations est donc donné par $|\Omega| = \binom{L}{n}$.

On définit maintenant sur cet ensemble de configurations la dynamique stochastique en temps continu du modèle d'exclusion asymétrique (voir figure 1.2). Pendant un intervalle de temps infinitésimal dt , une particule entourée de deux sites vides se déplace d'un site vers l'avant avec une probabilité $p dt$, d'un site vers l'arrière avec une probabilité $q dt$, et ne bouge pas avec une probabilité $1 - (p + q)dt$. Quand une particule se trouve sur un site voisin d'un autre site occupé, la dynamique est modifiée pour respecter la contrainte d'exclusion. Une particule précédée d'un site occupé et suivie d'un site vide se déplace seulement d'un site vers l'avant avec une probabilité $p dt$, et ne bouge pas avec une probabilité $1 - p dt$. Réciproquement, une particule précédée par un site vide et suivie par un site occupé se déplace seulement d'un site vers l'arrière avec une probabilité $q dt$, et ne bouge pas avec une probabilité $1 - q dt$. Enfin, une particule entourée de deux sites occupés ne peut pas se déplacer.

On dira alors que les particules se déplacent « vers l'avant » avec un taux p et « vers l'arrière » avec un taux q si le site de destination est vide. Comme les probabilités de déplacement sont

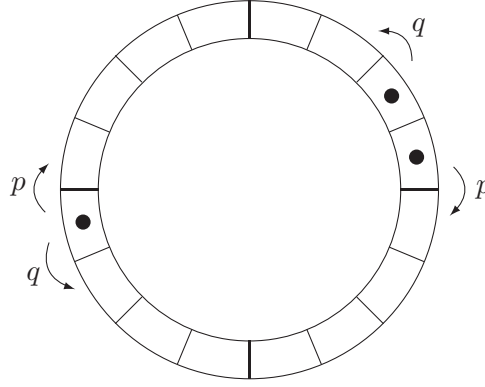


FIG. 1.2 – Taux de transition du modèle d'exclusion asymétrique sur un anneau. Les particules se déplacent dans le sens horaire avec un taux p et dans le sens anti-horaire avec un taux q si le site de destination est vide.

infinitésimales dans tout intervalle de temps infinitésimal, deux particules ne peuvent pas bouger en même temps, ce qui évite d'avoir à considérer les situations pour lesquelles deux particules pourraient se déplacer en même temps sur le site vide qui les sépare. On note que si l'on avait défini la dynamique du modèle d'exclusion asymétrique comme un processus en temps discret, il aurait fallu traiter ce cas, en rajoutant une règle spécifique.

La différence entre les taux p et q joue le rôle d'un champ externe qui impose un sens de parcours privilégié aux particules. On appelle modèle d'exclusion totalement asymétrique, ou TASEP (pour *Totally Asymmetric Simple Exclusion Process*) le cas particulier où les particules se déplacent uniquement dans une direction. Par convention, on prendra alors $q = 0$. Le cas où les deux taux p et q sont égaux est appelé le modèle d'exclusion symétrique, ou SSEP (*Symmetric Simple Exclusion Process*). Enfin, le cas général où les taux p et q sont non nuls et différents est parfois appelé le modèle d'exclusion partiellement asymétrique, ou PASEP (*Partially Asymmetric Simple Exclusion Process*). On introduira le paramètre d'asymétrie x défini par

$$x = \frac{q}{p}. \quad (1.6)$$

Nous verrons plus en détail dans la suite de ce chapitre que le modèle symétrique $x = 1$ vérifie le bilan détaillé, et atteint aux temps longs un état stationnaire d'équilibre, tandis que le modèle asymétrique $x \neq 1$ atteint un état stationnaire hors d'équilibre, caractérisé par la présence d'un courant macroscopique. Une partie des résultats de cette thèse ont eu pour objet de généraliser des résultats connus pour le modèle totalement asymétrique $x = 0$ au modèle partiellement asymétrique avec une asymétrie arbitraire x , permettant ainsi de sonder la transition entre le système loin de l'équilibre et le système à l'équilibre.

1.1.3 Conditions aux bords

Les conditions aux bords jouent un rôle crucial dans la physique du modèle d'exclusion asymétrique. Deux systèmes différant uniquement par leurs conditions aux bords peuvent avoir des comportements complètement différents, avec en particulier la présence de transitions de phase lorsque l'on fait varier continûment les paramètres associés à la dynamique du modèle sur les bords du système. Le cas des conditions aux bords périodiques pour lequel les particules se déplacent sur un anneau a déjà été présenté. Nous allons maintenant décrire brièvement le modèle avec des bords ouverts ainsi que le modèle sur une ligne infinie.

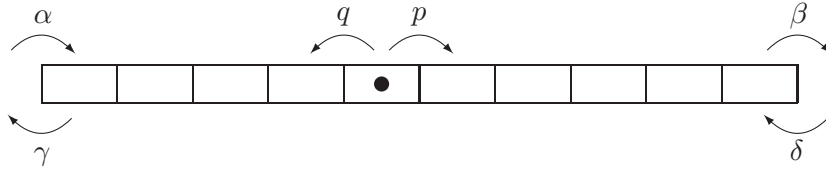


FIG. 1.3 – Taux de transition du modèle d'exclusion asymétrique ouvert. Au premier site, une particule rentre dans le système avec un taux α et en sort avec un taux γ . Au dernier site, une particule rentre dans le système avec un taux δ et en sort avec un taux β . À l'intérieur du système, les particules se déplacent vers la droite avec un taux p et vers la gauche avec un taux q .

Modèle ouvert

Dans le cas du modèle avec des bords ouverts, on rajoute aux deux taux de transition p et q à l'intérieur du système un taux d'entrée et un taux de sortie pour chacun des bords du système, soit quatre taux supplémentaires, notés habituellement α , β , γ et δ (voir figure 1.3). La contrainte d'exclusion impose qu'une particule ne peut entrer dans le système au premier ou au dernier site que si celui-ci est vide. Il n'y a pas de contrainte empêchant les particules de sortir du système. Dans le cas du système avec des bords ouverts, le nombre de particules dans le système ne reste pas constant lors de l'évolution stochastique : le système échange des particules avec des réservoirs contenant un nombre infini de particules situés aux deux bords du système.

Si les taux p et q sont égaux, les particules se déplacent de manière symétrique dans l'intérieur du système, et le modèle d'exclusion peut être interprété comme un modèle de conduction de la chaleur [19]. Les particules représentent alors des quanta d'énergie diffusant dans le système, tandis que les deux réservoirs de particules s'interprètent comme des thermostats. Les taux de transitions sur les bords du système induisent un courant de chaleur entre les deux thermostats.

Modèle infini

On peut aussi définir le modèle d'exclusion sur une ligne infinie. Dans ce cas, les particules ne peuvent plus quitter le système et le nombre de particules est une quantité conservée par la dynamique. Ce nombre de particules peut être fini, ou infini avec une densité moyenne ρ de particules dans le système.

Le modèle d'exclusion sur une ligne infinie peut être vu comme la limite $L \rightarrow \infty$ du modèle sur un anneau de taille L . Par contre, les propriétés de l'état stationnaire du modèle sur une ligne infinie ne s'obtiennent pas en général en prenant la limite $L \rightarrow \infty$ des propriétés de l'état stationnaire du modèle sur un anneau de taille L . En effet, l'étude de l'état stationnaire nécessite de considérer le système aux temps t longs, alors que les limites $t \rightarrow \infty$ et $L \rightarrow \infty$ ne commutent pas en général. En particulier, l'état stationnaire est indépendant de la condition initiale pour le modèle sur un anneau, ce qui n'est pas le cas pour le modèle sur une ligne infinie.

Les méthodes utilisées dans l'étude du modèle d'exclusion sur une ligne infinie et sur un anneau sont assez différentes. En particulier, l'étude du modèle infini est reliée à des problèmes de matrices aléatoires [26, 27, 28, 29], dont nous ne parlerons pas dans cette thèse. Dans toute la suite, nous nous intéresserons exclusivement à des modèles de taille finie, principalement avec des conditions aux bords périodiques.

1.1.4 Variantes du modèle

Plusieurs variantes du modèle d'exclusion asymétrique ont été étudiées par le passé, avec pour objectifs de tester la robustesse du comportement du modèle, d'en enrichir la physique, ou encore de décrire plus fidèlement un système physique particulier.

Il est par exemple possible de réduire les taux de déplacement des particules entre deux sites particuliers i_0 et $i_0 + 1$ [30] et d'en étudier les conséquences sur le courant qui traverse le système. On peut aussi considérer des modèles où toutes les particules se déplacent à des taux différents [31], ou encore des modèles faisant intervenir des particules étendues couvrant plusieurs sites [32], ou une hiérarchie de particules de différentes classes [33] (voir la troisième partie de cette thèse). On peut aussi introduire des phénomènes d'évaporation et de déposition de particules faisant varier le nombre de particules dans l'intérieur du système [34].

Il faut cependant noter que la plupart de ces modèles ne sont plus solubles exactement. On doit alors recourir à des approximations de type champ moyen ou à des simulations numériques pour en étudier le comportement.

1.2 Modèles reliés au modèle d'exclusion

Nous présentons dans cette section divers modèles de la physique statistique reliés au modèle d'exclusion asymétrique, en particulier un modèle de croissance d'interface, un modèle de polymère dirigé en milieu aléatoire, un modèle de vertex, et un processus de zero range. Nous expliquons aussi le lien entre la limite continue du modèle d'exclusion et les équations d'Edwards-Wilkinson et de Kardar-Parisi-Zhang.

1.2.1 Modèles de croissance

Les modèles de croissance font partie des modèles très étudiés de la physique statistique hors d'équilibre [35, 36, 12, 14, 37]. Ils décrivent de manière simplifiée des phénomènes physiques étudiés expérimentalement comme la croissance de cristaux, de colonies de bactéries, ou encore la propagation du feu sur une feuille de papier. Ces phénomènes ont en commun la présence d'une interface (surface du cristal, de la colonie de bactéries, de la région non brûlée du papier,...) séparant deux milieux, et se déplaçant de manière irrégulière à cause des inhomogénéités présentes dans le système physique.

On considère ici un modèle de croissance d'interface unidimensionnelle par déposition de particules. À chaque site i ($1 \leq i \leq L$) d'un réseau unidimensionnel de taille L paire avec des conditions aux bords périodiques, on associe une hauteur h_i de même parité que i (h_i est paire si i est pair, et impaire si i est impair). On impose de plus la contrainte $|h_{i+1} - h_i| = 1$ sur l'ensemble des hauteurs. Celle-ci implique que les hauteurs varient lentement d'un site à l'autre. L'ensemble des hauteurs h_i définit la position d'une interface unidimensionnelle entre la partie haute et la partie basse du plan. On considérera que la région du plan située sous l'interface est constituée d'un empilement de particules de forme carrée (voir figure 1.4).

La région sous l'interface évolue alors par déposition et évaporation des particules à sa surface (voir figure 1.4). Une particule peut se déposer au site i avec un taux p si le site i correspond à une vallée de l'interface ($h_{i-1} = h_{i+1} = h_i + 1$). Au site i , la hauteur de l'interface passe alors de h_i à $h_i + 2$. Une particule peut aussi s'évaporer avec un taux q si le site i correspond à un sommet de l'interface ($h_{i-1} = h_{i+1} = h_i - 1$). Au site i , la hauteur de l'interface passe alors de h_i à $h_i - 2$.

Ce modèle de croissance peut être relié au modèle d'exclusion asymétrique [12] avec $n = L/2$ particules. À chaque lien $(i, i+1)$ du modèle de croissance, on associe un site i du modèle d'exclusion. Le réseau périodique de L sites du modèle de croissance donne alors un réseau périodique de L sites pour le modèle d'exclusion. À une configuration du modèle de croissance spécifiée par les hauteurs h_i , on associe la configuration du modèle d'exclusion telle que le site i du modèle

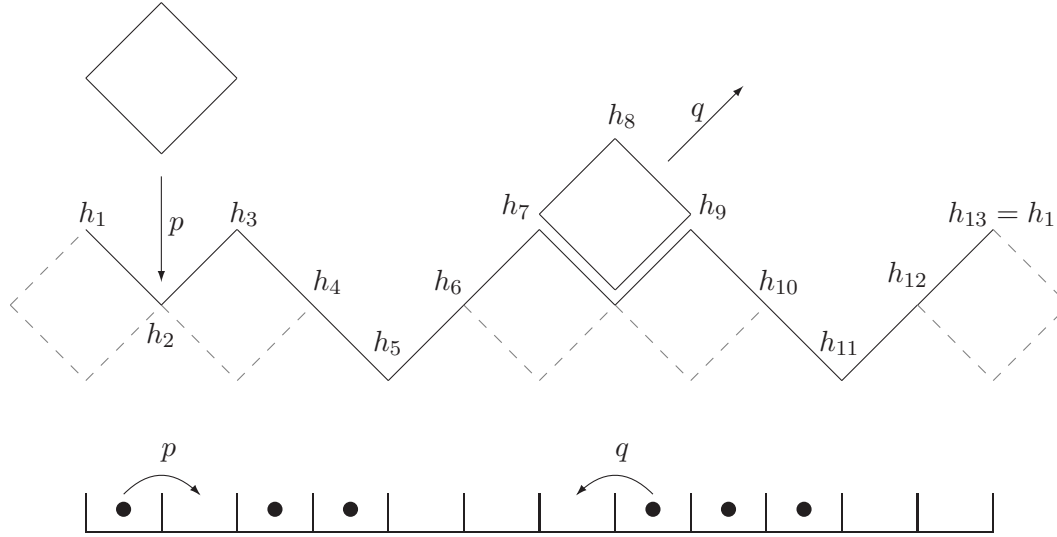


FIG. 1.4 – Dynamique d'un modèle de croissance relié au modèle d'exclusion asymétrique. Une particule (de forme carrée) peut se déposer dans une vallée avec un taux p , et un sommet peut s'évaporer avec un taux q .

d'exclusion est vide si $h_{i+1} - h_i = 1$, et est occupé par une particule si $h_{i+1} - h_i$. On constate alors que la dynamique du modèle de croissance induit sur les sites du modèle d'exclusion la dynamique suivante : une particule peut avancer avec un taux p et reculer avec un taux q si le site de destination est vide. Il s'agit bien de la dynamique du modèle d'exclusion asymétrique définie précédemment à la section 1.1.2.

Il est possible de généraliser le modèle de croissance de telle sorte qu'il soit alors relié au modèle d'exclusion avec un remplissage $\rho = n/L$ quelconque. Pour cela, on peut par exemple choisir des conditions aux bords non périodiques $h_{L+1} = h_1 + (1 - 2\rho)$. Dans ce cas, l'interface n'est pas plane en moyenne mais présente une dérive. On peut aussi choisir de garder les conditions aux bords périodiques et changer les contraintes $|h_{i+1} - h_i| = 1$ en $|h_{i+1} - h_i + (1 - 2\rho)| = 1$. Entre le site i et le site $i + 1$, l'interface peut alors soit monter de 2ρ , soit descendre de $2(1 - \rho)$. Si l'on impose encore à la hauteur h_1 d'être un entier impair, alors h_i est de la forme $2k + 1 + 2(i - 1)\rho$ avec k entier. Les particules qui composent le milieu sous l'interface ont alors la forme de parallélogrammes.

On note cependant une différence entre le modèle de croissance qui vient d'être défini et le modèle d'exclusion asymétrique. Partant d'une configuration $\mathcal{C}$ du modèle d'exclusion avec des particules aux positions $1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq L$, on déplace chaque particule vers l'avant jusqu'à ce qu'elle se trouve à la position initiale de la particule qui la précède (*i.e.* la particule en x_1 fait $x_2 - x_1$ pas vers l'avant jusqu'à ce qu'elle se trouve en x_2 , et les autres particules se déplacent de manière similaire). On se retrouve alors dans la même configuration $\mathcal{C}$ du modèle d'exclusion. Par contre, sur le modèle de croissance, cette évolution correspond à augmenter toutes les hauteurs d'une quantité 2, ce qui ne préserve pas la configuration du modèle de hauteur : une couche de particules a été rajoutée au niveau de l'interface. On peut remédier à ce problème en définissant pour le modèle d'exclusion une configuration comme la donnée des positions des particules et de leur déplacement total depuis l'instant initial.

Nous avons défini ici une correspondance entre le modèle d'exclusion sur un anneau de L sites et un modèle de croissance d'une interface discrète constituée de L points. On peut aussi relier le modèle d'exclusion avec n particules sur un anneau à un modèle de croissance avec une interface constituée de n points [38]. On associe pour cela les n hauteurs $h_j = x_j - jL/n$ à une configuration du modèle d'exclusion spécifiée par les positions $1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq L$

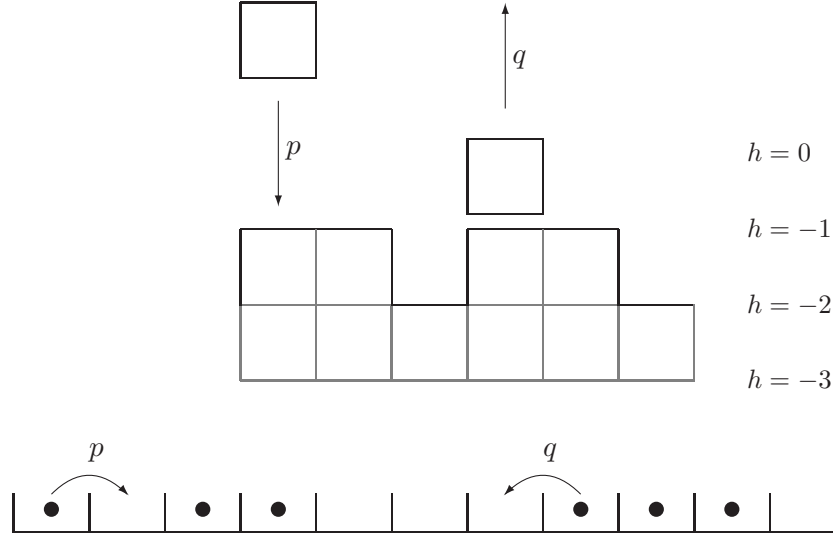


FIG. 1.5 – Dynamique d'un modèle de croissance relié au modèle d'exclusion asymétrique, avec $L/n = 2$. Une particule (de forme carrée) peut se déposer avec un taux p et s'évaporer avec un taux q si la contrainte $h_j - h_{j+1} \leq L/n - 1$ sur les hauteurs des points de l'interface est préservée.

des n particules (voir figure 1.5). Ces hauteurs vérifient la contrainte $h_j - h_{j+1} \leq L/n - 1$, qui signifie que les hauteurs ne peuvent pas décroître trop vite quand on passe de la position i à la position $i + 1$. La dynamique du modèle d'exclusion avec des taux p et q se traduit alors sur les hauteurs h_j par la dynamique suivante : la hauteur h_j peut augmenter d'une unité avec un taux p , si la contrainte $1 - L/n < h_{j+1} - h_j$ est vérifiée ; elle peut diminuer d'une unité avec un taux q si la contrainte $1 - L/n < h_j - h_{j-1}$ est vérifiée. Les conditions aux bords périodiques $x_{j+n} = x_j + L$ pour le modèle d'exclusion se traduisent sur les hauteurs par $h_{j+n} = h_j$. Le modèle de hauteur que l'on vient de définir est donc périodique : le choix du premier site est arbitraire.

1.2.2 Équations d'Edwards-Wilkinson et de Kardar-Parisi-Zhang

L'équation d'Edwards-Wilkinson (EW) a été introduite dans [39] pour décrire à la limite continue les fluctuations dans le temps de la hauteur $h(x, t)$ d'une interface autour d'une surface moyenne. En une dimension, cette équation s'écrit

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \eta(x, t)}, \quad (1.7)$$

où le bruit η est en général choisi comme étant le bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de second moment

$$\langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle = 2D \delta(x - x') \delta(t - t'). \quad (1.8)$$

Le premier terme de l'équation d'Edwards-Wilkinson (1.7), positif autour des minima locaux de la hauteur h et négatif autour de ses maxima locaux, gouverne la relaxation de l'interface vers une surface plane. Il modélise ainsi l'action de forces de tension de surface. Le terme de bruit, quant à lui, modélise les fluctuations aléatoires de l'interface, résultant par exemple de phénomènes de déposition et d'évaporation qui se compensent en moyenne. L'équation d'Edwards-Wilkinson est ainsi une description à grande échelle du modèle défini à la section 1.2.1 dans le cas particulier $p = q$ où l'interface ne croît pas en moyenne.

L'équation d'Edwards-Wilkinson doit être modifiée si l'on veut décrire la croissance de

l'interface. La modification la plus simple consiste à effectuer le changement de référentiel $h \rightarrow h - ct$, et aboutit à l'équation suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = c + \nu \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \eta(x, t) . \quad (1.9)$$

Le terme c est la vitesse moyenne à laquelle se déplace l'interface. Cette équation ne décrit cependant pas une interface en croissance : elle décrit seulement une interface en mouvement. En particulier, si l'on éteint le terme de diffusion proportionnel à ν et le terme de bruit η (qui ne décrivent pas la croissance de l'interface), on constate que l'interface se translate juste sans que sa forme ne change, ce qui ne convient pas pour décrire un phénomène de croissance : localement, la croissance doit en effet s'effectuer de manière perpendiculaire à l'interface.

Une manière plus correcte d'ajouter un terme de croissance dans l'équation d'Edwards-Wilkinson conduit à l'équation de Kardar-Parisi-Zhang (KPZ), introduite dans [40]. En une dimension, la version avec bruit de cette équation s'écrit

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \eta(x, t)} . \quad (1.10)$$

En $\lambda = 0$, on retrouve l'équation d'Edwards-Wilkinson. Le terme non linéaire proportionnel à λ que l'on a rajouté décrit une croissance de la surface qui s'effectue de manière « latérale ». En effet, les minima et maxima locaux de la h n'évoluent pas dans le temps par ce terme, tandis que les zones de pente maximale sont celles qui croissent le plus vite.

Si l'on suppose que la croissance de la hauteur h de l'interface s'effectue en tout point de manière normale à la surface, avec un déplacement $\lambda \delta t$ perpendiculairement à l'interface au point d'abscisse x pendant un intervalle de temps infinitésimal δt , alors la hauteur $h(x, t)$ augmente pendant la durée δt de $\lambda \delta t / \cos \theta$. On a défini l'angle θ comme l'angle entre l'interface au point x et l'horizontale (voir figure 1.6). Sa tangente est égale à $\partial h / \partial x$. Pour un angle θ petit, on trouve alors que la croissance normale à la surface contribue $\lambda + \lambda (\partial h / \partial x)^2$ à la dérivée temporelle de h au point x . Le premier terme de cette expression, indépendant de h , peut alors être absorbé dans la transformation $h(x, t) \rightarrow h(x, t) + \lambda t$, qui correspond à se placer dans un référentiel se déplaçant à vitesse λ en hauteur.

L'équation KPZ peut être vue comme une description à grande échelle du modèle de croissance défini à la section 1.2.1 pour $p \neq q$, mais aussi de nombreux autres modèles de croissance, par exemple le modèle de croissance polynucléaire [41]. Ce modèle décrit la croissance de la surface d'un cristal par la combinaison d'un phénomène de déposition aléatoire d'atomes sur la surface du cristal, et d'une croissance latérale à vitesse constante de chacune des couches atomiques.

Par le lien que nous avons expliqué à la section 1.2.1 entre le modèle d'exclusion asymétrique et un modèle de croissance, on obtient alors que le déplacement total des particules dans le modèle d'exclusion asymétrique est décrit à grande échelle par l'équation KPZ. Le modèle d'exclusion symétrique ($p = q$), par contre, appartient à la classe d'universalité de l'équation EW : en effet, le déplacement total des particules ne croît pas en moyenne, mais fluctue seulement autour de zéro.

Une quantité importante pour les modèles de croissance de type KPZ ou EW est la largeur de l'interface $w(L, t)$ pour un système de taille L à l'instant t [12, 35]. Elle est définie par

$$w(L, t) = \sqrt{\frac{1}{L} \int_0^L dx [h(x, t) - \bar{h}(t)]^2} , \quad (1.11)$$

où $\bar{h}$ est la hauteur moyenne de l'interface

$$\bar{h}(t) = \frac{1}{L} \int_0^L h(x, t) . \quad (1.12)$$

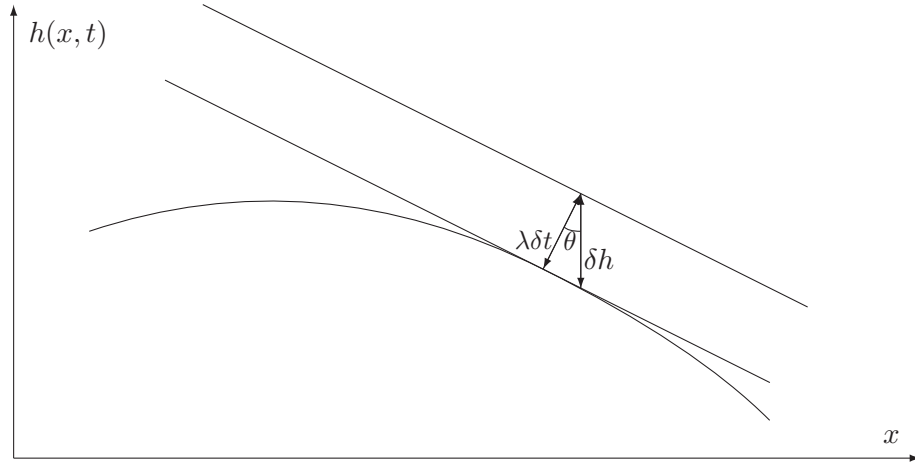


FIG. 1.6 – Origine du terme non linéaire dans l'équation Kardar-Parisi-Zhang, à partir de l'hypothèse d'une croissance de l'interface normale à la surface : pendant la durée infinitésimale δt , un point de l'interface se déplace de $\lambda\delta t$ de manière normale à l'interface, ce qui correspond à un déplacement δh de hauteur, égal à $\lambda\delta t / \cos \theta$.

Diverses observations numériques ont conduit Family et Vicsek à proposer [42] la forme d'échelle suivante pour la fonction $w(L, t)$:

$$w(L, t) \sim L^\chi f\left(\frac{t}{L^z}\right), \quad (1.13)$$

où la fonction f a le comportement asymptotique suivant :

$$f(u) \sim u^{\chi/z} \quad \text{si } u \ll 1 \quad (1.14)$$

$$f(u) \rightarrow \text{constante} \quad \text{quand } u \rightarrow \infty. \quad (1.15)$$

Cette forme d'échelle dépend de deux exposants χ et z . L'exposant χ est appelé *exposant de rugosité*. Il contrôle la croissance de la largeur de l'interface avec la taille du système. Un exposant de rugosité faible correspond à une interface qui reste approximativement plane lors de sa croissance, tandis qu'un exposant de rugosité élevé correspond à une interface qui fluctue beaucoup autour de sa valeur moyenne. L'exposant z est appelé *exposant dynamique*. Il indique où se trouve la séparation entre le comportement du système aux temps courts ($t \ll L^z$) et le comportement aux temps longs ($t \gg L^z$). Pour $t \ll L^z$, la largeur de l'interface croît comme $t^{\chi/z}$. Pour $t \gg L^z$, elle sature à une valeur d'ordre L^χ .

Les exposants χ et z sont connus exactement pour l'équation EW en dimension quelconque. En particulier, en dimension 1, on a $\chi = 1/2$ et $z = 2$. Par contre, pour l'équation KPZ, les exposants ne sont connus exactement qu'en $d = 1$. On a $\chi = 1/2$ et $z = 3/2$. Une méthode permettant de déterminer si un modèle unidimensionnel donné appartient à la classe d'universalité de l'équation KPZ ou EW passe donc par la détermination de l'exposant dynamique z .

On note que l'équation EW est invariante par la transformation $h \rightarrow -h$, ce qui signifie que les deux régions de part et d'autre de l'interface se comportent de la même manière. Ce n'est plus le cas pour l'équation KPZ, où les deux régions séparées par l'interface sont distinguées.

1.2.3 Polymère dirigé en milieu aléatoire

Les modèles de polymère dirigé en milieu aléatoire sont des modèles de physique statistique à l'équilibre avec présence de désordre. Ces modèles ont été beaucoup étudiés, en particulier car ils forment une classe de modèles désordonnés plus simple à étudier analytiquement que les

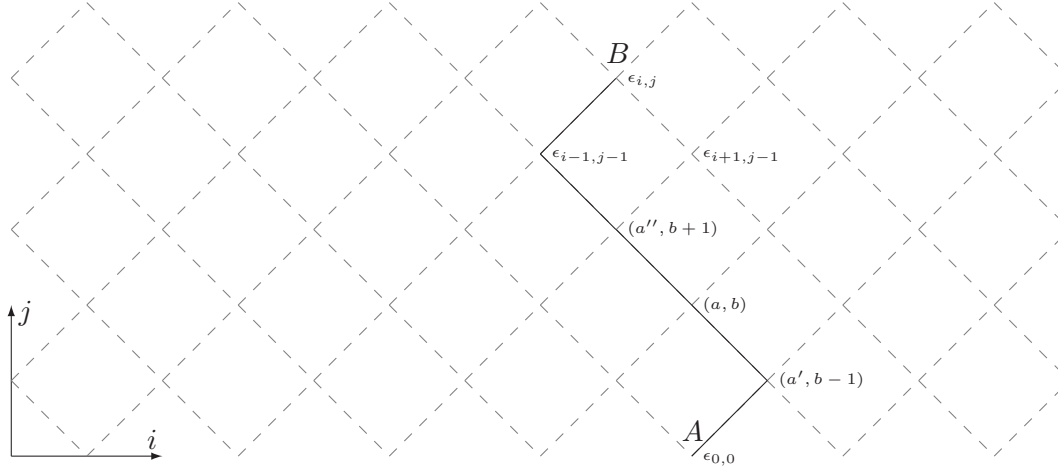


FIG. 1.7 – Modèle de polymère dirigé en milieu aléatoire. On a représenté en trait plein un chemin entre les points $A = (0,0)$ et $B = (i,j)$.

modèles de verre de spin.

Dans ces modèles de polymère dirigé, on considère un réseau dont les sites portent des énergies aléatoires. On s'intéresse aux chemins dirigés sur ce réseau partant du site A et arrivant au site B de telle sorte que toutes les portions du chemin se rapprochent strictement du point B (pour une certaine distance définie entre les sites du réseau). Un tel chemin, qui ne se recoupe jamais, est appelé un « polymère dirigé » (voir figure 1.7). On lui associe une énergie égale à la somme des énergies des sites sur lequel il passe. Si l'on considère que le polymère dirigé est un système à l'équilibre à la température T , la probabilité d'observer une configuration du polymère est alors donnée par le facteur de Boltzmann $e^{-E/kT}/Z$. À température nulle, la configuration d'énergie minimale est observée avec une probabilité 1.

Les modèles de polymère dirigé sont reliés à des problèmes étudiés expérimentalement [12]. Un premier exemple provient du modèle d'Ising bidimensionnel avec des couplages désordonnés, avec des bords libres dans une direction, et des bords fixes dans l'autre (spin + d'un coté et spin - de l'autre, voir figure 1.8). À température nulle et en l'absence de désordre, l'interface entre la phase comportant uniquement des spin + et la phase comportant uniquement des spins - est une ligne droite. Quand le désordre est non nul, mais reste suffisamment faible, le système est encore constitué de deux phases séparées par un chemin sur le réseau carré. Ce chemin possède des propriétés statistiques analogues à la forme d'un polymère dirigé. Un autre exemple est celui de la forme de la déchirure d'un morceau de papier. Le désordre provient alors de l'inhomogénéité du papier, en particulier de sa densité. Dans ce cas, même si la déchirure provient d'un phénomène dynamique (*i.e.* elle se propage à mesure que l'on tire sur le papier), elle possède aussi des propriétés similaires à celles d'un polymère dirigé.

Nous allons maintenant montrer que le modèle d'exclusion totalement asymétrique est relié à un modèle de polymère dirigé en milieu aléatoire à température nulle [43]. On considère pour cela le réseau carré de la figure 1.7. À chaque site de coordonnées (i,j) du réseau, on associe une énergie locale $\epsilon_{i,j} < 0$, choisie aléatoirement avec une distribution ρ exponentielle et indépendante du site : la probabilité pour que $\epsilon_{i,j}$ soit comprise entre ϵ et $\epsilon + d\epsilon$ est donc égale à

$$\rho(\epsilon)d\epsilon = pe^{p\epsilon}d\epsilon. \quad (1.16)$$

Les différents $\epsilon_{i,j}$ étant donnés, on s'intéresse aux différents chemins dirigés vers le haut qui relient le point de coordonnées $(0,0)$ du réseau au point de coordonnées (i,j) . Si un site de coordonnées (a,b) appartient à l'un de ces chemins (mais n'est pas l'une des deux extrémités du chemin), alors le chemin relie le site (a,b) à deux sites de coordonnées $(a',b-1)$ et $(a'',b+1)$

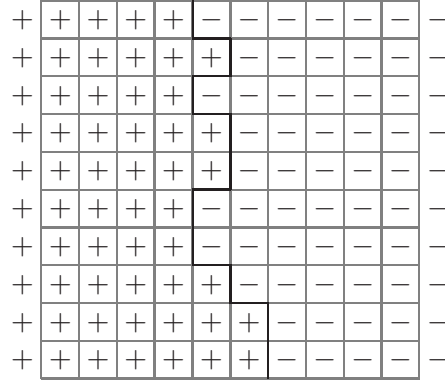


FIG. 1.8 – Polymère dirigé et modèle d'Ising bidimensionnel. L'interface entre le domaine avec des spins + et le domaine avec des spins – peut être modélisé par un polymère dirigé.

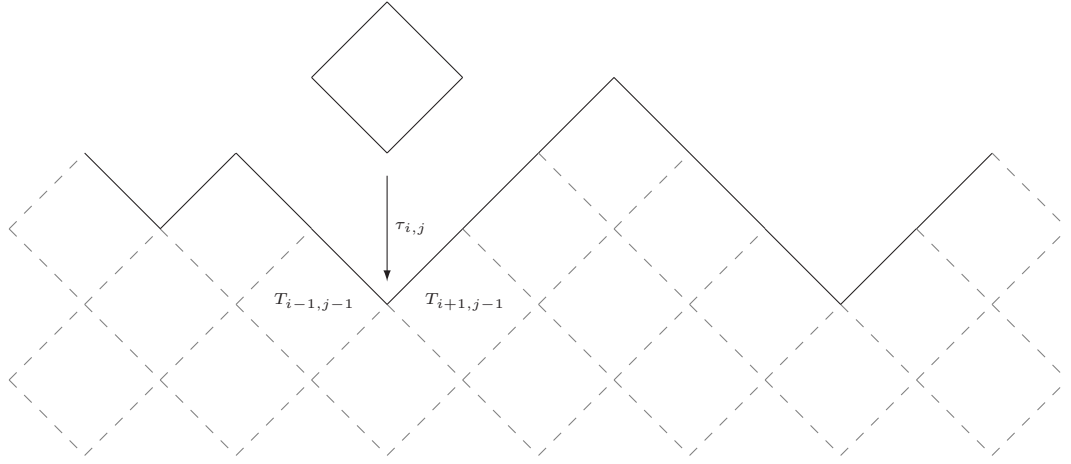


FIG. 1.9 – Lien entre un modèle de croissance et un modèle de polymère dirigé. Le temps nécessaire $T_{i,j}$ pour que l'interface atteigne la hauteur j à l'abscisse i est nécessairement supérieur aux temps $T_{i-1,j-1}$ et $T_{i+1,j-1}$. Il vérifie la même relation de récurrence que l'opposé de l'énergie du polymère.

avec $|a - a'| = |a - a''| = 1$.

À un chemin, on associe une énergie égale à la somme des énergies locales des sites composant le chemin. On appelle alors $E_{i,j}$ le minimum de ces énergies pour tous les différents chemins reliant $(0,0)$ à (i,j) . Cette énergie correspond à un ou plusieurs chemins reliant $(0,0)$ à (i,j) . Par construction, un chemin arrivant au site (i,j) passe nécessairement soit par le site $(i-1, j-1)$, soit par le site $(i+1, j-1)$. On a donc la relation de récurrence suivante sur les $E_{i,j}$:

$$E_{i,j} = \epsilon_{i,j} + \min(E_{i-1,j-1}, E_{i+1,j-1}) . \quad (1.17)$$

Cette relation de récurrence va nous permettre de relier ce modèle de polymère dirigé à un modèle de croissance. Nous allons pour cela devoir interpréter les énergies $\epsilon_{i,j}$ et $E_{i,j}$ (qui sont négatives) comme l'opposé d'intervalles de temps (positifs).

On revient à présent au modèle de croissance présenté à la section 1.2.1, en prenant le taux d'évaporation q égal à zéro de telle sorte que la hauteur de l'interface ne décroisse jamais. On s'intéresse alors au temps $T_{i,j}$ nécessaire pour que la hauteur h_i au point d'abscisse i atteigne la valeur j . La dynamique du modèle de croissance impose alors que, juste avant que h_i ne soit égal à j , on ait $h_i = j - 2$ et $h_{i+1} = h_{i-1} = j - 1$ (voir figure 1.9). Le temps nécessaire pour

que h_i atteigne la valeur j est donc égal au temps nécessaire pour que h_{i+1} et h_{i-1} atteignent la valeur $j-1$, plus le temps nécessaire pour déposer un carré à l'abscisse i , faisant passer h_i de $j-2$ à j . On peut donc écrire

$$T_{i,j} = \tau_{i,j} + \max(T_{i-1,j-1}, T_{i+1,j-1}) , \quad (1.18)$$

où $\tau_{i,j}$ est le temps pour qu'un carré se dépose à l'abscisse i , sachant que $h_i = j-2$ et $h_{i+1} = h_{i-1} = j-1$. Comme la probabilité que h_i passe de $j-2$ à j pendant un intervalle de temps infinitésimal $d\tau$ (après l'instant $\max(T_{i-1,j-1}, T_{i+1,j-1})$) est égale à $pd\tau$, la probabilité que h_i passe de $j-2$ à j entre les instants t et $t+d\tau$ est donnée par

$$\lim_{d\tau \rightarrow 0} (1 - pd\tau)^{\tau/d\tau} \times pd\tau = pe^{-p\tau} d\tau = \rho(-\tau) d\tau . \quad (1.19)$$

Les temps $-\tau_{i,j}$ sont donc distribués suivant la même loi exponentielle ρ (1.16) que les $\epsilon_{i,j}$.

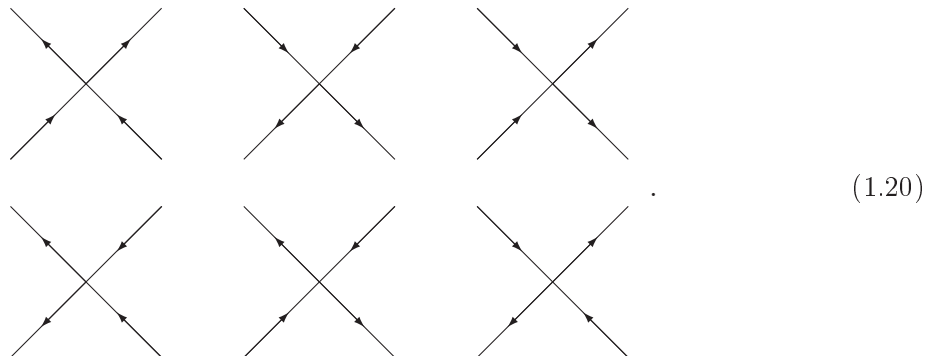
On constate finalement que la relation de récurrence pour $T_{i,j}$ et celle pour $E_{i,j}$ se déduisent l'une de l'autre si l'on écrit $T_{i,j} = -E_{i,j}$ et $\tau_{i,j} = -\epsilon_{i,j}$, ce qui nous donne un lien entre le modèle de polymère dirigé et le modèle de croissance. Cela fournit donc aussi un lien entre le modèle de polymère dirigé et le modèle d'exclusion totalement asymétrique.

1.2.4 Modèle à six vertex

Le modèle à six vertex a été introduit à l'origine comme un modèle simplifié permettant de décrire la physique de certains cristaux à l'équilibre thermodynamique, en particulier les cristaux de glace [44, 45, 46].

Sous une pression atmosphérique normale, chaque molécule d'eau d'un cristal de glace se trouve au centre d'un tétraèdre de quatre autres molécules d'eau avec lesquelles elle forme des liaisons hydrogène [47]. Schématiquement, dans une liaison hydrogène entre deux molécules d'eau H_2O , un atome d'hydrogène de l'une des molécule d'eau s'oriente dans la direction de l'atome d'oxygène de l'autre molécule d'eau. Comme la charge électrique n'est pas répartie uniformément dans une molécule d'eau (la molécule d'eau est dite polaire ; un excès de charge positive est situé sur les noyaux d'hydrogène, et un excès de charge négative sur le noyau d'oxygène), ceci implique la présence d'un dipôle électrique entre les deux molécules d'eau. Chaque molécule d'eau d'un cristal de glace est donc entourée de quatre dipôles électriques, dont deux pointent vers la molécule en question et les deux autres vers d'autres molécules d'eau à proximité.

Le réseau formé par les molécules d'eau dans la glace possède une structure tridimensionnelle relativement compliquée, les tétraèdres de molécules d'eau qui interagissent par liaison hydrogène étant eux mêmes assemblés selon une structure hexagonale. Une simplification de cette structure qui, tout en permettant d'obtenir un modèle exactement soluble préserve certaines propriétés du système réel, consiste à remplacer le réseau cristallin par un réseau carré bidimensionnel dont les nœuds représentent les molécules d'eau. Les arêtes de ce réseau seront orientées pour refléter la présence des dipôles électriques entre les molécules d'eau. L'orientation des arêtes doit alors obéir à la contrainte (*ice rule*) qu'exactement deux arêtes doivent pointer vers chaque nœud. Il y a ainsi six possibilités d'orientation des arêtes autour d'un nœud :



On associe à chacun de ces six vertex une énergie $\epsilon_1, \dots, \epsilon_6$ et un facteur de Boltzmann $\omega_1 = e^{-\epsilon_1/kT}, \dots, \omega_6 = e^{-\epsilon_6/kT}$. Pour la glace, ces six énergies sont égales car les six configurations des atomes d'hydrogène autour d'un atome d'oxygène sont équivalentes d'un point de vue cristallographique. Ce n'est pas le cas pour d'autres cristaux du même type, par exemple pour les cristaux de KH_2PO_4 [44].

On définit alors l'énergie interne E d'une configuration des vertex (*i.e.* l'énergie interne de la glace dans une certaine configuration des molécules d'eau, pour ce modèle très simplifié) comme la somme des énergies des différents vertex. Le facteur de Boltzmann associé est simplement égal au produit des facteurs de Boltzmann des différents vertex.

Il est utile de modifier un peu la représentation des vertex en transformant les arêtes orientées par des arêtes en trait plein ou en pointillés selon la correspondance suivante :

$$(1.21)$$

Les six vertex possibles sont alors représentés sous la forme

$$(1.22)$$

où l'on a donné au dessous de chaque vertex un poids de Boltzmann associé au vertex. Avec les poids précédents pour les vertex, nous allons voir qu'il existe un lien entre le modèle à six vertex et le modèle d'exclusion asymétrique. Nous donnerons ici une première correspondance avec un modèle d'exclusion asymétrique en temps discret [48]. Nous verrons ensuite aux chapitres 3 et 9 une autre correspondance entre le modèle à six vertex, la chaîne de spin XXZ et le modèle d'exclusion asymétrique en temps continu, reliée à l'intégrabilité de ces trois modèles.

On définit maintenant un modèle d'exclusion asymétrique en temps discret. À chaque temps t entier pair, toute particule située sur un site pair peut reculer avec une probabilité q (et ne pas bouger avec une probabilité $1 - q$), tandis que chaque particule située sur un site impair peut avancer avec une probabilité p (et ne pas bouger avec une probabilité $1 - p$). De même, à chaque temps t entier impair, toute particule située sur un site pair peut avancer avec une probabilité p (et ne pas bouger avec une probabilité $1 - p$), tandis que chaque particule située sur un site impair peut reculer avec une probabilité q (et ne pas bouger avec une probabilité $1 - q$). L'ensemble des sites est donc partitionné en paires de sites consécutifs, les deux partitions possibles correspondant respectivement aux temps pairs et impairs. Les particules peuvent uniquement se déplacer entre deux sites faisant partie de la même paire (voir figure 1.10).

On peut alors interpréter une configuration du modèle à six vertex comme une histoire des

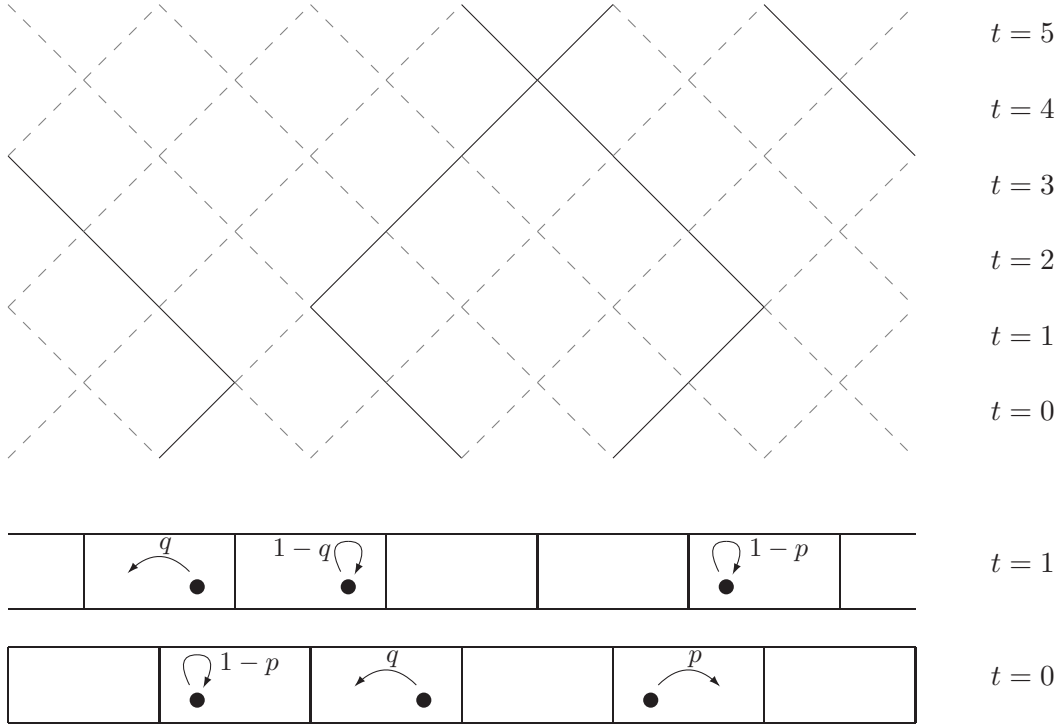


FIG. 1.10 – Configuration du modèle à six vertex, reliée à l'histoire des configurations d'un modèle d'exclusion asymétrique en temps discret pour un système comportant 3 particules sur 12 sites.

configurations successives du modèle d'exclusion en temps discret. À chaque ensemble de lignes situées à la même hauteur sur la configuration du modèle à six vertex représentée figure 1.10, on associe un temps entier (qui augmente en allant vers le haut) et une configuration du modèle d'exclusion, en interprétant les lignes en trait plein comme des particules, et les lignes en pointillés comme des sites vides. On constate alors que la probabilité d'une histoire donnée du modèle d'exclusion est précisément égale au poids de la configuration des vertex.

1.2.5 Processus zero range

Le processus « zero range » (ZRP, pour *Zero Range Process*) fait partie, tout comme le modèle d'exclusion asymétrique, des modèles de physique statistique dont l'étude a pour but de mieux comprendre la physique des phénomènes hors d'équilibre [49, 50, 51, 52]. Le processus zero range décrit le mouvement de particules sur les sites d'un réseau, en général unidimensionnel, le nombre de particules m_i au site i pouvant être arbitrairement grand. La contrainte d'exclusion est donc absente dans le cas du modèle zero range. Il s'agit d'une différence essentielle avec le modèle d'exclusion.

On considère que les particules en un site du modèle zero range sont empilées les unes sur les autres comme dans la figure 1.11. La dynamique est alors la suivante : la particule au sommet de la pile au site i peut se déplacer au site $i + 1$ avec un taux $qu(m_i)$, ou au site $i - 1$ avec un taux $pu(m_i)$. Les paramètres $u(m)$ sont de réels positifs arbitraires. De manière équivalente, on peut aussi définir la dynamique de telle sorte que la particule située au sommet de la pile ne soit pas distinguée des autres particules au même site : il suffit pour cela de prendre des taux $qu(m_i)/m_i$ et $pu(m_i)/m_i$ pour les déplacements des particules se trouvant au site i .

On note que contrairement au cas du modèle d'exclusion, les déplacements d'une particule ne dépendent que de l'état du site de départ et pas de celui du site de destination. Cette propriété rend en général l'étude exacte du processus zero range plus simple que celle du modèle

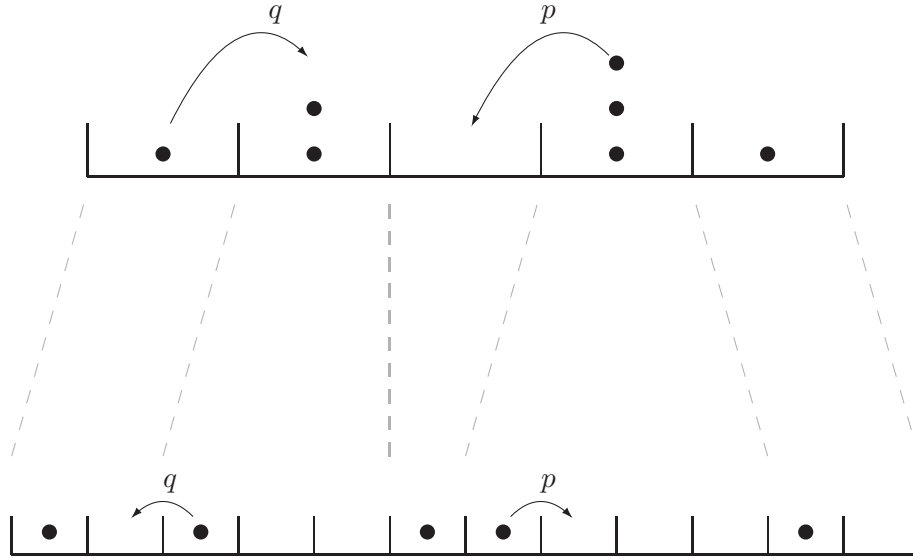


FIG. 1.11 – Processus zero range et modèle d'exclusion asymétrique. Un site du processus zero range occupé par m particules correspond à $m+1$ sites du modèle d'exclusion, le premier d'entre eux étant occupé et les m autres vides.

d'exclusion.

Le modèle zero range possède une mesure stationnaire factorisée. On peut en effet montrer que la probabilité que le système se trouve dans une configuration $\mathcal{C}$ spécifiée par les nombres d'occupation m_i est donnée par

$$P(\mathcal{C}) = \frac{1}{Z} \prod_{i=1}^L f(m_i) , \quad (1.23)$$

où la normalisation Z assure que la somme des probabilités est égale à 1, la fonction f étant définie par

$$f(m) = \prod_{j=1}^m \frac{1}{u(j)} . \quad (1.24)$$

Cette factorisation de la mesure stationnaire n'est pas une propriété générale des systèmes hors d'équilibre. Nous verrons en particulier qu'elle n'est pas vérifiée pour plusieurs variantes du modèle d'exclusion asymétrique. Dans le cas de modèles de transport de masse sur un réseau périodique, une condition nécessaire et suffisante sur les taux de transition pour que l'état stationnaire soit factorisé a été dérivée dans [53].

Suivant la valeur des taux $u(m)$, il est possible que la mesure stationnaire du processus zero range favorise les configurations pour lesquelles une fraction macroscopique des particules se trouve dans un seul site. Il s'agit du phénomène de « condensation en espace réel », la condensation ayant lieu au niveau de la position des particules. Ce phénomène présente certaines similitudes avec la condensation de Bose-Einstein pour des bosons à très basse température, qui est une condensation dans l'espace des impulsions : une fraction macroscopique des particules se trouve dans l'état fondamental du système, avec une impulsion nulle.

Le modèle d'exclusion asymétrique sur un anneau de L sites avec n particules est relié au processus zero range sur un anneau de n sites avec $L - n$ particules si les taux $u(m)$ sont égaux. On prendra $u(m) = 1$. La correspondance entre les deux modèles s'effectue en remplaçant chaque site du processus zero range contenant m particules par un site du modèle d'exclusion occupé par une particule, suivi de m sites vides (voir figure 1.11). On constate alors que la dynamique que nous avons définie pour le processus zero range induit sur les L sites du modèle

d'exclusion la dynamique habituelle, pour laquelle une particule avance avec un taux p et recule avec un taux q si le site de destination est vide.

Chapitre 2

Quelques résultats connus pour le modèle d'exclusion asymétrique

Dans ce chapitre, nous allons récapituler un certain nombre de résultats connus pour le modèle d'exclusion asymétrique [15, 18, 19].

2.1 Dynamique du modèle d'exclusion

La dynamique que nous avons présentée pour le modèle d'exclusion asymétrique est markovienne : les déplacements des particules au temps t ne dépendent que de l'état du système à cet instant, qui est entièrement spécifié par la probabilité qu'a le système de se trouver dans chacune des configurations. Ainsi, les déplacements des particules au temps t ne dépendent pas de toute l'histoire du système aux instants antérieurs. L'évolution dans le temps des probabilités de chaque configuration est donc donnée par une équation maîtresse.

2.1.1 Équation maîtresse

On considère une configuration $\mathcal{C}$ du modèle d'exclusion pour un système fini, avec des conditions aux bords quelconques (système périodique ou avec des bords ouverts). Au temps t , le système a une probabilité $P_t(\mathcal{C})$ de se trouver dans la configuration $\mathcal{C}$. À un instant ultérieur $t + dt$, pour un intervalle de temps infinitésimal dt , la probabilité que le système se trouve encore dans cette configuration a varié d'une quantité infinitésimale $dP_t(\mathcal{C})$. Cette variation peut être décomposée en une somme de deux termes, l'un positif correspondant aux transitions qui ont conduit le système dans la configuration $\mathcal{C}$, l'autre négatif correspondant aux transitions qui ont fait passer le système de la configuration $\mathcal{C}$ vers d'autres configurations.

Si l'on appelle $w_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}}$ le taux de transition de la configuration $\mathcal{C}$ vers une configuration $\mathcal{C}'$, alors la variation infinitésimale $dP_t(\mathcal{C})$ est égale à la somme sur toutes les configurations $\mathcal{C}'$ différentes de $\mathcal{C}$ des probabilités $dt w_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}'} P_t(\mathcal{C}')$ de quitter la configuration $\mathcal{C}'$ pour passer dans la configuration $\mathcal{C}$, moins la somme sur toutes les configurations $\mathcal{C}'$ différentes de $\mathcal{C}$ des probabilités $dt w_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}} P_t(\mathcal{C})$ de quitter la configuration $\mathcal{C}$ pour passer dans la configuration $\mathcal{C}'$. L'évolution dans le temps de la probabilité $P_t(\mathcal{C})$ est donc donnée par l'équation maîtresse

$$\boxed{\frac{dP_t(\mathcal{C})}{dt} = \sum_{\mathcal{C}' \neq \mathcal{C}} [w_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}'} P_t(\mathcal{C}') - w_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}} P_t(\mathcal{C})]} \quad (2.1)$$

Il s'agit d'un système d'équations différentielles linéaires, le nombre d'équations étant égal au nombre $|\Omega|$ de configurations du système. Il est pratique de réécrire l'équation maîtresse (2.1)

sous la forme d'une équation différentielle matricielle. On définit pour cela le vecteur probabilité

$$|P_t\rangle = \sum_{\mathcal{C}} P_t(\mathcal{C}) |\mathcal{C}\rangle , \quad (2.2)$$

appartenant à un espace vectoriel de dimension $|\Omega|$ engendré par l'ensemble des « vecteurs configuration » $|\mathcal{C}\rangle$ correspondant aux configurations $\mathcal{C}$ du système. On définit aussi la matrice de Markov M , agissant sur le même espace vectoriel, par

$$M_{\mathcal{C}\mathcal{C}'} = \langle \mathcal{C} | M | \mathcal{C}' \rangle = \begin{cases} w_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}'} & \text{si } \mathcal{C} \neq \mathcal{C}' \\ - \sum_{\mathcal{C}'' \neq \mathcal{C}} w_{\mathcal{C}'' \leftarrow \mathcal{C}} & \text{si } \mathcal{C} = \mathcal{C}' \end{cases} . \quad (2.3)$$

En fonction du vecteur probabilité et de la matrice de Markov, l'équation maîtresse (2.1) se réécrit alors sous la forme

$$\frac{d}{dt} |P_t\rangle = M |P_t\rangle . \quad (2.4)$$

Le vecteur probabilité P_t est alors obtenu en intégrant sur la variable t l'équation précédente. On obtient

$$|P_t\rangle = e^{Mt} |P_0\rangle , \quad (2.5)$$

où $|P_0\rangle$ est le vecteur probabilité à l'instant initial $t = 0$. On constate que pour obtenir une expression explicite des probabilités au temps t , il est nécessaire de diagonaliser la matrice de Markov. Nous verrons au chapitre 3 que dans le cas du modèle sur un anneau, la matrice de Markov peut être diagonalisée en utilisant l'Ansatz de Bethe.

On note que la matrice de Markov M que l'on a définie est telle que la somme sur une colonne de ses éléments de matrice $M_{i,j}$ est nulle. Ceci implique en particulier que le vecteur ligne $\langle 1|$ dont toutes les composantes sont égales à 1 est vecteur propre à gauche de la matrice de Markov avec la valeur propre 0 : $\langle 1|M = 0$. Une conséquence de cette relation est que pour $|\psi_i\rangle$ vecteur propre à droite de la matrice de Markov de valeur propre E_i , on a

$$0 = \langle 1|M|\psi_i\rangle = E_i \langle 1|\psi_i\rangle , \quad (2.6)$$

ce qui signifie que soit la valeur propre E_i est nulle, soit la somme des composantes du vecteur propre $|\psi_i\rangle$ est nulle. On constate donc que les seuls états propres de M pouvant représenter des probabilités sont les états propres de valeur propre nulle.

Dans le cas d'un système de taille finie, toutes les configurations peuvent être atteintes à partir de la configuration initiale après un nombre suffisant de pas (en se restreignant aux configurations ayant le même nombre de particules que la configuration initiale pour le système sur un anneau, dont la dynamique conserve le nombre de particules) et le théorème de Perron-Frobenius [54] implique alors que le système possède un unique état stationnaire, état propre de la matrice de Markov avec une valeur propre nulle. Tous les autres états propres ont une valeur propre de partie réelle strictement négative, ce qui implique que l'état stationnaire va être atteint exponentiellement vite par le système.

2.1.2 Graphe de la dynamique

La dynamique du modèle d'exclusion asymétrique peut être représentée par un graphe orienté dont les sommets sont les configurations du système, et dont les arêtes pointent d'une configuration $\mathcal{C}$ à une configuration $\mathcal{C}'$ si la dynamique permet de passer de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$ en déplaçant une seule particule d'un site vers la droite ou vers la gauche.

On considère tout d'abord le système sur un anneau de taille L . On numérote les sites de 1 à L en prenant pour origine un site arbitraire de l'anneau. On note alors que chaque pas de la

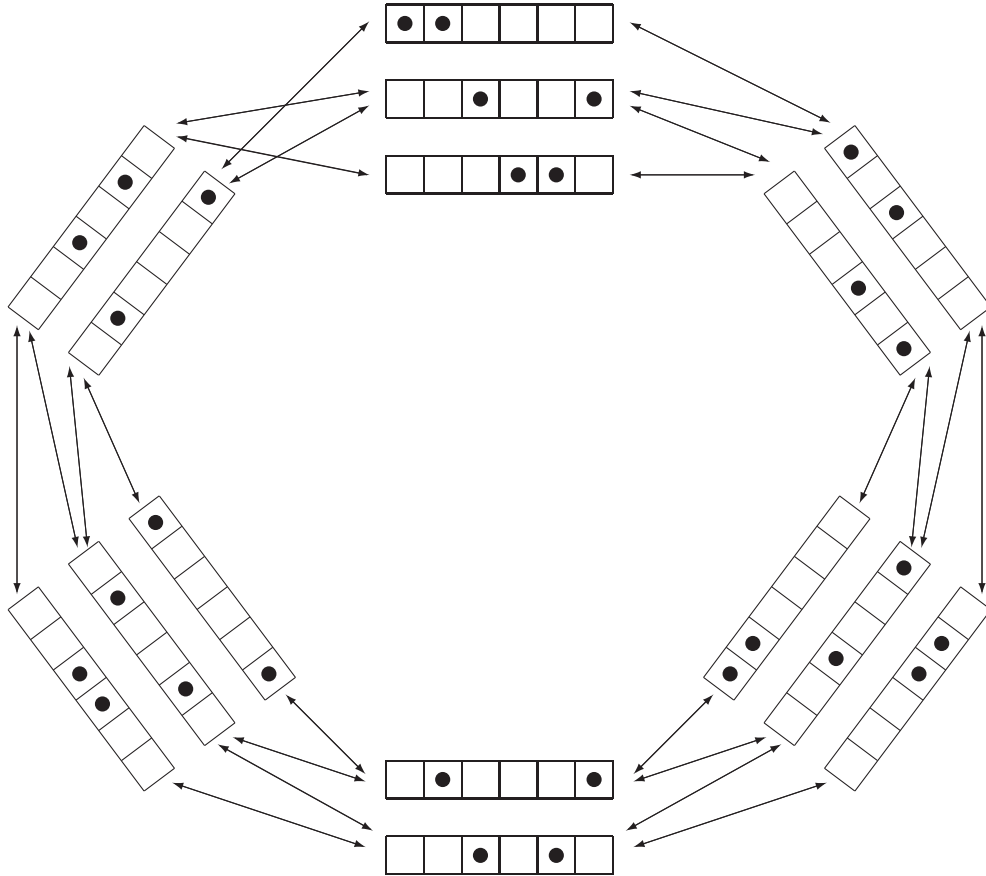


FIG. 2.1 – Graphe de la dynamique du modèle partiellement asymétrique avec des conditions aux bords périodiques, et 2 particules sur $L = 6$ sites. Les flèches indiquent les transitions possibles entre les configurations pour un pas de la dynamique.

dynamique qui fait avancer une particule augmente de 1 la somme des positions des particules, excepté quand une particule passe du site L au site 1, auquel cas la somme des positions de particules augmente de $1 - L$. De même, chaque pas de la dynamique qui fait reculer une particule diminue de 1 la somme des positions des particules, excepté quand une particule passe du site 1 au site L , auquel cas la somme des positions des particules diminue de $1 - L$. On constate donc que modulo L , la somme des positions des particules augmente de 1 chaque fois qu'une particule avance, et diminue de 1 chaque fois qu'une particule recule. On peut donc classer les $\binom{L}{n}$ configurations du modèle d'exclusion sur un anneau en L groupes de configurations correspondant aux L valeurs possibles de la somme des positions des particules modulo L . Le graphe de la dynamique a alors la forme d'un anneau de longueur L , comme on peut le voir figure 2.1 sur l'exemple d'un système à 2 particules sur $L = 6$ sites.

On passe maintenant au système à bords ouverts de taille L , pour lequel le nombre de particules n'est pas conservé. On numérote encore les sites de 1 à L en partant du bord gauche. Quand une particule se trouvant au site L avance, elle sort du système, et la somme des positions des particules augmente de $1 - (L + 1)$. De même, quand une particule du réservoir de droite rentre dans le système au site L , la somme des positions des particules diminue de $1 - (L + 1)$. On trouve donc cette fois-ci que la somme des positions des particules modulo $L + 1$ augmente de 1 chaque fois qu'une particule avance, et diminue de 1 chaque fois qu'une particule recule. On peut alors classer les 2^L configurations du modèle ouvert en $L + 1$ groupes. Le graphe de la dynamique a alors la forme d'un anneau de taille $L + 1$. On a représenté figure 2.2 le cas du système de taille $L = 4$.

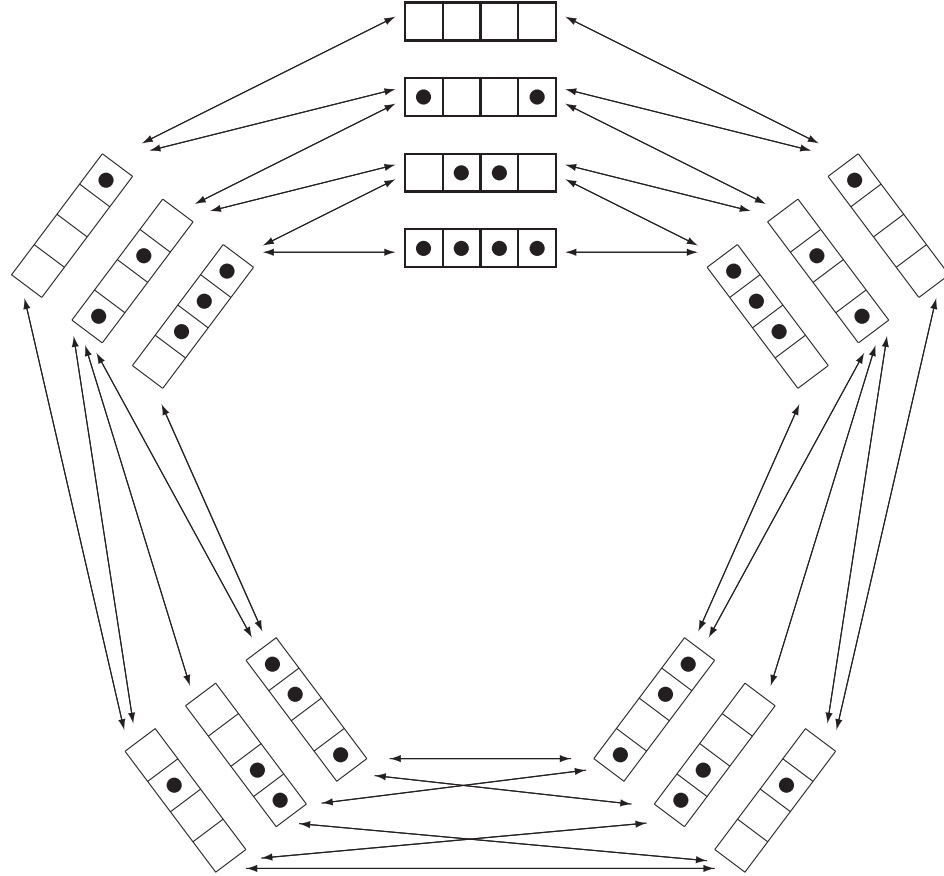


FIG. 2.2 – Graphe de la dynamique du modèle partiellement asymétrique avec des bords ouverts et $L = 4$ sites. Les flèches indiquent les transitions possibles entre les configurations pour un pas de la dynamique.

Cette forme en anneau du graphe de la dynamique provient plus généralement de l'existence d'une quantité Y qui évolue de telle sorte que dans une configuration $\mathcal{C}$ donnée, $Y(\mathcal{C})$ ait toujours la même valeur modulo un nombre K (égal à L pour le modèle sur un anneau de L sites, et à $L + 1$ pour le modèle ouvert sur L sites.). Plus précisément, pour chaque paire de configurations $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, on définit (modulo K) la variation $\Delta Y_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}}$ de la quantité Y pour passer de la configuration $\mathcal{C}$ à la configuration $\mathcal{C}'$. On suppose alors que pour toute trajectoire fermée $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{C}_m \rightarrow \mathcal{C}$ dans l'espace des configurations du système, la variation $\Delta Y_{\mathcal{C}_1 \leftarrow \mathcal{C}} + \Delta Y_{\mathcal{C}_2 \leftarrow \mathcal{C}_1} + \dots + \Delta Y_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}_m}$ de la quantité Y est nulle. Cette propriété implique que le graphe de la dynamique a une forme d'anneau de longueur K . Pour le modèle d'exclusion, la quantité Y est la somme des positions des particules comptées à partir d'une origine fixée. Il s'agit aussi du déplacement total des particules à partir d'un instant initial, en comptant $+1$ quand une particule se déplace d'un site vers l'avant, et -1 quand elle se déplace vers l'arrière.

2.1.3 Relaxation vers l'état stationnaire

Le temps caractéristique pour que le système atteigne l'état stationnaire est donné par $1/\text{Re}(E_1)$, où la valeur propre E_1 , appelée *gap* du spectre, est la valeur propre de partie réelle la plus grande après la valeur propre nulle correspondant à l'état stationnaire.

Pour le modèle totalement asymétrique sur un anneau, E_1 a été calculé par Ansatz de Bethe par Gwa et Spohn [55] dans la limite d'un système de grande taille (avec une densité $\rho = n/L$ finie). Ce calcul a ensuite été considérablement simplifié par Golinelli et Mallick dans [56, 57].

Dans le cas partiellement asymétrique sur un anneau, le gap a aussi été calculé en utilisant l'Ansatz de Bethe par Kim [58]. Dans tous ces cas, la partie réelle du gap tend vers zéro dans la limite d'un système de grande taille comme $1/L^{3/2}$. Le temps typique pour que le système atteigne son état stationnaire croît donc comme $L^{3/2}$, ce qui donne un exposant dynamique z égal à $3/2$. Cette valeur de l'exposant dynamique était attendue pour un modèle dans la classe d'universalité de l'équation de Kardar-Parisi-Zhang. Dans le cas du modèle symétrique ($p = q$) sur un anneau, le gap a aussi été calculé [59, 60]. Il tend vers zéro quand L tend vers l'infini comme $1/L^2$, donnant pour exposant dynamique $z = 2$, qui correspond bien à un système dans la classe d'universalité de l'équation d'Edwards-Wilkinson.

Plus récemment le gap pour le modèle ouvert a été calculé par de Gier et Essler, toujours en utilisant l'Ansatz de Bethe, dans le cas totalement asymétrique [61, 62] comme dans le cas partiellement asymétrique [63]. Suivant les valeurs des taux d'entrée et de sortie des particules, le gap peut rester fini dans la limite $L \rightarrow \infty$, ou bien tendre vers zéro comme L^{-2} ou $L^{-3/2}$. Un gap qui tend vers 0 comme L^{-2} ou $L^{-3/2}$ correspond, comme pour le système sur un anneau, aux classes d'universalité des équations d'Edwards-Wilkinson et de Kardar-Parisi-Zhang. Contrairement au cas du système sur un anneau, le système ouvert avec des taux p et q différents peut donc avoir un exposant dynamique égal à 2 suivant la valeur des taux α, β, γ et δ sur les bords du système.

2.2 Mesure stationnaire

Aux temps longs, le système (fini) atteint un état stationnaire indépendant de la condition initiale. Cet état stationnaire est caractérisé par les probabilités stationnaires $P_\infty(\mathcal{C})$ qui vérifient

$$0 = \sum_{\mathcal{C}' \neq \mathcal{C}} [w_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}'} P_\infty(\mathcal{C}') - w_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}} P_\infty(\mathcal{C})] . \quad (2.7)$$

Les probabilités stationnaires définissent une mesure stationnaire, qui permet de construire une valeur moyenne dans l'état stationnaire. Pour une quantité $\mathcal{A}$ ayant une valeur bien définie pour chaque configuration $\mathcal{C}$, la valeur moyenne de $\mathcal{A}$ dans l'état stationnaire est ainsi donnée par

$$\langle \mathcal{A} \rangle = \sum_{\mathcal{C}} P_\infty(\mathcal{C}) \mathcal{A}(\mathcal{C}) . \quad (2.8)$$

Contrairement au cas des systèmes à l'équilibre pour lesquels la mesure stationnaire est simplement la mesure de Boltzmann-Gibbs, la mesure stationnaire du modèle d'exclusion n'est pas déterminée a priori par une théorie générale. Elle a cependant été calculée exactement dans plusieurs cas comme nous allons le voir dans la suite de cette section. Nous montrerons aussi que la connaissance de la mesure stationnaire permet de calculer les fluctuations de la densité locale des particules, ainsi que la valeur moyenne du courant.

Nous allons maintenant récapituler quelques résultats connus pour les probabilités stationnaires du modèle d'exclusion [64]. Nous verrons en particulier que dans le cas du modèle sur un anneau la mesure stationnaire est uniforme, toutes les configurations ayant la même probabilité. Par contre, dans le cas du modèle ouvert comme dans celui du modèle à plusieurs espèces de particules, la mesure stationnaire est plus compliquée.

2.2.1 Bilan détaillé

Un cas particulièrement simple pour le calcul des probabilités stationnaires d'un processus de Markov général est celui pour lequel la propriété du *bilan détaillé* est vérifiée. Celle-ci correspond à des taux de transition w qui vérifient la relation suivante :

$$\frac{w_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}}}{w_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}'}} = \frac{f(\mathcal{C}')}{f(\mathcal{C})} , \quad (2.9)$$

où les $f(\mathcal{C})$ sont $|\Omega|$ quantités positives fixées. Si le système possède un unique état stationnaire, la solution de l'équation (2.7) est alors $P_\infty(\mathcal{C}) = f(\mathcal{C})/Z$, la normalisation $Z = \sum_{\mathcal{C}} f(\mathcal{C})$ assurant que la somme des probabilités est égale à un.

Une conséquence du bilan détaillé est que le spectre de la matrice de Markov est réel. On considère en effet l'opérateur U , défini par

$$U|\mathcal{C}\rangle = \sum_{\mathcal{C}'} \sqrt{f(\mathcal{C})} |\mathcal{C}'\rangle. \quad (2.10)$$

Pour deux configurations $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ différentes, on a alors

$$\langle \mathcal{C}' | U^{-1} M U | \mathcal{C} \rangle = \frac{\sqrt{f(\mathcal{C})}}{\sqrt{f(\mathcal{C}')}} w_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}} = \sqrt{w_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}} w_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}'}} , \quad (2.11)$$

et la matrice $U^{-1} M U$ est donc symétrique.

Une autre conséquence du bilan détaillé est la réversibilité temporelle de la dynamique du système. La probabilité d'observer la trajectoire $\mathcal{C}_1 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{C}_r$ dans l'espace des configurations du système est en effet égale à la probabilité d'observer la trajectoire renversée dans le temps $\mathcal{C}_r \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{C}_1$:

$$\frac{P(\mathcal{C}_1) w_{\mathcal{C}_2 \leftarrow \mathcal{C}_1} w_{\mathcal{C}_3 \leftarrow \mathcal{C}_2} \dots w_{\mathcal{C}_r \leftarrow \mathcal{C}_{r-1}}}{w_{\mathcal{C}_1 \leftarrow \mathcal{C}_2} w_{\mathcal{C}_2 \leftarrow \mathcal{C}_3} \dots w_{\mathcal{C}_{r-1} \leftarrow \mathcal{C}_r} P(\mathcal{C}_r)} = 1. \quad (2.12)$$

Pour un système à l'équilibre thermodynamique à température T avec une énergie $E(\mathcal{C})$ pour la configuration $\mathcal{C}$, une modélisation simple de la dynamique du système par un processus de Markov correspond à choisir des taux de transition vérifiant le bilan détaillé, avec $f(\mathcal{C}) \propto e^{-E(\mathcal{C})/kT}$. La probabilité stationnaire est alors bien donnée par la mesure de Boltzmann-Gibbs.

Le modèle d'exclusion asymétrique, dont la matrice de Markov possède en général un spectre complexe (voir figure 2.8), ne vérifie pas le bilan détaillé. Par exemple, pour le modèle sur un anneau comportant une seule particule, on a

$$\frac{w_{\mathcal{C}_2 \leftarrow \mathcal{C}_1} w_{\mathcal{C}_3 \leftarrow \mathcal{C}_2} \dots w_{\mathcal{C}_1 \leftarrow \mathcal{C}_L}}{w_{\mathcal{C}_1 \leftarrow \mathcal{C}_2} w_{\mathcal{C}_2 \leftarrow \mathcal{C}_3} \dots w_{\mathcal{C}_L \leftarrow \mathcal{C}_1}} = \frac{p^L}{q^L}, \quad (2.13)$$

où l'on a noté $\mathcal{C}_i$ la configuration pour laquelle la particule se trouve au site i . Pour un système vérifiant le bilan détaillé, cette quantité serait égale à 1, les facteurs au numérateur et au dénominateur se simplifiant deux à deux.

Par contre, le cas du modèle d'exclusion symétrique $p = q$ avec des conditions aux bords périodiques satisfait à la propriété du bilan détaillé. Il s'agit en fait du seul cas pour le modèle d'exclusion sur un anneau pour lequel cette propriété est vérifiée. Pour le modèle ouvert, il est encore possible de satisfaire le bilan détaillé. Pour cela, il faut que les taux d'entrée et de sortie des particules aux bords vérifient $\alpha/\gamma = \delta/\beta$, en plus d'avoir $p = q$ à l'intérieur du système. Dans les deux cas, aucun courant de particules ne parcourt le système. L'état stationnaire de ces deux modèles symétriques est un état d'équilibre thermodynamique, et on peut donc interpréter les probabilités stationnaires comme des poids de Boltzmann $e^{-E(\mathcal{C})/kT}$. Pour le modèle sur un anneau, les probabilités stationnaires sont données par $P_\infty(\mathcal{C}) = 1/\binom{L}{n}$ et les énergies associées aux configurations sont donc toutes nulles. Pour le modèle ouvert, on peut montrer que la probabilité stationnaire d'une configuration à n particules est donnée par $P_\infty(\mathcal{C}) = g^n/(1+g)^L$, avec $g = \alpha/\gamma = \delta/\beta$, et l'énergie associée à une configuration est donc proportionnelle au nombre de particules présentes dans le système.

Entre deux configurations $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, on peut définir un courant de probabilité

$$J_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}} = w_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}'} P_\infty(\mathcal{C}') - w_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}} P_\infty(\mathcal{C}) = -J_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}'} . \quad (2.14)$$

Le bilan détaillé correspond au cas très particulier pour lequel tous les courants de probabilité sont nuls. Dans le cas général où le bilan détaillé n'est pas vérifié, l'équation (2.7) pour la

de conclure que

$$P_\infty(\mathcal{C}) = \frac{1}{\text{card } \Omega} = 1 / \binom{L}{n} . \quad (2.16)$$

Les probabilités stationnaires dépendent donc pas des taux p et q . En particulier, leur valeur est identique dans le cas symétrique qui vérifie le bilan détaillé et dans le cas asymétrique, pour lequel le bilan détaillé n'est pas satisfait. La différence entre le modèle symétrique et le modèle asymétrique est cependant visible au niveau des courants de probabilité circulant dans le système : ceux-ci sont nuls pour le modèle symétrique, et non nuls pour le modèle asymétrique.

2.2.3 Modèle ouvert

Pour le modèle ouvert, les probabilités stationnaires peuvent là encore être calculées exactement. Elle s'expriment cependant sous une forme plus complexe que pour le modèle sur un anneau. Nous verrons au chapitre 8 qu'elles s'expriment par l'Ansatz matriciel introduit par Derrida, Evans, Hakim et Pasquier dans [65], qui résume de manière compacte les relations de récurrence obtenues par Derrida, Domany et Mukamel dans [66] pour les poids stationnaires. Pour une configuration $\mathcal{C} = (\tau_1, \dots, \tau_L)$, la formulation de la probabilité stationnaire par l'Ansatz matriciel s'écrit comme

$$P_\infty(\mathcal{C}) = \frac{1}{Z} \langle W | X_{\tau_1} \dots X_{\tau_L} | V \rangle , \quad (2.17)$$

où les matrices X_0 et X_1 , et les vecteurs $\langle W |$ et $| V \rangle$ vérifient une certaine algèbre, qui sera détaillé au chapitre 8.

L'Ansatz matriciel a aussi été appliqué à de nombreux autres modèles unidimensionnels de particules en interaction (voir la revue récente de Blythe et Evans [64] sur le sujet). En particulier, Krebs et Sandow ont prouvé [67] qu'un tel Ansatz matriciel existe pour tout modèle ouvert à une dimension avec des interactions entre sites plus proches voisins ne dépendant pas du site.

2.3 Fluctuations de la densité locale

La connaissance de la mesure stationnaire du modèle d'exclusion permet d'étudier la densité locale de particules en un point du système. S'agissant d'une variable aléatoire, il est possible d'en définir la valeur moyenne ainsi que les fluctuations. Nous allons commencer par expliquer pourquoi les fluctuations de la densité locale représentent une quantité importante en général. Nous passerons ensuite à la description de ces fluctuations de densité pour le modèle d'exclusion asymétrique.

2.3.1 Lien avec l'énergie libre pour un système à l'équilibre

Nous allons expliquer ici que pour un système à l'équilibre thermodynamique (avec des interactions à courte portée), les fluctuations de densité locale sont reliées à l'énergie libre du système [19]. Comme pour un système à l'équilibre, l'énergie libre est l'une des quantités les plus importantes, cela tendra à indiquer qu'il en est de même pour les fluctuations de la densité pour des systèmes hors d'équilibre.

On considère un système de N particules en interaction, à l'équilibre thermodynamique dans un volume V en contact avec un thermostat à température T (sans échange de particules avec le thermostat). On considère aussi un sous-système de V de volume v macroscopique, mais petit devant V (voir figure 2.4). Le nombre n de particules dans le volume v varie au cours du temps à cause de transferts de particules entre le volume v et son complémentaire dans V , de volume $V - v$. On appelle $\hat{\rho} = n/v$ la densité locale de particules dans v et $\rho = N/V$ la densité globale de particules dans V . On veut calculer la probabilité $P_v(\hat{\rho})$ que $\hat{\rho}$ soit égal à une valeur

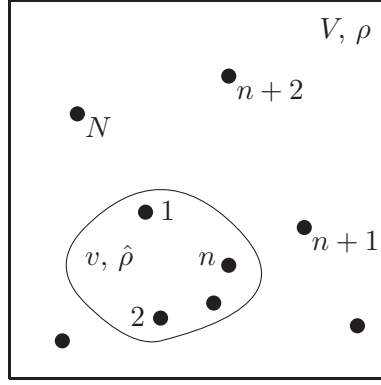


FIG. 2.4 – Système de volume V contenant un nombre $N = \rho V$ fixé de particules. À l'intérieur de ce système est dessiné le contour d'un sous-système de volume v . Ce sous-système contient un nombre $n = \hat{\rho}v$ de particules, qui varie dans le temps.

différente de sa valeur moyenne ρ . Dans la limite $v \rightarrow \infty$, on s'attend à ce que cette probabilité tende vers zéro exponentiellement rapidement avec le volume v :

$$P_v(\hat{\rho}) \sim e^{-vH(\hat{\rho})}, \quad (2.18)$$

où $H(\hat{\rho})$ est la fonction de grandes déviations de la densité. Il s'agit d'une quantité positive, qui s'annule seulement quand la densité $\hat{\rho}$ est égale à sa valeur moyenne ρ , de telle sorte que la probabilité que la densité locale soit différente de la densité moyenne tende vers zéro exponentiellement dans la limite thermodynamique.

Pour un système à l'équilibre thermodynamique, la probabilité $P_v(\hat{\rho})$ peut être calculée à partir de la mesure de Boltzmann-Gibbs :

$$P_v(\hat{\rho}) = \frac{1}{Z_V(\rho)} \sum_k \mathbb{1}_v(\hat{\rho}) \mathbb{1}_{V-v}(1 - \hat{\rho}) e^{-\frac{1}{kT} (E_k^{(v)} + E_k^{(V-v)} + E_k^{(int)})}, \quad (2.19)$$

où la fonction $\mathbb{1}_v(\hat{\rho})$ (respectivement $\mathbb{1}_{V-v}(1 - \hat{\rho})$) est égale à 1 si la densité de particules dans v (resp. $V - v$) est égale à $\hat{\rho}$ (resp. $1 - \hat{\rho}$), et à 0 sinon. On a décomposé l'énergie d'un micro-état k du système en la somme d'une énergie interne au sous-système v , d'une énergie interne à V privé de son sous-système v , et d'une énergie d'interaction entre v et le reste du système V . Pour un système avec des interactions à courte portée (en particulier, loin de tout point critique), l'énergie d'interaction est un terme de surface, négligeable devant $E_k^{(v)}$. On peut alors effectuer la somme sur les micro-états en sommant de manière indépendante sur les variables internes à v et sur celles internes à $V - v$, et on obtient

$$P_v(\hat{\rho}) = \frac{Z_v(\hat{\rho}) Z_{V-v} \left(\frac{N-n}{V-v} \right)}{Z_V(\rho)}. \quad (2.20)$$

Le développement au premier ordre en v/V du logarithme de l'expression précédente, divisé par le volume v , donne alors l'expression de la fonction de grandes déviations de la densité en fonction de l'énergie libre par unité de volume

$$f(\hat{\rho}) = \frac{kT}{v} \log Z_v(\hat{\rho}). \quad (2.21)$$

On trouve finalement la relation suivante entre l'énergie libre et la fonction de grandes déviations de la densité :

$$H(\hat{\rho}) = \frac{f(\hat{\rho}) - f(\rho) - (\hat{\rho} - \rho)f'(\rho)}{kT}. \quad (2.22)$$

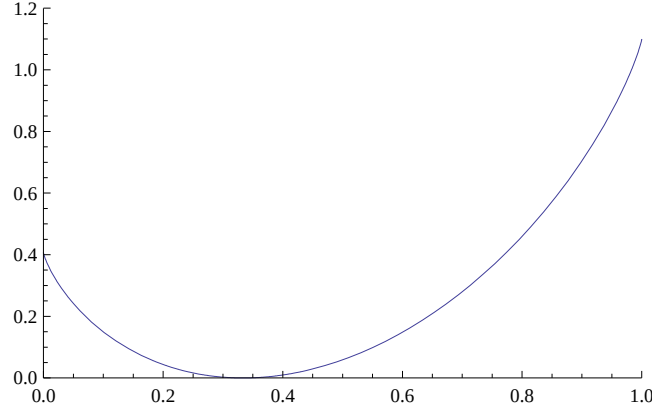


FIG. 2.5 – Fonction de grandes déviations de la densité locale $H(\hat{\rho})$ dans le modèle d'exclusion asymétrique sur un anneau, pour une densité moyenne $\rho = 1/3$.

2.3.2 Modèle sur un anneau

À partir de la mesure stationnaire uniforme pour le système sur un anneau, on peut calculer exactement les fluctuations de la densité locale de particules dans l'état stationnaire. On considère un segment de taille $l \gg 1$ dans le système, mais petit par rapport à la longueur totale L . On appelle $\hat{\rho}$ la densité de particules contenues dans le segment l , c'est-à-dire le nombre de particules contenues dans ce segment divisé par l . La densité locale $\hat{\rho}$ est une variable aléatoire fluctuant dans le temps autour de sa valeur moyenne $\rho = n/L$. On s'intéresse à la distribution de $\hat{\rho}$ (la probabilité que $\hat{\rho}$ prenne une certaine valeur) notée $P(\hat{\rho})$. La fonction $P(\hat{\rho})$ peut être calculée exactement. Il suffit de compter le nombre de façons de placer $\hat{\rho}l$ particules sur l sites et $\rho L - \hat{\rho}l$ sur les $L - l$ sites restants :

$$P(\hat{\rho}) = \frac{\binom{l}{\hat{\rho}l} \binom{L-l}{\rho L - \hat{\rho}l}}{\binom{L}{\rho L}}. \quad (2.23)$$

Dans la limite d'un grand système (L et l tendant vers l'infini, en gardant $l \ll L$), $P(\hat{\rho})$ se comporte comme

$$P(\hat{\rho}) \sim e^{-H(\hat{\rho})l}, \quad (2.24)$$

où H est la fonction de grandes déviations de la densité. Comme dans le cas d'un modèle à l'équilibre thermodynamique, il s'agit d'une fonction positive s'annulant uniquement en $\hat{\rho} = \rho$ de telle sorte que $P(\hat{\rho})$ tende vers zéro dans la limite thermodynamique si $\hat{\rho} \neq \rho$. Utilisant la formule de Stirling sur l'expression exacte (2.23), on obtient

$$H(\hat{\rho}) = \hat{\rho} \log \left(\frac{\hat{\rho}}{\rho} \right) + (1 - \hat{\rho}) \log \left(\frac{1 - \hat{\rho}}{1 - \rho} \right). \quad (2.25)$$

On trouve une fonction $H(\hat{\rho})$ convexe, positive, qui s'annule bien, ainsi que sa dérivée, en $\hat{\rho} = \rho$. On a représenté la fonction H figure 2.5 pour une densité moyenne $\rho = 1/3$.

Il est possible de généraliser la notion de fonction de grandes déviations de la densité pour s'intéresser à la probabilité d'un profil de densité $\{\hat{\rho}(u)\}$ dans l'état stationnaire, tel que pour chaque valeur de u comprise entre 0 et 1, $\hat{\rho}(u)$ est la densité locale autour du site $i = \lfloor Lu \rfloor$. On découpe pour cela le système en k boîtes de longueur $l = L/k$. La probabilité d'avoir une densité de particules $\hat{\rho}_1$ dans la première boîte, $\hat{\rho}_2$ dans la deuxième boîte, $\dots$, $\hat{\rho}_k$ dans la k -ième boîte s'écrit alors

$$P(\hat{\rho}_1, \dots, \hat{\rho}_k) = \mathbb{1}_{\hat{\rho}_1 + \dots + \hat{\rho}_k = k\rho} \times \frac{\binom{l}{\hat{\rho}_1 l} \binom{l}{\hat{\rho}_2 l} \cdots \binom{l}{\hat{\rho}_k l}}{\binom{L}{\rho L}}. \quad (2.26)$$

Les coefficients du binôme au numérateur comptent le nombre de façons de placer $n_j = \hat{\rho}_j l$ particules dans la j -ième boîte, tandis que le coefficient du binôme au dénominateur est simplement le nombre total de configurations possibles avec $n = \rho L$ particules. La conservation du nombre de particules impose la contrainte suivante sur les $\hat{\rho}_j$:

$$\sum_{j=1}^k \hat{\rho}_j = k\rho . \quad (2.27)$$

Dans la limite où L et l tendent vers l'infini avec $k = L/l$ fixé, l'utilisation de la formule de Stirling et de la relation de conservation du nombre de particules donne

$$P(\hat{\rho}_1, \dots, \hat{\rho}_k) \sim e^{-\frac{L}{k} \sum_{j=1}^k \left[\hat{\rho}_j \log\left(\frac{\hat{\rho}_j}{\rho}\right) + (1-\hat{\rho}_j) \log\left(\frac{1-\hat{\rho}_j}{1-\rho}\right) \right]} . \quad (2.28)$$

Dans la limite $k \rightarrow \infty$, les $\hat{\rho}_j$ définissent un profil de densité $\{\hat{\rho}(u)\}$, et la somme de Riemann sur j devient une intégrale. Pour un profil de densité de valeur moyenne

$$\int_0^1 du \hat{\rho}(u) = \rho , \quad (2.29)$$

on obtient alors

$$P(\{\hat{\rho}(u)\}) \sim e^{-L\mathcal{H}(\{\hat{\rho}(u)\})} , \quad (2.30)$$

où la fonctionnelle de grandes déviations de la densité $\mathcal{H}(\{\hat{\rho}(u)\})$ s'écrit

$$\mathcal{H}(\{\hat{\rho}(u)\}) = \int_0^1 du \left[\hat{\rho}(u) \log\left(\frac{\hat{\rho}(u)}{\rho}\right) + (1-\hat{\rho}(u)) \log\left(\frac{1-\hat{\rho}(u)}{1-\rho}\right) \right] = \int_0^1 du H(\hat{\rho}(u)) . \quad (2.31)$$

La fonction H étant positive et s'annulant uniquement en $\hat{\rho} = \rho$, le profil de densité le plus probable est le profil constant $\rho(u) = \rho$. Tous les autres profils ont une probabilité tendant vers zéro dans la limite d'un grand système.

On note que l'expression que nous venons de trouver pour $\mathcal{H}(\{\hat{\rho}(u)\})$ est locale, en le sens que si l'on décompose le système en deux sous-systèmes disjoints A et B avec des profils de densité $\hat{\rho}_A(u)$ pour $u \in A$ et $\hat{\rho}_B(u)$ pour $u \in B$, alors les fonctionnelles de grandes déviations de la densité définies sur A et B par

$$\mathcal{H}_A(\{\hat{\rho}_A(u)\}) = \int_{u \in A} du H(\hat{\rho}_A(u)) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_B(\{\hat{\rho}_B(u)\}) = \int_{u \in B} du H(\hat{\rho}_B(u)) \quad (2.32)$$

vérifient la relation $\mathcal{H}(\{\hat{\rho}(u)\}) = \mathcal{H}_A(\{\hat{\rho}_A(u)\}) + \mathcal{H}_B(\{\hat{\rho}_B(u)\})$. En particulier, la probabilité d'observer le profil de densité $\{\hat{\rho}(u)\}$ est égale au produit des probabilités d'observer les profils $\{\hat{\rho}_A(u)\}$ et $\{\hat{\rho}_B(u)\}$, comme dans le cas des systèmes à l'équilibre thermodynamique [19]. Nous allons voir que ce n'est plus le cas pour le modèle d'exclusion ouvert.

2.3.3 Modèle ouvert

Dans le cas du modèle d'exclusion ouvert, les fluctuations de la densité peuvent encore être calculées, en utilisant l'expression des probabilités stationnaires par l'Ansatz matriciel. Dans [68, 69], Derrida, Lebowitz et Speer ont calculé la fonctionnelle de grandes déviations du profil de densité pour le modèle symétrique. Le résultat a ensuite été généralisé au modèle asymétrique [70, 71, 72].

On considérera ici le modèle symétrique avec des taux $p = q = 1$ dans l'intérieur du système, et des taux α, β, γ et δ sur les bords. La densité moyenne $\rho(u)$ près du site $i = \lfloor Lu \rfloor$ est donnée pour ce modèle par [73, 19]

$$\rho(u) = (1-u)\rho_a + u\rho_b , \quad (2.33)$$

où $\rho_a = \alpha/(\alpha + \gamma)$ et $\rho_b = \delta/(\beta + \delta)$ peuvent être interprétés comme les densités des réservoirs. Quand $\alpha\beta = \gamma\delta$, le modèle vérifie le bilan détaillé et les densités ρ_a et ρ_b sont égales. Dans ce cas, l'état stationnaire du système est un état d'équilibre thermodynamique. Par contre, quand ρ_a et ρ_b sont différents, l'état stationnaire est un état hors d'équilibre.

Comme pour le modèle sur un anneau, la probabilité d'un profil de densité $\{\hat{\rho}(u)\}$ peut s'écrire sous la forme

$$P(\{\hat{\rho}(u)\}) \sim e^{-L\mathcal{H}(\{\hat{\rho}(u)\})}, \quad (2.34)$$

où $\mathcal{H}(\{\hat{\rho}(u)\})$ est la fonctionnelle de grandes déviations de la densité. Elle est égale à [68, 69, 19]

$$\mathcal{H}(\{\hat{\rho}(u)\}) = \int_0^1 du \left[\hat{\rho}(u) \log \left(\frac{\hat{\rho}(u)}{F(u)} \right) + (1 - \hat{\rho}(u)) \log \left(\frac{1 - \hat{\rho}(u)}{1 - F(u)} \right) + \log \left(\frac{F'(u)}{\rho_b - \rho_a} \right) \right], \quad (2.35)$$

où F est la solution monotone de l'équation différentielle

$$\hat{\rho}(u) = F(u) + \frac{F(u)(1 - F(u))F''(u)}{F'(u)^2}, \quad (2.36)$$

avec les conditions aux bords $F(0) = \rho_a$ et $F(1) = \rho_b$. La fonction $\mathcal{H}(\{\hat{\rho}(u)\})$ est positive quelle que soit le profil $\{\hat{\rho}(u)\}$, et s'annule seulement pour le profil moyen $\{\rho(u)\}$. La probabilité d'un profil $\{\hat{\rho}(u)\} \neq \{\rho(u)\}$ devient donc nulle quand la taille du système tend vers l'infini.

L'expression précédente pour $\mathcal{H}(\{\hat{\rho}(u)\})$ est non locale : en effet, $F(u)$ dépend des tous les $\hat{\rho}(v)$ pour $v \in [0, 1]$. La fonction F peut être développée perturbativement autour de $\rho_a = \rho_b$. À l'ordre 2 en $\rho_a - \rho_b$, on obtient alors pour la fonctionnelle de grandes déviations de la densité

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\{\hat{\rho}(u)\}) &= \int_0^1 du \left[\hat{\rho}(u) \log \left(\frac{\hat{\rho}(u)}{\rho(u)} \right) + (1 - \hat{\rho}(u)) \log \left(\frac{1 - \hat{\rho}(u)}{1 - \rho(u)} \right) \right] \\ &+ \frac{(\rho_a - \rho_b)^2}{\rho_a^2(1 - \rho_a)^2} \int_0^1 du \int_u^1 dv [u(1 - v)(\hat{\rho}(u) - \rho(u))(\hat{\rho}(v) - \rho(v))] + \mathcal{O}((\rho_a - \rho_b)^3). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Sur cette expression, la non localité de $\mathcal{H}(\{\hat{\rho}(u)\})$ est encore plus apparente.

2.4 Valeur moyenne du courant

Pour un système dans un état stationnaire hors d'équilibre, une quantité intéressante est le courant macroscopique qui s'écoule dans le système. À chaque mouvement d'une particule, on associe un courant instantané de $+1$ si la particule avance et de -1 si elle recule. Le courant total intégré au temps t , noté Y_t , est alors défini comme la somme des courants instantanés pour tous les mouvements de particules entre les instants 0 et t . Si le système se trouve dans l'état stationnaire, le courant intégré croît proportionnellement à t , en moyenne sur toutes les réalisations du processus de Markov. On a donc

$$\langle Y_t \rangle = J \times t, \quad (2.38)$$

où la constante J est appelée valeur moyenne du courant total. Comme le courant est conservé dans l'état stationnaire, J est aussi égal à L fois la valeur moyenne $J_{i \rightarrow i+1}$ du courant de particules entre deux sites arbitraires i et $i+1$.

Nous allons maintenant voir que la connaissance de la mesure stationnaire permet de calculer la valeur moyenne du courant. Si l'on note τ_i le nombre d'occupation du site i ($\tau_i = 0$ si le site i est vide et $\tau_i = 1$ si le site i est occupé), alors la variation dY_t de Y_t pendant un intervalle de temps infinitésimal dt est donnée en moyenne par

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \langle dY_t \rangle &= \frac{J}{L} dt = J_{1 \rightarrow 2} dt = 1 \times p dt P(\tau_1 = 1, \tau_2 = 0) + (-1) \times q dt P(\tau_1 = 0, \tau_2 = 1) \\ &= p \langle \tau_1(1 - \tau_2) \rangle - q \langle (1 - \tau_1)\tau_2 \rangle. \end{aligned} \quad (2.39)$$

La valeur moyenne du courant s'exprime donc à partir de fonctions de corrélation des variables τ_i à temps égaux, et peut ainsi être calculé si l'on connaît les probabilités stationnaires. Par contre, les fluctuations du courant autour de la valeur moyenne J , qui s'expriment en fonction des valeurs moyennes des puissances de Y_t , ne peuvent pas être obtenues en considérant uniquement la mesure stationnaire du modèle d'exclusion. Elles font en effet intervenir des fonctions de corrélation à des temps inégaux. Par exemple, la valeur moyenne de la variation de Y_t^2 est donnée par

$$\frac{1}{L} \langle d(Y_t)^2 \rangle = \frac{1}{L} \langle 2Y_t dY_t \rangle = 2p \langle \tau_1(1 - \tau_2)Y_t \rangle - 2q \langle (1 - \tau_1)\tau_2 Y_t \rangle, \quad (2.40)$$

et Y_t fait intervenir les τ_i à tous les temps antérieurs à t . Nous verrons plus loin qu'il est cependant possible de calculer ces fluctuations du courant en considérant une déformation de l'équation maîtresse.

2.4.1 Modèle sur un anneau

Dans le cas du modèle sur un anneau, toutes les configurations du système ont la même probabilité. La probabilité d'avoir une particule au site 1 et pas de particule au site 2, égale à la probabilité d'avoir une particule au site 2 et pas de particule au site 1, est donnée par le nombre de façons de placer $n - 1$ particules sur les $L - 2$ autres sites, multiplié par la probabilité d'une configuration. On trouve donc

$$J_{1-2} = (p - q) \frac{\binom{L-2}{n-1}}{\binom{L}{n}}, \quad (2.41)$$

et donc pour le courant total

$$J = L \times J_{1-2} = (p - q) \frac{n(L - n)}{L - 1}. \quad (2.42)$$

Dans la limite d'un système de grande taille $L \rightarrow \infty$, avec une densité de particules $\rho = n/L$ fixée, l'expression de la valeur moyenne du courant prend la forme

$$\frac{J}{p} \sim (p - q)\rho(1 - \rho)L. \quad (2.43)$$

Cette expression est proportionnelle à l'asymétrie $p - q$, et dépend de la densité uniquement par le facteur $\rho(1 - \rho)$. Si ρ est proche de zéro, la valeur moyenne du courant est faible à cause du faible nombre de particules qui parcourt le système. Si ρ est proche de un, la valeur moyenne du courant est encore faible, cette fois-ci à cause de la contrainte d'exclusion qui empêche les particules qui ne se trouvent pas sur les bords d'un amas de particules de se déplacer.

2.4.2 Modèle ouvert

Pour le modèle ouvert, la valeur moyenne du courant est plus compliquée à calculer car la mesure stationnaire n'est pas uniforme. Dans le cas particulier du modèle ouvert totalement asymétrique avec des taux d'entrée et de sortie α et β égaux à un, la valeur moyenne du courant a été calculée dans [66] à partir de relations de récurrence vérifiées par les probabilités stationnaires. Le cas du modèle totalement asymétrique avec des taux α et β quelconques a ensuite été résolu, avec les relations de récurrence des probabilités stationnaires [74], et en utilisant l'Ansatz matriciel [65]. Le cas plus général du modèle ouvert partiellement asymétrique a ensuite été traité dans [75, 76, 77].

Au chapitre 8 nous expliquerons le calcul de la valeur moyenne du courant dans le cas du modèle totalement asymétrique. Nous montrerons que dans la limite d'un système de grande

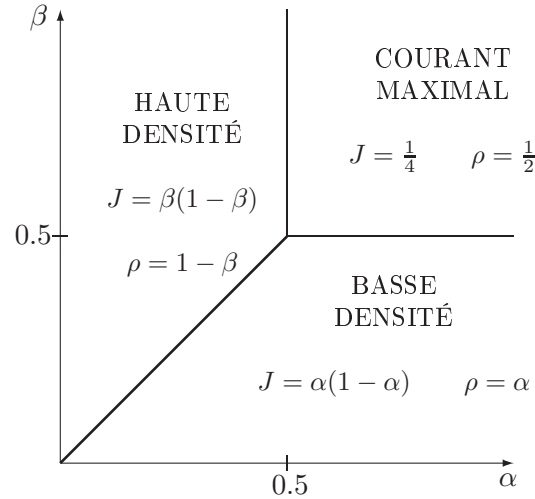


FIG. 2.6 – Diagramme de phase du modèle d'exclusion totalement asymétrique ouvert dans l'espace des paramètres α et β . Les deux lignes en trait fin correspondent à des transitions de phase du second ordre séparant la phase de courant maximal des phases de haute et basse densité. La ligne en trait épais correspond à la transition de phase du premier ordre séparant la phase de haute densité et la phase de basse densité.

taille, le courant moyen entre deux sites voisins prend la valeur suivante

$$J_{1 \rightarrow 2} \sim \begin{cases} 1/4 & \text{si } 1/2 < \alpha \text{ et } 1/2 < \beta \\ \alpha(1 - \alpha) & \text{si } \alpha < 1/2 \text{ et } \alpha < \beta \\ \beta(1 - \beta) & \text{si } \beta < 1/2 \text{ et } \beta < \alpha \end{cases} . \quad (2.44)$$

On constate que le modèle totalement asymétrique, qui dépend de deux paramètres α et β , présente trois phases correspondant à trois expressions différentes pour la valeur moyenne du courant. On a représenté le diagramme de phase en figure 2.6. La phase pour laquelle α et β sont supérieurs à $1/2$ est la phase pour laquelle le courant est maximal. Elle correspond à une densité moyenne égale à $\rho = 1/2$ loin des bords du système. La phase pour laquelle α est inférieur à $1/2$ et à β est la phase de basse densité, dans laquelle le courant est limité par le taux d'entrée α des particules dans le système. Dans cette phase, la densité moyenne est égale à $\alpha < 1/2$ dans l'intérieur du système. Enfin, la phase pour laquelle β est inférieur à $1/2$ et à α est la phase de haute densité, dans laquelle le courant est limité par le taux de sortie β . Dans cette phase, la densité moyenne est égale à $1 - \beta > 1/2$ dans l'intérieur du système.

On note qu'à la transition entre la phase de courant maximal et les phases de haute et basse densité, la valeur moyenne du courant ainsi que la densité moyenne loin des bords sont continues : il s'agit d'une transition de phase du deuxième ordre. Par contre, à la transition entre la phase de haute densité et la phase de basse densité, la valeur moyenne du courant ainsi que celle de la densité sont discontinues : il s'agit alors d'une transition de phase du premier ordre.

Le modèle d'exclusion asymétrique ouvert est un exemple de modèle exhibant des transitions de phase induites par les conditions au bord : la valeur des taux α et β a une influence sur le comportement de tout le système, y compris loin de ses bords. Il s'agit aussi d'un exemple de modèle unidimensionnel avec des interactions à courte portée présentant tout de même des transitions de phase. Ceci n'est possible que parce que le système ne se trouve pas à l'équilibre thermodynamique mais dans un état stationnaire hors d'équilibre pour lequel le système est parcouru par un courant macroscopique.

2.5 Fluctuations du courant

Nous passons dans cette section à l'étude des fluctuations du courant dans le modèle d'exclusion asymétrique. Nous allons écrire l'équation maîtresse pour la probabilité jointe que le système se trouve dans une certaine configuration avec une certaine valeur du courant intégré. Cette équation maîtresse couplera les probabilités pour différentes valeurs du courant. On introduira alors une fonction génératrice sur le courant, qui permettra de découpler les équations et de se ramener à une équation matricielle sur l'espace des configurations. Cette équation matricielle fera intervenir une déformation de la matrice de Markov, dont la valeur propre maximale contient toute l'information sur les fluctuations du courant dans l'état stationnaire.

2.5.1 Équation maîtresse déformée

On peut écrire une équation maîtresse conditionnée à la fois sur la configuration et sur la valeur Y du courant total Y_t défini à la section précédente. L'évolution dans le temps de la probabilité $P_t(\mathcal{C}, Y)$ pour le système de se trouver au temps t dans la configuration $\mathcal{C}$ avec une valeur du courant intégré égale à Y est donné par

$$\frac{dP_t(\mathcal{C}, Y)}{dt} = \sum_{\mathcal{C}' \neq \mathcal{C}} \left[w_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}'}^{(+)} P_t(\mathcal{C}', Y-1) + w_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}'}^{(-)} P_t(\mathcal{C}', Y+1) - w_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}} P_t(\mathcal{C}, Y) \right]. \quad (2.45)$$

Le taux $w_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}'}^{(+)}$ (respectivement $w_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}'}^{(-)}$) correspond aux transitions entre configurations pour lesquelles une particule avance (resp. recule). Contrairement à l'équation maîtresse pour $P_t(\mathcal{C})$, qui s'écrivait simplement comme une équation matricielle sur l'espace des configurations du système, on constate ici que l'équation maîtresse couple les $P_t(\mathcal{C}, Y)$ pour différentes valeurs de Y . On va devoir considérer une fonction génératrice de $P_t(\mathcal{C}, Y)$ sur Y pour pouvoir se ramener à une équation matricielle sur l'espace des configurations. On définit

$$F_t(\mathcal{C}, \gamma) = \sum_{Y=-\infty}^{\infty} e^{\gamma Y} P_t(\mathcal{C}, Y). \quad (2.46)$$

L'équation maîtresse (2.45) pour $P_t(\mathcal{C}, Y)$ se réécrit alors

$$\boxed{\frac{dF_t(\mathcal{C}, \gamma)}{dt} = \sum_{\mathcal{C}' \neq \mathcal{C}} \left[e^{\gamma} w_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}'}^{(+)} F_t(\mathcal{C}', \gamma) + e^{-\gamma} w_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}'}^{(-)} F_t(\mathcal{C}', \gamma) - w_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}} F_t(\mathcal{C}, \gamma) \right]}. \quad (2.47)}$$

On remarque que cette dans équation maîtresse, les $F_t(\mathcal{C}, \gamma)$ pour différentes valeurs de γ se découplent, au prix de l'introduction d'une dépendance en γ dans les taux de transition entre $F_t(\mathcal{C}, \gamma)$ et $F_t(\mathcal{C}', \gamma)$. Comme pour $P_t(\mathcal{C})$, définissant le vecteur des $F_t(\mathcal{C}, \gamma)$ par

$$|F_t(\gamma)\rangle = \sum_{\mathcal{C}} F_t(\mathcal{C}, \gamma) |\mathcal{C}\rangle = \sum_{\mathcal{C}} \sum_{Y=-\infty}^{\infty} e^{\gamma Y} P_t(\mathcal{C}, Y) |\mathcal{C}\rangle, \quad (2.48)$$

et la matrice $M(\gamma)$ par

$$M(\gamma)_{\mathcal{C}\mathcal{C}'} = \begin{cases} e^{\gamma} w_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}'}^{(+)} & \text{si } \mathcal{C} \neq \mathcal{C}', \text{ en avançant une particule} \\ e^{-\gamma} w_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}'}^{(-)} & \text{si } \mathcal{C} \neq \mathcal{C}', \text{ en reculant une particule} \\ - \sum_{\mathcal{C}'' \neq \mathcal{C}} w_{\mathcal{C}'' \leftarrow \mathcal{C}} & \text{si } \mathcal{C} = \mathcal{C}' \end{cases}, \quad (2.49)$$

l'équation maîtresse se réécrit

$$\frac{d}{dt} |F_t(\gamma)\rangle = M(\gamma) |F_t(\gamma)\rangle . \quad (2.50)$$

Partant au temps 0 d'un vecteur $F_0(\gamma)$, on a

$$|F_t(\gamma)\rangle = e^{M(\gamma)t} |F_0(\gamma)\rangle . \quad (2.51)$$

Par abus de langage, on appellera dans la suite $M(\gamma)$ la matrice de Markov déformée du système. Excepté pour $\gamma = 0$, il ne s'agit en fait pas d'une matrice de Markov (la somme sur une colonne de ses coefficients n'est pas nulle).

2.5.2 Cumulants du courant

Par définition de la fonction $F_t(\gamma)$ définie précédemment, on a pour n'importe quelle configuration $\mathcal{C}$

$$\langle \mathcal{C} | F_t(\gamma) \rangle = \langle e^{\gamma Y_t} \rangle . \quad (2.52)$$

La valeur moyenne dans l'équation précédente correspond à la moyenne sur toutes les évolutions stochastiques jusqu'au temps t , si l'on commence au temps 0 en se donnant le vecteur $|F_0(\gamma)\rangle$ (ou, de manière équivalente, tous les $P_0(\mathcal{C}, Y)$). On peut par exemple prendre $|F_0(\gamma)\rangle = |\mathcal{C}_0\rangle$, ce qui correspond à commencer au temps 0 en partant de la configuration $\mathcal{C}_0$ et en fixant par convention le courant total nul à l'instant initial. Aux temps longs, on a aussi

$$\langle \mathcal{C} | F_t(\gamma) \rangle \sim e^{E(\gamma)t} \langle \mathcal{C} | F_0(\gamma) \rangle , \quad (2.53)$$

où $E(\gamma)$ est la valeur propre de partie réelle maximale de la matrice déformée $M(\gamma)$. Aux temps longs, on obtient finalement que

$$\boxed{\langle e^{\gamma Y_t} \rangle \sim e^{E(\gamma)t}} , \quad (2.54)$$

ou plus précisément

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \langle e^{\gamma Y_t} \rangle}{t} = E(\gamma) . \quad (2.55)$$

L'équation précédente indique que la fonction $E(\gamma)$ est en fait la fonction génératrice exponentielle [78, 79] des cumulants du courant E_k dans l'état stationnaire :

$$E(\gamma) = E_1 \gamma + \frac{E_2}{2!} \gamma^2 + \frac{E_3}{3!} \gamma^3 + \frac{E_4}{4!} \gamma^4 + \dots . \quad (2.56)$$

Les dérivées successives de $E(\gamma)$ en $\gamma = 0$ donnent donc les cumulants du courant stationnaire :

$$J = E_1 = E'(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle Y_t \rangle}{t} \quad (2.57)$$

$$D = E_2 = E''(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle Y_t^2 \rangle - \langle Y_t \rangle^2}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle (Y_t - \langle Y_t \rangle)^2 \rangle}{t} \quad (2.58)$$

$$E_3 = E^{(3)}(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle Y_t^3 \rangle - 3\langle Y_t \rangle \langle Y_t^2 \rangle + 2\langle Y_t \rangle^3}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle (Y_t - \langle Y_t \rangle)^3 \rangle}{t} \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} E_4 = E^{(4)}(0) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle Y_t^4 \rangle - 4\langle Y_t \rangle \langle Y_t^3 \rangle - 3\langle Y_t^2 \rangle^2 + 12\langle Y_t \rangle^2 \langle Y_t^2 \rangle - 6\langle Y_t \rangle^4}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle (Y_t - \langle Y_t \rangle)^4 \rangle - 3\langle (Y_t - \langle Y_t \rangle)^2 \rangle^2}{t} . \end{aligned} \quad (2.60)$$

Aux temps longs Y_t/t tend, en moyenne sur toutes les trajectoires possibles des particules, vers une limite finie. Cette limite, que l'on notera J , est la valeur moyenne du courant dans

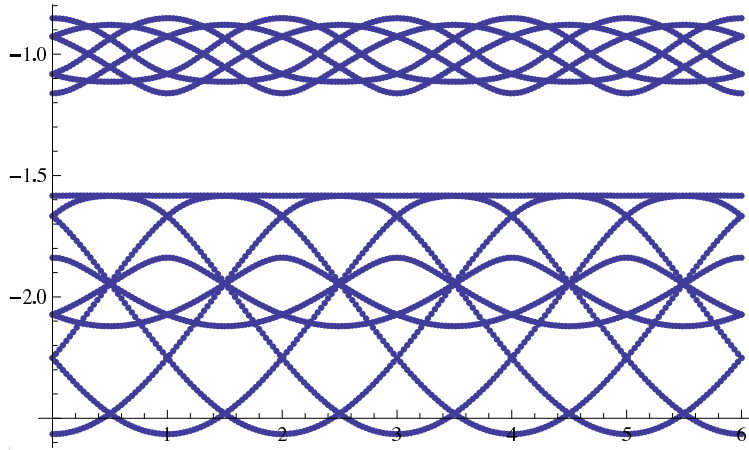


FIG. 2.7 – Partie réelle du spectre de la matrice de Markov déformée pour le modèle totalement asymétrique avec 2 particules sur 6 sites. On a représenté $M(\gamma = -1 + 2i\pi u/L)$ en fonction de u compris entre 0 et L .

l'état stationnaire. Il s'agit aussi du premier cumulants du courant E_1 . Les autres cumulants du courant caractérisent les fluctuations de la variable aléatoire Y_t autour de sa valeur moyenne Jt dans la limite des temps longs. La variance de Y_t croît asymptotiquement comme $D \times t$, où le coefficient D , appelé constante de diffusion, est égal au deuxième cumulants du courant et évalue l'amplitude de la diffusion des particules autour de leur position moyenne. Les cumulants d'ordre plus élevé mesurent la non gaussianité des fluctuations du courant. En particulier, le troisième cumulants donne des informations sur l'asymétrie de la distribution de Y_t , tandis que E_4 renseigne sur l'aplatissement de cette distribution.

Nous verrons aux chapitres 3 et 5 qu'il est possible d'obtenir une expression exacte pour les cumulants du courant du modèle d'exclusion asymétrique, en particulier la constante de diffusion. Le calcul des cumulants du courant reposera sur l'utilisation de l'Ansatz de Bethe, qui est reliée à l'intégrabilité du modèle d'exclusion, et n'est donc pas applicable de manière générale pour un modèle donné de physique statistique. Dans la plupart des modèles, il n'est en effet pas possible d'obtenir une expression exacte pour la constante de diffusion. Cependant, on peut parfois avoir recours à des développements perturbatifs pour la calculer [80].

Pour γ réel, le théorème de Perron-Frobenius assure que la valeur propre de partie réelle maximale de $M(\gamma)$ ne croise aucune autre valeur propre quand γ varie. Ceci assure que la valeur propre de partie réelle maximale de $M(\gamma)$ est analytique en γ au voisinage de l'axe réel. On a représenté figure 2.7 la partie réelle du spectre de $M(\gamma)$ en fonction de la partie imaginaire de γ , pour un système de taille 6 avec 2 particules. On note que pour γ complexe, la valeur propre de partie réelle maximale croise une autre valeur propre, ce qui n'arrive jamais pour γ réel. Numériquement, on constate sur de petits systèmes que le premier croisement a lieu quand la partie imaginaire de γ est égale à $\pm\pi/L$. Ceci implique que la fonction $E(\gamma)$, définie comme la valeur propre de $M(\gamma)$ de partie réelle maximale, n'est pas analytique dans tout le plan complexe mais seulement dans la bande $-\pi/L < \text{Im } \gamma < \pi/L$. En particulier, le prolongement analytique de $E(\gamma)$ hors de ce domaine n'est pas égal à la valeur propre de partie réelle maximale de $M(\gamma)$. La fonction génératrice des cumulants du courant, définie loin de $\gamma = 0$ par prolongement analytique, n'est donc égale à la valeur propre de partie réelle maximale de $M(\gamma)$ que pour γ suffisamment proche de l'axe réel. On continuera cependant à noter ces deux fonctions $E(\gamma)$, car on s'intéressera surtout à leur valeur pour γ réel.

2.5.3 Fonction de grandes déviations du courant

La fonction génératrice des cumulants du courant $E(\gamma)$ est reliée à la fonction de grandes déviations du courant $G(j)$, définie par le comportement aux temps longs de la probabilité que le courant Y_t/t ait une valeur j différente de la valeur moyenne du courant J :

$$P\left(\mathcal{C}, \frac{Y_t}{t} = j\right) \sim e^{-tG(j)} \quad \text{pour } t \rightarrow \infty. \quad (2.61)$$

La fonction $G(j)$ est indépendante de la configuration initiale pour un système de taille finie. D'après la définition de $F_t(\mathcal{C}, \gamma)$, on a en effet

$$F_t(\mathcal{C}, \gamma) = \sum_j e^{j\gamma t} P_t\left(\mathcal{C}, \frac{Y_t}{t} = j\right), \quad (2.62)$$

la somme étant sur toutes les valeurs discrètes de j correspondant à un Y_t entier. Dans la limite $t \rightarrow \infty$, les valeurs possibles pour j deviennent continues, la somme de Riemann sur j devient une intégrale, et on peut utiliser l'expression aux temps longs de la probabilité faisant intervenir $G(j)$. On obtient

$$F_t(\mathcal{C}, \gamma) \sim \int dj e^{t(j\gamma - G(j))}. \quad (2.63)$$

L'intégrale est dominée par la valeur de j qui maximise $j\gamma - G(j)$. Rappelant que pour t grand, $F_t(\mathcal{C}, \gamma)$ croît comme $e^{E(\gamma)t}$, on en déduit que la fonction de grandes déviations du courant $G(j)$ est la transformée de Legendre de la fonction génératrice des cumulants du courant $E(\gamma)$:

$$\boxed{E(\gamma) = \max_j (j\gamma - G(j))}. \quad (2.64)$$

La fonction $E(\gamma)$ est donc convexe comme il s'agit d'une transformée de Legendre. On peut montrer que la fonction $G(j)$ est aussi convexe [81]. On peut en effet écrire la probabilité $P(Y_t, \mathcal{C}_t | Y_0, \mathcal{C}_0)$ d'être dans la configuration $\mathcal{C}_t$ avec un courant Y_t à l'instant t en étant parti de la configuration $\mathcal{C}_0$ à l'instant initial avec un courant Y_0 sous la forme

$$P(Y_t, \mathcal{C}_t | Y_0, \mathcal{C}_0) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} \sum_{\mathcal{C}_\tau} P(Y_t, \mathcal{C}_t | Y_t - y, \mathcal{C}_\tau) P(y, \mathcal{C}_\tau | Y_0, \mathcal{C}_0), \quad (2.65)$$

où l'on somme sur toutes les configurations $\mathcal{C}_\tau$ au temps intermédiaire τ compris entre 0 et t . Les probabilités étant positives, on a alors la majoration

$$P(Y_t, \mathcal{C}_t | Y_0, \mathcal{C}_0) \geq P(Y_t, \mathcal{C}_t | Y_t - y, \mathcal{C}_\tau) P(y, \mathcal{C}_\tau | Y_0, \mathcal{C}_0). \quad (2.66)$$

On prend maintenant la limite des grands temps $t \rightarrow \infty$ en gardant $\tau/t = \lambda$, $y/\tau = j_1$ et $(Y_t - y)/(t - \tau) = j_2$ fixés. On peut alors écrire, en introduisant la fonction de grandes déviations du courant :

$$e^{-tG(\lambda j_1 + (1-\lambda)j_2)} \geq e^{-t(\lambda G(j_1) + (1-\lambda)G(j_2))}, \quad (2.67)$$

d'où il découle que $G(j)$ est une fonction convexe : $G(\lambda j_1 + (1-\lambda)j_2) \leq \lambda G(j_1) + (1-\lambda)G(j_2)$. Sa transformée de Legendre $E(\gamma)$ est donc aussi convexe :

$$E(\lambda \gamma_1 + (1-\lambda)\gamma_2) = \max_j [j(\lambda \gamma_1 + (1-\lambda)\gamma_2) - G(j)] \leq \lambda E(\gamma_1) + (1-\lambda)E(\gamma_2). \quad (2.68)$$

2.5.4 Calcul des fluctuations du courant

Dans le cas du système sur un anneau comportant une seule particule, nous verrons à la section 3.2.1 du chapitre 3 qu'il est possible de calculer exactement la probabilité que le courant intégré ait une valeur Y au temps t . Le résultat, qui s'exprime comme une fonction de Bessel, permet alors d'obtenir une expression exacte pour la fonction de grandes déviations du courant $G(j)$ en considérant la limite $t \rightarrow \infty$. On note que même dans ce cas, l'expression de la fonction $G(j)$ n'est pas complètement élémentaire.

Dans le cas général du modèle d'exclusion comportant plusieurs particules en interaction, le calcul de la fonction de grandes déviations du courant n'est pas possible de manière aussi directe. Une méthode plus simple en général consiste à chercher à calculer sa transformée de Legendre, la fonction génératrice des cumulants du courant $E(\gamma)$. Celle-ci a en effet une expression plus simple que la fonction de grandes déviations du courant dans le cas du système à une particule. La fonction complète $E(\gamma)$ est cependant difficile à calculer en général. On peut alors se contenter de calculer le début de son développement autour de $\gamma = 0$, qui donne accès aux premiers cumulants du courant. Les résultats exacts obtenus par le passé pour les fluctuations du courant dans le modèle d'exclusion asymétrique ont été dérivés en utilisant principalement deux méthodes dans le cas d'un système fini : l'Ansatz matriciel et l'Ansatz de Bethe.

Une extension de l'Ansatz matriciel utilisé pour exprimer la probabilité des configurations dans l'état stationnaire a permis de calculer la constante de diffusion du modèle totalement asymétrique. Pour le modèle sur un anneau, elle a été obtenue par Derrida, Evans et Mukamel [82], pour un système ouvert par Derrida, Evans et Mallick [83], et pour le modèle avec une particule de seconde espèce sur un anneau par Boutillier, François, Mallick et Mallick [84]. Dans le cas du modèle partiellement asymétrique sur un anneau, la constante de diffusion a aussi été calculée [85], par Derrida et Mallick. Elle s'exprime en fonction de l'asymétrie x sous la forme

$$D = \frac{2p(1-x)L}{L-1} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{1+x^k}{1-x^k} \frac{\binom{L}{n+k} \binom{L}{n-k}}{\binom{L}{n}^2}, \quad (2.69)$$

pour un système de taille L finie.

Une autre méthode pour calculer les premiers cumulants du courant repose sur l'utilisation de l'Ansatz de Bethe, comme nous le verrons aux chapitres 3, 5 et 6. L'Ansatz de Bethe permet en effet de diagonaliser la matrice de Markov déformée $M(\gamma)$. Pour le modèle totalement asymétrique, une expression exacte en taille finie pour tous les cumulants du courant a été obtenue par Derrida et Lebowitz dans [86] en utilisant une propriété de découplage des équations de Bethe. Ce calcul a ensuite été généralisé pour le modèle partiellement asymétrique par Lee et Kim [87] dans la limite d'un système de grande taille, avec une asymétrie ne s'annulant pas quand $L \rightarrow \infty$. L'utilisation de l'Ansatz de Bethe a aussi permis le calcul de la constante de diffusion pour le modèle sur un anneau avec une particule de seconde classe [88] par Derrida et Evans. Ce calcul a ensuite été généralisé par Cantini dans [89] à un nombre arbitraire de particules de seconde classe.

Une partie de cette thèse est consacrée au calcul des cumulants du courant pour le modèle partiellement asymétrique sur un anneau, généralisant l'expression exacte (2.69) obtenue pour la constante de diffusion dans [85], ainsi que les expressions exactes pour tous les cumulants du courant dans le modèle totalement asymétrique [86]. Utilisant l'Ansatz de Bethe, nous montrerons comment calculer les premiers cumulants du courant [1, 2]. Notre méthode repose sur la réécriture des équations de Bethe sous la forme d'une équation fonctionnelle. Dans la limite où l'asymétrie est d'ordre l'inverse de la taille du système (modèle faiblement asymétrique), nous obtiendrons tous les cumulants du courant [3]. Enfin, nous détaillerons une conjecture pour tous les cumulants du courant [4], généralisant au modèle partiellement asymétrique les expressions exactes en taille finie obtenues dans [86].

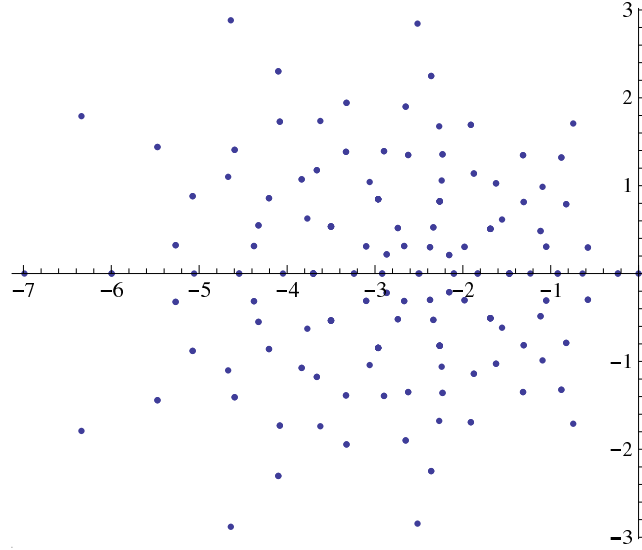


FIG. 2.8 – Spectre de la matrice de Markov du modèle totalement asymétrique avec $n = 5$ particules sur $L = 10$ sites.

2.5.5 Symétries naturelles du modèle d'exclusion

On note $\text{Sp } M(\gamma)$ le spectre de la matrice $M(\gamma)$ (*i.e.* l'ensemble de ses valeurs propres). La matrice $M(\gamma)$ étant non symétrique, ses valeurs propres ne sont en général pas toutes réelles. Néanmoins, si le paramètre γ est réel, la matrice $M(\gamma)$ l'est aussi, et son spectre est donc invariant par conjugaison complexe. Les valeurs propres non réelles de $M(\gamma)$ viennent ainsi par paires de mêmes parties réelles mais de parties imaginaires opposées. À titre d'exemple, on a représenté figure 2.8 le spectre de la matrice de Markov (non déformée) pour le système totalement asymétrique sur un anneau de 10 sites comportant 5 particules.

Dans le reste de cette section, nous allons nous restreindre au cas du modèle sur un anneau. Dans ce cas, la matrice de Markov déformée $M(\gamma)$ dépend du paramètre γ , mais aussi des taux p et q et du nombre de particules n contenues dans le système. Nous écrirons ici explicitement la dépendance de la matrice déformée en ces quatre paramètres, sous la forme $M(\gamma, p, q, n)$. On peut alors considérer le spectre de cette matrice, $\text{Sp } M(\gamma, p, q, n)$ comme une fonction de quatre variables prenant pour valeurs des ensembles de $\binom{L}{n}$ nombres complexes. Nous allons nous intéresser aux symétries de cette fonction, c'est à dire aux transformations $\gamma \rightarrow \gamma', p \rightarrow p', q \rightarrow q', n \rightarrow n'$ qui la laissent invariante : $\text{Sp } M(\gamma, p, q, n) = \text{Sp } M(\gamma', p', q', n')$. Ces symétries seront aussi des symétries de la valeur propre de plus grande partie réelle $E(\gamma, p, q, n)$.

Symétrie entre les déplacements vers l'avant et vers l'arrière

On considère la transformation $p \rightarrow q, q \rightarrow p, \gamma \rightarrow -\gamma$, qui correspond à changer le sens dans lequel les particules se déplacent. Après cette transformation, les particules se déplacent vers l'arrière avec un taux p et vers l'avant avec un taux q , tandis que le courant est compté positif pour les déplacements vers l'arrière et négatif pour les déplacements vers l'avant. Cette transformation des paramètres du système revient donc à transformer une configuration $\mathcal{C} = (\tau_1, \dots, \tau_L)$ en la configuration renversée $\mathcal{C}_R = (\tau_L, \dots, \tau_1)$. Si l'on appelle R l'opérateur transformant le vecteur $|\mathcal{C}\rangle$ en le vecteur $|\mathcal{C}_R\rangle$, qui vérifie $R^2 = \mathbb{1}$, on a donc

$$M(-\gamma, q, p, n) = RM(\gamma, p, q, n)R. \quad (2.70)$$

On note en particulier que les matrices $M(\gamma, p, q, n)$ et $M(-\gamma, q, p, n)$ sont similaires, et qu'elles ont donc le même spectre. Cette invariance du spectre se traduit alors sur la fonction génératrice

des cumulants du courant par

$$\boxed{E(\gamma, p, q, n) = E(-\gamma, q, p, n)} . \quad (2.71)$$

L'équation précédente relie la fonction $E(\gamma)$ pour un système avec des taux p et q à la fonction $E(\gamma)$ pour un système avec des taux q et p . Pour un système symétrique ($p = q$), l'équation (2.71) devient une relation de symétrie de la fonction $E(\gamma)$, qui indique que cette fonction est paire.

La relation (2.71) implique que les cumulants pairs du courant ($D, E_4, \dots$) sont invariants par l'échange de p et q , tandis que les cumulants impairs changent de signe par l'échange de p et q . Pour le système symétrique, elle indique que seuls les cumulants pairs du courant sont non nuls.

Par une transformée de Legendre par rapport à γ , la relation (2.71) donne l'équation suivante pour la fonction de grandes déviations du courant :

$$G(j, p, q, n) = G(-j, q, p, n) . \quad (2.72)$$

Pour un système symétrique, celle-ci indique que la fonction $G(j)$ est paire, et que la probabilité d'observer une certaine valeur j du courant est égale à la probabilité d'observer la valeur $-j$.

Symétrie de Gallavotti-Cohen

On considère la transformation $\gamma \rightarrow \log(q/p) - \gamma$ des paramètres du système. Cette transformation a la même action sur la matrice $M(\gamma, p, q, n)$ que la transformation $p \rightarrow q, q \rightarrow p, \gamma \rightarrow -\gamma$ qui a été présentée précédemment, car cette matrice ne dépend de p, q et e^γ qu'à travers $p + q$ (éléments de matrice diagonaux), et pe^γ et $qe^{-\gamma}$ (éléments de matrice non diagonaux). On peut donc écrire

$$M(\log(q/p) - \gamma, p, q, n) = RM(\gamma, p, q, n)R = M(-\gamma, q, p, n) . \quad (2.73)$$

Comme précédemment, le spectre de $M(\log(q/p) - \gamma, p, q, n)$ est égal au spectre de $M(\gamma, p, q, n)$, et la fonction génératrice des cumulants du courant obéit à la symétrie

$$\boxed{E(\gamma, p, q, n) = E(\log(q/p) - \gamma, p, q, n)} . \quad (2.74)$$

La fonction $E(\gamma)$ est donc symétrique par rapport à la droite $\gamma = \log \sqrt{q/p}$. Par une transformée de Legendre par rapport à γ , la relation précédente implique aussi une symétrie pour la fonction de grandes déviations du courant. On trouve

$$G(j, p, q, n) = j \log(q/p) + G(-j, p, q, n) , \quad (2.75)$$

qui indique que la fonction $G'(j) - \log \sqrt{q/p}$ est impaire.

La symétrie (2.75) de la fonction de grandes déviations du courant est un cas particulier de la relation de Gallavotti-Cohen, qui est valide pour tous les processus de Markov avec un nombre fini de configurations [90].

Symétrie $\gamma \rightarrow \gamma + 2i\pi/L$

On considère la transformation $\gamma \rightarrow \gamma + 2i\pi/L$. On va montrer que cette transformation préserve le spectre de la matrice de Markov déformée. On définit pour cela l'opérateur U par

$$U|\mathcal{C}\rangle = e^{-\frac{2i\pi}{L} \sum_{i=1}^n x_i} |\mathcal{C}\rangle , \quad (2.76)$$

où les x_i sont les positions des particules dans la configuration $\mathcal{C}$, comptées à partir d'une origine arbitraire sur l'anneau. L'opérateur U est diagonal sur la base des configurations. On peut alors écrire

$$\langle \mathcal{C}' | U^{-1} M(\gamma, p, q, n) U | \mathcal{C} \rangle = e^{\frac{2i\pi}{L} \sum_{i=1}^n (x'_i - x_i)} \langle \mathcal{C}' | M(\gamma, p, q, n) | \mathcal{C} \rangle, \quad (2.77)$$

où les x_i (respectivement x'_i) sont les positions des particules dans la configuration $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}'$). Si l'on passe de la configuration $\mathcal{C}$ à la configuration $\mathcal{C}'$ en avançant une particule, alors $\langle \mathcal{C}' | M(\gamma, p, q, n) | \mathcal{C} \rangle = p e^\gamma$ et $\sum_{i=1}^n (x'_i - x_i) \equiv 1$ modulo L . Si l'on passe de la configuration $\mathcal{C}$ à la configuration $\mathcal{C}'$ en reculant une particule, alors $\langle \mathcal{C}' | M(\gamma, p, q, n) | \mathcal{C} \rangle = q e^{-\gamma}$ et $\sum_{i=1}^n (x'_i - x_i) \equiv -1$ modulo L . Enfin, si $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$, alors $\langle \mathcal{C}' | M(\gamma, p, q, n) | \mathcal{C} \rangle$ est indépendant de γ . On constate donc que la transformation de similitude de $M(\gamma, p, q, n)$ par l'opérateur U revient à transformer γ en $\gamma + 2i\pi/L$:

$$M(\gamma + 2i\pi/L, p, q, n) = U^{-1} M(\gamma, p, q, n) U. \quad (2.78)$$

Le spectre de la matrice $M(\gamma + 2i\pi/L, p, q, n)$ est donc identique au spectre de la matrice $M(\gamma, p, q, n)$, ce qui implique la symétrie suivante sur la valeur propre de partie réelle maximale du spectre :

$$\boxed{E(\gamma, p, q, n) = E(\gamma + 2i\pi/L, p, q, n)}. \quad (2.79)$$

Cette invariance du spectre est reliée à la structure en anneau de taille L du graphe de la dynamique, présentée section 2.1.2. Plus généralement, pour un processus de Markov pour lequel il existe une quantité Y comme celle définie à la fin de la section 2.1.2, on construit une matrice déformée $M(\gamma)$ en remplaçant les éléments de matrice non diagonaux $w_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}}$ de la matrice de Markov par $w_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}} \times e^{\gamma \Delta Y_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}}}$. Alors, l'opérateur U défini par

$$U | \mathcal{C} \rangle = e^{-\frac{2i\pi}{K} Y(\mathcal{C})} | \mathcal{C} \rangle, \quad (2.80)$$

ajoute $2i\pi/K$ à γ :

$$M(\gamma + 2i\pi/K) = U^{-1} M(\gamma) U. \quad (2.81)$$

En particulier, dans le cas du système ouvert à L sites, on a $K = L + 1$. La transformation $\gamma \rightarrow \gamma + 2i\pi/(L + 1)$ préserve donc le spectre de la matrice $M(\gamma)$ du modèle ouvert.

Comme transformer γ en $\gamma + 2i\pi/L$ ne change pas le spectre de la matrice $M(\gamma)$ du modèle d'exclusion sur un anneau, il est naturel de chercher de quelle manière les valeurs propres de la matrice de Markov (non déformée) $M = M(\gamma = 0)$ se transforment en d'autres valeurs propres de M quand on fait varier γ continûment de 0 à $2i\pi/L$. Nous avons étudié ceci par diagonalisation directe de la matrice $M(\gamma)$ pour de petits systèmes, pour γ imaginaire pur compris entre 0 et $2i\pi/L$. On obtient alors des courbes reliant les valeurs propres de la matrice de Markov. On a représenté figure 2.9 le cas d'un système comportant 3 particules sur 6 sites. Sur cet exemple, on constate que $E(\gamma)$ (défini comme la continuation analytique de la valeur propre de partie réelle maximale à partir de $\gamma = 0$) est périodique de période 2π pour le modèle totalement asymétrique, mais n'a plus nécessairement pour période 2π dans le cas partiellement asymétrique.

Symétrie particule-trou

On considère la transformation $n \rightarrow L - n$, qui échange le nombre de particules et le nombre de sites vides. On définit l'opérateur C , transformant une configuration $\mathcal{C} = (\tau_1, \dots, \tau_L)$ en la configuration $\mathcal{C}_C = (1 - \tau_1, \dots, 1 - \tau_L)$, obtenue à partir de $\mathcal{C}$ en remplaçant les sites vides par des sites occupés, et les sites occupés par des sites vides. L'opérateur C vérifie $C^2 = \mathbb{1}$. Comme par la dynamique, une particule qui avance est équivalente à un site vide qui recule, on a la relation

$$M(-\gamma, q, p, L - n) = C M(\gamma, p, q, n) C. \quad (2.82)$$

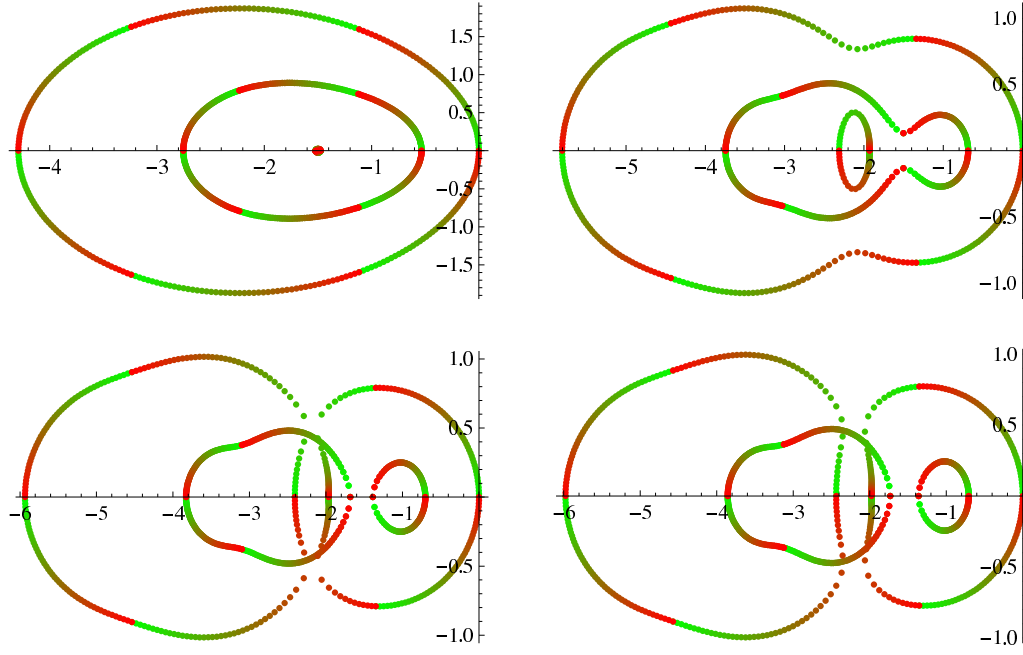


FIG. 2.9 – Spectre de la matrice de Markov déformée $M(\gamma)$ pour un système de 3 particules sur un anneau de $L = 6$ sites. Le paramètre γ est imaginaire pur et varie entre 0 (points verts) et $2i\pi/L$ (points rouges). Le graphe en haut à gauche correspond au modèle totalement asymétrique $p = 1, q = 0$. Les trois autres graphes correspondent à des modèles partiellement asymétriques avec $p = 1$ et $q = 0.35$ (en haut à droite), $q = 0.38$ (en bas à gauche) et $q = 0.39$ (en bas à droite).

L'utilisation de l'opérateur R , qui commute avec l'opérateur C , donne alors

$$M(\gamma, p, q, L - n) = RCM(\gamma, p, q, n)RC. \quad (2.83)$$

Les matrices $M(\gamma, p, q, L - n)$ et $M(\gamma, p, q, n)$ possèdent donc le même spectre, ce qui implique que la fonction génératrice des cumulants du courant est invariante par l'échange du nombre de particules et de sites vides :

$$\boxed{E(\gamma, p, q, n) = E(\gamma, p, q, L - n)}, \quad (2.84)$$

de même que la fonction de grandes déviation du courant

$$G(j, p, q, n) = G(j, p, q, L - n). \quad (2.85)$$

En particulier, les cumulants du courant sont invariants par la transformation $n \rightarrow L - n$.

Invariance par translation

On note que le modèle d'exclusion sur un anneau est invariant par translation. En effet, la matrice $M(\gamma)$ commute avec l'opérateur de translation T qui décale toutes les particules d'un site vers l'avant. Les matrices T et $M(\gamma)$ sont donc codiagonalisables, et il est ainsi possible de choisir les vecteurs propres de $M(\gamma)$ de telle sorte qu'ils soient aussi vecteurs propres de T . Comme l'opérateur T vérifie $T^L = \mathbb{1}$, ses valeurs propres sont de la forme $e^{2ik\pi/L}$ avec $k \in \llbracket 0, L - 1 \rrbracket$.

Cependant, le fait que le système soit invariant par translation n'impose aucune symétrie

sur le spectre $\text{Sp } M(\gamma, p, q, n)$ ou sur la fonction $E(\gamma, p, q, n)$. Comme T et $M(\gamma)$ commutent, on peut seulement écrire

$$M(\gamma, p, q, n) = T^{-1} M(\gamma, p, q, n) T, \quad (2.86)$$

ce qui ne relie pas le modèle avec des paramètres γ, p, q et n à un autre modèle avec des paramètres différents.

Chapitre 3

Ansatz de Bethe pour le modèle d'exclusion asymétrique

Ce chapitre est consacré à la résolution par Ansatz de Bethe du modèle d'exclusion asymétrique sur un anneau. Nous verrons comment l'Ansatz de Bethe, que nous introduirons ici dans sa formulation en coordonnées, permet de diagonaliser la matrice de Markov du modèle d'exclusion. Nous montrerons en particulier que l'Ansatz de Bethe permet de calculer exactement les fluctuations du courant du modèle totalement asymétrique.

3.1 Ansatz de Bethe en coordonnées

L'un des intérêts majeurs du modèle d'exclusion asymétrique réside dans le fait qu'il s'agit d'un modèle *exactement soluble*, ce qui signifie qu'une grande partie des quantités qui lui sont associées peuvent être calculées exactement. Le modèle d'exclusion partage cette propriété avec un petit nombre d'autres modèles de la physique statistique. On peut en particulier citer des modèles quantiques unidimensionnels, comme le gaz de Bose avec interaction δ ou certaines chaînes de spin, ainsi que des modèles classiques bidimensionnels, en particulier le modèle d'Ising ou certains modèles de vertex [46, 91, 92, 93, 94, 95]. Tous ces modèles ont la particularité d'être *intégrables*, au sens de l'intégrabilité quantique. Nous appellerons modèles intégrables les modèles solubles en utilisant l'Ansatz de Bethe, dont nous allons présenter la forme en coordonnées dans cette section. Nous verrons une autre définition de l'intégrabilité au chapitre 9, reliée à l'existence d'une famille infinie à un paramètre de matrices commutantes et à la formulation algébrique de l'Ansatz de Bethe.

3.1.1 Intégrabilité du modèle d'exclusion asymétrique

L'Ansatz de Bethe a été introduit par H. Bethe en 1931 [96] pour diagonaliser le hamiltonien de la chaîne de spin de Heisenberg périodique

$$H = -J \sum_i \left(S_i^{(x)} S_{i+1}^{(x)} + S_i^{(y)} S_{i+1}^{(y)} + S_i^{(z)} S_{i+1}^{(z)} \right). \quad (3.1)$$

Il a ensuite été généralisé avec succès à diverses autres chaînes de spin quantiques unidimensionnelles, notamment à la chaîne de spin XXZ [97, 98, 99, 100], XYZ [101, 102, 103, 104], ainsi qu'à des chaînes de spin plus élevées [105, 106, 107] ou avec des conditions aux bords non périodiques [108, 109, 110, 111, 112, 113]. L'Ansatz de Bethe a aussi permis de calculer les états propres de systèmes unidimensionnels continus, en particulier le gaz de Bose avec interaction δ [114, 115, 116, 117, 118, 119, 120], dont le hamiltonien est donné par

$$H = -\frac{1}{2} \sum_i \frac{d^2}{dx_i^2} + c \sum_{i < j} \delta(x_i - x_j). \quad (3.2)$$

Dans le cas des modèles classique bidimensionnels et intégrables comme le modèle à six vertex [121, 122, 123, 124, 45] et le modèle à huit vertex [125, 126, 46], l'utilisation de l'Ansatz de Bethe a conduit à la détermination de l'énergie libre dans la limite thermodynamique, en permettant de diagonaliser la matrice de transfert associée au système.

Dans le cas du modèle d'exclusion asymétrique, l'Ansatz de Bethe a été introduit en 1987 par Dhar [127], qui a remarqué la similarité entre la matrice de Markov du modèle d'exclusion et le hamiltonien de la chaîne de spin XXZ (voir la section 9.1 du chapitre 9). L'Ansatz de Bethe permet ainsi d'exprimer les valeurs propres de la matrice de Markov M , mais aussi sa déformation $M(\gamma)$ introduite au chapitre précédent pour exprimer les fluctuations du courant.

Le calcul par Ansatz de Bethe des valeurs propres d'une matrice (hamiltonien, matrice de transfert ou encore matrice de Markov) s'effectue en deux étapes bien distinctes. La première étape consiste à exprimer les vecteurs propres et valeurs propres de la matrice en question en fonction de n racines de Bethe, notées habituellement z_j . Dans le cas d'un modèle avec des conditions aux bords périodiques, le nombre n correspond à un nombre de particules conservé par le système. Pour une chaîne de spin 1/2, il s'agit par exemple du nombre de spin pointant vers le haut suivant une certaine direction. Pour le gaz de Bose avec interaction δ , le nombre n est simplement le nombre de particules présentes dans le système. Pour le modèle d'exclusion, il s'agit soit du nombre de particules présentes dans le système, soit du nombre de sites vides. Il existe plusieurs manières d'exprimer les vecteurs propres en fonction des racines de Bethe. La forme la plus simple, que nous utiliserons dans ce chapitre, consiste à exprimer les vecteurs propres comme des combinaisons linéaires d'ondes planes de vecteurs d'onde $k_j = -i \log z_j$. Il s'agit de la forme utilisée initialement par Bethe pour diagonaliser le hamiltonien de la chaîne de spin de Heisenberg. Elle porte le nom d'*Ansatz de Bethe en coordonnées*. Une autre possibilité consiste à construire les vecteurs propres en faisant agir sur un état fondamental n opérateurs de création, chacun dépendant d'une racine de Bethe z_j . Cette formulation de l'Ansatz de Bethe, appelée Ansatz de Bethe algébrique, souligne mieux le lien avec l'intégrabilité quantique. Nous la présenterons au chapitre 9. Cette deuxième forme de l'Ansatz de Bethe est particulièrement utile pour traiter le cas du modèle à plusieurs classes de particules.

Pour que les vecteurs construits par l'Ansatz de Bethe soient des vecteurs propres de la matrice que l'on cherche à diagonaliser, on trouve que les racines de Bethe z_j doivent être solution d'équations polynomiales couplées appelées les *équations de Bethe* du système. Ces équations possèdent plusieurs solutions, correspondant à différents états propres de la matrice. Nous montrerons dans la suite que les équations de Bethe pour la matrice de Markov déformée $M(\gamma)$ du modèle d'exclusion sont les n équations suivantes (pour i entre 1 et n) :

$$z_i^L = (-1)^{n-1} \prod_{j=1}^n \frac{p - (p+q)e^{-\gamma} z_i + qe^{-2\gamma} z_i z_j}{p - (p+q)e^{-\gamma} z_j + qe^{-2\gamma} z_i z_j}. \quad (3.3)$$

La deuxième étape du calcul des valeurs propres de la matrice consiste à résoudre les équations de Bethe, éventuellement dans la limite thermodynamique pour laquelle le nombre n de racines de Bethe tend vers l'infini. Ceci conduit alors à des expressions explicites pour les valeurs propres du système. Cette deuxième étape est général la plus difficile. Souvent, il n'est possible de résoudre analytiquement les équations de Bethe que pour certains paramètres particuliers du système. Par exemple, pour beaucoup de modèles bidimensionnels exactement solubles comme le modèle d'Ising ou le modèle à six vertex, l'énergie libre n'a été calculée analytiquement qu'en champ externe nul, alors que les équations de Bethe sont connues pour toute valeur du champ externe.

Dans le cas du modèle d'exclusion totalement asymétrique, nous verrons que les équations de Bethe se découpent en partie. Leur résolution se ramène alors à la résolution d'une équation à une seule inconnue. Cette propriété spécifique du modèle totalement asymétrique a permis d'obtenir des expressions explicites pour le gap du spectre de la matrice de Markov [55, 56, 57] ainsi

que pour la fonction génératrice des cumulants du courant [86]. Pour le modèle partiellement asymétrique, la résolution des équations de Bethe est beaucoup plus difficile. Nous montrerons au chapitre 5 qu'une reformulation des équations de Bethe comme une équation fonctionnelle sur des polynômes permet d'obtenir des expressions exactes pour les cumulants du courant dans le modèle partiellement asymétrique.

3.1.2 Ansatz de Bethe en coordonnées pour diagonaliser la matrice $M(\gamma)$

On considère maintenant le modèle d'exclusion asymétrique sur un anneau de taille L . Nous allons montrer que l'Ansatz de Bethe permet de diagonaliser la matrice de Markov déformée $M(\gamma)$, définie à la section 2.5 du chapitre 2.

Système à une particule

On commence par étudier le système comportant une seule particule, pour lequel les L configurations possibles peuvent être indexées par la position x de la particule. La position x sur l'anneau sera identifiée avec la position $L + x$. Soit un vecteur propre de valeur propre E de la matrice de Markov déformée, dont les composantes seront notées $\psi(x)$. La définition de $M(\gamma)$ donne alors la relation

$$E\psi(x) = pe^\gamma\psi(x-1) + qe^\gamma\psi(x+1) - (p+q)\psi(x). \quad (3.4)$$

Comme la particule se déplace librement sans interaction, il est naturel de chercher les vecteurs propres sous la forme d'ondes planes. On pose donc l'Ansatz suivant pour les composantes du vecteur propre :

$$\psi(x) = z^x. \quad (3.5)$$

Le paramètre z est relié au nombre d'onde k de l'onde plane par $z = e^{ik}$. Combinant les deux équations précédentes, on aboutit alors à l'expression suivante pour la valeur propre en fonction du paramètre z :

$$E = \frac{pe^\gamma}{z} + qe^{-\gamma}z - (p+q). \quad (3.6)$$

Il reste encore à imposer le fait que les positions x et $x+L$ sur l'anneau sont équivalentes. Ceci implique en particulier que la composante $\psi(x)$ du vecteur propre doit être égale à la composante $\psi(x+L)$. On trouve finalement la contrainte suivante pour le paramètre z :

$$z^L = 1. \quad (3.7)$$

Nous verrons dans la suite que les équations de Bethe se réduisent à l'équation précédente quand le système contient une seule particule. Aux L solutions de l'équation $z^L = 1$ correspondent les L vecteurs propres de la matrice $M(\gamma)$. On a donc diagonalisé complètement la matrice $M(\gamma)$ dans le sous-espace contenant une particule. Il reste maintenant à généraliser cela aux systèmes avec plus d'une particule.

Système à n particules

On considère maintenant le cas d'un système à n particules. Les configurations sont alors indexées par les positions $x_1, \dots, x_n$ des particules. Dans toute la suite, on choisira des x_i qui vérifient les contraintes $x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_1 + L$. On identifiera encore une fois la position x et la position $x+L$. Soit un vecteur propre de valeur propre E de la matrice de Markov déformée, dont les composantes seront notées $\psi(x_1, \dots, x_n)$. La définition de $M(\gamma)$ donne alors la relation

$$E\psi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n ([pe^\gamma\psi(x_1, \dots, x_i-1, \dots, x_n) - p\psi(x_1, \dots, x_n)]^{(*)} + [qe^\gamma\psi(x_1, \dots, x_i+1, \dots, x_n) - q\psi(x_1, \dots, x_n)]^{(*)}), \quad (3.8)$$

où $[\]^{(*)}$ signifie que l'on élimine le terme entre les crochets s'il contient un $\psi(x'_1, \dots, x'_n)$ pour lequel deux des x'_i sont égaux.

Comme les particules n'interagissent pas lorsqu'elles ne sont pas en contact, il est encore naturel de chercher les vecteurs propres sous la forme d'ondes planes. Cependant, à cause des interactions entre particules, il ne va pas être possible d'associer à chaque particule un vecteur d'onde bien défini : les interactions vont en effet échanger les vecteurs d'onde entre les particules. On est ainsi conduit à rechercher les vecteurs propres de la matrice $M(\gamma)$ sous la forme suivante, appelée Ansatz de Bethe en coordonnées :

$$\boxed{\psi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} A_\sigma z_{\sigma(1)}^{x_1} \dots z_{\sigma(n)}^{x_n}}. \quad (3.9)$$

Cette formulation de l'Ansatz de Bethe fait intervenir une somme sur toutes les permutations σ du groupe de permutations à n éléments S_n . Les quantités z_j sont encore reliées à des nombres d'onde k_j par la relation $z_j = e^{ik_j}$. Par rapport au cas $n = 1$, les composantes du vecteur propre dépendent de $n!$ quantités inconnues additionnelles A_σ .

Pour que les $\psi(x_1, \dots, x_n)$ donnés par l'Ansatz de Bethe (3.9) soient les composantes d'un vecteur propre de la matrice $M(\gamma)$ de valeur propre E , il reste maintenant à imposer que l'équation (3.8) doit être vérifiée, et que les positions x et $x + L$ sur l'anneau sont identiques. Nous allons voir que l'équation (3.8) contraint complètement la valeur propre E et les coefficients A_σ en fonction des z_j . La périodicité donne ensuite les équations de Bethe qui contraignent les z_j .

Valeur propre de la matrice $M(\gamma)$

On suppose que le vecteur ψ est donné par l'Ansatz de Bethe (3.9). Nous allons dans un premier temps imposer que l'équation (3.8) soit satisfaite pour les configurations pour lesquelles toutes les particules sont loin les unes des autres, c'est à dire pour les configurations qui vérifient $x_i + 1 < x_{i+1}$ si i est entre 1 et $n - 1$ et $x_n + 1 < x_1 + L$. On note que pour que de telles configurations existent, il est nécessaire que le nombre de particules soit inférieur ou égal à $L/2$. Si ce n'est pas le cas, on peut alors caractériser les configurations par la position des sites vides et pas par la position des particules.

Pour des configurations pour lesquelles les particules sont loin les unes des autres, aucun des termes $[\]^{(*)}$ de l'équation (3.8) ne fait intervenir de configurations avec plusieurs particules au même point. On peut donc écrire

$$E\psi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n (pe^\gamma \psi(x_1, \dots, x_j - 1, \dots, x_n) + qe^{-\gamma} \psi(x_1, \dots, x_j + 1, \dots, x_n) - (p + q)\psi(x_1, \dots, x_n)). \quad (3.10)$$

Utilisant le fait que ψ est donné par l'Ansatz de Bethe (3.9), on obtient alors

$$E\psi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} A_\sigma \sum_{j=1}^n \left(\frac{pe^\gamma}{z_{\sigma(j)}} + \frac{qz_{\sigma(j)}}{e^\gamma} - (p + q) \right) z_{\sigma(1)}^{x_1} \dots z_{\sigma(n)}^{x_n}. \quad (3.11)$$

La somme sur j ne dépend en fait pas de la permutation σ . On peut donc la sortir de la somme sur σ . Cette relation nous donne finalement l'expression de la valeur propre en fonction des z_j :

$$\boxed{E = \sum_{j=1}^n \left(\frac{pe^\gamma}{z_j} + qe^{-\gamma} z_j - (p + q) \right)}. \quad (3.12)$$

On note que l'on peut maintenant reprendre ce calcul à l'envers en partant d'une configuration quelconque : on constate alors que l'équation (3.10) doit en fait être vérifiée quelle que soit la configuration, même lorsque des particules se trouvent sur des sites voisins. Cette remarque sera utile dans la suite, quand nous allons considérer de telles configurations.

Coefficients A_σ

Nous allons maintenant imposer que l'équation (3.8) soit satisfaite pour toutes les configurations telles que $x_{i+1} = x_i + 1$ pour un certain i , toutes les autres particules étant loin les unes des autres (*i.e.* les autres particules sont séparées les unes des autres par au moins un site vide). L'équation (3.8) s'écrit maintenant

$$\begin{aligned} E\psi(x_1, \dots, x_n) = & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i, i+1}}^n (pe^\gamma \psi(x_1, \dots, x_j - 1, \dots, x_n) + qe^{-\gamma} \psi(x_1, \dots, x_j + 1, \dots, x_n) - (p+q)\psi(x_1, \dots, x_n)) \\ & + pe^\gamma \psi(x_1, \dots, x_i - 1, x_i + 1, \dots, x_n) + qe^{-\gamma} \psi(x_1, \dots, x_i, x_{i+1} + 1, \dots, x_n) \\ & - (p+q)\psi(x_1, \dots, x_n) . \end{aligned} \quad (3.13)$$

On retranche alors de l'équation précédente l'équation (3.10), valable pour toute configuration des particules, et on exprime les composantes du vecteur ψ à l'aide de l'Ansatz de Bethe (3.9). On obtient

$$\sum_{\sigma \in S_n} z_{\sigma(1)}^{x_1} \dots (z_{\sigma(i)} z_{\sigma(i+1)})^{x_i} \dots z_{\sigma(n)}^{x_n} \times (pe^\gamma - (p+q)z_{\sigma(i+1)} + qe^{-\gamma} z_{\sigma(i)} z_{\sigma(i+1)}) \times A_\sigma . \quad (3.14)$$

Il s'agit d'une équation linéaire imposant une contrainte sur les A_σ . On rassemble maintenant les équations correspondant aux différentes configurations telles que $x_{i+1} = x_i + 1$, les autres x_j étant loin les uns des autres. Ceci nous donne un système linéaire imposant des contraintes sur les A_σ . Ce système linéaire peut être mis sous la forme d'une équation matricielle en définissant la matrice rectangulaire Z par

$$Z_{\vec{x}, \sigma} = z_{\sigma(1)}^{x_1} \dots (z_{\sigma(i)} z_{\sigma(i+1)})^{x_i} \dots z_{\sigma(n)}^{x_n} , \quad (3.15)$$

et le vecteur B par

$$B_\sigma = (pe^\gamma - (p+q)z_{\sigma(i+1)} + qe^{-\gamma} z_{\sigma(i)} z_{\sigma(i+1)}) A_\sigma . \quad (3.16)$$

On a

$$Z.B = 0 . \quad (3.17)$$

Si le noyau de la matrice Z se réduisait au vecteur nul, alors le vecteur B serait nul, de même que les A_σ et le vecteur ψ donné par l'Ansatz de Bethe. Ce n'est pas le cas, à cause de la symétrie suivante de la matrice Z :

$$Z_{\vec{x}, \sigma} = Z_{\vec{x}, \sigma \circ \tau_{i, i+1}} , \quad (3.18)$$

où $\tau_{i, i+1}$ est la transposition d'indices i et $i+1$ (*i.e.* la permutation échangeant i et $i+1$ et laissant les autres éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ inchangés). La symétrie entre σ et $\sigma \circ \tau_{i, i+1}$ dans Z peut être éliminée. On définit pour cela $S_n / \tau_{i, i+1}$ l'ensemble des permutations de S_n telles que (par exemple) $\sigma(i) < \sigma(i+1)$. L'ensemble S_n est alors la réunion disjointe de $S_n / \tau_{i, i+1}$ et de $(S_n / \tau_{i, i+1}) \circ \tau_{i, i+1}$. On peut alors écrire le système linéaire en les B_σ sous la forme

$$\sum_{\sigma \in S_n / \tau_{i, i+1}} Z_{\vec{x}, \sigma} (B_\sigma + B_{\sigma \circ \tau_{i, i+1}}) = 0 . \quad (3.19)$$

Ce système linéaire peut encore s'écrire comme une équation matricielle :

$$\tilde{Z} \cdot \tilde{B} = 0 . \quad (3.20)$$

Contrairement à l'équation matricielle précédente qui faisait intervenir Z et B , la matrice $\tilde{Z}$ a un noyau nul pour des valeurs *génériques* des z_i . On obtient finalement que les $\tilde{B}_\sigma$ sont nuls. En fonction des coefficients A_σ qui interviennent dans l'Ansatz de Bethe pour ψ , on trouve

$$\boxed{\frac{A_{\sigma \circ \tau_{i,i+1}}}{A_\sigma} = -\frac{pe^\gamma - (p+q)z_{\sigma(i+1)} + qe^{-\gamma}z_{\sigma(i)}z_{\sigma(i+1)}}{pe^\gamma - (p+q)z_{\sigma(i)} + qe^{-\gamma}z_{\sigma(i)}z_{\sigma(i+1)}} \equiv s(\sigma(i), \sigma(i+1))} . \quad (3.21)$$

Cette équation détermine entièrement les A_σ en fonction des z_i et de A_I associé à la permutation identité.

Remarque : on sait que les z_j ne sont en fait pas des paramètres génériques. Ils sont en effet contraint d'être solution des équations de Bethe, que nous allons bientôt dériver. L'argument que l'on a utilisé pour montrer que $\tilde{B} = 0$ n'est donc pas entièrement rigoureux. Cependant, on peut vérifier à posteriori que les solutions des équations de Bethe pour de petits systèmes sont telles que la matrice $\tilde{Z}$ a bien un noyau réduit au vecteur nul, au moins pour des valeurs génériques des paramètres p, q et γ .

Nous venons d'exploiter l'équation (3.8) pour des configurations pour lesquelles les particules sont éloignées les unes des autres, sauf éventuellement deux d'entre elles qui se trouvent sur des sites voisins. Il reste encore à déterminer quelles sont les contraintes supplémentaires ajoutées par les autres configurations, en particulier celles faisant intervenir trois particules sur des sites voisins : $x_{i+2} = x_{i+1} + 1 = x_1 + 2$. Pour un modèle non intégrable, c'est en général à ce moment là que l'on constate que la résolution par Ansatz de Bethe est impossible. Les interactions à trois corps donnent en effet de nouvelles contraintes sur les A_σ , incompatibles avec celles provenant des interactions à deux corps. Pour un modèle intégrable, par contre, les interactions à trois corps se décomposent en une somme d'interactions à deux corps, et l'on n'obtient alors aucune nouvelle contrainte sur les A_σ ou les z_j . On peut montrer que c'est ce qui se passe dans le cas du modèle d'exclusion.

Équations de Bethe

Il reste maintenant à imposer le fait que les sites x et $x + L$ sont identiques. Ceci implique en particulier que les configurations $(x_1, \dots, x_n)$ et $(x_2, \dots, x_n, x_1 + L)$ sont identiques. On a donc l'égalité suivante :

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = \psi(x_2, \dots, x_n, x_1 + L) . \quad (3.22)$$

Utilisant le fait que ψ est donné par l'Ansatz de Bethe (3.9), la relation précédente devient

$$\sum_{\sigma \in S_n} A_\sigma z_{\sigma(1)}^{x_1} \dots z_{\sigma(n)}^{x_n} = \sum_{\sigma \in S_n} A_\sigma z_{\sigma(1)}^{x_2} \dots z_{\sigma(n-1)}^{x_n} z_{\sigma(n)}^{x_1+L} . \quad (3.23)$$

On introduit la permutation cyclique C telle que $C(1) = 2, C(2) = 3, \dots, C(n-1) = n$, et $C(n) = 1$. L'équation précédente se réécrit alors sous la forme

$$\sum_{\sigma \in S_n} (A_\sigma - A_{\sigma \circ C} z_{\sigma(1)}^L) z_{\sigma(1)}^{x_1} \dots z_{\sigma(n)}^{x_n} = 0 . \quad (3.24)$$

De la même manière que précédemment, on obtient génériquement que

$$\frac{A_{\sigma \circ C}}{A_\sigma} = z_{\sigma(1)}^{-L} . \quad (3.25)$$

Or, la permutation cyclique C se décompose en produit de transpositions d'indices voisins. On a en effet $C = \tau_{1,2} \circ \tau_{2,3} \circ \dots \circ \tau_{n-1,n}$. On peut donc utiliser la relation (3.21) pour éliminer tous les A_σ dans l'équation précédente. On trouve

$$\frac{A_{\sigma \circ C}}{A_\sigma} = \frac{A_{\sigma \circ \tau_{1,2} \circ \dots \circ \tau_{n-2,n-1} \circ \tau_{n-1,n}}}{A_{\sigma \circ \tau_{1,2} \circ \dots \circ \tau_{n-3,n-2} \circ \tau_{n-2,n-1}}} \frac{A_{\sigma \circ \tau_{1,2} \circ \dots \circ \tau_{n-3,n-2} \circ \tau_{n-2,n-1}}}{A_{\sigma \circ \tau_{1,2} \circ \dots \circ \tau_{n-4,n-3} \circ \tau_{n-3,n-2}}} \dots \frac{A_{\sigma \circ \tau_{1,2}}}{A_\sigma} \quad (3.26)$$

$$= s(\sigma(1), \sigma(n)) s(\sigma(1), \sigma(n-1)) \dots s(\sigma(1), \sigma(2)) = \prod_{j=2}^n s(\sigma(1), \sigma(j)) , \quad (3.27)$$

où les $s(a, b)$ sont définis en (3.21). Ceci implique que les z_j vérifient l'équation suivante :

$$z_{\sigma(1)}^{-L} = \prod_{j=2}^n s(\sigma(1), \sigma(j)) . \quad (3.28)$$

Si l'on appelle i l'entier $\sigma(1)$, on obtient finalement les *équations de Bethe* du modèle d'exclusion

$$z_i^L = (-1)^{n-1} \prod_{j=1}^n \frac{p - (p+q)e^{-\gamma} z_i + qe^{-2\gamma} z_i z_j}{p - (p+q)e^{-\gamma} z_j + qe^{-2\gamma} z_i z_j} . \quad (3.29)$$

Les équations de Bethe forment un système de n équations polynomiales couplées qui contraignent les z_j . Elles sont difficiles à résoudre en général. Elles admettent un ensemble discret de solutions correspondant à différents états propres de la matrice $M(\gamma)$. Cependant, le fait qu'elles admettent exactement $\binom{L}{n}$ solutions correspondant aux $\binom{L}{n}$ états propres de la matrice de Markov n'a pas été démontré. Il s'agit du problème de la complétude de l'Ansatz de Bethe [117, 128, 129, 130, 131, 132, 133]. On constate cependant par une résolution numérique des équations de Bethe pour de petits systèmes que pour des paramètres p , q et γ génériques, l'Ansatz de Bethe permet bien de construire tous les vecteurs propres de la matrice $M(\gamma)$.

Impulsion totale

On rappelle que la matrice $M(\gamma)$ commute avec l'opérateur de translation T , qui décale toutes les particules d'un site vers l'avant. Les vecteurs propres de $M(\gamma)$ donnés par l'Ansatz de Bethe sont en fait des vecteurs propres communs à T et à $M(\gamma)$. En effet, si ψ est donné par l'Ansatz de Bethe (3.9), alors on a la relation

$$\psi(x_1 + 1, \dots, x_n + 1) = \left(\prod_{j=1}^n z_j \right) \psi(x_1, \dots, x_n) , \quad (3.30)$$

qui indique que le produit des z_j est la valeur propre de T associée au vecteur propre ψ . Les valeurs propres de T étant des racines L -ièmes de l'unité, on en déduit donc qu'il existe un entier m tel que

$$\prod_{j=1}^n z_j = e^{2im\pi/L} . \quad (3.31)$$

Cette propriété est en fait une simple conséquence des équations de Bethe. Si l'on effectue le produit sur i compris entre 1 et n des équations de Bethe (3.29), on trouve en effet

$$\left(\prod_{i=1}^n z_i \right)^L = 1 . \quad (3.32)$$

La quantité $2m\pi/L$ associée à un état propre du système caractérisé par les racines de Bethe z_j correspond à l'impulsion totale de l'état propre en question. Il s'agit de la somme des n

« impulsions élémentaires » $k_j = -i \log z_j$ associées aux n ondes planes dont les combinaisons linéaires donnent le vecteur propre. Les états propres construits par l'Ansatz de Bethe peuvent donc être interprétés comme étant composés de n excitations élémentaires d'impulsion k_j et d'« énergie »

$$\epsilon_j = p e^\gamma e^{-i k_j} + q e^{-\gamma} e^{i k_j} - (p + q) , \quad (3.33)$$

les impulsions possibles étant contraintes par les équations de Bethe.

État stationnaire

Dans la suite, nous nous intéresserons plus particulièrement à la valeur propre de partie réelle maximale de la matrice $M(\gamma)$, qui est reliée aux fluctuations du courant dans l'état stationnaire. Cette valeur propre, notée $E(\gamma)$, est caractérisée par la propriété suivante :

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} E(\gamma) = 0 , \quad (3.34)$$

qui est une conséquence du fait que la valeur propre de partie réelle maximale de la matrice de Markov $M = M(\gamma = 0)$ est égale à zéro. Les racines de Bethe z_j correspondantes sont telles que

$$\boxed{\lim_{\gamma \rightarrow 0} z_j = 1} . \quad (3.35)$$

L'équation (3.12) implique alors bien que $E(\gamma = 0) = 0$. Le vecteur propre correspondant à la valeur propre $E(\gamma)$ possède une impulsion totale nulle :

$$\prod_{i=1}^n z_i = 1 . \quad (3.36)$$

3.1.3 Modèle totalement asymétrique

Pour le modèle totalement asymétrique $q = 0$, les valeurs propres de la matrice de Markov déformée $M(\gamma)$ s'expriment en fonction des racines de Bethe z_j sous la forme

$$\frac{E}{p} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{e^\gamma}{z_j} - 1 \right) . \quad (3.37)$$

Les z_j sont maintenant solution des équations de Bethe suivantes :

$$(z_i - e^\gamma)^n z_i^{-L} = (-1)^{n-1} \prod_{j=1}^n (z_j - e^\gamma) . \quad (3.38)$$

On note que dans ce cas particulier, le second membre des équations de Bethe ne dépend pas de l'indice i de la racine de Bethe z_i : il s'agit en effet d'une fonction symétrique de tous les z_j . Cette propriété rend la résolution des équations de Bethe beaucoup plus aisée que pour le modèle partiellement asymétrique. En effet, si l'on appelle A le second membre de l'équation (3.38) et que l'on introduit le polynôme P défini par

$$\boxed{P(z) = (z - e^\gamma)^n - A z^L} , \quad (3.39)$$

les équations de Bethe peuvent alors être résolues de la manière suivante : on choisit tout d'abord n solutions distinctes $z_1(A), \dots, z_n(A)$ de l'équation polynomiale de degré L

$$P(z_i(A)) = 0 . \quad (3.40)$$

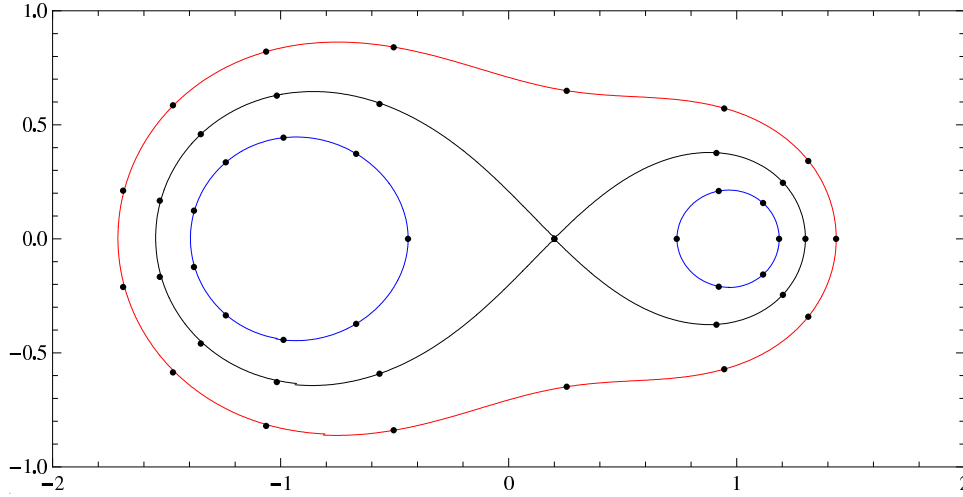


FIG. 3.1 – Trois exemples d’ovales de Cassini déformés pour $\rho = 2/5$, $\gamma = 0$ et différentes valeurs du paramètre $|A|^{1/L}$ (qui ne sont pas solution de l’équation d’auto-cohérence). On a représenté les 15 solutions correspondantes de l’équation (3.42) pour A réel positif quand $L = 15$ et $n = 6$.

Ces solutions dépendent d’un paramètre arbitraire A . On fixe ensuite le paramètre A de manière auto-cohérente en utilisant l’équation

$$A = (-1)^{n-1} \prod_{j=1}^n (z_j(A) - e^\gamma) . \quad (3.41)$$

Par cette méthode, la résolution des équations de Bethe se ramène à la résolution d’une seule équation en la variable A . Pour de petits systèmes il a été constaté numériquement par Golinelli et Mallick dans [134, 135] que cette équation a une unique solution pour chacun des $\binom{L}{n}$ choix de n zéros distincts $z_i(A)$ du polynôme P . Chacun de ces choix des zéros de P correspond alors à l’un des $\binom{L}{n}$ états propres du système.

Par le changement de variables $z_j = 2e^\gamma/(1 + Z_j)$, les équations de Bethe deviennent [56, 57]

$$(1 - Z_i)^n (1 + Z_i)^{L-n} = 2^L e^{(L-n)\gamma} A . \quad (3.42)$$

En prenant le module de cette équation, on obtient

$$|1 - Z_i|^\rho |1 + Z_i|^{1-\rho} = 2e^{(1-\rho)\gamma} |A|^{1/L} . \quad (3.43)$$

Au demi-remplissage, et pour une valeur fixée du paramètre A , le lieu des points Z_i du plan complexe vérifiant l’équation précédente est appelé un ovale de Cassini. Quand ρ est différent de $1/2$, on obtient une déformation de l’ovale de Cassini. On a représenté trois de ces courbes pour $\rho = 2/5$ en figure 3.1.

On note que pour le modèle totalement asymétrique, les équations de Bethe se découpent presque : l’équation (3.40) fait en effet intervenir uniquement $z_i(A)$, et pas les autres $z_j(A)$. C’est uniquement dans un deuxième temps que l’on doit prendre en compte le fait que les z_j sont en fait solution d’équations couplées, lors de la résolution de l’équation pour le paramètre A (3.41). Cette simplification des équations de Bethe n’intervient pas dans le cas partiellement asymétrique, pour lequel il faut alors utiliser des méthodes plus élaborées pour résoudre les équations de Bethe, comme nous le verrons au chapitre 5.

3.1.4 Invariances des équations de Bethe

Les transformations des paramètres du système laissant invariant le spectre de la matrice de Markov déformée ont été présentées à la section 2.5.5 du chapitre 2. Nous allons maintenant montrer que l'invariance du spectre sous ces transformations peut se lire simplement sur les équations de Bethe. Dans toute cette section, nous écrirons de manière explicite les paramètres du système considéré comme argument de toutes les quantités qui en dépendent. Nous écrirons par exemple $M(\gamma, p, q, n)$ au lieu de $M(\gamma)$.

On considère une solution $\{z\} = \{z_1, \dots, z_n\}$ des équations de Bethe correspondant à la matrice $M(\gamma, p, q, n)$. On appelle $E(\{z\}, \gamma, p, q, n)$ la valeur propre associée. Pour chaque transformation $\gamma \rightarrow \gamma', p \rightarrow p', q \rightarrow q'$ et $n \rightarrow n'$ des paramètres du système laissant le spectre de $M(\gamma, p, q, n)$ invariant, nous allons construire des $\tilde{z}_j$ solution des équations de Bethe correspondant à la matrice $M(\gamma', p', q', n')$ tels que la valeur propre $E(\{z'\}, \gamma, p', q', n')$ associée soit égale à la valeur propre $E(\{z\}, \gamma, p, q, n)$ de la matrice $M(\gamma, p, q, n)$.

Symétrie entre les déplacements vers l'avant et vers l'arrière

On définit $\tilde{z}_j = z_j^{-1}$. En fonction des $\tilde{z}_j$, les équations de Bethe (3.29) peuvent se mettre sous la forme

$$\tilde{z}_i^L = (-1)^{n-1} \prod_{j=1}^n \frac{q - (p+q)e^\gamma \tilde{z}_i + pe^{2\gamma} \tilde{z}_i \tilde{z}_j}{q - (p+q)e^\gamma \tilde{z}_j + pe^{2\gamma} \tilde{z}_i \tilde{z}_j}. \quad (3.44)$$

On reconnaît les équations de Bethe du système pour lequel on a échangé p et q et transformé γ en $-\gamma$. Les $\tilde{z}_j$ sont donc solution des équations de Bethe correspondant à la matrice $M(-\gamma, q, p, n)$. La valeur propre correspondante est alors donnée, en utilisant (3.12) pour des racines de Bethe $\tilde{z}_j$ et avec des paramètres $-\gamma, q, p$ et n , par

$$E(\{\tilde{z}\}, -\gamma, q, p, n) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{q}{e^\gamma \tilde{z}_j} + pe^\gamma \tilde{z}_j - (p+q) \right). \quad (3.45)$$

Remplaçant alors les $\tilde{z}_j$ par leur expression en fonction des z_j , on constate finalement que la valeur propre $E(\{\tilde{z}\}, -\gamma, q, p, n)$ est égale à la valeur propre $E(\{z\}, \gamma, p, q, n)$.

Symétrie de Gallavotti-Cohen

On définit comme dans le cas précédent $\tilde{z}_j = z_j^{-1}$. En fonction des $\tilde{z}_j$, les équations de Bethe (3.29) peuvent aussi se mettre sous la forme

$$\tilde{z}_i^L = (-1)^{n-1} \prod_{j=1}^n \frac{p - (p+q)(pe^\gamma/q)\tilde{z}_i + q(pe^\gamma/q)^2 \tilde{z}_i \tilde{z}_j}{p - (p+q)(pe^\gamma/q)\tilde{z}_j + q(pe^\gamma/q)^2 \tilde{z}_i \tilde{z}_j}. \quad (3.46)$$

On reconnaît maintenant les équations de Bethe du système pour lequel on a transformé e^γ en $qe^{-\gamma}/p$. Les $\tilde{z}_j$ sont donc aussi solution des équations de Bethe correspondant à la matrice $M(\log(q/p) - \gamma, p, q, n)$. La valeur propre correspondante est donnée, en utilisant (3.12) pour des racines de Bethe $\tilde{z}_j$ et avec des paramètres $\log(q/p) - \gamma, p, q$ et n , par

$$E(\{\tilde{z}\}, \log(q/p) - \gamma, p, q, n) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{q}{e^\gamma \tilde{z}_j} + pe^\gamma \tilde{z}_j - (p+q) \right). \quad (3.47)$$

Il s'agit de la même expression que dans le cas précédent. Remplaçant les $\tilde{z}_j$ par leur expression en fonction des z_j , on constate donc cette fois-ci que la valeur propre $E(\{\tilde{z}\}, \log(q/p) - \gamma, p, q, n)$ est égale à la valeur propre $E(\{z\}, \gamma, p, q, n)$.

Symétrie $\gamma \rightarrow \gamma + 2i\pi/L$

On définit $\tilde{z}_j = e^{2i\pi/L} z_j$. En fonction des $\tilde{z}_j$, les équations de Bethe (3.29) se réécrivent sous la forme

$$\tilde{z}_i^L = (-1)^{n-1} \prod_{j=1}^n \frac{p - (p+q)e^{-\gamma-2i\pi/L} \tilde{z}_i + qe^{-2\gamma-4i\pi/L} \tilde{z}_i \tilde{z}_j}{p - (p+q)e^{-\gamma-2i\pi/L} \tilde{z}_j + qe^{-2\gamma-4i\pi/L} \tilde{z}_i \tilde{z}_j}. \quad (3.48)$$

On reconnaît les équations de Bethe du système pour lequel on a transformé γ en $\gamma + 2i\pi/L$. Les $\tilde{z}_j$ sont donc solution des équations de Bethe correspondant à la matrice $M(\gamma + 2i\pi/L, p, q, n)$. La valeur propre correspondante est donnée, en utilisant (3.12) pour des racines de Bethe $\tilde{z}_j$ et avec des paramètres $\gamma + 2i\pi/L$, p , q et n , par

$$E(\{\tilde{z}\}, \gamma + 2i\pi/L, p, q, n) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{pe^{\gamma+2i\pi/L}}{\tilde{z}_j} + \frac{q\tilde{z}_j}{e^{\gamma+2i\pi/L}} - (p+q) \right). \quad (3.49)$$

Remplaçant les $\tilde{z}_j$ par leur expression en fonction des z_j , on constate que la valeur propre $E(\{\tilde{z}\}, \gamma + 2i\pi/L, p, q, n)$ est égale à la valeur propre $E(\{z\}, \gamma, p, q, n)$.

Symétrie particule-trou

La preuve par Ansatz de Bethe de l'invariance du spectre de la matrice $M(\gamma, p, q, n)$ par l'échange du nombre de particules n et du nombre de sites vides $L - n$ est plus compliquée, car cette transformation ne préserve pas le nombre de racines de Bethe z_j . Nous considérerons ici uniquement le cas du modèle totalement asymétrique. Le cas du modèle partiellement asymétrique, qui nécessite d'utiliser la formulation fonctionnelle des équations de Bethe, sera traité à la section 5.1.2 du chapitre 5.

Pour le modèle totalement asymétrique ($q = 0$), les racines de Bethe correspondant à un état propre de la matrice $M(\gamma, p, 0, n)$ sont n zéros distincts $z_1, \dots, z_n$ du polynôme P défini en (3.40), où A vérifie l'équation auto-cohérente (3.41). On appelle $z_{n+1}, \dots, z_L$ les $L - n$ autres zéros du polynôme P , qui est de degré L . On peut alors écrire P sous la forme

$$P(z) = (z - e^\gamma)^n - Az^L = -A(z - z_1) \dots (z - z_n) \times (z - z_{n+1}) \dots (z - z_L). \quad (3.50)$$

Pour j entre $n+1$ et L , on pose

$$\tilde{z}_{j-n} = \frac{e^\gamma z_j}{z_j - e^\gamma}. \quad (3.51)$$

Nous allons voir que les $L - n$ quantités $\tilde{z}_j$ sont solution des équations de Bethe du système comportant $L - n$ particules. Les z_j étant des zéros du polynôme P , les $\tilde{z}_j$ vérifient en effet la relation

$$(\tilde{z} - e^\gamma)^{L-n} = Ae^{(L-2n)\gamma} \tilde{z}^L, \quad (3.52)$$

tandis que la relation $P(e^\gamma) = -Ae^{L\gamma}$ implique que

$$A = (-1)^{n-1} \prod_{j=1}^n (z_j - e^\gamma) = (-1)^{L-n-1} e^{-(L-2n)\gamma} \prod_{j=1}^{L-n} (\tilde{z}_j - e^\gamma). \quad (3.53)$$

On peut alors éliminer A entre les deux équations précédentes, et on trouve finalement que les $\tilde{z}_j$ vérifient les équations de Bethe correspondant à la matrice $M(\gamma, p, 0, L - n)$:

$$(\tilde{z} - e^\gamma)^{L-n} \tilde{z}^{-L} = (-1)^{L-n-1} \prod_{j=1}^{L-n} (\tilde{z}_j - e^\gamma). \quad (3.54)$$

De plus, la relation $P'(0)/P(0) = -ne^{-\gamma}$ implique que

$$\sum_{j=1}^{L-n} \left(\frac{e^{\gamma}}{\tilde{z}_j} - 1 \right) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{e^{\gamma}}{z_j} - 1 \right). \quad (3.55)$$

La valeur propre de la matrice $M(\gamma, p, 0, L-n)$ associée aux $L-n$ racines de Bethe $\tilde{z}_j$ est donc égale à la valeur propre de la matrice $M(\gamma, p, 0, n)$ associée aux n racines de Bethe z_j .

3.2 Fluctuations du courant pour un système à une particule

Pour un système comportant une seule particule, la fonction de grandes déviations du courant peut être calculée directement en « suivant » les déplacements de la particule, comme nous allons le voir dans cette section. Le résultat peut aussi être obtenu en résolvant les équations de Bethe. Nous allons détailler le calcul dans les deux cas.

3.2.1 Calcul direct

La probabilité $P(Y_t = Y | Y_0 = 0)$ pour que le déplacement total soit égal à Y au temps t sachant qu'il était nul au temps initial est donnée par

$$P(Y_t = Y | Y_0 = 0) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{Y+2k}{k} \left(\frac{p}{p+q} \right)^{Y+k} \left(\frac{q}{p+q} \right)^k P(Y+2k \text{ sauts entre } 0 \text{ et } t) & \text{si } Y > 0 \\ \sum_{k=0}^{\infty} \binom{|Y|+2k}{k} \left(\frac{p}{p+q} \right)^k \left(\frac{q}{p+q} \right)^{|Y|+k} P(|Y|+2k \text{ sauts entre } 0 \text{ et } t) & \text{si } Y < 0 \end{cases}. \quad (3.56)$$

Le facteur $p/(p+q)$ (respectivement $q/(p+q)$) correspond à la probabilité qu'un déplacement de la particule se fasse vers l'avant (resp. vers l'arrière) tandis que le coefficient du binôme compte le nombre de façons de choisir, parmi $|Y| + 2k$ déplacements de la particule, ceux pour lesquels la particule se déplace vers l'arrière. Pour $Y > 0$, il existe un entier k positif tel que la particule se déplace $Y + k$ fois vers l'avant et k fois vers l'arrière. De même, pour $Y < 0$, il existe un entier k positif tel que la particule se déplace $|Y| + k$ fois vers l'arrière et k fois vers l'avant. Les deux expressions pour $Y > 0$ et $Y < 0$ peuvent se rassembler en une seule sous la forme

$$P(Y_t = Y | Y_0 = 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{|Y|+2k}{k} \left(\frac{p}{q} \right)^{Y/2} \left(\frac{\sqrt{pq}}{p+q} \right)^{|Y|+2k} P(|Y|+2k \text{ sauts entre } 0 \text{ et } t). \quad (3.57)$$

La probabilité que la particule se déplace dans un intervalle de temps infinitésimal dt est $(p+q)dt$. La probabilité pour que la particule ne se déplace pas dans un intervalle de temps $[t_1, t_2]$ s'obtient alors en découpant cet intervalle en sous intervalles infinitésimaux de taille ϵ :

$$P(\text{aucun saut entre } t_1 \text{ et } t_2) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (1 - (p+q)\epsilon)^{(t_2-t_1)/\epsilon} = e^{-(p+q)(t_2-t_1)}. \quad (3.58)$$

La probabilité que la particule saute j fois exactement entre les temps 0 et t est alors donnée par une loi de Poisson :

$$\begin{aligned} & P(j \text{ sauts entre } 0 \text{ et } t) \\ &= (p+q)^j \int_{0 < t_1 < t_2 < \dots < t_j < t} dt_1 dt_2 \dots dt_j e^{-(p+q)(t_1-0)} e^{-(p+q)(t_2-t_1)} \dots e^{-(p+q)(t-t_j)} \\ &= \frac{(p+q)^j t^j}{j!} e^{-(p+q)t}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

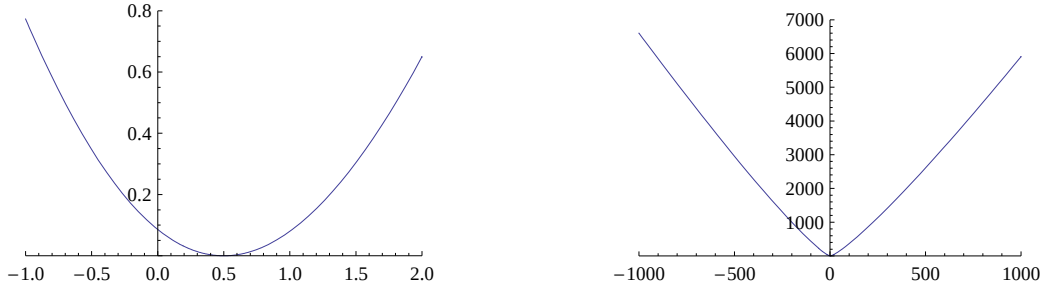


FIG. 3.2 – Fonction de grandes déviations du courant $G(j)$ dans le modèle d'exclusion asymétrique sur un anneau, pour un système comportant une seule particule, avec des taux $p = 1$ et $q = 1/2$. Le graphe de gauche montre l'annulation de $G(j)$ en $j = 1/2$, qui est la valeur moyenne du courant. Le graphe de droite montre la croissance en $|j| \log |j|$ de $G(j)$ quand $|j| \rightarrow \infty$.

On trouve alors pour la distribution de Y_t :

$$P(Y_t = Y | Y_0 = 0) = \left(\frac{p}{q}\right)^{Y/2} e^{-(p+q)t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(pqt^2)^{k+|Y|/2}}{k!(k+|Y|)!} = \left(\frac{p}{q}\right)^{Y/2} e^{-(p+q)t} I_{|Y|}(2\sqrt{pqt^2}), \quad (3.60)$$

où I est la fonction de Bessel modifiée de première espèce (c.f. [136], équation 9.7.7). On a :

$$I_a(b) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a^2/4)^{k+b/2}}{k!(k+b)!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\sqrt{a^2+b^2}}} \left(\frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{b}\right)^{-a} e^{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad (3.61)$$

quand $a, b \rightarrow \infty$ avec a/b fixé. Dans la limite $t \rightarrow \infty$, on s'attend à ce que $P(Y_t = jt | Y_0 = 0)$ se mette sous la forme

$$P(Y_t = jt | Y_0 = 0) \sim e^{-tG(j)}, \quad (3.62)$$

où G est la fonction de grandes déviations du courant. Aux temps longs, on obtient

$$P(Y_t = jt | Y_0 = 0) \sim \left(\frac{p}{q}\right)^{jt/2} e^{-(p+q)t} \frac{1}{\sqrt{2\pi t \sqrt{|j|^2 + 4pq}}} \left(\frac{|j| + \sqrt{|j|^2 + 4pq}}{2\sqrt{pq}}\right)^{-|j|t} e^{t\sqrt{|j|^2 + 4pq}}, \quad (3.63)$$

ce qui nous donne la valeur exacte de la fonction de grandes déviations du courant. On trouve

$$G(j) = j \log \sqrt{\frac{q}{p}} + (p+q) + |j| \log \left(\frac{|j| + \sqrt{j^2 + 4pq}}{2\sqrt{pq}} \right) - \sqrt{j^2 + 4pq}. \quad (3.64)$$

Considérant séparément les deux cas $j > 0$ et $j < 0$, on constate que l'expression précédente peut se réécrire sous la forme plus simple suivante :

$$\boxed{G(j) = (p+q) + j \log \left(\frac{j + \sqrt{j^2 + 4pq}}{2p} \right) - \sqrt{j^2 + 4pq}}. \quad (3.65)$$

3.2.2 Calcul par Ansatz de Bethe

Nous allons maintenant retrouver l'expression de la fonction de grandes déviations du courant en utilisant l'Ansatz de Bethe. Pour $n = 1$, l'Ansatz de Bethe s'exprime en fonction d'une seule racine de Bethe z , solution de l'équation de Bethe (3.29) :

$$z^L = 1. \quad (3.66)$$

Les L solutions de cette équation sont les racines L -ièmes de l'unité. La solution correspondant à l'état stationnaire est simplement

$$z = 1 . \quad (3.67)$$

La valeur propre de partie réelle maximale de la matrice de Markov déformée est alors donnée par

$$E(\gamma) = pe^\gamma + qe^{-\gamma} - (p + q) . \quad (3.68)$$

Les cumulants du courant ont donc pour expression

$$E_k = p + (-1)^k q . \quad (3.69)$$

La fonction de grandes déviations du courant est la transformée de Legendre de $E(\gamma)$, donnée par

$$G(j) = \max_j (j\gamma - E(\gamma)) = j\gamma(j) - E(\gamma(j)) , \quad (3.70)$$

où $\gamma(j)$ est défini par l'équation implicite $j = E'(\gamma(j))$. On obtient finalement

$$\gamma(j) = \log \left(\frac{j + \sqrt{j^2 + 4pq}}{2p} \right) , \quad (3.71)$$

et on retrouve le résultat obtenu précédemment pour la fonction de grandes déviations du courant :

$$G(j) = j \log \left(\frac{j + \sqrt{j^2 + 4pq}}{2p} \right) + (p + q) - \sqrt{j^2 + 4pq} . \quad (3.72)$$

Pour un nombre de particules strictement supérieur à un, l'approche naïve consistant à écrire la distribution de probabilité de Y_t comme une somme sur le nombre de déplacements des particules vers l'avant et vers l'arrière ne fonctionne plus. À cause de la contrainte d'exclusion qui fait interagir les particules, l'ordre dans lequel les déplacements des particules vers l'avant et vers l'arrière s'effectuent devient important, ce qui empêche d'écrire la probabilité comme une somme sur le nombre de sauts de chaque particule. Par contre, l'approche par Ansatz de Bethe fonctionne toujours. La résolution des équations de Bethe sera cependant plus difficile. Elle fera l'objet de la deuxième partie de cette thèse (chapitres 5 et 6).

3.2.3 Propriétés de la fonction de grandes déviations du courant

On remarque que pour le système comportant une seule particule, toutes les quantités décrivant les fluctuations du courant (par exemple la probabilité $P(Y_t = Y | Y_0 = 0)$, la fonction de grandes déviations du courant $G(j)$, ou encore la fonction génératrice des cumulants du courant $E(\gamma)$) sont indépendantes de la taille du système. En effet, une particule ne ressent le fait que le système est fini qu'à travers ses interactions avec les autres particules dues à la contrainte d'exclusion.

On note que la fonction de grandes déviations du courant ainsi que sa dérivée

$$G'(j) = \log \left(\frac{j + \sqrt{j^2 + 4pq}}{2p} \right) \quad (3.73)$$

s'annulent en $j = p - q$. De plus, sa dérivée seconde

$$G''(j) = \frac{1}{\sqrt{j^2 + 4pq}} \quad (3.74)$$

est strictement positive. La fonction $G(j)$ est donc une fonction strictement convexe, qui s'annule seulement pour j égal à la valeur moyenne du courant $J = p - q$, et est strictement positive

pour $j \neq J$. Ainsi, la probabilité d'observer une valeur du courant $j = Y_t/t$ tends vers 0 exponentiellement vite aux temps longs si $j \neq J$. Le graphe de la fonction $G(j)$ est représenté figure 3.2 avec $p = 1$ et $q = 1/2$.

Près de $j = J$, la fonction $G(j)$ est quadratique à l'ordre dominant. Les corrections sont données par le développement

$$G(j) = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-1)^i (j-J)^i}{i(i-1)(p+q)^{2i-3}} \sum_{j=0}^{i-2} \binom{i-2}{j}^2 p^{i-j-2} (-q)^j. \quad (3.75)$$

Dans la limite $|j| \rightarrow \infty$, la fonction de grandes déviations croît comme $|j| \log |j|$, et les corrections sont données par

$$G(j) = |j| \log \left(\frac{|j|}{e\sqrt{pq}} \right) + j \log \sqrt{\frac{q}{p}} + (p+q) + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\binom{2i}{i}}{(i+1)^2} \frac{(-pq)^{i+1}}{|j|^{2i+1}}. \quad (3.76)$$

La probabilité que $|j| = |Y_t/t|$ soit très grand décroît donc comme $|j|^{j|t}$ quand t tend vers l'infini. On constate en particulier qu'à l'ordre dominant en $1/j$, la vitesse à laquelle cette probabilité tend vers zéro est indépendante du signe de j quand $|j|$ est grand. On verra que ce n'est plus nécessairement le cas pour un système avec une densité finie de particules.

On note que la relation de symétrie de Gallavotti-Cohen (2.75) $G(j) - G(-j) = j \log(q/p)$ est bien vérifiée dans le cas $n = 1$. En particulier, le développement de $G(j)$ autour de $j = 0$, donné par

$$G(j) = (\sqrt{p} - \sqrt{q})^2 + j \log \sqrt{\frac{q}{p}} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\binom{2i}{i}}{(i+1)(2i+1)} \frac{(-1)^i j^{2i+2}}{(4\sqrt{pq})^{2i+1}}, \quad (3.77)$$

ne fait intervenir que des puissances paires en j , excepté pour le terme linéaire dont l'expression est complètement contrainte par la relation de Gallavotti-Cohen.

Pour le modèle totalement asymétrique, l'expression de la fonction de grandes déviations du courant se simplifie. On trouve

$$G(j, q = 0) = \begin{cases} +\infty & \text{si } j < 0 \\ p - j + j \log \left(\frac{j}{p} \right) & \text{si } j > 0 \end{cases}. \quad (3.78)$$

Le fait que $G(j)$ est infini pour j négatif est simplement une conséquence de l'impossibilité que le courant soit négatif si la particule se déplace exclusivement vers l'avant.

3.3 Fluctuations du courant du modèle totalement asymétrique

Nous allons présenter ici le calcul de la fonction de grandes déviations du courant dans l'état stationnaire effectué dans [86, 137] par Derrida, Lebowitz et Appert pour le modèle totalement asymétrique. Nous utiliserons le fait que dans ce cas, les équations de Bethe se « découplent », ce qui permet de les résoudre exactement.

On veut calculer la fonction génératrice des cumulants du courant $E(\gamma)$, donnée en fonction des racines de Bethe par

$$\frac{E(\gamma)}{p} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{e^\gamma}{z_j} - 1 \right). \quad (3.79)$$

où les z_i forment la solution des équations de Bethe (3.29) correspondant à l'état stationnaire. Ils sont tels que $z_i \rightarrow 0$ quand $\gamma \rightarrow 0$. Nous avons vu à la section 3.1.3 que pour le modèle totalement asymétrique, les racines de Bethe sont solutions d'une équation polynomiale de degré L (3.40) dépendant d'un paramètre A , ce dernier étant fixé à posteriori par une équation d'auto-cohérence (3.41). Cette équation d'auto-cohérence peut en fait être remplacée par toute

équation vérifiée par les z_i qui fixe de manière unique le paramètre A . On utilisera ici l'équation (3.36) qui indique que l'état stationnaire possède une impulsion nulle :

$$\sum_{j=1}^n \log z_j = 0. \quad (3.80)$$

Nous allons transformer la somme sur les z_i dans les équations (3.79) et (3.80) en un intégrale de contour dans le plan complexe en utilisant la propriété suivante : soit h une fonction holomorphe dans un domaine du plan complexe et P un polynôme dont les racines sont simples, alors

$$\sum_j h(w_j) = \sum_j \frac{1}{2i\pi} \oint dz \frac{h(z)}{z - w_j} = \frac{1}{2i\pi} \oint dz \frac{h(z)P'(z)}{P(z)}, \quad (3.81)$$

les w_j étant les zéros du polynôme P à l'intérieur du contour d'intégration. On applique maintenant la relation précédente au polynôme $P(z) = (z - e^\gamma)^n - Az^L$, dont les racines de Bethe sont les zéros qui tendent vers 1 quand γ tend vers 0. On prendra comme contour d'intégration un petit cercle de centre e^γ qui entoure uniquement les n racines de Bethe quand γ est suffisamment petit. On peut alors écrire

$$\sum_{j=1}^n h(z_j) = \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{dz}{z} \frac{h(z)(nz(z - e^\gamma)^{n-1} - ALz^L)}{(z - e^\gamma)^n - Az^L}. \quad (3.82)$$

Le contour d'intégration ne contenant pas 0, on peut rajouter $-Lh(z)/z$ sous l'intégrale dans le second membre sans en changer la valeur. On obtient

$$\sum_{j=1}^n h(z_j) = \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{dz}{z} \frac{h(z)(z - e^\gamma)^{n-1}(nz - L(z - e^\gamma))}{(z - e^\gamma)^n - Az^L}. \quad (3.83)$$

En prenant $h(z) = e^\gamma/z - 1$ dans (3.83), on peut calculer $E(\gamma)$ (3.79) en fonction du paramètre A :

$$\frac{E(\gamma)}{p} = \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{dz}{z^2} \frac{L(z - e^\gamma) - nz}{1 - Az^L(z - e^\gamma)^{-n}}. \quad (3.84)$$

L'équation d'auto-cohérence pour A (3.41) indique que A est le produit des $z_i - e^\gamma$. Le paramètre A tend donc vers zéro quand γ tend vers zéro. On peut donc développer l'équation précédente autour de $A = 0$. On obtient

$$\frac{E(\gamma)}{p} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{2i\pi} \oint dz (L(z - e^\gamma) - nz) \frac{z^{kL-2}}{(z - e^\gamma)^{kn}}. \quad (3.85)$$

On développe alors z^{kL-2} autour de $z = e^\gamma$. Pour $k > 0$, on a

$$z^{kL-2} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{kL-2}{j} e^{(kL-2-j)\gamma} (z - e^\gamma)^j, \quad (3.86)$$

Si k est strictement positif, la somme sur j est non nulle seulement pour $j \leq kL-2$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{E(\gamma)}{p} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{2i\pi} \oint dz \sum_{j=0}^{\infty} \binom{kL-2}{j} & \left((L-n)e^{(kL-2-j)\gamma} (z - e^\gamma)^{j+1-kn} \right. \\ & \left. - ne^{(kL-1-j)\gamma} (z - e^\gamma)^{j-kn} \right). \end{aligned} \quad (3.87)$$

Le terme $k = 0$ a un résidu nul en $z = e^\gamma$. Le calcul des résidus pour $k > 0$ donne finalement l'expression suivante de $E(\gamma)$ en fonction du paramètre A :

$$\begin{aligned} \frac{E(\gamma)}{p} &= \sum_{k=1}^{\infty} A^k \left((L-n) \binom{kL-2}{kn-2} e^{(kL-kn)\gamma} - n \binom{kL-2}{kn-1} e^{(kL-kn)\gamma} \right) \\ &= -\frac{n(L-n)}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{kL}{kn} \frac{e^{k(L-n)\gamma} A^k}{kL-1}. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Il reste encore à relier γ au paramètre A . On prend pour cela $h(z) = \ln z$ dans l'équation (3.83), de manière à pouvoir utiliser l'équation (3.80). On obtient alors :

$$0 = \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{dz}{z(z-e^\gamma)} \frac{(nz - L(z-e^\gamma)) \ln z}{1 - Az^L(z-e^\gamma)^{-n}}. \quad (3.89)$$

On développe encore cette équation autour de $A = 0$. On trouve

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{2i\pi} \oint dz (nz - L(z-e^\gamma)) \frac{z^{kL-1} \ln z}{(z-e^\gamma)^{kn+1}}. \quad (3.90)$$

Notant que pour $k > 0$, on a

$$(nz - L(z-e^\gamma)) \frac{z^{kL-1}}{(z-e^\gamma)^{kn+1}} = -\frac{1}{k} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^{kL}}{(z-e^\gamma)^{kn}} \right), \quad (3.91)$$

on peut effectuer une intégration par parties pour éliminer le logarithme, sauf pour le terme $k = 0$. On trouve

$$0 = \frac{1}{2i\pi} \oint dz \frac{(nz - L(z-e^\gamma)) \ln z}{z(z-e^\gamma)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{2i\pi} \oint \frac{dz}{k} \frac{z^{kL-1}}{(z-e^\gamma)^{kn}}. \quad (3.92)$$

Développant z^{kL-1} autour de $z = e^\gamma$, on peut calculer le résidu du terme restant avec le logarithme. On obtient alors

$$-n\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{2i\pi} \oint \frac{dz}{k} \sum_{j=0}^{kL-1} \binom{kL-1}{j} e^{(kL-1-j)\gamma} (z-e^\gamma)^{j-kn}. \quad (3.93)$$

Le calcul des derniers résidus en $z = e^\gamma$ donne finalement

$$-n\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{kL-1}{kn-1} \frac{e^{k(L-n)\gamma} A^k}{k} = \frac{n}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{kL}{kn} \frac{e^{k(L-n)\gamma} A^k}{k}. \quad (3.94)$$

On a obtenu une relation entre γ et le paramètre A . On introduit finalement la variable

$$B = e^{(L-n)\gamma} A \quad (3.95)$$

à la place de la variable A , et on arrive au résultat de Derrida et Lebowitz [86] pour la fonction génératrice des cumulants du courant du modèle totalement asymétrique :

$$\frac{E(\gamma)}{p} = -\frac{n(L-n)}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{kL}{kn} \frac{B^k}{kL-1} \quad (3.96)$$

$$\gamma = -\frac{1}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{kL}{kn} \frac{B^k}{k}. \quad (3.97)$$

Dans la limite d'un système de grande taille avec une densité $\rho = n/L$ fixée, la formule de Stirling permet d'écrire les deux équations précédentes sous la forme

$$E(\gamma) - J\gamma \sim \sqrt{\frac{\rho(1-\rho)}{2\pi L^3}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-C)^k}{k^{3/2}} - \frac{(-C)^k}{k^{5/2}} \right) \quad (3.98)$$

$$\gamma \sqrt{2\pi\rho(1-\rho)L^3} \sim - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-C)^k}{k^{3/2}}. \quad (3.99)$$

On a introduit la valeur moyenne du courant

$$J = \frac{\rho(1-\rho)L^2}{L-1} \sim \rho(1-\rho)L + \rho(1-\rho) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L}\right), \quad (3.100)$$

et posé

$$C = -\sqrt{2\pi\rho(1-\rho)L}B/(\rho^\rho(1-\rho)^{1-\rho})^L. \quad (3.101)$$

Quand γ est d'ordre $L^{-3/2}$, la fonction $E(\gamma)$ prend alors la forme d'échelle suivante :

$$\boxed{E(\gamma) - J\gamma \sim \sqrt{\frac{\rho(1-\rho)}{2\pi L^3}} \mathcal{F}\left(\gamma \sqrt{2\pi\rho(1-\rho)L^3}\right)}, \quad (3.102)$$

où la fonction $\mathcal{F}$ est définie de manière implicite par les relations

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-C)^k}{k^{3/2}} - \frac{(-C)^k}{k^{5/2}} \right) \quad \text{et} \quad z = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-C)^k}{k^{3/2}}. \quad (3.103)$$

Par une transformée de Legendre par rapport à γ , on trouve que la fonction de grandes déviations du courant prend la forme d'échelle

$$G(j) \sim \sqrt{\frac{\rho(1-\rho)}{2\pi L^3}} \mathcal{H}\left(\frac{j-J}{\rho(1-\rho)}\right). \quad (3.104)$$

On peut montrer [86] que la fonction $\mathcal{H}$ a le comportement suivant en $\pm\infty$:

$$\mathcal{H}(z) \sim |z|^{3/2} \quad \text{quand } z \rightarrow -\infty \quad (3.105)$$

$$\mathcal{H}(z) \sim |z|^{5/2} \quad \text{quand } z \rightarrow +\infty. \quad (3.106)$$

On constate que la fonction $G(j)$ croît plus vite quand $j-J \rightarrow \infty$ que quand $j-J \rightarrow -\infty$. Ceci signifie que la distribution de probabilité de Y_t décroît plus rapidement quand $Y_t/t \gg J$ que quand $Y_t/t \ll J$. Cette asymétrie de la distribution de Y_t peut se comprendre par un argument simple [86] : pour augmenter la valeur du courant $j = Y_t/t$, il est nécessaire d'augmenter la vitesse de toutes les particules. Par contre pour diminuer sa valeur, il suffit de ralentir une seule particule à cause de la contrainte d'exclusion qui empêche les particules de se dépasser.

La forme d'échelle donnée en (3.102) pour la fonction génératrice des cumulants du courant ne fait intervenir les paramètres du système (densité ρ et nombre de sites L) que par les facteurs $\rho(1-\rho)/L^3$ et $\rho(1-\rho)L^3$. La partie non triviale de l'expression de $E(\gamma)$ est uniquement due à la fonction $\mathcal{F}$, qui est indépendante des paramètres du modèle. Cela tend à indiquer que l'expression (3.102) est en fait universelle, et donne en particulier accès à la fonction génératrice des cumulants de la hauteur de l'interface pour tous les modèles de hauteur appartenant à la classe d'universalité de l'équation Kardar-Parisi-Zhang (voir les sections 1.2.1 et 1.2.2 du chapitre 1). D'après (3.102), le k -ième cumulant du courant dépend de ρ et de L dans la limite d'échelle comme

$$E_k \propto (\rho(1-\rho))^{(k+1)/2} L^{3(k-1)/2}. \quad (3.107)$$

La dépendance en ρ et en L se simplifie donc dans

$$\frac{E_3^2}{E_2 E_4} \sim \frac{(16\sqrt{3} - 27)^2}{81(15 + 9\sqrt{2} - 16\sqrt{3})} \simeq 0.41517 \dots \quad (3.108)$$

Si l'expression (3.102) de $E(\gamma)$ est universelle, cette combinaison des cumulants doit l'être aussi. Dans [137], elle a été calculée par Derrida et Appert en effectuant des simulations Monte Carlo sur divers modèles de croissance. Les résultats obtenus étaient en bon accord avec l'hypothèse d'universalité.

Deuxième partie

Fluctuations du courant dans le
modèle partiellement asymétrique

Chapitre 4

Résumé des résultats sur les cumulants du courant du modèle d'exclusion

Nous résumons dans ce chapitre les résultats qui seront obtenus dans la suite de la deuxième partie de cette thèse pour les fluctuations du courant total dans le modèle d'exclusion partiellement asymétrique sur un anneau.

4.1 Régime de faible asymétrie et régime de forte asymétrie

On considère le modèle d'exclusion partiellement asymétrique sur un anneau de taille L , dans lequel les particules se déplacent vers l'avant et vers l'arrière avec des taux respectifs p et $q = xp$. Le comportement du système dépend fortement de la valeur du paramètre d'asymétrie x . Quand x est égal à 1, on a affaire à un système symétrique, qui atteint aux temps longs un état d'équilibre thermodynamique à courant nul, tandis que si $x = 0$, le système est totalement asymétrique et est décrit aux temps longs par un état stationnaire hors d'équilibre. Le système symétrique appartient à la classe d'universalité de l'équation d'Edwards-Wilkinson (EW), alors que le système totalement asymétrique appartient à la classe d'universalité de l'équation de Kardar-Parisi-Zhang (KPZ, voir la section 1.2.2 du chapitre 1).

Pour une valeur du paramètre x donnée, il est alors naturel de se demander à quelle classe d'universalité appartient le système. Une première indication consiste à calculer la valeur de l'exposant dynamique z , qui doit être égal à $3/2$ dans le régime KPZ et à 2 dans le régime EW. Utilisant l'Ansatz de Bethe, Kim a montré dans [58] que l'exposant dynamique reste égal à $3/2$ tant que $1 - x \gg 1/\sqrt{L}$, et qu'il passe à 2 pour $1 - x \ll 1/\sqrt{L}$.

La valeur de l'exposant dynamique n'est cependant pas suffisante pour caractériser la classe d'universalité. Une autre approche consiste à étudier les fluctuations du courant, qui doivent être gaussiennes dans le régime EW. Or, une transition de phase a été découverte par Bodineau et Derrida [138] dans le modèle d'exclusion faiblement asymétrique, pour lequel $1 - x$ est d'ordre $1/L$. Cette transition de phase sépare une phase de faible asymétrie pour laquelle les fluctuations du courant sont gaussiennes, et une phase de plus forte asymétrie pour laquelle les fluctuations du courant deviennent non gaussiennes. Nous reviendrons sur cette transition de phase dans la section 4.3 consacrée au modèle faiblement asymétrique.

Nous venons donc de voir que le modèle d'exclusion asymétrique présente deux changements de comportement, en $1 - x \sim 1/L$ et en $1 - x \sim 1/\sqrt{L}$. Il est alors naturel d'identifier le régime $1 - x \ll 1/L$ au régime EW, car il présente des fluctuations du courant gaussiennes et un exposant dynamique $z = 2$. De même, on identifie le régime $1 - x \gg 1/\sqrt{L}$ au régime KPZ, pour lequel l'exposant dynamique est $z = 3/2$. Le régime intermédiaire $1/L \ll 1 - x \ll 1/\sqrt{L}$, pour lequel l'exposant dynamique est $z = 2$, correspond à l'apparition d'une non gaussianité dans les fluctuations du courant. On le notera I dans la suite. Nous confirmerons dans les sections suivantes l'identification des trois régimes EW, I et KPZ par un calcul complet des fluctuations

du courant du modèle d'exclusion partiellement asymétrique.

Un argument simple permet de voir que les deux lois d'échelle pour l'asymétrie $1 - x \sim 1/L$ et $1 - x \sim 1/\sqrt{L}$ sont des séparations naturelles entre un régime de faible asymétrie et un régime de forte asymétrie. On considère une particule marquée dans le système. Pendant l'intervalle de temps $\Delta t \sim L^z$ (où z est l'exposant dynamique) nécessaire pour que le système atteigne son état stationnaire, la particule effectue un nombre de tour à travers le système proportionnel à $(1 - x)\Delta t/L \sim (1 - x)L^{z-1}$. Une séparation naturelle entre un système faiblement asymétrique et un système fortement asymétrique correspond alors à un nombre de tour d'ordre 1, ce qui implique $1 - x \sim L^{1-z}$. Comme deux exposants dynamiques sont possibles pour le modèle d'exclusion ($z = 2$ pour $1 - x \ll 1/\sqrt{L}$, et $z = 3/2$ pour $1 - x \gg 1/\sqrt{L}$), on retrouve finalement l'existence des deux échelles naturelles $1 - x \sim 1/L$ et $1 - x \sim 1/\sqrt{L}$ entre un régime de forte asymétrie et un régime de faible asymétrie.

Au chapitre 3, nous avons rappelé le résultat de Derrida et Lebowitz [86] pour la fonction génératrice des cumulants du courant $E(\gamma)$ du modèle totalement asymétrique (voir section 2.5 du chapitre 2). Elle prend la loi d'échelle suivante :

$$L^{3/2}E\left(\gamma = \frac{\sigma}{L^{3/2}}\right) - \rho(1 - \rho)\sigma L = f(\sigma) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{L}}\right), \quad (4.1)$$

la fonction f étant reliée par $f(\sigma) = \sqrt{\rho(1 - \rho)/2\pi}\mathcal{F}(\sigma\sqrt{2\pi\rho(1 - \rho)})$ à la fonction $\mathcal{F}$ donnée en (3.103). Dans les chapitres 5 et 6, nous allons obtenir le comportement de la fonction $E(\gamma)$ dans les deux régions $1 - x \sim 1/L$ et $1 - x \sim 1/\sqrt{L}$ correspondant à une asymétrie partielle. On trouvera (4.11)

$$L^2E\left(\gamma = \frac{\mu}{L}, 1 - x = \frac{\nu}{L}\right) - \rho(1 - \rho)(\mu^2 + \mu\nu)L = g(\mu, \nu) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L}\right), \quad (4.2)$$

et (6.124)

$$L^2E\left(\gamma = \frac{\sigma}{L^{3/2}}, 1 - x \sim \frac{\theta}{\sqrt{L}}\right) - \rho(1 - \rho)\sigma\theta L = h(\sigma, \theta) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{L}}\right). \quad (4.3)$$

On donnera en particulier une expression exacte pour les fonctions g (4.11) et h (6.124).

4.2 Cumulants du courant

Nous obtiendrons dans le chapitre 5 des expressions exactes pour la constante de diffusion et le troisième cumulant du courant total. Ces expressions seront ensuite généralisées dans le chapitre 6 à tous les cumulants d'ordre plus élevé. Nous verrons que ces expressions se simplifient dans la limite thermodynamique, où la taille du système L et le nombre de particules n tendent vers l'infini avec une densité $\rho = n/L$ fixée.

4.2.1 Constante de diffusion

On démontrera dans la suite par Ansatz de Bethe l'expression exacte suivante pour la constante de diffusion D du modèle d'exclusion sur un anneau de L sites avec n particules (5.95) :

$$\frac{D}{p} = \frac{2(1 - x)L}{L - 1} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{1 + x^k}{1 - x^k} \frac{\binom{L}{n+k} \binom{L}{n-k}}{\binom{L}{n}^2}. \quad (4.4)$$

Cette expression avait déjà été obtenue dans [85] par une modification de l'Ansatz matriciel pour l'état stationnaire. On rappelle que x est le rapport des taux de déplacement des particules vers

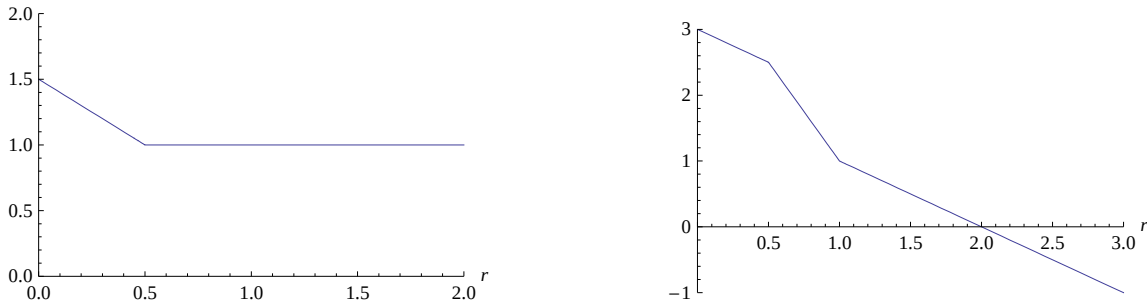


FIG. 4.1 – Comportement de la constante de diffusion D (graphe de gauche) et du troisième cumulant du courant E_3 (graphe de droite) en fonction de l'asymétrie. Pour une asymétrie $1-x$ d'ordre $1/L^r$ dans la limite où le système est grand, on a représenté l'exposant de L dans D et E_3 en fonction de r . En $r = 0$, le système est totalement asymétrique, tandis que $r \rightarrow \infty$ correspond au système symétrique.

l'arrière et vers l'avant, et que la constante de diffusion du courant total Y_t est définie par

$$D = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle Y_t \rangle^2 - \langle Y_t^2 \rangle}{t}. \quad (4.5)$$

Dans la limite d'un système de grande taille, l'expression exacte (4.4) pour la constante de diffusion devient

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{D}{p} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1-x) \rho^{3/2} (1-\rho)^{3/2} L^{3/2} & \text{si } \frac{1}{\sqrt{L}} \ll 1-x \text{ (régime KPZ, contient TASEP)} \\ \frac{D}{p} \sim 4\Phi \rho (1-\rho) L \int_0^\infty du \frac{u^2 e^{-u^2}}{\tanh(\Phi u)} & \text{si } 1-x \sim \frac{2\Phi}{\sqrt{\rho(1-\rho)L}} \\ \frac{D}{p} \sim 2\rho(1-\rho)L & \text{si } 1-x \ll \frac{1}{\sqrt{L}} \text{ (régimes EW et I, contient SSEP)} \end{array} \right. \quad (4.6)$$

On distingue donc deux grands régimes dans la limite thermodynamique, séparés par la région $1-x \sim 1/\sqrt{L}$. Le régime pour lequel l'asymétrie $1-x$ est grande devant $1/\sqrt{L}$ est le régime KPZ pour lequel l'évolution est décrite par l'équation de Kardar-Parisi-Zhang. Ce régime contient en particulier le modèle totalement asymétrique pour lequel $1-x$ reste fini pour $L \rightarrow \infty$. Le régime pour lequel $1-x$ est petit devant $1/\sqrt{L}$ correspond quant à lui à la réunion des deux régimes EW et I, et contient le cas du modèle symétrique. Les régimes EW et I ne se distinguent donc pas au niveau de la constante de diffusion.

On note que la constante de diffusion n'a pas le même ordre de grandeur selon que $1-x$ est très grand ou très petit devant $1/\sqrt{L}$ (voir figure 4.1) : les particules diffusent plus dans le système totalement asymétrique que dans le système symétrique. Il est intéressant de considérer la constante de diffusion moyenne par particule, obtenue en divisant D par $n^2 = \rho^2 L^2$ (2.58). Elle est égale au carré de la distance typique entre la particule et la position $J_{particule} \times t$ où celle-ci se trouverait si le courant ne fluctuait pas (2.58). On trouve que dans le cas symétrique, cette distance typique est d'ordre $\sqrt{t}/\sqrt{L}$, alors que dans le cas totalement asymétrique, elle est plus grande, d'ordre $\sqrt{t}/L^{1/4}$.

4.2.2 Troisième cumulant

On obtiendra aussi dans la suite l'expression exacte (5.123) pour le troisième cumulant du courant E_3 . Dans la limite d'un système de grande taille, le troisième cumulant du courant

prend la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{E_3}{p} \sim -(1-x) \left(\frac{8\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{3\pi}{2} \right) \rho^2 (1-\rho)^2 L^3 & \text{si } \frac{1}{\sqrt{L}} \ll 1-x \text{ (régime KPZ)} \\ \frac{E_3}{p} \sim \Phi h_3(\Phi) \rho^{3/2} (1-\rho)^{3/2} L^{5/2} & \text{si } 1-x \sim \frac{2\Phi}{\sqrt{\rho(1-\rho)L}} \\ \frac{E_3}{p} \sim -\frac{1}{60} (1-x)^3 \rho^3 (1-\rho)^3 L^4 & \text{si } \frac{1}{L} \ll 1-x \ll \frac{1}{\sqrt{L}} \text{ (régime I)} \\ \frac{E_3}{p} \sim \nu \rho^2 (1-\rho)^2 \left(1 - \frac{\nu^2}{60} \rho (1-\rho) \right) L & \text{si } 1-x \sim \frac{\nu}{L} \\ \frac{E_3}{p} \sim (1-x) \rho^2 (1-\rho)^2 L^2 & \text{si } 1-x \ll \frac{1}{L} \text{ (régime EW)} \end{array} \right. \quad (4.7)$$

La fonction h_3 sera déterminée au chapitre 5. On trouvera

$$h_3(\Phi) = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + 3 \int_0^\infty du \int_0^\infty dv \frac{(u^2 + v^2)e^{-u^2-v^2} - (u^2 + uv + v^2)e^{-u^2-uv-v^2}}{\tanh(\Phi u) \tanh(\Phi v)}. \quad (4.8)$$

On a cette fois-ci trois grands régimes pour le troisième cumulant du courant, séparés par les régions $1-x \sim 1/L$ et $1-x \sim 1/\sqrt{L}$. Quand $1-x$ est grand devant $1/\sqrt{L}$, on retrouve encore le régime KPZ. Il est séparé du régime intermédiaire I par la région $1-x \sim 1/\sqrt{L}$. Le régime I est quant à lui séparé du régime EW par la région $1-x \sim 1/L$ correspond au modèle faiblement asymétrique sur lequel nous reviendrons plus tard. On note que le troisième cumulant du courant n'a pas la même expression dans les régimes EW et I, contrairement au cas de la constante de diffusion.

L'expression pour $1-x \sim 1/\sqrt{L}$ donne, en prenant la limite $\Phi \rightarrow 0$ ou $\Phi \rightarrow \infty$, les expressions correctes dans les régimes I et KPZ, tandis que l'expression pour $1-x \sim 1/L$ donne, en prenant la limite $\nu \rightarrow 0$ ou $\nu \rightarrow \infty$, les expressions correctes dans les régimes EW et I.

Le troisième cumulant s'annule, comme tous les cumulants impairs, dans le cas du modèle symétrique $x = 1$. Ceci est simplement une conséquence de la symétrie entre les deux sens de parcours de l'anneau, qui est brisée dès que x devient différent de 1. Comme pour la constante de diffusion, le comportement du troisième cumulant en fonction de la taille du système dépend de l'asymétrie (voir figure 4.1).

4.2.3 Cumulants d'ordre plus élevé

L'existence d'un comportement particulier pour les cumulants du courant quand $1-x$ est d'ordre $1/L$ ou $1/\sqrt{L}$ n'est pas surprenant : on a vu que chacun de ces deux cas correspond à une séparation naturelle entre des systèmes avec une faible asymétrie et des systèmes avec une forte asymétrie. L'étude du modèle d'exclusion faiblement asymétrique au chapitre 5 et de l'expression exacte des cumulants d'ordre plus élevé au chapitre 6 confirme l'existence des trois régimes EW, I et KPZ pour les cumulants du courant, suivant la manière dont $1-x$ se compare avec $1/L$ et $1/\sqrt{L}$. Pour $k \geq 3$, le k -ième cumulant du courant E_k prend la forme suivante dans

la limite d'un grand système :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{E_k}{p} \sim (1-x) \frac{h_k(\infty)}{2} \rho^{(k+1)/2} (1-\rho)^{(k+1)/2} L^{3(k-1)/2} & \text{si } \frac{1}{\sqrt{L}} \ll 1-x \text{ (KPZ)} \\ \frac{E_k}{p} \sim \Phi h_k(\Phi) \rho^{k/2} (1-\rho)^{k/2} L^{(3k-4)/2} & \text{si } 1-x \sim \frac{2\Phi}{\sqrt{\rho(1-\rho)L}} \\ \frac{E_k}{p} \sim \frac{B_{2k-2}}{(k-1)!} (1-x)^k \rho^k (1-\rho)^k L^{2k-2} & \text{si } \frac{1}{L} \ll 1-x \ll \frac{1}{\sqrt{L}} \text{ (I)} \\ \frac{E_k}{p} \sim \sum_{j=\lceil k/2 \rceil}^k \binom{j}{k-j} \frac{k! B_{2j-2}}{j!(j-1)!} \nu^{2j-k} \rho^j (1-\rho)^j L^{k-2} & \text{si } 1-x \sim \frac{\nu}{L} \\ \frac{E_k}{p} \sim \begin{cases} \frac{k! B_{k-2}}{(\frac{k}{2})! (\frac{k-2}{2})!} (\rho(1-\rho))^{k/2} L^{k-2} & (k \text{ pair}) \\ \frac{(\frac{k+1}{2})! B_{k-1}}{(\frac{k+1}{2})! (\frac{k-1}{2})!} (1-x) (\rho(1-\rho))^{(k+1)/2} L^{k-1} & (k \text{ impair}) \end{cases} & \text{si } 1-x \ll \frac{1}{L} \text{ (EW)} \end{array} \right. \quad (4.9)$$

Les fonctions h_k seront obtenues au chapitre 6. Dans le régime EW, on a deux expressions suivant la parité de k . Ceci est relié au fait que les cumulants impairs du courant s'annulent pour le modèle symétrique, contrairement aux cumulants pairs.

4.3 Modèle faiblement asymétrique

Dans le modèle faiblement asymétrique (ou WASEP, pour *Weakly Asymmetric Exclusion Process*), l'asymétrie $1-x$ est d'ordre l'inverse de la taille du système. On pose

$$1-x = \frac{\nu}{L}. \quad (4.10)$$

Dans la limite $L \rightarrow \infty$ à densité $\rho = n/L$ fixée, on trouve que la fonction génératrice des cumulants du courant prend la forme

$$\begin{aligned} \tilde{E}(\mu, \nu) &= E\left(\gamma = \frac{\mu}{L}, x = 1 - \frac{\nu}{L}\right) \\ &= \frac{\rho(1-\rho)(\mu^2 + \mu\nu)}{L} + \frac{1}{L^2} \left(-\frac{\rho(1-\rho)\mu^2\nu}{2} + \varphi[\rho(1-\rho)(\mu^2 + \mu\nu)] \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^3}\right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

La fonction φ est définie en fonction des nombres de Bernoulli B_j par

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k-2}}{k!(k-1)!} z^k. \quad (4.12)$$

Plus précisément, l'expression (4.11) donne les deux premiers ordres en $1/L$ du développement de Taylor en $\mu = 0$ et $\nu = 0$ de $\tilde{E}(\mu, \nu)$. Nous reviendrons dans la suite sur ce point, qui est important.

Par dérivation par rapport à μ en $\mu = 0$, l'expression (4.11) donne l'ordre dominant et l'ordre sous dominant en L de la valeur moyenne du courant et de la constante de diffusion, ainsi que l'ordre dominant de tous les cumulants du courant d'ordre plus élevé. Pour $k \geq 3$, on trouve ainsi que le k -ième cumulant E_k est un polynôme de degré k en l'asymétrie ν :

$$E_k = \sum_{j=\lceil k/2 \rceil}^k \binom{j}{k-j} \frac{k! B_{2j-2}}{j!(j-1)!} \nu^{2j-k} \rho^j (1-\rho)^j L^{k-2}. \quad (4.13)$$

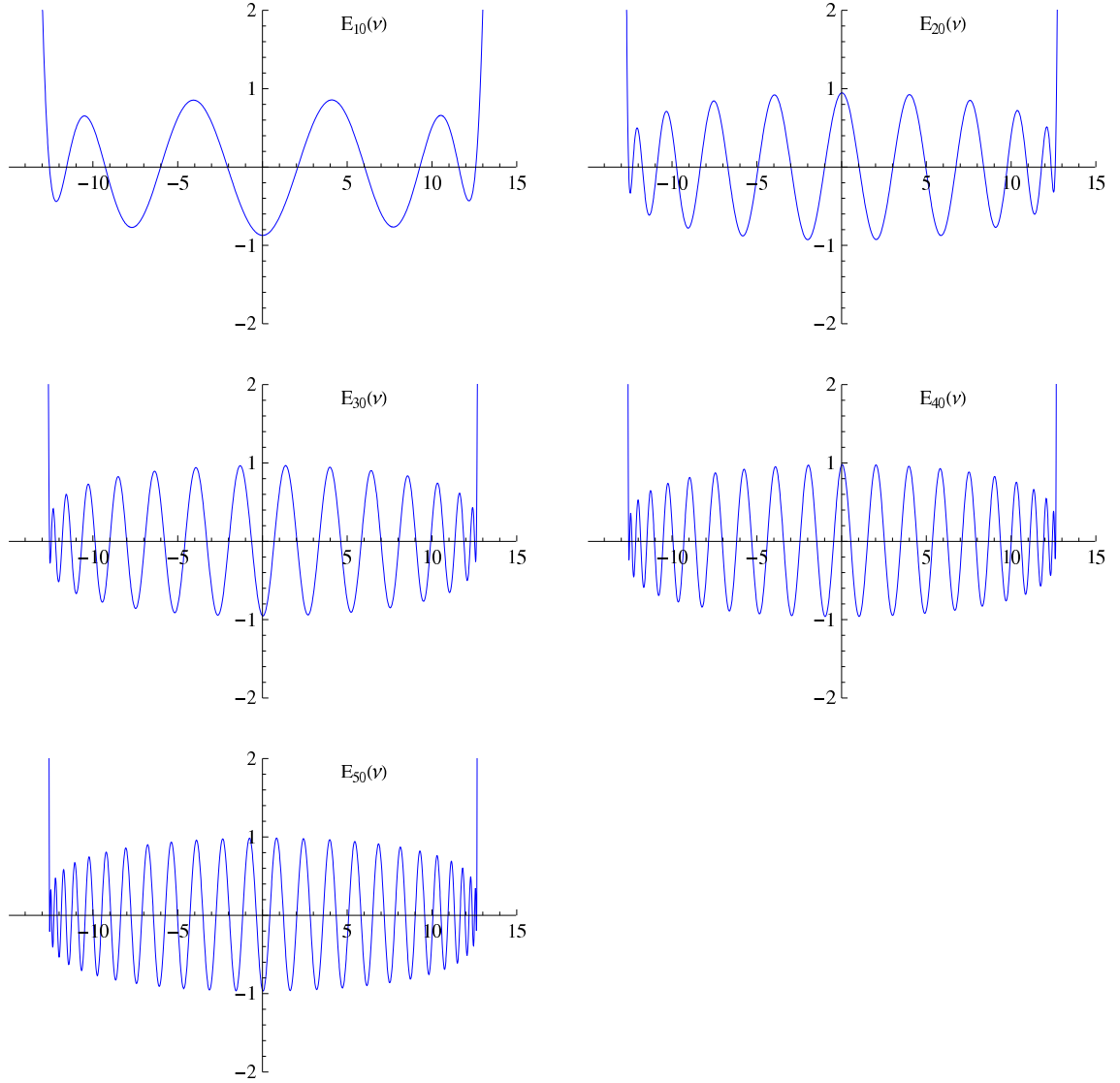


FIG. 4.2 – Graphe des cumulants du courant E_k du modèle d'exclusion faiblement asymétrique pour $k = 10, 20, 30, 40$ et 50 . On a représenté les quantités $\frac{k-2}{8\pi^2} \left(\pi e / \left(kL\sqrt{\rho(1-\rho)} \right) \right)^k E_k(\nu)$ en fonction de l'asymétrie ν pour une densité $\rho = 1/2$.

Les cumulants $E_{10}, E_{20}, E_{30}, E_{40}$ et E_{50} sont représentés en figure 4.2 en fonction de l'asymétrie ν . On note qu'ils présentent des oscillations en fonction du paramètre ν . Ce phénomène d'oscillations des cumulants du courant a aussi été observé dans le contexte de transport d'électrons à travers un point critique quantique [139].

On constate que la fonction génératrice des cumulants du courant (4.11) est une déformation assez simple de la fonction génératrice obtenue par Appert, Derrida, Lecomte et van Wijland [140] pour le modèle symétrique qui correspond à $\nu = 0$: les μ^2 sont remplacés par $\mu^2 + \mu\nu$, et $-\rho(1-\rho)\mu^2\nu/2$ est apparu dans le terme sous dominant. Cette déformation est en fait nécessaire pour assurer que la fonction génératrice des cumulants du courant reste invariante par la symétrie de Gallavotti-Cohen (voir section 2.5.5 du chapitre 2), qui s'écrit pour $1-x = \nu/L$

$$\tilde{E}(\mu, \nu) = \tilde{E} \left(-\mu - \nu - \frac{\nu^2}{2L} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{L^2} \right), \nu \right). \quad (4.14)$$

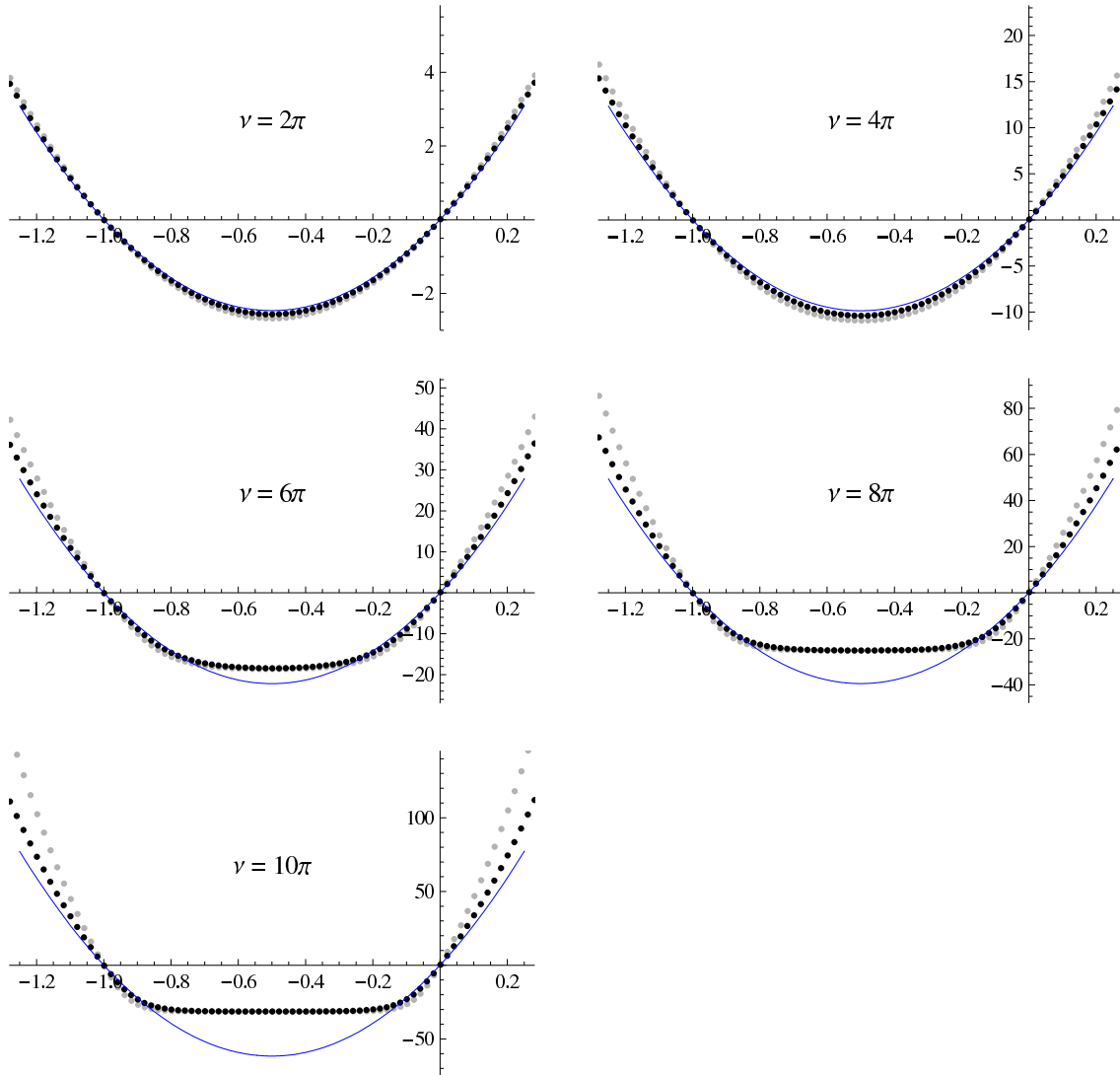


FIG. 4.3 – Fonction génératrice des cumulants du courant $L\tilde{E}(\mu, \nu)$ au demi-remplissage, en fonction de $w = \mu/(L \log x)$, pour w compris entre $w = -1.25$ et son symétrique par la symétrie de Gallavotti-Cohen $w = 0.25$. Les cinq graphes correspondent aux cinq valeurs de l'asymétrie $\nu = 2\pi$, $\nu = 4\pi$, $\nu = 6\pi$, $\nu = 8\pi$, $\nu = 10\pi$. La courbe pleine représente l'ordre dominant de l'expression (4.11) obtenue par Ansatz de Bethe. Les points gris correspondent à une résolution numérique de l'équation de Bethe fonctionnelle pour $n = 25$ et $L = 50$. Les points noirs correspondent à une résolution numérique de l'équation de Bethe fonctionnelle pour $n = 50$ et $L = 100$.

On rappelle que l'on a vu dans la section précédente que l'étude des formules exactes pour les quatre premiers cumulants permet de penser que la formule (4.11) pour la fonction génératrice des cumulants du courant est valide dans tout le régime où $1 - x \ll 1/\sqrt{L}$.

4.3.1 Transition de phase

Le modèle d'exclusion faiblement asymétrique présente une transition de phase pour une valeur ν_c de l'asymétrie, séparant une phase de faible asymétrie $\nu < \nu_c$ dans laquelle les fluctuations du courant sont gaussiennes (à la limite thermodynamique), et une phase de forte asymétrie $\nu > \nu_c$ dans laquelle les fluctuations du courant deviennent non gaussiennes. Cette

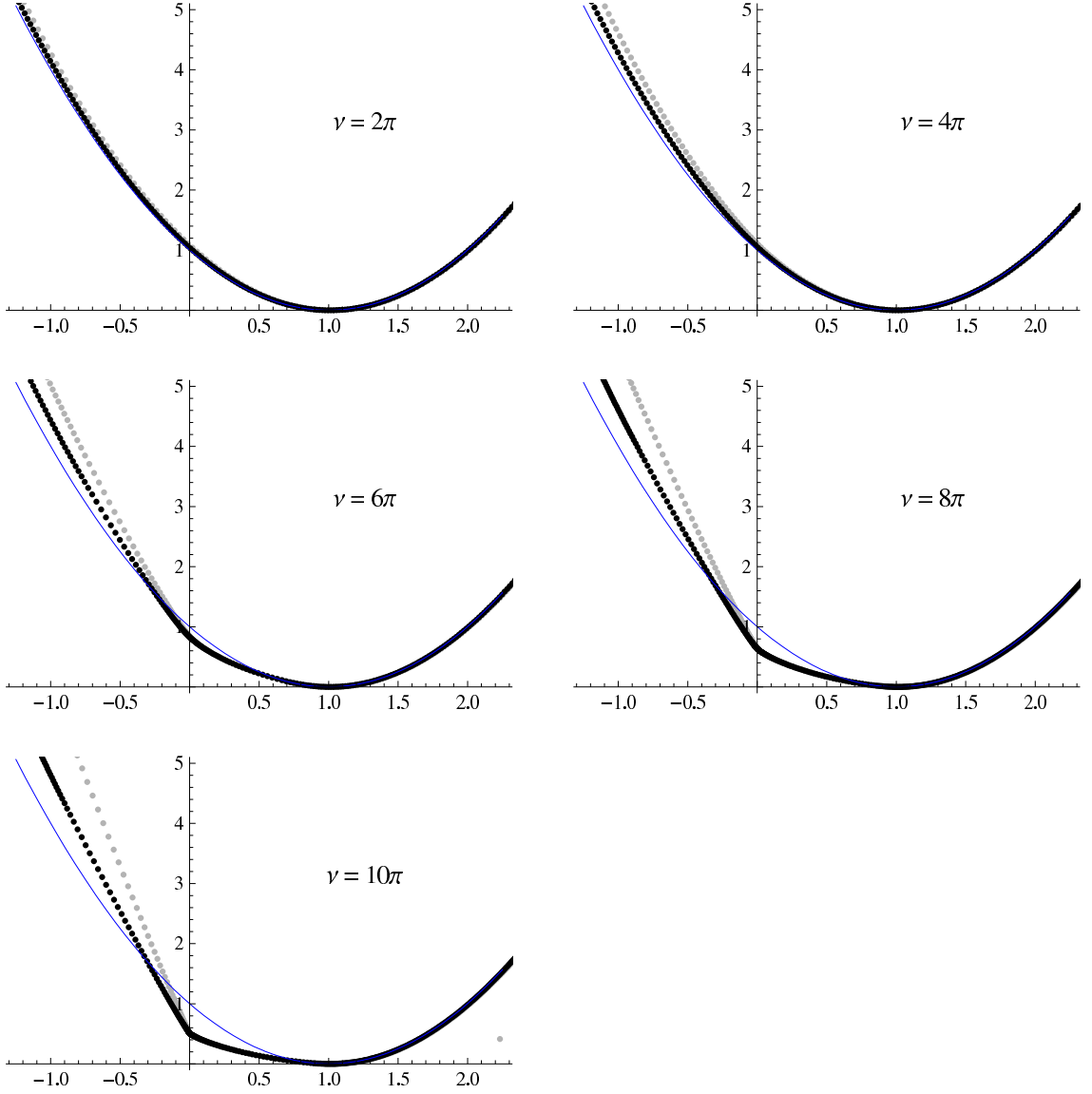


FIG. 4.4 – Fonction de grandes déviations du courant $2D \times G(j, \nu)/J^2$ au demi-remplissage, en fonction de $w = j/J$, pour w compris entre $w = -1.25$ et $w = 2.25$. Les cinq graphes correspondent aux cinq valeurs de l'asymétrie $\nu = 2\pi$, $\nu = 4\pi$, $\nu = 6\pi$, $\nu = 8\pi$, $\nu = 10\pi$. La courbe pleine représente l'expression (4.20) quadratique en j de $G(j, \nu)$ dans la phase gaussienne. Les points gris proviennent d'une résolution numérique de l'équation de Bethe fonctionnelle pour $n = 25$ et $L = 50$. Les points noirs proviennent d'une résolution numérique de l'équation de Bethe fonctionnelle pour $n = 50$ et $L = 100$.

transition de phase a été découverte par Bodineau et Derrida [138] par une approche basée sur la « théorie des fluctuations macroscopiques » développée par Bertini, De Sole, Gabrielli, Jona-Lasinio et Landim [141, 142, 143].

Pour un système de particules diffusives soumises à un champ externe, la théorie des fluctuations macroscopiques donne au premier ordre en le champ externe la probabilité d'observer un profil de densité $\{\hat{\rho}(u, \tau)\}$ et un courant local $\{\hat{j}(u, \tau)\}$ reliés par la relation de conservation

$$\frac{d\hat{\rho}(u, \tau)}{d\tau} = -\frac{d\hat{j}(u, \tau)}{du}. \quad (4.15)$$

La variable $u \in [0, 1]$ représente la position dans le système, et la variable $\tau \in [0, t]$ le temps. Pour le modèle d'exclusion faiblement asymétrique avec L sites observé pendant un intervalle de temps t d'ordre L^2 , la théorie des fluctuations macroscopiques donne [138, 81]

$$P(\{\hat{j}(u, \tau)\}, \{\hat{\rho}(u, \tau)\}) \sim \exp \left[-\frac{1}{L} \int_0^t d\tau \int_0^1 du \frac{[\hat{j}(u, \tau) + \frac{d\hat{\rho}(u, \tau)}{du} - p\nu\hat{\rho}(u, \tau)(1 - \hat{\rho}(u, \tau))]^2}{4p\hat{\rho}(u, \tau)(1 - \hat{\rho}(u, \tau))} \right]. \quad (4.16)$$

Pour le modèle ouvert, les densités $\hat{\rho}(0, \tau)$ et $\hat{\rho}(1, \tau)$ doivent être prises égales aux densités des réservoirs de particules. Pour le modèle sur un anneau, les fonctions $\hat{j}(u, \tau)$ et $\hat{\rho}(u, \tau)$ doivent être choisies périodiques de période 1 par rapport à la variable u , avec une densité moyenne $\rho = \int_0^1 \hat{\rho}(u, \tau) du$ fixée.

Pour le modèle symétrique $\nu = 0$, la relation (4.16) permet en particulier de retrouver [144] la fonctionnelle de grandes déviations de la densité du modèle d'exclusion ouvert, que l'on a écrite en (2.35) au chapitre 2.

La relation (4.16) permet aussi de calculer la fonction de grandes déviations du courant. On définit pour cela la moyenne temporelle j des $\hat{j}(u, \tau)$ par

$$j = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \hat{j}(u, \tau) d\tau. \quad (4.17)$$

On rappelle que la fonction de grandes déviations du courant $G(j)$ est donnée par le comportement aux temps longs de la probabilité d'observer une certaine valeur j du courant :

$$P(j) \sim e^{-tG(j)}. \quad (4.18)$$

D'après (4.16), la fonction de grandes déviations du courant est donc donnée pour le modèle faiblement asymétrique par

$$G(j) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{Lt} \min_{\{\hat{\rho}(u, \tau)\}} \int_0^t d\tau \int_0^1 du \frac{[\hat{j}(u, \tau) + \frac{d\hat{\rho}}{du}(u, \tau) - p\nu\hat{\rho}(u, \tau)(1 - \hat{\rho}(u, \tau))]^2}{4p\hat{\rho}(u, \tau)(1 - \hat{\rho}(u, \tau))} \right]. \quad (4.19)$$

La calcul de $G(j)$ se ramène donc à la détermination du profil de densité optimal dans l'équation précédente. Pour le modèle symétrique $\nu = 0$, le profil de densité optimal est le profil plat $\rho(u) = \rho$ [138], qui donne pour la fonction de grandes déviations du courant

$$G(j, \nu) = \frac{[j - p\nu\rho(1 - \rho)]^2}{4p\rho(1 - \rho)L} = \frac{(j - J)^2}{2D}, \quad (4.20)$$

où la valeur moyenne du courant J et la constante de diffusion D sont données dans la limite $L \rightarrow \infty$ par

$$J = p\nu\rho(1 - \rho) \quad \text{et} \quad D = 2p\rho(1 - \rho)L. \quad (4.21)$$

Par transformée de Legendre par rapport à j , on trouve à l'ordre dominant en L l'expression suivante pour la fonction génératrice des cumulants du courant $\tilde{E}(\mu, \nu)$:

$$\tilde{E}(\mu, \nu) = \frac{p\rho(1 - \rho)(\mu\nu + \mu^2)}{L} = \frac{J\mu}{L} + \frac{D\mu^2}{2L^2}. \quad (4.22)$$

L'expression (4.20) pour $G(j, \nu)$ est quadratique en j , tandis que l'expression (4.22) pour $\tilde{E}(\mu, \nu)$ est quadratique en μ . Les fluctuations du courant sont donc gaussiennes si le profil de densité optimal est le profil plat. On note que l'expression (4.22) pour $\tilde{E}(\mu, \nu)$ est bien égale à l'ordre dominant en L à l'expression (4.11) obtenue par Ansatz de Bethe.

Pour une valeur non nulle de l'asymétrie ν , le profil de densité qui minimise $G(j)$ dans (4.19) n'est plus nécessairement le profil plat. La stabilité du profil plat a été étudiée dans [138]

par Bodineau et Derrida en lui ajoutant une perturbation dépendant de u et de τ . Il existe une valeur critique ν_c de l'asymétrie au dessus de laquelle l'ajout de cette perturbation permet d'obtenir une valeur de $G(j)$ plus faible que l'expression quadratique (4.20) si $|j|$ est inférieur à une valeur $j_c(\nu)$. Pour $\nu > \nu_c$, les fluctuations du courant deviennent non gaussiennes.

La transition entre la phase gaussienne et la phase non gaussienne peut donc s'interpréter physiquement en considérant le profil de densité qu'adopte le système quand le courant circulant à l'intérieur est conditionné à une valeur j différente de la valeur moyenne J du courant. Dans la phase gaussienne, le profil de densité reste plat, comme quand la valeur du courant n'est pas fixée à une valeur j . Dans la phase non gaussienne, le profil de densité dépend de la valeur du courant j . Si $|j|$ est supérieur à une valeur $j_c(\nu)$, le profil de densité reste plat, comme dans la phase gaussienne. Si $|j|$ est inférieur à $j_c(\nu)$, par contre, le profil de densité devient non stationnaire : il se déplace avec le temps à une certaine vitesse.

Dans la phase non gaussienne $\nu > \nu_c$, ni la fonction génératrice des cumulants du courant ni la fonction de grandes déviations du courant ne sont gaussiennes, même à l'ordre dominant en la taille du système. Ceci n'est pas en contradiction avec le fait que, à l'ordre dominant en L , l'expression (4.11) de $\tilde{E}(\mu, \nu)$ obtenue par Ansatz de Bethe est quadratique en μ . Comme cela a été dit précédemment, cette expression donne seulement le comportement pour L grand du développement de Taylor en $\mu = 0$ de $\tilde{E}(\mu, \nu)$. Le développement en puissances de μ est effectué avant de prendre la limite $L \rightarrow \infty$, ce qui donne en particulier la limite thermodynamique de tous les cumulants du courant, mais pas la limite thermodynamique de $\tilde{E}(\mu, \nu)$ pour μ loin de zéro. Ceci peut par exemple indiquer que la fonction $\tilde{E}(\mu, \nu)$ possède une singularité essentielle en $\mu = 0$ si $\nu > \nu_c$: elle serait alors égale à son développement de Taylor en $\mu = 0$ (4.11) plus une fonction (non nulle) qui s'annule en $\mu = 0$ ainsi que toutes ses dérivées successives.

4.3.2 Position de la transition de phase

La transition entre le profil plat et le profil non stationnaire est visible sur la fonction de grandes déviations du courant par une non analyticité en $j = \pm j_c(\nu)$. Celle-ci correspond à une non analyticité de la fonction génératrice des cumulants du courant $\tilde{E}(\mu, \nu)$ en $\mu = \mu_{c,1}(\nu)$ et $\mu = \mu_{c,2}(\nu)$, reliés par la symétrie de Gallavotti-Cohen $\mu_{c,1}(\nu) + \mu_{c,2}(\nu) \sim -\nu$. Cette non analyticité est visible sur l'expression (4.11) de $\tilde{E}(\mu, \nu)$. D'après la formule asymptotique des nombres de Bernoulli

$$B_{2k} \sim (-1)^{k-1} 4\sqrt{k\pi} \left(\frac{k}{\pi e} \right)^{2k}, \quad (4.23)$$

on observe que la fonction $\varphi(z)$ est singulière en $z = -\pi^2$. La fonction $\tilde{E}(\mu, \nu)$ présente donc une non analyticité en μ tel que $\rho(1-\rho)(\mu^2 + \mu\nu) = -\pi^2$. Cette équation a une solution réelle pour μ si $\rho(1-\rho)\nu^2 > 4\pi$. Des non analyticités apparaissent donc dans $\tilde{E}(\mu, \nu)$ dès que $\nu > \nu_c$, donné par

$$\nu_c = \frac{2\pi}{\sqrt{\rho(1-\rho)}}. \quad (4.24)$$

Dans ce cas, $\tilde{E}(\mu, \nu)$ est non analytique en

$$\mu_{c,1|2}(\nu) = \frac{-\nu \pm \sqrt{\nu^2 - \frac{4\pi^2}{\rho(1-\rho)}}}{2}. \quad (4.25)$$

Comme nous avons utilisé l'expression (4.11), qui donne la valeur de la fonction $\tilde{E}(\mu, \nu)$ pour μ fini uniquement dans la phase gaussienne, les expressions précédentes pour $\mu_{c,1}(\nu)$ et $\mu_{c,2}(\nu)$ sont correctes uniquement près de $\nu = \nu_c$. Comme $\tilde{E}(\mu, \nu)$ et $G(j, \nu)$ sont reliées par une transformée de Legendre, on peut écrire

$$G(j, \nu) = j \frac{\mu(j)}{L} - \tilde{E}(\mu(j), \nu), \quad (4.26)$$

la fonction $\mu(j)$ étant définie par

$$j = L \frac{d}{d\mu} \tilde{E}(\mu(j), \nu) . \quad (4.27)$$

Par la transformée de Legendre, les valeurs $\mu_{c,1}(\nu)$ et $\mu_{c,2}(\nu)$ pour lesquelles $\tilde{E}(\mu, \nu)$ est singulière correspondent aux valeurs $\pm j_c(\nu)$ où $G(j, \nu)$ présente des non analyticités. D'après l'expression (4.25) de $\mu_{c,1}(\nu)$ et $\mu_{c,2}(\nu)$, on trouve, au voisinage de $\nu = \nu_c$:

$$\frac{j_c(\nu)}{p} = \rho(1 - \rho) \sqrt{\nu^2 - \frac{4\pi^2}{\rho(1 - \rho)}} . \quad (4.28)$$

Dans la transformée de Legendre, la fonction $\mu(j)$ envoie l'intervalle $|j| < j_c(\nu)$, pour lequel le profil de densité n'est pas stationnaire, vers l'intervalle $\mu_{c,1}(\nu) < \mu < \mu_{c,2}(\nu)$, qui correspond à la région du plan (μ, ν) telle que $\rho(1 - \rho)(\mu^2 + \mu\nu) < -\pi^2$. Ceci conduit, à l'ordre dominant de l'expression (4.11) de $\tilde{E}(\mu, \nu)$, à

$$\frac{\tilde{E}(\mu, \nu)}{p} < -\frac{\pi^2}{L} . \quad (4.29)$$

Cela correspond bien au critère trouvé dans [138] par Bodineau et Derrida.

La fonction génératrice des cumulants du courant $\tilde{E}(\mu, \nu)$ est tracée en fonction de μ figure 4.3 pour quelques valeurs de ν . Ces courbes ont été obtenues en résolvant numériquement l'équation de Bethe fonctionnelle pour un système de taille 100 contenant 50 particules (voir section 5.5). Par transformée de Legendre, on obtient aussi le graphe de la fonction de grandes déviations du courant $G(j, \nu)$, qui est représenté en figure 4.4 pour différentes valeurs de ν . Les courbes pour $\tilde{E}(\mu, \nu)$ sont bien symétriques par rapport à l'axe $2\mu = \log x$, comme l'impose la symétrie de Gallavotti-Cohen. On constate que pour $\nu < \nu_c = 4\pi$, les deux fonctions $\tilde{E}(\mu, \nu)$ et $G(j, \nu)$ sont bien gaussiennes, tandis que pour $\nu > 4\pi$, les fonctions diffèrent fortement d'une parabole. À mesure que ν croît, on constate qu'un plateau se forme dans la partie basse de la courbe de $\tilde{E}(\mu, \nu)$, ce qui correspond, pour $G(j, \nu)$, à un changement de plus en plus rapide de la pente de $G(j, \nu)$ autour de $j = 0$.

4.4 Expression combinatoire pour les cumulants du courant

Les expressions explicites (6.5) et (6.6) pour la constante de diffusion et le troisième cumulant du courant total ont une forme similaire. Ces deux expressions font intervenir des sommes (sommes simples pour la constante de diffusion, sommes doubles pour le troisième cumulant du courant) de produits de coefficients du binôme et de facteurs

$$\frac{1 + x^k}{1 - x^k} . \quad (4.30)$$

La similarité entre ces deux expressions indique que des expressions exactes du même type doivent exister pour les cumulants d'ordre plus élevé. Partant du calcul explicite par Ansatz de Bethe des premiers cumulants pour de petits systèmes, nous conjecturons au chapitre 6 une expression combinatoire explicite pour tous les cumulants du courant (6.117). Cette expression redonne en particulier celle obtenue par Derrida et Lebowitz dans [86] pour le modèle totalement asymétrique. Elle permet aussi d'obtenir la valeur des fonctions h_k (4.9) pour les cumulants du courant dans la limite d'échelle $1 - x \sim 1/\sqrt{L}$.

Les expression (6.117) pour les cumulants du courant font intervenir des structures en arbre, même dans la limite d'échelle $1 - x \sim 1/\sqrt{L}$ quand la taille du système tend vers l'infini : les cumulants du courant du modèle d'exclusion asymétrique ont donc un caractère combinatoire inhérent, même pour des systèmes de grande taille. Nous détaillerons cela au chapitre 6.

Chapitre 5

Ansatz de Bethe fonctionnel pour le modèle d'exclusion asymétrique

Nous avons montré dans le chapitre précédent que l'Ansatz de Bethe permet de diagonaliser la matrice de Markov du modèle d'exclusion asymétrique sur un anneau, ainsi que sa déformation reliée aux fluctuations du courant. Les valeurs propres de ces matrices s'expriment en fonction des solutions d'un système d'équations polynomiales couplées, les équations de Bethe. Ces équations sont en général difficiles à résoudre. Elles se simplifient cependant dans le cas particulier du système totalement asymétrique, pour lequel toutes les particules se déplacent dans la même direction. Cette simplification des équations de Bethe permet alors de calculer le gap du système ainsi que la fonction de grandes déviations du courant.

Dans ce chapitre, nous allons montrer qu'une reformulation des équations de Bethe sous la forme d'une équation fonctionnelle permet de traiter le cas plus général du modèle partiellement asymétrique. Par un développement perturbatif de cette équation fonctionnelle, nous obtiendrons des expressions exactes pour les premiers cumulants du courant, à la fois pour des systèmes de taille finie et dans la limite thermodynamique. Dans le cas du système faiblement asymétrique, pour lequel l'asymétrie entre les taux de saut vers l'avant et vers l'arrière est de l'ordre de l'inverse de la taille du système, nous obtiendrons aussi une expression asymptotique pour tous les cumulants du courant.

5.1 Formulation fonctionnelle des équations de Bethe

Dans cette section, nous réécrivons sous la forme d'une équation fonctionnelle les équations de Bethe obtenues au chapitre 3. Cette équation fonctionnelle fait intervenir deux polynômes Q et R . Nous montrons ensuite comment certains des résultats du chapitre 3 s'expriment en fonction de ces polynômes. Nous donnons tout d'abord la valeur des polynômes Q et R correspondant à l'état stationnaire du système comportant une seule particule. Nous montrons ensuite que le calcul de la fonction génératrice des cumulants du courant dans le cas totalement asymétrique devient un peu plus simple si l'on utilise l'équation de Bethe fonctionnelle.

5.1.1 Passage à l'équation fonctionnelle

On rappelle les équations de Bethe du modèle d'exclusion asymétrique, ainsi que l'expression de la valeur propre $E(\gamma)$ de la matrice déformée $M(\gamma)$ correspondant à une solution des

équations de Bethe :

$$z_i^L = (-1)^{n-1} \prod_{j=1}^n \frac{qe^{-\gamma} z_i z_j - (p+q)z_i + pe^\gamma}{qe^{-\gamma} z_i z_j - (p+q)z_j + pe^\gamma} \quad (5.1)$$

$$\frac{E(\gamma)}{p} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{e^\gamma}{z_j} + \frac{xz_j}{e^\gamma} - (1+x) \right) . \quad (5.2)$$

On effectue le changement de variables suivant sur les racines de Bethe z_i :

$$y_i = \frac{1 - e^{-\gamma} z_i}{1 - xe^{-\gamma} z_i} \quad \Leftrightarrow \quad z_i = e^\gamma \frac{1 - y_i}{1 - xy_i} . \quad (5.3)$$

On note que ce changement de variables n'est bien défini que si $x \neq 1$. Il faudra prendre quelques précautions dans la limite $x \rightarrow 1$ comme on le verra plus tard. En fonction des y_i , les équations de Bethe et la valeur propre se réécrivent sous la forme

$$e^{L\gamma} \left(\frac{1 - y_i}{1 - xy_i} \right)^L = - \prod_{j=1}^n \frac{y_i - xy_j}{xy_i - y_j} \quad (5.4)$$

$$\frac{E(\gamma)}{p} = (1-x) \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{1 - y_i} - \frac{1}{1 - xy_i} \right) . \quad (5.5)$$

En fonction des y_i , l'équation (3.32), qui s'obtient en effectuant le produit des équations de Bethe, est donnée par

$$e^{nL\gamma} \left(\prod_{i=1}^n \frac{1 - y_i}{1 - xy_i} \right)^L = 1 . \quad (5.6)$$

On constate que les termes quadratiques $z_i z_j$ qui apparaissaient dans les équations de Bethe en les variables z_i ont disparu dans les variables y_i . Cependant, même écrites sous la forme (5.4), les équations de Bethe sont toujours fortement couplées, ce qui rend leur résolution difficile. On va maintenant transformer les équations de Bethe (5.4) en une équation fonctionnelle. On introduit le polynôme Q dont les zéros sont les racines de Bethe y_i :

$$Q(t) = \prod_{j=1}^n (t - y_j) . \quad (5.7)$$

Définissant aussi le polynôme P par

$$P(t) = e^{L\gamma}(1-t)^L Q(xt) + x^n(1-xt)^L Q(t/x) , \quad (5.8)$$

les équations de Bethe se réécrivent alors sous la forme

$$P(t) = 0 \quad \text{si } t = y_i . \quad (5.9)$$

Ainsi, le polynôme en t (de degré $n+L$) $P(t)$ s'annule quand t prend pour valeur l'un quelconque des zéros du polynôme Q , qui sont génériquement distincts. Cette remarque, cruciale, implique que le polynôme Q divise nécessairement le polynôme P . Si l'on appelle R le quotient des polynômes P et Q , on peut alors écrire

$$\boxed{Q(t)R(t) = e^{L\gamma}(1-t)^L Q(xt) + x^n(1-xt)^L Q(t/x)} . \quad (5.10)$$

Cette équation fonctionnelle est connue sous le nom d'équation TQ (scalaire) de Baxter [46] (le polynôme R est parfois noté T car il correspond à la valeur propre d'une matrice de transfert,

comme on le verra au chapitre 9). Elle dépend de deux polynômes inconnus : Q de degré n , et R de degré L . L'équation fonctionnelle (5.10) est équivalente aux équations de Bethe (5.4) : si l'on remplace t par l'un des y_i dans (5.10), $Q(y_i)$ s'annule ce qui est précisément l'équation (5.4). En particulier, l'équation fonctionnelle a plusieurs solutions correspondant à différents états propres de la matrice $M(\gamma)$.

On note que l'on peut multiplier $Q(t)$ par une constante dans l'équation fonctionnelle (5.10) : on choisira toujours dans la suite la normalisation de $Q(t)$ comme dans (5.7), de telle sorte que son terme de plus haut degré soit égal à 1. Ceci implique pour $R(t)$, en identifiant les termes de degré $L + n$ dans l'équation (5.10) :

$$e^{-n\gamma}R(t) - (x^L e^{-n\gamma} + x^n e^{(L-n)\gamma})(-1)^L t^L \text{ est un polynôme en } t \text{ de degré } L - 1. \quad (5.11)$$

L'équation (5.6) s'écrit en fonction du polynôme Q comme

$$\left(\frac{e^{n\gamma} Q(1)}{x^n Q(1/x)} \right)^L = 1. \quad (5.12)$$

En utilisant la valeur de l'équation (5.10) en $t = 1$, on obtient alors, en fonction du polynôme R :

$$\left(\frac{e^{n\gamma}(1-x)^L}{R(1)} \right)^L = 1. \quad (5.13)$$

En fonction de Q , l'expression (5.5) de la valeur propre devient

$$\boxed{\frac{E(\gamma)}{p} = (1-x) \left(\frac{Q'(1)}{Q(1)} - \frac{1}{x} \frac{Q'(1/x)}{Q(1/x)} \right)}. \quad (5.14)$$

La valeur de l'équation de Bethe fonctionnelle et de sa dérivée par rapport à t au point $t = 1$ donne alors la relation suivante pour la valeur propre en fonction du polynôme R :

$$\frac{E(\gamma)}{p} = -Lx - (1-x) \frac{R'(1)}{R(1)}. \quad (5.15)$$

On va s'intéresser particulièrement dans la suite à la solution de l'équation de Bethe fonctionnelle correspondant à l'état stationnaire. En fonction des z_i , celle-ci est la seule telle tous les z_i tendent vers 1 quand γ tend vers 0 (3.35). En fonction des y_i , la solution stationnaire des équations de Bethe est donc caractérisée par (5.3)

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} y_i = 0. \quad (5.16)$$

Pour le polynôme Q cela correspond à

$$\boxed{\lim_{\gamma \rightarrow 0} Q(t) = t^n}, \quad (5.17)$$

et pour le polynôme R à

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} R(t) = (1 - xt)^L + x^n (1 - t)^L. \quad (5.18)$$

La nature même de la caractérisation de l'état stationnaire au niveau des solutions des équations de Bethe amène à effectuer un développement perturbatif autour de $\gamma = 0$ des équations de Bethe. Un des intérêts majeurs des polynômes Q et R par rapport aux racines de Bethe z_i ou y_i tient au fait que les polynômes Q et R ont un développement autour de $\gamma = 0$ en puissances entières de γ , contrairement aux z_i et y_i qui ont un développement en puissances fractionnaires de γ . La solution stationnaire des équations de Bethe a aussi comme propriété d'avoir une impulsion totale nulle, ce qui correspond à prendre

$$\prod_{i=1}^n \frac{1 - y_i}{1 - xy_i} = e^{-n\gamma} \quad (5.19)$$

dans l'équation (5.6). Pour les polynômes $Q(t)$ et $R(t)$, cela implique que

$$x^n Q(1/x) = e^{n\gamma} Q(1) , \quad (5.20)$$

et

$$R(1) = e^{n\gamma} (1-x)^L . \quad (5.21)$$

5.1.2 Invariances de l'équation de Bethe fonctionnelle

À la section 2.5.5 du chapitre 2, nous avons présenté les transformations $\gamma \rightarrow \gamma'$, $p \rightarrow p'$, $q \rightarrow q'$ et $n \rightarrow n'$ des paramètres du système laissant invariant le spectre de la matrice de Markov déformée. À la section 3.1.4 du chapitre 3, nous avons ensuite construit, partant de racines de Bethe z_j solution des équations de Bethe correspondant à une valeur propre de la matrice $M(\gamma, p, q, n)$, des racines de Bethe $\tilde{z}_j$ correspondant à la même valeur propre pour la matrice $M(\gamma', p', q', n')$. Nous allons maintenant réexprimer les transformations $z_j \rightarrow \tilde{z}_j$ des racines de Bethe comme des transformations $Q \rightarrow \tilde{Q}$ et $R \rightarrow \tilde{R}$ sur les polynômes que nous venons d'introduire.

Symétrie entre les déplacements vers l'avant et vers l'arrière

On définit

$$\tilde{Q}(t) = x^n Q(t/x) \quad \text{et} \quad \tilde{R}(t) = x^{-n} e^{-L\gamma} R(t/x) . \quad (5.22)$$

La présence du facteur x^n dans $\tilde{Q}(t)$ implique que le coefficient du terme de plus haut degré de $\tilde{Q}(t)$ est égal à 1. En fonction des polynômes $\tilde{Q}$ et $\tilde{R}$, l'équation de Bethe fonctionnelle (5.10) devient

$$\tilde{Q}(t) \tilde{R}(t) = e^{-L\gamma} (1-t)^L \tilde{Q}(t/x) + x^{-n} (1-t/x)^L \tilde{Q}(xt) . \quad (5.23)$$

Il s'agit de l'équation de Bethe fonctionnelle correspondant à la matrice $M(-\gamma, q, p, n)$. La valeur propre correspondante est alors donnée, en utilisant (5.14) pour un polynôme $\tilde{Q}(t)$ et des paramètres $-\gamma$, q , p et n , par

$$E(\tilde{Q}, -\gamma, q, p, n) = (q-p) \left(\frac{\tilde{Q}'(1)}{\tilde{Q}(1)} - x \frac{\tilde{Q}'(x)}{\tilde{Q}(x)} \right) . \quad (5.24)$$

Remplaçant $\tilde{Q}$ par son expression en fonction de $Q(t)$, on constate finalement que la valeur propre $E(\tilde{Q}, -\gamma, q, p, n)$ est égale à la valeur propre $E(Q, \gamma, p, q, n)$.

Symétrie de Gallavotti-Cohen

On définit les polynômes

$$\tilde{Q}(t) = \frac{t^n Q(1/(xt))}{Q(0)} \quad \text{et} \quad \tilde{R}(t) = (-1)^L x^L e^{-L\gamma} t^L R(1/(xt)) . \quad (5.25)$$

La présence du facteur $Q(0)$ dans $\tilde{Q}(t)$ implique encore que le coefficient du terme de plus haut degré de $\tilde{Q}(t)$ est égal à 1. En fonction des polynômes $\tilde{Q}$ et $\tilde{R}$, l'équation de Bethe fonctionnelle (5.10) se réécrit alors sous la forme

$$\tilde{Q}(t) \tilde{R}(t) = x^L e^{-L\gamma} (1-t)^L \tilde{Q}(xt) + x^n (1-xt)^L \tilde{Q}(t/x) . \quad (5.26)$$

Il s'agit de l'équation de Bethe fonctionnelle correspondant à la matrice $M(\log x - \gamma, p, q, n)$. La valeur propre correspondante est alors donnée, en utilisant (5.14) pour un polynôme $\tilde{Q}(t)$ et des paramètres $\log x - \gamma, p, q$ et n , par

$$E(\tilde{Q}, \log x - \gamma, p, q, n) = (p - q) \left(\frac{\tilde{Q}'(1)}{\tilde{Q}(1)} - \frac{1}{x} \frac{\tilde{Q}'(1/x)}{\tilde{Q}(1/x)} \right). \quad (5.27)$$

Remplaçant $\tilde{Q}$ par son expression en fonction de $Q(t)$, on constate finalement que la valeur propre $E(\tilde{Q}, \log x - \gamma, p, q, n)$ est égale à la valeur propre $E(Q, \gamma, p, q, n)$.

Symétrie $\gamma \rightarrow \gamma + 2i\pi/L$

L'équation de Bethe fonctionnelle (5.10) ne dépend du paramètre γ que par l'intermédiaire de $e^{L\gamma}$. Ceci implique que $Q(t)$ et $R(t)$ sont à la fois solution de l'équation de Bethe fonctionnelle associée à la matrice $M(\gamma, p, q, n)$ et de celle associée à la matrice $M(\gamma + 2i\pi/L, p, q, n)$. De plus, l'expression de la valeur propre (5.14) en fonction du polynôme Q ne dépend de γ que par l'intermédiaire de Q . Les valeurs propres associées $E(Q, \gamma, p, q, n)$ et $E(Q, \gamma + 2i\pi/L, p, q, n)$ sont donc égales.

Symétrie particule-trou

L'invariance du spectre par l'échange du nombre de particules n avec le nombre de sites vides $L - n$ est un peu plus compliquée à montrer, en partie à cause du fait que le polynôme $\tilde{Q}$ correspondant à la matrice $M(\gamma, p, q, L - n)$ est de degré $L - n$ alors que le polynôme initial Q est de degré n . La construction du polynôme $\tilde{Q}$ que nous allons présenter ici est basée sur l'article [145] de Pronko et Stroganov, *Bethe equations 'on the wrong side of the equator'*.

Pour un système avec $n \leq L/2$, on divise l'équation de Bethe fonctionnelle (5.10) par $Q(t/x)Q(t)Q(xt)$. On obtient

$$\frac{R(t)}{Q(t/x)Q(t)Q(xt)} = \frac{e^{L\gamma}(1-t)^L}{Q(t/x)Q(t)} + \frac{x^n(1-xt)^L}{Q(t)Q(xt)}. \quad (5.28)$$

Si tous les zéros des polynômes en t $Q(t/x)$ et $Q(xt)$ sont distincts, ce qui est génériquement le cas, la fraction rationnelle $(1-t)^L/(Q(t/x)Q(t))$ peut être écrite sous la forme

$$\frac{(1-t)^L}{Q(t/x)Q(t)} = \frac{U(t)}{Q(t/x)} + \frac{V(t)}{Q(t)} + W(t), \quad (5.29)$$

le polynôme W étant de degré $L - 2n$ (avec un terme de plus haut degré égal à $(-1)^L x^n t^{L-2n}$), et les polynômes U et V de degré inférieur ou égal à $n - 1$. En fonction des polynômes U, V et W , l'équation de Bethe fonctionnelle (5.28) devient alors

$$\frac{R(t)}{Q(t/x)Q(xt)} = \frac{e^{L\gamma}V(t) + x^n U(xt)}{Q(t)} + \frac{e^{L\gamma}U(t)}{Q(t/x)} + \frac{x^n V(xt)}{Q(xt)} + e^{L\gamma}W(t) + x^n W(xt). \quad (5.30)$$

Si tous les zéros de $Q(t)$ sont distincts des zéros de $Q(t/x)Q(xt)$, le membre de gauche de l'équation précédente n'a pas de pôles en les zéros de $Q(t)$, tandis que le membre de droite en possède. L'équation précédente impose alors que les coefficients de ces pôles s'annulent. Comme les polynômes U et V sont de degré strictement inférieur à celui de Q , on doit donc nécessairement avoir

$$V(t) = -x^n e^{-L\gamma} U(xt). \quad (5.31)$$

La relation précédente entre les polynômes U et V implique alors que l'on peut éliminer V dans (5.29). On obtient

$$\frac{(1-t)^L}{Q(t/x)Q(t)} = \frac{U(t)}{Q(t/x)} - \frac{x^n}{e^{L\gamma}} \frac{U(xt)}{Q(t)} + W(t). \quad (5.32)$$

On veut maintenant écrire le polynôme W sous la forme

$$W(t) = X(t) - \frac{x^n}{e^{L\gamma}} X(xt) , \quad (5.33)$$

avec un polynôme X de degré $L - 2n$. Si l'on note w_k le coefficient de t^k dans $W(t)$, alors le polynôme X est donné par la relation

$$X(t) = \sum_{k=0}^{L-2n} \frac{w_k t^k}{1 - x^{n+k} e^{-L\gamma}} . \quad (5.34)$$

On note que son terme de plus haut degré est $(-1)^L x^n t^{L-2n} / (1 - x^{L-n} e^{-L\gamma})$. En fonction du polynôme X , la relation (5.32) devient alors

$$\frac{(1-t)^L}{Q(t/x)Q(t)} = \left(\frac{U(t)}{Q(t/x)} + X(t) \right) - \frac{x^n}{e^{L\gamma}} \left(\frac{U(xt)}{Q(t)} + X(xt) \right) . \quad (5.35)$$

Il est maintenant naturel d'introduire le polynôme P , de degré $L - n$, défini par

$$P(t) = (-1)^L (x^{n-L} - e^{-L\gamma}) (U(xt) + Q(t)X(xt)) . \quad (5.36)$$

Le facteur $(-1)^L (x^{n-L} - e^{-L\gamma})$ assure que son terme de plus haut degré est égal à t^{L-n} . Nous allons voir que ce polynôme P est l'analogue du polynôme Q correspondant à la matrice $M(\log x - \gamma, p, q, L - n)$. En fonction du polynôme P , la relation (5.35) est finalement égale à

$$\boxed{(-1)^L (x^{n-L} - e^{-L\gamma}) (1-t)^L = P(t/x)Q(t) - \frac{x^n}{e^{L\gamma}} P(t)Q(t/x)} . \quad (5.37)$$

On peut maintenant oublier toute la construction précédente du polynôme P à partir des polynômes U , V et W , et retenir seulement (5.37) comme définition de P . Remplaçant le $(1-t)^L$ et le $(1-xt)^L$ dans l'équation de Bethe fonctionnelle (5.10) par leur expression (5.37) en fonction des polynômes P et Q , on obtient alors la forme suivante de l'équation de Bethe fonctionnelle :

$$(-1)^L (x^{n-L} - e^{-L\gamma}) R(t) = e^{L\gamma} P(t/x)Q(xt) - \frac{x^{2n}}{e^{L\gamma}} P(xt)Q(t/x) . \quad (5.38)$$

Combinant finalement les relations (5.37) et (5.38), on retrouve l'équation de Bethe fonctionnelle originale (5.10), ainsi qu'une autre faisant intervenir $P(t)$ à la place de $Q(t)$:

$$P(t)(x^{L-n} e^{-L\gamma} R(t)) = x^{L-n} (1-xt)^L P(t/x) + x^L e^{-L\gamma} (1-t)^L P(xt) . \quad (5.39)$$

On constate que cette équation est l'équation de Bethe fonctionnelle associée à la matrice $M(\log x - \gamma, p, q, L - n)$. En fonction du polynôme P , la valeur propre associée est donnée par

$$E(P, \log x - \gamma, p, q, L - n) = (p - q) \left(\frac{P'(1)}{P(1)} - \frac{1}{x} \frac{P'(1/x)}{P(1/x)} \right) . \quad (5.40)$$

L'expression (5.37) ainsi que sa dérivée par rapport à t au point $t = 1$ permettent alors de montrer que cette valeur propre est égale à la valeur propre $E(Q, \gamma, p, q, n)$. Il suffit maintenant d'appliquer la transformation $e^\gamma \rightarrow x e^{-\gamma}$ pour construire les polynômes $\tilde{Q}$ et $\tilde{R}$ image des polynômes Q et R par la transformation $n \rightarrow L - n$. On a alors prouvé que le spectre de $M(\gamma, p, q, L - n)$ est égal au spectre de $M(\log x - \gamma, p, q, n)$.

On constate que la manière la plus naturelle de passer d'une solution des équations de Bethe pour un système à n particules à une solution des équations de Bethe pour un système à $L - n$ particules correspond à effectuer à la fois la transformation $\gamma \rightarrow \log x - \gamma$ et la transformation $n \rightarrow L - n$ sur le système. Nous verrons au chapitre 9 que c'est encore le cas quand on considère la construction des vecteurs propres de la matrice M en utilisant l'Ansatz de Bethe algébrique.

5.1.3 Solutions de l'équation de Bethe fonctionnelle pour $n = 1$

Dans le cas d'un système comportant une seule particule, on a vu à la section 3.2.2 du chapitre 3 que la racine de Bethe z était égale à $z = e^{2ik\pi/L}$, où k est un entier compris entre 0 et $L - 1$ qui caractérise complètement l'état propre du système : la quantité $2k\pi/L$ est l'impulsion associée à la particule. En particulier, on a $k = 0$ pour l'état propre correspondant à l'état stationnaire. D'après (5.3), la racine de Bethe y correspondant à z a pour valeur

$$y = \frac{1 - e^{\tilde{\gamma}_k}}{x - e^{\tilde{\gamma}_k}}, \quad (5.41)$$

avec

$$\tilde{\gamma}_k = \gamma - \frac{2ik\pi}{L} \quad (0 \leq k \leq L - 1). \quad (5.42)$$

Le polynôme $Q(t)$ correspondant est donc

$$Q(t) = t - \frac{1 - e^{\tilde{\gamma}_k}}{x - e^{\tilde{\gamma}_k}}. \quad (5.43)$$

L'équation de Bethe fonctionnelle donne pour $R(t)$

$$R(t) = e^{L\gamma}(1-t)^L \frac{x(x - e^{\tilde{\gamma}_k})t - (1 - e^{\tilde{\gamma}_k})}{(x - e^{\tilde{\gamma}_k})t - (1 - e^{\tilde{\gamma}_k})} + x(1 - xt)^L \frac{(x - e^{\tilde{\gamma}_k})t/x - (1 - e^{\tilde{\gamma}_k})}{(x - e^{\tilde{\gamma}_k})t - (1 - e^{\tilde{\gamma}_k})}. \quad (5.44)$$

Le numérateur de l'expression pour $R(t)$ s'annule en $t = y$, ce qui signifie que R est bien un polynôme. La valeur propre de la matrice $M(\gamma)$ associée à $Q(t)$ et $R(t)$ est

$$E_k(\gamma) = e^{\tilde{\gamma}_k} + xe^{-\tilde{\gamma}_k} - (1 + x). \quad (5.45)$$

En $\gamma = 0$, on trouve les L valeurs propres de la matrice de Markov M :

$$E_k(0) = (1 + x) \left(\cos \left(\frac{2k\pi}{L} \right) - 1 \right) + i(1 - x) \sin \left(\frac{2k\pi}{L} \right) \quad (0 \leq k \leq L - 1). \quad (5.46)$$

Pour l'état stationnaire $k = 0$, la valeur propre $E_0(0)$ correspondant à l'état stationnaire s'annule. Les états propres correspondant au gap de la matrice de Markov correspondent à $k = 1$ et $k = L - 1$. Leurs valeurs propres ont même partie réelle mais des parties imaginaires opposées.

5.1.4 Application au modèle totalement asymétrique

On va maintenant calculer la fonction génératrice des cumulants du courant dans le cas totalement asymétrique en utilisant les équations de Bethe écrites sous la forme de l'équation fonctionnelle (5.10). On retrouvera le résultat de Derrida et Lebowitz [86], que nous avons dérivé à la section 3.3 du chapitre 3 en utilisant la forme (3.29) des équations de Bethe faisant intervenir les racines de Bethe z_i .

Dans la limite $x \rightarrow 0$, utilisant

$$x^n Q(t/x) = x^n \left[\left(\frac{t}{x} \right)^n + \frac{Q^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \left(\frac{t}{x} \right)^{n-1} + \dots + \frac{t}{x} Q'(0) + Q(0) \right] \rightarrow t^n \quad \text{quand } x \rightarrow 0, \quad (5.47)$$

l'équation de Bethe fonctionnelle (5.10) devient

$$Q(t)R(t) = e^{L\gamma}(1-t)^L Q(0) + t^n. \quad (5.48)$$

On note que le polynôme $R(t)$ est maintenant de degré $L - n$ et non plus de degré L . On divise l'équation précédente par t^n et on prend son logarithme. On obtient

$$\log \left(\frac{Q(t)}{t^n} \right) + \log R(t) = \log \left(1 + e^{L\gamma} Q(0) \frac{(1-t)^L}{t^n} \right). \quad (5.49)$$

La solution de cette équation correspondant à l'état stationnaire est caractérisée par le fait que $Q(t)$ tend vers t^n (5.17) et $R(t)$ vers 1 (5.18) dans la limite $\gamma \rightarrow 0$. On va donc développer l'équation précédente perturbativement autour $\gamma = 0$. On note que comme $Q(0)$ tend vers 0 quand $\gamma \rightarrow 0$, on peut effectuer un développement en puissances de $Q(0)$ au lieu de γ . On obtient alors

$$\log \left(\frac{Q(t)}{t^n} \right) + \log R(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} e^{kL\gamma} Q(0)^k}{k} \frac{(1-t)^{kL}}{t^{kn}}. \quad (5.50)$$

À chaque ordre en $Q(0)$, le membre de droite de l'équation précédente est une fraction rationnelle en t . Si on développe le $(1-t)^{kL}$ en puissances de t , cette fraction rationnelle peut être mise sous la forme d'une somme de puissances positives et négatives de t . On va maintenant montrer que toutes les puissances positives en t de (5.50) proviennent du terme en $R(t)$ tandis que toutes les puissances négatives en t proviennent du terme en $Q(t)$.

On commence avec $R(t)$. Comme $R(t)$ tend vers 1 en $Q(0) = 0$, on peut écrire

$$R(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} R_k(t) Q(0)^k, \quad (5.51)$$

où les $R_k(t)$ sont des polynômes en t de degré (au plus) $L - n$. On prend ensuite le logarithme de $R(t)$. On obtient

$$\log R(t) = R_1(t) Q(0) + \left(R_2(t) - \frac{R_1(t)^2}{2} \right) Q(0)^2 + \dots \quad (5.52)$$

On constate qu'à l'ordre k en $Q(0)$, $\log R(t)$ est un polynôme de degré (au plus) kL . En particulier, il ne contient que des puissances positives ou nulles en t .

Un raisonnement similaire peut être effectué concernant le terme en $Q(t)$ de (5.50). Comme $Q(t)$ est égal à t^n en $Q(0) = 0$, on peut écrire le développement de $Q(t)$ autour de $Q(0) = 0$ sous la forme

$$Q(t) = t^n + \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(t) Q(0)^k, \quad (5.53)$$

où les $Q_k(t)$ sont des polynômes de degré au plus $n - 1$ en t à cause de la normalisation à 1 du terme de degré n de $Q(t)$. Le développement en puissances de $Q(0)$ du logarithme de $Q(t)/t^n$ s'écrit alors

$$\log \left(\frac{Q(t)}{t^n} \right) = \frac{Q_1(t)}{t^n} Q(0) + \left(\frac{Q_2(t)}{t^2} - \frac{Q_1(t)^2}{2t^{2n}} \right) Q(0)^2 + \dots \quad (5.54)$$

À l'ordre k en $Q(0)$, $\log(Q(t)/t^n)$ est donc un polynôme en $1/t$ (de degré inférieur ou égal à kn) sans terme constant, ce qui signifie que son développement en puissances de t ne contient que des puissances strictement négatives.

On a ainsi montré que, à chaque ordre en $Q(0)$, le terme de (5.50) en $Q(t)$ contribue uniquement des puissances strictement négatives en t tandis que le terme en $R(t)$ contribue seulement des puissances positives ou nulles en t . On en déduit donc les valeurs des polynômes Q et R :

$$\log \left(\frac{Q(t)}{t^n} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} e^{kL\gamma} Q(0)^k}{k} \sum_{j=0}^{kn-1} (-1)^j \binom{kL}{j} t^{j-kn} \quad (5.55)$$

$$\log R(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} e^{kL\gamma} Q(0)^k}{k} \sum_{j=kn}^{kL} (-1)^j \binom{kL}{j} t^{j-kn}. \quad (5.56)$$

On peut aussi, à chaque ordre en $Q(0)$, effectuer un développement autour de $t = 1$ des expressions précédentes pour $Q(t)$ et $R(t)$. On utilise pour cela les identités

$$\sum_{j=0}^{kn-1} (-1)^j \binom{kL}{j} \binom{j-kn}{m} = (-1)^{kn+m-1} \binom{kL-m-1}{kn-1} \quad (5.57)$$

$$\sum_{j=kn}^{kL} (-1)^j \binom{kL}{j} \binom{j-kn}{m} = (-1)^{kn+m} \binom{kL-m-1}{kn-1} \mathbb{1}_{m \leq k(L-n)}, \quad (5.58)$$

qui peuvent être prouvées en considérant le produit des deux fonctions génératrices suivantes :

$$\sum_{j=0}^{kL} (-1)^j \binom{kL}{j} (-1)^j z^j = (1-z)^{kL} \quad (5.59)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{i}{m} z^{-i} = \frac{z}{(z-1)^{m+1}}. \quad (5.60)$$

En fonction du paramètre B , défini par

$$B = (-1)^{n-1} e^{L\gamma} Q(0), \quad (5.61)$$

on obtient alors

$$\log \left(\frac{Q(t)}{t^n} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B^k}{k} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{kL-1-m}{kn-1} (1-t)^m \quad (5.62)$$

$$\log R(t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B^k}{k} \sum_{m=0}^{k(L-n)} \binom{kL-1-m}{kn-1} (1-t)^m. \quad (5.63)$$

Pour le modèle totalement asymétrique, la valeur propre de $M(\gamma)$ correspondant à $Q(t)$ et $R(t)$ s'écrit (5.15)

$$E(\gamma) = - \frac{d}{dt} \log R(t) |_{t=1}, \quad (5.64)$$

tandis que la valeur de R en 1 est reliée à γ par (5.21)

$$\gamma = \frac{1}{n} \log R(1). \quad (5.65)$$

on trouve finalement

$$E(\gamma) = - \frac{n(L-n)}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B^k}{kL-1} \binom{kL}{kn} \quad (5.66)$$

$$\gamma = - \frac{1}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B^k}{k} \binom{kL}{kn}. \quad (5.67)$$

Cette formule paramétrique pour $E(\gamma)$ est identique à celle obtenue par Derrida et Lebowitz dans [86] à partir des équations de Bethe faisant intervenir les racines de Bethe z_i , et reproduite à la section 3.3 du chapitre 3. On remarque que la présente dérivation nécessite un peu moins de calculs que celle du chapitre 3.

5.2 Développement perturbatif de l'équation de Bethe fonctionnelle

Nous allons passer dans cette section à l'étude de l'équation de Bethe fonctionnelle dans le cas du modèle d'exclusion avec une asymétrie quelconque entre les taux de saut vers l'avant et vers l'arrière. Nous montrerons qu'il est possible d'effectuer un développement perturbatif de cette équation fonctionnelle pour obtenir l'expression de la valeur moyenne du courant et de la constante de diffusion. Pour certains détails techniques du calcul, on renverra le lecteur à l'article [1] en annexe.

On rappelle que la solution de l'équation de Bethe fonctionnelle (5.10)

$$Q(t)R(t) = e^{L\gamma}(1-t)^L Q(xt) + x^n(1-xt)^L Q(t/x), \quad (5.68)$$

caractérisée par (5.17)

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} Q(t) = t^n \quad (5.69)$$

et vérifiant (5.20)

$$x^n Q(1/x) = e^{n\gamma} Q(1) \quad (5.70)$$

permet d'exprimer la fonction génératrice des cumulants du courant $E(\gamma)$ (5.71) sous la forme

$$\frac{E(\gamma)}{p} = (1-x) \left(\frac{Q'(1)}{Q(1)} - \frac{1}{x} \frac{Q'(1/x)}{Q(1/x)} \right). \quad (5.71)$$

Le développement perturbatif en γ des polynômes $Q(t)$ (de degré n) et $R(t)$ (de degré L) intervenant dans l'équation de Bethe fonctionnelle (5.68) s'écrit sous la forme

$$Q(t) = t^n + \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(t) \gamma^k = t^n + Q_1(t) \gamma + Q_2(t) \gamma^2 + \dots \quad (5.72)$$

$$R(t) = (1-xt)^L + x^n(1-t)^L + \sum_{k=1}^{\infty} R_k(t) \gamma^k = R_0(t) + R_1(t) \gamma + R_2(t) \gamma^2 + \dots \quad (5.73)$$

À cause de la normalisation à 1 du terme de degré n de $Q(t)$, les polynômes $Q_k(t)$ sont de degré $n-1$. Les polynômes $R_k(t)$, quant à eux, sont de degré L . On note que le développement de l'équation (5.68) autour de $\gamma = 0$ donne, à tout ordre k en γ , une équation linéaire en $Q_k(t)$ et $R_k(t)$ faisant intervenir uniquement les $Q_j(t)$ et $R_j(t)$ pour $j \leq k$. Cette équation détermine entièrement $Q_k(t)$ et $R_k(t)$ à une constante près, qui peut être fixée en utilisant (5.70). Il va être pratique d'introduire le polynôme B défini par

$$B(t) = Q(t) - x^n Q(t/x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(t) \gamma^k = B_1(t) \gamma + B_2(t) \gamma^2 + \dots \quad (5.74)$$

Le polynôme B est de degré $n-1$. On peut exprimer $Q(t)$ en fonction de $B(t)$ de la manière suivante :

$$Q(t) = t^n + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{[B]_{(t^j)}}{1-x^{n-j}} t^j, \quad (5.75)$$

où $[B]_{(t^j)}$ est le coefficient de t^j dans $B(t)$. On exprime les $Q(xt)$ et $Q(t/x)$ dans le membre de droite de l'équation de Bethe fonctionnelle (5.68) en fonction de $Q(t)$, $B(xt)$ et $B(t)$. On obtient

$$Q(t)(R(t) - x^n e^{L\gamma}(1-t)^L - (1-xt)^L) = e^{L\gamma}(1-t)^L B(xt) - (1-xt)^L B(t). \quad (5.76)$$

Le polynôme $R(t) - x^n e^{L\gamma}(1-t)^L - (1-xt)^L$ s'annule en $\gamma = 0$. À l'ordre k en γ , on peut donc écrire

$$(1-t)^L B_k(xt) - (1-xt)^L B_k(t) = t^n \left(R_k(t) - x^n \frac{L^k}{k!} (1-t)^L \right) + \sum_{j=1}^{k-1} \left(Q_j(t) \left(R_{k-j}(t) - x^n \frac{L^{k-j}}{(k-j)!} (1-t)^L \right) - \frac{L^{k-j}}{(k-j)!} (1-t)^L B_j(xt) \right). \quad (5.77)$$

Modulo t^n , le terme en $R_k(t)$ disparaît. On obtient alors

$$(1-t)^L B_k(xt) - (1-xt)^L B_k(t) \equiv \sum_{j=1}^{k-1} \left(Q_j(t) R_{k-j}(t) - \frac{L^{k-j}}{(k-j)!} (1-t)^L Q_j(xt) \right) \quad \text{modulo } t^n. \quad (5.78)$$

On note aussi que la valeur de $B_k(t)$ en $t = 1$ est donnée, d'après (5.70) et (5.74), par

$$B_k(1) = - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{n^{k-j}}{(k-j)!} Q_j(1). \quad (5.79)$$

L'équation (5.78) exprime $(1-t)^L B(xt) - (1-xt)^L B(t)$ à l'ordre k en γ en fonction des $R_j(t)$, $Q_j(t)$ et $B_j(t)$ pour $j < k$. Elle permet donc de déterminer récursivement ordre par ordre en γ les polynômes $B(t)$, $Q(t)$ et $R(t)$ à la condition que l'on sache, étant donné le second membre de (5.78), résoudre l'équation pour B_k . Cette équation pour B_k est un système d'équations linéaires en les coefficients du polynôme B_k . Elle peut être résolue pour de petits systèmes, éventuellement à l'aide d'un logiciel de calcul formel. Nous allons montrer dans la suite que l'on peut en fait obtenir une solution exacte pour un système de taille n arbitraire jusqu'à à l'ordre 2 en γ .

Toute solution de l'équation linéaire (5.78) pour B_k peut s'écrire comme la somme de la solution générale de l'équation homogène (sans second membre) et d'une solution particulière de l'équation inhomogène (avec second membre). La solution générale de l'équation homogène

$$(1-t)^L C(xt) - (1-xt)^L C(t) \equiv 0 [t^n] \quad (5.80)$$

associée à (5.78) est donnée, à une constante multiplicative arbitraire près, par

$$C(t) = [(1-t)^L]_0^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{L}{j} (-1)^j t^j. \quad (5.81)$$

On a introduit la notation

$$[f(t)]_a^b = \sum_{j=a}^b f_j t^j, \quad (5.82)$$

pour une fonction f ayant comme développement en série entière

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j t^j. \quad (5.83)$$

Si on appelle $\tilde{B}_k(t)$ une solution particulière de l'équation inhomogène (5.78), la solution générale de (5.78) s'écrit alors

$$B_k(t) = \beta_k C(t) + \tilde{B}_k(t). \quad (5.84)$$

La constante β_k peut alors être déterminée en utilisant la valeur de $B_k(1)$ (5.79). Connaissant $B(t)$ à l'ordre k , on peut ensuite écrire $Q_k(t)$ et $R_k(t)$ en utilisant respectivement (5.75) et (5.77), et déterminer finalement $E(\gamma)$ à l'ordre k (5.71). On va maintenant passer à la résolution explicite des deux premiers ordres en γ .

5.2.1 Premier ordre

Au premier ordre en γ , l'équation linéaire (5.78) se réduit simplement à l'équation homogène

$$((1 - xt)^L + x^n(1 - t)^L)Q_1(t) = (1 - t)^L Q_1(xt) + (1 - xt)^L x^n Q_1(t/x) \quad \text{modulo } t^n. \quad (5.85)$$

On a donc $B_1(t) = \beta_1 C(t)$, où β_1 est fixé en utilisant (5.79) $B_1(1) = -n$. On trouve

$$\beta_1 = \frac{(-1)^n L}{\binom{L}{n}}. \quad (5.86)$$

On en déduit (5.75)

$$Q_1(t) = \frac{L}{\binom{L}{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n+j} t^j}{1 - x^{n-j}} \binom{L}{j}. \quad (5.87)$$

Utilisant (5.77), $R_1(t)$ s'écrit alors

$$\begin{aligned} R_1(t) &= Lx^n(1 - t)^L + \frac{(-1)^n L}{\binom{L}{n}} \times \frac{(1 - t)^L [(1 - xt)^L]_0^{n-1} - (1 - xt)^L [(1 - t)^L]_0^{n-1}}{t^n} \\ &= Lx^n(1 - t)^L + \frac{(-1)^n L}{\binom{L}{n}} \times \frac{-(1 - t)^L [(1 - xt)^L]_n^L + (1 - xt)^L [(1 - t)^L]_n^L}{t^n}. \end{aligned} \quad (5.88)$$

Les deux expressions données en (5.88) pour $R_1(t)$ se déduisent l'une de l'autre en utilisant le fait que $(1 - t)^L$ et $(1 - xt)^L$ peuvent s'écrire comme la somme de leurs puissances de t comprises entre 0 et $n - 1$, et de leurs puissances de t comprises entre n et L . La première expression de (5.88) indique que $R_1(t)$ n'a pas de puissances de t supérieures à L , tandis que l'autre souligne que $R_1(t)$ est un polynôme en t . Prises ensemble, ces deux expressions montrent que l'on a bien trouvé pour $R_1(t)$ un polynôme de degré L .

5.2.2 Deuxième ordre

À l'ordre 2 en γ , l'équation (5.78) devient l'équation linéaire inhomogène suivante :

$$(1 - t)^L B_2(xt) - (1 - xt)^L B_2(t) \equiv Q_1(t)R_1(t) - L(1 - t)^L Q_1(xt) \quad \text{modulo } t^n. \quad (5.89)$$

Une solution particulière $\tilde{B}_2(t)$ de cette équation est (*c.f.* l'article [1] en annexe pour une démonstration)

$$\tilde{B}_2(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n+j+1} L^2 t^j}{\binom{L}{n}^2} \left(\sum_{l=1}^{n-1} \frac{\binom{L}{n+l} \binom{L}{j-l} x^l}{1 - x^l} + \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\binom{L}{n+l} \binom{L}{j-l} x^l}{1 - x^{n+l-j}} \right). \quad (5.90)$$

La solution générale $B_2(t)$ est alors

$$B_2(t) = \tilde{B}_2(t) + \beta_2 C(t), \quad (5.91)$$

où $C(t)$ est donné en (5.81) et où la constante β_2 est choisie telle que l'équation (5.79) soit vérifiée pour $k = 2$:

$$B_2(1) = -\frac{n^2}{2} - nQ_1(1). \quad (5.92)$$

On trouve (*c.f.* [1])

$$\beta_2 = \beta_1 \left(\frac{\tilde{B}_2(1)}{n} + Q_1(1) + \frac{n}{2} \right). \quad (5.93)$$

5.2.3 Valeur moyenne du courant et constante de diffusion

Connaissant $Q(t)$ aux ordres 1 et 2 en γ , on peut maintenant calculer le développement de la fonction génératrice des cumulants $E(\gamma)$ à l'ordre 2 en utilisant (5.71). On obtient alors la valeur moyenne du courant ainsi que la constante de diffusion. Le calcul est un peu long mais sans réelle difficulté. Nous renvoyons le lecteur à l'article [1] en annexe pour les détails. On trouve pour la valeur moyenne du courant

$$\frac{J}{p} = (1-x) \frac{n(L-n)}{L-1}, \quad (5.94)$$

et pour la constante de diffusion

$$\frac{D}{p} = \frac{2(1-x)L}{L-1} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{1+x^k}{1-x^k} \frac{\binom{L}{n+k} \binom{L}{n-k}}{\binom{L}{n}^2}. \quad (5.95)$$

La somme sur k est en fait finie : le produit de binômes au numérateur s'annule dès que $k > \min(n, L-n)$.

On retrouve pour la valeur moyenne du courant J l'expression obtenue à la section 2.4 du chapitre 2 comme une conséquence de la mesure stationnaire uniforme. La formule pour la constante de diffusion D est la même que celle obtenue par Derrida et Mallick [85] en utilisant une extension de l'Ansatz matriciel pour l'état stationnaire. Le facteur L^2 de différence par rapport à l'expression de [85] est dû au fait que l'on calcule ici la constante de diffusion du courant total (*i.e.* on compte tous les déplacements des particules où qu'elles soient), alors que dans [85] le courant est compté à travers un seul lien.

Nous avons montré dans cette section que l'équation de Bethe fonctionnelle (5.10) pouvait être résolue perturbativement en le paramètre γ , donnant accès aux premiers cumulants du courant. Une fois le développement en γ effectué, l'équation (5.10) se ramène, à chaque ordre en γ , à une équation linéaire inhomogène donnant par une récurrence la valeur du polynôme $Q(t)$ à cet ordre en γ , connaissant la solution aux ordres précédents. L'équation homogène associée est indépendante de l'ordre en γ , et sa solution générale est explicitement connue. Par contre, le second membre de l'équation inhomogène devient de plus en plus complexe à mesure que l'on augmente l'ordre en γ . Nous avons montré que l'on pouvait obtenir une solution particulière de l'équation inhomogène aux deux premiers ordres en γ . Aller à l'ordre suivant de cette manière semble plus compliqué : même à l'ordre 3 en γ , on s'attend à ce que les solutions particulières de l'équation inhomogène soient trop lourdes à manipuler, rendant difficile l'obtention par cette méthode des cumulants d'ordre plus élevé, sauf pour de petits systèmes pour lesquels les équations linéaires peuvent être résolues, en utilisant par exemple un logiciel de calcul formel.

5.3 Résolution systématique ordre par ordre

Dans la section précédente, nous avons introduit une méthode permettant de résoudre l'équation de Bethe fonctionnelle perturbativement en le paramètre γ . Cette méthode implique, à chaque ordre en γ , de trouver une solution particulière d'un système linéaire de taille n dépendant des trois paramètres t , x et L . Nous avons pu réaliser cela jusqu'à l'ordre deux en γ , ce qui nous a donné des expressions exactes pour la valeur moyenne du courant et la constante de diffusion.

Dans la présente section, nous allons présenter une autre méthode pour résoudre l'équation de Bethe fonctionnelle perturbativement en γ . Celle-ci, contrairement à la méthode de la section précédente, est complètement explicite même pour un système comportant un nombre arbitraire n de particules. En particulier, elle ne nécessite pas de deviner la solution d'un système linéaire

dont la taille dépend de n . Elle est aussi plus efficace, et permet en particulier d'obtenir la valeur moyenne du courant et la constante de diffusion avec beaucoup moins de calculs que par la méthode précédente. Les calculs peuvent alors être poussés jusqu'à l'ordre 3, ce qui donnera une expression explicite pour le troisième cumulant du courant.

5.3.1 Reformulation de l'équation de Bethe fonctionnelle

La méthode que nous présentons dans cette section passe par une reformulation de l'équation de Bethe fonctionnelle (5.68). On définit la fonction A par

$$A(t) = x^n \frac{Q(t/x)}{Q(t)}. \quad (5.96)$$

L'équation de Bethe fonctionnelle (5.68) se réécrit alors

$$\frac{R(t)}{(1-t)^L(1-xt)^L} = \frac{A(t)}{(1-t)^L} + \frac{1}{(1-xt)^L} \frac{x^n e^{L\gamma}}{A(xt)}. \quad (5.97)$$

D'après la définition de $A(t)$, et en utilisant l'expression (5.70) reliant $Q(1)$ et $Q(1/x)$ et le fait que Q est de degré n , les valeurs de $A(t)$ en $t = 0$, $t = 1$ et dans la limite $t \rightarrow \infty$ sont connues. On a

$$A(0) = x^n, \quad A(1) = e^{n\gamma} \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = 1. \quad (5.98)$$

La caractérisation (5.69) de la solution de l'équation fonctionnelle (5.97) correspondant à l'état stationnaire, s'exprime en fonction de $A(t)$ sous la forme

$$A(t) = 1 + \mathcal{O}(\gamma). \quad (5.99)$$

Utilisant la valeur (5.98) de $A(1)$, la fonction génératrice des cumulants du courant (5.71) s'écrit en fonction de A comme

$$\frac{E(\gamma)}{p} = -(1-x)e^{-n\gamma} A'(1). \quad (5.100)$$

5.3.2 Développement perturbatif en γ et élimination de $R(t)$

Nous allons maintenant montrer que l'on peut, par un développement perturbatif en γ , éliminer $R(t)$ de l'équation fonctionnelle (5.97). Cela donnera alors une équation fermée pour $A(t)$, qui pourra être résolue perturbativement en γ . D'après (5.99), le développement de $A(t)$ autour de $\gamma = 0$ s'écrit

$$A(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \gamma^k. \quad (5.101)$$

On utilise maintenant la définition (5.96) de $A(t)$ en fonction de $Q(t)$, le développement perturbatif de $Q(t)$ autour de $\gamma = 0$ (5.72), et le fait que $Q(t)$ soit normalisé de telle sorte que $Q(t) - t^n$ soit un polynôme de degré $n-1$ qui s'annule quand $\gamma = 0$. On obtient alors

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{1 + x^n \gamma \frac{Q_1(t/x)}{t^n} + x^n \gamma^2 \frac{Q_2(t/x)}{t^n} + \dots}{1 + \gamma \frac{Q_1(t)}{t^n} + \gamma^2 \frac{Q_2(t)}{t^n} + \dots} \\ &= 1 + \gamma \left(x^n \frac{Q_1(t/x)}{t^n} - \frac{Q_1(t)}{t^n} \right) + \gamma^2 \left(\frac{Q_1(t)^2}{t^{2n}} + x^n \frac{Q_2(t/x)}{t^n} - \frac{Q_2(t)}{t^n} \right) + \dots \end{aligned} \quad (5.102)$$

On voit que les $A_k(t)$ sont en fait des polynômes en $1/t$ de degré kn , sans terme constant ($A_k(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$).

On effectue alors un développement en $\gamma = 0$, puis en $t = 0$, de l'équation fonctionnelle (5.97). On considère cette équation comme une équation sur des séries formelles en γ et en t . Comme $R(t)$ est un polynôme en t , le membre de gauche de l'équation (5.97) est régulier en $t = 0$, et il fait uniquement intervenir des puissances positives ou nulles en t . Le membre de droite, par contre, fait intervenir à la fois des puissances positives et négatives en t , à chaque ordre en γ . Ceci implique donc que les puissances strictement négatives en t du second membre de (5.97) s'annulent. On peut donc écrire

$$\frac{A(t)}{(1-t)^L} + \frac{1}{(1-xt)^L} \frac{x^n e^{L\gamma}}{A(xt)} = \mathcal{O}(t^0) . \quad (5.103)$$

Cette équation a la signification précise suivante : on effectue le développement en $\gamma = 0$ du membre de gauche de (5.103), ce qui nous donne, à chaque ordre en γ , des fonctions de t . On fait ensuite le développement en $t = 0$ de ces fonctions de t . L'équation (5.103) impose alors la contrainte que les développements en t n'ont que des puissances positives ou nulles en t .

On voit qu'on effectue des développements perturbatifs en les deux variables t et γ . Il faut faire attention d'effectuer ces développements dans le bon ordre : d'abord le développement en $\gamma = 0$, et ensuite le développement en $t = 0$. Faire les développements dans l'ordre inverse donnerait en effet un autre résultat : d'après la définition (5.96) de $A(t)$, on a en effet $A(0) = x^n$, ce qui implique que le développement autour de $t = 0$ de $A(t)$ n'a que des puissances positives en t . L'équation (5.103) ne contiendrait alors aucune information.

5.3.3 Résolution itérative de l'équation pour $A(t)$

À partir de maintenant, tout développement en puissances de t doit être compris comme un développement en puissances de γ suivi, à chaque ordre en γ , d'un développement en puissances de t . Dans la suite, nous allons utiliser la notation $[f(t)]_{(k)} \equiv [f]_{(k)}$ pour le coefficient du terme t^k dans le développement de la série formelle $f(t)$ (après le développement en puissances de γ). On introduit aussi les notations $[f(t)]_{(-)}$ pour la somme des puissances strictement négatives en t de $f(t)$ et $[f(t)]_{(+)}$ pour la somme des puissances positives ou nulles en t de $f(t)$.

On réécrit l'équation (5.103) sous la forme légèrement plus compliquée

$$\frac{A(t)}{(1-t)^L} - x^n \frac{A(xt)}{(1-xt)^L} = -\frac{x^n}{(1-xt)^L} \left(A(xt) + \frac{e^{L\gamma}}{A(xt)} \right) + \mathcal{O}(t^0) . \quad (5.104)$$

Le développement perturbatif en γ du second membre de l'équation précédente

$$A(xt) + \frac{e^{L\gamma}}{A(xt)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(xt) \gamma^k + \frac{1 + (e^{L\gamma} - 1)}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(xt) \gamma^k} , \quad (5.105)$$

implique qu'à l'ordre k en γ , le membre de droite de l'équation (5.104) ne dépend que des $A_j(t)$ pour $j < k$: en effet, on constate que les $A_k(t)$ se simplifient. Cette propriété de l'équation (5.104) va permettre la détermination de $A(t)$ ordre par ordre en γ . Introduisant l'opérateur Δ_x , qui agit sur une fonction arbitraire $u(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} [u]_{(k)} t^k$ comme

$$(\Delta_x u)(t) = u(t) - x^n u(xt) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 - x^{n+k}) [u]_{(k)} t^k , \quad (5.106)$$

l'équation (5.104) devient

$$\Delta_x \left(\frac{A(t)}{(1-t)^L} \right) = -\frac{x^n}{(1-xt)^L} \left(A(xt) + \frac{e^{L\gamma}}{A(xt)} \right) + \mathcal{O}(t^0) , \quad (5.107)$$

On veut inverser l'opérateur Δ_x situé dans l'équation précédente. Comme Δ_x donne 0 appliqué sur t^{-n} , les solutions de l'équation

$$(\Delta_x u)(t) = v(t) \quad (5.108)$$

sont données par

$$u(t) = (\Delta_x^{-1} v)(t) = \sum_{k \neq -n} \frac{[v]_{(k)} t^k}{1 - x^{n+k}} - \frac{b}{t^n}, \quad (5.109)$$

pour toute série formelle v sans terme t^{-n} . La constante b est un coefficient arbitraire qui n'est pas contraint par l'équation (5.108). On utilise cela pour inverser l'opérateur Δ_x dans (5.104). Comme $A(t) \rightarrow 1$ quand $t \rightarrow \infty$, et comme $A(t) - 1$ a seulement des puissances strictement négatives en t , on obtient

$$A(t) = 1 - \left[(1-t)^L \Delta_x^{-1} \left(\frac{x^n}{(1-xt)^L} \left(A(xt) + \frac{e^{L\gamma}}{A(xt)} \right) \right) \right]_{(-)} - b \left[\frac{(1-t)^L}{t^n} \right]_{(-)}. \quad (5.110)$$

Écrite sous cette forme, l'équation (5.110) donne une solution récursive pour $A(t)$ ordre par ordre en γ . Le terme contenant b , qui n'est pas contraint par l'équation (5.104), peut être fixé à partir de la valeur (5.98) de $A(1)$.

5.3.4 Reformulation de la solution itérative

Les équations (5.110), (5.101) et (5.98) des sections précédentes permettent d'effectuer le calcul explicite des premiers cumulants du courant. Il est cependant avantageux de réécrire ces équations sous une autre forme, qui rend le calcul des cumulants du courant moins fastidieux. On introduit deux nouvelles fonctions $\tilde{g}(t)$ et $g(t)$ définies par

$$\tilde{g}(t) = \left[\Delta_x^{-1} \left(\frac{x^n}{(1-xt)^L} \left(A(xt) + \frac{e^{L\gamma}}{A(xt)} \right) \right) \right]_{(-)}, \quad (5.111)$$

et

$$g(t) = \tilde{g}(t) + (-1)^n \frac{L}{\binom{L}{n} t^n} \left(\frac{e^{n\gamma} - 1}{n} - \sum_{j=1}^L \binom{L}{j} (-1)^j \frac{j}{nL} [\tilde{g}]_{(-j)} \right). \quad (5.112)$$

La fonction g , construite à partir de $\tilde{g}$, n'en diffère que par un terme en t^{-n} . Comme $\tilde{g}(t)$ et $g(t)$ sont nuls en $\gamma = 0$ (car $A(t) = 1$ pour $\gamma = 0$), le développement de $\tilde{g}(t)$ et $g(t)$ en puissances de γ peut être écrit sous la forme

$$\tilde{g}(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \tilde{g}_r(t) \gamma^r \quad \text{et} \quad g(t) = \sum_{r=1}^{\infty} g_r(t) \gamma^r. \quad (5.113)$$

On peut alors montrer que les $\tilde{g}_r$ sont déterminés récursivement par la relation

$$\begin{aligned} \tilde{g}_r(t) = & \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{\substack{l=1 \\ (l \neq n)}}^{(r-k)n} \frac{x^n t^{-l}}{1 - x^{n-l}} \left[\frac{L^k}{k!} g_{r-k}(xt) \right]_{(-l)} \\ & - \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{\substack{l=1 \\ (l \neq n)}}^{rn} \left(\frac{[(1-xt)^L g_{r-k}(xt) g_k(t)]_{(-l)}}{(1 - x^{n-l}) t^l} - \frac{[g_k(t) [(1-xt)^L g_{r-k}(xt)]_{(-)}]_{(-l)}}{(1 - x^{n-l}) t^l} \right. \\ & \left. - \frac{[g_{r-k}(xt) [(1-xt)^L g_k(t)]_{(-)}]_{(-l)}}{(1 - x^{n-l}) t^l} \right), \end{aligned} \quad (5.114)$$

et que la fonction génératrice des cumulants du courant $E(\gamma)$ est donnée par

$$\frac{E(\gamma)}{p} = \frac{1-x}{e^{n\gamma}} \left(\sum_{j=1}^L \binom{L}{j} (-1)^j \frac{j(n-j)}{L(L-1)} [\tilde{g}]_{(-j)} + \frac{L-n}{L-1} (e^{n\gamma} - 1) \right). \quad (5.115)$$

On renvoie le lecteur à l'article [2] en annexe pour une démonstration des relations précédentes. On note que la non-linéarité de l'équation de récurrence (5.115) consiste simplement en la présence de termes quadratiques en g contrairement à l'équation de récurrence (5.110) pour $A(t)$, qui exprime $A(t)$ en fonction de $A(xt)$ et de l'inverse de $A(xt)$. La non linéarité de l'équation (5.115) est donc moins forte que celle de l'équation (5.110) en le sens que développer un produit de deux séries formelles génère moins de termes que développer l'inverse d'une série formelle. En effet, à l'ordre k en γ le produit de deux séries formelles en γ génère un nombre de termes linéaire en k tandis que l'inverse d'une série formelle en γ génère un nombre de termes égal au nombre de partitions de l'entier k (c'est à dire le nombre de façons d'écrire k comme une somme d'entiers positifs sans tenir compte de l'ordre des termes), qui croît avec k comme l'exponentielle de la racine carrée de k [79].

5.3.5 Expression exacte pour les trois premiers cumulants du courant

L'équation (5.114) permet d'effectuer le calcul explicite des premiers cumulants du courant. On retrouve les expressions de la valeur moyenne du courant et de la constante de diffusion obtenues dans la section précédente, ainsi qu'une expression explicite pour le troisième cumulant du courant.

Valeur moyenne du courant

Au premier ordre en γ , l'équation de récurrence (5.114) pour $\tilde{g}$ implique que

$$\tilde{g}_1(t) = 0. \quad (5.116)$$

L'équation (5.112) donne alors

$$g_1(t) = \frac{(-1)^n L}{\binom{L}{n} t^n}. \quad (5.117)$$

On retrouve la valeur moyenne du courant (5.94) de la section précédente :

$$\frac{J}{p} = (1-x) \frac{n(L-n)}{L-1}. \quad (5.118)$$

Constante de diffusion

La récurrence (5.114) implique que

$$\frac{\tilde{g}_2(t)}{L^2} = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\binom{L}{2n-k} (-t)^{-k}}{1-x^{k-n}} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\binom{L}{2n-k} (-t)^{-k}}{1-x^{k-n}} \right) / \binom{L}{n}^2. \quad (5.119)$$

L'équation (5.112) donne ensuite

$$\frac{g_2(t)}{L^2} = \frac{\tilde{g}_2(t)}{L^2} + \frac{(-1)^n}{\binom{L}{n} t^n} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{\binom{L}{n+k} \binom{L}{n-k}}{\binom{L}{n}^2} \frac{1+x^k}{1-x^k} \right). \quad (5.120)$$

On retrouve alors l'expression (5.95) de la constante de diffusion :

$$\frac{D}{p} = \frac{2(1-x)L}{L-1} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{1+x^k}{1-x^k} \frac{\binom{L}{n+k} \binom{L}{n-k}}{\binom{L}{n}^2}. \quad (5.121)$$

On note que les calculs sont ici beaucoup plus simples que lors de la dérivation de cette expression dans la section précédente.

Troisième cumulant du courant

À cause de la symétrie particule-trou du système, on peut considérer seulement le cas $L < 2n$. Ceci implique alors que l'on n'a en fait pas besoin des puissances en t de $\tilde{g}(t)$ strictement inférieures à $-2n$ pour obtenir la valeur propre $E(\gamma)$ à partir de (5.115). Après quelques calculs détaillés dans l'article [2] en annexe, la récurrence (5.114) donne

$$\begin{aligned} [\tilde{g}_3(t)]_{-2n}^{-1} &= L\nu^2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\binom{L}{n+j}(-1)^{n-j}}{t^{n-j}} \frac{x^{2j}}{(1-x^j)^2} + L\nu^2 \sum_{j=1}^n \frac{\binom{L}{n-j}(-1)^{n+j}}{t^{n+j}} \frac{x^j}{(1-x^j)^2} \\ &- \frac{2\nu^4}{L} \left(\sum_{j=1}^n \binom{L}{n+j} \binom{L}{n-j} \frac{1+x^j}{1-x^j} \right) \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\binom{L}{n+i}(-1)^{n+i}}{t^{n-i}} \frac{x^i}{1-x^i} + \sum_{i=1}^n \frac{\binom{L}{n-i}(-1)^{n-i}}{t^{n+i}} \frac{1}{1-x^i} \right) \\ &+ \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{n-1-j} \binom{L}{n+i} \binom{L}{n+j} \frac{\nu^3(-1)^{i+j}}{t^{n-i-j}} \frac{1+x^j}{1-x^j} \frac{x^{i+j}}{1-x^{i+j}} \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \binom{L}{n+i+j} \binom{L}{n-j} \frac{\nu^3(-1)^i}{t^{n-i}} \frac{1+x^j}{1-x^j} \frac{x^i}{1-x^i} \\ &+ \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \binom{L}{n-i-j} \binom{L}{n+j} \frac{\nu^3(-1)^i}{t^{n+i}} \frac{1+x^j}{1-x^j} \frac{1}{1-x^i} \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{n-j} \binom{L}{n-i} \binom{L}{n-j} \frac{\nu^3(-1)^{i+j}}{t^{n+i+j}} \frac{1+x^j}{1-x^j} \frac{1}{1-x^{i+j}}. \end{aligned} \quad (5.122)$$

Après d'autres calculs détaillés dans l'article [2], on trouve enfin une expression pour le troisième cumulant du courant

$$\begin{aligned} \frac{(L-1)E_3}{p(1-x)L^2} &= 6 \sum_{i>0} \sum_{j>0} \frac{\binom{L}{n+i} \binom{L}{n-i} \binom{L}{n+j} \binom{L}{n-j}}{\binom{L}{n}^4} (i^2 + j^2) \frac{1+x^i}{1-x^i} \frac{1+x^j}{1-x^j} \\ &- 3 \sum_{i>0} \sum_{j>0} \frac{\binom{L}{n+i} \binom{L}{n+j} \binom{L}{n-i-j} + \binom{L}{n-i} \binom{L}{n-j} \binom{L}{n+i+j}}{\binom{L}{n}^3} (i^2 + ij + j^2) \frac{1+x^i}{1-x^i} \frac{1+x^j}{1-x^j} \\ &- 3 \sum_{i>0} \frac{\binom{L}{n+i} \binom{L}{n-i}}{\binom{L}{n}^2} (i^2) \left(\frac{1+x^i}{1-x^i} \right)^2 + \frac{3n(L-n)}{2(2L-1)} \frac{\binom{2L}{2n}}{\binom{L}{n}^2} - \frac{n(L-n)}{(3L-1)} \frac{\binom{3L}{3n}}{\binom{L}{n}^3}. \end{aligned} \quad (5.123)$$

5.3.6 Expression des cumulants du courant à la limite thermodynamique

Les expressions exactes (5.121) et (5.123) de la constante de diffusion et du troisième cumulant du courant se présentent sous la forme de sommes de termes dont le nombre croît avec la taille du système. Nous allons maintenant voir que ces expressions se simplifient dans la limite thermodynamique.

Constante de diffusion

D'après la formule de Stirling, dans la limite $L \rightarrow \infty$ avec une densité de particules $\rho = n/L$ fixé, les coefficients du binôme intervenant dans l'expression (5.95) de la constante de diffusion se mettent sous la forme

$$\binom{L}{n+k} / \binom{L}{n} \sim \left(\frac{1-\rho}{\rho} \right)^k e^{-\frac{k^2 + (1-2\rho)k}{2\rho(1-\rho)L}}. \quad (5.124)$$

Posant

$$\Phi = -\frac{\log x \sqrt{\rho(1-\rho)L}}{2}, \quad (5.125)$$

l'expression (5.95) de la constante de diffusion devient alors

$$\frac{D}{p} \sim 2(1-x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 e^{-\frac{k^2}{\rho(1-\rho)L}}}{\tanh\left(\frac{\Phi k}{\sqrt{\rho(1-\rho)L}}\right)}. \quad (5.126)$$

Le termes de l'expression précédente avec k tels que $n-k$ ou $L-n-k$ restent finis dans la limite $L \rightarrow \infty$, pour lesquels (5.124) ne peut pas être utilisé, sont exponentiellement petits en L et ne contribuent donc pas à la constante de diffusion dans la limite $L \rightarrow \infty$. De même pour les termes de (5.126) avec $k > \max(n, L-n)$, qui étaient nuls dans l'expression initiale (5.95) de la constante de diffusion.

On veut transformer la somme sur k de l'expression précédente en intégrale. On introduit pour cela les $u_k = k/\sqrt{\rho(1-\rho)L}$, en fonction desquels la constante de diffusion devient

$$\frac{D}{p} \sim 2(1-x)\rho(1-\rho)L \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k^2 e^{-u_k^2}}{\tanh(\Phi u_k)}. \quad (5.127)$$

L'expression sous la somme reste bornée pour u_k décrivant l'axe réel positif. La distance entre les u_k tendant vers zéro quand L tend vers l'infini, l'expression précédente devient une intégrale si Φ a une limite quand $L \rightarrow \infty$. On obtient alors

$$\boxed{\frac{D}{p} \sim 2(1-x)\rho^{3/2}(1-\rho)^{3/2}L^{3/2} \int_0^{\infty} du \frac{u^2 e^{-u^2}}{\tanh(\Phi u)}}. \quad (5.128)$$

On note que, si $1-x$ dépend de L comme $1/L^r$ pour une certaine valeur r fixée, l'expression précédente est valide, dans la limite thermodynamique, quelle que soit la valeur du paramètre r . On constate qu'il y a trois cas à distinguer : $r < 1/2$, $r = 1/2$ et $r > 1/2$. Si r est strictement plus petit que $1/2$, le paramètre Φ tend vers l'infini quand L tend vers l'infini. On peut alors remplacer $\tanh(\Phi u)$ par 1 dans (5.128) et calculer l'intégrale. La constante de diffusion a dans ce cas une forme semblable à celle que l'on obtient dans le cas totalement asymétrique. Si r est strictement plus grand que $1/2$ (situation qui contient en particulier le cas où $1-x$ a une limite finie non nulle quand $L \rightarrow \infty$), le paramètre Φ tend vers zéro dans la limite $L \rightarrow \infty$, et on peut remplacer $\tanh(\Phi u)$ par Φu dans (5.128). L'intégrale peut encore être calculée, et on trouve alors la même expression que dans le cas du modèle symétrique. Enfin, dans le cas intermédiaire où r est égal à $1/2$, Φ a une limite finie et l'intégrale ne peut pas être simplifiée dans (5.128). Ce cas correspond à la frontière entre les systèmes dont la constante de diffusion se comporte comme le modèle totalement asymétrique, et ceux pour lesquels elle se comporte

comme le modèle symétrique. On trouve les expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{D}{p} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}(1-x)\rho^{3/2}(1-\rho)^{3/2}L^{3/2} & \text{si } \frac{1}{\sqrt{L}} \ll 1-x \quad (r < \frac{1}{2}) \\ \frac{D}{p} \sim 4\Phi\rho(1-\rho)L \int_0^\infty du \frac{u^2 e^{-u^2}}{\tanh(\Phi u)} & \text{si } 1-x \sim \frac{2\Phi}{\sqrt{\rho(1-\rho)L}} \quad (r = \frac{1}{2}) \\ \frac{D}{p} \sim 2\rho(1-\rho)L & \text{si } 1-x \ll \frac{1}{\sqrt{L}} \quad (r > \frac{1}{2}) \end{array} \right. \quad (5.129)$$

Troisième cumulant

Effectuant les mêmes transformations que pour la constante de diffusion, et utilisant en plus

$$\frac{\binom{kL}{kn}}{\binom{L}{n}^k} \sim \sqrt{\frac{(2\pi\rho(1-\rho)L)^{k-1}}{k}} \quad \text{quand } L \rightarrow \infty, \quad (5.130)$$

l'expression exacte (5.123) du troisième cumulant se met sous la forme

$$\frac{E_3}{p} \sim 2(1-x)\rho^2(1-\rho)^2L^3h_3(\Phi), \quad (5.131)$$

avec

$$h_3(\Phi) = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + 3 \int_0^\infty du \int_0^\infty dv \frac{(u^2 + v^2)e^{-u^2-v^2} - (u^2 + uv + v^2)e^{-u^2-uv-v^2}}{\tanh(\Phi u) \tanh(\Phi v)}, \quad (5.132)$$

dans la limite où L tend vers l'infini. Contrairement au cas de la constante de diffusion, pour lequel on obtenait une expression ne s'annulant pour aucune valeur de Φ , on peut montrer que la fonction $h_3(\Phi)$ s'annule dans la limite où Φ tend vers zéro. On doit donc aussi considérer des corrections provenant de la différence entre les sommes de Riemann et les intégrales correspondantes (voir l'article [2] en annexe pour les détails). Selon la manière dont $1-x$ évolue en fonction de la taille du système, on obtient trois régimes distincts, séparés par les deux régions $1-x \sim 1/L$ et $1-x \sim 1/\sqrt{L}$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{E_3}{p} \sim -(1-x) \left(\frac{8\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{3\pi}{2} \right) \rho^2(1-\rho)^2L^3 & \text{si } \frac{1}{\sqrt{L}} \ll 1-x \\ \frac{E_3}{p} \sim \Phi h_3(\Phi) \rho^{3/2}(1-\rho)^{3/2}L^{5/2} & \text{si } 1-x \sim \frac{2\Phi}{\sqrt{\rho(1-\rho)L}} \\ \frac{E_3}{p} \sim -\frac{1}{60}(1-x)^3\rho^3(1-\rho)^3L^4 & \text{si } \frac{1}{L} \ll 1-x \ll \frac{1}{\sqrt{L}} \\ \frac{E_3}{p} \sim \nu\rho^2(1-\rho)^2L - \frac{\nu^3}{60}\rho^3(1-\rho)^3L & \text{si } 1-x \sim \frac{\nu}{L} \\ \frac{E_3}{p} \sim (1-x)\rho^2(1-\rho)^2L^2 & \text{si } 1-x \ll \frac{1}{L} \end{array} \right. \quad (5.133)$$

5.4 Fluctuations du courant dans la limite faiblement asymétrique

On considère dans cette section le cas d'un système faiblement asymétrique pour lequel l'asymétrie est donnée par

$$1-x = \frac{\nu}{L}. \quad (5.134)$$

On va calculer pour ce système la limite thermodynamique de tous les cumulants du courant. Contrairement aux sections précédentes où tous les calculs étaient effectués pour des systèmes de taille finie, on va devoir ici passer à la limite thermodynamique directement dans les équations fonctionnelles.

5.4.1 Régularisation de l'équation fonctionnelle en $x = 1$

On part de la formulation de l'équation de Bethe fonctionnelle en terme de la fonction $A(t)$ définie section (5.3.1). On observe que les relations de récurrence (5.110) et (5.114) sont singulières dans la limite $x \rightarrow 1$. On va donc devoir régulariser la fonction $A(t)$ dans la limite $x \rightarrow 1$. Les équations (5.98) et (5.100) indiquent que $A(1)$ est régulier en $x = 1$, et que $A'(1)$ a un pôle d'ordre 1 en $x = 1$. On peut aussi montrer (voir l'article [3] en annexe) qu'à l'ordre k en γ , la fonction $A(t)$ a un pôle d'ordre $k - 1$ en $x = 1$. Cela suggère qu'un développement en $t = 1$ devrait permettre de régulariser l'équation fonctionnelle (5.97) dans la limite $x \rightarrow 1$. On définit

$$\tilde{A}(y) = e^{-n\gamma} A(1 - (1 - x)y) . \quad (5.135)$$

Dans le chapitre 9, on verra que l'on peut définir une matrice de transfert $\tau(\lambda)$ commutant avec la matrice $M(\gamma)$ pour toute valeur du « paramètre spectral » λ . La valeur propre $\epsilon(\lambda)$ de cette matrice de transfert correspondant à la valeur propre $E(\gamma)$ de $M(\gamma)$ est donnée par

$$\epsilon(\lambda) = \frac{e^{-n\gamma} R(t)}{(1 - xt)^L} = \tilde{A}(y) + \lambda^L \frac{x^n e^{-2n\gamma}}{\tilde{A}(1 + xy)} , \quad (5.136)$$

avec

$$t = \frac{1 - e^{-\gamma}\lambda}{1 - xe^{-\gamma}\lambda} . \quad (5.137)$$

Pour la même raison que pour $E(\gamma)$, la valeur propre $\epsilon(\lambda)$ doit être régulière en $x = 1$. Ceci implique au moins que $L - 1$ premières dérivées successives de $\tilde{A}(y)$ en $y = 0$ sont régulières en $y = 0$.

On peut confirmer cela en considérant l'exemple explicite du système à une seule particule. On peut en effet calculer $A(t)$ et $\tilde{A}(y)$ à partir de la connaissance de $Q(t)$ (5.43). On trouve pour $A(t)$

$$A(t) = \frac{t - x \frac{1-e^\gamma}{x-e^\gamma}}{t - \frac{1-e^\gamma}{x-e^\gamma}} = \frac{(1-x)t + (e^\gamma - 1)(t-x)}{(1-x)t + (e^\gamma - 1)(t-1)} . \quad (5.138)$$

Cette fonction possède un pôle et un zéro qui tendent tous deux vers zéro quand γ tend vers zéro. Son développement autour de $\gamma = 0$ est singulier dans la limite $x \rightarrow 1$:

$$A(t) = 1 + \frac{\gamma}{t} + \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1+x}{2t} \right) \frac{\gamma^2}{1-x} + \left(\frac{1}{t^3} - \frac{1+x}{t^2} + \frac{1+4x+x^2}{6t} \right) \frac{\gamma^3}{(1-x)^2} + \mathcal{O}(\gamma^4) . \quad (5.139)$$

À l'ordre k en γ , $A(t)$ possède bien un pôle d'ordre $k - 1$ en $x = 1$. On obtient aussi pour la fonction $\tilde{A}(y)$

$$\tilde{A}(y) = \frac{1 - (1-x)y - xy(1 - e^{-\gamma})}{1 - (1-x)y - y(e^\gamma - 1)} . \quad (5.140)$$

Le développement de $\tilde{A}(y)$ en puissances de γ et de $1 - x$ est donné par

$$\begin{aligned} \tilde{A}(y) = & 1 + ((1-x)y + (1-x)^2 y^2 + (1-x)^3 y^3 + \mathcal{O}((1-x)^4)) \gamma \\ & + \left(y + (1-x) \left(2y^2 - \frac{y}{2} \right) + (1-x)^2 \left(3y^3 - \frac{y^2}{2} \right) + (1-x)^3 \left(4y^4 - \frac{y^3}{2} \right) + \mathcal{O}((1-x)^4) \right) \gamma^2 \\ & + \left(y^2 + (1-x) \left(3y^3 + \frac{y}{6} \right) + (1-x)^2 \left(6y^4 + \frac{y^2}{6} \right) + (1-x)^3 \left(10y^5 + \frac{y^3}{6} \right) + \mathcal{O}((1-x)^4) \right) \gamma^3 \\ & + \mathcal{O}(\gamma^4) . \end{aligned} \quad (5.141)$$

Contrairement à $A(t)$, on note sur cet exemple que le développement autour de $\gamma = 0$ de $\tilde{A}(y)$ est régulier dans la limite $x \rightarrow 1$.

5.4.2 Équation fonctionnelle pour $\tilde{A}(y)$

En fonction de $\tilde{A}(y)$, l'équation fonctionnelle (5.97) se réécrit

$$\frac{e^{-n\gamma}R(1-(1-x)y)}{(1-x)^L} = (1+xy)^L \tilde{A}(y) + y^L \frac{x^n e^{(L-2n)\gamma}}{\tilde{A}(1+xy)}, \quad (5.142)$$

tandis que les équations (5.99), (5.98) et (5.100) deviennent respectivement

$$\tilde{A}(y) = 1 + \mathcal{O}(\gamma) \quad (5.143)$$

$$\tilde{A}(0) = 1 \quad (5.144)$$

$$\frac{E(\gamma, x)}{p} = \tilde{A}'(0). \quad (5.145)$$

Nous allons résoudre l'équation fonctionnelle (5.142) perturbativement autour de $\gamma = 0$ et $x = 1$. Utilisant (5.143) et la régularité en $x = 1$ du développement en $\gamma = 0$ de $\tilde{A}(y)$, on peut écrire

$$\tilde{A}(y) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{A}_{k,l}(y) \gamma^k (1-x)^l. \quad (5.146)$$

On a vu dans la section précédente qu'à l'ordre k en γ , $A(t)$ est un polynôme de degré kn en $1/t$ avec un pôle d'ordre $k-1$ en $x = 1$. Ceci implique que les $\tilde{A}_{k,l}(y)$ sont des polynômes en y de degré $k+l-1$. Nous allons maintenant éliminer le polynôme R de l'équation fonctionnelle (5.142) de manière similaire à ce que nous avons fait dans une section précédente pour l'équation fonctionnelle en $A(t)$ (5.97). On divise l'équation fonctionnelle (5.142) par $y^L(1+xy)^L$ et on effectue le développement pour $y \rightarrow \infty$. Utilisant (5.11), on obtient

$$\frac{\tilde{A}(y)}{y^L} + \frac{1}{(1+xy)^L} \frac{x^n e^{(L-2n)\gamma}}{\tilde{A}(1+xy)} - \frac{(e^{-n\gamma} + x^{n-L} e^{(L-n)\gamma})}{y^L} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{y^{L+1}}\right), \quad (5.147)$$

qui doit être comprise de la manière suivante : chaque terme du développement en puissances de γ et $1-x$ du second membre de l'équation est d'ordre $1/y^{L+1}$ pour $y \rightarrow \infty$. Une fois encore, on observe que le polynôme R a disparu, donnant une équation faisant uniquement intervenir $\tilde{A}(y)$. Remplaçant y par y/x et divisant tout par x^n , l'équation (5.147) peut être réécrite de la manière suivante

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{A}(y+1)}{(y+1)^L} - \frac{\tilde{A}(y)}{y^L} &= \frac{x^{L-n} \tilde{A}(y/x) - \tilde{A}(y)}{y^L} \\ &+ \frac{1}{(y+1)^L} \left(\tilde{A}(y+1) + \frac{e^{(L-2n)\gamma}}{\tilde{A}(y+1)} - x^{L-n} e^{-n\gamma} - e^{(L-n)\gamma} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{y^{L+1}}\right). \end{aligned} \quad (5.148)$$

On définit l'opérateur de différence finie Δ agissant sur une fonction quelconque u de la manière suivante

$$(\Delta u)(y) = u(y+1) - u(y). \quad (5.149)$$

L'équation fonctionnelle (5.148) devient finalement

$$\Delta \left(\frac{\tilde{A}(y)}{y^L} \right) = \frac{U(y)}{y^L} + \frac{V(y+1)}{(y+1)^L} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{y^{L+1}}\right), \quad (5.150)$$

avec

$$U(y) = x^{L-n} \tilde{A}(y/x) - \tilde{A}(y) \quad (5.151)$$

et

$$V(y) = \tilde{A}(y) + \frac{e^{(L-2n)\gamma}}{\tilde{A}(y)} - x^{L-n} e^{-n\gamma} - e^{(L-n)\gamma} . \quad (5.152)$$

De manière similaire à ce qui se passait dans l'équation de récurrence (5.110) pour $A(t)$, on observe qu'à l'ordre k en γ et l en $1-x$, le second membre de (5.150) dépend seulement de $\tilde{A}_{i,j}$ avec soit $i = k$ et $j < l$ ($U(y)$) ou $i < k$ et $j < l$ ($V(y)$). Ainsi, l'équation (5.150) fournit une solution ordre par ordre en γ et $1-x$ pour $\tilde{A}(y)$, à condition que l'on sache inverser l'opérateur Δ .

5.4.3 Inversion de l'opérateur Δ

Nous voyons que contrairement à ce qui se passait dans (5.110) pour $A(t)$, l'opérateur Δ agissant sur $\tilde{A}$ dans le second membre de (5.150) ne s'annule pas pour $x \rightarrow 1$. Cela est relié au fait que $\tilde{A}(y)$ n'est pas singulier dans la limite $x \rightarrow 1$. L'opérateur Δ agit formellement comme

$$\Delta = e^{D_y} - 1 \quad \text{avec} \quad D_y = d/dy . \quad (5.153)$$

Utilisant le développement de Taylor

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j}{j!} z^j , \quad (5.154)$$

où les B_j sont les nombres de Bernoulli, on voit que l'on peut inverser l'opérateur Δ dans (5.150) en multipliant les deux côtés par $D_y/(e^{D_y} - 1)$. On obtient

$$D_y \left(\frac{\tilde{A}(y)}{y^L} \right) = \frac{D_y}{e^{D_y} - 1} \left(\frac{U(y)}{y^L} \right) + \frac{-D_y}{e^{-D_y} - 1} \left(\frac{V(y)}{y^L} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{y^{L+1}} \right) . \quad (5.155)$$

Les opérateurs différentiels $D_y/(e^{D_y} - 1)$ et $-D_y/(e^{-D_y} - 1)$ doivent être interprétés comme des séries formelles en D_y en utilisant (5.154). On définit maintenant quelques notations qui seront utiles pour la suite. Pour toute fonction f , on écrit le développement en série formelle de $f(y)$ quand $y \rightarrow \infty$ comme

$$f(y) = \sum_{r=a}^{\infty} [f]_{(r)} \frac{1}{y^r} , \quad (5.156)$$

où a est un entier qui peut être négatif. On notera $[f(y)]_{(-)}$ la partie singulière de $f(y)$ quand $y \rightarrow \infty$ et $[f(y)]_{(+)}$ la partie non singulière de $f(y)$ quand $y \rightarrow \infty$:

$$[f(y)]_{(-)} = \sum_{r=a}^{-1} [f]_{(r)} \frac{1}{y^r} , \quad (5.157)$$

et

$$[f(y)]_{(+)} = \sum_{r=0}^{\infty} [f]_{(r)} \frac{1}{y^r} . \quad (5.158)$$

Si la fonction f dépend aussi de γ ou de x , $[f(y)]_{(-)}$ et $[f(y)]_{(+)}$ sont définis de telle sorte que tous les développements en puissances de $1/y$ pour $y \rightarrow \infty$ doivent être effectués après les développements en puissances de γ et $1-x$. Utilisant (5.146), $U(y)$ et $V(y)$ peuvent être

développés autour de $\gamma = 0$ et $x = 1$. Comme les $\tilde{A}_{k,l}(y)$ sont des polynômes en y , on voit qu'à chaque ordre en γ et $1 - x$, $U(y)$ et $V(y)$ sont aussi des polynômes en y . On peut alors écrire

$$U(y) = \sum_{r=0}^{\infty} [U]_{(r)} y^r \quad \text{et} \quad V(y) = \sum_{r=0}^{\infty} [V]_{(r)} y^r . \quad (5.159)$$

Avec ces notations, on intègre l'équation (5.155) comme une série formelle en y et on garde seulement les puissances de y divergentes quand $y \rightarrow \infty$ (à savoir, les puissances strictement positives en y). Utilisant (5.144), on obtient

$$[\tilde{A}(y)]_{(-)} = \tilde{A}(y) - 1 = \sum_{r=0}^{\infty} \left[y^L \int dy \left([U]_{(r)} \frac{D_y}{e^{D_y} - 1} y^{r-L} + [V]_{(r)} \frac{-D_y}{e^{-D_y} - 1} y^{r-L} \right) \right]_{(-)} . \quad (5.160)$$

Nous n'avons pas ajouté de terme constant quand nous avons effectué l'intégration. Cela peut être justifié en effectuant une continuation analytique pour L complexe dans nos équations : comme les $A_{k,l}(y)$ sont des polynômes en y , ils ont seulement des puissances positives en y . Ajouter un terme constant lors de l'intégration de (5.155) donnerait un terme y^L à $\tilde{A}(y)$. Ce n'est pas possible vu que nous avons vu précédemment que nous pouvions prendre L complexe. On utilise alors la fonction génératrice (5.154) pour développer les opérateurs différentiels $D_y/(e^{D_y} - 1)$ et $-D_y/(e^{-D_y} - 1)$, et on calcule ensuite les intégrales. On obtient alors

$$\tilde{A}(y) - 1 = - \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{j=0}^r B_j \frac{\binom{L+j-r-1}{j}}{L+j-r-1} y^{r+1-j} ((-1)^j [U]_{(r)} + [V]_{(r)}) . \quad (5.161)$$

On observe que le dénominateur $L + j - r - 1$ rend cette équation divergente si L est un entier. L'équation (5.161) doit donc être comprise par une continuation analytique en L . Le coefficient binomial dans (5.161) est un polynôme de degré j en L . Pour $j \neq 0$, on voit que le dénominateur $L + j - r - 1$ se simplifie avec un facteur du coefficient du binôme, ce qui donne des termes non singuliers dans la limite où L devient entier. Pour $j = 0$ cependant, le dénominateur $L + j - r - 1$ ne se simplifie pas avec un facteur du coefficient du binôme, ce qui semble rendre la limite L entier de l'équation (5.161) divergente. Mais, comme nous savons que $\tilde{A}(y)$ est analytique en L entier si $L \geq n$, cela veut simplement dire que le numérateur contient des facteurs simplifiant les non analyticités du dénominateur quand L est un entier plus grand que n . Cela peut être prouvé en utilisant le fait que les $\tilde{A}_{k,l}(y)$ sont des polynômes en y de degré $k + l - 1$. D'après les définitions (5.151) et (5.152), ceci implique que $U(y)$ et $V(y)$ sont des polynômes de degré $k + l - 2$ à l'ordre k en γ et l en $1 - x$. Ainsi, seuls les termes tels que $r \leq k + l - 2$ contribuent à $\tilde{A}_{k,l}(y)$ dans l'équation (5.161). Si k et l sont choisis de telle sorte que $k + l \leq L$, seuls les termes de la somme sur r tels que $r \leq L - 2$ vont intervenir. On observe que pour ces termes, le dénominateur $L + j - r - 1$ est toujours non nul, même pour L entier. Utilisant la notation

$$\mathcal{O}(\gamma, 1 - x)^{L+1} \equiv \sum_{s=0}^{L+1} \mathcal{O}(\gamma^s) \mathcal{O}((1 - x)^{L+1-s}) , \quad (5.162)$$

l'équation (5.161) se réécrit

$$\tilde{A}(y) - 1 = - \sum_{r=0}^{L-2} \sum_{j=0}^r B_j \frac{\binom{L+j-r-1}{j}}{L+j-r-1} y^{r+1-j} ((-1)^j [U]_{(r)} + [V]_{(r)}) + \mathcal{O}(\gamma, 1 - x)^{L+1} . \quad (5.163)$$

Dans cette dernière équation, L peut être pris entier : il n'y a plus de divergences.

5.4.4 Solution des équations fonctionnelles

Jusqu'à présent, nous avons considéré des développements perturbatifs en $\gamma = 0$ et $x = 1$ de $\tilde{A}(y)$ pour des systèmes de taille finie. Nous allons maintenant prendre la limite faiblement asymétrique ($x = 1 - \nu/L$, $L \rightarrow \infty$) de la relation de récurrence (5.163) pour $\tilde{A}(y)$. D'après l'expression (5.152) pour $V(y)$, on voit que l'on va devoir prendre γ d'ordre $1/L$ pour obtenir une limite non triviale pour une densité finie $\rho = n/L$. Il est utile de considérer la fonction $h(y)$ définie par

$$h(y) \equiv h(y; \mu, \nu) \equiv \frac{\tilde{A}(Ly; \gamma = \frac{\mu}{L}, x = 1 - \frac{\nu}{L}) - 1}{L}. \quad (5.164)$$

À partir de maintenant, nous n'allons plus utiliser les variables γ et x . Tous les développements en puissances de γ et $1 - x$ vont être remplacés par des développements en puissances des nouvelles variables μ et ν . Comme les $\tilde{A}_{k,l}(y)$ sont des polynômes en y de degré $k + l - 1$, on obtient à partir de (5.146) que $h(y)$ est d'ordre $1/L$ quand la taille du système tend vers l'infini. On écrit alors

$$h(y) = \frac{h_0(y)}{L} + \frac{h_1(y)}{L^2} + \frac{h_2(y)}{L^3} + \dots \quad (5.165)$$

Les équations (5.143) et (5.144) deviennent

$$h(y) = \mathcal{O}(\mu) \quad (5.166)$$

$$h(0) = 0, \quad (5.167)$$

tandis que d'après (5.145), la fonction génératrice des cumulants du courant $\tilde{E}(\mu, \nu)$ est donnée en fonction de h par

$$\frac{\tilde{E}(\mu, \nu)}{p} \equiv \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{p} E\left(\gamma = \frac{\mu}{L}; x = 1 - \frac{\nu}{L}\right) = h'(0). \quad (5.168)$$

On peut montrer (*c.f.* article [3] en annexe) que l'équation fonctionnelle (5.163) pour $\tilde{A}(y)$ donne, à l'ordre dominant en L , l'équation fonctionnelle suivante pour $h_0(y)$:

$$ye^{\frac{1}{2y}} e^{-(1-\rho)\nu} (1 + h_0(y)) + \frac{ye^{-\frac{1}{2y}} e^{(1-2\rho)\mu}}{1 + h_0(y)} = y \left(e^{-\rho\mu} e^{-(1-\rho)\nu} + e^{(1-\rho)\mu} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{y^0}\right). \quad (5.169)$$

La solution de cette équation est alors

$$h_0(y) = -1 + e^{\frac{(1-2\rho)\mu + (1-\rho)\nu}{2}} e^{\frac{r(y)-1}{2y}}, \quad (5.170)$$

avec

$$r(y) = \sqrt{1 - 2(1 - 2\rho)y\mu - 2(1 - \rho)y\nu + y^2(\mu + (1 - \rho)\nu)^2}. \quad (5.171)$$

Aux ordres sous dominants en L , l'équation (5.163) pour $\tilde{A}(y)$ donne alors l'équation fonctionnelle suivante pour les $h_j(y)$ ($j > 0$) :

$$[(1 - \alpha(y))h_1(y)]_{(-)} = [\beta_j(y)]_{(-)}. \quad (5.172)$$

Pour $j = 1$, $1 - \alpha(y)$ est donné par

$$1 - \alpha(y) = e^{-(1-\rho)\nu} \frac{1 - e^{-r(y)/y}}{1 - e^{-1/y}}, \quad (5.173)$$

tandis que $\beta_1(y)$ a pour expression

$$\begin{aligned} \beta_1(y) = & -\frac{(1-\rho)\nu^2 e^{-\rho\mu} e^{-(1-\rho)\nu}}{4 \sinh\left(\frac{1}{2y}\right)} \\ & - \left(\frac{\nu(1-(1-\rho)y\nu)}{4y} + \frac{(1-y\nu)(1-(1-2\rho)y\mu-(1-\rho)y\nu)}{4y^2 r(y)} \right) \frac{e^{\frac{(1-2\rho)\mu-(1-\rho)\nu}{2}} e^{\frac{r(y)}{2y}}}{\sinh\left(\frac{1}{2y}\right)} \\ & + \mathcal{O}\left(\frac{1}{y^0}\right). \end{aligned} \quad (5.174)$$

Pour résoudre (5.172) et obtenir $h_j(y)$, on va devoir factoriser $1-\alpha(y)$ comme le produit d'une fonction $u(y)$ comportant uniquement des puissances positives ou nulles en y et une fonction $v(y)$ comportant seulement des puissances négatives ou nulles en y , après le développement en puissances de μ et ν . Une factorisation possible est

$$u(y) = e^{-(1-\rho)\nu} r(y) e^{\frac{1-r(y)}{2y}} \quad (5.175)$$

et

$$v(y) = \frac{\sinh\left(\frac{r(y)}{2y}\right)}{r(y) \sinh\left(\frac{1}{2y}\right)}. \quad (5.176)$$

On écrit alors l'équation (5.172) pour l'ordre sous dominant de $h(y)$ de la manière suivante :

$$(1-\alpha(y))h_j(y) = \beta_j(y) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{y^0}\right). \quad (5.177)$$

Utilisant la factorisation de $1-\alpha(y)$, on divise l'équation précédente par $v(y)$. On obtient

$$u(y)h_j(y) = \frac{\beta_j(y)}{v(y)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{y^0}\right). \quad (5.178)$$

Notant que $u(y)h_j(y)$ possède seulement des puissances strictement positives en y , on peut écrire

$$u(y)h_j(y) = [u(y)h_j(y)]_{(-)} = \left[\frac{\beta_j(y)}{v(y)} \right]_{(-)}. \quad (5.179)$$

Divisant par $u(y)$, on trouve finalement une expression pour $h_j(y)$

$$h_j(y) = \frac{1}{u(y)} \left[\frac{\beta_j(y)}{v(y)} \right]_{(-)}. \quad (5.180)$$

Le fait que, dans l'équation pour $h_j(y)$, $\alpha(y)$ ne dépend pas de j a pour conséquence que la méthode présentée ici permet d'obtenir h_y à un ordre en y quelconque donné. En pratique, les calculs devenant de plus en plus lourds, nous nous sommes arrêtés à l'ordre 2 en $1/L$, qui est suffisant pour obtenir le terme dominant en L de tous les cumulants comme nous allons le voir.

5.4.5 Fonction génératrice des cumulants du courant

Connaissant $h(y)$ aux premiers ordres en la taille du système, la fonction génératrice des cumulants du courant

$$\frac{\tilde{E}(\mu, \nu)}{p} = \frac{\tilde{E}_1(\mu, \nu)}{L} + \frac{\tilde{E}_2(\mu, \nu)}{L^2} + \frac{\tilde{E}_3(\mu, \nu)}{L^3} + \dots \quad (5.181)$$

peut être calculée. On trouve (voir l'article [1] pour les détails du calcul)

$$\boxed{\tilde{E}_1(\mu, \nu) = \rho(1 - \rho)(\mu^2 + \mu\nu)} \quad (5.182)$$

à l'ordre dominant en la taille du système et

$$\boxed{\tilde{E}_2(\mu, \nu) = -\frac{\rho(1 - \rho)\mu^2\nu}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k-2}}{k!(k-1)!} \rho^k (1 - \rho)^k (\mu^2 + \mu\nu)^k} \quad (5.183)$$

à l'ordre sous dominant.

Obtenir l'ordre suivant en L de la fonction génératrice des cumulants du courant serait assez fastidieux en utilisant la méthode que l'on vient de présenter. On peut cependant obtenir des expressions exactes pour le début du développement en μ et ν de $\tilde{E}(\mu, \nu)$ en utilisant un logiciel de calcul formel pour itérer l'équation (5.163) donnant $\tilde{A}(y)$ ordre par ordre en γ et $1 - x$. À l'ordre 6 en μ et ν , on trouve par exemple

$$\begin{aligned} \tilde{E}_3(\mu, \nu) = & \rho(1 - \rho)\nu\mu \\ & + \left(\rho(1 - \rho) - \frac{\rho(1 - \rho)}{2}\nu - \frac{\rho(1 - \rho)(1 - 2\rho + 2\rho^2)}{12}\nu^2 + \frac{\rho^2(1 - \rho)^2}{24}\nu^3 - \frac{\rho^3(1 - \rho)^3}{360}\nu^4 \right) \mu^2 \\ & + \left(\frac{\rho^2(1 - \rho)^2}{3}\nu + \frac{\rho^2(1 - \rho)^2(1 - 6\rho + 6\rho^2)}{360}\nu^3 - \frac{\rho^3(1 - \rho)^3}{360}\nu^4 + \frac{11\rho^4(1 - \rho)^4}{30240}\nu^5 \right) \mu^3 \\ & + \left(\frac{\rho^2(1 - \rho)^2}{6} - \frac{\rho^2(1 - \rho)^2}{24}\nu + \frac{\rho^2(1 - \rho)^2(3 - 13\rho + 13\rho^2)}{360}\nu^2 - \frac{\rho^3(1 - \rho)^3}{240}\nu^3 \right. \\ & \quad \left. - \frac{11\rho^3(1 - \rho)^3(1 - 7\rho + 7\rho^2)\nu^4}{30240} + \frac{\rho^4(1 - \rho)^4}{4032}\nu^5 - \frac{79\rho^5(1 - \rho)^5}{1814400}\nu^6 \right) \mu^4 \\ & + \left(\frac{(1 - 2\rho)^2\rho^2(1 - \rho)^2}{120}\nu - \frac{11\rho^3(1 - \rho)^3(4 - 19\rho + 19\rho^2)}{30240}\nu^3 + \frac{\rho^4(1 - \rho)^4}{1512}\nu^4 \right. \\ & \quad \left. + \frac{79\rho^4(1 - \rho)^4(1 - 8\rho + 8\rho^2)\nu^5}{1814400} - \frac{\rho^5(1 - \rho)^5}{43200}\nu^6 \right) \mu^5 \\ & + \left(\frac{(1 - 2\rho)^2\rho^2(1 - \rho)^2}{360} + \frac{\rho^3(1 - \rho)^3}{720}\nu - \frac{11\rho^3(1 - \rho)^3(2 - 5\rho)(3 - 5\rho)}{30240}\nu^2 + \frac{\rho^4(1 - \rho)^4}{2016}\nu^3 \right. \\ & \quad \left. + \frac{79\rho^4(1 - \rho)^4(5 - 26\rho + 26\rho^2)\nu^4}{1814400} - \frac{\rho^5(1 - \rho)^5}{11520}\nu^5 - \frac{79\rho^5(1 - \rho)^5(9\rho^2 - 9\rho + 1)}{15966720}\nu^6 \right) \mu^6 \\ & + \mathcal{O}(\mu^7) + \mathcal{O}(\nu^7) \end{aligned} \quad (5.184)$$

pour l'ordre 3 en $1/L$. On note que pour le système symétrique $\nu = 0$ au demi-remplissage $\rho = 1/2$, le troisième ordre en $1/L$ de $\tilde{E}(\mu, \nu)$ semble seulement contribuer à la constante de diffusion et au quatrième cumulant mais pas aux autres cumulants. On peut confirmer cela en itérant l'équation (5.163) jusqu'à l'ordre 12 en γ tout en restant à l'ordre 0 en $1 - x$. On trouve

$$\begin{aligned} \tilde{E}_3(\mu, \nu = 0) = & \rho(1 - \rho)\mu^2 + \frac{\rho^2(1 - \rho)^2}{6}\mu^4 + \frac{(1 - 2\rho)^2\rho^2(1 - \rho)^2}{360}\mu^6 - \frac{11(1 - 2\rho)^2\rho^3(1 - \rho)^3}{30240}\mu^8 \\ & + \frac{79(1 - 2\rho)^2\rho^4(1 - \rho)^4}{1814400}\mu^{10} - \frac{79(1 - 2\rho)^2\rho^5(1 - \rho)^5}{15966720}\mu^{12} + \mathcal{O}(\mu^{14}) \end{aligned} \quad (5.185)$$

pour l'ordre 3 en $1/L$ du système symétrique. On conjecture donc qu'au demi-remplissage ($\rho = 1/2$), on a

$$\tilde{E}_3(\mu, \nu = 0) = \frac{\mu^2}{4} + \frac{\mu^4}{96}. \quad (5.186)$$

5.5 Résolution numérique des équations de Bethe

Cette section est consacrée à une méthode numérique pour résoudre l'équation de Bethe fonctionnelle (5.10), consistant à déformer la solution en $\gamma = 0$ en utilisant la méthode de Newton. Cette méthode de résolution numérique donne accès au comportement non perturbatif de la fonction de grandes déviations du courant. Nous obtiendrons aussi des informations sur l'évolution des racines de Bethe en fonction du paramètre γ .

5.5.1 Résolution numérique de l'équation de Bethe fonctionnelle

Les solutions exactes que nous avons présentées pour le calcul de la transformée de Legendre $E(\gamma)$ de la fonction de grandes déviations du courant $G(j)$ reposent sur une résolution perturbative en γ de l'équation de Bethe fonctionnelle (5.10). Elles permettent en particulier d'obtenir les cumulants du courant, mais ne renseignent pas nécessairement sur la valeur de la fonction $E(\gamma)$ pour γ loin de zéro, ni sur la valeur de $G(j)$ pour j loin de la valeur moyenne du courant J .

Il est possible d'obtenir des informations non perturbatives en γ sur $E(\gamma)$ par une approche numérique du problème pour des systèmes de taille finie. Une première méthode consiste à diagonaliser numériquement la matrice de Markov déformée $M(\gamma)$ pour des valeurs fixées de l'asymétrie x et de γ . Cette méthode ne permet cependant pas d'aller beaucoup plus loin que des systèmes de taille 12 sans utiliser de trop gros moyens de calculs, la taille des matrices augmentant exponentiellement avec la taille du système. Une autre méthode consiste à résoudre numériquement les équations de Bethe. Pour cela on peut, pour des valeurs fixées de x et de γ , essayer de trouver toutes les solutions des équations de Bethe, puis calculer les valeurs propres correspondantes de $M(\gamma)$ et identifier celle de partie réelle maximale à $E(\gamma)$. Mais là encore, le nombre d'états propres de $M(\gamma)$ est tel qu'il est uniquement possible de traiter des systèmes de taille très petite.

Une méthode plus efficace consiste à « suivre » la solution des équations de Bethe, depuis $\gamma = 0$ où elle est connue exactement ($E(\gamma = 0) = 0$), jusqu'à une valeur de γ éloignée de zéro. On peut utiliser la méthode de Newton sur les équations de Bethe (3.29), ou sur l'équation fonctionnelle (5.10). Une difficulté est que le comportement des racines de Bethe z_i (ou de manière équivalente, le comportement du polynôme $Q(t)$) en fonction de γ présente des variations très rapides, ainsi que des divergences pour certaines valeurs particulières de γ , rendant l'application de cette méthode peu aisée. Il existe cependant une façon de contourner cette difficulté : elle repose sur une reformulation de l'équation de Bethe fonctionnelle faisant intervenir uniquement le polynôme $R(t)$, qui semble varier beaucoup plus lentement que $Q(t)$ en fonction de γ . Cette équation s'obtient de la manière suivante (voir par exemple le cours [146] de Babelon) : on divise tout d'abord l'équation de Bethe fonctionnelle par $Q(t)$. On obtient

$$R(t) = e^{L\gamma}(1-t)^L \frac{Q(xt)}{Q(t)} + (1-xt)^L x^n \frac{Q(t/x)}{Q(t)}. \quad (5.187)$$

On remplace ensuite t par t/x dans l'équation précédente. On a

$$R(t/x) = e^{L\gamma}(1-t/x)^L \frac{Q(t)}{Q(t/x)} + (1-t)^L x^n \frac{Q(t/x^2)}{Q(t/x)}. \quad (5.188)$$

On multiplie enfin (5.187) et (5.188). Parmi les quatre termes que l'on obtient dans le second membre, seul un n'est pas proportionnel à $(1-t)^L$. De plus, tous les facteurs $Q(t)$ et $Q(t/x)$ se simplifient dans ce terme. On peut donc écrire

$$\boxed{R(t)R(t/x) = x^n e^{L\gamma}(1-xt)^L(1-t/x)^L + \mathcal{O}((1-t)^L)}. \quad (5.189)$$

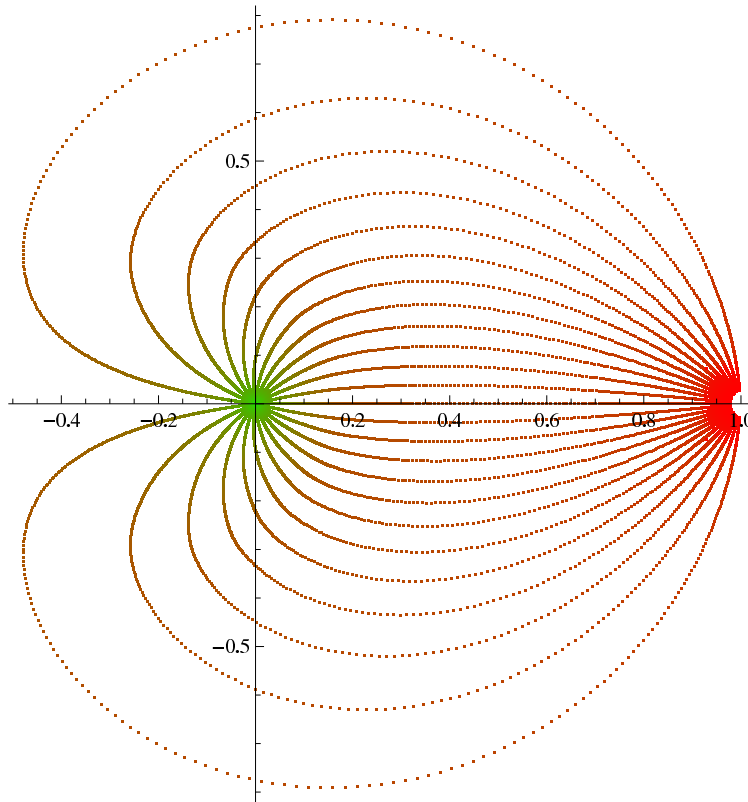


FIG. 5.1 – Comportement des racines de Bethe y_j entre $\gamma = 0$ (points verts) et $\gamma = +\infty$ (points rouges) pour un système de 25 particules sur $L = 50$ sites, avec une asymétrie $1 - x = 2\pi/L$. Les 25 points d'une même couleur représentent les 25 y_j pour une même valeur de γ .

Cette équation donne L contraintes sur le polynôme R , obtenues en identifiant les termes en $(1-t)^k$ des deux côtés du signe égal pour k compris entre 0 et $L-1$. On peut y ajouter l'équation (5.21) donnant la valeur de $R(1)$. On a alors suffisamment d'équations pour contraindre complètement le polynôme $R(t)$, qui est de degré L .

En choisissant un pas en γ suffisamment petit, on peut alors appliquer la méthode de Newton à l'équation (5.189), partant de (5.18) pour $\gamma = 0$:

$$R(t, \gamma = 0) = (1 - xt)^L + x^n(1 - t)^L. \quad (5.190)$$

Il est alors possible, en un temps raisonnable, d'obtenir $E(\gamma)$ pour quelques milliers de valeurs de γ pour un système de taille $L = 100$. Des graphes de $E(\gamma)$ pour cinq valeurs de l'asymétrie ont été présentés en figure 4.3 au chapitre 4. On a superposé des données obtenues pour des systèmes de taille 50 et 100 au demi-remplissage. Les calculs ont été effectués en gardant 400 chiffres significatifs pour les coefficients du polynôme $R(t)$.

5.5.2 Évolution des racines de Bethe en fonction de γ

La méthode numérique que nous venons de présenter permet d'obtenir le polynôme $R(t)$ pour des valeurs arbitraires du paramètre γ . L'équation de Bethe fonctionnelle (5.10) donne alors un système linéaire en les coefficients du polynôme $Q(t)$ qu'il est possible de résoudre. On obtient alors l'évolution des racines de Bethe y_j (qui sont les zéros du polynôme Q) en fonction de γ .

Nous allons présenter cette évolution des y_j dans le cas d'un système avec une asymétrie x comprise entre 0 et 1 (le cas $x > 1$ s'obtient alors par la transformation $x \rightarrow 1/x$, $\gamma \rightarrow -\gamma$; voir

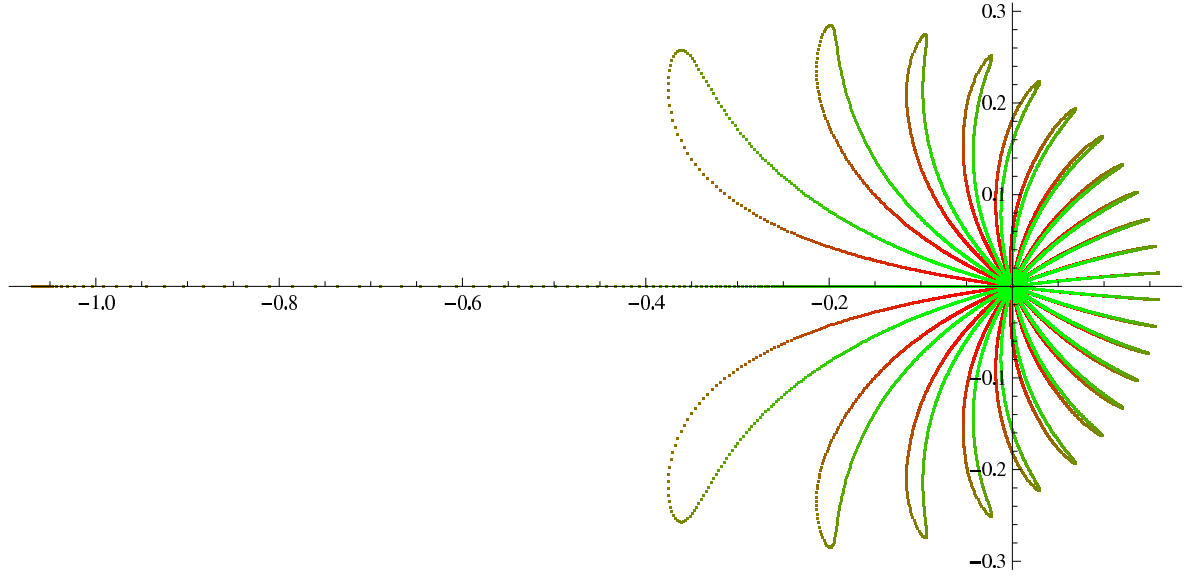


FIG. 5.2 – Comportement des racines de Bethe y_j entre $\gamma = 0$ (points verts) et $\gamma = \gamma_1 = (\log x)/L$ (points rouges) pour un système de 25 particules sur $L = 50$ sites, avec une asymétrie $1 - x = 2\pi/L$. Les 25 points d'une même couleur représentent les 25 y_j pour une même valeur de γ .

la section 3.1.4 du chapitre 3). On commence par considérer un système au demi-remplissage, pour lequel $L = 2n$. En $\gamma = 0$, tous les y_j sont nuls. À mesure que γ s'éloigne de zéro, les y_j s'en éloignent aussi, de manière symétrique. Si l'on augmente γ à partir de zéro, les y_j tendent vers 1 de manière régulière (voir la figure 5.1). Par contre, si l'on diminue γ à partir de zéro, le comportement des y_i est plus complexe.

Pour gamma proche de zéro et négatif, les y_j commencent encore par s'éloigner de zéro de manière symétrique, avec en particulier l'un des y_j (que l'on appellera y_1) qui s'éloigne sur l'axe réel négatif. Cependant, à partir d'une certaine valeur (négative) de γ , les y_j cessent de s'éloigner de zéro, et commencent à s'en rapprocher, excepté y_1 qui continue à parcourir l'axe réel négatif vers la gauche. Pour une valeur $\gamma_1 < 0$ de γ , numériquement égale à $(\log x)/L$, on constate que tous les y_j s'annulent, excepté y_1 qui est réel et strictement négatif. On a représenté ce comportement des y_j dans la figure 5.2 pour un système de 25 particules sur 50 sites.

Si l'on continue de diminuer la valeur de γ à partir de γ_1 , on constate que y_1 continue de s'éloigner vers les réels négatifs, tandis que les autres y_j s'éloignent encore une fois de manière symétrique de zéro. En particulier, y_2 s'éloigne sur l'axe réel négatif. Le même phénomène que précédemment se reproduit alors : à partir d'une certaine valeur de γ , les y_j pour $j \geq 3$ commencent à reconverger vers zéro, tandis que y_1 et y_2 continuent de s'éloigner sur l'axe réel négatif. Pour une valeur γ_2 , numériquement égale à $2\gamma_1 = (2/L) \log x$, on observe alors que tous les y_j s'annulent, exceptés y_1 et y_2 qui sont situés sur l'axe réel négatif.

Le même phénomène se reproduit encore jusqu'à ce que tous les y_j se trouvent sur l'axe réel négatif. Si l'on pose $\gamma_k = k\gamma_1 < 0$, on constate que k racines de Bethe $y_1, \dots, y_k$ sont réelles et négatives pour γ compris entre γ_{k-1} et γ_k . En $\gamma = \gamma_k$, les $n - k$ autres racines de Bethe $y_{n+1}, \dots, y_n$ s'annulent, et y_{k+1} passe sur l'axe réel négatif pour $\gamma < \gamma_k$. Finalement, à partir de γ_{n-1} , tous les y_j sont passés sur l'axe réel négatif.

Si l'on continue à diminuer γ , rien de particulier ne semble se passer en $\gamma = \gamma_n = n\gamma_1$: tous les y_j restent sur l'axe réel négatif. Par contre, en $\gamma = \gamma_{n+1} = (n+1)\gamma_1$, on constate que y_1 diverge. Pour $\gamma < \gamma_{n+1}$, y_1 a alors quitté l'axe réel négatif. Puis, en $\gamma = \gamma_{n+2} = (n+2)\gamma_1$, c'est y_1 et y_2 qui deviennent infinis, et ainsi de suite jusqu'en $\gamma = \gamma_{2n} = 2n\gamma_1$, où tous les y_j

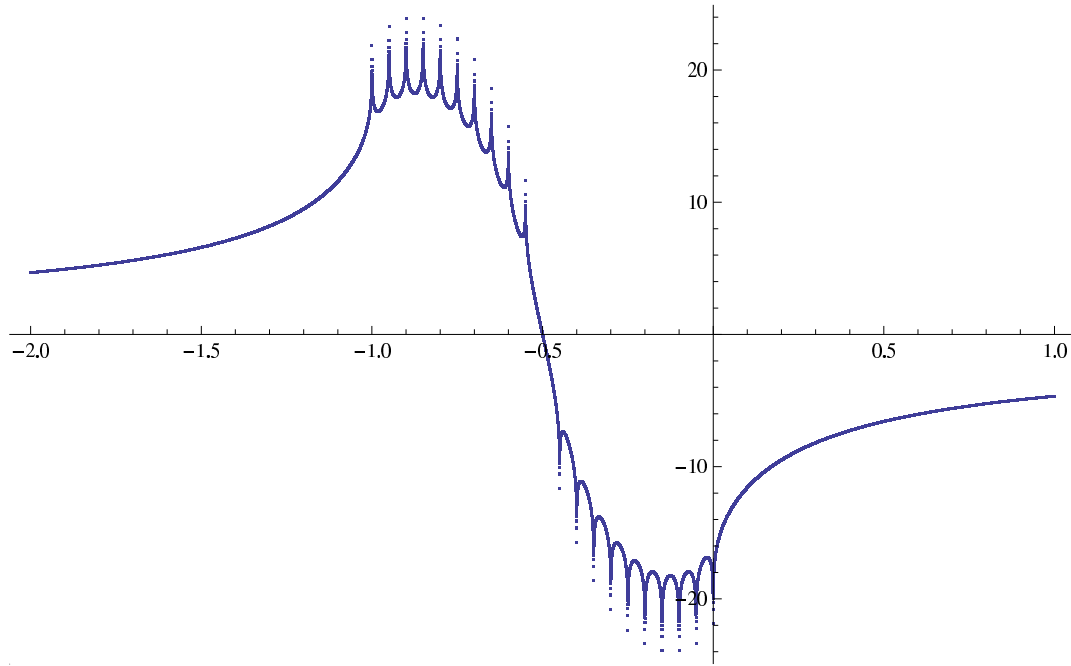


FIG. 5.3 – Graphe de $\log |x^{n/2}Q(0)|$ en fonction de $w = \gamma/|\log x|$ pour un système de taille $L = 20$ avec $n = 10$ particules, et une asymétrie $1 - x = 2\pi/L$. On observe que $Q(0)$ s'annule en $w = k/L$ pour k compris entre 0 et $n - 1$, et qu'il diverge en $w = k/L$ pour k compris entre $n + 1$ et L .

sont infinis. Entre γ_k et γ_{k+1} (pour k supérieur ou égal à $n + 1$), on a ainsi $2n - k$ racines de Bethe toujours sur l'axe réel négatif, tandis que les $k - n$ autres sont redevenus des nombres complexes. Enfin, pour $\gamma < \gamma_{2n}$, on constate que tous les y_j tendent depuis l'infini de manière régulière vers $1/x$.

Pour un système qui ne se trouve pas au demi-remplissage, quelques modifications doivent être apportées. Il va falloir distinguer les deux cas $n < L/2$ et $n > L/2$. Dans le cas $n < L/2$, toutes les racines de Bethe sont passées sur l'axe réel négatif dès que $\gamma < \gamma_{n-1}$, comme au demi-remplissage. Par contre, y_1 diverge seulement en $\gamma = \gamma_{L+1-n}$ et pas en $\gamma = \gamma_{n+1}$. Tous les y_j divergent donc en $\gamma = \gamma_L$. Dans le cas $n > L/2$, on a maintenant $\gamma_{n-1} < \gamma_{L+1-n}$. On constate alors que y_1 diverge avant que tous les y_j soient passés sur l'axe réel négatif. Pour k compris entre $L + 1 - n$ et $n - 1$, on observe donc qu'en $\gamma = \gamma_k$, certaines des racines de Bethe tendent vers zéro, d'autres divergent, et d'autres encore restent sur l'axe réel négatifs.

On note que $\gamma_L = \log x$ est le symétrique de $\gamma = 0$ par la symétrie de Gallavotti-Cohen. Le fait que tous les y_j divergent en γ_L est donc une simple conséquence du fait qu'ils s'annulent tous en $\gamma = 0$, par la symétrie de Gallavotti-Cohen des équations de Bethe présentée à la section 3.1.4 du chapitre 3.

5.5.3 Argument pour l'annulation des racines de Bethe

Nous allons maintenant montrer que les racines de Bethe y_j ne peuvent s'annuler que pour γ égal à l'un des $\gamma_k = (k/L) \log x$ introduits précédemment, avec k entier compris entre 0 et $n - 1$. On prend pour cela $t = 0$ dans l'équation de Bethe fonctionnelle (5.10). Si $Q(0)$ est différent de zéro (ce qui correspond à avoir tous les y_j différents de zéro), on en déduit la valeur de $R(0)$:

$$R(0) = x^n + e^{L\gamma} . \quad (5.191)$$

Si $Q(0)$ est égal à zéro, on peut aussi obtenir la valeur de $R(0)$ en divisant l'équation fonctionnelle (5.10) par t^{n-k} , où k est le nombre (entier compris entre 0 et $n-1$) de zéros non nuls du polynôme $Q : Q(t) = t^{n-k} \tilde{Q}_k(t)$ avec $\tilde{Q}_k(t)$ polynôme de degré k en t tel que $\tilde{Q}_k(0) \neq 0$. On trouve alors

$$\tilde{Q}_k(t)R(t) = x^{n-k}e^{L\gamma}(1-t)^L \tilde{Q}_k(xt) + x^k(1-xt)^L \tilde{Q}_k(t/x) . \quad (5.192)$$

En prenant encore une fois $t = 0$, on obtient pour $R(0)$

$$R(0) = x^k + x^{n-k}e^{L\gamma} . \quad (5.193)$$

Si on admet que $Q(0)$ n'est nul que pour des valeurs isolées du paramètre γ , et que $R(0)$ est continu par rapport à γ , les deux expressions trouvées pour $R(0)$ doivent nécessairement être égales quand $n-k$ racines de Bethe sont nulles. Ceci implique alors que

$$e^{L\gamma} = x^k . \quad (5.194)$$

Pour γ réel, on retrouve alors les γ_k pour k compris entre 0 et $n-1$. On a représenté $\log |Q(0)|$ en fonction de γ en figure 5.3.

La relation précédente est une condition nécessaire pour que certains des y_j s'annulent. Il ne s'agit cependant pas d'une condition suffisante. En particulier, seuls les y_j solution des équations de Bethe correspondant à la valeur propre maximale $E(\gamma)$ de la matrice de Markov déformée $M(\gamma)$ s'annulent en $\gamma = 0$. Les autres solutions des équations de Bethe ne peuvent pas s'annuler en ce point car la valeur propre $E(\gamma = 0) = 0$ est non dégénérée.

La démonstration précédente permet de retrouver que les valeurs γ_k correspondent à l'annulation de $n-k$ des y_j . Par contre, elle ne dit rien sur la valeur des y_j qui ne s'annulent pas : elle ne permet pas de montrer que ceux-ci sont réels et négatifs, ce que l'on observe seulement numériquement.

Chapitre 6

Formule combinatoire pour les cumulants du courant

Dans les chapitres précédents, nous avons montré comment calculer les cumulants du courant dans l'état stationnaire du modèle d'exclusion asymétrique sur un anneau. Nous avons expliqué comment l'utilisation de l'Ansatz de Bethe avait permis d'obtenir tous les cumulants du courant dans le cas du modèle totalement asymétrique, puis nous avons montré que la formulation fonctionnelle des équations de Bethe permettait de traiter le cas partiellement asymétrique. Nous avons en particulier obtenu des expressions exactes pour les trois premiers cumulants du courant, ainsi que l'ordre dominant en la taille du système de tous les cumulants du modèle faiblement asymétrique, pour lequel l'asymétrie est d'ordre l'inverse de la taille du système.

Dans ce chapitre, nous généralisons les expressions exactes des trois premiers cumulants du courant du modèle partiellement asymétrique pour obtenir tous les cumulants d'ordre plus élevé. Pour cela, nous analysons en détail la structure des expressions de la constante de diffusion et du troisième cumulant, ce qui nous conduit à une conjecture pour tous les autres cumulants du courant. Cette conjecture, que nous vérifions pour de petits systèmes, redonne les expressions connues dans la limite du système totalement asymétrique. Nous constaterons que le fait d'ajouter une asymétrie partielle fait apparaître des structures en arbre dans les expressions des cumulants.

Pour le modèle d'exclusion totalement asymétrique, la fonction génératrice des cumulants du courant $E(\gamma)$ peut être écrite sous la forme paramétrique suivante :

$$E(\gamma) = -\frac{n(L-n)}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B^k}{kL-1} \binom{kL}{kn} \quad (6.1)$$

$$\gamma = -\frac{1}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B^k}{k} \binom{kL}{kn}. \quad (6.2)$$

La première équation exprime $E(\gamma)$ en fonction d'un paramètre B , tandis que la seconde relie B et γ . L'élimination du paramètre B entre les deux équations donne une expression explicite pour la fonction $E(\gamma)$. Deux démonstrations de l'expression (6.1), utilisant l'Ansatz de Bethe, ont été données dans les chapitres précédents. La première, à la section 3.3 du chapitre 3, est la dérivation originale de Derrida et Lebowitz [86]. Elle fait intervenir la forme standard des équations de Bethe en fonction des racines de Bethe z_j . La seconde, à la section 5.1.4 du chapitre 5, est un peu plus rapide. Elle fait intervenir la formulation fonctionnelle des équations de Bethe.

Dans ce chapitre, nous allons généraliser l'expression (6.1) de $E(\gamma)$ au cas du modèle partiellement asymétrique. Ce modèle interpole entre le modèle symétrique, qui atteint aux temps longs un état d'équilibre thermodynamique avec un courant moyen nul, et le modèle totalement asymétrique, qui possède un état stationnaire hors d'équilibre avec un courant macroscopique

qui circule dans le système. Nous allons trouver des quantités $f_k(x)$ et $g_k(x)$, dépendant de l'asymétrie x , telles que la fonction génératrice des cumulants du courant du modèle partiellement asymétrique $E(\gamma)$ s'écrive sous la forme paramétrique

$$E(\gamma) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) B^k \quad (6.3)$$

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) B^k . \quad (6.4)$$

Les quantités f_k et g_k redonnent les coefficients du binôme présents dans l'expression (6.1) dans la limite $x \rightarrow 0$. Nous verrons dans la suite de ce chapitre qu'elles s'expriment comme des sommes sur tous les éléments d'un ensemble d'arbres $\mathcal{G}_k$.

6.1 Structure de l'expression des premiers cumulants

Dans cette section, nous analysons la structure des expressions de la constante de diffusion et du troisième cumulant du courant obtenues au chapitre 5, à la fois en taille finie et dans la limite thermodynamique avec une asymétrie $1 - x$ d'ordre $1/\sqrt{L}$. À partir de cette analyse, nous serons en mesure d'écrire une expression pour le quatrième cumulant du courant.

6.1.1 Formules de taille finie

La structure des expressions (5.121) et (5.123) obtenues pour la constante de diffusion D et le troisième cumulant du courant E_3 présentent un certain nombre de similitudes. Ces similitudes sont encore plus apparentes si l'on réécrit la constante de diffusion sous la forme

$$\frac{(L-1)D}{p(1-x)L} = \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} (i^2 + (-i)^2) \frac{\binom{L}{n+i} \binom{L}{n-i}}{\binom{L}{n}^2} \frac{1+x^{|i|}}{1-x^{|i|}} , \quad (6.5)$$

et le troisième cumulant (en utilisant quelques unes des formules de sommes de coefficients du binôme présentées dans l'appendice A de l'article [2] en annexe) sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{(L-1)E_3}{p(1-x)L^2} = & \frac{1}{12} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} (i^2 + j^2 + (-i-j)^2) \frac{\binom{L}{n+i} \binom{L}{n+j} \binom{L}{n-i-j}}{\binom{L}{n}^3} \\ & - \frac{3}{4} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} (i^2 + j^2 + (-i-j)^2) \frac{\binom{L}{n+i} \binom{L}{n+j} \binom{L}{n-i-j}}{\binom{L}{n}^3} \frac{1+x^{|i|}}{1-x^{|i|}} \frac{1+x^{|j|}}{1-x^{|j|}} \\ & + \frac{3}{4} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} (i^2 + (-i)^2 + j^2 + (-j)^2) \frac{\binom{L}{n+i} \binom{L}{n-i} \binom{L}{n+j} \binom{L}{n-j}}{\binom{L}{n}^4} \frac{1+x^{|i|}}{1-x^{|i|}} \frac{1+x^{|j|}}{1-x^{|j|}} . \end{aligned} \quad (6.6)$$

Ces cumulants s'expriment comme des sommes sur des indices appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers positifs et négatifs (un seul indice pour D , deux pour E_3) d'un facteur quadratique en les indices de sommation, multiplié par des produits de coefficients du binôme de la forme

$$\eta(z) = \binom{L}{n+z} / \binom{L}{n} , \quad (6.7)$$

et éventuellement multiplié par des facteurs

$$\xi(z) = \frac{1+x^{|z|}}{1-x^{|z|}} , \quad (6.8)$$

avec la convention $\xi(0) = 1$ pour rendre fini $\xi(z)$ en $z = 0$. On constate que les arguments des fonctions η intervenant dans (6.5) et (6.6) sont des combinaisons linéaires des indices de sommation avec des coefficients $+1$ et -1 . Le facteur quadratique en les indices multipliant un produit de fonctions η est simplement égal à la somme des carrés des arguments de ces fonctions η .

On note que chaque indice de sommation apparaît exactement deux fois dans les arguments des produits de fonctions η , une fois avec un coefficient $+1$ et une fois avec un coefficient -1 . On peut associer un graphe à chaque produit de fonctions η ayant la propriété précédente : les différents arguments des fonctions η sont représentés par des nœuds d'un graphe et les nœuds correspondant à des arguments de fonctions η faisant intervenir le même indice de sommation sont reliés par des arêtes. On a, pour les produits de fonctions η intervenant dans les expressions (6.5) et (6.6), les graphes suivants :

Facteur quadratique	Produit de fonctions η	Graphe
$i^2 + (-i)^2$	$\eta(i)\eta(-i)$	$(+i) \xleftarrow{i} (-i)$
$i^2 + j^2 + (-i-j)^2$	$\eta(i)\eta(j)\eta(-i-j)$	$(+i) \xleftarrow{i} (-i-j) \xrightarrow{j} (+j)$
$i^2 + (-i)^2 + j^2 + (-j)^2$	$\eta(i)\eta(-i)\eta(j)\eta(-j)$	$(+i) \xleftarrow{i} (-i) \quad (+j) \xleftarrow{j} (-j)$

Chaque arête a été étiquetée par l'indice de sommation intervenant dans les deux nœuds qu'elle relie. Les arêtes ont été orientées depuis le nœud qui fait intervenir l'indice de sommation avec un coefficient -1 vers le nœud qui le fait intervenir avec un coefficient $+1$. On constate que les trois graphes obtenus ne comportent pas de cycles. Les deux premiers graphes sont connexes, tandis que le dernier est constitué des deux composantes connexes.

On passe maintenant aux facteurs $\xi(z)$ des expressions (6.5) et (6.6), qui contiennent toute la dépendance en l'asymétrie x de la constante de diffusion et du troisième cumulant (mis à part le facteur $1-x$ global). Les arguments des fonctions ξ sont les indices de sommation (et non pas des combinaisons linéaires d'indices de sommation comme pour les fonctions η). Chaque indice de sommation apparaît au plus une fois dans un produit de fonctions ξ .

Pour la constante de diffusion on a un seul terme, contenant un facteur $\xi(i)$ (et donc aucun terme sans ce facteur $\xi(i)$). Pour le troisième cumulant, on a un terme ne contenant aucun facteur ξ et deux termes contenant à la fois $\xi(i)$ et $\xi(j)$. Par contre, il n'y a pas de terme contenant seulement $\xi(i)$ ou $\xi(j)$. Ceci peut en fait être vu comme une conséquence de la symétrie entre les deux sens de parcours du système par les particules. Celle-ci implique que les cumulants pairs du courant (D , E_4 , ...) doivent être invariant par le remplacement de p par q (et donc de x par $1/x$), tandis que les cumulants impairs du courant (J , E_3 , ...) doivent changer de signe. Or, $\xi(z)$ est changé en $-\xi(z)$ si l'on remplace x par $1/x$. Le k -ième cumulant doit donc comporter uniquement des produits d'un nombre de facteurs ξ de même parité que $k-1$ si la dépendance en x est uniquement due à un facteur global $1-x$ et à des produits de fonctions ξ .

On note l'absence de terme en $\eta(i)\eta(-i)\eta(j)\eta(-j)$ sans facteur ξ dans l'expression du troisième cumulant, alors que ce terme n'est pas interdit par la symétrie entre les deux sens de parcours du système. Cela tend à indiquer que le nombre total de facteurs ξ dans un terme du k -ième cumulant obéit à la contrainte plus forte suivante, que l'on notera (*) : dans un produit de fonctions ξ , le nombre de fonctions ξ dont l'argument étiquette une arête d'une composante connexe donnée du graphe doit être de même parité que le nombre d'arêtes de cette composante connexe. Ainsi pour le graphe correspondant à $\eta(i)\eta(-i)\eta(j)\eta(-j)$, qui est constitué de

deux composantes connexes comportant chacune une seule arête, chaque composante connexe contribue obligatoirement un facteur ξ et il ne peut donc pas y avoir de terme avec zéro facteur ξ .

On peut maintenant faire une première conjecture sur la forme des cumulants E_k d'ordre plus élevé :

$$\frac{(L-1)E_k}{p(1-x)L^{k-1}} = \sum_{i_1, \dots, i_{k-1} \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{h \text{ graphe sans cycle} \\ \text{à } k-1 \text{ arêtes}}} \sum_{\substack{c \text{ choix des étiquettes des arêtes} \\ \text{de chaque composante connexe de } h \\ \text{vérifiant la contrainte (*)}}} a_{h,c} \times \varphi(h) \times \eta(h) \times \xi(c) , \quad (6.9)$$

où $a_{h,c}$ est un coefficient numérique appartenant à $\mathbb{Q}$, et où $\varphi(h)$, $\eta(h)$ et $\xi(c)$ sont respectivement le terme quadratique correspondant au graphe h , le produit de fonctions η correspondant à h , et le produit de fonctions ξ correspondant au choix des étiquettes des arêtes dans chaque composante connexe de h . Les arêtes des graphes sont étiquetées par les indices de sommation $i_1, \dots, i_{k-1}$. Les coefficients $a_{h,c}$ ne sont pas encore déterminés. On verra dans la suite de cette section que certains sont en fait nuls, et on en déduira une contrainte encore plus forte sur les indices de sommation qui peuvent être pris pour arguments des fonctions ξ . Dans les sections suivantes, on trouvera finalement une expression complète pour tous ces coefficients.

6.1.2 Limite thermodynamique

On va maintenant considérer les expressions de la constante de diffusion et du troisième cumulant dans la limite thermodynamique $L \rightarrow \infty$ avec $1-x \sim 1/\sqrt{L}$. On a vu à la section 5.3.6 du chapitre 5 que dans cette limite, les sommes sur les indices deviennent des intégrales, tandis que les coefficients du binôme se transforment en exponentielles. Plus précisément, pour

$$1-x \sim \frac{2\Phi}{\sqrt{L\rho(1-\rho)}} , \quad (6.10)$$

la constante de diffusion (6.5) devient dans la limite $L \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{\rho^{3/2}(1-\rho)^{3/2}L^{3/2}} \times \frac{D}{p(1-x)} \sim \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} du (u^2 + (-u)^2) \frac{e^{-\frac{u^2 + (-u)^2}{2}}}{\tanh(\Phi|u|)} , \quad (6.11)$$

tandis que le troisième cumulant (6.6) s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^2(1-\rho)^2L^3} \times \frac{E_3}{p(1-x)} \sim & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} du dv \left[(u^2 + v^2 + (-u-v)^2) e^{-\frac{u^2 + v^2 + (-u-v)^2}{2}} \left(\frac{1}{12} - \frac{3}{4} \frac{1}{\tanh(\Phi|u|)\tanh(\Phi|v|)} \right) \right. \\ & \left. + (u^2 + (-u)^2 + v^2 + (-v)^2) e^{-\frac{u^2 + (-u)^2 + v^2 + (-v)^2}{2}} \left(\frac{3}{4} \frac{1}{\tanh(\Phi|u|)\tanh(\Phi|v|)} \right) \right] . \end{aligned} \quad (6.12)$$

On constate que ces expressions ont la même structure que celle observée sur les formules de taille finie (6.5) et (6.6) : les indices de sommation $i_1, \dots, i_{k-1}$ sont devenus des variables d'intégration $u_1, \dots, u_{k-1}$, les sommes sont devenues des intégrales, et on a effectué les remplacements

$$\eta(z) \rightsquigarrow e^{-z^2/2} \quad \text{et} \quad \xi(z) \rightsquigarrow \frac{1}{\tanh(\Phi|z|)} . \quad (6.13)$$

Les expressions ont été multipliées par une puissance de $\sqrt{\rho(1-\rho)L}$ provenant de la transformation des sommes de Riemann en intégrales. On note que, même dans la limite thermodynamique,

la structure en graphe introduite section précédente est préservée : **les cumulants du courant ont un caractère combinatoire inhérent même pour des systèmes de grande taille.** La conjecture formulée pour les cumulants du courant d'ordre plus élevé en taille finie devient ainsi dans la limite thermodynamique :

$$\begin{aligned} & \frac{E_k}{p(1-x)(\rho(1-\rho))^{\frac{k+1}{2}} L^{\frac{3(k-1)}{2}}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} du_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} du_{k-1} \sum_{\substack{h \text{ graphe sans cycle} \\ \text{à } k-1 \text{ arêtes}}} \sum_{\substack{c \text{ choix des étiquettes des arêtes} \\ \text{de chaque composante connexe de } h \\ \text{vérifiant la contrainte (*)}}} a_{h,c} \times \varphi(h) \times \eta(h) \times \xi(c) . \end{aligned} \quad (6.14)$$

Les arêtes de graphes sont maintenant étiquetées par les variables d'intégration $u_1, \dots, u_{k-1}$. Comme pour l'expression en taille finie, seuls les nombres rationnels $a_{h,c}$ ne sont pas encore déterminés : toutes les autres quantités sont connues explicitement.

6.1.3 Quatrième cumulant du courant

On va maintenant appliquer l'analyse précédente des expressions de la constante de diffusion et du troisième cumulant du courant au quatrième cumulant du courant E_4 . On est amené à postuler l'expression suivante :

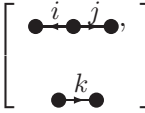
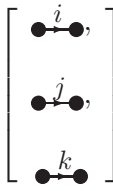
$$\begin{aligned} & \frac{(L-1)E_4}{p(1-x)L^3} \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (i^2 + (-i-j)^2 + (j+k)^2 + (-k)^2) \eta(i) \eta(-i-j) \eta(j+k) \eta(-k) a_x(i, j, k) \\ &+ \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (i^2 + j^2 + k^2 + (-i-j-k)^2) \eta(i) \eta(j) \eta(k) \eta(-i-j-k) b_x(i, j, k) \\ &+ \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (i^2 + j^2 + (-i-j)^2 + k^2 + (-k)^2) \eta(i) \eta(j) \eta(-i-j) \eta(k) \eta(-k) c_x(i, j, k) \\ &+ \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (i^2 + (-i)^2 + j^2 + (-j)^2 + k^2 + (-k)^2) \eta(i) \eta(-i) \eta(j) \eta(-j) \eta(k) \eta(-k) d_x(i, j, k) , \end{aligned} \quad (6.15)$$

avec

$$\begin{aligned} a_x(i, j, k) &= a_0 \xi(i) \xi(j) \xi(k) + a_1 \xi(i) + a_2 \xi(j) + a_3 \xi(k) \\ b_x(i, j, k) &= b_0 \xi(i) \xi(j) \xi(k) + b_1 \xi(i) + b_2 \xi(j) + b_3 \xi(k) \\ c_x(i, j, k) &= c_0 \xi(i) \xi(j) \xi(k) + c_1 \xi(i) + c_2 \xi(j) + c_3 \xi(k) \\ d_x(i, j, k) &= d_0 \xi(i) \xi(j) \xi(k) + d_1 \xi(i) + d_2 \xi(j) + d_3 \xi(k) , \end{aligned} \quad (6.16)$$

où les seize coefficients $a_0, \dots, d_3$ sont encore indéterminés. Les quatre termes de l'équation (6.15) correspondent aux quatre graphes sans cycles comportant trois arêtes. On a les corres-

pondances suivantes entre les termes quadratiques, les produits de fonctions η , et les graphes :

	Facteur quadratique	Produit de fonctions η	Graphe
a_x	$[i^2 + (-i - j)^2 + (j + k)^2 + (-k)^2]$	$\eta(i)\eta(-i - j)\eta(j + k)\eta(-k)$	
b_x	$[i^2 + j^2 + k^2 + (-i - j - k)^2]$	$\eta(i)\eta(j)\eta(k)\eta(-i - j - k)$	
c_x	$[i^2 + j^2 + (-i - j)^2] + [k^2 + (-k)^2]$	$\eta(i)\eta(j)\eta(-i - j)\eta(k)\eta(-k)$	
d_x	$[i^2 + (-i)^2] + [j^2 + (-j)^2] + [k^2 + (-k)^2]$	$\eta(i)\eta(-i)\eta(j)\eta(-j)\eta(k)\eta(-k)$	

Ce tableau généralise le tableau précédent pour les graphes associés aux deuxième et troisième cumulants.

On a représenté les nœuds des graphes par des points $\bullet$; la combinaison linéaire d'indices de sommation associée à un nœud d'un graphe est donnée par la somme des étiquettes des arêtes pointant vers le nœud moins la somme des étiquettes des arêtes quittant le nœud.

La contrainte sur le choix des arguments des fonctions ξ dans un produit de fonctions ξ , à savoir que le nombre de fonctions ξ dont l'argument étiquette une arête d'une certaine composante connexe du graphe doit être congru modulo 2 au nombre total d'arêtes de la composante connexe, implique que $c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = d_3 = 0$ dans (6.15). De plus, certains termes s'obtiennent à partir d'autres par des changements de variables des indices i, j et k : le changement de variable ($i \rightarrow -k, j \rightarrow -j, k \rightarrow -i$) dans le terme avec le coefficient a_1 donne le terme en a_3 , les termes en b_2 et b_3 s'obtiennent à partir du terme en b_1 par permutation de i, j et k , et enfin le changement de variables ($j \rightarrow -i - j, k \rightarrow -k$) dans le terme a_1 redonne exactement le terme b_1 . On peut donc aussi prendre $a_3 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$. Il reste alors sept coefficients non nuls à déterminer : $a_0, a_1, a_2, b_0, c_0, c_3$ et d_0 .

Nous allons maintenant montrer que les sept coefficients encore indéterminés peuvent être fixés en considérant le cas d'un système à $n = 1$ particule. On sait (voir section 3.2.2 du chapitre 3) que dans ce cas là, E_4 ne doit pas dépendre de L . Ceci implique les relations suivantes entre les coefficients : $a_0 = 3c_3, a_1 = -c_3, a_2 = 0, b_0 = c_3, c_0 = -9c_3$ et $d_0 = 5c_3$. On trouve qu'un nouveau coefficient est nul : a_2 , qui correspond à avoir les deux facteurs $\xi(i)$ et $\xi(k)$ absents, alors que i et k étiquettent des arêtes du graphe correspondant à $\eta(i)\eta(-i - j)\eta(j + k)\eta(-k)$, qui ne sont pas reliées au même nœud. Cela tend à indiquer que les facteurs ξ qui peuvent apparaître dans les expressions des cumulants doivent obéir à la contrainte supplémentaire suivante : les facteurs $\xi(z)$ manquants, qui viennent nécessairement par paire $\xi(i_1)\xi(i_2)$ (à cause de la contrainte sur la parité du nombre de facteurs ξ), doivent être de telle sorte que i_1 et i_2 étiquettent deux arêtes connectées au même nœud du graphe. On verra dans la suite que l'on n'a pas d'autre contrainte à ajouter sur le choix des produits de facteurs ξ , même pour les cumulants d'ordre plus élevé.

Prenant en compte toutes les contraintes qui viennent d'être déterminées sur les coefficients

$a_0, \dots, d_3$, on trouve alors $E_4(n=1) = 2(1+x)c_3$. Comme $E_4(n=1) = 1+x$ (3.69), on en conclut finalement que $c_3 = 1/2$. On obtient finalement

$$\begin{aligned} a_x(i, j, k) &= \frac{3}{2}\xi(i)\xi(j)\xi(k) - \frac{1}{2}\xi(i) & b_x(i, j, k) &= \frac{1}{2}\xi(i)\xi(j)\xi(k) \\ c_x(i, j, k) &= -\frac{9}{2}\xi(i)\xi(j)\xi(k) + \frac{1}{2}\xi(k) & d_x(i, j, k) &= \frac{5}{2}\xi(i)\xi(j)\xi(k). \end{aligned} \quad (6.17)$$

L'expression (6.15) avec les a_x, b_x, c_x et d_x définis en (6.17), dont la structure est compatible avec celle des expressions de la constante de diffusion et du troisième cumulant, donne donc l'expression complète du quatrième cumulant du courant :

$$\begin{aligned} \frac{(L-1)E_4}{p(1-x)L^3} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (i^2 + (-i-j)^2 + (j+k)^2 + (-k)^2) \\ &\quad \times \eta(i)\eta(-i-j)\eta(j+k)\eta(-k) \left(\frac{3}{2}\xi(i)\xi(j)\xi(k) - \frac{1}{2}\xi(i) \right) \\ &+ \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (i^2 + j^2 + k^2 + (-i-j-k)^2) \\ &\quad \times \eta(i)\eta(j)\eta(k)\eta(-i-j-k) \left(\frac{1}{2}\xi(i)\xi(j)\xi(k) \right) \\ &+ \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (i^2 + j^2 + (-i-j)^2 + k^2 + (-k)^2) \\ &\quad \times \eta(i)\eta(j)\eta(-i-j)\eta(k)\eta(-k) \left(-\frac{9}{2}\xi(i)\xi(j)\xi(k) + \frac{1}{2}\xi(k) \right) \\ &+ \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (i^2 + (-i)^2 + j^2 + (-j)^2 + k^2 + (-k)^2) \\ &\quad \times \eta(i)\eta(-i)\eta(j)\eta(-j)\eta(k)\eta(-k) \left(\frac{5}{2}\xi(i)\xi(j)\xi(k) \right). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Le raisonnement qui nous a conduit à cette expression n'en constitue bien entendu pas une démonstration. Il est donc nécessaire de procéder à des vérifications de cette expression pour E_4 . Une manière simple de faire cela est de considérer de petits systèmes, pour lesquels (6.18) donne une expression explicite pour E_4 , sous la forme d'une fraction rationnelle en le paramètre x . Ces expressions explicites peuvent ensuite être comparées aux expressions explicites obtenues par la solution ordre par ordre de l'équation de Bethe fonctionnelle décrite à la section 5.3 du chapitre 5. Nous avons effectué cette vérification pour tous les systèmes de taille $L \leq 12$ avec $L \leq 2n$ (le cas $L > 2n$ est alors une conséquence de la symétrie particules-trous, qui est vérifiée par l'expression (6.18) de E_4). Cette vérification est une très forte indication de l'exactitude de notre expression pour le quatrième cumulant.

Une autre vérification consiste à considérer la limite totalement asymétrique $x = 0$, pour laquelle tous les cumulants du courant sont connus [86]. Si l'on fait $x = 0$ dans (6.18), tous les $\xi(z)$ deviennent égaux à 1. On a alors

$$a_0(i, j, k) = 1 \quad b_0(i, j, k) = \frac{1}{2} \quad c_0(i, j, k) = -4 \quad d_0(i, j, k) = \frac{5}{2}. \quad (6.19)$$

Les sommes sur i, j et k intervenant dans (6.18) peuvent alors être effectuées en utilisant les formules de sommes de coefficients du binôme données en appendice A de l'article [2] en annexe. On trouve

$$\frac{E_4(x=0)}{p} = \frac{n(L-n)L^3}{L-1} \left(\frac{18}{4L-1} \frac{\binom{4L}{4n}}{\binom{L}{n}^4} - \left(\frac{24}{3L-1} + \frac{8}{2L-1} \right) \frac{\binom{3L}{3n} \binom{3L}{3n}}{\binom{L}{n}^5} + \frac{15}{2L-1} \frac{\binom{2L}{2n}^3}{\binom{L}{n}^6} \right), \quad (6.20)$$

ce qui coïncide avec ce que donne l'expression obtenue par Derrida et Lebowitz dans [86].

Comme dans le cas de la constante de diffusion et du troisième cumulant, les sommes sur i , j et k intervenant dans l'expression (6.18) pour le quatrième cumulant deviennent des intégrales dans la limite thermodynamique avec $1 - x \sim 1/\sqrt{L}$. Avec les mêmes notations que dans la section précédente, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{E_4}{p(1-x)\rho^{5/2}(1-\rho)^{5/2}L^{9/2}} &\sim \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} du dv dw \\ &\left[(u^2 + (-u-v)^2 + (v+w)^2 + (-w)^2) e^{-\frac{u^2 + (-u-v)^2 + (v+w)^2 + (-w)^2}{2}} \right. \\ &\quad \times \left(\frac{3/2}{\tanh(\Phi|u|) \tanh(\Phi|v|) \tanh(\Phi|w|)} + \frac{-1/2}{\tanh(\Phi|u|)} \right) \\ &+ (u^2 + v^2 + w^2 + (-u-v-w)^2) e^{-\frac{u^2 + v^2 + w^2 + (-u-v-w)^2}{2}} \\ &\quad \times \left(\frac{1/2}{\tanh(\Phi|u|) \tanh(\Phi|v|) \tanh(\Phi|w|)} \right) \\ &+ (u^2 + v^2 + (-u-v)^2 + w^2 + (-w)^2) e^{-\frac{u^2 + v^2 + (-u-v)^2 + w^2 + (-w)^2}{2}} \\ &\quad \times \left(\frac{-9/2}{\tanh(\Phi|u|) \tanh(\Phi|v|) \tanh(\Phi|w|)} + \frac{1/2}{\tanh(\Phi|w|)} \right) \\ &+ (u^2 + (-u)^2 + v^2 + (-v)^2 + w^2 + (-w)^2) e^{-\frac{u^2 + (-u)^2 + v^2 + (-v)^2 + w^2 + (-w)^2}{2}} \\ &\quad \times \left. \left(\frac{5/2}{\tanh(\Phi|u|) \tanh(\Phi|v|) \tanh(\Phi|w|)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.21)$$

On constate que comme précédemment, les coefficients des différents termes sont tels que l'intégrale est bien convergente en 0, malgré le fait que les tangentes hyperboliques au dénominateur tendent à créer des divergences en $u = 0$, $v = 0$ ou $w = 0$. On peut montrer que dans la limite $\Phi \rightarrow 0$, cette expression se raccorde bien à celle pour le modèle faiblement asymétrique $1 - x \sim 1/L$ ce qui justifie (4.9), au moins pour le quatrième cumulant du courant.

On a formulé dans cette section une conjecture incomplète (6.9) pour tous les cumulants du courant, dépendant de coefficients non déterminés que nous avons pu fixer dans le cas du quatrième cumulant en considérant le cas d'un système à une particule. Dans les sections suivantes, nous allons reformuler la conjecture (6.9) de manière plus précise. Nous obtiendrons à la fin des expressions totalement explicites (6.117) pour tous les cumulants du courant.

6.2 Expression paramétrique des fluctuations du courant

Dans cette section, nous présentons une première expression pour la fonction génératrice des cumulants du courant dans le modèle d'exclusion partiellement asymétrique. Cette expression s'exprime en terme de certains arbres, que nous allons d'abord définir. Nous exprimerons ensuite le polynôme Q solution de l'équation de Bethe fonctionnelle correspondant à l'état stationnaire comme une somme sur des arbres. Nous en déduirons une expression de la fonction génératrice des cumulants du courant, sous une forme paramétrique similaire à celle obtenue par Derrida et Lebowitz pour le modèle totalement asymétrique.

6.2.1 Définition des arbres

On appelle « **nœud élémentaire** » un objet que l'on représentera par un point ($\bullet$). Le nœud élémentaire est la brique de base avec laquelle vont être construites les structures en arbre dont nous allons avoir besoin pour exprimer les fluctuations du courant dans le modèle d'exclusion asymétrique. On appelle génériquement « **nœud composite** » un objet contenant

les nœuds composites de taille 1 de la même manière que les nœuds élémentaires, c'est à dire par un point $\bullet$. Il faudra cependant bien garder à l'esprit que dans un arbre, un $\bullet$ non entouré par une ligne fermée représente un nœud composite contenant un seul nœud élémentaire (*i.e.* $\odot$ sera simplifié en $\bullet$, tandis que $\ominus$ sera simplifié en $\circ$). De plus, on représentera maintenant un nœud composite sans structure interne par le nombre de nœuds élémentaires qu'il contient entouré par un cercle. Par exemple, $\textcircled{3}$ représentera le nœud composite de $\mathcal{C}$ contenant trois nœuds élémentaires.

On introduit l'ensemble $\mathcal{G}_r$ (respectivement $\tilde{\mathcal{G}}_r$) constitué des arbres de $\mathcal{G}$ (resp. $\tilde{\mathcal{G}}$) de taille égale à r . Avec les nouvelles notations pour les nœuds composites, on a pour les six premiers ensembles $\mathcal{G}_r$:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 &= \{\bullet\} & \mathcal{G}_2 &= \{\bullet\bullet\} & \mathcal{G}_3 &= \{\bullet\bullet\bullet, \textcircled{3}\} & \mathcal{G}_4 &= \left\{ \bullet\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\bullet\bullet, \textcircled{3}\bullet, \textcircled{3}\bullet \right\} \\ \mathcal{G}_5 &= \left\{ \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet, \textcircled{3}\bullet\bullet, \bullet\textcircled{3}\bullet, \textcircled{5} \right\} \\ \mathcal{G}_6 &= \left\{ \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet, \textcircled{3}\bullet\bullet\bullet, \bullet\textcircled{3}\bullet\bullet, \textcircled{3}\bullet\bullet, \textcircled{5}\bullet, \textcircled{3}\textcircled{3} \right\}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Les premiers ensembles $\mathcal{G}_r$ peuvent être construits explicitement par ordinateur. Pour r compris entre 1 et 16, on trouve que le nombre d'arbres contenus dans ces ensembles est donné par

r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\text{card } \mathcal{G}_r$	1	1	2	3	6	12	25	55	126	304	745	1893	4893	12916	34562	93844

(6.27)

Les quatre premiers ensembles $\tilde{\mathcal{G}}_r$ sont (6.25) :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{G}}_1 &= \{\circ\} & \tilde{\mathcal{G}}_2 &= \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ \bullet \end{array} i_1, \dots \right\} & \tilde{\mathcal{G}}_3 &= \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ \bullet \end{array} i_1 i_2, \begin{array}{c} \circ \\ \bullet \end{array} i_1 i_2, \begin{array}{c} \circ \\ \bullet \end{array} i_1 i_2, \dots \right\} \\ \tilde{\mathcal{G}}_4 &= \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ \bullet \end{array} i_1 i_2 i_3, \begin{array}{c} \circ \\ \bullet \end{array} i_1 i_2 i_3, \begin{array}{c} \circ \\ \bullet \end{array} i_1 i_2 i_3, \begin{array}{c} \circ \\ \bullet \end{array} i_1 i_2 i_3, \begin{array}{c} \circ \\ \bullet \end{array} i_1 i_2 i_3, \begin{array}{c} \circ \\ \bullet \end{array} i_1 i_2 i_3, \begin{array}{c} \circ \\ \bullet \end{array} i_1 i_2 i_3, \begin{array}{c} \circ \\ \bullet \end{array} i_1 i_2 i_3, \begin{array}{c} \circ \\ \bullet \end{array} i_1 i_2 i_3, \begin{array}{c} \circ \\ \bullet \end{array} i_1 i_2 i_3, \dots \right\}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Les $\dots$ représentent les arbres des $\tilde{\mathcal{G}}_r$ s'obtenant à partir de ceux dessinés par permutation des étiquettes des arêtes ou par renversement des directions des arêtes.

6.2.2 Fonctions agissant sur des arbres

On va maintenant définir des fonctions agissant sur les ensembles $\mathcal{G}$ ou $\tilde{\mathcal{G}}$, à partir desquelles les cumulants du courant vont ensuite être exprimés. Pour un arbre g élément de $\mathcal{G}$ ou $\tilde{\mathcal{G}}$, on appelle $e(g)$ l'ensemble des nœuds élémentaires de g et $c(g)$ l'ensemble des nœuds composites de

g . Pour un nœud composite $c \in c(g)$, on définit le nombre v_c de nœuds composites de g voisins de c . Ainsi, les trois premiers éléments de $\mathcal{G}_5$ représentés en (6.26) ont cinq nœuds composites (tous de taille 1), les deux suivants en ont trois (deux de taille 1 et un de taille 3), et le dernier un seul (de taille 5). Le premier arbre de $\mathcal{G}_5$ a deux nœuds composites avec un seul voisin (les nœuds aux extrémités) et trois nœuds composites avec deux voisins. Le deuxième arbre de $\mathcal{G}_5$ a trois nœuds composites avec un seul voisin, un nœud composite avec deux voisins et un nœud composite avec trois voisins, tandis que le troisième arbre de $\mathcal{G}_5$ a quatre nœuds composites avec un seul voisin et un nœud composite avec quatre voisins. Les deux arbres suivants ont tous deux deux nœuds composites avec un seul voisin et un nœud composite avec deux voisins. Enfin, l'unique nœud composite du dernier arbre n'a aucun voisin.

On va distinguer dans la suite deux types d'arêtes dans les arbres : les « arêtes internes », qui relient des nœuds élémentaires appartenant au même nœud composite, et les « arêtes externes » qui relient des nœuds élémentaires appartenant à des nœuds composites distincts. Les arbres de $\mathcal{G}$ ne comportent que des arêtes externes, tandis que les arbres de $\tilde{\mathcal{G}}$ comportent en général à la fois des arêtes internes et des arêtes externes. Pour g dans $\mathcal{G}$ ou $\tilde{\mathcal{G}}$, on définit alors l'ensemble $o(g)$ des arêtes externes de g . Les éléments de $\tilde{\mathcal{G}}_r$ possèdent tous exactement $r-1$ arêtes (internes et externes). Par contre, le nombre d'arêtes des éléments de $\mathcal{G}_r$ dépend de l'arbre. Par exemple, les quatre premiers arbres de $\tilde{\mathcal{G}}_4$ représentés en (6.28) possèdent trois arêtes externes et aucune arête interne, tandis que les sept suivants, une seule arête externe et deux arêtes internes. De même, les deux premiers arbres de $\mathcal{G}_4$ représentés en (6.26) possèdent trois arêtes (externes), et le dernier, une seule arête (externe).

Pour un arbre $g \in \tilde{\mathcal{G}}$, on appellera « étiquettes internes » les étiquettes des arêtes internes et « étiquettes externes » les étiquettes des arêtes externes. Pour une arête externe $o \in o(g)$, le sous arbre de g commençant en o désigne l'arbre constitué de l'arête o et de toutes les arêtes qui peuvent être atteintes à partir de o en se déplaçant sur les arêtes de g (indépendamment de leur sens) de telle sorte que l'on s'éloigne de la racine de g . On note alors $m(o)$ la combinaison linéaire (avec des coefficients $+1$ et -1) des indices i_j qui étiquettent les arêtes (internes et externes) du sous arbre de g commençant en o , avec des coefficients choisis de la manière suivante : les étiquettes des arêtes pointant vers la racine ont un coefficient -1 tandis que les étiquettes des arêtes s'éloignant de la racine ont un coefficient $+1$. On considère par exemple l'arbre suivant :

$$g = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{---} i_1 \text{---} \\ \text{---} i_2 \text{---} \\ \text{---} i_3 \text{---} \\ \text{---} i_4 \text{---} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{---} i_5 \text{---} \\ \text{---} i_6 \text{---} \\ \text{---} i_7 \text{---} \\ \text{---} i_8 \text{---} \end{array} \end{array} . \quad (6.29)$$

L'arbre g possède quatre arêtes externes o_3, o_4, o_7 et o_8 , étiquetées par i_3, i_4, i_7 et i_8 , et telles que $m(o_3) = i_3$, $m(o_4) = i_4 - i_5 + i_6 + i_7 - i_8$, $m(o_7) = i_7$ et $m(o_8) = -i_8$.

On veut aussi associer une combinaison linéaire d'indices i_j à chaque nœud élémentaire. Pour un nœud élémentaire $e \in e(g)$ d'un arbre $g \in \tilde{\mathcal{G}}$ (e peut être la racine de g), on note $\ell(e)$ la somme des étiquettes des arêtes (internes ou externes) pointant vers e moins la somme des étiquettes des arêtes quittant e . Pour les neuf nœuds élémentaires $e \in e(g)$ de l'arbre g représenté en (6.29), les $\ell(e)$ sont $i_3, i_1 - i_3, -i_1 - i_2, i_2 - i_4, i_4 + i_5 - i_6, -i_5 - i_7, i_7, i_6 + i_8$ et $-i_8$.

Pour $g \in \tilde{\mathcal{G}}$, on définit l'arbre $g^* \in \tilde{\mathcal{G}}$ obtenu en attachant toutes les arêtes (internes et externes) de g à la racine. Les arêtes conservent leurs étiquettes, leur direction par rapport à la racine (une arête qui pointait vers la racine dans g pointera aussi vers la racine dans g^* , et inversement), et leur caractère interne ou externe. Tous les nœuds composites sont donc de taille 1 sauf éventuellement celui contenant la racine. Par exemple, si on prend pour arbre g

l'arbre représenté en (6.29), on a

$$g^* = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \\ \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \end{array} . \quad (6.30)$$

Pour cet arbre g^* , si on appelle o_3, o_4, o_7 et o_8 les arêtes externes étiquetées par i_3, i_4, i_7 et i_8 , on a $m(o_3) = i_3, m(o_4) = i_4, m(o_7) = i_7$ et $m(o_8) = -i_8$. On a aussi pour les neuf nœuds élémentaires $e \in e(g^*)$ les valeurs suivantes des $\ell(e)$: $i_1, i_2, i_3, i_4, -i_5, i_6, i_7, -i_8$ (e nœud élémentaire différent de la racine de g^*) et $-i_1 - i_2 - i_3 - i_4 + i_5 - i_6 - i_7 + i_8$ (e racine de g^*).

Nous allons maintenant définir des fonctions agissant sur $\mathcal{G}$ et $\tilde{\mathcal{G}}$. Pour $g \in \mathcal{G}$, et φ et η deux fonctions arbitraires (pour l'instant ; on définira plus loin ces fonctions de la même manière qu'au début du chapitre), on définit

$$U_{\varphi, \eta}(g) = \left(\sum_{e \in e(g)} \varphi(\ell(e)) \right) \left(\prod_{e \in e(g)} \eta(\ell(e)) \right). \quad (6.31)$$

Pour les arbres g et g^* représentés respectivement en (6.29) et (6.30), on a par exemple

$$\begin{aligned} U_{\varphi, \eta}(g) = & [\varphi(i_3) + \varphi(i_1 - i_3) + \varphi(-i_1 - i_2) + \varphi(i_2 - i_4) + \varphi(i_4 + i_5 - i_6) \\ & + \varphi(-i_5 - i_7) + \varphi(i_7) + \varphi(i_6 + i_8) + \varphi(-i_8)] \\ & \times \eta(i_3)\eta(i_1 - i_3)\eta(-i_1 - i_2)\eta(i_2 - i_4)\eta(i_4 + i_5 - i_6)\eta(-i_5 - i_7)\eta(i_7)\eta(i_6 + i_8)\eta(-i_8) \end{aligned} \quad (6.32)$$

$$\begin{aligned} U_{\varphi, \eta}(g^*) = & [\varphi(i_1) + \varphi(i_2) + \varphi(i_3) + \varphi(i_4) + \varphi(-i_5) + \varphi(i_6) + \varphi(i_7) \\ & + \varphi(-i_8) + \varphi(-i_1 - i_2 - i_3 - i_4 + i_5 - i_6 - i_7 + i_8)] \\ & \times \eta(i_1)\eta(i_2)\eta(i_3)\eta(i_4)\eta(-i_5)\eta(i_6)\eta(i_7)\eta(-i_8)\eta(-i_1 - i_2 - i_3 - i_4 + i_5 - i_6 - i_7 + i_8). \end{aligned} \quad (6.33)$$

Par définition, $U_{\varphi, \eta}(g)$ ne dépend que de la structure en arbre (avec des arêtes orientées) des nœuds élémentaires de g , et est indépendant de la position de la racine et des nœuds composites dans g . Pour une fonction arbitraire ξ , on définit aussi

$$V_{\xi}(g) = \prod_{o \in o(g)} \xi(m(o)). \quad (6.34)$$

Pour les arbres g et g^* représentés en (6.29) et (6.30), on a

$$V_{\xi}(g) = \xi(i_3)\xi(i_4 - i_5 + i_6 + i_7 - i_8)\xi(i_7)\xi(-i_8) \quad (6.35)$$

$$V_{\xi}(g^*) = \xi(i_3)\xi(i_4)\xi(i_7)\xi(-i_8). \quad (6.36)$$

Contrairement à $U_{\varphi, \eta}(g)$, $V_{\xi}(g)$ dépend de la position de la racine, des nœuds composites de g , et de la direction des arêtes mais pas de la structure en arbre des nœuds élémentaires à l'intérieur de chaque nœud composite (mis à part pour la direction des arêtes).

On choisit maintenant une application θ de $\mathcal{G}$ dans $\tilde{\mathcal{G}}$ préservant la structure en arbre des nœuds composites ; l'application θ appliquée à $g \in \mathcal{G}$ enrachine g , ajoute une structure interne en arbre sur les nœuds élémentaires de chaque nœud composite, transforme les liens entre nœuds composites en liens entre nœuds élémentaires, et ajoute une direction et une étiquette à toutes les arêtes. L'application θ « transforme » donc un arbre de $\mathcal{G}$ en un arbre de $\tilde{\mathcal{G}}$.

Par exemple, le premier élément de $\mathcal{G}_4$ représenté en (6.26) peut être envoyé par l'application θ vers le premier ou le deuxième élément de $\tilde{\mathcal{G}}_4$ représenté en (6.28), ainsi que vers tous les arbres qui s'en déduisent par changement des direction des arêtes et permutation de leurs étiquettes.

De même, le deuxième élément de $\mathcal{G}_4$ peut être envoyé par θ vers le troisième ou le quatrième élément de $\tilde{\mathcal{G}}_4$. Enfin, le troisième élément de $\mathcal{G}_4$ peut être envoyé par θ vers les éléments en position 5 à 11 de $\tilde{\mathcal{G}}_4$.

On définit alors, pour $g \in \mathcal{G}_r$,

$$W_\varphi^{\eta,\xi}(g) = \sum_{i_1 \in \mathbb{Z}} \cdots \sum_{i_{r-1} \in \mathbb{Z}} U_{\varphi,\eta}(\theta(g)) V_\xi(\theta(g)^*), \quad (6.37)$$

avec la convention $W_\varphi^{\eta,\xi}(\bullet) = \varphi(0)\eta(0)$. Cette définition de $W_\varphi^{\eta,\xi}(g)$ est équivalente (*c.f.* appendice 6.A) à la définition

$$W_\varphi^{\eta,\xi}(g) = \sum_{i_1 \in \mathbb{Z}} \cdots \sum_{i_{r-1} \in \mathbb{Z}} U_{\varphi,\eta}(\theta(g)^*) V_\xi(\theta(g)), \quad (6.38)$$

On peut montrer (*c.f.* appendice 6.B) que la fonction $W_\varphi^{\eta,\xi}$ ne dépend en fait pas du choix de la fonction θ si la fonction ξ est paire, ce qui sera le cas dans les situations que nous considérerons. On note que si la fonction η a un support fini, les sommes sur les indices $i_1, \dots, i_{r-1}$ sont des sommes finies. La fonction $W_\varphi^{\eta,\xi}$ nous permettra dans la suite d'exprimer la fonction génératrice des cumulants du courant.

6.2.3 Sommation sur les arbres

Nous allons maintenant définir un facteur de symétrie associé aux arbres, ainsi qu'une fonction génératrice pour les ensembles d'arbres $\mathcal{G}_r$.

Facteurs de symétrie

On rappelle que pour un arbre $g \in \mathcal{G}$, l'ensemble des nœuds composites de g est noté $c(g)$. On rappelle aussi que pour un nœud composite $c \in c(g)$, la taille de c est notée $|c|$, et le nombre de nœuds composites de g voisins de c est noté v_c . On définit alors un facteur de symétrie S_t associé à l'arbre $g \in \mathcal{G}$ par

$$S_t(g) = P_t(g) \prod_{c \in c(g)} (-1)^{\frac{|c|-1}{2}} \frac{|c|^3 |c|!}{|c|^{v_c} (|c|!)^2}, \quad (6.39)$$

où $P_t(g)$ est égal au nombre de permutations des nœuds composites de g laissant g invariant. On donne les facteurs de symétrie des arbres jusqu'à la taille six dans le tableau suivant :

$g \in \mathcal{G}$				③			③		
$S_t(g)$	1	2	2	-18	2	6	-6	2	2
$P_t(g)$	1	2	2	1	2	6	1	2	2

$g \in \mathcal{G}$		③			⑤			
$S_t(g)$	24	-6	-4	200/3	2	2	8	
$P_t(g)$	24	1	2	1	2	2	8	

$g \in \mathcal{G}$							
$S_t(g)$	2	6	120	-6	-2	-12	-4
$P_t(g)$	2	6	120	1	1	2	6

$g \in \mathcal{G}$		
$S_t(g)$	40/3	72
$P_t(g)$	1	2

(6.40)

Dans la suite, on considérera des sommes sur les éléments de $\mathcal{G}_r$ munis du facteur de symétrie S_t . Pour une fonction f agissant sur $\mathcal{G}$ et à valeur numérique, on va s'intéresser à des expressions de la forme

$$\sum_{g \in \mathcal{G}_r} \frac{f(g)}{S_t(g)}. \quad (6.41)$$

Fonction génératrice des arbres

Un premier exemple de somme sur les arbres de $\mathcal{G}_r$ munis du facteur de symétrie S_t est la « fonction génératrice de $\mathcal{G}_r$ », qui sera notée $Z_r(z)$. Elle sera particulièrement utile dans la suite. Elle est définie par

$$Z_r(z) = \sum_{g \in \mathcal{G}_r} \frac{z^{\text{card } c(g)}}{S_t(g)}, \quad (6.42)$$

où $\text{card } c(g)$ est le nombre de nœuds composites de g . Par une construction de 149388 éléments de $\mathcal{G}$ et un calcul de tous les facteurs de symétrie associés, on a vérifié explicitement l'expression suivante de $Z_r(z)$ pour r compris entre 1 et 16 :

$$Z_r(z) = \frac{z}{r \times r!} \prod_{j=1}^{r-1} [r(z+1) - 2j]. \quad (6.43)$$

Le fait que l'on trouve une fonction génératrice aussi simple pour $\mathcal{G}_r$ avec le facteur de symétrie S_t est une première justification de la définition de ces arbres et du facteur de symétrie associé. On verra dans la suite que cette fonction génératrice permet de retrouver les résultats connus pour les fluctuations du courant dans la limite totalement asymétrique à partir de la conjecture que nous allons formuler dans le cas partiellement asymétrique.

Sommation sur $\tilde{\mathcal{G}}_r$

L'expression générale (6.41) peut être réécrite en faisant intervenir un facteur de symétrie plus simple que S_t . En contrepartie, on devra alors effectuer une sommation sur un ensemble plus grand que $\mathcal{G}_r$. Nous allons illustrer cela en montrant que l'on peut remplacer la somme sur $\mathcal{G}_r$ dans l'expression (6.41) par une somme sur $\tilde{\mathcal{G}}_r$.

Pour $g \in \mathcal{G}$ et $g' \in \tilde{\mathcal{G}}$, on dira que g' a pour structure g si l'arbre g est obtenu à partir de g' en lui enlevant la racine, les directions et les étiquettes des arêtes, et la structure interne sur les nœuds composites. Dans ce cas, on notera $g = \Theta(g')$. On a en particulier $g = \Theta(\theta(g))$

pour la fonction θ définie section précédente (mais $\theta(\Theta(g'))$ n'est pas nécessairement égal à g' : cela dépend du choix de la fonction θ). On prolonge la fonction f sur $g' \in \tilde{\mathcal{G}}$ en posant $f(g') = f(\Theta(g'))$. On peut alors écrire

$$\sum_{g \in \mathcal{G}_r} \frac{f(g)}{S_t(g)} = \sum_{g' \in \tilde{\mathcal{G}}_r} \frac{1}{\text{card } \Theta^{-1}(\Theta(g'))} \times \frac{f(g')}{S_t(\Theta(g'))}. \quad (6.44)$$

Nous allons montrer dans la suite que l'expression précédente est égale à

$$\sum_{g \in \mathcal{G}_r} \frac{f(g)}{S_t(g)} = \frac{1}{2^{r-1} r!} \sum_{g' \in \tilde{\mathcal{G}}_r} f(g') \prod_{c \in c(g')} \left((-1)^{\frac{|c|-1}{2}} \frac{(|c|!!)^2}{|c|^{c+1}} \right). \quad (6.45)$$

On note que le facteur de symétrie intervenant dans la somme sur $\tilde{\mathcal{G}}_r$ est plus simple que S_t : contrairement à ce dernier, il ne fait intervenir que les nœuds composites pris isolément et pas toute la structure de l'arbre. La question naturelle qui se pose est alors de savoir s'il est possible de définir un nouvel ensemble d'arbres telle que la somme précédente se réécrive sans facteur de symétrie (ou avec un facteur de symétrie dépendant uniquement de la taille r de l'arbre). Nous ne sommes pas arrivés à répondre à cette question de manière réellement satisfaisante. Il nous manque en particulier une interprétation combinatoire du facteur $(|c|!!)^2$ qui soit compatible avec les structures en arbres sur lesquelles nous travaillons.

Nous allons maintenant prouver la relation (6.45). Cela nécessite de déterminer, étant donné un arbre g de $\mathcal{G}_r$, le nombre d'arbres $g' \in \tilde{\mathcal{G}}_r$ tels que $g = \Theta(g')$. On va pour cela construire tous les arbres g' correspondant à un arbre g quelconque donné. Cette construction, en quatre étapes successives, sera illustrée sur les arbres g et g' suivants :

$g =$

$g' =$

(6.46)

Première étape

On étiquette les nœuds élémentaires de g (pas ses arêtes) par $i_1, \dots, i_r$, en considérant pour le moment comme identiques deux arbres obtenus l'un à partir de l'autre par permutation des étiquettes intérieures à un nœud composite. On appelle $\mathcal{G}_1(g)$ l'ensemble des arbres ainsi créés. Pour l'arbre g donné en (6.46), l'arbre g_1 suivant appartient à $\mathcal{G}_1(g)$:

$g_1 =$

(6.47)

Le groupe des permutations à r éléments $\mathcal{S}_r$ agit naturellement sur l'ensemble $\mathcal{G}_1(g)$: pour une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_r$ et un arbre $g_1 \in \mathcal{G}_1(g)$, on définit $\sigma * g_1$ comme l'arbre de $\mathcal{G}_1(g)$ obtenu à partir de g_1 en appliquant la permutation σ aux étiquettes de ses nœuds élémentaires. L'orbite de $g_1 \in \mathcal{G}_1(g)$ sous l'action du groupe $\mathcal{S}_r$, définie comme l'ensemble des arbres $\sigma * g_1$ distincts pour σ parcourant l'ensemble $\mathcal{S}_r$, est égale à l'ensemble $\mathcal{G}_1(g)$. On définit aussi le stabilisateur de g_1 sous cette action de groupe comme l'ensemble des permutations σ telles que $\sigma * g_1 = g_1$. Il a pour cardinal

$$\text{card Stab}(g_1) = P_t(g) \times \prod_{c \in c(g)} |c|!. \quad (6.48)$$

Le facteur $P_t(g)$, qui intervient dans la définition (6.39) du facteur de symétrie S_t , est égal au nombre de permutations des étiquettes des nœuds composites qui laissent g_1 invariant, tandis que le produit des $|c|!$ correspond aux permutations des étiquettes à l'intérieur des nœuds composites. On peut utiliser la formule des classes pour calculer le cardinal de $\mathcal{G}_1(g)$. Celle-ci implique que le cardinal du groupe $\mathcal{S}_r$ (soit $r!$) est égal au produit du cardinal du stabilisateur de g_1 et du cardinal de l'orbite de g_1 sous l'action de $\mathcal{S}_r$. On obtient donc

$$\text{card } \mathcal{G}_1(g) = \text{card Orb}(g_1) = \frac{\text{card } \mathcal{S}_r}{\text{card Stab}(g_1)} = \frac{r!}{P_t(g) \times \prod_{c \in c(g)} |c|!} . \quad (6.49)$$

Deuxième étape

On identifie le nœud élémentaire étiqueté par i_r à la racine $\circ$ de l'arbre et on supprime l'étiquette i_r . On déplace ensuite une étiquette de chaque nœud composite (excepté celui contenant la racine) vers l'arête voisine la plus proche de la racine. On obtient alors un ensemble d'arbres $\mathcal{G}_2(g)$. Pour g donné en (6.46), un exemple d'arbre $g_2 \in \mathcal{G}_2(g)$ est

$$g_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \circ \\ \bullet \quad \bullet \\ i_3 \quad i_2 \\ \bullet \quad \bullet \\ i_1 \end{array} \\ | \\ \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ i_7 \quad i_5 \quad i_6 \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ i_4 \quad i_8 \end{array} \end{array} . \quad (6.50)$$

Pour un nœud composite de taille $|c|$, il y a $|c|$ façons de choisir l'étiquette déplacée. Le cardinal de $\mathcal{G}_2(g)$ est donc égal à

$$\text{card } \mathcal{G}_2(g) = \frac{r!}{P_t(g) \times \prod_{c \in c(g)} |c|!} \times \prod_{\substack{c \in c(g), \\ \circ \notin c}} |c| . \quad (6.51)$$

Troisième étape

On ajoute une structure interne en arbre aux nœuds composites, de telle sorte que pour tout nœud composite c , les $|c| - 1$ indices i_j contenus dans c étiquettent les $|c| - 1$ nœuds élémentaires de c les plus loin de la racine de l'arbre. Le nœud élémentaire de c qui est le plus proche de la racine est donc non étiqueté. On définit ainsi un ensemble d'arbres $\mathcal{G}_3(g)$. Pour g donné en (6.46), l'ensemble $\mathcal{G}_3(g)$ contient l'arbre g_3 suivant :

$$g_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \circ \\ \bullet \quad \bullet \\ i_3 \quad i_2 \\ \bullet \quad \bullet \\ i_1 \end{array} \\ | \\ \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ i_7 \quad i_5 \quad i_6 \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ i_4 \quad i_8 \end{array} \end{array} . \quad (6.52)$$

La formule de Cayley pour les arbres étiquetés mais non enracinés [79] indique qu'il y a $|c|^{|c|-2}$ façons de choisir la structure interne du nœud composite c . Par exemple, pour un nœud composite de taille trois dont deux nœuds élémentaires sont étiquetés par i_5 et i_6 et le dernier est non étiqueté, les $3^{3-2} = 3$ structures internes possibles sont les suivantes :

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \quad i_5 \\ \bullet \quad i_6 \end{array} , \quad \begin{array}{c} \bullet \quad i_5 \\ \bullet \\ \bullet \quad i_6 \end{array} , \quad \text{et} \quad \begin{array}{c} \bullet \quad i_5 \\ \bullet \\ \bullet \end{array} . \quad (6.53)$$

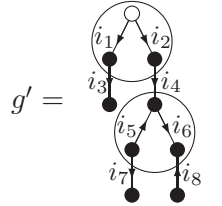
$$(6.54)$$

Pour un nœud composite donné c , il faut ensuite compter le nombre façons possibles de relier les nœuds élémentaires de c aux nœuds composites voisins de c . Si c ne contient pas la racine de l'arbre, le nœud voisin de c le plus proche de la racine est nécessairement relié au seul nœud élémentaire de c qui n'est pas étiqueté. Chacun des autres nœuds composites voisins de c peut être alors relié à l'un des $|c|$ nœuds élémentaires de c , ce qui donne un facteur $|c|^{v_c-1}$ supplémentaire pour chaque nœud composite c . Par contre, si c contient la racine, chaque nœud composite voisin de c peut être relié à chacun des $|c|$ nœuds élémentaires de c , ce qui donne cette fois-ci un facteur $|c|^{v_c}$ supplémentaire. Le nombre d'arbres contenus dans $\mathcal{G}_3(g)$ est donc égal à

$$\text{card } \mathcal{G}_3(g) = \text{card } \mathcal{G}_2(g) \times \prod_{c \in c(g)} \frac{|c|^{|c|}}{|c|^2} \prod_{\substack{c \in c(g), \\ O \notin c}} |c|^{v_c-1} \prod_{\substack{c \in c(g), \\ O \in c}} |c|^{v_c} = \frac{r!}{P_t(g)} \times \prod_{c \in c(g)} \left(\frac{|c|^{v_c} |c|^{|c|}}{|c|! \times |c|^2} \right). \quad (6.55)$$

Quatrième étape

On déplace les derniers indices étiquetant des nœuds élémentaires sur l'arête voisine la plus proche de la racine, et on ajoute une orientation à chaque arête. Cela définit finalement l'ensemble $\Theta^{-1}(g)$. Pour g donné en (6.46), l'un des arbres g' appartenant à $\Theta^{-1}(g)$ est



$$g' = \quad (6.56)$$

L'ajout des directions aux arêtes contribue un facteur global 2^{r-1} à $\Theta^{-1}(g)$. On a donc

$$\text{card } \Theta^{-1}(g) = \frac{2^{r-1} r!}{P_t(g)} \times \prod_{c \in c(g)} \left(\frac{|c|^{v_c} |c|^{|c|}}{|c|! \times |c|^2} \right). \quad (6.57)$$

La somme sur $g \in \mathcal{G}_r$ définie précédemment donne donc bien (6.45).

6.2.4 Conjecture pour le polynôme Q

Nous allons maintenant formuler une conjecture pour le polynôme Q solution de l'équation de Bethe fonctionnelle correspondant à l'état stationnaire du modèle d'exclusion partiellement asymétrique. On définit les fonctions φ_l , η et ξ_λ par

$$\varphi_l(z) = \frac{(n+z)}{(L-l)} \binom{L-n-z}{l} \bigg/ \binom{L}{l} \quad (6.58)$$

$$\eta(z) = \binom{L}{n+z} \bigg/ \binom{L}{n} \quad (6.59)$$

$$\xi_\lambda(z) = \begin{cases} \lambda & \text{si } z = 0 \\ \frac{1+x|z|}{1-x|z|} & \text{si } z \neq 0 \end{cases} \quad (6.60)$$

Alors, le polynôme Q solution de l'équation de Bethe fonctionnelle (5.10) correspondant à l'état stationnaire (5.17) vérifie

$$\ln \left[\frac{Q(t)}{x^n Q(t/x)} \right] = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{B_\lambda}{2} \right)^k (1-t)^l \sum_{g \in \mathcal{G}_k} \frac{W_{\varphi_l}^{\eta, \xi_\lambda}(g)}{S_t(g)}, \quad (6.61)$$

le paramètre B_λ étant donné par

$$B_\lambda = (-1)^{n-1} \binom{L}{n} e^{\frac{\lambda L \gamma}{2}} \left(e^{\frac{L \gamma}{2}} - x^n e^{-\frac{L \gamma}{2}} \right) Q(0) . \quad (6.62)$$

Utilisant la méthode présentée à la section 5.3 du chapitre 5 pour résoudre perturbativement l'équation de Bethe fonctionnelle jusqu'à l'ordre 5 en γ et $1 - t$ pour tous les systèmes de taille inférieure à 12, nous avons vérifié que l'expression (6.61) était correcte pour tous ces cas. Nous avons en particulier constaté que le paramètre arbitraire λ se simplifie dans le membre de droite de (6.61) pour tous ces systèmes.

Pour les termes tels que $L \leq l$ dans (6.61), des divergences apparaissent à cause du dénominateur de $\varphi_l(z)$. Un prolongement analytique pour L complexe nous montre que ces divergences se simplifient en fait dans la limite où L devient entier dès que $\varphi_l(z)$ est multiplié par $\eta(z)$, ce qui arrive systématiquement dans $W_{\varphi_l}^{\eta, \xi_\lambda}(g)$. Les termes tels que $L \leq l$ dans l'expression (6.61) doivent donc être compris en prenant la continuation analytique pour L complexe et en faisant tendre L vers sa valeur entière.

On note que la fonction ξ que l'on utilise est paire. Ceci garantit que les expressions précédentes ne dépendent pas du choix de la fonction θ qui intervient dans $W_{\varphi_l}^{\eta, \xi_\lambda}(g)$.

6.2.5 Forme paramétrique pour la fonction $E(\gamma)$

En prenant $t = 1$ dans l'expression (6.61), on trouve, en utilisant (5.20), une expression pour γ en fonction de B_λ :

$$\gamma = -\frac{2}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{B_\lambda}{2} \right)^k \sum_{g \in \mathcal{G}_k} \frac{W_{\varphi_0}^{\eta, \xi_\lambda}(g)}{S_t(g)} . \quad (6.63)$$

La fonction φ_0 est affine :

$$\varphi_0(z) = \frac{n}{L} + \frac{z}{L} . \quad (6.64)$$

Dans la définition de $U_{\varphi, \eta}(g)$ pour un arbre $g \in \tilde{\mathcal{G}}$, on effectue la somme sur tous les nœuds élémentaires e de g des $\varphi(\ell(e))$. Or, par définition de $\ell(e)$, la somme sur e des $\ell(e)$ est nulle. En effet, pour chaque arête de g , il existe un nœud vers lequel l'arête pointe et un nœud que l'arête quitte, ce qui implique que chaque indice i_j apparaît dans l'un des $\ell(e)$ avec un coefficient $+1$ et dans un autre avec un coefficient -1 . Le terme linéaire de φ donne donc une contribution nulle à $U_{\varphi, \eta}$, de même qu'à $W_{\varphi}^{\eta, \xi}$. On obtient alors

$$\gamma = -\frac{2}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{B_\lambda}{2} \right)^k \sum_{g \in \mathcal{G}_k} \frac{W_{\varphi_0}^{\eta, \xi_\lambda}(g)}{S_t(g)} . \quad (6.65)$$

En indice de $W_{z \mapsto 1}^{\eta, \xi_\lambda}$, on a écrit $z \mapsto 1$ pour désigner la fonction égale à 1 partout. Prenant maintenant la dérivée en $t = 1$ de (6.61), l'expression (5.14) pour la fonction génératrice des cumulants du courant implique

$$\frac{E(\gamma)}{p} = -2(1-x) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{B_\lambda}{2} \right)^k \sum_{g \in \mathcal{G}_k} \frac{W_{\varphi_1}^{\eta, \xi_\lambda}(g)}{S_t(g)} . \quad (6.66)$$

La fonction φ_1 est un polynôme de degré 2 :

$$\varphi_1(z) = \frac{n(L-n)}{L(L-1)} + \frac{(L-2n)z}{L(L-1)} - \frac{z^2}{L(L-1)} . \quad (6.67)$$

Comme précédemment pour φ_0 , le terme linéaire de φ_1 ne contribue pas à $W_{\varphi_1}^{\eta, \xi_\lambda}(g)$, tandis que le terme constant redonne (6.65). On trouve donc que

$$\boxed{\frac{E(\gamma) - J\gamma}{p} = \frac{2(1-x)}{L(L-1)} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{B_\lambda}{2}\right)^k \sum_{g \in \mathcal{G}_k} \frac{W_{z \mapsto z^2}^{\eta, \xi_\lambda}(g)}{S_t(g)}}. \quad (6.68)$$

Ici, l'indice $z \mapsto z^2$ dans $W_{z \mapsto z^2}^{\eta, \xi_\lambda}$ désigne la fonction carré (qui à z associe z^2), et la valeur moyenne J du courant est donnée par

$$\frac{J}{p} = (1-x) \frac{n(L-n)}{L-1}. \quad (6.69)$$

Les équations (6.65) et (6.68) donnent une expression paramétrique de la fonction génératrice des cumulants du courant : le paramètre B_λ peut être éliminé entre les deux équations pour donner un développement de $E(\gamma)$ en puissances de γ qui ne fait pas intervenir B_λ . On verra plus tard que l'élimination du paramètre B_λ peut en fait être effectuée de manière systématique à tous les ordres.

Par exemple, à l'ordre 4 en B_λ , on trouve pour l'expression de γ en fonction de B_λ

$$\begin{aligned} -\frac{L\gamma}{2} &= \left(\frac{B_\lambda}{2}\right) \left(W_{z \mapsto 1}^{\eta, \xi_\lambda}(\bullet)\right) + \left(\frac{B_\lambda}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2} W_{z \mapsto 1}^{\eta, \xi_\lambda}(\bullet\text{---}\bullet)\right) \\ &\quad + \left(\frac{B_\lambda}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2} W_{z \mapsto 1}^{\eta, \xi_\lambda}(\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet) - \frac{1}{18} W_{z \mapsto 1}^{\eta, \xi_\lambda}(\textcircled{3})\right) \\ &\quad + \left(\frac{B_\lambda}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2} W_{z \mapsto 1}^{\eta, \xi_\lambda}(\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet) + \frac{1}{6} W_{z \mapsto 1}^{\eta, \xi_\lambda}(\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet) - \frac{1}{6} W_{z \mapsto 1}^{\eta, \xi_\lambda}(\textcircled{3}\text{---}\bullet)\right) \\ &\quad + \mathcal{O}((B_\lambda)^5), \end{aligned} \quad (6.70)$$

et pour l'expression de $E(\gamma)$ en fonction de B_λ

$$\begin{aligned} \frac{L(L-1)}{2(1-x)} \times \frac{E(\gamma) - J\gamma}{p} &= \left(\frac{B_\lambda}{2}\right) \left(W_{z \mapsto z^2}^{\eta, \xi_\lambda}(\bullet)\right) + \left(\frac{B_\lambda}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2} W_{z \mapsto z^2}^{\eta, \xi_\lambda}(\bullet\text{---}\bullet)\right) \\ &\quad + \left(\frac{B_\lambda}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2} W_{z \mapsto z^2}^{\eta, \xi_\lambda}(\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet) - \frac{1}{18} W_{z \mapsto z^2}^{\eta, \xi_\lambda}(\textcircled{3})\right) \\ &\quad + \left(\frac{B_\lambda}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2} W_{z \mapsto z^2}^{\eta, \xi_\lambda}(\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet) + \frac{1}{6} W_{z \mapsto z^2}^{\eta, \xi_\lambda}(\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet) - \frac{1}{6} W_{z \mapsto z^2}^{\eta, \xi_\lambda}(\textcircled{3}\text{---}\bullet)\right) \\ &\quad + \mathcal{O}((B_\lambda)^5). \end{aligned} \quad (6.71)$$

Les formes explicites des $W_{z \mapsto 1}^{\eta, \xi_\lambda}(g)$ sont données, en utilisant la forme (6.37) de $W_\varphi^{\eta, \xi}$, par

$$\begin{aligned}
W_{z \mapsto 1}^{\eta, \xi_\lambda}(\bullet) &= 1 \\
W_{z \mapsto 1}^{\eta, \xi_\lambda}(\bullet\text{---}\bullet) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \eta(i) \eta(-i) \xi(i) \\
W_{z \mapsto 1}^{\eta, \xi_\lambda}(\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet) &= \sum_{i, j \in \mathbb{Z}} \eta(i) \eta(j) \eta(-i-j) \xi(i) \xi(j) \\
W_{z \mapsto 1}^{\eta, \xi_\lambda}(\textcircled{3}) &= \sum_{i, j \in \mathbb{Z}} \eta(i) \eta(j) \eta(-i-j) \\
W_{z \mapsto 1}^{\eta, \xi_\lambda}(\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet) &= \sum_{i, j, k \in \mathbb{Z}} \eta(i) \eta(-i-j) \eta(j+k) \eta(-k) \xi(i) \xi(j) \xi(k) \\
W_{z \mapsto 1}^{\eta, \xi_\lambda}(\textcircled{\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet}) &= \sum_{i, j, k \in \mathbb{Z}} \eta(i) \eta(j) \eta(k) \eta(-i-j-k) \xi(i) \xi(j) \xi(k) \\
W_{z \mapsto 1}^{\eta, \xi_\lambda}(\textcircled{3}\text{---}\bullet) &= \sum_{i, j, k \in \mathbb{Z}} \eta(i) \eta(j) \eta(k) \eta(-i-j-k) \xi(i) \\
&= \sum_{i, j, k \in \mathbb{Z}} \eta(-i) \eta(i-j) \eta(j-k) \eta(k) \xi(i) .
\end{aligned} \tag{6.72}$$

Ces expressions découlent d'un choix particulier de la fonction θ intervenant dans la définition de $W_\varphi^{\eta, \xi}$. D'autres choix pour θ reviendraient à effectuer des changements de variables dans les expressions précédentes. En particulier, les deux formes données pour $W_{z \mapsto 1}^{\eta, \xi_\lambda}(\textcircled{3}\text{---}\bullet)$ correspondent aux deux choix possibles

$$\theta(\textcircled{3}\text{---}\bullet) = \begin{array}{c} i_1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \quad \text{et} \quad \theta(\textcircled{3}\text{---}\bullet) = \begin{array}{c} i_1 \\ \bullet \\ i_2 \\ \bullet \\ i_3 \\ \bullet \end{array}, \tag{6.73}$$

avec $i = i_1$, $j = i_2$ et $k = i_3$. De même, pour les $W_{z \mapsto z^2}^{\eta, \xi_\lambda}(g)$, on a

$$\begin{aligned}
W_{z \mapsto z^2}^{\eta, \xi_\lambda}(\bullet) &= 0 \\
W_{z \mapsto z^2}^{\eta, \xi_\lambda}(\bullet\text{---}\bullet) &= 2 \sum_{i \in \mathbb{Z}} i^2 \eta(i) \eta(-i) \xi(i) \\
W_{z \mapsto z^2}^{\eta, \xi_\lambda}(\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet) &= 2 \sum_{i, j \in \mathbb{Z}} (i^2 + j^2 + ij) \eta(i) \eta(j) \eta(-i-j) \xi(i) \xi(j) \\
W_{z \mapsto z^2}^{\eta, \xi_\lambda}(\textcircled{3}) &= 2 \sum_{i, j \in \mathbb{Z}} (i^2 + ij + j^2) \eta(i) \eta(j) \eta(-i-j) \\
W_{z \mapsto z^2}^{\eta, \xi_\lambda}(\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet) &= 2 \sum_{i, j, k \in \mathbb{Z}} (i^2 + j^2 + k^2 + ij + jk) \eta(i) \eta(-i-j) \eta(j+k) \eta(-k) \xi(i) \xi(j) \xi(k) \\
W_{z \mapsto z^2}^{\eta, \xi_\lambda}(\textcircled{\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet}) &= 2 \sum_{i, j, k \in \mathbb{Z}} (i^2 + j^2 + k^2 + ij + ik + jk) \eta(i) \eta(j) \eta(k) \eta(-i-j-k) \xi(i) \xi(j) \xi(k) \\
W_{z \mapsto z^2}^{\eta, \xi_\lambda}(\textcircled{3}\text{---}\bullet) &= 2 \sum_{i, j, k \in \mathbb{Z}} (i^2 + j^2 + k^2 + ij + ik + jk) \eta(i) \eta(j) \eta(k) \eta(-i-j-k) \xi(i) \\
&= 2 \sum_{i, j, k \in \mathbb{Z}} (i^2 + j^2 + k^2 - ij - jk) \eta(-i) \eta(i-j) \eta(j-k) \eta(k) \xi(-i) .
\end{aligned} \tag{6.74}$$

avec les mêmes choix pour la fonction θ .

6.2.6 Limite totalement asymétrique

On remarque que l'expression paramétrique (6.65), (6.68) de la fonction génératrice des cumulants du courant $E(\gamma)$ ressemble beaucoup à celle obtenue par Derrida et Lebowitz [86] pour le modèle totalement asymétrique. On va montrer que l'on peut retrouver le résultat de [86] en utilisant la fonction génératrice des arbres. Dans la limite $x \rightarrow 0$, la fonction ξ_λ devient

$$(\xi_\lambda)_{|x \rightarrow 0}(z) = \begin{cases} \lambda & \text{si } z = 0 \\ 1 & \text{si } z \neq 0 \end{cases}. \quad (6.75)$$

On choisit le paramètre arbitraire λ égal à 1 pour avoir $\xi_\lambda(z) = 1$ pour toute valeur de z . D'après (6.38), ni $W_{z \mapsto 1}^{\eta, z \mapsto 1}(g)$ ni $W_{z \mapsto z^2}^{\eta, z \mapsto 1}(g)$ ne dépendent alors plus de l'arbre g . En effet, pour $g \in \mathcal{G}_k$, le facteur $U_{\varphi, \eta}(\theta(g)^*)$ ne dépend que de k et pas de g , si l'on choisit l'application θ de telle sorte que toutes les arêtes de $\theta(g)$ s'éloignent de la racine (on rappelle que l'application θ transforme un arbre de $\mathcal{G}$ en un arbre de $\tilde{\mathcal{G}}$) :

$$\begin{aligned} U_{\varphi, \eta}(\theta(g)^*) &= \eta(i_1) \dots \eta(i_{k-1}) \times \eta(-i_1 - \dots - i_{k-1}) \\ &= \binom{L}{n+i_1} \dots \binom{L}{n+i_{k-1}} \times \binom{L}{n-i_1 - \dots - i_{k-1}} \bigg/ \binom{L}{n}^k, \end{aligned} \quad (6.76)$$

tandis que $V_\xi(\theta(g))$ est un produit de $\xi(z)$ pour différentes valeurs de z et vaut donc 1 si $\xi(z) = 1$. On peut alors calculer $W_{z \mapsto 1}^{\eta, z \mapsto 1}(g)$ et $W_{z \mapsto z^2}^{\eta, z \mapsto 1}(g)$. On trouve

$$W_{z \mapsto 1}^{\eta, z \mapsto 1}(g) = k \sum_{i_1 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{i_{k-1} \in \mathbb{Z}} \eta(i_1) \dots \eta(i_{k-1}) \times \eta(-i_1 - \dots - i_{k-1}) = k \binom{kL}{kn} \bigg/ \binom{L}{n}^k \quad (6.77)$$

$$\begin{aligned} W_{z \mapsto z^2}^{\eta, z \mapsto 1}(g) &= \sum_{i_1 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{i_{k-1} \in \mathbb{Z}} (i_1^2 + \dots + i_{k-1}^2 + (-i_1 - \dots - i_{k-1})^2) \\ &\quad \times \eta(i_1) \dots \eta(i_{k-1}) \times \eta(-i_1 - \dots - i_{k-1}) \\ &= \frac{k(k-1)n(L-n)}{kL-1} \binom{kL}{kn} \bigg/ \binom{L}{n}^k. \end{aligned} \quad (6.78)$$

L'expression paramétrique (6.65), (6.68) de $E(\gamma)$ pour le modèle totalement asymétrique s'écrit alors

$$\gamma = -\frac{2}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{B}{2}\right)^k \times k \binom{kL}{kn} \bigg/ \binom{L}{n}^k \times \left(\sum_{g \in \mathcal{G}_k} \frac{1}{S_t(g)} \right) \quad (6.79)$$

$$\frac{E(\gamma) - J\gamma}{p} = \frac{2}{L(L-1)} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{B}{2}\right)^k \times \frac{k(k-1)n(L-n)}{kL-1} \binom{kL}{kn} \bigg/ \binom{L}{n}^k \times \left(\sum_{g \in \mathcal{G}_k} \frac{1}{S_t(g)} \right). \quad (6.80)$$

La fonction génératrice des arbres (6.42) $Z_k(z)$ en $z = 1$ donne la valeur de la somme sur les arbres :

$$\sum_{g \in \mathcal{G}_k} \frac{1}{S_t(g)} = Z_k(1) = \frac{2^{k-1}}{k^2}. \quad (6.81)$$

Réexprimant le terme $J\gamma$ de $E(\gamma)$ en utilisant l'expression de γ en fonction de B , on obtient finalement

$$\gamma = -\frac{1}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B^k}{k} \binom{kL}{kn} \bigg/ \binom{L}{n}^k \quad (6.82)$$

$$\frac{E(\gamma) - J\gamma}{p} = -\frac{n(L-n)}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B^k}{(kL-1)} \binom{kL}{kn} \bigg/ \binom{L}{n}^k. \quad (6.83)$$

On retrouve le résultat de [86] (en absorbant dans B le coefficient du binôme qui est élevé à la puissance k).

6.2.7 Limite thermodynamique ($1 - x$ fini)

Pour un système avec une densité $\rho = n/L$ fixée, il est possible de prendre la limite thermodynamique des équations (6.65) et (6.68) donnant $E(\gamma)$ sous forme paramétrique si l'asymétrie $1 - x$ reste finie quand $L \rightarrow \infty$. Utilisant

$$\eta(z) \sim \left(\frac{1 - \rho}{\rho} \right)^z e^{-\frac{z^2 + (1-2\rho)z}{2\rho(1-\rho)L}}, \quad (6.84)$$

et l'expression (6.38) de $W_\varphi^{\eta, \xi}(g)$, les équations (6.65) et (6.68) deviennent pour L grand

$$\gamma \sim -\frac{2}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{B_\lambda}{2} \right)^k \sum_{g \in \mathcal{G}_k} \sum_{i_1 \in \mathbb{Z}} \cdots \sum_{i_{k-1} \in \mathbb{Z}} \frac{U_{z \mapsto 1, z \mapsto e^{-\frac{z^2}{2\rho(1-\rho)L}}}(\theta(g)^*) \times V_{\xi_\lambda}(\theta(g))}{S_t(g)}, \quad (6.85)$$

et

$$\frac{E(\gamma) - J\gamma}{p} \sim \frac{2(1-x)}{L^2} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{B_\lambda}{2} \right)^k \sum_{g \in \mathcal{G}_k} \sum_{i_1 \in \mathbb{Z}} \cdots \sum_{i_{k-1} \in \mathbb{Z}} \frac{U_{z \mapsto z^2, z \mapsto e^{-\frac{z^2}{2\rho(1-\rho)L}}}(\theta(g)^*) \times V_{\xi_\lambda}(\theta(g))}{S_t(g)}. \quad (6.86)$$

On a utilisé le fait que, de même que le terme linéaire de φ se simplifie dans $W_\varphi^{\eta, \xi}(g)$, les termes en e^z de $\eta(z)$ donnent une contribution nulle à $W_\varphi^{\eta, \xi}(g)$. À cause des $-z^2/L$ dans les exponentielles, les indices i_j qui donne la contribution dominante des sommes sont d'ordre $\sqrt{L}$. On pose donc $i_j = u_j \sqrt{L\rho(1-\rho)}$. Si $\lambda = 1$ et $0 < 1 - x < 1$, on peut remplacer $\xi_\lambda(z)$ par 1 dans les deux équations précédentes quand L tend vers l'infini. Les sommes de Riemann sur les indices i_j deviennent des intégrales et on obtient

$$\gamma \sim - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(B_\lambda)^k (\rho(1-\rho))^{\frac{k-1}{2}} L^{\frac{k-3}{2}}}{2^{k-1}} \quad (6.87)$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{g \in \mathcal{G}_k} \int_{-\infty}^{\infty} du_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} du_{k-1} \frac{U_{z \mapsto 1, z \mapsto e^{-\frac{z^2}{2}}}(\theta(g)^*) \times V_{z \mapsto 1}(\theta(g))}{S_t(g)} \\ \frac{E(\gamma) - J\gamma}{p} & \sim (1-x) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(B_\lambda)^k (\rho(1-\rho))^{\frac{k+1}{2}} L^{\frac{k-3}{2}}}{2^{k-1}} \\ & \times \sum_{g \in \mathcal{G}_k} \int_{-\infty}^{\infty} du_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} du_{k-1} \frac{U_{z \mapsto z^2, z \mapsto e^{-\frac{z^2}{2}}}(\theta(g)^*) \times V_{z \mapsto 1}(\theta(g))}{S_t(g)}. \end{aligned} \quad (6.88)$$

Si on choisit la fonction θ de telle sorte qu'aucune arête de $\theta(g)$ ne pointe vers la racine, on note que $U_{\varphi, \eta}(\theta(g)^*)$ ne dépend plus de l'arbre g . On a

$$U_{z \mapsto 1, z \mapsto e^{-\frac{z^2}{2}}}(\theta(g)^*) = k \times e^{-(u_1^2 + \dots + u_{k-1}^2 + u_1 u_2 + u_1 u_3 + \dots + u_{k-2} u_{k-1})} \quad (6.89)$$

$$\begin{aligned} U_{z \mapsto z^2, z \mapsto e^{-\frac{z^2}{2}}}(\theta(g)^*) & = 2(u_1^2 + \dots + u_{k-1}^2 + u_1 u_2 + u_1 u_3 + \dots + u_{k-1} u_{k-1}) \\ & \times e^{-(u_1^2 + \dots + u_{k-1}^2 + u_1 u_2 + u_1 u_3 + \dots + u_{k-2} u_{k-1})}. \end{aligned} \quad (6.90)$$

De plus, comme dans le cas totalement asymétrique, on a $V_{z \mapsto 1}(\theta(g)) = 1$. On peut donc utiliser la fonction génératrice des arbres (6.42) pour effectuer la somme sur $g \in \mathcal{G}_k$. On trouve

$$\gamma \sim - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(B_\lambda)^k (\rho(1-\rho))^{\frac{k-1}{2}} L^{\frac{k-3}{2}}}{k} \quad (6.91)$$

$$\begin{aligned} & \times \int_{-\infty}^{\infty} du_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} du_{k-1} e^{-(u_1^2 + \dots + u_{k-1}^2 + u_1 u_2 + u_1 u_3 + \dots + u_{k-2} u_{k-1})} \\ \frac{E(\gamma) - J\gamma}{p} & \sim (1-x) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(B_\lambda)^k (\rho(1-\rho))^{\frac{k+1}{2}} L^{\frac{k-3}{2}}}{k^2} \quad (6.92) \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} du_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} du_{k-1} 2(u_1^2 + \dots + u_{k-1}^2 + u_1 u_2 + u_1 u_3 + \dots + u_{k-1} u_{k-1}) \\ & \times e^{-(u_1^2 + \dots + u_{k-1}^2 + u_1 u_2 + u_1 u_3 + \dots + u_{k-2} u_{k-1})} . \end{aligned}$$

Il reste à effectuer l'intégration sur les u_j . On a

$$\int_{-\infty}^{\infty} du_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} du_{k-1} e^{-(u_1^2 + \dots + u_{k-1}^2 + u_1 u_2 + u_1 u_3 + \dots + u_{k-2} u_{k-1})} = \sqrt{\frac{(2\pi)^{k-1}}{k}} \quad (6.93)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} du_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} du_{k-1} 2(u_1^2 + \dots + u_{k-1}^2 + u_1 u_2 + u_1 u_3 + \dots + u_{k-2} u_{k-1}) \\ & \times e^{-(u_1^2 + \dots + u_{k-1}^2 + u_1 u_2 + u_1 u_3 + \dots + u_{k-2} u_{k-1})} \\ & = \sqrt{\frac{(k-1)^2 (2\pi)^{k-1}}{k}} , \quad (6.94) \end{aligned}$$

ce qui donne finalement

$$\gamma \sim - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2\pi)^{\frac{k-1}{2}} (\rho(1-\rho))^{\frac{k-1}{2}} L^{\frac{k-3}{2}}}{k^{3/2}} (B_\lambda)^k \quad (6.95)$$

$$\frac{E(\gamma) - J\gamma}{p} \sim (1-x) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)(2\pi)^{\frac{k-1}{2}} (\rho(1-\rho))^{\frac{k+1}{2}} L^{\frac{k-3}{2}}}{k^{5/2}} (B_\lambda)^k . \quad (6.96)$$

Posant $C = -B_\lambda \sqrt{2\pi\rho(1-\rho)L}$, on trouve alors le résultat de Lee et Kim [87] à l'ordre dominant en L :

$$\gamma \sim - \sqrt{\frac{1}{2\pi\rho(1-\rho)L^3}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-C)^k}{k^{3/2}} \quad (6.97)$$

$$\frac{E(\gamma) - J\gamma}{p-q} \sim \sqrt{\frac{\rho(1-\rho)}{2\pi L^3}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-C)^k}{k^{3/2}} - \frac{(-C)^k}{k^{5/2}} \right) . \quad (6.98)$$

Dans cette limite, la dépendance en l'asymétrie se réduit au facteur global $p-q$ de $E(\gamma)$.

6.3 Expression exacte des cumulants du courant

Nous avons écrit dans la section précédente une expression paramétrique pour la fonction génératrice des cumulants du courant $E(\gamma)$ du modèle d'exclusion partiellement asymétrique. Cette expression faisait intervenir des sommes sur des ensembles d'arbres. Dans cette section, nous allons donner une autre expression pour $E(\gamma)$, équivalente, mais plus explicite. Elle s'exprimera en fonction de sommes sur des ensembles de forêts, que nous allons définir. Cette nouvelle expression pour $E(\gamma)$ donnera directement des expressions explicites pour les cumulants du courant. En particulier, nous retrouverons les résultats connus pour les trois premiers cumulants, ainsi que la conjecture que nous avons énoncée au début de ce chapitre pour le quatrième cumulant.

6.3.1 Définition des forêts

On appelle « **forêt** » un graphe sans cycle dont les composantes connexes sont des arbres. Pour une forêt h , on notera $\bar{h}$ le nombre d'arbres contenus dans h et $|h|$ la taille de h , définie comme la somme des tailles de tous les arbres qu'elle contient. La taille d'une forêt est donc égale à la somme des tailles de tous ses nœuds composites. Elle est aussi égale au nombre total de nœuds élémentaires qu'elle contient. Une forêt sera représentée comme une liste d'arbres entourée par des crochets $[\]$. On considérera dans la suite deux ensembles de forêts.

On définit tout d'abord l'ensemble $\mathcal{H}$ des forêts composées d'arbres éléments de $\mathcal{G}$ de taille supérieure ou égale à 2. On appelle $\mathcal{H}_r$ le sous-ensemble de $\mathcal{H}$ constitué des forêts h telles que $|h| - \bar{h} = r$. Les quatre premiers ensembles $\mathcal{H}_r$ sont donc

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \{[\bullet\text{---}\bullet]\} \\ \mathcal{H}_2 &= \{[\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet], [\textcircled{3}], [\bullet\text{---}\bullet, \bullet\text{---}\bullet]\} \\ \mathcal{H}_3 &= \left\{ [\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet], \left[\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} \right], [\textcircled{3}\text{---}\bullet], [\bullet\text{---}\bullet, \bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet], [\bullet\text{---}\bullet, \textcircled{3}], [\bullet\text{---}\bullet, \bullet\text{---}\bullet, \bullet\text{---}\bullet] \right\} \\ \mathcal{H}_4 &= \left\{ [\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet], \left[\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} \right], [\textcircled{3}\text{---}\bullet\text{---}\bullet], [\bullet\text{---}\textcircled{3}\text{---}\bullet], [\textcircled{5}], \\ &\quad [\bullet\text{---}\bullet, \bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet], \left[\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} \right], [\bullet\text{---}\bullet, \textcircled{3}], [\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet, \bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet], [\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet, \textcircled{3}], \\ &\quad [\textcircled{3}, \textcircled{3}], [\bullet\text{---}\bullet, \bullet\text{---}\bullet, \bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet], [\bullet\text{---}\bullet, \bullet\text{---}\bullet, \textcircled{3}], [\bullet\text{---}\bullet, \bullet\text{---}\bullet, \bullet\text{---}\bullet, \bullet\text{---}\bullet] \right\}. \end{aligned} \quad (6.99)$$

Les premiers ensembles $\mathcal{H}_r$ peuvent être engendrés par ordinateur. Le nombre de forêts contenues dans les treize premiers ensembles $\mathcal{H}_r$ est donné dans le tableau suivant :

r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
$\text{card } \mathcal{H}_r$	1	3	6	15	33	80	186	454	1109	2772	7012	18053	47066	·

(6.100)

On définit aussi l'ensemble $\tilde{\mathcal{H}}$ des forêts composées d'arbres éléments de $\tilde{\mathcal{G}}$ de taille supérieure ou égale à 2, avec des arêtes réétiquetées par $i_1, i_2, \dots$ de telle sorte que toutes les étiquettes soient différentes. On appelle $\tilde{\mathcal{H}}_r$ le sous-ensemble de $\tilde{\mathcal{H}}$ constitué des forêts h telles que $|h| - \bar{h} = r$. On note que pour $h \in \tilde{\mathcal{H}}_r$, le nombre d'arêtes de h est précisément égal à r vu que chaque arbre de $\tilde{\mathcal{G}}$ contient une arête de moins que de nœuds élémentaires. Par contre, pour $h \in \mathcal{H}_r$, le nombre r n'est pas égal au nombre d'arêtes de h car il n'y a pas d'arêtes à l'intérieur des nœuds composites. Les deux premiers ensembles $\tilde{\mathcal{H}}_r$ sont

$$\tilde{\mathcal{H}}_1 = \left\{ \left[\begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} \right], \dots \right\} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{H}}_2 = \left\{ \left[\begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} \right], \dots \right\}, \quad (6.101)$$

les $\dots$ représentant les forêts obtenues à partir de celles dessinées en permutant les indices i_j et en retournant les directions des arêtes.

La plupart des fonctions que l'on a définies sur les arbres de $\mathcal{G}$ et de $\tilde{\mathcal{G}}$ à la section 6.2.2 s'étendent naturellement aux forêts : pour h élément de $\mathcal{H}$ ou $\tilde{\mathcal{H}}$, $c(h)$ désigne l'ensemble des nœuds composites de h , $e(h)$ l'ensemble des nœuds élémentaires de h , et $o(h)$ l'ensemble des arêtes externes de h (*i.e.* l'ensemble des arêtes reliant des nœuds composites, et pas les arêtes reliant les nœuds élémentaires à l'intérieur des nœuds composites).

Comme pour les arbres, on choisit une application θ de $\mathcal{H}$ dans $\tilde{\mathcal{H}}$ qui préserve la structure en forêt des nœuds composites. L'application θ transforme une forêt $h \in \mathcal{H}_r$ en une forêt $h' \in \tilde{\mathcal{H}}_r$.

Elle enracine chaque arbre de h , ajoute une structure interne en arbre sur les nœuds composites, transforme les liens entre nœuds composites en liens entre nœuds élémentaires et ajoute une direction et une étiquette à toutes les arêtes.

L'opérateur $*$ appliqué à une forêt $h \in \tilde{\mathcal{H}}$ est défini comme la forêt composée des arbres de h auxquels l'opérateur $*$ a été appliqué : la forêt h^* est donc constituée d'arbres ayant tous leurs nœuds élémentaires reliés à la racine. Les fonctions $U_{\varphi,\eta}$ et V_ξ se définissent naturellement sur des forêts de $\tilde{\mathcal{H}}$:

$$U_{\varphi,\eta}(h) = \left(\sum_{e \in e(h)} \varphi(\ell(e)) \right) \left(\prod_{e \in e(h)} \eta(\ell(e)) \right) \quad (6.102)$$

$$V_\xi(h) = \prod_{o \in o(h)} \xi(m(o)) . \quad (6.103)$$

La fonction $W_\varphi^{\eta,\xi}$ se prolonge elle aussi sur les forêts de $\mathcal{H}$. Pour la même raison que dans le cas des arbres, on a toujours deux expressions équivalentes pour $W_\varphi^{\eta,\xi}$ appliqué à une forêt :

$$W_\varphi^{\eta,\xi}(h) = \sum_{i_1 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{i_{r-1} \in \mathbb{Z}} U_{\varphi,\eta}(\theta(h)) V_\xi(\theta(h)^*) \quad (6.104)$$

$$= \sum_{i_1 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{i_{r-1} \in \mathbb{Z}} U_{\varphi,\eta}(\theta(h)^*) V_\xi(\theta(h)) . \quad (6.105)$$

On peut là encore montrer que $W_\varphi^{\eta,\xi}(h)$ ne dépend pas du choix de la fonction θ si la fonction ξ est paire.

6.3.2 Sommation sur les forêts

Nous allons maintenant définir un facteur de symétrie associé aux forêts, ainsi qu'une fonction génératrice pour les ensembles de forêts $\mathcal{H}_r$.

Facteurs de symétrie

On rappelle que l'on a défini un facteur de symétrie $S_t(g)$ pour tout arbre $g \in \mathcal{G}$. On définit alors un facteur de symétrie associé à la forêt $h \in \mathcal{H}$ par

$$S_f(h) = P_f(h) \frac{(-1)^{\bar{h}}}{(|h| - 1)!} \prod_{g \in h} \frac{S_t(g)}{|g|} . \quad (6.106)$$

Le facteur $P_f(h)$ est égal au cardinal du groupe de permutation des arbres identiques de h . Si la forêt h est composée de m_1 fois un premier arbre, m_2 fois un second arbre, $\dots$, alors $P_f(h)$ est simplement égal au produit des factorielles des m_i .

Comme dans le cas des arbres, on va être amené à effectuer des sommes sur les éléments de $\mathcal{H}_r$ munis du facteur de symétrie S_f . Pour une fonction f agissant sur $\mathcal{H}$ et à valeur numérique, on considérera des expressions de la forme

$$\sum_{h \in \mathcal{H}_r} \frac{f(h)}{S_f(h)} . \quad (6.107)$$

Sommation sur des k -uplets d'arbres

On va réécrire l'expression générale (6.107) comme une somme sur des arbres de $\mathcal{G}$. Pour cela, on commence par découper la somme sur $\mathcal{H}_r$ en introduisant le nombre k ($= \bar{h}$) d'arbres dans la forêt h . Comme pour $h \in \mathcal{H}_r$ on a $|h| = r + \bar{h}$, on peut écrire

$$\sum_{h \in \mathcal{H}_r} \frac{f(h)}{S_f(h)} = \sum_{k=1}^r \sum_{h \in \mathcal{H}_r} \mathbb{1}_{\bar{h}=k} \frac{f(h)}{P_f(h)} (-1)^k (r+k-1)! \prod_{g \in h} \frac{|g|}{S_t(g)}. \quad (6.108)$$

On remplace maintenant la somme sur les forêts par une somme sur des k -uplets d'arbres. Il faut pour cela compter le nombre de k -uplets correspondant à une même forêt h . Celui-ci est simplement égal au cardinal de l'orbite de h sous l'action du groupe $\mathcal{S}_k$ des permutations des k arbres. On note aussi que $P_f(h)$ est égal au cardinal du stabilisateur de h sous cette action de groupe. La formule des classes implique alors que le nombre de k -uplets d'arbres correspondant à la forêt h est égal à $k!/P_f(h)$. On obtient donc

$$\sum_{h \in \mathcal{H}_r} \frac{f(h)}{S_f(h)} = \sum_{k=1}^r \sum_{g_1 \in \mathcal{G} \setminus \{\bullet\}} \cdots \sum_{g_k \in \mathcal{G} \setminus \{\bullet\}} \mathbb{1}_{|g_1| + \dots + |g_k| = r+k} f(g_1, \dots, g_k) \frac{(-1)^k (r+k-1)!}{k!} \prod_{j=1}^k \frac{|g_j|}{S_t(g_j)}, \quad (6.109)$$

où $f(g_1, \dots, g_k)$ est l'image par la fonction f de la forêt constituée des arbres $g_1, \dots, g_k$. On a tenu compte du fait que les forêts de $\mathcal{H}$ sont constituées uniquement d'arbres de taille strictement supérieure à un. Introduisant les nombres (entiers supérieurs ou égaux à 2) $a_j = |g_j|$ de nœuds élémentaires des arbres g_j , on trouve

$$\sum_{h \in \mathcal{H}_r} \frac{f(h)}{S_f(h)} = \sum_{k=1}^r \sum_{\substack{a_1, \dots, a_k \geq 2 \\ a_1 + \dots + a_k = r+k}} \sum_{g_1 \in \mathcal{G}_{a_1}} \cdots \sum_{g_k \in \mathcal{G}_{a_k}} f(g_1, \dots, g_k) \frac{(-1)^k (r+k-1)!}{k!} \prod_{j=1}^k \frac{a_j}{S_t(g_j)}. \quad (6.110)$$

Si la fonction f que l'on considère se factorise comme un produit sur les arbres de la forêt :

$$f(g_1, \dots, g_k) = f(g_1) \cdots f(g_k), \quad (6.111)$$

alors la somme sur les forêts de $\mathcal{H}_r$ s'écrit finalement

$$\sum_{h \in \mathcal{H}_r} \frac{f(h)}{S_f(h)} = \sum_{k=1}^r \sum_{\substack{a_1, \dots, a_k \geq 2 \\ a_1 + \dots + a_k = r+k}} \frac{(-1)^k (r+k-1)!}{k!} \prod_{j=1}^k \left(\sum_{g \in \mathcal{G}_{a_j}} \frac{a_j f(g)}{S_t(g)} \right). \quad (6.112)$$

La somme sur les forêts de $\mathcal{H}$ avec le facteur de symétrie S_f s'exprime ainsi en fonction de sommes sur des arbres de $\mathcal{G}$ avec le facteur de symétrie S_t .

Fonction génératrice des forêts

On peut appliquer le résultat précédent au calcul de la fonction génératrice des forêts de $\mathcal{H}$, définie par

$$Z_r(y, z) = \sum_{h \in \mathcal{H}_r} \frac{y^{\bar{h}} z^{\text{card } c(h)}}{S_f(h)}, \quad (6.113)$$

où $\text{card } c(h)$ est le nombre de nœuds composites de h , et exprimer $Z_r(y, z)$ en fonction de la fonction génératrice des arbres $Z_a(z)$. On obtient

$$Z_r(y, z) = \sum_{k=1}^r \sum_{\substack{a_1, \dots, a_k \geq 2 \\ a_1 + \dots + a_k = r+k}} \frac{(r+k-1)! (-1)^k y^k}{k!} \prod_{j=1}^k (a_j Z_{a_j}(z)). \quad (6.114)$$

Insérant l'expression (6.42) de $Z_r(z)$, on trouve

$$Z_r(y, z) = \sum_{k=1}^r \frac{(r+k-1)!(-1)^k y^k z^k}{k!} \sum_{\substack{a_1, \dots, a_k \geq 2 \\ a_1 + \dots + a_k = r+k}} \prod_{j=1}^k \left(\frac{1}{a_j!} \prod_{i=1}^{a_j-1} [a_j(z+1) - 2i] \right). \quad (6.115)$$

Calculant cette expression pour r compris entre 1 et 12, on observe qu'en $y = 1/z$ on a

$$Z_r\left(\frac{1}{z}, z\right) = \begin{cases} -z = 2B_1 z & \text{pour } r = 1 \\ \frac{2^r B_r}{r} & \text{pour } r > 1 \end{cases}, \quad (6.116)$$

où les B_r sont les nombres de Bernoulli. On note en particulier que toute la dépendance en z de $Z_r(1/z, z)$ se simplifie (sauf pour $r = 1$) pour ne donner qu'un terme constant (qui est lui même nul pour r impair supérieur ou égal à 3). Seules les forêts comportant uniquement des arbres constituées d'un seul nœud composite (qui sont celles telles que $\bar{h} = \text{card } c(h)$) contribuent donc à $Z_r(1/z, z)$ si r est différent de 1 : les contributions de toutes les autres forêts s'annulent.

6.3.3 Forme explicite des cumulants du courant

L'équation (6.68) donne la fonction génératrice des cumulants du courant $E(\gamma)$ en fonction d'un paramètre B_λ , qui peut être déterminé à partir de l'équation (6.65) qui donne γ en fonction de B_λ . Cette représentation paramétrique de $E(\gamma)$ ne permet donc pas d'accéder directement aux cumulants du courant. Pour les obtenir, on doit éliminer B_λ entre les deux équations (6.68) et (6.65). Cela peut être fait perturbativement en γ aux premiers ordres, ce qui permet d'obtenir des expressions explicites pour les premiers cumulants du courant. L'utilisation de la formule d'inversion de Lagrange (voir par exemple Wilf [78] ou Flajolet et Sedgewick [79]) permet d'aller plus loin, en donnant une expression à tous les ordres en γ de B_λ et de ses puissances, et donc aussi une expression de $E(\gamma)$ comme une série formelle explicite en γ . Tout ceci est expliqué dans l'appendice 6.C. On obtient le résultat suivant :

$$\boxed{\frac{E(\gamma) - J\gamma}{p} = -\frac{2(1-x)}{L(L-1)} \sum_{r=2}^{\infty} \frac{(-1)^r L^r \gamma^r}{2^r r!} \sum_{h \in \mathcal{H}_{r-1}} \frac{W_{z \mapsto z^2}^{\eta, \xi_\lambda}(h)}{S_f(h)}}. \quad (6.117)$$

Les sommes sur des arbres dans les équations paramétriques (6.68) et (6.65) pour $E(\gamma)$ sont devenues des sommes sur des forêts. Nous avons vérifié cette expression de $E(\gamma)$ en résolvant l'équation de Bethe fonctionnelle (5.10) perturbativement en γ jusqu'à l'ordre 7 par la méthode présentée au chapitre 5, pour tous les systèmes de taille inférieure ou égale à 12 avec $n \leq L/2$ (la symétrie particule-trou, vérifiée par (6.117), implique alors que la formule (6.117) est aussi

valide pour les systèmes tels que $n > L/2$). Jusqu'à l'ordre 5 en γ , on a

$$\begin{aligned}
\frac{(L-1)E(\gamma)}{p(1-x)} &= n(L-n)\gamma + \frac{L\gamma^2}{4}W[\bullet\text{---}\bullet] - \frac{L^2\gamma^3}{72}(9W[\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet] - W[\textcircled{3}] - 9W[\bullet\text{---}\bullet, \bullet\text{---}\bullet]) \\
&+ \frac{L^3\gamma^4}{48}\left(W\left[\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet\text{---}\bullet \\ \bullet \end{array}\right] + 3W[\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet] - W[\textcircled{3}\text{---}\bullet] - 9W[\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet, \bullet\text{---}\bullet] + W[\textcircled{3}, \bullet\text{---}\bullet] \right. \\
&\quad \left. + 5W[\bullet\text{---}\bullet, \bullet\text{---}\bullet, \bullet\text{---}\bullet] \right) \\
&- \frac{L^4\gamma^5}{28800}\left(900W[\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet] + 900W\left[\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet\text{---}\bullet \\ \bullet \end{array}\right] + 75W\left[\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet\text{---}\bullet \\ \bullet \end{array}\right] - 300W[\textcircled{3}\text{---}\bullet\text{---}\bullet] \\
&\quad - 450W[\bullet\text{---}\textcircled{3}\text{---}\bullet] + 27W[\textcircled{5}] - 3600W[\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet, \bullet\text{---}\bullet] - 1200W\left[\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet\text{---}\bullet \\ \bullet \end{array}\right], \bullet\text{---}\bullet \\
&\quad + 1200W[\textcircled{3}\text{---}\bullet, \bullet\text{---}\bullet] - 2025W[\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet, \bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet] + 450W[\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet, \textcircled{3}] - 25W[\textcircled{3}, \textcircled{3}] \\
&\quad + 8100W[\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet, \bullet\text{---}\bullet, \bullet\text{---}\bullet] - 900W[\textcircled{3}, \bullet\text{---}\bullet, \bullet\text{---}\bullet] - 3150W[\bullet\text{---}\bullet, \bullet\text{---}\bullet, \bullet\text{---}\bullet, \bullet\text{---}\bullet] \right) \\
&+ \mathcal{O}(\gamma^6), \tag{6.118}
\end{aligned}$$

avec $W = W_{z \mapsto z^2}^{\eta, \xi_x}$. On constate que cette expression de $E(\gamma)$ redonne bien les formules connues (6.5) et (6.6) de la constante de diffusion et du troisième cumulant, ainsi que la formule (6.18), (6.17) que nous avons conjecturée au début de ce chapitre pour le quatrième cumulant.

6.3.4 Limite thermodynamique ($1-x \sim 1/\sqrt{L}$)

Pour un système avec une densité $\rho = n/L$ fixée, il est possible de prendre la limite de l'équation (6.117) donnant $E(\gamma)$ si l'asymétrie $1-x$ est d'ordre $1/\sqrt{L}$, de manière similaire à ce que nous avons fait dans le chapitre 5 pour la constante de diffusion et le troisième cumulant du courant. On pose

$$\Phi = -\frac{\log x \sqrt{L\rho(1-\rho)}}{2}. \tag{6.119}$$

Dans la limite où $1-x$ tend vers zéro quand L tend vers l'infini, on a

$$1-x \sim \frac{2\Phi}{\sqrt{L\rho(1-\rho)}}. \tag{6.120}$$

Utilisant

$$\eta(z) \sim \left(\frac{1-\rho}{\rho}\right)^z e^{-\frac{z^2 + (1-2\rho)z}{2\rho(1-\rho)L}} \quad \xi_\lambda(z) = \begin{cases} \lambda & \text{si } z = 0 \\ \frac{1}{\tanh\left(\frac{|z|\Phi}{\sqrt{L\rho(1-\rho)}}\right)} & \text{si } z \neq 0 \end{cases}, \tag{6.121}$$

et l'expression (6.38) de $W_\varphi^{\eta, \xi}(g)$, l'équation (6.117) devient

$$\begin{aligned}
\frac{E(\gamma) - J\gamma}{p} &\sim -\frac{2(1-x)}{L^2} \sum_{r=2}^{\infty} \frac{(-1)^r L^r \gamma^r}{2^r r!} \\
&\times \sum_{h \in \mathcal{H}_{r-1}} \sum_{i_1 \in \mathbb{Z}} \cdots \sum_{i_{r-1} \in \mathbb{Z}} \frac{U_{z \mapsto z^2, z \mapsto e^{-\frac{z^2}{2\rho(1-\rho)L}}}(\theta(h)^*) \times V_{z \mapsto \tanh\left(\frac{|z|\Phi}{\sqrt{L\rho(1-\rho)}}\right)}(\theta(h))}{S_f(h)}. \tag{6.122}
\end{aligned}$$

On pose $u_j = i_j / \sqrt{L\rho(1-\rho)}$. Comme précédemment, les sommes de Riemann sur les indices i_j deviennent des intégrales. On obtient

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{L^3}{\rho(1-\rho)}} \frac{E(\gamma) - J\gamma}{p} &\sim -2(1-x) \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(-\frac{\gamma \sqrt{(\rho(1-\rho))L^3}}{2} \right)^r \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} du_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} du_{r-1} \sum_{h \in \mathcal{H}_{r-1}} \frac{U_{z \mapsto z^2, z \mapsto e^{-\frac{z^2}{2}}}(\theta(h)^*) \times V_{z \mapsto \tanh(|z|\Phi)}(\theta(h))}{S_f(h)}. \end{aligned} \quad (6.123)$$

De même que pour la constante de diffusion et le troisième cumulant, on peut montrer que l'expression précédente est en fait valable aussi si $1-x \gg 1/\sqrt{L}$. Sur la base des calculs mentionnés en début de chapitre pour le quatrième cumulant, nous conjecturons que cette expression est valable à tous les ordres en γ dès que $1-x \gg 1/L$.

Quand $1-x$ est exactement d'ordre $1/\sqrt{L}$, le facteur $1-x$ de l'équation précédente s'exprime en fonction de Φ par (6.120), et l'on obtient pour la fonction $E(\gamma)$

$$\begin{aligned} L^2 \frac{E(\gamma) - J\gamma}{p} &\sim -4\Phi \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(-\frac{\gamma \sqrt{(\rho(1-\rho))L^3}}{2} \right)^r \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} du_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} du_{r-1} \sum_{h \in \mathcal{H}_{r-1}} \frac{U_{z \mapsto z^2, z \mapsto e^{-\frac{z^2}{2}}}(\theta(h)^*) \times V_{z \mapsto \tanh(|z|\Phi)}(\theta(h))}{S_f(h)}. \end{aligned} \quad (6.124)$$

6.A Preuve de l'équivalence des deux définitions de $W_{\varphi}^{\eta,\xi}(g)$

On va montrer dans cette section que les deux définitions (6.37) et (6.38) de $W_{\varphi}^{\eta,\xi}(g)$ sont équivalentes. On illustrera cela sur plusieurs exemples d'arbres $g \in \mathcal{G}$. Si g est un arbre de $\mathcal{G}_r$, $W_{\varphi}^{\eta,\xi}(g)$ s'exprime comme une somme sur des indices $i_1, \dots, i_{r-1}$ appartenant à $\mathbb{Z}$ du produit des fonctions $U_{\varphi,\eta}$ et V_{ξ} appliquées aux arbres $\theta(g)$ et $\theta(g)^*$ éléments de $\tilde{\mathcal{G}}_r$. Prendre $\theta(g)$ pour argument de $U_{\varphi,\eta}$ et $\theta(g)^*$ pour argument de V_{ξ} correspond à la définition (6.37) de $W_{\varphi}^{\eta,\xi}(g)$, tandis que le choix contraire correspond à la définition (6.38) de $W_{\varphi}^{\eta,\xi}(g)$. Partant de (6.38), des changements de variables peuvent être effectués sur les indices $i_1, \dots, i_{r-1}$. En général, ces changements de variables sont tels que $U_{\varphi,\eta}(\theta(g)^*)$ est transformé en une expression qui ne peut pas être exprimée sous la forme $U_{\varphi,\eta}(g')$, pour un arbre $g' \in \tilde{\mathcal{G}}_r$. La même chose est vraie pour $V_{\xi}(\theta(g))$. Cependant, il existe tout de même des changements de variables qui correspondent à transformer l'arbre $\theta(g)^*$ en un arbre g_1 et l'arbre $\theta(g)$ en un arbre g'_1 comme on le montrera dans la suite. On verra qu'il est en fait possible de trouver une suite de changements de variables des indices i_j qui corresponde à une suite de couples d'arbres (g_j, g'_j) , commençant par $(\theta(g)^*, \theta(g))$ et se terminant par $(\theta(g), \theta(g)^*)$:

$$W_{\varphi}^{\eta,\xi}(g) = \sum_{i_1 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{i_{r-1} \in \mathbb{Z}} U_{\varphi,\eta}(\theta(g)^*) V_{\xi}(\theta(g)) \quad (\text{définition (6.38) de } W_{\varphi}^{\eta,\xi}(g)) \quad (6.125)$$

$$= \sum_{i_1 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{i_{r-1} \in \mathbb{Z}} U_{\varphi,\eta}(g_1) V_{\xi}(g'_1) = \dots = \sum_{i_1 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{i_{r-1} \in \mathbb{Z}} U_{\varphi,\eta}(g_m) V_{\xi}(g'_m) \quad (6.126)$$

$$= \sum_{i_1 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{i_{r-1} \in \mathbb{Z}} U_{\varphi,\eta}(\theta(g)) V_{\xi}(\theta(g)^*) \quad (\text{définition (6.37) de } W_{\varphi}^{\eta,\xi}(g)) . \quad (6.127)$$

Ceci prouvera finalement l'équivalence entre les deux définitions (6.37) et (6.38) de $W_{\varphi}^{\eta,\xi}(g)$.

6.A.a Changements de variables correspondant à des changements d'arbres

On considère l'expression

$$\sum_{i_1 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{i_{r-1} \in \mathbb{Z}} U_{\varphi,\eta}(g_1) V_{\xi}(g'_1) , \quad (6.128)$$

où g_1 et g'_1 sont des arbres de $\tilde{\mathcal{G}}_r$. Les changement de variables $i_j \rightarrow -i_j$ correspondent simplement à transformer les arbres g_1 et g'_1 en g_2 et g'_2 obtenus à partir de g_1 et g'_1 par le retournement de l'arête étiquetée par i_j . D'autres changements de variables des i_j , par contre, correspondent seulement à transformer $U_{\varphi,\eta}(g_1)$ en $U_{\varphi,\eta}(g_2)$ dans l'expression précédente, mais ne correspondent pas nécessairement à transformer $V_{\xi}(g'_1)$ en une expression qui peut être mise sous la forme $V_{\xi}(g'_2)$. D'autres encore peuvent correspondre à modifier $V_{\xi}(g'_1)$ en $V_{\xi}(g'_2)$ mais transforment par contre $U_{\varphi,\eta}(g_1)$ en une expression qui n'est pas de la forme $U_{\varphi,\eta}(g_2)$. On va étudier séparément dans cette section quels sont les changements de variables qui correspondent à transformer g_1 en g_2 (tout en transformant le terme en $V_{\xi}(g'_1)$ de manière arbitraire), et quels sont ceux qui correspondent à transformer g'_1 en g'_2 (tout en transformant le terme en $U_{\varphi,\eta}(g_1)$ de manière arbitraire).

On commence par les changements de variables modifiant l'arbre g_1 . Si un nœud élémentaire e de g_1 est entouré de k arêtes pointant vers e étiquetées par $a_1, \dots, a_k$ et de l arêtes quittant e étiquetées par $b_1, \dots, b_l$, alors la contribution de e à $U_{\varphi,\eta}(g_1)$ s'exprime en fonction de $\ell(e)$, qui est égal à la somme des a_j moins la somme des b_j . Transformer l'un des a_i en a_i moins la somme de certains des a_j (différents de a_i) plus la somme de certains des b_j revient alors à enlever ces a_j et ces b_j de $\ell(e)$ et à les ajouter à $\ell(e')$, où e' est le nœud élémentaire de l'arbre relié à e par l'arête étiquetée a_i . Cela revient donc à détacher de e les arêtes étiquetées par les a_j et b_j

en question, et à les rattacher à e' . Ce changement de variables correspond donc à un transfert dans l'arbre g_1 d'un certain nombre d'arêtes de e vers e' . Ce transfert est local dans le sens où les nœuds e et e' sont voisins. De même, le changement de variable consistant à transformer l'un des b_i en b_i moins la somme de certains des b_j (différents de b_i) plus la somme de certains des a_j revient à effectuer un transfert d'arêtes depuis e vers le nœud e'' tel que le lien entre e et e'' est étiqueté par b_i .

On passe maintenant aux changements de variables modifiant l'arbre g'_1 . On appelle $a_1, \dots, a_k$ les indices étiquetant les arêtes qui ne pointent pas vers la racine de g'_1 et $b_1, \dots, b_l$ les autres indices, qui pointent vers la racine. Soit une arête (interne ou externe) p de g'_1 étiquetée par l'un des a_i . La contribution de a_i à $V_{\xi}(g)$ provient de tous les $m(o)$ pour o arête externe de g'_1 située entre la racine de g'_1 et l'arête p (comprise). Considérons le changement de variables transformant a_i en a_i moins la somme des a_j (différents de a_i) étiquetant les arêtes du sous arbre de g'_1 commençant au niveau de l'arête p plus la somme des b_j étiquetant les arêtes du même sous arbre. Ce changement de variables consiste à détacher de g'_1 tous les sous arbres commençant en les arêtes voisines de p (excepté celle raccordant p à la racine) et à le raccorder à la racine de g'_1 . Contrairement aux changements de variables considérés pour g_1 , ce changement de variables n'est pas local sur l'arbre : on rattache à la racine de g'_1 des sous arbres situés initialement arbitrairement loin de la racine. On aurait aussi pu considérer une arête p de g'_1 étiquetée par l'un des b_i . Le changement de variables correspondant consiste à transformer b_i en b_i moins la somme des b_j (différents de b_i) étiquetant les arêtes du sous arbre de g'_1 commençant au niveau de l'arête p plus la somme des a_j étiquetant les arêtes du même sous arbre. La signification de ce changement de variables sur l'arbre g'_1 est la même que pour le changement de variables précédent.

Selon la structure respective des arbres g_1 et g'_1 , il est possible que les deux ensembles de changements de variables que nous avons présentés dans les deux paragraphes précédents aient des éléments communs. Ces changements de variables préservent alors la structure de l'expression (6.128), en modifiant à la fois g_1 et de g'_1 . Ce sont ces changements de variables que l'on va utiliser dans la suite pour prouver que les deux définitions de $W_{\varphi}^{\eta,\xi}$ sont équivalentes.

6.A.b Exemple 1 : arbre linéaire avec des nœuds composites de taille 1

On commence par prendre pour g l'arbre linéaire $g = \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet$, et on choisit $\theta(g)$ tel que

$$\theta(g) = \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow i_5 \\ \bullet \\ \downarrow i_4 \\ \bullet \\ \downarrow i_3 \\ \bullet \\ \downarrow i_2 \\ \bullet \\ \downarrow i_1 \\ \bullet \end{array} \quad \text{et} \quad \theta(g)^* = \begin{array}{c} \bullet \quad i_2 \quad \bullet \\ \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \bullet \quad i_3 \quad \bullet \\ \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \bullet \quad i_4 \quad \bullet \\ \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \bullet \quad i_5 \quad \bullet \end{array} \quad (6.129)$$

La définition (6.38) de $W_\varphi^{\eta,\xi}(g)$ donne

$$\begin{aligned}
 W_\varphi^{\eta,\xi}(g) &= \sum_{i_1 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{i_5 \in \mathbb{Z}} U_{\varphi,\eta} \left(\begin{array}{c} \bullet \quad i_2 \quad \bullet \\ \quad \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad i_3 \quad \bullet \\ \quad \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad i_4 \quad \bullet \\ \quad \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad i_5 \quad \bullet \end{array} \right) \times V_\xi \left(\begin{array}{c} \circ \\ \downarrow i_5 \\ \bullet \\ \downarrow i_4 \\ \bullet \\ \downarrow i_3 \\ \bullet \\ \downarrow i_2 \\ \bullet \\ \downarrow i_1 \\ \bullet \end{array} \right) \\
 &= \sum_{i_1 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{i_5 \in \mathbb{Z}} \varphi\eta(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, -i_5 - i_4 - i_3 - i_2 - i_1) \\
 &\quad \times \xi(i_1, i_1 + i_2, i_1 + i_2 + i_3, i_1 + i_2 + i_3 + i_4, i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5) ,
 \end{aligned} \tag{6.130}$$

où on a utilisé les notations

$$\varphi\eta(a_1, \dots, a_l) \equiv (\varphi(a_1) + \dots + \varphi(a_l)) \times \eta(a_1) \times \dots \times \eta(a_l) \tag{6.131}$$

$$\xi(b_1, \dots, b_m) \equiv \xi(b_1) \times \dots \times \xi(b_m) , \tag{6.132}$$

pour alléger les expressions. On va effectuer dans l'expression de $W_\varphi^{\eta,\xi}(g)$ la suite de changements de variables suivante :

$$\begin{aligned}
 i_5 &\rightarrow -i_1 - i_2 - i_3 - i_4 + i_5 , & i_4 &\rightarrow -i_1 - i_2 - i_3 + i_4 , \\
 i_3 &\rightarrow -i_1 - i_2 + i_3 , & \text{et} & i_2 &\rightarrow -i_1 + i_2 .
 \end{aligned} \tag{6.133}$$

Le premier changement de variables $i_5 \rightarrow -i_1 - i_2 - i_3 - i_4 + i_5$ donne

$$\begin{aligned}
 W_\varphi^{\eta,\xi}(g) &= \sum_{i_1 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{i_5 \in \mathbb{Z}} \varphi\eta(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 - i_4 - i_3 - i_2 - i_1, -i_5) \\
 &\quad \times \xi(i_1, i_1 + i_2, i_1 + i_2 + i_3, i_1 + i_2 + i_3 + i_4, i_5) \\
 &= \sum_{i_1 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{i_5 \in \mathbb{Z}} U_{\varphi,\eta} \left(\begin{array}{c} \circ \\ \downarrow i_5 \\ \bullet \quad i_1 \quad \bullet \\ \quad \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad i_2 \quad \bullet \\ \quad \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad i_3 \quad \bullet \\ \quad \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad i_4 \quad \bullet \end{array} \right) V_\xi \left(\begin{array}{c} \circ \\ \downarrow i_5 \\ \bullet \quad i_4 \quad \bullet \\ \quad \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad i_3 \quad \bullet \\ \quad \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad i_2 \quad \bullet \\ \quad \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad i_1 \quad \bullet \end{array} \right) .
 \end{aligned} \tag{6.134}$$

Le deuxième changement de variables $i_4 \rightarrow -i_1 - i_2 - i_3 + i_4$ conduit ensuite à l'expression

$$\begin{aligned}
 W_\varphi^{\eta,\xi}(g) &= \sum_{i_1 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{i_5 \in \mathbb{Z}} \varphi\eta(i_1, i_2, i_3, i_4 - i_3 - i_2 - i_1, i_5 - i_4, -i_5) \xi(i_1, i_1 + i_2, i_1 + i_2 + i_3, i_4, i_5) \\
 &= \sum_{i_1 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{i_5 \in \mathbb{Z}} U_{\varphi,\eta} \left(\begin{array}{c} \circ \\ \downarrow i_5 \\ \bullet \quad i_4 \quad \bullet \\ \quad \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad i_1 \quad \bullet \\ \quad \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad i_2 \quad \bullet \\ \quad \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad i_3 \quad \bullet \end{array} \right) V_\xi \left(\begin{array}{c} \circ \\ \downarrow i_4 \\ \bullet \quad i_5 \quad \bullet \\ \quad \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad i_3 \quad \bullet \\ \quad \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad i_2 \quad \bullet \\ \quad \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad i_1 \quad \bullet \end{array} \right) .
 \end{aligned} \tag{6.135}$$

Par le troisième changement de variables $i_3 \rightarrow -i_1 - i_2 + i_3$, on obtient alors

$$\begin{aligned}
 W_\varphi^{\eta,\xi}(g) &= \sum_{i_1 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{i_5 \in \mathbb{Z}} \varphi\eta(i_1, i_2, i_3 - i_2 - i_1, i_4 - i_3, i_5 - i_4, -i_5) \times \xi(i_1, i_1 + i_2, i_3, i_4, i_5) \\
 &= \sum_{i_1 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{i_5 \in \mathbb{Z}} U_{\varphi,\eta} \left(\begin{array}{c} \circ \\ \downarrow i_5 \\ \bullet \quad i_4 \quad \bullet \\ \quad \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad i_3 \quad \bullet \\ \quad \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad i_2 \quad \bullet \\ \quad \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad i_1 \quad \bullet \end{array} \right) V_\xi \left(\begin{array}{c} \circ \\ \downarrow i_4 \\ \bullet \quad i_5 \quad \bullet \\ \quad \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad i_3 \quad \bullet \\ \quad \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad i_2 \quad \bullet \\ \quad \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad i_1 \quad \bullet \end{array} \right) .
 \end{aligned} \tag{6.136}$$

Enfin, le quatrième changement de variables $i_2 \rightarrow -i_1 + i_2$ donne

$$\begin{aligned}
 W_\varphi^{\eta,\xi}(g) &= \sum_{i_1 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{i_5 \in \mathbb{Z}} \varphi\eta(i_1, i_2 - i_1, i_3 - i_2, i_4 - i_3, i_5 - i_4, -i_5) \times \xi(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5) \\
 &= \sum_{i_1 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{i_5 \in \mathbb{Z}} U_{\varphi,\eta} \left(\begin{array}{c} \circ \\ i_5 \\ \bullet \\ i_4 \\ \bullet \\ i_3 \\ \bullet \\ i_2 \\ \bullet \\ i_1 \end{array} \right) V_\xi \left(\begin{array}{c} i_2 \quad i_1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ i_3 \quad i_5 \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ i_4 \end{array} \right), \quad (6.137)
 \end{aligned}$$

qui est l'expression correspondant à la définition (6.37) de $W_\varphi^{\eta,\xi}(g)$.

On constate qu'à chaque étape, on retrouve la partie « haute » de l'arbre g (partant de i_5) dans l'arbre de gauche, et la partie « basse » de l'arbre g (partant de i_1) dans l'arbre de droite. A chaque étape, on détruit le haut de l'arbre de droite et on le reconstruit dans l'arbre de gauche : la structure complète de g est donc préservée entre les deux arbres.

On peut facilement étendre la preuve précédente pour l'arbre g à tous les arbres linéaires de taille quelconque. L'introduction de nœuds composites de taille strictement supérieure à 1 ne pose pas de problème si l'on choisit $\theta(g)$ de telle sorte que la structure en arbre des nœuds composites soit linéaire.

6.A.c Exemple 2 : arbre ramifié avec des nœuds composites de taille > 1

On considère maintenant l'exemple des arbres g , $\theta(g)$ et $\theta(g)^*$ suivants :

$$g = \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array}, \quad \theta(g) = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \circ \\ i_1 \quad i_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ i_3 \quad i_4 \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ i_5 \quad i_6 \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ i_7 \quad i_8 \end{array} \end{array} \quad \text{et} \quad \theta(g)^* = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \circ \\ i_1 \quad i_2 \quad i_5 \quad i_6 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ i_3 \quad i_4 \quad i_7 \quad i_8 \end{array} \end{array}. \quad (6.138)$$

Partant de

$$\begin{aligned}
 W_\varphi^{\eta,\xi}(g) &= \sum_{i_1 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{i_8 \in \mathbb{Z}} U_{\varphi,\eta} \left(\begin{array}{c} \circ \\ i_1 \quad i_2 \quad i_5 \quad i_6 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ i_3 \quad i_4 \quad i_7 \quad i_8 \end{array} \right) V_\xi \left(\begin{array}{c} i_1 \quad i_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ i_3 \quad i_4 \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ i_5 \quad i_6 \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ i_7 \quad i_8 \end{array} \right) \\
 &= \varphi\eta(i_1, i_2, i_3, i_4, -i_5, i_6, i_7, -i_8, -i_1 - i_2 - i_3 - i_4 + i_5 - i_6 - i_7 + i_8) \\
 &\quad \xi(i_3, i_7, -i_8, i_4 - i_5 + i_6 + i_7 - i_8), \quad (6.139)
 \end{aligned}$$

on va progressivement détruire le haut de l'arbre de droite tout en le reconstruisant dans l'arbre de gauche, de manière complètement analogue à ce que nous avons fait dans la section précédente pour le cas de l'arbre linéaire. On commence avec le changement de variables $i_1 \rightarrow i_1 - i_3$,

$i_2 \rightarrow i_2 - i_4 + i_5 - i_6 - i_7 + i_8$. On obtient

$$\begin{aligned}
 W_\varphi^{\eta,\xi}(g) &= \varphi\eta(i_1 - i_3, i_2 - i_4 + i_5 - i_6 - i_7 + i_8, i_3, i_4, -i_5, i_6, i_7, -i_8, -i_1 - i_2) \\
 &\quad \times \xi(i_3, i_7, -i_8, i_4 - i_5 + i_6 + i_7 - i_8) \\
 &= \sum_{i_1 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{i_8 \in \mathbb{Z}} U_{\varphi,\eta} \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 1: A tree with root } i_1 \text{ and children } i_3, i_2. \text{ Node } i_2 \text{ has children } i_7, i_4. \text{ Node } i_4 \text{ has children } i_5, i_6. \text{ Node } i_6 \text{ has child } i_8. \end{array} \right) V_\xi \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 2: A tree with root } i_3 \text{ and children } i_7, i_4. \text{ Node } i_4 \text{ has children } i_5, i_6. \text{ Node } i_6 \text{ has child } i_8. \end{array} \right). \quad (6.140)
 \end{aligned}$$

Le changement de variables $i_4 \rightarrow i_4 + i_5 - i_6 - i_7 + i_8$ mène ensuite à

$$\begin{aligned}
 W_\varphi^{\eta,\xi}(g) &= \varphi\eta(i_1 - i_3, i_2 - i_4, i_3, i_4 + i_5 - i_6 - i_7 + i_8, -i_5, i_6, i_7, -i_8, -i_1 - i_2) \xi(i_3, i_7, -i_8, i_4) \\
 &= \sum_{i_1 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{i_8 \in \mathbb{Z}} U_{\varphi,\eta} \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 3: A tree with root } i_1 \text{ and children } i_3, i_2. \text{ Node } i_2 \text{ has children } i_7, i_4. \text{ Node } i_4 \text{ has children } i_5, i_6. \text{ Node } i_6 \text{ has child } i_8. \end{array} \right) V_\xi \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 4: A tree with root } i_3 \text{ and children } i_7, i_4. \text{ Node } i_4 \text{ has children } i_5, i_6. \text{ Node } i_6 \text{ has child } i_8. \end{array} \right). \quad (6.141)
 \end{aligned}$$

On effectue enfin le changement de variables $i_5 \rightarrow i_5 + i_7$, $i_6 \rightarrow i_6 + i_8$, et on obtient

$$\begin{aligned}
 W_\varphi^{\eta,\xi}(g) &= \varphi\eta(i_3, i_1 - i_3, -i_1 - i_2, i_2 - i_4, i_4 + i_5 - i_6, -i_5 - i_7, i_6 + i_8, i_7, -i_8) \xi(i_3, i_4, i_7, -i_8) \\
 &= \sum_{i_1 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{i_8 \in \mathbb{Z}} U_{\varphi,\eta} \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 5: A tree with root } i_1 \text{ and children } i_3, i_2. \text{ Node } i_2 \text{ has children } i_7, i_4. \text{ Node } i_4 \text{ has children } i_5, i_6. \text{ Node } i_6 \text{ has child } i_8. \end{array} \right) V_\xi \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 6: A tree with root } i_3 \text{ and children } i_7, i_4. \text{ Node } i_4 \text{ has children } i_5, i_6. \text{ Node } i_6 \text{ has child } i_8. \end{array} \right). \quad (6.142)
 \end{aligned}$$

On voit que quel que soit l'arbre, la procédure que nous avons présenté pour passer de l'expression (6.38) à l'expression (6.37) de $W_\varphi^{\eta,\xi}(g)$ fonctionne, ce qui prouve l'équivalence entre ces deux expressions. On note que l'on n'a pas besoin à ce stade de prendre la fonction ξ paire. Ceci est uniquement nécessaire si l'on veut que $W_\varphi^{\eta,\xi}(g)$ ne dépende pas de la fonction θ choisie (c.f. appendice 6.B).

6.B Indépendance de $W_\varphi^{\eta,\xi}(g)$ par rapport au choix de la fonction θ

On prouve dans cet appendice que la fonction $W_\varphi^{\eta,\xi}$ définie en (6.37) et (6.38) est indépendante du choix de la fonction θ qui transforme les arbres de $\mathcal{G}$ en arbres de $\tilde{\mathcal{G}}$ dès lors que la fonction ξ est paire. On doit pour cela montrer que pour $g \in \mathcal{G}$, $W_\varphi^{\eta,\xi}(g)$ est indépendant du choix de l'étiquetage et de la direction des arêtes de $\theta(g)$, de la position de la racine dans $\theta(g)$, et enfin de la structure interne en arbre des nœuds composites de $\theta(g)$. On va voir que chacune de ces propriétés est facilement visible sur l'une ou l'autre des deux définitions (6.37) et (6.38) de $W_\varphi^{\eta,\xi}(g)$, dont l'équivalence est prouvée dans l'appendice 6.A.

On commence avec l'indépendance de $W_\varphi^{\eta,\xi}(g)$ par rapport au choix de l'étiquetage des arêtes de $\theta(g)$. Permuter les indices qui étiquettent les arêtes de $\theta(g)$ dans (6.37) ou (6.38) revient à effectuer une permutation des indices i_j dans $U_{\varphi,\eta}(\theta(g))V_\xi(\theta(g)^*)$ ou $U_{\varphi,\eta}(\theta(g)^*)V_\xi(\theta(g))$. La sommation sur les i_j implique alors que $W_\varphi^{\eta,\xi}(g)$ reste inchangé par la permutation des étiquettes des arêtes.

On continue avec l'indépendance par rapport au choix des direction des arêtes. Retourner

la direction de l'arête étiquetée par i_j revient à remplacer i_j par $-i_j$ dans $U_{\varphi,\eta}(\theta(g))V_{\xi}(\theta(g)^*)$ et $U_{\varphi,\eta}(\theta(g)^*)V_{\xi}(\theta(g))$. Là encore, la somme sur les i_j qui figure dans la définition de $W_{\varphi}^{\eta,\xi}(g)$ assure l'indépendance par rapport au choix de la direction des arêtes dans $\theta(g)$.

On passe maintenant à l'indépendance par rapport à la position de la racine de $\theta(g)$. Il est alors utile de considérer plutôt la définition (6.37) de $W_{\varphi}^{\eta,\xi}(g)$. Par définition, $U_{\varphi,\eta}(\theta(g))$ ne dépend pas de la position de la racine dans $\theta(g)$. Par contre, $V_{\xi}(\theta(g)^*)$ en dépend : suivant la position de la racine de $\theta(g)$, l'orientation de certaines des arêtes de $\theta(g)^*$ peut en effet être modifiée. Cela correspond à changer certains des i_j qui interviennent dans $V_{\xi}(\theta(g)^*)$ en $-i_j$. Mais, cette transformation de certains i_j en $-i_j$ a seulement lieu dans $V_{\xi}(\theta(g)^*)$ et pas dans $U_{\varphi,\eta}(\theta(g))$. On ne peut donc pas utiliser la somme sur les indices i_j pour conclure. On est obligé d'utiliser la remarque suivante : le facteur $V_{\xi}(\theta(g)^*)$ ne dépend des indices i_j qu'à travers $\xi(i_j)$ (il n'y a pas de combinaisons linéaires d'indices i_j quand V_{ξ} est appliqué à l'arbre $\theta(g)^*$). Les transformations de $V_{\xi}(\theta(g)^*)$ résultant de la modification de la position de la racine de $\theta(g)$ reviennent donc à modifier des facteurs $\xi(i_j)$ en $\xi(-i_j)$. Il est donc crucial que la fonction ξ soit paire pour que l'indépendance de $W_{\varphi}^{\eta,\xi}(g)$ par rapport à la position de la racine de $\theta(g)$ soit vérifiée.

Il reste enfin à montrer l'indépendance de $W_{\varphi}^{\eta,\xi}(g)$ par rapport à la manière dont θ choisit la structure interne en arbre des nœuds composites. Pour cela, on va utiliser (6.38). Par définition, $V_{\xi}(\theta(g))$ ne dépend pas de la structure interne des nœuds composites de g (mais dépend cependant de l'orientation des arêtes dans cette structure interne). L'arbre $\theta(g)^*$ ne dépend pas non plus de la structure interne des nœuds composites de g . On en conclut donc que $W_{\varphi}^{\eta,\xi}$ est indépendant du choix de la structure interne en arbre des nœuds composites de $\theta(g)$.

On a finalement prouvé que $W_{\varphi}^{\eta,\xi}(g)$ est indépendant du choix de la fonction θ . Le fait que l'on doive pour cela avoir une fonction ξ paire est uniquement une conséquence de l'indépendance par rapport au choix de la racine de $\theta(g)$.

6.C Dérivation de l'expression explicite de $E(\gamma)$

On démontre dans cet appendice que l'expression explicite (6.117) de la fonction génératrice des cumulants du courant $E(\gamma)$, qui s'exprime comme une somme sur des forêts, est une conséquence de l'expression paramétrique (6.65) et (6.68) de $E(\gamma)$ faisant intervenir des sommes sur des arbres.

6.C.a Élimination de B_{λ} dans l'expression paramétrique de $E(\gamma)$

Les équations (6.65) et (6.68) expriment respectivement γ et $E(\gamma)$ comme des séries formelles en un paramètre B_{λ} , que l'on notera B dans cet appendice pour alléger les notations. Ces équations sont de la forme

$$\gamma = f(B) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k B^k, \quad (6.143)$$

et

$$\frac{E(\gamma) - J\gamma}{p} = g(B) = \sum_{k=2}^{\infty} g_k B^k. \quad (6.144)$$

On veut inverser la relation (6.143) pour obtenir une expression de B en fonction de γ , et insérer ensuite cette expression dans (6.144) pour obtenir une expression explicite en γ de $E(\gamma)$. L'inversion de la relation (6.143) entre B et γ peut être effectuée en utilisant la formule d'inversion de Lagrange [78, 79]. Celle-ci implique que, pour toute série formelle g (et en particulier celle définie en (6.144)), on a

$$[g(B)]_{(\gamma^r)} = \frac{1}{r} \left[\frac{g'(B)}{f(B)^r} \right]_{(B^{-1})}, \quad (6.145)$$

où $[\dots]_{(\gamma^r)}$ et $[\dots]_{(B^{-1})}$ désignent respectivement le coefficient du terme en γ^r et celui du terme en B^{-1} de l'expression désignée par $\dots$. Utilisant le développement (6.144) de $g(B)$ en puissances de B , on obtient

$$[g(B)]_{(\gamma^r)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k \times g_k}{r} \left[\frac{B^{k-1}}{f(B)^r} \right]_{(B^{-1})} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k \times g_k}{r} \left[\frac{1}{f(B)^r} \right]_{(B^{-k})}. \quad (6.146)$$

D'après (6.144), on trouve donc pour $E(\gamma)$

$$\frac{E(\gamma) - J\gamma}{p} = g(B) = \sum_{r=2}^{\infty} [g(B)]_{(\gamma^r)} \gamma^r = \sum_{r=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k \times g_k}{r} \left[\frac{1}{f(B)^r} \right]_{(B^{-k})} \gamma^r. \quad (6.147)$$

On a donc besoin de développer $f(B)^{-r}$ en puissances de B pour r entier strictement positif. Par le théorème du multinôme (pour un exposant négatif), on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(B)^r} &= \frac{1}{(f_1 B)^r \left(1 + \frac{f_2}{f_1} B + \frac{f_3}{f_1} B^2 + \dots \right)^r} \\ &= (f_1 B)^{-r} \sum_{b_1, b_2, \dots \in \mathbb{N}} \binom{r-1+b_1+b_2+\dots}{r-1, b_1, b_2, \dots} \prod_{j=1}^{\infty} \left(-\frac{f_{j+1} B^j}{f_1} \right)^{b_j}. \end{aligned} \quad (6.148)$$

Le terme en B^{-k} de $f(B)^{-r}$ est alors

$$\left[\frac{1}{f(B)^r} \right]_{(B^{-k})} = (f_1)^{-r} \sum_{\substack{b_1, b_2, \dots \in \mathbb{N} \\ b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \dots = r-k}} \frac{(r-1+b_1+b_2+\dots)!}{(r-1)!} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{b_j!} \left(-\frac{f_{j+1}}{f_1} \right)^{b_j}, \quad (6.149)$$

et on trouve pour $E(\gamma)$ (en décalant k de 1)

$$\frac{E(\gamma) - J\gamma}{p} = \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\frac{\gamma}{f_1} \right)^r \sum_{k=1}^{r-1} (k+1) g_{k+1} \sum_{\substack{b_1, b_2, \dots \in \mathbb{N} \\ b_1 + 2b_2 + \dots = r-k-1}} (r-1+b_1+b_2+\dots)! \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{b_j!} \left(-\frac{f_{j+1}}{f_1} \right)^{b_j}. \quad (6.150)$$

On doit maintenant remplacer dans l'équation précédente les coefficients f_j et g_{k+1} par leurs valeurs respectives données par (6.65) et (6.68). On a en particulier $f_1 = -1/L$. On trouve alors, en rassemblant les puissances de 2 :

$$\begin{aligned} \frac{E(\gamma) - J\gamma}{p} &= \frac{2(1-x)}{L(L-1)} \sum_{r=2}^{\infty} \left(-\frac{L\gamma}{2} \right)^r \sum_{k=1}^{r-1} \frac{k+1}{r!} \left(\sum_{g \in \mathcal{G}_{k+1}} \frac{W_{z \mapsto z^2}^{\eta, \xi_\lambda}(g)}{S_t(g)} \right) \\ &\quad \times \sum_{\substack{b_1, b_2, \dots \in \mathbb{N} \\ b_1 + 2b_2 + \dots = r-k-1}} \frac{(r-1+b_1+b_2+\dots)!}{\prod_{j=1}^{\infty} (-1)^{b_j} b_j!} \prod_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{g \in \mathcal{G}_{j+1}} \frac{W_{z \mapsto 1}^{\eta, \xi_\lambda}(g)}{S_t(g)} \right)^{b_j}. \end{aligned} \quad (6.151)$$

6.C.b Expression de $E(\gamma)$ comme une somme sur des forêts

L'équation (6.151) fait intervenir une somme sur b_1 arbres de taille 2, $\dots$, b_{k-1} arbres de taille k , $1+b_k$ arbres de taille $k+1$, b_{k+1} arbres de taille $k+2$, $\dots$. On note f le m -uplet (ensemble ordonné de m arbres) formé par ces arbres, ordonnés par taille croissante. On a $m = \sum_{j=1}^{\infty} (b_j + \delta_{j,k})$. Dans l'équation (6.151), on somme donc sur tous les m -uplets d'arbres f tels que les b_1 premiers arbres de f soient de taille 2, les b_2 suivants de taille 3, $\dots$. On peut

remplacer la somme sur les m -uplets f par une somme sur des forêts h contenant b_1 arbres de taille 2, ..., b_{k-1} arbres de taille k , $1 + b_k$ arbres de taille $k + 1$, b_{k+1} arbres de taille $k + 2$, ... Il faut pour cela tenir compte du fait que plusieurs m -uplets d'arbres vont correspondre à la même forêt : deux m -uplets correspondent à une même forêt si et seulement si ils sont constitués des mêmes arbres mais arrangés dans un ordre différent. On considère l'action sur l'ensemble des m -uplets d'arbres f du sous-groupe du groupe des permutations à m éléments gardant les tailles des arbres ordonnées de manière croissante dans les m -uplets. Le nombre de m -uplets d'arbres correspondant à la même forêt qu'un m -uplet f donné est égal au cardinal de l'orbite de f sous cette action de groupe. La formule des classes appliquée au m -uplet f correspondant à la forêt h donne alors

$$\text{card Orb}(f) = \frac{\prod_{j=1}^{\infty} (b_j + \delta_{j,k})!}{P_f(h)}, \quad (6.152)$$

où le produit des factorielles des $b_j + \delta_{j,k}$ est le cardinal du groupe des permutations laissant les tailles des arbres ordonnées dans le m -uplet f , tandis que $P_f(h)$, défini juste après (6.106), est égal au cardinal du stabilisateur de f sous l'action de groupe. Notant g_0 l'un des arbres de taille $k + 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{E(\gamma) - J\gamma}{p} &= \frac{2(1-x)}{L(L-1)} \sum_{r=2}^{\infty} \left(-\frac{L\gamma}{2}\right)^r \sum_{k=1}^{r-1} \frac{k+1}{r!} \left(\sum_{g \in \mathcal{G}_{k+1}} \frac{W_{z \mapsto z^2}^{\eta, \xi_\lambda}(g)}{S_t(g)} \right) \\ &\quad \times \sum_{\substack{b_1, b_2, \dots \in \mathbb{N} \\ b_1 + 2b_2 + \dots = r - k - 1}} \frac{(b_k + 1)(r - 1 + b_1 + b_2 + \dots)!}{\prod_{j=1}^{\infty} (-1)^{b_j}} \\ &\quad \times \sum_{\substack{h \in \mathcal{H}, \\ \forall j \text{ } b_j + \delta_{j,k} \text{ arbres} \\ \text{de taille } j+1}} \frac{1}{P_f(h)} \frac{W_{z \mapsto z^2}^{\eta, \xi_\lambda}(g_0)}{S_t(g_0)} \prod_{\substack{g \in h \\ |g|=k+1 \\ \text{et } g \neq g_0}} \frac{W_{z \mapsto 1}^{\eta, \xi_\lambda}(g)}{S_t(g)} \prod_{\substack{g \in h \\ |g| \neq k+1}} \frac{W_{z \mapsto 1}^{\eta, \xi_\lambda}(g)}{S_t(g)}. \end{aligned} \quad (6.153)$$

On veut maintenant rassembler $W_{z \mapsto z^2}^{\eta, \xi_\lambda}(g_0)$ avec le produit pour g de taille $k + 1$ ($g \neq g_0$) des $W_{z \mapsto 1}^{\eta, \xi_\lambda}(g)$. On utilise le fait que, par la définition (6.105) de $W_\varphi^{\eta, \xi}$ sur les forêts, on a

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{h = \{g_0, \dots, g_{b_k}\} \in \mathcal{H} \\ |g_0| = \dots = |g_{b_k}| = k+1}} \frac{W_{z \mapsto z^2}^{\eta, \xi}(g_0)}{S_t(g_0)} \frac{W_{z \mapsto 1}^{\eta, \xi}(g_1)}{S_t(g_1)} \dots \frac{W_{z \mapsto 1}^{\eta, \xi}(g_{b_k})}{S_t(g_{b_k})} \\ &= \sum_{i_1^{(0)}, \dots, i_k^{(0)} \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{i_1^{(b_k)}, \dots, i_k^{(b_k)} \in \mathbb{Z}} \frac{(k+1)^{b_k}}{b_k + 1} \left(\left(i_1^{(0)}\right)^2 + \dots + \left(i_k^{(0)}\right)^2 + \left(-i_1^{(0)} - \dots - i_k^{(0)}\right)^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(i_1^{(b_k)}\right)^2 + \dots + \left(i_k^{(b_k)}\right)^2 + \left(-i_1^{(b_k)} - \dots - i_k^{(b_k)}\right)^2 \right) \\ &\quad \times \eta\left(i_1^{(0)}\right) \dots \eta\left(i_k^{(0)}\right) \dots \eta\left(i_1^{(b_k)}\right) \dots \eta\left(i_k^{(b_k)}\right) \times \sum_{\substack{h = \{g_0, \dots, g_{b_k}\} \in \mathcal{H} \\ |g_0| = \dots = |g_{b_k}|}} \frac{V_\xi(\theta(g_0))}{S_t(g_0)} \dots \frac{V_\xi(\theta(g_{b_k}))}{S_t(g_{b_k})} \\ &= \frac{(k+1)^{b_k}}{b_k + 1} \frac{W_{z \mapsto z^2}^{\eta, \xi}(\{g_0, \dots, g_{b_k}\})}{S_t(g_0) \times \dots \times S_t(g_{b_k})}, \end{aligned} \quad (6.154)$$

avec la notation $\{g_0, \dots, g_{b_k}\}$ pour la forêt composée des arbres $g_0, \dots, g_{b_k}$. Le facteur $(k+1)^{b_k}$ est le produit des facteurs $k+1$ de tous les $W_{z \mapsto 1}^{\eta, \xi_\lambda}(g_j)$, tandis que le facteur $1/(b_k + 1)$ provient

de la symétrisation de $z \mapsto z^2$ sur tous les arbres de la forêt $\{g_0, \dots, g_{b_k}\}$. On obtient donc :

$$\begin{aligned} \frac{E(\gamma) - J\gamma}{p} &= \frac{2(1-x)}{L(L-1)} \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(-\frac{L\gamma}{2}\right)^r \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{\substack{b_1, b_2, \dots \in \mathbb{N} \\ b_1 + 2b_2 + \dots = r-k-1}} \frac{(k+1)^{b_k+1} \times (r-1+b_1+b_2+\dots)!}{\prod_{j=1}^{\infty} (-1)^{b_j}} \\ &\quad \times \frac{W_{z \mapsto z^2}^{\eta, \xi_\lambda}(\{g \in h, |g| = k+1\}) \times \prod_{\substack{g \in h \\ |g| \neq k+1}} W_{z \mapsto 1}^{\eta, \xi_\lambda}(g)}{P_f(h) \prod_{g \in h} S_t(g)} \times \\ &\quad \times \sum_{\substack{h \in \mathcal{H}, \\ \forall j \ b_j + \delta_{j,k} \text{ arbres} \\ \text{de taille } j+1}} \end{aligned} \quad (6.155)$$

On va maintenant transformer b_k+1 en b_k de sorte que pour tout j , on ait exactement b_j arbres de taille $j+1$ (même pour $j=k$). On peut alors faire rentrer la somme sur k à l'intérieur de la somme sur les forêts. On obtient

$$\begin{aligned} \frac{E(\gamma) - J\gamma}{p} &= \frac{2(1-x)}{L(L-1)} \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(-\frac{L\gamma}{2}\right)^r \times \sum_{\substack{b_1, b_2, \dots \in \mathbb{N} \\ b_1 + 2b_2 + \dots = r-1}} \frac{(r-2+b_1+b_2+\dots)!}{(-1) \times \prod_{j=1}^{\infty} (-1)^{b_j}} \\ &\quad \times \sum_{k=1}^{r-1} \mathbb{1}_{b_k > 0} \times (k+1)^{b_k} \times W_{z \mapsto z^2}^{\eta, \xi_\lambda}(\{g \in h, |g| = k+1\}) \times \prod_{\substack{g \in h \\ |g| \neq k+1}} W_{z \mapsto 1}^{\eta, \xi_\lambda}(g) \\ &\quad \times \sum_{\substack{h \in \mathcal{H}, \\ \forall j \ b_j \text{ arbres} \\ \text{de taille } j+1}} \frac{P_f(h) \prod_{g \in h} S_t(g)}{\prod_{j=1}^{\infty} (j+1)^{b_j}} \times W_{z \mapsto 1}^{\eta, \xi_\lambda}(\{g \in h\}) . \end{aligned} \quad (6.156)$$

Le nombre d'arbres dans la forêt $\{g \in h, |g| = k+1\}$ étant égal à b_k , $W_{z \mapsto z^2}^{\eta, \xi_\lambda}(\{g \in h, |g| = k+1\})$ est nul si $b_k = 0$. La contrainte $\mathbb{1}_{b_k > 0}$ peut donc être oubliée. Par définition de $W_\varphi^{\eta, \xi}$ pour des arbres et des forêts, on a alors

$$\sum_{k=1}^{r-1} (k+1)^{b_k} \times W_{z \mapsto z^2}^{\eta, \xi_\lambda}(\{g \in h, |g| = k+1\}) \prod_{\substack{g \in h \\ |g| \neq k+1}} W_{z \mapsto 1}^{\eta, \xi_\lambda}(g) = \left(\prod_{j=1}^{\infty} (j+1)^{b_j} \right) W_{z \mapsto 1}^{\eta, \xi_\lambda}(\{g \in h\}) . \quad (6.157)$$

Pour $j \neq k$, le facteur $(j+1)^{b_j}$ provient des $W_{z \mapsto 1}^{\eta, \xi_\lambda}(g)$ pour g l'un des b_j arbres de taille $j+1$. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{E(\gamma) - J\gamma}{p} &= \\ &= -\frac{2(1-x)}{L(L-1)} \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(-\frac{L\gamma}{2}\right)^r \sum_{\substack{b_1, b_2, \dots \in \mathbb{N} \\ b_1 + 2b_2 + \dots = r-1}} \sum_{\substack{h \in \mathcal{H}, \\ \forall j \ b_j \text{ arbres} \\ \text{de taille } j+1}} \frac{W_{z \mapsto z^2}^{\eta, \xi_\lambda}(h)}{\frac{P_f(h)}{(r-2+b_1+b_2+\dots)!} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{b_j}}{(j+1)^{b_j}} \prod_{g \in h} S_t(g)} . \end{aligned} \quad (6.158)$$

On note que $r-1 = b_1 + 2b_2 + \dots$ est égal à $|h| - \bar{h}$ et que $b_1 + b_2 + \dots$ est égal au nombre $\bar{h}$ d'arbres de h . Ceci implique que $(r-2+b_1+b_2+\dots)!$ est égal à $(|h|-1)!$. On note aussi que les $j+1$ sont les tailles des arbres $g \in h$. On peut écrire

$$\frac{P_f(h)}{(r-2+b_1+b_2+\dots)!} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{b_j}}{(j+1)^{b_j}} \prod_{g \in h} S_t(g) = \frac{P_f(h)(-1)^{\bar{h}}}{(|h|-1)!} \prod_{g \in h} \frac{S_t(g)}{|g|} = S_f(h) . \quad (6.159)$$

On a retrouvé le facteur de symétrie de la forêt h défini en (6.106). On peut enlever la somme sur les b_j et sommer directement sur toutes les forêts $h \in \mathcal{H}_{r-1}$. On obtient finalement l'expression explicite (6.117) de $E(\gamma)$:

$$\frac{E(\gamma) - J\gamma}{p} = -\frac{2(1-x)}{L(L-1)} \sum_{r=2}^{\infty} \frac{(-1)^r L^r \gamma^r}{2^r r!} \sum_{h \in \mathcal{H}_{r-1}} \frac{W_{z \mapsto z^2}^{\eta, \xi_\lambda}(h)}{S_f(h)}. \quad (6.160)$$

Troisième partie

Modèle d'exclusion asymétrique à plusieurs classes de particules

Chapitre 7

Le modèle d'exclusion asymétrique à plusieurs classes de particules

Dans ce chapitre, nous présentons le modèle d'exclusion asymétrique à plusieurs classes de particules, qui généralise le modèle d'exclusion que nous avons étudié dans les deux premières parties de cette thèse. Nous montrons ensuite que le modèle à plusieurs classes de particules intervient naturellement dans la méthode de couplage de plusieurs modèles d'exclusion, et qu'il est utile pour l'étude des discontinuités du profil de densité. Enfin, nous verrons que la mesure stationnaire du modèle à plusieurs classes de particules diffère considérablement de la mesure uniforme du modèle à une classe de particules.

7.1 Définition du modèle

Une extension particulièrement importante du modèle d'exclusion asymétrique défini au chapitre 1 consiste à introduire plusieurs classes de particules dans le système, avec une dynamique hiérarchique entre les particules de différentes classes. Dans la suite, on utilisera de manière interchangeable les termes de *classe*, *espèce*, ou *type* de particule. On considérera essentiellement le cas du modèle à N espèces de particules avec des conditions aux bords périodiques.

On considère un anneau de L sites, sur lesquels on place n_1 particules de première espèce, n_2 particules de seconde espèce, $\dots$, et n_N particules de N -ième espèce, avec au plus une particule par site. On appellera $n_0 = L - n_1 - \dots - n_N$ le nombre de sites vides. Un site i du système possède maintenant $N + 1$ états possibles : il peut être occupé par une particule de type k compris entre 1 et N , ce que l'on notera par la valeur $\tau_i = k$ de la variable d'occupation τ_i associée au site i , ou bien il peut être vide, ce que l'on notera par $\tau_i = 0$. L'ensemble Ω des configurations du système correspond au nombre de façons possibles de placer toutes les particules sur l'anneau. Son cardinal est égal au coefficient du multinôme

$$|\Omega| = \binom{L}{n_0, n_1, \dots, n_{N-1}, n_N} = \frac{L!}{n_0! n_1! \dots n_{N-1}! n_N!}. \quad (7.1)$$

On définit sur l'ensemble des configurations Ω la dynamique stochastique suivante : une particule de n'importe quelle classe entourée de deux sites vides se déplace d'un site vers l'avant avec un taux p , et d'un site vers l'arrière avec un taux q . Une particule de classe J suivie par une particule de classe différente K s'échangent avec un taux p si $J < K$ et avec un taux q si $K < J$.

On note que par cette dynamique, les sites vides se comportent comme des particules de classe $N + 1$. On pourra donc identifier un site vide à un site occupé par une particule de classe $N + 1$ et noter $\tau_i = N + 1$ au lieu de $\tau_i = 0$ pour la variable d'occupation d'un site vide. La dynamique du modèle d'exclusion à N espèces de particules peut finalement être écrite sous la

forme

$$JK \rightarrow KJ \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{avec un taux } p \text{ si } J < K \\ \text{avec un taux } q \text{ si } J > K \end{array} \right., \quad (7.2)$$

où $J \in \llbracket 0, N+1 \rrbracket$ et $K \in \llbracket 0, N+1 \rrbracket$ représentent les variables d'occupation respectives d'un site i et du site suivant $i+1$.

Pour $N = 1$, on retrouve le modèle d'exclusion défini au chapitre 1, qui comporte une seule classe de particules.

L'un des intérêts du modèle à N classes de particules est qu'il reste exactement soluble, comme nous le verrons au chapitre 9. Dans la suite de ce chapitre, nous allons voir d'autres justifications de l'intérêt de ce modèle, reliées à la méthode de couplage entre deux modèles d'exclusion et à l'étude des chocs dans le modèle à une classe de particules.

7.2 Couplage entre deux modèles d'exclusion

La méthode du couplage entre deux modèles d'exclusion à une classe de particules (voir par exemple le livre [9] de Liggett) a été introduite pour étudier la propagation d'un excès local de particules en un point du système. Comme nous allons le voir, elle conduit naturellement à l'introduction des modèles à plusieurs classes de particules.

On considère deux systèmes $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ de L sites avec respectivement n et $n' > n$ particules. À l'instant initial, on part de configurations de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ telles que pour chaque site i de $\mathcal{S}$ contenant une particule, le site i correspondant de $\mathcal{S}'$ contient aussi une particule. Une configuration initiale possible des deux systèmes est par exemple

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \bullet & & & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \hline \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \mathcal{S} \\ \mathcal{S}' \end{array}. \quad (7.3)$$

Le système $\mathcal{S}$ évolue ensuite par la dynamique habituelle du modèle d'exclusion asymétrique : les particules se déplacent d'un site vers la droite avec un taux p , et d'un site vers la gauche avec un taux q . On impose alors au système $\mathcal{S}'$ de « suivre » la dynamique du système $\mathcal{S}$: pour chaque mouvement d'une particule entre les sites i et $i+1$ dans le système $\mathcal{S}$, on échange aussi le contenu des sites i et $i+1$ du système $\mathcal{S}'$. On a ainsi couplé les deux systèmes. Pour deux sites voisins i et $i+1$ dans $\mathcal{S}$ et dans $\mathcal{S}'$, on a alors les neuf configurations suivantes (les sites i et $i+1$ de $\mathcal{S}$ sont sur la ligne du haut ; les sites i et $i+1$ de $\mathcal{S}'$ sont sur la ligne du bas) :

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array} & \xrightleftharpoons[p]{p} & \begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \times \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array} & \xrightleftharpoons[p]{p} & \begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \bullet \bullet \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \bullet \bullet \\ \hline \end{array} & \xrightleftharpoons[p]{p} & \begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \bullet \bullet \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \bullet \bullet \\ \hline \bullet \bullet \\ \hline \end{array} \end{array}. \quad (7.4)$$

On note que la dynamique préserve le fait que les sites i occupés du système $\mathcal{S}$ correspondent à des sites occupés pour le système $\mathcal{S}'$.

La dynamique du système $\mathcal{S}'$, qui a pour le moment été définie à partir de celle du système $\mathcal{S}$, est en fait la dynamique du modèle d'exclusion asymétrique pour un système de n' particules sur L sites. On a donc deux systèmes qui évoluent, de manière couplée, selon la dynamique du modèle d'exclusion. Cette propriété permet alors d'étudier certaines propriétés du modèle d'exclusion, en particulier la manière dont se déplace une particule marquée dans le système

(voir par exemple De Masi et Ferrari [147]).

Nous allons maintenant montrer que cette méthode de couplage permet d'introduire naturellement les modèles d'exclusion à plusieurs classes de particules. On appelle τ_i le nombre d'occupation du site i pour le système $\mathcal{S}$ et τ'_i le nombre d'occupation du site i pour le système $\mathcal{S}'$. La paire (τ_i, τ'_i) peut prendre les trois valeurs $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 1)$. On peut voir ces trois valeurs possibles de (τ_i, τ'_i) comme la variable d'occupation au site i du système $\tilde{\mathcal{S}}$ obtenu en identifiant les sites des systèmes $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$. D'après la dynamique (7.4), on constate que ce nouveau système est en fait un système avec deux classes de particules :

τ_i	τ'_i	$\tilde{\tau}_i$		
0	0	0		site vide de $\tilde{\mathcal{S}}$
0	1	1		particule de première classe de $\tilde{\mathcal{S}}$
1	1	2		particule de seconde classe de $\tilde{\mathcal{S}}$

(7.5)

On peut généraliser la construction précédente pour coupler N systèmes. La dynamique qui en résulte sur le système obtenu en identifiant les sites des différents systèmes est celle d'un modèle à N classes de particules.

7.3 Chocs

On considère le modèle d'exclusion totalement asymétrique sur une ligne infinie avec une classe de particules. On identifiera l'ensemble des sites à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. À l'instant initial, chaque site $i \leq 0$ est occupé indépendamment des autres avec une densité ρ_- , tandis que chaque site $i > 0$ est occupé indépendamment des autres avec une densité $\rho_+ > \rho_-$. Le profil de densité du système présente donc une discontinuité, ou « choc », à l'instant initial. Ce choc va ensuite se déplacer dans le système à la vitesse moyenne de [15]

$$v = 1 - \rho_- - \rho_+ . \quad (7.6)$$

Pour étudier les propriétés du choc (diffusion, profil du choc), il est nécessaire de se donner une définition précise de sa position. Une manière pratique de faire cela passe par l'introduction d'une particule de seconde espèce dans le système à la place de l'un des sites vides. L'introduction de cette particule n'a aucun effet sur la dynamique des particules de première espèce, qui la voient comme un site vide. On peut alors montrer que la particule de seconde espèce va tendre à se placer précisément à la position du choc. On peut comprendre cela en se rappelant que par définition, pour le modèle totalement asymétrique, une particule de seconde espèce se déplace vers l'avant lorsqu'elle se trouve entourée de sites vides, et vers l'arrière lorsqu'elle se trouve entourée de particules de première classe. La particule de seconde espèce ne se déplace donc pas à la même vitesse en présence d'une densité ρ_+ de particules qu'en présence d'une densité ρ_- de particules [148, 149].

7.4 Matrice de Markov

L'évolution dans le temps de la probabilité d'observer le système à N classes de particules dans une configuration $\mathcal{C}$ donnée s'obtient par l'équation maîtresse

$$\frac{dP_t(\mathcal{C})}{dt} = \sum_{\mathcal{C}' \neq \mathcal{C}} [w_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}'} P_t(\mathcal{C}') - w_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}} P_t(\mathcal{C})] , \quad (7.7)$$

où les w sont les taux de transition entre les configurations. Formellement, cette équation est la même que l'équation maîtresse (2.1) du chapitre 2 pour le modèle d'exclusion à une seule classe de particules. La différence est que les configurations $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont maintenant des configurations avec N classes de particules, et que les taux de transition w sont donnés par la dynamique (7.2) du modèle à N classes de particules.

Comme pour le modèle à une classe de particules, il est utile d'écrire l'équation maîtresse sous forme matricielle. On introduit pour cela le vecteur probabilité

$$|P_t\rangle = \sum_{\mathcal{C}} P_t(\mathcal{C}) |\mathcal{C}\rangle , \quad (7.8)$$

ainsi que la matrice de Markov M , définie par

$$M_{\mathcal{C}\mathcal{C}'} = \langle \mathcal{C} | M | \mathcal{C}' \rangle = \begin{cases} w_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}'} & \text{si } \mathcal{C} \neq \mathcal{C}' \\ - \sum_{\mathcal{C}'' \neq \mathcal{C}} w_{\mathcal{C}'' \leftarrow \mathcal{C}} & \text{si } \mathcal{C} = \mathcal{C}' \end{cases} . \quad (7.9)$$

En fonction du vecteur probabilité et de la matrice de Markov, l'équation maîtresse (7.7) se réécrit sous la forme matricielle

$$\boxed{\frac{d}{dt} |P_t\rangle = M |P_t\rangle} . \quad (7.10)$$

Pour le modèle sur un anneau, si l'on se restreint aux configurations comportant un nombre donné de particules de chaque classe, alors le modèle possède un unique état stationnaire, qui est le seul état propre de la matrice M de valeur propre nulle. Toutes les autres valeurs propres ont une partie réelle strictement négative.

Partant d'un état initial arbitraire, le système de taille finie relaxe exponentiellement vite vers l'état stationnaire. Comme pour le modèle à une classe de particules, le temps typique τ de relaxation est égal à $1/\text{Re}(E_1)$, où E_1 est la valeur propre non nulle de M de partie réelle maximale. Utilisant le fait que pour tout k compris entre 1 et N , le spectre du modèle comportant $n_1 + \dots + n_k$ particules de première classe et $n_{k+1} + n_{N+1}$ sites vides est inclus dans le spectre du modèle avec n_1 particules de première classe, $\dots$, n_N particules de N -ième classe et n_{N+1} sites vides, Arita, Kuniba, Sakai et Sawabe ont obtenu dans [150] l'expression asymptotique en la taille du système du temps de relaxation τ . Pour le modèle symétrique, ce temps de relaxation est d'ordre $\tau \sim L^2$, tandis que pour le modèle asymétrique, il croît avec L comme $\tau \sim L^{3/2}$. On retrouve les exposants dynamiques $z = 2$ et $z = 3/2$ correspondant respectivement aux équations d'Edwards-Wilkinson et de Kardar-Parisi-Zhang.

7.5 Mesure stationnaire

Le système à N classes de particules sur un anneau atteint aux temps longs un état stationnaire, pour lequel chaque configuration $\mathcal{C}$ a une probabilité $P_\infty(\mathcal{C})$ indépendante de la configuration initiale. Comme pour le modèle à une classe de particules, les probabilités stationnaires peuvent encore être calculées exactement.

Le modèle à deux classes de particules a été résolu par Derrida, Janowski, Lebowitz et Speer

[151] en utilisant un Ansatz matriciel similaire à celui du modèle ouvert à une classe de particules (voir chapitre 8). Pour une configuration $\mathcal{C} = (\tau_1, \dots, \tau_L)$, cet Ansatz matriciel donne les probabilités stationnaires sous la forme

$$P_\infty(\mathcal{C}) = \frac{1}{Z} \text{Tr}[X_{\tau_1} \dots X_{\tau_L}] , \quad (7.11)$$

où les matrices X_0 , X_1 et X_2 vérifient une algèbre qui sera présentée au chapitre 8. Par rapport au modèle ouvert, on note que les vecteurs $\langle W|$ et $|V\rangle$ utilisés pour projeter le produit de matrices ont été remplacés ici par une trace, de manière à obtenir une expression invariante par translation sur l'anneau.

Le modèle totalement asymétrique à 3 classes de particules a ensuite été résolu par Mallick, Mallick et Rajewsky [152] en utilisant encore une fois un Ansatz matriciel de la forme (7.11). Dans ce cas, les quatre matrices X_0 , X_1 , X_2 et X_3 sont en fait des matrices de matrices : les composantes de X_0 , X_1 , X_2 et X_3 sont elles-mêmes des matrices, prises parmi les matrices X_0 , X_1 et X_2 du modèle à deux classes de particules.

Pour le modèle général à N classes de particules sur un anneau, la mesure stationnaire a tout d'abord été obtenue par Ferrari et Martin [153] dans le cas totalement asymétrique. La solution de Ferrari et Martin consiste à construire la mesure stationnaire du modèle d'exclusion à N classes de particules à partir de la mesure uniforme sur un ensemble de N modèles d'exclusion à une seule classe de particules (voir la section 8.3.1 du chapitre 8). Les poids stationnaires pour une configuration $\mathcal{C}$ sont alors donnés par le nombre d'états possibles d'un processus de file d'attente avec des temps d'arrivée spécifiés par la configuration $\mathcal{C}$.

La solution de Ferrari et Martin a été réécrite par Evans, Ferrari et Mallick comme un Ansatz matriciel [154], qui se met aussi sous la forme (7.11), mais avec des matrices X_0 , X_1 , $\dots$, X_N vérifiant une algèbre plus compliquée que dans le cas à deux classes de particules. Avec Martin Evans et Kirone Mallick, nous avons généralisé cet Ansatz matriciel au modèle à N classes de particules avec une asymétrie x arbitraire [5]. Une partie du chapitre 8 est consacrée à cette solution. Il ne semble pas être possible de modifier simplement l'algorithme de Ferrari et Martin pour exprimer la mesure stationnaire du modèle partiellement asymétrique, contrairement à l'Ansatz matriciel, pour lequel le passage du modèle totalement asymétrique au modèle partiellement asymétrique s'obtient par une déformation assez simple de l'algèbre des matrices X_J .

7.6 Fluctuations du courant

Nous allons maintenant montrer que l'étude des fluctuations du courant dans le modèle à N classes de particules se ramène encore une fois au calcul de la valeur propre maximale d'une déformation de la matrice de Markov.

Pour deux classes de particules J et K distinctes ($1 \leq J < K \leq N + 1$), on appelle Y_{JK} le déplacement total (ou courant intégré) associé à l'échange de particules de classe J et K : chaque fois qu'une particule de classe J située en un site i échange sa position avec une particule de classe K située au site $i + 1$, le déplacement total Y_{JK} augmente d'une unité. Inversement, chaque fois qu'une particule de classe K située en un site i échange sa position avec une particule de classe J située au site $i + 1$, le déplacement total Y_{JK} diminue d'une unité.

On note $\{Y\}$ l'ensemble des Y_{JK} pour $1 \leq J < K \leq N + 1$. L'évolution dans le temps de la

probabilité jointe $P_t(\mathcal{C}, \{Y\})$ est alors donnée par l'équation maîtresse

$$\begin{aligned} \frac{dP_t(\mathcal{C}, \{Y\})}{dt} = \sum_{\mathcal{C}' \neq \mathcal{C}} \sum_{1 \leq J < K \leq N+1} & \left[w_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}'}^{(JK)} P_t(\mathcal{C}', \{\dots, Y_{JK} - 1, \dots\}) \right. \\ & \left. + w_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}'}^{(KJ)} P_t(\mathcal{C}', \{\dots, Y_{JK} + 1, \dots\}) - (w_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}}^{(JK)} + w_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}}^{(KJ)}) P_t(\mathcal{C}, \{Y\}) \right] , \end{aligned} \quad (7.12)$$

où $w_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}}^{(JK)}$ est le taux de transition pour passer de la configuration $\mathcal{C}$ à la configuration $\mathcal{C}'$ en échangeant les positions de deux particules de classe J et K située respectivement en des sites i et $i + 1$. L'équation (7.12) couple les probabilités pour différentes valeurs de $\{Y\}$. On définit alors la fonction génératrice de $P_t(\mathcal{C}, \{Y\})$ sur les Y_{JK} :

$$F_t(\mathcal{C}, \{\gamma\}) = \sum_{\{Y\}=-\infty}^{\infty} \left(\prod_{1 \leq J < K \leq N+1} e^{\gamma_{JK} Y_{JK}} \right) P_t(\mathcal{C}, \{Y\}) = \left\langle \prod_{1 \leq J < K \leq N+1} e^{\gamma_{JK} Y_{JK}} \right\rangle , \quad (7.13)$$

où $\langle \dots \rangle$ est la valeur moyenne sur toutes les évolutions conduisant le système dans la configuration $\mathcal{C}$ à l'instant t . La fonction génératrice $F_t(\mathcal{C}, \{\gamma\})$ dépend de l'ensemble $\{\gamma\}$ des γ_{JK} pour $1 \leq J < K \leq N + 1$. L'équation maîtresse (7.12) pour $P_t(\mathcal{C}, \{Y\})$ se réécrit alors sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{dF_t(\mathcal{C}, \{\gamma\})}{dt} = \sum_{\mathcal{C}' \neq \mathcal{C}} \sum_{1 \leq J < K \leq N+1} & \left[e^{\gamma_{JK}} w_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}'}^{(JK)} F_t(\mathcal{C}', \{\gamma\}) + e^{-\gamma_{JK}} w_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}'}^{(KJ)} F_t(\mathcal{C}', \{\gamma\}) \right. \\ & \left. - (w_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}}^{(JK)} + w_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}}^{(KJ)}) F_t(\mathcal{C}, \{\gamma\}) \right] . \end{aligned} \quad (7.14)$$

On note que les $F_t(\mathcal{C}, \{\gamma\})$ pour différentes valeurs de $\{\gamma\}$ se découpent dans l'équation précédente. On peut donc la réécrire sous la forme d'une équation matricielle sur l'espace des configurations du système. En fonction du vecteur

$$|F_t(\{\gamma\})\rangle = \sum_{\mathcal{C}} F_t(\mathcal{C}, \{\gamma\}) |\mathcal{C}\rangle , \quad (7.15)$$

et de la déformation $M(\{\gamma\})$ de la matrice de Markov (7.9), définie par

$$M(\{\gamma\})_{\mathcal{C}\mathcal{C}'} = \begin{cases} e^{\gamma_{JK}} w_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}'}^{(JK)} & \text{si } \mathcal{C} \neq \mathcal{C}', \text{ en avançant une particule de classe } J \\ & \text{et en reculant une particule de classe } K \\ e^{-\gamma_{JK}} w_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}'}^{(KJ)} & \text{si } \mathcal{C} \neq \mathcal{C}', \text{ en avançant une particule de classe } K \\ & \text{et en reculant une particule de classe } J \\ - \sum_{\mathcal{C}'' \neq \mathcal{C}} w_{\mathcal{C}'' \leftarrow \mathcal{C}} & \text{si } \mathcal{C} = \mathcal{C}' \end{cases} , \quad (7.16)$$

l'équation (7.14) se réécrit sous la forme

$$\frac{d}{dt} |F_t(\{\gamma\})\rangle = M(\{\gamma\}) |F_t(\{\gamma\})\rangle . \quad (7.17)$$

Aux temps longs, on obtient finalement

$$\left\langle \prod_{1 \leq J < K \leq N+1} e^{\gamma_{JK} Y_{JK}} \right\rangle \sim e^{E(\{\gamma\})t} , \quad (7.18)$$

où $E(\{\gamma\})$ est la valeur propre maximale de la matrice déformée $M(\{\gamma\})$. Les dérivées successives de l'expression précédente par rapport aux γ_{JK} donnent alors les cumulants du courant du modèle à N classes de particules dans l'état stationnaire. Par abus de langage, on appellera dans la suite $M(\{\gamma\})$ la matrice de Markov déformée du système. Il ne s'agit en fait pas d'une matrice de Markov dès que l'un des γ_{JK} est non nul, car la somme sur $\mathcal{C}$ des $M(\{\gamma\})_{CC'}$ est alors différente de zéro pour certaines configurations $\mathcal{C}'$.

7.7 Intégrabilité

Le modèle d'exclusion asymétrique à plusieurs classes de particules, tout comme le modèle à une seule classe de particules, possède la propriété d'être exactement soluble.

Comme nous l'avons vu dans la première partie de cette thèse, la matrice de Markov déformée $M(\gamma)$ du modèle à une classe de particules peut être diagonalisée en utilisant l'Ansatz de Bethe, dont nous avons présenté la forme en coordonnées au chapitre 3. Nous montrerons au chapitre 9 que la matrice $M(\gamma)$ commute avec une famille infinie de matrices de transfert [18], elles aussi diagonalisables par Ansatz de Bethe, ce qui met en évidence l'intégrabilité du modèle d'exclusion. Nous présenterons ensuite la formulation algébrique de l'Ansatz de Bethe, qui est bien adaptée pour la diagonalisation de ces matrices de transfert, et qui consiste à construire les vecteurs propres en appliquant des opérateurs de création sur un vecteur de base.

Dans la deuxième moitié du chapitre 9, nous généraliserons les résultats précédents au modèle à N classes de particules. Nous verrons en particulier que la matrice de Markov déformée $M(\{\gamma\})$ commute elle aussi avec une famille infinie de matrices de transfert [155, 156, 89], et nous présenterons l'Ansatz de Bethe algébrique permettant de déterminer ses états propres. Il s'agira d'un « Ansatz de Bethe emboîté », qui construit en N étapes successives les vecteurs propres de $M(\{\gamma\})$ en ajoutant une à une les différentes classes de particules à un état fondamental pour lequel tous les sites sont vides.

Chapitre 8

Mesure stationnaire du modèle d'exclusion asymétrique

Ce chapitre est consacré au calcul des probabilités stationnaires dans le modèle d'exclusion asymétrique, et plus précisément à l'utilisation de l'Ansatz matriciel pour exprimer ces probabilités stationnaires. Nous introduirons tout d'abord l'Ansatz matriciel pour le modèle ouvert, et nous montrerons en particulier qu'il permet de déterminer le diagramme de phase de ce modèle. Puis nous passerons au modèle à plusieurs classes de particules sur un anneau, pour lequel l'Ansatz matriciel possède une structure plus élaborée.

8.1 Modèle ouvert

Dans cette section, nous allons présenter l'Ansatz matriciel introduit par Derrida, Evans, Hakim et Pasquier dans [65] pour exprimer les probabilités stationnaires du modèle d'exclusion asymétrique ouvert. Nous montrerons comment le diagramme de phase de ce modèle, qui a été présenté au chapitre 2, peut être établi à partir de cet Ansatz matriciel.

8.1.1 Ansatz matriciel

On considère une configuration $\mathcal{C} = (\tau_1, \dots, \tau_L)$ du modèle d'exclusion ouvert (avec les taux de transition définis dans la figure 8.1), avec $\tau_i = 1$ si le site i est occupé, et $\tau_i = 0$ s'il est vide. Nous allons montrer que la probabilité stationnaire que le système se trouve dans la configuration $\mathcal{C}$ est donnée par l'*Ansatz matriciel* [65]

$$P_\infty(\mathcal{C}) = \frac{1}{Z_L} \langle W | X_{\tau_1} \dots X_{\tau_L} | V \rangle, \quad (8.1)$$

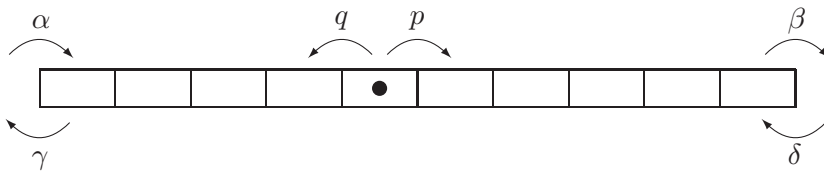


FIG. 8.1 – Taux de transition du modèle d'exclusion asymétrique ouvert. Au premier site, une particule rentre dans le système avec un taux α et en sort avec un taux γ . Au dernier site, une particule rentre dans le système avec un taux δ et en sort avec un taux β . À l'intérieur du système, les particules se déplacent vers la droite avec un taux p et vers la gauche avec un taux q .

les matrices $X_1 = D$ et $X_0 = E$, et les vecteurs $\langle W|$ et $|V\rangle$ vérifiant l'algèbre

$$pDE - qED = (p - q)(D + E) \quad (8.2)$$

$$\langle W|(\alpha E - \gamma D) = (p - q)\langle W| \quad (8.3)$$

$$(\beta D - \delta E)|V\rangle = (p - q)|V\rangle. \quad (8.4)$$

La normalisation Z_L est telle que la somme des probabilités est égale à un :

$$\boxed{Z_L = \sum_{\mathcal{C}} \langle W|X_{\tau_1} \dots X_{\tau_L}|V\rangle = \langle W|(D + E)^L|V\rangle}. \quad (8.5)$$

Il s'agit d'une quantité importante. Nous verrons en particulier que la valeur moyenne du courant s'exprime en fonction de cette normalisation.

Comme d'habitude, les choses se simplifient un peu dans le cas particulier du modèle totalement asymétrique $p = 1$, $q = \gamma = \delta = 0$. L'algèbre (8.2-8.4) devient en effet

$$DE = D + E \quad (8.6)$$

$$\langle W|E = \frac{1}{\alpha}\langle W| \quad (8.7)$$

$$D|V\rangle = \frac{1}{\beta}|V\rangle. \quad (8.8)$$

Nous verrons dans la suite que cette simplification de l'algèbre rend certains calculs beaucoup plus aisés dans le cas du modèle totalement asymétrique.

8.1.2 Preuve de l'Ansatz matriciel : « matrices chapeau »

Nous allons maintenant prouver que l'expression (8.1) pour les probabilités stationnaires du modèle ouvert est correcte si les matrices D et E et les vecteurs $\langle W|$ et $|V\rangle$ vérifient l'algèbre (8.6-8.8).

La matrice de Markov M , dont le noyau est le vecteur propre stationnaire de composantes $P_\infty(\mathcal{C})$, peut s'écrire comme une somme de $L - 1$ matrices locales $M_{i,i+1}$ agissant uniquement sur les sites i et $i + 1$, plus deux opérateurs de bord M_1 et M_L agissant respectivement sur le site 1 et le site L . Dans la base des configurations $(1, \dots, 1, 1, 1)$, $(1, \dots, 1, 1, 0)$, $(1, \dots, 1, 0, 1)$, $(1, \dots, 1, 0, 0)$, $\dots$, $(0, \dots, 0, 0, 0)$, les matrices de bord M_1 et M_L et la matrice locale $M_{i,i+1}$ s'écrivent

$$M_1 = M_G \otimes \mathbb{1}^{\otimes L-1}, \quad M_{i,i+1} = \mathbb{1}^{\otimes i-1} \otimes M_{\text{loc}} \otimes \mathbb{1}^{\otimes L-i-1}, \quad \text{et} \quad M_L = \mathbb{1}^{\otimes L-1} \otimes M_D, \quad (8.9)$$

où la matrice $\mathbb{1}$ est la matrice identité deux par deux, et les matrices M_G , M_{loc} et M_D sont données par

$$M_G = \begin{pmatrix} -\gamma & \alpha \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}, \quad M_{\text{loc}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & q & 0 \\ 0 & p & -q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad M_D = \begin{pmatrix} -\beta & \delta \\ \beta & -\delta \end{pmatrix}. \quad (8.10)$$

Le fait que le vecteur stationnaire, dont les composantes sont données par l'Ansatz matriciel (8.1), est vecteur propre de valeur propre nulle de la matrice de Markov implique alors la relation suivante :

$$\sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_L=0}^1 M_{\{\tau\}, \{\sigma\}} \langle W|X_{\sigma_1} \dots X_{\sigma_L}|V\rangle = 0, \quad (8.11)$$

ou, en utilisant la décomposition de la matrice de Markov comme une somme de matrices locales,

$$\begin{aligned}
0 = & \sum_{\sigma_1=0}^1 (M_G)_{\tau_1, \sigma_1} \langle W | X_{\sigma_1} X_{\tau_2} \dots X_{\tau_L} | V \rangle \\
& + \sum_{i=1}^{L-1} \sum_{\sigma_i, \sigma_{i+1}=0}^1 (M_{\text{loc}})_{\tau_i \tau_{i+1}, \sigma_i \sigma_{i+1}} \langle W | X_{\tau_1} \dots X_{\tau_{i-1}} X_{\sigma_i} X_{\sigma_{i+1}} X_{\tau_{i+2}} \dots X_{\tau_L} | V \rangle \\
& + \sum_{\sigma_L=0}^1 (M_D)_{\tau_L, \sigma_L} \langle W | X_{\tau_1} \dots X_{\tau_{L-1}} X_{\sigma_L} | V \rangle . \quad (8.12)
\end{aligned}$$

On constate alors que s'il existe des « matrices chapeau » [157] $\hat{X}_k$ ($\hat{X}_1 = \hat{D}$ et $\hat{X}_0 = \hat{E}$) vérifiant les relations

$$\sum_{\sigma=0}^1 (M_G)_{\tau, \sigma} \langle W | X_{\sigma} = \langle W | \hat{X}_{\tau} \quad (8.13)$$

$$\sum_{\sigma, \sigma'=0}^1 (M_{\text{loc}})_{\tau \tau', \sigma \sigma'} X_{\sigma} X_{\sigma'} = X_{\tau} \hat{X}_{\tau'} - \hat{X}_{\tau} X_{\tau'} \quad (8.14)$$

$$\sum_{\sigma=0}^1 (M_D)_{\tau, \sigma} X_{\sigma} | V \rangle = -\hat{X}_{\tau} | V \rangle , \quad (8.15)$$

l'équation (8.12) est automatiquement vérifiée : tous les termes se simplifient deux à deux. Sous forme matricielle, les conditions précédentes s'écrivent

$$\langle W | \begin{pmatrix} -\gamma & \alpha \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix} = \langle W | \begin{pmatrix} \hat{D} \\ \hat{E} \end{pmatrix} \quad (8.16)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & q & 0 \\ 0 & p & -q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} DD \\ DE \\ ED \\ EE \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D\hat{D} \\ D\hat{E} \\ E\hat{D} \\ E\hat{E} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{D}D \\ \hat{D}E \\ \hat{E}D \\ \hat{E}E \end{pmatrix} \quad (8.17)$$

$$\begin{pmatrix} -\beta & \delta \\ \beta & -\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix} | V \rangle = - \begin{pmatrix} \hat{D} \\ \hat{E} \end{pmatrix} | V \rangle . \quad (8.18)$$

On obtient finalement les six relations suivantes entre les matrices D et E et les matrices auxiliaires $\hat{D}$ et $\hat{E}$:

$$pDE - qED = E\hat{D} - \hat{E}D \quad pDE - qED = \hat{D}E - D\hat{E} \quad (8.19)$$

$$\langle W | (\alpha E - \gamma D) = \langle W | \hat{D} \quad \langle W | (\alpha E - \gamma D) = -\langle W | \hat{E} \quad (8.20)$$

$$(\beta D - \delta E) | V \rangle = \hat{D} | V \rangle \quad (\beta D - \delta E) | V \rangle = -\hat{E} | V \rangle . \quad (8.21)$$

Si l'on choisit pour les matrices $\hat{D}$ et $\hat{E}$ les matrices proportionnelles à l'identité suivantes :

$$\hat{D} = (p - q)\mathbb{1} \quad \text{et} \quad \hat{E} = -(p - q)\mathbb{1} , \quad (8.22)$$

alors on retrouve bien l'algèbre (8.2-8.4) des matrices D et E et des vecteurs $\langle W |$ et $| V \rangle$. Le coefficient $p - q$ en facteur de $\hat{D}$ et $\hat{E}$ est arbitraire : on aurait pu choisir n'importe quelle constante. Cela donnerait une autre forme pour l'algèbre (8.2) entre D et E , correspondant à multiplier D et E par une constante.

On note que demander l'existence de matrices chapeau vérifiant les relations (8.16-8.18)

semble être une contrainte plus forte que demander seulement que l'Ansatz matriciel (8.1) donne bien les probabilités stationnaires. Cependant, Krebs et Sandow ont montré [67] que des matrices chapeau analogues à celles que nous avons utilisées ici existent pour tous les modèles ouverts à une dimension avec des interactions entre sites plus proches voisins ne dépendant pas du site, et des matrices de bords localisées sur les sites 1 et L .

Pour que l'Ansatz matriciel (8.1) soit réellement utile, il reste encore à montrer que l'algèbre (8.2-8.4) suffit à calculer les probabilités stationnaires, et leur donne bien une valeur non nulle. Une manière de faire cela est de trouver une représentation explicite de l'algèbre par des matrices D et E et des vecteurs $\langle W|$ et $|V\rangle$. Il sera nécessaire de considérer des matrices et des vecteurs de dimension infinie comme on va le voir dans la suite.

8.1.3 Représentation explicite de l'algèbre des matrices D et E

Nous allons maintenant écrire des représentations explicites de l'algèbre des matrices D et E et des vecteurs $\langle W|$ et $|V\rangle$. Nous verrons que pour des paramètres génériques du système, ces matrices et ces vecteurs sont nécessairement de dimension infinie. Nous discuterons tout d'abord le cas du modèle totalement asymétrique, avant de passer au modèle partiellement asymétrique.

Modèle totalement asymétrique

Pour le modèle totalement asymétrique $p = 1$, $q = \gamma = \delta = 0$, la relation (8.2) peut être réécrite sous la forme

$$(\mathbb{1} - D)(\mathbb{1} - E) = \mathbb{1} . \quad (8.23)$$

Pour des matrices finies, ceci implique que les matrices $\mathbb{1} - D$ et $\mathbb{1} - E$ commutent, car l'inverse à droite et l'inverse à gauche sont identiques dans ce cas. Les matrices D et E commutent donc aussi. On peut alors écrire

$$\langle W|(DE - ED)|V\rangle = 0 . \quad (8.24)$$

Utilisant les relations (8.6-8.8), on trouve finalement la contrainte suivante sur les taux de bord :

$$\alpha + \beta = 1 . \quad (8.25)$$

Il n'est ainsi possible d'utiliser des matrices finies pour le modèle totalement asymétrique que si les taux α et β vérifient cette contrainte. Dans ce cas, comme les matrices D et E commutent, on peut les prendre de dimension 1 (scalaires). Les relations (8.7) et (8.8) imposent alors de prendre $D = 1/\beta$ et $E = 1/\alpha$, et les probabilités stationnaires sont données par $P_\infty(\mathcal{C}) = \alpha^n \beta^{L-n}$ pour une configuration à n particules.

Quand la relation $\alpha + \beta = 1$ n'est pas vérifiée, les matrices D et E sont donc nécessairement infinies, de même que les vecteurs $\langle W|$ et $|V\rangle$. Il existe plusieurs représentations différentes de l'algèbre (8.6-8.8) par des matrices et vecteurs infinis. Par exemple, les matrices

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} & \sqrt{\frac{\alpha+\beta-1}{\alpha\beta}} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{\frac{\alpha+\beta-1}{\alpha\beta}} & 1 & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} , \quad (8.26)$$

et les vecteurs

$$\langle W| = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots) \quad \text{et} \quad |V\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (8.27)$$

forment une représentation de l'algèbre (8.6-8.8). Une autre représentation de cette algèbre est donnée par les matrices

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (8.28)$$

et les vecteurs

$$\langle W| = \left(1 \quad \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \quad \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2 \quad \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^3 \quad \dots \right) \quad \text{et} \quad |V\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right) \\ \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)^2 \\ \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)^3 \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (8.29)$$

Modèle partiellement asymétrique

Dans le cas partiellement asymétrique, les choses sont une fois encore plus compliquées. Plusieurs représentations de dimension finie de l'algèbre (8.2-8.4) existent, mais pour certaines d'entre elles l'Ansatz matriciel donne des poids nuls pour toutes les configurations. De telles représentations ne peuvent donc pas servir à exprimer les probabilités stationnaires. Cependant, Mallick et Sandow ont montré [158] qu'il existe, pour chaque entier m strictement positif, une et une seule représentation irréductible de l'algèbre (8.2-8.4) par des matrices et des vecteurs de dimension m conduisant à des poids non nuls par l'Ansatz matriciel. Ces représentations sont valables uniquement quand les paramètres du système vérifient certaines relations. Par exemple, le cas de la représentation de dimension $m = 1$ correspond à des paramètres vérifiant la relation $(p-q)(\alpha+\delta)(\beta+\gamma) = (\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha\beta-\gamma\delta)$, et on a alors $D = (\alpha+\beta+\gamma+\delta)/(\beta+\gamma)$ et $E = (\alpha+\beta+\gamma+\delta)/(\alpha+\delta)$. Par contre, pour des paramètres génériques, seules des représentations infinies de l'algèbre (8.2-8.4) donnent des poids non nuls par l'Ansatz matriciel.

Nous allons maintenant écrire deux représentations infinies des matrices D et E et des vecteurs $\langle W|$ et $|V\rangle$ vérifiant l'algèbre (8.2-8.4) dans le cas particulier pour lequel $\gamma = \delta = 0$, pour lequel ils sont plus simples. L'asymétrie x est encore définie par

$$\boxed{x = \frac{q}{p}}. \quad (8.30)$$

On pose

$$a = \frac{p-q}{\alpha} - 1, \quad b = \frac{p-q}{\beta} - 1, \quad c_k = (1-x^{k+1})(1-abx^k), \quad \text{et} \quad d_k = \prod_{j=1}^k (1-x^j). \quad (8.31)$$

Les matrices

$$D = \begin{pmatrix} 1+b & \sqrt{c_0} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1+bx & \sqrt{c_1} & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 1+bx^2 & \sqrt{c_2} & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 1+bx^3 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (8.32)$$

et

$$E = \begin{pmatrix} 1+a & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{c_0} & 1+ax & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & \sqrt{c_1} & 1+ax^2 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & \sqrt{c_2} & 1+ax^3 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (8.33)$$

et les vecteurs

$$\langle W| = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots) \quad \text{et} \quad |V\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (8.34)$$

forment alors une représentation de l'algèbre (8.2-8.4). Dans la limite $x \rightarrow 0$, on retrouve la représentation (8.26-8.27) donnée pour le modèle totalement asymétrique. Une autre représentation de l'algèbre partiellement asymétrique est donnée par les matrices

$$D = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{1-x} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \sqrt{1-x^2} & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{1-x^3} & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (8.35)$$

et

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1-x} & 1 & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & \sqrt{1-x^2} & 1 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & \sqrt{1-x^3} & 1 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (8.36)$$

et les vecteurs

$$\langle W| = \left(1 \quad \frac{a}{\sqrt{d_1}} \quad \frac{a^2}{\sqrt{d_2}} \quad \frac{a^3}{\sqrt{d_3}} \quad \dots \right) \quad \text{et} \quad |V\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b}{\sqrt{d_1}} \\ \frac{b^2}{\sqrt{d_2}} \\ \frac{b^3}{\sqrt{d_3}} \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (8.37)$$

Dans la limite $x \rightarrow 0$, on retrouve cette fois-ci la représentation (8.28-8.29) de l'algèbre pour le modèle totalement asymétrique.

Enfin, dans le cas le plus général, pour lequel γ et δ sont non nuls, il existe encore des représentations de dimension infinies de l'algèbre (8.2-8.4) [77]. En particulier, il existe une représentation telle que les matrices D et E sont toujours données par (8.35), mais pour laquelle les vecteurs $\langle W|$ et $|V\rangle$ ont une expression plus compliquée que (8.37).

8.1.4 Calcul explicite des probabilités stationnaires

Le calcul explicite des probabilités stationnaires pour un système de taille L donnée peut être effectué de plusieurs manières différentes à partir de l'Ansatz matriciel (8.1). L'une d'entre elles repose sur une des représentation des matrices D et E et des vecteurs $\langle W|$ et $|V\rangle$ donnée précédemment. Une autre méthode consiste à utiliser uniquement l'algèbre (8.2-8.4).

Calcul par une représentation matricielle

On considère la représentation (8.32-8.34) des matrices D et E et des vecteurs $\langle W|$ et $|V\rangle$ (dans le cas où $\gamma = \delta = 0$). Dans cette représentation, $\langle W|$ et $|V\rangle$ ont chacun une seule composante non nulle. De plus, la matrice D (respectivement E) n'a de composantes non nulles que sur sa diagonale et sur sa sur-diagonale (resp. sous-diagonale). Ces deux propriétés permettent de tronquer les matrices pour calculer les probabilités stationnaires. En effet, pour une configuration $\mathcal{C} = (\tau_1, \dots, \tau_L)$, la probabilité stationnaire s'écrit par l'Ansatz matriciel (8.1) sous la forme

$$P_\infty(\mathcal{C}) = \frac{1}{Z_L} \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{\infty} \dots \sum_{i_L=1}^{\infty} (X_{\tau_1})_{1,i_1} (X_{\tau_2})_{i_1,i_2} \dots (X_{\tau_L})_{i_{L-1},1}. \quad (8.38)$$

Les matrices X_{τ_i} étant égales à D ou E , les éléments de matrice $(X_{\tau_i})_{k,l}$ sont non nuls seulement si $|l - k| \leq 1$. L'ensemble des i_j donnant une contribution non nulle au poids stationnaire est donc borné par L pour un système de taille L fixée. Il est donc possible de tronquer les matrices D et E en ne gardant que les L premières lignes et les L premières colonnes pour calculer les poids stationnaires.

Calcul par l'algèbre

Le calcul explicite des probabilités stationnaires à partir de l'Ansatz matriciel peut aussi être effectué en utilisant seulement l'algèbre (8.2-8.4). On va détailler cela dans le cas totalement asymétrique, puis dans le cas partiellement asymétrique.

Pour le modèle totalement asymétrique $q = \gamma = \delta = 0$, la relation (8.6) permet d'écrire tout produit de matrices D et E comme une combinaison linéaire de termes de la forme $\langle W|E^i D^j|V\rangle$. Les relations (8.7) et (8.8) permettent ensuite d'éliminer les matrices D et E de l'expression des poids stationnaires. On se retrouve alors avec une somme de termes de la forme $\alpha^{-i} \beta^{-j} \langle W|V\rangle$. La constante arbitraire $\langle W|V\rangle$ se simplifie finalement entre le numérateur $\langle W|\dots|V\rangle$ et le dénominateur Z_L quand on normalise les probabilités.

Pour le modèle partiellement asymétrique, les choses se compliquent un peu : la relation (8.2) permet toujours de se ramener à des combinaisons linéaires d'expressions de la forme $\langle W|E^i D^j|V\rangle$ pour les poids stationnaires. Par contre, les relations (8.3) et (8.4) ne permettent plus d'éliminer les matrices D et E restantes de manière aussi directe que dans le cas totalement asymétrique. On peut cependant éliminer toutes les matrices D en itérant les relations (8.2) et (8.4). Il reste alors à obtenir des expressions pour les quantités $\langle W|E^i|V\rangle$.

Ceci peut être fait en appliquant une fois la relation (8.3) pour remplacer la matrice E la plus à gauche par une matrice D , puis en appliquant de manière répétée la relation (8.2) pour faire commuter cette matrice D vers la droite. On élimine enfin cette matrice D en utilisant la

relation (8.4). On se retrouve finalement avec une égalité de la forme

$$\langle W|E^i|V \rangle = a_i \langle W|E^i|V \rangle + \sum_{j=1}^{i-1} a_j \langle W|E^j|V \rangle , \quad (8.39)$$

le coefficient a_i étant génériquement différent de 1. Cette équation permet donc d'exprimer $\langle W|E^i|V \rangle$ en fonction des $\langle W|E^j|V \rangle$ pour j strictement inférieur à i . Par induction, on peut ainsi calculer tous les $\langle W|E^i|V \rangle$ en fonction de $\langle W|V \rangle$ et des coefficients $p, q, \alpha, \beta, \gamma$ et δ . On trouve en particulier $\langle W|E|V \rangle = (\beta + \gamma)(p - q)\langle W|V \rangle / (\alpha\beta - \gamma\delta)$.

8.1.5 Calcul de la normalisation Z_L

La normalisation Z_L intervenant dans l'Ansatz matriciel joue le rôle d'une fonction de partition pour le modèle d'exclusion (voir Blythe et Evans [159, 160]). Nous allons maintenant montrer comment la calculer pour le modèle totalement asymétrique. On définit la fonction génératrice de Z_L par rapport à la taille du système L par

$$f(z) = \sum_{L=0}^{\infty} z^L Z_L = \sum_{L=0}^{\infty} z^L \langle W|(D + E)^L|V \rangle . \quad (8.40)$$

Formellement, on peut écrire

$$f(z) = \langle W| \frac{1}{1 - z(D + E)} |V \rangle . \quad (8.41)$$

On note que la relation (8.6) permet de factoriser $1 - z(D + E)$ en le produit d'un facteur dépendant de D et d'un facteur dépendant de E sous la forme

$$1 - z(D + E) = (1 - yD)(1 - yE) , \quad (8.42)$$

avec y tel que $z = y(1 - y)$. La relation précédente s'inverse alors en

$$\frac{1}{1 - z(D + E)} = \frac{1}{1 - yE} \frac{1}{1 - yD} . \quad (8.43)$$

Les relations (8.7) et (8.8) donnent alors pour la fonction génératrice de Z_L :

$$f(z) = \frac{\alpha}{\alpha - y(z)} \frac{\beta}{\beta - y(z)} \langle W|V \rangle , \quad (8.44)$$

où $y(z)$ est solution de l'équation $z = y(z)(1 - y(z))$. La valeur de f en $z = 0$ conduit alors à choisir la solution

$$y(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2} . \quad (8.45)$$

Le développement en puissances de z de l'expression (8.44) de la fonction génératrice $f(z)$ de la normalisation donne finalement l'expression suivante pour Z_L [64] :

$$Z_L = \sum_{k=0}^L \frac{k}{2L - k} \binom{2L - k}{L} \frac{\alpha^{-k-1} - \beta^{-k-1}}{\alpha^{-1} - \beta^{-1}} . \quad (8.46)$$

8.1.6 Valeur moyenne du courant et diagramme de phase

La valeur moyenne du courant stationnaire au niveau du lien entre les sites i et $i + 1$ est donnée par

$$J_{i \rightarrow i+1} = \sum_{\mathcal{C}} P_{\infty}(\mathcal{C}) (p \mathbb{1}_{\tau_i=1} \mathbb{1}_{\tau_{i+1}=0} - q \mathbb{1}_{\tau_i=0} \mathbb{1}_{\tau_{i+1}=1}) . \quad (8.47)$$

Utilisant l'Ansatz matriciel pour les probabilités stationnaires (8.1), l'expression du courant moyen s'écrit sous la forme

$$J_{i \rightarrow i+1} = \frac{1}{Z_L} \sum_{\mathcal{C}} \langle W | (D + E)^{i-1} (pDE - qED) (D + E)^{L-i-1} | V \rangle . \quad (8.48)$$

La relation (8.2) permet alors de conclure que $J_{i \rightarrow i+1}$ s'exprime simplement en fonction de la normalisation Z :

$$J = J_{i \rightarrow i+1} = (p - q) \frac{Z_{L-1}}{Z_L} . \quad (8.49)$$

Comme on pouvait s'y attendre, cette expression ne dépend pas du site i vu que le courant est conservé dans l'état stationnaire.

L'étude de l'expression de J dans la limite d'un système de grande taille permet de montrer que le système présente plusieurs phases suivant la valeurs des paramètres du système. Nous présenterons ici uniquement le cas du modèle totalement asymétrique, pour lequel la fonction génératrice f des Z_L est donnée par (8.44).

Le comportement asymptotique de Z_L quand L tend vers l'infini s'obtient à partir du rayon de convergence de sa fonction génératrice, qui est aussi le module de la position z de la singularité de $f(z)$ la plus proche de l'origine. Si ce rayon de convergence est égal à r , Z_L se comporte à l'ordre dominant comme $1/r^L$. Il est donc nécessaire de déterminer les singularités de la fonction f (8.44). Quelle que soit la valeur de α et β , celle-ci possède une singularité en $z = 1/4$ due à la racine carrée. De plus, s'il existe z_{α} tel que $y(z_{\alpha}) = \alpha$, alors $f(z)$ a un pôle en $z = z_{\alpha}$. De même, s'il existe z_{β} tel que $y(z_{\beta}) = \beta$, alors $f(z)$ a une singularité en $z = z_{\beta}$. Mais, comme $y(z) \leq 1/2$ pour toute valeur réelle de z inférieure ou égale à $1/4$ (qui sont les seules valeurs de z telles que $y(z)$ soit réel et puisse donc être égal à α ou β), alors z_{α} (respectivement z_{β}) n'existe que si $\alpha < 1/2$ (resp. $\beta < 1/2$). Dans ce cas, on a $z_{\alpha} = \alpha(1 - \alpha) \leq 1/4$ (resp. $z_{\beta} = \beta(1 - \beta) \leq 1/4$). On note que quand z_{α} et z_{β} existent tous les deux, on a $z_{\alpha} < z_{\beta}$ si et seulement si $\alpha < \beta$.

On constate finalement qu'il existe trois situations différentes (sans compter les situations marginales). La première correspond à $1/2 < \alpha$ et $1/2 < \beta$. Dans ce cas, $z = 1/4$ est la seule singularité de $f(z)$. La deuxième situation correspond à $\alpha < 1/2$ et $\alpha < \beta$. Dans ce cas, $f(z)$ possède deux singularités : une en $z = 1/4$, et l'autre, plus proche de l'origine, en $z = \alpha(1 - \alpha)$. Enfin, la dernière situation correspond à $\beta < 1/2$ et $\beta < \alpha$. Dans ce cas, $f(z)$ possède encore deux singularités : une en $z = 1/4$, et l'autre, toujours plus proche de l'origine, en $z = \beta(1 - \beta)$. On obtient donc les asymptotiques suivantes pour Z_L :

$$Z_L \sim \begin{cases} 4^L & \text{si } 1/2 < \alpha \text{ et } 1/2 < \beta \\ \frac{1}{[\alpha(1-\alpha)]^L} & \text{si } \alpha < 1/2 \text{ et } \alpha < \beta \\ \frac{1}{[\beta(1-\beta)]^L} & \text{si } \beta < 1/2 \text{ et } \beta < \alpha \end{cases} . \quad (8.50)$$

Pour le modèle ouvert totalement asymétrique, la valeur moyenne du courant prend donc les valeurs suivantes dans les trois situations précédentes, dans la limite d'un système grand :

$$J \sim \begin{cases} 1/4 & \text{si } 1/2 < \alpha \text{ et } 1/2 < \beta \\ \alpha(1 - \alpha) & \text{si } \alpha < 1/2 \text{ et } \alpha < \beta \\ \beta(1 - \beta) & \text{si } \beta < 1/2 \text{ et } \beta < \alpha \end{cases} . \quad (8.51)$$

On trouve donc le diagramme de phase (8.2) annoncé au chapitre 2.

On note que contrairement aux chapitres précédents, on a défini ici le courant entre deux

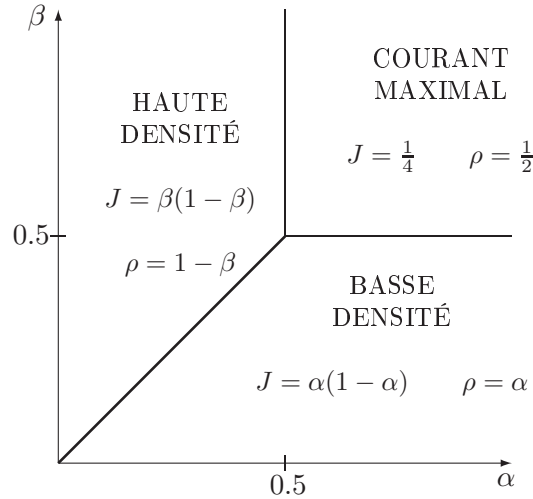


FIG. 8.2 – Diagramme de phase du modèle d'exclusion totalement asymétrique ouvert dans l'espace des paramètres α et β . Les deux lignes en trait fin correspondent à des transitions de phase du second ordre séparant la phase de courant maximal des phases de haute et basse densité. La ligne en trait épais correspond à la transition de phase du premier ordre séparant la phase de haute densité et la phase de basse densité.

sites, et pas le courant total : il y a un facteur L entre les deux, ce qui explique que l'on trouve ici une valeur moyenne du courant avec une limite finie quand $L \rightarrow \infty$, alors que pour le modèle sur un anneau, l'expression de la valeur moyenne du courant croissait comme L dans la limite d'un système de grande taille avec une densité finie.

8.2 Modèle à deux classes de particules

Dans le cas du modèle à plusieurs classes de particules, les probabilités stationnaires s'expriment encore sous la forme d'un Ansatz matriciel. Nous présentons dans cette section le cas du modèle à deux classes de particules puis, dans la section suivante, nous passerons au modèle avec un nombre arbitraire de classes de particules, pour lequel les matrices ont une structure plus compliquée.

8.2.1 Ansatz matriciel

Dans le modèle à deux classes de particules, un site peut être soit vide, soit occupé par une particule de première ou de seconde espèce. On associe à chaque site i une variable d'occupation τ_i pouvant prendre trois valeurs : $\tau_i = 0$ correspond à un site vide, $\tau_i = 1$ à un site occupé par une particule de première espèce, et $\tau_i = 2$ à un site occupé par une particule de deuxième espèce. L'Ansatz matriciel donnant les probabilités stationnaires du modèle à deux espèces s'exprime donc en fonction de trois matrices D , A et E . La matrice $D = X_1$ est associée à un site occupé par une particule de première espèce, la matrice $A = X_2$ à un site occupé par une particule de deuxième espèce, et la matrice $E = X_0$ à un site vide. L'Ansatz matriciel s'écrit alors [151]

$$P_\infty(\mathcal{C}) = \frac{1}{Z} \text{Tr}[X_{\tau_1} \dots X_{\tau_L}] , \quad (8.52)$$

les matrices D , A et E , vérifiant l'algèbre

$$pDE - qED = (p - q)(D + E) \quad (8.53)$$

$$pDA - qAD = (p - q)A \quad (8.54)$$

$$pAE - qEA = (p - q)A. \quad (8.55)$$

L'Ansatz matriciel fait maintenant intervenir une trace sur l'espace sur lequel agissent les matrices D , A et E , ce qui implique automatiquement l'invariance par translation de l'état stationnaire. Pour le modèle ouvert, l'état stationnaire n'était pas invariant par translation. Le produit de matrices était alors transformé en scalaire par projection sur des vecteurs $\langle W|$ et $|V\rangle$. La relation entre les matrices D et E est la même que pour le modèle ouvert à une seule classe de particules. Les deux relations entre les vecteurs $\langle W|$ et $|V\rangle$ ont été remplacées par les deux relations entre la matrice A et les matrices D et E . Pour le modèle totalement asymétrique $p = 1$, $q = 0$, les relations (8.53-8.55) deviennent

$$DE = D + E \quad (8.56)$$

$$DA = A \quad (8.57)$$

$$AE = A. \quad (8.58)$$

On note que les matrices D , E et $A = |V\rangle\langle W|$ du modèle ouvert totalement asymétrique à une classe de particules vérifient la même algèbre quand $\alpha = 1$ et $\beta = 1$. De plus, on peut écrire l'Ansatz matriciel du modèle ouvert sous la forme

$$P_\infty(\mathcal{C}) = \frac{1}{Z} \langle W|X_{\tau_1} \dots X_{\tau_L}|V\rangle = \frac{1}{Z} \text{Tr}[AX_{\tau_1} \dots X_{\tau_L}]. \quad (8.59)$$

Le calcul des poids stationnaires du modèle ouvert à une classe de particules et du modèle sur un anneau avec une particule de seconde classe est donc assez similaire. La normalisation Z est cependant différente entre les deux cas, car pour le modèle ouvert il n'y a pas conservation du nombre de particules.

8.2.2 Preuve de l'Ansatz matriciel

L'Ansatz matriciel (8.52) peut être prouvé de la même manière que pour le modèle ouvert. En effet, la matrice de Markov peut encore être écrite comme une somme de matrices locales $M_{i,i+1}$, mais sans matrices de bords cette fois-ci :

$$M = \sum_{i=1}^L M_{i,i+1}. \quad (8.60)$$

Dans la base des configurations

$$(1, \dots, 1, 1, 1), (1, \dots, 1, 1, 2), (1, \dots, 1, 1, 0), (1, \dots, 1, 2, 1), (1, \dots, 1, 2, 2), \quad (8.61)$$

$$(1, \dots, 1, 2, 0), (1, \dots, 1, 0, 1), (1, \dots, 1, 0, 2), (1, \dots, 1, 0, 0), \dots, (0, \dots, 0, 0, 0),$$

les matrices locales $M_{i,i+1}$ s'écrivent sous la forme

$$M_{i,i+1} = \mathbb{1}^{\otimes i-1} \otimes M_{\text{loc}} \otimes \mathbb{1}^{\otimes L-i-1}, \quad (8.62)$$

où la matrice locale M_{loc} est donnée par

$$M_{\text{loc}} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -p & \cdot & q & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -p & \cdot & \cdot & \cdot & q & \cdot & \cdot \\ \cdot & p & \cdot & -q & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -p & \cdot & q & \cdot \\ \cdot & \cdot & p & \cdot & \cdot & \cdot & -q & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & p & \cdot & -q & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (8.63)$$

dans la base locale (11, 12, 10, 21, 22, 20, 01, 02, 00). On a remplacé par des points les éléments de matrice nuls. Comme dans le cas du modèle ouvert traité précédemment, on note que s'il existe des matrices $\hat{X}_1 = \hat{D}$, $\hat{X}_2 = \hat{A}$ et $\hat{X}_0 = \hat{E}$ telles que

$$\sum_{\sigma, \sigma'=0}^2 (M_{\text{loc}})_{\tau\tau', \sigma\sigma'} X_{\sigma} X_{\sigma'} = X_{\tau} \hat{X}_{\tau'} - \hat{X}_{\tau} X_{\tau'} , \quad (8.64)$$

alors l'Ansatz matriciel donne bien le vecteur propre de la matrice de Markov de valeur propre nulle (qui est unique par le théorème de Perron-Frobenius). L'équation précédente donne des relations qui doivent être vérifiées par les matrices chapeau :

$$pDE - qED = \hat{D}E - D\hat{E} = E\hat{D} - \hat{E}D \quad (8.65)$$

$$pDA - qAD = \hat{D}A - D\hat{A} = A\hat{D} - \hat{A}D \quad (8.66)$$

$$pAE - qEA = \hat{A}E - A\hat{E} = E\hat{A} - \hat{E}A . \quad (8.67)$$

On peut là encore prendre des matrices chapeau scalaires : $\hat{D} = p - q$, $\hat{E} = -(p - q)$ et $\hat{A} = 0$ redonnent les relations algébriques (8.53-8.55) entre les matrices D , A et E .

8.2.3 Représentation explicite des matrices D , A et E

Nous allons maintenant donner des représentations explicites de D , A et E comme des matrices infinies.

Modèle totalement asymétrique

Pour le modèle totalement asymétrique, on peut construire une représentation des matrices D , A et E à partir d'une représentation explicite des matrices D et E et des vecteurs $\langle W|$ et $|V\rangle$ du modèle ouvert avec $\alpha = \beta = 1$. Les deux représentations (8.26-8.27) et (8.28-8.29) conduisent à la même représentation pour le modèle à deux espèces :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (8.68)$$

et

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (8.69)$$

Modèle partiellement asymétrique

Pour le modèle partiellement asymétrique, il n'est plus possible de construire la matrice A du modèle à deux espèces de particules à partir des vecteurs $\langle W|$ et $|V\rangle$ du modèle ouvert. On peut cependant encore trouver une représentation explicite de D , A et E par des matrices infinies. On peut par exemple prendre

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & x & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & x^2 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & x^3 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{1-x} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \sqrt{1-x^2} & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{1-x^3} & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (8.70)$$

et

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1-x} & 1 & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & \sqrt{1-x^2} & 1 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & \sqrt{1-x^3} & 1 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (8.71)$$

Les matrices D et E sont les mêmes que dans la représentation (8.35) pour le modèle ouvert.

8.2.4 Calcul explicite des probabilités stationnaires

L'utilisation de l'algèbre (8.53-8.55) permet de calculer explicitement les probabilités stationnaires. Les poids stationnaires peuvent être écrits sous la forme $\text{Tr}[Aw_1Aw_2A\dots Aw_{n_2}]$, où $w_1, w_2, \dots, w_{n_2}$ sont des produits d'un nombre éventuellement nul de matrices D et E .

Modèle totalement asymétrique

Pour le modèle totalement asymétrique, l'utilisation de la relation (8.56) permet de réécrire les poids stationnaires comme une combinaison linéaire de termes de la forme

$$\text{Tr}[AE^{i_1}D^{j_1}AE^{i_2}D^{j_2}A\dots AE^{i_{n_2}}D^{j_{n_2}}]. \quad (8.72)$$

Les relations (8.57) et (8.58) permettent alors d'éliminer les matrices D et E . Les poids stationnaires sont alors donnés par un nombre entier de fois $\text{Tr} A^{n_2}$. Cette constante se simplifie quand on divise les poids par la normalisation Z .

Modèle partiellement asymétrique

Pour le modèle partiellement asymétrique, il est utile d'introduire les matrices $\delta = D - \mathbb{1}$ et $\epsilon = E - \mathbb{1}$ qui vérifient les relations suivantes :

$$\delta\epsilon - x\epsilon\delta = (1-x)\mathbb{1} \quad (8.73)$$

$$\delta A = xA\delta \quad (8.74)$$

$$A\epsilon = x\epsilon A, \quad (8.75)$$

avec $x = q/p$. Les poids stationnaires s'écrivent alors comme une combinaison linéaire de termes de la forme $\text{Tr}[Aw_1Aw_2A\dots Aw_{n_2}]$ où les w_i sont des produits d'un nombre éventuellement nul de matrices δ et ϵ . Les relations (8.74) et (8.75) permettent de rassembler les matrices A . Les poids stationnaires sont donc des combinaisons linéaires de termes de la forme $\text{Tr}[A^{n_2}w]$ où w est un produit de matrices δ et ϵ . La relation (8.73) permet alors d'ordonner les matrices de w en mettant les δ à gauche et les ϵ à droite. On se trouve finalement avec une somme de termes de la forme $\text{Tr}[A^{n_2}\delta^i\epsilon^j]$. Ces termes sont non nuls seulement si $i = j$. En effet, déplacer la matrice A la plus à droite de $i + j$ pas vers la droite à l'aide des relations (8.74) et (8.75) conduit à l'équation

$$\text{Tr}[A^{n_2}\delta^i\epsilon^j] = x^{j-i} \text{Tr}[A^{n_2}\delta^i\epsilon^j], \quad (8.76)$$

qui impose que seul $i = j$ donne une contribution non nulle pour le modèle asymétrique. Il reste donc à calculer

$$f_r^{(s)} = \text{Tr}[A^s \delta^r \epsilon^r]. \quad (8.77)$$

On considérera uniquement la situation $s > 0$. En effet, pour $s = 0$, cette trace n'est pas bien définie. Ce n'est cependant pas un problème car si $s = 0$, le système ne comporte pas de particule de deuxième classe et les probabilités stationnaires sont toutes égales. Seul le cas $s > 0$ nécessite l'utilisation de l'Ansatz matriciel.

Le calcul des $f_r^{(s)}$ peut être effectué par récurrence sur r . On utilise tout d'abord la relation (8.73) une fois sur $f_{r+1}^{(s)}$, ce qui donne

$$f_{r+1}^{(s)} = (1-x)f_r^{(s)} + x \text{Tr}[A^s \delta^r \epsilon \delta \epsilon^r]. \quad (8.78)$$

On utilise encore r fois la relation (8.73) pour pousser le δ le plus à droite complètement à droite. On trouve

$$\begin{aligned} f_{r+1}^{(s)} &= \dots = (1-x)(1+x+\dots+x^k)f_r^{(s)} + x^{k+1} \text{Tr}[A^s \delta^r \epsilon^{k+1} \delta \epsilon^{r-k}] \\ &= \dots = (1-x^{r+1})f_r^{(s)} + x^{r+1} \text{Tr}[A^s \delta^r \epsilon^{r+1} \delta]. \end{aligned} \quad (8.79)$$

Enfin, on utilise la relation (8.74) pour faire passer la matrice δ à travers les matrices A . On obtient

$$f_{r+1}^{(s)} = (1-x^{r+1})f_r^{(s)} + x^{r+s+1}f_{r+1}^{(s)}. \quad (8.80)$$

On a donc la relation de récurrence

$$f_{r+1}^{(s)} = \frac{1-x^{r+1}}{1-x^{r+s+1}}f_r^{(s)}, \quad (8.81)$$

qui donne finalement la valeur de $f_r^{(s)}$:

$$f_r^{(s)} = \frac{\text{Tr } A^s}{\left[\begin{matrix} r+s \\ s \end{matrix} \right]_x}. \quad (8.82)$$

On a défini le coefficient du binôme déformé $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_x$ par

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_x = \frac{[a]_x [a-1]_x \dots [1]_x}{([b]_x [b-1]_x \dots [1]_x)([a-b]_x [a-b-1]_x \dots [1]_x)} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \binom{a}{b}, \quad (8.83)$$

où les nombres déformés $[a]_x$ sont définis par

$$[a]_x = \frac{1-x^a}{1-x} = 1+x+\dots+x^{a-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} a. \quad (8.84)$$

8.3 Modèle à N classes de particules

Dans cette section, nous allons écrire les probabilités stationnaires du modèle d'exclusion asymétrique avec un nombre arbitraire de classes de particules. Nous présenterons tout d'abord la construction de Ferrari et Martin qui permet de calculer les poids stationnaires du modèle totalement asymétrique. Nous montrerons ensuite qu'un Ansatz matriciel permet de traiter le cas du modèle partiellement asymétrique. Nous verrons en particulier que les matrices associées aux différentes classes de particules du modèle à N classes s'expriment par une récurrence sur N . De cette structure récursive, nous construirons une matrice de transfert permettant de passer de l'état stationnaire du modèle à $N-1$ classes de particules à l'état stationnaire du modèle à N classes de particules.

8.3.1 Modèle totalement asymétrique : construction de Ferrari et Martin

Pour le modèle totalement asymétrique à N classes de particules, Ferrari et Martin ont construit la mesure stationnaire à partir de la mesure uniforme d'un ensemble de N modèles à une classe de particules [153]. Nous allons expliquer ici leur construction.

On considère N modèles d'exclusion à une classe de particules définis sur des systèmes de taille L périodiques $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_N$, et comportant respectivement $n_1, n_1+n_2, \dots, n_1+\dots+n_N$ particules (voir figure 8.3). On notera $\tilde{\Omega}$ l'ensemble des configurations possibles de cet ensemble de N systèmes. Leur nombre est égal à

$$|\tilde{\Omega}| = \binom{L}{n_1} \binom{L}{n_1+n_2} \dots \binom{L}{n_1+\dots+n_N}. \quad (8.85)$$

On munit l'ensemble $\tilde{\Omega}$ d'une mesure uniforme, de telle sorte que chaque configuration de $\tilde{\Omega}$ ait une probabilité $1/|\tilde{\Omega}|$.

On considère aussi l'ensemble Ω des configurations du modèle à N classes de particules dans un système périodique de taille L , avec n_1 particules de première classe, n_2 particules de seconde classe, $\dots$, n_N particules de N -ième classe et $L-n_1-\dots-n_N$ sites vides. On rappelle que le nombre de configurations de Ω est égal au coefficient du multinôme

$$|\Omega| = \binom{L}{n_1, n_2, \dots, n_N}. \quad (8.86)$$

La construction de Ferrari et Martin consiste alors à associer à chaque configuration $\tilde{\mathcal{C}}$ de $\tilde{\Omega}$ une configuration $\mathcal{C} = \theta(\tilde{\mathcal{C}})$ de Ω , de telle sorte que la mesure de probabilité uniforme sur $\tilde{\Omega}$ induise sur l'ensemble Ω la mesure stationnaire du modèle d'exclusion totalement asymétrique à N classes de particules. Ainsi, la probabilité d'une configuration $\mathcal{C} \in \Omega$ est donnée par

$$P(\mathcal{C}) = \frac{|\theta^{-1}(\mathcal{C})|}{|\tilde{\Omega}|}, \quad (8.87)$$

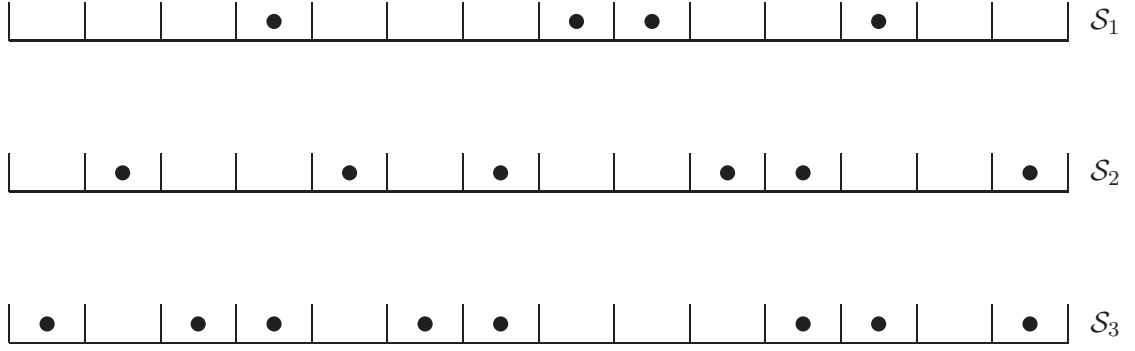


FIG. 8.3 – Trois modèles d'exclusion à une classe de particules $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ et $\mathcal{S}_3$, avec respectivement $n_1 = 4$, $n_1 + n_2 = 6$ et $n_1 + n_2 + n_3 = 8$ particules.

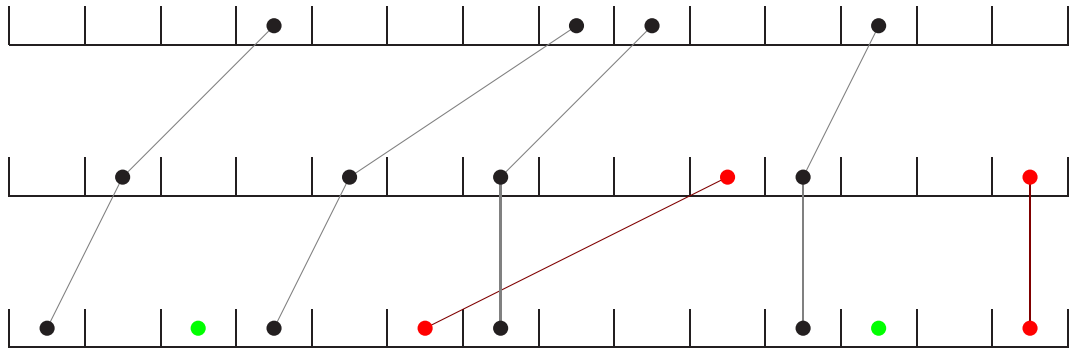


FIG. 8.4 – Algorithme de Ferrari-Martin pour le calcul des poids stationnaires du modèle d'exclusion à 3 classes de particules. Les particules de première classe sont représentées en noir, les particules de seconde classe en rouge, et les particules de troisième classe en vert.

où $|\theta^{-1}(\mathcal{C})|$ est le nombre de configurations de $\tilde{\Omega}$ dont l'image par l'application θ est $\mathcal{C}$.

L'image d'une configuration $\tilde{\mathcal{C}}$ de $\tilde{\Omega}$ par l'application θ correspondant à la construction [153] de Ferrari-Martin est définie en N étapes successives. À la k -ième étape, on transforme le système $\mathcal{S}_k$ en un système à k classes de particules comportant n_1 particules de première classe, n_2 particules de seconde classe, $\dots$, et n_k particules de k -ième classe. On procède de la manière suivante (voir figure 8.4) : dans le système $\mathcal{S}_k$, on identifie une particule à une particule de première classe si celle-ci se trouve à la même position qu'une particule de première classe dans $\mathcal{S}_{k-1}$, ou si elle peut atteindre la position d'une particule de première classe dans $\mathcal{S}_{k-1}$ en se déplaçant vers la droite sans croiser d'autres particules dans $\mathcal{S}_k$. On a alors identifié n_1 particules de première classe dans $\mathcal{S}_k$. On identifie ensuite une particule de $\mathcal{S}_k$ (prise parmi les particules qui n'ont pas été identifiées à des particules de première classe) à une particule de seconde classe si celle-ci se trouve à la même position qu'une particule de seconde classe dans $\mathcal{S}_{k-1}$, ou si elle peut atteindre la position d'une particule de seconde classe dans $\mathcal{S}_{k-1}$ en se déplaçant vers la droite sans croiser d'autres particules dans $\mathcal{S}_k$ (excepté celles de première classe qui ont été définies juste avant). On itère alors la procédure jusqu'à avoir identifié les particules de classes 1 à $k-1$ dans $\mathcal{S}_k$. On identifie alors les n_k particules restantes de $\mathcal{S}_k$ à des particules de classe k . À l'issue des N étapes, on a transformé la configuration de $\mathcal{S}_N$ en une configuration du modèle à N classes de particules : il s'agit de la configuration $\theta(\tilde{\mathcal{C}})$.

Ferrari et Martin ont prouvé que cette application θ envoie bien la mesure uniforme sur $\tilde{\Omega}$ vers la mesure stationnaire du modèle d'exclusion totalement asymétrique à N classes de particules.

8.3.2 Modèle partiellement asymétrique : Ansatz matriciel

On considère maintenant le modèle partiellement asymétrique sur un anneau avec N classes de particules. Chaque site i peut être vide, auquel cas on associe au site i la variable d'occupation $\tau_i = 0$, ou occupé par une particule de classe J comprise entre 1 et N , ce qui correspond à une variable d'occupation $\tau_i = J$. Les probabilités stationnaires sont alors données par l'Ansatz matriciel suivant [154, 5] :

$$P_\infty(\mathcal{C}) = \frac{1}{Z} \text{Tr}[X_{\tau_1}^{(N)} \dots X_{\tau_L}^{(N)}] , \quad (8.88)$$

qui a la même forme que pour le modèle à deux classes de particules, excepté pour le fait qu'il y a maintenant $N + 1$ matrices différentes $X_0^{(N)}$, $X_1^{(N)}$, $\dots$, et $X_N^{(N)}$. On a indiqué en exposant des matrices le nombre de classes de particules du modèle considéré. Les matrices $X_J^{(N)}$ sont construites de manière récursive par rapport à N [154, 5] :

$$X_J^{(N)} = \sum_{M=0}^{N-1} a_{JM}^{(N)} \otimes X_M^{(N-1)} \quad \text{pour } 0 \leq J \leq N . \quad (8.89)$$

La récurrence est initialisée par

$$X_0^{(1)} = X_1^{(1)} = 1 , \quad (8.90)$$

ce qui donne bien des probabilités stationnaires égales pour toutes les configurations dans le cas du modèle à une classe de particules. Les matrices $a_{JM}^{(N)}$ intervenant dans la définition (8.89) des matrices $X_J^{(N)}$ sont données par

$$a_{JM}^{(N)} = 0 \quad \text{pour } 0 < M < J \leq N \quad (8.91)$$

$$a_{JM}^{(N)} = A^{\otimes(J-1)} \otimes \delta \otimes \mathbb{1}^{\otimes(M-J-1)} \otimes \epsilon \otimes \mathbb{1}^{\otimes(N-M-1)} \quad \text{pour } 0 < J < M \leq N-1 \quad (8.92)$$

$$a_{0M}^{(N)} = \mathbb{1}^{\otimes(M-1)} \otimes \epsilon \otimes \mathbb{1}^{\otimes(N-M-1)} \quad \text{pour } 0 < M \leq N-1 \quad (8.93)$$

$$a_{JJ}^{(N)} = A^{\otimes(J-1)} \otimes \mathbb{1}^{\otimes(N-J)} \quad \text{pour } 0 < J \leq N-1 \quad (8.94)$$

$$a_{00}^{(N)} = \mathbb{1}^{\otimes(N-1)} \quad (8.95)$$

$$a_{J0}^{(N)} = A^{\otimes(J-1)} \otimes \delta \otimes \mathbb{1}^{\otimes(N-J-1)} \quad \text{pour } 0 < J \leq N-1 \quad (8.96)$$

$$a_{N0}^{(N)} = A^{\otimes(N-1)} . \quad (8.97)$$

Toutes les matrices $a_{JM}^{(N)}$ s'écrivent donc comme des produits tensoriels de $N-1$ matrices. Enfin, les matrices δ , ϵ et A vérifient l'algèbre

$$\delta\epsilon - x\epsilon\delta = (1-x)\mathbb{1} \quad (8.98)$$

$$\delta A = xA\delta \quad (8.99)$$

$$A\epsilon = x\epsilon A . \quad (8.100)$$

On note qu'il s'agit de la même algèbre que celle que vérifient les matrices $D - \mathbb{1}$, $E - \mathbb{1}$ et A du modèle à deux classes de particules.

Itérant la relation (8.89), on constate que les matrices $X_J^{(N)}$ que nous venons de définir sont des combinaisons linéaires de produit tensoriel de $\binom{N}{2}$ matrices prises parmi δ , ϵ , A et $\mathbb{1}$. Dans la suite, on appellera « matrices élémentaires » ces quatre matrices. Génériquement, les matrices élémentaires doivent être infinies pour que l'algèbre (8.98-8.100) soit vérifiée. Une

représentation matricielle de l'algèbre des matrices élémentaires est par exemple

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1-x} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{1-x^2} & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{1-x^3} & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1-x} & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & \sqrt{1-x^2} & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & \sqrt{1-x^3} & 0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & x & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & x^2 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & x^3 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (8.101)$$

On note que la dépendance de l'Ansatz matriciel en l'asymétrie x est toute entière contenue dans l'algèbre des matrices δ , ϵ et A : l'expression (8.89) des matrices $X_J^{(N)}$ en fonction de matrices $a_{JM}^{(N)}$ et des matrices $X_M^{(N-1)}$ ne dépend pas de manière explicite de l'asymétrie.

8.3.3 Preuve de l'Ansatz matriciel

Comme pour le modèle à deux classes de particules, la matrice de Markov $M^{(N)}$ du modèle à N classes de particules se décompose comme une somme de matrices locales agissant uniquement sur les sites i et $i+1$. On peut écrire

$$M^{(N)} = \sum_{i=1}^L \mathbb{1}^{\otimes(i-1)} \otimes M_{\text{loc}}^{(N)} \otimes \mathbb{1}^{\otimes(L-i-1)}. \quad (8.102)$$

La matrice locale $M_{\text{loc}}^{(N)}$ est maintenant une matrice $N^2 \times N^2$. Comme précédemment, l'Ansatz matriciel peut être prouvé en introduisant des « matrices chapeau » vérifiant la relation

$$\sum_{\sigma, \sigma'=0}^N (M_{\text{loc}}^{(N)})_{\tau\tau', \sigma\sigma'} X_{\sigma}^{(N)} X_{\sigma'}^{(N)} = X_{\tau}^{(N)} \hat{X}_{\tau'}^{(N)} - \hat{X}_{\tau}^{(N)} X_{\tau'}^{(N)}. \quad (8.103)$$

Connaissant la forme de la matrice locale $M_{\text{loc}}^{(N)}$, ces relations peuvent être réécrites sous la forme

$$[X_J^{(N)}, \hat{X}_J^{(N)}] = 0 \quad \text{si } 0 \leq J \leq N \quad (8.104)$$

$$X_J^{(N)} X_K^{(N)} - x X_K^{(N)} X_J^{(N)} = \hat{X}_J^{(N)} X_K^{(N)} - X_J^{(N)} \hat{X}_K^{(N)} \quad \text{si } 0 < J < K \leq N \text{ ou } 0 = K < J \leq N \quad (8.105)$$

$$X_J^{(N)} X_K^{(N)} - x X_K^{(N)} X_J^{(N)} = X_K^{(N)} \hat{X}_J^{(N)} - \hat{X}_K^{(N)} X_J^{(N)} \quad \text{si } 0 < J < K \leq N \text{ ou } 0 = K < J \leq N. \quad (8.106)$$

On peut alors montrer que les matrices définies par $\hat{X}_0^{(1)} = 1$ et $\hat{X}_1^{(1)} = x$ et par les relations de récurrence

$$\hat{X}_0^{(N)} = -(1-x) X_0^{(N)} + \sum_{M=0}^{N-1} a_{0M}^{(N)} \otimes \hat{X}_M^{(N-1)} \quad (8.107)$$

$$\hat{X}_J^{(N)} = \sum_{M=0}^{N-1} a_{JM}^{(N)} \otimes \hat{X}_M^{(N-1)} \quad \text{pour } 1 \leq J \leq N, \quad (8.108)$$

vérifient bien toutes les relations (8.104-8.106). Ceci peut être prouvé par récurrence sur N , en utilisant des relations algébriques vérifiées par les matrices $a_{JM}^{(N)}$. La preuve est cependant assez longue, et nous renvoyons le lecteur à l'article [5] pour les détails.

On note que contrairement aux cas du modèle ouvert et du modèle à deux classes de particules sur un anneau, pour lesquels les matrices chapeau pouvaient être choisies scalaires, il n'est plus possible ici de définir des matrices chapeau proportionnelles à la matrice identité. Ceci est relié au fait que les matrices $X_J^{(N)}$ intervenant dans l'Ansatz matriciel ne vérifient pas de relations algébriques simples. Ce sont en effet les matrices élémentaires qui composent les $X_J^{(N)}$ qui vérifient des relations algébriques simples (8.98-8.100).

8.3.4 Calcul explicite des probabilités stationnaires

Les probabilités stationnaires peuvent être calculées comme dans le cas du modèle à deux classes de particules, en utilisant l'algèbre des matrices δ , ϵ et A (8.98-8.100). Il faut pour cela écrire les matrices $X_J^{(N)}$ qui interviennent dans l'Ansatz matriciel comme des combinaisons linéaires de produits tensoriels de matrices élémentaires, en utilisant de manière répétée la relation de récurrence (8.89). Pour le modèle à deux classes de particules, on a par exemple

$$X_0^{(2)} = a_{00}^{(2)} + a_{01}^{(2)} = \mathbb{1} + \epsilon = E \quad (8.109)$$

$$X_1^{(2)} = a_{10}^{(2)} + a_{11}^{(2)} = \mathbb{1} + \delta = D \quad (8.110)$$

$$X_2^{(2)} = a_{20}^{(2)} = A. \quad (8.111)$$

On retrouve bien les matrices D et E définies dans ce cas. De même, pour le modèle à trois classes de particules, les matrices s'expriment comme des combinaisons linéaires de produits tensoriels de trois matrices :

$$X_0^{(3)} = a_{00}^{(3)} \otimes X_0^{(2)} + a_{01}^{(3)} \otimes X_1^{(2)} + a_{02}^{(3)} \otimes X_2^{(2)} = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes E + \epsilon \otimes \mathbb{1} \otimes D + \mathbb{1} \otimes \epsilon \otimes A \quad (8.112)$$

$$X_1^{(3)} = a_{10}^{(3)} \otimes X_0^{(2)} + a_{11}^{(3)} \otimes X_1^{(2)} + a_{12}^{(3)} \otimes X_2^{(2)} = \delta \otimes \mathbb{1} \otimes E + \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes D + \delta \otimes \epsilon \otimes A \quad (8.113)$$

$$X_2^{(3)} = a_{20}^{(3)} \otimes X_0^{(2)} + a_{22}^{(3)} \otimes X_2^{(2)} = A \otimes \delta \otimes E + A \otimes \mathbb{1} \otimes A \quad (8.114)$$

$$X_3^{(3)} = a_{30}^{(3)} \otimes X_0^{(2)} = A \otimes A \otimes E. \quad (8.115)$$

Utilisant le fait que pour des matrices T , U , V et W quelconques on a $(T \otimes U) \cdot (V \otimes W) = (T \cdot V) \otimes (U \cdot W)$ les produits de matrices $X_J^{(N)}$ donnant les poids stationnaires s'expriment alors comme des combinaisons linéaires de produits tensoriels de produits de matrices élémentaires. On constate sur l'exemple des matrices $X_J^{(2)}$ et $X_J^{(3)}$ que pour tout produit de matrices $X_J^{(N)}$ faisant intervenir au moins une fois chaque valeur de J comprise entre 0 et N , les produits de matrices élémentaires contiennent toujours au moins une fois la matrice A . Ceci peut en fait être prouvé de manière générale en utilisant l'expression (8.91-8.97) des matrices $a_J^{(N)}$ ainsi que la relation de récurrence (8.89) définissant les $X_J^{(N)}$.

Le calcul des probabilités stationnaires passe donc par le calcul de traces de produits de matrices élémentaires contenant au moins une matrice A , qui a été expliqué à la section (8.2.4). L'utilisation de la linéarité de la trace et de la propriété $\text{Tr}[T \otimes U] = (\text{Tr } T)(\text{Tr } U)$ pour des matrices T et U quelconques permet finalement d'obtenir une expression complètement explicite des probabilités stationnaires du modèle à N classes de particules, au moins pour de petits systèmes.

8.3.5 Matrice de transfert

Nous allons maintenant montrer que l'état stationnaire du modèle à N classes de particules peut être exprimé de manière compacte en faisant agir une matrice de transfert sur l'état stationnaire du modèle à $N - 1$ classes de particules.

Création de l'état stationnaire par l'action d'une matrice de transfert

On appellera dans la suite $|N\rangle$ le vecteur propre stationnaire de la matrice de Markov du modèle à N classes de particules, dont la composante sur une configuration caractérisée par les variables d'occupation $(j_1, \dots, j_L) = \vec{j}$ est donnée par l'Ansatz matriciel sous la forme

$$\langle j_1, \dots, j_L | N \rangle = \text{Tr} \left[X_{j_1}^{(N)} \dots X_{j_L}^{(N)} \right] |\vec{j}\rangle. \quad (8.116)$$

Utilisant l'expression récursive (8.89) des matrices $X_j^{(N)}$, on note que les composantes du vecteur $|N\rangle$ s'écrivent sous la forme

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[X_{j_1}^{(N)} \dots X_{j_L}^{(N)} \right] &= \sum_{i_1, \dots, i_L=0}^{N-1} \text{Tr} \left[\left(a_{j_1 i_1}^{(N)} \otimes X_{i_1}^{(N-1)} \right) \dots \left(a_{j_L i_L}^{(N)} \otimes X_{i_L}^{(N-1)} \right) \right] \\ &= \sum_{\vec{i}} \text{Tr} \left[\left(a_{j_1 i_1}^{(N)} \dots a_{j_L i_L}^{(N)} \right) \otimes \left(X_{i_1}^{(N-1)} \dots X_{i_L}^{(N-1)} \right) \right] \\ &= \sum_{\vec{i}} \text{Tr} \left[a_{j_1 i_1}^{(N)} \dots a_{j_L i_L}^{(N)} \right] \text{Tr} \left[X_{i_1}^{(N-1)} \dots X_{i_L}^{(N-1)} \right]. \end{aligned} \quad (8.117)$$

On a utilisé la notation $\vec{i} = (i_1, \dots, i_L)$ pour les variables d'occupation des sites d'un système à $N-1$ classes de particules. On constate que la relation précédente relie les poids du modèle à N classes de particules aux poids du modèle à $N-1$ classes de particules. Si l'on définit la *matrice de transfert* $T_L^{(N)}$ par

$$\langle \vec{j} | T_L^{(N)} | \vec{i} \rangle = \frac{1}{Z} \text{Tr} \left[a_{j_1 i_1}^{(N)} \dots a_{j_L i_L}^{(N)} \right], \quad (8.118)$$

on peut finalement écrire la relation suivante entre le vecteur stationnaire pour N classes de particules et le vecteur stationnaire pour $N-1$ classes de particules :

$$\boxed{|N\rangle = T_L^{(N)} |N-1\rangle}. \quad (8.119)$$

En itérant cette relation de récurrence, on obtient finalement une expression du vecteur $|N\rangle$ comme un produit de matrices de transfert agissant sur un état de base :

$$|N\rangle = T_L^{(N)} \dots T_L^{(2)} |1\rangle, \quad (8.120)$$

avec des poids stationnaires tous égaux pour le vecteur $|1\rangle$ correspondant au modèle à une seule espèce de particules.

La matrice de transfert $T_L^{(N)}$ est une matrice rectangulaire à $(N+1)^L$ lignes et N^L colonnes. Elle agit sur l'espace vectoriel engendré par toutes les configurations (quel que soit le nombre de particules de chaque espèce) du modèle à $N-1$ classes de particules, et son image appartient à l'espace vectoriel engendré par toutes les configurations du modèle à N classes de particules.

La matrice de transfert s'exprime comme la trace d'un produit de matrices $a_{ji}^{(N)}$, agissant sur un espace auxiliaire (*i.e.* un espace qui n'est pas l'espace vectoriel engendré par les configurations du système) de dimension infinie. On peut voir ces matrices $a_{ji}^{(N)}$ comme des éléments de matrice d'une matrice rectangulaire $a^{(N)}$ à $N+1$ lignes et N colonnes, représentant respectivement les $N+1$ et N configurations d'un site du modèle à N et $N-1$ classes de particules. Les matrices $a^{(N)}$ agissent donc à la fois sur l'espace vectoriel associé à un site du modèle d'exclusion et sur l'espace auxiliaire. On a par exemple

$$a^{(2)} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \epsilon \\ \delta & \mathbb{1} \\ A & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad a^{(3)} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} & \epsilon \otimes \mathbb{1} & \mathbb{1} \otimes \epsilon \\ \delta \otimes \mathbb{1} & \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} & \delta \otimes \epsilon \\ A \otimes \delta & 0 & A \otimes \mathbb{1} \\ A \otimes A & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.121)$$

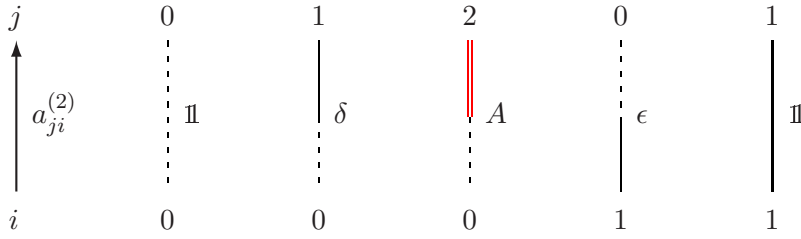


FIG. 8.5 – Transitions permises en un site par la matrice de transfert $T_L^{(2)}$ du modèle à deux classes de particules. Un site vide est représenté par une ligne en pointillés, un site occupé par une particule de première classe par un trait plein, et un site occupé par une particule de deuxième classe par une ligne double.

La matrice de transfert $T_L^{(N)}$ peut donc être écrite sous la forme

$$T_L^{(N)} = \frac{1}{Z} \text{Tr} \left[a^{(N)} \otimes \dots \otimes a^{(N)} \right], \quad (8.122)$$

où les produits tensoriels agissent sur l'espace des sites du modèle d'exclusion. La trace est effectuée sur l'espace auxiliaire. Dans le chapitre 9, on verra que la matrice de transfert commutant avec la matrice de Markov du modèle d'exclusion possède une forme similaire, avec la différence notable que l'espace auxiliaire sera alors de dimension finie.

Interprétation de la matrice de transfert

On considère une configuration $\vec{i}$ du modèle à $N-1$ classes de particules et une configuration $\vec{j}$ du modèle à N classes de particules. Alors on montre à partir de (8.91-8.97) que pour le modèle partiellement asymétrique ($x \neq 0$ et $x \neq 1$), l'élément de matrice $\langle \vec{j} | T_L^{(N)} | \vec{i} \rangle$ est non nul si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- un site vide de la configuration $\vec{i}$ correspond dans la configuration $\vec{j}$ à un site vide ou à un site occupé par une particule de classe comprise entre 1 et N .
- un site de la configuration $\vec{i}$ occupé par une particule de classe $K \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$ correspond dans $\vec{j}$ à un site vide ou à un site occupé par une particule de classe comprise entre 1 et K ($T_L^{(N)}$ n'augmente pas la classe des particules).
- le nombre total de particules de classes comprises entre 1 et $N-1$ dans les configurations $\vec{i}$ et $\vec{j}$ est identique (mais pas le nombre de sites vides ni le nombre de particules de classe N).

Les deux premières conditions donnent des contraintes locales en chaque site. La dernière impose une contrainte globale sur l'ensemble des sites. Pour $N=2$ et $N=3$, on a représenté en figure 8.5 et 8.6 les transitions permises localement par la matrice de transfert. Nous renvoyons le lecteur à l'article [5] en annexe pour une démonstration de cette caractérisation des éléments de matrice non nuls de $T_L^{(N)}$.

Pour le modèle totalement asymétrique, la caractérisation précédente des éléments de matrice non nuls de $T_L^{(N)}$ n'est plus suffisante, certains éléments de matrice supplémentaires s'annulant en $x=0$. On peut alors montrer que les seuls éléments de matrice non nuls de $T_L^{(N)}$ sont égaux à 1. Partant d'une configuration $\vec{j}$ du système à N classes de particules, les configurations $\vec{i}$ telles que $\langle \vec{j} | T_L^{(N)} | \vec{i} \rangle$ est non nul peuvent être construites en déplaçant les particules de $\vec{j}$ vers l'avant de la manière suivante (voir la figure 8.4 de la section 8.3.1) :

- on déplace vers l'avant les particules de classe 1 en leur interdisant de dépasser les particules de classe supérieure.

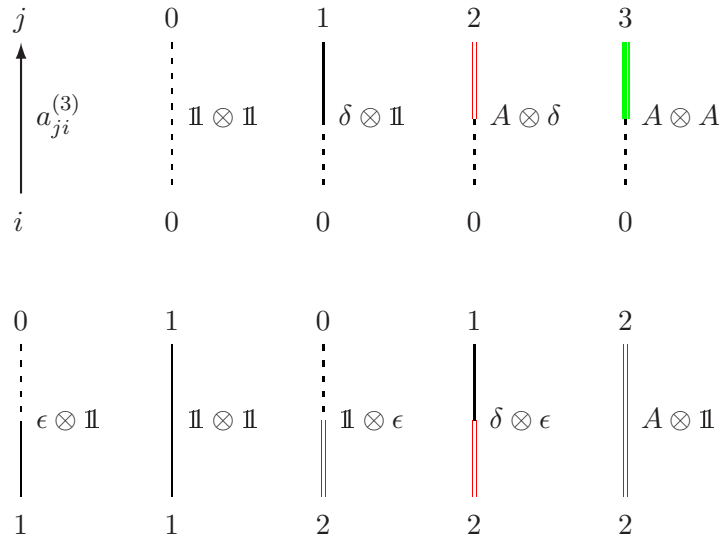


FIG. 8.6 – Transitions permises en un site par la matrice de transfert $T_L^{(3)}$ du modèle à trois classes de particules. Un site vide est représenté par une ligne en pointillés, un site occupé par une particule de première classe par un trait plein, un site occupé par une particule de deuxième classe par une ligne double, et un site occupé par une particule de troisième classe par une ligne triple.

- on déplace vers l'avant les particules de classe 2 en leur interdisant de dépasser les particules de classe supérieure (mais en leur permettant de dépasser les particules de classe 1).
- on déplace vers l'avant les particules de classe 3 en leur interdisant de dépasser les particules de classe supérieure (mais en leur permettant de dépasser les particules de classes 1 et 2).
- ...
- on déplace vers l'avant les particules de classe $N - 2$ en leur interdisant de dépasser les particules de classe N (mais en leur permettant de dépasser les particules de classes $< N - 2$).
- on déplace vers l'avant les particules de classe $N - 1$, en leur permettant de dépasser les particules de classes $< N - 1$.
- on remplace les sites occupés par des particules de classe N par des sites vides.

Au terme de cette procédure, on obtient un ensemble de configurations $\vec{i}$ du modèle à $N - 1$ classes de particules. Il s'agit des configurations qui sont telles que $\langle \vec{j} | T_L^{(N)} | \vec{i} \rangle = 1$. On note que cet algorithme est en fait équivalent à celui introduit par Ferrari et Martin [153] pour exprimer la mesure stationnaire du modèle totalement asymétrique à N classes de particules (voir section 8.3.1).

Chapitre 9

Ansatz de Bethe algébrique pour le modèle d'exclusion asymétrique

Ce chapitre est consacrée à la formulation algébrique de l'Ansatz de Bethe [161, 162, 163, 164, 165]. Nous allons y montrer que la matrice de Markov du modèle d'exclusion asymétrique (ainsi que sa déformation permettant d'étudier les fluctuations du courant) est similaire à un hamiltonien de chaîne de spin XXZ, et qu'elle appartient à une famille de matrices de transfert à un paramètre commutant entre elles [18]. Comme la matrice de Markov du modèle d'exclusion, ces matrices de transfert peuvent être diagonalisées en utilisant l'Ansatz de Bethe, qui sera formulé ici en terme de produits d'opérateurs appliqués sur un état fondamental. Nous présenterons cet Ansatz de Bethe algébrique tout d'abord pour le modèle à une classe de particules, et nous généraliserons ensuite cela au cas du modèle avec un nombre arbitraire de classes de particules [155, 156, 89].

9.1 Lien entre la matrice de Markov et le hamiltonien de la chaîne de spin XXZ

Nous établissons dans cette section que la matrice de Markov du modèle d'exclusion asymétrique avec des conditions aux bords périodiques et le hamiltonien de la chaîne de spin XXZ avec des conditions aux bords « twistées » (ou quasi périodiques) sont reliés par une transformation de similitude, et possèdent donc le même spectre.

9.1.1 Matrice de Markov locale

On définit l'espace vectoriel de dimension deux V_i engendré par les deux configurations permises d'un site i du modèle d'exclusion, et on associe au nombre d'occupation τ du site ($\tau = 0$ pour un site vide, et $\tau = 1$ pour un site occupé par une unique particule) le vecteur $|\tau\rangle_i$ appartenant à V_i . À une configuration $\mathcal{C} = (\tau_1, \dots, \tau_L)$ du modèle d'exclusion sur un anneau constitué de L sites, on associe alors le *vecteur configuration* $|\mathcal{C}\rangle = |\tau_1, \dots, \tau_L\rangle = |\tau_1\rangle_1 \otimes \dots \otimes |\tau_L\rangle_L$ appartenant à l'espace vectoriel $V(L) = V_1 \otimes \dots \otimes V_L$ de dimension 2^L , construit comme le produit tensoriel des espaces vectoriels V_i associés aux L sites. L'ensemble des 2^L vecteurs configuration forment une base de $V(L)$.

La matrice de Markov M , ainsi que sa déformation $M(\gamma)$ (qui vérifie $M(\gamma = 0) = M$), ont été définies respectivement section 2.1.1 et 2.5 du chapitre 2. Ces matrices peuvent être vues comme les matrices d'opérateurs agissant sur l'espace vectoriel $V(L)$ si l'on considère l'espace des configurations sans restriction sur le nombre de particules, bien qu'il s'agisse d'une quantité conservée pour les matrices M et $M(\gamma)$.

La matrice $M(\gamma)$ agit localement sur les sites : pour un vecteur configuration $|\mathcal{C}\rangle$, le vecteur $M(\gamma)|\mathcal{C}\rangle$ s'écrit comme une combinaison linéaire de $|\mathcal{C}\rangle$ et des vecteurs configuration $|\mathcal{C}_i\rangle$ tels que

la configuration $\mathcal{C}_i$ ne diffère de la configuration $\mathcal{C}$ que par l'échange des nombres d'occupation des sites i et $i + 1$ (on a identifié le site $L + 1$ au site 1, comme l'impose la périodicité du système). La matrice déformée $M(\gamma)$ peut donc s'écrire comme une somme sur i entre 1 et L d'opérateurs $M_{i,i+1}(\gamma)$ agissant uniquement sur les sites i et $i + 1$:

$$M(\gamma) = \sum_{i=1}^L M_{i,i+1}(\gamma) . \quad (9.1)$$

Dans la base

$$\begin{aligned} &(|\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, 1, 1, \tau_{i+2}, \dots, \tau_L\rangle, |\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, 1, 0, \tau_{i+2}, \dots, \tau_L\rangle, \\ &|\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, 0, 1, \tau_{i+2}, \dots, \tau_L\rangle, |\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, 0, 0, \tau_{i+2}, \dots, \tau_L\rangle) \end{aligned} \quad (9.2)$$

du sous espace vectoriel de $V(L)$ de dimension quatre engendré par les quatre configurations dont seuls les nombres d'occupation des sites i et $i + 1$ sont libres, les autres étant fixés à $\tau_1, \dots, \tau_L$, la matrice de l'opérateur $M_{i,i+1}(\gamma)$ est donnée par

$$M_{\text{loc}}(\gamma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & qe^{-\gamma} & 0 \\ 0 & pe^{\gamma} & -q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & xe^{-\gamma} & 0 \\ 0 & e^{\gamma} & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (9.3)$$

Pour $\gamma = 0$, les taux de transition de l'équation maîtresse (2.1) entre deux configurations ne différant que par l'échange des nombres d'occupation des sites voisins i et $i + 1$ se lisent sur les éléments non diagonaux de la matrice locale M_{loc} : la configuration locale 10 peut être quittée avec un taux p si la particule au site i avance vers le site $i + 1$, et elle peut être atteinte à partir de la configuration 01 avec un taux q si la particule recule. Le taux pour quitter la configuration 10 en faisant reculer la particule placée en i se trouve dans l'opérateur $M_{i-1,i}$, tandis que le taux pour quitter la configuration 10 en faisant reculer une particule placée en $i + 2$ se trouve dans l'opérateur $M_{i+1,i+2}$.

On note que la matrice locale M_{loc} ne dépend pas de $\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, \tau_{i+2}, \dots, \tau_L$ car les taux de transition pour l'échange des particules situées en i et $i + 1$ ne dépendent que des nombres d'occupation des sites i et $i + 1$. La matrice M_{loc} ne dépend pas non plus de i à cause de l'invariance par translation des taux p et q .

9.1.2 Chaîne de spin XXZ

Nous allons maintenant réécrire la matrice $M(\gamma)$ comme un hamiltonien de chaîne de spin XXZ avec des conditions aux bords « twistées ». Définissons l'opérateur (inversible) U par

$$U = U_1 \otimes U_2 \otimes \dots \otimes U_L , \quad (9.4)$$

où les opérateurs U_i agissent uniquement sur le site i , et ont pour matrice

$$U_i^{\text{loc}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\sqrt{x}}{e^{\gamma}}\right)^i \end{pmatrix} , \quad (9.5)$$

dans la base locale $(|1\rangle_i, |0\rangle_i)$ au site i . On effectue une transformation de similitude des $M_{i,i+1}(\gamma)$ par l'opérateur U : on définit les hamiltoniens locaux $H_{i,i+1}$ agissant sur les sites i et $i + 1$ par

$$H_{i,i+1} = -\frac{1}{p\sqrt{x}} U^{-1} M_{i,i+1}(\gamma) U - L \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x^{-1}}}{4} \mathbb{1} , \quad (9.6)$$

et le hamiltonien total H par

$$H = \sum_{i=1}^L H_{i,i+1} . \quad (9.7)$$

Comme l'opérateur U est diagonal dans la base des configurations de l'espace $V(L)$, la transformation de similitude par U revient à transformer le vecteur local $|0\rangle_i$ au site i en le vecteur $(e^\gamma/\sqrt{x})^i|0\rangle_i$, tout en laissant inchangé le vecteur $|1\rangle_i$.

On va maintenant montrer que le hamiltonien H (9.7) est le hamiltonien de la chaîne de spin XXZ avec des conditions aux bords twistées. Dans la base locale ($|11\rangle$, $|10\rangle$, $|01\rangle$, $|00\rangle$) aux sites i et $i+1$, le hamiltonien local $H_{i,i+1}$ a pour matrice

$$H_{\text{loc}} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x^{-1}}}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x^{-1}}}{4} - \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x^{-1}}}{2} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x^{-1}}}{4} + \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x^{-1}}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x^{-1}}}{4} \end{pmatrix}, \quad (9.8)$$

si i est compris entre 1 et $L-1$, et

$$H_{\text{bord}} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x^{-1}}}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x^{-1}}}{4} - \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x^{-1}}}{2} & -\left(\frac{\sqrt{x}}{e^\gamma}\right)^L & 0 \\ 0 & -\left(\frac{e^\gamma}{\sqrt{x}}\right)^L & \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x^{-1}}}{4} + \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x^{-1}}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x^{-1}}}{4} \end{pmatrix}, \quad (9.9)$$

pour $i = L$. En fonction des opérateurs de spin au site i : $S_i^{(x)}$, $S_i^{(y)}$, $S_i^{(z)}$, $S_i^{(+)}$, et $S_i^{(-)}$, dont les matrices locales respectives au site i sont les matrices de Pauli définies par

$$\sigma^{(x)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^{(y)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^{(z)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (9.10)$$

$$\sigma^{(+)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^{(-)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

le hamiltonien local s'écrit

$$H_{i,i+1} = -\frac{1}{2} \left(S_i^{(x)} S_{i+1}^{(x)} + S_i^{(y)} S_{i+1}^{(y)} + \Delta S_i^{(z)} S_{i+1}^{(z)} \right) - \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x^{-1}}}{2} \left(S_i^{(z)} - S_{i+1}^{(z)} \right), \quad (9.11)$$

si i est compris entre 1 et $L-1$, et

$$H_{L,1} = -\left(\frac{\sqrt{x}}{e^\gamma}\right)^L S_L^{(+)} S_1^{(-)} - \left(\frac{e^\gamma}{\sqrt{x}}\right)^L S_L^{(-)} S_1^{(+)} - \frac{\Delta}{2} S_L^{(z)} S_{i+1}^{(z)} - \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x^{-1}}}{2} \left(S_L^{(z)} - S_{i+1}^{(z)} \right), \quad (9.12)$$

pour $i = L$. On a posé

$$\Delta = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x^{-1}}}{2}. \quad (9.13)$$

Le paramètre x étant positif dans le modèle d'exclusion asymétrique, on en déduit que Δ est supérieur ou égal à un. Pour le modèle symétrique ($x = 1$), on trouve $\Delta = 1$.

On note que quand on effectue la somme sur i dans le hamiltonien total H , les termes en

$S_i^{(z)} - S_{i+1}^{(z)}$ se simplifient. Le hamiltonien total est finalement égal à

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{L-1} \left(S_i^{(x)} S_{i+1}^{(x)} + S_i^{(y)} S_{i+1}^{(y)} + \Delta S_i^{(z)} S_{i+1}^{(z)} \right) \quad (9.14)$$

$$- \left(\left(\frac{\sqrt{x}}{e^\gamma} \right)^L S_L^{(+)} S_1^{(-)} + \left(\frac{e^\gamma}{\sqrt{x}} \right)^L S_L^{(-)} S_1^{(+)} + \frac{\Delta}{2} S_L^{(z)} S_1^{(z)} \right).$$

Il s'agit du hamiltonien (non hermitien) de la chaîne de spin XXZ ferromagnétique avec des conditions aux bords twistées. Notant que

$$S_i^{(x)} S_{i+1}^{(x)} + S_i^{(y)} S_{i+1}^{(y)} = 2 \left(S_i^{(+)} S_{i+1}^{(-)} + S_i^{(-)} S_{i+1}^{(+)} \right), \quad (9.15)$$

on peut en effet écrire formellement les conditions aux bords sur les opérateurs $S^{(+)}$, $S^{(-)}$ et $S^{(z)}$ comme

$$\begin{cases} S_{L+1}^{(+)} = \left(\frac{e^\gamma}{\sqrt{x}} \right)^L S_1^{(+)} \\ S_{L+1}^{(-)} = \left(\frac{\sqrt{x}}{e^\gamma} \right)^L S_1^{(-)} \\ S_{L+1}^{(z)} = S_1^{(z)} \end{cases} \quad (9.16)$$

On note que le twist disparaît quand $\sqrt{x} = e^\gamma$, ce qui correspond au point de symétrie de Gallavotti-Cohen (voir section 2.5.5 du chapitre 2). On a donc en ce point un véritable hamiltonien de chaîne de spin XXZ avec des conditions aux bords périodiques. On note aussi que l'expression de $H(\gamma)$ ne dépend du paramètre γ qu'à travers $e^{L\gamma}$. Cela signifie en particulier que le spectre de la matrice $M(\gamma)$ est invariant par changement de γ en $\gamma + 2i\pi/L$.

Les chaînes de spin quantiques font partie des exemples les plus étudiés de systèmes intégrables (quantiques), en particulier la chaîne de spin XXZ. Le fait que la matrice de Markov du modèle d'exclusion et le hamiltonien de la chaîne de spin XXZ sont des matrices similaires implique alors qu'une partie des techniques développées pour l'étude des chaînes de spin peuvent être utilisées dans le cas du modèle d'exclusion. Dans le reste de ce chapitre, nous allons ainsi appliquer au modèle d'exclusion le formalisme de l'Ansatz de Bethe algébrique.

9.2 Famille de matrices de transfert pour le modèle à une classe de particules

Nous construisons dans cette section une famille de matrices de transfert à un paramètre commutant avec la matrice de Markov déformée $M(\gamma)$ introduite au chapitre 2 pour le modèle d'exclusion asymétrique avec une classe de particules.

9.2.1 Opérateurs locaux : opérateur de Lax et matrice R

Dans la section précédente, nous avons défini les espaces vectoriels V_i de dimension deux engendrés par les deux configurations possibles d'un site i du modèle d'exclusion (site occupé par une particule ou vide). Nous avons aussi introduit précédemment l'espace $V(L)$ de dimension 2^L , produit tensoriel des L espaces V_i , engendré par les 2^L configurations possibles d'un nombre arbitraire de particules disposées sur L sites en tenant compte de la contrainte d'exclusion. Nous aurons aussi besoin dans la suite de deux espaces vectoriels auxiliaires $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ de dimension deux, engendrés par les deux configurations de deux sites auxiliaires appelés a et a' .

On notera $|1\rangle_i$ le vecteur de $V(i)$ associé au site i occupé, et $|0\rangle_i$ le vecteur associé au site i vide. De même, on notera $|1\rangle_a$ et $|0\rangle_a$ (respectivement $|1\rangle_{a'}$ et $|0\rangle_{a'}$) les deux vecteurs de $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{A}'$) associés aux deux configurations du site a (resp. a'). Enfin, pour un produit tensoriel de plusieurs espaces vectoriels associés à des sites $r_1, \dots, r_m$ (sites du modèle d'exclusion, ou

sites auxiliaires), on utilisera de manière interchangeable les notations $|\tau_1\rangle_{r_1} \otimes \dots \otimes |\tau_m\rangle_{r_m}$ et $|\tau_1, \dots, \tau_m\rangle_{r_1, \dots, r_m}$ pour les vecteurs associés aux configurations des sites $r_1, \dots, r_m$ avec des nombres d'occupation τ_k pour le site r_k . On notera cependant $|\tau_1, \dots, \tau_L\rangle$ les vecteurs de $V(L)$, sans indice indiquant les sites sur lesquels le vecteur est défini pour alléger les expressions.

Pour un site r , la base $(|1\rangle_r, |0\rangle_r)$ de l'espace vectoriel associé au site r sera appelée dans la suite la « base des configurations » de cet espace vectoriel. Pour un produit tensoriel de plusieurs espaces vectoriels associés à des sites $r_1, \dots, r_m$ (comme par exemple $V(L)$), on appellera aussi base des configurations de cet espace vectoriel la base formée par les vecteurs $|\tau_1\rangle_{r_1} \otimes \dots \otimes |\tau_m\rangle_{r_m}$ ordonnés dans l'ordre lexicographique inverse des m -uplets $(\tau_1, \dots, \tau_m)$, c'est à dire dans l'ordre $(|1, \dots, 1, 1, 1\rangle_{r_1, \dots, r_m}, |1, \dots, 1, 1, 0\rangle_{r_1, \dots, r_m}, |1, \dots, 1, 0, 1\rangle_{r_1, \dots, r_m}, |1, \dots, 1, 0, 0\rangle_{r_1, \dots, r_m}, \dots)$.

Nous allons maintenant définir des opérateurs locaux agissant sur deux sites r et s distincts, pris parmi les L sites du modèle d'exclusion (que l'on notera généralement par l'entier i compris entre 1 et L), et les deux sites auxiliaires a et a' . Ces opérateurs locaux seront plongés dans un sous espace de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}' \otimes V(L)$ par des produits tensoriels avec l'opérateur identité lorsque cela sera nécessaire. On notera en indice de l'opérateur les deux sites sur lesquels il agit, et dont l'ordre sera en général important. Les matrices locales des opérateurs seront données dans la base locale $(|1\rangle_r \otimes |1\rangle_s, |1\rangle_r \otimes |0\rangle_s, |0\rangle_r \otimes |1\rangle_s, |0\rangle_r \otimes |0\rangle_s)$ des sites r et s .

On commence par définir l'opérateur de permutation $P_{r,s}$ qui échange les sites r et s , et dont la matrice locale est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.17)$$

Il agit sur un vecteur $|\rho\rangle_r \otimes |\sigma\rangle_s$ comme

$$P_{r,s}|\rho\rangle_r \otimes |\sigma\rangle_s = |\sigma\rangle_r \otimes |\rho\rangle_s. \quad (9.18)$$

On définit aussi l'opérateur $M_{r,s}$ dont la matrice locale est la matrice de Markov déformée locale (9.3) :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & qe^{-\gamma} & 0 \\ 0 & pe^{\gamma} & -q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9.19)$$

dont l'action sur le vecteur $|\rho\rangle_r \otimes |\sigma\rangle_s$ est

$$M_{r,s}|\rho\rangle_r \otimes |\sigma\rangle_s = (-p\delta_{\rho,1}\delta_{\sigma,0} - q\delta_{\rho,0}\delta_{\sigma,1})|\rho\rangle_r \otimes |\sigma\rangle_s + (pe^{\gamma}\delta_{\rho,1}\delta_{\sigma,0} + qe^{-\gamma}\delta_{\rho,0}\delta_{\sigma,1})|\sigma\rangle_r \otimes |\rho\rangle_s. \quad (9.20)$$

On peut alors définir l'opérateur $\mathcal{R}_{a,a'}(\nu)$ par

$$\boxed{R_{a,a'}(\nu) = \mathbb{1} + \nu M_{a,a'}}. \quad (9.21)$$

Les notations utilisées pour les indices indiquent qu'il agit de manière non triviale uniquement sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$. Sa matrice locale est donnée par

$$R(\nu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - p\nu & qe^{-\gamma}\nu & 0 \\ 0 & pe^{\gamma}\nu & 1 - q\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.22)$$

On définit enfin l'opérateur de Lax $\mathcal{L}_{a,i}(\lambda)$ par

$$\boxed{\mathcal{L}_{a,i}(\lambda) = P_{a,i}(\mathbb{1} + \lambda M_{a,i})}. \quad (9.23)$$

Il agit de manière non triviale sur $\mathcal{A} \otimes V$. On le définira aussi sur $\mathcal{A}' \otimes V$ en remplaçant simplement le site a par le site a' . La matrice locale de $\mathcal{L}_{a,i}(\lambda)$ (ainsi que celle de $\mathcal{L}_{a',i}(\lambda)$) est donnée par

$$\mathcal{L}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & pe^\gamma \lambda & 1 - q\lambda & 0 \\ 0 & 1 - p\lambda & qe^{-\gamma} \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.24)$$

On va adopter une représentation graphique des six éléments de matrice non nuls des opérateurs de Lax dans la base des configurations de $\mathcal{A}' \otimes V$, sous la forme de vertex constitués de deux lignes entrantes et de deux lignes sortantes. L'élément de matrice $({}_a\langle\beta| \otimes {}_i\langle\rho|)\mathcal{L}_{a,i}(\lambda)(|\alpha\rangle_a \otimes |\sigma\rangle_i)$ (où α, β, σ et ρ sont égaux à 0 ou 1) sera représenté par une ligne horizontale entrante venant de la droite et associée à α , une ligne horizontale sortante partant vers la gauche et associée à β , une ligne verticale entrante venant du bas et associée à σ , et une ligne verticale sortante pointant vers le haut et associée à ρ . Les lignes associées au vecteur $|1\rangle$ seront dessinées en trait plein, tandis que les lignes associées au vecteur $|0\rangle$ seront dessinées en pointillés. L'argument de $\mathcal{L}_{a,i}$ sera rappelé près du centre du vertex. On a donc les six diagrammes suivants, avec leurs poids (éléments de matrice associés) respectifs :

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & pe^\gamma \lambda & qe^{-\gamma} \lambda & 1 - p\lambda & 1 - q\lambda \\ \begin{array}{c} \rho \uparrow \\ \beta \leftarrow \lambda \rightarrow \alpha \\ \sigma \uparrow \end{array} & \begin{array}{c} \rho \uparrow \\ \beta \leftarrow \lambda \rightarrow \alpha \\ \sigma \uparrow \end{array} & \begin{array}{c} \rho \uparrow \\ \beta \leftarrow \lambda \rightarrow \alpha \\ \sigma \uparrow \end{array} & \begin{array}{c} \rho \uparrow \\ \beta \leftarrow \lambda \rightarrow \alpha \\ \sigma \uparrow \end{array} & \begin{array}{c} \rho \uparrow \\ \beta \leftarrow \lambda \rightarrow \alpha \\ \sigma \uparrow \end{array} & \begin{array}{c} \rho \uparrow \\ \beta \leftarrow \lambda \rightarrow \alpha \\ \sigma \uparrow \end{array} \end{array}. \quad (9.25)$$

Dans la suite, on omettra les flèches sur les lignes verticales et horizontales pour alléger les diagrammes. On note que les seuls éléments de matrice non nuls sont tels que l'ensemble $\{\alpha, \sigma\}$ est égal à l'ensemble $\{\beta, \rho\}$. L'opérateur de Lax $\mathcal{L}_{a,i}(\lambda)$ appliqué au vecteur $|\alpha\rangle_a \otimes |\sigma\rangle_i$ est en effet une combinaison linéaire de $|\alpha\rangle_a \otimes |\sigma\rangle_i$ et de $|\sigma\rangle_a \otimes |\alpha\rangle_i$. L'opérateur $\mathcal{L}_{a,i}(\lambda)$ préserve en particulier le nombre de particules total des sites a et i .

On représentera aussi graphiquement les éléments de matrice de produits d'opérateurs de Lax. On va illustrer cela sur l'exemple de l'élément de matrice suivant :

$$w = {}_{a,a',i,j}\langle 1, 0, 0, 1 | \mathcal{L}_{a',j}(\mu_2) \mathcal{L}_{a',i}(\mu_1) \mathcal{L}_{a,j}(\lambda_2) \mathcal{L}_{a,i}(\lambda_1) | 1, 0, 0, 1 \rangle_{a,a',i,j}. \quad (9.26)$$

Cet élément de matrice peut s'exprimer comme une somme de huit produits d'éléments de matrice d'opérateurs de Lax :

$$\begin{aligned} w = \sum_{\alpha=0}^1 \sum_{\beta=0}^1 \sum_{\sigma=0}^1 \sum_{\rho=0}^1 & [({}_a\langle 0 | \otimes {}_j\langle 1 |) \mathcal{L}_{a',j}(\mu_2) (|\beta\rangle_{a'} \otimes |\rho\rangle_j)] \times [({}_a\langle \beta | \otimes {}_i\langle 0 |) \mathcal{L}_{a',i}(\mu_1) (|0\rangle_{a'} \otimes |\sigma\rangle_i)] \\ & \times [({}_a\langle 1 | \otimes {}_j\langle \rho |) \mathcal{L}_{a,j}(\lambda_2) (|\alpha\rangle_a \otimes |1\rangle_j)] \times [({}_a\langle \alpha | \otimes {}_i\langle \sigma |) \mathcal{L}_{a,i}(\lambda_1) (|1\rangle_a \otimes |0\rangle_i)]. \end{aligned}$$

Le fait que les opérateurs de Lax préservent le nombre total de particules implique que les deux seuls termes non nuls correspondent à $(\alpha = 1, \beta = 0, \sigma = 0, \rho = 1)$ et à $(\alpha = 0, \beta = 1, \sigma = 1, \rho = 0)$. On représente alors l'élément de matrice w comme une somme de deux diagrammes, chaque diagramme étant construit en mettant bout à bout les représentations graphiques des éléments de matrice des opérateurs de Lax correspondant (on raccorde les lignes en trait plein

à des lignes en trait plein, et les lignes en pointillés à des lignes en pointillés). On a

$$w = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & \mu_2 & & \mu_1 & \\ \text{---} & & \beta & & \text{---} a' \\ \rho & & & \sigma & \\ & \lambda_2 & & \lambda_1 & \\ \text{---} & & \alpha & & \text{---} a \\ j & & & i & \end{array} & + & \begin{array}{ccccc} & \mu_2 & & \mu_1 & \\ \text{---} & & \beta & & \text{---} a' \\ \rho & & & \sigma & \\ & \lambda_2 & & \lambda_1 & \\ \text{---} & & \bar{\alpha} & & \text{---} a \\ j & & & i & \end{array} \end{array} . \quad (9.27)$$

Un élément de matrice donné d'un produit d'opérateurs de Lax correspond à un choix des lignes externes des termes de la représentation graphique. Les différents termes de la représentation graphique correspondent alors aux différentes façons de choisir les vertex internes. L'élément de matrice du produit d'opérateurs se lit alors simplement sur la représentation graphique en effectuant, pour chaque terme, le produit des poids des différents vertex.

9.2.2 Matrice de monodromie et matrice de transfert

Nous allons maintenant définir des opérateurs agissant sur plus de deux sites. Contrairement à ce que nous avons fait dans le cas des opérateurs locaux, nous indiquerons seulement en indice des opérateurs les sites auxiliaires sur lesquels ils agissent de manière non triviale, pour alléger les notations.

On définit tout d'abord la matrice de monodromie $T_a(\lambda)$ par

$$T_a(\lambda) = \mathcal{L}_{a,L}(\lambda) \dots \mathcal{L}_{a,2}(\lambda) \mathcal{L}_{a,1}(\lambda) . \quad (9.28)$$

Cet opérateur agit non trivialement sur $\mathcal{A} \otimes V(L)$. On définira de la même manière $T_{a'}(\lambda)$ agissant sur $\mathcal{A}' \otimes V(L)$. On peut représenter graphiquement les éléments de matrice de $T_a(\lambda)$ comme on l'a expliqué précédemment. Chaque élément de matrice de $T_a(\lambda)$ est représenté par un seul diagramme, et non pas une somme de diagrammes : il existe une seule façon de disposer les vertex. Par exemple, pour l'élément de matrice

$$w = {}_{a,1,2,3,4,5,6,7} \langle 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1 | T_a(\lambda) | 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1 \rangle_{a,1,2,3,4,5,6,7} , \quad (9.29)$$

d'un système avec $L = 7$, on a la représentation graphique suivante :

$$w = \begin{array}{ccccccc} & \lambda & & \lambda & & \lambda & & \lambda & & \lambda & & \lambda & \\ \text{---} & & \text{---} & & \text{---} & & \text{---} & & \text{---} & & \text{---} & & \text{---} a \\ | & & | & & | & & | & & | & & | & & | \\ 7 & & 6 & & 5 & & 4 & & 3 & & 2 & & 1 \end{array} . \quad (9.30)$$

On définit aussi la matrice de transfert $t(\lambda)$ comme la trace sur l'espace auxiliaire de la matrice de monodromie :

$$t(\lambda) = \text{Tr}_a T_a(\lambda) , \quad (9.31)$$

où Tr_a est la trace sur l'espace auxiliaire $\mathcal{A}$. L'opérateur $t(\lambda)$ agit donc sur $V(L)$. Le paramètre λ sera appelé dans la suite le *paramètre spectral*. Les éléments de matrice diagonaux de $t(\lambda)$ (dans la base des configurations de $V(L)$) sont tous non nuls et peuvent être représentés graphiquement par une somme de deux diagrammes correspondant aux deux états possibles du site auxiliaire. Les autres éléments de matrice non nuls de $t(\lambda)$ sont représentés graphiquement par

un seul diagramme, l'un des choix de l'état du site auxiliaire ne permettant pas de construire un diagramme compte tenu des six vertex permis. Par exemple, pour l'élément de matrice

$$w' = {}_{1,2,3,4,5,6,7} \langle 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1 | t(\lambda) | 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1 \rangle_{1,2,3,4,5,6,7}, \quad (9.32)$$

d'un système avec $L = 7$, aucun diagramme ne peut être dessiné en utilisant seulement les six vertex autorisés, et l'élément de matrice w' est donc nul. Par contre l'élément de matrice

$$w'' = {}_{1,2,3,4,5,6,7} \langle 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0 | t(\lambda) | 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1 \rangle_{1,2,3,4,5,6,7} \quad (9.33)$$

peut être représenté graphiquement par

$$w'' = \begin{array}{c} \text{Diagramme avec 7 sites et 7 lignes de transfert. Les sites 1, 3, 5, 7 ont des lignes pleines vers le haut et des lignes pointillées vers le bas. Les sites 2, 4, 6 ont des lignes pointillées vers le haut et des lignes pleines vers le bas. Une ligne courbe au-dessus relie les sites 1 et 7.} \end{array} \quad (9.34)$$

Enfin, pour l'élément de matrice diagonal

$$w''' = {}_{1,2,3} \langle 1, 0, 1 | t(\lambda) | 1, 0, 1 \rangle_{1,2,3}, \quad (9.35)$$

on a la représentation graphique

$$w''' = \begin{array}{c} \text{Diagramme 1: 3 sites, site 1 et 3 ont des lignes pleines vers le haut et des lignes pointillées vers le bas, site 2 a des lignes pointillées vers le haut et des lignes pleines vers le bas. Une ligne courbe au-dessus relie les sites 1 et 3.} \\ + \\ \text{Diagramme 2: 3 sites, site 1 et 3 ont des lignes pleines vers le haut et des lignes pleines vers le bas, site 2 a des lignes pointillées vers le haut et des lignes pointillées vers le bas. Une ligne courbe au-dessus relie les sites 1 et 3.} \end{array} \quad (9.36)$$

D'après la représentation graphique de $t(\lambda)$, on note en particulier que la matrice de transfert conserve le nombre total de particules des L sites. Nous verrons dans la suite que la matrice de transfert $t(\lambda)$ est la matrice de transfert du modèle à six vertex sur un anneau. Nous établirons aussi le lien précis entre la matrice de Markov du modèle d'exclusion et la matrice de transfert. Enfin, nous montrerons que les opérateurs $t(\lambda)$ et $t(\mu)$ pour deux paramètres spectraux λ et μ commutent.

9.2.3 Lien avec le modèle à six vertex

Nous allons maintenant montrer que la matrice de transfert $t(\lambda)$ que l'on vient de définir est en fait la matrice de transfert du modèle à six vertex sur un cylindre.

On considère un réseau rectangulaire de L sites dans la direction horizontale par M sites dans la direction verticale. Chaque arête peut être représentée soit en trait plein, soit en pointillés. On impose que chacun des $M \times L$ vertex de ce réseau soit égal à l'un des six vertex suivants, auxquels on a associé des poids ω_1 à ω_6 :

$$\begin{array}{cccccc} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 & \omega_5 & \omega_6 \\ \begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ | \end{array} & \begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ | \end{array} & \begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ | \end{array} & \begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ | \end{array} & \begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ | \end{array} & \begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ | \end{array} \end{array} \quad (9.37)$$

À une configuration des vertex sur le réseau, on associe un poids égal au produit des poids des différents vertex qui la composent. La fonction de partition $Z_{L,M}$ du modèle à six vertex est alors donnée par la somme des poids de toutes les configurations possibles des vertex. Plus précisément, on appellera $Z_{L,M}(\tau_1, \dots, \tau_L)$ la fonction de partition avec des conditions aux bords périodiques dans la direction horizontale, et avec une configuration $(\tau_1, \dots, \tau_L)$ des arêtes sur la M -ième ligne ($\tau_i = 0$ correspondant à une arête en pointillés et $\tau_i = 1$ à une arête en trait plein). On ne spécifiera pas les conditions aux bords sur la première ligne. On peut alors écrire

$$Z_{L,M+1}(\tau_1, \dots, \tau_L) = \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_L=0}^1 t_{6V}(\tau_1, \dots, \tau_L | \sigma_1, \dots, \sigma_L) Z_{L,M}(\sigma_1, \dots, \sigma_L), \quad (9.38)$$

où t_{6V} est la matrice de transfert du modèle à six vertex qui impose que seules les configurations possibles des vertex contribuent à l'équation de récurrence précédente pour la fonction de partition. On constate alors que la matrice de transfert définie précédemment comme trace sur l'espace auxiliaire de produits d'opérateurs de Lax est précisément la matrice de transfert du modèle à six vertex avec les poids donnés en (9.25) : $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1$, $\omega_3 = pe^\gamma \lambda$, $\omega_4 = qe^{-\gamma} \lambda$, $\omega_5 = 1 - p\lambda$ et $\omega_6 = 1 - q\lambda$.

9.2.4 Lien avec la matrice de Markov

Nous allons maintenant établir le lien entre la matrice de Markov déformée et la matrice de transfert $t(\lambda)$ qui a été construite précédemment. On va montrer que la matrice de transfert avec un paramètre spectral nul $t(0)$ est l'opérateur qui décale d'un site vers l'avant les particules, et que la matrice de Markov déformée s'exprime en fonction de la matrice de transfert par

$$M(\gamma) = t'(0)t^{-1}(0). \quad (9.39)$$

Pour $\lambda = 0$, les poids des vertex de $\mathcal{L}_{a,i}(\lambda)$ deviennent

$$, \quad (9.40)$$

et l'opérateur de Lax $\mathcal{L}_{a,i}(0)$ est simplement égal à l'opérateur de permutation $P_{a,i}$ entre les sites a et i . Pour une configuration $(\tau_1, \dots, \tau_L)$ des L sites du modèle d'exclusion à laquelle on associe le vecteur $|\tau_1, \dots, \tau_L\rangle$ de $V(L)$, on peut alors écrire

$$t(0)|\tau_1, \dots, \tau_L\rangle = {}_a\langle 0|P_{a,L} \dots P_{a,1}(|0\rangle_a \otimes |\tau_1, \dots, \tau_L\rangle) + {}_a\langle 1|P_{a,L} \dots P_{a,1}(|1\rangle_a \otimes |\tau_1, \dots, \tau_L\rangle) \quad (9.41)$$

$$= \sum_{\alpha=0}^1 {}_a\langle \alpha|\tau_L\rangle_a \times |\alpha, \tau_1, \dots, \tau_{L-1}\rangle = |\tau_L, \tau_1, \dots, \tau_{L-1}\rangle.$$

On trouve donc bien que l'opérateur $t(0)$ décale d'un site vers l'avant les particules.

On passe maintenant à l'opérateur $t'(0)$, qui s'écrit en fonction des opérateurs de Lax sous la forme

$$t'(0) = \sum_{\alpha=0}^1 \sum_{i=1}^L {}_a\langle \alpha|P_{a,L} \dots P_{a,i+1} \mathcal{L}'_{a,i}(0) P_{a,i-1} \dots P_{a,1}|\alpha\rangle. \quad (9.42)$$

On a tenu compte du fait que les opérateurs de Lax pour un paramètre spectral nul sont des opérateurs de permutation. On peut faire passer tous les opérateurs de permutation à droite de $\mathcal{L}'_{a,i}(0)$ dans l'équation précédente en utilisant la relation $P_{a,i}U_{a,1,\dots,L}P_{a,i} = U_{i,1,\dots,i-1,a,i+1,\dots,L}$ valable pour tout opérateur U agissant sur les sites $a, 1, \dots, L$. On obtient alors

$$t'(0) = \sum_{\alpha=0}^1 \sum_{i=1}^L \langle \alpha | \mathcal{L}'_{i+1,i}(0) P_{a,L} \dots P_{a,i+1} P_{a,i-1} \dots P_{a,1} | \alpha \rangle . \quad (9.43)$$

Pour le vecteur configuration $|\tau_1, \dots, \tau_L\rangle$ de $V(L)$, on a alors

$$t'(0)|\tau_1, \dots, \tau_L\rangle = \sum_{\alpha=0}^1 \sum_{i=1}^L \delta_{\tau_1, \alpha} \mathcal{L}'_{i+1,i}(0) |\alpha, \tau_1, \dots, \tau_{i-2}, \tau_i, \tau_{i-1}, \tau_{i+1}, \dots, \tau_{L-1}\rangle , \quad (9.44)$$

où on a utilisé l'action des permutations sur $|\alpha\rangle \otimes |\tau_1, \dots, \tau_L\rangle$ et le fait que $\mathcal{L}'_{i+1,i}(0)$ n'agit pas sur le site auxiliaire. Intercalant $t^{-1}(0)$, on obtient donc

$$t'(0)t^{-1}(0)|\tau_1, \dots, \tau_L\rangle = \sum_{i=1}^L \mathcal{L}'_{i+1,i}(0) |\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{i-1}, \tau_{i+1}, \tau_i, \tau_{i+2}, \dots, \tau_L\rangle . \quad (9.45)$$

Les poids des vertex associés à $\mathcal{L}'_{i+1,i}(0)$ sont donnés par

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & pe^\gamma & qe^{-\gamma} & -p & -q \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \mathcal{L}'(0) \text{---} \\ \downarrow \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} \mathcal{L}'(0) \text{---} \\ \uparrow \\ \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \mathcal{L}'(0) \text{---} \\ \downarrow \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} \mathcal{L}'(0) \text{---} \\ \uparrow \\ \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \mathcal{L}'(0) \text{---} \\ \downarrow \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} \mathcal{L}'(0) \text{---} \\ \uparrow \\ \text{---} \end{array} \end{array} , \quad (9.46)$$

et l'on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{i+1,i}(0)(|\tau_{i+1}\rangle_i \otimes |\tau_i\rangle_{i+1}) = & (pe^\gamma \delta_{\tau_i,1} \delta_{\tau_{i+1},0} + qe^{-\gamma} \delta_{\tau_i,0} \delta_{\tau_{i+1},1}) |\tau_{i+1}\rangle_i \otimes |\tau_i\rangle_{i+1} \\ & + (-p \delta_{\tau_i,1} \delta_{\tau_{i+1},0} - q \delta_{\tau_i,0} \delta_{\tau_{i+1},1}) |\tau_i\rangle_i \otimes |\tau_{i+1}\rangle_{i+1} . \end{aligned} \quad (9.47)$$

On trouve donc finalement

$$\begin{aligned} t'(0)t^{-1}(0)|\tau_1, \dots, \tau_L\rangle & \\ = \sum_{i=1}^L [& (pe^\gamma \delta_{\tau_i,1} \delta_{\tau_{i+1},0} + qe^{-\gamma} \delta_{\tau_i,0} \delta_{\tau_{i+1},1}) |\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{i-1}, \tau_{i+1}, \tau_i, \tau_{i+2}, \dots, \tau_L\rangle \\ & - (p \delta_{\tau_i,1} \delta_{\tau_{i+1},0} + q \delta_{\tau_i,0} \delta_{\tau_{i+1},1}) |\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{i-1}, \tau_i, \tau_{i+1}, \tau_{i+2}, \dots, \tau_L\rangle] . \end{aligned} \quad (9.48)$$

On constate que l'opérateur $t'(0)t^{-1}(0)$ est identique à la matrice de Markov déformée $M(\gamma)$.

La construction précédente de la matrice $M(\gamma)$ à partir de la matrice de transfert peut être généralisée pour obtenir d'autres opérateurs agissant de manière locale sur l'espace des configurations [166, 167] : on peut en effet montrer que l'opérateur défini comme la dérivée k -ième en $\lambda = 0$ du logarithme de $t(\lambda)$ peut s'écrire comme une somme d'opérateurs n'agissant que sur $k+1$ sites consécutifs.

9.2.5 Relation de Yang-Baxter et commutation des matrices de transfert

Nous allons maintenant montrer que les opérateurs $t(\lambda)$ pour différentes valeurs du paramètre spectral λ commutent entre eux, et commutent donc aussi avec la matrice de Markov

déformée. Pour cela, on va utiliser le fait que les opérateurs $\mathcal{L}$ et R vérifient l'équation de Yang-Baxter (locale)

$$\boxed{R_{a,a'}(\varphi(\lambda, \mu)) \mathcal{L}_{a,i}(\lambda) \mathcal{L}_{a',i}(\mu) = \mathcal{L}_{a,i}(\mu) \mathcal{L}_{a',i}(\lambda) R_{a,a'}(\varphi(\lambda, \mu))}, \quad (9.49)$$

où la fonction φ est définie par

$$\varphi(x, y) = \frac{x - y}{1 - (p + q)y + pqxy}. \quad (9.50)$$

Une manière simple de vérifier cette propriété consiste à écrire les matrices huit par huit des opérateurs $R_{a,a'}$, $\mathcal{L}_{a,i}$ et $\mathcal{L}_{a',i}$ plongés dans $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}' \otimes V$, et à les multiplier. On trouve alors que les matrices correspondant au membre de gauche et au membre de droite de (9.49) sont égales si la fonction φ est définie par (9.50). L'équation de Yang-Baxter peut aussi être vue comme une conséquence du fait que les matrices de Markov locales vérifient l'algèbre

$$M_{i,i+1}^2 = -(p + q)M_{i,i+1} \quad (9.51)$$

$$M_{i,i+1}M_{i+1,i+2}M_{i,i+1} = pqM_{i,i+1} \quad (9.52)$$

$$M_{i,i+1}M_{i-1,i}M_{i,i+1} = pqM_{i,i+1} \quad (9.53)$$

$$M_{i,i+1}M_{j,j+1} = M_{j,j+1}M_{i,i+1} \quad \text{si } |i - j| \geq 2, \quad (9.54)$$

appelée algèbre de Temperley-Lieb [168, 169, 18].

L'équation de Yang-Baxter (9.49) est une propriété très importante : elle est la clef de l'intégrabilité du modèle. Le fait que les matrices de transfert constituent une famille commutante à un paramètre continu est en effet une conséquence directe de (9.49). On va tout d'abord montrer que l'on peut remplacer les opérateurs de Lax dans l'équation de Yang-Baxter par des matrices de monodromie. On peut tout d'abord écrire

$$\begin{aligned} R_{a,a'}(\varphi(\lambda, \mu))T_a(\lambda)T_{a'}(\mu) \\ = R_{a,a'}(\varphi(\lambda, \mu))(\mathcal{L}_{a,L} \dots \mathcal{L}_{a,2}(\lambda)\mathcal{L}_{a,1}(\lambda))(\mathcal{L}_{a',L}(\mu) \dots \mathcal{L}_{a',2}(\mu)\mathcal{L}_{a',1}(\mu)). \end{aligned} \quad (9.55)$$

Les opérateurs $\mathcal{L}_{a,i}(\lambda)$ et $\mathcal{L}_{a',j}(\mu)$ commutent pour $i \neq j$ vu qu'ils n'agissent pas sur les mêmes sites. On a donc

$$\begin{aligned} R_{a,a'}(\varphi(\lambda, \mu))T_a(\lambda)T_{a'}(\mu) \\ = R_{a,a'}(\varphi(\lambda, \mu))(\mathcal{L}_{a,L}(\lambda)\mathcal{L}_{a',L}(\mu)) \dots (\mathcal{L}_{a,2}(\lambda)\mathcal{L}_{a',2}(\mu))(\mathcal{L}_{a,1}(\lambda)\mathcal{L}_{a',1}(\mu)). \end{aligned} \quad (9.56)$$

On peut maintenant utiliser l'équation de Yang-Baxter L fois de suite pour faire commuter les $\mathcal{L}_{a,i}(\lambda)$ et $\mathcal{L}_{a',i}(\mu)$. On obtient

$$\begin{aligned} R_{a,a'}(\varphi(\lambda, \mu))T_a(\lambda)T_{a'}(\mu) \\ = (\mathcal{L}_{a,L}(\mu)\mathcal{L}_{a',L}(\lambda)) \dots (\mathcal{L}_{a,2}(\mu)\mathcal{L}_{a',2}(\lambda))(\mathcal{L}_{a,1}(\mu)\mathcal{L}_{a',1}(\lambda))R_{a,a'}(\varphi(\lambda, \mu)). \end{aligned} \quad (9.57)$$

On regroupe tous les $\mathcal{L}_{a,j}(\mu)$ à gauche et tous les $\mathcal{L}_{a',i}(\lambda)$ à droite. On obtient alors la relation de Yang-Baxter (globale) pour la matrice de monodromie :

$$\boxed{R_{a,a'}(\varphi(\lambda, \mu))T_a(\lambda)T_{a'}(\mu) = T_a(\mu)T_{a'}(\lambda)R_{a,a'}(\varphi(\lambda, \mu))}. \quad (9.58)$$

Comme $R_{a,a'}(\nu)$ est génériquement inversible, on peut alors multiplier l'équation précédente par $R_{a,a'}(\phi(\lambda, \mu))^{-1}$ et prendre la trace sur les espaces auxiliaires $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$. La cyclicité de la trace permet finalement de conclure que

$$\boxed{t(\lambda)t(\mu) = t(\mu)t(\lambda)}. \quad (9.59)$$

Comme la matrice $M(\gamma)$ s'exprime en fonction de la matrice de transfert par (9.39), on note que la relation (9.59) implique que la matrice $M(\gamma)$ commute avec la matrice de transfert $t(\lambda)$ quelle que soit la valeur du paramètre spectral λ .

9.2.6 Opérateurs de la matrice de monodromie

Nous allons maintenant définir, à partir de la matrice de monodromie, des opérateurs agissant sur $V(L)$. Ces opérateurs seront utilisés dans la suite pour diagonaliser la matrice de transfert.

Dans la base $(|1\rangle_a, |0\rangle_a)$ de l'espace auxiliaire $\mathcal{A}$, la matrice de monodromie peut s'écrire sous la forme d'une matrice deux par deux d'opérateurs agissant sur $V(L)$. On écrira

$$T_a(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (9.60)$$

ou, de manière équivalente

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= {}_a\langle 1|T(\lambda)|1\rangle_a & B(\lambda) &= {}_a\langle 1|T(\lambda)|0\rangle_a \\ C(\lambda) &= {}_a\langle 0|T(\lambda)|1\rangle_a & D(\lambda) &= {}_a\langle 0|T(\lambda)|0\rangle_a \end{aligned} \quad (9.61)$$

La matrice de transfert s'exprime alors simplement en fonction des opérateurs A et D :

$$t(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda). \quad (9.62)$$

La relation de Yang-Baxter (9.58) impose alors seize relations algébriques quadratiques entre les opérateurs $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ et $D(\lambda)$. Ces seize relations sont données en appendice 9.A.a. Trois d'entre elles seront particulièrement utiles dans la suite :

$$A(\lambda)C(z) = \frac{1}{pe^\gamma \varphi(\lambda, z)} C(z)A(\lambda) - \frac{1 - q\varphi(\lambda, z)}{pe^\gamma \varphi(\lambda, z)} C(\lambda)A(z) \quad (9.63)$$

$$D(\lambda)C(z) = \frac{1}{pe^\gamma \varphi(z, \lambda)} C(z)D(\lambda) - \frac{1 - p\varphi(z, \lambda)}{pe^\gamma \varphi(z, \lambda)} C(\lambda)D(z) \quad (9.64)$$

$$C(z)C(z') = C(z')C(z). \quad (9.65)$$

Elles permettront en effet de montrer que l'Ansatz de Bethe algébrique que nous présenterons plus tard donne les états propres de la matrice de transfert.

9.2.7 Matrice de transfert inhomogène

Avant de passer à la diagonalisation de la matrice de transfert qui a été définie précédemment, nous allons montrer qu'il est possible de généraliser la construction précédente pour obtenir une matrice de transfert inhomogène. Nous verrons dans la suite qu'il est nécessaire de considérer des matrices de transfert inhomogènes dans le cas du modèle d'exclusion à plusieurs classes de particules. Nous présentons cependant la construction de la matrice de transfert inhomogène dès maintenant, pour le modèle à une classe de particules, qui est un peu plus simple.

On note que la fonction φ vérifie la propriété suivante :

$$\boxed{\varphi(\varphi(x, \alpha), \varphi(y, \alpha)) = \varphi(x, y)}. \quad (9.66)$$

Cette propriété permet de définir une famille commutante de matrices de transfert inhomogènes. On définit l'opérateur de Lax $\mathcal{L}_{a,i}$ avec une inhomogénéité α au site i par

$$\mathcal{L}_{a,i}(\lambda, \alpha) = \mathcal{L}_{a,i}(\varphi(\lambda, \alpha)) = P_{a,i}(\mathbb{1} + \varphi(\lambda, \alpha)M_{a,i}), \quad (9.67)$$

ainsi que la matrice de monodromie inhomogène

$$T_a(\lambda, \{\alpha\}) = \mathcal{L}_{a,L}(\lambda, \alpha_L) \dots \mathcal{L}_{a,2}(\lambda, \alpha_2) \mathcal{L}_{a,1}(\lambda, \alpha_1), \quad (9.68)$$

avec L inhomogénéités α_i aux L sites i , et la matrice de transfert inhomogène

$$t(\lambda, \{\alpha\}) = \text{Tr}_a T(\lambda, \{\alpha\}) . \quad (9.69)$$

Ces opérateurs inhomogènes se ramènent aux opérateurs homogènes si toutes les homogénéités α_i sont nulles. D'après la propriété (9.66) de la fonction φ , l'équation de Yang-Baxter locale s'écrit alors

$$R_{a,a'}(\varphi(\lambda, \mu)) \mathcal{L}_{a,i}(\lambda, \alpha) \mathcal{L}_{a',i}(\mu, \alpha) = \mathcal{L}_{a,i}(\mu, \alpha) \mathcal{L}_{a',i}(\lambda, \alpha) R_{a,a'}(\varphi(\lambda, \mu)) . \quad (9.70)$$

On constate que la matrice R ne dépend pas de l'inhomogénéité α . On a donc, de la même manière que dans le cas homogène, une équation de Yang-Baxter globale pour la matrice de monodromie :

$$R_{a,a'}(\varphi(\lambda, \mu)) T_a(\lambda, \{\alpha\}) T_{a'}(\mu, \{\alpha\}) = T_a(\mu, \{\alpha\}) T_{a'}(\lambda, \{\alpha\}) R_{a,a'}(\varphi(\lambda, \mu)) . \quad (9.71)$$

Ceci implique alors, par le même raisonnement que dans le cas de la matrice de transfert homogène, que les matrices de transfert inhomogènes forment une famille commutante pour les différentes valeurs du paramètre spectral (mais les mêmes inhomogénéités) :

$$t(\lambda, \{\alpha\}) t(\mu, \{\alpha\}) = t(\mu, \{\alpha\}) t(\lambda, \{\alpha\}) . \quad (9.72)$$

On peut encore une fois écrire la matrice de monodromie $T_a(\lambda, \{\alpha\})$ comme une matrice deux par deux d'opérateurs A , B , C et D agissant sur $V(L)$:

$$T_a(\lambda, \{\alpha\}) = \begin{pmatrix} A(\lambda, \{\alpha\}) & B(\lambda, \{\alpha\}) \\ C(\lambda, \{\alpha\}) & D(\lambda, \{\alpha\}) \end{pmatrix} . \quad (9.73)$$

Comme la matrice R ne dépend pas des inhomogénéités, l'algèbre des opérateurs A , B , C et D est la même que dans le cas homogène (voir section 9.A.a).

9.3 Ansatz de Bethe algébrique

Nous présentons dans cette section la formulation algébrique de l'Ansatz de Bethe [170, 104], qui permet de diagonaliser la matrice de transfert qui a été construite dans la section précédente.

9.3.1 Ansatz de Bethe algébrique pour la matrice de transfert homogène

La formulation algébrique de l'Ansatz de Bethe consiste à construire les vecteurs propres de la matrice de transfert $t(\lambda)$ en appliquant des « opérateurs de création » sur un état fondamental. On choisit pour état fondamental le vecteur

$$|\Omega\rangle = |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \otimes \dots \otimes |0\rangle_L . \quad (9.74)$$

Il s'agit du vecteur de $V(L)$ engendré par la seule configuration pour laquelle tous les sites sont vides. Le vecteur $|\Omega\rangle$ est donc vecteur propre de l'opérateur nombre de particules avec valeur propre 0. Il est aussi vecteur propre des opérateurs $A(\lambda)$ et $D(\lambda)$:

$$A(\lambda)|\Omega\rangle = p^L e^{L\gamma} \lambda^L |\Omega\rangle \quad (9.75)$$

$$D(\lambda)|\Omega\rangle = |\Omega\rangle . \quad (9.76)$$

Le vecteur $|\Omega\rangle$ est donc vecteur propre de la matrice de transfert $t(\lambda)$:

$$t(\lambda)|\Omega\rangle = (A(\lambda) + D(\lambda))|\Omega\rangle = (1 + p^L e^{L\gamma} \lambda^L) |\Omega\rangle . \quad (9.77)$$

Les autres états propres de la matrice de transfert vont être construits en appliquant sur l'état fondamental $|\Omega\rangle$ des opérateurs $C(\tilde{z}_j)$. On note en effet que $C(\lambda)$ appliqué à un vecteur propre de l'opérateur nombre de particules de valeur propre n donne un vecteur propre de l'opérateur nombre de particules de valeur propre $n+1$. Au contraire, $B(\lambda)$ diminue le nombre de particules d'une unité, tandis que $A(\lambda)$ et $D(\lambda)$ le laissent inchangé. Étant donnés n paramètres $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n$, on définit le vecteur

$$|\psi(\{\tilde{z}\})\rangle = C(\tilde{z}_1)C(\tilde{z}_2)\dots C(\tilde{z}_n)|\Omega\rangle, \quad (9.78)$$

qui est vecteur propre de l'opérateur nombre de particules avec la valeur propre n . D'après la relation de commutation (9.65), le vecteur $|\psi(\{\tilde{z}\})\rangle$ ne dépend pas de l'ordre des $\tilde{z}_j$. Nous allons montrer dans la suite qu'il est possible de choisir les $\tilde{z}_j$ de telle sorte que $|\psi(\{\tilde{z}\})\rangle$ soit un vecteur propre de la matrice de transfert $t(\lambda)$.

9.3.2 Application de $t(\lambda)$ sur le vecteur $|\psi(\{\tilde{z}\})\rangle$

On applique au vecteur $|\psi(\{\tilde{z}\})\rangle$ les opérateurs $A(\lambda)$ et $D(\lambda)$, dont la somme est égale à la matrice de transfert $t(\lambda)$. Les relations quadratiques (9.63) et (9.64) permettent de faire commuter respectivement le $A(\lambda)$ et le $D(\lambda)$ vers la droite. Une fois arrivés à la gauche de $|\omega\rangle$, $A(\lambda)$ et $D(\lambda)$ peuvent alors être éliminés en utilisant (9.75) et (9.76).

On note que les relations quadratiques (9.63) et (9.64) comportent chacune deux termes dans le membre de droite. Avec le premier terme, $A(\lambda)$ et $C(\tilde{z})$ (ou $D(\lambda)$ et $C(\tilde{z})$) sont commutés, chacun gardant son argument. Avec le second terme, $A(\lambda)$ et $C(\tilde{z})$ (ou $D(\lambda)$ et $C(\tilde{z})$) sont commutés mais échangent leurs arguments. L'utilisation n fois de suite de la relation (9.63) ou (9.64) va donc engendrer à la fois des termes proportionnels au vecteur $|\psi(\{\tilde{z}\})\rangle$, appelés « termes voulus », et des termes non proportionnels au vecteur $|\psi(\{\tilde{z}\})\rangle$, appelés « termes non voulus », dans lesquels l'un des $\tilde{z}_j$ est remplacé par λ .

D'après (9.63), (9.64), (9.75) et (9.76), les termes voulus engendrés par la commutation de $A(\lambda)$ et $D(\lambda)$ sur le vecteur $|\psi(\{\tilde{z}\})\rangle$ sont donnés par

$$A(\lambda)|\psi(\{\tilde{z}\})\rangle = p^L e^{L\gamma} \lambda^L \prod_{j=1}^n \frac{1}{pe^{\gamma}\varphi(\lambda, \tilde{z}_j)} |\psi(\{\tilde{z}\})\rangle + NV \quad (9.79)$$

$$D(\lambda)|\psi(\{\tilde{z}\})\rangle = \prod_{j=1}^n \frac{1}{pe^{\gamma}\varphi(\tilde{z}_j, \lambda)} |\psi(\{\tilde{z}\})\rangle + NV. \quad (9.80)$$

On a noté NV les termes non voulus. Comme les opérateurs $C(z)$ commutent, les termes non voulus peuvent s'écrire comme des combinaisons linéaires des vecteurs $|\psi_j(\{\tilde{z}\})\rangle$ définis par

$$|\psi_j(\{\tilde{z}\})\rangle = C(\tilde{z}_1)\dots C(\tilde{z}_{j-1})C(\lambda)C(\tilde{z}_{j+1})\dots C(\tilde{z}_n)|\Omega\rangle. \quad (9.81)$$

On s'intéresse au terme non voulu proportionnel à $|\psi_1(\{\tilde{z}\})\rangle$. Celui-ci est obtenu en échangeant l'argument de $C(\tilde{z}_1)$ et $A(\lambda)$ (ou $D(\lambda)$) dans la première commutation, et en préservant pour toutes les commutations ultérieures les arguments des opérateurs. On a donc

$$A(\lambda)|\psi(\{\tilde{z}\})\rangle = \left(-\frac{1-q\varphi(\lambda, \tilde{z}_1)}{pe^{\gamma}\varphi(\lambda, \tilde{z}_1)}\right) \left(\prod_{j=2}^n \frac{1}{pe^{\gamma}\varphi(\tilde{z}_1, \tilde{z}_j)}\right) (p^L e^{L\gamma} \tilde{z}_1^L) |\psi_1(\{\tilde{z}\})\rangle + \dots \quad (9.82)$$

$$D(\lambda)|\psi(\{\tilde{z}\})\rangle = \left(-\frac{1-p\varphi(\tilde{z}_1, \lambda)}{pe^{\gamma}\varphi(\tilde{z}_1, \lambda)}\right) \left(\prod_{j=2}^n \frac{1}{pe^{\gamma}\varphi(\tilde{z}_j, \tilde{z}_1)}\right) |\psi_1(\{\tilde{z}\})\rangle + \dots, \quad (9.83)$$

où les $\dots$ représentent les termes engendrés ne contenant pas $|\psi_1(\{\tilde{z}\})\rangle$. Comme les $C(\tilde{z})$ commutent (9.65), les termes restant peuvent être déterminés simplement en permutant les $\tilde{z}_j$. On

trouve donc

$$\begin{aligned} A(\lambda)|\psi(\{\tilde{z}\})\rangle &= \left(\prod_{j=1}^n \frac{1}{pe^{\gamma}\varphi(\lambda, \tilde{z}_j)} \right) (p^L e^{L\gamma} \lambda^L) |\psi(\{\tilde{z}\})\rangle \\ &+ \sum_{i=1}^n \left(-\frac{1 - q\varphi(\lambda, \tilde{z}_i)}{pe^{\gamma}\varphi(\lambda, \tilde{z}_i)} \right) \left(\prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \frac{1}{pe^{\gamma}\varphi(\tilde{z}_i, \tilde{z}_j)} \right) (p^L e^{L\gamma} \tilde{z}_i^L) |\psi_i(\{\tilde{z}\})\rangle, \end{aligned} \quad (9.84)$$

et

$$\begin{aligned} D(\lambda)|\psi(\{\tilde{z}\})\rangle &= \left(\prod_{j=1}^n \frac{1}{pe^{\gamma}\varphi(\lambda, \tilde{z}_j)} \right) |\psi(\{\tilde{z}\})\rangle \\ &+ \sum_{i=1}^n \left(-\frac{1 - p\varphi(\tilde{z}_i, \lambda)}{pe^{\gamma}\varphi(\tilde{z}_i, \lambda)} \right) \left(\prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \frac{1}{pe^{\gamma}\varphi(\tilde{z}_j, \tilde{z}_i)} \right) |\psi_i(\{\tilde{z}\})\rangle. \end{aligned} \quad (9.85)$$

9.3.3 Équations de Bethe

Connaissant l'action de $t(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda)$ sur le vecteur $|\psi(\{\tilde{z}\})\rangle$, on peut maintenant déterminer des conditions sur les $\tilde{z}_j$ pour que ce vecteur soit vecteur propre de la matrice de transfert. Si l'on suppose que les vecteurs $|\psi_i(\{\tilde{z}\})\rangle$ sont linéairement indépendants, l'annulation des termes non voulus donne

$$\left(-\frac{1 - q\varphi(\lambda, \tilde{z}_i)}{pe^{\gamma}\varphi(\lambda, \tilde{z}_i)} \right) \left(\prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \frac{1}{pe^{\gamma}\varphi(\tilde{z}_i, \tilde{z}_j)} \right) (p^L e^{L\gamma} \tilde{z}_i^L) + \left(-\frac{1 - p\varphi(\tilde{z}_i, \lambda)}{pe^{\gamma}\varphi(\tilde{z}_i, \lambda)} \right) \left(\prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \frac{1}{pe^{\gamma}\varphi(\tilde{z}_j, \tilde{z}_i)} \right) = 0. \quad (9.86)$$

On note que la dépendance en λ factorise. En effet, d'après l'expression (9.50) de φ , on a

$$\frac{1 - q\varphi(\lambda, \tilde{z}_i)}{\varphi(\lambda, \tilde{z}_i)} = \frac{(1 - q\lambda)(1 - p\tilde{z}_i)}{\lambda - \tilde{z}_i} \quad \text{et} \quad \frac{1 - p\varphi(\tilde{z}_i, \lambda)}{\varphi(\tilde{z}_i, \lambda)} = -\frac{(1 - q\lambda)(1 - p\tilde{z}_i)}{\lambda - \tilde{z}_i}. \quad (9.87)$$

On peut donc écrire les équations de Bethe suivantes

$$p^L e^{L\gamma} \tilde{z}_i^L = \prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \frac{\varphi(\tilde{z}_i, \tilde{z}_j)}{\varphi(\tilde{z}_j, \tilde{z}_i)}. \quad (9.88)$$

On pose

$$\tilde{z}_j = \frac{z_j}{pe^{\gamma}}. \quad (9.89)$$

Utilisant l'expression (9.50) de la fonction φ et exprimant les $\tilde{z}$ par en fonction des z_j , les équations de Bethe se réécrivent

$$\boxed{z_i^L = (-1)^{n-1} \prod_{j=1}^n \frac{p - (p+q)e^{-\gamma}z_i + qe^{-2\gamma}z_i z_j}{p - (p+q)e^{-\gamma}z_j + qe^{-2\gamma}z_i z_j}}. \quad (9.90)$$

Il s'agit des mêmes équations de Bethe (3.29) que nous avons obtenues par l'Ansatz de Bethe en coordonnées à la section 3.1 du chapitre 3. Si les z_j vérifient les équations de Bethe, le vecteur

$|\psi(\{\tilde{z}\})\rangle$ est alors vecteur propre de $t(\lambda)$. Comme les équations de Bethe ne dépendent pas du paramètre spectral λ , le vecteur propre $|\psi(\{\tilde{z}\})\rangle$ n'en dépend pas non plus : il s'agit donc d'un vecteur propre commun à tous les $t(\lambda)$, ainsi qu'à la matrice de Markov déformée $M(\gamma)$.

On trouve finalement que le vecteur $|\psi(\{\tilde{z}\})\rangle$ est vecteur propre de $t(\lambda)$ avec la valeur propre

$$E(\lambda, \{\tilde{z}\}) = p^L e^{L\gamma} \lambda^L \prod_{j=1}^n \frac{1}{pe^\gamma \varphi(\lambda, \tilde{z}_j)} + \prod_{j=1}^n \frac{1}{pe^\gamma \varphi(\tilde{z}_j, \lambda)}. \quad (9.91)$$

Utilisant l'expression (9.50) de la fonction φ et exprimant encore une fois les $\tilde{z}_j$ en fonction des z_j , on obtient

$$E(\lambda, \{z\}) = p^L e^{L\gamma} \lambda^L \prod_{j=1}^n \frac{p - (p+q)e^{-\gamma} z_j + p q e^{-\gamma} z_j \lambda}{p(pe^\gamma \lambda - z_j)} + \prod_{j=1}^n \frac{1 - (p+q)\lambda + q e^{-\gamma} z_j \lambda}{z_j - pe^\gamma \lambda}. \quad (9.92)$$

La valeur propre $E(\lambda, \{z\})$ semble posséder des pôles en $\lambda = z_j$. Cependant, le fait que les z_j sont solution des équations de Bethe (9.90) implique que $E(\lambda, \{z\})$ est régulière en $\lambda = z_i$. On peut en fait obtenir les équations de Bethe en demandant l'annulation de ces pôles en λ , sans avoir à considérer l'annulation des termes non voulus.

D'après (9.39), la valeur propre de la matrice de Markov déformée correspondant au vecteur propre $|\psi(\{\tilde{z}\})\rangle$ s'obtient en prenant la dérivée logarithmique en $\lambda = 0$ de la valeur propre (9.92) de la matrice de transfert $E(\lambda, \{z\})$. On a donc

$$E(\gamma) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{pe^\gamma}{z_i} + \frac{qz_i}{e^\gamma} - (p+q) \right). \quad (9.93)$$

On retrouve bien la même expression que celle qui avait été obtenue par l'Ansatz de Bethe en coordonnées (3.12). Le lien précis entre l'Ansatz de Bethe en coordonnées et l'Ansatz de Bethe algébrique a été présenté par Golinelli et Mallick [171] pour le modèle d'exclusion totalement asymétrique.

On note que l'on aurait pu prendre pour état de base $|\Omega\rangle$ le vecteur $|1\rangle_1 \otimes \dots \otimes |1\rangle_L$ au lieu du vecteur $|0\rangle_1 \otimes \dots \otimes |0\rangle_L$. Dans ce cas, les états propres à n particules doivent être construits en appliquant $L-n$ opérateurs $B(\hat{z}_j)$ sur l'état de base. La valeur propre de la matrice de transfert est alors donnée, en fonction des $L-n$ racines de Bethe $\hat{z}_j$, par

$$E(\lambda, \{\hat{z}\}) = q^L e^{-L\gamma} \lambda^L \prod_{j=1}^{L-n} \frac{1}{qe^{-\gamma} \varphi(\lambda, \hat{z}_j)} + \prod_{j=1}^{L-n} \frac{1}{qe^{-\gamma} \varphi(\hat{z}_j, \lambda)}, \quad (9.94)$$

tandis que les équations de Bethe deviennent

$$q^L e^{-L\gamma} \hat{z}_i^L = \prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{L-n} \frac{\varphi(\hat{z}_i, \hat{z}_j)}{\varphi(\hat{z}_j, \hat{z}_i)}. \quad (9.95)$$

On appelle $|\psi_C(\tilde{z}, e^\gamma, n)\rangle$ le vecteur construit avec n opérateurs $C(\tilde{z})$ et $|\psi_B(\hat{z}, e^\gamma, n)\rangle$ le vecteur construit avec $L-n$ opérateurs $B(\hat{z})$. Comme ces deux vecteurs correspondent à deux manières de diagonaliser le même opérateur $t(\lambda)$, il doit exister des $\tilde{z}_j$ solution des équations de Bethe (9.88) et des $\hat{z}$ solution des équations de Bethe (9.95) tels que les vecteurs $|\psi_C(\tilde{z}, e^\gamma, n)\rangle$ et $|\psi_B(\hat{z}, e^\gamma, n)\rangle$ soient colinéaires. En particulier, les valeurs propres de $t(\lambda)$ associées, notées respectivement $E_C(\tilde{z}, e^\gamma, n)$ (9.91) et $E_B(\hat{z}, e^\gamma, n)$ (9.94), doivent être égales.

Mais, on constate que les transformations $n \rightarrow L-n$, $pe^\gamma \rightarrow qe^{-\gamma}$, et $\tilde{z}_j \rightarrow \hat{z}_j$ appliquées à la valeur propre $E_C(\tilde{z}, e^\gamma, n)$ (9.91) et aux équations de Bethe correspondantes pour les $\tilde{z}_j$

(9.88) donnent la valeur propre $E_B(\hat{z}, e^\gamma, n)$ et les équations de Bethe correspondantes. Donc, on peut aussi écrire $E_C(\hat{z}, qe^{-\gamma}/p, L-n) = E_B(\hat{z}, e^\gamma, n)$. Ceci implique finalement qu'il existe, pour chaque ensemble de n racines de Bethe z_i , un ensemble de $L-n$ racines de Bethe $\hat{z}_i$ tels que $E_C(\hat{z}, qe^{-\gamma}/p, L-n) = E_C(\hat{z}, e^\gamma, n)$. Le spectre de la matrice de transfert est donc invariant par la composition des deux transformations $n \rightarrow L-n$ et $pe^\gamma \rightarrow qe^{-\gamma}$. Par contre, contrairement à la matrice de Markov, une seule des deux transformations prise isolément ne laisse pas le spectre de la matrice de transfert invariant.

9.3.4 Ansatz de Bethe algébrique pour la matrice de transfert inhomogène

On passe maintenant à la diagonalisation par Ansatz de Bethe algébrique de la matrice de transfert inhomogène décrite à la section 9.2.7. On considère le même vecteur de base que dans la section précédente :

$$|\Omega\rangle = |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \otimes \dots \otimes |0\rangle_L . \quad (9.96)$$

On va lui appliquer des opérateurs $C(\tilde{z}_j, \{\alpha\})$ définis à partir de la matrice de monodromie inhomogène pour construire les autres vecteurs propres de la matrice de transfert inhomogène $t(\lambda, \{\alpha\})$. On pose

$$|\psi(\{\tilde{z}\}, \{\alpha\})\rangle = C(\tilde{z}_1, \{\alpha\})C(\tilde{z}_2, \{\alpha\}) \dots C(\tilde{z}_n, \{\alpha\})|\Omega\rangle . \quad (9.97)$$

Comme dans le cas de la matrice de transfert homogène, on veut appliquer $A(\lambda, \{\alpha\})$ et $D(\lambda, \{\alpha\})$ sur le vecteur $|\psi(\{\tilde{z}\}, \{\alpha\})\rangle$ et les faire commuter vers la droite. Comme l'algèbre des opérateurs A , B , C et D de la matrice de monodromie est la même que dans le cas homogène, on va générer les mêmes termes voulus et non voulus avec les mêmes coefficients. La seule différence va provenir du fait que l'action de $A(\lambda, \{\alpha\})$ et $D(\lambda, \{\alpha\})$ sur le vecteur de base Ω dépend maintenant des α_i . D'après la définition de la matrice de monodromie et de l'opérateur de Lax inhomogène, on a en effet

$$A(\lambda, \{\alpha\})|\psi(\{\tilde{z}\}, \{\alpha\})\rangle = \left(p^L e^{L\gamma} \prod_{i=1}^L \varphi(\lambda, \alpha_i) \right) |\psi(\{\tilde{z}\}, \{\alpha\})\rangle \quad (9.98)$$

$$D(\lambda, \{\alpha\})|\psi(\{\tilde{z}\}, \{\alpha\})\rangle = |\psi(\{\tilde{z}\}, \{\alpha\})\rangle . \quad (9.99)$$

De la même manière que dans le cas homogène, on trouve alors que le vecteur $|\psi(\{\tilde{z}\}, \{\alpha\})\rangle$ est vecteur propre de $t(\lambda, \{\alpha\})$ si les équations de Bethe suivantes sont vérifiées :

$$p^L e^{L\gamma} \prod_{i=1}^L \varphi(\tilde{z}_i, \alpha_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \frac{\varphi(\tilde{z}_i, \tilde{z}_j)}{\varphi(\tilde{z}_j, \tilde{z}_i)} . \quad (9.100)$$

On constate que la seule modification par rapport au cas homogène est le remplacement de $\tilde{z}_i^L$ par $\prod_{i=1}^L \varphi(\tilde{z}_i, \alpha_i)$. Si tous les α_i sont nuls, les équations de Bethe inhomogènes se ramènent aux équations de Bethe homogènes.

La valeur propre de $t(\lambda, \{\alpha\})$ de vecteur propre $|\psi(\{\tilde{z}\}, \{\alpha\})\rangle$ est alors donnée par

$$E(\lambda, \{\tilde{z}\}, \{\alpha\}) = p^L e^{L\gamma} \prod_{i=1}^L \varphi(\lambda, \alpha_i) \prod_{j=1}^n \frac{1}{pe^\gamma \varphi(\lambda, \tilde{z}_j)} + \prod_{j=1}^n \frac{1}{pe^\gamma \varphi(\tilde{z}_j, \lambda)} . \quad (9.101)$$

Comme dans le cas homogène, on constate que les équations de Bethe assurent que la valeur propre $E(\lambda, \{\tilde{z}\}, \{\alpha\})$ n'a pas de pôles pour λ égal à l'un des $\tilde{z}_j$.

9.3.5 Valeur propre de $t(\lambda)$ et équation de Bethe fonctionnelle

Nous allons maintenant étudier le lien entre la formulation fonctionnelle des équations de Bethe et la valeur propre de la matrice de transfert.

Modèle homogène

On peut effectuer les changement de variables

$$\lambda = p^{-1} \frac{1-t}{1-xt} \quad \text{et} \quad \tilde{z}_j = \frac{z_j}{pe^\gamma} = p^{-1} \frac{1-y_j}{1-xy_j} \quad (9.102)$$

dans l'expression de la valeur propre $E(\lambda, \{z\})$ de la matrice de transfert, et introduire le polynôme

$$Q(t) = \prod_{j=1}^n (t - y_j) . \quad (9.103)$$

On obtient alors (avec $x = q/p$)

$$Q(t) [e^{n\gamma}(1-xt)^L E(\lambda, \{z\})] = e^{L\gamma}(1-t)^L Q(xt) + x^n(1-xt)^L Q(t/x) . \quad (9.104)$$

Par comparaison de cette équation avec l'équation de Bethe fonctionnelle (5.10), on constate que le polynôme $R(t)$ s'exprime en fonction de la valeur propre de la matrice de transfert

$$\boxed{R(t) = e^{n\gamma}(1-xt)^L E(\lambda, \{z\})} , \quad (9.105)$$

avec la relation (9.102) entre t et λ , les z_j étant la solution des équations de Bethe correspondant au polynôme $R(t)$.

Modèle inhomogène

On peut effectuer sur la valeur propre $E(\lambda, \{z\}, \{\alpha\})$ le changement de variable suivant (9.102) sur λ , les z_j , et les α_j :

$$\lambda = p^{-1} \frac{1-t}{1-xt}, \quad \tilde{z}_j = p^{-1} \frac{1-y_j}{1-xy_j} \quad \text{et} \quad \alpha_i = p^{-1} \frac{1-\beta_j}{1-x\beta_j} . \quad (9.106)$$

Notant $R(t)$ le polynôme (si les $\tilde{z}_j$ sont solution des équations de Bethe) en t

$$R(t) = e^{n\gamma} E(\lambda, \{z\}, \{\alpha\}) \prod_{i=1}^L (\beta_j - xt) , \quad (9.107)$$

on trouve l'équation de Bethe fonctionnelle inhomogène

$$Q(t)R(t) = e^{L\gamma} Q(xt) \prod_{i=1}^L (\beta_j - t) + x^n Q(t/x) \prod_{i=1}^L (\beta_j - xt) . \quad (9.108)$$

Dans la limite $\beta_i \rightarrow 1$ ($\alpha_i \rightarrow 0$), l'équation de Bethe fonctionnelle inhomogène (9.108) se ramène à l'équation de Bethe fonctionnelle homogène.

9.4 Matrice de transfert pour le modèle à N classes de particules

Nous construisons dans cette section une famille de matrices de transfert à un paramètre commutant avec la matrice de Markov du modèle d'exclusion asymétrique à plusieurs classes de particules. Nous devons pour cela considérer des espaces vectoriels V_i et $\mathcal{A}$ de taille supérieure à deux.

9.4.1 Opérateur de Lax et matrice R

Pour un système à N classes de particules, l'espace vectoriel V_i engendré par les $N + 1$ configurations du site i (site vide ou occupé par une particule appartenant à une des N classes) est de dimension $N + 1$, de même que les espaces auxiliaires $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ correspondant aux sites a et a' . Le produit tensoriel $V(L)$ des L espaces V_i est maintenant de dimension $(N + 1)^L$.

Pour un site r (site du modèle d'exclusion ou site auxiliaire), on note $|1\rangle_r$ le vecteur de l'espace associé au site, correspondant à une particule de première classe, $|2\rangle_r$ le vecteur correspondant à une particule de deuxième classe, $\dots$, $|N\rangle_r$ le vecteur correspondant à une particule de N -ième classe, et $|N + 1\rangle_r$ le vecteur correspondant à un site vide, que l'on identifie à un site occupé par une particule de classe $N + 1$. Dans le cas $N = 1$ qui a été considéré précédemment, on utilisait la notation $|0\rangle_r$ au lieu de $|2\rangle_r$ pour le vecteur associé à un site vide. Il est cependant plus pratique de traiter les sites vides comme des sites occupés par des particules de type $N + 1$ dans le modèle à plusieurs classes de particules, à cause de la structure hiérarchique des taux de transition.

L'Ansatz de Bethe emboîté que nous allons présenter pour le modèle à N classes de particules correspond à N utilisations successives de l'Ansatz de Bethe présenté précédemment, la première fois sur un système à N classes de particules, la suivante sur un système à $N - 1$ classes de particules, $\dots$, et la dernière sur un système à deux classes de particules.

La matrice de Markov M pour N classes de particules agit sur l'espace $V(L)$. Pour tout site i , elle peut échanger les particules de classes (différentes) τ_i et τ_{i+1} placées respectivement sur les sites i et $i + 1$. Cet échange s'effectue avec un taux p si $\tau_i < \tau_{i+1}$ et avec un taux q si $\tau_i > \tau_{i+1}$. Pour étudier les fluctuations du courant, on a défini au chapitre 7 une déformation $M(\{\gamma\})$ de la matrice de Markov, dépendant de paramètres $\gamma_{\sigma,\rho}$ comptant le déplacement total dû aux échanges entre les particules de classes σ et ρ . Dans la suite, on ne notera pas explicitement la dépendance en $\{\gamma\}$ de la matrice de Markov déformée, qui sera simplement notée M .

Comme pour le cas $N = 1$ considéré précédemment, on va définir des opérateurs locaux agissant sur deux sites. On définit tout d'abord l'opérateur permutation $P_{r,s}$, qui échange les sites r et s :

$$P_{r,s}|\rho\rangle_r \otimes |\sigma\rangle_s = |\sigma\rangle_r \otimes |\rho\rangle_s . \quad (9.109)$$

On définit aussi l'opérateur $M_{r,s}$, dont la matrice locale est la matrice de Markov déformée locale du système à plusieurs classes de particules, par

$$\begin{aligned} M_{r,s}|\rho\rangle_r \otimes |\sigma\rangle_s &= (-p\mathbb{1}_{\rho < \sigma} - q\mathbb{1}_{\sigma < \rho})|\rho\rangle_r \otimes |\sigma\rangle_s + (pe^{\gamma_{\rho,\sigma}}\mathbb{1}_{\rho < \sigma} + qe^{-\gamma_{\sigma,\rho}}\mathbb{1}_{\sigma < \rho})|\sigma\rangle_r \otimes |\rho\rangle_s \\ &= (p\mathbb{1}_{\rho < \sigma} + q\mathbb{1}_{\sigma < \rho})(-\mathbb{1} + P_{r,s}G_{r,s})|\rho\rangle_r \otimes |\sigma\rangle_s , \end{aligned} \quad (9.110)$$

où l'opérateur $G_{r,s}$ est défini par

$$G_{r,s} = \sum_{\rho=1}^{N+1} \sum_{\sigma=1}^{N+1} e^{\gamma_{\rho,\sigma}} (|\rho\rangle_r \langle \rho|) \otimes (|\sigma\rangle_s \langle \sigma|) , \quad (9.111)$$

la matrice des $\gamma_{\rho,\sigma}$ étant antisymétrique : $\gamma_{\rho,\sigma} = -\gamma_{\sigma,\rho}$ et $\gamma_{\rho,\rho} = 0$. L'opérateur $R_{a,a'}$ est alors donné en fonction de $M_{a,a'}$ par

$$R_{a,a'}(\lambda) = \mathbb{1} + \nu M_{a,a'} . \quad (9.112)$$

On définit enfin l'opérateur de Lax homogène par

$$\mathcal{L}_{a,i}(\lambda) = P_{a,i}(\mathbb{1} + \lambda M_{a,i}) , \quad (9.113)$$

et l'opérateur de Lax inhomogène par

$$\mathcal{L}_{a,i}(\lambda, \alpha) = \mathcal{L}_{a,i}(\varphi(\lambda, \alpha)) . \quad (9.114)$$

La fonction φ est toujours définie par (9.50), ce qui implique en particulier que l'opérateur de Lax homogène est égal à l'opérateur de Lax inhomogène avec une inhomogénéité nulle.

9.4.2 Matrice de monodromie et matrice de transfert

À partir de l'opérateur de Lax homogène, on définit comme dans le cas $N = 1$ la matrice de monodromie homogène $T_a(\lambda)$ (qui agit sur $\mathcal{A} \otimes V(L)$) par

$$T_a(\lambda) = \mathcal{L}_{a,L}(\lambda) \dots \mathcal{L}_{a,2}(\lambda) \mathcal{L}_{a,1}(\lambda) , \quad (9.115)$$

et la matrice de transfert homogène $t(\lambda)$ agissant sur $V(L)$ par

$$t(\lambda) = \text{Tr}_a T_a(\lambda) . \quad (9.116)$$

Cependant, contrairement au cas $N = 1$ pour lequel il était possible de considérer seulement la matrice de transfert inhomogène, nous serons obligés, lors de la diagonalisation de $t(\lambda)$, de considérer des matrices de transfert plus générales que $t(\lambda)$. On est alors amené à définir la matrice de monodromie inhomogène

$$T_a(\lambda, \{\alpha\}) = \mathcal{L}_{a,L}(\lambda, \alpha_L) \dots \mathcal{L}_{a,2}(\lambda, \alpha_2) \mathcal{L}_{a,1}(\lambda, \alpha_1) , \quad (9.117)$$

et la matrice de transfert inhomogène par [89]

$$t(\lambda, \{\alpha\}) = \text{Tr}_a \left[U_a^{(N)} T_a(\lambda, \{\alpha\}) \right] , \quad (9.118)$$

où l'on a introduit un nouvel opérateur $U_a^{(N)}$, diagonal dans la base des configurations de $\mathcal{A}$:

$$U_a^{(N)} = \sum_{\beta=1}^{N+1} u_{\beta}^{(N)} |\beta\rangle_{aa} \langle \beta| . \quad (9.119)$$

L'ajout de cet opérateur $U_a^{(N)}$ dans la définition de la matrice de transfert inhomogène sera nécessaire lors de la diagonalisation de la matrice de transfert homogène, de même que l'ajout des inhomogénéités. On note que la matrice de transfert homogène $t(\lambda)$ est donnée en fonction de la matrice de transfert inhomogène en prenant toutes les inhomogénéités α_i nulles, et l'opérateur $U_a^{(N)}$ égal à l'identité.

Comme pour le cas $N = 1$, on peut montrer que la matrice de transfert homogène est toujours telle que $t(0)$ est l'opérateur qui décale d'un site vers l'avant toutes les particules, et que la matrice de Markov déformée est égale à

$$M = t'(0) t^{-1}(0) . \quad (9.120)$$

9.4.3 Equation de Yang-Baxter

Les opérateurs $R_{a,a'}$, $\mathcal{L}_{a,i}$ et $\mathcal{L}_{a',i}$ que nous venons de définir vérifient encore l'équation de Yang-Baxter locale (9.49)

$$R_{a,a'}(\varphi(\lambda, \mu)) \mathcal{L}_{a,i}(\lambda, \alpha) \mathcal{L}_{a',i}(\mu, \alpha) = \mathcal{L}_{a,i}(\mu, \alpha) \mathcal{L}_{a',i}(\lambda, \alpha) R_{a,a'}(\varphi(\lambda, \mu)) . \quad (9.121)$$

Celle-ci est une conséquence du fait que les matrices de Markov locales obéissent à l'algèbre

$$M_{i,i+1}^2 = -(p+q) M_{i,i+1} \quad (9.122)$$

$$M_{i,i+1} M_{i+1,i+2} M_{i,i+1} - pq M_{i,i+1} = M_{i,i+1} M_{i-1,i} M_{i,i+1} - pq M_{i,i+1} \quad (9.123)$$

$$M_{i,i+1} M_{j,j+1} = M_{j,j+1} M_{i,i+1} \quad \text{si } |i-j| \geq 2 , \quad (9.124)$$

appelée algèbre de Hecke [169], et qui est une généralisation de l'algèbre de Temperley-Lieb (9.51-9.54) vérifiée par les matrices locales du modèle à une seule classe de particules.

Les opérateurs $R_{a,a'}$, T_a et $T_{a'}$ obéissent alors à l'équation de Yang-Baxter globale (9.58)

$$R_{a,a'}(\varphi(\lambda, \mu))T_a(\lambda, \{\alpha\})T_{a'}(\mu, \{\alpha\}) = T_a(\mu, \{\alpha\})T_{a'}(\lambda, \{\alpha\})R_{a,a'}(\varphi(\lambda, \mu)) . \quad (9.125)$$

On note de plus que l'opérateur $R_{a,a'}(\nu)$ est tel que, pour un opérateur $U_a^{(N)}$ agissant de manière diagonale sur la base des configurations de $\mathcal{A}$, on a

$$U_a^{(N)}U_{a'}^{(N)}R_{a,a'}(\varphi(\lambda, \mu)) = R_{a,a'}(\varphi(\lambda, \mu))U_a^{(N)}U_{a'}^{(N)} . \quad (9.126)$$

L'équation de Yang-Baxter globale donne donc

$$\begin{aligned} R_{a,a'}(\varphi(\lambda, \mu)) \left[U_a^{(N)}T_a(\lambda, \{\alpha\}) \right] \left[U_{a'}^{(N)}T_{a'}(\mu, \{\alpha\}) \right] \\ = \left[U_a^{(N)}T_a(\mu, \{\alpha\}) \right] \left[U_{a'}^{(N)}T_{a'}(\lambda, \{\alpha\}) \right] R_{a,a'}(\varphi(\lambda, \mu)) , \end{aligned} \quad (9.127)$$

ce qui implique encore que les matrices de transfert forment une famille commutante d'opérateurs (pour des inhomogénéités α_i et un opérateur $U^{(N)}$ donnés) :

$$t(\lambda, \{\alpha\})t(\mu, \{\alpha\}) = t(\mu, \{\alpha\})t(\lambda, \{\alpha\}) . \quad (9.128)$$

9.4.4 Opérateurs de la matrice de monodromie

Nous allons maintenant construire, à partir de la matrice de monodromie, des opérateurs vérifiant une algèbre quadratique issue de l'équation de Yang-Baxter. Certains de ces opérateurs seront utilisés ultérieurement pour construire les vecteurs propres de la matrice de transfert, tandis que d'autres permettront d'exprimer la matrice de transfert comme une somme de deux termes.

Nous allons décomposer l'espace vectoriel associé à chaque site r en deux sous espaces supplémentaires. On considère le sous espace engendré par les configurations du site r pour lesquelles celui-ci est occupé par une particule de classe inférieure ou égale à N (en comptant un site vide comme occupé par une particule de classe $N+1$). On notera ce sous espace de la même manière que l'espace total, mais avec $^{(N-1)}$ en exposant. Par exemple, pour les sites $i \in \llbracket 1, L \rrbracket$, a et a' , ces sous espaces seront notés respectivement $V_i^{(N-1)}$, $\mathcal{A}^{(N-1)}$ et $\mathcal{A}'^{(N-1)}$. Pour le site r , ce sous espace est orthogonal au vecteur $|N+1\rangle_r$. On note Q_r le projecteur sur ce sous espace, et $\overline{Q}_r$ le projecteur sur la droite engendrée par $|N+1\rangle_r$. La somme de ces deux projecteurs est l'opérateur identité, tandis que leur produit est l'opérateur nul.

Utilisant les projecteurs Q_r et $\overline{Q}_r$, on découpe alors la matrice de monodromie $T_a(\lambda, \{\alpha\})$, agissant sur $\mathcal{A} \otimes V(L)$, en une somme de quatre opérateurs

$$T_a(\lambda, \{\alpha\}) = \hat{A}_a(\lambda, \{\alpha\}) + \hat{B}_a(\lambda, \{\alpha\}) + \hat{C}_a(\lambda, \{\alpha\}) + \hat{D}_a(\lambda, \{\alpha\}) , \quad (9.129)$$

définis par

$$\begin{aligned} \hat{A}_a(\lambda, \{\alpha\}) &= Q_a T_a(\lambda, \{\alpha\}) Q_a & \hat{B}_a(\lambda, \{\alpha\}) &= Q_a T_a(\lambda, \{\alpha\}) \overline{Q}_a \\ \hat{C}_a(\lambda, \{\alpha\}) &= \overline{Q}_a T_a(\lambda, \{\alpha\}) Q_a & \hat{D}_a(\lambda, \{\alpha\}) &= \overline{Q}_a T_a(\lambda, \{\alpha\}) \overline{Q}_a . \end{aligned} \quad (9.130)$$

On note que contrairement aux opérateurs A , B , C et D définis pour le système à une classe de particules à partir de la matrice de monodromie, les opérateurs $\hat{A}_a$, $\hat{B}_a$, $\hat{C}_a$ et $\hat{D}_a$ agissent

sur $\mathcal{A} \otimes V(L)$ et pas simplement sur $V(L)$.

La matrice de transfert s'exprime alors en fonction des opérateurs $\hat{A}$ et $\hat{D}$ sous la forme

$$\begin{aligned} t(\lambda, \{\alpha\}) &= \text{Tr}_a \left[U^{(N)} \hat{A}(\lambda, \{\alpha\}) \right] + \text{Tr}_a \left[U^{(N)} \hat{D}(\lambda, \{\alpha\}) \right] \\ &= \text{Tr}_a \left[U^{(N)} \hat{A}(\lambda, \{\alpha\}) \right] + {}_a \langle N+1 | U^{(N)} \hat{D}(\lambda, \{\alpha\}) | N+1 \rangle_a . \end{aligned} \quad (9.131)$$

On représentera la décomposition (9.129) de la matrice de monodromie $T_a(\lambda)$ dans une matrice deux par deux d'opérateurs sous la forme

$$T_a(\lambda, \{\alpha\}) = \begin{pmatrix} \hat{A}_a(\lambda, \{\alpha\}) & \hat{B}_a(\lambda, \{\alpha\}) \\ \hat{C}_a(\lambda, \{\alpha\}) & \hat{D}_a(\lambda, \{\alpha\}) \end{pmatrix} . \quad (9.132)$$

On représentera aussi le produit de $T_a(\lambda, \{\alpha\})$ avec $T_{a'}(\lambda, \{\alpha\})$ comme le produit tensoriel de leurs matrices deux par deux respectives.

Pour écrire l'équation de Yang-Baxter globale (9.125) en fonction des huit opérateurs

$$\begin{aligned} &\hat{A}_a(\lambda, \{\alpha\}), \quad \hat{B}_a(\lambda, \{\alpha\}), \quad \hat{C}_a(\lambda, \{\alpha\}), \quad \hat{D}_a(\lambda, \{\alpha\}), \\ &\hat{A}_{a'}(\lambda, \{\alpha\}), \quad \hat{B}_{a'}(\lambda, \{\alpha\}), \quad \hat{C}_{a'}(\lambda, \{\alpha\}), \quad \hat{D}_{a'}(\lambda, \{\alpha\}), \end{aligned} \quad (9.133)$$

nous devons maintenant décomposer l'opérateur $R_{a,a'}(\nu)$ comme une somme d'opérateurs en utilisant les projecteurs Q_a , $\overline{Q}_a$, $Q_{a'}$ et $\overline{Q}_{a'}$:

$$\begin{aligned} R_{a,a'}(\nu) &= R_{a,a'}^{(N-1)}(\nu) + (1-p\nu)Q_a\overline{Q}_{a'} + (1-q\nu)\overline{Q}_aQ_{a'} \\ &\quad + p\nu P_{a,a'}G_{a,a'}Q_a\overline{Q}_{a'} + q\nu P_{a,a'}G_{a,a'}\overline{Q}_aQ_{a'} + \overline{Q}_a\overline{Q}_{a'} , \end{aligned} \quad (9.134)$$

où $P_{a,a'}$ est l'opérateur qui échange les espaces auxiliaires $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$, $G_{a,a'}$ est l'opérateur défini en (9.111), et $R_{a,a'}^{(N-1)}(\nu)$ est la projection de $R_{a,a'}(\nu)$ sur $\mathcal{A}^{(N-1)} \otimes \mathcal{A}'^{(N-1)}$:

$$R_{a,a'}^{(N-1)}(\nu) = Q_aQ_{a'}R_{a,a'}(\nu)Q_aQ_{a'} . \quad (9.135)$$

On représentera la décomposition (9.134) de l'opérateur $R_{a,a'}(\nu)$ comme une matrice quatre par quatre d'opérateurs agissant sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$ sous la forme

$$R_{a,a'}(\nu) = \begin{pmatrix} R_{a,a'}^{(N-1)}(\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-p\nu)\mathbb{I} & q\nu P_{a,a'}G_{a,a'} & 0 \\ 0 & p\nu P_{a,a'}G_{a,a'} & (1-q\nu)\mathbb{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} . \quad (9.136)$$

Utilisant l'expression (9.129) de $T_a(\lambda, \{\alpha\})$ et celle (9.134) de $R_{a,a'}(\nu, \{\alpha\})$ (ou bien leur écriture (9.132) et (9.136) sous forme de matrices d'opérateurs), l'équation de Yang-Baxter globale (9.125) s'écrit alors en fonction des opérateurs $\hat{A}_a$, $\hat{A}_{a'}$, $\hat{B}_a$, $\hat{B}_{a'}$, $\hat{C}_a$, $\hat{C}_{a'}$, $\hat{D}_a$ et $\hat{D}_{a'}$. On obtient seize relations quadratiques, dont certaines font intervenir l'opérateur $R_{a,a'}^{(N-1)}$. Comme les opérateurs dépendent du site auxiliaire a ou a' , l'algèbre fait maintenant intervenir huit opérateurs et non plus quatre comme dans le cas du modèle à une classe de particules. Nous utiliserons les trois relations suivantes dans la suite (on n'a pas écrit les inhomogénéités $\{\alpha\}$ en argument des opérateurs pour alléger les expressions) :

$$\hat{A}_a(\lambda)\hat{C}_{a'}(z) = \frac{1}{p\varphi(\lambda, z)}G_{a,a'}^{-1}\hat{C}_{a'}(z)\hat{A}_a(\lambda)\mathcal{L}_{a,a'}^{(N-1)}(\lambda, z) - \frac{1-q\varphi(\lambda, z)}{p\varphi(\lambda, z)}G_{a,a'}^{-1}\hat{C}_{a'}(\lambda)\hat{A}_a(z)P_{a,a'} \quad (9.137)$$

$$\hat{D}_a(\lambda)\hat{C}_{a'}(z) = \frac{1}{p\varphi(z, \lambda)}P_{a,a'}\hat{C}_{a'}(z)\hat{D}_a(\lambda)G_{a',a}^{-1} - \frac{1-p\varphi(z, \lambda)}{p\varphi(z, \lambda)}P_{a,a'}\hat{C}_{a'}(\lambda)\hat{D}_a(z)G_{a',a}^{-1} \quad (9.138)$$

$$\hat{C}_a(z)\hat{C}_{a'}(z') = \hat{C}_a(z')\hat{C}_{a'}(z)R_{a,a'}^{(N-1)}(\varphi(z, z')) . \quad (9.139)$$

On a défini la projection de l'opérateur de Lax $\mathcal{L}_{a,a'}$ sur $\mathcal{A}^{(N-1)} \otimes \mathcal{A}'^{(N-1)}$:

$$\mathcal{L}_{a,a'}^{(N-1)}(\nu) = P_{a,a'} R_{a,a'}^{(N-1)}(\nu) . \quad (9.140)$$

Les autres relations quadratiques sont données en appendice 9.A.b.

9.5 Ansatz de Bethe emboîté

Les matrices de transfert définies dans la section précédente peuvent être diagonalisées en utilisant une procédure appelée *Ansatz de Bethe emboîté* [172, 162, 146], qui construit les vecteurs propres de manière itérative en ajoutant une à une les classes de particules à un état de base. Chaque étape de l'Ansatz de Bethe emboîté impose l'utilisation d'une variante de l'Ansatz de Bethe algébrique présenté à la section précédente pour diagonaliser une matrice de transfert inhomogène.

9.5.1 Construction du vecteur propre : première étape

Nous présentons ici la première étape de l'Ansatz de Bethe emboîté, qui consiste à chercher les vecteurs propres de la matrice de transfert sous la forme d'un produit d'opérateurs agissant sur un état de base.

Vecteur de base et opérateurs de création

On part encore une fois du vecteur de base

$$|\Omega\rangle = |N+1, \dots, N+1\rangle = |N+1\rangle_1 \otimes |N+1\rangle_2 \otimes \dots \otimes |N+1\rangle_L , \quad (9.141)$$

vecteur propre de la matrice de transfert $t(\lambda, \{\alpha\})$. On a en effet les relations

$$\hat{A}_a(\lambda, \{\alpha\})|\Omega\rangle = \left(\prod_{i=1}^L p\varphi(\lambda, \alpha_i) \right) \left(\sum_{\beta=1}^N e^{L\gamma_{\beta, N+1}} |\beta\rangle_a \langle\beta| \right) |\Omega\rangle \quad (9.142)$$

$$\hat{D}_a(\lambda, \{\alpha\})|\Omega\rangle = (|N+1\rangle_a \langle N+1|) |\Omega\rangle . \quad (9.143)$$

Les opérateurs $|\beta\rangle_a \langle\beta|$ et $|N+1\rangle_a \langle N+1|$ n'agissent pas sur le vecteur $|\Omega\rangle$ qui appartient à $V(L)$. On a donc pour la matrice de transfert

$$\begin{aligned} t(\lambda, \{\alpha\})|\Omega\rangle &= \left(\text{Tr}_a \left[U_a^{(N)} \hat{A}_a(\lambda, \{\alpha\}) \right] + \text{Tr}_a \left[U_a^{(N)} \hat{D}_a(\lambda, \{\alpha\}) \right] \right) |\Omega\rangle \\ &= \left[\left(\prod_{i=1}^L p\varphi(\lambda, \alpha_i) \right) \left(\sum_{\beta=1}^N e^{L\gamma_{\beta, N+1}} u_{\beta}^{(N)} \right) + u_N^{(N)} \right] |\Omega\rangle . \end{aligned} \quad (9.144)$$

Comme dans le cas $N = 1$, nous allons appliquer n opérateurs de création sur le vecteur de base $|\Omega\rangle$ pour construire les vecteurs propres de la matrice de transfert. Une différence avec la construction de la section précédente est cependant que les opérateurs $\hat{C}$ que nous avons construits à partir de la matrice de monodromie agissent sur le produit tensoriel d'un espace auxiliaire avec $V(L)$, et pas seulement sur $V(L)$. La bonne façon de procéder consiste à se donner n nouveaux espaces auxiliaires $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ associés à n nouveaux sites auxiliaires $b_1, \dots, b_n$, et à considérer le produit de n opérateurs $\hat{C}_{b_1}(z_1, \{\alpha\}) \dots \hat{C}_{b_n}(z_n, \{\alpha\})$. Il s'agit d'un opérateur agissant sur $\mathcal{B}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_n \otimes V(L)$. Il reste encore à le transformer en un opérateur agissant sur $V(L)$. On a besoin pour cela de deux vecteurs de $\mathcal{B}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_n$. D'après la définition de $\hat{C}$, on note que seul un vecteur ayant une composante non nulle selon $b_{1,\dots,b_n} \langle N+1, \dots, N+1|$ peut multiplier à gauche le produit des opérateurs $\hat{C}_{b_j}$ sans donner un opérateur nul. On note

aussi que les composantes d'un vecteur de $\mathcal{B}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_n$ selon $|\beta_1, \dots, \beta_n\rangle_{b_1, \dots, b_n}$ donnent une contribution nulle quand on les multiplie par le produit des opérateurs $\hat{C}_{b_j}$. En toute généralité, on peut donc transformer le produit des $\hat{C}_{b_j}$ en un opérateur agissant sur $V(L)$ en le multipliant à gauche par le vecteur ${}_b\langle N+1| \equiv {}_{b_1, \dots, b_n}\langle N+1, \dots, N+1|$ et à droite par un vecteur $|X\rangle$ appartenant à $\mathcal{B}_1^{(N-1)} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_n^{(N-1)}$. On cherche donc les vecteurs propres de la matrice de transfert $t(\lambda, \{\alpha\})$ sous la forme

$$|\psi(\{z\}, \{\alpha\})\rangle = {}_b\langle N+1| \hat{C}_{b_1}(z_1, \{\alpha\}) \hat{C}_{b_2}(z_2, \{\alpha\}) \dots \hat{C}_{b_n}(z_n, \{\alpha\}) |X\rangle \otimes |\Omega\rangle. \quad (9.145)$$

Le vecteur $|X\rangle$ est pour le moment choisi quelconque. Nous verrons ultérieurement qu'il doit être vecteur propre d'une matrice de transfert comportant une classe de particules en moins. Il sera ensuite déterminé par une nouvelle itération de l'Ansatz de Bethe.

Par définition des opérateurs $\hat{C}$, on a

$${}_b\langle N+1| \hat{C}_{b_1}(z_1, \{\alpha\}) \dots \hat{C}_{b_n}(z_n, \{\alpha\}) |X\rangle = {}_b\langle N+1| T_{b_1}(z_1, \{\alpha\}) \dots T_{b_n}(z_n, \{\alpha\}) |X\rangle. \quad (9.146)$$

Comme la matrice de monodromie $T_{b_j}(z_j, \{\alpha\})$ conserve le nombre total de particules de chaque espèce sur les sites b_j , $1, \dots, L$, on note que si le vecteur $|X\rangle$ correspond à des configurations des sites b_1 à b_n comportant n_1 particules de première classe, n_2 particules de deuxième classe, $\dots$, et n_N particules de N -ième classe (ce que l'on supposera à partir de maintenant), alors l'expression précédente est un opérateur agissant sur $V(L)$ qui diminue le nombre de particules de $N+1$ -ème classe de n , et augmente respectivement le nombre de particules de classe 1 à N de $n_1, \dots, n_N$. Le vecteur $|\psi(\{z\}, \{\alpha\})\rangle$ appartient donc au sous espace de $V(L)$ engendré par les configurations des sites 1 à L comportant n_1 particules de première classe, n_2 particules de seconde classe, n_N particules de N -ième classe, et $n_{N+1} = L - n$ particules de $N+1$ -ième classe. Le nombre n d'opérateurs $\hat{C}$ utilisés pour construire le vecteur $|\psi(\{z\}, \{\alpha\})\rangle$ est donc égal à

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_N = L - n_{N+1}. \quad (9.147)$$

On va maintenant appliquer les opérateurs $\text{Tr}_a \left[U_a^{(N)} \hat{A}_a(\lambda, \{\alpha\}) \right]$ et $\text{Tr}_a \left[U_a^{(N)} \hat{D}_a(\lambda, \{\alpha\}) \right]$ au vecteur $|\psi(\{z\}, \{\alpha\})\rangle$ défini en (9.145) pour déterminer quelles conditions doivent vérifier les z_j et le vecteur $|X\rangle$ pour que $|\psi(\{z\}, \{\alpha\})\rangle$ soit vecteur propre de la matrice de transfert.

Utilisant les relations (9.137) et (9.138), on constate encore une fois que la commutation de $\hat{A}_a(\lambda, \{\alpha\})$ et $\hat{D}_a(\lambda, \{\alpha\})$ avec les opérateurs $\hat{C}$ du vecteur $|\psi(\{z\}, \{\alpha\})\rangle$ engendre des termes voulus pour lesquels $\hat{A}_a$ et $\hat{D}_a$ gardent leur argument λ jusqu'au bout, et des termes non voulus pour lesquels λ est échangé avec l'un des z_j . Nous allons maintenant calculer les termes voulus et non voulus issus de la commutation de $\hat{A}_a(\lambda, \{\alpha\})$ et $\hat{D}_a(\lambda, \{\alpha\})$ sur le vecteur $|\psi(\{z\}, \{\alpha\})\rangle$.

Commutation de $\hat{A}_a$: termes voulus

On fait commuter $\hat{A}_a$ avec le produit des opérateurs $\hat{C}_{b_j}$ qui interviennent dans le vecteur $|\psi(\{z\}, \{\alpha\})\rangle$. Pour alléger un peu les notations, on omettra l'argument $\{\alpha\}$ des opérateurs $\hat{A}_a$ et $\hat{C}_{b_j}$. Le terme voulu est donné par

$$\begin{aligned} \hat{A}_a(\lambda) \hat{C}_{b_1}(z_1) \dots \hat{C}_{b_n}(z_n) = \\ \left(\prod_{j=1}^n \frac{1}{p\varphi(\lambda, z_j)} \right) G_{a,b_1}^{-1} \dots G_{a,b_n}^{-1} \hat{C}_{b_1}(z_1) \dots \hat{C}_{b_n}(z_n) \hat{A}_a(\lambda) \mathcal{L}_{a,b_n}^{(N-1)}(\lambda, z_n) \dots \mathcal{L}_{a,b_1}^{(N-1)}(\lambda, z_1) \\ + \text{N. V.} \end{aligned} \quad (9.148)$$

On note que le produit des opérateurs $\mathcal{L}_{a,b_j}^{(N-1)}$ est alors une matrice de monodromie inhomogène sur le site auxiliaire a et les n sites $b_1, \dots, b_n$, restreinte au sous espace $\mathcal{A}^{(N-1)} \otimes \mathcal{B}_1^{(N-1)} \otimes$

$\dots \mathcal{B}_n^{(N-1)}$. On la note $T_a^{(N-1)}(\lambda, \{z\})$. On multiplie alors l'équation précédente par le vecteur $|\Omega\rangle$ appartenant à $V(L)$. La matrice de monodromie $T_a^{(N-1)}(\lambda, \{z\})$ n'agit pas dessus. L'équation (9.142) permet alors d'éliminer l'opérateur $\hat{A}$. On obtient

$$\begin{aligned} \hat{A}_a(\lambda) \hat{C}_{b_1}(z_1) \dots \hat{C}_{b_n}(z_n) |\Omega\rangle &= \left(\prod_{j=1}^n \frac{1}{p\varphi(\lambda, z_j)} \right) \left(\prod_{i=1}^L p\varphi(\lambda, \alpha_i) \right) \\ &\times G_{a,b_1}^{-1} \dots G_{a,b_n}^{-1} \hat{C}_{b_1}(z_1) \dots \hat{C}_{b_n}(z_n) \left(\sum_{\beta=1}^N e^{L\gamma_{\beta,N+1}} |\beta\rangle_a \langle\beta| \right) T_a^{(N-1)}(\lambda, \{z\}) |\Omega\rangle + \text{N. V.} \end{aligned} \quad (9.149)$$

On applique maintenant le vecteur ${}_b\langle N+1|$ à gauche et le vecteur $|X\rangle$ à droite dans l'expression précédente. Comme les opérateurs G_{a,b_j}^{-1} sont diagonaux dans la base des configurations du site b_j , on a, d'après (9.111)

$${}_b\langle N+1| G_{a,b_j}^{-1} = \left(\sum_{\beta=1}^{N+1} g_{\beta,N+1}^{-1} |\beta\rangle_a \langle\beta| \right) {}_b\langle N+1| = \left(\sum_{\beta=1}^N e^{-\gamma_{\beta,N+1}} |\beta\rangle_a \langle\beta| \right) {}_b\langle N+1|. \quad (9.150)$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \hat{A}_a(\lambda) |\psi(\{z\}, \{\alpha\})\rangle &= \left(\prod_{j=1}^n \frac{1}{p\varphi(\lambda, z_j)} \right) \left(\prod_{i=1}^L p\varphi(\lambda, \alpha_i) \right) \\ &\times {}_b\langle N+1| \hat{C}_{b_1}(z_1) \dots \hat{C}_{b_n}(z_n) \left(\sum_{\beta=1}^N e^{(L-n)\gamma_{\beta,N+1}} |\beta\rangle_a \langle\beta| \right) T_a^{(N-1)}(\lambda, \{z\}) |X\rangle |\Omega\rangle + \text{N. V.} \end{aligned} \quad (9.151)$$

On multiplie enfin l'équation précédente à gauche par $U_a^{(N)}$ et on effectue la trace sur l'espace auxiliaire a . On obtient

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[U_a^{(N)} \hat{A}_a(\lambda) \right] |\psi(\{z\}, \{\alpha\})\rangle &= \left(\prod_{j=1}^n \frac{1}{p\varphi(\lambda, z_j)} \right) \left(\prod_{i=1}^L p\varphi(\lambda, \alpha_i) \right) {}_b\langle N+1| \hat{C}_{b_1}(z_1) \dots \hat{C}_{b_n}(z_n) t^{(N-1)}(\lambda, \{z\}) |X\rangle |\Omega\rangle + \text{N. V.}, \end{aligned} \quad (9.152)$$

où on a défini la matrice de transfert

$$t^{(N-1)}(\lambda, \{z\}) = \text{Tr} \left[U_a^{(N-1)} T_a^{(N-1)}(\lambda, \{z\}) \right], \quad (9.153)$$

donnée en fonction de l'opérateur

$$U_a^{(N-1)} = U_a^{(N)} \sum_{\beta=1}^N e^{(L-n)\gamma_{\beta,N+1}} |\beta\rangle_a \langle\beta| = \sum_{\beta=1}^N u_{\beta}^{(N)} e^{(L-n)\gamma_{\beta,N+1}} |\beta\rangle_a \langle\beta|. \quad (9.154)$$

On note que si $|X\rangle$ est vecteur propre de la matrice de transfert $t^{(N-1)}(\lambda, \{z\})$ (avec la valeur propre $E^{(N-1)}(\lambda)$), alors le terme voulu est proportionnel au vecteur $|\psi(\{z\}, \{\alpha\})\rangle$:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[U_a^{(N)} \hat{A}_a(\lambda) \right] |\psi(\{z\}, \{\alpha\})\rangle &= \left(\prod_{j=1}^n \frac{1}{p\varphi(\lambda, z_j)} \right) \left(\prod_{i=1}^L p\varphi(\lambda, \alpha_i) \right) E^{(N-1)}(\lambda) |\psi(\{z\}, \{\alpha\})\rangle + \text{N. V.} \end{aligned} \quad (9.155)$$

Commutation de $\hat{A}_a$: termes non voulus

On s'intéresse maintenant aux termes non voulus issus de la commutation de $\hat{A}_a$ avec le produit des opérateurs $\hat{C}_{b_j}$ intervenant dans le vecteur $|\psi(\{z\}, \{\alpha\})\rangle$. On omettra encore l'argument $\{\alpha\}$ des opérateurs $\hat{A}_a$ et $\hat{C}_{b_j}$ pour alléger un peu les notations.

La commutation des $\hat{A}_a(\lambda)$ va engendrer n types de termes non voulus : les termes pour lesquels l'argument de $\hat{A}_a$ est z_1 après la commutation avec tous les $\hat{C}_{b_j}$, ceux pour lesquels l'argument de $\hat{A}_a$ est $z_2, \dots$, et enfin ceux pour lesquels l'argument de $\hat{A}_a$ est z_n . On notera NV_r la somme des termes non voulus de type r . On va commencer par le terme non voulu du premier type, qui peut être obtenu uniquement en prenant le deuxième terme de (9.137) pour la commutation de $\hat{A}_a(\lambda)$ avec $\hat{C}_a(z_1)$, et ensuite uniquement le premier terme de (9.137) pour toutes les autres commutations. On a donc

$$NV_1 = - \frac{1 - q\varphi(\lambda, z_1)}{p\varphi(\lambda, z_1)} \left(\prod_{j=2}^n \frac{1}{p\varphi(z_1, z_j)} \right) G_{a,b_1}^{-1} \dots G_{a,b_n}^{-1} \quad (9.156)$$

$$\times \hat{C}_{b_1}(\lambda) \hat{C}_{b_2}(z_2) \dots \hat{C}_{b_n}(z_n) \hat{A}_a(z_1) \mathcal{L}_{a,b_n}^{(N-1)}(\varphi(z_1, z_n)) \dots \mathcal{L}_{a,b_2}^{(N-1)}(\varphi(z_1, z_2)) P_{a,b_1}.$$

Comme $\varphi(z_1, z_1) = 0$ et $\mathcal{L}_{a,b_1}^{(N-1)}(0) = P_{a,b_1}$, on peut encore une fois introduire la matrice de monodromie $T_a^{(N-1)}(z_1, \{z\})$. On applique le vecteur $|\Omega\rangle$ (sur lequel $T_a^{(N-1)}(z_1, \{z\})$ n'agit pas) à droite pour éliminer $\hat{A}_a(z_1)$ en utilisant (9.142). On obtient alors

$$(NV_1)|\Omega\rangle = - \frac{1 - q\varphi(\lambda, z_1)}{p\varphi(\lambda, z_1)} \left(\prod_{j=2}^n \frac{1}{p\varphi(z_1, z_j)} \right) \left(\prod_{i=1}^L p\varphi(z_1, \alpha_i) \right) G_{a,b_1}^{-1} \dots G_{a,b_n}^{-1} \quad (9.157)$$

$$\times \hat{C}_{b_1}(\lambda) \hat{C}_{b_2}(z_2) \dots \hat{C}_{b_n}(z_n) \left(\sum_{\beta=1}^N e^{L\gamma_{\beta, N+1}} |\beta\rangle_a \otimes {}_a\langle\beta| \right) T_a^{(N-1)}(z_1, \{z\})|\Omega\rangle.$$

On multiplie maintenant l'expression précédente par ${}_b\langle N+1|$ à gauche et par $|X\rangle$ à droite. Par le même raisonnement que dans le cas du terme voulu, on trouve alors

$${}_b\langle N+1|(NV_1)|X\rangle|\Omega\rangle = - \frac{1 - q\varphi(\lambda, z_1)}{p\varphi(\lambda, z_1)} \left(\prod_{j=2}^n \frac{1}{p\varphi(z_1, z_j)} \right) \left(\prod_{i=1}^L p\varphi(z_1, \alpha_i) \right) \quad (9.158)$$

$$\times {}_b\langle N+1|\hat{C}_{b_1}(\lambda) \hat{C}_{b_2}(z_2) \dots \hat{C}_{b_n}(z_n) \left(\sum_{\beta=1}^N e^{(L-n)\gamma_{\beta, N+1}} |\beta\rangle_a \otimes {}_a\langle\beta| \right) T_a^{(N-1)}(z_1, \{z\})|X\rangle|\Omega\rangle.$$

On multiplie enfin l'équation précédente par $U_a^{(N)}$ et on effectue la trace sur l'espace auxiliaire $\mathcal{A}$. On obtient

$${}_b\langle N+1|\text{Tr}_a U_a^{(N)}(NV_1)|X\rangle|\Omega\rangle = - \frac{1 - q\varphi(\lambda, z_1)}{p\varphi(\lambda, z_1)} \left(\prod_{j=2}^n \frac{1}{p\varphi(z_1, z_j)} \right) \quad (9.159)$$

$$\times \left(\prod_{i=1}^L p\varphi(z_1, \alpha_i) \right) {}_b\langle N+1|\hat{C}_{b_1}(\lambda) \hat{C}_{b_2}(z_2) \dots \hat{C}_{b_n}(z_n) t^{(N-1)}(z_1, \{z\})|X\rangle|\Omega\rangle,$$

la matrice de transfert $t^{(N-1)}(\lambda, \{z\})$ ayant été définie en (9.153). Si le vecteur $|X\rangle$ est vecteur propre de $t^{(N-1)}(z_1, \{z\})$ (avec la valeur propre $E^{(N-1)}(z_1)$), on obtient alors

$$\begin{aligned} \text{NV}_1^{\hat{A}}(\psi) \equiv {}_b\langle N+1 | \text{Tr}_a U_a^{(N)}(\text{NV}_1) | X \rangle | \Omega \rangle &= -\frac{1 - q\varphi(\lambda, z_1)}{p\varphi(\lambda, z_1)} \left(\prod_{j=2}^n \frac{1}{p\varphi(z_1, z_j)} \right) \\ &\times \left(\prod_{i=1}^L p\varphi(z_1, \alpha_i) \right) E^{(N-1)}(z_1) \times {}_b\langle N+1 | \hat{C}_{b_1}(\lambda) \hat{C}_{b_2}(z_2) \dots \hat{C}_{b_n}(z_n) | X \rangle | \Omega \rangle . \end{aligned} \quad (9.160)$$

Nous verrons plus tard que l'annulation de ce terme non voulu avec le terme non voulu correspondant provenant de la commutation de $\hat{D}_a$ est possible pourvu que certaines conditions soient vérifiées par les z_j .

On passe maintenant aux autres termes non voulus issus de la commutation de $\hat{A}_a$ sur le vecteur $|\psi(\{z\}, \{\alpha\})\rangle$. De manière analogue à ce que nous avons fait dans le cas $N = 1$, nous allons utiliser la relation (9.139) pour permuter les $\hat{C}_{b_j}$. On a en effet

$$\hat{C}_{b_1}(z_1) \hat{C}_{b_2}(z_2) \dots \hat{C}_{b_n}(z_{n-1}) \hat{C}_{b_n}(z_n) = \hat{C}_{b_1}(z_2) \hat{C}_{b_2}(z_3) \dots \hat{C}_{b_{n-1}}(z_n) \hat{C}_{b_n}(z_1) W , \quad (9.161)$$

l'opérateur W étant défini par

$$W = R_{b_{n-1}, b_n}^{(N-1)}(\varphi(z_1, z_n)) \dots R_{b_2, b_3}^{(N-1)}(\varphi(z_1, z_3)) R_{b_1, b_2}^{(N-1)}(\varphi(z_1, z_2)) . \quad (9.162)$$

On peut alors répéter la dérivation du terme non voulu $\text{NV}_1^{\hat{A}}(\psi)$ pour obtenir les autres termes non voulus $\text{NV}_r^{\hat{A}}(\psi)$. On trouve finalement que si le vecteur $|X\rangle$ est vecteur propre de $t^{(N-1)}(\lambda, \{z\})$ avec la valeur propre $E^{(N-1)}(\lambda)$ pour toute valeur de λ , alors

$$\text{NV}_r^{\hat{A}}(\psi) = -\frac{1 - q\varphi(\lambda, z_r)}{p\varphi(\lambda, z_r)} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq r)}}^n \frac{1}{p\varphi(z_r, z_j)} \right) \left(\prod_{i=1}^L p\varphi(z_r, \alpha_i) \right) E^{(N-1)}(z_r) |\psi_r(\{z\}, \{\alpha\})\rangle , \quad (9.163)$$

le vecteur $|\psi_r(\{z\}, \{\alpha\})\rangle$ étant défini par

$$|\psi_r(\{z\}, \{\alpha\})\rangle = {}_b\langle N+1 | \hat{C}_{b_1}(\lambda) \hat{C}_{b_2}(z_{r+1}) \dots \hat{C}_{b_{n-r+1}}(z_n) \hat{C}_{b_{n-r+2}}(z_1) \dots \hat{C}_{b_n}(z_{r-1}) W^{r-1} | X \rangle | \Omega \rangle . \quad (9.164)$$

Commutation de $\hat{D}_a$: termes voulus

On fait maintenant commuter $\hat{D}_a$ avec le produit des opérateurs $\hat{C}_{b_j}$ intervenant dans le vecteur $|\psi(\{z\}, \{\alpha\})\rangle$. Comme précédemment, on omettra l'argument $\{\alpha\}$ des opérateurs $\hat{D}_a$ et $\hat{C}_{b_j}$ pour alléger les notations. Le terme voulu est donné par

$$\begin{aligned} \hat{D}_a(\lambda) \hat{C}_{b_1}(z_1) \dots \hat{C}_{b_n}(z_n) \\ = \left(\prod_{j=1}^n \frac{1}{p\varphi(z_j, \lambda)} \right) P_{a, b_1} \dots P_{a, b_n} \hat{C}_{b_1}(z_1) \dots \hat{C}_{b_n}(z_n) \hat{D}_a(\lambda) G_{b_n, a}^{-1} \dots G_{b_1, a}^{-1} + \text{N. V.} \end{aligned} \quad (9.165)$$

On multiplie l'équation précédente par le vecteur $|\Omega\rangle$. Les opérateurs $G_{b_j, a}^{-1}$ n'agissent pas dessus. L'équation (9.143) permet alors d'éliminer l'opérateur $\hat{D}$. On obtient

$$\begin{aligned} \hat{D}_a(\lambda) \hat{C}_{b_1}(z_1) \dots \hat{C}_{b_n}(z_n) | \Omega \rangle = \\ \left(\prod_{j=1}^n \frac{1}{p\varphi(z_j, \lambda)} \right) P_{a, b_1} \dots P_{a, b_n} \hat{C}_{b_1}(z_1) \dots \hat{C}_{b_n}(z_n) | N+1 \rangle_a {}_a\langle N+1 | G_{b_n, a}^{-1} \dots G_{b_1, a}^{-1} | \Omega \rangle \\ + \text{N. V.} \end{aligned} \quad (9.166)$$

On multiplie maintenant l'expression précédente à gauche par le vecteur ${}_b\langle N+1|$ et l'opérateur $|N+1\rangle_a {}_a\langle N+1|$, et à droite par le vecteur $|X\rangle$. Comme $|N+1\rangle_a {}_a\langle N+1|\hat{D}_a(\lambda) = \hat{D}_a(\lambda)$ et ${}_a\langle N+1|{}_b\langle N+1|P_{a,b_j} = {}_a\langle N+1|{}_b\langle N+1|$, on obtient

$$\begin{aligned} & \hat{D}_a(\lambda)|\psi(\{z\}, \{\alpha\})\rangle \\ &= \left(\prod_{j=1}^n \frac{1}{p\varphi(z_j, \lambda)} \right) {}_b\langle N+1|\hat{C}_{b_1}(z_1) \dots \hat{C}_{b_n}(z_n)|N+1\rangle_a {}_a\langle N+1|G_{b_n,a}^{-1} \dots G_{b_1,a}^{-1}|X\rangle|\Omega\rangle + \text{N. V.} \end{aligned} \quad (9.167)$$

D'après (9.111), l'action de ${}_a\langle N+1|$ sur $G_{b_j,a}^{-1}$ donne

$${}_a\langle N+1|G_{b_j,a}^{-1} = \left(\sum_{\beta=1}^{N+1} g_{\beta,N+1}^{-1} |\beta\rangle_{b_j} {}_b\langle \beta| \right) {}_a\langle N+1| = \left(\sum_{\beta=1}^N e^{\gamma_{N+1,\beta}} |\beta\rangle_{b_j} {}_b\langle \beta| \right) {}_a\langle N+1|, \quad (9.168)$$

donc

$$\begin{aligned} & {}_a\langle N+1|G_{b_n,a}^{-1} \dots G_{b_1,a}^{-1}|X\rangle = \\ & \left[\sum_{\beta_1=1}^N \dots \sum_{\beta_n=1}^N \left(\prod_{j=1}^n e^{\gamma_{N+1,\beta_j}} \right) (|\beta_1\rangle_{b_1} \otimes \dots \otimes |\beta_n\rangle_{b_n} {}_b\langle \beta_1| \otimes \dots \otimes {}_b\langle \beta_n|)|X\rangle \right] {}_a\langle N+1|. \end{aligned} \quad (9.169)$$

Mais, comme le vecteur $|X\rangle$ est vecteur propre des opérateurs nombre total de particules de classes 1 à N (avec les valeurs propres $n_1, \dots, n_N$), les seuls n -uplets $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ tels que ${}_b\langle \beta_1, \dots, \beta_n|X\rangle$ soit non nul sont tels que n_1 des β_j doivent être égaux à 1, n_2 doivent être égaux à 2, $\dots$, et n_N doivent être égaux à N . On peut donc écrire

$${}_a\langle N+1|G_{b_n,a}^{-1} \dots G_{b_1,a}^{-1}|X\rangle = \left(\prod_{\beta=1}^N e^{n_\beta \gamma_{N+1,\beta}} \right) |X\rangle {}_a\langle N+1|. \quad (9.170)$$

On obtient donc finalement que les termes voulus engendrés par la commutation de l'opérateur $\text{Tr}_a[U_a^{(N)} \hat{A}_a(\lambda)]$ sur le vecteur $|\psi(\{z\}, \{\alpha\})\rangle$ sont donnés par

$$\text{Tr}_a \left[U_a^{(N)} \hat{D}_a(\lambda) \right] |\psi(\{z\}, \{\alpha\})\rangle = u_{N+1}^{(N)} \left(\prod_{j=1}^n \frac{1}{p\varphi(z_j, \lambda)} \right) \left(\prod_{\beta=1}^N e^{n_\beta \gamma_{N+1,\beta}} \right) |\psi(\{z\}, \{\alpha\})\rangle + \text{N. V.} \quad (9.171)$$

On constate que les termes voulus redonnent un vecteur proportionnel à $|\psi(\{z\}, \{\alpha\})\rangle$.

Commutation de $\hat{D}_a$: termes non voulus

On s'intéresse enfin aux termes non voulus issus de la commutation de $\hat{D}_a$ avec le produit des opérateurs $\hat{C}_{b_j}$ intervenant dans le vecteur $|\psi(\{z\}, \{\alpha\})\rangle$. On omettra encore une fois l'argument $\{\alpha\}$ des opérateurs $\hat{D}_a$ et $\hat{C}_{b_j}$ pour alléger les notations.

La commutation des $\hat{D}_a(\lambda)$ va engendrer n types de termes non voulus : les termes pour lesquels l'argument de $\hat{D}_a$ est z_1 après la commutation avec tous les $\hat{C}_{b_j}$, ceux pour lesquels l'argument de $\hat{D}_a$ est $z_2, \dots$, et enfin ceux pour lesquels l'argument de $\hat{D}_a$ est z_n . On notera NV_r la somme des termes non voulus de type r . On va commencer par le terme non voulu du premier type, qui peut être obtenu uniquement en prenant le deuxième terme de (9.138) pour la commutation de $\hat{D}_a(\lambda)$ avec $\hat{C}_a(z_1)$, et ensuite uniquement le premier terme de (9.138) pour

toutes les autres commutations. On a donc

$$\begin{aligned} \text{NV}_1 = & -\frac{1-p\varphi(z_1, \lambda)}{p\varphi(z_1, \lambda)} \left(\prod_{j=2}^n \frac{1}{p\varphi(z_j, z_1)} \right) \\ & \times P_{a,b_1} \dots P_{a,b_n} \hat{C}_{b_1}(\lambda) \hat{C}_{b_2}(z_2) \dots \hat{C}_{b_n}(z_n) \hat{D}_a(z_1) G_{b_n,a}^{-1} \dots G_{b_1,a}^{-1} . \end{aligned} \quad (9.172)$$

On multiplie l'expression précédente par le vecteur ${}_b\langle N+1|$ et l'opérateur $U_a^{(N)}$ à gauche, et par le vecteur $|X\rangle$ et le vecteur $|\Omega\rangle$ à droite. On effectue ensuite la trace sur l'espace auxiliaire $\mathcal{A}$. Par le même raisonnement que pour le terme voulu, on obtient alors

$$\begin{aligned} \text{NV}_1^{\hat{D}}(\psi) \equiv {}_b\langle N+1| \text{Tr}_a U_a^{(N)} \text{NV}_1 |X\rangle |\Omega\rangle = & -u_{N+1}^{(N)} \frac{1-p\varphi(z_1, \lambda)}{p\varphi(z_1, \lambda)} \left(\prod_{j=2}^n \frac{1}{p\varphi(z_j, z_1)} \right) \\ & \times \left(\prod_{\beta=1}^N e^{n_\beta \gamma_{N+1, \beta}} \right) {}_b\langle N+1| \hat{C}_{b_1}(\lambda) \hat{C}_{b_2}(z_2) \dots \hat{C}_{b_n}(z_n) |X\rangle |\Omega\rangle . \end{aligned} \quad (9.173)$$

Enfin, par le même raisonnement que pour le calcul des termes non voulus issus de la commutation de $\hat{A}_a(\lambda)$, on obtient

$$\text{NV}_r^{\hat{D}}(\psi) = -u_{N+1}^{(N)} \frac{1-p\varphi(z_r, \lambda)}{p\varphi(z_r, \lambda)} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq r)}}^n \frac{1}{p\varphi(z_j, z_r)} \right) \left(\prod_{\beta=1}^N e^{n_\beta \gamma_{N+1, \beta}} \right) |\psi_r(\{z\}, \{\alpha\})\rangle , \quad (9.174)$$

avec le même vecteur $|\psi_r(\{z\}, \{\alpha\})\rangle$ (9.164) que pour les termes non voulus $\text{NV}_r^{\hat{A}}(\psi)$.

Annulation des termes non voulus

Le calcul des termes voulus et non voulus générés par la commutation des opérateurs $\hat{A}_a(\lambda, \{\alpha\})$ et $\hat{D}_a(\lambda, \{\alpha\})$ sur le vecteur $|\psi(\{z\}, \{\alpha\})\rangle$ nous donne finalement l'action de la matrice de transfert $t(\lambda, \{\alpha\})$ sur ce vecteur. Rassemblant tous les termes, on trouve que

$$\begin{aligned} & t(\lambda, \{\alpha\}) |\psi(\{z\}, \{\alpha\})\rangle \\ &= \left[\left(\prod_{j=1}^n \frac{1}{p\varphi(\lambda, z_j)} \right) \left(\prod_{i=1}^L p\varphi(\lambda, \alpha_i) \right) E^{(N-1)}(\lambda) + u_{N+1}^{(N)} \left(\prod_{j=1}^n \frac{1}{p\varphi(z_j, \lambda)} \right) \left(\prod_{\beta=1}^N e^{n_\beta \gamma_{N+1, \beta}} \right) \right] \\ & \quad \times |\psi(\{z\}, \{\alpha\})\rangle \\ & - \sum_{r=1}^n \left[\frac{1-q\varphi(\lambda, z_r)}{p\varphi(\lambda, z_r)} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq r)}}^n \frac{1}{p\varphi(z_r, z_j)} \right) \left(\prod_{i=1}^L p\varphi(z_r, \alpha_i) \right) E^{(N-1)}(z_r) \right. \\ & \quad \left. + u_{N+1}^{(N)} \frac{1-p\varphi(z_r, \lambda)}{p\varphi(z_r, \lambda)} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq r)}}^n \frac{1}{p\varphi(z_j, z_r)} \right) \left(\prod_{\beta=1}^N e^{n_\beta \gamma_{N+1, \beta}} \right) \right] |\psi_r(\{z\}, \{\alpha\})\rangle , \end{aligned} \quad (9.175)$$

pour un vecteur $|X\rangle$ vecteur propre de la matrice de transfert $t^{(N-1)}(\lambda, \{z\})$ avec la valeur propre $E^{(N-1)}(\lambda)$. Si les vecteurs $|\psi_r(\{z\}, \{\alpha\})\rangle$ sont linéairement indépendants (ce que l'on admettra), une condition nécessaire et suffisante pour que le vecteur $|\psi(\{z\}, \{\alpha\})\rangle$ soit alors

vecteur propre de la matrice de transfert $t(\lambda, \{\alpha\})$ est que le coefficient de chaque vecteur $|\psi_r(\{z\}, \{\alpha\})\rangle$ s'annule. Comme

$$\frac{1 - q\varphi(\lambda, z_r)}{p\varphi(\lambda, z_r)} + \frac{1 - p\varphi(z_r, \lambda)}{p\varphi(z_r, \lambda)} = 0, \quad (9.176)$$

on obtient la condition

$$\left(\prod_{i=1}^L p\varphi(z_r, \alpha_i) \right) E^{(N-1)}(z_r) = u_{N+1}^{(N)} \left(\prod_{\beta=1}^N e^{n_\beta \gamma_{N+1, \beta}} \right) \left(\prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq r)}}^n \frac{\varphi(z_r, z_j)}{\varphi(z_j, z_r)} \right). \quad (9.177)$$

La valeur propre de la matrice de transfert $t(\lambda, \{\alpha\})$ est alors donnée par

$$\begin{aligned} E(\lambda, \{z\}, \{\alpha\}) &= E^{(N-1)}(\lambda) \left(\prod_{i=1}^L p\varphi(\lambda, \alpha_i) \right) \left(\prod_{j=1}^n \frac{1}{p\varphi(\lambda, z_j)} \right) \\ &\quad + u_{N+1}^{(N)} \left(\prod_{\beta=1}^N e^{n_\beta \gamma_{N+1, \beta}} \right) \left(\prod_{j=1}^n \frac{1}{p\varphi(z_j, \lambda)} \right). \end{aligned} \quad (9.178)$$

On constate que la condition sur les z_j , ainsi que l'expression de la valeur propre $E(\lambda, \{z\}, \{\alpha\})$, dépendent d'une valeur propre de la matrice de transfert $t^{(N-1)}(\lambda, \{z\})$, qui agit sur l'espace $\mathcal{B}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_n$ comme la matrice de transfert d'un système avec $N-1$ classes de particules (les sites occupés par des particules de classe N étant considérés comme des sites vides). On va donc devoir itérer la procédure de diagonalisation par Ansatz de Bethe algébrique qui vient d'être présentée pour la matrice de transfert $t(\lambda, \{\alpha\})$, pour diagonaliser la matrice $t^{(N-1)}(\lambda, \{z\})$. On note que même pour une matrice de transfert homogène $t(\lambda)$, on a à diagonaliser une matrice $t^{(N-1)}(\lambda, \{z\})$ inhomogène, construite avec un opérateur $U_a^{(N-1)}$ différent de l'identité, tel que

$$u_\beta^{(N-1)} = u_\beta^{(N)} e^{n_{N+1} \gamma_{\beta, N+1}}. \quad (9.179)$$

Ceci explique en particulier pourquoi il est nécessaire de considérer des matrices de transfert inhomogènes pour diagonaliser une matrice de transfert homogène quand $N > 1$.

9.5.2 Itération de la procédure : Ansatz de Bethe emboîté

Nous allons maintenant itérer N fois la procédure précédente pour diagonaliser complètement la matrice de transfert correspondant au modèle à N classes de particules.

Notations

Il est utile de modifier légèrement les notations que nous avons utilisées précédemment, pour mieux souligner le fait que les vecteurs propres de la matrice de transfert du modèle à N classes de particules sont construits par une procédure itérative consistant à diminuer d'une unité le nombre de classes de particules à chaque étape pour arriver à un modèle à une seule classe de particules.

On va construire un vecteur propre de la matrice de transfert correspondant à des configurations du modèle d'exclusion comportant n_1 particules de première classe, n_2 particules de deuxième classe, $\dots$, n_N particules de N -ième classe, et n_{N+1} particules de $N+1$ -ème classe (ou, de manière équivalente, n_{N+1} sites vides). On introduit les quantités

$$m_k = n_1 + \dots + n_k. \quad (9.180)$$

En particulier $m_0 = 0$, et $m_{N+1} = L$ est le nombre de sites du modèle d'exclusion considéré.

Pour k entre 0 et N , on va devoir considérer m_{k+1} sites $v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, \dots, v_{m_{k+1}}^{(k)}$, chacun ayant $k+1$ états possible (le site peut être occupé par des particules de classe comprise entre 1 et $k+1$, un site occupé par une particule de classe $k+1$ étant équivalent à un site vide). On associe à ces sites des espaces vectoriels $V_1^{(k)}, V_2^{(k)}, \dots, V_{m_{k+1}}^{(k)}$ de dimension $k+1$. Les espaces $V_1^{(N)}, \dots, V_L^{(N)}$, de dimension $N+1$, étaient auparavant simplement notés $V_1, \dots, V_L$, et les sites correspondant $v_1^{(N)}, \dots, v_L^{(N)}$ étaient notés $1, \dots, L$. Les espaces $V_1^{(N-1)}, \dots, V_{m_N}^{(N-1)}$, de dimension N , et associés aux sites $v_1^{(N-1)}, \dots, v_{m_N}^{(N-1)}$, étaient quant à eux notés $\mathcal{B}_1^{(N-1)}, \dots, \mathcal{B}_n^{(N-1)}$ précédemment. On note que les espaces $\mathcal{B}_1^{(N-1)}, \dots, \mathcal{B}_n^{(N-1)}$ étaient alors engendrés par les configurations de sites $b_1, \dots, b_n$ ne comportant pas de particules de classe $N+1$.

On considère aussi des espaces auxiliaires $\mathcal{A}^{(k)}$, de dimension $k+1$, associés à des sites auxiliaires a_k , et des matrices de monodromie $T_{a_k}^{(k)}$ agissant sur $\mathcal{A}^{(k)} \otimes V_1^{(k)} \otimes \dots \otimes V_{m_{k+1}}^{(k)}$. À partir de ces matrices de monodromie, et des opérateurs $U_{a_k}^{(k)}$ (diagonaux sur la base des configurations de $\mathcal{A}^{(k)}$), on construit enfin les matrices de transfert $t^{(k)}(\lambda)$ (pour $1 \leq k \leq N$) :

$$t^{(k)}(\lambda) = \text{Tr}_{a_k} [U_{a_k}^{(k)} T_{a_k}^{(k)}] = \text{Tr}_{a_k} \left[\left(\sum_{\beta=1}^{k+1} u_{\beta}^{(k)} |\beta\rangle_a \langle\beta| \right) T_{a_k}^{(k)} \right]. \quad (9.181)$$

La matrice de transfert $t^{(k)}(\lambda)$ agit sur l'espace $V_1^{(k)} \otimes \dots \otimes V_{m_{k+1}}^{(k)}$ de dimension $(k+1)^{m_{k+1}}$. Elle correspond à des modèles à k classes de particules. Elle dépend de m_{k+1} inhomogénéités $z_1^{(k+1)}, \dots, z_{m_{k+1}}^{(k+1)}$. On notera $\alpha_i = z_i^{(N+1)}$ les inhomogénéités de la matrice de transfert pour le modèle à N classes de particules que l'on cherche à diagonaliser. Ces inhomogénéités α_i sont des données du problème, contrairement aux autres $z_j^{(k)}$ qui sont solution des équations de Bethe. De même, l'opérateur $U_{a_N}^{(N)}$ est une donnée du problème (les $u_{\beta}^{(N)}$ sont des paramètres de la matrice de transfert $t^{(N)}(\lambda)$), tandis que les autres $U_{a_k}^{(k)}$ sont donnés en fonction de $U_{a_N}^{(N)}$ et des $\gamma_{\beta, \beta'}$.

Nous allons devoir itérer l'Ansatz de Bethe algébrique présenté précédemment N fois, pour les matrices de transfert $t^{(N)}(\lambda), t^{(N-1)}(\lambda), \dots, t^{(2)}(\lambda)$, et $t^{(1)}(\lambda)$. Pour diagonaliser la matrice de transfert $t^{(k)}(\lambda)$, on introduit un vecteur $|\psi^{(k)}(z^{(k)})\rangle$ dépendant de m_k racines de Bethe $z_1^{(k)}, \dots, z_{m_k}^{(k)}$.

Valeur propre de la matrice de transfert

La relation de récurrence (9.179) entre les quantités $u_{\beta}^{(k-1)}$ et $u_{\beta}^{(k)}$ intervenant dans les matrices de transfert $t^{(k-1)}(\lambda, \{z^{(k+1)}\})$ et $t^{(k)}(\lambda, \{z^{(k+1)}\})$ donne la valeur des $u_{\beta}^{(k)}$ en fonction des $u_{\beta} = u_{\beta}^{(N)}$, qui font partie des paramètres de la matrice de transfert inhomogène $t(\lambda, \{\alpha\})$ que l'on cherche à diagonaliser. On a

$$u_{\beta}^{(k)} = u_{\beta} \prod_{l=k+2}^{N+1} e^{n_l \gamma_{\beta, l}}. \quad (9.182)$$

On note alors

$$g_k = u_{k+1}^{(k)} \prod_{l=1}^k e^{n_l \gamma_{k+1, l}} = u_{k+1} \prod_{l=1}^{N+1} e^{n_l \gamma_{k+1, l}}. \quad (9.183)$$

La relation de récurrence (9.178) entre la valeur propre de la matrice de transfert $t^{(k)}(\lambda, \{z^{(k+1)}\})$ et la valeur propre de la matrice de transfert $t^{(k-1)}(\lambda, \{z^{(k)}\})$ s'écrit alors

$$E^{(k)}(\lambda) = g_k \left(\prod_{j=1}^{m_k} \frac{1}{p\varphi(z_j^{(k)}, \lambda)} \right) + \left(\frac{\prod_{i=1}^{m_{k+1}} p\varphi(\lambda, z_i^{(k+1)})}{\prod_{j=1}^{m_k} p\varphi(\lambda, z_j^{(k)})} \right) E^{(k-1)}(\lambda). \quad (9.184)$$

On note que pour le système à zéro classes de particules, la matrice de transfert, qui agit sur l'espace de dimension 1 engendré par le vecteur $|1, \dots, 1\rangle_{v_1^{(0)}, \dots, v_{n_1}^{(0)}}$, est égale à $u_1^{(0)} \mathbb{1}$, ce qui implique que $E^{(0)}(\lambda) = u_1^{(0)} = g_0$. La récurrence précédente pour $E^{(k)}(\lambda)$ donne donc

$$E^{(k)}(\lambda) = \sum_{l=0}^k \left(\frac{g_l \times \prod_{i=1}^{m_{k+1}} p\varphi(\lambda, z_i^{(k+1)})}{\prod_{j=1}^{m_{l+1}} p\varphi(\lambda, z_j^{(l+1)}) \prod_{j=1}^{m_l} p\varphi(z_j^{(l)}, \lambda)} \right). \quad (9.185)$$

On trouve donc pour la valeur propre de la matrice de transfert inhomogène $t(\lambda, \{\alpha\})$

$$E(\lambda, \{\alpha\}) = \sum_{k=0}^N \left(\frac{g_k \times \prod_{i=1}^L p\varphi(\lambda, \alpha_i)}{\prod_{j=1}^{m_{k+1}} p\varphi(\lambda, z_j^{(k+1)}) \prod_{j=1}^{m_k} p\varphi(z_j^{(k)}, \lambda)} \right). \quad (9.186)$$

Pour la matrice de transfert homogène, il suffit alors de prendre toutes les inhomogénéités α_i à zéro, et tous les u_k (qui sont cachés dans les g_k) à 1. On trouve alors

$$E(\lambda) = g_N \prod_{j=1}^{m_N} \frac{1}{p\varphi(z_j^{(N)}, \lambda)} + \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{g_k p^L \lambda^L}{\prod_{j=1}^{m_{k+1}} p\varphi(\lambda, z_j^{(k+1)}) \prod_{j=1}^{m_k} p\varphi(z_j^{(k)}, \lambda)} \right). \quad (9.187)$$

La dérivée logarithmique en $\lambda = 0$ de $E(\lambda)$ donne alors la valeur propre correspondante de la matrice de Markov déformée :

$$E(\{\gamma\}) = \sum_{j=1}^{m_N} \left(\frac{1}{z_j^{(N)}} + pq z_j^{(N)} - (p + q) \right). \quad (9.188)$$

On note qu'elle s'exprime seulement en fonction des $z_j^{(N)}$ et pas des autres $z_j^{(k)}$.

Équations de Bethe

Avec les nouvelles notations, la contrainte sur les $z_i^{(k)}$ (9.177) s'écrit (pour k entre 1 et N)

$$\left(\prod_{i=1}^{m_{k+1}} p\varphi(z_r^{(k)}, z_i^{(k+1)}) \right) E^{(k-1)}(z_r^{(k)}) = g_k \left(\prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq r)}}^{m_k} \frac{\varphi(z_r^{(k)}, z_j^{(k)})}{\varphi(z_j^{(k)}, z_r^{(k)})} \right). \quad (9.189)$$

Connaissant les $E^{(k)}(\lambda)$, on peut maintenant calculer $E^{(k-1)}(z_r^{(k)})$. On trouve

$$E^{(k-1)}(z_r^{(k)}) = g_{k-1} \prod_{j=1}^{m_{k-1}} \frac{1}{p\varphi(z_j^{(k-1)}, z_r^{(k)})}. \quad (9.190)$$

Les équations de Bethe deviennent alors

$$\boxed{\frac{g_{k-1}}{g_k} \left(\frac{\prod_{i=1}^{m_{k+1}} p\varphi(z_r^{(k)}, z_i^{(k+1)})}{\prod_{j=1}^{m_{k-1}} p\varphi(z_j^{(k-1)}, z_r^{(k)})} \right) = \left(\prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq r)}}^{m_k} \frac{\varphi(z_r^{(k)}, z_j^{(k)})}{\varphi(z_j^{(k)}, z_r^{(k)})} \right)}. \quad (9.191)$$

Dans le cas $N = 1$ homogène, on obtient une seule équation :

$$p^L e^{L\gamma_{1,2}} \left(z_r^{(1)} \right)^L = \left(\prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq r)}}^{n_1} \frac{\varphi(z_r^{(1)}, z_j^{(1)})}{\varphi(z_j^{(1)}, z_r^{(1)})} \right). \quad (9.192)$$

On retrouve l'équation de Bethe (9.88), en posant $z_j^{(1)} = \tilde{z}_j$ et $\gamma_{1,2} = \gamma$.

Dans le cas $N = 2$, on a deux ensembles de racines de Bethe : n_1 racines de Bethe $z_j^{(1)}$, et $n_1 + n_2$ racines de Bethe $z_j^{(2)}$. On a donc $2n_1 + n_2$ équations de Bethe pour ces quantités. Dans le cas homogène, ces équations s'écrivent

$$e^{-n_1(\gamma_{1,2} - \gamma_{1,3}) + (n_2 + n_3)\gamma_{2,3}} \left(\frac{p^L \left(z_r^{(2)} \right)^L}{\prod_{j=1}^{n_1} p\varphi(z_j^{(1)}, z_r^{(2)})} \right) = \left(\prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq r)}}^{n_1 + n_2} \frac{\varphi(z_r^{(2)}, z_j^{(2)})}{\varphi(z_j^{(2)}, z_r^{(2)})} \right) \quad (9.193)$$

$$e^{(n_1 + n_2)\gamma_{1,2} + n_3(\gamma_{1,3} - \gamma_{2,3})} \prod_{i=1}^{n_1 + n_2} p\varphi(z_r^{(1)}, z_i^{(2)}) = \left(\prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq r)}}^{n_1} \frac{\varphi(z_r^{(1)}, z_j^{(1)})}{\varphi(z_j^{(1)}, z_r^{(1)})} \right). \quad (9.194)$$

9.5.3 Équation de Bethe fonctionnelle

On va maintenant écrire les équations de Bethe du modèle à N classe de particules sous la forme d'équations fonctionnelles. On effectue dans les équations de Bethe les changements de variables

$$\lambda = p^{-1} \frac{1-t}{1-xt}, \quad z_j^{(k)} = p^{-1} \frac{1-y_j^{(k)}}{1-xy_j^{(k)}}, \quad \alpha_j = z_j^{(N+1)} = p^{-1} \frac{1-\beta_j}{1-x\beta_j}. \quad (9.195)$$

Comme dans le cas du modèle à une classe de particules, on introduit alors les polynômes

$$Q_k(t) = \prod_{j=1}^{m_k} (t - y_j^{(k)}). \quad (9.196)$$

Pour $k = 0$, on pose

$$Q_0(t) = 1, \quad (9.197)$$

tandis que pour $k = N + 1$, on a

$$Q_{N+1}(t) = \prod_{j=1}^L (t - \beta_j). \quad (9.198)$$

Dans le cas homogène, cela donne simplement $Q_{N+1}(t) = (t-1)^L$. En fonction des polynômes Q_k , les équations de Bethe s'écrivent sous la forme de N équations fonctionnelles couplées (voir section 5.1.1 du chapitre 5)

$$Q_k(t)R_k(t) = g_k x^{m_k} Q_{k-1}(t)Q_k(t/x)Q_{k+1}(xt) + g_{k-1} x^{m_{k-1}} Q_{k-1}(t/x)Q_k(xt)Q_{k+1}(t) , \quad (9.199)$$

où les $R_k(t)$ sont des polynômes de degré $m_{k-1} + m_{k+1}$ en t . Chaque équation fonctionnelle fait intervenir quatre polynômes inconnus : $R_k(t)$, $Q_{k-1}(t)$, $Q_k(t)$ et $Q_{k+1}(t)$, sauf celles pour $k = 1$ et $k = N$, pour lesquelles les polynômes $Q_0(t)$ et $Q_{N+1}(t)$ sont connus.

En fonction des polynômes Q , la relation entre la valeur propre de la matrice de transfert $t^{(k-1)}(\lambda)$ et la valeur propre de la matrice de transfert $t^{(k)}(\lambda)$ s'écrit

$$E^{(k)}(\lambda) \frac{Q_{k+1}(xt)}{Q_{k+1}(t)} - E^{(k-1)}(\lambda) \frac{Q_k(xt)}{Q_k(t)} = g_k x^{m_k} \frac{Q_k(t/x)Q_{k+1}(xt)}{Q_k(t)Q_{k+1}(t)} . \quad (9.200)$$

Donc, on trouve la relation suivante entre les $E^{(k)}(\lambda)$ et les $R_k(t)$:

$$E^{(k)}(\lambda) \frac{Q_{k+1}(xt)}{Q_{k+1}(t)} - E^{(k-2)}(\lambda) \frac{Q_k(xt)}{Q_k(t)} = \frac{R_k(t)}{Q_{k-1}(t)Q_{k+1}(t)} . \quad (9.201)$$

9.A Algèbre des opérateurs de la matrice de monodromie

On donne dans cette appendice l'algèbre des opérateurs A , B , C et D construits à partir de la matrice de monodromie, issue de l'équation de Yang-Baxter.

9.A.a Une classe de particules

Pour le modèle à une classe de particules, l'équation de Yang-Baxter globale (9.58) donne les seize relations algébriques suivantes pour les opérateurs $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ et $D(\lambda)$ définis en (9.61) à partir de la matrice de monodromie $T_a(\lambda)$:

$$[A(\lambda), A(\mu)] = 0 \quad (9.202)$$

$$[B(\lambda), B(\mu)] = 0 \quad (9.203)$$

$$[C(\lambda), C(\mu)] = 0 \quad (9.204)$$

$$[D(\lambda), D(\mu)] = 0 \quad (9.205)$$

$$A(\mu)B(\lambda) = \frac{1}{qe^{-\gamma}\varphi(\lambda, \mu)}B(\lambda)A(\mu) - \frac{1 - q\varphi(\lambda, \mu)}{qe^{-\gamma}\varphi(\lambda, \mu)}B(\mu)A(\lambda) \quad (9.206)$$

$$A(\lambda)C(\mu) = \frac{1}{pe^{\gamma}\varphi(\lambda, \mu)}C(\mu)A(\lambda) - \frac{1 - q\varphi(\lambda, \mu)}{pe^{\gamma}\varphi(\lambda, \mu)}C(\lambda)A(\mu) \quad (9.207)$$

$$D(\lambda)B(\mu) = \frac{1}{qe^{-\gamma}\varphi(\lambda, \mu)}B(\mu)D(\lambda) - \frac{1 - p\varphi(\lambda, \mu)}{qe^{-\gamma}\varphi(\lambda, \mu)}B(\lambda)D(\mu) \quad (9.208)$$

$$D(\mu)C(\lambda) = \frac{1}{pe^{\gamma}\varphi(\lambda, \mu)}C(\lambda)D(\mu) - \frac{1 - p\varphi(\lambda, \mu)}{pe^{\gamma}\varphi(\lambda, \mu)}C(\mu)D(\lambda) \quad (9.209)$$

$$[A(\mu), D(\lambda)] = \frac{1 - p\varphi(\lambda, \mu)}{qe^{-\gamma}\varphi(\lambda, \mu)}B(\lambda)C(\mu) - \frac{1 - q\varphi(\lambda, \mu)}{qe^{-\gamma}\varphi(\lambda, \mu)}B(\mu)C(\lambda) \quad (9.210)$$

$$[A(\lambda), D(\mu)] = \frac{1 - p\varphi(\lambda, \mu)}{pe^{\gamma}\varphi(\lambda, \mu)}C(\mu)B(\lambda) - \frac{1 - q\varphi(\lambda, \mu)}{pe^{\gamma}\varphi(\lambda, \mu)}C(\lambda)B(\mu) \quad (9.211)$$

$$A(\lambda)D(\mu) - A(\mu)D(\lambda) = \frac{pe^{\gamma}\varphi(\lambda, \mu)}{1 - p\varphi(\lambda, \mu)}B(\mu)C(\lambda) - \frac{qe^{-\gamma}\varphi(\lambda, \mu)}{1 - p\varphi(\lambda, \mu)}C(\lambda)B(\mu) \quad (9.212)$$

$$D(\mu)A(\lambda) - D(\lambda)A(\mu) = \frac{pe^{\gamma}\varphi(\lambda, \mu)}{1 - q\varphi(\lambda, \mu)}B(\lambda)C(\mu) - \frac{qe^{-\gamma}\varphi(\lambda, \mu)}{1 - q\varphi(\lambda, \mu)}C(\mu)B(\lambda) \quad (9.213)$$

$$B(\mu)A(\lambda) = \frac{1}{pe^{\gamma}\varphi(\lambda, \mu)}A(\lambda)B(\mu) - \frac{1 - p\varphi(\lambda, \mu)}{pe^{\gamma}\varphi(\lambda, \mu)}A(\mu)B(\lambda) \quad (9.214)$$

$$C(\lambda)A(\mu) = \frac{1}{qe^{-\gamma}\varphi(\lambda, \mu)}A(\mu)C(\lambda) - \frac{1 - p\varphi(\lambda, \mu)}{qe^{-\gamma}\varphi(\lambda, \mu)}A(\lambda)C(\mu) \quad (9.215)$$

$$B(\lambda)D(\mu) = \frac{1}{pe^{\gamma}\varphi(\lambda, \mu)}D(\mu)B(\lambda) - \frac{1 - q\varphi(\lambda, \mu)}{pe^{\gamma}\varphi(\lambda, \mu)}D(\lambda)B(\mu) \quad (9.216)$$

$$C(\mu)D(\lambda) = \frac{1}{qe^{-\gamma}\varphi(\lambda, \mu)}D(\lambda)C(\mu) - \frac{1 - q\varphi(\lambda, \mu)}{qe^{-\gamma}\varphi(\lambda, \mu)}D(\mu)C(\lambda) . \quad (9.217)$$

Ces relations restent inchangées si l'on remplace les opérateurs $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ et $D(\lambda)$ par les opérateurs $A(\lambda, \{\alpha\})$, $B(\lambda, \{\alpha\})$, $C(\lambda, \{\alpha\})$ et $D(\lambda, \{\alpha\})$ construits (9.73) à partir de la matrice de monodromie inhomogène $T_a(\lambda, \{\alpha\})$.

9.A.b Plusieurs classes de particules

Pour le modèle à plusieurs classes de particules, l'équation de Yang-Baxter globale (9.125) donne 16 relations algébriques pour les opérateurs $\hat{A}(\lambda, \{\alpha\})$, $\hat{B}(\lambda, \{\alpha\})$, $\hat{C}(\lambda, \{\alpha\})$ et $\hat{D}(\lambda, \{\alpha\})$ définis en (9.130) à partir de la matrice de monodromie inhomogène $T_a(\lambda, \{\alpha\})$. On omettra les

inhomogénéités $\{\alpha\}$ dans les opérateurs, pour alléger les notations. On a alors

$$R_{a,a'}^{(N-1)}(\varphi(\lambda, \mu))\hat{A}_a(\lambda)\hat{A}_{a'}(\mu) = \hat{A}_a(\mu)\hat{A}_{a'}(\lambda)R_{a,a'}^{(N-1)}(\varphi(\lambda, \mu)) \quad (9.218)$$

$$R_{a,a'}^{(N-1)}(\varphi(\lambda, \mu))\hat{B}_a(\lambda)\hat{B}_{a'}(\mu) = \hat{B}_a(\mu)\hat{B}_{a'}(\lambda) \quad (9.219)$$

$$\hat{C}_a(\lambda)\hat{C}_{a'}(\mu) = \hat{C}_a(\mu)\hat{C}_{a'}(\lambda)R_{a,a'}^{(N-1)}(\varphi(\lambda, \mu)) \quad (9.220)$$

$$\hat{D}_a(\lambda)\hat{D}_{a'}(\mu) = \hat{D}_a(\mu)\hat{D}_{a'}(\lambda) \quad (9.221)$$

$$\hat{A}_a(\mu)\hat{B}_{a'}(\lambda)P_{a,a'}G_{a,a'} = \frac{1}{q\varphi(\lambda, \mu)}R_{a,a'}^{(N-1)}(\varphi(\lambda, \mu))\hat{B}_a(\lambda)\hat{A}_{a'}(\mu) - \frac{1-q\varphi(\lambda, \mu)}{q\varphi(\lambda, \mu)}\hat{B}_a(\mu)\hat{A}_{a'}(\lambda) \quad (9.222)$$

$$P_{a,a'}G_{a,a'}\hat{A}_a(\lambda)\hat{C}_{a'}(\mu) = \frac{1}{p\varphi(\lambda, \mu)}\hat{C}_a(\mu)\hat{A}_{a'}(\lambda)R_{a,a'}^{(N-1)}(\varphi(\lambda, \mu)) - \frac{1-q\varphi(\lambda, \mu)}{p\varphi(\lambda, \mu)}\hat{C}_a(\lambda)\hat{A}_{a'}(\mu) \quad (9.223)$$

$$P_{a,a'}G_{a,a'}\hat{D}_a(\lambda)\hat{B}_{a'}(\mu) = \frac{1}{q\varphi(\lambda, \mu)}\hat{B}_a(\mu)\hat{D}_{a'}(\lambda) - \frac{1-p\varphi(\lambda, \mu)}{q\varphi(\lambda, \mu)}\hat{B}_a(\lambda)\hat{D}_{a'}(\mu) \quad (9.224)$$

$$\hat{D}_a(\mu)\hat{C}_{a'}(\lambda)P_{a,a'}G_{a,a'} = \frac{1}{p\varphi(\lambda, \mu)}\hat{C}_a(\lambda)\hat{D}_{a'}(\mu) - \frac{1-p\varphi(\lambda, \mu)}{p\varphi(\lambda, \mu)}\hat{C}_a(\mu)\hat{D}_{a'}(\lambda) \quad (9.225)$$

$$\hat{A}_a(\mu)\hat{D}_{a'}(\lambda)P_{a,a'}G_{a,a'} - P_{a,a'}G_{a,a'}\hat{D}_{a'}(\lambda)\hat{A}_a(\mu) = \quad (9.226)$$

$$\frac{1-p\varphi(\lambda, \mu)}{q\varphi(\lambda, \mu)}\hat{B}_a(\lambda)\hat{C}_{a'}(\mu) - \frac{1-q\varphi(\lambda, \mu)}{q\varphi(\lambda, \mu)}\hat{B}_a(\mu)\hat{C}_{a'}(\lambda)$$

$$P_{a,a'}G_{a,a'}\hat{A}_a(\lambda)\hat{D}_{a'}(\mu) - \hat{D}_{a'}(\mu)\hat{A}_a(\lambda)P_{a,a'}G_{a,a'} = \quad (9.227)$$

$$\frac{1-p\varphi(\lambda, \mu)}{p\varphi(\lambda, \mu)}\hat{C}_a(\mu)\hat{B}_{a'}(\lambda) - \frac{1-q\varphi(\lambda, \mu)}{p\varphi(\lambda, \mu)}\hat{C}_a(\lambda)\hat{B}_{a'}(\mu)$$

$$\hat{A}_a(\lambda)\hat{D}_{a'}(\mu) - \hat{A}_a(\mu)\hat{D}_{a'}(\lambda) = \quad (9.228)$$

$$\frac{p\varphi(\lambda, \mu)}{1-p\varphi(\lambda, \mu)}\hat{B}_a(\mu)\hat{C}_{a'}(\lambda)P_{a,a'}G_{a,a'} - \frac{q\varphi(\lambda, \mu)}{1-p\varphi(\lambda, \mu)}P_{a,a'}G_{a,a'}\hat{C}_a(\lambda)\hat{B}_{a'}(\mu)$$

$$\hat{D}_a(\mu)\hat{A}_{a'}(\lambda) - \hat{D}_a(\lambda)\hat{A}_{a'}(\mu) = \quad (9.229)$$

$$\frac{p\varphi(\lambda, \mu)}{1-q\varphi(\lambda, \mu)}P_{a,a'}G_{a,a'}\hat{B}_a(\lambda)\hat{C}_{a'}(\mu) - \frac{q\varphi(\lambda, \mu)}{1-q\varphi(\lambda, \mu)}\hat{C}_a(\mu)\hat{B}_{a'}(\lambda)P_{a,a'}G_{a,a'}$$

$$\hat{B}_a(\mu)\hat{A}_{a'}(\lambda)P_{a,a'}G_{a,a'} = \frac{1}{p\varphi(\lambda, \mu)}R_{a,a'}^{(N-1)}(\varphi(\lambda, \mu))\hat{A}_a(\lambda)\hat{B}_{a'}(\mu) - \frac{1-p\varphi(\lambda, \mu)}{p\varphi(\lambda, \mu)}\hat{A}_a(\mu)\hat{B}_{a'}(\lambda) \quad (9.230)$$

$$P_{a,a'}G_{a,a'}\hat{C}_a(\lambda)\hat{A}_{a'}(\mu) = \frac{1}{q\varphi(\lambda, \mu)}\hat{A}_a(\mu)\hat{C}_{a'}(\lambda)R_{a,a'}^{(N-1)}(\varphi(\lambda, \mu)) - \frac{1-p\varphi(\lambda, \mu)}{q\varphi(\lambda, \mu)}\hat{A}_a(\lambda)\hat{C}_{a'}(\mu) \quad (9.231)$$

$$P_{a,a'}G_{a,a'}\hat{B}_a(\lambda)\hat{D}_{a'}(\mu) = \frac{1}{p\varphi(\lambda, \mu)}\hat{D}_a(\mu)\hat{B}_{a'}(\lambda) - \frac{1-q\varphi(\lambda, \mu)}{p\varphi(\lambda, \mu)}\hat{D}_a(\lambda)\hat{B}_{a'}(\mu) \quad (9.232)$$

$$\hat{C}_a(\mu)\hat{D}_{a'}(\lambda)P_{a,a'}G_{a,a'} = \frac{1}{q\varphi(\lambda, \mu)}\hat{D}_a(\lambda)\hat{C}_{a'}(\mu) - \frac{1-q\varphi(\lambda, \mu)}{q\varphi(\lambda, \mu)}\hat{D}_a(\mu)\hat{C}_{a'}(\lambda). \quad (9.233)$$

Les relations algébriques précédentes font intervenir la restriction $R_{a,a'}^{(N-1)}(\varphi(\lambda, \mu))$ de l'opérateur $R_{a,a'}(\varphi(\lambda, \mu))$ au sous espace de $\mathcal{A}^{(N-1)} \otimes \mathcal{A}'^{(N-1)}$ de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$ engendré par les configurations des sites auxiliaires ne comportant pas de particules de classe $N+1$.

Conclusion

Nous avons étudié dans cette thèse le modèle d'exclusion asymétrique, un modèle exactement soluble de physique statistique hors d'équilibre.

Dans la première partie, nous avons présenté quelques généralités concernant le modèle d'exclusion asymétrique. Après avoir défini le modèle d'exclusion au chapitre 1, nous avons vu au chapitre 2 que sa dynamique, qui s'exprime sous la forme d'une équation maîtresse, peut être codée dans une matrice de Markov. Une déformation de cette matrice de Markov permet alors d'étudier les fluctuations du courant. Cette matrice déformée peut être diagonalisée par Ansatz de Bethe, comme nous l'avons vu au chapitre 3.

Dans toute la deuxième partie de la thèse, nous avons utilisé l'Ansatz de Bethe pour calculer les fluctuations du courant total du modèle d'exclusion sur un anneau avec une asymétrie arbitraire. Au chapitre 5, nous avons en particulier calculé les trois premiers cumulants du courant $[1, 2]$, en utilisant une formulation fonctionnelle des équations de Bethe, et obtenu tous les cumulants pour le modèle faiblement asymétrique $[3]$. À partir des expressions exactes obtenues pour les trois premiers cumulants du courant et de calculs effectués pour de petits systèmes, nous avons ensuite été amenés au chapitre 6 à conjecturer une expression combinatoire explicite pour tous les cumulants du courant quelle que soit la valeur de l'asymétrie $[4]$.

Tous ces résultats exacts pour les cumulants du courant conduisent à identifier trois régimes différents pour les fluctuations du courant du modèle d'exclusion sur un anneau dans la limite d'un système de grande taille, comme nous l'avons vu au chapitre 4. Le régime pour lequel l'asymétrie est la plus faible correspond à la classe d'universalité de l'équation d'Edwards-Wilkinson. Dans ce régime, les fluctuations du courant sont gaussiennes. Le régime pour lequel l'asymétrie est la plus forte correspond à la classe d'universalité de l'équation de Kardar-Parisi-Zhang. Ces deux régimes sont séparés par un régime intermédiaire, dans lequel l'exposant dynamique est le même que pour l'équation d'Edwards-Wilkinson, mais avec des fluctuations du courant non gaussiennes.

La troisième partie est consacrée au modèle d'exclusion asymétrique à plusieurs classes de particules, qui est défini au chapitre 7. Nous exprimons en particulier la mesure stationnaire de ce modèle sous la forme d'un Ansatz matriciel au chapitre 8. Nous expliquons aussi la formulation algébrique de l'Ansatz de Bethe pour ce modèle au chapitre 5.

Nous concluons par une liste de quelques points qu'il serait intéressant d'éclaircir :

- Nous avons vu au chapitre 2 que la valeur propre maximale $E(\gamma)$ de la matrice de Markov déformée $M(\gamma)$ est périodique de période $2i\pi/L$. Quelle est la conséquence de cette périodicité pour la fonction de grandes déviations du courant $G(j)$?
- Au chapitre 4, nous avons écrit la forme asymptotique des cumulants du courant pour les différentes lois d'échelle de l'asymétrie. Dans quelle mesure ces expressions sont-elles universelles en une dimension pour le passage d'un modèle régi par l'équation d'Edwards-Wilkinson à un modèle régi par l'équation de Kardar-Parisi-Zhang ?
- Nous avons montré au chapitre 4 que pour le modèle faiblement asymétrique sur un anneau, les cumulants présentent des oscillations en fonction du paramètre d'asymétrie. Quelle est la signification physique de ces oscillations ?
- Nous avons calculé au chapitre 5 tous les cumulants du courant du modèle faiblement asymétrique. Cependant, ceci ne donne pas accès à leur fonction génératrice $E(\gamma)$ pour γ loin de zéro. Comment obtenir le comportement non perturbatif de $E(\gamma)$ par Ansatz de Bethe ?
- Comment prouver l'expression combinatoire des cumulants du courant du chapitre 6 ? Quelle est la signification physique de cette expression ?
- Au chapitre 8, nous avons montré que la mesure stationnaire du modèle d'exclusion à plusieurs classes de particules s'exprime sous la forme d'un Ansatz matriciel. L'algèbre de ces matrices est cependant assez compliquée. Est-il cependant possible d'en extraire la

- valeur moyenne du courant et le profil de densité ?
- Pour le modèle à plusieurs classes de particules, quel est le lien entre la matrice de transfert définie à partir de l'Ansatz matriciel au chapitre 8 et celle définie à partir de la matrice de monodromie au chapitre 9 ?
 - Au chapitre 9, nous avons donné les équations de Bethe fonctionnelles pour le modèle d'exclusion à plusieurs classes de particules. Est-il possible d'en extraire la valeur des premiers cumulants du courant ?

Bibliographie

- [1] S. Prolhac and K. Mallick. Current fluctuations in the exclusion process and Bethe Ansatz. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 41:175002, 2008.
- [2] S. Prolhac. Fluctuations and skewness of the current in the partially asymmetric exclusion process. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 41:365003, 2008.
- [3] S. Prolhac and K. Mallick. Cumulants of the current in a weakly asymmetric exclusion process. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 42:175001, 2009.
- [4] S. Prolhac. A combinatorial solution for the current fluctuations in the exclusion process. *arXiv:0904.2356*, 2009.
- [5] S. Prolhac, M.R. Evans, and K. Mallick. The matrix product solution of the multispecies partially asymmetric exclusion process. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 42:165004, 2009.
- [6] S. Katz, J.L. Lebowitz, and H. Spohn. Phase transitions in stationary nonequilibrium states of model lattice systems. *Phys. Rev. B*, 28:1655–1658, 1983.
- [7] S. Katz, J.L. Lebowitz, and H. Spohn. Nonequilibrium steady states of stochastic lattice gas models of fast ionic conductors. *J. Stat. Phys.*, 34:497–537, 1984.
- [8] F. Spitzer. Interaction of Markov processes. *Adv. Math.*, 5:246–290, 1970.
- [9] T.M. Liggett. *Interacting Particle Systems*. New York: Springer, 1985.
- [10] P.A. Ferrari. Exclusion processes and applications (lecture notes of a course given at Institut Henri Poincaré). <http://www.ime.usp.br/~pablo/papers/ihp2008/ihp2008.pdf>, 2008.
- [11] H. Spohn. *Large Scale Dynamics of Interacting Particles*. New York: Springer, 1991.
- [12] T. Halpin-Healy and Y.-C. Zhang. Kinetic roughening phenomena, stochastic growth, directed polymers and all that. aspects of multidisciplinary statistical mechanics. *Phys. Rep.*, 254:215–414, 1995.
- [13] B. Schmittmann and R.K.P. Zia. Statistical mechanics of driven diffusive systems. In *Phase Transitions and Critical Phenomena*, volume 17. London: Academic, 1995.
- [14] J. Krug. Origins of scale invariance in growth processes. *Adv. Phys.*, 46:139–282, 1997.
- [15] B. Derrida. An exactly soluble non-equilibrium system: The asymmetric simple exclusion process. *Phys. Rep.*, 301:65–83, 1998.
- [16] B. Schmittmann and R.K.P. Zia. Driven diffusive systems. An introduction and recent developments. *Phys. Rep.*, 301:45–64, 1998.
- [17] G.M. Schütz. Exactly solvable models for many-body systems far from equilibrium. In *Phase Transitions and Critical Phenomena*, volume 19. San Diego: Academic, 2001.
- [18] O. Golinelli and K. Mallick. The asymmetric simple exclusion process: an integrable model for non-equilibrium statistical mechanics. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 39:12679–12705, 2006.
- [19] B. Derrida. Non-equilibrium steady states: fluctuations and large deviations of the density and of the current. *J. Stat. Mech.*, page P07023, 2007.
- [20] C.T. MacDonald, J.H. Gibbs, and A.C. Pipkin. Kinetics of biopolymerization on nucleic acid templates. *Biopolymers*, 6:1–25, 1967.

- [21] C.T. MacDonald and J.H. Gibbs. Concerning the kinetics of polypeptide synthesis on polyribosomes. *Biopolymers*, 7:707–725, 1968.
- [22] T.L. Hill. *Free energy transduction in biology: the steady-state kinetic and thermodynamic formalism*. Academic press, New York, 1977.
- [23] P.M. Richards. Theory of one-dimensional hopping conductivity and diffusion. *Phys. Rev. B*, 16:1393–1409, 1977.
- [24] R. Lipowsky, S. Klumpp, and T.M. Nieuwenhuizen. Random walks of cytoskeletal motors in open and closed compartments. *Phys. Rev. Lett.*, 87:108101, 2001.
- [25] D. Chowdhury, L. Santen, and A. Schadschneider. Statistical physics of vehicular traffic and some related systems. *Phys. Rep.*, 329:199–329, 2000.
- [26] M. Prähofer and H. Spohn. Current fluctuations for the totally asymmetric simple exclusion process. In *In and Out of Equilibrium: Probability with a Physics Flavor*, volume 51 of *Progress in Probability*, pages 185–204. Boston: Birkhäuser, 2002.
- [27] H. Spohn. Exact solutions for KPZ-type growth processes, random matrices, and equilibrium shapes of crystals. *Physica A*, 369:71–99, 2006.
- [28] T. Sasamoto. Fluctuations of the one-dimensional asymmetric exclusion process using random matrix techniques. *J. Stat. Mech.*, page P07007, 2007.
- [29] D.S. Dean and S.N. Majumdar. Extreme value statistics of eigenvalues of gaussian random matrices. *Phys. Rev. E*, 77:041108, 2008.
- [30] S.A. Janowsky and J.L. Lebowitz. Finite-size effects and shock fluctuations in the asymmetric simple-exclusion process. *Phys. Rev. A*, 45:618–625, 1992.
- [31] I. Benjaminia, P.A. Ferrari, and C. Landim. Asymmetric conservative processes with random rates. *Stochastic Processes and their Applications*, 61:181–204, 1996.
- [32] F.C. Alcaraz and R.Z. Bariev. Exact solution of the asymmetric exclusion model with particles of arbitrary size. *Phys. Rev. E*, 60:79–88, 1999.
- [33] P.A. Ferrari. Shock fluctuations in asymmetric simple exclusion. *Probab. Theor. Rel. Fields*, 91:81–101, 1992.
- [34] M.R. Evans, R. Juhász, and L. Santen. Shock formation in an exclusion process with creation and annihilation. *Phys. Rev. E*, 68:026117, 2003.
- [35] A.L. Barabási and H.E. Stanley. *Fractal concepts in surface growth*. Cambridge university press, 1995.
- [36] J. Villain and A. Pimpinelli. *Physique de la Croissance Cristalline*. Eyrolles, 1995.
- [37] P. Meakin. *Fractals, scaling and growth far from equilibrium*. Cambridge University Press, 1998.
- [38] S. Gupta, S.N. Majumdar, C. Godrèche, and M. Barma. Tagged particle correlations in the asymmetric simple exclusion process: Finite-size effects. *Phys. Rev. E*, 76:021112, 2007.
- [39] S.F. Edwards and D.R. Wilkinson. The surface statistics of a granular aggregate. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 381:17–31, 1982.
- [40] M. Kardar, G. Parisi, and Y.-C. Zhang. Dynamic scaling of growing interfaces. *Phys. Rev. Lett.*, 56:889–892, 1986.
- [41] M. Prähofer and H. Spohn. Statistical self-similarity of one-dimensional growth processes. *Physica A*, 279:342–352, 2000.
- [42] F. Family and T. Vicsek. Scaling of the active zone in the Eden process on percolation networks and the ballistic deposition model. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 18:L75–L81, 1985.

- [43] J. Krug and L.-H. Tang. Disorder-induced unbinding in confined geometries. *Phys. Rev. E*, 50:104–115, 1994.
- [44] J.C. Slater. Theory of the transition in KH_2PO_4 . *J. Chem. Phys.*, 9:16–33, 1941.
- [45] E.H. Lieb and F.Y. Wu. Two dimensional ferroelectric models. In *Phase Transitions and Critical Phenomena*, volume 1, pages 331–490. London: Academic, 1972.
- [46] R.J. Baxter. *Exactly solved models in statistical mechanics*. Academic Press, 1982.
- [47] L. Pauling. The structure and entropy of ice and of other crystals with some randomness of atomic arrangement. *J. Am. Chem. Soc.*, 57:2680–2684, 1935.
- [48] D. Kandel, E. Domany, and B. Nienhuis. A six-vertex model as a diffusion problem: derivation of correlation functions. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 23:L755–L762, 1990.
- [49] M.R. Evans. Phase transitions in one-dimensional nonequilibrium systems. *Braz. J. Phys.*, 30:42–57, 2000.
- [50] M.R. Evans and T. Hanney. Nonequilibrium statistical mechanics of the zero-range process and related models. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 38:R195–R240, 2005.
- [51] C. Godrèche and J.M. Luck. Dynamics of the condensate in zero-range processes. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 38:7215–7237, 2005.
- [52] S.N. Majumdar. Real-space condensation in stochastic mass transport models. *arXiv:0904.4097*, 2009.
- [53] M.R. Evans, S.N. Majumdar, and R.K.P. Zia. Factorized steady states in mass transport models. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 37:L275–L280, 2004.
- [54] S. Karlin and H.M. Taylor. *A First Course in Stochastic Processes*. New York: Academic, 1975.
- [55] L.-H. Gwa and H. Spohn. Six-vertex model, roughened surfaces, and an asymmetric spin Hamiltonian. *Phys. Rev. Lett.*, 68:725–728, 1992.
- [56] O. Golinelli and K. Mallick. Bethe ansatz calculation of the spectral gap of the asymmetric exclusion process. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 37:3321–3331, 2004.
- [57] O. Golinelli and K. Mallick. Spectral gap of the totally asymmetric exclusion process at arbitrary filling. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 38:1419–1425, 2005.
- [58] D. Kim. Bethe Ansatz solution for crossover scaling functions of the asymmetric XXZ chain and the Kardar-Parisi-Zhang-type growth model. *Phys. Rev. E*, 52:3512–3524, 1995.
- [59] J. Quastel. *Ph.D. thesis*. Courant Institute, 1990.
- [60] L.-H. Gwa and H. Spohn. Bethe solution for the dynamical-scaling exponent of the noisy Burgers equation. *Phys. Rev. A*, 46:844–854, 1992.
- [61] J. de Gier and F.H.L. Essler. Exact spectral gaps of the asymmetric exclusion process with open boundaries. *Phys. Rev. Lett.*, 95:240601, 2005.
- [62] J. de Gier and F.H.L. Essler. Exact spectral gaps of the asymmetric exclusion process with open boundaries. *J. Stat. Mech.*, page P12011, 2006.
- [63] J. de Gier and F.H.L. Essler. Slowest relaxation mode of the partially asymmetric exclusion process with open boundaries. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 41:485002, 2008.
- [64] R.A. Blythe and M.R. Evans. Nonequilibrium steady states of matrix-product form: a solver’s guide. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 40:R333–R441, 2007.
- [65] B. Derrida, M.R. Evans, V. Hakim, and V. Pasquier. Exact solution of a one-dimensional asymmetric exclusion model using a matrix formulation. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 26:1493–1517, 1993.
- [66] B. Derrida, E. Domany, and D. Mukamel. An exact solution of a one-dimensional asymmetric exclusion model with open boundaries. *J. Stat. Phys.*, 69:667–687, 1992.

- [67] K. Krebs and S. Sandow. Matrix product eigenstates for one-dimensional stochastic models and quantum spin chains. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 30:3165–3173, 1997.
- [68] B. Derrida, J.L. Lebowitz, and E. Speer. Free energy functional for nonequilibrium systems: An exactly solvable case. *Phys. Rev. Lett.*, 87:150601, 2001.
- [69] B. Derrida, J.L. Lebowitz, and E. Speer. Large deviation of the density profile in the steady state of the open symmetric simple exclusion process. *J. Stat. Phys.*, 107:599–634, 2002.
- [70] B. Derrida, J.L. Lebowitz, and E. Speer. Exact free energy functional for a driven diffusive open stationary nonequilibrium system. *Phys. Rev. Lett.*, 89:030601, 2002.
- [71] B. Derrida, J.L. Lebowitz, and E. Speer. Exact large deviation functional of a stationary open driven diffusive system: The asymmetric exclusion process. *J. Stat. Phys.*, 110:775–810, 2003.
- [72] B. Derrida and C. Enaud. Large deviation functional of the weakly asymmetric exclusion process. *J. Stat. Phys.*, 114:537–562, 2004.
- [73] H. Spohn. Long range correlations for stochastic lattice gases in a non-equilibrium steady state. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 16:4275–4291, 1983.
- [74] G.M. Schütz and E. Domany. Phase transitions in an exactly soluble one-dimensional exclusion process. *J. Stat. Phys.*, 72:277–296, 1993.
- [75] T. Sasamoto. One-dimensional partially asymmetric simple exclusion process with open boundaries: orthogonal polynomials approach. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 32:7109–7131, 1999.
- [76] R.A. Blythe, M. Evans, F. Colaiori, and F.H.L. Essler. Exact solution of a partially asymmetric exclusion model using a deformed oscillator algebra. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 33:2313–2332, 2000.
- [77] M. Uchiyama, T. Sasamoto, and M. Wadati. Asymmetric simple exclusion process with open boundaries and Askey-Wilson polynomials. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 37:4985–5002, 2004.
- [78] H.S. Wilf. *Generatingfunctionology*. A.K. Peters, 3rd edition, 2005.
- [79] P. Flajolet and R. Sedgewick. *Analytic Combinatorics*. Cambridge University Press, 2009.
- [80] D.S. Dean, I.T. Drummond, R.R. Horgan, and A. Lefèvre. Perturbation theory for the effective diffusion constant in a medium of random scatterers. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 37:10459–10477, 2004.
- [81] T. Bodineau and B. Derrida. Cumulants and large deviations of the current through non-equilibrium steady states. *C. R. Physique*, 8:540–555, 2007.
- [82] B. Derrida, M.R. Evans, and D. Mukamel. Exact diffusion constant for one-dimensional asymmetric exclusion models. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 26:4911–4918, 1993.
- [83] B. Derrida, M.R. Evans, and K. Mallick. Exact diffusion constant of a one-dimensional asymmetric exclusion model with open boundaries. *J. Stat. Phys.*, 79:833–874, 1995.
- [84] C. Boutillier, P. François, K. Mallick, and S. Mallick. A matrix Ansatz for the diffusion of an impurity in the asymmetric exclusion process. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 35:9703–9730, 2002.
- [85] B. Derrida and K. Mallick. Exact diffusion constant for the one dimensional partially asymmetric exclusion model. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 30:1031–1046, 1997.
- [86] B. Derrida and J.L. Lebowitz. Exact large deviation function in the asymmetric exclusion process. *Phys. Rev. Lett.*, 80:209–213, 1998.
- [87] D.S. Lee and D. Kim. Large deviation function of the partially asymmetric exclusion process. *Phys. Rev. E*, 59:6476–6482, 1999.

- [88] B. Derrida and M.R. Evans. Bethe Ansatz solution for a defect particle in the asymmetric exclusion process. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 32:4833–4850, 1999.
- [89] L. Cantini. Algebraic Bethe ansatz for the two species ASEP with different hopping rates. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 41:095001, 2008.
- [90] J.L. Lebowitz and H. Spohn. A Gallavotti-Cohen-type symmetry in the large deviation functional for stochastic dynamics. *J. Stat. Phys.*, 95:333–365, 1999.
- [91] M. Gaudin. *La Fonction d'Onde de Bethe*. Masson, 1983.
- [92] V.E. Korepin, N.M. Bogoliubov, and A.G. Izergin. *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*. Cambridge University Press, 1993.
- [93] B. Sutherland. *Beautiful Models: 70 Years Of Exactly Solved Quantum Many-body Problems*. World Scientific, 2004.
- [94] N. Kitanine, J.M. Maillet, N.A. Slavnov, and V. Terras. On the algebraic Bethe ansatz approach to the correlation functions of the XXZ spin-1/2 Heisenberg chain. In *Solvable Lattice Models 2004 : Recent Progress on Solvable Lattice Models*, pages 14–48. RIMS publications, Kyoto, 2006.
- [95] H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov, and Y. Takeyama. Algebraic representation of correlation functions in integrable spin chains. *Annales Henri Poincaré*, 7:1395–1428, 2006.
- [96] H. Bethe. Zur theorie der metalle: I. eigenwerte und eigenfunktionen der linearen atomkette. *Zeitschrift für Physik*, 71:205, 1931.
- [97] R. Orbach. Linear antiferromagnetic chain with anisotropic coupling. *Phys. Rev.*, 112:309–316, 1958.
- [98] C.N. Yang and C.P. Yang. One-dimensional chain of anisotropic spin-spin interactions. I. proof of Bethe's hypothesis for ground state in a finite system. *Phys. Rev.*, 150:321–327, 1966.
- [99] C.N. Yang and C.P. Yang. One-dimensional chain of anisotropic spin-spin interactions. II. properties of the ground-state energy per lattice site for an infinite system. *Phys. Rev.*, 150:327–339, 1966.
- [100] C.N. Yang and C.P. Yang. One-dimensional chain of anisotropic spin-spin interactions. III. applications. *Phys. Rev.*, 151:258–264, 1966.
- [101] B. Sutherland. Two-dimensional hydrogen bonded crystals without the ice rule. *J. Math. Phys.*, 11:3183–3186, 1970.
- [102] R.J. Baxter. One-dimensional anisotropic Heisenberg chain. *Phys. Rev. Lett.*, 26:834–834, 1971.
- [103] R.J. Baxter. One-dimensional anisotropic Heisenberg chain. *Ann. Phys.*, 70:323–337, 1972.
- [104] L.A. Takhtadzhan and L.D. Faddeev. The quantum method of the inverse problem and the Heisenberg XYZ model. *Russ. Math. Surv.*, 34:11–68, 1979.
- [105] H.M. Babujian. Exact solution of the one-dimensional isotropic Heisenberg chain with arbitrary spins S. *Phys. Lett. A*, 90:479–482, 1982.
- [106] L.A. Takhtajan. The picture of low-lying excitations in the isotropic Heisenberg chain of arbitrary spins. *Phys. Lett. A*, 87:479–482, 1982.
- [107] A.N. Kirillov and N.Y. Reshetikhin. Exact solution of the integrable XXZ Heisenberg model with arbitrary spin. I. the ground state and the excitation spectrum. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 20:1565–1585, 1987.

- [108] F.C. Alcaraz, M.N. Barber, M.T. Batchelor, R.J. Baxter, and G.R.W. Quispel. Surface exponents of the quantum XXZ, Ashkin-Teller and Potts models. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 20:6397–6409, 1987.
- [109] E.K. Sklyanin. Boundary conditions for integrable quantum systems. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 21:2375–2389, 1988.
- [110] H.J. de Vega and A. Gonzalez Ruiz. Boundary K-matrices for the six vertex and the $n(2n-1)A_{n-1}$ vertex models. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 26:L519–L524, 1993.
- [111] R.I. Nepomechie. Functional relations and Bethe Ansatz for the XXZ chain. *J. Stat. Phys.*, 111:1363–1376, 2003.
- [112] R.I. Nepomechie. Bethe ansatz solution of the open XXZ chain with nondiagonal boundary terms. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 37:433–440, 2004.
- [113] W. Galleas. Functional relations from the Yang-Baxter algebra: Eigenvalues of the XXZ model with non-diagonal twisted and open boundary conditions. *Nucl. Phys. B*, 790:524–542, 2008.
- [114] E.H. Lieb and W. Liniger. Exact analysis of an interacting Bose gas. I. the general solution and the ground state. *Phys. Rev.*, 130:1605–1616, 1963.
- [115] E.H. Lieb. Exact analysis of an interacting Bose gas. II. the excitation spectrum. *Phys. Rev.*, 130:1616–1624, 1963.
- [116] E. Brézin and J. Zinn-Justin. Un problème à N corps soluble. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 263:670–673, 1966.
- [117] C.N. Yang and C.P. Yang. Thermodynamics of a one-dimensional system of bosons with repulsive delta-function interaction. *J. Math. Phys.*, 10:1115–1122, 1969.
- [118] M. Gaudin. Bose gas in one dimension. I. the closure property of the scattering wavefunctions. *J. Math. Phys.*, 12:1674–1676, 1971.
- [119] M. Gaudin. Bose gas in one dimension. II. orthogonality of the scattering states. *J. Math. Phys.*, 12:1677–1680, 1971.
- [120] M. Gaudin. Boundary energy of a Bose gas in one dimension. *Phys. Rev. A*, 4:386–394, 1971.
- [121] E.H. Lieb. Exact solution of the F model of an antiferroelectric. *Phys. Rev. Lett.*, 18:1046–1048, 1967.
- [122] E.H. Lieb. Exact solution of the two-dimensional Slater KDP model of a ferroelectric. *Phys. Rev. Lett.*, 19:108–110, 1967.
- [123] E.H. Lieb. Residual entropy of square ice. *Phys. Rev.*, 162:162–172, 1967.
- [124] B. Sutherland. Exact solution of a two-dimensional model for hydrogen-bonded crystals. *Phys. Rev. Lett.*, 19:103–104, 1967.
- [125] R.J. Baxter. Eight-vertex model in lattice statistics. *Phys. Rev. Lett.*, 26:832–833, 1971.
- [126] R.J. Baxter. Partition function of the eight-vertex lattice model. *Ann. Phys.*, 70:193–228, 1972.
- [127] D. Dhar. An exactly solved model for interfacial growth. *Phase Transitions*, 9:51, 1987.
- [128] O. Babelon, H.J. de Vega, and C.M. Viallet. Analysis of the Bethe ansatz equations of the XXZ model. *Nucl. Phys. B*, 220:13–34, 1983.
- [129] R.P. Langlands and Y. Saint-Aubin. Algebro-geometric aspects of the Bethe equations. In *Strings and Symmetries*, volume 447 of *Lecture Notes in Physics*, pages 40–53. Berlin: Springer, 1995.
- [130] R.P. Langlands and Y. Saint-Aubin. Aspects combinatoires des équations de Bethe. In *Advances in Mathematical Sciences: CRM's 25 Years*, volume 11 of *CRM Proceedings and Lecture Notes*, pages 231–302. Amer. Math. Soc., 1997.

- [131] K. Fabricius and B.M. McCoy. Bethe's equation is incomplete for the XXZ model at roots of unity. *J. Stat. Phys.*, 103:647–678, 2001.
- [132] K. Fabricius and B.M. McCoy. Completing Bethe's equations at roots of unity. *J. Stat. Phys.*, 104:573–587, 2001.
- [133] R.J. Baxter. Completeness of the Bethe ansatz for the six and eight-vertex models. *J. Stat. Phys.*, 108:1–48, 2002.
- [134] O. Golinelli and K. Mallick. Hidden symmetries in the asymmetric exclusion process. *J. Stat. Mech.*, page P12001, 2004.
- [135] O. Golinelli and K. Mallick. Spectral degeneracies in the totally asymmetric exclusion process. *J. Stat. Phys.*, 120:779–798, 2005.
- [136] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover, 1964.
- [137] B. Derrida and C. Appert. Universal large-deviation function of the Kardar-Parisi-Zhang equation in one dimension. *J. Stat. Phys.*, 94:1–30, 1999.
- [138] T. Bodineau and B. Derrida. Distribution of current in non-equilibrium diffusive systems and phase transitions. *Phys. Rev. E*, 72:066110, 2005.
- [139] C. Flindt, C. Fricke, F. Hohls, T. Novotny, K. Netocny, T. Brandes, and R.J. Haug. Universal oscillations in counting statistics. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 106:10116–10119, 2009.
- [140] C. Appert-Rolland, B. Derrida, V. Lecomte, and F. van Wijland. Universal cumulants of the current in diffusive systems on a ring. *Phys. Rev. E*, 78:021122, 2008.
- [141] L. Bertini, A. De Sole, D. Gabrielli, G. Jona-Lasinio, and C. Landim. Fluctuations in stationary nonequilibrium states of irreversible processes. *Phys. Rev. Lett.*, 87:040601, 2001.
- [142] L. Bertini, A. De Sole, D. Gabrielli, G. Jona-Lasinio, and C. Landim. Macroscopic fluctuation theory for stationary non-equilibrium states. *J. Stat. Phys.*, 107:635–675, 2004.
- [143] L. Bertini, A. De Sole, D. Gabrielli, G. Jona-Lasinio, and C. Landim. Towards a nonequilibrium thermodynamics: A self-contained macroscopic description of driven diffusive systems. *J. Stat. Phys.*, 135:857–872, 2009.
- [144] L. Bertini, A. De Sole, D. Gabrielli, G. Jona-Lasinio, and C. Landim. Macroscopic fluctuation theory for stationary non-equilibrium states. *J. Stat. Phys.*, 107:635–675, 2002.
- [145] G.P. Pronko and Y.G. Stroganov. Bethe equations 'on the wrong side of the equator'. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 32:2333–2340, 1999.
- [146] O. Babelon. A short introduction to classical and quantum integrable systems (lecture notes of a course given at IPhT, CEA Saclay). <http://www.lpthe.jussieu.fr/~babelon/saclay2007.pdf>, 2007.
- [147] A. De Masi and P.A. Ferrari. Self-diffusion in one-dimensional lattice gases in the presence of an external field. *J. Stat. Phys.*, 38:603–613, 1985.
- [148] P.A. Ferrari and L.R.G. Fontes. Shocks in asymmetric one-dimensional exclusion processes. *Resenhas IME-USP*, 1:57–68, 1993.
- [149] P.A. Ferrari and L.R.G. Fontes. Shock fluctuations in the asymmetric simple exclusion process. *Probab. Theor. Rel. Fields*, 99:305–319, 1994.
- [150] C. Arita, A. Kuniba, K. Sakai, and T. Sawabe. Spectrum of a multi-species asymmetric simple exclusion process on a ring. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 42:345002, 2009.
- [151] B. Derrida, S.A. Janowski, J.L. Lebowitz, and E.R. Speer. Exact solution of the totally asymmetric simple exclusion process: Shock profiles. *J. Stat. Phys.*, 73:813–842, 1993.

- [152] K. Mallick, S. Mallick, and N. Rajewsky. Exact solution of an exclusion process with three classes of particles and vacancies. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 32:8399–8410, 1999.
- [153] P.A. Ferrari and J.B. Martin. Stationary distributions of multi-type totally asymmetric exclusion processes. *Ann. Probab.*, 35:807–832, 2007.
- [154] M.R. Evans, P.A. Ferrari, and K. Mallick. Matrix representation of the stationary measure for the multispecies TASEP. *J. Stat. Phys.*, 135:217–239, 2009.
- [155] F.C. Alcaraz and R.Z. Bariev. Exact solution of asymmetric diffusion with second-class particles of arbitrary size. *Braz. J. Phys.*, 30:13–26, 2000.
- [156] F.C. Alcaraz and R.Z. Bariev. Exact solution of asymmetric diffusion with N classes of particles of arbitrary size and hierarchical order. *Braz. J. Phys.*, 30:655–666, 2000.
- [157] H. Hinrichsen, S. Sandow, and I. Peschel. On matrix product ground states for reaction - diffusion models. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 29:2643–2649, 1996.
- [158] K. Mallick and S. Sandow. Finite-dimensional representations of the quadratic algebra: Applications to the exclusion process. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 30:4513–4526, 1997.
- [159] R.A. Blythe and M.R. Evans. Lee-Yang zeros and phase transitions in nonequilibrium steady states. *Phys. Rev. Lett.*, 89:080601, 2002.
- [160] R.A. Blythe and M.R. Evans. The Lee-Yang theory of equilibrium and nonequilibrium phase transitions. *Braz. J. Phys.*, 33:464–475, 2003.
- [161] E.K. Sklyanin, L.A. Takhtadzhyan, and L.D. Faddeev. Quantum inverse problem method I. *Theor. Math. Phys.*, 40:688–706, 1979.
- [162] H.J. de Vega. Yang-Baxter algebras, integrable theories and quantum groups. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 4:2371–2463, 1989.
- [163] L.D. Faddeev. Algebraic aspects of Bethe-ansatz. *Int. J. Mod. Phys. A*, 10:1845–1878, 1995.
- [164] L.D. Faddeev. How algebraic Bethe ansatz works for integrable model. *Cours des Houches, arXiv:hep-th/9605187*, 1996.
- [165] R.I. Nepomechie. A spin chain primer. *Int. J. Mod. Phys. B*, 13:2973–2985, 1999.
- [166] O. Golinelli and K. Mallick. Family of commuting operators for the totally asymmetric exclusion process. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 40:5795–5812, 2007.
- [167] O. Golinelli and K. Mallick. Connected operators for the totally asymmetric exclusion process. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 40:13231–13236, 2007.
- [168] H.N.V. Temperley and E.H. Lieb. Relations between the 'percolation' and 'colouring' problem and other graph-theoretical problems associated with regular planar lattices: Some exact results for the 'percolation' problem. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 322:251–280, 1971.
- [169] F.C. Alcaraz, M. Droz, M. Henkel, and V. Rittenberg. Reaction-diffusion processes, critical dynamics, and quantum chains. *Ann. Phys.*, 230:250–302, 1994.
- [170] E.K. Sklyanin, L.A. Takhtadzhyan, and L.D. Faddeev. Quantum inverse problem method. I. *J. Stat. Phys.*, 40:688–706, 1979.
- [171] O. Golinelli and K. Mallick. Derivation of a matrix product representation for the asymmetric exclusion process from the algebraic Bethe ansatz. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 39:10647–10658, 2006.
- [172] P.P. Kulish and N.Y. Reshetikhin. Diagonalisation of $GL(N)$ invariant transfer matrices and quantum N-wave system (Lee model). *J. Phys. A: Math. Gen.*, 16:L591–L596, 1983.

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude de quelques propriétés du modèle d'exclusion asymétrique unidimensionnel, un modèle exactement soluble de particules en interaction présentant un état stationnaire hors d'équilibre.

Dans une première partie, nous expliquons les liens que le modèle d'exclusion asymétrique entretient avec d'autres modèles de la physique statistique, en particulier des modèles de croissance, de polymère dirigé en milieu aléatoire, ou encore des modèles de vertex. Après avoir récapitulé quelques résultats connus, nous expliquons comment le modèle d'exclusion peut être étudié en utilisant l'Ansatz de Bethe.

La deuxième partie est consacrée au calcul par Ansatz de Bethe des fluctuations du courant dans le modèle d'exclusion partiellement asymétrique avec des conditions aux bords périodiques. Utilisant une formulation fonctionnelle des équations de Bethe, nous obtenons des expressions exactes pour les trois premiers cumulants du courant. À partir de ces expressions exactes et de calculs effectués pour de petits systèmes, nous conjecturons ensuite une expression combinatoire explicite pour tous les cumulants du courant.

Dans la troisième partie, nous présentons le modèle d'exclusion à plusieurs classes de particules, qui généralise le modèle étudié dans les deux premières parties. Nous montrons que ses probabilités stationnaire peuvent s'écrire sous la forme de traces de produits de matrices. Nous expliquons ensuite la formulation algébrique de l'Ansatz de Bethe pour ce modèle.

Summary

In this thesis, we study some properties of the one-dimensional Asymmetric Simple Exclusion Process, an exactly solvable model of interacting particles featuring an out of equilibrium stationary state.

In a first part, we explain the relations between the asymmetric exclusion process and other models of statistical physics, in particular growth models, models of a directed polymer in a random medium, and vertex models. After recalling a few known results, we explain how the exclusion process can be studied through the use of the Bethe Ansatz.

The second part deals with Bethe Ansatz calculations of the fluctuations of the total current in the partially asymmetric exclusion process with periodic boundary conditions. Using a functional formulation of the Bethe equations, we obtain exact expressions for the three first cumulants of the current. Then, starting from these exact expressions and also from calculations performed for small systems, we conjecture an explicit combinatorial expression for all the cumulants of the current.

In the third part, we present the exclusion process with several species of particles, which generalizes the model studied in the two first parts. We show that its stationary probabilities can be written as traces of products of matrices. Then, we explain the algebraic formulation of the Bethe Ansatz for this model.

Quatrième partie

Annexe : articles publiés pendant la
thèse

Current Fluctuations in the exclusion process and Bethe Ansatz

Sylvain Prohac and Kirone Mallick

Institut de Physique Théorique, C. E. A. Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France

(Dated: February 4, 2008)

We use the Bethe Ansatz to derive analytical expressions for the current statistics in the asymmetric exclusion process with both forward and backward jumps. The Bethe equations are highly coupled and this fact has impeded their use to derive exact results for finite systems. We overcome this technical difficulty by a reformulation of the Bethe equations into a one variable polynomial problem, akin to the functional Bethe Ansatz. The perturbative solution of this equation leads to the cumulants of the current. We calculate here the first two orders and derive exact formulae for the mean value of the current and its fluctuations.

PACS numbers: 05-40.-a;05-60.-k

Keywords: ASEP, Functional Bethe Ansatz, large deviations

I. INTRODUCTION

The asymmetric exclusion process (ASEP) plays a seminal role in non-equilibrium physics of low dimensional systems [1]. In its simplest version, the ASEP describes a system of particles, randomly hopping on a lattice with hard-core exclusion interaction so that a lattice site can be occupied by only one particle at a given time. Due to its minimal character, this model appears as a building block in many seemingly unrelated fields [2]. By virtue of different mappings, the ASEP can be interpreted as a model for RNA transcription [3], hopping conductivity, polymers in random media, surface growth [4], traffic flow, molecular motors [5] etc... In the one-dimensional case, many exact results have been derived for the ASEP (for a review, see e.g., [6, 7]). As a result, the relations between the intrinsic stochasticity of the dynamics, the external drive and the particles interactions are better understood. The fact that ASEP in one-dimension is an exactly solvable model should not be considered as just an elegant mathematical anomaly at odds with physical relevance. Indeed, many of the exact results obtained for ASEP have shed light on the behaviour of general driven diffusive systems by providing us with effective phenomenological descriptions that can be applied to more realistic models [8]. Examples of such descriptions that stem from mathematical results are: shock fronts to model boundary induced phase transitions, the interpretation of shocks as real space condensation (related to zero range processes) [9, 10], and the additivity principle [11]. Besides, the ASEP is a good toy-model to test the validity of general claims about non-equilibrium systems: for example, the Gallavotti-Cohen fluctuation theorem is satisfied by the ASEP (and by more general Markovian systems) as can be shown by elementary methods [12] whereas the proof for deterministic dynamical systems requires some restrictive hypothesis and is far more technical.

Exact solutions for the exclusion process have been obtained by using several different approaches, and in particular the Matrix Product representation and the Bethe Ansatz. The Matrix Product representation was first introduced in [13] to study the stationary state and the phase diagram of the ASEP with open boundaries. The main idea consists in representing the stationary state as a trace over a suitable, usually quadratic, algebra; this technique has been generalized to many different models, including systems with shock profiles and with different classes of particles [14–16, 18]. An exhaustive and pedagogical review on the Matrix method can be found in [19]. The Bethe Ansatz was first used to calculate the spectral gap of the ASEP and the associated dynamical exponent [20–24]. Indeed, the Markov matrix of the ASEP that encodes its stochastic evolution can be mapped exactly onto a non-hermitian spin chain hamiltonian which is integrable. The Bethe Ansatz also allows to study spectral degeneracies [25], and to investigate variants of the ASEP and more general particle hopping processes [26–29] (for a review see e.g., [30]).

A particularly important physical quantity in the ASEP is the statistics of the current in the stationary regime. This current becomes a local height variable when the ASEP is translated into a Random Solid On Solid model that describes the growth of a random interface. Indeed, in this mapping, a forward random jump of a particle through a bond corresponds to a random deposition event of a unit 'brick' on the interface; a backward jump corresponds to the evaporation of a brick. The time integrated current through a bond of the ASEP is therefore equivalent to the total height of the interface at a given point. In the continuous limit, the motion of this interface is described by the Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) equation (see e.g., [4]). The exclusion process in one dimension is thus a discretized version of the KPZ equation and exact results about the ASEP have therefore interesting interpretations in terms of surface growth.

For the exclusion process on a periodic ring, the mean value of the stationary current through a bond can be easily derived from elementary combinatorics; in the limit of a large system the mean current is given by the density of vacancies multiplied by the asymmetry rate. However, the higher moments of the current in the stationary state are much more difficult to calculate. In fact, the full statistics of the current was determined only for the particular case

of the *totally* asymmetric exclusion process (TASEP), where the particles are allowed to jump only in one direction. For any system size, an analytical expression for the cumulant generating function was obtained, leading to an exact formula for the large deviation function [31, 32]. This result was derived using the Bethe equations which, for the TASEP, can be solved explicitly thanks to a decoupling property that reduces them to a one variable polynomial equation plus a self-consistency condition [21, 27, 30].

In the general case, when jumps on both directions are allowed, the Bethe equations do not decouple and it has not been possible to use them to derive exact results for finite systems. An exact formula for the fluctuation of the current (*i.e.*, the second moment of the current) in the long time limit could however be derived using an extension of the matrix method [33, 34]. But higher moments appeared to be out of reach.

The aim of the present work is to derive analytical results for the current statistics in ASEP with forward and backward jumps (sometimes called the partially asymmetric exclusion process) from the Bethe Ansatz. We overcome the technical difficulty that hindered the solution of the Bethe equations in the general case by reducing them to an effective one variable problem thanks to a suitable reformulation, akin to the so-called functional Bethe Ansatz. This one variable equation can be interpreted as a purely algebraic question involving a divisibility condition between two polynomials. In this work, we use this formalism to derive the expressions of the mean value of the current and its variance. Our technique can be used to calculate the current cumulant to any desired order.

The outline of this work is as follows. In section II, we explain that the cumulant generating function can be expressed as the maximal eigenvalue of a suitable deformation of the Markov matrix where the deformation parameter represents the fugacity of the jumps. In section III, we give the Bethe equations that allow to diagonalize this matrix. The reformulation of the Bethe equations as a problem in polynomial divisibility is done in section IV. In section V, we solve perturbatively this purely algebraic problem to the second order with respect to the jump fugacity. This allows us to derive the exact formulae for the mean value and the variance of the current in section VI. The last section is devoted to concluding remarks. Some technical derivations are given in the appendices.

II. CURRENT STATISTICS AS AN EIGENVALUE PROBLEM

A. The asymmetric exclusion process

The exclusion process on a periodic one dimensional lattice with L sites (sites i and $L+i$ are identical) is a stochastic interacting particle model in which each lattice site is occupied by at most one particle at a given time (*exclusion rule*). The system evolves with time according to a stochastic dynamics: a particle on a site i at time t jumps, in the interval between t and $t + dt$, with probability $p dt$ to the neighbouring site $i + 1$ if this site is empty and with probability $q dt$ to the site $i - 1$ if this site is empty. The jump rates p and q are normalized such that $p + q = 1$. The special case where the jumps are totally biased in one direction ($p = 1$ or $q = 1$) is called the totally asymmetric exclusion process (TASEP). For $p = q = 1/2$, the exclusion process is symmetric (SEP). If the number of particles in the ring is N , the total number of configurations is given by the binomial coefficient $\binom{L}{N}$.

We call $P_t(\mathcal{C})$ the probability that the system is in the configuration $\mathcal{C}$ at time t . As the exclusion process is a continuous-time Markov process, the time evolution of $P_t(\mathcal{C})$ is determined by the master equation

$$\frac{d}{dt}P_t(\mathcal{C}) = \sum_{\mathcal{C}'} M(\mathcal{C}, \mathcal{C}') P_t(\mathcal{C}') = \sum_{\mathcal{C}'} \left(M_0(\mathcal{C}, \mathcal{C}') + M_1(\mathcal{C}, \mathcal{C}') + M_{-1}(\mathcal{C}, \mathcal{C}') \right) P_t(\mathcal{C}'). \quad (1)$$

The Markov matrix M encodes the dynamics of the exclusion process: the non-diagonal element $M_1(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ represents the transition rate from configuration $\mathcal{C}'$ to $\mathcal{C}$ where a particle hops in the forward (*i.e.*, anti-clockwise) direction, the non-diagonal element $M_{-1}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ represents the transition rate from configuration $\mathcal{C}'$ to $\mathcal{C}$ where a particle hops in the backward (*i.e.*, clockwise) direction. The diagonal term $M_0(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = -\sum_{\mathcal{C}' \neq \mathcal{C}} (M_1(\mathcal{C}', \mathcal{C}) + M_{-1}(\mathcal{C}', \mathcal{C}))$ represents the exit rate from the configuration $\mathcal{C}$.

B. Generalized master equation for current statistics

We call Y_t the total distance covered by all the particles between time 0 and time t and $P_t(\mathcal{C}, Y)$ the joint probability of being in the configuration $\mathcal{C}$ at time t with $Y_t = Y$. An evolution equation, analogous to equation (1), can be written for $P_t(\mathcal{C}, Y)$ as follows :

$$\frac{d}{dt}P_t(\mathcal{C}, Y) = \sum_{\mathcal{C}'} \left(M_0(\mathcal{C}, \mathcal{C}') P_t(\mathcal{C}', Y) + M_1(\mathcal{C}, \mathcal{C}') P_t(\mathcal{C}', Y - 1) + M_{-1}(\mathcal{C}, \mathcal{C}') P_t(\mathcal{C}', Y + 1) \right). \quad (2)$$

We now recall how the full statistics of Y_t can be determined [12, 31]. In terms of the generating function $F_t(\mathcal{C})$ defined as

$$F_t(\mathcal{C}) = \sum_{Y=-\infty}^{+\infty} e^{\gamma Y} P_t(\mathcal{C}, Y), \quad (3)$$

equation (2) takes the simpler form :

$$\frac{d}{dt} F_t(\mathcal{C}) = \sum_{\mathcal{C}'} \left(M_0(\mathcal{C}, \mathcal{C}') + e^{\gamma} M_1(\mathcal{C}, \mathcal{C}') + e^{-\gamma} M_{-1}(\mathcal{C}, \mathcal{C}') \right) F_t(\mathcal{C}') = \sum_{\mathcal{C}'} M(\gamma)(\mathcal{C}, \mathcal{C}') F_t(\mathcal{C}'). \quad (4)$$

This equation is similar to the original Markov equation (1) for the probability distribution $P_t(\mathcal{C})$ but where the original Markov matrix M is deformed into $M(\gamma)$ which is given by

$$M(\gamma) = M_0 + e^{\gamma} M_1 + e^{-\gamma} M_{-1}. \quad (5)$$

We emphasize that $M(\gamma)$, that governs the evolution of $F_t(\mathcal{C})$, is not a Markov matrix for $\gamma \neq 0$ (the sum of the elements in a given column does not vanish).

C. Long time limit and maximal eigenvalue

In the long time limit, $t \rightarrow \infty$, the behaviour of $F_t(\mathcal{C})$ is dominated by the largest eigenvalue $\lambda(\gamma)$ of the matrix $M(\gamma)$:

$$F_t(\mathcal{C}) \rightarrow e^{E_{\max}(\gamma)t} \langle \mathcal{C} | E_{\max}(\gamma) \rangle, \quad (6)$$

where the ket $|E_{\max}(\gamma)\rangle$ is the eigenvector corresponding to the largest eigenvalue. Therefore, when $t \rightarrow \infty$, we obtain

$$\langle e^{\gamma Y_t} \rangle = \sum_{\mathcal{C}} F_t(\mathcal{C}) \sim e^{E_{\max}(\gamma)t}. \quad (7)$$

More precisely, we have

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \langle e^{\gamma Y_t} \rangle = E_{\max}(\gamma). \quad (8)$$

The function $E_{\max}(\gamma)$ contains the complete information about the cumulants of the total current Y_t in the long time limit. For example, the total current J and the diffusion constant Δ are given by

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle Y_t \rangle}{t} = \left. \frac{dE_{\max}(\gamma)}{d\gamma} \right|_{\gamma=0}, \quad (9)$$

$$\Delta = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle Y_t^2 \rangle - \langle Y_t \rangle^2}{t} = \left. \frac{d^2 E_{\max}(\gamma)}{d\gamma^2} \right|_{\gamma=0}. \quad (10)$$

Thus, the cumulants of Y_t can be determined by carrying out a perturbative expansion of $E_{\max}(\gamma)$ with respect to γ (a similar method has been used, in a different context, in [35]). The importance of the maximal eigenvalue $E_{\max}(\gamma)$ of the matrix $M(\gamma)$ also stems from the fact that it is closely related to the large deviation function G for the total current. We recall that the large deviation function G is defined as

$$G(j) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \left[\text{Prob} \left(\frac{Y_t}{t} = j \right) \right]. \quad (11)$$

From equations (7) and (11), we find

$$\langle e^{\gamma Y_t} \rangle \sim e^{E_{\max}(\gamma)t} \sim \int e^{t(G(j) + \gamma j)} dj, \quad (12)$$

and deduce by the saddle-point approximation that the maximal eigenvalue $E_{\max}(\gamma)$ is the Legendre transform of the large deviation function $G(j)$

$$E_{\max}(\gamma) = \max_j \left(G(j) + \gamma j \right). \quad (13)$$

D. Restatement of the problem

We want to study the statistical properties of the total current in the partially asymmetric exclusion process. We have seen that in the long time limit, the maximal eigenvalue $E_{\max}(\gamma)$ of the deformed matrix $M(\gamma)$ is the generating function of the cumulants of the current, *i.e.*, the power-series expansion of $E_{\max}(\gamma)$ in the vicinity of $\gamma = 0$ allows us to determine the statistical properties of the current. In the following sections, we shall first explain how to diagonalize the Matrix $M(\gamma)$ using the Bethe Ansatz; this method will allow us to write any eigenvalue of $M(\gamma)$ as a symmetric function of the roots of a system of coupled polynomial equations (the Bethe equations). Then, we shall develop a perturbative scheme to expand the maximal eigenvalue $E_{\max}(\gamma)$ in powers of γ , when $\gamma \rightarrow 0$. The first order expansion will give us the the current J and the second order term will lead to the diffusion constant Δ .

III. THE BETHE EQUATIONS

The deformed matrix $M(\gamma)$ can be diagonalized by Bethe Ansatz. A vector P over the configuration space is an eigenvector of $M(\gamma)$ if it satisfies

$$M(\gamma)P = E(\gamma)P. \quad (14)$$

By representing a configuration by the positions of the N particles on the ring, $(r_1, r_2, \dots, r_N)$ with $1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_N \leq L$, the eigenvalue equation (14) becomes

$$\begin{aligned} EP(r_1, \dots, r_N) = & \sum_i p [e^\gamma P(r_1, \dots, r_{i-1}, r_i - 1, r_{i+1}, \dots, r_N) - P(r_1, \dots, r_N)] + \\ & \sum_j q [e^{-\gamma} P(r_1, \dots, r_{j-1}, r_j + 1, r_{j+1}, \dots, r_N) - P(r_1, \dots, r_N)], \end{aligned} \quad (15)$$

where the sum runs over the indices i such that $r_{i-1} < r_i - 1$ and over the indices j such that $r_j + 1 < r_{j+1}$; these conditions ensure that the corresponding jumps are allowed. Following the coordinate *Bethe Ansatz*, we assume that the eigenvector P can be written in the form

$$P(r_1, \dots, r_n) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} A_\sigma z_{\sigma(1)}^{r_1} z_{\sigma(2)}^{r_2} \dots z_{\sigma(n)}^{r_n}, \quad (16)$$

where Σ_n is the group of the $n!$ permutations of n indices. The coefficients $\{A_\sigma\}$ are rational functions of the fugacities $\{z_1, \dots, z_n\}$. The expression (16) represents an eigenvector of $M(\gamma)$ if $\{z_1, \dots, z_n\}$ satisfy the *Bethe equations* [21, 30]:

$$z_i^L = (-1)^{N-1} \prod_{j=1}^N \frac{qe^{-\gamma} z_i z_j - (p+q)z_i + pe^\gamma}{qe^{-\gamma} z_i z_j - (p+q)z_j + pe^\gamma} \quad \text{for } i = 1 \dots N, \quad (17)$$

and the corresponding eigenvalue of $M(\gamma)$ is given by

$$E(\gamma; z_1, z_2 \dots z_N) = pe^\gamma \sum_{i=1}^N \frac{1}{z_i} + qe^{-\gamma} \sum_{i=1}^N z_i - N(p+q). \quad (18)$$

For $\gamma = 0$, we know that the maximal eigenvalue of the Markov matrix M is equal to 0 and corresponds to the degenerate solution $z_i = 1$ for all i .

Remark: The Gallavotti-Cohen Invariance. The Bethe equations (17) and equation (18) are invariant under the transformation $z \rightarrow \frac{1}{z}$, $\gamma \rightarrow \log \frac{q}{p} - \gamma$. This symmetry implies that the spectrum of $M(\gamma)$ and that of $M(\log \frac{q}{p} - \gamma)$ are identical. This functional identity is satisfied in particular by the largest eigenvalue of M and we have $E_{\max}(\gamma) = E_{\max}(\log \frac{q}{p} - \gamma)$. This identity implies, using equation (13), that the large deviation function satisfies the symmetry

$$G(j) = G(-j) - \left(\log \frac{q}{p} \right) j. \quad (19)$$

This relation is a special case of the general *Fluctuation Theorem* valid for a large class of systems far from equilibrium. It was derived for more general Markovian systems in [12].

A. A useful change of variables

We introduce N auxiliary variables $(y_1, \dots, y_N)$ defined as

$$y_i = \frac{1 - e^{-\gamma} z_i}{1 - x e^{-\gamma} z_i} \quad \text{for } i = 1 \dots N, \quad (20)$$

where we have introduced the asymmetry parameter x :

$$x = \frac{q}{p}. \quad (21)$$

We remark that the change of variables (20) is ill-defined for $x = 1$ which corresponds to the symmetric exclusion process. In the following, our calculations will always be performed for $x < 1$. Our results will extend to the symmetric case by taking the limit $x \rightarrow 1$ in the final expressions. The Bethe equations (17) now become

$$e^{L\gamma} \left(\frac{1 - y_i}{1 - x y_i} \right)^L = - \prod_{j=1}^N \frac{y_i - x y_j}{x y_i - y_j} \quad \text{for } i = 1 \dots N. \quad (22)$$

These equations are simpler than the original ones because they involve only linear polynomials in the y_i 's. By taking the product of the Bethe equations (22) over all the values of i , we obtain

$$\left(e^{N\gamma} \prod_{i=1}^N \frac{1 - y_i}{1 - x y_i} \right)^L = (-1)^N \prod_{i,j=1}^N \frac{y_i - x y_j}{x y_i - y_j} = (-1)^{N+N^2} = 1. \quad (23)$$

This relation stems from the translation invariance of the model (momentum conservation).

In terms of the y_i 's, the eigenvalue (18) reads

$$E(\gamma) = p(1 - x) \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{1 - y_i} - \frac{1}{1 - x y_i} \right). \quad (24)$$

When $\gamma \rightarrow 0$, all the roots $y_i(\gamma)$ that correspond to the maximal eigenvalue $E_{\max}(\gamma)$ of $M(\gamma)$ converge to the degenerate solution $\lim_{\gamma \rightarrow 0} y_i = 0$ and the maximal eigenvalue of $M(\gamma)$ also converges to 0. Using equation (23), we therefore find that, for small enough values of γ , the roots $y_i(\gamma)$ satisfy the relation

$$e^{N\gamma} \prod_{i=1}^N \frac{1 - y_i}{1 - x y_i} = 1. \quad (25)$$

This relation, which is a simple consequence of the Bethe equations, will be useful in the following to select the Bethe roots that correspond to $E_{\max}(\gamma)$.

B. The TASEP case

The Bethe equations (22) are a coupled non-linear system of polynomial equations in the variables $y_1, \dots, y_N$. Deriving exact results from these equations is a daunting task. However, for the special case of the totally asymmetric exclusion process (TASEP), which corresponds to $p = 1$ and $q = x = 0$, the Bethe equations can be reduced to an effective one variable problem. Indeed, for $x = 0$, the equations (22) read

$$e^{L\gamma} (1 - y_i)^L = (-1)^{N-1} \frac{y_i^N}{\prod_{j=1}^N y_j}. \quad (26)$$

Thus, all the Bethe roots y_i are solutions of the one-variable polynomial equation

$$e^{L\gamma} (1 - T)^L + C T^N = 0, \quad (27)$$

where the constant C must be determined self-consistently by the relation

$$C = (-1)^N \prod_{j=1}^N \frac{1}{y_j}. \quad (28)$$

This crucial ‘decoupling’ property of the the Bethe equations for $x = 0$, has lead to an exact calculation of the TASEP spectral gap [20, 21, 24] and has allowed Derrida and Lebowitz to calculate the complete large deviation function of the current for any finite values of L and N [31]. This effective decoupling also explains the spectral degeneracies of the TASEP Markov matrix [25]. Hence, the use of the Bethe Ansatz has been restricted mostly to TASEP (for a review see e.g. [30]).

For the partially asymmetric exclusion process, the Bethe equations are highly coupled to one another and can not be simply reduced to an effective one variable equation. Because of this technical difficulty for $0 < x < 1$, it has not been possible to extract from the Bethe Ansatz any exact solution for finite systems. However, when $L \rightarrow \infty$, the Bethe equations reduce to an integro-differential equation for the density of roots, which was analyzed by Kim et al. [22, 23] to derive the spectral gap and the current large deviation function.

IV. REFORMULATION OF THE BETHE EQUATIONS

We note that in the N Bethe equations (22) all the variables y_i play a similar role. This remark suggests that we should introduce an auxiliary variable T that plays a symmetric role with respect to all the y_i ’s. We suppose that T satisfies the following equation

$$e^{L\gamma} \left(\frac{1 - T}{1 - xT} \right)^L = - \prod_{j=1}^N \frac{T - xy_j}{xT - y_j} \quad \text{for } i = 1 \dots N, \quad (29)$$

where the y_i ’s are now interpreted as *parameters* of the problem. This expression can be rewritten as a one variable polynomial equation for the unknown T :

$$P(T) = 0 \quad \text{with} \quad P(T) = e^{L\gamma} (1 - T)^L \prod_{j=1}^N (xT - y_j) + (1 - xT)^L \prod_{j=1}^N (T - xy_j). \quad (30)$$

The N Bethe equations (22) imply that y_i is a root of $P(T)$ for $i = 1, \dots, N$. Thanks to the auxiliary variable T , the Bethe equations have been reduced to an effective one variable problem with N parameters. We can now proceed as follows: (i) Find the roots of the polynomial $P(T)$ with the unknown T and with N parameters $y_1, \dots, y_N$. (ii) Select N roots, amongst the $L + N$ solutions of $P(T) = 0$, and identify these selected roots to the y_i ’s. This identification leads to N self-consistent equations (recall that for TASEP we had only one self-consistency condition).

It is possible to perform these steps using contour integration in the complex plane as in the TASEP case [24, 27, 31, 32]. However, the calculations will be greatly simplified if the problem is formulated in a purely algebraic manner, as follows. Let us define the polynomial $Q(T)$ as

$$Q(T) = \prod_{j=1}^N (T - y_j). \quad (31)$$

The roots of Q are exactly the Bethe roots $y_1, \dots, y_N$ (equivalently, Q is the generating function of the symmetric polynomials in $y_1, \dots, y_N$). The polynomial $P(T)$, defined in equation (30), can then be written as follows

$$P(T) = e^{L\gamma} (1 - T)^L Q(xT) + (1 - xT)^L x^N Q\left(\frac{T}{x}\right). \quad (32)$$

The fact that the Bethe roots $y_1, \dots, y_N$ are roots of the polynomial $P(T)$ implies that $Q(T)$ *divides* $P(T)$. Therefore there exists a polynomial $R(T)$ of degree L such that $P(T) = Q(T)R(T)$, *i.e.*, such that

$$Q(T)R(T) = e^{L\gamma} (1 - T)^L Q(xT) + (1 - xT)^L x^N Q\left(\frac{T}{x}\right). \quad (33)$$

Substituting $T = y_i$ in this equation and taking into account that y_i is a root of $Q(T)$ we obtain

$$e^{L\gamma} \left(\frac{1 - y_i}{1 - xy_i} \right)^L = -x^N \frac{Q\left(\frac{y_i}{x}\right)}{Q(xy_i)}. \quad (34)$$

Using the expression (31) for $Q(T)$, we find that this relation is identical to the Bethe equation (22). We remark that this reformulation of the Bethe equations as a problem of polynomial divisibility has been used in various contexts [36–38] and is closely related to the functional Bethe Ansatz [36, 38, 39].

A. Expression of the eigenvalue

The eigenvalue $E(\gamma)$, defined in equation (24), can be expressed in terms of the polynomial $Q(T)$:

$$E(\gamma) = p(1 - x) \left(\frac{Q'(1)}{Q(1)} - \frac{1}{x} \frac{Q'(1/x)}{Q(1/x)} \right). \quad (35)$$

This formula can be simplified with the help of the ‘Q-R equation’ (33) as follows. Substituting $T = 1$ in the equation (33) we find

$$Q(1)R(1) = (1 - x)^L x^N Q\left(\frac{1}{x}\right). \quad (36)$$

If we differentiate equation (33) with respect to T and then substitute $T = 1$ we obtain

$$Q'(1)R(1) + Q(1)R'(1) = -Lx^{N+1}(1 - x)^{L-1}Q\left(\frac{1}{x}\right) + x^{N-1}(1 - x)^L Q'\left(\frac{1}{x}\right). \quad (37)$$

Taking the ratio of the last two equations, we find that $E(\gamma)$ can be rewritten as

$$\frac{E(\gamma)}{p(1 - x)} = -\frac{Lx}{1 - x} - \frac{R'(1)}{R(1)}. \quad (38)$$

This is the expression of $E(\gamma)$ that will be used in the sequel.

Equation (25), that allows to select the roots y_i corresponding to the maximal eigenvalue, is similarly rewritten in terms of Q and R as follows

$$e^{N\gamma} \frac{Q(1)}{x^N Q\left(\frac{1}{x}\right)} = 1. \quad (39)$$

Using equation (36), an alternative form is obtained

$$R(1) = e^{N\gamma} (1 - x)^L. \quad (40)$$

This relation will be very useful in the sequel to simplify some calculations.

V. PERTURBATIVE SOLUTION OF THE FUNCTIONAL BETHE ANSATZ EQUATIONS

In this section, we explain how to solve equation (33) order by order in γ for the roots y_i that correspond to the maximal eigenvalue of the matrix $M(\gamma)$.

We first develop the polynomials Q and R in powers of γ

$$Q(T) = \prod_{j=1}^N (T - y_j) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n Q_n(T) = Q_0(T) + \gamma Q_1(T) + \gamma^2 Q_2(T) + \dots \quad (41)$$

$$R(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n R_n(T) = R_0(T) + \gamma R_1(T) + \gamma^2 R_2(T) + \dots \quad (42)$$

We note that the degree of the polynomials $Q_n(T)$ for $n \geq 1$ is at most $N - 1$. For $\gamma = 0$, we know that $E_0 = 0$ and that this maximal eigenvalue is obtained for $y_i = 0$. Therefore, we have

$$Q_0(T) = T^N \quad \text{and} \quad R_0(T) = (1 - xT)^L + x^N(1 - T)^L. \quad (43)$$

By substituting the power series (41) and (42) in the QR-equation (33), we obtain a hierarchical system of linear equations for the polynomials $R_n(T)$ and $Q_n(T)$. This system can be solved order by order by using the known ‘initial conditions’ $Q_0(T)$ and $R_0(T)$.

We now solve the QR-equation to the first and second orders.

A. First order calculation

At first order, the QR-equation (33) becomes

$$Q_1(T) [(1 - xT)^L + x^N(1 - T)^L] + T^N R_1(T) = (1 - T)^L Q_1(xT) + (1 - xT)^L x^N Q_1\left(\frac{T}{x}\right) + Lx^N(1 - T)^L T^N, \quad (44)$$

and the auxiliary equation (39) becomes

$$Q_1(1) - x^N Q_1\left(\frac{1}{x}\right) = -N. \quad (45)$$

It is simpler to define the polynomial

$$B_1(T) = Q_1(T) - x^N Q_1\left(\frac{T}{x}\right), \quad (46)$$

and to rewrite equations (44) and (45) as follows

$$(1 - xT)^L B_1(T) - (1 - T)^L B_1(xT) = T^N (Lx^N(1 - T)^L - R_1(T)). \quad (47)$$

$$B_1(1) = -N. \quad (48)$$

Because $B_1(T)$ and $Q_1(T)$ are of degree $\leq N - 1$ and noting that the term on the r.h.s. of equation (47) is divisible by T^N , we can reduce this equation modulo T^N and write

$$(1 - xT)^L B_1(T) - (1 - T)^L B_1(xT) \equiv 0 \quad [T^N]. \quad (49)$$

This equation allows to determine the polynomial $B_1(T)$ up to a multiplicative constant β_0

$$B_1(T) \equiv \beta_0(1 - T)^L \quad [T^N], \quad \text{i.e.,} \quad B_1(T) = \beta_0 \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \binom{L}{k} T^k. \quad (50)$$

The constant β_0 is fixed using equation (48). Using the binomial identity (B3), we find

$$-N = \beta_0 \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \binom{L}{k} = \beta_0 (-1)^{N-1} \binom{L-1}{N-1}, \quad \text{i.e.,} \quad \beta_0 = \frac{(-1)^N L}{\binom{L}{N}}. \quad (51)$$

From this relation it follows that

$$Q_1(T) = \sum_{k=0}^{N-1} q_k^{(1)} T^k \quad \text{with} \quad q_k^{(1)} = \frac{(-1)^{N+k} L}{\binom{L}{N}} \frac{\binom{L}{k}}{1 - x^{N-k}}. \quad (52)$$

Using this formula and equation (47) the following exact expression for $R_1(T)$ is obtained:

$$R_1(T) = Lx^N(1 - T)^L + (-1)^N \frac{L}{\binom{L}{N}} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{r=0}^L (-1)^{p+r} \binom{L}{p} \binom{L}{r} (x^p - x^r) T^{p+r-N}. \quad (53)$$

All negative powers of T in the above expression cancel out for the following reason: the coefficient of a term of the type T^{-d} with $d > 0$ is obtained by imposing the condition $p + r = N - d$ to the double sum in equation (53). Because of this condition, the indices p and r can vary only from 0 to $N - d$ and they both have the same effective range. The sum in equation (53) is antisymmetric with respect to p and r and therefore it vanishes. This proves that $R_1(T)$ is indeed a polynomial.

B. Second order calculation

At second order, the polynomial $B_2(T)$ defined as

$$B_2(T) = Q_2(T) - x^N Q_2\left(\frac{T}{x}\right), \quad (54)$$

satisfies the following equation

$$(1 - xT)^L B_2(T) - (1 - T)^L B_2(xT) = L(1 - T)^L Q_1(xT) - R_1(T)Q_1(T) + T^N \left(x^N \frac{L^2}{2} (1 - T)^L - R_2(T) \right). \quad (55)$$

If we write this relation modulo T^N we obtain the simpler equation

$$(1 - xT)^L B_2(T) - (1 - T)^L B_2(xT) \equiv L(1 - T)^L Q_1(xT) - R_1(T)Q_1(T) \pmod{T^N}, \quad (56)$$

where the expressions for $Q_1(T)$ and $R_1(T)$ are given in equations (52) and (53) respectively. At order 2, the auxiliary equation (39) becomes

$$B_2(1) = Q_2(1) - x^N Q_2\left(\frac{1}{x}\right) = -NQ_1(1) - \frac{N^2}{2}. \quad (57)$$

The polynomial $B_2(T)$ is the sum of a special solution $\tilde{B}_2(T)$ of equation (56) and of a term that is proportional to $B_1(T)$, the solution of the homogeneous equation (49), *i.e.*,

$$B_2(T) = \tilde{B}_2(T) + CB_1(T). \quad (58)$$

The proportionality constant C is fixed by using the auxiliary equation (57), which leads to

$$C = \frac{\tilde{B}_2(1)}{N} + Q_1(1) + \frac{N}{2}, \quad (59)$$

where we have used $B_1(1) = -N$ from equation (48).

A special solution to the polynomial equation (56) is given by

$$\tilde{B}_2(T) = \sum_{k=0}^{N-1} (1 - x^{N-k}) q_k^{(2)} T^k, \quad (60)$$

$$\text{with } q_k^{(2)} = \frac{(-1)^{N+k+1} L^2}{\binom{L}{N}^2} \frac{1}{1 - x^{N-k}} \left\{ \sum_{r=1}^{N-1} \frac{\binom{L}{N+r} \binom{L}{k-r} x^r}{1 - x^r} + \sum_{r=0}^{N-1} \frac{\binom{L}{N+r} \binom{L}{k-r}}{1 - x^{N+r-k}} \right\}. \quad (61)$$

The main steps to derive equation (61) are given in Appendix A. Finally, the polynomial $Q_2(T)$ is given by the linear combination

$$Q_2(T) = \sum_{k=0}^{N-1} q_k^{(2)} T^k + C \sum_{k=0}^{N-1} q_k^{(1)} T^k, \quad (62)$$

where the constant C is given in equation (59).

VI. EXACT FORMULAE FOR THE MEAN CURRENT AND ITS FLUCTUATIONS

Solving the Q-R equation allows us to calculate the expansion of the largest eigenvalue $E_{\max}(\gamma)$, order by order, and to calculate the cumulants of the total current. The largest eigenvalue $E_{\max}(\gamma)$, can be expanded with respect to the parameter γ as follows

$$E_{\max}(\gamma) = p(1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n E_n. \quad (63)$$

Using equations (38), (40) and (42), the expansion of $E_{\max}(\gamma)$ is given by

$$\frac{E_{\max}(\gamma)}{p(1-x)} = -\frac{Lx}{1-x} - \frac{R'_0(1)}{(1-x)^L} + \gamma \left(\frac{NR'_0(1)}{(1-x)^L} - \frac{R'_1(1)}{(1-x)^L} \right) + \gamma^2 \left(-\frac{N^2R'_0(1)}{2(1-x)^L} + \frac{NR'_1(1)}{(1-x)^L} - \frac{R'_2(1)}{(1-x)^L} \right) + \dots \quad (64)$$

From the expression (43) for $R_0(T)$, we find that

$$\frac{R'_0(1)}{(1-x)^L} = -\frac{Lx}{1-x}, \quad (65)$$

and we verify that the zeroth-order term E_0 in $E_{\max}(\gamma)$ vanishes.

A. Calculation of the Current

The current J , defined in equation (9), corresponds to the coefficient of γ in the expansion of $E_{\max}(\gamma)$. To determine $R'_1(1)$, we start with equation (37) and expand it to the first order in γ :

$$\frac{R'_1(1)}{(1-x)^L} = -N^2 + \frac{Lx}{1-x} \left(Q_1(1) - x^N Q_1 \left(\frac{1}{x} \right) \right) - Q'_1(1) + x^{N-1} Q'_1 \left(\frac{1}{x} \right) = -N^2 + \frac{Lx}{1-x} B_1(1) - B'_1(1), \quad (66)$$

where in the last equality we have used the definition of $B_1(T)$ as given by equation (46). We know that $B_1(1) = -N$ from equation (48); the value of $B'_1(1)$ is readily obtained from the expression of $B_1(T)$ given in equations (50) and (51):

$$B'_1(1) = -LN \frac{N-1}{L-1}. \quad (67)$$

Thus, we have

$$\frac{R'_1(1)}{(1-x)^L} = -N \left(\frac{Lx}{1-x} + \frac{L-N}{L-1} \right). \quad (68)$$

Substituting this expression in the coefficient of γ in equation (64), we find that the total current is given by

$$J = p(1-x) \frac{N(L-N)}{L-1}. \quad (69)$$

This value agrees, of course, with the known formula, which is obtained very simply by using the fact that all the stationary configurations of ASEP on a ring are equiprobable. We recall that J represents the total current in the system; the current through a bond is given by J/L . Using the Bethe Ansatz to find J is certainly a very complicated and distorted way to retrieve a back-of-an-envelope calculation. However, J is one of the simplest quantity associated with ASEP and the fact that nobody could extract such an elementary formula from the Bethe equations has been a standing puzzle for a long time.

B. Calculation of the Diffusion constant

The second order term in the perturbative expansion (64) allows us to calculate the diffusion constant. Indeed, thanks to equation (10), we find that $\Delta = 2p(1-x)E_2$. Therefore, we have

$$\Delta = 2p(1-x) \left(-\frac{N^2R'_0(1)}{2(1-x)^L} + \frac{NR'_1(1)}{(1-x)^L} - \frac{R'_2(1)}{(1-x)^L} \right). \quad (70)$$

Hence, in order to calculate Δ , we also need $R'_2(1)$, which is determined in Appendix B. After gathering all relevant terms, we are finally lead to the exact formula for the diffusion constant of the total current for the partially asymmetric exclusion process on a ring:

$$\Delta = \frac{2p(1-x)L}{(L-1) \binom{L}{N}^2} \sum_{r=1}^N r^2 \frac{1+x^r}{1-x^r} \binom{L}{N+r} \binom{L}{N-r}. \quad (71)$$

This formula agrees, of course, with the one obtained using the Matrix Representation method [34] (in that work, the fluctuations of the current through a bond were calculated exactly *i.e.*, Δ/L^2). From this exact expression, it is possible to deduce by finite size scaling that a tagged particle in an infinite system exhibits an anomalous diffusive behaviour with exponent $1/3$ (instead of one $1/2$). By taking the continuous limit $L \rightarrow \infty$ of equation (71) in the weakly asymmetric regime $x \rightarrow 1$, with scaling variable $\phi = (1-x)\sqrt{L}$, it is possible to derive a scaling function for the KPZ equation that describes the cross-over from the linear Edwards-Wilkinson regime to the non-linear KPZ regime. We refer for more details to [34].

We emphasize that the calculation of Δ with the Bethe Ansatz is of the same order of complexity as with the Matrix method [34] but it is much simpler mathematically. The Bethe Ansatz requires only elementary mathematical objects such as polynomials and involves systematic calculations, whereas for the Matrix Ansatz one has to find (guess) a suitable algebra, prove that this algebra solves the problem and then evaluate traces of various operators requiring the use of remarkable identities on q -binomials [34].

Furthermore, to calculate the higher cumulants of the current, one has to solve the QR-equation (33) to the suitable order in γ . By contrast, there is absolutely no clue on how to extend the Matrix method to calculate, for example, the third cumulant of the current: the form of the algebra involved (if such an algebra does exist) is totally unknown.

VII. CONCLUSION

Most of the analytical studies of the ASEP are based on two different techniques, the Matrix Product method and the Bethe Ansatz. The Matrix representation is suitable to calculate stationary state observables, such as correlations, phase diagrams etc... A major drawback of this method is that there is no constructive method to generate matrices that are suitable for a given stochastic model: one has to rely on educated guesses, after some trials and errors. Nevertheless, the Matrix method, when applicable, is efficient and allows to derive elegant combinatorial results for finite systems. On the contrary, the Bethe Ansatz is a systematic procedure with such a wide range of applicability that it has grown into a subfield of theoretical physics: the theory of integrable systems. There exists a priori conditions, such as the Yang-Baxter relation, that insure that a system is integrable (*i.e.*, it can be analyzed by Bethe Ansatz). Many methods have been developed to cope with the Bethe equations [36, 39]. However, it is very difficult to extract information for finite systems from the Bethe equations and usually one has to analyze these equations in the thermodynamic limit.

For the TASEP, the Bethe equations have a fundamental decoupling property that has lead to many exact results [21, 24, 25] and in particular to the calculation of an exact formula for the large deviation function [31, 32]. For the partially asymmetric case, the Bethe equations are strongly coupled and therefore they have been rarely used. The only exact results derived from them were obtained by Kim et al. in the limit of an infinite size [22, 23]. In this paper, we have been able to overcome this technical difficulty thanks to a reformulation of the Bethe equations as a mere problem of polynomial divisibility that can be solved perturbatively in the fugacity parameter. We have calculated the mean value J of the current and its fluctuations Δ . Obviously, the calculation of J from Bethe Ansatz is much more difficult than the elementary derivation. However, the calculation of Δ with the Bethe Ansatz is less difficult than that with the Matrix method [34]. Furthermore, the perturbative analysis of the Bethe Ansatz can be extended a priori to any order to derive higher cumulants of the current. It is not known if the Matrix method can be applied to such calculations.

The reformulation of the Bethe equations that we used here, is akin to the functional Bethe Ansatz [36, 38, 39]. This method can be generalized to many other problems: higher moments of the ASEP current (S. Prolhac, in preparation), subleading correction to the large deviation function of the symmetric exclusion process, systems with different classes of particles. We also believe that the method followed here could be applied to the ASEP with open boundaries for which the Bethe equations have been derived recently [40, 41]. For the open TASEP with all rates equal to one, it is known from the Matrix method that the mean stationary current is given by the ratio of two consecutive Catalan numbers [13]: can this rather simple result be derived from Bethe Ansatz?

Acknowledgments

We thank Olivier Golinelli for many helpful discussions and S. Mallick for a careful reading of the manuscript.

APPENDIX A: DERIVATION OF EQUATION (61)

We want to derive the formula (61) for $\tilde{B}_2(T)$ which is a particular solution of equation (56). We substitute the formal expression (60) of $\tilde{B}_2(T)$ in equation (56) and use the known explicit formulae for $Q_1(T)$ and $R_1(T)$ (given in equations (52) and (53), respectively). After identifying the terms of the same degree in T , the following linear system of equations is obtained:

$$\sum_{\substack{k+p=m \\ 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 \leq p \leq L}} \binom{L}{p} (x^p - x^k) c_k = \sum_{\substack{k+p+r=m+N \\ 0 \leq k, p \leq N-1 \\ 0 \leq r \leq L}} \binom{L}{r} \binom{L}{p} \binom{L}{k} \frac{x^p - x^r}{1 - x^{N-k}} - \binom{L}{N} \sum_{\substack{k+p=m \\ 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 \leq p \leq L}} \binom{L}{p} \binom{L}{k} x^k, \quad (\text{A1})$$

where we have introduced

$$c_k = (-1)^{N+k+1} \frac{\binom{L}{N}^2}{L^2} (1 - x^{N-k}) q_k^{(2)}. \quad (\text{A2})$$

The system (A1) is a triangular system of N equations, parametrized by the integer m , with $0 \leq m \leq N-1$. In equation (A1), we have written explicitly the ranges for all the dummy variables. However, some pieces of information are redundant: for example, we know that $0 \leq m \leq N-1$; therefore, if $k+p=m$ then both k and p must lie between 0 and $N-1$ (recall that a binomial coefficient with a negative entry is equal to 0). In the following, we shall not write such superfluous information.

We now start by transforming the r.h.s. of equation (A1): we notice that the first sum on the r.h.s. is formally antisymmetric with respect to the indices r and p . However, this sum does not vanish identically because the range of these two variables is not the same. If the range of r were from 0 to $N-1$, the total sum would be equal to zero. In other words, the terms in the range $0 \leq r \leq N-1$ do not contribute to the sum, only the terms with $N \leq r \leq L$ contribute. This sum is thus given by

$$\begin{aligned} \sum_{r=N}^L \sum_{\substack{0 \leq k, p \leq N-1 \\ k+p+r=m+N}} \binom{L}{r} \binom{L}{p} \binom{L}{k} \frac{x^p - x^r}{1 - x^{N-k}} &= \sum_{r=0}^{L-N} \binom{L}{N+r} \sum_{\substack{k+p+r=m \\ 0 \leq k, p \leq N-1}} \binom{L}{p} \binom{L}{k} \frac{x^p - x^{N+r}}{1 - x^{N-k}} \\ &= \sum_{r=0}^{L-N} \binom{L}{N+r} \sum_{k+p=m} \binom{L}{p} \binom{L}{k-r} \left(x^k + \frac{x^p - x^k}{1 - x^{N+r-k}} \right) \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

where, we have first replaced the dummy variable r by $r-N$ and then, to derive the last equality, we use the identity $(x^p - x^{N+r})/(1 - x^{N-k}) = x^{k+r} + (x^p - x^{k+r})/(1 - x^{N-k})$ and replace k by $k-r$. Thus, we rewrite the r.h.s. of equation (A1) as follows:

$$\begin{aligned} &\sum_{r=0}^{L-N} \binom{L}{N+r} \sum_{k+p=m} \binom{L}{p} \binom{L}{k-r} \left(x^k + \frac{x^p - x^k}{1 - x^{N+r-k}} \right) - \binom{L}{N} \sum_{k+p=m} \binom{L}{p} \binom{L}{k} x^k \\ &= \sum_{r=1}^{L-N} \binom{L}{N+r} \sum_{k+p=m} \binom{L}{p} \binom{L}{k-r} x^k + \sum_{r=0}^{L-N} \binom{L}{N+r} \sum_{k+p=m} \binom{L}{p} \binom{L}{k-r} \frac{x^p - x^k}{1 - x^{N+r-k}}. \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

The first term in the last equality is now rewritten using the following identity

$$\sum_{k+p=m} \binom{L}{p} \binom{L}{k-r} x^k = \sum_{k+p=m} \binom{L}{p} \binom{L}{k-r} \frac{x^p - x^k}{1 - x^r} x^r. \quad (\text{A5})$$

[This identity is readily proved after multiplying both sides by $(1 - x^r)$, cancelling the common x^{k+r} term and noticing that the remaining terms are identical up to a notation change.]

Finally, the initial system (A1) becomes:

$$\begin{aligned} \sum_{k+p=m} \binom{L}{p} (x^p - x^k) c_k &= \\ \sum_{r=1}^{L-N} \binom{L}{N+r} \sum_{k+p=m} \binom{L}{p} \binom{L}{k-r} \frac{x^p - x^k}{1 - x^r} x^r &+ \sum_{r=0}^{L-N} \binom{L}{N+r} \sum_{k+p=m} \binom{L}{p} \binom{L}{k-r} \frac{x^p - x^k}{1 - x^{N+r-k}}. \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

Clearly, the solution of this equation is given by

$$c_k = \sum_{r=1}^{N-1} \frac{x^r \binom{L}{N+r} \binom{L}{k-r}}{1-x^r} + \sum_{r=0}^{N-1} \frac{\binom{L}{N+r} \binom{L}{k-r}}{1-x^{N+r-k}}. \quad (\text{A7})$$

This ends the proof of the formula (61).

APPENDIX B: SOME USEFUL STEPS IN THE CALCULATION OF Δ

1. Binomial formulae

In the sequel, we shall use repeatedly the following elementary binomial formulae:

$$p \binom{L}{p} = L \binom{L-1}{p-1}, \quad (\text{B1})$$

$$(L-p) \binom{L}{p} = L \binom{L-1}{p}. \quad (\text{B2})$$

$$\sum_{p=A}^B (-1)^p \binom{L}{p} = \sum_{p=A}^B (-1)^p \left\{ \binom{L-1}{p} + \binom{L-1}{p-1} \right\} = (-1)^B \binom{L-1}{B} + (-1)^A \binom{L-1}{A-1} \quad (\text{B3})$$

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^N r \binom{L}{N+r} \binom{L}{N-r} &= \frac{L}{2} \sum_{r=0}^N \left\{ \binom{L-1}{N+r-1} \binom{L-1}{N-r} - \binom{L-1}{N+r} \binom{L-1}{N-r-1} \right\} \\ &= \frac{L}{2} \binom{L-1}{N-1} \binom{L-1}{N} = \frac{N(L-N)}{2L} \binom{L}{N}^2. \end{aligned} \quad (\text{B4})$$

2. An expression for the diffusion constant

We start with equation (37) and expand the polynomials Q and R to the second order in γ . This allows us to derive the following expression for $R'_2(1)$. We obtain

$$\begin{aligned} Q_0(1)R'_2(1) + Q_1(1)R'_1(1) + Q_2(1)R'_0(1) + Q'_0(1)R_2(1) + Q'_1(1)R_1(1) + Q'_2(1)R_0(1) \\ = -Lx^{N+1}(1-x)^{L-1}Q_2\left(\frac{1}{x}\right) + x^{N-1}(1-x)^LQ'_2\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

We know from equation (43) that $Q_0(1) = 1$, $Q'_0(1) = N$, $R_0(1) = (1-x)^L$. From equation (40), we deduce $R_1(1) = N(1-x)^L$ and $R_2(1) = N^2(1-x)^L/2$. Finally, equations (65) and (68) give the values of $R'_0(1)$ and $R'_1(1)$. We also use equation (57) to express $Q_2(1/x)$ in terms of $Q_1(1)$ and $Q_2(1)$. Substituting this information into the previous expression leads to (remark that terms proportional to $Q_2(1)$ cancel out):

$$\frac{R'_2(1)}{(1-x)^L} = -\frac{N^3}{2} - \frac{N^2Lx}{2(1-x)} + N\frac{L-N}{L-1}Q_1(1) - NQ'_1(1) - Q'_2(1) + x^{N-1}Q'_2\left(\frac{1}{x}\right). \quad (\text{B6})$$

Inserting this expression into the formula (70) for Δ gives

$$\frac{\Delta}{2p(1-x)} = \frac{N^3}{2} - N^2\frac{L-N}{L-1} - N\frac{L-N}{L-1}Q_1(1) + NQ'_1(1) + B'_2(1), \quad (\text{B7})$$

where we have used the definition (54) of the polynomial $B_2(T)$. With the help of equations (58) (59), and (67) we get

$$B'_2(1) = \tilde{B}'_2(1) + B'_1(1) \left(\frac{\tilde{B}_2(1)}{N} + Q_1(1) + \frac{N}{2} \right) = \tilde{B}'_2(1) - L\frac{N-1}{L-1}\tilde{B}_2(1) - LN\frac{N-1}{L-1}Q_1(1) - LN^2\frac{N-1}{2(L-1)}. \quad (\text{B8})$$

Substituting this expression in equation (B9), we conclude that

$$\frac{\Delta}{2p(1-x)} = -N^2 \frac{L-N}{2(L-1)} - N^2 Q_1(1) + N Q_1'(1) + \tilde{B}_2'(1) - L \frac{N-1}{L-1} \tilde{B}_2(1). \quad (\text{B9})$$

The values of all the terms that appear in this equation are known. We now evaluate each of these terms separately.

3. Calculation of some exact expressions

The value of $Q_1(1)$ is easily obtained from the expression (52) of $Q_1(T)$:

$$Q_1(1) = \frac{(-1)^N L}{\binom{L}{N}} \sum_{r=0}^{N-1} \frac{(-1)^r \binom{L}{r}}{1-x^{N-r}} = \frac{L}{\binom{L}{N}} \sum_{r=1}^N \frac{(-1)^r \binom{L}{N-r}}{1-x^r}. \quad (\text{B10})$$

Similarly, we have

$$Q_1'(1) = \frac{L}{\binom{L}{N}} \sum_{r=1}^N \frac{(-1)^r (N-r) \binom{L}{N-r}}{1-x^r}, \quad (\text{B11})$$

To calculate $\tilde{B}_2(1)$, we start from the formula for $\tilde{B}_2(T)$ given in equations (60) and (61):

$$\tilde{B}_2(1) = \frac{(-1)^{N+1} L^2}{\left(\binom{L}{N}\right)^2} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \left\{ \sum_{r=1}^{N-1} \frac{x^r \binom{L}{N+r} \binom{L}{k-r}}{1-x^r} + \sum_{r=0}^{N-1} \frac{\binom{L}{N+r} \binom{L}{k-r}}{1-x^{N+r-k}} \right\}. \quad (\text{B12})$$

Exchanging the double sum and using equations (B1) and (B3), we rewrite the first term on the r.h.s of this expression as follows:

$$\sum_{r=1}^{N-1} \frac{x^r \binom{L}{N+r}}{1-x^r} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \binom{L}{k-r} = \frac{(-1)^{N-1}}{L} \sum_{r=1}^{N-1} \frac{x^r (N-r) \binom{L}{N+r} \binom{L}{N-r}}{1-x^r}. \quad (\text{B13})$$

In the second term on the r.h.s. of (B12), we remark that the effective range of the variable r is from 0 to k and we replace r by $r' = k - r$. We then transform this term in a manner similar to that described in equation (B13). Finally, the expression (B12) simplifies to:

$$\tilde{B}_2(1) = \frac{L}{\left(\binom{L}{N}\right)^2} \sum_{r=1}^N \frac{x^r (N-r) + N+r}{1-x^r} \binom{L}{N+r} \binom{L}{N-r} - \frac{LN}{\left(\binom{L}{N}\right)} \sum_{r=1}^N \frac{(-1)^r \binom{L}{N-r}}{1-x^r}. \quad (\text{B14})$$

Using similar steps, we find that $\tilde{B}_2'(1)$ is given by

$$\begin{aligned} \tilde{B}_2'(1) &= \frac{L}{(L-1) \left(\binom{L}{N}\right)^2} \sum_{r=1}^N \frac{x^r (N-r)(LN-r-L) + (N+r)(LN+r-L)}{1-x^r} \binom{L}{N+r} \binom{L}{N-r} \\ &\quad - \frac{LN}{(L-1) \left(\binom{L}{N}\right)} \sum_{r=1}^N \frac{(-1)^r (LN-Lr+r-L) \binom{L}{N-r}}{1-x^r}. \end{aligned} \quad (\text{B15})$$

To conclude our calculation, we must substitute equations (B10) (B11), (B14), and (B15) into the formula (B9) for the diffusion constant. We find that all the terms that contain only one binomial factor *i.e.*, terms proportional to $(-1)^r \binom{L}{N-r} / (1-x^r)$ cancel out amongst themselves. After some elementary simplifications, we are left with

$$\frac{\Delta}{p(1-x)} = \frac{2L}{(L-1) \binom{L}{N}^2} \sum_{r=1}^N r^2 \frac{1+x^r}{1-x^r} \binom{L}{N+r} \binom{L}{N-r} + \frac{2LN}{(L-1) \binom{L}{N}^2} \sum_{r=0}^N r \binom{L}{N+r} \binom{L}{N-r} - N^2 \frac{L-N}{(L-1)} \quad (\text{B16})$$

The last two terms cancel with each other according to the identity (B4). This ends the proof of equation (71).

APPENDIX C: FUNCTIONAL BETHE ANSATZ FOR TASEP

We consider here the special case of the TASEP (which corresponds to $p = 1$ and $q = x = 0$). We explain how to retrieve from the Q-R equation (33) the parametric representation of $E_{\max}(\gamma)$ that was obtained in [31] by using contour integrals. For $x = 0$, the functional equation (33) reduces to

$$Q(T)R(T) = T^N + (-1)^{N-1}B(1-T)^L \quad \text{with} \quad B = (-1)^{N-1}e^{L\gamma}Q(0). \quad (\text{C1})$$

From equation (43), we find that the zeroth order polynomials for the TASEP are simply given by

$$Q_0(T) = T^N \quad \text{and} \quad R_0(T) = 1. \quad (\text{C2})$$

The perturbative expansions (41) and (42) can be rewritten as

$$Q(T) = T^N + \gamma Q(T) \quad \text{and} \quad R(T) = 1 + \gamma R(T), \quad (\text{C3})$$

where $Q(T)$ is a polynomial of degree $N-1$ and $R(T)$ is of degree $L-N$ (the coefficients of these two polynomials are functions of γ). We note, in particular, that $Q(0)$ is of order γ and thus B defined in equation (C1) is also of order γ and is a small parameter. Dividing both sides of equation (C1) by T^N and taking the logarithm, we obtain

$$\log \left(\frac{Q(T)}{T^N} \right) + \log R(T) = \log \left(1 + (-1)^{N-1}B \frac{(1-T)^L}{T^N} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{Nk-1}B^k}{k} \frac{(1-T)^{kL}}{T^{kN}}, \quad (\text{C4})$$

where we have developed the logarithm in powers of B . We remark that the r.h.s. of this equation is a series that contains both positive and negative powers of T . But, equation (C3) implies that $Q(T)/T^N = 1 + \gamma Q(T)/T^N$, *i.e.*, $Q(T)/T^N$ is a polynomial in the variable $1/T$ of degree N . Therefore, the expansion of $\log(Q(T)/T^N)$ w.r.t. γ (or B) can only generate negative powers of T . Similarly, from equation (C3) we have $\log R(T) = \log(1 + \gamma R(T))$ and the expansion of this term can generate only positive powers of T . Therefore, the identification between the l.h.s. and the r.h.s. of equation (C4) is unique and we have

$$\log \left(\frac{Q(T)}{T^N} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{Nk-1}B^k}{k} \sum_{j=0}^{kN-1} (-1)^j \binom{kL}{j} T^{j-kN} \quad (\text{C5})$$

$$\log R(T) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{Nk-1}B^k}{k} \sum_{j=kN}^{kL} (-1)^j \binom{kL}{j} T^{j-kN} \quad (\text{C6})$$

For the TASEP, equations (38) and (40) reduce to

$$E_{\max}(\gamma) = -\frac{R'(1)}{R(1)} = -\frac{d}{dT} \log R(T) \Big|_{T=1} \quad \text{and} \quad \gamma = \frac{1}{N} \log R(1). \quad (\text{C7})$$

From equation (C6), we obtain (with the help of equations (B1) and (B3) to calculate the sums over j):

$$E_{\max}(\gamma) = -N \sum_{k=1}^{\infty} B^k \frac{(kL-2)!}{(kN)!(kL-kN-1)!}, \quad (\text{C8})$$

$$\gamma = -\sum_{k=1}^{\infty} B^k \frac{(kL-1)!}{(kN)!(kL-kN)!}. \quad (\text{C9})$$

These two equations are precisely those derived in [31]. They provide a parametric formula for $E_{\max}(\gamma)$ that allows to calculate the large deviation function of the current and its cumulants to any required order.

-
- [1] M. R. Evans, R. A. Blythe, 2002, *Non-equilibrium dynamics in low dimensional systems*, Physica A, **313**, 110.
 - [2] H. Spohn, 1991, *Large scale dynamics of interacting particles*, (Springer-Verlag, New-York).
 - [3] C. T. MacDonald, J. H. Gibbs, A. C. Pipkin, 1968, *Kinetics of biopolymerization on nucleic acid templates*, Biopolymers **6**, 1; C. T. MacDonald, J. H. Gibbs, 1969, *Concerning the kinetics of polypeptide synthesis on polyribosomes*, Biopolymers **7**, 707.
 - [4] T. Halpin-Healy, Y.-C. Zhang, 1995, *Kinetic roughening phenomena, stochastic growth, directed polymers and all that*, Phys. Rep. **254**, 215.
 - [5] S. Klumpp, R. Lipowsky, 2003, *Traffic of molecular motors through tube-like compartments*, J. Stat. Phys. **113**, 233.
 - [6] B. Derrida, 1998, *An exactly soluble non-equilibrium system: the asymmetric simple exclusion process*, Phys. Rep. **301**, 65.
 - [7] G. M. Schütz, 2001, *Exactly Solvable Models for Many-Body Systems Far from Equilibrium in Phase Transitions and Critical Phenomena vol 19.*, C. Domb and J. L. Lebowitz Ed., (Academic Press, San Diego).
 - [8] B. Schmittmann and R. K. P. Zia, 1995, *Statistical mechanics of driven diffusive systems*, in *Phase Transitions and Critical Phenomena vol 17.*, C. Domb and J. L. Lebowitz Ed., (San Diego, Academic Press).
 - [9] S. Chatterjee and M. Barma, 2007, *Shock probes in a one-dimensional Katz-Lebowitz-Spohn model* arXiv:0707.1659.
 - [10] M. R. Evans, 2000, Brz J. Phys. *Phase Transitions in One-Dimensional Nonequilibrium Systems* **30**, 42.
 - [11] T. Bodineau, B. Derrida, 2004, *Current fluctuations in nonequilibrium diffusive systems: An additivity principle*, Phys. Rev. Lett. **92**, 180601.
 - [12] J. L. Lebowitz, H. Spohn, 1999 *A Gallavotti-Cohen type symmetry in the large deviation functional for stochastic dynamics*, J. Stat. Phys. **95**, 333.
 - [13] B. Derrida, M. R. Evans, V. Hakim, V. Pasquier, 1993, *Exact solution of a 1D asymmetric exclusion model using a matrix formulation*, J. Phys. A: Math. Gen. **26**, 1493.
 - [14] B. Derrida, S.A. Janowski, J. L. Lebowitz and E. R. Speer, 1993, *Exact solution of the totally asymmetric exclusion process: shock profiles*, J. Stat. Phys. **73**, 813.
 - [15] E. R. Speer, 1993, *The two species totally asymmetric exclusion process*, in Micro, Meso and Macroscopic approaches in Physics, M. Fannes C. Maes and A. Verbeure Ed. NATO Workshop 'On three levels', Leuven, July 1993.
 - [16] K. Mallick, 1996, *Shocks in the asymmetric exclusion model with an impurity*, J. Phys. A: Math. Gen. **29**, 5375.
 - [17] C. Boutillier, P. François, K. Mallick, S. Mallick, 2002 *A matrix Ansatz for the diffusion of an impurity in the asymmetric exclusion process*, J. Phys. A: Math. Gen. **35**, 9703.
 - [18] K. Mallick, S. Mallick and N. Rajewski, 1999, *Exact solution of an exclusion process with three classes of particles and vacancies*, J. Phys. A: Math. Gen. **32**, 8399.
 - [19] R. A. Blythe, M. R. Evans, 2007, *Non-equilibrium steady states of matrix product form: a solver's guide*, J. Phys. A: Math.Theor. **40**, R333.
 - [20] D. Dhar, 1987, *An exactly solved model for interfacial growth*, Phase Transitions **9**, 51.
 - [21] L.-H. Gwa, H. Spohn, 1992, *Bethe solution for the dynamical-scaling exponent of the noisy Burgers equation*, Phys. Rev. A **46**, 844.
 - [22] D. Kim, 1995, *Bethe Ansatz solution for crossover scaling functions of the asymmetric XXZ chain and the Kardar-Parisi-Zhang-type growth model*, Phys. Rev. E **52**, 3512.
 - [23] D. S. Lee, D. Kim, 1999, *Large deviation function of the partially asymmetric exclusion process*, Phys. Rev. E **59**, 6476.
 - [24] O. Golinelli, K. Mallick, 2005, *Spectral gap of the totally asymmetric exclusion process at arbitrary filling*, J. Phys. A: Math. Gen. **38** 1419.
 - [25] O. Golinelli, K. Mallick, 2005, *Spectral Degeneracies in the Totally Asymmetric Exclusion Process*, J. Stat. Phys **120** 779.
 - [26] G. M. Schütz, 1997, *Exact solution of the master equation for the asymmetric exclusion process* J. Stat. Phys. **88** 427; A. Rákos, G. M. Schütz, 2005, *Bethe Ansatz and current distribution for the TASEP with particle-dependent hopping rates*, cond-mat/0506525.
 - [27] B. Derrida, M. R. Evans, 1999, *Bethe Ansatz solution for a defect particle in the asymmetric exclusion process*, J. Phys. A: Math. Gen. **32**, 4833.
 - [28] V. B. Priezzhev, 2003, *Exact nonstationary probabilities in the asymmetric exclusion process on a ring*, Phys. Rev. Lett. **91**, 050601.
 - [29] A. M. Povolotsky, 2004, *Bethe Ansatz solution of zero-range process with nonuniform stationary state*, Phys. Rev. E **69**, 061109.
 - [30] O. Golinelli, K. Mallick, 2006, *The asymmetric simple exclusion process : an integrable model for non-equilibrium statistical mechanics*, J. Phys. A: Math. Gen. **39** 12679.
 - [31] B. Derrida, J. L. Lebowitz, 1998, *Exact large deviation function in the asymmetric exclusion process*, Phys. Rev. Lett. **80**, 209.
 - [32] B. Derrida, C. Appert, 1999, *Universal large-deviation function of the Kardar-Parisi-Zhang equation in one dimension*, J. Stat. Phys. **94**, 1.
 - [33] B. Derrida, M. R. Evans, D. Mukamel, 1993, *Exact diffusion constant for one-dimensional Exclusion Models*, J. Phys. A:

- Math. Gen. **26**, 4911.
- [34] B. Derrida, K. Mallick, 1997, *Exact diffusion constant for the one-dimensional partially asymmetric exclusion process*, J. Phys. A: Math. Gen. **30**, 1031.
 - [35] C. Flindt, T. Novotný, and A.-P. Jauho, *Current noise in a vibrating quantum dot array*, Phys. Rev. B **70**, 205334; C. Flindt, T. Novotný, and A.-P. Jauho, 2005, *Full counting statistics of nano-electromechanical systems*, Europhys. Lett. **69**, 475; C. Flindt *et al.*, *Counting Statistics of Non-Markovian Quantum Stochastic Processes*, arXiv:0801.0661.
 - [36] R. J. Baxter, 1982 *Exactly solvable models in Statistical Mechanics* (Academic Press, San Diego).
 - [37] E. Brunet, B. Derrida, 2000, *Probability distribution of the free energy of a directed polymer in a random medium*, Phys. Rev. E **61**, 6789.
 - [38] A. V. Razumov, Y. G. Stroganov, 2006 *Bethe roots and refined enumeration of alternating-sign matrices* J. Stat. Mech. Theor. and Exp. P07004.
 - [39] O. Babelon, 2007, *A Short Introduction to classical and Quantum Integrable systems*, Lecture Notes (<http://www.lpthe.jussieu.fr/~babelon/saclay2007.pdf>).
 - [40] J. de Gier, F. H. L. Essler, 2005, *Bethe Ansatz solution of the Asymmetric Exclusion Process with Open Boundaries*, Phys. Rev. Lett. **95**, 240601.
 - [41] J. de Gier, F. H. L. Essler, 2006, *Exact spectral gaps of the Asymmetric Exclusion Process with Open Boundaries*, JSTAT P12011.

Fluctuations and skewness of the current in the partially asymmetric exclusion process

Sylvain Prolhac

*Institut de Physique Théorique,
CEA, IPhT, F-91191 Gif-sur-Yvette, France
CNRS, URA 2306, F-91191 Gif-sur-Yvette, France*

(Dated: May 27, 2008)

We use functional Bethe Ansatz equations to calculate the cumulants of the total current in the partially asymmetric exclusion process. We recover known formulas for the first two cumulants (mean value of the current and diffusion constant) and obtain an explicit finite size formula for the third cumulant. The expression for the third cumulant takes a simple integral form in the limit where the asymmetry scales as the inverse of the square root of the size of the system, which corresponds to a natural separation between weak and strong asymmetry.

PACS numbers: 05-40.-a; 05-60.-k

Keywords: ASEP, functional Bethe Ansatz, large deviations

I. INTRODUCTION

The asymmetric simple exclusion process (ASEP) is one of the most simple examples of a stochastic interacting particles model with an out of equilibrium stationary state. It features classical particles hopping on a lattice and interacting through hard core exclusion. It can be seen as a growth model with deposition and evaporation of particles and is thus a discrete version of a system evolving by the Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) equation. The one dimensional model has been much studied in the past [1, 2, 3, 4, 5]. It is known to be exactly solvable through various methods including the Bethe Ansatz [6, 7], which uses the underlying integrability of the Markov matrix of the model (similar to the Hamiltonian of an XXZ spin chain with twisted boundary conditions), and the matrix product Ansatz method [8, 9], which consists in writing the stationary state eigenvector as a trace of product of matrices.

The fluctuations of the current have received much attention [10, 11, 12]. In the long time limit, the system reaches a stationary state, independent of the initial configuration for finite size systems. A manifestation of the fact the system is not at equilibrium in the stationary state is the existence of a current of particles flowing through the system. In this stationary state, the mean value J of the current is simply proportional to the asymmetry of the rates at which the particles hop to the right and to the left, which can be thought as a driving field. The fluctuations of the current describe how the current differs from its mean value, that is the probability of finding a current j different from J . But finding the whole probability density function can be difficult. Instead, one can study its first cumulants. The second cumulant, related to the diffusion constant, describes the width of the probability density whereas the third cumulant represents the asymmetry and the non-gaussianity of the probability density. The fourth cumulant describes how much the peak of the distribution is sharp.

The fluctuations of the current have been studied for different variants of the ASEP: finite size open lattice [12], systems with second class particles [11, 13], infinite lattice [14, 15],... For the totally asymmetric exclusion process, in which the particles only hop in one direction (TASEP), on a finite size lattice with periodic boundary conditions, all the cumulants of the probability distribution of the current have been calculated by Bethe Ansatz, using a simplification of the Bethe Ansatz equations that occur only in this case. For the partially asymmetric exclusion process on a ring, a particular scaling limit of the probability distribution function of the current was calculated using a thermodynamic limit of the Bethe Ansatz equations [16]. However, only the first two cumulants were known for finite size systems [17, 18]. In the present paper we introduce a method that allows us to calculate exact expressions for the first cumulants. We use it to get the diffusion constant with very few calculations, and obtain an explicit formula (58) for the third cumulant. We also derive a rather simple integral formula (69) for the third cumulant in the scaling limit where the asymmetry goes to zero as the inverse of the square root of the size of the system. This formula is similar to the one obtained in [17] for the diffusion constant in the same scaling limit.

The structure of the paper is as follows: In section II, we recall the functional Bethe Ansatz equations used in [18] to calculate the two first cumulants of the total current. In section III we show how to solve perturbatively these equations, giving a way to calculate explicitly the cumulants one after the other. We obtain easily the two first cumulants (mean value of the current and diffusion constant). For the diffusion constant, our derivation is much simpler than in [17] and [18]. In section V, after a more involved calculation, we obtain an explicit expression for the third cumulant. We show that for the cases of either the symmetric exclusion process (SSEP, the particle hop on both sides with the same rate) or TASEP it reduces to known formulas. We finally write the third cumulant formula in an integral form in the scaling limit where the asymmetry goes to zero as the inverse of the square root of the size of the system.

II. BETHE ANSATZ FOR THE FLUCTUATIONS OF THE CURRENT

We consider in this paper the partially asymmetric simple exclusion process (PASEP) on a one dimensional lattice with periodic boundary conditions. Each of the L sites can be empty or occupied by at most one of the n particles. The configuration space of the model has then dimension $\Omega = \binom{L}{n}$. On this configuration space, we define the following Markov process: each particle can hop to the right with rate p (that is, with probability pdt for an infinitesimal time interval dt) and to the left with rate q provided that the target site is empty. Otherwise, the particle cannot move. This dynamics can be encoded in the Markov matrix $M = M_0 + pM_1 + qM_{-1}$, whose diagonal part M_0 contains the exit rates from each configuration, and M_1 (resp. M_{-1}) the incoming rates obtained by moving one particle to the right (resp. to the left).

Let Y_t be the total distance covered by all the particles between time 0 and t . Y_t is thus the integrated current between time 0 and t . It has been shown [10, 18, 19] that the generating function of the cumulants of Y_t in the long time limit can be obtained from the diagonalization of a deformation of the Markov matrix of the system: $M(\gamma) = M_0 + pe^\gamma M_1 + qe^{-\gamma} M_{-1}$, introducing the parameter γ which can be seen as a fugacity associated with the leaps of the particles. More precisely, the eigenvalue $E(\gamma)$ of $M(\gamma)$ corresponding to the stationary state of the system, that is its eigenvalue with maximal real part, is given by

$$E(\gamma) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \langle e^{\gamma Y_t} \rangle}{t} = J\gamma + \frac{\Delta}{2}\gamma^2 + \frac{E_3}{6}\gamma^3 + \dots \quad (1)$$

J is the total current and Δ is the diffusion constant.

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle Y_t \rangle}{t} \quad (2)$$

$$\Delta = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle Y_t^2 \rangle - \langle Y_t \rangle^2}{t} \quad (3)$$

$$E_3 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle Y_t^3 \rangle - 3\langle Y_t \rangle \langle Y_t^2 \rangle + 2\langle Y_t \rangle^3}{t} \quad (4)$$

The diagonalization of $M(\gamma)$ can be performed using the Bethe Ansatz, because of the underlying integrability of the model. We are now going to recall the functional equations derived in [18] for the calculation of $E(\gamma)$. Defining the asymmetry parameter x by

$$x = \frac{q}{p} \quad (5)$$

the Bethe equations of the system are

$$e^{L\gamma} \left(\frac{1 - y_i}{1 - xy_i} \right)^L + \prod_{j=1}^n \frac{y_i - xy_j}{xy_i - y_j} = 0. \quad (6)$$

The Bethe roots y_i $1 \leq i \leq n$ depend on both x and γ . They can be used to write the corresponding eigenvector as a sum over the $n!$ permutations of the particles. Introducing the polynomial

$$Q(t) = \prod_{i=1}^n (t - y_i) \quad (7)$$

whose zeros are the Bethe roots, it can be shown [18] that the Bethe equations (6) can be rewritten as functional equations

$$Q(t)R(t) = e^{L\gamma}(1-t)^L Q(xt) + (1-xt)^L x^n Q(t/x), \quad (8)$$

where Q is a polynomial of degree n (with a coefficient of highest degree equal to 1) and R is a polynomial of degree L . Both Q and R must be determined by solving equation (8). This equation is known as Baxter's scalar TQ equation [20, 21, 22, 23]. Equation (8) sets the value of $R(0)$

$$R(0) = x^n + e^{L\gamma} \quad (9)$$

and the behavior of $R(t)$ when $t \rightarrow \infty$

$$R(t) \sim (x^L + x^n e^{L\gamma})(-1)^L t^L \text{ when } t \rightarrow \infty. \quad (10)$$

When $\gamma = 0$, the solution of the Bethe equations (6) corresponding to the stationary state is $y_i = 0$ for all i . Equivalently, the corresponding solution of (8) is $Q(t) = t^n$ and $R(t) = x^n(1-t)^L + (1-xt)^L$. Expanding $Q(t)$ and $R(t)$ near $\gamma = 0$, we get

$$Q(t) = t^n + \mathcal{O}(\gamma) \quad (11)$$

and

$$R(t) = x^n(1-t)^L + (1-xt)^L + \mathcal{O}(\gamma). \quad (12)$$

The stationary state has another interesting property: it is a state with zero momentum, which leads to [18]

$$x^n Q(1/x) = e^{n\gamma} Q(1) \quad (13)$$

or, in terms of the polynomial R

$$R(1) = e^{n\gamma} (1-x)^L. \quad (14)$$

The latter equation does not provide additional information beside (12), but it is useful to make some calculations easier.

Finally, with Q and R solution of (8), the eigenvalue of $M(\gamma)$ corresponding to the stationary state is given by [18]

$$\frac{E(\gamma)}{p} = (1-x) \left(\frac{Q'(1)}{Q(1)} - \frac{1}{x} \frac{Q'(1/x)}{Q(1/x)} \right) = -Lx - (1-x) \frac{R'(1)}{R(1)}. \quad (15)$$

Equation (8) could be solved perturbatively near $\gamma = 0$ right now. Inserting the solution into (15), it would give us the first cumulants of the current. This was done in [18] up to order 2. Here, we will rewrite the previous equations in a different way before making the perturbative expansion near $\gamma = 0$. It will make the calculations much simpler than in [18], and allow us to calculate the third cumulant. We divide both sides of the functional equation (8) by $(1-t)^L(1-xt)^L Q(t)$

$$\frac{R(t)}{(1-t)^L(1-xt)^L} = \frac{A(t)}{(1-t)^L} + \frac{1}{(1-xt)^L} \frac{x^n e^{L\gamma}}{A(xt)}, \quad (16)$$

where we defined

$$A(t) = x^n \frac{Q(t/x)}{Q(t)}. \quad (17)$$

From this definition of $A(t)$, and using (13) and the fact that Q is of degree n , we know the value of $A(t)$ in $t = 0$, $t = 1$ and in the limit $t \rightarrow \infty$

$$A(0) = x^n, \quad A(1) = e^{n\gamma} \quad \text{and} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = 1 \quad (18)$$

From (11), we also know that

$$A(t) = 1 + \mathcal{O}(\gamma). \quad (19)$$

In terms of $A(t)$, the expression (15) for the eigenvalue rewrites, using the value of $A(1)$ (18)

$$\frac{E(\gamma)}{p} = -(1-x) e^{-n\gamma} A'(1). \quad (20)$$

III. PERTURBATIVE SOLUTION OF THE FUNCTIONAL EQUATION

In this section, we will first show how to eliminate $R(t)$ from equation (16), leaving us with a closed equation for $A(t)$. We will see how we can solve this equation perturbatively near $\gamma = 0$. Then, we will reformulate this solution to make the explicit calculation of the cumulants easier.

A. Perturbative solution for $A(t)$

From (19), we can write the expansion of $A(t)$ near $\gamma = 0$ as

$$A(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \gamma^k. \quad (21)$$

But $Q(t)$ is normalized such that $Q(t) - t^n$ is a polynomial of degree $n - 1$. Thus, from (17), the $A_k(t)$ are polynomials in $1/t$ of degree kn without constant term ($A_k(t) \rightarrow 0$ when $t \rightarrow \infty$).

From now on, we will look at a perturbative solution of (16) for small γ . $R(t)$, which is a polynomial in t , can be seen as a formal series in t and γ with only nonnegative powers in t . The l.h.s. of equation (16) is then also a formal series in t and γ with only nonnegative powers in t . But we also know that, at each (nonzero) order in γ , $A(t)$ has only negative powers in t so that the r.h.s. of equation (16) has both negative and nonnegative powers in t . Thus, equation (16) simply means that the negative powers in t in equation (16) cancel. We will write this as

$$\frac{A(t)}{(1-t)^L} + \frac{1}{(1-xt)^L} \frac{x^n e^{L\gamma}}{A(xt)} = \mathcal{O}(t^0), \quad (22)$$

which will mean: at each order in γ , the l.h.s. of (22) is finite when $t \rightarrow 0$. We have eliminated $R(t)$ from equation (16). We will see that equation (22) still determines $A(t)$ uniquely.

From now on, every expansion in powers of t will have to be understood as an expansion of a formal series in powers of γ followed, at each order in γ , by an expansion in powers of t . In the following, we will use the notation $[f(t)]_{(k)} \equiv [f]_{(k)}$ to refer to the coefficient of the term t^k in the expansion of the formal series $f(t)$. We also introduce the notation $[f(t)]_{(-)}$ which will represent the negative powers of f in t (that is terms t^k with $k < 0$). On the contrary, $[f(t)]_{(+)}$ will represent the nonnegative powers of f in t (terms t^k with $k \geq 0$).

To solve equation (22), we will write it in the slightly more complicated form

$$\Delta_x \left(\frac{A(t)}{(1-t)^L} \right) = - \frac{x^n}{(1-xt)^L} \left(A(xt) + \frac{e^{L\gamma}}{A(xt)} \right) + \mathcal{O}(t^0), \quad (23)$$

Δ_x being the operator which acts on an arbitrary function $u(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} [u]_{(k)} t^k$ as

$$(\Delta_x u)(t) = u(t) - x^n u(xt) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 - x^{n+k}) [u]_{(k)} t^k. \quad (24)$$

As Δ_x gives 0 when applied to t^{-n} , the equation

$$(\Delta_x u)(t) = v(t) \quad (25)$$

can be formally solved as

$$u(t) = (\Delta_x^{-1} v)(t) = \sum_{k \neq -n} \frac{[v]_{(k)} t^k}{1 - x^{n+k}} - \frac{b}{t^n} \quad (26)$$

for any formal series v which has no term t^{-n} . b is an arbitrary coefficient which is not constrained by equation (25). We can use this to invert Δ_x in (23). Recalling that $A(t) \rightarrow 1$ when $t \rightarrow \infty$ and that $A(t) - 1$ has only negative powers in t , we obtain

$$A(t) = 1 - [(1-t)^L \tilde{g}(t)]_{(-)} - b \left[\frac{(1-t)^L}{t^n} \right]_{(-)}, \quad (27)$$

with

$$\tilde{g}(t) = \left[\Delta_x^{-1} \left(\frac{x^n}{(1-xt)^L} \left(A(xt) + \frac{e^{L\gamma}}{A(xt)} \right) \right) \right]_{(-)}. \quad (28)$$

The term containing b is not constrained by equation (23). The condition necessary to invert Δ_x in equation (23), which is that the r.h.s. of (23) must not contain a term t^{-n} , implies that $\tilde{g}(t)$ does not contain a term t^{-n} .

Written like that, equation (27) contains A on both sides (through $\tilde{g}$ on the r.h.s.). However, equation (27) gives a recursive solution for $A(t)$ order by order in powers of γ . Indeed, if we take the term of order γ^k in this equation, the l.h.s. depends only on $A_k(t)$ whereas the r.h.s. depends only on the $A_j(t)$ with $j < k$: the $A_k(t)$ cancels out at order k in the expansion in powers of γ of

$$A(xt) + \frac{e^{L\gamma}}{A(xt)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(xt)\gamma^k + \frac{1 + (e^{L\gamma} - 1)}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(xt)\gamma^k} \quad (29)$$

Thus, equation (27) allows to recursively compute all the orders in γ starting from (19). The parameter b in (27) can be set from the value (18) of $A(1)$.

Using equations (27), (19) and (18), we can do the calculation for the first cumulants. But we will first turn these equations into another form which will make the calculations a little simpler.

We must emphasize that our method involves only algebraic manipulations of formal series in two parameters, namely γ and t . The Bethe roots $y_i(\gamma)$ (which are the zeros of the polynomial $Q(t)$ and the poles of the rational function $A(t)$) have completely disappeared since we did the γ expansion first: the $A_k(t)$ have only a pole of order kn in $t = 0$. We do not have to follow the $y_i(\gamma)$ as a function of γ : we only use some algebraic properties of $A(t)$.

B. A simpler formulation for the perturbative solution

We will now eliminate $A(t)$ from our recursive equations, and work on the auxiliary quantity $\tilde{g}(t)$. Noticing that $A^{-1}(xt) - 1$ has also only negative powers in t , we find from equations (22) and (27) that $x^n e^{L\gamma} A^{-1}(xt)$ can be written in terms of $\tilde{g}(t)$ as

$$x^n e^{L\gamma} A^{-1}(xt) = x^n e^{L\gamma} + [(1 - xt)^L \tilde{g}(t)]_{(-)} + b \left[\frac{(1 - xt)^L}{t^n} \right]_{(-)}. \quad (30)$$

We can absorb the b terms of $A(t)$ and $x^n e^{L\gamma} A^{-1}(xt)$ into $\tilde{g}$, defining

$$g(t) = \tilde{g}(t) + \frac{b}{t^n}. \quad (31)$$

b is thus the coefficient of t^{-n} in $g(t)$ as $\tilde{g}(t)$ has no term t^{-n} . In the following, we will both need using $g(t)$ and $\tilde{g}(t)$. The expressions for $A(t)$ and $x^n e^{L\gamma} A^{-1}(xt)$ become

$$A(t) = 1 - [(1 - t)^L g(t)]_{(-)} \quad (32)$$

$$x^n e^{L\gamma} A^{-1}(xt) = x^n e^{L\gamma} + [(1 - xt)^L g(t)]_{(-)}. \quad (33)$$

From (28), at order k in γ $g(t)$ is a polynomial in $1/t$ of degree kn without constant term, as are the $A_k(t)$. We also see that $g(t)$ is equal to 0 when $\gamma = 0$ (as $A(t) = 1$ when $\gamma = 0$), giving the expansion

$$g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t)\gamma^k. \quad (34)$$

To find a closed equation for $g(t)$, we eliminate $A(t)$ between (32) and (33), using $(A(t))(x^n e^{L\gamma} A^{-1}(t)) = x^n e^{L\gamma}$:

$$[(1 - t)^L g(t/x)]_{(-)} - x^n e^{L\gamma} [(1 - t)^L g(t)]_{(-)} - [(1 - t)^L g(t)]_{(-)} [(1 - t)^L g(t/x)]_{(-)} = 0, \quad (35)$$

which can be rewritten as

$$g(t/x) - x^n e^{L\gamma} g(t) = \frac{[(1 - t)^L g(t)]_{(-)} [(1 - t)^L g(t/x)]_{(-)}}{(1 - t)^L} + \mathcal{O}(t^0). \quad (36)$$

As $g(t)$ is of order γ , this allows us to solve order by order in powers of γ . We can simplify the r.h.s. of the previous equation, writing

$$\begin{aligned} & \frac{[(1 - t)^L g(t)]_{(-)} [(1 - t)^L g(t/x)]_{(-)}}{(1 - t)^L} \\ &= \frac{((1 - t)^L g(t) - [(1 - t)^L g(t)]_{(+)}) ((1 - t)^L g(t/x) - [(1 - t)^L g(t/x)]_{(+)})}{(1 - t)^L} \\ &= (1 - t)^L g(t)g(t/x) - g(t/x)[(1 - t)^L g(t)]_{(+)} - g(t)[(1 - t)^L g(t/x)]_{(+)} + \mathcal{O}(t^0) \\ &= -(1 - t)^L g(t)g(t/x) + g(t/x)[(1 - t)^L g(t)]_{(-)} + g(t)[(1 - t)^L g(t/x)]_{(-)} + \mathcal{O}(t^0) \end{aligned} \quad (37)$$

and we obtain

$$g(t/x) - x^n e^{L\gamma} g(t) = -(1-t)^L g(t) g(t/x) + g(t) [(1-t)^L g(t/x)]_{(-)} + g(t/x) [(1-t)^L g(t)]_{(-)} + \mathcal{O}(t^0) \quad (38)$$

or, at order r in γ , multiplying t by x

$$\begin{aligned} (\Delta_x g_r)(t) &= x^n \sum_{k=1}^{r-1} \frac{L^k}{k!} g_{r-k}(xt) \\ &\quad - \sum_{k=1}^{r-1} ((1-xt)^L g_{r-k}(xt) g_k(t) - g_k(t) [(1-xt)^L g_{r-k}(xt)]_{(-)} - g_{r-k}(xt) [(1-xt)^L g_k(t)]_{(-)}) + \mathcal{O}(t^0), \end{aligned} \quad (39)$$

where we used once again the operator Δ_x (24). Using the formal inversion formula (26) for Δ_x , we see that the previous equation for $g(t)$ can be solved if

$$\sum_{k=1}^{r-1} \left[x^n \frac{L^k}{k!} g_{r-k}(xt) - (1-xt)^L g_{r-k}(xt) g_k(t) + g_k(t) [(1-xt)^L g_{r-k}(xt)]_{(-)} + g_{r-k}(xt) [(1-xt)^L g_k(t)]_{(-)} \right]_{(-n)} = 0, \quad (40)$$

which is a consequence of the fact that equation (39) holds: it must be true if (8) has a solution verifying (11) and (12). We obtain

$$\begin{aligned} \tilde{g}_r(t) &= \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{\substack{l=1 \\ (l \neq n)}}^{(r-k)n} \frac{x^n t^{-l}}{1 - x^{n-l}} \left[\frac{L^k}{k!} g_{r-k}(xt) \right]_{(-l)} \\ &\quad - \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{\substack{l=1 \\ (l \neq n)}}^{rn} \frac{[(1-xt)^L g_{r-k}(xt) g_k(t) - g_k(t) [(1-xt)^L g_{r-k}(xt)]_{(-)} - g_{r-k}(xt) [(1-xt)^L g_k(t)]_{(-)}]_{(-l)}}{(1 - x^{n-l}) t^l}. \end{aligned} \quad (41)$$

and

$$g_r(t) = \frac{b_r}{t^n} + \tilde{g}_r(t) \quad (42)$$

The coefficient b_r is the term of order γ^r in b . Again, the value (18) of $A(1)$ sets b_r . We note that this formula does not require to divide by a formal series in γ , unlike (27) where we had to divide by $A(xt)$. The nonlinearity of the recurrence formula is then simpler here; it consists only in a product of two series in γ .

IV. EXPLICIT CALCULATIONS FOR THE TWO FIRST CUMULANTS OF THE CURRENT

In this section, after expressing the generating function of the cumulants of the current in terms of the perturbative solution described in the previous section, we will calculate explicitly the two first cumulants.

A. Expression of the stationary state eigenvalue

We will now express the stationary state eigenvalue using the function $g(t)$. As $g(t)$ has only negative powers in t , expression (32) for $A(t)$ in terms of $g(t)$ can be written as

$$A(t) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{i-1} [g]_{(-i)} \binom{L}{j} (-1)^j t^{j-i}. \quad (43)$$

Using the binomial coefficients formulas (A1) and (A2), we get for the eigenvalue

$$\frac{E(\gamma)}{p} = \frac{1-x}{e^{n\gamma}} \sum_{j=1}^L \binom{L}{j} (-1)^j \frac{j(L-j)}{L(L-1)} [g]_{(-j)}. \quad (44)$$

This expression for $E(\gamma)$ is of order γ , as is $g(t)$, which means $E(\gamma = 0) = 0$, as expected for the stationary state.

The last equation allows us to calculate the eigenvalue at any order in γ if we know $g(t)$ at the corresponding order. $g(t)$ is obtained by the recurrence equation (41) in which b_r is set using the known value (18) of $A(1)$. Thus, in the calculation of the eigenvalue b_r can be eliminated from (44) where it appears through $g(t) = \tilde{g}(t) + \frac{b}{t^n}$. If we want to calculate the eigenvalue at order 3, we will not need b_3 (but we will still need b_1 and b_2 as the recurrence equation (41) involves $g(t)$ and not only $\tilde{g}(t)$). Using the value (18) of $A(1)$,

$$\sum_{j=1}^L \binom{L}{j} (-1)^j \frac{j}{L} [g]_{(-j)} = e^{n\gamma} - 1, \quad (45)$$

which gives for $b = \sum_{r=1}^{\infty} b_r \gamma^r$

$$\frac{b}{\nu} = \frac{e^{n\gamma} - 1}{n} - \sum_{j=1}^L \binom{L}{j} (-1)^j \frac{j}{nL} [\tilde{g}]_{(-j)}, \quad (46)$$

with

$$\nu \equiv (-1)^n \frac{L}{\binom{L}{n}} \quad (47)$$

We finally get for the eigenvalue, putting (44) and (46) together

$$\frac{E(\gamma)}{p} = \frac{1-x}{e^{n\gamma}} \left(\sum_{j=1}^L \binom{L}{j} (-1)^j \frac{j(n-j)}{L(L-1)} [\tilde{g}]_{(-j)} + \frac{L-n}{L-1} (e^{n\gamma} - 1) \right). \quad (48)$$

We will now use (41), (46) and (48) to calculate $E(\gamma)$ up to order 2 in γ , recovering known results for the mean value of the current and for the diffusion constant.

B. Calculation of the mean value of the current

From (1), the mean value J of the current is given by

$$\frac{J}{p} = \left(\frac{dE(\gamma)}{d\gamma} \right)_{|\gamma=0}. \quad (49)$$

We only need $E(\gamma)$ at the first order in γ . In this case, the two complicated terms with the sums in (41) do not contribute and $\tilde{g}_1(t) = 0$. Using (48), the eigenvalue reads

$$\frac{J}{p} = (1-x) \frac{n(L-n)}{L-1}. \quad (50)$$

We did not need b_1 to calculate J , but we will need it for the next orders. Using (46) we find $b_1 = \nu$ and

$$g_1(t) = \frac{\nu}{t^n}. \quad (51)$$

C. Calculation of the diffusion constant

From (1), the diffusion constant Δ is given by

$$\frac{\Delta}{p} = \left(\frac{d^2 E(\gamma)}{d\gamma^2} \right)_{|\gamma=0}. \quad (52)$$

The recurrence (41) gives

$$\tilde{g}_2(t) = \nu^2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\binom{L}{2n-k} (-t)^{-k}}{1-x^{k-n}} - \nu^2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\binom{L}{2n-k} (-t)^{-k}}{1-x^{k-n}}. \quad (53)$$

The eigenvalue is, using (48) and (A4)

$$\frac{\Delta}{p} = 2(1-x) \frac{L}{L-1} \sum_{k>0} k^2 \frac{\binom{L}{n+k} \binom{L}{n-k}}{\binom{L}{n}^2} \frac{1+x^k}{1-x^k}. \quad (54)$$

The derivation of this expression is much simpler than the previous derivation using the Bethe Ansatz [18]. It uses a little more formalism, but nearly no calculation is needed, contrary to the previous derivation in which many unexpected simplifications occurred in the end of the calculation.

The condition (40) necessary for the consistency of equation (39) is easily checked

$$Lx^n[g_1(t)]_{(-n)} - [(1-t)^L g_1(t)g_1(t/x)]_{(-n)} = 0. \quad (55)$$

As for the first order, we did not need b_2 to calculate the diffusion constant, but we will need it for the third order. We set b_2 using equation (46) and the binomial formula (A4)

$$\frac{b_2}{\nu} = \frac{L}{2} + \frac{\nu^2}{L} \sum_{k=1}^n \binom{L}{n+k} \binom{L}{n-k} \frac{1+x^k}{1-x^k} \quad (56)$$

and obtain for $g_2(t)$

$$g_2(t) = \nu^2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\binom{L}{2n-k} (-t)^{-k}}{1-x^{k-n}} - \nu^2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\binom{L}{2n-k} (-t)^{-k}}{1-x^{k-n}} + \frac{L\nu}{2t^n} + \frac{\nu^3}{Lt^n} \sum_{k=1}^n \binom{L}{n+k} \binom{L}{n-k} \frac{1+x^k}{1-x^k}. \quad (57)$$

V. THIRD CUMULANT OF THE CURRENT

This section is devoted to the third cumulant of the current in the stationary state of PASEP. First, we will explain the steps needed to derive expression (58) for the third cumulant, leaving the complete proof to appendix B. We will then show that we recover known formulas in the case of TASEP and SSEP. Finally, we will write the expression for the third cumulant as a double integral in the scaling limit where the asymmetry goes to zero as the inverse of the square root of the size of the system.

A. Exact formula

We will now calculate the third cumulant of the current. Without loss of generality, we can suppose that $L \leq 2n$ because of the particle-hole symmetry. It will be easier because all the sums will have their bounds between 0 and $2n$. The steps are the same as for the two first orders: first, calculate $\tilde{g}_3(t)$ using the recurrence relation (41). Then, insert it into (48) to get the eigenvalue. This time, as we do not want the next order, we will not need b_3 . The only big difference will be that these two steps use now longer expressions involving double sums (instead of simple sums for the second order and no sum at all for the first order). In the end of the calculation, which is detailed in appendix

B, we find that the third cumulant E_3 is given by

$$\begin{aligned} \frac{(L-1)E_3}{p(1-x)L^2} = & 6 \sum_{i>0} \sum_{j>0} \frac{\binom{L}{n+i} \binom{L}{n-i} \binom{L}{n+j} \binom{L}{n-j}}{\binom{L}{n}^4} (i^2 + j^2) \frac{1+x^i}{1-x^i} \frac{1+x^j}{1-x^j} \\ & - 3 \sum_{i>0} \sum_{j>0} \frac{\binom{L}{n+i} \binom{L}{n+j} \binom{L}{n-i-j} + \binom{L}{n-i} \binom{L}{n-j} \binom{L}{n+i+j}}{\binom{L}{n}^3} (i^2 + ij + j^2) \frac{1+x^i}{1-x^i} \frac{1+x^j}{1-x^j} \\ & - 3 \sum_{i>0} \frac{\binom{L}{n+i} \binom{L}{n-i}}{\binom{L}{n}^2} (i^2) \left(\frac{1+x^i}{1-x^i} \right)^2 + \frac{3n(L-n)}{2(2L-1)} \frac{\binom{2L}{2n}}{\binom{L}{n}^2} - \frac{n(L-n)}{(3L-1)} \frac{\binom{3L}{3n}}{\binom{L}{n}^3}. \end{aligned} \quad (58)$$

We checked this formula numerically for systems with $2 \leq L \leq 12$, $1 \leq n \leq L/2$ and $x = 0, 0.1, \dots, 0.9$. For all these cases, we computed the sequence

$$a_k = \frac{1}{\epsilon} \frac{d^3}{d\gamma^3} \left(\frac{\langle 1 | (1 + \epsilon M(\gamma))^k | 1 \rangle}{\langle 1 | (1 + \epsilon M(\gamma))^{k-1} | 1 \rangle} - 1 \right)_{|\gamma=0} \quad (59)$$

for $1 \leq k \leq 200$ and $\epsilon = \frac{1}{(1+x)(n+1)}$, γ being kept a formal parameter. Using convergence acceleration techniques (fitting our sequences with a sum of 2 exponentials using Shanks transformation), we found that, for all the systems considered, the relative error on the third cumulant was at most $1.4 \cdot 10^{-9}$, which validates formula (58) for the third cumulant.

B. Some special cases

1. Totally asymmetric exclusion process

In the case of the totally asymmetric exclusion process ($x = 0$, the particles only hop to the right), using the binomial formulas (A3), (A5) (twice), (A8) and (A9), all the sums in the expression (58) for the third cumulant can be calculated, giving the result

$$\frac{E_3(x=0)}{p} = \frac{3L^2n(L-n)}{(L-1)(2L-1)} \frac{\binom{2L}{2n}^2}{\binom{L}{n}^4} - \frac{4L^2n(L-n)}{(L-1)(3L-1)} \frac{\binom{3L}{3n}}{\binom{L}{n}^3}, \quad (60)$$

which is the same as formula (13) in [10].

2. Symmetric exclusion process

In the case of the symmetric exclusion process ($x = 1$, the particles hop to the right and to the left with the same rate), we see that 3 of the terms of formula (58) are singular. But it turns out that all these singularities cancel, as well as all the constants terms, giving $E_3 = 0$. Indeed, we have the expansion near $x = 1$

$$\frac{1+x^i}{1-x^i} \frac{1+x^j}{1-x^j} = \frac{4}{ij} \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{4}{ij} \frac{1}{x-1} + \mathcal{O}(1). \quad (61)$$

The coefficients of $(x-1)^{-1}$ and of $(x-1)^{-2}$ are the same, so we only have one calculation to do to cancel both the divergent and the constant term of E_3 when $x \rightarrow 1$. Using the binomial formulas (A4) and (A11), we find that both terms vanish, leaving us with

$$E_3(x=1) = 0. \quad (62)$$

This result was expected: all the odd cumulants vanish for the symmetric exclusion process as the system is invariant if we exchange the right and the left. The probability density function of the current is even.

C. Scaling limit when $x \rightarrow 1$ as $L^{-1/2}$

The behavior of the system strongly depends on whether $x = 1$ or not. If $x = 1$, the rates at which the particles hop to the left and to the right are equal and the system belongs to the universality class of the Edwards-Wilkinson equation. If $x \neq 1$, the rates are not symmetric anymore and the system belongs to the universality class of the Kardar-Parisi-Zhang equation. The separation between these two regimes is given by the scaling $1 - x \sim L^{-1/2}$ with fixed ratio $\rho = n/L$. This scaling is a rather natural separation between weak and strong asymmetry. Indeed, a particle makes $R \propto (1 - x)\Delta t/L$ revolutions through the periodic lattice during a time interval Δt , from the value of the current. The natural time interval to be considered corresponds to the time necessary for the system to reach its stationary state. This time scales as L^z where the dynamical exponent z equals $3/2$ for the ASEP [7]. Thus, $1 - x \sim L^{-1/2}$ is the scaling corresponding to a number of rotations $R \sim 1$ during the time necessary for the system to reach its stationary state. If $1 - x \ll L^{-1/2}$, the number of rotations during this time is $\ll 1$ and the system behaves like the symmetric exclusion process. On the contrary, if $1 - x \gg L^{-1/2}$, the number of rotations is $\gg 1$ and the system behaves like the totally asymmetric exclusion process.

In [17], the scaling limit $1 - x \sim 1/\sqrt{L}$ of the diffusion constant was calculated from the exact expression (54). It was found (up to a factor L^2 due to the fact that they calculated the current through a bond) that

$$\frac{\Delta}{p} \sim \Phi h_2(\Phi) \rho(1 - \rho) L \quad \text{with} \quad h_2(\Phi) = 4 \int_0^\infty du \frac{u^2}{\tanh(\Phi u)} e^{-u^2} \quad (63)$$

and

$$x = e^{-f} \quad (64)$$

$$\Phi = \frac{f \sqrt{L \rho(1 - \rho)}}{2}, \quad (65)$$

Φ being held constant in this scaling limit. We will do the same here for the third cumulant in the same scaling limit. From the definition (64) of f , we have

$$\frac{1 + x^i}{1 - x^i} = \frac{1}{\tanh\left(\frac{if}{2}\right)} = \frac{1}{\tanh\left(\frac{i\Phi}{\sqrt{L\rho(1-\rho)}}\right)}. \quad (66)$$

When L goes to infinity with fixed Φ , $f \rightarrow 0$, so that $f \sim 1 - x$ and $(1 - x)\sqrt{L}$ is also kept constant, which is precisely the wanted scaling limit. Letting L go to infinity with fixed ρ and Φ , the expression (58) of the third cumulant becomes, using Stirling's approximation for the binomial coefficients

$$\begin{aligned} \frac{E_3}{2p\Phi} \sqrt{\frac{\rho(1-\rho)}{L}} &\sim 6 \sum_{i>0} \sum_{j>0} \frac{(i^2 + j^2) e^{-\frac{i^2+j^2}{L\rho(1-\rho)}}}{\tanh\left(\frac{i\Phi}{\sqrt{L\rho(1-\rho)}}\right) \tanh\left(\frac{j\Phi}{\sqrt{L\rho(1-\rho)}}\right)} - 6 \sum_{i>0} \sum_{j>0} \frac{(i^2 + ij + j^2) e^{-\frac{i^2+ij+j^2}{L\rho(1-\rho)}}}{\tanh\left(\frac{i\Phi}{\sqrt{L\rho(1-\rho)}}\right) \tanh\left(\frac{j\Phi}{\sqrt{L\rho(1-\rho)}}\right)} \\ &\quad - 3 \sum_{i>0} \frac{i^2 e^{-\frac{i^2}{L\rho(1-\rho)}}}{\tanh^2\left(\frac{i\Phi}{\sqrt{L\rho(1-\rho)}}\right)} + \frac{3\sqrt{\pi}}{4} L^{3/2} (\rho(1-\rho))^{3/2} - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \rho^2 (1-\rho)^2 L^2. \end{aligned} \quad (67)$$

We only wrote the dominant behavior of each term. The sums can now be written as Riemann integrals over the variables $u = i/\sqrt{L\rho(1-\rho)}$ and $v = j/\sqrt{L\rho(1-\rho)}$

$$\begin{aligned} \frac{E_3}{p} &\sim 12\Phi(\rho(1-\rho))^{3/2} L^{5/2} \int_0^\infty \int_0^\infty du dv \frac{u^2 + v^2 - (u^2 + uv + v^2) e^{-uv}}{\tanh(\Phi u) \tanh(\Phi v)} e^{-u^2 - v^2} \\ &\quad - 6\Phi\rho(1-\rho)L^2 \int_0^\infty du \frac{u^2}{\tanh^2 \Phi u} e^{-u^2} + \frac{3\sqrt{\pi}}{2} \Phi \rho(1-\rho)L^2 - \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \Phi(\rho(1-\rho))^{3/2} L^{5/2}. \end{aligned} \quad (68)$$

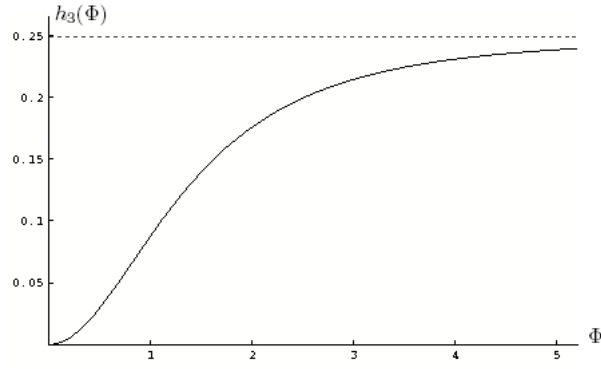


FIG. 1: Plot of the function $h_3(\Phi)$ defined in (70), the asymmetry coefficient $\Phi \sim (1-x)\sqrt{L}$ being defined in (65). In the limit where the size of the system L goes to infinity and the rates asymmetry $1-x$ goes to 0 with fixed Φ , $h_3(\Phi)$ is proportional to the third cumulant of the current E_3 divided by Φ . The dashed line indicates the limit of $h_3(\Phi)$ when Φ goes to infinity, whose approximate value is 0.2488186.

When $L \rightarrow \infty$, we get

$$\frac{E_3}{p} \sim -\Phi h_3(\Phi) (\rho(1-\rho))^{3/2} L^{5/2}, \quad (69)$$

with

$$h_3(\Phi) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} - 12 \int_0^\infty \int_0^\infty dudv \frac{(u^2 + v^2) - (u^2 + uv + v^2)e^{-uv}}{\tanh(\Phi u) \tanh(\Phi v)} e^{-u^2 - v^2}. \quad (70)$$

A numerical evaluation of $h_3(\Phi)$ tells us that it is a monotonic function (see fig. 1). It grows from 0 for $\Phi = 0$ to $\frac{16\pi}{3\sqrt{3}} - 3\pi \approx 0.2488186...$ when $\Phi \rightarrow \infty$. More precisely, the behavior of $h_3(\Phi)$ in these limits is

$$h_3(\Phi) \sim \frac{2}{15} \Phi^2 \quad \text{when } \Phi \rightarrow 0 \quad (71)$$

$$h_3(\Phi) \rightarrow \frac{16\pi}{3\sqrt{3}} - 3\pi \quad \text{when } \Phi \rightarrow \infty, \quad (72)$$

as can be seen using

$$\frac{1}{\tanh \Phi u \tanh \Phi v} \rightarrow 1 \quad \text{when } \Phi \rightarrow \infty \quad (73)$$

$$\frac{1}{\tanh \Phi u \tanh \Phi v} = \frac{1}{uv\Phi^2} + \frac{1}{3} \left(\frac{u}{v} + \frac{v}{u} \right) + \left(-\frac{u^3}{45v} + \frac{uv}{9} - \frac{v^3}{45u} \right) \Phi^2 + \mathcal{O}(\Phi^4) \quad \text{when } \Phi \rightarrow 0 \quad (74)$$

and performing the integrals in polar coordinates.

1. Range of validity of the integral formula for the third cumulant

So far, we proved the integral formula (69) for the third cumulant in the scaling limit $1-x \sim 1/\sqrt{L}$. We will now see that it holds in fact for more general values of the asymmetry once we extract from it the factor $1-x$ which is in front of the finite size expression (58). More precisely, we will show that

$$\frac{E_3(x)}{p} \sim -(1-x) \frac{h_3(\Phi)}{2} \rho^2 (1-\rho)^2 L^3 \quad \text{for } 1-x \sim 1/L^r \text{ with } 0 \leq r < 1, \quad (75)$$

Φ being understood as the function of x , ρ and L defined in equations (64) and (65). The case $1-x \gg 1/\sqrt{L}$, which corresponds to taking the limit $\phi \rightarrow \infty$, is the easiest. In this limit, all the expressions remain bounded and nonzero, and $h_3(\Phi)$ simply converges to its $\Phi \rightarrow \infty$ limit (72) giving

$$\frac{E_3(1-x \gg 1/\sqrt{L})}{p} \sim -(1-x) \left(\frac{8\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{3\pi}{2} \right) \rho^2 (1-\rho)^2 L^3 \quad \text{when } L \rightarrow \infty. \quad (76)$$

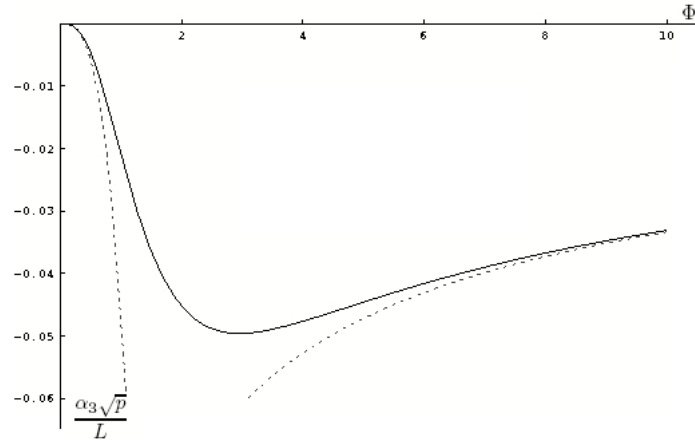


FIG. 2: Plot of the skewness α_3 of the probability distribution of the current as a function of the asymmetry in the partially asymmetric exclusion process. The rates for hopping to the right and to the left are p and xp in the scaling limit for which the asymmetry coefficient $\Phi \sim (1-x)\sqrt{L}$ defined in (65) is held constant when the size of the system goes to infinity. We represented here $\alpha_3\sqrt{p}/L$, given in equation (79), as a function of Φ . The dashed curves are the asymptotics of the skewness when $\Phi \rightarrow 0$ ($\alpha_3 \sim \Phi^3$) and $\Phi \rightarrow \infty$ ($\alpha_3 \sim 1/\sqrt{\Phi}$).

This is precisely equation (37) of [16] for the third cumulant when $x \neq 1$. If we take $x = 0$, we obtain the TASEP result [10].

The limit $1-x \ll 1/\sqrt{L}$, which corresponds to $\Phi \rightarrow 0$, is more difficult to obtain. From equation (71), we see that in this limit our integral expression for the third cumulant (69) is of order $\Phi^3 L^{5/2}$. We also know that the third cumulant is equal to 0 when $x = 1$ ($\Phi = 0$), so that E_3 is at least proportional to Φ . However, it is not required to be of order Φ^3 . Thus, if Φ is small enough, subdominant terms in L proportional to Φ may become larger than the $\Phi^3 L^{5/2}$ term in equation (67). In appendix C, we show that the correction to equation (67) at order L^2 vanish. We also compute the correction of order $L^{3/2}$ (C7) and show that it is equal, in the limit $\Phi \rightarrow 0$, to $2\Phi\rho^{3/2}(1-\rho)^{3/2}L^{3/2} = (1-x)\rho^2(1-\rho)^2L^2$. This is to be compared with the limit $\Phi \rightarrow 0$ of the leading order integral formula (69)

$$\frac{E_3(1-x \ll 1/\sqrt{L})}{p} \sim -\frac{(1-x)^3\rho^3(1-\rho)^3L^4}{60}. \quad (77)$$

If $1-x \sim 1/L$, these two expressions are of the same order. Thus, when $1-x \sim \sigma/L$ with fixed σ , the third cumulant is given by

$$\frac{E_3(1-x \sim \sigma/L)}{p} \sim \sigma\rho^2(1-\rho)^2L - \frac{\sigma^3}{60}\rho^3(1-\rho)^3L, \quad (78)$$

which agrees with [24]. No other subleading correction can become larger when $\Phi \rightarrow 0$ as each correction must be at least of order Φ .

We finally see that there are two interesting scaling limits for the third cumulant of the current: $1-x \sim 1/\sqrt{L}$ and $1-x \sim 1/L$. Both are in fact natural separations between weak and strong asymmetry. Indeed, if one takes the dynamical exponent to be equal to 2 (symmetric exclusion process) and not $3/2$ in the discussion we made before equation (63), we find that the natural scaling becomes $1-x \sim 1/L$ and not $1-x \sim 1/\sqrt{L}$. In the scaling limit $1-x \sim 1/\sqrt{L}$, the third cumulant is given by equation (75) while in the scaling limit $1-x \sim 1/L$ it is given by equation (78). The first expression is valid as long as $1-x \sim 1/L^r$ with $0 \leq r < 1$. The second expression is valid for $1-x \sim 1/L^r$ with $r > 1/2$. In the region $1/2 < r < 1$, both expressions agree.

2. Normalized third cumulant: skewness

The skewness of the probability distribution of the current $\alpha_3 = E_3/\Delta^{3/2}$ is given, in the scaling limit $1-x \sim 1/\sqrt{L}$, by (see fig. 2)

$$\frac{\alpha_3\sqrt{p}}{L} \sim -\frac{h_3(\Phi)}{\sqrt{\Phi}(h_2(\Phi))^{3/2}}. \quad (79)$$

In the limits $\Phi \rightarrow 0$ and $\Phi \rightarrow \infty$, it behaves as

$$\frac{\alpha_3 \sqrt{p}}{L} \sim -\frac{\Phi^3}{15\sqrt{2}} \quad \text{when } \Phi \rightarrow 0 \quad (80)$$

$$\frac{\alpha_3 \sqrt{p}}{L} \sim -\frac{\pi^{1/4}}{\sqrt{\Phi}} \left(\frac{16}{3\sqrt{3}} - 3 \right) \quad \text{when } \Phi \rightarrow \infty, \quad (81)$$

In particular, $\alpha_3 \sqrt{p}/L$ goes to 0 when $\Phi \rightarrow 0$, which corresponds to the totally asymmetric case. Indeed for TASEP the diffusion constant Δ scales as $L^{3/2}$ while the third cumulant scales as L^3 , so that $\alpha_3 \sim L^{3/4} \ll L$.

We see that, at least in the scaling limit for which the asymmetry goes to 0 as $L^{-1/2}$, the skewness of the total current is negative. This indicates that the left tail of the probability distribution of the total current is larger than its right tail, which means that the current of the system is lower than its mean value with higher probability. This can be understood by a simple argument [10]: in order to reduce the current of the system, one has to reduce the speed of only one of the particles, as particles can not overtake each other. On the contrary, in order to increase the current of the system, one has to speed up all the particles as the current is limited by the slowest one. It is therefore natural to find a negative skewness for the current.

VI. CONCLUSION

We have presented here an explicit method allowing the calculation of the first cumulants of the total current for PASEP with a finite number of particles in a finite periodic one dimensional lattice. This method, based on the underlying integrability of the model, relies on a perturbative resolution of the functional Bethe Ansatz equation introduced in [18] to calculate the first two cumulants. We obtained exact formulas for the three first cumulants: in particular, we recovered the known formulas for the first two, but with significantly less calculations, and gave an explicit formula (58) for the third cumulant. This formula is much more complicated than the one for the diffusion constant, involving five terms, two of which are double sums. However, in the limit where the asymmetry x goes to 1 as the inverse of the square root of the size of the system, it takes a simple integral form (69) as does the diffusion constant in the same limit.

The perturbative solution formulated here can be used to get all the cumulants of the current for the weakly asymmetric exclusion process, for which the asymmetry scales as the inverse of the size of the system. It gives both the leading and sub-leading terms (work in preparation). It would be interesting to be able to do the same when the asymmetry scales as the inverse of the square root of the size of the system, where nice integral formulas exist for the diffusion constant and the third cumulant. We also think that these methods of functional Bethe Ansatz could be used for other systems for which the Bethe Ansatz equations look quite similar to the ones of PASEP. In particular for open exclusion process, for which the Bethe equations have been found recently [25, 26]. Or for exclusion process with different classes of particles, for which there has already been work on the fluctuations of the current [11].

As the asymmetric exclusion process belongs to the universality class of the Kardar-Parisi-Zhang equation, the cumulants of the current for this discrete model in some scaling limit should be characteristic of the KPZ equation. The ratio of the square of the third cumulant with the product of the second and the fourth cumulants was studied numerically by Monte Carlo simulations for TASEP and for two others one dimensional growth models which also belong to the KPZ universality class [27]. The numerical values obtained there were then compared to the large size limit of the exact result for TASEP derived by Bethe Ansatz [10]. Something similar could be done for the third cumulant of PASEP we derived here.

For a random variable with gaussian probability distribution, only the first and second cumulants are nonzero. The skewness of a probability distribution, defined as the third cumulant, divided by the second to the power 3/2, is then the first sign of non gaussianity visible on the cumulants. It indicates the asymmetry of the probability distribution. It was recently measured for the distribution of the current in mesoscopic one dimensional systems subject to an electric driving field [28]. It would be interesting to find some real physical system for which the third cumulant of the current is given by our integral formula.

Acknowledgments

I thank O. Golinelli and K. Mallick for many useful discussions. I also thank K. Mallick for his careful reading of the manuscript.

APPENDIX A: BINOMIAL COEFFICIENTS FORMULAS

In the course of this paper, we used the following binomial coefficient formulas

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{L}{k} (-1)^k = -(-1)^n \frac{n}{L} \binom{L}{n} \quad (\text{A1})$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k \binom{L}{k} (-1)^k = -(-1)^n n \frac{n-1}{L-1} \binom{L}{n} \quad (\text{A2})$$

$$\sum_{k=1}^n \binom{L}{n+k} \binom{L}{n-k} = \frac{1}{2} \binom{2L}{2n} - \frac{1}{2} \binom{L}{n}^2 \quad (\text{A3})$$

$$\sum_{k=1}^n k \binom{L}{n+k} \binom{L}{n-k} = \frac{n(L-n)}{2L} \binom{L}{n}^2 \quad (\text{A4})$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 \binom{L}{n+k} \binom{L}{n-k} = \frac{n(L-n)}{2(2L-1)} \binom{2L}{2n} \quad (\text{A5})$$

$$\begin{aligned} \sum_{i>0} \sum_{j>0} & \left[\binom{L}{n+i} \binom{L}{n+j} \binom{L}{n-i-j} + \binom{L}{n-i} \binom{L}{n-j} \binom{L}{n+i+j} \right] \\ &= \frac{1}{3} \binom{3L}{3n} - \binom{L}{n} \binom{2L}{2n} + \frac{2}{3} \binom{L}{n}^3 \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

$$\begin{aligned} \sum_{i>0} \sum_{j>0} (i+j) & \left[\binom{L}{n+i} \binom{L}{n+j} \binom{L}{n-i-j} + \binom{L}{n-i} \binom{L}{n-j} \binom{L}{n+i+j} \right] \\ &= \frac{2}{3} \frac{n(L-n)}{L} \binom{L}{n} \binom{2L}{2n} - \frac{n(L-n)}{L} \binom{L}{n}^3 \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

$$\begin{aligned} \sum_{i>0} \sum_{j>0} ij & \left[\binom{L}{n+i} \binom{L}{n+j} \binom{L}{n-i-j} + \binom{L}{n-i} \binom{L}{n-j} \binom{L}{n+i+j} \right] \\ &= -\frac{1}{3} \frac{n(L-n)}{3L-1} \binom{3L}{3n} + \frac{2}{3} \frac{n^2(L-n)^2}{L^2} \binom{L}{n}^3 \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

$$\begin{aligned} \sum_{i>0} \sum_{j>0} (i^2 + j^2) & \left[\binom{L}{n+i} \binom{L}{n+j} \binom{L}{n-i-j} + \binom{L}{n-i} \binom{L}{n-j} \binom{L}{n+i+j} \right] \\ &= \frac{4}{3} \frac{n(L-n)}{3L-1} \binom{3L}{3n} - \frac{n(L-n)}{2L-1} \binom{L}{n} \binom{2L}{2n} - \frac{2}{3} \frac{n^2(L-n)^2}{L^2} \binom{L}{n}^3 \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

$$\begin{aligned} \sum_{i>0} \sum_{j>0} (i+j) & \left[\binom{L}{n+i} \binom{L}{n+j} \binom{L}{n-i-j} - \binom{L}{n-i} \binom{L}{n-j} \binom{L}{n+i+j} \right] \\ &= -\frac{n(L-n)(L-2n)}{3L^2} \binom{L}{n}^3 \end{aligned} \quad (\text{A10})$$

$$\sum_{i>0} \left(i + \frac{j}{2}\right) \left[\binom{L}{n+i} \binom{L}{n+j} \binom{L}{n-i-j} + \binom{L}{n-i} \binom{L}{n-j} \binom{L}{n+i+j} \right] \quad (\text{A11})$$

$$= \left(\frac{n(L-n)}{L} - \frac{j}{2} \right) \binom{L}{n} \binom{L}{n+j} \binom{L}{n-j}$$

$$\sum_{i>0} \left(i + \frac{j}{2}\right) \left[\binom{L}{n+i} \binom{L}{n+j} \binom{L}{n-i-j} - \binom{L}{n-i} \binom{L}{n-j} \binom{L}{n+i+j} \right] \quad (\text{A12})$$

$$= -\frac{j(L-2n)}{2L} \binom{L}{n} \binom{L}{n+j} \binom{L}{n-j}$$

We recall that the binomial coefficient $\binom{b}{a}$ is defined for an integer a as

$$\begin{aligned} \binom{b}{a} &= \frac{b(b-1)\cdots(b-a+1)}{a!} & \text{if } a > 0 \\ \binom{b}{0} &= 1 & \text{for } a = 0 \\ \binom{b}{a} &= 0 & \text{if } a < 0. \end{aligned} \quad (\text{A13})$$

In particular, if b is a positive integer

$$\binom{b}{a} = 0 \quad \text{if } a > b. \quad (\text{A14})$$

Formulas (A1) and (A2) can be easily proved using Pascal's triangle formula $\binom{b-1}{a-1} + \binom{b-1}{a} = \binom{b}{a}$ (once for the first equation, twice for the second).

We will go on with formulas (A4), (A11) and (A12), which are the easiest. Indeed, if we call F the function of the summation index that we want to sum (the summand), one can find a “discrete primitive” G of F with respect to the summation variable, that is, if we call k the summation variable, $F(k)$ can be written as

$$F(k) = G(k+1) - G(k). \quad (\text{A15})$$

Knowing this expression for $F(k)$, it is then easy to do the summation for any range of summation. The F functions are respectively

$$F_{A4}(k) = k \binom{L}{n+k} \binom{L}{n-k} \quad (\text{A16})$$

$$F_{A11+A12}(i) = \left(i + \frac{j}{2}\right) \binom{L}{n+i} \binom{L}{n+j} \binom{L}{n-i-j} \quad (\text{A17})$$

$$F_{A11-A12}(i) = \left(i + \frac{j}{2}\right) \binom{L}{n-i} \binom{L}{n-j} \binom{L}{n+i+j} \quad (\text{A18})$$

and the G functions are

$$G_{A4}(k) = -\frac{(L-n+k)(n+k)}{2L} \binom{L}{n+k} \binom{L}{n-k} \quad (\text{A19})$$

$$G_{A11+A12}(i) = -\frac{(L-n+i+j)(n+i)}{2L} \binom{L}{n+i} \binom{L}{n+j} \binom{L}{n-i-j} \quad (\text{A20})$$

$$G_{A11-A12}(i) = -\frac{(L-n+i)(n+i+j)}{2L} \binom{L}{n-i} \binom{L}{n-j} \binom{L}{n+i+j}, \quad (\text{A21})$$

which can be checked easily, and gives us the wanted formulas. These discrete primitives can be found if F is hypergeometric in the summation variable using Gosper's algorithm [29]. We used here an implementation of Gosper's

algorithm written by Peter Paule and Markus Schorn [30]. If an hypergeometric “discrete primitive” exists, then Gosper’s algorithm will find it. For the other single variable summations, the algorithm fails: there is no hypergeometric discrete primitive.

We now move on to the last 2 simple sums (A3) and (A5). Here, the boundaries of the sums are important: with other boundaries, there might not be a simple formula for the sum. We will calculate them using a suitable generating function. Starting from the term in t^{2n} in the expansion in powers of t of $(1+xt)^L(1+yt)^L$, and keeping out of the sums the terms in t^n , we get

$$\left[\frac{(1+xt)^L(1+yt)^L}{x^n y^n} \right]_{(t^{2n})} = \binom{L}{n}^2 + \sum_{i>0} \left(\frac{x^i}{y^i} + \frac{y^i}{x^i} \right) \binom{L}{n+i} \binom{L}{n-i}. \quad (\text{A22})$$

In $x=y=1$, it gives (A3). If we take the derivative with respect to x and to y and then set x and y to 1, we get (A5). We can now sum (A11) and (A12) over j and use (A3) and (A4) to prove (A7) and (A10). Multiplying (A11) by j and summing over j gives us a linear combination of (A8) and (A9), namely $(\text{A8}) + \frac{1}{4}(\text{A9})$.

At this point, only (A6) and either (A8) or (A9) are left. We will calculate them using a generating function, as for (A3) and (A5). Starting from the term in t^{3n} in the expansion in powers of t of $(1+xt)^L(1+yt)^L(1+zt)^L$, and keeping out of the sums the terms in t^n , we get

$$\begin{aligned} \left[\frac{(1+xt)^L(1+yt)^L(1+zt)^L}{x^n y^n z^n} \right]_{(t^{3n})} &= \binom{L}{n}^3 + \binom{L}{n} \sum_{i>0} \left(\frac{x^i}{y^i} + \frac{x^i}{z^i} + \frac{y^i}{x^i} + \frac{y^i}{z^i} + \frac{z^i}{x^i} + \frac{z^i}{y^i} \right) \binom{L}{n+i} \binom{L}{n-i} \\ &\quad + \sum_{i>0} \sum_{j>0} \left[\left(\frac{x^i y^j}{z^{i+j}} + \frac{x^i z^j}{y^{i+j}} + \frac{y^i z^j}{x^{i+j}} \right) \binom{L}{n+i} \binom{L}{n+j} \binom{L}{n-i-j} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{z^{i+j}}{x^i y^j} + \frac{y^{i+j}}{x^i z^j} + \frac{x^{i+j}}{y^i z^j} \right) \binom{L}{n-i} \binom{L}{n-j} \binom{L}{n+i+j} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A23})$$

In $x=y=z=1$, it gives (A6). If we take the derivative with respect to x and to z and then set x, y and z to 1, we get another linear combination of (A8) and (A9), $-(\text{A8}) - (\text{A9})$, proving the last two binomial formulas.

APPENDIX B: CALCULATION OF THE THIRD CUMULANT

In this appendix, we calculate the third cumulant for systems for which $L \leq 2n$. It will be easier because all the sums will have their bounds between 0 and $2n$. In the end, using the particle-hole symmetry, we will notice that our result holds in fact for all value of L .

1. Calculation of $g_3(t)$

Noticing that for any function f , $[f(xt)]_{(a)} = x^a [f(t)]_{(a)}$, the recurrence equation (41) for $g(t)$ can be written in the more compact form

$$\begin{aligned} \tilde{g}_r(t) &= - \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{\substack{b=1 \\ (b \neq n)}}^{(r-k)n} \frac{L^k}{k!} \frac{t^{-b}}{1-x^{b-n}} [g_{r-k}]_{(-b)} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{a=0}^L \sum_{b=1}^{(r-k)n} \sum_{c=1}^{kn} \frac{x^{c-n} \mathbb{1}_{a+n \neq b+c} \mathbb{1}_{a < b+c}}{(1-x^{b+c-a-n}) t^{b+c-a}} (1 - \mathbb{1}_{a < b} - \mathbb{1}_{a < c}) [(1-t)^L]_{(a)} [g_{r-k}]_{(-b)} [g_k]_{(-c)} \end{aligned} \quad (\text{B1})$$

with

$$\mathbb{1}_{u \neq v} = \begin{cases} 1 & \text{if } u \neq v \\ 0 & \text{if } u = v \end{cases} \quad \text{and} \quad \mathbb{1}_{u < v} = \begin{cases} 1 & \text{if } u < v \\ 0 & \text{if } u \geq v \end{cases}. \quad (\text{B2})$$

Introducing the notation

$$I[a, b] = [(1-t)^L]_{(a)} [g_2]_{(-b)} [g_1]_{(-n)} = \nu(-1)^a \binom{L}{a} [g_2]_{(-b)}, \quad (\text{B3})$$

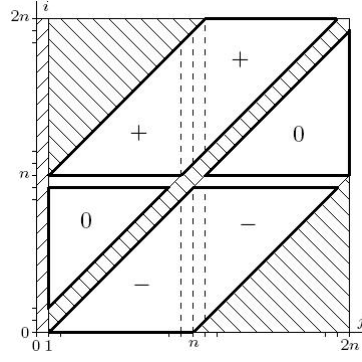


FIG. 3: Range of summation over i and j given in equation (B6). The + indicate that $\mathbb{1}_{i<j+n}(1 - \mathbb{1}_{i<j} - \mathbb{1}_{i<n}) = +1$, the - that $\mathbb{1}_{i<j+n}(1 - \mathbb{1}_{i<j} - \mathbb{1}_{i<n}) = -1$, and the 0 that $\mathbb{1}_{i<j+n}(1 - \mathbb{1}_{i<j} - \mathbb{1}_{i<n}) = 0$ due to a cancellation of a +1 with a -1. The hatched parts of the graph indicate terms that do not appear in the sums, because of $\mathbb{1}_{i \neq j}$, $\mathbb{1}_{i < j+n}$, or because of the sums boundaries. The boundaries of the +, - and 0 parts of the graph belong to these parts. The boundaries of the hatched parts do not belong to them.

we get at order $r = 3$

$$\tilde{g}_3(t) = - \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq n)}}^{2n} \frac{L t^{-j}}{1 - x^{j-n}} [g_2]_{(-j)} + \sum_{i=0}^L \sum_{j=1}^{2n} \mathbb{1}_{i \neq j} \mathbb{1}_{i < j+n} (1 - \mathbb{1}_{i < j} - \mathbb{1}_{i < n}) t^{i-j-n} \frac{1 + x^{j-n}}{1 - x^{j-i}} I[i, j], \quad (\text{B4})$$

which will give us the solution of equation (8) corresponding to the stationary state provided (40) is satisfied, that is

$$\sum_{i=0}^L \sum_{j=1}^{2n} \delta_{ij} (1 - \mathbb{1}_{i < j} - \mathbb{1}_{i < n}) (1 + x^{j-n}) I[i, j] = L [g_2]_{(-n)} + \frac{L^2}{2} [g_1]_{(-n)}, \quad (\text{B5})$$

which is easily proved. From now on, we will consider that $L \leq 2n$. Then, thanks to formula (48), we will only need the powers of t ranging from t^{-2n} to t^{-1} in $g(t)$ to be able to calculate the third order of the eigenvalue in the case $L \leq 2n$. We will note this $[\tilde{g}_3(t)]_{-2n}^{-1}$. In the double sum of equation (B4), $\mathbb{1}_{i < j+n}(1 - \mathbb{1}_{i < j} - \mathbb{1}_{i < n})$ is either equal to -1, 0 or 1. The only indices (i, j) for which $\mathbb{1}_{i < j+n}(1 - \mathbb{1}_{i < j} - \mathbb{1}_{i < n})$ is nonzero are (see fig. 3)

$$\begin{array}{lll} 0 \leq i \leq n-1 & i+1 \leq j \leq i+n & \mathbb{1}_{i < j+n}(1 - \mathbb{1}_{i < j} - \mathbb{1}_{i < n}) = -1 \\ n \leq i \leq 2n & i-n+1 \leq j \leq i-1 & \mathbb{1}_{i < j+n}(1 - \mathbb{1}_{i < j} - \mathbb{1}_{i < n}) = +1. \end{array} \quad (\text{B6})$$

giving

$$[\tilde{g}_3(t)]_{-2n}^{-1} = -L \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq n)}}^{2n} \frac{t^{-j} [g_2]_{(-j)}}{1 - x^{j-n}} + \sum_{i=n}^{2n} \sum_{j=i-n+1}^{i-1} \frac{1 + x^{j-n}}{1 - x^{j-i}} t^{i-j-n} I[i, j] - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{i+n} \frac{1 + x^{j-n}}{1 - x^{j-i}} t^{i-j-n} I[i, j]. \quad (\text{B7})$$

We now split the sums over j according to the expression of $g_2(t)$

$$\begin{aligned} [\tilde{g}_3(t)]_{-2n}^{-1} = & -L \sum_{j=1}^{n-1} \frac{t^{-j} [g_2]_{(-j)}}{1 - x^{j-n}} - L \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{t^{-j} [g_2]_{(-j)}}{1 - x^{j-n}} + \sum_{i=n+1}^{2n-1} I[i, n] \frac{2t^{i-2n}}{1 - x^{n-i}} - \sum_{i=0}^{n-1} I[i, n] \frac{2t^{i-2n}}{1 - x^{n-i}} \\ & + \sum_{i=n}^{2n} \sum_{j=i-n+1}^{n-1} I[i, j] t^{i-j-n} \frac{1 + x^{j-n}}{1 - x^{j-i}} + \sum_{i=n}^{2n} \sum_{j=n+1}^{i-1} I[i, j] t^{i-j-n} \frac{1 + x^{j-n}}{1 - x^{j-i}} \\ & - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n-1} I[i, j] t^{i-j-n} \frac{1 + x^{j-n}}{1 - x^{j-i}} - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=n+1}^{i+n} I[i, j] t^{i-j-n} \frac{1 + x^{j-n}}{1 - x^{j-i}}. \end{aligned} \quad (\text{B8})$$

We switch the sums over i and j in the double sums and then respectively make the following changes of variables in the sums

$$\begin{array}{ll}
 \text{Sum 1:} & j \rightarrow n-j \\
 \text{Sum 3:} & i \rightarrow n+i \\
 \text{Sum 5:} & j \rightarrow n-j \quad \text{and} \quad i \rightarrow n+i \\
 \text{Sum 7:} & j \rightarrow n-j \quad \text{then} \quad i \rightarrow n-i-j \\
 \text{Sum 2:} & j \rightarrow n+j \\
 \text{Sum 4:} & i \rightarrow n-i \\
 \text{Sum 6:} & j \rightarrow n+j \quad \text{then} \quad i \rightarrow n+i+j \\
 \text{Sum 8:} & j \rightarrow n+j \quad \text{and} \quad i \rightarrow n-i
 \end{array} \tag{B9}$$

We obtain

$$\begin{aligned}
 [\tilde{g}_3(t)]_{-2n}^{-1} = & -L \sum_{j=1}^{n-1} \frac{[g_2]_{(-(n-j))}}{t^{n-j}} \frac{1}{1-x^{-j}} - L \sum_{j=1}^n \frac{[g_2]_{(-(n+j))}}{t^{n+j}} \frac{1}{1-x^j} \\
 & + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{I[n+i, n]}{t^{n-i}} \frac{2}{1-x^{-i}} - \sum_{i=1}^n \frac{I[n-i, n]}{t^{n+i}} \frac{2}{1-x^i} \\
 & + \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{n-1-j} \frac{I[n+i, n-j]}{t^{n-i-j}} \frac{1+x^{-j}}{1-x^{-i-j}} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{n-j} \frac{I[n+i+j, n+j]}{t^{n-i}} \frac{1+x^j}{1-x^{-i}} \\
 & - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{n-j} \frac{I[n-i-j, n-j]}{t^{n+i}} \frac{1+x^{-j}}{1-x^i} - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{n-j} \frac{I[n-i, n+j]}{t^{n+i+j}} \frac{1+x^j}{1-x^{i+j}}.
 \end{aligned} \tag{B10}$$

Using the expression (57) for $g_2(t)$ we can finally write, cancelling a few terms and taking the lower boundaries of all the sums equal to 1

$$\begin{aligned}
 [\tilde{g}_3(t)]_{-2n}^{-1} = & L\nu^2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\binom{L}{n+j} (-1)^{n-j}}{t^{n-j}} \frac{x^{2j}}{(1-x^j)^2} + L\nu^2 \sum_{j=1}^n \frac{\binom{L}{n-j} (-1)^{n+j}}{t^{n+j}} \frac{x^j}{(1-x^j)^2} \\
 & - \frac{2\nu^4}{L} \left(\sum_{j=1}^n \binom{L}{n+j} \binom{L}{n-j} \frac{1+x^j}{1-x^j} \right) \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\binom{L}{n+i} (-1)^{n+i}}{t^{n-i}} \frac{x^i}{1-x^i} + \sum_{i=1}^n \frac{\binom{L}{n-i} (-1)^{n-i}}{t^{n+i}} \frac{1}{1-x^i} \right) \\
 & + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{n-1-j} \binom{L}{n+i} \binom{L}{n+j} \frac{\nu^3 (-1)^{i+j}}{t^{n-i-j}} \frac{1+x^j}{1-x^j} \frac{x^{i+j}}{1-x^{i+j}} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \binom{L}{n+i+j} \binom{L}{n-j} \frac{\nu^3 (-1)^i}{t^{n-i}} \frac{1+x^j}{1-x^j} \frac{x^i}{1-x^i} \\
 & + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \binom{L}{n-i-j} \binom{L}{n+j} \frac{\nu^3 (-1)^i}{t^{n+i}} \frac{1+x^j}{1-x^j} \frac{1}{1-x^i} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{n-j} \binom{L}{n-i} \binom{L}{n-j} \frac{\nu^3 (-1)^{i+j}}{t^{n+i+j}} \frac{1+x^j}{1-x^j} \frac{1}{1-x^{i+j}}.
 \end{aligned} \tag{B11}$$

2. Calculation of E_3

Using (1) and (48), we express the third cumulant as

$$\frac{E_3}{6p} = (1-x) \sum_{l>0} \left[\binom{L}{l} (-1)^l \frac{l(n-l)}{L(L-1)} \tilde{g}_3(t) \right]_{(-l)} - (1-x) \frac{n^3}{3} \frac{L-n}{L-1} - n \frac{\Delta}{2p}. \tag{B12}$$

We insert the expression (B11) of $\tilde{g}_3(t)$ in the latter equation, move the sum over l inside all the other sums containing t and finally set l to either $n-j$, $n+j$, $n-i$, $n+i$, $n-i-j$ or $n+i+j$ according to the sum using the $[\]_{-l}$. Rewriting

$$\frac{x^k}{1-x^k} = \frac{1}{2} \left(\frac{1+x^k}{1-x^k} - 1 \right) \tag{B13}$$

and

$$\frac{1}{1-x^k} = \frac{1}{2} \left(\frac{1+x^k}{1-x^k} + 1 \right) \tag{B14}$$

for all $k = i, j$ or $i + j$ in (B11) and using

$$\frac{1+x^{i+j}}{1-x^{i+j}} \left(\frac{1+x^i}{1-x^i} + \frac{1+x^j}{1-x^j} \right) = 1 + \frac{1+x^i}{1-x^i} \frac{1+x^j}{1-x^j} \quad (\text{B15})$$

and the binomial formulas (A4) (two times), (A8), (A9) and (A10), which allow us to calculate the sums not involving x , we get

$$\begin{aligned} \frac{(L-1)E_3}{6p(1-x)} &= L^2 \sum_{i>0} \sum_{j>0} \frac{\binom{L}{n+i} \binom{L}{n-i} \binom{L}{n+j} \binom{L}{n-j}}{\binom{L}{n}^4} (i^2 + j^2) \frac{1+x^i}{1-x^i} \frac{1+x^j}{1-x^j} \\ &- L^2 \sum_{i>0} \sum_{j>0} \frac{\binom{L}{n+i} \binom{L}{n+j} \binom{L}{n-i-j} + \binom{L}{n-i} \binom{L}{n-j} \binom{L}{n+i+j}}{\binom{L}{n}^3} \frac{i^2 + ij + j^2}{2} \frac{1+x^i}{1-x^i} \frac{1+x^j}{1-x^j} \\ &- L^2 \sum_{i>0} \frac{\binom{L}{n+i} \binom{L}{n-i}}{\binom{L}{n}^2} \frac{i^2}{2} \left(\frac{1+x^i}{1-x^i} \right)^2 + \frac{L^2 n(L-n)}{4(2L-1)} \frac{\binom{2L}{2n}}{\binom{L}{n}^2} - \frac{L^2 n(L-n)}{6(3L-1)} \frac{\binom{3L}{3n}}{\binom{L}{n}^3} \\ &+ L^2 \sum_{j>0} \frac{1+x^j}{1-x^j} \left(\frac{\binom{L}{n+j} \binom{L}{n-j}}{\binom{L}{n}^2} \frac{j^2(L-2n)}{2L} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i>0} \frac{\binom{L}{n+i} \binom{L}{n+j} \binom{L}{n-i-j} - \binom{L}{n-i} \binom{L}{n-j} \binom{L}{n+i+j}}{\binom{L}{n}^3} \left(\frac{j^2}{2} + ij \right) \right) \\ &+ nL^2 \sum_{j>0} \frac{1+x^j}{1-x^j} \left(\frac{\binom{L}{n+j} \binom{L}{n-j}}{\binom{L}{n}^2} \left(\frac{n(L-n)}{L} - \frac{j}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i>0} \frac{\binom{L}{n+i} \binom{L}{n+j} \binom{L}{n-i-j} + \binom{L}{n-i} \binom{L}{n-j} \binom{L}{n+i+j}}{\binom{L}{n}^3} \left(\frac{j}{2} + i \right) \right). \end{aligned} \quad (\text{B16})$$

The last two sums identically vanish thanks to the binomial formulas (A11) and (A12). This ends the proof of formula (58) for the third cumulant.

APPENDIX C: SUBLEADING CORRECTIONS TO THE THIRD CUMULANT IN THE SCALING LIMIT

In this appendix, we compute the two first subleading corrections to the integral formula (69) for the third cumulant starting from the finite size expression (58). We will need subleading corrections to the binomial coefficient formulas that we used to derive the integral expression (69). In particular, we will use

$$\frac{\binom{kL}{kn}}{\binom{L}{n}^k} = \sqrt{\frac{(2\pi\rho(1-\rho)L)^{k-1}}{k}} + \frac{(1-\rho+\rho^2)(k^2-1)}{12} \sqrt{\frac{(2\pi)^{k-1}(\rho(1-\rho)L)^{k-3}}{k^3}} + \mathcal{O}\left(L^{\frac{k-5}{2}}\right) \quad (\text{C1})$$

and

$$\frac{\binom{L}{n+i}}{\binom{L}{n}} = \left(\frac{1-\rho}{\rho}\right)^i e^{-\frac{i^2+(1-2\rho)i}{2\rho(1-\rho)L}} \left(1 + \frac{1}{L^2} \left(\frac{(1-2\rho)i^3}{6\rho^2(1-\rho)^2} + \frac{(1-2\rho+2\rho^2)i^2}{4\rho^2(1-\rho)^2} + \dots\right) \right. \\ \left. + \frac{1}{L^3} \left(-\frac{(1-3\rho+3\rho^2)i^4}{12\rho^3(1-\rho)^3} + \dots\right) + \frac{1}{L^4} \left(\frac{(1-2\rho)^2 i^6}{72\rho^4(1-\rho)^4} + \dots\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^5}\right)\right) \quad (C2)$$

The $\dots$ terms contain lower powers in i that come from subdominant corrections to the Stirling formula. They will not contribute to the corrections of E_3 we will calculate. In the following, we will also need an expansion of the difference between a Riemann sum and the corresponding limit integral. Let f be a function of 2 variables with a finite limit when any of the two variables goes to 0 and decaying exponentially at infinity. We want to calculate the difference between the sum

$$S = \epsilon^2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} f(i, j) \quad (C3)$$

and the integral

$$I = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dudv f(u, v) \quad (C4)$$

at order 2 in ϵ . Writing I as

$$I = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{i\epsilon}^{(i+1)\epsilon} \int_{j\epsilon}^{(j+1)\epsilon} dudv \left(f(i\epsilon, j\epsilon) + (u-i\epsilon)\partial_u f(i\epsilon, j\epsilon) + (v-j\epsilon)\partial_v f(i\epsilon, j\epsilon) + \frac{(u-i\epsilon)^2}{2} \partial_u^2 f(i\epsilon, j\epsilon) \right. \\ \left. + (u-i\epsilon)(v-j\epsilon)\partial_u \partial_v f(i\epsilon, j\epsilon) + \frac{(v-j\epsilon)^2}{2} \partial_v^2 f(i\epsilon, j\epsilon) + \dots \right) \quad (C5)$$

and taking care of the fact that the sums begin with i and j equal to 1, we find

$$S = I - \frac{\epsilon}{2} \left(\int_0^{\infty} du f(u, 0) + \int_0^{\infty} dv f(0, v) \right) - \epsilon^2 \left(-\frac{f(0, 0)}{4} + \frac{1}{12} \int_0^{\infty} du \partial_u f(u, 0) + \frac{1}{12} \int_0^{\infty} dv \partial_v f(0, v) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (C6)$$

Using the finite size equation (58), we now can calculate subleading corrections to $E_3/(1-x)$. The term of order L^3 we get is the one we found previously (75). At the next order, we find that the $L^{5/2}$ term cancels out. Finally, the term of order L^2 is given by

$$\left[\frac{E_3}{1-x} \right]_{(L^2)} = 6\rho^2(1-\rho)^2 L^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dudv \frac{(u^2+v^2)e^{-u^2-v^2} - (u^2+uv+v^2)e^{-u^2-uv-v^2}}{\tanh(\Phi u) \tanh(\Phi v)} \\ + 3\rho(1-\rho)(1-2\rho+2\rho^2) L^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dudv \frac{(u^2+v^2)^2 e^{-u^2-v^2} - (u^2+uv+v^2)^2 e^{-u^2-uv-v^2}}{\tanh(\Phi u) \tanh(\Phi v)} \\ - \rho(1-\rho)(1-3\rho+3\rho^2) L^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dudv \frac{(u^2+v^2)(u^4+v^4)e^{-u^2-v^2} - (u^2+uv+v^2)^3 e^{-u^2-uv-v^2}}{\tanh(\Phi u) \tanh(\Phi v)} \\ + \frac{3}{4} \rho(1-\rho)(1-2\rho)^2 L^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dudv \frac{-u^2 v^2 (u+v)^2 (u^2+uv+v^2) e^{-u^2-uv-v^2}}{\tanh(\Phi u) \tanh(\Phi v)} \\ - \frac{20\pi}{27\sqrt{3}} \rho^2(1-\rho)^2 L^2 - \frac{4\pi}{27\sqrt{3}} \rho(1-\rho) L^2 - \rho(1-\rho) L^2 \int_0^{\infty} \frac{\left(u^2 - \frac{u^4}{2}\right) e^{-u^2}}{\Phi \tanh(\Phi u)} \quad (C7)$$

This expression can be easily checked numerically: subtracting this expression plus the L^3 leading term to the finite size expression (58) for various values of Φ , n and L , we find that the remaining term is of order $L \ll L^2$. Taking now the limit $\Phi \rightarrow 0$ in expression (C7), we find that the divergent term vanishes as expected, leaving us with

$$\left[\frac{E_3}{1-x} \right]_{(L^2)} \rightarrow \rho^2(1-\rho)^2 L^2 \quad \text{when } \Phi \rightarrow 0 \quad (C8)$$

-
- [1] T.M. Liggett. *Interacting Particle Systems*. New York: Springer, 1985.
 - [2] H. Spohn. *Large Scale Dynamics of Interacting Particles*. New York: Springer, 1991.
 - [3] B. Derrida. An exactly soluble non-equilibrium system: The asymmetric simple exclusion process. *Phys. Rep.*, 301:65–83, 1998.
 - [4] G.M. Schütz. Exactly solvable models for many-body systems far from equilibrium. In *Phase Transitions and Critical Phenomena*, volume 19. San Diego: Academic, 2001.
 - [5] O. Golinelli and K. Mallick. The asymmetric simple exclusion process: an integrable model for non-equilibrium statistical mechanics. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 39(41):12679–12705, 2006.
 - [6] D. Dhar. An exactly solved model for interfacial growth. *Phase Transitions*, 9:51, 1987.
 - [7] L.-H. Gwa and H. Spohn. Bethe solution for the dynamical-scaling exponent of the noisy Burgers equation. *Phys. Rev. A*, 46(2):844–854, 1992.
 - [8] B. Derrida, M.R. Evans, V. Hakim, and V. Pasquier. Exact solution of a one-dimensional asymmetric exclusion model using a matrix formulation. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 26(7):1493–1517, 1993.
 - [9] R.A. Blythe and M. Evans. Nonequilibrium steady states of matrix-product form: a solver’s guide. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 40(46):R333–R441, 2007.
 - [10] B. Derrida and J.L. Lebowitz. Exact large deviation function in the asymmetric exclusion process. *Phys. Rev. Lett.*, 80(2):209–213, 1998.
 - [11] B. Derrida and M.R. Evans. Bethe Ansatz solution for a defect particle in the asymmetric exclusion process. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 32(26):4833–4850, 1999.
 - [12] T. Bodineau and B. Derrida. Distribution of current in non-equilibrium diffusive systems and phase transitions. *Phys. Rev. E*, 72(6):066110, 2005.
 - [13] C. Boutillier, P. François, K. Mallick, and S. Mallick. A matrix Ansatz for the diffusion of an impurity in the asymmetric exclusion process. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 35(46):9703–9730, 2002.
 - [14] M. Prähofer and H. Spohn. Current fluctuations for the totally asymmetric simple exclusion process. In *In and Out of Equilibrium: Probability with a Physics Flavor*, volume 51 of *Progress in Probability*, pages 185–204. Boston: Birkhäuser, 2002.
 - [15] T. Sasamoto. Fluctuations of the one-dimensional asymmetric exclusion process using random matrix techniques. *J. Stat. Mech.*, page P07007, 2007.
 - [16] D.S. Lee and D. Kim. Large deviation function of the partially asymmetric exclusion process. *Phys. Rev. E*, 59(6):6476–6482, 1999.
 - [17] B. Derrida and K. Mallick. Exact diffusion constant for the one dimensional partially asymmetric exclusion model. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 30(4):1031–1046, 1997.
 - [18] S. Prolhac and K. Mallick. Current fluctuations in the exclusion process and Bethe Ansatz. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 41(17):175002, 2008.
 - [19] J.L. Lebowitz and H. Spohn. A Gallavotti-Cohen type symmetry in the large deviation functional for stochastic dynamics. *J. Stat. Phys.*, 95:333–365, 1999.
 - [20] R.J. Baxter. *Exactly solved models in statistical mechanics*. Academic Press, 1982.
 - [21] Y.G. Stroganov. The importance of being odd. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 34(13):L179–L185, 2001.
 - [22] R.I. Nepomechie. Functional relations and Bethe Ansatz for the XXZ chain. *J. Stat. Phys.*, 111:1363–1376, 2003.
 - [23] P. Dorey, C. Dunning, and R. Tateo. The ODE/IM correspondence. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 40(32):R205–R283, 2007.
 - [24] C. Appert, B. Derrida, V. Lecomte, and F. van Wijland. Universal cumulants of the current in diffusive systems on a ring. *cond-mat/0804.2590*, 2008.
 - [25] J. de Gier and F.H.L. Essler. Exact spectral gaps of the asymmetric exclusion process with open boundaries. *Phys. Rev. Lett.*, 95(24):240601, 2005.
 - [26] W. Galleas. Functional relations from the Yang-Baxter algebra: Eigenvalues of the XXZ model with non-diagonal twisted and open boundary conditions. *Nucl. Phys. B*, 790(3):524–542, 2008.
 - [27] B. Derrida and C. Appert. Universal large-deviation function of the Kardar-Parisi-Zhang equation in one dimension. *J. Stat. Phys.*, 94:1–30, 1999.
 - [28] B. Reulet. Higher moments of noise. In *proceedings of Les Houches Summer School session LXXXI*, volume 81. Elsevier Science, 2005.
 - [29] M. Petrovsek, H.S. Wilf, and D. Zeilberger. *A=B*. A.K. Peters, 1997.
 - [30] P. Paule and M. Schorn. A Mathematica version of Zeilberger’s algorithm for proving binomial coefficient identities. *J. Symb. Comp.*, 20:673–698, 1995.

Cumulants of the current in the weakly asymmetric exclusion process

Sylvain Prolhac, Kirone Mallick
Institut de Physique Théorique
CEA, IPhT, F-91191 Gif-sur-Yvette, France
CNRS, URA 2306, F-91191 Gif-sur-Yvette, France
(Dated: March 11, 2009)

We study the fluctuations of the total current for the partially asymmetric exclusion process in the scaling of a weak asymmetry (asymmetry of order the inverse of the size of the system) using Bethe Ansatz. Starting from the functional formulation of the Bethe equations, we obtain for all the cumulants of the current both the leading and next-to-leading contribution in the size of the system.

PACS numbers: 05-40.-a; 05-60.-k

Keywords: ASEP, functional Bethe Ansatz, large deviations

I. INTRODUCTION

The one dimensional asymmetric simple exclusion process (ASEP) is one of the most simple examples of a classical interacting particles system exhibiting a non equilibrium steady state. This stochastic system has been studied much in the past, both in the mathematical [1, 2, 3] and physical literature [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]. It consists of particles hopping locally on a one dimensional lattice, with an asymmetry between the forward and backward hopping rates. The exclusion constraint prevents the particles from moving to a site already occupied by another particle. The asymmetry between the hopping rates models the action of an external driving field in the bulk of the system, which maintains a permanent macroscopic current in the system. This current breaks the detailed balance and keeps the system out of equilibrium even in the stationary state. The special case for which the particles hop forward and backward with equal rates is called the symmetric simple exclusion process (SSEP). It corresponds to a situation for which the detailed balance holds in the bulk which means (in the absence of boundary conditions breaking the forward-backward symmetry) that the system reaches equilibrium in the long time limit. In this case, the system belongs to the universality class of the Edwards–Wilkinson (EW) equation [6, 12]. On the contrary, if the two hopping rates are different, detailed balance is broken and the system reaches in the long time limit a non equilibrium steady state characterized by the presence of a current of particles flowing through the system. In that case, the system belongs to the universality class of the Kardar–Parisi–Zhang (KPZ) equation [6, 13].

Because of its simplicity, the ASEP is an interesting tool to investigate the general properties of systems out of equilibrium. Moreover, the ASEP is related through various mappings to many other models, in particular: the zero range process [14], directed polymers in a random medium [15], interface growth models [6, 15, 16], the six vertex model [16, 17], XXZ spin chains [10, 16, 18]. It is also used as a starting point to model physical phenomena such as cellular molecular motors [19], hopping conductivity [20], traffic flow [21], usually by enriching the dynamics of the ASEP by new rules that makes it closer to the studied phenomenon.

The ASEP, along with a very small number of other statistical mechanics models is known to be “exactly solvable” in the sense that several quantities can be calculated exactly, which is a rather uncommon property. The totally asymmetric case, for which all the particles hop in only one direction (TASEP), is usually the easiest to solve. On the contrary, the model with partial asymmetry often exhibits a more intricate mathematical structure and is thus more difficult to solve. A few different approaches have been used in the past to obtain exact results for the ASEP: the matrix product representation [22, 23] allows to calculate explicitly the probabilities of all the configurations in the stationary state for both open systems connected to reservoirs of particles and systems on a ring with periodic boundary conditions; techniques from random matrix theory [24, 25, 26] have been used for the study of infinite systems defined on $\mathbb{Z}$; Bethe Ansatz has provided many exact results, principally on a ring [16, 27], but also recently for open systems [28].

The fact that Bethe Ansatz can be used to study the ASEP is strongly related to the “quantum integrability” of the model. Indeed, the Markov matrix governing the time evolution of the probabilities for the configurations of the ASEP is similar to the hamiltonian of the XXZ spin chain and closely related to the transfer matrix of the six vertex model. While its formulation for the ASEP is well understood, the use of the Bethe Ansatz is usually quite technical. The difficulty lies in the determination of the so called “Bethe roots” in terms of which all the quantities we want to calculate are expressed. These Bethe roots are solutions of a set of highly coupled polynomial equations called the Bethe equations of the system. Their solutions are usually not known for general values of the parameters of the model studied. In the case of the ASEP, Bethe Ansatz has been used successfully to calculate the gap of the system [16, 28, 29, 30, 31], related to the dynamical exponent which governs the speed at which the system reaches its

stationary state. It has also allowed to calculate some properties of the fluctuations of the current in the stationary state [32, 33, 34, 35, 36, 37, 38].

In the present work, we study the fluctuations of the steady state current for the ASEP on a ring in the scaling of a weak asymmetry between the hopping rates (asymmetry scaling as the inverse of the size of the system). The main result of the article is the Bethe Ansatz derivation of all the cumulants of the current in this scaling limit. We obtain an explicit expression (9) for the leading and next-to-leading contributions in the size of the system. We use a rewriting of the Bethe equations for the ASEP in terms of a polynomial functional equation. Our approach is based on the functional Bethe Ansatz and does not rely on the behavior of the Bethe roots in the large system size limit. We check our results numerically by solving the functional Bethe equation for systems up to size 100.

In section II, we discuss our formula (9) for the cumulants of the current in the scaling of a weak asymmetry. In section III, we write the Bethe equations for the ASEP as a polynomial functional equation and recall how this equation can be solved perturbatively to calculate the first cumulants of the current. In section IV, we define a new version of the functional equation that remains regular in the symmetric limit. Then, in section V, we take the weakly asymmetric limit of this equation, and we solve it in section VI. A few technical calculations are relegated to the appendix.

II. CUMULANTS OF THE CURRENT IN THE WEAKLY ASYMMETRIC EXCLUSION PROCESS

We consider the partially asymmetric simple exclusion process (PASEP) on a ring. It is a stochastic process involving classical hard core particles hopping on a one dimensional lattice with periodic boundary conditions. Each one of the L sites can be occupied by at most one of the n particles. The system evolves with the following local dynamics: in an infinitesimal time interval dt , each particle hops forward with probability $p dt$ and backward with probability $p x dt$ if the destination site is empty (exclusion rule).

A. Fluctuations of the total current

We define the total integrated current Y_t between time 0 and time t as the total distance covered by all the particles in this duration. This is a random variable which depends on the trajectories of the particles starting in some configuration $\mathcal{C}$ at time 0 and evolving by the markovian dynamics up to time t . We are interested in the fluctuations of Y_t in the long time limit, when the (finite size) system reaches its unique stationary state which is independent of the initial configuration $\mathcal{C}$. We emphasize that we consider here the long time limit for finite systems. We will take the large system size limit only in the end. This is a completely different regime from taking the infinite system size limit $L \rightarrow \infty$ first and studying then the stationary state $t \rightarrow \infty$ [6]. We want to calculate the first cumulants of the current with respect to the stationary state probability distribution of Y_t , that is its mean value $J(x)$, the diffusion constant $D(x)$ and the higher cumulants:

$$J(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle Y_t \rangle}{t} \quad (1)$$

$$D(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle Y_t^2 \rangle - \langle Y_t \rangle^2}{t} \quad (2)$$

$$E_3(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle Y_t^3 \rangle - 3\langle Y_t \rangle \langle Y_t^2 \rangle + 2\langle Y_t \rangle^3}{t} . \quad (3)$$

The characteristic function, defined as the mean value of $e^{\gamma Y_t}$ behaves in the long time limit as [37]

$$\langle e^{\gamma Y_t} \rangle \sim e^{E(\gamma, x)t} , \quad (4)$$

where γ is the “fugacity” corresponding to the variable Y_t . Taking the derivatives of the previous expression with respect to γ , we see that $E(\gamma, x)$ is the exponential generating function of the cumulants of the current in the stationary state, *i.e.*

$$E(\gamma, x) = J(x)\gamma + \frac{D(x)}{2!}\gamma^2 + \frac{E_3(x)}{3!}\gamma^3 + \dots \quad (5)$$

The generating function of the cumulants $E(\gamma, x)$ can be related to the large deviation function of the current $G(j, x)$. The function $G(j, x)$ is defined from the asymptotic behavior of the probability distribution of Y_t as

$$P_t(j) \equiv P\left(\frac{Y_t}{t} = j\right) \sim e^{-G(j, x)t} \quad \text{when } t \rightarrow \infty . \quad (6)$$

The large deviation function of the current $G(j, x)$ is equal to 0 for $j = J(x)$ and is strictly positive otherwise, leading to an exponentially vanishing probability in the long time limit except when j is equal to the mean value of the current. Writing

$$\langle e^{\gamma Y_t} \rangle = \int dj e^{j\gamma t} P_t(j) \sim \int dj e^{(j\gamma - G(j, x))t} \sim e^{t \max_j (j\gamma - G(j, x))}, \quad (7)$$

we observe that $E(\gamma, x)$ is the Legendre transform of the large deviations function $G(j, x)$, that is

$$E(\gamma, x) = \max_j (j\gamma - G(j, x)). \quad (8)$$

B. Cumulants of the current in the scaling of a weak asymmetry

The principal result of this article is the calculation of all the cumulants of the stationary state current in the weakly asymmetric scaling limit $1 - x \sim 1/L$, or equivalently, the Taylor expansion in the vicinity of $\gamma = 0$ of the generating function $E(\gamma, x)$. Using Bethe Ansatz, we find

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \tilde{E}(\mu, \nu) &\equiv \frac{1}{p} E\left(\gamma = \frac{\mu}{L}, x = 1 - \frac{\nu}{L}\right) \\ &= \frac{\rho(1-\rho)(\mu^2 + \mu\nu)}{L} + \frac{1}{L^2} \left(-\frac{\rho(1-\rho)\mu^2\nu}{2} + \varphi[\rho(1-\rho)(\mu^2 + \mu\nu)] \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^3}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

In this expression, ρ is the particle density $\rho = n/L$ and the function φ is given by

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k-2}}{k!(k-1)!} z^k, \quad (10)$$

where the B_j are the Bernoulli numbers. The expression (9) gives the leading and next-to-leading order in L of all the cumulants of the current by taking the derivative with respect to μ . Only the subleading term of (9) contributes to the k -th cumulant E_k for $k \geq 3$. In this case, E_k is a polynomial of degree k in the rescaled asymmetry ν . The coefficients of this polynomial are expressed in terms of the Bernoulli numbers multiplied by factorials. The first cumulants E_k are plotted with respect to the rescaled asymmetry ν in fig. 1. We note that they show oscillations in the parameter ν . This oscillation phenomenon of the cumulants of the current has been observed recently in the context of electron transport through a quantum dot in [41]. The special case $\nu = 0$ which corresponds to the SSEP has already been calculated by Bethe Ansatz in [36]. For arbitrary ν , equation (9) leads to an expression for the large deviation function G up to the order 2 in L , which matches the result obtained in [36] using the macroscopic fluctuation theory developed in [39, 40].

We now justify the weakly asymmetric scaling chosen in equation (9). The crossover between the Edwards–Wilkinson and the Kardar–Parisi–Zhang behavior lies at a scaling where the asymmetry $1 - x$ is nonzero but goes to zero when the size L of the system goes to infinity. Consider a tagged particle in the system with asymmetry scaling as $1 - x \sim 1/L^r$. During a time interval Δt , this particle makes a number of rotations $R \sim (1 - x)\Delta t/L$ through the system. A typical time interval Δt to consider is the time necessary for the system to reach its stationary state: $\Delta t \sim L^z$, z being the dynamic exponent of the system. Then, a criterion for separation between weak and strong asymmetry is when $R \sim 1$: when $R \gg 1$, the system is asymmetric, while $R \ll 1$ corresponds to a symmetric system. This leads to $1 - x \sim 1/L^{z-1}$. The value of z depends on whether the system is in the Edwards–Wilkinson (EW, $z = 2$) or in the Kardar–Parisi–Zhang (KPZ, $z = 3/2$) universality class. This leads to two natural scalings for the asymmetry, $1 - x \sim 1/L$ and $1 - x \sim 1/\sqrt{L}$. It turns out that both of these scalings are meaningful for the ASEP. The scaling $1 - x \sim 1/L$ corresponds to the weakly asymmetric exclusion process, whereas the scaling $1 - x \sim 1/\sqrt{L}$ corresponds to the crossover between the EW and the KPZ regimes [29]. In particular, the weakly asymmetric scaling $1 - x \sim 1/L$ belongs to the EW class like the symmetric exclusion process.

From the formula (9), we observe that $\tilde{E}(\mu, \nu)$ for $\nu \neq 0$ is a rather minimal deformation of the case $\nu = 0$. This modification is in fact needed to ensure that $\tilde{E}(\mu, \nu)$ stays invariant under the Gallavotti–Cohen symmetry given by [10, 42]

$$E(\gamma, x) = E(\log x - \gamma, x), \quad (11)$$

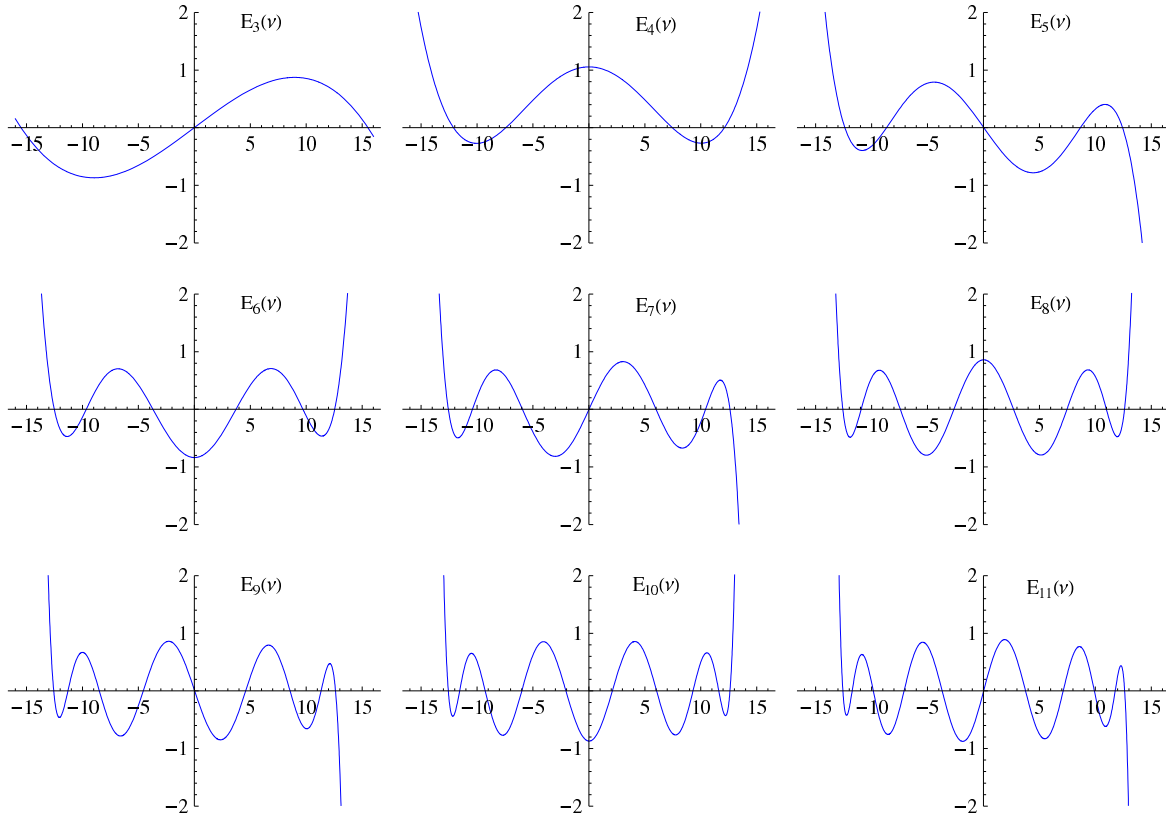


FIG. 1: Graphs of the first cumulants of the current E_k in the weakly asymmetric scaling limit, obtained by taking the successive derivatives in μ of the generating function (9) at $\mu = 0$. The rescaled cumulants $\frac{k-2}{8\pi^2}(\pi e/(kL\sqrt{\rho(1-\rho)})^k E_k(\nu)$ are plotted with respect to the rescaled asymmetry ν at particle density $\rho = 1/2$ for k from 3 to 11.

which in the weakly asymmetric scaling leads to

$$\tilde{E}(\mu, \nu) = \tilde{E}\left(-\mu - \nu - \frac{\nu^2}{2L} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^2}\right), \nu\right) \quad (12)$$

for the leading and next-to-leading order. The study of the exact values for the diffusion constant [37, 43] and the third cumulant [38] shows that these two cumulants are still given by equation (9) as long as $1 - x \ll 1/\sqrt{L}$. This suggests that this minimal deformation is valid in all the Edwards–Wilkinson universality class.

C. Phase transition

In [44], using the macroscopic fluctuation theory for driven diffusive systems developed in [39, 40], the existence of a nontrivial dynamical phase transition was found in the weakly asymmetric exclusion process, with in particular a phase of weaker asymmetry for which the fluctuations of the current are gaussian (at dominant order in $1/L$), and a phase of stronger asymmetry in which the fluctuations of the current become non gaussian. Let ν_c be the value of the rescaled asymmetry corresponding to the separation between the gaussian and non gaussian phases. For $\nu < \nu_c$, the large deviation function of the current $G(j, \nu)$ (respectively the generating function of the cumulants of the current $\tilde{E}(\mu, \nu)$) is quadratic in j (resp. μ) at the leading order in the size of the system. Performing the Legendre transform of the leading order of the expression (9) for $\tilde{E}(\mu, \nu)$, we find that in the gaussian phase $\nu < \nu_c$, the large deviation function $G(j, \nu)$ is given by the quadratic function of j :

$$G(j, \nu) = \frac{(j - J)^2}{2D}, \quad (13)$$

with

$$\frac{J}{p} = \rho(1 - \rho)\nu \quad (14)$$

$$\frac{D}{p} = 2\rho(1 - \rho)L \quad (15)$$

at the leading order in L . On the contrary, in the non gaussian phase $\nu > \nu_c$, neither $G(j, \nu)$ nor $\tilde{E}(\mu, \nu)$ are expected to be quadratic, even at the leading order in L . We emphasize that it does not contradict the fact that the Taylor expansion of $\tilde{E}(\mu, \nu)$ given in equation (9) is quadratic in μ at the leading order. It merely means that the large L limit of the asymptotic formula for $\tilde{E}(\mu, \nu)$ breaks down and does not represent the full function $\tilde{E}(\mu, \nu)$ anymore. We will come back to this issue at the end of this subsection.

According to [44], the density profile adopted by the system is dependent on the value of the current flowing through the system. In the gaussian phase, the density profile remains flat for all values of the current. In the non gaussian phase however, the density profile depends on the value of the current: there is a critical value $j_c(\nu)$ for the current such that if $|j| > j_c(\nu)$, the density profile remains flat, while if $|j| < j_c(\nu)$, the profile becomes time dependent. The signature of this transition between the flat profile and the time dependent profile is visible through the appearance of non analyticities in the large deviation function of the current or, equivalently, in its Legendre transform, the (rescaled) generating function of the cumulants $\tilde{E}(\mu, \nu)$. A non analyticity in the large deviation function $G(j, \nu)$ at $j = \pm j_c(\nu)$ corresponds to a non analyticity in $\tilde{E}(\mu, \nu)$ at $\mu_{c,1}(\nu)$ and $\mu_{c,2}(\nu)$ related through the Gallavotti–Cohen symmetry as $\mu_{c,1}(\nu) + \mu_{c,2}(\nu) = L \log(1 - \nu/L) \sim -\nu$.

We now look at the non analyticities of the expression (9) for $\tilde{E}(\mu, \nu)$. From the asymptotic behavior of the Bernoulli numbers

$$B_{2k} \sim (-1)^{k-1} 4\sqrt{\pi k} \left(\frac{k}{\pi e}\right)^{2k}, \quad (16)$$

we observe that $\varphi(z)$ has a singularity at $z = -\pi^2$. It corresponds for the function $\tilde{E}(\mu, \nu)$ to singularities at the points $\rho(1 - \rho)(\mu^2 + \mu\nu) = -\pi^2$. This equation has real solutions for μ if $\rho(1 - \rho)\nu^2 > 4\pi^2$. Thus, non analyticities appears in $\tilde{E}(\mu, \nu)$ as soon as $\nu > \nu_c$ for

$$\nu_c = \frac{2\pi}{\sqrt{\rho(1 - \rho)}}, \quad (17)$$

and in this case, the non analyticities of $\tilde{E}(\mu, \nu)$ are at the points

$$\mu_{c,1|2}(\nu) = \frac{-\nu \pm \sqrt{\nu^2 - \frac{4\pi^2}{\rho(1 - \rho)}}}{2}. \quad (18)$$

These expressions for $\mu_{c,1}(\nu)$ and $\mu_{c,2}(\nu)$ should hold only in the vicinity of $\nu = \nu_c$ since we used the expression (9) for $\tilde{E}(\mu, \nu)$ which is valid for μ far from 0 only in the gaussian phase. For the Legendre transform of the gaussian leading order of (9), we define the function $\mu(j)$ such that

$$j = L \frac{d}{d\mu} \tilde{E}(\mu(j), \nu) \quad \text{and} \quad \tilde{E}(\mu(j), \nu) + G(j, \nu) = j \frac{\mu(j)}{L} \quad (19)$$

By the inverse function of $\mu(j)$, the values $\mu_{c,1}(\nu)$ and $\mu_{c,2}(\nu)$ correspond for the large deviation function $G(j, \nu)$ to $\pm j_c(\nu)$ with

$$\frac{j_c(\nu)}{p} = \rho(1 - \rho) \sqrt{\nu^2 - \frac{4\pi^2}{\rho(1 - \rho)}} \quad (20)$$

near $\nu = \nu_c$. By Legendre transform, the function $\mu(j)$ sends the region $|j| < j_c(\nu)$ (where the density profile is time dependent) of the plane (j, ν) to the region $\mu_{c,1}(\nu) < \mu < \mu_{c,2}(\nu)$, or equivalently $\rho(1 - \rho)(\mu^2 + \mu\nu) < -\pi^2$, of the plane (μ, ν) . It gives at the leading order of (9)

$$L \frac{\tilde{E}(\mu, \nu)}{p} < -\pi^2, \quad (21)$$

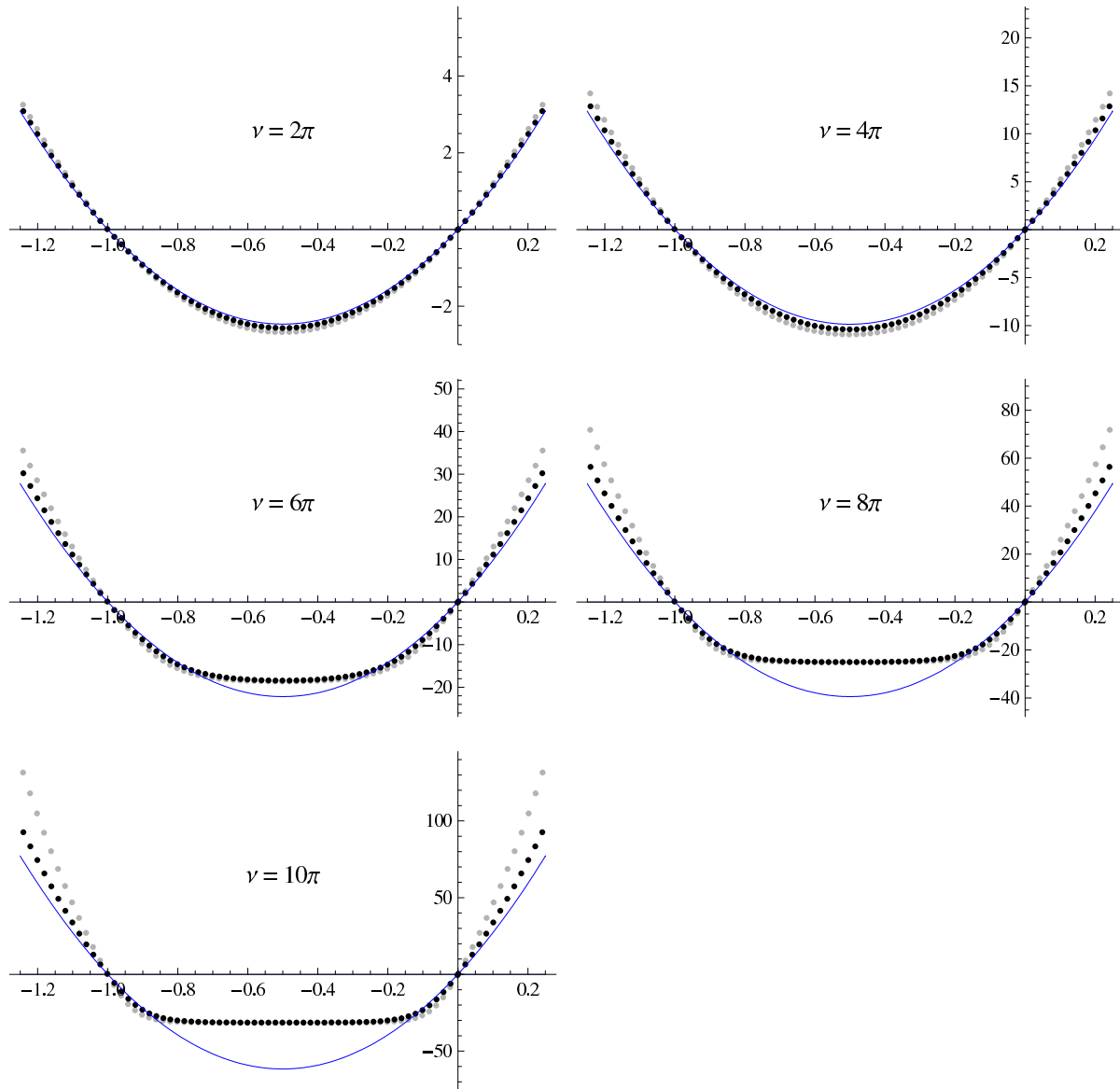


FIG. 2: Rescaled generating function of the cumulants of the current $L\tilde{E}(\mu, \nu)$ at half filling, plotted with respect to $w = \mu/(L \log x)$ between $w = -1.25$ and its symmetric through the Gallavotti-Cohen symmetry $w = 0.25$ for $\nu = 2\pi$, $\nu = 4\pi$, $\nu = 6\pi$, $\nu = 8\pi$ and $\nu = 10\pi$. The solid line represents the leading order of the result (9) of the Bethe Ansatz calculation. The gray dots correspond to the numerical resolution of the functional Bethe equation for $n = 25$, $L = 50$. The black dots correspond to the numerical resolution of the functional Bethe equation for $n = 50$, $L = 100$.

which agrees with equation (25) of [44] (where p is taken to be equal to $1/2$).

Our resolution of the functional Bethe equation of the ASEP (22) in the weakly asymmetric scaling limit, leading to the expression (9) for the cumulants of the current, relies on a perturbative expansion near $\mu = 0$ of the functional Bethe equation. This approach does not always give an information on the value of $\tilde{E}(\mu, \nu)$ for μ far from 0.

From the discussion in the beginning of this subsection of the gaussian/non-gaussian phase transition, it is expected that the function $\tilde{E}(\mu, \nu)$ will be equal to its Taylor expansion for $\nu < \nu_c$. In particular, the function should be quadratic in μ in the large L limit. On the contrary, for $\nu > \nu_c$, $\tilde{E}(\mu, \nu)$ is expected to be different from its Taylor expansion (9), even at the leading order in L .

In order to check whether the function $\tilde{E}(\mu, \nu)$ was equal to its Taylor expansion in $\mu = 0$ given by (9), we studied numerically the Bethe equations of the ASEP for systems up to size $L = 100$ (see appendix A). In fig. 2, we show the results we obtained at half filling ($\nu_c = 4\pi$) for different values of the asymmetry ν and of the size of the system L . These results are in excellent agreement with the emergence of non gaussianity for $\nu > 4\pi$: for $0 < \nu < 4\pi$, the

numerical evaluation of $E(\gamma, x)$ fits well with the quadratic expression given by the leading order of equation (9). For $\nu > 4\pi$, however, there is a region between $\gamma = 0$ and its symmetric by the Gallavotti–Cohen symmetry $\gamma = \log x$ where $E(\gamma, x)$ differs significantly from the quadratic leading order of (9). Outside of this region, the numerical evaluation of $E(\gamma, x)$ still agrees with (9).

We emphasize that the fact $\tilde{E}(\mu, \nu)$ is defined for a finite system in (5) and (9) as a generating function in μ , that is, as a Taylor series for μ at $\mu = 0$, does not contradict the fact that $\tilde{E}(\mu, \nu)$ can be different from its Taylor expansion at $\mu = 0$ in the large L limit. An example of such a behavior is exhibited by the function $\sum_{j=0}^L (-L^2/(1+L^2\mu^2))^j/j! = e^{-1/\mu^2} + \mathcal{O}(1/L)$. This function of μ and L is, for finite L , a rational fraction in μ which is entirely defined for $\mu \in \mathbb{C}$ by its Taylor expansion in $\mu = 0$ through an analytic continuation, but develops an essential singularity in $\mu = 0$ when $L \rightarrow \infty$.

III. REMINDER OF THE FUNCTIONAL FORMULATION OF THE BETHE EQUATIONS

In this section, we recall the functional formulation of the Bethe Ansatz for the ASEP. We show how the generating function of the cumulants (5) can be expressed in terms of a solution to a functional polynomial equation and how this functional equation can be solved perturbatively to obtain the first cumulants.

It can be shown [32, 37] that the generating function $E(\gamma, x)$ of the cumulants of Y_t over the variable γ is equal to the eigenvalue with largest real part of a deformation $M(\gamma)$ of the Markov matrix M of the system. Because of the underlying integrability of the ASEP, the diagonalization of $M(\gamma)$ can be performed using the Bethe Ansatz. The Bethe equations of the system can be rewritten [37] in the functional equation

$$Q(t)R(t) = e^{L\gamma}(1-t)^L Q(xt) + (1-xt)^L x^n Q(t/x). \quad (22)$$

The polynomial Q is of degree n and the polynomial R is of degree L . We choose the normalization of Q such that the coefficient of highest degree of $Q(t)$ is equal to one:

$$Q(t) = \prod_{j=1}^n (t - y_j). \quad (23)$$

If we set $t = y_i$ in the functional Bethe equation (22), we obtain

$$e^{L\gamma} \left(\frac{1 - y_i}{1 - xy_i} \right)^L = - \prod_{j=1}^n \frac{y_i - xy_j}{xy_i - y_j}, \quad (24)$$

which is the usual form of the Bethe equations in terms of the Bethe roots y_i . Equations (22) and (24) are completely equivalent forms of the Bethe equations. In particular, they both have a large discrete set of solutions corresponding to the different eigenstates of the deformed matrix $M(\gamma)$. We are only interested in the solution corresponding to the largest eigenvalue of $M(\gamma)$, which is characterized by

$$Q(t) = t^n + \mathcal{O}(\gamma). \quad (25)$$

Equivalently, the Bethe roots y_i all tend to 0 when $\gamma \rightarrow 0$ for this solution of the Bethe equations. In the following, we will also use a relation coming from the fact that the stationary state is a zero momentum state [37]. This condition implies

$$e^{n\gamma} Q(1) = x^n Q(1/x). \quad (26)$$

The generating function $E(\gamma, x)$ of the cumulants of the current is then given by [37]

$$\frac{E(\gamma, x)}{p} = (1-x) \left(\frac{Q'(1)}{Q(1)} - \frac{1}{x} \frac{Q'(1/x)}{Q(1/x)} \right) = (1-x) \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{1-y_i} - \frac{1}{1-xy_i} \right). \quad (27)$$

In the rest of this section, we explain how the functional Bethe equation can be solved perturbatively near $\gamma = 0$. Introducing the function

$$A(t) = \frac{x^n Q(t/x)}{e^{n\gamma} Q(t)}, \quad (28)$$

the functional Bethe equation (22) becomes

$$e^{-n\gamma}R(t) = (1 - xt)^L A(t) + (1 - t)^L \frac{x^n e^{(L-2n)\gamma}}{A(xt)} . \quad (29)$$

Note that we have added an extra factor $e^{n\gamma}$ in the definition compared to [38]. In terms of $A(t)$, equations (25), (26) and (27) become respectively

$$A(t) = 1 + \mathcal{O}(\gamma) \quad (30)$$

$$A(1) = 1 \quad (31)$$

$$\frac{E(\gamma, x)}{p} = -(1 - x)A'(1) . \quad (32)$$

In the following, we will also need a few other properties of $A(t)$. Because Q is a polynomial of degree n , we infer from the definition (28) of $A(t)$ that

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = e^{-n\gamma} . \quad (33)$$

This equation fixes the term of highest degree of the polynomial R , using the relation (29) between $R(t)$ and $A(t)$:

$$e^{-n\gamma}R(t) - (x^L e^{-n\gamma} + x^n e^{(L-n)\gamma})(-1)^L t^L \quad \text{is a polynomial in } t \text{ of degree } L - 1. \quad (34)$$

Since the value of $A(t)$ is known when γ is equal to zero (30), it is natural to attempt solving the functional Bethe equation (29) perturbatively near $\gamma = 0$. Moreover, a perturbative solution of (29) in powers of γ gives access to the first cumulants of the current. Using (30), we write the expansion of $A(t)$ in powers of γ as

$$A(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \gamma^k . \quad (35)$$

From (25) and the definition (28) of $A(t)$, we deduce that the $A_k(t)$ are polynomials in $1/t$ of degree kn . This observation will be crucial for the following. We will now see that equation (29) can be reformulated as a recurrence formula which can be used to calculate explicitly the first $A_k(t)$ and, as a consequence, the first cumulants. In particular, the three first cumulants were calculated in [38] for finite size systems by this method that we now recall (see [38] for more details). Reminding that $R(t)$ is a polynomial in t , that is $R(t)$ has only nonnegative powers in t , we can eliminate it from equation (29) by doing the expansion for $t \rightarrow 0$. We have

$$\frac{A(t)}{(1-t)^L} + \frac{1}{(1-xt)^L} \frac{x^n e^{(L-2n)\gamma}}{A(xt)} = \mathcal{O}(t^0) . \quad (36)$$

This equation must be understood in the following way: first, we expand the l.h.s. around $\gamma = 0$ in terms of the $A_k(t)$. Then, at each order in γ , the l.h.s. has a finite limit when $t \rightarrow 0$, that is all the negative powers in t from the $A_k(t)$ cancel out. It is crucial to respect the order between the two expansions in γ and t . Expanding first around $\gamma = 0$ makes the poles of $A(t)$ (that is, the Bethe roots y_i) disappear from the problem, leaving us only with the algebraic properties of the polynomials $A_k(t)$. On the contrary, if we did the expansion in $t = 0$ first, equation (36) would not contain any information since $A(t)$ is regular when $t \rightarrow 0$. Introducing the operator Δ_x which acts on an arbitrary function u as

$$(\Delta_x u)(t) = u(t) - x^n u(xt) , \quad (37)$$

we rewrite the previous equation in the slightly more complicated form

$$\Delta_x \left(\frac{A(t)}{(1-t)^L} \right) = - \frac{x^n}{(1-xt)^L} \left(A(xt) + \frac{e^{(L-2n)\gamma}}{A(xt)} \right) + \mathcal{O}(t^0) . \quad (38)$$

At order k in γ , the r.h.s. depends only on the $A_j(t)$ for $j < k$. We emphasize that $A_k(t)$ cancels out. This observation is the key that allows us to solve $A(t)$ order by order in γ . Noting that Δ_x acts separately on each power of t and that $\Delta_x \mathcal{O}(t^0) = \mathcal{O}(t^0)$, we can invert Δ_x in (38). We have

$$\frac{A(t)}{(1-t)^L} = -\Delta_x^{-1} \left(\frac{x^n}{(1-xt)^L} \left(A(xt) + \frac{e^{(L-2n)\gamma}}{A(xt)} \right) \right) - b \frac{1}{t^n} + \mathcal{O}(t^0) . \quad (39)$$

The additional term b/t^n comes from the fact that the operator Δ_x gives 0 when applied on $1/t^n$. Recalling (33) and the fact that the $A_k(t)$ have only negative (or zero) powers in t , we finally obtain

$$A(t) = e^{-n\gamma} - \left[(1-t)^L \Delta_x^{-1} \left(\frac{x^n}{(1-xt)^L} \left(A(xt) + \frac{e^{(L-2n)\gamma}}{A(xt)} \right) \right) \right]_{(t-\infty)}^{(t^{-1})} - b \left[\frac{(1-t)^L}{t^n} \right]_{(t-\infty)}^{(t^{-1})}. \quad (40)$$

We used the notation $[u(t)]_{(t-\infty)}^{(t^{-1})}$ for the negative powers in t of a function $u(t)$ in its expansion near $t = 0$, after the perturbative expansion near $\gamma = 0$ as before. The constant b can be set, order by order in γ , by the value (31) of $A(1)$. We note that in equation (40), L , which was initially the size of the system and the degree of the polynomial R , no longer needs being an integer. It can assume any complex value such that there is a constant b which solves $A(1) = 1$, that is for which the coefficient of b in equation (40) is nonzero when $t = 1$. Thus, L must be such that

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{L}{j} (-1)^j = (-1)^{n-1} \binom{L-1}{n-1} \neq 0. \quad (41)$$

We find that (31) can not be ensured if L is an integer between 1 and $n-1$, which never happens for the ASEP because of the exclusion rule.

We note that the recurrence (40) is singular when $x \rightarrow 1$ since Δ_x goes to 0 in this limit. More precisely, starting from (30), the recurrence equation (40) gives for $A_1(t)$ an expression which is regular when $x \rightarrow 1$, as Δ_x^{-1} is applied on an a constant independent of t at this order. Using again (40) to calculate $A_2(t)$, we see that the Δ_x^{-1} contributes a pole of order 1 in $x = 1$. Iterating (40), we thus see that the $A_k(t)$ have a pole of order $k-1$ in $x = 1$. As we are interested here in a scaling limit for which x goes to 1 as the size of the system goes to infinity, this form of the perturbative solution will not be usable. We have to transform it to make it suitable for the weakly asymmetric scaling limit.

IV. REGULARIZATION OF THE FUNCTIONAL EQUATION

In this section, we regularize the function $A(t)$ in the limit $x \rightarrow 1$ and show that the regularized function can be calculated perturbatively, in a similar way to what we did for $A(t)$ in a previous section.

Equations (31) and (32) indicate that $A(1)$ is regular in $x = 1$ and that $A'(1)$ has only a pole of order 1 in $x = 1$. But we also know that at order k in γ the function $A(t)$ has a pole of order $k-1$ in $x = 1$. This suggests that an expansion in $t = 1$ should allow us to regularize the functional equation (29) in the limit $x \rightarrow 1$. We define

$$\tilde{A}(y) = A(1 - (1-x)y). \quad (42)$$

In appendix B, we argue that $\tilde{A}(y)$ is regular when $x \rightarrow 1$ and work out explicitly how the cancellation of divergent terms in $x = 1$ works in the case of a system with only one particle. In the rest of this section, we will write a recurrence equation for $\tilde{A}(y)$ similar to (40) for $A(t)$ but regular in the limit $x \rightarrow 1$. This will allow us to study the weakly asymmetric scaling limit. A difference will be that we will now have to do expansion both in γ and $1-x$.

A. Recurrence equation for $\tilde{A}(y)$

In terms of $\tilde{A}(y)$, the functional Bethe equation (29) rewrites

$$\frac{e^{-n\gamma} R(1 - (1-x)y)}{(1-x)^L} = (1+xy)^L \tilde{A}(y) + y^L \frac{x^n e^{(L-2n)\gamma}}{\tilde{A}(1+xy)}, \quad (43)$$

while equations (30), (31) and (32) become respectively

$$\tilde{A}(y) = 1 + \mathcal{O}(\gamma) \quad (44)$$

$$\tilde{A}(0) = 1 \quad (45)$$

$$\frac{E(\gamma, x)}{p} = \tilde{A}'(0). \quad (46)$$

We will now solve the functional equation (43) perturbatively near $\gamma = 0$ and $x = 1$. We first write the expansion of $\tilde{A}(y)$ near $\gamma = 0$ and $x = 1$ as

$$\tilde{A}(y) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{A}_{k,l}(y) \gamma^k (1-x)^l. \quad (47)$$

The range for the summation over k comes from (44) while the range for the summation over l is a consequence of the regularity in $x = 1$ of $\tilde{A}(y)$. Since the $A_k(t)$ are polynomials (of degree kn) in $1/t$, we see that $\tilde{A}(y)$ has only positive integer powers in y after the expansion near $\gamma = 0$ and $x = 1$. A crucial point in the following will be that the $\tilde{A}_{k,l}(y)$ are in fact polynomials in y of degree $k+l-1$, as can be seen writing $A_k(1 - (1-x)y)$ at order l in $1-x$ in the following way:

$$\tilde{A}_{k,l}(y) = [A_k(1 - (1-x)y)]_{(1-x)^l} = \left[\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (1-x)^j y^j \frac{d^j A_k(1)}{dt^j} \right]_{(1-x)^l} = \sum_{j=0}^{k+l-1} (-1)^j y^j \left[\frac{d^j A_k(1)}{dt^j} \right]_{(1-x)^{l-j}} \quad (48)$$

We used the fact that the $A_k(t)$ have a pole of order $k-1$ in $x = 1$. We will now eliminate the polynomial R from the functional equation (43) in a similar way to what we did in the previous section for the functional equation (29). We divide the functional equation (43) by $y^L(1+xy)^L$ and make the expansion $y \rightarrow \infty$. Taking (34) into account, we obtain

$$\frac{\tilde{A}(y)}{y^L} + \frac{1}{(1+xy)^L} \frac{x^n e^{(L-2n)\gamma}}{\tilde{A}(1+xy)} - \frac{(e^{-n\gamma} + x^{L-n} e^{(L-n)\gamma})}{y^L} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{y^{L+1}}\right), \quad (49)$$

which must be understood as: each term of the expansion in power series in γ and $1-x$ of the l.h.s. is of order $1/y^{L+1}$ when $y \rightarrow \infty$. Once again, we see that the polynomial R has disappeared, leaving us with an equation involving only $\tilde{A}(y)$. Replacing y by y/x and dividing everything by x^n , equation (49) can be rewritten in the slightly more complicated form

$$\frac{\tilde{A}(y+1)}{(y+1)^L} - \frac{\tilde{A}(y)}{y^L} = \frac{x^{L-n} \tilde{A}(y/x) - \tilde{A}(y)}{y^L} + \frac{1}{(y+1)^L} \left(\tilde{A}(y+1) + \frac{e^{(L-2n)\gamma}}{\tilde{A}(y+1)} - x^{L-n} e^{-n\gamma} - e^{(L-n)\gamma} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{y^{L+1}}\right). \quad (50)$$

Defining the finite difference operator Δ acting on an arbitrary function u as

$$(\Delta u)(y) = u(y+1) - u(y), \quad (51)$$

the functional equation (50) finally becomes

$$\Delta \left(\frac{\tilde{A}(y)}{y^L} \right) = \frac{U(y)}{y^L} + \frac{V(y+1)}{(y+1)^L} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{y^{L+1}}\right), \quad (52)$$

with

$$U(y) = x^{L-n} \tilde{A}(y/x) - \tilde{A}(y) \quad (53)$$

and

$$V(y) = \tilde{A}(y) + \frac{e^{(L-2n)\gamma}}{\tilde{A}(y)} - x^{L-n} e^{-n\gamma} - e^{(L-n)\gamma}. \quad (54)$$

Similarly to what happened in the recurrence equation (38) for $A(t)$, at order k in γ and l in $1-x$, the r.h.s. of (52) depends only on the $\tilde{A}_{i,j}$ with either $i = k$ and $j < l$ ($U(y)$) or $i < k$ and $j < l$ ($V(y)$). Thus, equation (52) provides a solution order by order in γ and $1-x$ of $\tilde{A}(y)$.

B. Inversion of the operator Δ

We see that contrary to what happened in (38), the operator Δ acting on $\tilde{A}$ in the l.h.s. of (52) does not vanish when $x \rightarrow 1$. This is related to the fact that $\tilde{A}(y)$ is not singular in the limit $x \rightarrow 1$. The operator Δ acts formally as

$$\Delta = e^{D_y} - 1 \quad \text{with} \quad D_y = d/dy. \quad (55)$$

Using the Taylor expansion

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j}{j!} z^j, \quad (56)$$

where the B_j are the Bernoulli numbers, we see that we can invert the operator Δ in (52) by multiplying both sides by $D_y/(e^{D_y} - 1)$. We obtain

$$D_y \left(\frac{\tilde{A}(y)}{y^L} \right) = \frac{D_y}{e^{D_y} - 1} \left(\frac{U(y)}{y^L} \right) + \frac{-D_y}{e^{-D_y} - 1} \left(\frac{V(y)}{y^L} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{y^{L+1}} \right). \quad (57)$$

The differential operators $D_y/(e^{D_y} - 1)$ and $-D_y/(e^{-D_y} - 1)$ must be understood as the formal series (56) in D_y . We now define some notations that will be useful in the following. For any function f , we write the series expansion of $f(y)$ when $y \rightarrow \infty$ as

$$f(y) = \sum_{r=a}^{\infty} [f]_{(r)} \frac{1}{y^r}, \quad (58)$$

where a is a (possibly negative) integer. We will note $[f(y)]_{(-)}$ the singular part of $f(y)$ when $y \rightarrow \infty$ and $[f(y)]_{(+)}$ the non-singular part of $f(y)$ when $y \rightarrow \infty$, that is

$$[f(y)]_{(-)} = \sum_{r=a}^{-1} [f]_{(r)} \frac{1}{y^r} \quad (59)$$

and

$$[f(y)]_{(+)} = \sum_{r=0}^{\infty} [f]_{(r)} \frac{1}{y^r}. \quad (60)$$

When the function f depends also on γ or x , we define $[f(y)]_{(-)}$ and $[f(y)]_{(+)}$ such that all the expansions in powers of $1/y$ when y goes to infinity must be done after the expansion in powers of γ and $1-x$. Using (47), we can expand $U(y)$ and $V(y)$ near $\gamma = 0$ and $x = 1$. Since the $\tilde{A}_{k,l}(y)$ are polynomials in y , we see that at each order in γ and $1-x$, $U(y)$ and $V(y)$ are also polynomials in y . We can write

$$U(y) = \sum_{r=0}^{\infty} [U]_{(r)} y^r \quad \text{and} \quad V(y) = \sum_{r=0}^{\infty} [V]_{(r)} y^r. \quad (61)$$

With these notations, we integrate equation (57) as a formal series in y and only keep the divergent powers when $y \rightarrow \infty$ (that is, the strictly positive powers in y). Taking (45) into account, we obtain

$$[\tilde{A}(y)]_{(-)} = \tilde{A}(y) - 1 = \sum_{r=0}^{\infty} \left[y^L \int dy \left([U]_{(r)} \frac{D_y}{e^{D_y} - 1} y^{r-L} + [V]_{(r)} \frac{-D_y}{e^{-D_y} - 1} y^{r-L} \right) \right]_{(-)}. \quad (62)$$

We did not add a constant term when doing the integration. This can be understood using the analytic continuation for complex L in our formulas: since the $A_{k,l}(y)$ are polynomials in y , they have only positive integer powers in y . But adding a constant term when integrating (57) would contribute a y^L to $\tilde{A}(y)$. This is not possible as we have seen previously that we could take for L any complex value. Using (56), we rewrite (62) as

$$\tilde{A}(y) - 1 = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} B_j \binom{r-L}{j} \left[y^L \int dy ([U]_{(r)} + (-1)^j [V]_{(r)} y^{r-L-j}) \right]_{(-)}. \quad (63)$$

After calculating the integral and using $\binom{-a}{j} = (-1)^j \binom{a+j-1}{j}$, we find

$$\tilde{A}(y) - 1 = - \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{j=0}^r B_j \frac{\binom{L+j-r-1}{j}}{L+j-r-1} y^{r+1-j} ((-1)^j [U]_{(r)} + [V]_{(r)}). \quad (64)$$

We observe that the denominator $L + j - r - 1$ in this equation makes the previous equation divergent if L is taken to be an integer. Thus, equation (64) must be understood by an analytic continuation in L . The binomial coefficient in (64) is thus a polynomial of degree j in L . For $j \neq 0$, we see that the denominator $L + j - r - 1$ cancels with the binomial coefficient, giving non singular terms in the limit where L becomes an integer. For $j = 0$ though, the denominator $L + j - r - 1$ does not cancel with the binomial coefficient. It seems to make it impossible to have a finite limit for the r.h.s. of equation (64) when L tends to an integer. But, as we know that $\tilde{A}(y)$ is analytic in L provided that $L \geq n$, it simply means that the numerator contains factors canceling the non-analyticities in L integer larger than n . This is indeed shown by using the fact that the $\tilde{A}_{k,l}(y)$ are polynomials in y of degree $k + l - 1$. From the definitions (53) and (54), this implies that $U(y)$ and $V(y)$ are polynomials of degree $k + l - 2$ at order k in γ and l in $1 - x$. Thus, only the terms with $r \leq k + l - 2$ contribute to $\tilde{A}_{k,l}(y)$ in equation (64). If we choose k and l such that $k + l \leq L$, we will only need the terms of the sum over r such that $r \leq L - 2$. We observe that for these terms, the denominator $L + j - r - 1$ is always nonzero, even for L integer. Thus, using the notation

$$\mathcal{O}(\gamma, 1 - x)^{L+1} \equiv \sum_{s=0}^{L+1} \mathcal{O}(\gamma^s) \mathcal{O}((1 - x)^{L+1-s}) , \quad (65)$$

we can rewrite (64) as

$$\tilde{A}(y) - 1 = - \sum_{r=0}^{L-2} \sum_{j=0}^r B_j \frac{\binom{L+j-r-1}{j}}{L+j-r-1} y^{r+1-j} ((-1)^j [U]_{(r)} + [V]_{(r)}) + \mathcal{O}(\gamma, 1 - x)^{L+1} . \quad (66)$$

In this last equation, we can take L to be an integer: there are no divergences anymore.

V. RECURRENCE RELATIONS IN THE WEAKLY ASYMMETRIC SCALING LIMIT

In this section, we take the weakly asymmetric limit ($x = 1 - \nu/L$, $L \rightarrow \infty$) of the recurrence relation (66) for $\tilde{A}(y)$. We write closed equations verified by the leading and next-to-leading expressions in the size of the system of a rescaled version of $\tilde{A}(y)$.

From the expression (54) for $V(y)$, we see that we will have to take γ of order $1/L$ in order to obtain a non trivial expression at finite density $\rho = n/L$. It is useful to consider the function $h(y)$

$$h(y) \equiv h(y; \mu, \nu) \equiv \frac{\tilde{A}(Ly; \gamma = \frac{\mu}{L}, x = 1 - \frac{\nu}{L}) - 1}{L} . \quad (67)$$

From now on, we will no longer use the variables γ and x . All the expansions in powers of γ and $1 - x$ will be replaced with expansions in powers of the rescaled variables μ and ν . Recalling the fact that the $\tilde{A}_{k,l}(y)$ are polynomials in y of degree $k + l - 1$, we obtain from (47) that $h(y)$ is of order $1/L$ when the size of the system goes to infinity. We write

$$h(y) = \frac{h_0(y)}{L} + \frac{h_1(y)}{L^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^3}\right) . \quad (68)$$

Equations (44) and (45) become

$$h(y) = \mathcal{O}(\mu) \quad (69)$$

$$h(0) = 0 , \quad (70)$$

while from (46), the rescaled generating function of the cumulants of the current $\tilde{E}(\mu, \nu)$ is given in terms of the function h by

$$\frac{\tilde{E}(\mu, \nu)}{p} \equiv \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{p} E\left(\gamma = \frac{\mu}{L}; x = 1 - \frac{\nu}{L}\right) = h'(0) . \quad (71)$$

The binomial coefficient appearing in (66) has the $L \rightarrow \infty$ expansion

$$\mathbb{1}_{r \leq L-2} \frac{\binom{L+j-r-1}{j}}{L+j-r-1} = \frac{L^{j-1}}{j!} \left(1 + \frac{1}{L} \left(\frac{j(j-1)}{2} - (r+1)(j-1) \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^2}\right) \right) , \quad (72)$$

where $\mathbb{1}_{r \leq L-2}$ is equal to 1 if $r \leq L-2$ and 0 otherwise. Inserting (72) in (66), the recurrence becomes

$$h(y) = -\frac{1}{L} \left[\sum_{r=0}^{\infty} (Ly)^r \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j}{j!} \left(1 + \frac{1}{L} \left(\frac{y^2}{2} \frac{d^2}{dy^2} + (r+1)y \frac{d}{dy} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^2}\right) \right) \left(\frac{(-1)^j [U]_{(r)} + [V]_{(r)}}{y^{j-1}} \right) \right]_{(-)} . \quad (73)$$

Using (56) to perform the summation over j , we find

$$h(y) = \frac{1}{L} \left[\sum_{r=0}^{\infty} \left((Ly)^r + \frac{1}{L} \left((Ly)^r \frac{y^2}{2} \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d}{dy} (y(Ly)^r) y \frac{d}{dy} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^2}\right) \right) \left(\frac{[U]_{(r)}}{e^{-1/y} - 1} - \frac{[V]_{(r)}}{e^{1/y} - 1} \right) \right]_{(-)} . \quad (74)$$

We can finally perform the summation over r and we obtain

$$\begin{aligned} h(y) = & \frac{1}{L} \left[\frac{U(Ly)}{e^{-1/y} - 1} - \frac{V(Ly)}{e^{1/y} - 1} \right]_{(-)} \\ & + \frac{1}{L^2} \left[\frac{y^2}{2} \left(\frac{d^2}{dy^2} \frac{1}{e^{-1/y} - 1} \right) U(Ly) + y \left(\frac{d}{dy} \frac{1}{e^{-1/y} - 1} \right) \frac{d}{dy} (yU(Ly)) \right]_{(-)} \\ & - \frac{1}{L^2} \left[\frac{y^2}{2} \left(\frac{d^2}{dy^2} \frac{1}{e^{1/y} - 1} \right) V(Ly) + y \left(\frac{d}{dy} \frac{1}{e^{1/y} - 1} \right) \frac{d}{dy} (yV(Ly)) \right]_{(-)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^3}\right) . \end{aligned} \quad (75)$$

We recall that, from (53), (54) and (67), $U(Ly)$ and $V(Ly)$ are well defined functions depending on y only through $h(y)$. Equation (75) is thus a closed equation verified by $h(y)$. It will allow us to obtain both the leading ($h_0(y)$) and next-to-leading ($h_1(y)$) terms of $h(y)$ in the size of the system. We now have to expand both $U(Ly)$ and $V(Ly)$ to order two in $1/L$ to obtain an equation for h_0 and an equation for h_1 . The definition of U (53) gives

$$U(Ly) = U^{(0)}(y) + \frac{U^{(11)}(y)h_1(y) + U^{(10)}(y)}{L} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^2}\right) , \quad (76)$$

with

$$\begin{aligned} U^{(0)}(y) &= (e^{-(1-\rho)\nu} - 1)(1 + h_0(y)) \\ U^{(11)}(y) &= (e^{-(1-\rho)\nu} - 1) \\ U^{(10)}(y) &= e^{-(1-\rho)\nu} \left(\nu y h'_0(y) - \frac{(1-\rho)\nu^2}{2} (1 + h_0(y)) \right) , \end{aligned} \quad (77)$$

where $\rho = n/L$ is the particle density. Similarly, using the definition of V (54), we find

$$V(Ly) = X[Lh(y)] - x^{L-n} e^{-n\mu} - e^{(L-n)\mu} = V^{(0)}(y) + \frac{V^{(11)}(y)h_1(y) + V^{(10)}(y)}{L} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^2}\right) , \quad (78)$$

where we have defined

$$X[f] = 1 + f + \frac{e^{(1-2\rho)\mu}}{1+f} \quad (79)$$

and

$$\begin{aligned} V^{(0)}(y) &= X[h_0(y)] - e^{-\rho\mu} e^{-(1-\rho)\nu} - e^{(1-\rho)\mu} \\ V^{(11)}(y) &= X'[h_0(y)] \\ V^{(10)}(y) &= \frac{(1-\rho)\nu^2}{2} e^{-\rho\mu} e^{-(1-\rho)\nu} . \end{aligned} \quad (80)$$

From (77) and (80), equation (75) gives at the leading order in $\frac{1}{L}$ the following closed equation for $h_0(y)$:

$$h_0(y) = - \left[\frac{e^{1/y} U^{(0)}(y) + V^{(0)}(y)}{e^{1/y} - 1} \right]_{(-)} . \quad (81)$$

In the next section, we will solve this equation to find $h_0(y)$ and thus the leading order of the rescaled generating function of the cumulants of the current. At the next-to-leading order $1/L^2$, equation (75) leads to

$$[(1 - \alpha(y))h_1(y)]_{(-)} = [\beta(y)]_{(-)}, \quad (82)$$

with

$$\alpha(y) = \frac{U^{(11)}(y)}{e^{-1/y} - 1} - \frac{V^{(11)}(y)}{e^{1/y} - 1} \quad (83)$$

and

$$\begin{aligned} \beta(y) = & \frac{U^{(10)}(y)}{e^{-1/y} - 1} - \frac{V^{(10)}(y)}{e^{1/y} - 1} + \frac{y^2}{2} \left(\frac{d^2}{dy^2} \frac{1}{e^{-1/y} - 1} \right) U^{(0)}(y) + y \left(\frac{d}{dy} \frac{1}{e^{-1/y} - 1} \right) \frac{d}{dy} (yU^{(0)}(y)) \\ & - \frac{y^2}{2} \left(\frac{d^2}{dy^2} \frac{1}{e^{1/y} - 1} \right) V^{(0)}(y) - y \left(\frac{d}{dy} \frac{1}{e^{1/y} - 1} \right) \frac{d}{dy} (yV^{(0)}(y)). \end{aligned} \quad (84)$$

We used the fact that $h_1(y) = [h_1(y)]_{(-)}$ since $h(0) = 0$ (70). Once we know $h_0(y)$ by solving equation (81), equation (82) becomes a closed equation for $h_1(y)$.

VI. SOLUTION OF THE WEAKLY ASYMMETRIC FUNCTIONAL RELATIONS

In this section, we explicitly solve the functional relations (81) and (82) to all order in μ and ν . We obtain the leading and the next-to-leading order in L of the rescaled generating function $\tilde{E}(\mu, \nu)$.

A. Leading order

Inserting the expressions (77), (79) and (80) for U and V , and using $[h_0(y)]_{(-)} = h_0(y)$, the equation (81) for the leading order becomes

$$\left(e^{1/y} e^{-(1-\rho)\nu} (1 + h_0(y)) + \frac{e^{(1-2\rho)\mu}}{1 + h_0(y)} \right) \frac{1}{e^{1/y} - 1} = \frac{e^{-\rho\mu} e^{-(1-\rho)\nu} + e^{(1-\rho)\mu}}{e^{1/y} - 1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{y^0}\right). \quad (85)$$

Multiplying both sides of the previous equation by $y \left(e^{\frac{1}{2y}} - e^{-\frac{1}{2y}} \right) = 1 + \mathcal{O}(1/y)$, we obtain

$$y e^{\frac{1}{2y}} e^{-(1-\rho)\nu} (1 + h_0(y)) + \frac{y e^{-\frac{1}{2y}} e^{(1-2\rho)\mu}}{1 + h_0(y)} = y \left(e^{-\rho\mu} e^{-(1-\rho)\nu} + e^{(1-\rho)\mu} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{y^0}\right). \quad (86)$$

Let us write the unknown function $h_0(y)$ as

$$h_0(y) = -1 + e^{\frac{(1-2\rho)\mu + (1-\rho)\nu}{2}} e^{\frac{r(y)-1}{2y}}. \quad (87)$$

We can state (86) as an equation for $r(y)$. We obtain

$$\left[y \cosh \frac{r(y)}{2y} \right]_{(-)} = y \cosh \left(\frac{\mu + (1-\rho)\nu}{2} \right). \quad (88)$$

Because of (70), we also want $h_0(y)$ to have only strictly positive powers in y order by order in μ and ν . This can be expressed in the form

$$[h_0(y)]_{(+)} = 0. \quad (89)$$

In terms of $r(y)$, it becomes

$$\left[e^{\frac{r(y)-1}{2y}} \right]_{(+)} = e^{-\frac{(1-2\rho)\mu + (1-\rho)\nu}{2}}. \quad (90)$$

We prove in appendix C that

$$r(y) = \sqrt{1 - 2(1-2\rho)y\mu - 2(1-\rho)y\nu + y^2(\mu + (1-\rho)\nu)^2} \quad (91)$$

is the unique formal power series in μ and ν that solves (88) and (90). Thus, equation (87) for $h_0(y)$ with $r(y)$ defined by (91) is the unique solution of (81).

B. Next-to-leading order

With the expression (87) for $h_0(y)$, we can simplify the expressions (83) and (84) for $\alpha(y)$ and $\beta(y)$. We begin with $\alpha(y)$. Inserting in (83) the expressions (77) and (80) of $U^{(11)}(y)$ and $V^{(11)}(y)$, we obtain

$$\alpha(y) = \frac{e^{-(1-\rho)\nu} - 1}{e^{-1/y} - 1} - \frac{X'[h_0(y)]}{e^{1/y} - 1}. \quad (92)$$

The expressions of the operator X (79) and of $h_0(y)$ (87) give

$$1 - \alpha(y) = e^{-(1-\rho)\nu} \frac{1 - e^{-r(y)/y}}{1 - e^{-1/y}}. \quad (93)$$

We simplify $\beta(y)$ in appendix D. We find

$$\begin{aligned} \beta(y) = & -\frac{(1-\rho)\nu^2 e^{-\rho\mu} e^{-(1-\rho)\nu}}{4 \sinh\left(\frac{1}{2y}\right)} \\ & - \left(\frac{\nu(1 - (1-\rho)y\nu)}{4y} + \frac{(1-y\nu)(1 - (1-2\rho)y\mu - (1-\rho)y\nu)}{4y^2 r(y)} \right) \frac{e^{\frac{(1-2\rho)\mu - (1-\rho)\nu}{2}} e^{\frac{r(y)}{2y}}}{\sinh\left(\frac{1}{2y}\right)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{y^0}\right). \end{aligned} \quad (94)$$

To be able to solve (82), we will need to factorize $1 - \alpha(y)$ as a product of a function $u(y)$ with only positive (or zero) powers in y and a function $v(y)$ with only negative (or zero) powers in y , after the expansion in powers of μ and ν . A possible factorization is

$$u(y) = e^{-(1-\rho)\nu} r(y) e^{\frac{1-r(y)}{2y}} \quad (95)$$

and

$$v(y) = \frac{\sinh\left(\frac{r(y)}{2y}\right)}{r(y) \sinh\left(\frac{1}{2y}\right)}. \quad (96)$$

After the expansion in powers of μ and ν , $r(y)$ is equal to 1 plus strictly positive powers in y (91), which shows that $u(y)$ has indeed only nonnegative powers in y . On the contrary, the fact that the hyperbolic sinus has only odd powers gives

$$\frac{\sinh\left(\frac{r(y)}{2y}\right)}{r(y)/2y} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)!} \left(\frac{1}{4y^2} - \frac{(1-2\rho)\mu}{2y} - \frac{(1-\rho)\nu}{2y} + \frac{(\mu + (1-\rho)\nu)^2}{4} \right)^j. \quad (97)$$

Together with $2y \sinh(1/2y) = 1 + \mathcal{O}(1/y)$, this proves that $v(y)$ has only negative (or zero) powers in y . Writing the equation (82) for the next-to-leading order of $h(y)$ as

$$(1 - \alpha(y))h_1(y) = \beta(y) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{y^0}\right) \quad (98)$$

and using the factorization of $1 - \alpha(y)$, we divide the previous equation by $v(y)$. We obtain

$$u(y)h_1(y) = \frac{\beta(y)}{v(y)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{y^0}\right). \quad (99)$$

Noting that $u(y)h_1(y)$ has only strictly positive powers in y , we can write

$$u(y)h_1(y) = [u(y)h_1(y)]_{(-)} = \left[\frac{\beta(y)}{v(y)} \right]_{(-)}. \quad (100)$$

Dividing by $u(y)$, we finally find an expression for $h_1(y)$

$$h_1(y) = \frac{1}{u(y)} \left[\frac{\beta(y)}{v(y)} \right]_{(-)}. \quad (101)$$

C. Calculation of the generating function of the cumulants of the current

We write the rescaled generating function of the cumulants of the current as

$$\frac{\tilde{E}(\mu, \nu)}{p} = \frac{\tilde{E}_1(\mu, \nu)}{L} + \frac{\tilde{E}_2(\mu, \nu)}{L^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^3}\right). \quad (102)$$

Since equation (71) expresses $\tilde{E}(\mu, \nu)$ in terms of the derivative of $h(y)$ in $y = 0$, we need the expansion of $h(y)$ at first order near $y = 0$. We also note that the expression (101) for $h_1(y)$ involves the singular part (positive powers in y) of the expansion in $1/y$ when $y \rightarrow \infty$ of a function of y . However, this is not a problem: as $h(y)$ is a polynomial in y at each order in μ and ν , its expansion when $y \rightarrow \infty$ has a finite number of terms, which are all positive powers in y . Using the value (87) of $h_0(y)$, the generating function (71) at the leading order in the size of the system becomes

$$\tilde{E}_1(\mu, \nu) = \rho(1 - \rho)(\mu^2 + \mu\nu). \quad (103)$$

For the next-to-leading order, we need the expression (101) of $h_1(y)$. Using (95), we have

$$u(y) = e^{\frac{(1-2\rho)\mu - (1-\rho)\nu}{2}} + \mathcal{O}(y). \quad (104)$$

The next-to-leading order of the eigenvalue is then

$$\tilde{E}_2(\mu, \nu) = \left[e^{\frac{-(1-2\rho)\mu + (1-\rho)\nu}{2}} \frac{\beta(y)}{y v(y)} \right]_{(1/y)^0}, \quad (105)$$

with the notation $[f(y)]_{(1/y)^0}$ for the constant term in the expansion in $1/y$, after the expansion in powers of μ and ν as usual. The calculation of this expression is done in appendix E. We find for the next-to-leading order of the eigenvalue

$$\tilde{E}_2(\mu, \nu) = -\frac{\rho(1-\rho)\mu^2\nu}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k-2}}{k!(k-1)!} \rho^k (1-\rho)^k (\mu^2 + \mu\nu)^k, \quad (106)$$

which concludes the proof of equation (9).

VII. CONCLUSION

Exact results for the cumulants of the steady state current in the exclusion process on a ring have already been obtained in the past using Bethe Ansatz: in [36], all the cumulants have been calculated in the thermodynamic limit for the symmetric exclusion process, while in [37, 38], finite size expressions were obtained for the three first cumulants in the system with partial asymmetry. In this paper, we calculated all the cumulants of the current when the asymmetry scales as the inverse of the size of the system (weakly asymmetric exclusion process). We obtain for all the cumulants both the leading and next-to-leading contributions in the size of the system (9).

In the scaling of a weak asymmetry, it has been pointed out recently [44] that the system exhibited a non trivial phase diagram, with in particular a phase of weaker asymmetry in which the fluctuations of the current are gaussian, and a phase of stronger asymmetry for which the fluctuations become non gaussian. On our exact formula (9) for the cumulants of the current, we observe that the next-to-leading order develops singularities when the rescaled asymmetry ν is larger than some critical value ν_c , in perfect agreement with what was predicted in [44] on the basis of the macroscopic fluctuation theory [39, 40] which provides a hydrodynamic description for a large class of driven diffusive systems. Moreover, from a numerical solution of the functional Bethe equations for systems up to size 100, we confirm that the fluctuations of the current become non gaussian if the asymmetry parameter is larger than ν_c . This fact can unfortunately not be seen on the exact formula (9) for the generating function of the cumulants as the non gaussianity of the fluctuations of the current at the leading order is not encoded directly in the large system size limit of the cumulants of the current but is hidden in the non perturbative behavior of their generating function. It would be interesting to calculate by Bethe Ansatz the full form of the generating function of the cumulants, including its non perturbative behavior.

We observe on the generating function of the cumulants (9) that the weakly asymmetric case is given by a small deformation of the generating function of the symmetric case, even if the asymmetry parameter becomes larger than the critical value ν_c . This deformation can be understood as a minimal way to preserve the Gallavotti–Cohen

symmetry. If we go further away from the symmetric case, it is known that the cumulants of the current have more complicated expressions. When the asymmetry scales as the inverse of the square root of the size of the system (crossover between the Edwards-Wilkinson and Kardar-Parisi-Zhang universality classes), the three first cumulants are indeed given by multiple integrals [38, 43]. It is still an open question to calculate all the cumulants of the current in this crossover scaling.

Our method for solving the Bethe equations of the system is different from the one used in [36] for the symmetric case. In that article, the authors used directly the expression of the Bethe equations in terms of the Bethe roots. Their method relies on the fact that the Bethe roots accumulate on a curve in the complex plane as the size of the system goes to infinity. For general Bethe equations, it is in general difficult to know what this curve is: it usually requires a numerical resolution of the Bethe equations, which is not always possible since the Bethe equations are highly coupled. The method we use for solving the Bethe equations, in contrast to the one used in [36], does not rely on the behavior of the Bethe roots in the large system size limit. Instead, we use the formulation of the Bethe equations as a functional polynomial equation known as Baxter's TQ equation. This equation can be solved, in the case we are studying, by purely algebraic manipulations. It would be interesting to know if such an approach could be used to study the Bethe equations for some other problems. In particular to calculate the fluctuations of the current for the case of the open ASEP [28] and the multispecies ASEP [45] for which the Bethe equations are already known.

Acknowledgments

We thank O. Golinelli for useful discussions.

APPENDIX A: NUMERICAL SOLUTION OF THE FUNCTIONAL BETHE EQUATION

We used Newton's method to solve the functional Bethe equation starting from the known solution at $\mu = 0$. However, because the coefficients of the polynomial $Q(t)$ do not vary slowly with respect to γ , we were not able to perform our numerical study on the original functional Bethe equation (22). Instead, we used an equivalent equation which does not involve $Q(t)$ but only $R(t)$ [46]. This equation can be obtained from (22) in the following way: first, we divide (22) by $Q(t)$ and obtain

$$R(t) = e^{L\gamma}(1-t)^L \frac{Q(xt)}{Q(t)} + (1-xt)^L x^n \frac{Q(t/x)}{Q(t)}. \quad (\text{A1})$$

Then, we replace t in the previous equation by t/x . We have

$$R(t/x) = e^{L\gamma}(1-t/x)^L \frac{Q(t)}{Q(t/x)} + (1-t)^L x^n \frac{Q(t/x^2)}{Q(t/x)}. \quad (\text{A2})$$

Multiplying (A1) and (A2), we see that among the four terms coming in the r.h.s., only one is not proportional to $(1-t)^L$. Moreover, all the $Q(t)$ and $Q(t/x)$ cancel in this term. This leaves us with the equation

$$R(t)R(t/x) = x^n e^{L\gamma}(1-xt)^L(1-t/x)^L + \mathcal{O}((1-t)^L). \quad (\text{A3})$$

This equation provides L constraints on the polynomial R . Adding the additional equation

$$R(0) = x^n + e^{L\gamma}, \quad (\text{A4})$$

which is a consequence of (22), or

$$R(1) = e^{n\gamma}(1-x)^L, \quad (\text{A5})$$

which is a consequence of (26) and (22), we have enough equations to constrain completely the polynomial $R(t)$, which is of degree L . It turns out that the coefficients of $R(t)$ vary much more slowly than the coefficients of $Q(t)$, allowing us to perform a numerical calculation of $E(\gamma, x)$ for systems with up to 50 particles on 100 sites. We did these calculations keeping 400 significant digits for the coefficients of $R(t)$. In the end, we obtained a numerical evaluation of $E(\gamma, x)$ which was symmetric through the Gallavotti-Cohen symmetry, which validated our numerical calculation. A plot of the result for $E(\gamma, x)$ is shown in fig. 2. The results are discussed in section II.

APPENDIX B: REGULARITY OF $\tilde{A}(y)$ IN $x = 1$

In this appendix, we explain why $\tilde{A}(y)$, defined in (42), is regular in $x = 1$. In the algebraic formulation of the Bethe Ansatz (see [10]), one defines a transfer matrix $\tau(\lambda)$ which commutes with the Markov matrix for all complex value of the *spectral parameter* λ . This transfer matrix can be seen as the generating function over the variable λ of non local (and non hermitian) generalized quantum hamiltonians [47]. The Markov matrix is given in terms of the transfer matrix by the relation $M = pe^\gamma \tau'(0) \tau^{-1}(0)$. The largest eigenvalue of the transfer matrix $\epsilon(\lambda)$ can be expressed in terms of the Bethe roots y_i . An expression for $\epsilon(\lambda)$ is given *e.g.* in [10], equation (68), for $\gamma = 0$ and in terms of the Bethe roots $z_i = e^\gamma(1 - y_i)/(1 - xy_i)$ (the authors use the convention $p + q = 1$ and p and q are exchanged in comparison to our notations; the generalization to $\gamma \neq 0$ is straightforward). Defining the variable t in terms of the spectral parameter λ as

$$t = \frac{1 - e^{-\gamma\lambda}}{1 - xe^{-\gamma\lambda}} \quad (\text{B1})$$

we find that $\epsilon(\lambda)$ can be expressed in terms of $Q(t)$ and $R(t)$ as

$$\epsilon(\lambda) = e^{(L-n)\gamma} \left(\frac{1-t}{1-xt} \right)^L \frac{Q(xt)}{Q(t)} + x^n e^{-n\gamma} \frac{Q(t/x)}{Q(t)} = \frac{e^{-n\gamma} R(t)}{(1-xt)^L}, \quad (\text{B2})$$

In the same way that the largest eigenvalue of the deformed Markov matrix is well defined for $x = 1$, $\epsilon(\lambda)$ is not singular for $x = 1$. In particular, its successive derivatives in $\lambda = 0$ correspond to the largest eigenvalue of a well defined generalized hamiltonian and must be regular at $x = 1$. In terms of $\tilde{A}(y)$, the eigenvalue $\epsilon(\lambda)$ rewrites

$$\epsilon(\lambda) = \tilde{A}(y) + \lambda^L \frac{x^n e^{-2n\gamma}}{\tilde{A}(1+xy)}, \quad (\text{B3})$$

while the spectral parameter λ can be expressed in terms of y as

$$\lambda(y) = \frac{e^\gamma y}{1 + xy}. \quad (\text{B4})$$

Taking the successive derivatives of $\epsilon(\lambda(y))$ with respect to y , we have

$$\frac{d^k}{dy^k} \epsilon(\lambda(y)) = \sum_{j=1}^k \frac{(k-1)!}{(j-1)!} \binom{k}{j} \frac{(-x)^{k-j} e^{j\gamma}}{(1+xy)^{j+k}} \frac{d^j}{d\lambda^j} \epsilon(\lambda), \quad (\text{B5})$$

which can be checked by recursion on k . Inserting the expression (B3) for $\epsilon(\lambda(y))$ in the previous equation, we observe that the term with $\lambda^L / \tilde{A}(1+xy)$ does not contribute for $y = 0$ if $k < L$. We obtain for the k -th derivative of $\tilde{A}(y)$ at $y = 0$ ($k < L$)

$$\left(\frac{d^k}{dy^k} \tilde{A}(y) \right)_{|y=0} = \sum_{j=1}^k \frac{(k-1)!}{(j-1)!} \binom{k}{j} (-x)^{k-j} e^{j\gamma} \left(\frac{d^j}{d\lambda^j} \epsilon(\lambda) \right)_{|\lambda=0}. \quad (\text{B6})$$

This shows that $\tilde{A}(y)$ is regular in the vicinity of $x = 1$ like $\epsilon(\lambda)$, at least up to order $L - 1$ in y . To confirm this, we calculated $A(t)$ and $\tilde{A}(y)$ using equation (40) for all systems of size $L \leq 15$ and $n \leq L/2$ up to order 8 in γ . In all these cases, we verified that $\tilde{A}(y)$ is regular near $x = 1$ at all order in y . In the rest of this subsection, we write the complete expressions of $Q(t)$, $A(t)$ and $\tilde{A}(y)$ for systems with one particle on a lattice of size L . Again, we observe that the expansion of $A(t)$ in powers of γ is singular in $x = 1$ while the expansion of $\tilde{A}(y)$ is regular. For $n = 1$, $Q(t)$ is a polynomial of degree 1. It can be written as $Q(t) = t + Q(0)$, the constant $Q(0)$ being set using (26). We find

$$Q(t) = t - \frac{1 - e^\gamma}{x - e^\gamma}, \quad (\text{B7})$$

which does not depend on the size of the system: a particle only feels the finiteness of the lattice through its interactions with the other particles. The generating function of the cumulants of the current is given (27) by

$$E(\gamma, x) = (1 - e^{-\gamma})(e^\gamma - x). \quad (\text{B8})$$

Using (28), we find for $A(t)$

$$A(t) = \frac{x \left(\frac{t}{x} - \frac{1-e^{-\gamma}}{x-e^{-\gamma}} \right)}{e^{\gamma} \left(t - \frac{1-e^{-\gamma}}{x-e^{-\gamma}} \right)} = \frac{(1-x)t - x(1-t)(1-e^{-\gamma})}{(1-x)t - (1-t)(e^{\gamma} - 1)}. \quad (\text{B9})$$

The function $A(t)$ has one pole and one zero, which both tend to zero when $\gamma \rightarrow 0$. The beginning of its expansion near $\gamma = 0$ is

$$\begin{aligned} A(t) = 1 + & \left(-1 + \frac{1}{t} \right) \gamma + \left(\frac{1}{2} + \frac{x-3}{2(1-x)t} + \frac{1}{(1-x)t^2} \right) \gamma^2 \\ & + \left(-\frac{1}{6} + \frac{7-2x+x^2}{6(1-x)^2t} - \frac{2}{(1-x)^2t^2} + \frac{1}{(1-x)^2t^3} \right) \gamma^3 + \mathcal{O}(\gamma^4). \end{aligned} \quad (\text{B10})$$

This expansion is singular when $x \rightarrow 1$. Taking $t = 1 - (1-x)y$ in the expression for $A(t)$, a factor $1-x$ cancels between the numerator and the denominator, and we obtain for $\tilde{A}(y)$

$$\tilde{A}(y) = \frac{1 - (1-x)y - xy(1-e^{-\gamma})}{1 - (1-x)y - y(e^{\gamma} - 1)}. \quad (\text{B11})$$

Making the expansion in powers of γ and $1-x$, we find

$$\begin{aligned} \tilde{A}(y) = 1 + & ((1-x)y + (1-x)^2y^2 + (1-x)^3y^3 + \mathcal{O}((1-x)^4)) \gamma \\ & + \left(y + (1-x) \left(-\frac{y}{2} + 2y^2 \right) + (1-x)^2 \left(-\frac{y^2}{2} + 3y^3 \right) + (1-x)^3 \left(-\frac{y^3}{2} + 4y^4 \right) + \mathcal{O}((1-x)^4) \right) \gamma^2 \\ & + \left(y^2 + (1-x) \left(\frac{y}{6} + 3y^3 \right) + (1-x)^2 \left(\frac{y^2}{6} + 6y^4 \right) + (1-x)^3 \left(\frac{y^3}{6} + 10y^5 \right) + \mathcal{O}((1-x)^4) \right) \gamma^3 + \mathcal{O}(\gamma^4). \end{aligned} \quad (\text{B12})$$

This expression is indeed regular when $x \rightarrow 1$.

APPENDIX C: PROOF OF THE EXPRESSION (91) FOR $r(y)$

In this appendix, we prove that the expression (91) for $r(y)$ is the unique formal series in μ and ν which solves equations (88) and (90), and such that (69) holds. We first check that $r(y)$ given by (91) solves equation (88) by direct substitution. We have

$$y \cosh \frac{r(y)}{2y} = y \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j)!} \left(\frac{r(y)}{2y} \right)^{2j} = y \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j)!} \left(\frac{(\mu + (1-\rho)\nu)^2}{4} - \frac{(1-2\rho)\mu + (1-\rho)\nu}{2y} + \frac{1}{4y^2} \right)^j. \quad (\text{C1})$$

The cosh has eliminated the square root of $r(y)$. Taking now only the strictly positive powers in y , we obtain

$$\left[y \cosh \frac{r(y)}{2y} \right]_{(-)} = y \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j)!} \left(\frac{(\mu + (1-\rho)\nu)^2}{4} \right)^j = y \cosh \left(\frac{\mu + (1-\rho)\nu}{2} \right), \quad (\text{C2})$$

which is equation (88). For equation (90), we must as usual do the expansion of $r(y)$ in powers of μ and ν before the expansion in powers of $1/y$. Thus, we must write

$$\frac{r(y) - 1}{2y} = -\frac{(1-2\rho)\mu + (1-\rho)\nu}{2} + (\mathcal{O}(\mu^2) + \mathcal{O}(\nu^2) + \mathcal{O}(\mu)\mathcal{O}(\nu)) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} y P_{k,l}(y) \mu^k \nu^l, \quad (\text{C3})$$

where the $P_{k,l}(y)$ are polynomials in y . Taking the exponential of the last equation and expanding again in powers of μ and ν the term with the double sum over k and l , we obtain

$$e^{\frac{r(y)-1}{2y}} = e^{-\frac{(1-2\rho)\mu + (1-\rho)\nu}{2}} \left(1 + (\mathcal{O}(\mu^2) + \mathcal{O}(\nu^2) + \mathcal{O}(\mu)\mathcal{O}(\nu)) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} y P_{k,l}(y) \mu^k \nu^l \right). \quad (\text{C4})$$

Taking the nonpositive powers in y only eliminates the term with the double sum, leaving us with equation (90).

The unicity is obtained from the following argument: let us assume that there exists another solution $s(y)$ of the equations (88) and (90) such that $h_0(y) = \mathcal{O}(\mu)$. Because of (87), the condition $h_0(y) = \mathcal{O}(\mu)$ gives

$$s(y) = 1 + \mathcal{O}(\mu) + \mathcal{O}(\nu) , \quad (\text{C5})$$

while equation (88) gives

$$\left[y \cosh \frac{r(y)}{2y} \right]_{(-)} = \left[y \cosh \frac{s(y)}{2y} \right]_{(-)} \quad (\text{C6})$$

and equation (90) gives

$$\left[e^{\frac{r(y)-1}{2y}} \right]_{(+)} = \left[e^{\frac{s(y)-1}{2y}} \right]_{(+)} . \quad (\text{C7})$$

Expanding the last two equations at power k in μ and l in ν , we find by recurrence on k and l that $[r(y)]_{(-)} = [s(y)]_{(-)}$ and $[r(y)/y]_{(+)} = [s(y)/y]_{(+)}$ at all order in μ and ν . Thus, $r(y)$ and $s(y)$ are equal at each order in μ and ν which proves unicity.

APPENDIX D: CALCULATION OF $\beta(y)$

In this appendix, we simplify the expression (84) for $\beta(y)$, taking into account the value (87) of $h_0(y)$. Using the identity

$$\frac{y^2}{2} \left(\frac{d^2}{dy^2} \frac{1}{e^{\pm 1/y} - 1} \right) f(y) + y \left(\frac{d}{dy} \frac{1}{e^{\pm 1/y} - 1} \right) \frac{d}{dy} (yf(y)) = \frac{y}{2} \left(\frac{d^2}{dy^2} \frac{y}{e^{\pm 1/y} - 1} \right) f(y) + y^2 \left(\frac{d}{dy} \frac{1}{e^{\pm 1/y} - 1} \right) f'(y) \quad (\text{D1})$$

valid for an arbitrary function f , and the expressions (77) and (80) of $U^{(0)}(y)$, $U^{(10)}(y)$, $V^{(0)}(y)$ and $V^{(10)}(y)$, we rewrite (84) as

$$\begin{aligned} \beta(y) = & \frac{e^{-(1-\rho)\nu} \left(\nu y h'_0(y) - \frac{(1-\rho)\nu^2}{2} (1 + h_0(y)) \right)}{e^{-1/y} - 1} - \frac{\frac{(1-\rho)\nu^2}{2} e^{-\rho\mu} e^{-(1-\rho)\nu}}{e^{1/y} - 1} \\ & + \left(e^{-(1-\rho)\nu} - 1 \right) \frac{y}{2} \left(\frac{d^2}{dy^2} \frac{y}{e^{-1/y} - 1} \right) (1 + h_0(y)) + \left(e^{-(1-\rho)\nu} - 1 \right) y^2 \left(\frac{d}{dy} \frac{1}{e^{-1/y} - 1} \right) h'_0(y) \\ & - \frac{y}{2} \left(\frac{d^2}{dy^2} \frac{y}{e^{1/y} - 1} \right) \left(X[h_0(y)] - e^{-\rho\mu} e^{-(1-\rho)\nu} - e^{(1-\rho)\mu} \right) - y^2 \left(\frac{d}{dy} \frac{1}{e^{1/y} - 1} \right) \frac{d}{dy} X[h_0(y)] . \end{aligned} \quad (\text{D2})$$

We use the definition (79) of the operator X to express the equation (81) for $h_0(y)$ as

$$yX[h_0(y)] = y \left(e^{(1-\rho)\mu} + e^{-\rho\mu} e^{-(1-\rho)\nu} \right) + y \left(1 - e^{-(1-\rho)\nu} e^{1/y} \right) (1 + h_0(y)) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{y^0} \right) , \quad (\text{D3})$$

and its derivative

$$y^2 \frac{d}{dy} X[h_0(y)] = y^2 \frac{d}{dy} \left[\left(1 - e^{-(1-\rho)\nu} e^{1/y} \right) (1 + h_0(y)) \right] + \mathcal{O} \left(\frac{1}{y^0} \right) . \quad (\text{D4})$$

These last two equations allow us to eliminate all the X operators in the expression (D2) of $\beta(y)$. We obtain

$$\beta(y) = -\frac{(1-\rho)\nu^2}{2(e^{1/y} - 1)} e^{-\rho\mu} e^{-(1-\rho)\nu} - \frac{1 - (1-\rho)y^2\nu^2}{2y^2(e^{1/y} - 1)} e^{-(1-\rho)\nu} e^{1/y} (1 + h_0(y)) + \frac{1 - y\nu}{e^{1/y} - 1} e^{-(1-\rho)\nu} e^{1/y} h'_0(y) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{y^0} \right) . \quad (\text{D5})$$

From the explicit expressions (87) and (91) for $h_0(y)$ and $r(y)$, the function $h'_0(y)$ can be written in terms of $1 + h_0(y)$ as

$$h'_0(y) = \frac{1 + h_0(y)}{2y^2} \left(1 - \frac{1 - (1-2\rho)y\mu - (1-\rho)y\nu}{r(y)} \right) . \quad (\text{D6})$$

We insert this in equation (D5). It leads to

$$\beta(y) = -\frac{(1-\rho)\nu^2 e^{-\rho\mu} e^{-(1-\rho)\nu}}{2(e^{1/y} - 1)} - \left(\frac{\nu(1-(1-\rho)y\nu)}{2y} + \frac{(1-y\nu)(1-(1-2\rho)y\mu - (1-\rho)y\nu)}{2y^2 r(y)} \right) \frac{e^{-(1-\rho)\nu} e^{1/y}}{e^{1/y} - 1} (1 + h_0(y)) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{y^0}\right). \quad (\text{D7})$$

The first term of $\beta(y)$ in the last equation is equal to $-y(1-\rho)\nu^2 e^{-\rho\mu} e^{-(1-\rho)\nu}/2 + \mathcal{O}(1/y^0)$. However, it is better at this point to write all the terms of $\beta(y)$ with $1/\sinh(1/2y)$ in factor. Noting that

$$\frac{1}{e^{1/y} - 1} = \frac{e^{-\frac{1}{2y}}}{2 \sinh\left(\frac{1}{2y}\right)} = \frac{1}{2 \sinh\left(\frac{1}{2y}\right)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{y^0}\right), \quad (\text{D8})$$

and using the expression (87) for $1 + h_0(y)$ in terms of $r(y)$, we finally obtain the following expression for $\beta(y)$

$$\beta(y) = -\frac{(1-\rho)\nu^2 e^{-\rho\mu} e^{-(1-\rho)\nu}}{4 \sinh\left(\frac{1}{2y}\right)} - \left(\frac{\nu(1-(1-\rho)y\nu)}{4y} + \frac{(1-y\nu)(1-(1-2\rho)y\mu - (1-\rho)y\nu)}{4y^2 r(y)} \right) \frac{e^{\frac{(1-2\rho)\mu - (1-\rho)\nu}{2}} e^{\frac{r(y)}{2y}}}{\sinh\left(\frac{1}{2y}\right)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{y^0}\right). \quad (\text{D9})$$

APPENDIX E: CALCULATION OF $\tilde{E}_2(\mu, \nu)$

In this appendix, we calculate the next-to-leading order of the generating function of the cumulants in the weakly asymmetric scaling, starting from (105). Using (94) and (96), we have

$$\tilde{E}_2(\mu, \nu) = \left[-\frac{(1-\rho)\nu^2 e^{-\frac{\mu+(1-\rho)\nu}{2}} r(y)}{4y \sinh\left(\frac{r(y)}{2y}\right)} + \frac{\nu(1-(1-\rho)y\nu)r(y)}{2y^2 \left(e^{-\frac{r(y)}{y}} - 1\right)} + \frac{(1-y\nu)(1-(1-2\rho)y\mu - (1-\rho)y\nu)}{2y^3 \left(e^{-\frac{r(y)}{y}} - 1\right)} \right]_{(1/y)^0}. \quad (\text{E1})$$

The previous expression for $\tilde{E}_2(\mu, \nu)$ has three terms, that we will call respectively $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ and $\mathcal{C}$. We begin with $\mathcal{A}$. Using the expansion

$$\frac{z}{\sinh z} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2(1-2^{2j-1})B_{2j}}{(2j)!} z^{2j} \quad (\text{E2})$$

and the fact that

$$\left(\frac{r(y)}{y}\right)^2 = (\mu + (1-\rho)\nu)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{y}\right), \quad (\text{E3})$$

we find

$$\mathcal{A} = -\frac{(1-\rho)\nu^2(\mu + (1-\rho)\nu)}{2(e^{\mu+(1-\rho)\nu} - 1)}. \quad (\text{E4})$$

We now calculate $\mathcal{B}$. Using the expansion (56) and recalling that all the odd B_j are equal to 0 except $B_1 = -1/2$, we see that

$$\mathcal{B} = \frac{(1-\rho)\nu^2}{2} \left(\frac{\mu + (1-\rho)\nu}{e^{\mu+(1-\rho)\nu} - 1} + \frac{\mu + (1-\rho)\nu}{2} \right) - \left[\frac{\nu(1-(1-\rho)y\nu)r(y)}{4y^2} \right]_{(1/y)^0}. \quad (\text{E5})$$

We used here (E3) once again. We need the expansion of $r(y)$ when $y \rightarrow \infty$ (again, after the expansion near $\mu = 0$ and $\nu = 0$). At each order in μ and ν , $r(y)$ is a polynomial in y . We have

$$r(y) = 1 - ((1-2\rho)\mu + (1-\rho)\nu)y + 2\rho(1-\rho)(\mu^2 + \mu\nu)y^2 + \mathcal{O}(y^3), \quad (\text{E6})$$

which is to be understood after the expansion in powers of μ and ν as usual. It finally gives

$$\mathcal{B} = \frac{(1-\rho)\nu^2(\mu + (1-\rho)\nu)}{2(e^{\mu+(1-\rho)\nu} - 1)} - \frac{\rho(1-\rho)\mu^2\nu}{2}. \quad (\text{E7})$$

Thus, $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ only contribute $-\rho(1-\rho)\mu^2\nu/2$ to the eigenvalue. We will now see that $\mathcal{C}$ has a non-trivial contribution. Defining

$$f(y) = \frac{1}{e^{-\frac{r(y)}{y}} - 1}, \quad (\text{E8})$$

the term $\mathcal{C}$ of equation (E1) can be written

$$\mathcal{C} = \frac{\nu((1-2\rho)\mu + (1-\rho)\nu)}{2} [f(y)]_{(y^1)} - \frac{(1-2\rho)\mu + \nu + (1-\rho)\nu}{2} [f(y)]_{(y^2)} + \frac{1}{2} [f(y)]_{(y^3)}. \quad (\text{E9})$$

Expanding $f(y)$ in powers of $r(y)$ with (56), and expanding the powers of $r(y)$ in powers of y , we obtain

$$f(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \binom{k - \frac{1}{2}}{j} \binom{j}{l} (-1)^{k+l-1} 2^l [(1-2\rho)\mu + (1-\rho)\nu]^l [\mu + (1-\rho)\nu]^{2j-2l} y^{2j+1-k-l}. \quad (\text{E10})$$

We take the term y^r in the previous equation, setting l to $2j+1-k-r$ provided that it is nonnegative, and we move out of the sum over k the term $k=1$ which is the only odd k such that $B_k \neq 0$. We have

$$\begin{aligned} [f(y)]_{(y^r)} = & -\frac{\delta_{r,0}}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{1}_{j \geq k + \frac{r-1}{2}} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \binom{k - \frac{1}{2}}{j} \binom{j}{2j+1-2k-r} \\ & \times (-1)^r 2^{2j+1-2k-r} [(1-2\rho)\mu + (1-\rho)\nu]^{2j+1-2k-r} [\mu + (1-\rho)\nu]^{4k+2r-2j-2}. \end{aligned} \quad (\text{E11})$$

For $r \geq 0$, $j \geq k + \frac{r-1}{2}$ implies $j \geq k$ (j integer). Thus

$$\binom{k - \frac{1}{2}}{j} = \frac{(-1)^{j+k} (2k)! (2j-2k)!}{2^{2j} j! k! (j-k)!}. \quad (\text{E12})$$

Replacing j by $j+k$, we obtain

$$\begin{aligned} [f(y)]_{(y^r)} = & -\frac{\delta_{r,0}}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=\lceil \frac{r-1}{2} \rceil}^{\infty} \frac{B_{2k}}{k!k!} \frac{(-1)^{j+r}}{2^{2k+r-1}} \frac{(2j)!}{(2j+1-r)!} \frac{(k-j)!}{(k+r-j-1)!} \binom{k}{j} \\ & \times [(1-2\rho)\mu + (1-\rho)\nu]^{2j+1-r} [\mu + (1-\rho)\nu]^{2k+2r-2j-2}, \end{aligned} \quad (\text{E13})$$

where $\lceil (r-1)/2 \rceil$ is the smallest integer larger than $(r-1)/2$. For $r=1$, the previous formula gives, resumming the sum over j

$$[f(y)]_{(y^1)} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{2k}}{k!k!} \rho^k (1-\rho)^k (\mu^2 + \mu\nu)^k. \quad (\text{E14})$$

For $r=2$, we obtain

$$[f(y)]_{(y^2)} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{2k}}{k!k!} \rho^k (1-\rho)^k (\mu^2 + \mu\nu)^k [(1-2\rho)\mu + (1-\rho)\nu], \quad (\text{E15})$$

and for $r=3$, we have

$$[f(y)]_{(y^3)} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{2k}}{k!k!} \rho^k (1-\rho)^k (\mu^2 + \mu\nu)^k [(1-2\rho)\mu + (1-\rho)\nu]^2 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{2k}}{k!(k+1)!} \rho^{k+1} (1-\rho)^{k+1} (\mu^2 + \mu\nu)^{k+1}. \quad (\text{E16})$$

Inserting the last three equations into the expression (E9) for $\mathcal{C}$, we see that everything cancels except the second term with $r=3$. Thus, we have

$$\mathcal{C} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k-2}}{k!(k-1)!} \rho^k (1-\rho)^k (\mu^2 + \mu\nu)^k. \quad (\text{E17})$$

Gathering everything, we finally obtain

$$\tilde{E}_2(\mu, \nu) = -\frac{\rho(1-\rho)\mu^2\nu}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k-2}}{k!(k-1)!} \rho^k (1-\rho)^k (\mu^2 + \mu\nu)^k. \quad (\text{E18})$$

This concludes the proof of the next-to-leading order of equation (9).

-
- [1] F. Spitzer. Interaction of Markov processes. *Adv. Math.*, 5:246–290, 1970.
 - [2] T.M. Liggett. *Interacting Particle Systems*. New York: Springer, 1985.
 - [3] P.A. Ferrari. Exclusion processes and applications (lecture notes of a course given at Institut Henri Poincaré). <http://www.ime.usp.br/~pablo/papers/ihp2008/ihp2008.pdf>, 2008.
 - [4] S. Katz, J.L. Lebowitz, and H. Spohn. Nonequilibrium steady states of stochastic lattice gas models of fast ionic conductors. *J. Stat. Phys.*, 34:497–537, 1984.
 - [5] H. Spohn. *Large Scale Dynamics of Interacting Particles*. New York: Springer, 1991.
 - [6] T. Halpin-Healy and Y.-C. Zhang. Kinetic roughening phenomena, stochastic growth, directed polymers and all that. Aspects of multidisciplinary statistical mechanics. *Phys. Rep.*, 254:215–414, 1995.
 - [7] B. Schmittmann and R.K.P. Zia. Statistical mechanics of driven diffusive systems. In *Phase Transitions and Critical Phenomena*, volume 17. London: Academic, 1995.
 - [8] B. Derrida. An exactly soluble non-equilibrium system: The asymmetric simple exclusion process. *Phys. Rep.*, 301:65–83, 1998.
 - [9] G.M. Schütz. Exactly solvable models for many-body systems far from equilibrium. In *Phase Transitions and Critical Phenomena*, volume 19. San Diego: Academic, 2001.
 - [10] O. Golinelli and K. Mallick. The asymmetric simple exclusion process: an integrable model for non-equilibrium statistical mechanics. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 39:12679–12705, 2006.
 - [11] B. Derrida. Non-equilibrium steady states: fluctuations and large deviations of the density and of the current. *J. Stat. Mech.*, 2007:P07023, 2007.
 - [12] S.F. Edwards and D.R. Wilkinson. The surface statistics of a granular aggregate. *Proc. R. Soc. A*, 381:17–31, 1982.
 - [13] M. Kardar, G. Parisi, and Y.-C. Zhang. Dynamic scaling of growing interfaces. *Phys. Rev. Lett.*, 56:889–892, 1986.
 - [14] M. Evans and T. Hanney. Nonequilibrium statistical mechanics of the zero-range process and related models. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 38:R195–R240, 2005.
 - [15] J. Krug. Origins of scale invariance in growth processes. *Adv. Phys.*, 46:139–282, 1997.
 - [16] L.-H. Gwa and H. Spohn. Six-vertex model, roughened surfaces, and an asymmetric spin Hamiltonian. *Phys. Rev. Lett.*, 68:725–728, 1992.
 - [17] D. Kandel, E. Domany, and B. Nienhuis. A six-vertex model as a diffusion problem: derivation of correlation functions. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 23:L755–L762, 1990.
 - [18] F.H.L. Essler and V. Rittenberg. Representations of the quadratic algebra and partially asymmetric diffusion with open boundaries. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 29:3375–3407, 1996.
 - [19] R. Lipowsky, S. Klumpp, and T.M. Nieuwenhuizen. Random walks of cytoskeletal motors in open and closed compartments. *Phys. Rev. Lett.*, 87:108101, 2001.
 - [20] P.M. Richards. Theory of one-dimensional hopping conductivity and diffusion. *Phys. Rev. B*, 16:1393–1409, 1977.
 - [21] D. Chowdhury, L. Santen, and A. Schadschneider. Statistical physics of vehicular traffic and some related systems. *Phys. Rep.*, 329:199–329, 2000.
 - [22] B. Derrida, M.R. Evans, V. Hakim, and V. Pasquier. Exact solution of a one-dimensional asymmetric exclusion model using a matrix formulation. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 26:1493–1517, 1993.
 - [23] R.A. Blythe and M. Evans. Nonequilibrium steady states of matrix-product form: a solver’s guide. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 40:R333–R441, 2007.
 - [24] M. Prähofer and H. Spohn. Current fluctuations for the totally asymmetric simple exclusion process. In *In and Out of Equilibrium: Probability with a Physics Flavor*, volume 51 of *Progress in Probability*, pages 185–204. Boston: Birkhäuser, 2002.
 - [25] H. Spohn. Exact solutions for KPZ-type growth processes, random matrices, and equilibrium shapes of crystals. *Physica A*, 369:71–99, 2006.
 - [26] T. Sasamoto. Fluctuations of the one-dimensional asymmetric exclusion process using random matrix techniques. *J. Stat. Mech.*, 2007:P07007, 2007.
 - [27] D. Dhar. An exactly solved model for interfacial growth. *Phase Transitions*, 9:51, 1987.
 - [28] J. de Gier and F.H.L. Essler. Exact spectral gaps of the asymmetric exclusion process with open boundaries. *Phys. Rev. Lett.*, 95:240601, 2005.
 - [29] J. de Gier and F.H.L. Essler. Exact spectral gaps of the asymmetric exclusion process with open boundaries. *J. Stat. Mech.*, 2006:P12011, 2006.
 - [30] D. Kim. Bethe Ansatz solution for crossover scaling functions of the asymmetric XXZ chain and the Kardar-Parisi-Zhang-type growth model. *Phys. Rev. E*, 52:3512–3524, 1995.

- [30] O. Golinelli and K. Mallick. Bethe ansatz calculation of the spectral gap of the asymmetric exclusion process. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 37:3321–3331, 2004.
- O. Golinelli and K. Mallick. Spectral gap of the totally asymmetric exclusion process at arbitrary filling. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 38:1419–1425, 2005.
- [31] J. de Gier and F.H.L. Essler. Slowest relaxation mode of the partially asymmetric exclusion process with open boundaries. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 41:485002, 2008.
- [32] B. Derrida and J.L. Lebowitz. Exact large deviation function in the asymmetric exclusion process. *Phys. Rev. Lett.*, 80:209–213, 1998.
- [33] B. Derrida and C. Appert. Universal large-deviation function of the Kardar-Parisi-Zhang equation in one dimension. *J. Stat. Phys.*, 94:1–30, 1999.
- [34] D.S. Lee and D. Kim. Large deviation function of the partially asymmetric exclusion process. *Phys. Rev. E*, 59:6476–6482, 1999.
- [35] B. Derrida and M.R. Evans. Bethe Ansatz solution for a defect particle in the asymmetric exclusion process. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 32:4833–4850, 1999.
- [36] C. Appert-Rolland, B. Derrida, V. Lecomte, and F. van Wijland. Universal cumulants of the current in diffusive systems on a ring. *Phys. Rev. E*, 78:021122, 2008.
- [37] S. Prolhac and K. Mallick. Current fluctuations in the exclusion process and Bethe Ansatz. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 41:175002, 2008.
- [38] S. Prolhac. Fluctuations and skewness of the current in the partially asymmetric exclusion process. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 41:365003, 2008.
- [39] L. Bertini, A. De Sole, D. Gabrielli, G. Jona-Lasinio, and C. Landim. Fluctuations in stationary nonequilibrium states of irreversible processes. *Phys. Rev. Lett.*, 87:040601, 2001.
- [40] L. Bertini, A. De Sole, D. Gabrielli, G. Jona-Lasinio, and C. Landim. Macroscopic fluctuation theory for stationary non-equilibrium states. *J. Stat. Phys.*, 107:635–675, 2004.
- [41] C. Flindt, C. Fricke, F. Hohls, T. Novotny, K. Netocny, T. Brandes and R.J. Haug. Universal oscillations in counting statistics. preprint arXiv:0901.0832.
- [42] J.L. Lebowitz and H. Spohn. A Gallavotti-Cohen-type symmetry in the large deviation functional for stochastic dynamics. *J. Stat. Phys.*, 95:333–365, 1999.
- [43] B. Derrida and K. Mallick. Exact diffusion constant for the one dimensional partially asymmetric exclusion model. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 30:1031–1046, 1997.
- [44] T. Bodineau and B. Derrida. Distribution of current in non-equilibrium diffusive systems and phase transitions. *Phys. Rev. E*, 72:066110, 2005.
- [45] F.C. Alcaraz and R.Z. Bariev. Exact solution of asymmetric diffusion with N classes of particles of arbitrary size and hierarchical order. *Braz. J. Phys.*, 30:655–666, 2000.
- [46] O. Babelon. A short introduction to classical and quantum integrable systems (lecture notes of a course given at IPhT, CEA Saclay). <http://www.lpthe.jussieu.fr/~babelon/saclay2007.pdf>, 2007.
- [47] O. Golinelli and K. Mallick. Family of commuting operators for the totally asymmetric exclusion process. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 40:5795–5812, 2007.
- O. Golinelli and K. Mallick. Connected operators for the totally asymmetric exclusion process. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 40:13231–13236, 2007.

A combinatorial solution for the current fluctuations in the exclusion process

Sylvain Prolhac*

*Institut de Physique Théorique,
CEA, IPhT, F-91191 Gif-sur-Yvette, France
CNRS, URA 2306, F-91191 Gif-sur-Yvette, France*

(Dated: July 31, 2009)

We conjecture an exact expression for the large deviation function of the stationary state current in the partially asymmetric exclusion process with periodic boundary conditions. This expression is checked for small systems using functional Bethe Ansatz. It generalizes a previous result by Derrida and Lebowitz for the totally asymmetric exclusion process, and gives the known values for the three first cumulants of the current in the partially asymmetric model. Our result is written in terms of tree structures and provides a new example of a link between integrable models and combinatorics.

PACS numbers: 05-40.-a; 05-60.-k

Keywords: ASEP, functional Bethe Ansatz, large deviations, trees

I. INTRODUCTION

The asymmetric simple exclusion process (ASEP) is one of the simplest interacting particles systems featuring an out of equilibrium stationary state. It has been studied much in the past [1, 2, 3], in particular because it belongs to the class of exactly solvable models. A quantity of interest is the macroscopic stationary state current and its fluctuations, since the presence of this current is the signature that the system is out of equilibrium. Various boundary conditions have been used in the study of the one-dimensional ASEP: open boundaries connecting the system to reservoirs of particles [4, 5, 6], infinite line $\mathbb{Z}$ [7, 8, 9], and periodic boundary conditions [10, 11, 12], which is the case studied here.

Using the Bethe Ansatz, all the cumulants of the current were calculated [13] in the special case of the totally asymmetric simple exclusion process (TASEP), for which the particles hop in only one direction. For an arbitrary asymmetry between the hopping rates, finite size expressions for the three first cumulants were derived [14, 15], and all the cumulants were obtained [16] in the large system size limit with non vanishing asymmetry.

In the present work, we conjecture an expression (27) generalizing these results: it provides an exact expression for all the cumulants of the stationary state current in the ASEP with partial asymmetry for finite systems. This expression gives the TASEP result [13] and the limit obtained in [16]. It also allows the study of a vanishing asymmetry probing the transition between the equilibrium system with symmetric rates and the totally asymmetric system for which detailed balance is maximally broken. The exact formulas obtained previously for the three first cumulants in the partially asymmetric model are also recovered. Our conjecture is checked for small systems using functional Bethe Ansatz.

We consider the asymmetric simple exclusion process on a ring of size L with n particles hopping locally both one site forward (with rate p) and backward (with rate $q = xp$). By the exclusion rule, the particles are only allowed to hop if the destination site is empty. The integrated current Y_t is defined as the total distance covered by all the particles between time 0 and time t . When t becomes large, the fluctuations of Y_t are given by [13, 14]

$$\langle e^{\gamma Y_t} \rangle \sim e^{E(\gamma)t} . \quad (1)$$

The formal series $E(\gamma)$ is the exponential generating function of the cumulants of the current:

$$E(\gamma) = J\gamma + \frac{D}{2!}\gamma^2 + \frac{E_3}{3!}\gamma^3 + \dots , \quad (2)$$

where J is the mean value of the current, D the diffusion constant and E_3 the third cumulant of the current. The generating function $E(\gamma)$, which is related to the large deviation function of the current by a Legendre transform, is also the eigenvalue with largest real part of a deformation $M(\gamma)$ of the Markov matrix of the system [13, 14]. The matrix $M(\gamma)$ is similar to the hamiltonian of a XXZ spin chain with twisted boundary conditions [10], and can thus

*sylvain.prolhac@cea.fr

be diagonalized using the Bethe Ansatz. The generating function of the cumulants of the current is given by

$$\frac{E(\gamma)}{p} = (1-x) \frac{d}{dt} \log \left(\frac{Q(t)}{x^n Q(t/x)} \right) \Big|_{t=1}, \quad (3)$$

where the polynomial Q of degree n , along with a polynomial R of degree L , is a solution of the functional Bethe equation [17]

$$Q(t)R(t) = e^{L\gamma}(1-t)^L Q(xt) + (1-xt)^L x^n Q(t/x). \quad (4)$$

This equation has several solutions, corresponding to different eigenstates of the matrix $M(\gamma)$. The solution of equation (4) corresponding to the largest eigenvalue of $M(\gamma)$ verifies [14]

$$Q(t) = t^n + \mathcal{O}(\gamma), \quad (5)$$

and

$$e^{n\gamma} Q(1) = x^n Q(1/x). \quad (6)$$

Using (5) and (6), the functional Bethe equation (4) can be solved perturbatively near $\gamma = 0$ [15].

II. TREE STRUCTURES

We now introduce a few combinatorial structures in terms of which the generating function of the cumulants of the current $E(\gamma)$ will be expressed. We call “composite node” a (finite) set containing a strictly positive odd number of “elementary nodes”. The size $|c|$ of a composite node c is defined to be the number of elementary nodes it contains. In the following, two different sets of composite nodes will be considered: the set $\mathcal{C}$ of composite nodes without internal structure and the set $\tilde{\mathcal{C}}$ of composite nodes with an internal unrooted tree structure [18] (or acyclic graph structure) linking all the elementary nodes it contains. The elementary nodes and the composite nodes of size 1 will both be represented by a dot ($\bullet$), the composite nodes elements of $\mathcal{C} \setminus \{\bullet\}$ by their size surrounded by a circle (e.g. $\textcircled{3}$, $\textcircled{5}$, ...), and the composite nodes elements of $\tilde{\mathcal{C}} \setminus \{\bullet\}$ by the tree structure on the elementary nodes they contain surrounded by a closed line (e.g. $\textcircled{\bullet-\bullet-\bullet}$).

We can now build trees whose nodes will be composite nodes. We call $\mathcal{G}$ the set of unrooted trees with nodes elements of $\mathcal{C}$ and $\tilde{\mathcal{G}}$ the set of rooted trees with nodes elements of $\tilde{\mathcal{C}}$ and oriented edges labeled by $i_1, i_2, \dots$. One arbitrary elementary node of $g \in \tilde{\mathcal{G}}$, chosen as the root of g , will be represented by a small circle ($\circ$). The edges between composite nodes are identified to edges between elementary nodes belonging to different composite nodes. These edges will be called “outer edges”, by opposition to the “inner edges” linking elementary nodes contained in the same composite node. For $g \in \mathcal{G}$ or $g \in \tilde{\mathcal{G}}$, we define the size $|g|$ of g as the sum of the sizes of the composite nodes of g . We call $\mathcal{G}_r$ (respectively $\tilde{\mathcal{G}}_r$) the subset of $\mathcal{G}$ (resp. $\tilde{\mathcal{G}}$) consisting of trees of size r . The first sets $\mathcal{G}_r$ and $\tilde{\mathcal{G}}_r$ are drawn in fig.1 and fig.2.

For $g \in \mathcal{G}$, we call $c(g)$ the set of the composite nodes of g . For a composite node $c \in c(g)$, we define v_c as the

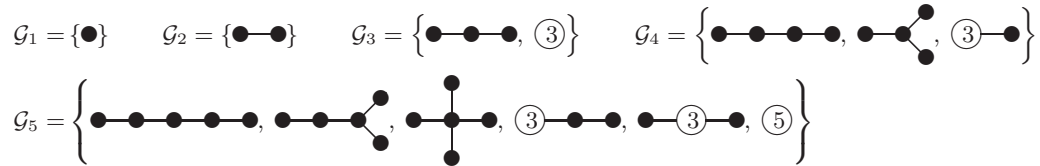


FIG. 1: The five first $\mathcal{G}_r$ sets.

number of composite nodes in g which are neighbors of c . For $g \in \tilde{\mathcal{G}}$, $e(g)$ will be the set of the elementary nodes of g and $o(g)$ the set of the outer edges of g . For an outer edge $o \in o(g)$, we call $\ell(o)$ the label of o and $m(o)$ the sum of the labels of g which label both the inner and outer edges of the subtree of g beginning at o , that is, the sum of all the labels that can be attained from o by moving on the edges of g away from the root of g . Finally, for an elementary node e of $g \in \tilde{\mathcal{G}}$, we will also use the notation $\ell(e)$ for the sum of the labels of the edges pointing to e minus the sum of the labels of the edges leaving e .

$$\tilde{\mathcal{G}}_1 = \{\circ\} \quad \tilde{\mathcal{G}}_2 = \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \bullet \end{array} \right\} \quad \tilde{\mathcal{G}}_3 = \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \bullet \end{array}, \dots \right\} \quad \tilde{\mathcal{G}}_4 = \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \bullet \end{array}, \dots \right\}$$

FIG. 2: The four first $\tilde{\mathcal{G}}_r$ sets. The ... represent trees obtained from the trees drawn by changing the root, the direction of the arrows on the edges and doing any permutation of the labels of the edges.

For $g \in \tilde{\mathcal{G}}$, we define a tree $g^* \in \tilde{\mathcal{G}}$ as follows: we attach all the elementary nodes of g to the root such that all the edges point away from the root and keep their labels. Then, we set the composite nodes such that all the composite nodes are of size 1 except the one containing the root, and such that the labels of the outer edges of g^* are the same as the labels of the outer edges of g . For example, we have

$$g = \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \bullet \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \bullet \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \bullet \end{array} \Rightarrow g^* = \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \bullet \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \bullet \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \bullet \end{array} . \quad (7)$$

For these trees, the values $\ell(e)$ for the elements e of $e(g)$ and $e(g^*)$ are respectively

$$g : i_3, i_1 - i_3, -i_1 - i_2, i_2 - i_4, i_4 + i_5 - i_6, -i_5 - i_7, i_7, i_6 + i_8, -i_8 . \quad (8)$$

$$g^* : i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7, i_8, -i_1 - i_2 - i_3 - i_4 - i_5 - i_6 - i_7 - i_8 , \quad (9)$$

while the values $m(o)$ for the elements o of $o(g)$ and $o(g^*)$ are given by

$$g : i_3, i_7, i_8, i_4 + i_5 + i_6 + i_7 + i_8 . \quad (10)$$

$$g^* : i_3, i_4, i_7, i_8 . \quad (11)$$

We will now define some functions acting on $\mathcal{G}$ and $\tilde{\mathcal{G}}$. For $g \in \tilde{\mathcal{G}}$ and two arbitrary functions φ and η , we define

$$U_{\varphi, \eta}(g) = \left(\sum_{e \in e(g)} \varphi(\ell(e)) \right) \left(\prod_{e \in e(g)} \eta(\ell(e)) \right) . \quad (12)$$

It can be shown that $U_{\varphi, \eta}(g)$ does not depend on the position of the root or on the composite nodes of g , but only on the tree structure of the elementary nodes of g . For an arbitrary even function ξ , we also define

$$V_{\xi}(g) = \prod_{o \in o(g)} \xi(m(o)) . \quad (13)$$

Unlike $U_{\varphi, \eta}(g)$, $V_{\xi}(g)$ does depend on the position of the root and of the composite nodes in g , but not on the direction of the edges and on the internal tree structure of the composite nodes. We choose an arbitrary application θ from $\mathcal{G}$ to $\tilde{\mathcal{G}}$ preserving the tree structure on the composite nodes, which roots the trees, adds an internal tree structure on the composite nodes, labels the edges, and adds arrows to them. Then, we define for $g \in \mathcal{G}_r$

$$W_{\varphi}^{\eta, \xi}(g) = \sum_{i_1 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{i_{r-1} \in \mathbb{Z}} U_{\varphi, \eta}(\theta(g)) V_{\xi}(\theta(g)^*) . \quad (14)$$

For $r = 1$, we take $W_{\varphi}^{\eta, \xi}(\bullet) = \varphi(0)\eta(0)$. It can be proved that $W_{\varphi}^{\eta, \xi}$ does not depend on the choice of the function θ . Performing some changes of variables on the summation indices $i_1, \dots, i_{r-1}$ in equation (14), an equivalent expression for $W_{\varphi}^{\eta, \xi}(g)$ can be written:

$$W_{\varphi}^{\eta, \xi}(g) = \sum_{i_1 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{i_{r-1} \in \mathbb{Z}} U_{\varphi, \eta}(\theta(g)^*) V_{\xi}(\theta(g)) . \quad (15)$$

For a tree $g \in \mathcal{G}$, we define a symmetry factor $S_t(g)$ associated to g by

$$S_t(g) = P_t(g) \prod_{c \in c(g)} (-1)^{\frac{|c|-1}{2}} \frac{|c|^3 |c|!}{|c|^{v_c} (|c|!!)^2}, \quad (16)$$

where $P_t(g)$ is equal to the number of permutations of the composite nodes of g which leave it invariant. Table I gives a few examples of symmetry factors. These symmetry factors can be used to define a suitable generating function for the trees of $\mathcal{G}$. From a direct calculation up to $r = 16$, we observed that the following generating function can be expressed in a simple closed form:

$$Z_r(z) = \sum_{g \in \mathcal{G}_r} \frac{z^{|c(g)|}}{S_t(g)} = \frac{z}{r \times r!} \prod_{j=1}^{r-1} [r(z+1) - 2j], \quad (17)$$

where $|c(g)|$ is the number of composite nodes in g .

$g \in \mathcal{G}$							
$S_t(g)$	1	2	2	-18	200/3	8	-12
$P_t(g)$	1	2	2	1	1	8	2

TABLE I: Examples of symmetry factors of trees $g \in \mathcal{G}$

III. PARAMETRIC EXPRESSION FOR THE CURRENT FLUCTUATIONS

We now state our conjecture about the current fluctuations for the ASEP in terms of the trees and forests that we introduced before. We define the function φ_l by

$$\varphi_l(z) = \frac{(n+z)}{(L-l)} \binom{L-n-z}{l} \bigg/ \binom{L}{l}, \quad (18)$$

the function η by

$$\eta(z) = \binom{L}{n+z} \bigg/ \binom{L}{n}, \quad (19)$$

and the (even) function ξ_x by

$$\xi_x(z) = \begin{cases} 1 & \text{if } z = 0 \\ \frac{1+x^{|z|}}{1-x^{|z|}} & \text{if } z \neq 0 \end{cases}. \quad (20)$$

The value $\xi_x(0)$ was set to 1, but we emphasize that an arbitrary value could have been taken by modifying the following accordingly. With these definitions, the polynomial Q solution of (4–6) is then given by

$$\ln \left[\frac{Q(t)}{x^n Q(t/x)} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B^k (1-t)^l}{2^{k-1}} \sum_{g \in \mathcal{G}_k} \frac{W_{\varphi_l}^{\eta, \xi_x}(g)}{S_t(g)}, \quad (21)$$

with

$$B = (-1)^{n-1} \binom{L}{n} (e^{L\gamma} - x^n) Q(0). \quad (22)$$

Using the method developed in [15] to solve the functional Bethe equation (4) perturbatively up to order 5 in γ and $1-t$, we checked equations (21) and (22) at this order for all the systems up to size 12. Making the analytic continuation for complex L in equation (21), the apparent divergences from φ_l when L takes an integer value such

that $L \leq l$ vanish since $\varphi_l(z)$ is always multiplied by $\eta(z)$. Taking $t = 1$ in (21), the linear term of $\varphi_0(z) = (n+z)/L$ does not contribute to $W_{\varphi_0}^{\eta,\xi}$, and we obtain from (6)

$$\gamma = -\frac{2}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{B}{2}\right)^k \sum_{g \in \mathcal{G}_k} \frac{W_1^{\eta,\xi_x}(g)}{S_t(g)}. \quad (23)$$

Taking the derivative at $t = 1$ of equation (21), we obtain from (3)

$$\frac{E(\gamma) - J\gamma}{p} = \frac{2(1-x)}{L(L-1)} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{B}{2}\right)^k \sum_{g \in \mathcal{G}_k} \frac{W_{z^2}^{\eta,\xi_x}(g)}{S_t(g)}, \quad (24)$$

where the mean value of the current J is given by $J/p = (1-x)n(L-n)/(L-1)$. We used again the fact that the linear term of φ_1 cancels in $W_{\varphi_1}^{\eta,\xi}$, while the constant term gives (23).

Equations (23) and (24) give a parametric expression for $E(\gamma)$ similar to the one obtained for TASEP in [13]. In the TASEP limit $x = 0$, $\xi_x(z) = 1$ for all z . Thus, from (15), neither $W_1^{\eta,1}(g)$ nor $W_{z^2}^{\eta,1}(g)$ depend on $g \in \mathcal{G}_k$ anymore. They are equal to

$$\begin{aligned} W_1^{\eta,1}(g)|_{x=0} &= k \binom{kL}{kn} \bigg/ \binom{L}{n}^k \\ W_{z^2}^{\eta,1}(g)|_{x=0} &= \frac{k(k-1)n(L-n)}{kL-1} \binom{kL}{kn} \bigg/ \binom{L}{n}^k. \end{aligned} \quad (25)$$

From the generating function of the trees $Z_k(z)$ (17) at $z = 1$, we recover the known parametric expression [13] for $E(\gamma)$ in the TASEP limit. We also recover the large L limit with non vanishing asymmetry considered in [16].

IV. EXPLICIT EXPRESSION FOR THE CUMULANTS OF THE CURRENT

The parametric expression (23-24) for the generating function $E(\gamma)$ does not give directly access to the cumulants of the current. To obtain the k -th cumulant, one has to eliminate the parameter B between equations (23) and (24). This can in fact be done systematically at all orders in γ . For this purpose, we have to introduce other combinatorial objects: forests, that is sets of trees.

We call $\mathcal{H}$ the set of forests with trees elements of $\mathcal{G}$ of size strictly larger than 1. We call $\tilde{\mathcal{H}}$ the set of forests with trees elements of $\tilde{\mathcal{G}}$ of size strictly larger than 1 and with edges relabeled by $i_1, i_2, \dots$ such that all the labels are different. The size $|h|$ of a forest h is defined to be the sum of the sizes of the trees it contains. The number of trees in a forest h will be denoted by $\bar{h}$. We call $\mathcal{H}_r$ (respectively $\tilde{\mathcal{H}}_r$) the subset of $\mathcal{H}$ (resp. $\tilde{\mathcal{H}}$) with forests h such that $|h| - \bar{h} = r$. For $h \in \tilde{\mathcal{H}}_r$, the number of edges in h is equal to r .

The various functions defined on $\mathcal{G}$ and $\tilde{\mathcal{G}}$ (e.g. the sets of composite nodes c , elementary nodes e , outer edges o , the application $\theta, \dots$) extend naturally to $\mathcal{H}$ and $\tilde{\mathcal{H}}$. The operator $*$ is defined for a forest $h \in \tilde{\mathcal{H}}$ as $h^* = \{g^*, g \in h\}$. The functions $U_{\varphi,\eta}$, V_ξ and $W_{\varphi}^{\eta,\xi}$ are simply extended to forests h by replacing the $e(g)$ and $o(g)$ by the corresponding $e(h)$ and $o(h)$. Both expressions (14) and (15) for $W_{\varphi}^{\eta,\xi}$ are still equivalent in the case of forests. We will also need a symmetry factor for forests. For $h \in \mathcal{H}$, we define

$$S_f(h) = P_f(h) \frac{(-1)^{\bar{h}}}{(|h| - 1)!} \prod_{g \in h} \frac{S_t(g)}{|g|}, \quad (26)$$

where $P_f(h)$ is the number of permutations of the identical trees in the forest h .

The equation (23) for γ in terms of B can be inverted by using the Lagrange inversion formula (see *e.g.* [18]). The sum over trees in equation (24) becomes then a sum over forests, and we finally obtain

$$\frac{E(\gamma) - J\gamma}{p} = -\frac{2(1-x)}{L(L-1)} \sum_{r=2}^{\infty} \frac{(-L\gamma)^r}{2^r r!} \sum_{h \in \mathcal{H}_{r-1}} \frac{W_{z^2}^{\eta,\xi_x}(h)}{S_f(h)}. \quad (27)$$

This equation for $E(\gamma)$ was checked by solving the functional equation (4) perturbatively (by the method described in [15]) up to order 7 in γ for all the systems with $2 \leq L \leq 12$ and $n \leq L/2$. The cases $n > L/2$ then follow from the

particle-hole symmetry of the system, which is verified by equation (27). Equation (27) immediately gives the known results [15] for the three first cumulants, and also expressions for the higher cumulants. Up to order 4 in γ , we have

$$\begin{aligned} \frac{(L-1)E(\gamma)}{p(1-x)} = & n(L-n)\gamma + \frac{L\gamma^2}{4}W[\bullet\bullet] + \frac{L^2\gamma^3}{72}(W[\textcircled{3}] - 9W[\bullet\bullet\bullet] + 9W[\bullet\bullet,\bullet\bullet]) \\ & + \frac{L^3\gamma^4}{48}\left(W\left[\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet\bullet \\ \bullet \end{array}\right] + 3W[\bullet\bullet\bullet\bullet] - W[\textcircled{3}\bullet] \right. \\ & \left. + W[\bullet\bullet,\textcircled{3}] - 9W[\bullet\bullet,\bullet\bullet\bullet] + 5W[\bullet\bullet,\bullet\bullet,\bullet\bullet]\right) \\ & + \mathcal{O}(\gamma^5), \end{aligned} \quad (28)$$

with $W = W_{z^2}^{\eta,\xi_x}$.

In the large system size limit with finite density $\rho = n/L$, the expression (27) for $E(\gamma)$ simplifies. In the scaling $1-x \sim 2\Phi/\sqrt{L\rho(1-\rho)}$, Stirling's formula gives the leading order in the size L of the system for all the cumulants of the current:

$$\frac{E(\gamma) - J\gamma}{p} = -\frac{4\Phi}{L^2} \sum_{r=2}^{\infty} \frac{\left(-\gamma\sqrt{\rho(1-\rho)L^3}\right)^r}{2^r r!} \sum_{h \in \mathcal{H}_{r-1}} \frac{\hat{W}_{z^2}^{e^{-z^2/2}, \tanh(|z|\Phi)}(h)}{S_f(h)}. \quad (29)$$

Here, $\hat{W}$ is defined in the same way as W except for the fact that the discrete sums over the indices i_j are replaced by integrals between $-\infty$ and $+\infty$.

V. CONCLUSION

With our conjecture (23-24) for the generating function of the cumulants of the current, we recover the exact result by Derrida and Lebowitz for the totally asymmetric model [13], as well as the expression obtained by Lee and Kim for the partially asymmetric model with non vanishing asymmetry [16]. The expression (27) for $E(\gamma)$ then gives explicit expressions for the cumulants of the current, and we recover the known results for the three first cumulants [15]. It would be interesting to calculate from (27) the cumulants of the current for the weakly asymmetric model, where the asymmetry $1-x$ scales as $1/L$. It should be possible to recover the expression obtained in [19] in terms of Bernoulli numbers. So far, we only checked this for the four first cumulants.

A distinctive feature between the known result for TASEP [13] and the expression with partial asymmetry (27) is the appearance of tree structures. This emphasizes the importance of combinatorics in theoretical physics, in particular in relation with integrable models. It would be interesting to know whether tree structures also appear in other situations, in particular for the open ASEP, the multispecies ASEP and the ASEP on the infinite line.

Acknowledgments

It is a pleasure to thank Olivier Golinelli and Kirone Mallick for many useful discussions.

-
- [1] H. Spohn. *Large Scale Dynamics of Interacting Particles*. New York: Springer, 1991.
 - [2] T. Halpin-Healy and Y.-C. Zhang. Kinetic roughening phenomena, stochastic growth, directed polymers and all that. aspects of multidisciplinary statistical mechanics. *Phys. Rep.*, 254:215–414, 1995.
 - [3] B. Schmittmann and R.K.P. Zia. Driven diffusive systems. An introduction and recent developments. *Phys. Rep.*, 301:45–64, 1998.
 - [4] B. Derrida. Non-equilibrium steady states: fluctuations and large deviations of the density and of the current. *J. Stat. Mech.*, page P07023, 2007.
 - [5] B. Derrida, J.L. Lebowitz, and E. Speer. Exact free energy functional for a driven diffusive open stationary nonequilibrium system. *Phys. Rev. Lett.*, 89:030601, 2002.
 - [6] J. de Gier and F.H.L. Essler. Exact spectral gaps of the asymmetric exclusion process with open boundaries. *Phys. Rev. Lett.*, 95:240601, 2005.

- [7] H. Spohn. Exact solutions for KPZ-type growth processes, random matrices, and equilibrium shapes of crystals. *Physica A*, 369:71–99, 2006.
- [8] T. Sasamoto. Fluctuations of the one-dimensional asymmetric exclusion process using random matrix techniques. *J. Stat. Mech.*, page P07007, 2007.
- [9] A. Rákos and G.M. Schütz. Bethe ansatz and current distribution for the TASEP with particle-dependent hopping rates. *Markov Processes and Related Fields*, 12:323–334, 2006.
- [10] O. Golinelli and K. Mallick. The asymmetric simple exclusion process: an integrable model for non-equilibrium statistical mechanics. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 39:12679–12705, 2006.
- [11] B. Derrida and M.R. Evans. Bethe Ansatz solution for a defect particle in the asymmetric exclusion process. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 32:4833–4850, 1999.
- [12] V.B. Priezzhev. Exact nonstationary probabilities in the asymmetric exclusion process on a ring. *Phys. Rev. Lett.*, 91:050601, 2003.
- [13] B. Derrida and J.L. Lebowitz. Exact large deviation function in the asymmetric exclusion process. *Phys. Rev. Lett.*, 80:209–213, 1998.
- [14] S. Prolhac and K. Mallick. Current fluctuations in the exclusion process and Bethe Ansatz. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 41:175002, 2008.
- [15] S. Prolhac. Fluctuations and skewness of the current in the partially asymmetric exclusion process. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 41:365003, 2008.
- [16] D.S. Lee and D. Kim. Large deviation function of the partially asymmetric exclusion process. *Phys. Rev. E*, 59:6476–6482, 1999.
- [17] R.J. Baxter. *Exactly solved models in statistical mechanics*. Academic Press, 1982.
- [18] P. Flajolet and R. Sedgewick. *Analytic Combinatorics*. Cambridge University Press, 2009.
- [19] S. Prolhac and K. Mallick. Cumulants of the current in a weakly asymmetric exclusion process. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 42:175001, 2009.

Matrix product solution of the multispecies partially asymmetric exclusion process

S. Prolhac¹, M. R. Evans², K. Mallick¹

¹Institut de Physique Théorique

CEA, IPhT, F-91191 Gif-sur-Yvette, France

CNRS, URA 2306, F-91191 Gif-sur-Yvette, France

² SUPA, School of Physics and Astronomy,

University of Edinburgh, Mayfield Road, Edinburgh EH9 3JZ, UK

E-mail: sylvain.prolhac@cea.fr, m.evans@ed.ac.uk, kirone.mallick@cea.fr

Abstract We find the exact solution for the stationary state measure of the partially asymmetric exclusion process on a ring with multiple species of particles. The solution is in the form of a matrix product representation where the matrices for a system of N species are defined recursively in terms of the matrices for a system of $N-1$ species. A complete proof is given, based on the quadratic relations verified by these matrices. This matrix product construction is interpreted in terms of the action of a transfer matrix.

Keywords ASEP, multi-species system, stationary state, matrix representation

PACS 05.40.-a, 05.70.Ln, 02.50.-r

1. Introduction

Particles hopping on a one-dimensional lattice with hard-core exclusion interactions provide a simple framework for the study of interacting many-body systems [1, 2]. In particular, when the particle hopping is asymmetric, a macroscopic particle current results and the system attains a nonequilibrium steady state (NESS) in which detailed balance is not satisfied (see [3] for a recent review).

A fundamental example of such a system is the Asymmetric Simple Exclusion Process (ASEP) [4, 5]. Here particles attempt hops to the right neighbour site with unit rate and to the left neighbour site with rate q . The hop is carried out when the destination site is empty. The special case $q = 0$ is known as the Totally Asymmetric Simple Exclusion Process (TASEP). With periodic boundary conditions the NESS of the ASEP has a very simple form (all allowed configurations of particles are equally likely) yet dynamical properties such as diffusion of a tagged particle [6, 7, 8, 9], and large deviations of the current [10] have proved to be non-trivial. When open boundary conditions, where particles attempt to enter and exit at the left and the right boundary, are used instead of periodic, the NESS takes on a non-trivial form. It may be represented by a matrix product state [11] in which the steady state probabilities for each

configuration are obtained from products of two matrices D and E according to whether each site is occupied or empty in the configuration. These matrices obey a quadratic algebra which provides a motif from which all the steady state probabilities may be generated. This quadratic algebra is related to the q -deformed harmonic oscillator [7, 12, 13, 14, 15, 16].

A generalization of the ASEP is to the case of two species of particles. A well studied model is that of usual (first-class) and second class particles. In this case both first and second-class particles hop to the right with unit rate and to the left with rate q . However if the site to the right of a first-class particle is occupied by a second-class particle the first and second-class particle exchange places with rate 1. Conversely, if the site to the left of a first-class particle is occupied by a second-class particle they can exchange with rate q . Thus a second-class particle behaves as a hole from the point of view of a first-class particle but behaves as a particle from the point of view of a hole. When q is lower than 1 the second class particles will move forwards in an environment of a low density of first class particles but backwards in a high density environment, therefore the introduction of a second class particle is a useful tool in the study of the microscopic structure of shocks [17, 18, 19, 20, 21]. The stationary state of a periodic system containing second and first-class particles has been obtained using the matrix product formulation by Derrida *et al.* [20]. Here the three matrices D , E and A (corresponding to first-class particles, second-class particles and holes respectively) obey a quadratic algebra closely related to that of [11]. Quadratic algebras for two species exclusion process have been further explored [22, 23, 24] and a general classification of quadratic algebras has been made in [25]. The range of matrix product states and quadratic algebras relevant to exclusion process and other stochastic systems have been summarized in [3].

A natural generalization of the two species case of first and second class particles is to the multispecies process where there is a hierarchy amongst the different species. That is, for a system with N species, the N th class particles are treated by all other classes of particle as holes, $(N-1)$ th class particles treat N th class particles as holes but are themselves treated as holes by first class, second class,... $(N-2)$ th class particles, and so on, up to the first class particles which treat all other species as holes. We refer to this model as the N -ASEP. In the physics literature, the $N = 3$ totally asymmetric case was considered by Mallick, Mallick and Rajewsky [26] and a matrix product steady state was determined. It was shown that the matrices obeyed more complicated relations than the quadratic algebra of the two species case.

In the probabilistic literature Ferrari and Martin [27] provided a construction for the N -TASEP whereby the dynamics is related to the dynamics of an N line process i.e. N coupled TASEPs. The steady state for the N line process has each of its configurations equally likely. Therefore, to sample the configurations of the N -TASEP according to their steady state probabilities one picks from a uniform distribution an N line configuration and projects this onto the corresponding N -TASEP configuration. Ferrari and Martin also showed that the N -line construction could be interpreted as a

system of N queues in tandem with priority customers.

In a recent work [28] it was shown how the construction of Ferrari and Martin can be inverted and the steady state probabilities written down as matrix products. A proof was given for the case $N = 3$ and the matrices for general N were written down in a hierarchical fashion.

In the present work we generalize the solution to the partially asymmetric case and provide the full proof of the matrix product state for arbitrary N . Let us summarize the key points of our solution. The matrices $X_J^{(N)}$, appearing in the matrix product expression for the steady state (24), depend on J , the species present at the site to which the matrix corresponds, and N the number of species represented in the system. The matrices are defined in eq. (25) in a hierarchical way: the matrices for an N species system are expressed in terms of those for an $N-1$ species system. This in turn means that the weights of the N species system may be expressed in terms of the weights of an $N-1$ species system via a transfer matrix which is defined in eq. (44). For the two species case ($N = 2$) the matrices obey a quadratic algebra (10,11,12) and this allows reduction relations which relate the weights of a system of L sites to those of a system of $L - 1$ sites. However, for $N > 3$ the quadratic algebra is replaced by a more complicated set of relations (69,70,71) involving additional ‘hat’ matrices, again defined hierarchically in equations (73,74). Both the matrices $X_J^{(N)}$ and the hat matrices $\hat{X}_J^{(N)}$ are expressed recursively in terms of auxiliary matrices $a_{JM}^{(N)}$ defined in equations (27–33). These auxiliary matrices are themselves tensor products of the four fundamental matrices $\mathbb{1}$, δ , ϵ , A which appear in the $N = 2$ solution. The algebraic properties of the auxiliary matrices, in particular the symmetry relation (57) and the commutation relations (61–63), are the key to the proof of the quadratic relations obeyed by the matrices $X_J^{(N)}$ and $\hat{X}_J^{(N)}$ which, in turn, furnish the proof of the matrix product representation of the stationary state.

The transfer matrix mentioned above allows us to investigate how the construction of Ferrari and Martin generalizes to the partially asymmetric case. For TASEP, the transfer matrix implements the Ferrari–Martin construction explicitly. However, in the system with partial asymmetry, the queueing process interpretation does not hold anymore and is replaced by a more general recurrence between systems with N and $N - 1$ species.

The paper is structured as follows: in section 2, we define the multispecies asymmetric exclusion process. In section 3, we write the matrix product representation of the stationary state of this model. In section 4 we give an interpretation of this matrix product representation in terms of a transfer matrix. Then, after writing the algebraic relations obeyed by the auxiliary matrices related to the matrix product representation in section 5, we give a complete proof of the matrix product expression in section 6. Appendix A is devoted to the calculation of some traces of product of matrices, Appendix B proves a classification of nonzero elements of the transfer matrix, while Appendix C contains the proof of a special case of the identities required to ensure the matrix product expression is valid.

2. Multispecies ASEP

We consider the multispecies asymmetric simple exclusion process with both forward and backward jumps on a one dimensional lattice with periodic boundary conditions. This stochastic model is defined on a configuration space such that each of the L sites of the lattice can be occupied by at most one particle (exclusion rule). Each particle has a label which is an integer between 1 to N , the ‘class’ of the particle. (We use the terms ‘class’ and ‘species’ interchangeably.) The unoccupied sites (holes) will be considered as particles of class 0. The stochastic dynamics can be expressed in terms of exchanges of particles at neighbouring sites. The transitions which can occur depending on the classes of both particles are

$$JK \rightarrow KJ \quad \text{with rate 1} \quad \text{if } 1 \leq J < K \leq N \quad (1)$$

$$KJ \rightarrow JK \quad \text{with rate } q \quad \text{if } 1 \leq J < K \leq N \quad (2)$$

$$J0 \rightarrow 0J \quad \text{with rate 1} \quad \text{if } 1 \leq J \leq N \quad (3)$$

$$0J \rightarrow J0 \quad \text{with rate } q \quad \text{if } 1 \leq J \leq N. \quad (4)$$

All classes of particles jump to the right with rate 1 and to the left with rate q if the destination site is empty. When two particles of different class are on neighbouring sites, they can exchange with rate 1 if the particle with the smallest class is on the left, and with rate q if it is on the right. Thus, for a particle of class r , all the particles of class larger than r behave as holes. At this point, it might seem natural to consider holes as particles of class $N + 1$ rather than 0. However, we do not adopt this convention as it would make the expression of the stationary state more complicated in the following.

We use the site variable $\tau_l = 0, 1, \dots, N$. If $\tau_l = 0$ the site is empty; if $\tau_l = r > 0$ site l contains a r th-class particle. Let us denote by $\vec{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_L)$, a configuration of the system. The dynamics of the system can be encoded in a Markov matrix M . The time evolution of the probability $P_t(\vec{\tau})$ to be in a configuration $\vec{\tau}$ at time t is given by the master equation

$$\frac{d}{dt}P_t(\vec{\tau}) = \sum_{\vec{\tau}'} M(\vec{\tau}, \vec{\tau}') P_t(\vec{\tau}'). \quad (5)$$

The matrix M is a $(N + 1)^L$ by $(N + 1)^L$ matrix which acts on the configuration space. As the numbers of particles of each class are conserved by the dynamics, we will restrict ourselves to a configuration space with fixed number of particles and holes. We call P_r the number of particles of class r . The restricted configuration space $\Omega(P_0, P_1, \dots, P_N)$ has dimension

$$|\Omega| = \frac{L!}{P_0! P_1! \dots P_N!}, \quad (6)$$

and the restricted Markov matrix which acts on it is $|\Omega|$ by $|\Omega|$.

3. Matrix product formulation of the stationary state of the N -species ASEP

The matrix product formulation was first used to solve the TASEP on a lattice of length L with open boundary conditions [11]. It was then extended to the 2-ASEP on the ring $\mathbb{Z}_L$ [20], which is our starting point. In this case the site variable is $\tau_l = 0, 1, 2$ which implies that site l is empty, contains a first-class particle or contains a second-class particle, respectively. For the 2-ASEP the matrix product formulation consists of writing the weight of a given configuration as a trace of a product of L matrices corresponding to the classes of particles on the different sites. In the matrix product formulation [20] it has been proved that the stationary measure may be written as

$$P(\vec{\tau}) = \frac{1}{Z(P_0, P_1, P_2)} W(\vec{\tau}), \quad (7)$$

where the weight of the configuration is given by

$$W(\vec{\tau}) = \text{Tr} \left[\prod_{l=1}^L X_{\tau_l} \right] \quad (8)$$

and Tr means the trace of the product of matrices X_{τ_l} . The normalization $Z(P_0, P_1, P_2)$ is chosen so that the sum of all the probabilities is equal to 1 i.e. $Z(P_0, P_1, P_2)$ is the sum of weights for configurations with the correct numbers P_0, P_1, P_2 of holes and each species of particles. The matrices X_{τ_l} are given by

$$X_0 = E, \quad X_1 = D, \quad X_2 = A, \quad (9)$$

that is: if the site is empty we write a matrix E ; if the site contains a first-class particle we write a matrix D ; if the site contains a second-class particle we write a matrix A . The matrices D, E, A obey the algebraic rules

$$DE - qED = (1 - q)(D + E) \quad (10)$$

$$DA - qAD = (1 - q)A \quad (11)$$

$$AE - qEA = (1 - q)A. \quad (12)$$

The only remaining condition to satisfy is that representations of this algebra may be found which give well-defined values for the traces appearing in (7). This may be achieved for $q < 1$ as follows. Let A be the diagonal, semi-infinite matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & q^2 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & q^3 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Then D, E may be chosen to be bidiagonal semi-infinite matrices

$$D = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{c_0} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \sqrt{c_1} & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{c_2} & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{c_0} & 1 & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & \sqrt{c_1} & 1 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & \sqrt{c_2} & 1 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (15)$$

where

$$c_n = 1 - q^{n+1}. \quad (16)$$

We note that, as A has a geometric series for diagonal, the trace of A times a finite product of D and E matrices is not divergent. See [3] for further representations of (10–11).

In principle, explicit formulae for the weights of each configuration may be obtained, either by using the algebraic rules or taking an advantage of an explicit representation of the matrices such as (13–15) (see [20] or the review [3] for details of how these calculations are performed).

In what follows, it will be useful to consider the matrices δ, ϵ defined by

$$\delta = D - \mathbb{1} \quad (17)$$

$$\epsilon = E - \mathbb{1} \quad (18)$$

which verify the algebraic relations

$$\delta\epsilon - q\epsilon\delta = (1 - q)\mathbb{1} \quad (19)$$

$$\delta A = qA\delta \quad (20)$$

$$A\epsilon = q\epsilon A. \quad (21)$$

The first equation (19) is the q -deformed harmonic oscillator algebra (see [15] for an introduction). Writing δ, ϵ out explicitly we have

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{c_0} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{c_1} & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{c_2} & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{c_0} & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & \sqrt{c_1} & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & \sqrt{c_2} & 0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (23)$$

In [28] the matrix product formulation of the stationary state of the N -TASEP was presented, here we present the generalization to the N -ASEP and give complete proofs that the solution indeed satisfies the stationarity condition.

We first fix our notation. We denote the configuration of the system $\{\tau_1, \dots, \tau_L\}$ by $\vec{\tau}$. We use $X_{\tau_l}^{(N)}$ to denote the matrix associated to the state τ_l of site l in a system containing N species of particle. Thus, the subscript $\tau_l = 0, 1, \dots, N$ indicates to which species of particle the matrix is associated, and the superscript (N) indicates that there are N species of particles in the system. This is required because the matrix corresponding to a species will vary according to the total number of species in the system. The stationary probabilities become in the matrix product formulation

$$P(\vec{\tau}) = \frac{1}{Z(P_0, \dots, P_N)} \text{Tr} [X_{\tau_1}^{(N)} X_{\tau_2}^{(N)} \dots X_{\tau_L}^{(N)}]. \quad (24)$$

The matrices $X_{\tau_l}^{(N)}$ are given by

$$X_J^{(N)} = \sum_{M=0}^{N-1} a_{JM}^{(N)} \otimes X_M^{(N-1)} \quad \text{for } 0 \leq J \leq N \quad (25)$$

with

$$X_0^{(1)} = X_1^{(1)} = 1. \quad (26)$$

Note that we use a slightly different notation to [28] for the TASEP; with our notation, some of the $a_{JM}^{(N)}$ will be equal to zero.

The matrices $a_{JM}^{(N)}$ are given by

$$a_{JM}^{(N)} = 0 \quad \text{for } 0 < M < J \quad (27)$$

$$a_{JM}^{(N)} = A^{\otimes(J-1)} \otimes \delta \otimes \mathbb{1}^{\otimes(M-J-1)} \otimes \epsilon \otimes \mathbb{1}^{\otimes(N-M-1)} \quad \text{for } 0 < J < M \leq N-1 \quad (28)$$

$$a_{0M}^{(N)} = \mathbb{1}^{\otimes(M-1)} \otimes \epsilon \otimes \mathbb{1}^{\otimes(N-M-1)} \quad \text{for } 0 < M \leq N-1 \quad (29)$$

$$a_{JJ}^{(N)} = A^{\otimes(J-1)} \otimes \mathbb{1}^{\otimes(N-J)} \quad \text{for } 0 < J \leq N-1 \quad (30)$$

$$a_{00}^{(N)} = \mathbb{1}^{\otimes(N-1)} \quad \text{for } 0 < J < M \leq N-1 \quad (31)$$

$$a_{J0}^{(N)} = A^{\otimes(J-1)} \otimes \delta \otimes \mathbb{1}^{\otimes(N-J-1)} \quad \text{for } 0 < J \leq N-1 \quad (32)$$

$$a_{N0}^{(N)} = A^{\otimes(N-1)}. \quad (33)$$

Thus the matrices $X_K^{(N)}$ at level N are composed of tensor products of $\dim_N = \binom{N}{2}$ fundamental matrices δ , ϵ , A , or $\mathbb{1}$. For $N = 1$, $\dim_N = 0$ which implies the use of scalars for the single species case (26) (i.e. all configurations are equally likely). For $N = 2$, $\dim_N = 1$, which implies the use of matrices as given by (13–15). Let us now check that the 2-ASEP matrices are recovered. We find from equations (27), (29), (30)

and (33), that $a_{00}^{(2)} = \mathbb{1}$, $a_{01}^{(2)} = \epsilon$, $a_{10}^{(2)} = \delta$, $a_{11}^{(2)} = \mathbb{1}$, and $a_{20}^{(2)} = A$. Then, from the recursion relation (25) we deduce that

$$X_0^{(2)} = a_{00}^{(2)} + a_{01}^{(2)} = \mathbb{1} + \epsilon = E, \quad X_1^{(2)} = a_{10}^{(2)} + a_{11}^{(2)} = \mathbb{1} + \delta = D, \quad (34)$$

$$\text{and } X_2^{(2)} = a_{20}^{(2)} = A, \quad (35)$$

as expected.

Let us now write out the case $N = 3$. Since $\dim_3 = 3$, the $X_K^{(3)}$ matrices are built with tensor products of three fundamental matrices. From the definitions (27–33), we have $a_{00}^{(3)} = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$, $a_{01}^{(3)} = \epsilon \otimes \mathbb{1}$, $a_{02}^{(3)} = \mathbb{1} \otimes \epsilon$, $a_{10}^{(3)} = \delta \otimes \mathbb{1}$, $a_{11}^{(3)} = \mathbb{1} \otimes \delta$, $a_{12}^{(3)} = \delta \otimes \epsilon$, $a_{20}^{(3)} = A \otimes \delta$, $a_{22}^{(3)} = A \otimes \mathbb{1}$ and $a_{30}^{(3)} = A \otimes A$. Using the recursion relation (25) and the results $X_0^{(2)} = E$, $X_1^{(2)} = D$, $X_2^{(2)} = A$, we obtain

$$\begin{aligned} X_0^{(3)} &= a_{00}^{(3)} \otimes X_0^{(2)} + a_{01}^{(3)} \otimes X_1^{(2)} + a_{02}^{(3)} \otimes X_2^{(2)} \\ &= \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes E + \epsilon \otimes \mathbb{1} \otimes D + \mathbb{1} \otimes \epsilon \otimes A \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} X_1^{(3)} &= a_{10}^{(3)} \otimes X_0^{(2)} + a_{11}^{(3)} \otimes X_1^{(2)} + a_{12}^{(3)} \otimes X_2^{(2)} \\ &= \delta \otimes \mathbb{1} \otimes E + \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes D + \delta \otimes \epsilon \otimes A \end{aligned} \quad (37)$$

$$X_2^{(3)} = a_{20}^{(3)} \otimes X_0^{(2)} + a_{22}^{(3)} \otimes X_2^{(2)} = A \otimes \delta \otimes E + A \otimes \mathbb{1} \otimes A \quad (38)$$

$$X_3^{(3)} = a_{30}^{(3)} \otimes X_0^{(2)} = A \otimes A \otimes E. \quad (39)$$

We notice in this example that the matrices $X_K^{(N)}$ have the same expression in terms of δ , ϵ and A as for TASEP [28]; the only difference lies in the deformation by q of the algebra (19–21) between δ , ϵ and A .

In later sections we shall establish the algebraic rules, satisfied by the matrices $X_n^{(N)}$, which generalize the quadratic algebra (10–11) of the $N = 2$ case. First we discuss how the recursive structure (25) allows the stationary weights for an N -species system to be written in terms of those for an $(N-1)$ -species system.

4. Transfer matrix interpretation of the matrix product representation

In this section, we show that the matrix product representation (24) can be conveniently rewritten in terms of a transfer matrix acting on the configuration space.

4.1. Definition of the Transfer Matrix

We begin by noting that (24) and (25) define the stationary weights for a system with N species of particle recursively in terms of the stationary weights for a system with $N - 1$ species:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[X_{j_1}^{(N)} \dots X_{j_L}^{(N)} \right] &= \sum_{i_1, \dots, i_L=0}^{N-1} \text{Tr} \left[\left(a_{j_1 i_1}^{(N)} \otimes X_{i_1}^{(N-1)} \right) \dots \left(a_{j_L i_L}^{(N)} \otimes X_{i_L}^{(N-1)} \right) \right] \\ &= \sum_{\vec{i}} \text{Tr} \left[\left(a_{j_1 i_1}^{(N)} \dots a_{j_L i_L}^{(N)} \right) \otimes \left(X_{i_1}^{(N-1)} \dots X_{i_L}^{(N-1)} \right) \right] \end{aligned}$$

$$= \sum_{\vec{i}} \text{Tr} \left[a_{j_1 i_1}^{(N)} \dots a_{j_L i_L}^{(N)} \right] \text{Tr} \left[X_{i_1}^{(N-1)} \dots X_{i_L}^{(N-1)} \right] . \quad (40)$$

We use the notation $\vec{j} \equiv (j_1, \dots, j_L)$ and $\vec{i} \equiv (i_1, \dots, i_L)$, where $\vec{j}$ is a configuration of a system with N species of particle and $\vec{i}$ is a configuration of a system with $N-1$ species of particle. Each j_l can take values from 0 to N and each i_l can take values from 0 to $N-1$. The sum in (40) is over all configurations $\vec{i}$ with $N-1$ species.

Let us now introduce a notation for the configuration space which will be of use in the sequel. We call $V^{(N)}$ the $N+1$ dimensional vector space corresponding to the $N+1$ possible states of a site for a system with N species. If we do not specify the number of particles of each species, the total configuration space of the system is $V_L^{(N)} \equiv (V^{(N)})^{\otimes L}$. We denote a vector in this space corresponding to configuration $\vec{j} = (j_1, \dots, j_L)$ by $|\vec{j}\rangle$. The set of all $(N+1)^L$ possible configuration vectors $|\vec{j}\rangle$ form a basis of $V_L^{(N)}$. We denote the steady state eigenvector for a system containing N species of particle by $|N\rangle$ where

$$|N\rangle = \sum_{\vec{j}} W(\vec{j}) |\vec{j}\rangle . \quad (41)$$

The stationary state weights $W(\vec{j})$ (8) are then given by

$$W(\vec{j}) = \langle \vec{j} | N \rangle . \quad (42)$$

Using this notation we can write relation (40) in the form

$$\langle \vec{j} | N \rangle = \sum_{\vec{i}} \langle \vec{j} | T_L^{(N)} | \vec{i} \rangle \langle \vec{i} | N-1 \rangle , \quad (43)$$

where $T_L^{(N)}$ is the *transfer matrix* for a system with N species. The matrix element $\langle \vec{j} | T_L^{(N)} | \vec{i} \rangle$ can be thought of as representing a transition from configuration $\vec{i}$ in $V_L^{(N-1)}$ to configuration $\vec{j}$ in $V_L^{(N)}$. (This transition is, of course, not the same as a dynamical transition given by the Markov matrix.) The transfer matrix is used to express the stationary weights for a system with N species linearly in terms of the weights for a system with $N-1$ species. We identify from (40) the elements of the transfer matrix $T_L^{(N)}$ as

$$\langle \vec{j} | T_L^{(N)} | \vec{i} \rangle \equiv \text{Tr} \left[a_{j_1 i_1}^{(N)} \dots a_{j_L i_L}^{(N)} \right] . \quad (44)$$

We can write the relation (43) more simply as

$$|N\rangle = T_L^{(N)} |N-1\rangle , \quad (45)$$

and iterating we obtain

$$|N\rangle = T_L^{(N)} \dots T_L^{(2)} |1\rangle , \quad (46)$$

where the eigenvector of the system with only one species $|1\rangle$ is such that each configuration has the same weight.

Let us now formalise the mathematical structure of $T_L^{(N)}$. The transfer matrix $T_L^{(N)}$ is a $(N+1)^L \times N^L$ rectangular matrix which takes a vector in $V_L^{(N-1)}$ and sends it to in $V_L^{(N)}$. It is expressed as a trace of a product of the local tensors $a_{ji}^{(N)}$. From

(27–33), we observe that these $a_{ji}^{(N)}$ are themselves tensorial products of elements of the set $\mathcal{F} = \{\delta, \epsilon, A, \mathbb{1}\}$. Thus, the building blocks of the transfer matrix and indeed the matrices $X_j^{(N)}$ are the four infinite matrices of the set $\mathcal{F}$. We will call $\mathcal{A}$ the infinite dimensional space on which the elements of $\mathcal{F}$ act. The matrices $a_{JM}^{(N)}$ act on the auxiliary space $\mathcal{A}^{(N)} \equiv \mathcal{A}^{\otimes(N-1)}$. They can be seen as the element JM ($0 \leq J \leq N$ and $0 \leq M \leq N-1$) of a rectangular $(N+1) \times N$ matrix $a^{(N)}$. For example,

$$a^{(2)} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \epsilon \\ \delta & \mathbb{1} \\ A & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad a^{(3)} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} & \epsilon \otimes \mathbb{1} & \mathbb{1} \otimes \epsilon \\ \delta \otimes \mathbb{1} & \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} & \delta \otimes \epsilon \\ A \otimes \delta & 0 & A \otimes \mathbb{1} \\ A \otimes A & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (47)$$

4.2. Interpretation of the $T_L^{(N)}$ matrices

In this subsection, we give an interpretation of the transfer matrices $T_L^{(N)}$ in terms of forbidden and allowed transitions between configurations of particles. Forbidden transitions correspond to matrix elements of $\langle \vec{j} | T_L^{(N)} | \vec{i} \rangle$ that are equal to zero. We prove in Appendix B that the only nonzero matrix elements $\langle \vec{j} | T_L^{(N)} | \vec{i} \rangle$ between an initial configuration $\vec{i}$ of particles of species between 0 and $N-1$ and a final configuration $\vec{j}$ of particles of species between 0 and N are characterized by the following rules:

- at each site, a hole in the initial configuration $\vec{i}$ can remain a hole or become a particle of any class between 1 and N in the final configuration $\vec{j}$.
- at each site, a particle of class i between 1 and $N-1$ can become either a hole or a particle of class j between 1 and i (the class can only decrease).
- there is global conservation of the number of particles of each class between 1 and $N-1$.

These rules are proven in Appendix B. In particular, we note that the number of holes decreases (or stays the same) whereas the number of particles of class N can only increase from none. Thus, the only way to create a particle of class N is to remove a hole and create a class N particle instead. The allowed local transitions for $N=2$ and $N=3$ along with the corresponding local tensors $a_{ji}^{(N)}$ appearing in the transfer matrix element are illustrated in figures 1 and 2.

To illustrate the utility of the transfer matrix, we work out some simple examples. First we consider the configuration $(2, 1, 0)$ for $L=3$ and $N=2$. According to the rules for nonzero elements of the transfer matrix in the beginning of this subsection: the 2 at site 1 must have come from a 0; the 1 at site 2 could have come from a 1 or 0, the 0 at site 3 could have come from a 1 or 0. Then the global constraint of a conserved number of 1 implies that the only 1-species configurations which have transitions to $(2, 1, 0)$ are $(0, 1, 0)$ and $(0, 0, 1)$. Using Figure 1 to construct the transfer matrix elements from the local tensors $a_{ji}^{(N)}$, we find

$$W(2, 1, 0) = W(0, 1, 0) \text{Tr} \left[a_{20}^{(2)} a_{11}^{(2)} a_{00}^{(2)} \right] + W(0, 0, 1) \text{Tr} \left[a_{20}^{(2)} a_{10}^{(2)} a_{01}^{(2)} \right] \quad (48)$$

$$= \text{Tr} [A] + \text{Tr} [A\delta\epsilon], \quad (49)$$

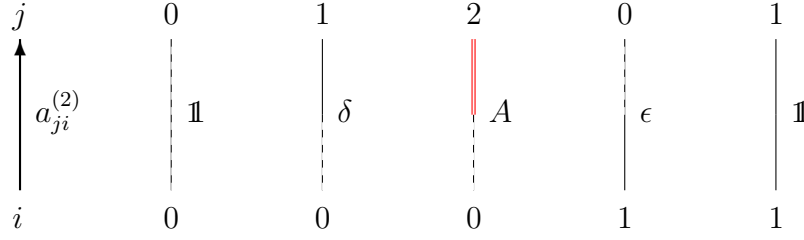


Figure 1. Allowed local transitions in the transfer matrix $T_L^{(2)}$ between a particle of class i (lower row, $i = 0$ or $i = 1$) and a particle of class j (upper row, $j = 0$, $j = 1$ or $j = 2$) at the same site. A particle of class 0 is represented by a vertical dashed line, a particle of class 1 by a full line, and a particle of class 2 by a double line. The corresponding local tensor $a_{ji}^{(2)}$ appearing in the transfer matrix element is also shown.

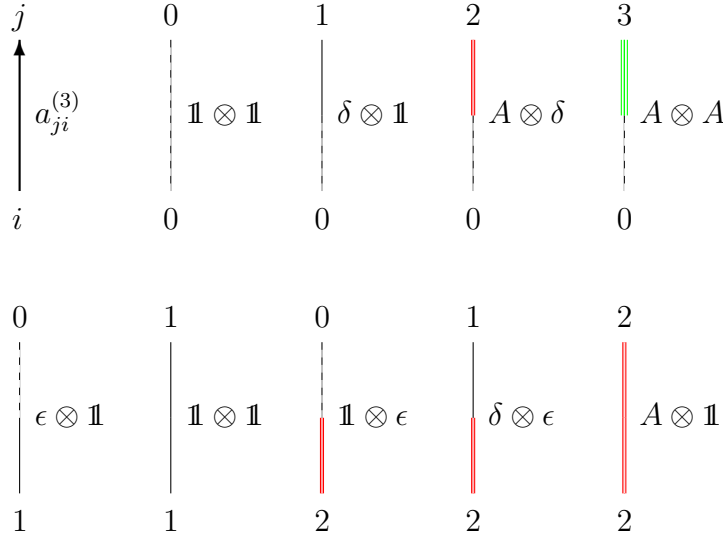


Figure 2. Allowed local transitions in the transfer matrix $T_L^{(3)}$ between a particle of class i (lower row, $i = 0$, $i = 1$ or $i = 2$) and a particle of class j (upper row, $j = 0$, $j = 1$, $j = 2$ or $j = 3$) at the same site. A particle of class 0 is represented by a vertical dashed line, a particle of class 1 by a full line, a particle of class 2 by a double line, and a particle of class 3 by a triple line. The corresponding local tensor $a_{ji}^{(3)}$ appearing in the transfer matrix element is also shown.

where we have set $W(0, 1, 0) = W(0, 0, 1) = 1$ (uniform measure for $N = 1$). This is to be compared with the known expression given by the matrices (9)

$$W(2, 1, 0) = \text{Tr}[ADE] = \text{Tr}[A(\mathbb{1} + \delta)(\mathbb{1} + \epsilon)] = \text{Tr}[A + A\delta\epsilon] \quad (50)$$

where we have used the property that δ and ϵ must appear in equal numbers to have a non zero trace.

As another example we consider the configuration $(3, 2, 1, 0)$ for $L = 4$ and $N = 3$. According to the rules for nonzero elements of the transfer matrix: the 3 at site 1 must have come from a 0; the 2 at site 2 could have come from a 2 or 0, the 1 at site 3 could have come from a 2, 1 or 0 and the 0 at site 4 could have come from a 2, 1 or 0. Then the global constraints of conserved numbers of 1 and 2 implies that the only 2-species configurations which have transitions to $(3, 2, 1, 0)$ are $(0, 2, 1, 0)$, $(0, 2, 0, 1)$, $(0, 0, 2, 1)$, $(0, 0, 1, 2)$. Using Figure 2 to construct the transfer matrix elements yields

$$\begin{aligned}
 W(3, 2, 1, 0) &= \\
 &W(0, 2, 1, 0) \text{Tr} \left[a_{30}^{(3)} a_{22}^{(3)} a_{11}^{(3)} a_{00}^{(3)} \right] + W(0, 2, 0, 1) \text{Tr} \left[a_{30}^{(3)} a_{22}^{(3)} a_{10}^{(3)} a_{01}^{(3)} \right] \\
 &+ W(0, 0, 2, 1) \text{Tr} \left[a_{30}^{(3)} a_{20}^{(3)} a_{12}^{(3)} a_{01}^{(3)} \right] + W(0, 0, 1, 2) \text{Tr} \left[a_{30}^{(3)} a_{22}^{(3)} a_{11}^{(3)} a_{02}^{(3)} \right] \\
 &= W(0, 2, 1, 0) \text{Tr} [A^2] \text{Tr} [A] + W(0, 2, 0, 1) \text{Tr} [A^2 \delta \epsilon] \text{Tr} [A] \\
 &+ W(0, 0, 2, 1) \text{Tr} [A^2 \delta \epsilon] \text{Tr} [A \delta \epsilon] + W(0, 0, 1, 2) \text{Tr} [A^2] \text{Tr} [A \delta \epsilon] .
 \end{aligned} \tag{51}$$

We used the fact that the trace of a tensorial product is equal to the product of the traces.

4.3. Finiteness of the Trace Operation

We have so far avoided the important question of the finiteness of the matrix product representation (24). Using previous results of this section and the appendices, we now prove that if there is at least one particle of each species, the expression (24) for the stationary measure of the N species ASEP is finite. (In the case where there are zero particles of some species, this species can be removed from the problem by studying the corresponding system with $N - 1$ species instead of N .) We will focus on the case $N = 3$. For any configuration $\vec{k}$ with 3 species, the stationary weight is given by

$$W(\vec{k}) = \langle \vec{k} | 3 \rangle = \sum_{\vec{j}} \sum_{\vec{i}} \langle \vec{k} | T_L^{(3)} | \vec{j} \rangle \langle \vec{j} | T_L^{(2)} | \vec{i} \rangle \langle \vec{i} | 1 \rangle , \tag{52}$$

where $\vec{i}$ is a configuration with 1 species and $\vec{j}$ a configuration with 2 species. Let us assume that there is at least one particle of each class in $\vec{k}$. Then, as $T_L^{(3)}$ conserves the number of particles of class 2, the configurations $\vec{j}$ that give a nonzero contribution to $\langle \vec{k} | 3 \rangle$ are such that $\vec{j}$ has also at least one particle of class 2. From the characterization of the nonzero elements of the transfer matrix, we must have that both $i_l = 0$, $j_l = 2$, and $j_{l'} = 0$, $k_{l'} = 3$ at some sites l and l' between 1 and L so that $\vec{i}$ and $\vec{j}$ give a nonzero contribution to $\langle \vec{k} | 3 \rangle$. We see, using the expression of the transfer matrix elements (44) and the form (33) of $a_{N0}^{(N)}$ for $N = 2$ and $N = 3$, that there will be at least one A in each trace of $\langle \vec{j} | T_L^{(2)} | \vec{i} \rangle$ and $\langle \vec{k} | T_L^{(3)} | \vec{j} \rangle$ contributing to $\langle \vec{k} | 3 \rangle$. But one can calculate explicitly traces of products of elements of $\mathcal{F}$ when there is at least one A in the product, and these traces are finite (see Appendix A). This proves that $\langle \vec{k} | 3 \rangle$ is finite. The extension to arbitrary N of this proof of the finiteness of the matrix product representation (24) is straightforward.

4.4. Relation with Ferrari-Martin's construction for TASEP

For the totally asymmetric case ($q = 0$), the transfer matrices $T_L^{(N)}$ encode Ferrari-Martin's multiline construction of the stationary weights [27]. We will focus on the 2-species stationary eigenstate constructed by $T_L^{(2)}$. We will see that the set of pairs of configurations $\vec{i}$ and $\vec{j}$ for which $\langle \vec{j} | T_L^{(N)} | \vec{i} \rangle \neq 0$ is smaller than in the case $q \neq 0$. In order to know for which pairs of configurations $\vec{i}$ and $\vec{j}$ the matrix element $\langle \vec{j} | T_L^{(N)} | \vec{i} \rangle$ is equal to zero, we refer to representation (B.4) of Appendix B which expresses an element of the transfer matrix as a product of $N - 1$ traces of products of L fundamental matrices $\{\delta, \epsilon, A, \mathbb{1}\}$. Therefore, we need to know which products of elements of $\{\delta, \epsilon, A, \mathbb{1}\}$ have a trace equal to zero. For the case of the TASEP, i.e. $q = 0$, the algebra (19), (20), (21) between δ , ϵ and A reduces to

$$\delta\epsilon = \mathbb{1} \quad (53)$$

$$\delta A = 0 \quad (54)$$

$$A\epsilon = 0. \quad (55)$$

One can see that for any product of l elements from $\{\delta, \epsilon\}$, $w = w_1 \dots w_l$, $AwA \neq 0$ if and only if both of the following conditions are true:

- there are as many δ and ϵ in w .
- for all m between 1 and l , there is at least as many ϵ as δ in $w_m \dots w_l$.

In that case, $AwA = AA = A$. For example, $A\delta\delta\epsilon\epsilon\delta\epsilon A = A$ but $A\delta\epsilon\epsilon\delta\delta\epsilon A = 0$ because of an excess of δ to the right. Then, each of the traces of products of elements from $\{\delta, \epsilon, A, \mathbb{1}\}$ appearing in the transfer matrix element (B.4) will either be 0 or 1 and consequently each transfer matrix element is either 0 or 1. Then the transfer matrix relation (43) becomes an expression for the weight of a configuration in a system of N species as a sum of weights for 'ancestor' configurations of a system of $N - 1$ species. The rules for selecting these ancestor configurations are precisely those given by Ferrari and Martin.

We illustrate the equivalence for $q = 0$ of the transfer matrix relation (43) with the Ferrari and Martin algorithm in the case $N = 2$, studied by Angel [29]. In this case (see Figure 1) an ϵ in the transfer matrix element corresponds to a particle of class 1 changing into a hole, a δ corresponds to a hole changing into a particle of class 1 and an A to a hole changing into a particle of class 2. Therefore, for $q = 0$, $\langle \vec{j} | T_L^{(N)} | \vec{i} \rangle \neq 0$ if and only if the configurations $\vec{i}$ and $\vec{j}$ are such that one can go from $\vec{i}$ to $\vec{j}$ by creating particles of class 2 at some of the unoccupied sites and by moving particles of class 1 only to the left, forbidding them to cross class 2 particles: this is precisely the pushing procedure of Angel for 2 classes of particles which is a particular (2-line) case of the Ferrari-Martin N -line algorithm (see [28]).

As a simple example of the distinction between the $q = 0$ and $q \neq 0$ cases let us consider the configuration $(0, 1, 2)$ for $L = 3$ and $N = 2$. Constructing the transfer matrix elements as before, we find

$$W(0, 1, 2) = W(0, 1, 0) \text{Tr} \left[a_{00}^{(2)} a_{11}^{(2)} a_{20}^{(2)} \right] + W(1, 0, 0) \text{Tr} \left[a_{01}^{(2)} a_{10}^{(2)} a_{20}^{(2)} \right]$$

$$= \text{Tr}[A] + \text{Tr}[\epsilon\delta A] , \quad (56)$$

where we have set $W(0, 1, 0) = W(1, 0, 0)$. In the case $q = 0$, $\text{Tr}[\epsilon\delta A] = 0$ and there is only one contribution to $W(0, 1, 2)$. This concurs with the pushing procedure for this example which results in just one ancestor configuration $(0, 1, 0)$. However, for $q \neq 0$, the second term in (56) does contribute and using the result of Appendix A one finds

$$\text{Tr}[\epsilon\delta A] = \frac{q}{1+q} \text{Tr}[A] .$$

A further important observation for the 2-TASEP is that the matrix elements $\langle \vec{j} | T_L^{(2)} | \vec{i} \rangle$ “decouple on the particles of class two”, that is, each element of the transfer matrix $T_L^{(2)}$ factorizes as a product over all the pairs of two consecutive particles of class 2 in $\vec{j}$ of terms depending only on the holes and first class particles in $\vec{i}$ and $\vec{j}$ between the particles of class 2. This is because for $q = 0$ the matrix A is a projector (13). However, this factorization property does not hold anymore for the general case $q \neq 0$ as (13) is no longer a projector. This fact makes it more difficult to find a combinatorial interpretation of the transfer matrix such as Ferrari-Martin multiline construction since the hops of the particles are less restricted than for TASEP.

5. Quadratic algebra for the $a_{JM}^{(N)}$

From the algebra for δ , ϵ and A (19–21) and the explicit form of the $a_{JM}^{(N)}$ (27–33), many quadratic relations for the $a_{JM}^{(N)}$ can be deduced. In the proof of the matrix product representation, to be presented in section 6, we will need two kinds of these relations: symmetries of a quadratic function of the $a_{JM}^{(N)}$ under the exchange of the second indices of the $a_{JM}^{(N)}$ and relations allowing us to commute two $a_{JM}^{(N)}$.

5.1. Symmetry relations

We have the following relation between commutators

$$\left[a_{JM}^{(N)}, a_{KM'}^{(N)} \right] = \left[a_{JM'}^{(N)}, a_{KM}^{(N)} \right] \quad \text{for } J \neq 0 \text{ and } K \neq 0, \quad (57)$$

which indicates that $\left[a_{JM}^{(N)}, a_{KM'}^{(N)} \right]$ is symmetric under the exchange of M and M' for all M and M' . For some values of J , K , M and M' , we have the stronger properties

$$a_{JM}^{(N)} a_{KM'}^{(N)} = a_{JM'}^{(N)} a_{KM}^{(N)} \text{ for all } J, K, \text{ and } M, M' \in \{0\} \cup [\max(J+1, K+1), N-1] \quad (58)$$

$$a_{JM}^{(N)} a_{JM'}^{(N)} = a_{JM'}^{(N)} a_{JM}^{(N)} \text{ for all } J, M \text{ and } M', \quad (59)$$

which are also symmetries under the exchange between M and M' .

5.2. Commutation relations

In the following, we will also need to exchange $a_{JM}^{(N)}$ and $a_{KM'}^{(N)}$. If $J = K$, the symmetry relation (59) can also be seen as a commutation relation for all value of J , M and M' . For $J \neq K$, the exact form of the commutation relation will depend on M and M' . In

the case $0 < J < K$ we partition the ensemble of couples (M, M') for which $a_{JM}^{(N)}$ and $a_{KM'}^{(N)}$ are defined and non-zero (that is $M \in \{0\} \cup [J, N-1]$ and $M' \in \{0\} \cup [K, N-1]$) into 12 sectors as

	$M = 0$	$J \leq M < K$	$M = K$	$K < M \leq N-1$	
$M' = 0$	1	4	7	10	.(60)
$M' = K$	2	5	8	11	
$K < M' \leq N-1$	3	6	9	12	

Then, we have the following commutation relations between $a_{JM}^{(N)}$ and $a_{KM'}^{(N)}$ for $0 < J < K$:

$$a_{JM}^{(N)} a_{KM'}^{(N)} = q a_{KM'}^{(N)} a_{JM}^{(N)} \quad \text{in sectors 1, 2, 3, 8, 10, 11 and 12} \quad (61)$$

$$a_{JM}^{(N)} a_{KM'}^{(N)} = a_{KM'}^{(N)} a_{JM}^{(N)} \quad \text{in sectors 4, 5, 6} \quad (62)$$

$$a_{JM}^{(N)} a_{KM'}^{(N)} = a_{KM'}^{(N)} a_{JM}^{(N)} - (1-q) a_{KM}^{(N)} a_{JM'}^{(N)} \quad \text{in sectors 7 and 9} . \quad (63)$$

In the case $K = 0 < J$, the commutation relations take a similar form (C.2–C.4).

6. Proof of the matrix product representation

In this section, we prove that the matrix product expression (24) gives the stationary state eigenvector of the Markov matrix.

6.1. ‘Hat’ matrices

The Markov matrix of the system with N classes of particles can be written in terms of the local $(N+1)^2$ by $(N+1)^2$ matrices $M_{k,k+1}^{(N)}$ which encode the rates at which the particles hop between site k and $k+1$.

$$M = \sum_{k=1}^L \mathbb{1}^{\otimes(k-1)} \otimes M_{k,k+1}^{(N)} \otimes \mathbb{1}^{\otimes(L-k-1)} . \quad (64)$$

For a model for which the rates do not depend on the site such as the one we are discussing, the local matrices do not depend on the site: $M_{k,k+1}^{(N)} \equiv M_{loc}^{(N)}$. For example, for $N = 2$, in the basis (11,12,10,21,22,20,01,02,00)

$$M_{loc}^{(2)} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & q & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & q & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & -q & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & q & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & -q & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & -q & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} . \quad (65)$$

The dots represent matrix elements equal to zero. The matrix product expression (24) gives the stationary state eigenvector if for all configuration $\vec{j}$ with a particle of class j_k at site k

$$\sum_{\vec{i}} M_{\vec{j}, \vec{i}} \text{Tr} \left[X_{i_1}^{(N)} \dots X_{i_L}^{(N)} \right] = 0, \quad (66)$$

or in terms of the local jump matrix

$$\sum_{k=1}^L \sum_{i_k, i_{k+1}=0}^N \left(M_{loc}^{(N)} \right)_{j_k j_{k+1}, i_k i_{k+1}} \text{Tr} \left[X_{j_1}^{(N)} \dots X_{j_{k-1}}^{(N)} X_{i_k}^{(N)} X_{i_{k+1}}^{(N)} X_{j_{k+2}}^{(N)} \dots X_{j_L}^{(N)} \right] = 0. \quad (67)$$

This equation will be satisfied if there exists some additional ‘hat’ matrices [30, 31] $\hat{X}_0^{(N)}, \dots, \hat{X}_N^{(N)}$ such that

$$\sum_{i, i'=0}^N \left(M_{loc}^{(N)} \right)_{jj', ii'} X_i^{(N)} X_{i'}^{(N)} = X_j^{(N)} \hat{X}_{j'}^{(N)} - \hat{X}_j^{(N)} X_{j'}^{(N)}, \quad (68)$$

leading to a cancellation of all the terms two by two. Knowing the form of the local matrix $M_{loc}^{(N)}$, the previous equation (68) can be rewritten as:

$$\text{for } 0 \leq J \leq N \quad \left[X_J^{(N)}, \hat{X}_J^{(N)} \right] = 0, \quad (69)$$

$$\text{for } 0 < J < K \leq N \quad \text{or} \quad 0 = K < J \leq N$$

$$X_J^{(N)} X_K^{(N)} - q X_K^{(N)} X_J^{(N)} = \hat{X}_J^{(N)} X_K^{(N)} - X_J^{(N)} \hat{X}_K^{(N)} \quad (70)$$

$$= X_K^{(N)} \hat{X}_J^{(N)} - \hat{X}_K^{(N)} X_J^{(N)}. \quad (71)$$

Again, the fact that the case $0 = K < J \leq N$ is singled out comes from our choice to give the holes the index 0 instead of $N+1$ as the particle hierarchy would have required. Subtracting (70) from (71) we also have the additional relation valid for all values of J and K ,

$$\left[X_J^{(N)}, \hat{X}_K^{(N)} \right] + \left[X_K^{(N)}, \hat{X}_J^{(N)} \right] = 0. \quad (72)$$

This equation holds even for $J = K$ because of equation (69). It tells us that $\left[X_J^{(N)}, \hat{X}_K^{(N)} \right]$ must be antisymmetric under the exchange between J and K .

In the next subsection we will prove by induction on N that the following $\hat{X}^{(N)}$ matrices and the $X^{(N)}$ matrices defined in equation (25) verify equations (69) and (70):

$$\hat{X}_0^{(N)} = -(1-q)X_0^{(N)} + \sum_{M=0}^{N-1} a_{0M}^{(N)} \otimes \hat{X}_M^{(N-1)} \quad (73)$$

$$\hat{X}_J^{(N)} = \sum_{M=0}^{N-1} a_{JM}^{(N)} \otimes \hat{X}_M^{(N-1)} \quad \text{for } 1 \leq J \leq N, \quad (74)$$

with $\hat{X}_0^{(1)} = 1$ and $\hat{X}_1^{(1)} = q$. The $a_{JM}^{(N)}$ are still given by equations (27)–(33). In contrast with the $X_J^{(N)}$ matrices (25), the expression for the $\hat{X}_J^{(N)}$ in terms of the $a_{JM}^{(N)}$ is not exactly the same as for TASEP: q enters both (73) and the value of $\hat{X}_1^{(1)}$.

We first check the simple cases $N = 1$ and $N = 2$. Using $X_0^{(1)} = 1$, $X_1^{(1)} = 1$, $\hat{X}_0^{(1)} = 1$ and $\hat{X}_1^{(1)} = q$, we see that relations (69), (70) and (71) are trivially satisfied for $N = 1$. For $N = 2$ we find

$$\begin{aligned}\hat{X}_0^{(2)} &= -(1-q)X_0^{(2)} + a_{00}^{(2)} \otimes \hat{X}_0^{(1)} + a_{01}^{(2)} \otimes \hat{X}_1^{(1)} \\ &= -(1-q)E + q\mathbb{1} + \epsilon = qE - (1-q)\mathbb{1} \\ \hat{X}_1^{(2)} &= a_{10}^{(2)} \otimes \hat{X}_0^{(1)} + a_{11}^{(2)} \otimes \hat{X}_1^{(1)} \\ &= q\delta + \mathbb{1} = qD + (1-q)\mathbb{1} \\ \hat{X}_2^{(2)} &= a_{10}^{(2)} \otimes \hat{X}_0^{(1)} = qA\end{aligned}$$

Clearly, because $X_0^{(2)} = E$, $X_1^{(2)} = D$ and $X_2^{(2)} = A$, the commutation relations (69) are satisfied. One can check, for example, that

$$\begin{aligned}\hat{X}_1^{(N)}X_0^{(N)} - X_1^{(N)}\hat{X}_0^{(N)} &= (qD + (1-q)\mathbb{1})E - D(qE - (1-q)\mathbb{1}) \\ &= (1-q)(D + E) \\ X_0^{(N)}\hat{X}_1^{(N)} - \hat{X}_0^{(N)}X_1^{(N)} &= E(qD + (1-q)\mathbb{1}) - (qE - (1-q)\mathbb{1})D \\ &= (1-q)(D + E)\end{aligned}$$

so that (70) and (71) are satisfied for $J = 1$, $K = 0$ and the other cases are similarly verified.

In the next subsection, we prove the three quadratic relations (69), (70) and (71) which are sufficient for the matrix product expression (24) to give the stationary state eigenvector of the Markov matrix. For each relation, we must distinguish the case where some indices are equal to zero (which will be proved in Appendix C), giving six relations to prove. The proofs all have a similar pattern. They are done by induction on N and rely heavily on the symmetry and commutation relations of section 5.

6.2. Proof of equation (69)

If $J \neq 0$ we have

$$\begin{aligned}\left[X_J^{(N)}, \hat{X}_J^{(N)}\right] &= \\ \sum_{M=0}^{N-1} \sum_{M'=0}^{N-1} &\left[\left(a_{JM}^{(N)}a_{JM'}^{(N)}\right) \otimes \left(X_M^{(N-1)}\hat{X}_{M'}^{(N-1)}\right) - \left(a_{JM'}^{(N)}a_{JM}^{(N)}\right) \otimes \left(\hat{X}_{M'}^{(N-1)}X_M^{(N-1)}\right)\right].\end{aligned}\tag{75}$$

Using the quadratic relation (59) to exchange $a_{JM'}^{(N)}$ and $a_{JM}^{(N)}$, we get

$$\left[X_J^{(N)}, \hat{X}_J^{(N)}\right] = \sum_{M=0}^{N-1} \sum_{M'=0}^{N-1} \left(a_{JM}^{(N)}a_{JM'}^{(N)}\right) \otimes \left[X_M^{(N-1)}, \hat{X}_{M'}^{(N-1)}\right].\tag{76}$$

Using the fact that $a_{JM}^{(N)}a_{JM'}^{(N)}$ is symmetric in M and M' (59), and that from (72) $\left[X_M^{(N-1)}, \hat{X}_{M'}^{(N-1)}\right]$ is antisymmetric in M and M' by induction, we find that $\left[X_J^{(N)}, \hat{X}_J^{(N)}\right] = 0$.

For $J = 0$, we have an extra term compared to (75):

$$\begin{aligned} [X_0^{(N)}, \hat{X}_0^{(N)}] &= [X_0^{(N)}, -(1-q)X_0^{(N)}] \\ &+ \sum_{M=0}^{N-1} \sum_{M'=0}^{N-1} \left[(a_{0M}^{(N)} a_{0M'}^{(N)}) \otimes (X_M^{(N-1)} \hat{X}_{M'}^{(N-1)}) - (a_{0M'}^{(N)} a_{0M}^{(N)}) \otimes (\hat{X}_{M'}^{(N-1)} X_M^{(N-1)}) \right]. \end{aligned} \quad (77)$$

But this extra term, being the commutator of $X_0^{(N)}$ with itself, vanishes and (77) reduces to (76) in the case $J = 0$ giving also $[X_0^{(N)}, \hat{X}_0^{(N)}] = 0$.

In the rest of the proofs, we will use the following convention to lighten the notation: $X_M^{(N-1)}$ and $\hat{X}_M^{(N-1)}$ will be written respectively X_M and $\hat{X}_M$, while the $a_{JM}^{(N)}$ will just be written a_{JM} .

6.3. Proof of equation (70) ($0 < J < K$)

Let us define

$$\mathcal{A} = X_J^{(N)} X_K^{(N)} - q X_K^{(N)} X_J^{(N)} - \hat{X}_J^{(N)} X_K^{(N)} + X_J^{(N)} \hat{X}_K^{(N)}. \quad (78)$$

We want to show that $\mathcal{A} = 0$. We have:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = \sum_{M \in \{0\} \cup [J, N-1]} \sum_{M' \in \{0\} \cup [K, N-1]} & [(a_{JM} a_{KM'}) \otimes (X_M X_{M'}) - q(a_{KM'} a_{JM}) \otimes (X_{M'} X_M) \\ & - (a_{JM} a_{KM'}) \otimes (\hat{X}_M X_{M'}) + (a_{JM} a_{KM'}) \otimes (X_M \hat{X}_{M'})]. \end{aligned} \quad (79)$$

We will cut the double sum into 4 parts and write $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4$, gathering sectors from the partition (60). $\mathcal{A}_1$ will be made of the sectors 4, 5 and 6 of (60), $\mathcal{A}_2$ of the sectors 1, 3, 10 and 12, $\mathcal{A}_3$ of the sectors 2, 7, 9 and 11, and $\mathcal{A}_4$ of the sector 8:

$$\mathcal{A}_1 : \quad M \in [J, K-1] \text{ and } M' \in \{0\} \cup [K, N-1] \quad (80)$$

$$\mathcal{A}_2 : \quad M \in \{0\} \cup [K+1, N-1] \text{ and } M' \in \{0\} \cup [K+1, N-1] \quad (81)$$

$$\mathcal{A}_3 : \quad \begin{cases} M \in \{0\} \cup [K+1, N-1] \text{ and } M' = K \\ M = K \text{ and } M' \in \{0\} \cup [K+1, N-1] \end{cases} \quad (82)$$

$$\mathcal{A}_4 : \quad M = K \text{ and } M' = K. \quad (83)$$

We will now show that $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ and $\mathcal{A}_4$ are all equal to zero.

We begin with $\mathcal{A}_1$ and use the commutation relation (62). We get

$$\mathcal{A}_1 = \sum_{M=J}^{K-1} \sum_{M' \in \{0\} \cup [K, N-1]} (a_{JM} a_{KM'}) \otimes (X_M X_{M'} - q X_{M'} X_M - \hat{X}_M X_{M'} + X_M \hat{X}_{M'}) . \quad (84)$$

By induction, $X_M X_{M'} - q X_{M'} X_M - \hat{X}_M X_{M'} + X_M \hat{X}_{M'}$ vanishes (70), and thus $\mathcal{A}_1 = 0$.

For $\mathcal{A}_2$, using the commutation relation (61), we obtain

$$\mathcal{A}_2 = \sum_{M, M' \in \{0\} \cup [K+1, N-1]} (a_{JM} a_{KM'}) \otimes ([X_M, X_{M'}] - \hat{X}_M X_{M'} + X_M \hat{X}_{M'}) . \quad (85)$$

From (58), $a_{JM}a_{KM'}$ is symmetric under the exchange of M and M' while $[X_M, X_{M'}]$ is antisymmetric, as well as $-\hat{X}_M X_{M'} + X_M \hat{X}_{M'}$ which follows from a rewriting of (72), by induction. This gives $\mathcal{A}_2 = 0$.

For $\mathcal{A}_3$, using the commutation relations (61) and (63), we have

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_3 = & \sum_{M' \in \{0\} \cup [K+1, N-1]} [(a_{JK}a_{KM'}) \otimes (X_K X_{M'} - q X_{M'} X_K - \hat{X}_K X_{M'} + X_K \hat{X}_{M'}) \\ & - q(1-q)(a_{KK}a_{JM'}) \otimes (X_{M'} X_K)] \\ & + \sum_{M \in \{0\} \cup [K+1, N-1]} (a_{JM}a_{KK}) \otimes (X_M X_K - X_K X_M - \hat{X}_M X_K + X_M \hat{X}_K) \end{aligned} \quad (86)$$

The first sum corresponds to setting $M = K$ and the second to $M' = K$. By induction, $X_K X_{M'} - q X_{M'} X_K - \hat{X}_K X_{M'} + X_K \hat{X}_{M'} = 0$ in the first sum (70). With the help of the commutation relation (61) in sectors 2 and 11 for $a_{KK}a_{JM'}$, we obtain, after renaming the dummy variable M' to M

$$\mathcal{A}_3 = \sum_{M \in \{0\} \cup [K+1, N-1]} (a_{JM}a_{KK}) \otimes (q X_M X_K - X_K X_M - \hat{X}_M X_K + X_M \hat{X}_K) . \quad (87)$$

By induction, $q X_M X_K - X_K X_M - \hat{X}_M X_K + X_M \hat{X}_K = 0$ from (71), as only $M = 0$ and $M > K$ contribute to the sum. $\mathcal{A}_3$ is therefore equal to 0.

Finally, for $\mathcal{A}_4$, we have

$$\mathcal{A}_4 = (a_{JK}a_{KK} - qa_{KK}a_{JK}) \otimes (X_K X_K) + (a_{JK}a_{KK}) \otimes (-\hat{X}_K X_K + X_K \hat{X}_K) . \quad (88)$$

In the first term $a_{JK}a_{KK} - qa_{KK}a_{JK} = 0$ because of the commutation relation (61), and in the last term $-\hat{X}_K X_K + X_K \hat{X}_K = 0$ by induction because of (69). Thus $\mathcal{A}_4 = 0$ which proves (70) in the case $0 < J < K$.

6.4. Proof of equation (71) ($0 < J < K$)

Let us define

$$\mathcal{B} = X_J^{(N)} X_K^{(N)} - q X_K^{(N)} X_J^{(N)} - X_K^{(N)} \hat{X}_J^{(N)} + \hat{X}_K^{(N)} X_J^{(N)} \quad (89)$$

We want to show that $\mathcal{B} = 0$. We have

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = & \sum_{M \in \{0\} \cup [J, N-1]} \sum_{M' \in \{0\} \cup [K, N-1]} [(a_{JM}a_{KM'}) \otimes (X_M X_{M'}) - q(a_{KM'}a_{JM}) \otimes (X_{M'} X_M) \\ & - (a_{KM'}a_{JM}) \otimes (X_{M'} \hat{X}_M) + (a_{KM'}a_{JM}) \otimes (\hat{X}_{M'} X_M)] . \end{aligned} \quad (90)$$

Again, we cut the double sum into 4 parts and write $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 + \mathcal{B}_3 + \mathcal{B}_4$, gathering sectors from the partition (60). We use the same sectors as in the previous proof (80–83). At this point, we have to calculate $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$ and $\mathcal{B}_4$. Using the same arguments as in subsection 6.3, we find that they are all equal to zero, which proves (71) in the case $0 < J < K$.

7. Conclusion

A solution for the stationary state of the multispecies TASEP was first proposed by Ferrari and Martin in [27]. Their solution was expressed in terms of numbers of configurations of a multiline queueing process. A matrix product representation of this solution was then given in [28] for the case of periodic boundary conditions, making the link with several works on one dimensional exclusion processes in the physics literature. In this paper, we have extended this matrix product solution to the previously unsolved problem of the multispecies partially asymmetric exclusion process on a ring. In this case, there is no known analogue to Ferrari-Martin queueing construction.

The mathematical structure of the matrix product solution for the stationary state reveals several interesting features. First, the matrices are defined in a recursive fashion (see eq. (25)) using auxiliary matrices $a_{ij}^{(N)}$, and are ultimately built as tensor products of the fundamental matrices $\{\delta, \epsilon, A, \mathbb{1}\}$ used in the $N = 2$ solution. Second, the matrices obey quadratic relations involving additional hat matrices and these relations generalize the quadratic algebra of the $N = 2$ case (10–11). Such relations have only been verified before in a few cases (see [3] section 9 for a discussion). In our solution the key to satisfying these conditions lies in the algebraic properties of the auxiliary matrices $a_{ij}^{(N)}$ which we presented in section 5.

The recursive structure of the solution allows us to construct a transfer matrix relating the stationary weight of a configuration with N species of particles to the weights of configurations with $N - 1$ species. For the case $q = 0$ the transfer matrix recovers the algorithm of Ferrari and Martin, whereas for $q \neq 0$ the structure is more complicated.

In this paper we have not attempted to calculate physical quantities of interest, such as correlation functions. Such calculations begin with the computation of the normalisation $Z(P_0, \dots, P_N)$, defined in (24), for all system sizes and particle numbers. Even for the two species case this computation is not easy and to our knowledge has only been carried out for the totally asymmetric case [20]. The transfer matrix construction of section 4 may provide a formalism for the computation of the normalisation for partial asymmetry and general N .

There is a well known correspondence between the matrix product representation for the one species ASEP with open boundaries and the two species ASEP on a ring: the matrices corresponding to the holes and to the first class particles are the same in both cases, but the matrix corresponding to the second class particles on the ring becomes associated with the boundaries for the open system. This correspondence should be investigated further in the case of general N species systems. Another interesting extension is the case of systems with different rates for the different classes of particles, which contains in particular the ABC model [32].

The multispecies asymmetric exclusion process shares with a small number of statistical physics models the significant property of being integrable. In particular, this means that its Markov matrix can be diagonalized using the (nested) Bethe

Ansatz. The matrix product representation of the stationary state and the Bethe Ansatz [33, 34, 35, 36, 10, 37, 38, 5, 39, 8] are two of the most used techniques used to obtain exact results for the ASEP. Thanks to its rich structure, the solution of the multispecies ASEP might help to understand more precisely their relationship.

Acknowledgments

We thank Deepak Dhar and Pablo Ferrari for many useful discussions.

Appendix A. Traces of products of δ , ϵ and A

In this appendix, we show that the product of elements of the set $\mathcal{F} = \{\delta, \epsilon, A, \mathbb{1}\}$ with at least one A has a nonzero trace for $q \neq 0$ if and only if there is the same number of δ and ϵ in the product. (The case $q = 0$ has already been dealt with in section 4.4.) We use an explicit calculation of one of these traces. For $q \neq 0$ we can first use the relations (20, 21) to rearrange any product of elements of $\mathcal{F}$ by putting all the A to the left. The result will be proportional to $\text{Tr}(A^p w)$ where w is a product of elements from the set $\{\delta, \epsilon\}$. We call r the number of δ in w and s the number of ϵ . Using again (20) and (21) to commute all the A matrices to the right, we get

$$\text{Tr}(A^p w) = q^{p(s-r)} \text{Tr}(w A^p). \quad (\text{A.1})$$

Using the cyclicity of the trace, we see that if $p \geq 1$ and $r \neq s$, $\text{Tr}(A^p w)$ must be equal to 0.

If $p \geq 1$ but $r = s$, the algebra (19) between δ and ϵ allows one to rewrite w as a linear combination with nonnegative coefficients (for q between 0 and 1) of terms of the form $\epsilon^{r'} \delta^{r'}$ with $r' \leq r$. We want to show that $\text{Tr}(A^p \epsilon^{r'} \delta^{r'}) > 0$ in order to prove that $\text{Tr}(A^p w) \neq 0$ if $p \geq 1$ and $r = s$.

Let us define

$$f_r^{(p)} \equiv \text{Tr}(A^p \delta^r \epsilon^r). \quad (\text{A.2})$$

We now show how $f_r^{(p)}$ can be calculated easily by recursion on r . Using first the deformed commutator (19) between δ and ϵ once, we get

$$f_{r+1}^{(p)} = \text{Tr}(A^p \delta^r (q\epsilon\delta + (1-q)\epsilon^r)) = (1-q)f_r^{(p)} + q \text{Tr}(A^p \delta^r \epsilon \delta \epsilon^r). \quad (\text{A.3})$$

Using (19) r more times to push the rightmost δ to the right we obtain

$$\begin{aligned} f_{r+1}^{(p)} &= \dots = (1-q)(1+q+\dots+q^k)f_r^{(p)} + q^{k+1} \text{Tr}(A^p \delta^r \epsilon^{k+1} \delta \epsilon^{r-k}) \\ &= \dots = (1-q^{r+1})f_r^{(p)} + q^{r+1} \text{Tr}(A^p \delta^r \epsilon^{r+1} \delta). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Using equation (20) to commute the rightmost δ through all the A , we get

$$f_{r+1}^{(p)} = (1-q^{r+1})f_r^{(p)} + q^{p+r+1}f_{r+1}^{(p)}. \quad (\text{A.5})$$

We have found the recurrence relation

$$f_{r+1}^{(p)} = \frac{1-q^{r+1}}{1-q^{p+r+1}} f_r^{(p)}, \quad (\text{A.6})$$

which gives

$$f_r^{(p)} = \frac{\text{Tr } A^p}{\left[\begin{matrix} r+p \\ p \end{matrix} \right]_q} . \quad (\text{A.7})$$

Here $\left[\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right]_q$ is the q -deformed binomial coefficient (see e.g. [15]) defined as

$$\left[\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right]_q = \frac{[a]_q [a-1]_q \dots [1]_q}{([b]_q [b-1]_q \dots [1]_q) ([a-b]_q [a-b-1]_q \dots [1]_q)} \xrightarrow{q \rightarrow 1} \binom{a}{b} , \quad (\text{A.8})$$

the q -deformed numbers $[a]_q$ being defined by

$$[a]_q = \frac{1 - q^a}{1 - q} = 1 + q + \dots + q^{a-1} \xrightarrow{q \rightarrow 1} a . \quad (\text{A.9})$$

Also, using representation (13) we may evaluate

$$\text{Tr } A^p = \frac{1}{1 - q^p} . \quad (\text{A.10})$$

Thus, the $f_{r'}^{(p)}$ are positive for all r' up to the factor $\text{Tr } A^p$, which means that $\text{Tr}(A^p w)$ cannot be equal to zero if $p \geq 1$ and $r = s$. We have found a necessary and sufficient condition for a product of elements from $\mathcal{F}$ to be different from 0.

Appendix B. Proof of the characterization of the Transfer Matrix

We now prove the characterization of the nonzero matrix elements of the transfer matrix $T_L^{(N)}$, given in section 4.2. From (44), $\langle \vec{j} | T_L^{(N)} | \vec{i} \rangle$ is a trace of products of $a_{ji}^{(N)}$. Because of (27), if there exists a site l between 1 and L such that $0 < i_l < j_l$, then $\langle \vec{j} | T_L^{(N)} | \vec{i} \rangle = 0$. Thus, for all l , we must have either $i_l = 0$ or $j_l \leq i_l$ for the matrix element of $T_L^{(N)}$ to be nonzero. In terms of the particles in the configurations $\vec{i}$ and $\vec{j}$, this means that a hole in $\vec{i}$ can become a particle of any class between 0 and N by application of the transfer matrix, and that a particle of class $i_l \geq 1$ can become a particle of class j_l only if $0 \leq j_l \leq i_l$. For example, for $N = 2$ (fig. 1), only the five following transitions are allowed in the transfer matrix: $0 \rightarrow 0$, $0 \rightarrow 1$, $0 \rightarrow 2$, $1 \rightarrow 0$ and $1 \rightarrow 1$. The transition $1 \rightarrow 2$ is forbidden. For $N = 3$ (fig. 2), 9 transitions are allowed: $0 \rightarrow 0$, $0 \rightarrow 1$, $0 \rightarrow 2$, $0 \rightarrow 3$, $1 \rightarrow 0$, $1 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 0$, $2 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 2$. The transitions $1 \rightarrow 2$, $1 \rightarrow 3$ and $2 \rightarrow 3$ are forbidden.

But this local constraint on the classes of the particles in $\vec{i}$ and $\vec{j}$ at each site l does not characterize completely the nonzero matrix elements of $T_L^{(N)}$: we will see that there is also a non-local constraint on $\vec{i}$ and $\vec{j}$. We observe that the expression for the transfer matrix $T_L^{(N)}$ (44) can be simplified further by noting that the $a_{ji}^{(N)}$ are themselves tensorial products of $N-1$ elements of $\mathcal{F} = \{\delta, \epsilon, A, \mathbb{1}\}$ (27–33). Introducing the notation

$$a_{ji}^{(N)} = a_{ji}^{(N,1)} \otimes \dots \otimes a_{ji}^{(N,N-1)} , \quad (\text{B.1})$$

we have

$$\begin{aligned} a_{j_1 i_1}^{(N)} \dots a_{j_L i_L}^{(N)} &= \left(a_{j_1 i_1}^{(N,1)} \otimes \dots \otimes a_{j_1 i_1}^{(N,N-1)} \right) \dots \left(a_{j_L i_L}^{(N,1)} \otimes \dots \otimes a_{j_L i_L}^{(N,N-1)} \right) \\ &= \left(a_{j_1 i_1}^{(N,1)} \dots a_{j_L i_L}^{(N,1)} \right) \otimes \dots \otimes \left(a_{j_1 i_1}^{(N,N-1)} \dots a_{j_L i_L}^{(N,N-1)} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

the $a_{ji}^{(N,k)}$ being elements of $\mathcal{F}$. Thus, we have for the transfer matrix element

$$\langle \vec{j} | T_L^{(N)} | \vec{i} \rangle = \text{Tr} \left(a_{j_1 i_1}^{(N,1)} \dots a_{j_L i_L}^{(N,1)} \right) \times \dots \times \text{Tr} \left(a_{j_1 i_1}^{(N,N-1)} \dots a_{j_L i_L}^{(N,N-1)} \right) \quad (\text{B.3})$$

$$= \prod_{r=1}^{N-1} \text{Tr} \left[\prod_{l=1}^L a_{j_l i_l}^{(N,r)} \right]. \quad (\text{B.4})$$

Representation (B.4) shows that an element of the transfer matrix can be written as a product of $N - 1$ traces of products of L fundamental matrices $\{\delta, \epsilon, A, \mathbb{1}\}$. In the following, we shall call $\text{Tr} \left[\prod_{l=1}^L a_{j_l i_l}^{(N,r)} \right]$ the r th trace of $\langle \vec{j} | T_L^{(N)} | \vec{i} \rangle$. As $T_L^{(N)}$ is expressed in terms of traces of elements of $\mathcal{F}$, we have to study which elements of $\mathcal{F}$ have zero trace and which have nonzero trace in order to determine which are the nonzero matrix elements of $T_L^{(N)}$. In Appendix A we showed, using the quadratic algebra (19–21), that the trace of a product of elements of $\mathcal{F}$ with at least one A is nonzero (for $q \neq 0$) if and only if the number of δ is the same as the number of ϵ in the product. In terms of the matrix elements of the transfer matrix $T_L^{(N)}$, this means that each of the $N - 1$ traces of $\langle \vec{j} | T_L^{(N)} | \vec{i} \rangle$ must contain the same number of δ and ϵ as we now show.

The condition of having at least one A in each trace is automatically verified if we choose the configuration $\vec{j}$ such that it contains at least one particle of class N because a factor $a_{N0}^{(N)}$ appears (33). From the expressions (27–33) for the $a_{ji}^{(N)}$, we see that a δ appears in the r th trace of $\langle \vec{j} | T_L^{(N)} | \vec{i} \rangle$ for all l such that $j_l = r$ and either $i_l = 0$ or $i_l > r$. This corresponds to sites at which a hole or a particle of class strictly larger than r is replaced by a particle of class r . On the other hand, an ϵ appears in the r th trace of $\langle \vec{j} | T_L^{(N)} | \vec{i} \rangle$ in the expression (B.4) for all l such that $i_l = r$ and $0 \leq j_l < r$. This corresponds to sites at which a particle of class r becomes a hole or a particle of class strictly lower than r . For example for $N = 2$, δ corresponds to $0 \rightarrow 1$ and ϵ to $1 \rightarrow 0$ (see fig. 1). For $N = 3$, a δ appears in the first trace for $0 \rightarrow 1$ and $2 \rightarrow 1$ and an ϵ appears for $1 \rightarrow 0$. And there is a δ in the second trace for $0 \rightarrow 2$ and an ϵ for $2 \rightarrow 0$ and $2 \rightarrow 1$ (see fig. 2). In fig. B1, we draw all the transitions involving a particle of class 2 when $N = 4$ (the ones which are forbidden are crossed out), along with the corresponding values for $a_{ji}^{(4,2)}$ (second trace). To summarize, in the r th trace:

- a δ appears when a particle of class $0, r + 1, r + 2, \dots, N - 1$ in $\vec{i}$ is transformed in a particle of class r at the same site in $\vec{j}$.
- an ϵ appears when a particle of class of class r in $\vec{i}$ is transformed in a particle of class $0, 1, 2, \dots, r - 1$ at the same site in $\vec{j}$.

Therefore, the requirement that the number of δ and ϵ is the same in the r th trace of $T_L^{(N)}$ in (B.4) implies that the number of particles of class r between 1 and $N - 1$ is conserved by the action of the transfer matrix $T_L^{(N)}$. But we emphasize that neither the

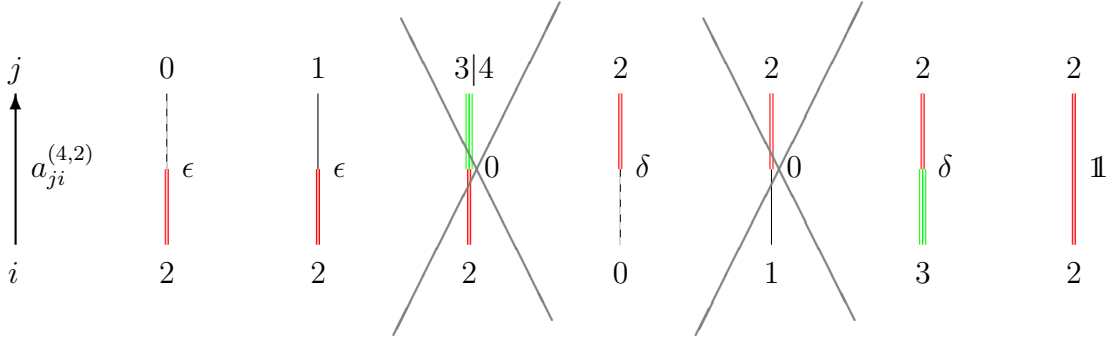


Figure B1. All the situations involving a particle of class $r = 2$ for $N = 4$. A particle of class 0 is represented by a vertical dashed line, a particle of class 1 by a full line, a particle of class 2 by a double line, and a particle of class 3 or 4 by a triple line. The crossed-out diagrams correspond to situations which are forbidden by (27).

number of holes nor the number of particles of class N is conserved: the number of holes decreases while the number of particles of class N increases. This concludes the proof of the characterization of the nonzero matrix elements of the transfer matrix $T_L^{(N)}$.

Appendix C. Proofs of equations (70) and (71) for $K = 0 < J$

The commutation relations between $a_{JM}^{(N)}$ and $a_{KM'}^{(N)}$ were given in section 5 for the case $0 < J < K$. They were used in section 6 to prove equations (70) and (71) for $0 < J < K$. In this appendix, we will write the commutation relations between $a_{JM}^{(N)}$ and $a_{0M'}^{(N)}$ and use them to prove equations (70) and (71) for $K = 0 < J$.

Appendix C.1. Commutation relations

We partition the ensemble of couples (M, M') for which $a_{JM}^{(N)}$ and $a_{0M'}^{(N)}$ are defined and non-zero (that is $M \in \{0\} \cup [J, N-1]$ and $M' \in [0, N-1]$) into 12 sectors as

$$\begin{array}{ccccc}
 M' = 0 & 0 < M' < J & M' = J & J < M' \leq N-1 & \\
 M = 0 & \bar{1} & \bar{4} & \bar{7} & \bar{10} \\
 M = J & \bar{2} & \bar{5} & \bar{8} & \bar{11} \\
 J < M \leq N-1 & \bar{3} & \bar{6} & \bar{9} & \bar{12}
 \end{array} \quad .(C.1)$$

Then, we have the following commutation relations between $a_{JM}^{(N)}$ and $a_{0M'}^{(N)}$:

$$a_{JM}^{(N)} a_{0M'}^{(N)} = q a_{0M'}^{(N)} a_{JM}^{(N)} \quad \text{in sectors } \bar{4}, \bar{5}, \bar{6} \quad (C.2)$$

$$a_{JM}^{(N)} a_{0M'}^{(N)} = a_{0M'}^{(N)} a_{JM}^{(N)} \quad \text{in sectors } \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{11} \text{ and } \bar{12} \quad (C.3)$$

$$a_{JM}^{(N)} a_{0M'}^{(N)} = q a_{0M'}^{(N)} a_{JM}^{(N)} + (1-q) a_{0M}^{(N)} a_{JM'}^{(N)} \quad \text{in sectors } \bar{7} \text{ and } \bar{9} . \quad (C.4)$$

Appendix C.2. Proof of equation (70) ($K = 0 < J$)

Let us define

$$\bar{\mathcal{A}} = X_J^{(N)} X_0^{(N)} - q X_0^{(N)} X_J^{(N)} - \hat{X}_J^{(N)} X_0^{(N)} + X_J^{(N)} \hat{X}_0^{(N)} . \quad (C.5)$$

We want to show that $\overline{\mathcal{A}} = 0$. With the extra term $-(1-q)X_0^{(N)}$ that comes in the recursive expression for $\hat{X}_0^{(N)}$, the expression for $\overline{\mathcal{A}}$ rewrites

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{A}} = \sum_{M \in \{0\} \cup [J, N-1]} \sum_{M'=0}^{N-1} [q(a_{JM}a_{0M'}) \otimes (X_M X_{M'}) - q(a_{0M'}a_{JM}) \otimes (X_{M'} X_M) \\ - (a_{JM}a_{0M'}) \otimes (\hat{X}_M X_{M'}) + (a_{JM}a_{0M'}) \otimes (X_M \hat{X}_{M'})] . \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Like in the case $0 < J < K$, we will cut the double sum into 4 parts and write $\overline{\mathcal{A}} = \overline{\mathcal{A}}_1 + \overline{\mathcal{A}}_2 + \overline{\mathcal{A}}_3 + \overline{\mathcal{A}}_4$, gathering sectors from the partition (C.1). $\overline{\mathcal{A}}_1$ will be made of the sectors $\overline{4}$, $\overline{5}$ and $\overline{6}$ of (C.1), $\overline{\mathcal{A}}_2$ of the sectors $\overline{1}$, $\overline{3}$, $\overline{10}$ and $\overline{12}$, $\overline{\mathcal{A}}_3$ of the sectors $\overline{2}$, $\overline{7}$, $\overline{9}$ and $\overline{11}$, and $\overline{\mathcal{A}}_4$ of the sector $\overline{8}$:

$$\overline{\mathcal{A}}_1 : \quad M \in \{0\} \cup [J, N-1] \text{ and } M' \in [1, J-1] \quad (\text{C.7})$$

$$\overline{\mathcal{A}}_2 : \quad M \in \{0\} \cup [J+1, N-1] \text{ and } M' \in \{0\} \cup [J+1, N-1] \quad (\text{C.8})$$

$$\overline{\mathcal{A}}_3 : \quad \begin{cases} M = J \text{ and } M' \in \{0\} \cup [J+1, N-1] \\ M \in \{0\} \cup [J+1, N-1] \text{ and } M' = J \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

$$\overline{\mathcal{A}}_4 : \quad M = J \text{ and } M' = J . \quad (\text{C.10})$$

We will now show that $\overline{\mathcal{A}}_1$, $\overline{\mathcal{A}}_2$, $\overline{\mathcal{A}}_3$ and $\overline{\mathcal{A}}_4$ are all equal to zero.

We begin with $\overline{\mathcal{A}}_1$ and use the commutation relation (C.2). We get

$$\overline{\mathcal{A}}_1 = \sum_{M=0}^{N-1} \sum_{M'=1}^{J-1} (a_{JM}a_{0M'}) \otimes (qX_M X_{M'} - X_{M'} X_M - \hat{X}_M X_{M'} + X_M \hat{X}_{M'}) . \quad (\text{C.11})$$

But, from (71), $qX_M X_{M'} - X_{M'} X_M - \hat{X}_M X_{M'} + X_M \hat{X}_{M'} = 0$ by induction. Thus, $\overline{\mathcal{A}}_1 = 0$.

For $\overline{\mathcal{A}}_2$, using the commutation relation (C.3), we obtain

$$\overline{\mathcal{A}}_2 = \sum_{M, M' \in \{0\} \cup [J+1, N-1]} (a_{JM}a_{0M'}) \otimes (q[X_M, X_{M'}] - \hat{X}_M X_{M'} + X_M \hat{X}_{M'}) . \quad (\text{C.12})$$

From (58), $a_{JM}a_{0M'}$ is symmetric under the exchange of M and M' while $[X_M, X_{M'}]$ is antisymmetric, as well as $-\hat{X}_M X_{M'} + X_M \hat{X}_{M'}$ because of (72) by induction. This gives $\overline{\mathcal{A}}_2 = 0$.

For $\overline{\mathcal{A}}_3$, using the commutation relations (C.3) and (C.4), we have

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{A}}_3 = \sum_{M' \in \{0\} \cup [J+1, N-1]} (a_{JJ}a_{0M'}) \otimes (q[X_J, X_{M'}] - \hat{X}_J X_{M'} + X_J \hat{X}_{M'}) \\ + \sum_{M \in \{0\} \cup [J+1, N-1]} [(a_{JM}a_{0J}) \otimes (qX_M X_J - X_J X_M - \hat{X}_M X_J + X_M \hat{X}_J) \\ + (1-q)(a_{0M}a_{JJ}) \otimes (X_J X_M)] \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

By induction, $qX_M X_J - X_J X_M - \hat{X}_M X_J + X_M \hat{X}_J = 0$ in the second sum (71). With the help of the commutation relation (C.3) in sectors $\overline{2}$ and $\overline{11}$ for $a_{0M}a_{JJ}$, we obtain,

after renaming the dummy variable M' to M

$$\overline{\mathcal{A}}_3 = \sum_{M \in \{0\} \cup [J+1, N-1]} (a_{JJ}a_{0M}) \otimes (X_J X_M - q X_M X_J - \hat{X}_J X_M + X_J \hat{X}_M) . \quad (\text{C.14})$$

From (70), $X_J X_M - q X_M X_J - \hat{X}_J X_M + X_J \hat{X}_M = 0$ by induction. $\overline{\mathcal{A}}_3$ is then equal to 0.

Finally, for $\overline{\mathcal{A}}_4$,

$$\overline{\mathcal{A}}_4 = q (a_{JJ}a_{0J} - a_{0J}a_{JJ}) \otimes (X_J X_J) + (a_{JJ}a_{0J}) \otimes (-\hat{X}_J X_J + X_J \hat{X}_J) . \quad (\text{C.15})$$

In the first term $a_{JJ}a_{0J} - a_{0J}a_{JJ} = 0$ because of the commutation relation (C.3), and in the last term $-\hat{X}_J X_J + X_J \hat{X}_J = 0$ by induction (69). Thus $\overline{\mathcal{A}}_4 = 0$, which proves (70) in the case $K = 0 < J$.

Appendix C.3. Proof of equation (71) ($K = 0 < J$)

Let us define

$$\overline{\mathcal{B}} = X_J^{(N)} X_0^{(N)} - q X_0^{(N)} X_J^{(N)} - X_0^{(N)} \hat{X}_J^{(N)} + \hat{X}_0^{(N)} X_J^{(N)} . \quad (\text{C.16})$$

We want to show that $\overline{\mathcal{B}} = 0$. With the extra term $-(1-q)X_0^{(N)}$ that comes in the recursive expression for $\hat{X}_0^{(N)}$, the expression for $\overline{\mathcal{B}}$ rewrites

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{B}} = \sum_{M \in \{0\} \cup [J, N-1]} \sum_{M'=0}^{N-1} & [(a_{JM}a_{0M'}) \otimes (X_M X_{M'}) - (a_{0M'}a_{JM}) \otimes (X_{M'} X_M) \\ & - (a_{0M'}a_{JM}) \otimes (X_{M'} \hat{X}_M) + (a_{0M'}a_{JM}) \otimes (\hat{X}_{M'} X_M)] . \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Again, we cut the double sum into 4 parts and write $\overline{\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{B}}_1 + \overline{\mathcal{B}}_2 + \overline{\mathcal{B}}_3 + \overline{\mathcal{B}}_4$, gathering sectors from the partition (C.1). $\overline{\mathcal{B}}_1$ will be made of the sectors $\overline{4}$, $\overline{5}$ and $\overline{6}$ of (C.1), $\overline{\mathcal{B}}_2$ of the sectors $\overline{1}$, $\overline{3}$, $\overline{10}$ and $\overline{12}$, $\overline{\mathcal{B}}_3$ of the sectors $\overline{2}$, $\overline{7}$, $\overline{9}$ and $\overline{11}$, and $\overline{\mathcal{B}}_4$ of the sector $\overline{8}$. Using the same arguments as in Appendix C.2 we can show that $\overline{\mathcal{B}}_1$, $\overline{\mathcal{B}}_2$, $\overline{\mathcal{B}}_3$ and $\overline{\mathcal{B}}_4$ are all equal to zero, which proves (71) in the case $K = 0 < J$.

- [1] T. M. Liggett: Interacting particle systems. Springer (New York), (1985)
- [2] H. Spohn: Large scale dynamics of interacting particles. Springer (New-York), (1991)
- [3] R. A. Blythe and M. R. Evans: Nonequilibrium steady states of matrix-product form: a solver's guide. J. Phys. A: Math. Theor. **40** 333 (2007)
- [4] B. Derrida: An exactly soluble non-equilibrium system: The asymmetric simple exclusion process. Phys. Rep., **301** 65–83 (1998).
- [5] O. Golinelli and K. Mallick: The asymmetric simple exclusion process: an integrable model for non-equilibrium statistical mechanics. J. Phys. A: Math. Gen. **39** 12679–12705 (2006)
- [6] B. Derrida, M.R. Evans and D. Mukamel: Exact diffusion constant for the one-dimensional asymmetric exclusion models. J. Phys. A **36** 4911–4918 (1993)
- [7] B. Derrida and K. Mallick: Exact diffusion constant for the one-dimensional partially asymmetric exclusion model. J. Phys. A: Math. Gen. **30** 1031–1046 (1997)
- [8] S. Prolhac and K. Mallick: Current fluctuations in the exclusion process and Bethe Ansatz. J. Phys. A: Math. Theor. **41** 175002 (2008)

- [9] S. Prolhac: Fluctuations and skewness of the current in the partially asymmetric exclusion process. *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** 365003 (2008)
- [10] B. Derrida and J. L. Lebowitz: Exact Large Deviation Function in the Asymmetric Exclusion Process. *Phys. Rev. Lett.* **80** 209–213 (1998)
- [11] B. Derrida, M. R. Evans, V. Hakim and V. Pasquier: Exact solution of a 1D asymmetric exclusion model using a matrix formulation. *J. Phys. A: Math. Gen.* **26** 1493–1517 (1993)
- [12] F. H. L. Essler and V. Rittenberg: Representations of the quadratic algebra and partially asymmetric diffusion with open boundaries. *J. Phys. A: Math. Gen.* **29** 3375–3407 (1996)
- [13] T. Sasamoto: One-dimensional partially asymmetric simple exclusion process with open boundaries: orthogonal polynomials approach. *J. Phys. A: Math. Gen.* **32** 7109–7131 (1999)
- [14] R. A. Blythe, M. R. Evans, F. Colaiori and F. H. L. Essler: Exact solution of a partially asymmetric exclusion model using a deformed oscillator algebra. *J. Phys. A: Math. Gen.* **33** 2313–2332 (2000)
- [15] M. R. Evans and R. A. Blythe: Nonequilibrium dynamics in low-dimensional systems. *Physica A* **313** 110 (2002)
- [16] K. Mallick and S. Sandow: Finite-dimensional representations of the quadratic algebra: Applications to the exclusion process. *J. Phys. A: Math. Gen.* **30** 4513–4526 (1997)
- [17] C. Boldrighini, G. Cosimi, S. Frigio and M. Grasso Nunes: Computer simulation of shock waves in the completely asymmetric simple exclusion process. *J. Stat. Phys.* **55** 611 (1989)
- [18] P. A. Ferrari, C. Kipnis and E. Saada: Microscopic Structure of Travelling Waves in the Asymmetric Simple Exclusion Process. *Ann. Probab.*, **19** 226–244 (1991)
- [19] P. A. Ferrari: Microscopic shocks in one dimensional driven system. *Ann. Inst. Henri Poinc.* **55** 637 (1991)
- [20] B. Derrida, S. A. Janowsky, J. L. Lebowitz and E. R. Speer: Exact solution of the totally asymmetric simple exclusion process: Shock profiles. *J. Stat. Phys.* **73** 8312 (1993)
- [21] K. Mallick: Shocks in the asymmetry exclusion model with an impurity. *J. Phys. A: Math. Gen.* **29** 5375–5386 (1996)
- [22] V. Karimipour: Multispecies asymmetric simple exclusion process and its relation to traffic flow. *Phys. Rev. E* **59** 205–212 (1999)
- [23] M. Khorrami and V. Karimipour: Exact determination of the phase structure of a multi-species asymmetric exclusion process. *J. Stat. Phys.* **100** 999–1030 (2000)
- [24] P. F. Arndt, T. Heinzl and V. Rittenberg: Spontaneous breaking of translational invariance in one-dimensional stationary states on a ring. *J. Phys. A: Math. Gen.* **31** L45–L51 (1998)
- [25] A. P. Isaev, P. N. Pyatov and V. Rittenberg: Diffusion algebras. *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** 5815–5834 (2001)
- [26] K. Mallick, S. Mallick and N. Rajewsky: Exact solution of an exclusion process with three classes of particles and vacancies. *J. Phys. A: Math. Gen.* **32** 8399–8410 (1999)
- [27] P. A. Ferrari and J. B. Martin: Stationary distributions of multi-type totally asymmetric exclusion processes. *Ann. Probab.* **35** 807 (2007)
- [28] M. R. Evans, P. A. Ferrari and K. Mallick: Matrix representation of the stationary measure for the multispecies TASEP. arXiv:0807.0327, DOI 10.1007/s10955-009-9696-2 (2008)
- [29] O. Angel: The stationary measure of a 2-type totally asymmetric exclusion process. *J. Comb. Theory A* **113** 625 (2006)
- [30] H. Hinrichsen, S. Sandow and I. Peschel: On matrix product ground states for reaction - diffusion models. *J. Phys. A: Math. Gen.* **29** 2643 (1996)
- [31] N. Rajewsky, L. Santen, A. Schadschneider and M. Schreckenberg: The asymmetric exclusion process: Comparison of update procedures. *J. Stat. Phys.* **92** 151–194 (1998)
- [32] M. R. Evans, Y. Kafri, H. M. Koduvely, and D. Mukamel: Phase Separation in One-Dimensional Driven Diffusive Systems. *Phys. Rev. Lett.* **80**, 425 (1998)
- [33] D. Dhar: An exactly solved model for interfacial growth. *Phase Transitions* **9** 51 (1987)
- [34] L-H. Gwa and H. Spohn: Bethe solution for the dynamical-scaling exponent of the noisy Burgers equation. *Phys. Rev. A* **46** 844 (1992)

- [35] O. Golinelli and K. Mallick: Spectral gap of the totally asymmetric exclusion process at arbitrary filling. *J. Phys. A: Math. Gen.* **38** 1419–1425 (2005)
- [36] J. de Gier and F. H. L. Essler: Exact Spectral Gaps of the Asymmetric Exclusion Process with Open Boundaries. *J. Stat. Mech.* P12011 (2006)
- [37] B. Derrida and M.R. Evans: Bethe ansatz solution for a defect particle in the asymmetric exclusion process, *J. Phys. A* **32** 4833 (1999)
- [38] F. C. Alcaraz and R. Z. Bariev: Exact solution of asymmetric diffusion with second-class particles of arbitrary size. *Braz. J. Phys.* **30** 13 (2000)
- [39] L. Cantini: Algebraic Bethe ansatz for the two species ASEP with different hopping rates *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** 095001 (2008)