

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Spécialité :

Physique Mathématique

École doctorale ED107

Présentée par

M. Emmanuel Schenck

pour obtenir le titre de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ
PIERRE ET MARIE CURIE**

Sujet de la thèse :

Systemes quantiques ouverts et methodes semi-classiques

Soutenue le 17 novembre 2009 devant le jury composé de :

M. Stéphane Nonnenmacher (Directeur)

M. André Voros (Directeur)

M. Nicolas Burq (Rapporteur)

M. Michael Hitrik (Rapporteur)

M. Eugène Bogomolny

M. Herbert Koch

M. Nicolas Lerner

Remerciements

Je tiens tout d’abord à remercier mon directeur Stéphane Nonnenmacher pour la grande qualité de son encadrement durant ce travail de thèse. Toujours avec gentillesse, il a donné sans compter de son temps pour accompagner mes premiers pas dans le monde de la recherche, et c’est une chance d’avoir pu travailler avec un directeur sachant doser si justement patience, rigueur et exigence.

Bien que mes contacts avec mon second directeur André Voros ont été plus épisodiques, ils n’en furent pas moins chaleureux : je tiens en particulier à le remercier d’avoir accepté d’être mon directeur “officiel” et de s’être toujours acquitté avec le sourire des diverses formalités que ceci impliquait.

Je voudrais ensuite remercier Nicolas Burq et Michael Hitrik qui ont accepté d’être les rapporteurs de ce travail de thèse, ainsi que les autres membres du jury, Eugène Bogomolny, Herbert Koch et Nicolas Lerner qui ont répondu positivement à ma demande. J’apprécie sincèrement que Herbert Koch et Michael Hitrik aient pu se déplacer, parfois de bien loin, pour venir assister à la soutenance.

La recherche étant aussi un travail collectif, je pense également aux personnes qui m’ont apporté d’autres lumières scientifiques – mais pas seulement ! – tout particulièrement Maciej Zworski, qui m’a chaleureusement accueilli lors de mon séjour à Berkeley, Frédéric Faure et Nalini Anantharaman. Je remercie également mon entourage régulier à l’Orme des Merisiers : Christian Vergu, Clément Ruef et Hélène Grandclaude avec qui j’ai partagé mon bureau, et Sylvie Zaffanella pour les nombreux services divers et variés, mais souvent essentiels, qu’elle a pu me rendre pendant ma thèse.

Last, but not least, je remercie tous ceux, amis ou famille, avec qui j’ai partagé ces dernières années et qui ont dû tant bien que mal supporter mes variations d’humeur thésitatives : mes parents pour leur soutien constant, Marine, Mathieu, Clémence et Pierre dans les dernières lignes droites en particulier, Tristan et Alexis du côté de Jussieu, Nicolas, Stéphane, Marie, Sébastien et Amanda pour nos rendez-vous d’altitude trop souvent manqués, et puis Ivan, Charles, Veronica, Maria, Valentin, Émilie, Esther.....

Résumé

Ce travail de thèse s’inscrit dans le domaine du chaos quantique, c’est à dire l’étude de propriétés spectrales de systèmes quantiques dont la limite classique est chaotique. Nous nous sommes intéressés aux systèmes dits ouverts, c’est à dire ne présentant pas d’états liés.

Dans une première partie, nous avons étudié des modèles unidimensionnels appelés applications quantiques “partiellement ouvertes”. Ces propagateurs modèles sont construits à partir de la quantification d’un espace des phases classique modèle, le tore \mathbb{T}^2 , muni d’une application symplectique chaotique jouant le rôle de dynamique classique. Pour étudier les propriétés spectrales de ces applications sous unitaires du fait de l’ouverture partielle, nous avons d’une part utilisé des techniques d’analyse microlocale transposées sur le tore, et d’autre part le principe de correspondance classique-quantique, ou théorème d’Egorov : ceci nous a permis, en employant des résultats de théorie ergodique, d’obtenir des informations sur la densité spectrale de ces applications dans le plan complexe, dans la limite semiclassique.

Dans une deuxième partie, nous avons étudié l’équation des ondes amorties sur une variété riemannienne compacte de courbure négative. Sur de telles variétés, le flot géodésique est partout hyperbolique. Sous l’hypothèse de négativité de la pression topologique d’une fonction faisant intervenir l’amortissement, (non équivalente à l’hypothèse de contrôle géométrique), nous avons montré d’abord un trou spectral au voisinage de l’axe réel. Comme conséquence, nous avons obtenu une décroissance exponentielle de l’énergie des ondes pour toutes données initiales assez régulières, et la perte de dérivées a pu être calculée explicitement.

Abstract

The subject of this thesis concerns quantum chaos, which consists in the spectral study of quantum systems which have a chaotic classical limit. We have focused on open systems, or systems with no bound states.

In a first part, we studied some unidimensional models called “partially open quantum maps”. These maps are constructed from the quantization of a simple phase space, the torus \mathbb{T}^2 , endowed with a chaotic symplectic map playing the role of classical dynamics. In order to study the spectral properties of such quantum maps which are subunitary because of the opening, we used in one hand some microlocal analysis tools adapted to the torus, and on the other hand the principle of quantum-to-classical correspondence, or Egorov theorem. With the help of ergodic theory results, we obtained some information on the spectral density of such maps in the complex plane in the semiclassical limit.

In a second part, we studied the damped wave equation on a compact Riemannian manifold of negative curvature. On such manifolds, the geodesic flow is everywhere hyperbolic. Under an hypothesis on the negativity of the topological pressure of a function depending on the damping (not equivalent to the geometric control assumption), we showed a spectral gap near the real axis. As a consequence, we obtained an exponential energy decay of the waves for all initial data sufficiently regular, and the loss of derivatives has been computed explicitly.

Table des matières

1	Introduction	7
1.1	Chaos quantique et systèmes ouverts	7
1.2	Sujets d'étude et méthodes	14
2	Systèmes dynamiques chaotiques	19
2.1	Deux systèmes dynamiques modèles	19
2.1.1	Flot engendré par un champ de vecteurs	19
2.1.2	Automorphismes hyperboliques du tore	20
2.1.2.1	Applications du chat d'Arnold	20
2.1.2.2	L'application du boulanger	20
2.2	Systèmes Anosov	22
2.2.1	Hyperbolicité : cas des difféomorphismes	22
2.2.2	Variétés stables, variétés instables	22
2.2.3	Flots Anosov	23
2.3	Théorie ergodique	24
2.3.1	Le Théorème ergodique de Birkhoff	25
2.3.2	Entropies et pression topologique	26
2.3.2.1	Entropie topologique	27
2.3.2.2	Entropie métrique	27
2.3.2.3	Pression topologique d'un difféomorphisme	28
2.3.2.4	Pression topologique d'un flot	29
2.3.2.5	États d'équilibre et principe variationnel	29
2.4	Dynamique symbolique	30
2.4.1	Décalages	30
2.4.2	Matrice d'adjacence	31
2.4.3	L'opérateur de Ruelle	32
3	Analyse semiclassique	37
3.1	Opérateurs différentiels, symboles et mécanique classique	37
3.2	Quantification des symboles	40
3.2.1	Introduction d'un petit paramètre \hbar	40
3.2.2	Les classes de symboles standard	40

3.2.3	\hbar -quantifications des symboles dans $\mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^d)$	41
3.2.4	Quantification des symboles généraux	43
3.3	Opérateurs intégraux de Fourier	49
3.3.1	Distributions lagrangiennes	49
3.3.2	Propriétés locales des opérateurs intégraux de Fourier	51
4	Applications quantiques partiellement ouvertes	55
4.1	Introduction	55
4.2	Mécanique quantique sur le tore	58
4.2.1	Espace de Hilbert des états	58
4.2.2	Quantification des observables	59
4.2.3	Quantification de la dynamique classique	62
4.2.4	Mesures semiclassiques	63
4.2.5	Modèle d'applications partiellement ouvertes	64
4.3	Propriétés de localisation du spectre	65
4.3.1	L'opérateur \mathcal{S}_n	68
4.3.2	Le cas Anosov	72
4.3.2.1	Largeur de la distribution spectrale	72
4.3.3	Densité angulaire	75
4.3.3.1	Estimations du nombre de "grandes" valeurs propres.	76
4.4	Simulations numériques	78
4.4.1	Application du chat perturbé	78
4.4.2	L'application du Boulanger	81
4.4.3	Mesures semiclassiques : quelques propriétés élémentaires	84
5	Équation des ondes amorties	87
5.1	Introduction	87
5.1.1	Le spectre de l'équation des ondes amorties	90
5.1.2	L'énergie des ondes	93
5.1.3	Réduction semiclassique	96
5.2	Trou spectral	97
5.2.1	Évolution à temps discret	98
5.2.2	Preuve du théorème 5.7	99
5.3	Développement en valeurs propres et décroissance de l'énergie	101
5.3.1	Estimées de résolvantes	101
5.3.2	Développement en valeurs propres	102
5.3.3	Décroissance en énergie	105
5.4	Estimée de dispersion hyperbolique	105
5.4.1	Décomposition en états lagrangiens élémentaires	105
5.4.2	Méthode WKB et opérateurs intégraux de Fourier	107
5.4.2.1	Équations WKB	108
5.4.3	Évolution des états lagrangiens élémentaires	110
5.4.3.1	Ansatz pour les temps courts	111

5.4.3.2	La suite des variétés Lagrangiennes évoluées	113
5.4.3.3	Évolution d'un état lagrangien projectible	115
5.4.3.4	Ansatz pour les temps $n > 1$	117
5.4.4	L'estimée de dispersion hyperbolique	119
Conclusion		121
A Géométrie		123
A.1	Variétés Riemanniennes	123
A.1.1	Flots Géodésiques	123
A.1.2	Application exponentielle	124
A.1.3	Courbure et Champs de Jacobi	124
A.1.4	Propriété d'Anosov pour les flots géodésiques	125
A.1.4.1	Décomposition de TSM en fibrés horizontaux et verticaux	125
A.1.4.2	Champs de Jacobi stables et instables	126
A.2	Densités	128
A.3	Géométrie symplectique	129
A.3.1	Algèbre linéaire symplectique	129
A.3.2	Variétés symplectiques	130
A.3.3	Flots hamiltoniens	131
A.3.4	Variétés lagrangiennes	132
A.3.5	Équations de Hamilton-Jacobi et Fonctions génératrices	133
B Semigroupes d'évolution		135
B.1	Opérateurs, spectre, résolvante	135
B.2	Semigroupes d'évolution	136
B.2.1	Semi groupes fortement continus	136
B.2.2	Les théorèmes de génération des semigroupes	137
B.2.3	Formule d'inversion	139
C Divers		141
C.1	Systèmes dynamiques topologiques	141
C.2	Phase Stationnaire	141
C.3	Faà di Bruno	144
C.4	Inégalités de Weyl	145
D Articles		147
Bibliographie		223

Chapitre 1

Introduction

1.1 Chaos quantique et systèmes ouverts

Le domaine du chaos quantique s'est développé à l'origine à travers l'étude de systèmes quantiques fermés dont la dynamique classique sous-jacente est chaotique. Afin de préciser un peu ce que nous entendons par "chaos quantique", commençons par décrire deux systèmes quantiques modèles : le billard quantique et le laplacien sur des variétés riemanniennes compactes.

Un billard est un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ connexe, dont le bord $\partial\Omega$ est assez régulier – par exemple C^∞ par morceaux. Une particule quantique à l'intérieur du billard est décrite par une fonction d'onde $\psi \in L^2(\Omega)$ satisfaisant à l'équation de Schrödinger, avec les conditions de Dirichlet au bord :

$$i \hbar \partial_t \psi = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta \psi, \quad \psi|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.1)$$

Dans le modèle de la particule quantique libre sur une variété Riemannienne (M, g) , l'équation de Schrödinger satisfaite par la fonction d'onde $\psi \in L^2(M)$ s'écrit

$$i \hbar \partial_t \psi = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta_g \psi, \quad (1.2)$$

où Δ_g est l'opérateur de Laplace-Beltrami. La dynamique quantique de ces systèmes est donnée par un propagateur, ou groupe d'évolution à un paramètre (le temps). On le note en général $U(t)$: c'est un opérateur unitaire sur l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommables, dont le générateur infinitésimal est l'opérateur $-\frac{\hbar^2}{2} \Delta_{(g)}$ communément appelé hamiltonien quantique. La fonction d'onde $\psi(t, x)$ solution de (1.1) ou (1.2) est donnée par

$$\psi(t, x) = [U(t)\psi(0)](x).$$

Les propriétés spectrales du hamiltonien quantique, et partant, celles du propagateur $U(t)$ sont alors des objets fondamentaux pour l'étude de l'évolution temporelle de la fonction d'onde $\psi(t, x)$.

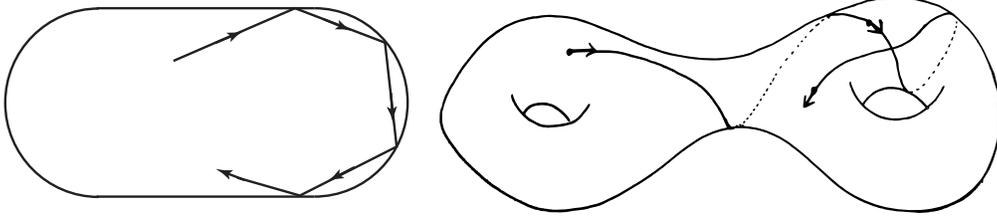


FIGURE 1.1 – Dynamiques classiques correspondant aux deux exemples de base. À gauche, un rayon rebondissant sur les parois internes du billard selon les lois de Descartes de la réflexion. À droite, une géodésique $\gamma(t)$ d'une variété riemannienne (M, g) . La trajectoire classique est formée des couples position-vitesse $(q, v) = (\gamma(t), \gamma'(t)) \in T^*M$, $t \in \mathbb{R}$.

La *limite semiclassique* de la mécanique quantique s'obtient lorsque la constante de Planck \hbar devient négligeable devant les autres grandeurs de même dimension intervenant dans le système. Cette limite $\hbar \rightarrow 0$ fait apparaître ce que l'on appelle la *mécanique classique* du système.

Une manière heuristique fréquemment citée pour justifier ce phénomène consiste à utiliser la représentation du propagateur $U(t)$ en terme d'intégrale de chemin. Suivant Feynman, l'amplitude de probabilité de mesurer la particule quantique au point x au temps t alors qu'elle se trouvait au point y au temps 0 est donnée par l'intégrale formelle

$$\langle x|U(t)|y\rangle = \int \mathcal{D}q(t) e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(q, \dot{q})}. \quad (1.3)$$

La somme ci-dessus se fait sur tous les chemins $q(t)$ continus reliant y à x en un temps t , c'est à dire $q(0) = y$ et $q(t) = x$. La fonctionnelle S_{cl} s'appelle l'action classique du système. Elle est définie sur l'espace des chemins dans Ω (ou M) et prend ses valeurs dans \mathbb{R} . Si $\hbar \rightarrow 0$, le principe de la phase stationnaire nous indique que les trajectoires qui vont principalement contribuer à l'amplitude de probabilité (1.3) sont celles pour lesquelles l'action S_{cl} est critique :

$$\frac{\delta S_{cl}(q, \dot{q})}{\delta q(t)} = 0 \quad (1.4)$$

Au vu de la définition de S_{cl} , ces équations, appelées équations d'Euler-Lagrange, sont exactement celles qui définissent la dynamique classique du système dans sa formulation variationnelle (ici lagrangienne), pour laquelle une particule est décrite par sa position q et sa vitesse \dot{q} . Dans ce formalisme lagrangien de la mécanique classique, on se donne une fonction $L(q, \dot{q}, t)$, appelée lagrangien, dont l'intégrale le long d'une trajectoire $q(t)$ est par définition l'action $S_{cl}(q, \dot{q})$:

$$S_{cl}(q, \dot{q}) = \int_0^t L(q, \dot{q}, s) ds.$$

L'équation variationnelle (1.4) se traduit par les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \partial_{\dot{q}} L(q, \dot{q}, t) = \partial_q L(q, \dot{q}, t), \quad (1.5)$$

qui fournissent les équations du mouvement de la mécanique classique. Dans le cas du billard mentionné ci-dessus, la dynamique classique correspond à l'évolution d'une particule ponctuelle libre rebondissant au bord selon les lois de Descartes de la réflexion. Pour une variété M , la dynamique classique est celle du flot géodésique, qui est l'évolution d'une particule se mouvant librement sur M en suivant ses géodésiques (voir la figure 1.1). Dans les deux cas, l'énergie mécanique est purement cinétique : la vitesse de la particule est toujours constante en norme.

L'équation (1.5) suggère un rôle particulier pour la quantité $\partial_{\dot{q}}L(q, \dot{q}, t)$. Sous certaines hypothèses, il est possible de changer de variables en posant $p = \partial_{\dot{q}}L(q, \dot{q}, t)$. En introduisant le hamiltonien classique $H(q, p) = \sup_{\dot{q}}(\langle p, \dot{q} \rangle - L(q, \dot{q}, t))$ défini comme la transformée de Legendre de L , les nouvelles variables p et q obéissent aux équations de Hamilton, équivalentes à (1.5) mais du premier ordre en temps seulement :

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \nabla_p H(q, p) \\ \dot{p} &= -\nabla_q H(q, p).\end{aligned}\tag{1.6}$$

Notons que si $q \in M$ où M est une variété, alors la vitesse \dot{q} s'interprète comme un élément de l'espace tangent T_qM . Il est donc naturel de voir $p = \partial_{\dot{q}}L$ comme une forme linéaire sur T_qM , c'est à dire $p \in T_q^*M$. Insistons sur ce point : après transformation de Legendre du lagrangien, nous obtenons au vu de (1.6) la mécanique classique comme un flot sur T^*M engendré par le champ de vecteur

$$\mathcal{X}_H = (\nabla_p H, -\nabla_q H).$$

Nous passerons en revue rapidement les propriétés (en particulier symplectiques) d'un tel flot dans l'appendice A.3. Tout au long du texte, nous serons attaché à ce point de vue hamiltonien. Par dynamique classique, nous entendrons donc un flot hamiltonien sur un espace des phases du type T^*M , ou, plus généralement, une application canonique sur une variété symplectique. Par exemple, le flot géodésique de M est un flot hamiltonien sur T^*M , engendré par

$$H(q, p) = \frac{1}{2}g^q(p, p) = \frac{1}{2}\|p\|_q^2$$

où g^q désigne la métrique sur T_q^*M . La couche d'énergie $E = \frac{1}{2}$ se note $S^*M = \{(p, q) : \|p\|_q^2 = 1\}$: c'est le fibré cotangent unitaire. Les particules libres d'énergie $\frac{1}{2}$ suivent donc les géodésiques à vitesse constante égale à 1. Nous noterons $\Phi^t = \exp(t\mathcal{X}_H)$ le flot géodésique.

Dans cette thèse, nous nous sommes focalisé sur la situation où la limite classique des systèmes quantiques est *chaotique*. Bien qu'il n'existe pas de définition mathématique précise du terme chaotique, nous pouvons sans difficulté qualifier de chaotiques certains systèmes particuliers. Revenons par exemple au cas du flot géodésique sur S^*M , et supposons maintenant que la courbure de M est strictement négative. Ce flot possède alors la propriété d'*hyperbolicité* : en tout point $\rho \in S^*M$, l'espace tangent $T_\rho S^*M$ se décompose comme une somme directe de trois sous-espaces

$$T_\rho S^*M = E^s(\rho) \oplus E^u(\rho) \oplus \mathbb{R}\mathcal{X}_H(\rho)\tag{1.7}$$

qui satisfont les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
 i) \quad & D\Phi_\rho^t(E^{u(s)}(x)) = E^{u(s)}(\Phi^t(x)), \quad t \in \mathbb{R} \\
 ii) \quad & \forall v \in E^u(x), \quad \|D\Phi_x^{-t}v\| \leq C e^{-\lambda t} \|v\|, \quad t \geq 0 \\
 iii) \quad & \forall v \in E^s(x), \quad \|D\Phi_x^t v\| \leq C e^{-\lambda t} \|v\|, \quad t \geq 0
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

où $C, \lambda > 0$ sont des constantes. Les espaces E^s, E^u s'appellent les directions stables et instables au point ρ . L'espace $\mathbb{R}\mathcal{X}_H$ correspond à la direction du flot, dite neutre. Cette structure très particulière de l'espace des phases a de nombreuses conséquences : par exemple, une géodésique typique remplit densément M au bout d'un temps infini. De même, pour un point $\rho \in S^*M$ donné, il existe une infinité de points arbitrairement proches de ρ dont les trajectoires, au bout d'un temps assez long, seront complètement décorréées de celle de ρ . Le fait qu'une orbite typique soit dense dans l'espace des phases est une manifestation de l'*ergodicité* du système, notion que nous préciserons au chapitre 2. L'ergodicité, ainsi qu'une grande sensibilité aux conditions initiales sont des traits caractéristiques des systèmes chaotiques. Si le billard Ω mentionné ci-dessus a une forme de stade (figure 1.1), une trajectoire typique finit également par remplir le billard au bout d'un temps infini. Enfin, notons que ces propriétés chaotiques n'apparaissent que lorsque la géométrie de l'espace des phases est particulière : les propriétés mentionnées ci-dessus n'existent plus si le billard est circulaire, ou si M est une sphère.

Nous nous sommes intéressés dans cette thèse à des problématiques typiques du chaos quantique, c'est à dire l'étude de propriétés *spectrales* de systèmes quantiques dont la limite classique est chaotique. L'analyse semiclassique est alors l'outil mathématique principal lorsque l'on cherche par exemple à étudier dans quelle mesure le spectre du hamiltonien $-\frac{\hbar^2}{2}\Delta_{(g)}$ des équations (1.1) et (1.2) est influencé par la dynamique classique du billard ou de la variété M lorsque $\hbar \rightarrow 0$. Cette limite est fondamentalement singulière : une petite perturbation de la mécanique classique ne donne pas la mécanique quantique dans la limite $\hbar \rightarrow 0$. En effet, les objets quantiques considérés restent toujours de nature opératorielle, pour lesquels les notions de trajectoire, de position et d'implusion n'ont pas de sens.

De manière générale, si la dynamique classique du système est *intégrable* (c'est à dire qu'il existe autant de constantes du mouvement que de degrés de libertés), la correspondance entre mécanique classique et quantique dans la limite semiclassique est relativement bien comprise : l'intégrabilité de la dynamique classique permet de reconstruire avec une grande précision les propriétés spectrales du système lorsque $\hbar \rightarrow 0$ (méthodes WKB, quasi-modes, etc. Voir par exemple [CdV80]). D'un autre côté, si la dynamique classique est *chaotique*, il n'existe pas de méthodes analytiques permettant de calculer précisément le spectre, comme l'avait déjà justement remarqué Einstein dans [Ein17]. On utilise plutôt des techniques développées pour caractériser de tels systèmes dynamiques (ergodicité, hyperbolicité, formalisme thermodynamique) pour déduire des propriétés qualitatives ou quantitatives du spectre, souvent de nature statistique.

Dans le cadre de systèmes quantiques classiquement chaotiques, on peut tout d'abord

s'intéresser au spectre d'un point de vue "macroscopique". Notons

$$N_{\hbar}(E) = \text{Card}\{E_{\hbar} \in \text{Spec}\left(-\frac{\hbar^2}{2}\Delta\right) : E_{\hbar} \leq E\}$$

le nombre de valeurs propres du laplacien quantique sur une variété riemannienne M compacte inférieures à $E > 0$. Ce nombre obéit à la célèbre loi de Weyl :

$$N_{\hbar}(E) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \text{vol}\{(p, q) \in T^*M : \frac{1}{2}\|p\|_q^2 \leq E\} + \mathcal{O}(\hbar^{1-d}), \quad (1.9)$$

où le volume est pris par rapport à la mesure de Liouville sur l'espace des phases T^*M , et $\|p\|_q^2 = g^q(p, p)$ est calculé à l'aide de la métrique sur T^*M . Si le terme principal d'ordre $\sim \hbar^{-d}$ dans l'équation précédente ne fait pas intervenir la dynamique classique, il n'en est pas de même pour le terme de reste. En effet, l'estimation en $\mathcal{O}(\hbar^{1-d})$ est la plus générale dans le cas où E n'est pas une valeur critique de H , mais celle-ci a pu être améliorée en un $o(\hbar^{1-d})$ par Duistermaat et Guillemin [DG75] dans le cas (générique) où l'ensemble des géodésiques périodiques est de mesure nulle. Enfin, dans la situation chaotique d'une variété de courbure négative, Bérard [Bér77] a montré comment obtenir un reste en $\mathcal{O}\left(\frac{\hbar^{1-d}}{\log \hbar^{-1}}\right)$. Nous voyons dans cet exemple dans quelle mesure les propriétés de "chaoticité" de la dynamique classique (ici le flot géodésique) peuvent influencer des propriétés spectrales dans la limite $\hbar \rightarrow 0$.

D'un autre côté, le point de vue "microscopique" s'attache à étudier la distribution du spectre à l'échelle de l'espacement moyen entre les niveaux, calculé à partir de la loi de Weyl. Plusieurs travaux ont cherché à élucider les propriétés statistiques du spectre à cette échelle, vu comme une suite de points "pseudo-aléatoires" [HMA⁺07, KM07]. La conjecture de Bohigas, Giannoni et Schmidt [BGS84], connue aussi sous le nom de conjecture des matrices aléatoires, stipule d'ailleurs que la statistique spectrale locale d'un système quantique de limite classique chaotique est statistiquement équivalente à celle des valeurs propres de matrices aléatoires appartenant à l'un des trois ensembles gaussiens standards : la statistique spectrale locale de tels systèmes est donc universelle. L'outil le plus fréquemment utilisé pour aborder ces questions est alors la formule des traces de Gutzwiller [Gut71], qui relie la densité d'états propres autour de l'énergie $E > 0$ avec une somme sur les trajectoires périodiques classiques sur la couche d'énergie $\{H(q, p) = E\}$.

Des systèmes tels que le billard quantique mentionné ci-dessus ont été réalisés expérimentalement avec des cavités micro-ondes [SJ90b, KSW05] ou diélectriques [GCN⁺98, LLZ⁺07]. En réalité, ces systèmes fermés sont couplés d'une manière ou d'une autre au monde extérieur, soit par l'intermédiaire d'antennes permettant les mesures, soit par des processus de pertes par absorption, réflexion, diffusion... On dit généralement que de tels systèmes sont *ouverts*. Prenons comme exemple une cavité diélectrique bi-dimensionnelle dont l'indice optique prend différentes valeurs $n_{in/out}$ à l'intérieur et à l'extérieur de la cavité. Après certaines approximations sur le découplage des modes du champ électromagnétique selon les directions (voir [DBD⁺08]), le champ électromagnétique à l'intérieur de la cavité satisfait

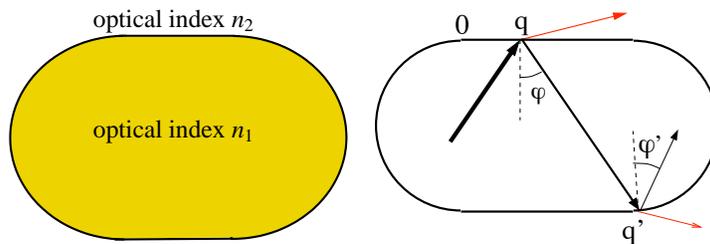


FIGURE 1.2 – À gauche, une cavité diélectrique : l’indice optique prend deux valeurs distinctes à l’intérieur et en dehors de la cavité. À droite, la dynamique de rayons lumineux (ou optique géométrique) d’un tel système, correspondant à la limite semiclassique. Si l’angle d’incidence est assez grand, il existe un rayon réfracté en dehors de la cavité.

l’équation de Helmholtz scalaire

$$(\Delta + n_{in/out}^2 k^2)u = 0$$

à l’intérieur et à l’extérieur de Ω . Dans le cas d’une polarisation transverse magnétique, u et ∇u sont continus au bord $\partial\Omega$. Il existe une analogie formelle entre l’équation ci-dessus et l’équation de Schrödinger. Si l’on pose $k^2 = \hbar^{-2}E$, on peut réécrire l’équation précédente comme

$$-\frac{\hbar^2}{n_{in/out}^2} \Delta u = Eu,$$

qui est bien une équation de Schrödinger. À énergie “quantique” E fixée, la limite semiclassique correspond donc ici à $k \rightarrow \infty$, ce qui est la *limite de haute fréquence*. Une onde lumineuse se propageant à l’intérieur est généralement réfléchi et réfracté au bord : dans la limite de haute fréquence, la partie réfracté à l’extérieur de revient jamais à l’intérieur si la cavité est convexe, *tandis qu’en module, l’amplitude de l’onde restant à l’intérieur se trouve diminuée*.

D’un point de vue spectral, l’ouverture du système induit de grandes modifications. Tous les états bornés de la cavité fermée sont maintenant remplacés par des états métastables, dont la durée de vie est finie. Ces états correspondent à des valeurs propres complexes généralisées, appelées *résonances*, qui sont les pôles de la continuation analytique de la résolvante du demi-plan complexe supérieur au demi-plan inférieur. Si l’on note

$$E_n = \omega_n - \frac{i\Gamma_n}{2} \tag{1.10}$$

de telles résonances, la partie réelle ω_n représente sa fréquence moyenne, tandis que $\Gamma_n > 0$ est le taux de décroissance de $|u_n|^2$ où u_n est le mode métastable associé à E_n . Ces mécanismes d’ouverture ont parfois été pris en compte en ajoutant au hamiltonien quantique une partie imaginaire effective pour représenter le couplage entre le système fermé et le

monde extérieur [LW91]. Le hamiltonien modifié devient alors *non-autoadjoit*, et ses valeurs propres, toujours discrètes, sont maintenant des nombres complexes que l'on interprète comme étant les résonances du système¹.

Si la dynamique classique du système est chaotique, il n'est pas possible de calculer analytiquement ces résonances, mais les méthodes du "chaos quantique" ont pu être appliquées pour prédire leurs distributions statistiques dans le plan complexe, à l'origine dans le contexte de la physique nucléaire [Mol68]. Depuis, elles ont été largement étudiées dans plusieurs domaines des mathématiques, voir par exemple [Bur98, GZ97, HS86].

Une autre manière de tenir compte du couplage avec l'extérieur consiste à ajouter à l'équation des ondes

$$(\partial_t^2 - \Delta)u = 0$$

un terme d'amortissement. Des ondes scalaires se propageant dans une cavité comportant de l'amortissement satisfont l'équation

$$(\partial_t^2 - \Delta + 2a(x)\partial_t)u(t, x) = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad a \in C^\infty(\Omega).$$

Si la fonction a est positive, on a effectivement un amortissement : l'énergie des ondes, définie pour une solution $u(t, x)$ de l'équation précédente par

$$E(u, t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |\partial_t u|^2) dx, \quad (1.11)$$

décroit au cours du temps. La fonction a mesure le taux d'amortissement (ou d'absorption) local : à haute fréquence, un paquet d'onde traversant la zone d'absorption le long d'une "trajectoire" $x(s)$ voit son intensité continûment amortie par un facteur $\approx \exp(-2 \int_0^t a(x(s)) ds)$. Notons que la décroissance de l'énergie, ici due au terme d'amortissement $a(x)$, présente plusieurs similarités avec la décroissance de l'énergie locale des ondes dans le cas du problème extérieur [Bur98], où la perte est due à la diffusion des ondes à l'infini.

Pour l'équation des ondes amorties, l'intégralité des ondes restent piégées à l'intérieur de Ω : il ne s'agit donc pas d'un système de diffusion. Il en est de même pour les ondes amorties sur une variété riemannienne (M, g) compacte sans bords, qui est la situation que nous avons considéré dans notre travail. L'équation s'écrit alors

$$(\partial_t^2 - \Delta_g + 2a(x)\partial_t)u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times M$$

où Δ_g est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur M . Les modes propres $\tau \in \mathbb{C}$ de l'équation ci-dessus s'obtiennent en considérant les états stationnaires $u(t, x) = e^{-i\tau t} v(x)$ qui satisfont

$$(-\Delta - \tau^2 - 2i\tau)v = 0.$$

1. Dans la théorie de la diffusion (par des obstacles ou par un potentiel à support compact), les résonances peuvent également être obtenues comme les valeurs propres discrètes d'un hamiltonien non auto-adjoint provenant d'une dilatation complexe du hamiltonien initial [BC71].

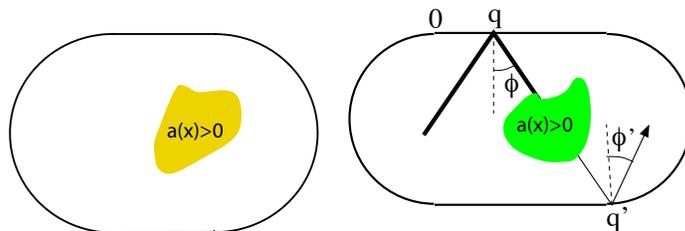


FIGURE 1.3 – Exemple de cavité amortie où la zone d’atténuation est localisée dans un ouvert distinct de la cavité. À droite, la dynamique classique “pondérée” du système : à chaque rayon est associé une amplitude complexe, qui est diminuée en module si le rayon traverse la zone amortie.

Nous verrons au chapitre 5 que ces modes propres forment le spectre de l’opérateur matriciel

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ -\Delta_g & -2ia \end{pmatrix} : H^1(M) \times H^0(M) \rightarrow H^1(M) \times H^0(M), \quad (1.12)$$

de domaine $D(\mathcal{B}) = H^2(M) \times H^1(M)$. On peut montrer que ce spectre est discret, et situé dans le demi-plan complexe inférieur. Exactement comme dans les cas des résonances (1.10), la partie réelle correspond à la fréquence de vibration de l’état propre, tandis que la partie imaginaire représente la moitié de son taux de décroissance (qui concerne $|u|^2$). Remarquons enfin que si $a = 0$, alors $\text{Spec } \mathcal{B} = \text{Spec } \sqrt{-\Delta_g} \subset \mathbb{R}$.

Dans la limite semiclassique, ou limite de haute fréquence, les deux cavités diélectriques et amortie présentent des similarités dans leur dynamique classique à l’intérieur de Ω : un rayon évolue librement d’un point de vue géométrique, mais est atténué par moments (lorsqu’il rencontre le bord dans le cas diélectrique, ou lorsqu’il traverse le support de a dans le cas amorti). Ces deux dynamiques classiques sont similaires, au sens où elles peuvent être vues comme des dynamiques libre “pondérées” par une atténuation. Ceci nous suggère que ces deux types de systèmes ondulatoires devraient présenter des propriétés spectrales analogues dans la limite semiclassique : nous reviendrons sur cette similitude au début du chapitre 4.

1.2 Sujets d’étude et méthodes

La dynamique pondérée évoquée ci-dessus nous a conduits à étudier deux types de systèmes pendant cette thèse.

Nous avons d’abord étudié certains modèles à temps discret que nous avons appelés applications quantiques partiellement ouvertes², car leur limite semiclassique est comparable à la dynamique pondérée de la section précédente. Ces applications quantiques sont construites à partir du 2-tore \mathbb{T}^2 vu comme espace des phases classique, muni d’un symplectomorphisme chaotique $\kappa : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ qui joue le rôle de dynamique classique. Un procédé

2. De manière équivalente, nous les appellerons parfois application quantiques amorties.

de quantification de \mathbb{T}^2 conduit à une mécanique quantique sur un espace de Hilbert de dimension finie $\sim \hbar^{-1}$. De même, l'application κ est quantifiée en un opérateur unitaire sur cet espace de Hilbert, et joue le rôle de propagateur quantique associé à κ . Du fait de la dimension finie, certaines propriétés analytiques sont plus accessibles que dans les véritables systèmes ondulatoires. De même, les simulations numériques sont plus aisées puisqu'il s'agit essentiellement de diagonaliser des matrices de taille finie. Enfin, il est possible de quantifier des applications κ assez diverses, ce qui est en général plus simple que de construire une variété dont les propriétés dynamiques du flot géodésique seraient prescrites. L'intérêt principal de ces modèles jouets réside dans le fait qu'ils permettent d'obtenir "à moindre coût" des indications intéressantes sur les comportements de systèmes plus complexes, comme les cavités ou les variétés riemanniennes sur lesquelles on étudie les propriétés spectrales d'un opérateur différentiel. Nous verrons d'ailleurs au chapitre 4 comment articuler certaines de ces comparaisons.

Dans une deuxième partie, nous avons étudié l'équation des ondes amorties sur une variété riemannienne compacte sans bords (M, g) . Cette situation est techniquement plus simple que celle des cavités avec amortissement du fait de l'absence de bords, mais plus complexe que le cas des applications. Ici encore, nous nous sommes focalisés sur une dynamique classique (donnée par le flot géodésique) de nature chaotique. Plus précisément, nous avons considéré des variétés de courbure strictement négative, pour lesquelles le flot géodésique est partout hyperbolique.

Nous avons effectué l'analyse semiclassique de quelques propriétés de ces deux systèmes, orientées essentiellement autour de la localisation de leur spectre dans le plan complexe. Nous pouvons distinguer trois grands types de questions qui ont motivé notre travail :

1. Y a-t-il une densité asymptotique de modes, du type "loi de Weyl", lorsque on se place dans la limite de haute fréquence, ou limite semiclassique ? Comment se distribuent statistiquement dans le plan complexe les taux de décroissance (partie imaginaires des modes) dans cette limite ?
2. Les résonances de petite partie imaginaire sont physiquement intéressantes puisqu'elles correspondent aux états métastable de plus grande durée de vie : ce sont elles qui gouvernent l'évolution temporelle. Peut-on obtenir, à partir des propriétés de la dynamique classique de ces systèmes, une information concernant ces modes de petite partie imaginaire ? En particulier, peut-on minorer leur distance à l'axe réel ?
3. Enfin, les systèmes ondulatoires amortis posent la question (susceptible d'applications) de la décroissance de l'énergie des ondes au cours du temps. Peut-on estimer ce taux de décroissance, ayant des informations sur la fonction d'amortissement et la dynamique classique du système ?

La première question est directement liée aux lois de Weyl (1.9). Plusieurs études se sont penchées sur la manière d'étendre ce type de lois au cas des systèmes ouverts ou non auto-adjoints. Prenons comme exemple le système de diffusion X formé par trois disques "suffisamment espacés" dans le plan complexe. Parmi les trajectoires classiques possibles, il en existe certaines qui restent toujours dans un voisinage borné des trois disques, dans le passé comme

dans le futur : elles forment ce que l'on appelle un *ensemble capté* $K \subset T^*X$. L'opérateur de Schrödinger $-\hbar^2\Delta_D$ avec les conditions de Dirichlet sur les obstacles a un spectre purement continu, mais la continuation analytique de la résolvante $(-\hbar^2\Delta_D - z)^{-1}$ dans le demi-plan complexe inférieur admet des pôles $\{E_k\}$, ou résonances, associés à des états métastables de taux de décroissance $\propto |\operatorname{Im} E_k|$. La question du nombre de résonances dans un petit voisinage complexe d'une énergie $E \geq 0$ a été posée pour la première fois par J. Sjöstrand [Sjö90a] dans le cadre de la diffusion chaotique par un potentiel lisse. Bien que seules des bornes supérieures aient été obtenues jusqu'à présent, il est conjecturé [LSZ03, ST04, SZ07] que le nombre de résonances dans une petite zone du plan complexe de taille \hbar satisfait une loi de Weyl de type fractale :

$$\operatorname{Card}\{E_k \in \operatorname{Spec}(-\hbar^2\Delta_D) : |E_k| \leq C\hbar\} \sim r(C)\hbar^{-\nu}.$$

L'exposant fractal $\nu = \frac{1}{2}(\dim K - 1)$ est relié à la dimension de Minkowski de l'ensemble piégé K , et $r(C)$ est une fonction dépendant de la taille de la boîte. Des résultats semblables ont été obtenus également dans le cas d'applications quantiques ouvertes, pour lesquels des études numériques ont d'ailleurs pu confirmer la plausibilité d'une telle conjecture pour des systèmes suffisamment génériques [NR07, NZ07c]. Dans le cas de systèmes amortis ou partiellement ouverts, on peut également poser la question du nombre de modes propres complexes dans une bande sous l'axe réel. De telles questions ont déjà été étudiées pour l'équation des ondes amorties sur une variété. Il a été montré (travaux de Markus et Mutsaers [MM82], puis Sjöstrand [Sjö00]) qu'il existe un analogue de la loi de Weyl pour de tels systèmes :

$$\operatorname{Card}\{\lambda_k \in \operatorname{Spec}(\mathcal{B}) : |\operatorname{Re} E_k| \leq E, \operatorname{Im} E_k \geq -\max |a|\} \sim CE^d.$$

Certains résultats plus précis de Sjöstrand concernant la localisation du spectre dans cette bande dans le cas d'une dynamique chaotique montrent une accumulation (en densité) sur la droite $\operatorname{Im} z = -\bar{a}$, où \bar{a} est la moyenne ergodique de la fonction d'amortissement pour le flot géodésique. Nous avons d'ailleurs montré un résultat similaire dans le cas des applications quantiques partiellement ouvertes.

Les relations posées dans la deuxième question entre le meilleur taux de décroissance dans la limite semiclassique et la dynamique classique du problème a été soulevée vers la fin des années 1980 par P. Gaspard et S. Rice [GR89b, GR89a]. Une quantité dynamique joue dans cette situation un rôle fondamental : il s'agit de la *pression topologique* [Rue04]. Considérons par exemple le flot géodésique sur l'espace cotangent unitaire S^*M d'une variété riemannienne M , noté $\Phi^t : S^*M \rightarrow S^*M$. Pour une fonction f continue sur S^*M , la pression de f relativement au flot géodésique, notée $\operatorname{Pr}(f, \Phi^1)$ donne des informations sur les moyennes de Birkhoff de f sur des orbites du flot dont la longueur tend vers l'infini. Par exemple, si M est de courbure négative, alors les orbites périodiques suffisent à caractériser la pression, et l'on a

$$\operatorname{Pr}(f, \Phi^1) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \left(\sum_{\gamma: \ell(\gamma) \leq T} e^{\int_{\gamma} f} \right)$$

où la somme se fait sur les orbites périodiques de longueur $\leq T$. Nous définirons plus généralement la pression au chapitre 2.

Dans un système de diffusion classique où la dynamique est donnée par un flot Φ^t engendré par un hamiltonien H sur un espace des phases X , considérons l'évolution pendant un temps t d'un nombre fini de points n_0 appartenant à couche d'énergie $\mathcal{E} = \{(q, p) : H(q, p) = E\}$ de l'espace des phases. Seule un nombre n_t de points se trouve encore dans la région d'interaction à l'instant t , les autres ayant pris des trajectoires fuyant vers l'infini. Si le système est chaotique, on s'attend en général à ce que le rapport n_t/n_0 décroisse comme une loi exponentielle

$$n_t \approx C(E)n_0 e^{-\gamma_E t}$$

Le sous-ensemble capté $K \subset \mathcal{E}$ formé des trajectoires classiques d'énergie E qui ne diffusent pas à l'infini, ni dans le passé, ni dans le futur joue un rôle important dans le calcul du taux de fuite γ_E . En effet, dans le cas où le flot est *hyperbolique sur K* , plusieurs arguments [GR89b] conduisent à la conclusion que le taux γ_E est relié à la pression topologique du flot hamiltonien restreint à l'ensemble capté $\Phi^t|_K$. La fonction particulière dont la pression topologique fournit le taux de fuite γ_E est le logarithme du *jacobien instable* J^u du flot restreint à l'ensemble capté :

$$\gamma_E = \Pr(\log J^u, \Phi^1|_K).$$

Le jacobien instable est défini comme le déterminant de la différentielle $d\Phi^t(\rho) : T_\rho K \rightarrow T_{\Phi^t(\rho)} K$ restreint au sous-espace instable $E^u(\rho) \subset T_\rho K$, voir l'équation (1.7). La question qui se pose naturellement dans le cadre quantique est la suivante : existe-t-il un lien entre le taux de fuite classique γ_E et le plus petit taux de décroissance quantique, dans la limite semiclassique ? En écrivant les résonances comme

$$E = \omega - i \frac{\Gamma}{2}, \quad \Gamma > 0,$$

Gaspard et Rice montrent dans [GR89a] que pour un système hyperbolique, les taux de décroissance quantique satisfont

$$-\Gamma \leq 2 \Pr\left(\frac{1}{2} \log J^u, \Phi^t|_K\right) \tag{1.13}$$

Cette borne n'est utile que si la pression dans le second membre est négative. En général, $2|\Pr(\frac{1}{2} \log J^u, \Phi^t|_K)|$ est plus petit que γ_E : les taux classiques et quantiques sont distincts. La borne (1.13) a pu être prouvée rigoureusement dans le cas de la diffusion par des obstacles convexes [Ika88], ou par un potentiel à support compact [NZ07a]. En s'inspirant des méthodes de [NZ07a], nous avons montré un résultat similaire dans le cas des ondes amorties sur une variété : les taux de décroissance quantique $\Gamma > 0$ dans la limite de haute fréquence sont bornés supérieurement par

$$-\Gamma \leq 2 \Pr\left(-a + \frac{1}{2} \log J^u\right) \tag{1.14}$$

où a est la fonction d'amortissement. Notons encore que cette borne n'est utile que si la pression ci-dessus est *négative*.

Enfin, la troisième et dernière question soulève plus généralement le problème du lien entre le spectre du générateur d'un semigroupe d'évolution, et la décroissance de la norme en énergie de ce même semigroupe au cours du temps [Leb93, KT95]. Ceci passe par des estimées de l'énergie $E(u, t)$ d'une solution u de l'équation des ondes, définie en (1.11). En général, des estimées sur la résolvante du générateur permettent de montrer une décroissance exponentielle de l'énergie avec le temps [BLR92]. Plusieurs résultats de ce type sur l'équation des ondes amorties, suivant le travail novateur de Rauch, Taylor, Bardos et Lebeau [RT75, BLR92, Leb93], reposent sur une hypothèse concernant la géométrie *globale* du problème, appelée couramment hypothèse de contrôle géométrique. Celle-ci stipule qu'il existe un temps T_0 au delà duquel toutes les trajectoires classiques parcourues à vitesse 1 rencontrent la zone d'amortissement. Nous avons pu montrer un résultat alternatif, en utilisant comme hypothèse la négativité de la pression (1.14). Dans ce cas, il est possible de montrer une décroissance exponentielle de l'énergie pour des données initiales suffisamment régulières, quand bien même le contrôle géométrique ne serait pas satisfait. Nous insistons sur le fait que supposer la négativité de la pression (1.14) est également une hypothèse de nature globale sur la géométrie et la dynamique.

Le plan de cette thèse est le suivant. Le chapitre 2 introduit les notions de base de mécanique classique et de systèmes dynamiques dont nous avons eu besoin dans ce travail. Nous passons rapidement en revue les systèmes dynamiques hyperboliques, ainsi que quelques notions de formalisme thermodynamique. Le chapitre 3 expose les outils d'analyse semiclassique utilisés. Nous avons tenté d'exposer (très) brièvement les principales notions de la théorie des opérateurs \hbar -pseudodifférentiels ainsi que celle des opérateurs \hbar -intégraux de Fourier. Nos résultats sont regroupés aux chapitres 4 et 5. Le chapitre 4 présente une étude spectrale semiclassique des applications quantiques partiellement ouvertes. Ce chapitre contient aussi des résultats numériques qui illustrent certaines propriétés qui ont pu être prouvées analytiquement. Dans une brève section, nous avons également abordé l'étude des mesures semiclassiques associées à ces applications³. Le chapitre 5 contient nos résultats sur l'équation des ondes amorties sur une variété compacte de courbure négative. Nous exposons deux résultats, l'un concernant un trou spectral sous l'axe réel, l'autre la décroissance de l'énergie des ondes.

Certaines démonstrations un peu fastidieuses n'ont pas été reproduites dans le corps du texte des chapitres 4 et 5, nous avons renvoyé dans ce cas le lecteur aux manuscrits d'articles [Sch09b, Sch09a], regroupés dans l'annexe D. Enfin, les annexes A, B et C contiennent quelques rappels de géométrie et d'analyse fonctionnelle bien connus : nous n'avons pas jugé utile de les inclure dans les chapitres d'introduction, mais par souci de cohérence nous pensons qu'il peut être utile pour le lecteur de les avoir sous la main.

3. Non publié.

Chapitre 2

Systemes dynamiques chaotiques

Dans ce chapitre, nous passons en revue les différentes notions et outils de systèmes dynamiques que nous avons utilisés fréquemment dans ce travail de thèse, avec comme références principales [Bow75, Wal75, PP90, KH95]. Nous commencerons par décrire brièvement deux exemples de systèmes dynamiques hyperboliques modèles, avant d'énoncer les propriétés plus générales dont ces systèmes sont des illustrations particulières. Certaines notions (essentiellement du vocabulaire) concernant les systèmes dynamiques topologiques sont exposés dans l'annexe C.1. Il convient de garder à l'esprit que l'utilisation des systèmes dynamiques que nous avons faite nous a toujours servi à décrire des propriétés de mécanique classique, telle que nous l'avons présentée au chapitre 1.

2.1 Deux systèmes dynamiques modèles

2.1.1 Flot engendré par un champ de vecteurs

Soit (X, g) une variété riemannienne C^∞ et $\mathcal{X} \in \Gamma(X)$ un champ de vecteurs sur X . Au moins pour les temps courts, l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{X}(x(t))$$

possède une solution. Si celle-ci est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$, le champ de vecteurs \mathcal{X} engendre un flot $\Phi^t : X \rightarrow X$ qui est un difféomorphisme à un paramètre, faisant de (X, Φ^t) un système dynamique topologique¹ à temps continu. Par exemple, si (M, g) est une variété riemannienne compacte et $X = T^*M$, on peut définir un champ de vecteur Hamiltonien \mathcal{X}_H sur $S^*M = \{(x, \xi) \in T^*M : g_x(\xi, \xi) = 1\}$ à partir d'un hamiltonien $H(x, \xi) \in C^\infty(S^*M)$ en posant $\mathcal{X}_H = (-\nabla_x H, \nabla_\xi H)$. L'équation du flot engendré par \mathcal{X}_H correspond alors aux équations de Hamilton (1.6). On fait de S^*M un espace métrique à l'aide de la métrique de Sasaki définie à partir de la métrique g sur M (voir l'appendice A), de sorte que $(S^*M, e^{t\mathcal{X}_H})$ est un système dynamique topologique à temps continu. Lorsque $H(x, \xi) = \frac{1}{2}g_x(\xi, \xi)$ est le

1. X est en effet un espace métrique pour la distance géodésique.

hamiltonien correspondant à une particule libre sur M (énergie cinétique), le flot Φ^t engendré par \mathcal{X}_H correspond au flot géodésique de M .

2.1.2 Automorphismes hyperboliques du tore

2.1.2.1 Applications du chat d'Arnold

Toute matrice $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ préserve le réseau \mathbb{Z}^2 puisque ses coefficients sont entiers. Une telle matrice A induit donc une action sur le 2-tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$: en identifiant $(x, \xi) \in \mathbb{T}^2$ avec le vecteur $v = \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on définit

$$\kappa_A : \begin{cases} \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 \\ v \mapsto Av \pmod{1}. \end{cases}$$

Si $\text{Tr } A > 2$, les deux vecteurs propres de A sont associés à des valeurs propres réelles distinctes λ, λ^{-1} avec $\lambda > 1$ irrationnel quadratique. En particulier, les vecteurs propres associés à λ sont "étirés" sous l'action de $A^n, n \in \mathbb{N}$, tandis que ceux correspondant à λ^{-1} sont contractés. Les droites de \mathbb{R}^2 engendrées par les vecteurs v_λ et $v_{\lambda^{-1}}$ depuis un point $x \in [0, 1] \times [0, 1]$ se projettent sur le tore pour donner respectivement ce que l'on appelle les variétés *stable* $W^s(x)$ et *instable* $W^u(x)$ en x . On peut vérifier que $W^{s(u)}(\kappa_A x) = \kappa_A W^{s(u)}(x)$, c'est à dire que ces variétés sont invariantes sous l'action de κ_A . De plus, $W^u(x)$ est dense dans \mathbb{T}^2 . Prenons par exemple la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont $\lambda = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1, \lambda^{-1} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Les vecteurs propres sont perpendiculaires, car A est symétrique, et l'on a :

$$v_\lambda = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_{\lambda^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notons pour finir que l'action de κ_A sur le tore est symplectique, ou encore canonique, car elle préserve la mesure de Liouville $|dp \wedge dq|$ vu que $\det A = 1$. On peut donc voir κ_A comme un prototype de "mécanique classique" avec comme espace des phases le 2-tore \mathbb{T}^2 .

2.1.2.2 L'application du boulanger

L'application du boulanger dit $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, ou plus simplement boulanger $\frac{1}{3}$ est une application $B : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ symplectique discontinue. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$



FIGURE 2.1 – Une itération de l’application du chat d’Arnold κ_A sur le tore (de gauche à droite).

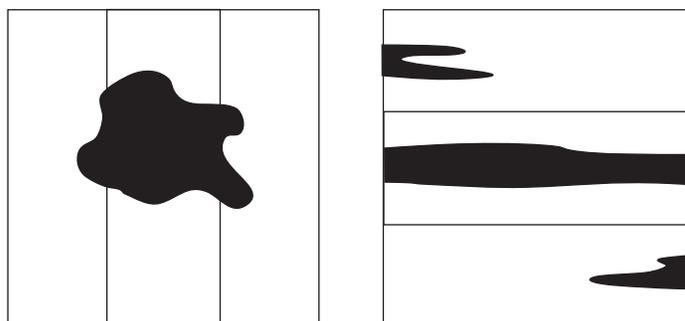


FIGURE 2.2 – De gauche à droite, une itération de l’application du boulanger B sur le tore.

et $(x, \xi) = v$. On définit $B : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ par

$$B(v) = \begin{cases} Av & \text{si } q \in [0, \frac{1}{3}[\\ Av + (-1, \frac{1}{3}) & \text{si } q \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[\\ Av + (-2, \frac{2}{3}) & \text{si } q \in [\frac{2}{3}, 1[\end{cases} \quad (2.1)$$

Les discontinuités de l’application sont situées sur les lignes verticales $q = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$.

Comme dans la section précédente, on remarque la présence de deux directions particulières $q = \text{constante}$ et $p = \text{constante}$, l’une étant étirée par B , l’autre contractée. Les applications du chat et du boulanger sont des cas particuliers de systèmes hyperboliques sur le tore, dont nous décrivons maintenant les propriétés essentielles.

2.2 Systèmes Anosov

La référence pour cette section est principalement [KH95, Part 4]. Soit (X, d) un espace métrique de Hausdorff compact. Nous prendrons toujours pour X une variété (riemannienne) lisse, et considérerons ici deux systèmes dynamiques :

1. $\kappa : X \rightarrow X$ est un difféomorphisme de X (système dynamique à temps discret).
2. $(\Phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ est le flot d'un champ de vecteurs C^∞ sur X (système dynamique à temps continu).

2.2.1 Hyperbolicité : cas des difféomorphismes

La notion d'hyperbolicité est essentiellement locale, les systèmes hyperboliques étant ceux pour qui cette propriété locale s'étend soit à X tout entier, soit éventuellement sur un sous-ensemble de X fermé invariant.

Définition 2.1. Un ensemble fermé $\Lambda \subset X$ est *hyperbolique* s'il satisfait $\kappa(\Lambda) = \Lambda$, et si en tout point $x \in \Lambda$ l'espace tangent $T_x X$ peut s'écrire comme une somme directe

$$T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x)$$

Les espaces E^s et E^u , appelés respectivement espaces *stable* et *instable*, satisfont les propriétés suivantes :

- i)* $D\kappa_x(E^{s(u)}(x)) = E^{s(u)}(\Phi(x))$
- ii)* $\forall v \in E^u(x), \|D\kappa_x^{-n}v\| \leq C e^{-\lambda n} \|v\|, n \geq 0$
- iii)* $\forall v \in E^s(x), \|D\kappa_x^n v\| \leq C e^{-\lambda n} \|v\|, n \geq 0$

où $C, \lambda > 0$ sont des constantes. On peut montrer que la condition *i)* implique que $E^{s(u)}(x)$ varie Hölder-continûment avec x et que $\dim E^{s(u)}(x)$ est constante sur X . Il existe également une métrique sur X , dite adaptée, telle que $C = 1$ dans les équations ci-dessus. Remarquons que le fibré tangent $T_\Lambda M$ se décompose naturellement en fibrés stables et instables,

$$T_\Lambda X = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^u$$

où $E_\Lambda^s = \cup_{x \in \Lambda} E^s(x)$ et $E_\Lambda^u = \cup_{x \in \Lambda} E^u(x)$. Un *système Anosov* est un système dynamique partout hyperbolique, c'est à dire $\Lambda = X$.

2.2.2 Variétés stables, variétés instables

Définissons les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} W^s(x) &= \{y \in X : d(\kappa^n x, \kappa^n y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0\} \\ W_\epsilon^s(x) &= \{y \in X : d(\kappa^n x, \kappa^n y) \leq \epsilon, \forall n \geq 0\} \\ W^u(x) &= \{y \in X : d(\kappa^{-n} x, \kappa^{-n} y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0\} \\ W_\epsilon^u(x) &= \{y \in X : d(\kappa^{-n} x, \kappa^{-n} y) \leq \epsilon, \forall n \geq 0\}, \end{aligned}$$

où d réfère à la métrique adaptée. Le théorème suivant est responsables de la plupart des propriétés analytiques des systèmes Anosov :

Théorème 2.2. *Soit Λ un ensemble hyperbolique de X , et supposons κ de classe C^r . Soit d la distance pour la métrique adaptée. Alors pour ϵ assez petit,*

1. $W_\epsilon^s(x), W_\epsilon^u(x)$ sont des disques C^r pour $x \in X$ et $T_x W_\epsilon^{s(u)}(x) = E^{s(u)}(x)$.
2. $d(\kappa^n x, \kappa^n y) \leq e^{-\lambda n} d(x, y)$ pour $y \in W_\epsilon^s(x)$ et $n \geq 0$
3. $d(\kappa^{-n} x, \kappa^{-n} y) \leq e^{-\lambda n} d(x, y)$ pour $y \in W_\epsilon^u(x)$ et $n \geq 0$
4. $W_\epsilon^s(x), W_\epsilon^u(x)$ varient continûment avec x .

En particulier, on voit qu'en fait $W_\epsilon^{s(u)}(x) \subset W^{s(u)}(x)$ et que

$$W^s(x) = \bigcup_{n \geq 0} \kappa^{-n} W_\epsilon^s(\kappa^n x), \quad W^u(x) = \bigcup_{n \geq 0} \kappa^n W_\epsilon^u(\kappa^{-n} x)$$

Les ensembles $W^{s(u)}$ ont des structures de variétés C^r et sont les variétés stables (resp. instables) globales de x . Elles forment une foliation continue de X qui n'est pas C^r en général, mais seulement Hölder.

Les difféomorphismes Anosov ont la propriété d'être *expansifs*, c'est à dire qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tous $x, y \in X$ distincts, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$d(\kappa^n x, \kappa^n y) > \epsilon.$$

Le plus grand ϵ tel que la propriété ci-dessus est vérifiée s'appelle la *constante d'expansion* de κ . En d'autres termes, deux points distincts seront séparés d'au moins ϵ dans le futur ou le passé, et si les orbites de deux points sont toujours distantes d'au plus ϵ , ceci signifie que les points sont en fait égaux.

2.2.3 Flots Anosov

Dans ce paragraphe, nous mentionnons brièvement comment les résultats ci-dessus sont modifiés lorsque l'on considère comme système dynamique un flot Φ^t plutôt qu'une application à temps discret κ . Nous supposons que le flot Φ^t est engendré par un champ de vecteur \mathcal{X} sans points fixes.

Définition 2.3. Un ensemble $\Lambda \subset X$ fermé, est hyperbolique s'il satisfait $\Phi^t(\Lambda) = \Lambda$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et si en tout point $x \in \Lambda$ l'espace tangent $T_x X$ peut s'écrire comme une somme directe

$$T_x X = E^s(x) \oplus E^u(x) \oplus \mathbb{R}\mathcal{X}(x).$$

Les espaces E^s, E^u sont aussi nommés espaces stables et instables. L'espace $\mathbb{R}\mathcal{X}_H$ correspond à la direction du flot, dite *neutre*. Ces espaces satisfont les propriétés suivantes :

- i) $D\Phi_x^t(E^{u(s)}(x)) = E^{u(s)}(\Phi^t(x)), t \in \mathbb{R}$
- ii) $\forall v \in E^u(x), \|D\Phi_x^{-t}v\| \leq C e^{-\lambda t} \|v\|, t \geq 0$
- iii) $\forall v \in E^s(x), \|D\Phi_x^t v\| \leq C e^{-\lambda t} \|v\|, t \geq 0$

où $C, \lambda > 0$ sont des constantes.

Comme dans le cas discret, il existe une métrique adaptée sur M telle que $C = 1$ dans les équations précédentes. Les définitions et résultats sur les variétés stables sont identiques, à ceci près que le paramètre temps est maintenant continu ($n \in \mathbb{N} \rightarrow t \in \mathbb{R}$). Les espaces $E^{u(s)}(x)$ dépendent également de manière Hölder de x . Enfin, un flot Anosov est expansif, au sens où il existe $\varepsilon > 0$ tel que deux points distincts ne se trouvant pas sur la même orbite seront séparés d'au moins ε dans le futur ou le passé.

Exemple 2.4. L'exemple le plus standard de flot Anosov est celui du flot géodésique sur une variété riemannienne (M, g) dont la courbure sectionnelle est strictement négative. Les arguments permettant de montrer cette propriété sont exposés dans l'appendice A, voir également [Ano67, PP90]. Disons simplement ici que cette propriété résulte du fait que l'on peut décomposer linéairement tout champ de Jacobi le long d'une géodésique sur deux types de champs particuliers dits stables et instable, que l'on utilise pour montrer la décomposition de TS^*M en espaces stables, instable et neutre.

Exemple 2.5. Le jacobien instable du flot géodésique. Considérons le flot géodésique $\Phi^t : S^*M \rightarrow S^*M$ sur une variété (M, g) compacte de courbure (strictement) négative. La métrique adaptée sur S^*M induit une forme volume Ω_ρ sur n'importe quel sous-espace d -dimensionnel de $T(S^*_\rho M)$. Définissons les sous-espaces stables faibles (resp. instables faibles) au point ρ par

$$E^{s,0}(\rho) = E^s(\rho) \oplus \mathbb{R}H_\rho, \quad E^{u,0}(\rho) = E^u(\rho) \oplus \mathbb{R}H_\rho.$$

On définit alors le jacobien instable au point ρ pour $t \geq 0$ par

$$J_t^u(\rho) = \det d\Phi^{-t}|_{E^{u,0}(\Phi^t(\rho))} = \frac{\Omega_\rho(d\Phi^{-T}v_1 \wedge \cdots \wedge d\Phi^{-t}v_d)}{\Omega_{\Phi^t(\rho)}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_d)}, \quad J^u(\rho) \stackrel{\text{def}}{=} J_1^u(\rho), \quad (2.2)$$

où (v_1, \dots, v_d) peut être n'importe quelle base de $E^{u,0}(\rho)$. On n'a pas nécessairement $J^u(\rho) < 1$, par contre il est clair qu'en raison de l'hyperbolicité, $J_t^u(\rho)$ décroît exponentiellement vite lorsque $t \rightarrow +\infty$.

2.3 Théorie ergodique

Pour cette section nous avons suivi [Bow75, Wal75]. La théorie ergodique s'intéresse aux systèmes dynamique du point de vue de la théorie de la mesure. Un *système dynamique mesurable* est la donnée d'un espace (X, \mathfrak{B}, μ) mesuré et d'une application $\kappa : X \rightarrow X$ (ou d'un flot Φ^t) mesurable, c'est à dire que si $B \in \mathfrak{B}$, alors $\kappa^{-1}(B) \in \mathfrak{B}$. Lorsque l'on a déjà un espace topologique (X, d) , les ouverts \mathcal{O} de X engendrent une tribu \mathfrak{B} dite de Borel, qui est la plus petite tribu contenant les ouverts \mathcal{O} . Les éléments de \mathfrak{B} sont appelés le boréliens, et l'on obtient un système dynamique mesurable en munissant (X, \mathfrak{B}) d'une mesure de Borel μ : la plupart des systèmes dynamiques mesurables sont construits ainsi, et ce sera toujours la situation que nous rencontrerons.

Exemple 2.6. Tout système dynamique hamiltonien est mesurable pour la mesure de Liouville sur l'espace des phases, qui est d'ailleurs conservée par le flot Φ^t engendré par le champ Hamiltonien \mathcal{X}_H .

2.3.1 Le Théorème ergodique de Birkhoff

Nous supposons dorénavant que $\mu(X) = 1$, ainsi (X, \mathfrak{B}, μ) est un espace de probabilité. En notant $\kappa : X \rightarrow X$ le système dynamique, dire que κ préserve μ équivaut à

$$\forall B \in \mathfrak{B}, \mu(\kappa^{-1}B) = \mu(B).$$

Nous serons aussi amenés à considérer des mesures ν sur (X, \mathfrak{B}) qui sont des mesures de probabilité, sans être pour autant invariante par κ . Un système dynamique induit naturellement une action sur les fonctions en les “tirant en arrière” :

$$\kappa^* f = f \circ \kappa$$

Les propriétés d’ergodicité de κ sont celles qui on trait à l’indépendance statistique entre f et $(\kappa^n)^* f$: la dépendance est la plus forte lorsque f est invariante, c’est à dire que $\kappa^* f = f$, tandis que l’indépendance la plus forte peut se mesurer en demandant par exemple qu’une fonction dans $L^2(X)$ soit orthogonale à ses images par κ .

Un ensemble A est *essentiellement invariant* s’il est invariant à un ensemble de mesure nulle près, c’est à dire que

$$\mu(\kappa^{-1}(A)\Delta A) = 0, \quad \text{où} \quad A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

On dira qu’une transformation (ou un flot) qui préserve μ est *ergodique* si tout ensemble essentiellement invariant par κ est de mesure 0 ou 1. De même, une fonction f est essentiellement κ -invariante si $\mu(\{x \in X : f(\kappa^k x) \neq f(x)\}) = 0$ pour tout k . En approximant toute fonction de $L^p(X)$ pour $p \in]0, \infty]$ par des fonctions étagées, on montre que

Proposition 2.7. *Soit κ une transformation (ou flot) de X qui laisse μ invariante, et $p \in]0, \infty]$. Alors T est ergodique si et seulement si toute fonction essentiellement invariante de $L^p(X, \mu)$ est constante presque partout.*

Venons-en au résultat principal de la théorie ergodique :

Théorème 2.8. *Pour $f \in L^2$, on pose*

$$f_N^+(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\kappa^n x)$$

Alors f_N^+ converge dans L^2 vers une fonction \bar{f} κ -invariante. Si κ est inversible, on définit f_N^- de manière similaire en utilisant κ^{-1} , et f_N^- converge aussi vers \bar{f} dans L^2 .

L’énoncé est identique pour les flots, les intégrales remplaçant les sommes. Lorsque $f \in L^1$, on a un résultat plus fort, connu sous le nom de théorème ergodique de Birkhoff :

Théorème 2.9. *Si $f \in L^1$, la limite*

$$\bar{f}(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\kappa^n x)$$

existe pour μ -presque tout $x \in X$. De plus \bar{f} est κ -invariante, intégrable, et satisfait

$$\int_X \bar{f} d\mu = \int_X f d\mu$$

Lorsque $f \in L^2$, \bar{f} est la projection orthogonale de f sur le sous-espace des fonctions κ -invariantes. Comme précédemment, le résultat est valable avec itération dans le passé si κ est inversible. Enfin, un résultat similaire a lieu pour les flots, où le temps est continu et les sommes sur les orbites de κ sont remplacées par des intégrales le long des orbites du flot. Que se passe-t-il si on suppose maintenant κ ergodique? Si f est κ -invariante, la seule solution est d'avoir \bar{f} constante presque partout, et on en tire que

$$\bar{f}(x) = \int_X f d\mu \quad \text{pour } \mu\text{-presque tout } x \in X.$$

Exemple 2.10. Les automorphismes hyperboliques du tore \mathbb{T}^2 décrits à la section 2.1.2 sont ergodiques pour la mesure de Lebesgue : ceci se prouve par exemple en décomposant f en séries de Fourier. Plus généralement, tout difféomorphisme (ou flot) Anosov C^2 sur une variété X qui préserve une mesure μ lisse² est ergodique pour μ , voir [BR75].

2.3.2 Entropies et pression topologique

Intuitivement, on peut tenter de mesurer la complexité d'un système dynamique de deux points de vue :

1. topologique : comment se comporte l'orbite d'un point $x_0 \in X$ arbitraire? La limite $\kappa^n x_0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ existe-t-elle? Que dire des orbites de x et de y lorsque x et y sont pris arbitrairement proches?
2. mesurable : comment évolue un borélien $B \in \mathfrak{B}$ donné sous les itérés κ^n ? En d'autres termes, quelles sont les dépendances entre une fonction mesurable f et son itérée $\kappa^{n*} f$?

Comme en physique statistique, on peut introduire une entropie pour mesurer le désordre, ou complexité du système dynamique. L'*entropie topologique* va mesurer la complexité du système dynamique du point de vue topologique, tandis que l'on peut définir une entropie dite (un peu à tort) *métrique*, qui mesure le désordre engendré par κ du point de la théorie de la mesure.

2. c'est à dire que $d\mu(x) = f(x)d\text{vol}(x)$ où f est continue et $d\text{vol}$ représente la mesure riemannienne)

2.3.2.1 Entropie topologique

Commençons par introduire une distance “dynamique” d_n faisant intervenir des orbites de longueur n :

$$d_n(x, y) = \sup_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} d(\kappa^k x, \kappa^k y)$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $n > 0$. On dira qu’un ensemble $\mathcal{S}_{\varepsilon, n} \subset X$ est (ε, n) –séparé si $d_n(x, y) > \varepsilon$ pour tout $x, y \in \mathcal{S}_{\varepsilon, n}$. Puisque X est compact, il s’ensuit que le cardinal d’un tel ensemble $\mathcal{S}_{\varepsilon, n}$ est toujours fini. Nous noterons $C_{\varepsilon, n} = \max \text{Card } \mathcal{S}_{\varepsilon, n}$ où le maximum est pris sur tous les ensembles (ε, n) –séparés. On définit alors l’entropie topologique de κ par

$$h_{\text{top}}(\kappa) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log C_{\varepsilon, n}$$

De manière approchée, on peut voir h_{top} comme une mesure du taux de croissance de $C_{\varepsilon, n}$: si $h_{\text{top}} > 0$, l’application κ sépare les points exponentiellement vite. Pour une isométrie, $d_n = d$ et donc $h_{\text{top}} = 0$. Remarquons enfin qu’il existe une définition de h_{top} qui utilise des recouvrements ouverts de X , mais cette définition nécessite de supposer X compact. La définition utilisant les ensembles (ε, n) –séparés, due à R. Bowen, n’a pas besoin de cette hypothèse.

2.3.2.2 Entropie métrique

Soit $P = (p_i)$ une partition de (X, \mathfrak{B}, μ) telle que p_i soit mesurable pour tout i . En adoptant un point de vue probabiliste, on peut voir l’ensemble des p_i comme des événements, chacun portant une information égale à $-\log \mu(p_i)$. Le choix de la fonction $-\log$ pour mesurer l’information est unique à une constante près si l’on cherche une fonction information I qui décroisse avec la probabilité d’un événement, qui soit additive pour deux événements indépendants et que l’événement trivial X soit d’information nulle. L’entropie de la partition P est l’*information moyenne* portée par cette partition :

$$H(P) = - \sum_i \mu(p_i) \log \mu(p_i).$$

Si P et Q sont deux partitions, la partition jointe $P \vee Q$ de P et Q est obtenue par intersection des ouverts de P et Q :

$$P \vee Q = \{p \cap q, p \in P, q \in Q\}.$$

Cette partition est “plus fine” que P , au sens où tout élément de $P \vee Q$ est contenu dans un élément de P . De même, on voit que $P \vee Q$ est plus fine que Q . On écrit $P \vee Q \leq P, Q$. Pour voir comment évolue une partition sous les itérés de κ , on considère la partition raffinée au temps N :

$$P^{(N)} = \bigvee_{k=0}^{N-1} \kappa^{-k} P$$

L'entropie métrique de κ relativement à la partition P , notée $h(\kappa, P)$, est définie par

$$h(\kappa, P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(P^{(N)}).$$

L'entropie métrique $h(\kappa)$ est alors le supremum de $h(\kappa, P)$ sur l'ensemble des partitions mesurables finies P de X . Le fait de prendre le sup sur l'ensemble des partitions mesurables finies peut sembler un obstacle sérieux au calcul de $h(\kappa)$, mais on peut montrer que si $(P_n)_{n \geq 0}$ est une suite de partitions de X telles $\text{diam } P_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors

$$h(\kappa) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(\kappa, P_n)$$

On note parfois h_{KS} l'entropie métrique (pour Kolmogorov-Sinai).

2.3.2.3 Pression topologique d'un difféomorphisme

La pression topologique de f par rapport à $\kappa : X \rightarrow X$ décrit le comportement asymptotique (au temps longs) des moyennes de Birkhoff de f sur les orbites de κ . On commence par définir la "fonction de partition"

$$Z(\varepsilon, T, f) = \sup_{\mathcal{S}_{\varepsilon, T}} \sum_{\rho \in \mathcal{S}_{\varepsilon, T}} e^{\sum_{i=0}^{T-1} f \circ \kappa^i(\rho)}.$$

La *pression topologique* de f relativement à κ s'obtient par

$$\text{Pr}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log Z_T(\varepsilon, T, f).$$

Remarquons que si $f = 0$, alors $Z(\varepsilon, T, 0) = C_{\varepsilon, T}$ est le cardinal maximal d'un ensemble (ε, T) -séparé : il s'ensuit que

$$\text{Pr}(0) = h_{\text{top}}(\kappa).$$

Il existe une définition équivalente qui utilise les recouvrements ouverts de X , que nous donnons maintenant car c'est celle que nous allons utiliser en pratique. Soit V un recouvrement ouvert de X , et $V^{(T)} = \bigvee_{i=0}^{T-1} \kappa^{-i} V$ le recouvrement raffiné au temps T . On pose

$$Z_T(f, V) = \inf_{\beta} \left\{ \sum_{b \in \beta} \sup_{\rho \in b} e^{\sum_{i=0}^{T-1} f \circ \kappa^i(\rho)}, \beta \text{ est un sous-recouvrement fini de } V^{(T)} \right\}$$

Alors,

$$\text{Pr}(f) = \lim_{\text{diam } V \rightarrow 0} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log Z_T(f, V) \quad (2.3)$$

La pression topologique possède plusieurs propriétés remarquables (voir [Wal75] pour une liste assez complète), nous en listons quelques-unes :

1. $f \leq g \Rightarrow \text{Pr}(f) \leq \text{Pr}(g)$
2. $\text{Pr}(f) < \infty$ ou bien $\text{Pr}(f) = +\infty$, $\forall f$
3. Pr est convexe : $\text{Pr}(tf + (1-t)g) \leq t \text{Pr}(f) + (1-t) \text{Pr}(g)$

2.3.2.4 Pression topologique d'un flot

La définition de la pression topologique relativement à un flot $\Phi^t : X \rightarrow X$ se définit de manière similaire au cas des difféomorphismes. Un ensemble sera dit (ε, T) -séparé si pour tout $x, y \in X$, on a $d_T(x, y) > \varepsilon$, où l'on a introduit la distance

$$d_T(x, y) = \sup_{t \in [0, T]} d(\Phi^t x, \Phi^t y).$$

On note comme précédemment $\mathcal{S}_{\varepsilon, T}$ un ensemble ε, T séparé pour le flot Φ^t . La fonctionnelle $Z_T(\varepsilon, T, f)$ est maintenant définie par

$$Z(\varepsilon, T, f) = \sup_{\mathcal{S}_{\varepsilon, T}} \sum_{\rho \in \mathcal{S}_{\varepsilon, T}} e^{\int_0^T f \circ \Phi^s(\rho) ds} \quad (2.4)$$

et l'on pose

$$\text{Pr}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log Z_T(\varepsilon, T, f). \quad (2.5)$$

On montre facilement que la pression topologique d'un flot est égale à la pression de l'application $\kappa = \Phi^1$ du flot au temps 1. En particulier, la définition (2.3) faisant intervenir les recouvrements ouverts de X est toujours valable pour les flots.

2.3.2.5 États d'équilibre et principe variationnel

On revient ici à la situation où $\kappa : X \rightarrow X$ est un difféomorphisme sur un espace métrique X compact. La pression topologique est directement reliée aux mesures de Borel invariantes par κ . Ceci s'exprime par le principe variationnel, qui s'énonce ainsi :

Théorème 2.11. *Soit $\mathcal{M}(\kappa)$ l'ensemble des mesures de Borel κ -invariantes. Alors*

$$\text{Pr}(f) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(\kappa)} (h_{KS}(\mu) + \int f d\mu)$$

Il existe une "réciproque" au théorème précédent, qui affirme que

$$h_{KS}(\mu) = \inf_{f \in C^0(X)} (\text{Pr}(f) - \int f d\mu)$$

si et seulement si h est semi-continue supérieurement en μ .

On peut se demander si le supremum du principe variationnel est atteint pour une certaine mesure κ -invariante. Si tel est le cas, on dit que μ_f est un *état d'équilibre* pour f si l'on a l'égalité

$$\text{Pr}(f) = h_{KS}(\mu_f) + \int f d\mu_f$$

Nous noterons \mathcal{M}_f l'ensemble des mesures d'équilibre pour f . Il se peut que \mathcal{M}_f soit vide, mais pour les difféomorphismes expansifs (comme les applications ou les flots Anosov), il existe toujours un état d'équilibre. Les propriétés suivantes sont satisfaites :

1. \mathcal{M}_f est convexe, ses points extrêmes sont des mesures ergodiques pour κ .
2. Si $h_{\text{top}} < \infty$ et $\mathcal{M}_f \neq \emptyset$, alors \mathcal{M}_f contient une mesure ergodique pour κ .

On peut également obtenir une description élégante de μ_f lorsque elle existe : si $g \in C^0(X)$, alors

$$\int_X g d\mu_f = \frac{d}{ds} \text{Pr}(f + sg)|_{s=0}.$$

2.4 Dynamique symbolique

L'idée principale de la dynamique symbolique est d'encoder la trajectoire d'un système dynamique par son itinéraire le long d'une collection finie de sous-ensembles. Soit $\kappa : X \rightarrow X$ une application à temps discret, et $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_m\}$ une partition de X . Pour tout $x \in X$, on note $I_i(x) \in \mathbb{N}$ l'indice de l'élément de \mathcal{P} qui contient $\kappa^i x$. L'orbite de x peut donc se représenter comme $I(x) = (I_i(x))_{i \in \mathbb{N}}$: c'est désormais une suite de symboles, d'où le nom de *dynamique symbolique*. L'application $I : X \rightarrow \llbracket 1, m \rrbracket^{\mathbb{Z}}$ s'appelle un *codage*. Ce procédé de "réduction" d'un système dynamique à une suite de symboles est une méthode puissante qui permet de traiter dans un même formalisme des systèmes dynamiques d'origine diverses. Les propriétés que nous avons regroupées dans cette section proviennent essentiellement de [PP90].

2.4.1 Décalages

Plus généralement, on considère un alphabet $\mathcal{A} \equiv \{1, \dots, m\}$ de m symboles, et l'on note

$$\Sigma_m^+ = \{1, \dots, m\}^{\mathbb{N}}, \quad \Sigma_m = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$$

l'ensemble des suites possibles de symboles à un côté et deux côtés respectivement. Un *mot* est une suite finie de symboles $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{A}^k$, de sorte que tout $x \in \Sigma$ peut être vu comme une suite de mots de longueurs variables. Un *décalage* est une application $\sigma : \Sigma_m^{(+)} \rightarrow \Sigma_m^{(+)}$ telle que $\sigma(x)_i = (x)_{i+1}$, c'est à dire que l'on décale la séquence d'un cran vers la gauche. En revenant au système dynamique de départ κ on voit que le codage réalise ce que l'on appelle une *semi-conjugaison* entre κ et σ , c'est à dire

$$I \circ \kappa = \sigma \circ I.$$

Nous avons ainsi effectivement codé la dynamique engendrée par κ par une suite de symboles sur laquelle on se déplace à l'aide de σ . Les espaces des décalages $\Sigma_m^{(+)}$ sont munis d'une topologie faite de *cylindres* :

$$C_{j_1, \dots, j_k}^{n_1, \dots, n_k} = \{x \in \Sigma_m^{(+)} : x_{n_i} = j_i \in \mathcal{A}, i = 1, \dots, k\}.$$

En d'autres termes, un cylindre est un ensemble de suites de symboles pour lesquelles on impose le symbole j_i aux places n_i , les autres pouvant varier librement. On munit $\Sigma_m^{(+)}$ d'une distance donnée par

$$d(x, x') = 2^{-\ell}, \quad \text{où } \ell = \min\{|i| : x_i \neq x'_i\} \quad (2.6)$$

En particulier, la boule ouverte de rayon $2^{-\ell}$ et de centre (x) est donnée par le cylindre symétrique

$$B(x, 2^{-\ell}) = C_{x_{-\ell}, \dots, x_{\ell}}^{-\ell, \dots, \ell}$$

où les ℓ premiers symboles (positifs et négatifs) sont spécifiés comme étant ceux de x , tandis que les autres peuvent varier librement. Par construction, deux éléments de B sont à distance $\leq 2^{-\ell}$. La distance d fait de $\Sigma_m^{(+)}$ un espace topologique compact. La préimage d'un cylindre par σ est un cylindre, donc σ est une application continue. En particulier, $\sigma : \Sigma_m \rightarrow \Sigma_m$ est un homéomorphisme.

Soit un ensemble fini de mots de longueurs au plus $k + 1$, que nous nommerons “mots interdits”. L'ensemble $X \subset \Sigma$ des suites qui ne contiennent aucun de ces mots interdits est fermé et σ -invariant : on dit alors que X est un *sous-décalage de type fini* (ou SFT) de degré k . Un SFT de degré 1 s'appelle une chaîne de Markov topologique.

2.4.2 Matrice d'adjacence

Il existe un moyen très pratique de représenter un sous-décalage de type fini sous forme de graphe Γ . Quitte à agrandir l'alphabet \mathcal{A} , il n'est pas difficile de voir que l'on peut se restreindre à un ensemble de mots interdits de longueur 2 (il suffit de remplacer les mots d'une certaine longueur par de nouveaux symboles). On définit les sommets de Γ comme étant les symboles de \mathcal{A} . Deux sommets x_i, x_j sont reliés par une arête si le mot $x_i x_j$ (l'ordre compte !) n'est pas interdit dans X . Ainsi, une séquence dans X peut se voir comme une marche dirigée infinie sur le graphe Γ . On associe alors à Γ sa *matrice d'adjacence* $A = (a_{ij})$, qui est une matrice carrée $m \times m$ dont les entrées sont 0 ou 1, avec comme règle $a_{ij} = 1$ si $x_i x_j$ est permis, et 0 sinon. Inversement, à toute matrice d'adjacence A on associe un sous-décalage de type fini. Un certain nombre de propriétés dynamiques du sous-décalage $X \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma_A$ sont encodées dans la matrice A :

1. Si $a_{ij} = 1$ pour tous i, j alors $\Sigma_A = \Sigma_m$, autrement dit le sous-décalage X est en fait le décalage total.
2. Le nombre de points périodiques de Σ_A de période n vaut $\text{Tr } A^n$.
3. Le nombre de mots de longueur $n + 1$ commençant par i et se terminant par j est $(A^n)_{ij}$.

La matrice A est donc non-négative, au sens où $A_{ij} \geq 0$. On dira qu'une matrice carrée est positive si ses coefficients satisfont $A_{ij} > 0$. Si pour tout i, j il existe n tel que $(A^n)_{ij} > 0$ alors A est dite *irréductible*. S'il existe n tel que A^n est une matrice positive, on dira alors que A est *primitive*. Les notions de matrices irréductibles et primitives ont une signification dynamique précise lorsque A est la matrice d'adjacence du graphe d'un décalage. Une matrice A est irréductible si et seulement si pour tous sommets x_i, x_j de son graphe Γ_A il existe un chemin reliant x_i à x_j . Lorsque A est primitive, cela est équivalent au fait qu'il existe un entier n tel que tous sommets x_i, x_j sont reliés par un chemin de longueur n .

Exemple 2.12. L'application du boulanger (2.1) vue dans l'exemple 2.1.2.2 peut être conjuguée à une dynamique symbolique. On prend pour espace de symboles $\Sigma = \{0, 1, 2\}^{\mathbb{Z}}$ muni du décalage total σ :

$$\epsilon = \dots \epsilon_{-2} \epsilon_{-1} \cdot \epsilon_0 \epsilon_1 \dots \in \Sigma \xrightarrow{\sigma} \sigma(\epsilon) = \dots \epsilon_{-2} \cdot \epsilon_{-1} \epsilon_0 \epsilon_1 \dots$$

La conjugaison avec l'application B se fait de la manière suivante. Soit $m \in \mathbb{T}^2$ un point du tore de coordonnées (q, p) . Écrivons la décomposition de q et p en base 3 de la manière suivante :

$$q = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu_i \frac{1}{3^i}, \quad p = \sum_{i=1}^{+\infty} \nu_i \frac{1}{3^i}$$

On identifiera deux séquences identiques jusqu'à un certain rang et constantes à 0 ou 2 au delà. En définissant le sous-espace de symboles $\Sigma' \subset \Sigma$ obtenu en supprimant les séquences constantes à 2 à droite ou à gauche à partir d'un certain rang, on construit une application de codage $\kappa : \mathbb{T}^2 \rightarrow \Sigma'$ par

$$\kappa(q, p) = \epsilon \in \Sigma' \quad \text{où} \quad \epsilon_i = \begin{cases} \mu_{i+1} & \text{si } i \geq 0 \\ \nu_{-i} & \text{si } i < 0. \end{cases}$$

L'application κ est bien bijective de \mathbb{T}^2 dans Σ' et l'on vérifie que l'application du boulanger B est conjuguée au décalage σ par κ :

$$B = \kappa^{-1} \circ \sigma \circ \kappa.$$

La matrice d'adjacence de B est une matrice 3×3 où tous les coefficients sont égaux à 1 (le décalage est total). En particulier, c'est une matrice primitive.

2.4.3 L'opérateur de Ruelle

Dans cette section, nous allons passer en revue rapidement une approche alternative des notions de pression et d'états d'équilibre. On considère ici un sous-décalage à droite de type fini sur D symboles, donné par sa matrice d'adjacence A :

$$\Sigma_A^+ = \{\epsilon_0 \epsilon_1 \dots, \epsilon_i \in \{0, \dots, D-1\}, A_{\epsilon_i \epsilon_{i+1}} = 1, \forall i \geq 0\}$$

Appellons \mathcal{F}_A^+ l'ensemble des fonctions Lipschitz sur l'espace total Σ_A pour la distance d définie en (2.6) :

$$\mathcal{F}_A^+ = \{f \in C^0(\Sigma_A^+) : |f(x) - f(y)| \leq Cd(x, y) \text{ pour un certain } C > 0\}$$

On définit également la quantité

$$\text{var}_n f = \sup\{|f(x) - f(y)| : d(x_i, y_i) \leq 2^{-n} \text{ pour } 0 \leq i < n\}$$

de sorte que $f \in \mathcal{F}_A^+$ est équivalent à $\text{var}_n f \leq C2^{-n}$ pour $n \geq 0$. Pour $f \in \mathcal{F}_A^+$, on pose

$$|f|_{\frac{1}{2}} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{n \geq 0} 2^n \text{var}_n f, \quad |f|_{\infty} = \sup_{x \in \Sigma_A^+} |f(x)|$$

Ces deux quantités prises ensemble définissent une norme sur \mathcal{F}_A , en posant $\|f\| = |f|_{\infty} + |f|_{\frac{1}{2}}$. Ces définitions se généralisent sans problème aux fonctions définies sur Σ_A .

Soit maintenant $V \in \mathcal{F}_A^+$ un “potentiel”, et définissons l’opérateur de Ruelle $\mathcal{L}_V : C^0(\Sigma_A^+) \rightarrow C^0(\Sigma_A^+)$ par :

$$\mathcal{L}_V : f \mapsto \sum_{y \in \sigma^{-1}x} e^{V(y)} f(y)$$

L’opérateur dual \mathcal{L}^* agissant sur les mesures est défini par

$$\mathcal{L}^* \mu(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int \mathcal{L}(f) d\mu.$$

L’opérateur \mathcal{L} n’est manifestement pas bijectif. Ses propriétés spectrales sont directement reliées aux objets thermodynamiques comme la pression et les états d’équilibre. Ceci est exprimé par le théorème de Ruelle Perron-Frobenius :

Théorème 2.13. *Supposons A primitive, $V \in \mathcal{F}_A^+$ et $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}_V$ comme ci-dessus. Il existe $\lambda > 0$, $\psi \in C^0(\Sigma_A^+)$ avec $\psi > 0$ et ν une mesure de Borel sur Σ_A^+ tels que*

1. $\mathcal{L}\psi = \lambda\psi$
2. La valeur propre λ est simple, et le reste du spectre est contenu dans un disque de rayon strictement inférieur à λ .
3. $\mathcal{L}^*\nu = \lambda\nu$
4. $\nu(\psi) = 1$
5. $\|\lambda^{-m}\mathcal{L}^m g - \nu(g)\psi\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ pour tout $g \in C^0(\Sigma_A^+)$
6. La mesure $\psi\nu$ est une mesure de probabilité sur Σ_A^+ qui est σ -invariante.
7. La mesure $\psi\nu$ s’étend en une mesure de probabilité μ_V sur Σ_A , σ -invariante, qui est l’unique état d’équilibre pour le potentiel V :

$$\text{Pr}(V) = h_{\mu_V} + \int V d\mu_V$$

Un exemple simple : potentiels et fonctions dépendant seulement du premier symbole. Considérons un potentiel $V : \Sigma_A \rightarrow \mathbb{R}$ constant par morceaux, ne dépendant que du premier index à droite :

$$x = \dots \epsilon_{-1} \cdot \epsilon_0 \epsilon_1 \dots \Rightarrow V(x) = V(\epsilon_0).$$

On vérifie aisément que $V \in \mathcal{F}_A^+$. Si maintenant Ψ est une fonction sur Σ_A ne dépendant que du premier symbole, l'action de l'opérateur de Ruelle \mathcal{L}_V sur de telles fonctions est relativement simple :

$$\mathcal{L}_V \Psi(x_0) = \sum_{\epsilon} A_{\epsilon x_0} e^{V_\epsilon} \Psi(\epsilon) = (\Psi T)_{x_0}$$

où T est la matrice donnée par

$$T_{ij} = e^{V_i} A_{ij}$$

La fonction propre de \mathcal{L}_V de Perron Frobenius est donc proportionnelle au vecteur propre à gauche de T . Ainsi, pour obtenir la pression du potentiel V , il suffit de trouver la valeur propre de Perron Frobenius de T . Appliquons ce raisonnement au cas de l'application du Boulanger et de sa dynamique symbolique vue à l'exemple 2.12. Dans ce cas particulier, $V(q, p) = V(q)$, de plus V est constant sur chaque intervalle $q \in [\frac{i}{3}, \frac{i+1}{3}]$ pour $i = 0, 1, 2$. La matrice d'adjacence est la matrice pleine $A_{ij} = 1$ puisque nous avons affaire à un décalage total. Il s'ensuit que

$$T = \text{diag}(e^{V_i}) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{V_0} & e^{V_0} & e^{V_0} \\ e^{V_1} & e^{V_1} & e^{V_1} \\ e^{V_2} & e^{V_2} & e^{V_2} \end{pmatrix}$$

La valeur propre de Perron Frobenius de T est

$$e^{\text{Pr}(V)} = \sum_i e^{V_i}.$$

Supposons que l'on souhaite maintenant que le potentiel V ait une dépendance "plus fine" en la position q . Une possibilité serait de faire dépendre V d'une suite plus grande de symboles que seulement le premier, mais ceci rendrait la méthode matricielle du calcul de $\text{Pr}(V)$ exposée ci-dessus inutilisable. Une solution consiste à agrandir l'alphabet utilisé pour coder la dynamique. Prenons une partition de \mathbb{T}^2 faite de rectangles beaucoup plus fins que les rectangles de taille $\frac{1}{3}$ de l'exemple 2.12. À la place de l'alphabet $\mathcal{A} = \{0, 1, 2\}$ initial, considérons maintenant l'alphabet $\mathcal{A}_n = \{0, 1, \dots, 3^n - 1\}$ formé des mots de longueur 3^n composés à l'aide de l'alphabet \mathcal{A} . Notons $\Sigma_{A,n} = \mathcal{A}_n^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des suites de symboles du nouvel alphabet. Si l'on veut désormais obtenir un codage symbolique de la dynamique à l'aide du nouvel alphabet, il va visiblement falloir exclure un certain nombre de mots. L'application

$$c_n : \begin{cases} \Sigma_A \rightarrow \Sigma_{A,n} \\ \epsilon \mapsto \nu, \quad \nu_i = \epsilon_i \dots \epsilon_{i+3^n-1} \end{cases}$$

est visiblement injective, et si l'on note $X_n = c_n(\Sigma_A)$ on voit que X_n est invariant sous le décalage $\sigma : \Sigma_{A,n} \rightarrow \Sigma_{A,n}$. En d'autres termes, on a conjugué la dynamique symbolique du décalage total sur Σ_A avec la dynamique symbolique d'un sous-décalage de type fini $X_n \subset \Sigma_{A,n}$. On obtient alors un codage de la dynamique engendrée par B – définie en (2.1) – à l'aide des mots de codes de X_n . Ce nouveau codage est donné par :

$$B = \kappa^{-1} \circ c_n^{-1} \circ \sigma \circ c_n \circ \kappa$$

On peut vérifier que la matrice de transition $A^{(n)}$ de B , écrite maintenant dans le nouvel alphabet qui contient 3^n symboles, a pour coefficients

$$A_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists k \in \{0, 1, 2\} : i = 3(j-1) + k \pmod{n+1}. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.7)$$

En utilisant la méthode vu plus haut, ce codage symbolique permet de calculer facilement la pression topologique de potentiels constants par morceaux en position sur des intervalles de taille 3^{-n} , puisque désormais il y a 3^n choix possibles pour le premier symbole d'une séquence. Cette méthode de calcul de la pression de potentiels constants par morceaux sera notre seul moyen de calculer explicitement une pression topologique : nous l'utiliserons au chapitre 4.

Chapitre 3

Analyse semiclassique

Nous avons regroupé ici les notions de base de l'analyse semiclassique dont nous nous sommes servis. Les références sont nombreuses, citons [EZ, Ler09, GS94, DS99, Mar02], et bien sûr [Hör83].

3.1 Opérateurs différentiels, symboles et mécanique classique

Nous commençons par fixer quelques notations. Soit $x \in \mathbb{R}^d$. On pose $D_x = \frac{1}{i} \partial_x = \frac{1}{i}(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_d})$. Pour un multi indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, on définit les notations suivantes :

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \alpha_1 + \dots + \alpha_d \\ \alpha! &= \alpha_1! \dots \alpha_d! \\ x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d} \\ D^\alpha &= D_{x_1}^{\alpha_1} \dots D_{x_d}^{\alpha_d} \\ \partial^\alpha &= \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d} \\ n^\alpha &= n^{|\alpha|}, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Un *opérateur différentiel* d'ordre m est une somme de la forme

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

où nous supposons les fonctions $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Dans le formalisme microlocal usuel [Hör83], on associe à P son *symbole*, qui est le polynôme obtenu en remplaçant D par une variable formelle ξ :

$$a(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$$

On note σ_{tot} l'application qui à P associe son symbole

$$\sigma_{\text{tot}} : P \mapsto a.$$

Comme on le voit facilement, $\sigma_{\text{tot}}(PQ) \neq \sigma_{\text{tot}}(P)\sigma_{\text{tot}}(Q)$ car $[a_\alpha, D^\beta] \neq 0$. Par contre, si l'on se restreint au *symbole principal*, défini comme le terme d'ordre dominant de P :

$$\sigma(P) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

on a bien $\sigma(PQ) = \sigma(P)\sigma(Q)$. De plus, $\sigma(P)$ est un polynôme homogène de degré m en ξ , ce qui signifie qu'on le connaît partout si on le connaît sur la sphère $\{(x, \xi) : \|\xi\| = 1\}$. Bien que le symbole principal ne permette pas de caractériser entièrement P , il peut s'interpréter de manière plus géométrique en le considérant comme un objet défini intrinsèquement sur $T^*\mathbb{R}^d$. Ceci va nous permettre de faire un lien avec la mécanique classique, vue comme un système dynamique sur $T^*\mathbb{R}^d$ – voir le chapitre d'introduction. En effet, considérons un changement de variable $y = f(x)$ où f est un difféomorphisme. En définissant $f_*P = P \circ f^*$, on trouve en utilisant la formule de Faà di Bruno (appendice C.3) que

$$\sigma(f_*P)(y, \eta) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(f^{-1}(y)) \left(\sum_{k_1=1}^n \frac{\partial y_{k_1}}{\partial x_1} \eta_{k_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\sum_{k_d=1}^n \frac{\partial y_{k_d}}{\partial x_d} \eta_{k_d} \right)^{\alpha_d}$$

Les nouvelles variables η sont “duales” aux y . Cette formule correspond exactement à la transformation d'une fonction définie sur le cotangent $T^*\mathbb{R}^d$ lors d'un changement de variables. Si l'on avait considéré le symbole total σ_{tot} plutôt que σ , cette propriété n'aurait pas été satisfaite. La fonction $f : \mathbb{R}_x^d \rightarrow \mathbb{R}_y^d$ induit une fonction $F : T^*\mathbb{R}_y^d \rightarrow T^*\mathbb{R}_x^d$ définie par

$$F(y, \eta) = (f^{-1}(y), {}^t df \cdot \eta)$$

appelée relevé canonique de f (cf. l'appendice A.3) et on a bien

$$\sigma(f_*P) = F^*(\sigma(P)). \quad (3.1)$$

Ainsi nous sommes conduits à interpréter la variable ξ comme la variable duale de x , c'est à dire à considérer que $(x, \xi) \in T^*\mathbb{R}^d$. Poussons cette identification un peu plus loin. Dans le formalisme hamiltonien de la mécanique classique (voir le chapitre 1), l'état d'un système est défini par une position $q \in \mathbb{R}^d$ et une impulsion $p \in \mathbb{R}^{d*}$, variable duale de q , et $T^*\mathbb{R}^d$ s'interprète comme l'espace des phases classique du système. Ainsi, nous pouvons attribuer au symbole principal vu comme fonction sur $T^*\mathbb{R}^d$ une interprétation physique claire en le considérant comme une *observable classique*. Remarquons que la procédure qui permet d'associer une observable classique à tout opérateur différentiel est parfaitement bien définie, tandis que l'opération inverse ne l'est pas : à une observable classique polynomiale correspondent de nombreux opérateurs différentiels différents qui ont cependant le même symbole principal.

Exemple 3.1. L'énergie cinétique d'une particule libre sur une variété M est donnée par le hamiltonien $H(x, \xi) = \frac{1}{2}\|\xi\|_x^2 = \frac{1}{2}g^{ij}(x)\xi_i\xi_j$. C'est le symbole principal de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur M , défini par

$$\Delta_g = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i g^{ij} \sqrt{g}\partial_j.$$

Dans \mathbb{R}^d , le hamiltonien standard d'une particule dans un potentiel V s'écrit

$$H(x, \xi) = \frac{1}{2} \|\xi\|^2 + V(x),$$

c'est par exemple le symbole total de l'opérateur différentiel $\hat{H} = \frac{1}{2}\Delta + V(x)$.

Le procédé de quantification par lequel on construit la mécanique quantique associe à des observables ou symboles (c'est à dire des fonctions sur l'espace des phases classiques) des opérateurs linéaires. Par exemple, on dira que l'opérateur différentiel $P = \text{Op}(a)$ est une quantification du symbole a .

Nous allons voir dans les paragraphes suivants comment effectuer cette quantification de manière systématique. Contentons-nous pour le moment de faire les quelques remarques suivantes. En transformée de Fourier, l'opérateur D_x agit par multiplication. Ceci signifie que pour une fonction $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$D_{x_j} \psi = \frac{1}{(2\pi)^d} \iint \xi_j e^{i(x-y)\xi} \psi(y) dy d\xi$$

Il n'est pas difficile de généraliser cette formule pour l'opérateur différentiel vu plus haut :

$$P\psi = \frac{1}{(2\pi)^d} \iint a(x, \xi) e^{i(x-y)\xi} \psi(y) dy d\xi \quad (3.2)$$

Nous voyons immédiatement dans cette formule le rôle prépondérant du symbole a de l'opérateur différentiel P . Ceci suggère même de définir plutôt P à l'aide de la formule ci-dessus, ce qui permet alors d'envisager des classes d'opérateurs plus larges pour lesquels $a(x, \xi)$ n'est pas forcément un polynôme : ce sont précisément les opérateurs pseudodifférentiels. Notons encore que le noyau de Schwartz de P apparaît comme étant

$$K_P(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \iint a(x, \xi) e^{i(x-y)\xi} d\xi$$

et il est alors fort utile de donner un sens précis à l'intégrale ci-dessus lorsque l'on veut répondre (entre autres) aux questions suivantes :

1. Sur quel type de fonctions peut agir $\text{Op}(a)$? En d'autres termes, quelles sont ses propriétés de continuité?
2. Quelles sont ses propriétés spectrales?

Si $a \in \mathcal{S}$, l'intégrale ci-dessus a bien un sens. Mais nous voudrions pouvoir quantifier des observables plus générales, comprenant par exemple les polynômes (qui donnent lieu aux opérateurs différentiels, et pour lesquels $K_P(x, y)$ est divergente). Le principal travail à fournir lors de la construction d'une quantification basée sur (3.2) revient à identifier K_P avec une *distribution* bien définie.

Le procédé de quantification que nous allons décrire va permettre de fabriquer une algèbre d'opérateurs qui contiendra les opérateurs pseudodifférentiels et les inverses des opérateurs elliptiques. Ceci se fera en deux étapes essentielles : tout d'abord définir quels sont les observables, ou symboles "admissibles" pour la quantification, et enfin caractériser l'algèbre d'opérateurs obtenue pour ces classes de symboles.

3.2 Quantification des symboles

3.2.1 Introduction d'un petit paramètre \hbar

Suivant de Broglie, l'impulsion ξ d'une particule quantique, lorsque elle est bien définie, vaut

$$\xi = \hbar k$$

où \hbar est la constante de Planck et $k \in \mathbb{R}^d$ est un vecteur d'onde qui a la dimension de l'inverse d'une longueur. En tenant compte de la discussion précédente, nous voyons que la version "quantique" de l'opérateur différentiel P serait plutôt donnée par

$$P_{\hbar} = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha}(x) (\hbar D)^{\alpha}.$$

En d'autres termes, on définit le procédé de quantification d'une impulsion $p_i \in T^*\mathbb{R}^d$ par

$$p_i \rightarrow \frac{\hbar}{i} \partial_{x_i} = \hbar D_{x_i}.$$

Ainsi, le hamiltonien quantique correspondant à $H(x, \xi) = \frac{1}{2} \|\xi\|^2 + V(x)$ est l'opérateur de Schrödinger bien connu

$$\hat{H}_{\hbar} = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta + V(x).$$

3.2.2 Les classes de symboles standard

Nous définissons maintenant les différentes classes de symboles que nous aurons à utiliser, et pour lesquelles il est possible de construire une quantification avec des propriétés raisonnables. Tout d'abord, pour contrôler le comportement à l'infini d'un symbole, on définit les fonctions d'ordre :

Définition 3.2. La fonction $m : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction d'ordre s'il existe $C > 0$ et $N \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^{2d}$ on a

$$m(x) \leq C \langle x - y \rangle^N m(y)$$

où $\langle x \rangle = (1 + \|x\|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Remarquons que si m est une fonction d'ordre, tel est aussi le cas pour m^{-1} . Enfin, et c'est une remarque cruciale, une fonction d'ordre est à croissance polynomiale. Dans ce qui suit, on considère une fonction a sur $T^*\mathbb{R}^d \simeq \mathbb{R}^{2d}$, et m une fonction d'ordre. Les classes de symboles que nous allons utiliser sont au nombre de deux : nous donnons d'abord leur définition comme fonctions sur $T^*\mathbb{R}^d$.

La classe $S_\delta^k(m)$. Soit m une fonction d'ordre, $\delta \leq \frac{1}{2}$ et $k \in \mathbb{R}$. On pose

$$S_\delta^k(m) = \{a \in C^\infty(T^*\mathbb{R}^d) : \forall \alpha \in \mathbb{N}^{2d}, \quad |\partial^\alpha a(x, \xi)| \leq C_\alpha \hbar^{-\delta|\alpha|-k} m(x, \xi)\}.$$

La fonction a est de plus en plus singulière lorsque on la dérive, puisque des puissances négatives de \hbar apparaissent dans la borne supérieure. Si $m = 1$, on écrira simplement $S_\delta^k(1) = S_\delta^k$, et $S_0^k = S^k$. Si $\delta = k = 0$, alors $a \in C_b^\infty(T^*\mathbb{R}^d)$. Remarquons que si $k \ll 0$, i.e k est “très négatif”, a et un certain nombre (fini) de ses dérivées décroissent rapidement lorsque $\hbar \rightarrow 0$. On note $S_\delta^{-\infty}(m) = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} S_\delta^k(m)$, ensemble formé des symboles dits négligeables.

La classe $S_\delta^{m,k}$. Ici on prend $\delta \leq \frac{1}{2}$, et $k, m \in \mathbb{R}$. Comparé à la classe ci-dessus, la fonction d'ordre est fixée, et l'on gagne une décroissance dans les fibres lorsqu'on dérive le symbole :

$$S_\delta^{m,k} = \{a \in C^\infty(T^*\mathbb{R}^d) : \forall \alpha \in \mathbb{N}^{2d}, \quad \sup_{x \in K \text{ compact}} |\partial^\alpha a(x, \xi)| \leq C_{\alpha,K} \hbar^{-\delta|\alpha|-k} \langle \xi \rangle^{m-|\beta|}\}$$

Si a est une fonction sur T^*M avec M variété compacte (c'est la situation que nous rencontrerons pour cette classe de symboles), la définition s'étend sans modification. Remarquons que la condition pour x d'appartenir à un compact est automatiquement vérifiée. Comme ci-dessus, on écrira $S^{m,k}$ lorsque $\delta = 0$. Par exemple, $\|\xi\|^2 \in S^{2,0}$. Remarquons que $S_\delta^{m,k}$ contient tous les symboles des opérateurs différentiels d'ordre m à coefficients lisses. ainsi que les fonctions de Schwartz \mathcal{S} . Nous utiliserons cette classe pour quantifier des observables sur des variétés (voir plus bas), car la décroissance en ξ supplémentaire permet aux symboles de se comporter “correctement” lors de changements de variables, inévitables lorsque l'on travaille avec un atlas de cartes locales.

Remarque 3.3. Quelle que soit la classe considérée, on remarque que a est toujours au plus à croissance polynomiale en x, ξ . On pourrait s'affranchir des fonctions d'ordre en demandant que a soit un symbole classique, c'est à dire :

1. $a \in C^\infty(T^*\mathbb{R}^d)$
2. Si $|\xi| > 1$, on a

$$a(x, \xi) = |\xi|^m \tilde{a}(x, \hat{\xi}, |\xi|^{-1})$$

avec $\tilde{a} \in C^\infty(\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{S}_\xi^{d-1} \times \mathbb{R}_+)$ et $\hat{\xi} = \xi/|\xi|$.

On dit parfois que a est égal à $\langle \xi \rangle^m$ multipliée par un fonction lisse sur la compactification radiale de $T^*\mathbb{R}^d$. C'est le cas de tous les opérateurs différentiels. Une conséquence intéressante est que l'on peut écrire un développement de Taylor à l'infini ($|\xi|^{-1} = 0$).

3.2.3 \hbar -quantifications des symboles dans $\mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^d)$

Commençons par présenter la quantification d'une sous-classe de symboles de $S_\delta^k(m)$ donnée par les fonctions de Schwartz $\mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^d)$ indépendantes de \hbar . Celle-ci est plus aisée à effectuer que pour les symboles généraux, et représente une étape importante en vue de leur quantification.

Quantification de Weyl. Considérons $a \in \mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^d)$ et $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Pour $t \in [0, 1]$, on définit la t -quantification de a , notée $\text{Op}_{\hbar,t}(a)$, telle que

$$\text{Op}_{\hbar,t}(a)u = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{i(x-y)\xi}{\hbar}} a(tx + (1-t)y, \xi) u(y) dy d\xi$$

Lorsque $t = 1$, on reconnaît la formule pour les opérateurs différentiels de la section 3.1. Le cas $t = \frac{1}{2}$ est celui de la quantification de Weyl. Elle correspond à la prescription de quantification symétrique $x\xi \rightarrow \frac{1}{2}(x\hbar D_x + \hbar D_x x)$ dans le cas des opérateurs différentiels. La mesure $dy d\xi$ est la mesure de Lebesgue sur $T^*\mathbb{R}^d$, elle est donc définie de manière invariante comme l'élément de volume symplectique associé à la 2-forme symplectique canonique (voir l'appendice A.3) :

$$\sigma(x, \xi; y, \eta) = \langle \xi, y \rangle - \langle x, \eta \rangle.$$

Dans la suite, nous considérerons seulement la quantification de Weyl, et écrirons indifféremment $\text{Op}_{\hbar}(a) = \text{Op}_{\hbar, \frac{1}{2}}(a) = a^w$. Le noyau de Schwartz de $\text{Op}_{\hbar}(a)$ est donné par

$$K_A(x, y) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{i(x-y)\xi}{\hbar}} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) d\xi \quad (3.3)$$

et donc $K_A \in \mathcal{S}$. On en tire immédiatement :

Proposition 3.4. *Si $a \in \mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^d)$, alors $\text{Op}_{\hbar}(a) : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est continu (donc borné). De même, si $a \in \mathcal{S}'(T^*\mathbb{R}^d)$, alors $\text{Op}_{\hbar}(a) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est continu.*

Dans le deuxième cas, on utilise la transformée de Fourier semiclassical,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\hbar}u(\xi) &= \hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{ix\xi}{\hbar}} u(x) dx \\ \mathcal{F}_{\hbar}^{-1}v(x) &= \check{v}(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{ix\xi}{\hbar}} v(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Puisque $\mathcal{F}_{\hbar} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$, on peut définir le noyau de $\text{Op}_{\hbar}(a)$ par (3.3).

Une motivation pour la quantification de Weyl est la suivante : écrivons a comme somme de ses modes de Fourier :

$$a(x, y) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{2d}} \iint e^{\frac{i}{\hbar}(xx^* + \xi\xi^*)} \hat{a}(x^*, \xi^*) dx^* d\xi^*.$$

Puisque on souhaite que la quantification soit linéaire, on remarque qu'il suffirait de se donner une règle de quantification pour la fonction $e^{\frac{i}{\hbar}l}$ où

$$l(x, \xi) = xx^* + \xi\xi^*$$

et x^*, ξ^* sont fixés. Quelques calculs montrent que $\text{Op}_{\hbar,t}(l) = \langle x^*, x \rangle + \langle \xi^*, \hbar D \rangle \stackrel{\text{def}}{=} l(x, \hbar D)$ qui est donc indépendant de t , puis que

$$\text{Op}_{\hbar}(e^{-\frac{i}{\hbar}l}) = e^{-\frac{i}{\hbar}l(x, \hbar D)} \in \mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}').$$

Il s'ensuit que la quantification de Weyl de a est donnée par

$$a^w(x, \hbar D) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{2d}} \iint e^{\frac{i}{\hbar}(\langle x^*, x \rangle + \langle \xi^*, \hbar D \rangle)} \hat{a}(x^*, \xi^*) dx^* d\xi^*$$

Composition. On peut utiliser la formule précédente comme point de départ pour montrer le résultat fondamental du calcul pseudodifférentiel :

Théorème 3.5. *Soient $a, b \in \mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^d)$. Alors*

$$a^w \circ b^w = c^w$$

où $c^w \in \mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^d)$ a pour symbole :

$$c(x, \xi) = \frac{1}{(\pi\hbar)^{2d}} \int_{\mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^{2d}} e^{-\frac{2i}{\hbar}\sigma(Y,Z)} a(X-Y)b(X-Z)dYdZ \quad (3.4)$$

$$= e^{\frac{i\hbar}{2}\sigma(D_x, D_\xi; D_y, D_\eta)} a(x, \xi)b(y, \eta)|_{(x,\xi)=(y,\eta)} \quad (3.5)$$

Par définition, $X = (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2d}$, $Y = (y, \eta) \in \mathbb{R}^{2d}$ et $\sigma(D_x, D_\xi, D_y, D_\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \langle D_\xi, D_y \rangle - \langle D_x, D_\eta \rangle$.

Dans la suite, on notera souvent $c = a\sharp b$. En appliquant le théorème de la phase stationnaire C.3 à (3.5), on obtient

Corollaire 3.6. *Les propriétés suivantes sont satisfaites :*

1. *Développement asymptotique :*

$$a\sharp b(x, \xi) = \sum_{k=0}^K \frac{1}{k!} (i\hbar\sigma(D_x, D_\xi, D_y, D_\eta))^k a(x, \xi)b(y, \eta)|_{(x,\xi)=(y,\eta)} + \mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\hbar^{K+1}) \quad (3.6)$$

2. *En particulier, $a\sharp b = ab + \frac{\hbar}{2i}\{a, b\} + \mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\hbar^2)$ et*

$$[a^w, b^w] = \frac{\hbar}{i}\{a, b\}^w + \mathcal{O}_{\mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}}(\hbar^2).$$

3. *Si $\text{supp } a \cap \text{supp } b = \emptyset$, alors*

$$a\sharp b = \mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\hbar^\infty).$$

3.2.4 Quantification des symboles généraux

Nous avons résumé dans la paragraphe précédent la quantification des symboles dans $\mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^d)$. Cependant, nous souhaitons étendre notre quantification à des symboles plus généraux, par exemple $a(x, \xi) = \frac{1}{2}\|\xi\|^2 + V(x)$ qui n'appartiennent pas à $\mathcal{S}(T^*\mathbb{R}^d)$. Le résultat de base est le suivant :

Théorème 3.7. *Soit $a \in S_\delta^k(m)$. Alors*

$$\text{Op}_\hbar(a) \in \mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}),$$

c'est à dire que $\text{Op}_\hbar(a)$ est un opérateur borné sur \mathcal{S} .

Ce théorème est important car il permet de donner un sens précis à la quantification de la plupart des observables classiques. Par contre, l'espace des fonctions test est encore "trop petit", puisqu'on aimerait pouvoir appliquer nos opérateurs sur des fonctions L^2 . Nous verrons bientôt comment s'affranchir de cette dernière contrainte.

Nous faisons quelques remarques sur les méthodes qui permettent d'obtenir le théorème 3.7. La constante \hbar ne joue aucun rôle particulier concernant les propriétés de continuité, on peut donc prendre $\hbar = 1$ pour simplifier. Pour montrer que $\text{Op}_{\hbar}(a) : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ il suffit de montrer que pour tout α, β , il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|x^\alpha D^\beta \text{Op}_{\hbar}(a)u\|_{C^0} \leq C_{\alpha, \beta} \|u\|^{(k)}$$

où $\|u\|^{(k)}$ est la semi-norme sur \mathcal{S} donnée par

$$\|u\|^{(k)} = \sup_{\substack{|\alpha| + |\beta| \leq k \\ x \in \mathbb{R}^d}} |x^\alpha D^\beta u|$$

Ceci se montre en utilisant le fait que

$$L(\xi, \hbar D) = \frac{1 - \hbar \xi D_y}{1 + |\xi|^2}$$

satisfait $L(\exp(\frac{i}{\hbar}(x-y)\xi)) = \exp(\frac{i}{\hbar}(x-y)\xi)$, et en effectuant un nombre suffisant d'intégrations par parties dans la représentation intégrale de $\text{Op}_{\hbar}(a)u$. Enfin, le théorème 3.5 et le Corollaire 3.6 restent vrais pour les symboles dans $S_\delta^k(m)$:

Théorème 3.8. *Soient $a \in S_\delta^k(m)$ et $b \in S_\delta^{k'}(m')$. Alors :*

$$a^w \circ b^w = c^w, \quad c = a \sharp b \in S_\delta^{k+k'}(mm')$$

En particulier

$$a \sharp b - ab \in S_\delta^{k+k'+2\delta-1}(mm')$$

Remarquons que le développement asymptotique (3.6) reste vrai uniquement dans le cas $\delta < \frac{1}{2}$, alors que si $\delta = \frac{1}{2}$, seul (3.5) garde un sens.

Théorèmes de continuité L^2 . Enfin, il existe un résultat de continuité complémentaire au théorème 3.7 :

Théorème 3.9. *(Calderón-Vaillancourt) Soit $\delta \leq \frac{1}{2}$. Alors, il existe deux constantes $C_d, M_d > 0$ ne dépendant que de la dimension d telles que :*

1. *si $a \in S_\delta(1)$, alors $\text{Op}_{\hbar}(a) \in \mathcal{L}(L^2, L^2)$ et*

$$\|\text{Op}_{\hbar}(a)\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C_d \sum_{|\alpha| \leq M_d} \sup |\partial^\alpha a|$$

2. si $a \in S_\delta^{m,0}$, alors pour tout $s \geq 0$, on a $\text{Op}_\hbar(a) \in \mathcal{L}(H^{m+s}, H^s)$ et

$$\|\text{Op}_\hbar(a)\|_{H^{s+m} \rightarrow H^s} \leq C_d(a)$$

où la constante $C_d(a)$ ne dépend que d'un nombre fini de dérivées de a , d'ordre au plus M_d .

Ce théorème a d'importantes conséquences. Par exemple, si $\delta < \frac{1}{2}$ et $a, b \in S_\delta^0$, alors

$$\|a^w \circ b^w - (ab)^w\|_{L^2 \rightarrow L^2} = \mathcal{O}(\hbar^{1-2\delta}) \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} 0$$

et

$$\|[a^w, b^w] - \frac{\hbar}{i}\{a, b\}^w\|_{L^2 \rightarrow L^2} = \mathcal{O}(\hbar^{2(1-2\delta)}) \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} 0$$

Dans le cas $\delta = \frac{1}{2}$, il n'y a pas décroissance des termes supérieurs dans le développement (3.6), et on ne peut pas écrire une telle égalité. Par contre, si $d(\text{supp } a, \text{supp } b) > 0$ alors

$$\|a^w b^w\|_{L^2 \rightarrow L^2} = \mathcal{O}(\hbar^\infty).$$

Notons que (2) montre entre autres que $\frac{-\hbar^2}{2}\Delta$ est borné de H^2 dans L^2 , mais pas de L^2 dans L^2 , comme il est bien connu. On note en général $\Psi^{m,k}$ l'ensemble des opérateurs pseudodifférentiels obtenus en quantifiant les symboles de $S^{m,k}$. Pour terminer ce paragraphe, mentionnons rapidement les adjoints :

Théorème 3.10. *Soit $a \in S_\delta^{m,k}$. Alors l'adjoint $\text{Op}_\hbar(a)^\dagger$ de $\text{Op}_\hbar(a) : L^2 \rightarrow L^2$ est égal à $\text{Op}_\hbar(\bar{a})$.*

Il s'ensuit la propriété agréable que la quantification de Weyl des symboles réels produit des opérateurs auto-adjoints.

Parametrix et inégalité de Garding. On dit que $\text{Op}_\hbar(a)$ est *elliptique* si son symbole est elliptique, c'est à dire qu'il satisfait $|a| \geq \gamma > 0$ uniformément pour $(x, \xi) \in T^*\mathbb{R}^d$. Le théorème de continuité L^2 permet de construire une parametrix pour les opérateurs elliptiques, c'est à dire construire un inverse de $\text{Op}_\hbar(a)$.

Théorème 3.11. *Supposons que $a \in S_0^{m,0}$ avec $m \geq 0$ et que a est elliptique. Alors, il existe \hbar_0 tel que si $\hbar \leq \hbar_0$, $\text{Op}_\hbar(a)^{-1}$ existe dans $\mathcal{L}(L^2, L^2)$.*

En considérant $q^w \stackrel{\text{def}}{=} (a^{-1})^w$, on utilise le calcul symbolique pour avoir

$$a^w q^w = 1 - \hbar r^w, \quad r \in S^{0,0},$$

et donc $r^w \in \mathcal{L}(L^2, L^2)$. Si \hbar est assez petit, la norme L^2 de $\hbar r^w$ est < 1 et donc le membre de droite s'inverse avec une série de Neumann. En montrant un résultat similaire pour $q^w a^w$ on en déduit l'existence de $(a^w)^{-1}$ pour \hbar assez petit. Il s'ensuit que si l'on pose

$$q_K^w = q^w (1 + \hbar r^w + \dots + \hbar^K (r^w)^K)$$

on a $(a^w)^{-1} = q_K^w + \mathcal{O}_{L^2 \rightarrow L^2}(\hbar^{K+1})$. D'où la relation fort utile :

$$(a^w)^{-1} = \left(\frac{1}{a} + \hbar \frac{1}{a} \# r + \hbar^2 \frac{1}{a} \# r \# r + \dots \hbar^K \frac{1}{a} \# (r \# K) \right)^w + \mathcal{O}_{L^2 \rightarrow L^2}(\hbar^{K+1}).$$

Si $a \geq 0$, on peut se demander si le passage à la quantification $\text{Op}_{\hbar}(a)$ produit un opérateur positif. La réponse est négative pour la quantification de Weyl (mais positive dans le cas d'autres quantifications, comme la quantification anti-Wick). L'inégalité suivante montre que la quantification de Weyl est "presque" positive :

Théorème 3.12. (*Gårding*) Soit $a \in S_{\delta}(1)$ vérifiant $a \geq 0$. Il existe $C \geq 0$ et $\hbar_0 > 0$ tel que

$$\langle a^w u, u \rangle \geq -C \hbar^{1-2\delta} \|u\|_{L^2}^2$$

pour $\hbar \leq \hbar_0$.

Ce résultat nous sera utile par la suite, car il permet d'obtenir rapidement des bornes sur le spectre de $\text{Op}_{\hbar}(a)$ dans la limite semiclassique à partir de la connaissance du symbole a .

Le front d'onde semiclassique. Soit $u \in L^2$, $\|u\| = 1$ une fonction dépendant de \hbar . Une des questions fondamentales de l'analyse microlocale est de savoir où se localise la fonction u dans l'espace des phases classique dans la limite $\hbar \rightarrow 0$. En d'autres termes, on cherche à savoir autour de quelles positions x est localisée $u(x)$, et autour de quelles directions, ou impulsions ξ est localisée $\hat{u}(\xi)$. On pose pour cela la définition suivante :

Définition 3.13. Soit $u \in L^2$ de norme 1, et $\rho_0 = (x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2d}$. On dit que u est *microlocalement négligeable* près de ρ_0 s'il existe $\chi \in S^{0,0}$ telle que $\chi(\rho_0) = 1$ et

$$\|\text{Op}_{\hbar}(\chi)u\|_{L^2} = \mathcal{O}(\hbar^{\infty}).$$

Le front d'onde semiclassique de u , noté $\text{WF}_{\hbar}(u)$ est défini par :

$$\text{WF}_{\hbar}(u) = \{(x, \xi) : \exists \chi \in S^{0,0}, \chi(x, \xi) \neq 0, \|\text{Op}_{\hbar}(\chi)u\|_{L^2(M)} = \mathcal{O}(\hbar^{\infty})\}^c$$

où c indique l'ensemble complémentaire. On peut aussi définir le front d'onde semiclassique d'un opérateur $\text{Op}_{\hbar}(a)$ pour $a \in S^{m,k}$:

$$\text{WF}_{\hbar}(a^w) = \{(x, \xi) \in T^*\mathbb{R}^d : a(x, \xi) \in S^{m,-\infty} \text{ près de } (x, \xi)\}^c$$

On peut montrer que si $(x, \xi) \notin \text{WF}_{\hbar}(u)$ alors il existe un voisinage ouvert de (x, ξ) tel que $\text{Op}_{\hbar}(\chi)u$ est négligeable pour tout χ supporté dans ce voisinage. Comme conséquence immédiate de ces définitions, on peut citer :

Proposition 3.14. *Soit $a \in S^{m,0}$ un symbole admettant un développement asymptotique, c'est à dire qu'il existe une suite $(a_j)_{j \geq 0}$ de symboles indépendants de \hbar , tels que $a_j \in S^{m,-j}$ et $a - \sum_{j=0}^{N-1} a_j \in S^{m,-N}$. Soit enfin $u \in L^2$ de norme 1 telle que*

$$\text{Op}_{\hbar}(a)u = 0.$$

Alors

$$\text{WF}_{\hbar}(u) \subset a_0^{-1}(0).$$

Ainsi, une fonction propre d'un opérateur de Schrödinger d'énergie E est localisée dans la limite semiclassique sur la couche d'énergie $p^{-1}(E)$, où p est le symbole principal du hamiltonien. De même on peut montrer qu'en position, u est négligeable en norme L^2 au voisinage des points x tels que $(\{x\} \times \mathbb{R}^d) \cap \text{WF}_{\hbar}(u) = \emptyset$.

Calcul fonctionnel. Soit $a \in S^0(m)$ un symbole réel. Dans le Chapitre 4, nous aurons besoin de calculer (dans une situation plus particulière que $T^*\mathbb{R}^d$) l'opérateur $f(A)$ pour $A = a^w$ et $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, où l'indice 0 désigne les fonctions à support compact. Pour cela, on peut construire [DS99] une extension presque analytique $\tilde{f} \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ de f , qui satisfait

$$\begin{aligned} \|\bar{\partial}\tilde{f}\|_{C^0} &\leq C_m |\text{Im } z|^m, \quad \forall m \geq 0 \\ \tilde{f}|_{\mathbb{R}} &= f \end{aligned}$$

où $\bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$. Soit $(z - A)^{-1}$ la résolvante de A au point $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Par une formule due à Helffer et Sjöstrand (voir [DS99] pour un exposé pédagogique), on peut montrer que

$$f(A) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \bar{\partial}\tilde{f}(z, \bar{z}) \frac{1}{z - A} L(dz)$$

où $L(dz)$ est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{C} . Deux questions se posent :

1. A-t-on $f(a^w) = b^w$ pour un certain symbole b ?
2. Si tel est le cas, peut on obtenir une descriptions asymptotique de b ?

Les réponses à ces questions sont positives, et utilisent comme outil principal le Théorème de Beals [Hör83] qui donne un critère d'appartenance à l'ensemble des opérateurs pseudo-différentiels pour un opérateur donné. Citons simplement [DS99] :

Théorème 3.15. *Soit $a \in S^0(m)$ et $A = \text{Op}_{\hbar}(a)$. Si $|z| < C$ et $\text{Im } z \neq 0$, on a $(z - A)^{-1} = r^w$ avec $r \in S^0(m^{-1})$, et $f(A) \in \text{Op}_{\hbar}(S^0(m^{-k}))$ pour tout $k \geq 1$. Enfin, $f(A) = \text{Op}_{\hbar}(b)$, avec*

$$b(x, \xi) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \bar{\partial}\tilde{f}(z, \bar{z}) r(x, \xi, z, \hbar) L(dz)$$

et $b = f(a) + \mathcal{O}_{S^0(m^{-k})}(\hbar)$ pour tout $k \geq 1$.

Opérateurs pseudodifférentiels sur les variétés compactes On considère ici une variété Riemannienne (M, g) de dimension d , compacte, sans bords. La variété M est équipée d'un atlas $\{f_\ell, V_\ell\}$, où $\{V_\ell\}$ est un recouvrement ouvert de M et chaque f_ℓ est un difféomorphisme de V_ℓ vers un ouvert borné $W_\ell \subset \mathbb{R}^d$. Les fonctions sur \mathbb{R}^d peuvent être tirées en arrière par $f_{\ell}^* : C^\infty(W_\ell) \rightarrow C^\infty(V_\ell)$. Le relevé canonique induit par f_ℓ de T^*V_ℓ vers T^*W_ℓ est noté par \tilde{f}_ℓ :

$$(x, \xi) \in T^*V_\ell \mapsto \tilde{f}_\ell(x, \xi) = (f_\ell(x), {}^t Df_\ell(x)^{-1}\xi) \in T^*W_\ell,$$

Le pull-back correspondant sera noté

$$\tilde{f}_\ell^* : C^\infty(T^*W_\ell) \rightarrow C^\infty(T^*V_\ell)$$

Une partition lisse de l'unité adaptée au recouvrement $\{V_\ell\}$ est un ensemble de fonctions $\phi_\ell \in C_c^\infty(V_\ell)$ telles que $\sum_\ell \phi_\ell = 1$ sur M . Toute observable (i.e. une fonction $a \in C^\infty(T^*M)$) peut alors être décomposée comme $a = \sum_\ell a_\ell$ ou $a_\ell = \phi_\ell a$, et chaque terme envoyé vers $\tilde{a}_\ell = (\tilde{f}_\ell^{-1})^* a_\ell \in C^\infty(T^*W_\ell)$. Nous considérerons toujours a appartenant à la classe $S^{m,k}$, pour des raisons que nous allons expliciter bientôt. Chaque a_ℓ peut être quantifié au moyen de la formule de Weyl en un opérateur sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par la formule

$$\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \text{Op}_\hbar(\tilde{a}_\ell)u(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int e^{\frac{i}{\hbar}\langle x-y, \xi \rangle} \tilde{a}_\ell\left(\frac{x+y}{2}, \xi; \hbar\right) u(y) dy d\xi$$

Pour ramener cet opérateur sur $C^\infty(V_\ell)$, on choisit d'abord une autre fonction plateau lisse $\psi_\ell \in C_c^\infty(V_\ell)$ telle que $\psi_\ell = 1$ dans un voisinage de $\text{supp } \phi_\ell$. La quantification de $a \in S^{m,k}$ est alors définie en collant toutes les quantifications locales ensemble, ce qui donne

$$\forall u \in C^\infty(M), \text{Op}_\hbar^{(M)}(a)u \stackrel{\text{def}}{=} \sum_\ell \psi_\ell \times f_\ell^* \circ \text{Op}_\hbar^w(\tilde{a}_\ell) \circ (f_\ell^{-1})^*(\psi_\ell u)$$

Nous omettrons toujours l'exposant (M) et écrivons (abusivement) $\text{Op}_\hbar(a)$ pour la quantification sur M de $a \in C^\infty(T^*M)$. L'espace des opérateurs pseudodifférentiels sur M obtenus par cette procédure de quantification de $S^{k,m}$ se note également $\Psi^{m,k}$. Bien que cette quantification dépende des cartes locales, nous allons voir que le symbole principal $\sigma : \Psi^{m,k} \rightarrow S^{m,k}/S^{m,k-1}$ est lui défini de manière intrinsèque sur T^*M et de dépend pas des coordonnées choisies pour l'exprimer :

Théorème 3.16. *Il existe une application linéaire*

$$\sigma : \Psi^{m,k} \rightarrow S^{m,k}/S^{m,k-1}$$

telle que

$$\sigma(a_1 a_2) = \sigma(a_1) \sigma(a_2)$$

et

$$\sigma(\text{Op}_\hbar(a)) = [a] \in S^{m,k}/S^{m,k-1}$$

$\sigma(a)$ est le symbole principal de a . La classe d'équivalence de a dans $S^{m,k}/S^{m,k-1}$ se note $[a]$, c'est à dire que

$$[a] = [a'] \Leftrightarrow a - a' \in S^{m,k-1}$$

Le fait que $\sigma(a)$ soit intrinsèquement défini sur $T^*\mathbb{R}^d$ vient de la formule de changement de variables : si $\kappa : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est un difféomorphisme, et que l'on note $\tilde{\kappa}$ son relevé canonique sur $T^*\mathbb{R}^d$, alors on peut montrer que

$$(\kappa^{-1})^* \text{Op}_{\hbar}(a) \kappa^* = \text{Op}_{\hbar}(\tilde{\kappa}^* a) \pmod{\Psi^{m-1,k-1}}$$

Autrement dit, le symbole principal se transforme comme une fonction définie sur $T^*\mathbb{R}^d$. Les symboles d'ordre plus élevé comportent des dérivées de la transformation κ et ne se transforment donc pas de manière covariante¹. La raison de cette propriété d'invariance sous les changements de variables du symbole principal est exactement celle que nous avons rencontrée pour le symbole principal des opérateurs différentiels dans l'introduction de ce chapitre, bien que le calcul menant à l'équation précédente soit un peu plus long que celui menant à (3.1).

3.3 Opérateurs intégraux de Fourier

Dans cette section on se place sur une variété (M, g) compacte, et $N \in \mathbb{N}$. Introduisons également une nouvelle classe de fonctions, similaires à la classe $S^{m,k}$:

Définition 3.17. On notera $S^{m,k}(M \times \mathbb{R}^N)$ l'ensemble des fonctions $a \in C^\infty(M \times \mathbb{R}^N)$ qui satisfont

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^N, \sup_{x \in M} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \theta)| \leq C_{\alpha, K} \hbar^{-k} \langle \theta \rangle^{m-|\beta|}.$$

3.3.1 Distributions lagrangiennes

Soit $N \in \mathbb{N}$, $\varphi(x, \theta) \in C^\infty(M \times \mathbb{R}^N)$ une fonction de phase non dégénérée (voir la section A.3.4), et Λ_φ la variété lagrangienne associée. On note $I^m(M, \Lambda_\varphi)$ l'ensemble des fonctions de la forme

$$I(\varphi, a) = \int e^{\frac{i\varphi(x, \theta)}{\hbar}} a(x, \theta) d\theta, \quad a \in S^{m,k}(M \times \mathbb{R}^N), \quad \text{supp}_\theta(a) \text{ est compact.}$$

Nous nommerons par la suite indifféremment de telles intégrales *fonctions lagrangiennes* ou *états lagrangiens*. Le résultat suivant justifie cette appellation :

Théorème 3.18. Soit $I(\varphi, a) \in I^m(M, \Lambda_\varphi)$. Alors,

$$\text{WF}_{\hbar}(I(\varphi, a)) \subset \{(x, \partial_x \varphi(x, \theta)) \in T^*M, (x, \theta) \in \text{supp } a \cap C_\varphi\} = j_\varphi(C_\varphi \cap \text{supp } a).$$

où l'ensemble critique C_φ et l'injection j_φ ont été définis dans la section A.3.4, aux équations (A.2) et (A.12) respectivement.

1. à l'exception du symbole sous-principal qui peut aussi être parfois défini de manière intrinsèque sur $T^*\mathbb{R}^d$.

Soit $\chi \in C_0^\infty(T^*M)$ une fonction cutoff telle que $\text{supp } \chi \cap j_\varphi(C_\varphi \cap \text{supp } a) = \emptyset$. Appellons $u \stackrel{\text{def}}{=} I(\varphi, a)$ pour simplifier. On cherche à montrer que

$$\text{Op}_\hbar(\chi)u = \mathcal{O}(\hbar^\infty).$$

Par la formule de Weyl,

$$[\text{Op}_\hbar(\chi)u](x) = \int e^{\frac{i}{\hbar}(\varphi(y,\theta)+(x-y)\xi)} \chi\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) a(y, \theta) dy d\theta d\xi$$

Les points critiques de la phase sont donnés par

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ \partial_\theta \varphi(y, \theta) = 0 \\ \partial_y \varphi(y, \theta) = \xi \end{cases}$$

On en déduit immédiatement que $(x, \theta) = (y, \theta) \in C_\varphi$. La dernière équation montre que (x, ξ) est exactement l'image de $(x, \theta) \in C_\varphi$ dans Λ_φ par l'application j_φ de la proposition A.12 :

$$j_\varphi : \begin{cases} C_\varphi \rightarrow T^*M \\ (x, \theta) \mapsto (x, d_x \varphi(x, \theta)) \end{cases}$$

On en tire que $\text{WF}_\hbar u \subset \Lambda_\varphi$. Comme il est clair que $u = \mathcal{O}(\hbar^\infty)$ si $j_\varphi(\text{supp } a \cap C_\varphi) = \emptyset$, le théorème est démontré.

La définition que nous avons donnée de $I^m(M, \Lambda_\varphi)$ est locale, puisque elle met en jeu la description d'une variété lagrangienne définie localement par une fonction génératrice φ . En fait, on peut montrer que le choix de φ n'est pas déterminant [GS94] :

Théorème 3.19. *Si $\Lambda_\varphi = \Lambda_\psi$ alors $I^m(M, \Lambda_\varphi) = I^m(M, \Lambda_\psi)$.*

Il faut utiliser deux faits cruciaux pour obtenir un tel résultat : d'une part, toute variété lagrangienne admet localement une fonction génératrice (théorème A.13), d'autre part, si $u \in I^m(M, \Lambda_\varphi)$ et $v \in I^m(M, \Lambda_\psi)$ avec $\Lambda_\varphi = \Lambda_\psi$, il existe une manière univoque d'exprimer u en fonction de v . Autrement dit, la définition de I^m ne dépend pas de la paramétrisation choisie pour décrire Λ_φ : ceci permet de définir les fonctions lagrangiennes de manière globale. Comme pour le symbole principal d'un opérateur pseudodifférentiel, il existe une définition globale, indépendante de φ du symbole principal d'une fonction lagrangienne, donné localement par le terme principal du développement de phase stationnaire de $I(\varphi, a)$:

$$\sigma(I(\varphi, a)) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{n+N}{2}}} \frac{1}{\sqrt{\det \varphi''(x, \xi)}} e^{\frac{i\pi}{4} \text{sgn } \varphi''(x, \xi)} a(x, \xi), \quad (x, \xi) \in \Lambda_\varphi.$$

Ce symbole principal s'interprète comme la section d'un fibré sur Λ qu'on note souvent $\Omega_{\frac{1}{2}} \otimes \mathcal{L}$. Le fibré $\Omega_{\frac{1}{2}}$ est celui des demi-densités sur Λ associé aux changements de coordonnées

locales sur Λ_φ (le terme en $a\sqrt{\det^{-1}\varphi''}$ s'interprète comme une demi densité sur Λ), tandis que \mathcal{L} est un fibré en droite sur Λ , appelé fibré de Keller-Maslov, dont les fonctions de transition sont associées au changement de phase sur $\Lambda_\varphi \cap \Lambda_\psi \subset \Lambda$ (terme en $e^{\frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn} \varphi''(x,\xi)}$ dans σ).

Donnons un exemple important de fonction lagrangienne que nous utiliserons au chapitre 5 :

Exemple 3.20. Soit (M, g) une variété compacte de dimension d , et $\chi \in C_c^\infty(M \times \mathbb{R}^d)$. On pose

$$\delta_{\chi,z}(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{i(x-z)\theta}{\hbar}} \chi(x, \theta) d\theta$$

Ici, $\varphi(x, \theta) = (x - z)\theta$ dépend d'un paramètre z , et $\Lambda_\varphi = T_z^*M$. En effet,

$$C_\varphi = \{(x, \theta) : x = z\}$$

donc $\theta \in \mathbb{R}^d$ est quelconque, et $x = z$. L'image de C_φ dans T^*M par j_φ est donnée par

$$\begin{aligned} \Lambda_\varphi &= j_\varphi(C_\varphi) = \{(x, \xi) : (x, \theta) \in C_\varphi \text{ et } \xi = \partial_x \varphi(x, \theta)\} \\ &= \{(z, \xi) : \xi = \theta\} \\ &= T_z^*M. \end{aligned}$$

Enfin, on a

$$\operatorname{WF}_\hbar(\delta_{\chi,z}) = T_z^*M \cap \operatorname{supp} \chi.$$

On peut voir $\delta_{\chi,z}$ comme une distribution de Dirac tronquée : les fréquences en dehors de $\operatorname{supp}_\theta \chi$ ont été supprimées.

3.3.2 Propriétés locales des opérateurs intégraux de Fourier

Soit $\kappa : T^*M \rightarrow T^*M$ un difféomorphisme symplectique de T^*M . En notant $\kappa(y, \eta) = (x, \xi)$ on voit que

$$\Gamma_\kappa = (y, -\eta, x, \xi)$$

est une variété lagrangienne de $(T^*(M \times M), \omega \oplus \omega) \simeq (T^*M \times T^*M, \omega \oplus \omega)$. En effet, c'est une sous-variété qui s'obtient simplement à partir du graphe de κ en permutant le signe de η , ce qui la rend lagrangienne vu que κ est symplectique.

Définition 3.21. Un opérateur intégral de Fourier d'ordre m associé à κ est un opérateur linéaire de $C_0(M)$ dans $\mathcal{S}'(M)$ dont le noyau de Schwartz est dans $I^m(M \times M, \Gamma_\kappa)$. On notera $\Psi^{m,k}(M \times M, \kappa)$ de tels opérateurs. L'opérateur est dit elliptique en (y, η) si son symbole principal ne s'y annule pas.

Nous serons concernés uniquement dans ce travail par la théorie *locale* des opérateurs intégraux de Fourier, c'est à dire qu'on ne se servira que des propriétés locales de κ . C'est dans cette optique que nous allons voir maintenant comment nous servir des résultats sur

les fonctions génératrices des transformations canoniques exposés dans la section A.3.5. Supposons dans un premier temps que la projection

$$\Gamma_\kappa \ni (y, -\eta, x, \xi) \xrightarrow{\sim} (x, \eta) \quad (3.7)$$

soit un difféomorphisme local près de (x_0, η_0) , où $\kappa(y_0, \eta_0) = (x_0, \xi_0)$. Alors, le théorème A.14 (dans sa version à temps discret) montre que κ admet une fonction génératrice $\varphi(x, \eta)$ près de (x_0, η_0) . Si l'on voit Γ_κ comme une sous-variété lagrangienne de $T^*(M \times M)$, i.e.

$$\Gamma_\kappa = (y, x; -\eta, \xi) \subset T^*(M \times M),$$

il est clair que l'on peut prendre pour fonction génératrice de Γ_κ la fonction

$$\psi(y, \eta) = \varphi(x, \eta) - \langle y, \eta \rangle.$$

On tombe alors sur le fait suivant : si F est un opérateur intégral de Fourier associé à κ dont la variété lagrangienne Γ_κ satisfait (3.7), son noyau de Schwartz peut s'écrire localement comme

$$\int e^{i \frac{\varphi(x, \theta) - \langle y, \theta \rangle}{\hbar}} a(x, y; \theta) d\theta \quad (3.8)$$

Il n'est pas difficile de généraliser au cas où l'on a affaire à un flot symplectique Φ^t . Dans ce cas, si l'on suppose que la projection du graphe de Φ^t satisfait (A.4), le flot Φ^t se quantifie en un opérateur intégral de Fourier de noyau

$$\int e^{i \frac{\varphi(t, x, \theta) - \langle y, \theta \rangle}{\hbar}} a(t, x, y; \theta) d\theta \quad (3.9)$$

Remarque 3.22. Dans le cas où les projections (3.7), (A.4) ne sont pas des difféomorphismes locaux, ces raisonnements ne s'appliquent pas car κ ne possède pas a priori de fonction génératrice près de (x_0, y_0) . Cependant, en changeant de variables comme indiqué dans le théorème A.15, il est toujours possible de se ramener à la situation précédente où une telle fonction génératrice existe.

Donnons quelques exemples d'opérateurs intégraux de Fourier.

Exemple 3.23. Si $\kappa = \text{Id}$, alors la projection (3.7) est toujours bijective, et l'on peut prendre

$$\psi(x, \eta) = \langle x - y, \eta \rangle.$$

On tombe sur les opérateurs pseudodifférentiels $\Psi^{m, k}$.

Exemple 3.24. Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ un difféomorphisme, et \tilde{f} son relevé canonique sur $T^*\mathbb{R}^d$. Alors f^* est un opérateur intégral de Fourier associé à \tilde{f} . En effet, prenons $u \in \mathcal{S}$, et calculons

$$\begin{aligned} f^*u &= u(f(y)) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int e^{\frac{i\kappa(y)\theta}{\hbar}} \hat{u}(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int e^{\frac{i(\kappa(y)-x)\theta}{\hbar}} u(x) dx d\theta \end{aligned}$$

La fonction de phase vaut $\varphi(x, y, \theta) = \langle f(y) - x, \theta \rangle$, et puisque $\partial_y \langle f(y), \theta \rangle = {}^t d_y f(y) \cdot \theta$, on a

$$C_\varphi = \{(y, x, \theta) : f(x) - y = 0\} \quad \text{et} \quad \Lambda_\varphi = \{(y, x; \eta, \xi) = (y, f(y), -\eta, {}^t d_y f^{-1}(y) \cdot \eta)\}$$

qui est bien issue du graphe de $\tilde{f} : (y, \eta) \mapsto (x, \xi) = (f(y), {}^t d_y f^{-1} \eta)$, c'est à dire que

$$\Lambda_\varphi = \Gamma_{\tilde{f}}.$$

Nous terminons ce chapitre par deux conséquences importantes de la théorie des opérateurs intégraux de Fourier.

Théorème 3.25. (Composition) *Si $A_{\hbar} \in \Psi^{m,k}(M \times M, \kappa)$ et $B_{\hbar} \in \Psi^{m',k'}(M \times M, \kappa')$, alors $A_{\hbar} B_{\hbar} \in \Psi^{m+m',k+k'}(M \times M, \kappa \circ \kappa')$. De plus, en représentation locale, la fonction de phase de $A_{\hbar} B_{\hbar}$ est la somme des fonctions de phases de A_{\hbar} et B_{\hbar} , tandis que le symbole principal s'obtient par produit.*

Théorème 3.26. (Egorov) *Soit $A_{\hbar} \in \Psi^{0,0}(M \times M, \kappa)$ tel que le symbole principal de A_{\hbar} , noté a_{\hbar} , soit elliptique en (x_0, y_0, η_0) et que la projection (3.7) soit un difféomorphisme local. Alors existe $B_{\hbar} \in \Psi^{0,0}(M \times M, \kappa^{-1})$ tel que*

$$\sigma(A_{\hbar} B_{\hbar}) = \sigma(B_{\hbar} A_{\hbar}) = 1$$

et $B_{\hbar} A_{\hbar} = A_{\hbar} B_{\hbar} = 1$ microlocalement près de (y_0, η_0) . Si $\text{Op}_{\hbar}(c) \in \Psi^{m,k}$ alors en notant \tilde{c} le symbole total de $B_{\hbar} \text{Op}_{\hbar}(c) A_{\hbar}$, on a

$$\tilde{c} \sim c \circ \kappa + \sum_{k \geq 1, 0 > |\alpha| \leq 2k} \hbar^k f_{k,\alpha} D_{y,\eta}^\alpha p \circ \kappa$$

microlocalement près de (y_0, η_0) . Les fonctions $f_{k,\alpha}$ sont des fonctions lisses de (y, η) .

Théorème 3.27. (Propagation des singularités) *Soit $u_{\hbar} \in L^2(M)$. Alors $\text{WF}_{\hbar}(A_{\hbar} u) = \kappa(\text{WF}_{\hbar} u)$, et l'image d'un état lagrangien supporté sur Λ est un état lagrangien supporté sur $\kappa(\Lambda)$.*

Remarque 3.28. Ici encore il est possible de généraliser sans trop de difficultés les résultats précédents aux flots hamiltoniens. Le théorème d'Egorov peut aussi s'énoncer dans un cadre plus général pour κ , pour lequel la projection (3.7) n'est pas un difféomorphisme local. Il faut pour cela changer de variables comme indiqué dans le théorème A.15.

Chapitre 4

Applications quantiques partiellement ouvertes

4.1 Introduction

Dans l'introduction, nous avons décrit quelques systèmes partiellement ouverts, et montré comment leur dynamique classique pouvait se résumer à une évolution libre pondérée par un amortissement. Dans ce chapitre, nous présentons l'étude de certains modèles quantiques à temps discret, appelées applications quantiques, dont la construction est faite pour reproduire (dans une certaine mesure) le comportement de systèmes plus complexes comme les cavités diélectriques ou amorties.

Revenons au cas du billard diélectrique. En notant q l'abscisse curviligne le long du bord et φ l'angle d'incidence, nous pouvons encoder la dynamique dans "l'application de rebond" $\kappa : (q, p = \sin \varphi) \mapsto (q', \sin \varphi')$, voir la figure 4.1.

Puisque la mesure $d\mu = dqd(\sin \varphi) = dq \cos \varphi d\varphi$ est préservée, l'application κ agit canoniquement sur l'espace des phases au bord. Pour tenir compte de l'amortissement effectif dû

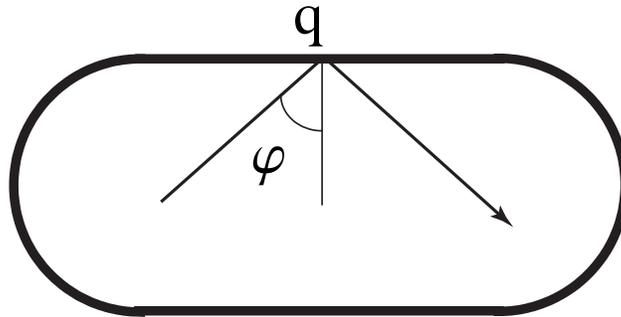


FIGURE 4.1 – Paramètres permettant l'encodage de la dynamique comme une application sur le bord.

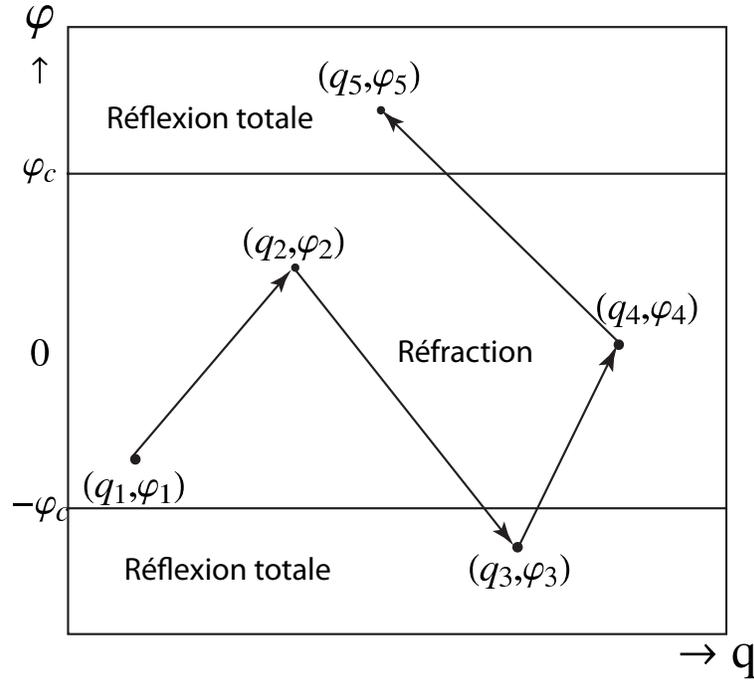


FIGURE 4.2 – Évolution de la dynamique pondérée dans l'espace des phases au bord

à une réfraction possible lorsque l'angle d'incidence est assez élevé, on peut pondérer l'application de rebond ci-dessus en introduisant un coefficient scalaire à chaque pas de temps modélisant la perte d'intensité du rayon réfléchi due à la réfraction (par intensité, nous entendons le module au carré d'une amplitude complexe). Par exemple, dans la limite de haute fréquence, ce coefficient est égal au coefficient de Fresnel, qui dépend de la polarisation de la lumière et de $p = \sin \varphi$ [KNS08]. Dans le cas d'une polarisation transverse magnétique, il s'agit d'une fonction complexe de module 1 lorsque $|p| \geq n^{-1}$ (réflexion totale) qui atteint son minimum en $p = 0$, pour lequel il vaut $(n - 1)/(n + 1)$. Plus généralement, en appelant $a = a(q, p)$ le coefficient d'amortissement, on aboutit à la représentation décrite dans la figure 4.2 pour la dynamique pondérée dans l'espace des phases.

Pour modéliser ce type de situation, nous allons considérer un espace des phases (compact) modèle, le 2-tore \mathbb{T}^2 . Nous prendrons pour dynamique libre (c'est à dire sans amortissement) un difféomorphisme symplectique

$$\kappa : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2.$$

Ce sera la situation où κ possède des propriétés chaotiques que nous étudierons la plupart du temps. Par exemple, les automorphismes du tore décrits à la section 2.1.2 sont de bonnes illustrations de telles applications chaotiques de \mathbb{T}^2 . Afin de modéliser l'amortissement, nous

allons pondérer la dynamique engendrée par κ par un facteur $a(q, p)$ complexe, dépendant donc des coordonnées auxquelles se trouve le système au temps t . En d'autres termes, à chaque point $\rho = (q, p) \in \mathbb{T}^2$ nous associons une amplitude $w(q, p) \in \mathbb{C}$ qui, après évolution par κ , va être multipliée par $a(\kappa(\rho))$:

$$(q_0, p_0; w(q_0, p_0)) \xrightarrow{\kappa} (q_1, p_1; a(q_1, p_1) \times w(q_0, p_0)) \quad (4.1)$$

Nous allons quantifier ce système classique en deux étapes. Il s'agira d'abord de "quantifier" le tore \mathbb{T}^2 en un espace de Hilbert \mathcal{H}_N de dimension finie N , où $N^{-1} = 2\pi\hbar \in \mathbb{N}$. La limite semiclassique correspond donc à prendre la dimension $N \rightarrow \infty$. Ainsi $N = (2\pi\hbar)^{-1} = \hbar^{-1}$ jouera le rôle de petit paramètre semiclassique, ou *constante de Planck effective*. Nous décrirons ensuite (voir la section 4.2) un moyen de quantifier les observables classiques, c'est à dire les fonctions $a \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Nous nous servirons pour cela de la quantification des observables sur $T^*\mathbb{R}^d$ que nous avons effectuée au chapitre 3 pour associer à toute observable $a \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ un opérateur $\text{Op}_\hbar(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{T}^2)$. Dans un deuxième temps, nous décrirons comment quantifier la dynamique κ , c'est à dire construire un propagateur quantique unitaire $U_\hbar(\kappa)$ agissant sur \mathcal{H}_N . Ce type de propagateur jouera le rôle d'opérateur intégral de Fourier sur le tore. Par exemple, une propriété similaire au théorème 3.26 (Egorov) sera également vraie sur \mathbb{T}^2 . En transposant au niveau quantique la dynamique classique pondérée, nous allons construire les applications quantiques partiellement ouvertes, ou amorties, comme résultant de *la composition d'une évolution libre et d'un amortissement statique*. Si a est l'observable classique intervenant dans la dynamique pondérée (4.1), nous définirons de telles applications quantiques par :

$$M_\hbar(a, \kappa) = \text{Op}_\hbar(a)U_\hbar(\kappa) \quad (4.2)$$

Pour assurer un effet d'amortissement, nous supposons que $\|\text{Op}_\hbar(a)\| \leq 1$. Excepté la situation de réflexion/réfraction décrite ci-dessus, nous pensons que les applications quantiques partiellement ouvertes sont également utiles comme modèle jouet pour l'équation des ondes amorties dans une cavité ou sur une variété Riemannienne compacte. Lorsqu'un paquet d'ondes est évolué par l'équation des ondes amorties, il est continuellement amorti le long de la trajectoire [AL03, Sjö00], comme nous allons d'ailleurs le voir en détail au chapitre suivant. Les applications quantiques ci-dessus sont une version à temps discret de ce type d'évolution, et peuvent en être considérées comme une version "stroboscopique" ou comme une "application de Poincaré". Pour comparer le spectre d'une application quantique amortie avec les modes complexes $k_n = \omega_n - i\frac{\Gamma_n}{2}$ d'une cavité amortie, il faut considérer les modes $|\omega_n - k| \leq \pi$ autour de la fréquence $k \approx \hbar^{-1}$: la distribution des taux de décroissance $\{\Gamma_n : |\omega_n - k| \leq \pi\}$ devrait reproduire celle des $\{\gamma_n^{(h)} = -2 \log |\lambda_n^{(h)}|, \lambda_n^{(h)} \in \text{Spec}(M_\hbar(a, \kappa))\}$, comme nous allons le voir plus bas. Certains des théorèmes présentés dans le cadre des applications partiellement ouvertes ont des équivalents pour l'équation des ondes amorties, prouvés dans [Leb93, AL03, Sjö00]. Certains deviennent triviaux dans le cas du tore, tandis que la preuve de certains autres se simplifie considérablement dans le cas des applications. Il est également plus aisé de construire des applications classiques avec des propriétés dynamiques pré-définies, que de construire des variétés dont les propriétés dynamiques du flot

géodésique serait prescrit. Enfin, la diagonalisation numérique de matrices de taille finie est plus simple que celle des opérateurs d'onde.

Nous avons étudié dans ce travail le cas du 2-tore \mathbb{T}^2 . La généralisation à un tore de dimension $2n$, ou n'importe quel espace des phases compact raisonnable ne présente pas de nouvelles difficultés, pourvu qu'une quantification puisse y être construite, dans l'esprit de [MO05]. Dans la section 4.2, nous allons passer en revue la quantification du tore \mathbb{T}^2 . Dans la section 4.3, nous présenterons des résultats (analytiques et numériques) concernant le spectre de telles applications. Enfin, nous donnerons quelques résultats de base sur les états propres et les mesures semiclassiques associées dans la section 4.2.4.

4.2 Mécanique quantique sur le tore

4.2.1 Espace de Hilbert des états

Lorsque l'espace des phases classique est le 2-tore $\mathbb{T}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \{x = (q, p) \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2\}$, il semble raisonnable de demander que l'espace de Hilbert quantique possède les mêmes propriétés de symétrie. Pour cela, il est pratique de se servir des opérateurs de translation dans l'espace des phases déjà rencontrés au chapitre 2. Posons

$$T(q, p) : \psi(x) \mapsto e^{\frac{i}{\hbar}(px - q\frac{\hbar}{i}\partial_x)} \psi(x),$$

qui correspond à une translation de vecteur (q, p) dans l'espace des phases classique. Afin de refléter les propriétés du tore dans l'espace quantique, on peut alors demander qu'une fonction d'onde soit invariante (à une phase près) sous l'action de $T(1, 0)$, ce qui correspond à une périodicité 1 en position, et sous celle de $T(0, 1)$, qui correspond à une périodicité 1 en impulsion. Autrement dit,

$$\psi(q + 1) = e^{2i\pi\theta_2}\psi(q), \quad \mathcal{F}_\hbar\psi(p + 1) = e^{2i\pi\theta_1}\mathcal{F}_\hbar\psi(p), \quad \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \quad (4.3)$$

Nous prendrons toujours pour simplifier les phases $\theta_1, \theta_2 = 0$. En utilisant la formule de Poisson, on peut montrer [BB96] que $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ satisfaisant les conditions ci-dessus existe si et seulement si l'on a

$$2\pi\hbar = N^{-1}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Dans la suite, nous adopterons toujours la notation $\hbar \stackrel{\text{def}}{=} 2\pi\hbar$, de telle sorte que l'on aura $\hbar = N^{-1}$. Ce nombre \hbar joue le rôle de paramètre semiclassique et nous rappellera ainsi le calcul \hbar -pseudodifférentiel standard sur $T^*\mathbb{R}$. L'espace vectoriel formé de distributions vérifiant (4.3) est alors de dimension finie N : nous le noterons \mathcal{H}_N . Cet espace admet une base "de position" $\{e_j : j \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\}$ formée de distributions tempérées, données par

$$e_j(q) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \delta(q - \nu - j/N). \quad (4.4)$$

En munissant \mathcal{H}_N du produit scalaire

$$\langle e_j | e_k \rangle = \delta_{jk}, \quad j, k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, \quad (4.5)$$

on fait de \mathcal{H}_N l'unique (à normalisation près) espace de Hilbert pour lequel les opérateurs $T(q, p)$ sont unitaires. Nous noterons par $\|\cdot\|$ la norme hibernienne associée à ce produit scalaire.

4.2.2 Quantification des observables

Une fois construit l'espace quantique des états, nous devons procéder à la quantification des observables classiques. Puisque par observable on entend fonction sur l'espace des phases, nous considérerons que les observables classiques sur le tore sont les fonctions lisses bi-périodiques

$$f(q, p) \in C^\infty(\mathbb{T}^2) : f(q+1, p) = f(q, p+1) = f(q, p).$$

Une manière de quantifier une telle fonction consiste à l'écrire tout d'abord sous forme de série de Fourier :

$$f(q, p) = \sum_{m, n \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}(m, n) e^{2i\pi(mq - np)}$$

Procédant comme en 3.2.3, on quantifie f en quantifiant chacune des fonctions $\exp(2i\pi(mq - np))$. Si l'on considère la quantification de Weyl, on obtient en prenant $2\pi\hbar N = 1$ la relation suivante :

$$f_h^w = \sum_{m, n \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}(m, n) T\left(\frac{m}{N}, \frac{n}{N}\right)$$

On vérifie que si $m, n \in \mathbb{Z}$ alors $T\left(\frac{m}{N}, \frac{n}{N}\right)$ laisse \mathcal{H}_N stable (et réciproquement), ce qui conduit à poser la définition suivante :

Définition 4.1. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. La quantification de f sur \mathcal{H}_N est définie comme la restriction sur \mathcal{H}_N de la quantification de Weyl f_h^w , lorsque $2\pi\hbar N = 1$. C'est une matrice $N \times N$ dans la base (4.4).

On a alors :

$$\text{Op}_h(f) = \sum_{m, n \in \mathbb{Z}^2} f_{m, n} T\left(\frac{m}{N}, \frac{n}{N}\right), \text{ où } f_{m, n} = \int_{\mathbb{T}^2} f e^{-2i\pi(mq - np)} d\mu. \quad (4.6)$$

Le premier coefficient de fourier de f va jouer un rôle fondamental par la suite. Notons simplement ici qu'en utilisant les propriétés de $T\left(\frac{m}{N}, \frac{n}{N}\right)$ on montre aisément que

$$h \text{Tr}(\text{Op}_h(f)) = f_{0,0} + \mathcal{O}(h^\infty) = \int_{\mathbb{T}^2} f d\mu + \mathcal{O}(h^\infty). \quad (4.7)$$

L'opérateur $\text{Op}_h(f)$ hérite de certaines propriétés de f_h^w , et nous ferons simplement la liste de celles qui nous seront utiles. Puisque $\text{Op}_h(f)^\dagger = \text{Op}_h(f^*)$, l'opérateur $\text{Op}_h(f)$ est auto-adjoint si f prend des valeurs réelles. La fonction $f \equiv f_h$ peut aussi dépendre h , et pour garder sur le tore les principales propriétés du calcul pseudodifférentiel dans $T^*\mathbb{R}$, il est nécessaire d'introduire des classes de symboles adaptées au tore, comme nous l'avons fait

au chapitre 3 pour les symboles sur $T^*\mathbb{R}^d$. Sur le tore, on a simplement $2\pi\hbar = h = N^{-1}$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$, et $C_b^\infty(T^*\mathbb{R})$ est remplacé par $C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Pour une suite de fonctions $(f_h)_{h \in]0,1]}$, $f_h \equiv f(x, h) \in C_b^\infty(\mathbb{T}^2 \times]0, 1])$, nous dirons que $f_h \in S_\delta^m$, avec $\delta \in]0, \frac{1}{2}]$, $m \in \mathbb{R}$ si $h^m f_h$ est uniformément bornée par rapport à h et que pour tout multi-indice $\alpha = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ de longueur $|\alpha| = n_1 + n_2$, nous avons :

$$\|\partial^\alpha f_h\|_{C^0} \leq C_\alpha h^{-m-|\alpha|\delta}, \quad \forall h \in]0, 1].$$

Dans l'équation précédente, $\|\cdot\|_{C^0}$ représente la norme sup sur \mathbb{T}^2 et ∂^α signifie $\frac{\partial^{n_1+n_2}}{\partial q^{n_1} \partial p^{n_2}}$. Dans la suite de ce chapitre, nous noterons S_δ^m ces classes de symboles.

L'inégalité suivante est l'outil principal de transcription sur le tore des propriétés valides pour les opérateurs \hbar -pseudodifférentiels sur \mathbb{R} [BB96] :

$$\forall f \in C^\infty(\mathbb{T}^2), \quad \|\text{Op}_h(f)\| \leq \|f_h^w\|_{L^2 \rightarrow L^2}. \quad (4.8)$$

Remarquons que cette propriété reste vraie lorsque $f \equiv f_h$ dépend de \hbar , avec $f_h \in S_\delta^0(1)$. Le théorème 3.9 de continuité L^2 affirme que lorsque $f_h \in S_\delta^0(1)$, alors f_h^w est un opérateur borné (avec une borne uniforme en \hbar) de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Puisque $\text{Op}_h(f)$ est la restriction de f_h^w sur \mathcal{H}_N , (4.8) implique l'existence d'une constante C indépendante de h telle que pour $f \in S_\delta^0$ et $h \in]0, 1]$,

$$\|\text{Op}_h(f)\| \leq C.$$

Le calcul symbolique pour les quantifications de Weyl f_h^w s'étend alors sans problèmes aux restrictions sur \mathcal{H}_N . Pour deux symboles f et g dans S_δ^0 , nous avons la règle de composition suivante :

$$\text{Op}_h(f) \text{Op}_h(g) = \text{Op}_h(f \sharp_h g),$$

où $f \sharp_h g$ est défini de la manière usuelle (cf. chapitre 3) :

$$(f \sharp_h g)(X) = e^{\frac{i\hbar}{2\pi} \sigma(D_X, D_Y)} (f(X)g(Y))|_{X=Y} \quad (4.9)$$

avec $D_X = (D_x, D_\xi) = (\frac{1}{i}\partial_x, \frac{1}{i}\partial_\xi)$. En particulier, si $f \in S_\delta^m$ et $g \in S_\delta^n$, alors $f \sharp_h g \in S_\delta^{m+n}$, et au premier ordre nous avons la propriété suivante :

$$\|\text{Op}_h(f) \text{Op}_h(g) - \text{Op}_h(fg)\| \leq C_{f,g} h^{1-2\delta-m-n}. \quad (4.10)$$

Soit $a \in S_\delta^0$. Nous écrivons $a_- = \min_{\mathbb{T}^2} |a|$, et $a_+ = \max_{\mathbb{T}^2} |a|$. La proposition suivante est une adaptation sur le tore de l'égalité de Gårding du théorème 3.11 :

Proposition 4.2. *Soit $a \in S_\delta^0$ un symbole réel positif sur \mathbb{T}^2 , avec $\text{Ran } a = [a_-, a_+]$ indépendant de h . Il existe $C > 0$ tel que pour h assez petit et tout état normalisé $u \in \mathcal{H}_N$:*

$$a_- - Ch^{1-2\delta} \leq \langle u, \text{Op}_h(a)u \rangle \leq a_+ + Ch^{1-2\delta}.$$

Cette proposition nous sera fort utile, car elle permet de borner le spectre d'un opérateur pseudodifférentiel sur le tore à l'aide de son symbole, dans la limite semi classique. Nous renvoyons à [Sch09b, Prop. 2.1] pour une preuve.

Afin d'étudier le spectre d'opérateurs pseudodifférentiels sur le tore, nous allons utiliser de manière récurrente le principe suivant : si $f \in C^0(\mathbb{R})$ est une fonction continue et a un symbole réel, alors

$$\sum_{\lambda \in \text{Spec Op}_h(a)} f(\lambda) = \text{Tr } f(\text{Op}_h(a)), \quad (4.11)$$

où $f(\text{Op}_h(a))$ est défini par le calcul fonctionnel standard – $\text{Op}_h(a)$ est une matrice hermitienne. Par exemple, si f est un "lissage" de la fonction caractéristique d'un intervalle $[s, t]$, ceci permet de compter (approximativement) le nombre de valeurs propres de $\text{Op}_h(a)$ situées dans $[s, t]$. Une manière de calculer le membre de gauche de (4.11) consiste à calculer *explicitement* la trace du membre de droite. Gardant à l'esprit (4.7), on voit que cette opération peut être effectuée de manière relativement simple, pourvu que $f(\text{Op}_h(a)) \approx \text{Op}_h(f(a))$. Avant de rendre cette "égalité" plus précise, nous allons préciser un peu quel type de fonctions f nous envisageons d'utiliser. Si l'on veut localiser une partie du spectre sur des distances de taille $w(h)$, avec $w(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, il est clair qu'il va falloir utiliser des fonctions $f = f_h$ dépendant de h , dont les dérivées vont exploser dans la limite semiclassique. Introduisons la définition suivante :

Définition 4.3. soit $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, dépendant de h , et $m \in \mathbb{N}$. On dira que f est $w(h)$ -admissible s'il existe une fonction $w(h) \in C^\infty([0, 1])$ satisfaisant $w(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, et telle que

$$\|\partial^m f\|_{C^0} \leq C_m w(h)^{-m}. \quad (4.12)$$

En s'inspirant du calcul fonctionnel de Helffer-Sjöstrand pour les opérateurs pseudodifférentiels sur $T^*\mathbb{R}^d$ (voir [DS99] pour une exposition détaillée), nous montrons dans [Sch09b, Prop. 2.8 et Cor. 2.9] un calcul fonctionnel au premier ordre pour de telles fonctions, avec les propriétés suivantes :

Proposition 4.4. [Calcul fonctionnel avec perturbations] Soit $a \in S_\delta^0$, $\delta < \frac{1}{2}$ un symbole réel et f_w une fonction w -admissible pour $w(h)^{-1} = \mathcal{O}(h^{-\eta})$ et $0 \leq \eta < \frac{1-2\delta}{6}$. Considérons une famille d'opérateurs auto-adjoints $(B_h)_{h \in [0, 1]} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_N)$, avec les propriétés suivantes :

- (i) $\text{Op}_h(a) + B_h$ est auto-adjoint ,
- (ii) $\|B_h\| = \mathcal{O}(h^\nu)$ pour $\nu > 4\eta > 0$.

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ vérifiant

$$\eta < \varepsilon < \frac{1-2\delta}{6} \quad \text{et} \quad \eta < \varepsilon < \frac{\nu}{4},$$

nous avons :

$$f_w(\text{Op}_h(a) + B_h) = \text{Op}_h(f_w(a)) + \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h^{\min(1-2\delta-6\varepsilon, \nu-4\varepsilon)})$$

et $f_w(a) \in S_{\eta+\delta}^0$.

4.2.3 Quantification de la dynamique classique

Comme annoncé plus haut, nous prenons pour dynamique classique un difféomorphisme symplectique $\kappa : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$. Puisque nous nous intéressons aux dynamiques chaotiques, nous ferons parfois l’hypothèse que κ est Anosov, et par conséquent ergodique pour la mesure de Lebesgue μ sur \mathbb{T}^2 . Les automorphismes hyperboliques du tore décrits au chapitre 2 rentrent dans cette catégorie.

Nous n’étudierons pas en détail les méthodes possibles de quantification de l’application symplectique κ , c’est à dire la construction d’un opérateur unitaire $U_h(\kappa) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_N)$ jouant le rôle de “propagateur quantique” de la dynamique classique κ . Nous renvoyons par exemple à [KMR91, EG03, Zel97] pour une discussion sur ces questions.

En dimension $d = 1$, l’application $\kappa : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ peut être décomposée comme produit de trois applications $L, t_{\mathbf{v}}$ et ϕ_1 où $L \in SL(2, \mathbb{Z})$ est un automorphisme linéaire du tore, $t_{\mathbf{v}}$ est la translations de vecteur \mathbf{v} et ϕ_1 est un flot hamiltonien au temps 1 [KMR91]. On quantifie l’application $\kappa = L \circ t_{\mathbf{v}} \circ \phi_1$ en quantifiant séparément $L, t_{\mathbf{v}}$ et ϕ_1 en $U_h(L), U_h(t_{\mathbf{v}})$ et $U_h(\phi_1)$, puis l’on pose $U_h(\kappa) = U_h(L) U_h(t_{\mathbf{v}}) U_h(\phi_1)$. La quantification de ϕ_1 est directe : en notant $H \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ le hamiltonien tel que $\phi_1 = \exp \mathcal{X}_H$, on pose

$$U_h(\phi_1) = \exp\left(-\frac{i}{h} \text{Op}_h(H)\right).$$

La translation $U_h(t_{\mathbf{v}})$ de vecteur \mathbf{v} est définie pour tout $f \in S_\delta^0$ par la propriété

$$U_h(t_{\mathbf{v}})^{-1} \text{Op}_h(f) U_h(t_{\mathbf{v}}) = \text{Op}_h(f \circ t_{\mathbf{v}_h}),$$

où \mathbf{v}_h est une approximation de \mathbf{v} sur le réseau $(\frac{1}{N}\mathbb{Z})^2$, et vérifie $|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h| = \mathcal{O}(h)$. Enfin, la quantification $U_h(L)$ peut être définie en terme de représentations du groupe de Weyl-Heisenberg dans $L^2(\mathbb{T}^2)$, et satisfait

$$U_h(L)^{-1} \text{Op}_h(f) U_h(L) = \text{Op}_h(f \circ L), \text{ pour tout } f \in S_\delta^0.$$

Les deux équations précédentes sont un cas particulier de la propriété d’Egorov ou “principe de correspondance quantique–classique”. Pour une application générique κ , cette correspondance n’est pas exacte en général : si $f \in S_\delta^0$, on a

$$\|U_h(\kappa)^{-1} \text{Op}_h(f) U_h(\kappa) - \text{Op}_h(f \circ \kappa)\| = o_h(1), \quad \text{où } o_h(1) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Il est possible de rendre le terme de défaut $o_h(1)$ dans l’équation précédente plus précis :

Lemme 4.5. *Soit $f \in S_\delta^0$. Il existe $C_{f,\kappa}$ tel que*

$$\|U_h(\kappa)^{-1} \text{Op}_h(f) U_h(\kappa) - \text{Op}_h(f \circ \kappa)\| \leq C_{f,\kappa} h^{1-2\delta}. \quad (4.13)$$

La démonstration (voir [Sch09b, Lem. 2.3]) utilise principalement les arguments classiques de [BR02].

4.2.4 Mesures semiclassiques

Posons la question suivante : étant donné une famille d'états propres $(\Psi_h)_{h \in]0,1]}$ de $M_h(a, \kappa)$, la valeur moyenne d'une observable $\text{Op}_h(f)$ dans l'état Ψ_h a-t-elle une limite lorsque $h \rightarrow 0$? En d'autres termes, on s'intéresse à la limite (éventuelle) suivante

$$\lim_{h \rightarrow 0} \langle \Psi_h, \text{Op}_h(f) \Psi_h \rangle.$$

On dit que la séquence $(\Psi_h)_{h>0}$ converge vers la distribution μ sur $C^\infty(\mathbb{T}^2)$ si et seulement si pour toute observable $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ on a

$$\langle \Psi_h, \text{Op}_h(f) \Psi_h \rangle \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{T}^2} f d\mu.$$

D'après l'inégalité de Gårding, la distribution μ est nécessairement une mesure de probabilité sur \mathbb{T}^2 , qu'on appellera *mesure semiclassique*. Notons que pour toute suite $(\Psi_h)_{h>0}$ d'états propres de $M_h(a, \kappa)$ on peut associer une suite de distributions sur $C^\infty(\mathbb{T}^2)$, notées $(\mu_h)_{h>0}$, définies par

$$\mu_h : \begin{cases} C^\infty(\mathbb{T}^2) \rightarrow \mathbb{R} \\ f \rightarrow \langle \Psi_h, \text{Op}_h(f) \Psi_h \rangle. \end{cases}$$

Par compacité faible*, on peut toujours extraire une sous-suite $(\Psi_{h_k}) \subset (\Psi_h)$ d'états propres tels que μ_{h_k} converge vers une mesure semiclassique dans la limite $h_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. On parle alors d'une mesure semiclassique associée à la suite (Ψ_h) , puisqu'il existe éventuellement d'autres suites extraites qui sont susceptibles de converger vers des limites différentes.

Quantification anti-Wick et mesures de Husimi. D'après l'inégalité de Garding, $\mu_h(a) \stackrel{\text{def}}{=} \langle u_h, \text{Op}_h(a) u_h \rangle$ n'est pas forcément positif même si $a \geq 0$: la distribution μ_h n'est pas une mesure en général, bien que $\mu = \lim_{h \rightarrow 0} \mu_h$ soit bien une mesure de probabilité. On peut remédier à ce problème en définissant une quantification positive sur le tore, c'est à dire définir un opérateur $\text{Op}_h^{AW}(a)$ tel que que $a \geq 0$ implique $\text{Op}_h^{AW}(a) \geq 0$. L'avantage dans ce cas est que

$$\mu_h^{AW} : a \mapsto \langle u_h, \text{Op}_h^{AW}(a) u_h \rangle$$

est bien une mesure de probabilité sur \mathbb{T}^2 pour tout $h > 0$. On retrouve μ à la limite semiclassique si les quantifications sont équivalentes, c'est à dire si

$$\| \text{Op}_h(a) - \text{Op}_h^{AW}(a) \| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

La quantification anti-Wick, basée sur les états cohérents, est une quantification positive qui satisfait aux critères ci-dessus [Sch01]. Puisqu'il s'agit de celle que nous avons utilisée dans nos simulations numériques (section 4.4), nous allons la décrire brièvement. Dans le plan, un état cohérent au point $z = (x_0, \xi_0)$ et de variance s est donné par

$$e_z^s = \frac{s^{\frac{1}{4}}}{(\pi \hbar)^{d/4}} e^{\frac{i}{\hbar} \xi_0 x} e^{-\frac{s}{2\hbar} \|x - x_0\|^2}.$$

L'opérateur P défini par

$$P : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ni \psi \mapsto P\psi = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}^2} (-1)^{Nmn} T\left(\frac{m}{N}, \frac{n}{N}\right) \psi \in \mathcal{H}_N$$

permet de projeter toute fonction de Schwartz sur \mathcal{H}_N , en particulier l'état cohérent e_z^s . On obtient ainsi un état cohérent périodisé, noté $\Psi_{z,s} \in \mathcal{H}_N$ dont les composantes dans la base (4.4) s'écrivent

$$\langle q_j, \Psi_{z,s} \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e_z^s \left(\frac{j}{N} + m \right), \quad j \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket.$$

La quantification anti-Wick (ou Toeplitz) de $a \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ est définie par

$$f \in C^\infty(\mathbb{T}^2) \mapsto \text{Op}_h^{AW,s}(f) = \frac{1}{h} \int_{\mathbb{T}^2} f(x) P_{z,s} dz, \quad \text{où } P_{z,s} = \Psi_{z,s} \langle \Psi_{z,s}, \cdot \rangle.$$

On peut montrer les résultats suivants :

Théorème 4.6. *Soient $s_1, s_2 > 0$. Alors :*

1. $\forall f \in C^\infty(\mathbb{T}^2), \quad \|\text{Op}_h^{AW,s_1}(f) - \text{Op}_h^{AW,s_2}(f)\| = \mathcal{O}(h)$
2. $\forall f \in C^\infty(\mathbb{T}^2), \quad \|\text{Op}_h^{AW,s_i}(f) - \text{Op}_h f\| = \mathcal{O}(h)$.

Autrement dit, deux quantifications associées à des variances différentes sont équivalentes à la limite semiclassique, et les quantifications de Weyl et anti-Wick sont aussi équivalentes dans cette limite. Enfin, la quantification anti-Wick permet de définir une représentation d'un état propre de $M_h(a, \kappa)$ dans l'espace des phases, appelé fonction de Husimi :

$$H_{u_h}^s(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{h} |\langle \Psi_{z,s}, u_h \rangle|^2.$$

On définit alors la distribution de Husimi associée à u_h par

$$\forall f \in C^\infty(\mathbb{T}^2), \quad H_{u_h}^s(f) \stackrel{\text{def}}{=} \langle u_h, \text{Op}_h^{AW,s}(f) u_h \rangle = \int_{\mathbb{T}^2} f(z) H_{u_h}^s(z) dz.$$

Cette distribution est bien une mesure de probabilité sur $C^\infty(\mathbb{T}^2)$. En utilisant le théorème 4.6, nous voyons qu'une suite (u_h) converge vers une mesure semiclassique μ si et seulement si les mesures de Husimi $H_{u_h}^s$ convergent vers μ (au sens faible- $*$). Ce sont précisément les mesures de Husimi (avec $s = 1$) que nous avons utilisées dans nos simulations numériques pour approcher les mesures semiclassiques dans la limite $h \rightarrow 0$.

4.2.5 Modèle d'applications partiellement ouvertes

Lorsque l'on prend en compte l'amortissement, notre application quantique amortie est donnée par la matrice $M_h(a, \kappa)$, voir (4.2). Le facteur $a \in S_0^0$ est choisi de sorte que lorsque h est assez petit, $\|\text{Op}_h(a)\| \leq 1$ et $a_- = \min_{\mathbb{T}^2} |a| > 0$. Par la proposition 4.2, ceci implique

que $\text{Op}_h(a)$, et donc $M_h(a, \kappa)$, sont inversibles, d'inverse uniformément borné par rapport à h :

$$\|M_h(a, \kappa)\| = a_+ + \mathcal{O}(h), \quad \|M_h(a, \kappa)^{-1}\| = a_-^{-1} + \mathcal{O}(h). \quad (4.14)$$

Comme expliqué dans l'introduction, $M_h(a, \kappa)$ n'est pas un opérateur normal, et n'est donc pas forcément diagonalisable dans une base orthonormée. Nous écrivons son spectre de la manière suivante :

$$\text{Spec}(M_h(a, \kappa)) = \{\lambda_1^{(h)}, \lambda_2^{(h)}, \dots, \lambda_{h-1}^{(h)}\},$$

où les valeurs propres sont comptées avec leur multiplicité algébrique et ordonnées par module décroissant (dans la suite, nous omettrons souvent les exposants $^{(h)}$). Les bornes (4.14) impliquent immédiatement

$$a_+ + Ch \geq |\lambda_1^{(h)}| \geq |\lambda_2^{(h)}| \geq \dots \geq |\lambda_{h-1}^{(h)}| \geq a_- - Ch \quad (4.15)$$

pour une certaine constante $C > 0$. Puisque nous avons supposé $a_- > 0$, le spectre est localisé dans un anneau lorsque h est assez petit. Les bornes ci-dessus sont comparables avec celles obtenues pour l'équation des ondes amorties [Sjö00].

4.3 Propriétés de localisation du spectre

Nous énonçons maintenant nos résultats concernant les propriétés spectrales des applications (4.2). Nous esquisserons certaines preuves dans les sections suivantes, de manière générale on renvoie à [Sch09b] pour les démonstrations complètes.

En général, la matrice $M_h(a, \kappa)$ n'est pas normale, et ses vecteurs propres ne sont pas orthonormés. Le spectre des matrices non normales est très sensible aux perturbations : la notion de pseudospectre est souvent un objet plus robuste à étudier dans cette situation [ET05]. Globalement, nous montrons que sous une condition de non-annulation du symbole d'amortissement $|a| \geq a_- > 0$, le spectre de $M_h(a, \kappa)$ est plutôt contraint dans la limite semiclassique : il ressemble au spectre de l'application unitaire (non amortie) $U_h(\kappa)$ à une dilatation près.

Théorème 4.7. *Soit $M_h(a, \kappa)$ l'application quantique décrite ci-dessus, où κ est une application symplectique lisse de \mathbb{T}^2 et le facteur $a \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ satisfait $1 \geq |a| > 0$. Pour chaque valeur de $h = N^{-1}$, $N \in \mathbb{N}$, nous notons par $\{\lambda_j^{(h)}\}_{j=1 \dots h-1}$ les valeurs propres de $M_h(a, \kappa)$, comptées avec multiplicité algébrique. Dans la limite semiclassique $h \rightarrow 0$, ces valeurs propres sont distribuées comme suit. Appelons*

$$a_n : x \mapsto \prod_{i=1}^n |a \circ \kappa^i(x)|^{\frac{1}{n}},$$

et au moyen du théorème ergodique de Birkhoff, définissons

$$\text{EI}_\infty(a) = \text{ess inf} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad \text{ES}_\infty(a) = \text{ess sup} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Alors, le spectre se concentre en densité dans la limite semiclassique à l'intérieur d'une couronne délimitée par les cercles de rayon $EI_\infty(a)$ et $ES_\infty(a)$:

$$\forall \delta > 0, \lim_{h \rightarrow 0} h \# \left\{ 1 \leq j \leq h^{-1} : EI_\infty(a) - \delta \leq |\lambda_j^{(h)}| \leq ES_\infty(a) + \delta \right\} = 1. \quad (4.16)$$

Supposons maintenant que κ est ergodique pour la mesure de Lebesgue μ sur \mathbb{T}^2 , et notons

$$\langle a \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \exp \left\{ \int_{\mathbb{T}^2} \log |a| d\mu \right\} \quad \text{la moyenne géométrique de } |a| \text{ sur } \mathbb{T}^2.$$

Dans ce cas, le spectre se concentre en densité dans la limite semiclassique près du cercle de rayon $\langle a \rangle$, et les arguments des valeurs propres sont réparties de manière homogène sur $\mathbb{S}^1 \simeq [0, 1)$:

Théorème 4.8. *Si κ est ergodique pour la mesure de Lebesgue μ , alors*

$$(i) \quad \forall \delta > 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} h \# \left\{ 1 \leq j \leq h^{-1} : \left| |\lambda_j^{(h)}| - \langle a \rangle \right| \leq \delta \right\} = 1,$$

$$(ii) \quad \forall f \in C^0(\mathbb{S}^1), \quad \lim_{h \rightarrow 0} h \sum_{j=1}^{h^{-1}} f\left(\frac{\arg \lambda_j^{(h)}}{2\pi}\right) = \int_{\mathbb{S}^1} f(t) dt.$$

Notons que (i) est une conséquence immédiate de 4.16 puisque le théorème ergodique de Birkhoff affirme que $EI_\infty(a) = ES_\infty(a) = \langle a \rangle$ si κ est ergodique pour μ . Remarquons que l'ergodicité de κ assure que le spectre de l'application quantique unitaire $U_h(\kappa)$ devient uniformément distribué sur le cercle unité lorsque $h \rightarrow 0$ [BdB98, MO05]. En fait, l'hypothèse que les points fixes de $\kappa^n, n \geq 1$ soient de contenu de Minkowski 0^1 . est suffisante pour montrer une telle propriété.

Si nous supposons maintenant que κ a la propriété d'Anosov (qui implique l'ergodicité), nous pouvons estimer plus précisément la localisation du spectre alors qu'il se concentre en densité autour du cercle de rayon $\langle a \rangle$ dans la limite semiclassique.

Théorème 4.9. *Supposons que κ est Anosov. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\lim_{h \rightarrow 0} h \# \left\{ 1 \leq j \leq h^{-1} : \left| |\lambda_j^{(h)}| - \langle a \rangle \right| \leq \left(\frac{1}{\log h^{-1}} \right)^{\frac{1}{2} - \varepsilon} \right\} = 1. \quad (4.17)$$

Ce théorème est notre résultat principal concernant les applications quantiques amorties, nous présenterons rapidement les méthodes qui permettent sa démonstration à la section 4.3.2.

En général, pour des applications chaotiques, toutes les valeurs propres ne tendent pas forcément en module vers $\langle a \rangle$ dans la limite semiclassique, comme le montrent plusieurs études [AL03, Ana09], ainsi que les simulations numériques que nous avons effectuées (voir

1. c'est à dire qu'ils peuvent être recouverts par des boules ouvertes de masse totale $\leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.

la section 4.4). Par exemple, des suites “exceptionnelles” $(\lambda^{(h_j)})_{j \in \mathbb{N}}, h_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ de valeurs propres telles que $\liminf_{j \rightarrow \infty} |\lambda^{(h_j)}| > \langle a \rangle$ ne semblent pas exclues. Dans cette direction, nous estimons le nombre de “grandes” valeurs propres, i.e. la partie du spectre qui reste à distance finie $c > 0$ de $\langle a \rangle$, lorsque $h \rightarrow 0$. Nous allons montrer que ce nombre est borné par $h^{\nu-1}$, où $0 < \nu < 1$ peut être vu comme un exposant fractal, et dépend à la fois de a et de κ . Nous utiliserons de manière cruciale une information sur la “probabilité” pour la fonction a_n de prendre des valeurs loin de $\langle a \rangle$, lorsque n devient grand. Ce type d’information concerne des propriétés de *grandes déviations* pour la fonction a_n , qui sont habituellement exprimés sous forme d’une fonction de taux $I \geq 0$ (voir la section 4.3.2 plus loin) dépendant à la fois de a et de κ . Pour $d > 0$, considérons l’intervalle $[\log \langle a \rangle + d, \infty[$. On a alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mu \{x : \log a_n(x) \geq d + \log \langle a \rangle\} = -I(d).$$

Notre dernier résultat concernant le spectre prend la forme suivante :

Théorème 4.10. *Supposons comme précédemment κ Anosov, et choisissons $c > 0$. Définissons*

$$\Gamma = \log(\sup_x \|D\kappa|_x\|), \quad \ell c = \log(1 + c/\langle a \rangle), \quad a_- = \min_{\mathbb{T}^2} |a|.$$

Pour toute constante $C > 0$ et $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, notons $C^\pm = C \pm \varepsilon$, et posons $T_{a,\kappa} = (2\Gamma - 12 \log a_-)^{-1}$. Alors, si I est la fonction de taux associée à κ et a , nous avons

$$h \#\{1 \leq j \leq h^{-1} : |\lambda_j^{(h)}| \geq \langle a \rangle + c\} = \mathcal{O}(h^{\nu_{a,\kappa}(c)}),$$

$$\text{où } \nu_{a,\kappa}(c) = \frac{I(\ell c^-)T_{a,\kappa}^-}{1 + I(\ell c^-)T_{a,\kappa}^-}.$$

Nous ne savons pas pour l’instant si la borne supérieure exprimée par le théorème 4.10 est optimale. La preuve du résultat précédent utilise un temps d’évolution d’ordre $n_\tau \approx \tau \log h^{-1}$, similaire à un temps d’Ehrenfest, jusqu’auquel le théorème d’Egorov est valide. La borne ci dessus provient d’une optimisation sur τ , une valeur particulière $\tau = \tau_c$ rendant minimale la borne que l’on peut obtenir par cette méthode. Cette valeur est donnée par

$$\tau_c \stackrel{\text{def}}{=} \frac{T_{a,\kappa}^-}{1 + I(\ell c^-)T_{a,\kappa}^-}.$$

Il est remarquable que dans notre situation, un long temps d’Ehrenfest ne donne pas de borne pertinente, essentiellement parce que les termes de reste dans le théorème d’Egorov deviennent trop importants.

Notons que dans le cadre de l’équation des ondes amorties, un résultat similaire aux théorèmes 4.7 et 4.8 a été obtenu par Sjöstrand [Sjö00] sous une hypothèse d’ergodicité du flot géodésique. À notre connaissance, il n’existe cependant pas de résultats similaires au théorème 4.9 dans le cadre des ondes amorties. Concernant le théorème 4.10, un résultat comparable a été obtenu récemment par N. Anantharaman [Ana09], comme nous le détaillerons dans le chapitre suivant, mais le fait de travailler avec des flots géodésiques plutôt

qu'avec des applications à temps discret ajoute certaines complications comparativement à notre situation sur le tore. Dans les deux cas, c'est une question ouverte que de savoir s'il est possible d'obtenir une borne inférieure du même ordre que la borne supérieure pour le nombre de valeurs propres plus grandes que $\langle a \rangle + c$, dans la limite semiclassique. N. Anantharaman prouve cependant dans une borne inférieure > 0 dans une situation arithmétique. Notons encore que cette borne supérieure de type "loi de Weyl fractale" est différente de celle présentée dans [SZ07], bien que les deux systèmes présentent des similarités.

4.3.1 L'opérateur \mathcal{S}_n

Considérons notre fonction d'amortissement $a \in \mathcal{S}_0^0$, avec $\text{Ran}(|a|) = [a_-, a_+]$, $a_- > 0$, $a_+ \leq 1$. Afin de simplifier l'analyse qui va suivre, nous supposons sans perte de généralité que $a_+ = 1$. Pour obtenir des informations sur le spectre de $M_h(a, \kappa)$, il va être utile de considérer la suite d'opérateurs

$$\tilde{\mathcal{S}}_n(a) \stackrel{\text{def}}{=} M_h(a, \kappa)^{\dagger n} M_h(a, \kappa)^n, \quad n \geq 1. \quad (4.18)$$

En utilisant le théorème d'Egorov et un calcul fonctionnel, nous allons montrer que

$$\tilde{\mathcal{S}}_n(a)^{\frac{1}{2n}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}_n(a) = \sqrt[2n]{(U^\dagger \text{Op}_h(\bar{a}))^n (\text{Op}_h(a)U)^n} = \text{Op}_h(a_n) + o_h(1),$$

où

$$\log a_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log |a \circ \kappa^i|.$$

Si n est grand, $\text{Op}_h(a_n) \approx \text{Op}_h(\langle a \rangle) = \langle a \rangle \mathbb{1}$, et nous voyons que le spectre de $\mathcal{S}_n(a)$ se concentre sur le cercle de rayon $\langle a \rangle$. Pour revenir au spectre de $M_h(a, \kappa)$, nous utiliserons les inégalités de Weyl pour \mathcal{S}_n et \mathcal{S}_n^{-1} (voir la proposition C.5) ce qui permettra de montrer que si la plupart des valeurs propres de \mathcal{S}_n sont localisées autour de a , il en est de même pour les valeurs propres de $M_h(a, \kappa)$.

Nous allons d'abord montrer que lorsque $h \rightarrow 0$ et $n \geq 1$ (pouvant dépendre de h), les opérateurs $\tilde{\mathcal{S}}_n$ peuvent se réécrire sous une forme plus simple, mettant en jeu un évolution temporelle au temps n de l'observable a par l'application κ . Ceci se fera en utilisant la loi de composition (4.10) ainsi que la propriété d'Egorov (4.13). Nous verrons ainsi que la correspondance classique-quantique pour de tels opérateurs est valide jusqu'à des temps d'ordre $\log h^{-1}$. Dans la suite, pour toute constante C , nous utiliserons la notation $C^\pm = C \pm \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit mais *fixé* lorsque $h \rightarrow 0$.²

2. Nous permettons également à la constante ε de changer d'équation en équation, ainsi, C^\pm représente une constante arbitrairement proche de C , C^+ étant plus grande que C et C^- plus petit : ε sera choisi assez petit, de sorte que les équations où C^\pm apparaissent soient satisfaites.

Proposition 4.11. *Soit $\tau > 0$ une constante telle que $\tau < T_{a,\kappa}$. Si $E(x)$ représente la partie entière de x , définissons $n_\tau = E(\tau \log h^{-1})$. Alors, pour $n \leq n_\tau$, les opérateurs*

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_n(a) &= \left(M_h(a, \kappa)^{\dagger n} M_h(a, \kappa)^n \right)^{\frac{1}{2n}} \\ \ell\mathcal{S}_n(a) &= \log \mathcal{S}_n(a)\end{aligned}$$

sont bien définis si et seulement si $\text{Ker}(M_h(a, \kappa)) = 0$. De plus, si on pose

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^n |a \circ \kappa^i|^{\frac{1}{n}}, \quad \ell a_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log |a \circ \kappa^i|,$$

nous avons pour $n \leq n_\tau$ les égalités suivantes :

$$\ell\mathcal{S}_n(a) = \text{Op}_h(\ell a_n) + \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h^{\sigma^-}) \quad (4.19)$$

$$\mathcal{S}_n(a) = \text{Op}_h(a_n) + \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h^{\sigma^-}) \quad (4.20)$$

où $\sigma = 1 - \tau/T_{a,\kappa} > 0$.

Faisons quelques commentaires avant de décrire les étapes essentielles dans la preuve de cette proposition. Puisque il est possible de prendre n dépendant de h , nous voyons que si κ est ergodique et $n = n_\tau$, alors $a_n(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \langle a \rangle$ pour μ -presque tout $x \in \mathbb{T}^2$, ce qui indique effectivement que le spectre de $\mathcal{S}_n(a)$ se concentre sur le cercle de rayon $\langle a \rangle$. Soulignons aussi deux points qui nécessiteront une analyse un peu détaillée :

1. S'il est clair que $\mathcal{S}_n(a)$ est bien défini du point de vue matriciel puisque

$$M_h(a, \kappa)^{\dagger n} M_h(a, \kappa)^n$$

est un opérateur positif, il va falloir utiliser des outils plus adaptés pour obtenir (4.20) qui indique qu'à un $o_h(1)$ près, $\mathcal{S}_n(a)$ est un opérateur pseudodifférentiel. Nous utiliserons essentiellement pour ceci la propriété d'Egorov et le calcul fonctionnel de la proposition 4.4.

2. Enfin, si n dépend de h , il faut s'assurer que les sommes de Birkhoff de a le long des orbites de κ restent toujours dans des classes de symboles acceptables, pour que l'expression $\text{Op}_h(a_n)$ garde un sens.

Posons tout d'abord

$$\tilde{a}_n \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^n |a \circ \kappa^i|^2,$$

et rappelons le résultat suivant :

Lemme 4.12. *Soit $a \in S_0^0$. Pour tout multi indice $\alpha \in \mathbb{N}^2$, il existe $C_{\alpha,a,\kappa} > 0$ tel que*

$$\forall n \geq 1, \quad \|\partial^\alpha(a \circ \kappa^n)\|_{C^0} \leq C_{\alpha,a,\kappa} e^{n|\alpha|\Gamma}. \quad (4.21)$$

Ainsi, pour tout $\tau > 0$ vérifiant $\tau < \frac{1}{2\Gamma}$, nous avons uniformément pour tout $n \leq n_\tau$:

$$a \circ \kappa^n \in S_\delta^0, \quad \delta = \tau\Gamma < \frac{1}{2}. \quad (4.22)$$

L'inégalité (4.21) est bien connue pour les flots [BR02], et nous renvoyons à [FNW06, Lem. 1] pour une preuve détaillée dans le cas des applications. La deuxième partie du lemme est une conséquence directe de (4.21). Dans [Sch09b, Lem. 3.3], nous en tirons la conséquence suivante :

Lemme 4.13. *Si $\tau < \frac{1}{2\Gamma}$, nous avons $\tilde{a}_n \in S_{\delta^+}^0$ pour tout $n \leq n_\tau$, avec $\delta^+ = \tau\Gamma^+ < \frac{1}{2}$.*

Il est désormais possible de réécrire (4.18) de manière plus explicite. Soit $\tau > 0$ choisi assez petit, de sorte que $\delta = \tau\Gamma < \frac{1}{2}$, et prenons comme ci-dessus $n \leq n_\tau$. Nous allons montrer qu'en fait

$$\tilde{\mathcal{S}}_n(a) = \text{Op}_h(\tilde{a}_n) + \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h^{\nu^-}), \quad \nu = 1 - 2\delta. \quad (4.23)$$

Les lemmes 4.12 et 4.13 nous assurent déjà que si $n \leq E(\tau \log h^{-1})$, les symboles $a \circ \kappa^n$ et \tilde{a}_n sont dans la classe $S_{\delta^+}^0$ si $\delta = \tau\Gamma < \frac{1}{2}$. Ceci permet d'écrire (en notant $U \equiv U_h(\kappa)$ pour simplifier) :

$$U^\dagger \text{Op}_h(\bar{a}) \text{Op}_h(a) U = U^\dagger \text{Op}_h(\bar{a} \#_h a) U \quad (4.24)$$

$$= U^\dagger \text{Op}_h(|a|^2) U + \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h^{1-2\delta^+}) \quad (4.25)$$

$$= \text{Op}_h(|a \circ \kappa|^2) + \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h^{1-2\delta^+}) \quad (4.26)$$

$$= \text{Op}_h(\tilde{a}_1) + R_1^1, \quad (4.27)$$

où l'on a utilisé le calcul symbolique (4.10) pour obtenir (4.25) et (4.13) pour déduire (4.26). Le reste R_1^1 a une norme d'ordre $h^{1-2\delta^+}$ comme opérateur dans \mathcal{H}_N . Ce calcul peut être itéré : supposons que l'étape précédente ait conduit à

$$\tilde{\mathcal{S}}_k(a) = \text{Op}_h(\tilde{a}_k) + \sum_{i=1}^k R_i^k,$$

avec $R_i^k = \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h^{1-2\delta^+})$ pour $1 \leq i \leq k$. Alors, en utilisant les mêmes arguments que ceux mis en oeuvre pour la première étape, nous pouvons trouver $R_{k+1}^{k+1} = \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h^{1-2\delta^+})$ tel que

$$U^\dagger \text{Op}_h(\bar{a}) \text{Op}_h(\tilde{a}_k) \text{Op}_h(a) U = \text{Op}_h(\tilde{a}_{k+1}) + R_{k+1}^{k+1}.$$

Si nous définissons maintenant $R_i^{k+1} = U^\dagger \text{Op}_h(\bar{a}) R_i^k \text{Op}_h(a) U = \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h^{1-2\delta^+})$, nous avons

$$\begin{aligned} U^\dagger \text{Op}_h(\bar{a}) \tilde{\mathcal{S}}_k(a) \text{Op}_h(a) U &= U^\dagger \text{Op}_h(\bar{a}) \text{Op}_h(\tilde{a}_k) \text{Op}_h(a) U + \sum_{i=1}^k R_i^{k+1} \\ &= \text{Op}_h(\tilde{a}_{k+1}) + \sum_{i=1}^{k+1} R_i^{k+1}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{S}}_n(a) &= \text{Op}_h(\tilde{a}_n) + n \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h^{1-2\delta^+}) \\ &= \text{Op}_h(\tilde{a}_n) + \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h^{1-2\delta^+})\end{aligned}$$

autrement dit, nous avons bien montré (4.23). Pour finir la preuve de la proposition Proposition 4.11, il s'agit visiblement de rendre rigoureuses les opérations suivantes :

$$\begin{aligned}{}^{2n}\sqrt{\tilde{\mathcal{S}}_n} &= {}^{2n}\sqrt{\text{Op}_h \tilde{a}_n + \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h^{1-2\delta^+})} \equiv {}^{2n}\sqrt{\text{Op}_h(\tilde{a}_n)} + o_h(1) \\ &\equiv \text{Op}_h(a_n) + o_h(1).\end{aligned}$$

Si $\tilde{\mathcal{S}}_n(a)^{\frac{1}{2n}}$ est bien défini, il n'en est pas de même pour ${}^{2n}\sqrt{\text{Op}_h(\tilde{a}_n)}$ à priori : il faut pour cela obtenir une borne inférieure précise sur le spectre de $\text{Op}_h(\tilde{a}_n)$ et montrer qu'il est toujours strictement positif. Les deux dernières égalités sont manifestement le fait du calcul fonctionnel : il faudra vérifier que les hypothèses de la proposition 4.4 sont bien satisfaites par l'opérateur $\text{Op}_h(\tilde{a}_n) + \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h^{1-2\delta^+})$. La borne inférieure sur le spectre de $\text{Op}_h(\tilde{a}_n)$ est obtenue à l'aide de la Proposition 4.2 :

Proposition 4.14. *Soit comme ci-dessus $\tau < T_{a,\kappa}$ et $n \leq n_\tau = E(\tau \log h^{-1})$. Posons $\eta = -2\tau \log a_- > 0$. Alors, $\exists C > 0$ telle que pour $h > 0$ assez petit,*

$$\text{Spec } \tilde{\mathcal{S}}_n(a) \subset [C_{n,h}, 2],$$

où $C_{n,h} = e^{2n \log a_-} - ch^{1-2\delta^+}$ et $c > 0$. En particulier, il existe une constante $C > 0$ telle que $C_{n,h} \geq Ch^\eta$, et $\tilde{\mathcal{S}}_n(a)$ a un spectre strictement positif.

Nous renvoyons à [Sch09b, Prop. 3.5] pour la preuve. Passons à l'application du calcul fonctionnel proprement dit. Lorsque $n \leq n_\tau$, on commence par construire une fonction $\chi_{n,h}$ à support compact, égale à 1 sur $\text{Spec}(\tilde{\mathcal{S}}_n)$:

$$\chi_{n,h}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \frac{1}{2}C_{n,h} \\ 1 & \text{si } x \in [C_{n,h}, 2] \\ 0 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Alors, la fonction

$$\ell_n : x \mapsto \frac{\chi_{n,h}(x)}{2n} \log x$$

est lisse, est égale à $\frac{1}{2n} \log(x)$ sur $\text{Spec } \tilde{\mathcal{S}}_n(a)$, puisque l'on a $\text{Spec}(\tilde{\mathcal{S}}_n(a)) \subset [C_{n,h}, 2]$. De plus, ℓ_n est à support compact, et uniformément bornée par rapport à h . Par contre, nous voyons qu'une telle fonction a une variation d'ordre 1 sur une distance d'ordre $C_{n,h} \geq Ch^\eta$, ce qui signifie que les dérivées de ℓ_n vont dépendre de h et diverger à la limite $h \rightarrow 0$. Cependant, la fonction $\chi_{n,h}$ peut facilement être choisie h^η -admissible, ce qui signifie que ℓ_n sera aussi

h^n -admissible. Si l'on utilise le calcul fonctionnel standard pour les opérateurs auto-adjoints, nous avons déjà

$$\ell_n(\tilde{\mathcal{S}}_n(a)) = \frac{1}{2n} \log \tilde{\mathcal{S}}_n(a) \stackrel{\text{def}}{=} \ell \mathcal{S}_n(a)$$

puisque $\ell_n(x) = \frac{1}{2n} \log x$ sur $\text{Spec}(\tilde{\mathcal{S}}_n(a))$. On peut alors vérifier que ℓ_n et $\tilde{\mathcal{S}}_n(a)$ satisfont les hypothèses de la proposition 4.4 (voir [Sch09b, p. 732-733] pour les détails) : ceci permet de calculer explicitement $\ell_n(\tilde{\mathcal{S}}_n(a))$ et d'obtenir (4.19). L'équation (4.20) s'en déduit alors aisément.

4.3.2 Le cas Anosov

Nous avons choisi de ne pas présenter ici d'esquisse de démonstrations des théorèmes 4.7 et 4.8, car elles sont très similaires à celle qui conduit au théorème 4.9, que nous exposons maintenant.

4.3.2.1 Largeur de la distribution spectrale

Si κ est Anosov, il est possible d'obtenir des résultats plus précis que les théorèmes 4.7 et 4.8 sur les asymptotiques spectrales en utilisant l'information dynamique codée dans la *décroissance des corrélations* des observables classiques sous la dynamique générée par κ . Nous allons utiliser des notation probabilistes : un symbole a sera vu comme une variable aléatoire, et sa distribution de probabilité sera notée P_a . Celle ci est définie sur tout intervalle $I \in \mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} P_a(I) &\stackrel{\text{def}}{=} \mu(a^{-1}(I)) \\ &= \int_I P_a(dt). \end{aligned}$$

Ceci est équivalent à la propriété suivante : pour toute fonction continue $f \in C(\mathbb{R})$, nous avons

$$\mathbb{E}(f(a)) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{T}^2} f(a) d\mu = \int_{\mathbb{R}} f(t) P_a(dt).$$

Énonçons maintenant un résultat important concernant ℓa_n lorsque κ est Anosov.

Lemme 4.15. *Posons $\ell a = \log \langle a \rangle$, et*

$$x_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log |a \circ \kappa^i| - \ell a = \ell a_n - \ell a.$$

Si κ est Anosov, nous avons $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(n x_n^2) < \infty$.

Démonstration. Notons $f_i = \log |a \circ \kappa^i| - la$ et définissons la fonction de corrélation c_{ij} comme $c_{ij} = \mathbb{E}(f_i f_j)$. Alors,

$$\mathbb{E}(nx_n^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}.$$

Mais pour κ Anosov, $|c_{ij}| = \mathcal{O}(e^{-\rho|i-j|})$ pour un certaine constante $\rho > 0$ (voir [Liv96]). Par conséquent,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} = \mathcal{O}(n),$$

et le lemme suit facilement. \square

Supposons que $n = n_\tau = E(\tau \log h^{-1})$, avec $\tau < T_{a,\kappa}$ comme ci-dessus. Il va être plus agréable, en vue d'arriver au théorème 4.9, de montrer le résultat suivant : pour tout $\varepsilon > 0$ et $C > 0$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} h \# \left\{ 1 \leq j \leq h^{-1} : \left| \log |\lambda_j^{(h)}| - \log \langle a \rangle \right| \leq C (\log h^{-1})^{\varepsilon-1/2} \right\} = 1. \quad (4.28)$$

Pour h assez petit, cette équation est équivalente à (4.17) en effectuant le changement $\varepsilon \rightarrow \varepsilon/2$. Définissons maintenant deux suites $(\delta_h)_{h \in]0,1[}$ et $(\gamma_h)_{h \in]0,1[}$ tendant vers 0 lorsque $h \rightarrow 0$, et telles que

$$\frac{1}{\gamma_h \sqrt{\log h^{-1}}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \text{et} \quad \frac{\gamma_h}{\delta_h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Par exemple, un choix simple est donné par $\delta_h \propto (\log h^{-1})^{\varepsilon-1/2}$ et $\gamma_h \propto (\log h^{-1})^{\frac{\varepsilon}{2}-1/2}$, pour un certain $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$. Appelons ls_i les valeurs propres (positives) de $\ell \mathcal{S}_n(a)$, et définissons d_h tel que

$$d_h = \#\{1 \leq i \leq h^{-1} : \log |\lambda_i| - la \geq \delta_h\}.$$

Les inégalités de Weyl (proposition C.5) impliquent

$$d_h(la + \delta_h) \leq \sum_{i=1}^{d_h} \log |\lambda_i| \leq \sum_{i=1}^{d_h} ls_i. \quad (4.29)$$

Parmi les d_h premiers nombres $(ls_i - la)_{i=1, \dots, d_h}$, nous distinguons les d'_h premiers plus grands que γ_h , les autres étant par définition au nombre de

$$d_h - d'_h = \#\{1 \leq i \leq d_h, ls_i - la < \gamma_h\}$$

Par conséquent,

$$d'_h = \#\{1 \leq i \leq h^{-1} : ls_i - la \geq \gamma_h\}.$$

En soustrayant $d_h la$ de (4.29) et en remarquant que $d_h - d'_h \leq h^{-1}$, nous avons :

$$d_h \leq \frac{\gamma_h}{h\delta_h} + \frac{1}{\delta_h} \sum_{i=1}^{d'_h} (\ell s_i - \ell a). \quad (4.30)$$

Il reste donc à évaluer la somme de droite, et montrer qu'elle tend vers 0. Cette somme peut être exprimée à l'aide d'une trace :

$$\sum_{i=1}^{d'_h} (\ell s_i - \ell a) = \text{Tr} \mathbb{1}_{[\gamma_h, 2]} (\text{Op}_h(\ell a_n - \ell a) + o_h(1)).$$

La fonction $\text{Id}_{[\gamma_h, 2]}$ peut facilement être lissée en une fonction \mathcal{I}_h telle que $\mathcal{I}_h(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus [\gamma_h/2, 3]$ et $\mathcal{I}_h(t) = t$ sur $[\gamma_h, 2]$. Une telle fonction peut clairement être choisie w -admissible avec $(\log h^{-1})^{-1/2+\varepsilon} \lesssim w(h)$. Notons que la décroissance logarithmique de w dans ce cas rend toujours \mathcal{I}_h adaptée pour le calcul fonctionnel de la proposition 4.4, ce qui permet de justifier les inégalités suivantes (voir [Sch09b, p. 740]) :

$$\begin{aligned} h d_h &\leq \frac{\gamma_h}{\delta_h} + \frac{1}{\delta_h} h \text{Tr} \mathcal{I}_h (\text{Op}_h(\ell a_n - \ell a) + o_h(1)) \\ &\leq \frac{\gamma_h}{\delta_h} + \frac{1}{\delta_h} h \text{Tr} \text{Op}_h(\mathcal{I}_h(\ell a_n - \ell a)) + o_h(1) \\ &\leq \frac{\gamma_h}{\delta_h} + \frac{1}{\delta_h} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{I}_h(x) P_{x_n}(dx) + o_h(1). \end{aligned}$$

Il n'est pas difficile de voir que $\forall x \in \text{supp } \mathcal{I}_h$, on a $\mathcal{I}_h(x) \lesssim x^2 \sqrt{n}$, ce qui implique que

$$\int_{\mathbb{R}} \sqrt{n} \mathcal{I}_h(x) P_{x_n}(dx) \leq \int_{\mathbb{R}} n x^2 P_{x_n}(dx) = \mathbb{E}(n x_n^2) < \infty,$$

et alors,

$$h d_h \leq \frac{\gamma_h}{\delta_h} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\log h^{-1}} \delta_h}\right) + o_h(1) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

La preuve est complétée en utilisant l'application inverse $M_h(a, \kappa)^{-1}$:

$$M_h(a, \kappa)^{-1} = U_h(\kappa)^{-1} \text{Op}_h(a)^{-1} = \text{Op}_h(a^{-1} \circ \kappa) U_h(\kappa)^{-1} + \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h), \quad (4.31)$$

Puisque $U_h(\kappa)^{-1}$ est une quantification de κ^{-1} , le membre de droite a une forme similaire à celle de (4.2), modulo une petite perturbation d'ordre h . La fonction a^{-1} satisfait

$$a_+^{-1} \leq |a^{-1}| \leq a_-^{-1} \quad \text{and} \quad a_\infty^{-1} = (a_\infty)^{-1}.$$

Il suffit alors d'appliquer les résultats précédents à $\text{Op}_h(a^{-1} \circ \kappa) U_h(a)^{-1}$. On trouve que

$$h \# \{1 \leq i \leq h^{-1} : \log |\lambda_i| - \ell a \leq -\delta_h\} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

ce qui permet de conclure.

4.3.3 Densité angulaire

Dans cette section, nous indiquons comment obtenir le point (ii) du théorème 4.8 connaissant déjà l'accumulation (en module) des valeurs propres sur le cercle de rayon $\langle a \rangle$.

De (4.14), nous savons que pour h assez petit, toutes les valeurs propres de $M_h(a, \kappa)$ satisfont $|\lambda_i| \geq a_-/2$. Nous pouvons ainsi réécrire ces valeurs propres comme

$$\lambda_i = r_i e^{2i\pi\theta_i}, \quad r_i = |\lambda_i|, \quad \theta_i \in \mathbb{S}^1 \equiv [0, 1).$$

Nous voulons montrer que sous une hypothèse d'ergodicité pour κ , les arguments θ_i sont distribués de manière homogène sur \mathbb{S}^1 dans la limite semiclassique. Nous adaptons pour cela une méthode présente dans [BdB98, MO05] pour montrer que cette propriété est valable pour l'application unitaire $U_h(\kappa)$. L'outil principal consiste à calculer $\text{Tr}(M_h(a, \kappa)^n)$, où $n \in \mathbb{N}$ est pris arbitrairement grand, mais indépendant de la dimension quantique h^{-1} .

Proposition 4.16. *Si κ est ergodique pour la mesure de Lebesgue μ , alors*

$$\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad \lim_{h \rightarrow 0} h \text{Tr} M_h(a, \kappa)^n = 0. \quad (4.32)$$

Voir [Sch09b, Prop. 3.6] pour la preuve, qui utilise essentiellement le fait que les points n -périodiques de κ sont de contenu de Minkowski 0 pour tout $n \geq 1$. Nous allons utiliser ces estimées avec des informations que nous avons déjà sur la distribution radiale des valeurs propres (théorème. 4.8, (i)) pour prouver la distribution homogène des angles (θ_i).

Remarque 4.17. cette étape n'est pas évidente a priori : pour une matrice générale M non normale $h^{-1} \times h^{-1} = N \times N$, les quelques premières traces $\text{Tr}(M^n)$ ne donnent pas beaucoup d'informations sur le spectre de M . Par exemple, le bloc de Jordan J_N de taille N et de valeur propre 0, ainsi que la perturbation $J_{N,\varepsilon} = J_N + \varepsilon E_{N,1}$ satisfont $\text{Tr} J^n = 0$ pour $n = 1, \dots, N-1$. Cependant, leur spectre est assez différent : $\text{Spec}(J_{N,\varepsilon})$ est formé de N points équidistants sur le cercle de rayon $\varepsilon^{1/N}$. Seule la trace $\text{Tr} J^N$ distingue ces deux spectres.

Par le théorème de Stone-Weierstrass, toute fonction $f \in C^0(\mathbb{S}^1)$ peut être approximée uniformément par des polynômes trigonométriques. Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $K \in \mathbb{N}$ tel que la série de Fourier tronquée de f au degré K satisfait

$$f^{(K)}(\theta) = \sum_{k=-K}^K f_k e^{2i\pi k\theta} \quad \text{avec} \quad \|f_K - f\|_{L^\infty} \leq \epsilon. \quad (4.33)$$

Nous étudions d'abord la moyennisation de $f^{(K)}$ sur les angles (θ_j) :

$$h \sum_{j=1}^{h^{-1}} f^{(K)}(\theta_j) = \sum_{k=-K}^K f_k h \sum_{j=1}^{h^{-1}} e^{2i\pi k\theta_j}.$$

Pour chaque puissance $k \in [-K, K]$, nous pouvons relier cette somme sur les angles aux traces $\text{Tr } M_h(a, \kappa)^k$ comme suit :

$$h \sum_{j=1}^{h^{-1}} e^{2i\pi k \theta_j} = \frac{h}{\langle a \rangle^k} \text{Tr}(M_h(a, \kappa)^k) + h \sum_{j=1}^{h^{-1}} \frac{\langle a \rangle^k - r_j^k}{\langle a \rangle^k} e^{2i\pi k \theta_j}. \quad (4.34)$$

Bien que cette relation soit vraie pour toute matrice non-singulière M , elle devient utile lorsque l'on remarque que la plupart des r_j sont près de $\langle a \rangle$ lorsque h est petit : ce fait nous permet de montrer que le deuxième terme est en fait beaucoup plus petit que le premier. Quelques lignes de calcul permettent alors de montrer que

$$h \sum_{j=1}^{h^{-1}} f(\theta_j) = f_0 + o_h(1) + \mathcal{O}(\epsilon).$$

Comme ϵ peut être choisi arbitrairement petit, ceci conclut la preuve.

4.3.3.1 Estimations du nombre de “grandes” valeurs propres.

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons aux valeurs propres de $M_h(a, \kappa)$ en dehors d'un cercle de rayon $\langle a \rangle + c$ où $c > 0$ est indépendant de h , lorsque κ est Anosov. Comme nous l'avons déjà remarqué, les informations sur les valeurs propres de $\mathcal{S}_n(a)$ peuvent être obtenues via la fonction a_n et le calcul fonctionnel. Par conséquent, si nous voulons compter le nombre de valeurs propres de $M_h(a, \kappa)$ à une distance fixée de la moyenne ergodique $\langle a \rangle$, nous sommes conduits à estimer a_n à distance fixée de la valeur moyenne $\langle a \rangle$. Pour parler de manière plus dynamique, nous sommes intéressés par des estimées de grandes déviations pour l'application κ . Si $a \in C^\infty(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$, ces estimées prennent la forme suivante [OP89, RBY08] :

Théorème 4.18. *[Grandes déviations] Soit $c > 0$ une constante positive, et posons*

$$\ell c = \log(1 + c/\langle a \rangle).$$

Si κ est Anosov, il existe une fonction $I : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$, positive, continue et croissante monotone, telle que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mu(x : x_n \in [\ell c, +\infty]) \leq -I(\ell c). \quad (4.35)$$

En particulier, si $n \geq 1$ est assez grand,

$$P_{x_n}([\ell c, \infty]) = \mathcal{O}(e^{-nI(\ell c)}). \quad (4.36)$$

Esquissons la preuve du théorème 4.10, qui est similaire à celle du théorème 4.9. Nous allons prouver le résultat pour $\ell \mathcal{S}_n(a)$, l'extension à $\mathcal{S}_n(a)$ sera ensuite directe en prenant l'exponentielle. Définissons comme précédemment

$$d_h = \#\{1 \leq j \leq h^{-1} : \log |\lambda_j^{(h)}| \geq \ell a + \ell c\}.$$

Choisissons aussi un petit $\rho > 0$, et définissons

$$d'_h = \#\{1 \leq j \leq h^{-1} : \ell s_j \geq \ell a + \ell c - \rho\}.$$

Il s'agit, comme toujours, de montrer que $d'_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, et d'utiliser les inégalités de Weyl pour contrôler le spectre de $M_h(a, \kappa)$. Celles-ci s'écrivent :

$$d_h(\ell a + \ell c) \leq \sum_{j=1}^{d'_h} \ell s_j + (d_h - d'_h)(\ell a + \ell c - \rho).$$

En soustrayant $d_h(\ell a + \ell c - \rho)$ des deux côtés, on obtient pour ρ assez petit

$$d_h \rho \leq \sum_{j=1}^{d'_h} (\ell s_j - \ell a) - d'_h(\ell c - \rho) \leq \sum_{j=1}^{d'_h} (\ell s_j - \ell a).$$

Si nous choisissons $n = n_\tau = E(\tau \log h^{-1})$ et $\tau < T_{a, \kappa}$ nous pouvons utiliser les mêmes méthodes que ci-dessus pour évaluer le membre de droite de l'équation précédente. Soit \mathcal{I} une fonction lisse avec $\mathcal{I} = 1$ sur $[\ell c - \rho, 2]$, et $\mathcal{I} = 0$ sur $\mathbb{R} \setminus [\ell c - 2\rho, 3]$. Alors,

$$h \sum_{j=1}^{d'_h} (\ell s_j - \ell a) \leq h \operatorname{Tr} \mathcal{I} \left(\operatorname{Op}_h(\ell a_n - \ell a) + \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h^{\sigma^-}) \right).$$

On peut ensuite utiliser le calcul fonctionnel pour montrer que

$$h \sum_{j=1}^{d'_h} (\ell s_j - \ell a) \leq \int_{\mathbb{T}^2} \mathbb{1}_{[\ell c - 2\rho, 3]}(\ell a_n - \ell a) + \mathcal{O}(h^{\sigma^-}),$$

voir [Sch09b, p. 741-742] pour les détails. En utilisant (4.36), nous obtenons

$$h d_h \leq \frac{1}{\rho} P_{x_n}([\ell c - 2\rho, \infty]) + \mathcal{O}(h^{\sigma^-}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\rho} e^{-nI(\ell c - 2\rho)}\right) + \mathcal{O}(h^{\sigma^-}).$$

Puisque ρ est arbitrairement petit, on arrive à

$$h d_h = \mathcal{O}(h^{\tau I(\ell c^-)} + h^{\sigma^-}) = \mathcal{O}(h^{\tau I(\ell c^-)} + h^{1 - \tau/T_{a, \kappa}^-}) = \mathcal{O}(h^{\min\{\tau I(\ell c^-), 1 - \tau/T_{a, \kappa}^-\}}). \quad (4.37)$$

Il est alors direct de voir que la borne est minimale si l'on choisit

$$\tau = \tau_c = \frac{T_{a, \kappa}^-}{1 + I(\ell c^-) T_{a, \kappa}^-}.$$

4.4 Simulations numériques

Nous présentons ici quelques illustrations numériques des théorèmes 4.8 et 4.9 pour deux exemples simples d'applications quantiques sur le tore : l'application du chat ou "cat map", et l'application du boulanger, qui ont été déjà introduites au début du chapitre 2 dans leur version classique.

4.4.1 Application du chat perturbé

Soit $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ comme au chapitre 2. Si $\text{Tr } A > 2$, A n'a pas de valeur propre de module 1 et donc l'application induite par A sur le tore est Anosov. Les quantifications possibles $U_h(A)$ (voir [EG03]) de $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ avec $\text{Tr } A > 2$ satisfont les hypothèses requises pour construire (4.2), et les estimées d'Egorov (4.13) sont dans ce cas exactes, c'est à dire que le terme de reste est nul. Comme exemple concret, prenons $m \geq 1$ et $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 2m & 1 \\ 4m^2 - 1 & 2m \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

Dans la base de position, une quantification de A est donnée par

$$U_h(A)_{jk} = \sqrt{h} \exp 2i\pi h[mk^2 - kj + mj^2]. \quad (4.39)$$

Il est également possible de définir des perturbations du propagateur précédent en multipliant $U_h(A)$ par une matrice de la forme $\exp(\frac{-2i\pi}{h} \text{Op}_h(H))$, avec $H \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ une fonction réelle, qui joue le rôle d'un "hamiltonien". En notant par e^{X_H} le flot classique généré par H pour un temps unité, l'application totale classique sera donnée par $\kappa_C \stackrel{\text{def}}{=} e^{X_H} \circ \kappa_A$. Pour des choix raisonnables³ de H , l'application κ_C définit encore une transformation Anosov sur le tore, et

$$\tilde{U}_h(A, H) = e^{-\frac{2i\pi}{h} \text{Op}_h(H)} U_h(A) \quad (4.40)$$

est une quantification de κ_C . Dans les applications numériques qui vont suivre, nous avons pris $m = 1$, et

$$\text{Op}_h(H) = \frac{\alpha}{4\pi^2} \sin(2\pi q)$$

avec $\alpha = 0.05$. Cet opérateur est diagonal dans la base de position, et pour $\alpha < 0.33$, l'application classique $e^{X_H} \circ \kappa_A$ est Anosov [BK95]. Remarquons qu'en raison de la perturbation, le propriété d'Egorov (4.13) est maintenant valide avec un reste non nul a priori. De telles applications perturbées ne présentent pas en général les nombreuses dégénérescences spectrales des applications du chat non perturbées [EG03], par conséquent elles peuvent être vues comme des prototypes d'applications quantiques chaotiques "génériques" sur le tore.

Pour le terme d'amortissement, nous avons choisi une fonction ne dépendant que de la position $a(q)$, dont la quantification est donc la matrice diagonale de coefficients $a(hj)$, $j = 1, \dots, h^{-1}$. La première fonction $a_1(q)$ a un plateau $a_1(q) = 1$ pour $q \in [1/3, 2/3]$, un

3. H doit être assez petit en norme C^2 .

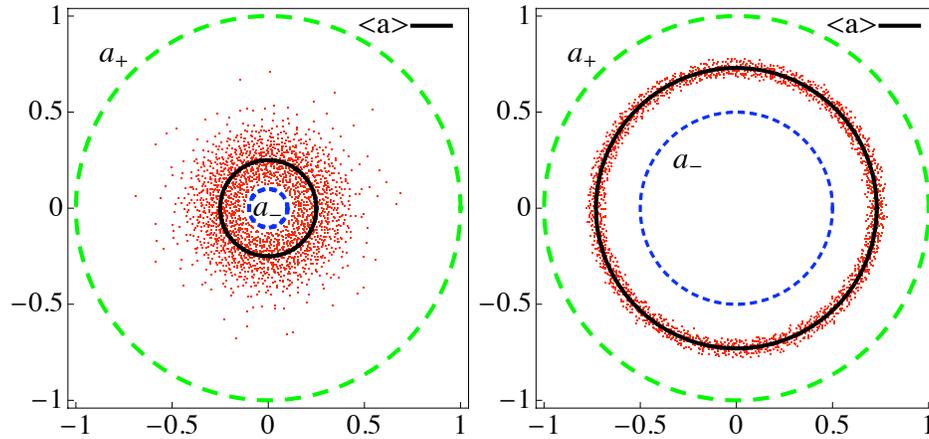


FIGURE 4.3 – Spectre de $M_h(a, \kappa)$ dans le plan complexe pour $h^{-1} = 2100$. Les cercles en pointillés sont de rayons respectifs a_+ et a_- , tandis que le cercle en trait plein a pour rayon $\langle a \rangle$. À gauche, nous avons $a = a_1$, et $a = a_2$ à droite.

autre pour $q \in [0, 1/6] \cup [5/6, 1]$ et varie de manière lisse entre les deux. Pour la deuxième, nous avons pris $a_2(q) = 1 - \frac{1}{2} \sin(2\pi q)^2$. Numériquement, on peut calculer

$$\langle a_1 \rangle \approx 0.250 \quad \text{et} \quad \langle a_2 \rangle \approx 0.728.$$

Les figures 4.3 et 4.4 représentent le spectre de notre application perturbée pour $h^{-1} = 2100$, avec les amortissements a_1 et a_2 . Le spectre reste dans un anneau de rayon a_{i+} et a_{i-} , comme mentionné dans (4.15), et l'accumulation autour de $\langle a \rangle_i$ se voit clairement. Pour une observation plus quantitative de cette accumulation, nous avons représenté la densité radiale intégrée

$$\Theta(r) = \frac{1}{N} \text{Card}\{j : |\lambda_j| \geq r\}, \quad N^{-1} = h.$$

de valeurs propres pour différentes valeurs de h^{-1} dans les figures 4.3. On vérifie que les courbes présentent un saut pour la valeur $\langle a \rangle$, ce qui est le signe d'une densité maximale, et nous voyons également clairement la répartition homogène des arguments des valeurs propres de $M_h(a, \kappa_C)$. Comme nous l'observons sur la figure 4.4, la largeur des sauts ne dépend pas beaucoup de la valeur de h , au moins pour les échelles numériques que nous avons explorées. Ce comportement est compatible avec le théorème 4.9 qui affirme que la vitesse de concentration des modules est bornée par $\log h^{-1}$.

Afin de vérifier cette observation plus en détail, nous avons défini la largeur W_h de la distribution spectrale de $M_h(a, \kappa_C)$ par

$$W_h = |\lambda_{E(\frac{1}{4h})}^{(h)}| - |\lambda_{E(\frac{3}{4h})}^{(h)}|.$$

La figure 4.5 représente W_h en fonction de h . Nous voyons clairement une décroissance avec h^{-1} , bien que les fits à deux paramètres $A(\log h^{-1})^{-B}$ indiquent une décroissance légèrement

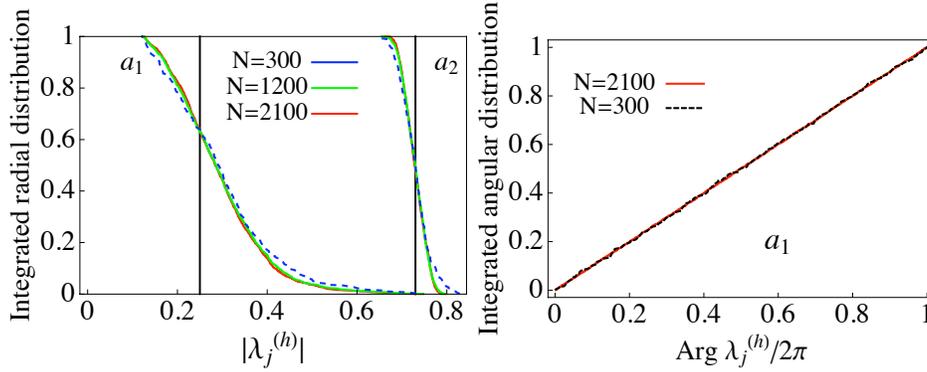


FIGURE 4.4 – Densités spectrales intégrées pour le chat perturbé. La distribution radiale est représentée à gauche, où les barres verticales indiquent la valeur $\langle a \rangle$ pour $a = a_1$ et $a = a_2$. La distribution angulaire des arguments pour $M_h(a_1, \kappa_C)$ est représentée à droite.

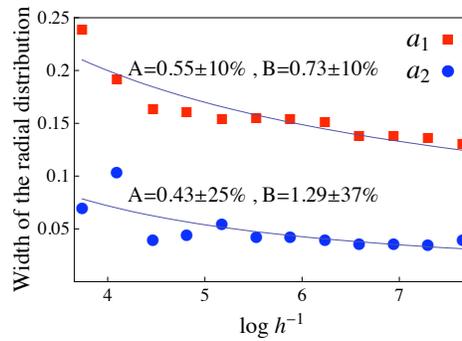


FIGURE 4.5 – Largeur de la distribution radiale, ainsi que les deux fits $A(\log h^{-1})^{-B}$ et les erreurs standard asymptotiques.

plus rapide que $(\log h^{-1})^{-1/2}$. Dans aucune des situations nous n'avons trouvé de fits corrects pour une décroissance en puissance inverse de h , ce qui semble indiquer que la borne donnée par le théorème 4.9 pourrait être optimale.

4.4.2 L'application du Boulanger

Lorsque $h^{-1} = N = (2\pi\hbar)^{-1} = 0 \pmod{3}$, une quantification possible de l'application du boulanger $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$, notée ici $\kappa_B : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ est donnée par la matrice :

$$U_h(\kappa_B) = G_N^{-1} \begin{pmatrix} G_{N/3} & & \\ & G_{N/3} & \\ & & G_{N/3} \end{pmatrix}$$

où $(G_m)_{ij} = \sqrt{m}^{-1} \exp(2i\pi m^{-1}(i + \frac{1}{2})(j + \frac{1}{2}))$ est une matrice de transformée de Fourier discrète symétrisée. Les facteurs d'amortissement sont les mêmes que ceux utilisés pour les simulations numériques du chat perturbé de la section précédente, et les applications amorties sont donc données par

$$M_h(a_i, \kappa_B) = \text{Op}_\hbar(a_i)U_h(\kappa_B), \quad i = 1, 2.$$

Bien qu'en toute rigueur les théorèmes 4.8 et 4.9 ne s'appliquent pas en raison de la discontinuité de l'application κ_B , nous observons cependant que ceux-ci semblent rester valables, voir la figure 4.6. Nous nous sommes également intéressés ici à la question du meilleur taux de décroissance [NZ08]. Comme mentionné dans l'introduction de ce chapitre, le spectre des applications quantiques partiellement ouvertes peut être comparé au spectre d'une cavité amortie, pour laquelle les taux de décroissances Γ_n correspondent dans le cas des applications aux taux décroissance $\gamma_i^{(h)} = -2 \log |\lambda_i^{(h)}|$.

Nous savons (voir l'équation (4.14)) que le spectre de $M_h(a, \kappa_B)$ est inclus dans une couronne arbitrairement proche de $\{z \in \mathbb{C} : a_- \leq |z| \leq a_+\}$. La valeur propre de plus grand module (ou le plus petit taux de décroissance) est associée à l'état propre dont le "temps de vie" est le plus long : comme noté dans l'introduction, est donc naturel de se demander si la borne supérieure a_+ est atteinte, ou s'il existe un trou spectral entre a_+ et la valeur propre de plus grand module. En adaptant les méthodes du chapitre suivant, inspirées de [NZ07a], il est probable qu'on puisse montrer que les taux de décroissances de l'application quantique amortie $M_h(a, \kappa)$ sont tous plus grands que

$$\gamma_{gap} = -2 \text{Pr}(\log |a| - \frac{1}{2} \lambda^u)$$

où Pr est la pression topologique relativement à l'application κ_B et $\lambda^u(z) > 0$ est le taux d'expansion le long de la variété instable au point $z \in \mathbb{T}^2$. Ce taux quantique est à comparer au taux classique γ_{cl} obtenu en faisant évoluer une densité de points initiale lisse par la dynamique pondérée : voir [LRR⁺04, GR89b, NZ08] et la discussion de la section 1.2 du premier chapitre. Lorsque le temps n d'évolution est grand, le poids total de la distribution

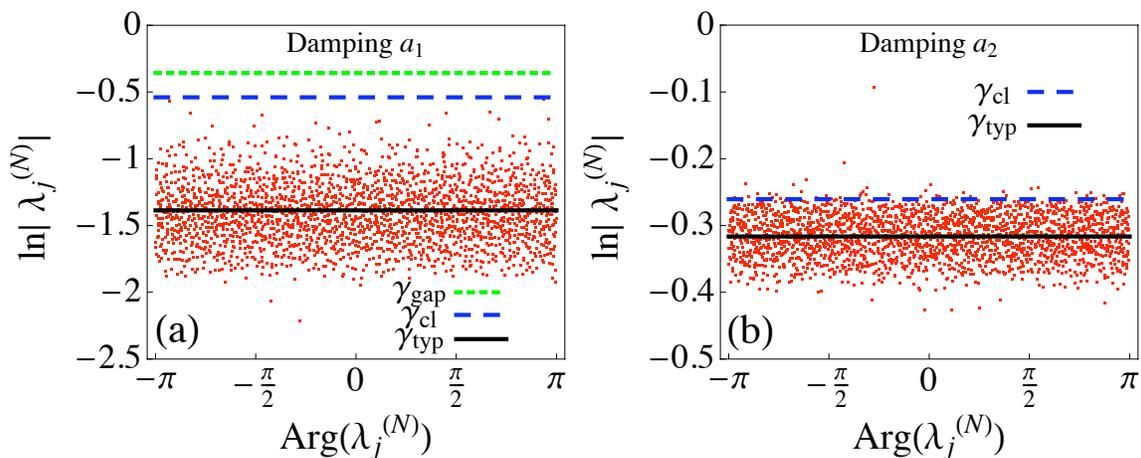


FIGURE 4.6 – Spectres de $M_h(a, \kappa_B)$ pour $N = 2100$. L'amortissement vaut a_1 à gauche et a_2 à droite. Les lignes horizontales indiquent les différents taux du tableau 4.1.

décroit comme $\sim e^{-n\gamma_{cl}}$. Comme dans le cas des systèmes ouverts, ce taux classique peut être relié à la pression topologique par

$$\gamma_{cl} = -\Pr(2 \log |a| - \lambda^u).$$

Les propriétés de la pression topologique impliquent que

$$\gamma_{gap} \leq \gamma_{cl} \leq -2 \log \langle a \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_{typ}.$$

En effet, le fait que $\Pr(f + g) \leq \Pr(f) + \Pr(g)$ implique que $\gamma_{gap} \leq \gamma_{cl}$. D'un autre côté, par le principe variationnel,

$$\begin{aligned} \Pr(2 \log |a| - \lambda^u) &= \sup_{\nu \in \mathcal{M}_\kappa} (h_{KS}(\nu) + \int_{\mathbb{T}^2} 2 \log |a| d\nu - \int_{\mathbb{T}^2} \lambda^u d\nu) \\ &\geq h_{KS}(\mu) - \int_{\mathbb{T}^2} \lambda^u d\mu + 2 \int_{\mathbb{T}^2} \log |a| d\mu \\ &\geq 2 \log \langle a \rangle, \end{aligned}$$

car la mesure de Lebesgue est une mesure d'équilibre pour le potentiel $-\lambda^u$ et l'on a [BR75] :

$$\Pr(-\lambda^u) = h_{KS}(\mu) - \int_{\mathbb{T}^2} \lambda^u d\mu = 0.$$

Dans nos simulations numériques, nous avons donc indiqué les valeurs de γ_{gap} et γ_{cl} afin de voir si ces quantités jouent un rôle particulier dans la limite semiclassique. Ces quantités ont été calculées numériquement de la manière suivante.

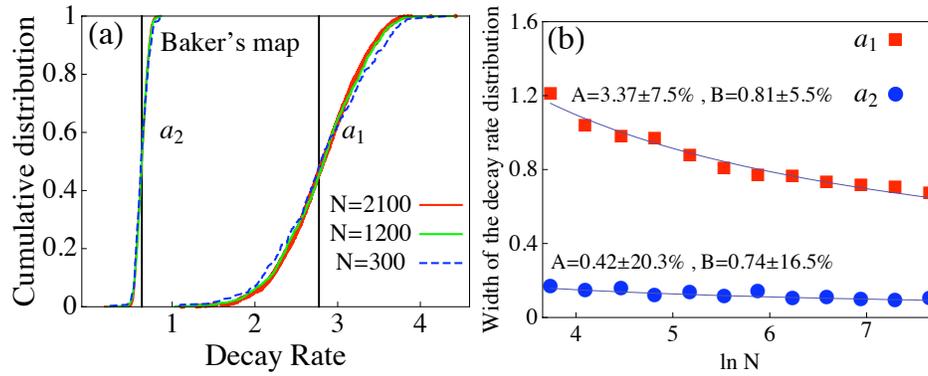


FIGURE 4.7 – Taux de décroissance intégré (a). Les barres verticales indiquent γ_{typ} . En (b) est représentée la largeur de la distribution des taux de décroissance, ainsi que les deux meilleurs fits et les erreurs standard asymptotiques.

Pour calculer la valeur de $\Pr(\alpha \log |a| + \beta \lambda^u)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, nous avons approximé la fonction $\ell a \stackrel{\text{def}}{=} \log |a|$ par une fonction $\ell \tilde{a}$ constante par morceaux sur des intervalles de taille 3^{-k} pour k grand. En utilisant un codage symbolique de la dynamique basé sur une partition de Markov faite de rectangles verticaux de largeur 3^{-k} exposé à la section 2.4.3, nous pouvons calculer simplement $\Pr(\alpha \ell \tilde{a} + \beta \lambda^u)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ en trouvant la valeur propre de Perron-Frobenius de la matrice

	γ_{gap}	γ_{cl}	γ_{typ}
a_1	0.715	1.079	2.774
a_2	-0.523	0.521	0.633

TABLE 4.1 – Valeurs numériques des différents taux pour chaque fonction d'amortissement.

$$e^{\alpha \ell \tilde{a} + \beta \lambda^u} A^{(n)}$$

où $A^{(n)}$ est la matrice de transition (2.7) pour $n = 3^k$. On vérifie numériquement que cette valeur propre de Perron-Frobenius converge rapidement lorsque $k \rightarrow \infty$ vers une valeur finie, égale à $\Pr(\alpha \log |a| + \beta \lambda^u)$. Les résultats numériques sont donnés dans le tableau 4.1.

Nous n'avons pas remarqué de rôle particulier joué par le taux de décroissance classique : comme le montre la figure 4.6, nous avons $\gamma_i^{(h)} \geq \gamma_{cl}$ dans le cas où $a = a_1$, mais pas si $a = a_2$.

Enfin, la figure 4.4.2 montre l'accumulation des valeurs propres autour du cercle de rayon $\langle a \rangle$ au travers de la distribution spectrale intégrée. Ici encore, la dépendance en $N = h^{-1}$ n'est pas très apparente. Les graphes représentant la largeur de la distribution spectrale décroissent pourtant avec N , et les fits semblent confirmer une décroissance contrôlée par $\log N$. Comme dans le cas de l'application du chat perturbé de la section précédente, la largeur de la distribution semble légèrement inférieure à $(\log N)^{-\frac{1}{2}}$.

4.4.3 Mesures semiclassiques : quelques propriétés élémentaires⁴

Nous avons introduit dans la section 4.2.4 la notion de mesure semiclassique associée à $M_h(a, \kappa)$. Si $a \equiv 1$, on a alors $M_h(a, \kappa) = U(\kappa)$ et la propriété d'Egorov montre rapidement que toute mesure semiclassique est κ -invariante, c'est à dire que μ satisfait l'équation de transport $\kappa^* \mu = \mu$. Cette propriété d'invariance est fondamentale car elle permet d'utiliser les propriétés dynamiques de κ pour obtenir des informations sur la mesure μ . Par exemple, si κ est ergodique pour la mesure de Lebesgue sur \mathbb{T}^2 alors "presque toute" suite d'états propres converge lorsque $\hbar \rightarrow 0$ vers une mesure semiclassique égale à la mesure de Liouville (ou Lebesgue) sur \mathbb{T}^2 : c'est le théorème de Šnirel'man [Šni74], ou théorème d'ergodicité quantique [CdV85], prouvé aujourd'hui pour de nombreux systèmes quantiques fermés.

Si $a \neq 1$, cette propriété d'invariance n'est plus vraie, et l'équation de transport satisfaite par μ doit être modifiée. Appelons λ_h la valeur propre associée à Ψ_h . En insérant deux fois $M_h(a, \kappa)$, on obtient en utilisant la propriété d'Egorov les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \langle \Psi_h, \text{Op}_{\hbar}(f) \Psi_h \rangle &= |\lambda_h|^{-2} \langle \Psi_h U^\dagger \text{Op}_{\hbar}(\bar{a}), \text{Op}_{\hbar}(f) \text{Op}_{\hbar}(a) U \Psi_h \rangle \\ &= |\lambda_h|^{-2} \langle \Psi_h, \text{Op}_{\hbar}((f|a|^2) \circ \kappa) \Psi_h \rangle + \mathcal{O}(\hbar). \end{aligned}$$

Si l'on fait l'hypothèse que $(\Psi_h)_{\hbar>0}$ converge vers une mesure semiclassique, ceci montre que d'une part que $\lim_{\hbar \rightarrow 0} |\lambda_h| = \Lambda$ existe, d'autre part, on en tire la nouvelle équation de transport satisfaite par μ :

$$\forall f \in C^\infty(\mathbb{T}^2), \int f d\mu = \int \frac{|a|^2 f}{\Lambda^2} \circ \kappa d\mu \iff |a|^2 \kappa^* \mu = \Lambda^2 \mu. \quad (4.41)$$

Nous appellerons Λ le taux de décroissance de μ . Cette équation appelle plusieurs commentaires :

1. D'un point de vue strictement classique, peut-on décrire, ou classifier les mesures boréliennes de \mathbb{T}^2 qui satisfont (4.41) ?
2. D'après la définition de Λ , deux séquences de fonctions propres ayant des valeurs propres différentes vont converger vers des mesures semiclassiques différentes. Cependant, le théorème 4.8 montre que la plupart des taux de décroissance d'une mesure semiclassique vaut $\langle a \rangle$. Vu qu'il est possible d'associer à toute orbite périodique de κ une mesure borélienne supportée sur cette orbite et satisfaisant (4.41) avec $\Lambda = \langle a \rangle$, on peut se demander si la mécanique quantique "opère un choix" parmi ces mesures, autrement dit si seulement une partie d'entre elles sont des mesures semiclassiques possibles. Ce type de question est similaire au problème de l'ergodicité quantique pour les systèmes fermés chaotiques, où la mécanique quantique "choisit majoritairement" la mesure de Lebesgue comme mesure semiclassique.

Dans ce qui suit, nous exposons quelques propriétés numériques de localisation de ces mesures. Une étude analytique est en cours mais nous n'avons pas jugé nécessaire de présenter ici ces résultats, qui sont encore largement préliminaires.

4. Ce qui est exposé dans cette section n'a pas fait l'objet d'une publication.

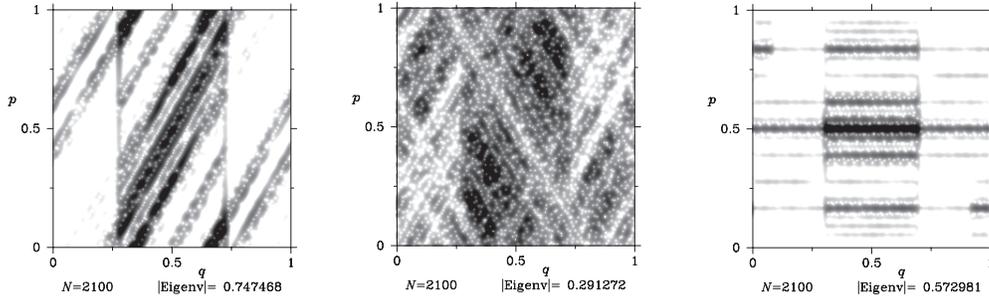


FIGURE 4.8 – Fonctions de Husimi de quelques états propres. L'échelle d'intensité est logarithmique (foncé=intensité élevée). À gauche est représenté l'état propre de plus grand module pour $M_h(a_1, \kappa_C)$. Au centre, un état propre "typique" de $M_h(a_1, \kappa_C)$ de valeur propre $\approx \langle a_1 \rangle$. À droite, l'état propre de plus grand module pour $M_h(a_1, \kappa_B)$.

La figure 4.8 contient trois mesures de Husimi pour l'amortissement a_1 . Des études récentes concernant les états résonants des cavités diélectriques ont montré des états propres de petit taux de décroissance fortement concentrés sur une orbite périodique localisée dans la zone non-amortie ($a \equiv 1$), avec des "fuites" en dehors de cette région le long de la variété instable [LRR⁺04, LLZ⁺07]. Dans le cas où $a = a_1$, nous observons un trou spectral donné par la pression topologique (voir la section précédente), en conséquence de quoi le taux de décroissance Λ est nécessairement inférieur strictement à 1. Ceci exclut donc des mesures semiclassiques portées uniquement sur une orbite périodique localisée dans la région non amortie (car celles-ci seraient alors invariantes et donc $\Lambda = 1$), et plus généralement toute mesure ayant une composante de Dirac sur une telle orbite. Bien que les mesures de Husimi pour des états de petit taux de décroissance soient principalement concentrées dans la région non-amortie (figure 4.8 à gauche pour le chat perturbé, et à droite pour le boulanger), leur support semble être le tore tout entier. De plus, on semble observer une structure fractale le long de la direction instable, comme dans le cas des applications totalement ouvertes [KNPS06]. Concernant les états les plus typiques, c'est à dire de valeur propre de module proche de $\langle a \rangle$, la totalité des mesures de Husimi que l'on peut représenter numériquement présentent des foliations dans les directions stables et instables que l'on observe sur l'image centrale de la figure 4.8. De plus le support de ces mesures semble encore être le tore tout entier. En particulier, il ne semble pas qu'il y ait d'extension claire du théorème de Šnirel'man pour les systèmes amortis dont la dynamique classique est chaotique.

Chapitre 5

Équation des ondes amorties

5.1 Introduction

L'étude de l'amortissement des vibrations de grandes structures (robots, antennes, stations spatiales, etc...) est un problème fondamental pour plusieurs domaines d'application des mathématiques. On peut globalement distinguer deux grands types de questions :

1. Le problème du *contrôle des ondes*. Il consiste la plupart du temps à imposer le comportement d'une solution de l'équation des ondes $\square u = 0$ dans une région du système (bords d'un domaine, ouvert d'une variété...) et à étudier sous quelle conditions les vibrations sont ramenées à 0 au bout d'un certain temps fini.
2. Le problème de la *stabilisation*. Étant donné une équation d'ondes dissipative, on cherche à connaître précisément de quelle manière décroît l'énergie des ondes au cours du temps.

Il y a une vingtaine d'années, l'utilisation judicieuse de l'analyse microlocale par Bardos, Lebeau, Rauch et Taylor a permis d'importantes avancées concernant ces questions [RT75, BLR92]. Dans tous les cas, les démonstrations reposent sur des hypothèses globales concernant la géométrie (ou la dynamique) du problème. Bien souvent, ces conditions concernent le flot hamiltonien engendré par le symbole principal de l'équation aux dérivées partielles étudiée, ce qui fait de l'analyse semiclassique un outil naturel pour aborder ces questions.

Un modèle simple de stabilisation consiste à étudier une équation d'onde dissipative dans un domaine borné de \mathbb{R}^d avec conditions de Dirichlet au bord, ou sur une variété riemannienne. Dans ce travail de thèse, nous nous sommes intéressés au cas d'une variété (M, g) compacte sans bords. Si $a \in C^\infty(M)$ est une fonction réelle, nous avons étudié la stabilisation pour l'équation des ondes amorties sur M , qui s'écrit

$$(\partial_t^2 - \Delta_g + 2a(x)\partial_t)u = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times M \tag{5.1}$$

avec comme conditions initiales

$$\begin{aligned} u(0, x) &= \omega_0(x) \in H^1 \\ \partial_t u(0, x) &= \omega_1(x) \in H^0. \end{aligned}$$

Ici $H^s \equiv H^s(M)$ sont les espaces de Sobolev sur M . Si $a \geq 0$, le terme en $2a\partial_t$ introduit de l'amortissement dans le système, au sens où certaines normes des solutions vont décroître au cours du temps. L'opérateur de Laplace-Beltrami $\Delta_g \equiv \Delta$ a comme expression en coordonnées locales

$$\Delta_g = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \partial_i (g^{ij} \sqrt{\bar{g}} \partial_j), \quad \bar{g} = \det g. \quad (5.2)$$

Nous allons aussi noter

$$d\text{vol} = \sqrt{\bar{g}} dx, \quad \langle u, v \rangle = \int_M u \bar{v} d\text{vol}$$

la mesure riemannienne canonique et le produit scalaire associé.

Hypothèses sur la variété M . Nous allons considérer (M, g) une variété riemannienne compacte, de courbure strictement négative et de dimension $d \geq 2$. Nous supposons pour simplifier que M n'a pas de bords. L'hypothèse sur la courbure implique que le flot géodésique a la propriété d'Anosov sur chaque couche d'énergie de T^*M . Sans perte de généralité, nous supposons que le rayon d'injectivité satisfait $r \geq 2$. Notre seconde hypothèse de travail est de nature dynamique et concerne la pression topologique relativement au flot géodésique sur S^*M . Nous avons vu au chapitre 2 que la pression contient des informations utiles sur les moyennes de Birkhoff des fonctions continues sur S^*M ainsi que sur la "complexité" du flot géodésique. La fonction particulière dont nous allons considérer la pression est directement reliée à la fonction d'amortissement a et au jacobien instable, voir l'exemple 2.5. Soit

$$a^u : \rho \in S^*M \mapsto a^u(\rho) = - \int_0^1 \pi^* a \circ \Phi^s(\rho) ds + \frac{1}{2} \log J^u(\rho) \in \mathbb{R} \quad (5.3)$$

où $J^u(\rho)$ est le Jacobien instable au point ρ au temps 1 défini en (2.2). Nous supposons dans ce travail que la pression topologique de a^u relativement au flot géodésique est négative :

$$\Pr(a^u) < 0. \quad (5.4)$$

La fonction

$$Pr : [0, 1] \ni s \mapsto Pr(s) = \Pr(s \log J^u(\rho))$$

est une fonction décroissante de s qui satisfait $Pr(1) = 0$ (voir [BR75]), et donc si $a \equiv 0$, alors $\Pr(a^u) > 0$. L'équation précédente représente donc une condition sur la fonction a , en fonction du flot géodésique. Les deux hypothèses concernant d'une part la courbure de M et d'autre part la pression de a^u sont de nature globale : ce sont elles qui vont nous permettre de résoudre positivement le problème de la stabilisation.

Le semigroupe d'évolution. Dans tout ce qui suit, nous n'allons considérer que la situation où les ondes sont effectivement amorties, ce qui correspond à prendre $a \geq 0$ avec a non identiquement nulle. Il est utile de reformuler le problème précédent sous la forme d'une équation d'évolution standard en considérant l'opérateur non borné

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ -\Delta_g & -2ia \end{pmatrix} : H^1 \times H^0 \rightarrow H^1 \times H^0 \quad (5.5)$$

de domaine $D(\mathcal{B}) = H^2 \times H^1$. L'équation (5.1) est équivalente à

$$(\partial_t + i\mathcal{B})\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u} = (u_0, u_1) \in H^1 \times H^0. \quad (5.6)$$

Soit $\mathcal{H} = H^1 \times H^0$ l'espace des données de Cauchy. On munit \mathcal{H} du produit scalaire usuel

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{H}} = \langle u_0, v_0 \rangle + \langle \nabla u_0, \nabla v_0 \rangle + \langle u_1, v_1 \rangle$$

et de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ associée. Plus généralement, pour $s > 0$ un nombre positif, nous définissons

$$\mathcal{H}^s = H^{1+s} \times H^s \subset \mathcal{H}.$$

Puisque \mathcal{B} est à résolvante compacte, $\text{Spec } \mathcal{B}$ consiste en une suite discrète de valeurs propres $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Les espaces propres E_n correspondant aux valeurs propres τ_n sont tous de dimension finie, et $\bigoplus_n E_n$ est dense dans \mathcal{H} . En effet, le terme d'amortissement est une perturbation compacte d'un opérateur auto-adjoint à résolvante compacte, voir par exemple [GK69]. Si $\tau \in \text{Spec } \mathcal{B}$, alors il existe $v \in H^1$ tel que

$$u(t, x) = e^{-it\tau} v(x), \quad (5.7)$$

et la fonction u satisfait alors

$$P(\tau)u = 0, \quad \text{où } P(\tau) = -\Delta - \tau^2 - 2ia\tau. \quad (5.8)$$

Il n'est pas difficile de voir que le spectre est confiné dans une bande sous l'axe réel. En effet, si $\tau \in \text{Spec } \mathcal{B}$ alors nous avons clairement $\langle P(\tau)u, u \rangle = 0$ pour un certain $u \in H^1$. En considérant la partie imaginaire de cette équation, on obtient

$$\text{Re}(\tau)\langle au, u \rangle + \text{Re}(\tau)\text{Im}(\tau)\langle u, u \rangle = 0.$$

Si $\text{Re}(\tau) \neq 0$, alors

$$\text{Im}(\tau) \in [-\max a, 0].$$

Si par contre $\tau = i\sigma$ est imaginaire pur, alors

$$\langle -\Delta u, u \rangle + 2\sigma\langle au, u \rangle + \sigma^2\langle u, u \rangle = 0.$$

Puisque $\langle -\Delta u, u \rangle \geq 0$, nous voyons que $\text{Im}(\tau) \in [-2\max a, 0]$. Enfin, il n'y a qu'une seule valeur propre réelle $\tau = 0$, associée aux solutions constantes de (5.1). Enfin, nous rappelons en appendice (dans l'exemple B.7) le résultat suivant :

Proposition 5.1. *L'opérateur $i\mathcal{B}$ est le générateur infinitésimal d'un semigroupe $e^{-it\mathcal{B}}$ fortement continu sur \mathcal{H} , tel que pour tout $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$, $\mathbf{u}(t) = e^{-it\mathcal{B}}\mathbf{u}$ est solution de (5.6). De plus, il existe $C > 0$ tel que*

$$\|e^{-it\mathcal{B}}\|_{\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}} \leq C.$$

5.1.1 Le spectre de l'équation des ondes amorties

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que le spectre de \mathcal{B} est localisé dans une bande sous l'axe réel. Il existe plusieurs résultats dans la littérature concernant la distribution du spectre dans cette bande. La question d'une densité asymptotique de modes a été soulevée par Markus et Matsaev dans [MM82], où il est prouvé la loi de Weyl suivante (également retrouvée plus tard indépendamment par Sjöstrand [Sjö00]) :

$$\text{Card}\{n : 0 \leq \text{Re } \tau_n \leq \lambda\} = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^d \int_{p^{-1}([0,1])} dx d\xi + \mathcal{O}(\lambda^{d-1}). \quad (5.9)$$

Ici, $p = g^x(\xi, \xi)$ est le symbole principal de $-\Delta_g$ et $dx d\xi$ représente la mesure de Liouville sur T^*M . Notons

$$\langle a \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T \pi^* a \circ \Phi^t dt : S^*M \rightarrow \mathbb{R}.$$

Le théorème ergodique de Birkhoff 2.9 dans sa version en temps continu affirme que la limite

$$\langle a \rangle_\infty = \lim_{T \rightarrow +\infty} \langle a \rangle_T$$

existe presque partout sur S^*M pour la mesure de Liouville, et que si l'on note

$$A_+ = \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{S^*M} \langle a \rangle_T, \quad A_- = \lim_{T \rightarrow \infty} \inf_{S^*M} \langle a \rangle_T,$$

alors

$$A_- \leq \text{ess inf} \langle a \rangle_\infty \leq \text{ess sup} \langle a \rangle_\infty \leq A_+.$$

Il est montré dans [Leb93] que pour tout $\epsilon > 0$, au plus un nombre fini de valeurs propres se situent en dehors de $\mathbb{R} + i] - A_+ - \epsilon, -A_- + \epsilon[$. Sous l'hypothèse d'ergodicité du flot géodésique pour la mesure de Liouville, $\text{ess inf} \langle a \rangle_\infty = \text{ess sup} \langle a \rangle_\infty = \bar{a}$, où \bar{a} est la moyenne ergodique de a :

$$\bar{a} = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_0^T a \circ \Phi^t dt, \text{ bien définie presque partout sur } S^*M.$$

Cependant, il se peut que $A_- < \bar{a} < A_+$: ceci se produit par exemple s'il existe une géodésique périodique ne rencontrant pas $\text{supp } a$, nous reviendrons d'ailleurs sur cette situation. Sjöstrand a pu montrer que la plupart des modes sont localisés dans la bande $\mathbb{R} + i[-\text{ess sup} \langle a \rangle_\infty, -\text{ess inf} \langle a \rangle_\infty]$:

Théorème 5.2. [Sjö00] *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte sans bords. Supposons que le flot géodésique sur S^*M soit ergodique pour la mesure de Liouville, et notons comme ci-dessus \bar{a} la moyenne ergodique de a . Alors $\forall \epsilon > 0$,*

$$\text{Card}\{n : \tau_n \in [\lambda, \lambda + 1] + i(\mathbb{R} \setminus [-\text{ess sup} \langle a \rangle_\infty, -\epsilon, -\text{ess inf} \langle a \rangle_\infty, +\epsilon])\} = o(\lambda^{d-1}). \quad (5.10)$$

Par conséquent, si le flot géodésique est ergodique pour le mesure de Liouville, les valeurs propres s'accumulent sur la ligne $\text{Im } z = -\bar{a}$. En effet, au vu de (5.9), on a

$$\text{Card}\{n : \tau_n \in [0, \lambda] + i(\mathbb{R} \setminus [-\bar{a}, -\varepsilon, -\bar{a}, +\varepsilon])\} = o(\lambda^d).$$

Nous avons déjà mentionné ce résultat au chapitre 4 comme étant analogue aux théorèmes 4.7 et 4.8 que nous avons montré pour les applications quantiques partiellement ouvertes. Les valeurs propres de partie imaginaire dans $[\alpha, 0]$, $0 > \alpha > -\bar{a}$ peuvent donc être considérées comme “exceptionnelles”. Ces valeurs propres sont également celles qui ont les parties imaginaires les plus petites : elles correspondent donc (d'après (5.7)) aux modes propres ayant les plus longues durées de vie. Il est donc naturel d'étudier les modes situés dans les bandes du type $\mathbb{R} + i[\alpha, 0]$ avec $-\bar{a} < \alpha < 0$. le premier résultat que nous présentons dans ce travail établit la présence d'un trou spectral (ou bande sans spectre) en dessous de l'axe réel, pourvu que (5.4) soit satisfaite.

Théorème 5.3. (Trou spectral) *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de courbure négative, et $a \in C^\infty(M)$ une fonction positive. Supposons que la pression topologique de a^u relativement au flot géodésique sur S^*M satisfait $\text{Pr}(a^u) < 0$, et soit $\varepsilon > 0$ tel que*

$$\text{Pr}(a^u) + \varepsilon < 0.$$

Alors, il existe $e_0(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $\tau \in \text{Spec } \mathcal{B}$ avec $|\text{Re } \tau| \geq e_0(\varepsilon)$, nous avons

$$\text{Im } \tau \leq \text{Pr}(a^u) + \varepsilon.$$

Un résultat similaire a été obtenu récemment par Nonnenmacher and Zworski [NZ07a] dans le cadre de la diffusion quantique chaotique semiclassique. Pour une classe de hamiltoniens incluant $P(\hbar) = -\hbar\Delta + V$ sur \mathbb{R}^d avec V à support compact, ils ont obtenu une zone sans résonances près de l'énergie E :

$$\exists \delta, \gamma > 0 \text{ tels que } \text{Res}(P(\hbar)) \cap ([E - \delta, E + \delta] - i[0, \gamma\hbar]) = \emptyset \text{ for } 0 < \hbar \leq \hbar_{\delta, \gamma}.$$

Ce résultat est valide pourvu que le flot Φ^t du hamiltonien sur l'ensemble capté K_E à l'énergie E soit hyperbolique, et que la pression topologique du jacobien instable relativement au flot sur K_E soit strictement négatif¹. Nous avons adapté à la situation des ondes amorties plusieurs méthodes présentes dans [NZ07a] pour prouver le théorème 5.3, certaines d'entre elles remontant à [Ana08, AN07]. Notons enfin que le théorème de Nonnenmacher et Zworski, comme d'autres travaux de Burq, Sjöstrand et Zworski [Bur98, Sjö96, SZ99] sur les résonances montrent que souvent, l'équation des ondes amorties présente des propriétés spectrales similaires aux systèmes de diffusion (par des obstacles ou des potentiels), l'ensemble “capté” pouvant s'assimiler au fermé invariant

$$\bigcap_{t \in \mathbb{R}} \{\rho \in S^*M : a(\Phi^t \rho) = 0\}$$

1. En dimension $d = 2$, ceci se produit si la dimension de Hausdorff de K_E est $< \frac{1}{2}$, voir [NZ07a].

et les résonances devant être remplacées par les valeurs propres complexes de \mathcal{B} .

La présence d'un trou spectral en dessous de l'axe réel n'est pas évidente a priori. Lebeau [Leb93] a démontré que si a n'est pas identiquement nulle, les parties imaginaires du spectre ne peuvent pas s'approcher de l'axe réel plus vite qu'un certain taux exponentiel :

$$\exists C > 0 \text{ tel que } \forall \tau \in \text{Spec } \mathcal{B}, \quad \text{Im } \tau \leq -\frac{1}{C} e^{-C|\text{Re } \tau|}.$$

Un exemple est donné dans [Leb93] pour lequel cette situation se produit.

Dans un article récent, N. Anantharaman [Ana09] a étudié les déviations spectrales de \mathcal{B} par rapport à la ligne d'accumulation $\text{Im } z = -\bar{a}$ lorsque le flot est Anosov. Dans le cas d'une courbure négative, elle a obtenu une borne supérieure sur le nombre de modes dont la partie imaginaire est supérieure à $-\bar{a}$:

Théorème 5.4. [Ana09] *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de courbure -1 . Soit $\alpha \in [-\bar{a}, 0[$, et $H(\alpha)$ la fonction définie par*

$$H(\alpha) = \sup\{h_{KS}(\mu), \mu \in \mathcal{M}, \int ad\mu = -\alpha\}$$

ou \mathcal{M} est l'ensemble des mesures Φ^t -invariantes sur S^*M , et h_{KS} représente l'entropie de Kolmogorov-Sinai de μ . Alors

$$\forall c > 0, \quad \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\log \text{Card}\{\tau_n : \text{Re } \tau_n \in [\lambda - c, \lambda + c], \text{Im } \tau_n \geq \alpha\}}{\log \lambda} \leq H(\alpha). \quad (5.11)$$

Une conséquence directe du théorème 5.3 est que le résultat d'Anantharaman n'est pas toujours optimal : en effet, $H(\alpha) \neq 0$ pour tout $\alpha \in [-\bar{a}, 0[$, mais si $\text{Pr}(a^u) < 0$, alors il n'y a pas de spectre dans une bande de taille finie sous l'axe réel, c'est à dire que la limite supérieure dans (5.11) s'annule pour un certain $\alpha = \alpha(a) < 0$.

L'opérateur \mathcal{B} n'étant pas autoadjoint, ses fonctions propres ne forment pas obligatoirement une base de Riesz de \mathcal{H} . Cependant sous l'hypothèse 5.4 nous avons pu montrer que si une solution \mathbf{u} de (5.6) possède des données initiales suffisamment régulières, alors il est possible de développer cette solution sur un nombre fini de fonctions propres dont les valeurs propres sont proches de l'axe réel, modulo une erreur exponentiellement petite en temps :

Théorème 5.5. (Développement en fonctions propres) *Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\text{Pr}(a^u) + \varepsilon < 0$, et $\kappa > \frac{d}{2}$. Il existe $e_0(\varepsilon) > 0$, $n = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ainsi qu'un nombre fini $\tau_0 = 0, \dots, \tau_{n-1}$ de valeurs propres de \mathcal{B} vérifiant*

$$\tau_j \in [-e_0(\varepsilon), e_0(\varepsilon)] + i[\text{Pr}(a^u) + \varepsilon, 0], \quad j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket,$$

telles que pour toute solution $\mathbf{u}(t, x)$ de (5.6) avec comme données initiales $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{H}^\kappa$, nous avons

$$\mathbf{u}(t, x) = \sum_{j=0}^{n-1} e^{-i t \tau_j} \mathbf{u}_j(t, x) + \mathbf{r}_n(t, x), \quad t > 0.$$

Les fonctions $\mathbf{u}_j, \mathbf{r}_n$ satisfont

$$\|\mathbf{u}_j(t, \cdot)\|_{\mathcal{H}} \leq C t^{m_j} \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathcal{H}} \quad \text{and} \quad \|\mathbf{r}_n(t, \cdot)\|_{\mathcal{H}} \leq C_\varepsilon e^{t(\text{Pr}(a^u) + \varepsilon)} \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathcal{H}^\kappa},$$

où m_j est la multiplicité de τ_j , la constante $C > 0$ dépend seulement de M et de a , tandis que $C_\varepsilon > 0$ dépend de M, a et ε .

Un développement similaire est démontré dans [Hit03], où il n'est fait aucune hypothèse particulière sur la courbure de M , mais le contrôle géométrique doit avoir lieu. Nous verrons que le théorème précédent est l'étape principale à franchir en vue d'un résultat sur la décroissance de l'énergie des ondes, ce que nous présentons maintenant.

5.1.2 L'énergie des ondes

Soit u une solution de (5.1) de données initiales $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{H}$. L'énergie de u est définie par

$$E(u, t) = \frac{1}{2} (\|\partial_t u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2).$$

L'énergie $E(u, t)$ est une fonction décroissante du temps :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(u, t) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle u, -\Delta u \rangle + \text{Re} \langle \partial_t u, \partial_t^2 u \rangle \\ &= \text{Re} \langle \partial_t u, -\Delta u + \partial_t^2 u \rangle \\ &= -\text{Re} \langle \partial_t u, 2a \partial_t u \rangle \\ &= -\int_M a |\partial_t u|^2 d\text{vol} < 0. \end{aligned}$$

Soit \mathbf{f} une fonction propre non constante de \mathcal{B} et $f(t, x)$ la première composante de $e^{-it\mathcal{B}} \mathbf{f}$. Il est clair que $E(f, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, puisque le spectre de \mathcal{B} est situé dans le demi plan complexe inférieur. Un argument utilisant la densité de $\bigoplus_n E_n$ dans \mathcal{H} montre que pour toutes données initiales $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{H}$, on a

$$E(t, u) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

On a une "stabilisation faible" : l'énergie décroît, mais on ne sait pas à quelle vitesse. La stabilisation forte consiste à trouver une fonction $S(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ telle que

$$E(u, t) \leq E(u, 0) S(t)$$

pour toutes données initiales $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{H}$. Si une telle fonction S existe, alors il existe aussi $C > 0$ et $\beta > 0$ tel que l'on peut prendre

$$S(t) = C e^{-\beta t}.$$

Par exemple, si le contrôle géométrique est satisfait, il y a stabilisation forte, voir [BLR92].

Nous nous sommes intéressés à la question suivante : étant donné la courbure négative de M et l'hypothèse (5.4), que peut on dire de la stabilisation des ondes ? Nous allons voir qu'on peut apporter une réponse positive au problème de stabilisation dans ce cas, quitte à prendre des données de Cauchy plus régulières. En généralisant légèrement une définition de Lebeau, définissons le meilleur taux de décroissance relativement à la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^s}$ par

$$\rho(s) = \sup\{\beta \in \mathbb{R}_+ : \exists C > 0 \text{ tel que } \forall \omega \in \mathcal{H}^s, E(u, t) \leq C e^{-\beta t} \|\omega\|_{\mathcal{H}^s}\} \quad (5.12)$$

où les solutions u de (5.1) ont été identifiées aux données de Cauchy $\omega \in \mathcal{H}^s$. Dans le cas où $s = 0$, Lebeau a montré que

$$\rho(0) = 2 \min(G, C(\infty)), \quad (5.13)$$

où $G = \inf\{-\operatorname{Im} \tau; \tau \in \operatorname{Spec} \mathcal{B} \setminus \{0\}\}$ est le trou spectral, et

$$C(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{\rho \in T^*M} \frac{1}{t} \int_0^t \pi^* a(\Phi^s \rho) ds \geq 0.$$

Nous voyons que la présence d'un trou spectral sous l'axe réel est d'une importance significative pour l'étude de la décroissance de l'énergie. Cependant, un exemple explicite est donné dans [Leb93], où $G > 0$ tandis que $C(\infty) = 0$, et donc $\rho(0) = 0$. Cette situation particulière provient du fait que le contrôle géométrique² n'est pas satisfait, c'est à dire qu'il existe une géodésique fermée ne rencontrant pas $\operatorname{supp} a$ (ce qui implique $C(\infty) = 0$). Par conséquent, le spectre de \mathcal{B} ne contrôle pas toujours la décroissance de l'énergie, et certaines hypothèses dynamiques peuvent être requises si l'on veut résoudre positivement le problème de la stabilisation. L'hypothèse de contrôle géométrique a été fréquemment utilisée dans la littérature pour obtenir la décroissance de l'énergie. Nous renvoyons à [RT75, BLR92, Leb93, Hit03] pour l'étude de la stabilisation de l'équation des ondes amorties en présence de contrôle géométrique.

Plus récemment, certains travaux se sont penchés sur le problème de la décroissance de l'énergie des ondes lorsque le contrôle géométrique n'est pas satisfait. Dans [BH06], N. Burq et M. Hitrik ont étudié la décroissance de l'énergie des ondes dans des domaines partiellement rectangulaires avec les conditions de Dirichlet au bord : le billard Ω en forme de stade est un exemple de tel domaine. Dans cette situation, l'opérateur \mathcal{B} agit sur $\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, et $D(\mathcal{B}) = (H^2 \cap H_0^1) \times H_0^1$. En supposant que $a > 0$ sur les deux demi-disques (fermés), qui représentent la partie non-rectangulaire de Ω , ils ont obtenu le résultat suivant : pour tout $k > 0$ il existe $C_k > 0$ tel que pour toutes données initiales $\omega \in D(\mathcal{B}^k)$ on a

$$E(u, t)^{\frac{1}{2}} \leq C_k (\log t)^{\frac{k}{2}+1} t^{-\frac{k}{2}} \|\omega\|_{D(\mathcal{B}^k)}.$$

Ainsi, l'énergie décroît polynomialement pour toutes données initiales assez régulières, bien que le contrôle géométrique ne soit pas satisfait puisqu'il existe une famille continue de trajectoires classiques qui ne sont pas amorties (les rayons qui rebondissent perpendiculairement aux bords droits du billard).

2. on dit que le contrôle géométrique est satisfait s'il existe un temps T_0 au delà duquel tout géodésique parcourue à vitesse 1 rencontre le support de a .

Dans le contexte de l'équation des ondes amorties sur une variété compacte, H. Christianson [Chr07] s'est intéressé au cas d'une géodésique fermée hyperbolique en dehors d'un petit voisinage de laquelle le contrôle géométrique a lieu. Dans ce cas, il y a une décroissance sous-exponentielle de l'énergie des ondes : pour tout $\varepsilon > 0$ et toute solution de l'équation des ondes de données initiales $(0, f) \in \mathcal{H}^\varepsilon$, il existe $C > 0$ tel que

$$E(u, t) \leq C e^{-C\sqrt{t}} \|f\|_{\mathcal{H}^\varepsilon}^2.$$

Notre dernier résultat concernant les ondes amorties s'inscrit dans ce type de problématique : comment décroît l'énergie des ondes si le contrôle géométrique n'est pas toujours satisfait ? Pour l'équation des ondes amorties sur une variété M de courbure négative, nous établissons une décroissance exponentielle de l'énergie pour toute solution à données initiales suffisamment régulières sous l'hypothèse (5.4) :

Théorème 5.6. (Décroissance exponentielle de l'énergie) *Soit $\varepsilon > 0$. On note $(\tau_j)_{0 \leq j \leq n(\varepsilon)-1}$ les $n(\varepsilon)$ premières valeurs propres de \mathcal{B} qui satisfont $\text{Im } \tau_j \geq \text{Pr}(a^u) + \varepsilon$. Soit $\kappa > d/2$ et \mathbf{u} une solution de (5.6) de données initiales $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{H}^\kappa$. Posons par convention $\tau_0 = 0$. L'énergie de $E(u, t)$ satisfait*

$$E(u, t) \leq \left(\sum_{j=1}^{n-1} e^{t \text{Im } \tau_j} t^{m_j} C \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathcal{H}} + C_\varepsilon e^{t(\text{Pr}(a^u) + \varepsilon)} \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathcal{H}^\kappa} \right)^2$$

ou m_j représente la multiplicité de τ_j . La constante $C > 0$ dépend seulement de M et de a , tandis que $C_\varepsilon > 0$ dépend de M, a et ε . En particulier,

$$G = \inf_{0 \leq j \leq n(\varepsilon)} |\text{Im } \tau_j| > 0$$

et $\rho(\kappa) = 2 \min(G, |\text{Pr}(a^u) + \varepsilon|) > 0$.

Remarque. Dans notre situation, il se peut que le contrôle géométrique n'ait pas lieu, bien que $\text{Pr}(a^u) < 0$. Dans ce cas, il découle de (5.13) qu'il n'est pas possible d'avoir une décroissance exponentielle de l'énergie pour toutes données initiales dans \mathcal{H} . Cependant, si $\kappa > \frac{d}{2}$ et que nous considérons $\rho(\kappa)$ plutôt que $\rho(0)$, nos résultats montrent que l'on a effectivement une décroissance exponentielle, i.e. $\rho(\kappa) > 0$ tandis que $\rho(0) = 0$.

Il serait donc intéressant d'avoir un exemple concret pour lequel le contrôle géométrique n'est pas satisfait, bien que $\text{Pr}(a^u) < 0$. Nous n'avons pas développé un tel exemple en détail dans notre travail, mais nous concluons cette section en discutant une possible construction. Soit $b \in C^\infty(M)$ une fonction positive non identiquement nulle, satisfaisant $|b| \leq 1$. Considérons maintenant comme amortissement la fonction

$$a = Rb, \quad R > 0.$$

Enfin, comme évoqué plus haut, nous définissons un ensemble "capté", ou non-amorti, par

$$K \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \{\rho \in S^*M : b(\Phi^t \rho) = 0\}.$$

K est un ensemble fermé qui est Φ^t -invariant. En particulier, il est possible de définir la pression topologique relativement au flot géodésique restreint à K , que nous notons $\Pr(\cdot, \Phi^1|_K)$. Si R est très grand, une trajectoire qui croise le support de b “contribue peu” à la pression $\Pr(-Rb + \frac{1}{2} \log J^u, \Phi^1)$ – voir les équations (2.4) et (2.5), car $e^{-R \int_\gamma b}$ est petit. Nous sommes donc tentés de conjecturer que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Pr(-Rb + \frac{1}{2} \log J^u, \Phi^1) = \Pr(\frac{1}{2} \log J^u, \Phi^1|_K). \quad (5.14)$$

Cependant, il existe une infinité de trajectoires amorties (donc en dehors de K) pour lesquelles $e^{-R \int_\gamma b}$ peut être choisi aussi proche de 1 que voulu, en considérant par exemple les trajectoires qui passent au voisinage du bord de $\text{supp } b$. Une bonne connaissance des propriétés topologiques des orbites du flot semble nécessaire pour évaluer la pression $\Pr(-Rb + \frac{1}{2} \log J^u, \Phi^1)$ lorsque R est grand, afin de la comparer à $\Pr(\frac{1}{2} \log J^u, \Phi^1|_K)$.

Ces quelques remarques suggèrent d’étudier la situation suivante. Soit (M, g) une variété compacte de dimension 2, de courbure négative. Soit γ une géodésique périodique, et V_γ un petit voisinage de γ dans M . Soit alors $b \in C^\infty(M)$ comme ci-dessus, telle que $\text{supp } b = \overline{V_\gamma}$. Si V_γ est assez petit, alors la propriété d’expansivité du flot géodésique (voir la section 2.2.3) permet d’affirmer que $K = \gamma$. Or il est connu qu’en dimension 2, on a :

$$\Pr(\frac{1}{2} \log J^u, \Phi^1|_K) < 0 \iff d_H(K) < \frac{1}{2}$$

où $2d_H + 1$ est la dimension de Hausdorff de K , voir par exemple [PS01]. Ceci signifie que si l’ensemble non-amorti K est assez fin, ou “filamentaire”, la pression $\Pr(\frac{1}{2} \log J^u, \Phi^1|_K)$ est négative. Puisque $K = \gamma$, nous avons bien dans ce cas $\Pr(\frac{1}{2} \log J^u, \Phi^1|_\gamma) < 0$, et donc en supposant (5.14), $\Pr(-Rb + \frac{1}{2} \log J^u) < 0$ pour R assez grand.

5.1.3 Réduction semiclassique

Pour obtenir le théorème (5.3) il est plus pratique de se placer dans un cadre semiclassique. D’après l’équation aux valeurs propres (5.8), nous sommes conduits à étudier l’équation

$$P(\tau)u = 0$$

où $\text{Im } \tau = \mathcal{O}(1)$. Pour obtenir un trou spectral sous l’axe réel, il nous faut étudier les parties imaginaires de valeurs propres de partie réelle arbitrairement grandes, puisque $\text{Spec } \mathcal{B}$ est discret et contenu dans une bande sous l’axe réel. Nous introduisons donc un petit paramètre semiclassique $\hbar \in]0, 1]$, de sorte que

$$\tau = \frac{1}{\hbar} + \nu, \quad \text{avec } \nu \in \mathbb{C} \text{ et } |\nu| = \mathcal{O}(1). \quad (5.15)$$

Si nous faisons \hbar tendre vers 0, les valeurs propres τ qui nous intéressent satisfont $\tau \hbar \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} 1$. En posant $\tau = \frac{\lambda}{\hbar}$ et $z = \lambda^2/2$, on obtient :

$$\left(-\frac{\hbar^2 \Delta}{2} - z - i \hbar q_z \right) u = 0, \quad q_z(x) = \sqrt{2za(x)}.$$

De manière équivalente,

$$(\mathcal{P}(z, \hbar) - z)u = 0 \quad (5.16)$$

où $\mathcal{P}(z, \hbar) = -\frac{\hbar^2 \Delta}{2} - i\hbar q_z$. Le paramètre z joue le rôle d'une valeur propre complexe du hamiltonien quantique non-autoadjoint $\mathcal{P}(z, \hbar)$. Il est localisé près de l'énergie $E = 1/2$, alors que $\text{Im } z$ est d'ordre \hbar et représente le "taux de décroissance" du mode. Plus généralement, nous allons prendre z dans un ouvert Ω de la forme $\Omega =]\frac{1}{2} - c_1, \frac{1}{2} + c_1[+ i] - c_2, c_2[$, $c_1, c_2 > 0$ assez grands, et définissons

$$\Sigma_{\frac{1}{2}} = \Sigma_{\frac{1}{2}}(\hbar) = \{z \in \Omega, \exists \Psi \in L^2(M), (\mathcal{P}(z, \hbar) - z)\Psi = 0\}.$$

Nous allons par la suite étudier le spectre de l'opérateur de Schrödinger non-autoadjoint $\mathcal{P}(z, \hbar)$ près de l'énergie $E = \frac{1}{2}$, ainsi que l'équation de Schrödinger associée

$$i\hbar \partial_t \Psi = \mathcal{P}(z, \hbar)\Psi \quad \text{avec } \|\Psi\|_{L^2} = 1. \quad (5.17)$$

L'opérateur \mathcal{P} a pour symbole principal $p(x, \xi) = \frac{1}{2}g^x(\xi, \xi)$ et comme symbole sous-principal $-iq_z$. Notons que le hamiltonien classique $p(x, \xi)$ génère le flot géodésique sur la couche d'énergie $p^{-1}(\frac{1}{2}) = S^*M$. Le propagateur quantique sera noté

$$\mathcal{U}^t \equiv e^{-\frac{it}{\hbar}\mathcal{P}},$$

de sorte que si $\Psi \in L^2(M)$ satisfait (5.17), nous avons $\Psi(t) = \mathcal{U}^t \Psi(0)$. Puisque nous avons supposé que $a \geq 0$, il est vrai que $\|\mathcal{U}^t\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq 1$, $\forall t \geq 0$, voir la section B.2. Si $z \in \Sigma_{\frac{1}{2}}$ et Ψ est telle que (5.16) est vérifiée, le front d'onde semiclassique de Ψ satisfait

$$\text{WF}_{\hbar}(\Psi) \subset S^*M.$$

Ceci vient du fait que Ψ est une fonction propre associée à la valeur propre $\frac{1}{2}$ d'un opérateur pseudodifférentiel dont le symbole principal vaut $p(x, \xi) = \frac{1}{2}g^x(\xi, \xi)$. Nous allons montrer le résultat suivant :

Théorème 5.7. *Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\text{Pr}(a^u) + \varepsilon < 0$. Il existe $\hbar_0 = \hbar_0(\varepsilon)$ tel que*

$$\hbar \leq \hbar_0 \Rightarrow \forall z \in \Sigma_{\frac{1}{2}}, \frac{\text{Im } z}{\hbar} \leq \text{Pr}(a^u) + \varepsilon.$$

Nous remarquons que cette équation implique que $\text{Im } \tau \leq \text{Pr}(a^u) + \varepsilon + \mathcal{O}(\hbar)$ puisque $\tau = \hbar^{-1}\sqrt{2z}$, et donc $\text{Im } \tau = \hbar^{-1}\text{Im } z + \mathcal{O}(\hbar)$. Par remise à l'échelle, il s'ensuit que 5.7 est équivalent au Théorème 5.3.

5.2 Trou spectral

Dans cette section nous montrons comment obtenir le théorème 5.7, en admettant une proposition clé (l'estimée de dispersion hyperbolique, proposition 5.8) qui sera prouvée dans la section 5.4.

5.2.1 Évolution à temps discret

Commençons par expliciter une définition de la pression topologique du flot géodésique sur S^*M . Pour $\delta > 0$, soit $\mathcal{E}^\delta = p^{-1}[\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} + \delta]$ un petit voisinage de la couche d'énergie $p^{-1}(\frac{1}{2})$ où

$$p : T^*M \ni (x, \xi) \mapsto p(x, \xi) = \frac{1}{2}g^x(\xi, \xi).$$

Soit alors $V = \{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un ensemble fini d'ouverts de \mathcal{E}^δ , qui forment un recouvrement de $p^{-1}[\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\delta, \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\delta]$. Pour $T \in \mathbb{N}^*$, on définit le recouvrement raffiné $V^{(T)}$, formé des ouverts

$$V_\beta = \bigcap_{k=0}^{T-1} \Phi^{-k}(V_{b_k}), \quad \beta = b_0 b_1 \dots b_{T-1} \in I^T.$$

Pour simplifier les notations, nous introduisons l'échantillonnage de f suivant un ouvert $V^{(T)}$ en posant

$$\langle f \rangle_{T, \beta} = \sup_{\rho \in V_\beta} \sum_{i=0}^{T-1} f \circ \Phi^i(\rho).$$

On pose alors

$$Z_T(V, f) = \inf_{B_T} \left\{ \sum_{\beta \in B_T} \exp(\langle f \rangle_{T, \beta}) : B_T \subset I^T, \mathcal{E}^{3\delta/4} \subset \bigcup_{\beta \in B_T} V_\beta \right\}.$$

La pression sur $\mathcal{E}^{3\delta/4}$ est définie par

$$\text{Pr}^\delta(f) = \lim_{\text{diam } V \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log Z_T(V, f). \quad (5.18)$$

La pression sur S^*M est alors simplement obtenue par continuité : $\text{Pr}(f) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \text{Pr}^\delta(f)$. Nous choisirons toujours $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$. Notons que l'on a alors $\sqrt{1+2\delta} < r$ où $r = 2$ est le rayon d'injectivité de M . Ceci signifie que deux points de M ne peuvent être reliés que par au plus une géodésique de longueur $\leq \sqrt{1+2\delta}$.

Afin de rendre les limites apparaissant dans (5.18) plus faciles à traiter, nous fixons $\varepsilon > 0$ tel que $\text{Pr}(a^u) + \varepsilon < 0$. Nous choisissons alors l'épaisseur de la couche d'énergie $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$ assez petite, de sorte que $|\text{Pr}(a^u) - \text{Pr}^\delta(a^u)| \leq \varepsilon/2$. Pour un recouvrement ouvert $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ (de diamètre arbitrairement petit dépendant de ε), il existe un temps t_0 dépendant du recouvrement \mathcal{V} tel que

$$\left| \frac{1}{t_0} \log Z_{t_0}(\mathcal{V}, a^u) - \text{Pr}^\delta(a^u) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent, il existe un sous-ensemble de suites d'indices de longueur t_0 que nous nommerons $\mathcal{B}_{t_0} \subset \mathcal{A}^{t_0}$ tel que $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{B}_{t_0}}$ est un recouvrement ouvert de $\mathcal{E}^{3\delta/4}$ et satisfait

$$\sum_{\beta \in \mathcal{B}_{t_0}} \exp(\langle a^u \rangle_{t_0, \beta}) \leq \exp\left(t_0(\text{Pr}^\delta(a^u) + \frac{\varepsilon}{2})\right) \leq \exp(t_0(\text{Pr}(a^u) + \varepsilon)). \quad (5.19)$$

Nous noterons par la suite $\{\mathcal{W}_\beta\}_{\beta \in \mathcal{B}_{t_0}} \equiv \{\mathcal{V}_\beta\}_{\beta \in \mathcal{B}_{t_0}}$ le sous-recouvrement de $\mathcal{V}^{(t_0)}$ tel que (5.19) est satisfaite. Notons bien que le diamètre de \mathcal{V} , t_0 et donc \mathcal{W} dépendent de ε .

Soit $\{\varphi_\beta\}_{\beta \in \mathcal{B}_{t_0}}$ une partition de l'unité adaptée à \mathcal{W} , de manière à ce que sa quantification de Weyl vérifie $\varphi_\beta^w \stackrel{\text{def}}{=} \Pi_\beta$ et

$$\text{WF}_\hbar(\Pi_\beta) \subset \mathcal{E}^\delta, \quad \Pi_\beta^* = \Pi_\beta, \quad \sum_{\beta} \Pi_\beta = \mathbb{1} \quad \text{microlocalement près de } \mathcal{E}^{\delta/2}.$$

Nous allons aussi considérer une partition de l'unité $\{\tilde{\varphi}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ adaptée au recouvrement \mathcal{V} , et sa quantification de Weyl $\tilde{\Pi} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\varphi}^w$. Dans ce qui suit, nous allons plus particulièrement nous intéresser au propagateur \mathcal{U}^{Nt_0+1} au temps $Nt_0 + 1$, avec

$$N = T \log \hbar^{-1}, \quad T > 0.$$

Il est important de noter que T peut être arbitrairement grand, mais reste fixé par rapport à \hbar . Le propagateur \mathcal{U}^{Nt_0} est décomposé en insérant $\sum_{\beta \in \mathcal{B}_{t_0}} \Pi_\beta$ à chaque pas de temps de longueur t_0 . En posant d'abord $\mathcal{U}_\beta = \mathcal{U}^{t_0} \Pi_\beta$, nous avons (microlocalement près de $\mathcal{E}^{\delta/2}$) l'égalité $\mathcal{U}^{t_0} = \sum_{\beta} \mathcal{U}_\beta$, et donc

$$\mathcal{U}^{Nt_0} = \sum_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N \in \mathcal{B}_{t_0}} \mathcal{U}_{\beta_N} \dots \mathcal{U}_{\beta_1}, \quad \text{près de } \mathcal{E}^{\delta/2}. \quad (5.20)$$

5.2.2 Preuve du théorème 5.7

Commençons par choisir $\chi \in C_0^\infty(T^*M)$ telle que $\text{supp } \chi \Subset \mathcal{E}^\delta$ et $\chi \equiv 1$ sur $\mathcal{E}^{\delta/4}$. En appliquant l'inégalité de Cauchy Schwarz, nous obtenons immédiatement

$$\|\mathcal{U}^{Nt_0+1} \text{Op}_\hbar(\chi)\| \leq \sum_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N \in \mathcal{B}_{t_0}^N} \|\mathcal{U}_{\beta_N} \dots \mathcal{U}_{\beta_1} \mathcal{U}^1 \text{Op}_\hbar(\chi)\| + \mathcal{O}_{L^2 \rightarrow L^2}(\hbar^\infty). \quad (5.21)$$

Sauf mention contraire, les normes $\|\cdot\|$ désignent toujours les normes $\|\cdot\|_{L^2 \rightarrow L^2}$ ou $\|\cdot\|_{L^2}$, suivant le contexte. La preuve du théorème (5.7) repose sur le résultat intermédiaire suivant, dont nous esquisserons en bonne partie la preuve dans la section 5.4.

Proposition 5.8. (Estimée de dispersion hyperbolique) *Soit $\varepsilon > 0$, et δ, \mathcal{V}, t_0 comme dans la section 5.2.1. Pour $N = Tt_0 \log \hbar^{-1}$, $T > 0$, choisissons une séquence β_1, \dots, β_N d'indices et la séquence $\mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_{\beta_N}$ correspondante des ouverts du recouvrement raffiné \mathcal{W} . Finalement, soit $\text{Op}_\hbar(\chi)$ comme ci-dessus. Il existe une constante $C > 0$ et $\hbar_0(\varepsilon) \in]0, 1[$ telle que*

$$\hbar \leq \hbar_0 \Rightarrow \|\mathcal{U}^{t_0} \Pi_{\beta_N} \dots \mathcal{U}^{t_0} \Pi_{\beta_1} \mathcal{U}^1 \text{Op}_\hbar(\chi)\| \leq C \hbar^{-d/2} \prod_{j=1}^N e^{\langle a^u \rangle_{t_0, \beta_j}}$$

ou $\langle a^u \rangle_{t_0, \beta} = \sup_{\rho \in \mathcal{W}_\beta} \sum_{j=0}^{t_0-1} a^u \circ \Phi^j(\rho)$. La constante C dépend seulement de la variété M .

Nous tirons de cette proposition la conséquence suivante :

Corollaire 5.9. *Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\Pr(a^u) + \varepsilon < 0$. Il existe $C > 0$ et $\hbar_0(\varepsilon) \in]0, 1[$ tels que*

$$\hbar \leq \hbar_0 \Rightarrow \|\mathcal{U}^{Nt_0+1} \text{Op}_{\hbar}(\chi)\| \leq C\hbar^{-\frac{d}{2}} e^{Nt_0(\Pr(a^u)+\varepsilon)}$$

La constante C dépend seulement de M .

Démonstration. Étant donné $\varepsilon > 0$, nous choisissons $\delta, \mathcal{V}, t_0, \mathcal{W}$ comme dans la proposition 5.8. En utilisant (5.21), nous avons donc

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U}^{Nt_0+1} \text{Op}_{\hbar}(\chi)\| &\leq C\hbar^{-\frac{d}{2}} \sum_{\beta_1 \dots \beta_N \in \mathcal{B}_{t_0}^N} \left(\prod_{j=1}^N e^{\langle a^u \rangle_{t_0, \beta_j}} + \mathcal{O}(\hbar^\infty) \right) \\ &\leq C\hbar^{-\frac{d}{2}} \left(\sum_{\beta \in \mathcal{B}_{t_0}} e^{\langle a^u \rangle_{t_0, \beta}} \right)^N + \mathcal{O}(\hbar^\infty). \end{aligned}$$

Pour obtenir la deuxième ligne, il suffit de remarquer que le nombre de termes dans la somme est borné par $(\text{Card } \mathcal{B}_{t_0})^N = \hbar^{-T \log \text{Card } \mathcal{B}_{t_0}}$. À cause du choix de ε et δ , nous pouvons utiliser l'équation (5.19), et obtenir alors pour \hbar assez petit

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U}^{Nt_0+1} \text{Op}_{\hbar}(\chi)\| &\leq C\hbar^{-\frac{d}{2}} e^{Nt_0(\Pr^\delta(a^u)+\varepsilon/2)} \\ &\leq C\hbar^{-\frac{d}{2}} e^{Nt_0(\Pr(a^u)+\varepsilon)} \end{aligned}$$

ou $C > 0$ dépend seulement de la variété M . □

Montrons comment ce résultat implique le théorème 5.7. Supposons que Ψ satisfait (5.16), ce qui implique que $\|\mathcal{U}^{Nt_0+1}\Psi\| = e^{\frac{(Nt_0+1)\text{Im } z}{\hbar}}$. Remarquons que l'on a

$$\text{Op}_{\hbar}(\chi)\Psi = \Psi + \mathcal{O}(\hbar^\infty)$$

puisque $\text{WF}_{\hbar}(\Psi) \subset S^*M$, et donc

$$\|\mathcal{U}^{Nt_0+1} \text{Op}_{\hbar}(\chi)\Psi\| = \|\mathcal{U}^{Nt_0+1}\Psi\| + \mathcal{O}(\hbar^\infty) = e^{(Nt_0+1)\text{Im } z} + \mathcal{O}(\hbar^\infty).$$

Il découle du corollaire que

$$e^{\frac{Nt_0+1}{\hbar} \text{Im } z} \leq C\hbar^{-\frac{d}{2}} e^{Nt_0(\Pr(a^u)+\varepsilon)} + \mathcal{O}(\hbar^m),$$

ou m peut être pris arbitrairement grand. En prenant le logarithme, ceci conduit à

$$\frac{\text{Im } z}{\hbar} \leq \frac{\log C}{Nt_0} - \frac{d}{2Nt_0} \log \hbar + \Pr(a^u) + \varepsilon + \mathcal{O}\left(\frac{1}{Nt_0}\right).$$

Mais pour $\varepsilon > 0$, nous pouvons prendre $N = T \log \hbar^{-1}$ avec T arbitraire. Ainsi, il existe $\hbar_0(\varepsilon) \in]0, 1[$ et T suffisamment grand, tel que

$$\hbar \leq \hbar_0(\varepsilon) \Rightarrow \frac{\text{Im } z}{\hbar} \leq \Pr(a^u) + 2\varepsilon.$$

Puisque le paramètre ε peut être choisi aussi petit que voulu, ceci prouve le théorème 5.7.

5.3 Développement en valeurs propres et décroissance de l'énergie

5.3.1 Estimées de résolvantes

Pour montrer le développement en valeurs propres du propagateur, ainsi que la décroissance de l'énergie, nous allons utiliser fortement la relation qui existe entre le semigroupe d'évolution \mathcal{U}^t et la résolvante du générateur associé [BZ01, Hit03], voir également le théorème B.3. On note

$$Q(z, \hbar) = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta - z - i\hbar\sqrt{2z}a(x) = \mathcal{P}(z, \hbar) - z.$$

La proposition suivante établit une borne polynômiale pour la résolvante dans une bande de largeur $|\operatorname{Pr}(a^u) + \varepsilon|$ sous l'axe réel, dans la limite semiclassique. Ceci constitue l'étape principale en direction des théorèmes 5.5 et 5.6. La méthode présentée ici s'inspire de [NZ07b] où des estimées comparables sont obtenues dans le cadre de la diffusion chaotique :

Proposition 5.10. *Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\operatorname{Pr}(a^u) + \varepsilon < 0$, et $z = \frac{1}{2} + \hbar\zeta$, avec $|\zeta| = \mathcal{O}(1)$ satisfaisant*

$$\operatorname{Pr}(a^u) + \varepsilon \leq \operatorname{Im} \zeta \leq 0.$$

Il existe $\hbar_0(\varepsilon) > 0$, $C_\varepsilon > 0$ dépendant de M, a et ε tel que

$$\hbar \leq \hbar_0(\varepsilon) \Rightarrow \|Q(z, \hbar)^{-1}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C_\varepsilon \hbar^{-1 - \frac{d}{2}} \log \hbar^{-1}.$$

La preuve de ce résultat consiste essentiellement à vérifier que

$$\int_0^{T \log \hbar^{-1}} \mathcal{U}^t e^{-\frac{zt}{\hbar}} \operatorname{Op}_\hbar(\chi) dt$$

est "proche" de la résolvante sur la couche d'énergie $E = \frac{1}{2}$, et à utiliser le corollaire 5.9 sur la décroissance du semigroupe pour estimer l'intégrale ci-dessus en norme L^2 . Les détails sont exposés dans [Sch09a]. Il est alors aisé de transposer ces résultats en terme du paramètre τ . Nous avons d'une part

$$P(\tau) = -\Delta - \tau^2 - 2ia\tau \equiv \frac{1}{\hbar^2} Q(z, \hbar).$$

Posons $R(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} P(\tau)^{-1}$. L'opérateur $R(\tau)$ est directement relié à la résolvante $(\tau - \mathcal{B})^{-1}$: un calcul direct montre en effet que

$$(\tau - \mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix} R(\tau)(-2ia - \tau) & -R(\tau) \\ R(\tau)(2ia\tau - \tau^2) & -R(\tau)\tau \end{pmatrix}.$$

Proposition 5.11. *Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\text{Pr}(a^u) + \varepsilon < 0$. Soit $\tau \in \mathbb{C} \setminus \text{Spec } \mathcal{B}$ avec $\text{Pr}(a^u) + \varepsilon \leq \text{Im } \tau < 0$. Posons $\langle \tau \rangle = (1 + |\tau|^2)^{\frac{1}{2}}$ et $\kappa > d/2$ une constante fixée. Il existe $C > 0$ dépendant de M, a et ε telle que*

$$\begin{aligned} (i) \quad & \|R(\tau)\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C_\varepsilon \langle \tau \rangle^{-1 + \frac{d}{2}} \log \langle \tau \rangle \\ (ii) \quad & \|R(\tau)\|_{L^2 \rightarrow H^2} \leq C_\varepsilon \langle \tau \rangle^{1 + \frac{d}{2}} \log \langle \tau \rangle \\ (iii) \quad & \|R(\tau)\|_{H^\kappa \rightarrow H^1} \leq C_\varepsilon \\ (iv) \quad & \|\tau R(\tau)\|_{H^\kappa \rightarrow H^0} \leq C_\varepsilon. \end{aligned}$$

Le point (i) est une conséquence directe de la proposition 5.10 après mise à l'échelle $\hbar \rightarrow \tau$. Les autres points (ii) – (iv) s'obtiennent à l'aide d'arguments classiques d'interpolation, voir [Sch09a].

5.3.2 Développement en valeurs propres

Nous prouvons maintenant le théorème 5.5. Fixons $\varepsilon > 0$ tel que $\text{Pr}(a^u) + \varepsilon < 0$. D'après le théorème 5.3, nous savons que

$$\text{Card}(\text{Spec } \mathcal{B} \cap (\mathbb{R} + i[\text{Pr}(a^u) + \varepsilon, 0])) \stackrel{\text{def}}{=} n(\varepsilon) < \infty.$$

Par conséquent, il existe $e_0(\varepsilon) > 0$ tel que $\text{Spec } \mathcal{B} \cap (\mathbb{R} + i[\text{Pr}(a^u) + \varepsilon]) \subset \Omega$, où

$$\Omega = \Omega(\varepsilon) = [-e_0, e_0] + i[\text{Pr}(a^u) + \varepsilon, 0].$$

Nous appelons donc $\{\tau_0, \dots, \tau_{n(\varepsilon)-1}\} = \text{Spec } \mathcal{B} \cap \Omega$, et posons par convention $\tau_0 = 0$. Définissons comme ci-dessus $\text{Pr}(a^u)^+ = \text{Pr}(a^u) + \varepsilon$. Puisque nous sommes intéressés par les valeurs propres qui satisfont $\tau \in \Omega$, nous introduisons les projecteurs spectraux sur les espaces propres généralisés E_j pour $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$:

$$\Pi_j = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma_j} (\tau - \mathcal{B})^{-1} d\tau, \quad \Pi_j \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, D(\mathcal{B}^\infty)),$$

où γ_j sont de petits cercles centrés en τ_j . Nous notons aussi

$$\Pi = \sum_{j=0}^n \Pi_j$$

la projection spectrale sur $\bigoplus_{j=0}^n E_j$. Soit maintenant $\omega = (\omega_0, \omega_1)$ dans \mathcal{H}^κ . Près d'un pôle τ_j de $(\tau - \mathcal{B})^{-1}$, nous avons

$$(\tau - \mathcal{B})^{-1} = \frac{\Pi_j}{\tau - \tau_j} + \sum_{k=2}^{m_j} \frac{(\mathcal{B} - \tau_j)^{k-1} \Pi_j}{(\tau - \tau_j)^k} + H_j(\tau)$$

ou H_j est un opérateur dépendant de τ de manière holomorphe dans un voisinage de τ_j , et m_j est la multiplicité de τ_j . Puisque $\Pi \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, D(\mathcal{B}^\infty))$, nous avons la représentation intégrale suivante pour $e^{-it\mathcal{B}} \Pi \omega$, avec convergence absolue dans \mathcal{H} (cf. théorème B.9) :

$$e^{-it\mathcal{B}} \Pi \omega = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty+i\alpha}^{+\infty+i\alpha} e^{-it\tau} (\tau - \mathcal{B})^{-1} \Pi \omega d\tau, \quad t > 0, \alpha > 0. \quad (5.22)$$

L'intégrand du membre de droite a des pôles situés en τ_j , $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, de sorte que

$$e^{-it\mathcal{B}} \Pi \omega = \sum_j e^{-it\tau_j} p_{\tau_j}(t) \omega \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j e^{-it\tau_j} \mathbf{u}_j(t),$$

où

$$p_{\tau_j}(t) = \Pi_j + \sum_{k=2}^{m_j} \frac{(-it)^{k-1}}{(k-1)!} (\mathcal{B} - \tau_j)^{k-1} \Pi_j.$$

Les opérateurs $p_{\tau_j}(t)$ apparaissant dans les résidus sont donc des polynômes en t , de degré au plus m_j , prenant leur valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}, D(\mathcal{B}^\infty))$. Il s'ensuit que pour $C > 0$ dépendant seulement de M et de a ,

$$\|\mathbf{u}_j(t)\|_{\mathcal{H}} \leq C t^{m_j} \|\omega\|_{\mathcal{H}}.$$

Le terme de reste apparaissant dans 5.5 est maintenant identifié, il s'agit de :

$$\mathbf{r}_n(t) = e^{-it\mathcal{B}} (1 - \Pi) \omega.$$

Pour terminer la preuve, il nous faut donc évaluer $\|\mathbf{r}_n\|_{\mathcal{H}}$. Considérons la solution $u(t, x)$ de (5.1) avec données initiales $\mathbf{u} = (u_0, u_1) = (1 - \Pi) \omega$, avec $\omega \in \mathcal{H}^\kappa$, $\kappa \geq d/2$. On définit $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq \chi \leq 1$, telle que $\chi = 0$ pour $t \leq 0$ et $\chi = 1$ pour $t \geq 1$. Si nous posons $v = \chi u$, nous obtenons

$$(\partial_t^2 - \Delta + 2a\partial_t)v = g_1 \quad (5.23)$$

où

$$g_1 = \chi'' u + 2\chi' \partial_t u + 2a\chi' u. \quad (5.24)$$

Notons aussi que $\text{supp } g_1 \subset [0, 1] \times M$, et $v(t) = 0$ pour $t \leq 0$. Notons la transformée de Fourier inverse en temps par

$$\mathcal{F}_{t \rightarrow -\tau} : u \mapsto \check{u}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\tau t} u(t) dt.$$

En appliquant $\mathcal{F}_{t \rightarrow -\tau}$ (au sens des distributions) des deux côtés de (5.23) conduit à

$$P(\tau) \check{v}(\tau, x) = \check{g}_1(\tau, x).$$

Nous remarquons alors que $R(\tau) \check{g}_1(\tau, x)$ est la première composante de

$$i(\tau - \mathcal{B})^{-1} \mathcal{F}_{t \rightarrow -\tau} (\chi'(t)(u, i\partial_t u)).$$

Des propriétés de Π , il est clair que l'opérateur $(\tau - \mathcal{B})^{-1}(1 - \Pi)$ dépend de manière holomorphe de τ dans le demi-plan $\text{Im } \tau \geq \text{Pr}(a^u)^+$. Puisque $(u, i \partial_t u) = e^{-it\mathcal{B}}(1 - \Pi)\omega$, nous concluons que $i(\tau - \mathcal{B})^{-1}\mathcal{F}_{t \rightarrow -\tau}(\chi'(t)(u, i \partial_t u))$ dépend aussi holomorphiquement de τ dans le demi-plan $\text{Im } \tau \geq \text{Pr}(a^u)^+$. Ainsi, $\check{v}(\tau, x) = R(\tau)\check{g}_1(\tau, x)$ et une application de la formule de Parseval conduit à

$$\begin{aligned} \|e^{-t\text{Pr}(a^u)^+} v\|_{L^2(\mathbb{R}_+, H^1)} &= \|\check{v}(\cdot + i\text{Pr}(a^u)^+)\|_{L^2(\mathbb{R}, H^1)} \\ &= \|R(\cdot + i\text{Pr}(a^u)^+)\check{g}_1(\cdot + i\text{Pr}(a^u)^+)\|_{L^2(\mathbb{R}, H^1)} \\ &\leq C_\varepsilon \|\check{g}_1(\cdot + i\text{Pr}(a^u)^+)\|_{L^2(\mathbb{R}, H^\kappa)} \\ &\leq C_\varepsilon \|g_1\|_{L^2(\mathbb{R}_+, H^\kappa)}, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la proposition 5.11. Le terme de la dernière ligne peut être contrôlé par les données initiales : de (5.24), nous tirons

$$\|g_1\|_{L^2(\mathbb{R}_+, H^\kappa)} \leq C (\|u\|_{L^2([0,1]; H^\kappa)} + \|\partial_t u\|_{L^2([0,1]; H^\kappa)}). \quad (5.25)$$

Étudions un peu plus en détail le terme $\|u\|_{L^2([0,1]; H^\kappa)}$. Par un calcul direct,

$$\partial_t \|u\|_{\mathcal{H}^\kappa}^2 \leq C (\|u\|_{H^\kappa}^2 + \|\partial_t u\|_{H^\kappa}^2 + \|\nabla u\|_{H^\kappa}^2).$$

L'inégalité de Gronwall pour $t \in [0, 1]$ montre que

$$\begin{aligned} \|u(t, \cdot)\|_{H^\kappa}^2 &\leq C \left(\|u(0, \cdot)\|_{H^\kappa}^2 + \int_0^t (\|\partial_s u(s)\|_{H^\kappa}^2 + \|\nabla u(s)\|_{H^\kappa}^2) ds \right) \\ &\leq C \|\omega\|_{\mathcal{H}^\kappa}^2, \end{aligned}$$

puisque la κ -énergie

$$E^\kappa(t, u) = \frac{1}{2} (\|\partial_t u\|_{H^\kappa}^2 + \|\nabla u\|_{H^\kappa}^2)$$

est aussi une fonction décroissante du temps t . Revenant à (5.25), nous voyons que $\|g_1\|_{L^2(\mathbb{R}_+, H^\kappa)} \leq C \|\omega\|_{\mathcal{H}^\kappa}$ et donc,

$$\|e^{-t(\text{Pr}(a^u)+\varepsilon)} v\|_{L^2(\mathbb{R}_+, H^1)} \leq C_\varepsilon \|\omega\|_{\mathcal{H}^\kappa}.$$

C'est la décroissance exponentielle que nous cherchons, mais sous forme intégrée. Il est maintenant facile de voir que

$$\|u(t, \cdot)\|_{H^1} \leq C_\varepsilon e^{t(\text{Pr}(a^u)+\varepsilon)} \|\omega\|_{\mathcal{H}^\kappa}.$$

On peut vérifier que la même propriété est valide pour $\partial_t u$ (voir [Sch09a, Sec. 3.2] pour les détails). En groupant les résultats, on parvient à

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathcal{H}} \leq C_\varepsilon e^{t(\text{Pr}(a^u)+\varepsilon)} \|\omega\|_{\mathcal{H}^\kappa}$$

et ceci conclut la preuve du théorème 5.5.

5.3.3 Décroissance en énergie

Ce paragraphe est consacré à la preuve du théorème 5.6, qui établit la décroissance en énergie. C'est une conséquence immédiate du lemme suivant, qui montre que l'énergie peut être contrôlée par la norme H^1 de u , pour $t \geq 2$:

Lemme 5.12. *Il existe $C > 0$ telle que pour toute solution u de (5.1) et $E(u, t)$ la fonctionnelle d'énergie associée, on ait :*

$$E(u, T) \leq C \|u\|_{L^2([T-2, T+1]; H^1)}^2, \quad T \geq 2.$$

Ce résultat est classique, voir [EZ] ou [Sch09a, Lem. 9] pour une preuve. Le théorème 5.6 est une conséquence directe de ce lemme et du théorème 5.5. Soit $u_j(t, x)$ et $r_n(t, x)$ les premières composantes de $p_{\tau_j}(t)\omega$ et $e^{-itB}(1 - \Pi)\omega$ respectivement. Nous avons vu plus haut que

$$u(t, x) = \sum_{j=0}^n e^{-it\tau_j} u_j(t, x) + r_n(t, x)$$

avec $\|u_j(t, \cdot)\|_{H^1} \leq Ct^{m_j} \|\omega\|_{\mathcal{H}^\kappa}$, et $\|r_n(t, \cdot)\|_{H^1} \leq C_\varepsilon e^{t(\text{Pr}(a^u) + \varepsilon)} \|\omega\|_{\mathcal{H}^\kappa}$. Appellons E_0 l'espace propre correspondant à la valeur propre $\tau_0 = 0$. Supposons d'abord que la projection de ω sur E_0 s'annule, i.e. $\Pi_0\omega = 0$. Alors, par le lemme précédent, on a

$$E(u, t)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{j=1}^n e^{t \text{Im} \tau_j} C \|u_j(t, x)\|_{H^1} + C_\varepsilon e^{t(\text{Pr}(a^u) + \varepsilon)} \|\omega\|_{\mathcal{H}^\kappa}.$$

Ceci montre le théorème 5.6 lorsque $\Pi_0\omega = 0$. Mais le cas général s'ensuit facilement : en effet, $\tilde{u}(t, x) = u(t, x) - \Pi_0\omega$ a bien la décroissance exponentielle attendue, et $E(\tilde{u}, t) = E(u, t)$ puisque $\Pi_0\omega$ est constant.

5.4 Estimée de dispersion hyperbolique

Dans cette section nous décrivons la quasi-totalité de la preuve de la proposition 5.8. Soit $\varepsilon, \delta, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ et $\text{Op}_\hbar(\chi)$ comme dans la section 5.2. Nous posons aussi $N = T \log \hbar^{-1}$, $T > 0$.

5.4.1 Décomposition en états lagrangiens élémentaires

Souvenons nous que $\mathcal{W}_\beta \equiv \mathcal{W}_{b_0 \dots b_{t_0-1}}$ dans le recouvrement ouvert \mathcal{W} a la propriété

$$\Phi^k(\mathcal{W}_\beta) \subset \mathcal{V}_{b_k}, \quad k \in \llbracket 0, t_0 - 1 \rrbracket \quad (5.26)$$

pour une certaine séquence $b_0, b_1, \dots, b_{t_0-1}$. À toute séquence $\beta_1 \dots \beta_N$ d'ouverts \mathcal{W}_{β_k} nous associons une séquence $\gamma_1, \dots, \gamma_{N t_0}$ d'ouverts $\mathcal{V}_{\gamma_k} \subset \mathcal{V}$ tels que

$$\Phi^k(\mathcal{W}_{\beta_i}) \subset \mathcal{V}_{\gamma_{(i-1)t_0+k+1}} \quad k \in \llbracket 0, t_0 - 1 \rrbracket.$$

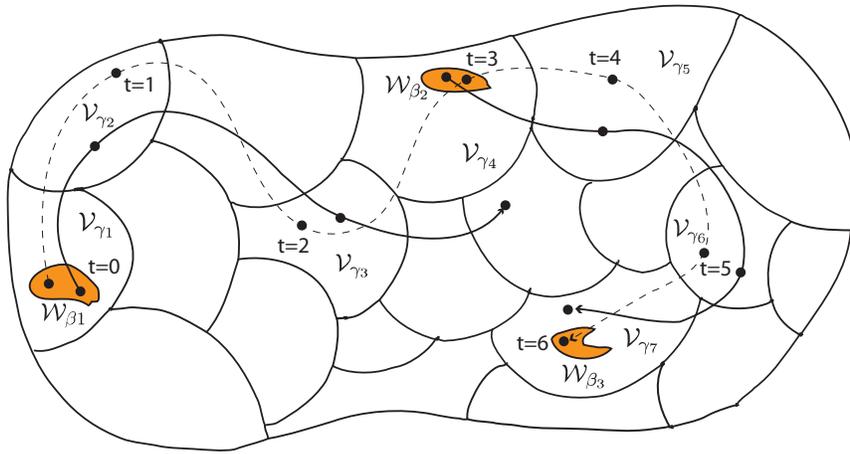


FIGURE 5.1 – Exemple de séquences d'évolution dans le cas où $t_0 = 3$ et $N = 3$. Nous avons représenté schématiquement une portion de \mathcal{E}^δ recouverte d'ouverts de \mathcal{V} ainsi que trois ouverts du recouvrement raffiné \mathcal{W} . Les points de \mathcal{W}_{β_1} sont dans \mathcal{V}_{γ_1} au temps 0, puis dans \mathcal{V}_{γ_2} au temps 1, etc. Il n'est pas obligatoire qu'un point $\rho \in \mathcal{W}_{\beta_i}$ se trouve dans $\mathcal{W}_{\beta_{i+1}}$, ni même dans $\mathcal{V}_{\gamma_{it_0+1}} \supset \mathcal{W}_{\beta_{i+1}}$ après une évolution pendant un temps $t_0 = 3$ (trajectoires en traits pleins). Cependant, à cause des projections successives, seules les séquences telles qu'il existe des points de \mathcal{W}_{β_1} qui visitent les ouverts \mathcal{W}_{β_i} aux temps $(i-1)t_0$ pour $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ vont contribuer significativement à la somme (5.21) (trajectoire en pointillés).

Ainsi, tout point de \mathcal{W}_{β_i} visite les ouverts $\mathcal{V}_{\gamma_{(i-1)t_0+1}}, \dots, \mathcal{V}_{\gamma_{(i-1)t_0+t_0}}$ aux temps $0, \dots, t_0 - 1$, voir la figure 5.1.

Nous décomposons maintenant chaque évolution de longueur t_0 dans (5.20) en insérant des projecteurs quantiques supplémentaires. Pour unifier les notations, nous définissons pour $j \in \llbracket 1, Nt_0 \rrbracket$ les projecteurs suivant, ainsi que les ouverts correspondants dans T^*M :

$$P_{\gamma_j} = \begin{cases} \Pi_{\beta_k} & \text{if } j - 1 = kt_0, k \in \mathbb{N} \\ \tilde{\Pi}_{\gamma_j} & \text{if } j - 1 \neq 0 \pmod{t_0} \end{cases}, \quad V_{\gamma_j} = \begin{cases} \mathcal{W}_{\beta_k} & \text{if } j - 1 = kt_0, k \in \mathbb{N} \\ \mathcal{V}_{\gamma_j} & \text{if } j - 1 \neq 0 \pmod{t_0}. \end{cases} \quad (5.27)$$

Nous notons aussi

$$F_{\gamma_j} = \begin{cases} \varphi_{\beta_k} & \text{if } j - 1 = kt_0, k \in \mathbb{N} \\ \tilde{\varphi}_{\gamma_j} & \text{if } j - 1 \neq 0 \pmod{t_0}. \end{cases}$$

la fonction telle que $\text{supp } F_{\gamma_j} \subset V_{\gamma_j}$ et $P_{\gamma_j} = F_{\gamma_j}^w$.

Introduisons une notation concernant les constantes que nous allons rencontrer dans les diverses estimées qui vont suivre. Soit $\ell, K \in \mathbb{N}$ deux paramètres (indépendants de \hbar), et $e_1, e_2, e_3 > 0$ des nombres fixés. Pour une constante C dépendant de M et des dérivées de χ, a, Φ^t (pour t borné) jusqu'à l'ordre $e_1\ell + e_2K + e_3$, nous écrivons $C^{(\ell, K)}(M, \chi)$, ou simplement $C^{(K)}(M, \chi)$ si un seul paramètre est impliqué. Si une constante C dépend aussi des fonctions cutoff F_{γ_j} et de leurs dérivées, nous écrivons

$$C = C^{(\ell, K)}(M, \chi, \mathcal{V}).$$

Ceci nous rappellera la dépendance en χ (supportée dans \mathcal{E}^δ) et en \mathcal{V} . Nous utiliserons quelque fois la notation $C^{(\ell, K)}(M, \mathcal{V})$ quand on ne supposera pas de dépendance en χ . Notons que \mathcal{V} dépend implicitement de ε puisque son diamètre a été choisi de manière à ce que (5.19) soit satisfaite.

5.4.2 Méthode WKB et opérateurs intégraux de Fourier

Dans cette section, nous allons montrer que les opérateurs $\mathcal{U}^t P_{\gamma_j}$ sont des opérateurs intégraux de Fourier, en montrant que leur noyau de Schwartz est bien de la forme (3.9). Nous allons procéder de la manière suivante. Soit $u \in L^2(M)$, et V un ouvert de \mathcal{E}^δ . Nous considérerons aussi une fonction F telle que $\text{supp } F \Subset V$ et l'opérateur $P = F^w$. Ceci permettra d'inclure dans notre traitement tous les ouverts $V_{\gamma_j} \in \mathcal{V}$ et leurs projecteurs associés P_{γ_j} .

En suivant la section 3.3.2 du chapitre 3, nous allons chercher un Ansatz pour $\mathcal{U}^t P u$ sous forme d'une intégrale oscillante du type

$$\mathcal{U}^t P u \stackrel{\text{def}}{=} v(t, x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \iint e^{\frac{i}{\hbar}(\varphi(t, x, \eta) - \langle y, \eta \rangle)} \sum_{k=0}^K \hbar^k a_k(t, x, y, \eta) u(y) dy d\eta + \mathcal{O}_{L^2(M)}(\hbar^K), \quad (5.28)$$

en déterminant tous les coefficients a_k , et ce jusqu'à un ordre K arbitrairement élevé. Cette méthode porte communément le nom de méthode WKB, pour Wentzel, Kramers et Brillouin qui l'ont introduite en 1926 pour étudier l'équation de Schrödinger. Si le diamètre de \mathcal{V} est

assez petit, nous pouvons sans perte de généralité supposer qu'il existe une fonction φ lisse qui génère le flot géodésique sur \mathbf{V} pour $t \in [0, 1]$, voir la section A.3.5 : pour tout $(y, \eta) \in \mathbf{V}$,

$$\Phi^t(y, \eta) = (x, \xi) \Leftrightarrow \xi = \partial_x \varphi(t, x, \eta) \text{ et } y = \partial_\eta \varphi(t, x, \eta). \quad (5.29)$$

De plus, φ satisfait $\det \partial_{x, \eta}^2 \varphi \neq 0$, et résout l'équation de Hamilton Jacobi

$$\begin{cases} \partial_t \varphi + p(x, d_x \varphi) = 0 \\ \varphi(0, x, \eta) = \langle \eta, x \rangle. \end{cases}$$

Les calculs que nous allons mener sont standards et remontent à [DH72] dans la forme que nous allons suivre, voir également [SZ02] pour une présentation proche de notre situation.

5.4.2.1 Équations WKB

Nous passons maintenant à la détermination des coefficients a_k . Par définition du semi-groupe \mathcal{U}^t , la fonction $v(t, x)$ est solution de

$$(i \hbar \partial_t - \mathcal{P}(z, \hbar))v(t, x) = 0,$$

Nous allons donc résoudre cette équation (d'inconnues a_k) terme à terme en puissance de \hbar jusqu'à un ordre K arbitrairement élevé, en cherchant $v_K(t, x)$ tel que

$$(i \hbar \partial_t - \mathcal{P}(z, \hbar))v_K(t, x) = \mathcal{O}_{L^2}(\hbar^K).$$

Prenant comme Ansatz (5.28), un calcul direct utilisant (5.2) montre que les fonctions φ et a_k doivent satisfaire les équations suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t \varphi + p(x, d_x \varphi) = 0 & \text{(Équation de Hamilton-Jacobi)} \\ \partial_t a_0 + q a_0 + X[a_0] + \frac{1}{2} a_0 \operatorname{div}_g X = 0 & \text{(Équation de transport d'ordre 0)} \\ \partial_t a_k + q a_k + X[a_k] + \frac{1}{2} a_k \operatorname{div}_g X = \frac{i}{2} \Delta_g a_{k-1} & \text{(Équation de transport d'ordre } k) \end{cases} \quad (5.30)$$

avec comme conditions initiales

$$\begin{cases} \varphi(0, x, \eta) = \langle \eta, x \rangle \\ a_0(0, x, y, \eta) = F\left(\frac{x+y}{2}, \eta\right) \\ a_k(0, x, y, \eta) = 0 \text{ pour } k > 1. \end{cases}$$

Les variables y et η sont fixées dans ces équations, elles vont donc jouer le rôle de paramètres pour le moment qui seront parfois omis dans les formules. Le champ de vecteur $X \in \Gamma(M)$ dépend de t , et $\operatorname{div}_g X$ est sa divergence Riemannienne. En coordonnées locales,

$$X = g^{ij}(x) \partial_{x_j} \varphi(t, x) \partial_{x_i} = \partial_{\xi_i} p(x, \partial_x \varphi(t, x)) \partial_{x_i} \quad \text{et} \quad \operatorname{div}_g X = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} X^i).$$

Nous voyons que l'équation de Hamilton-Jacobi est satisfaite par construction. Pour traiter les équations de transport, remarquons que X correspond à la projection sur M du champ de vecteur hamiltonien H_p en $(x, d_x\varphi(t, x, \eta)) \in T^*M$. Appelons

$$\Lambda_{t,\eta} = \{(x, d_x\varphi(t, x, \eta)), x \in \pi\Phi^t\mathbf{V}\}, \quad \eta \text{ fixé.}$$

Cette variété lagrangienne est l'image de la variété (lagrangienne) $\Lambda_{0,\eta} = \{(y, \eta) : y \in \pi\mathbf{V}\}$ par le flot géodésique Φ^t . Le flot $(\kappa_s^t)_{s,t \geq 0}$ sur M généré par X peut maintenant être identifié au flot géodésique restreint à $\Lambda_{s,\eta}$:

$$\kappa_s^t : \pi\Lambda_{s,\eta} \ni x \mapsto \pi\Phi^t(x, \partial_x\varphi(s, x, \eta)) \in \pi\Lambda_{t+s,\eta}.$$

Le flot inverse $(\kappa_s^t)^{-1}$ sera noté par κ_{s+t}^{-t} . Étendons désormais le flot κ_s^t de X sur M au flot \mathcal{K}^t généré par le champ de vecteurs $\mathcal{X} = \partial_t + X$ sur $\mathbb{R} \times M$:

$$\mathcal{K}^t : \begin{cases} \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R} \times M \\ (s, x) \mapsto (s+t, \kappa_s^t(x)). \end{cases}$$

Lorsque l'on identifie les fonctions a_k avec des demi-densités Riemanniennes sur $\mathbb{R} \times M$ (voir l'appendice A.2), nous obtenons :

$$a_k(t, x) \equiv a_k(t, x) \sqrt{dt d\text{vol}(x)} = a_k(t, x) \sqrt{\bar{g}(x)}^{\frac{1}{2}} |dtdx|^{\frac{1}{2}} \in C^\infty(\mathbb{R} \times M, \Omega_{\frac{1}{2}}).$$

D'après la proposition A.6, nous avons

$$\mathcal{L}_{\mathcal{X}}(a_k \sqrt{dt d\text{vol}}) = (\mathcal{X}[a_k] + \frac{1}{2} a_k \text{div}_g X) \sqrt{dt d\text{vol}},$$

ce qui signifie que l'équation de transport d'ordre 0 se résume à une équation différentielle ordinaire du premier ordre avec second membre :

$$\mathcal{L}_{\mathcal{X}}(a_0 \sqrt{dt d\text{vol}}) = -q a_0 \sqrt{dt d\text{vol}}.$$

D'après la définition de la dérivée de Lie, ceci est équivalent à

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{K}^t)^* a_0 \sqrt{dt d\text{vol}} = -q a_0 \sqrt{dt d\text{vol}},$$

qui se résout par

$$a_0 \sqrt{dt d\text{vol}} = e^{-\int_0^t q \circ \kappa_t^{s-t} ds} (\mathcal{K}^{-t})^* a_0 \sqrt{dt d\text{vol}}.$$

Nous n'avons plus qu'à rendre explicite la dépendance aux coordonnées, ce qui conduit à

$$a_0(t, x) \sqrt{\bar{g}(x)}^{\frac{1}{2}} |dxdx|^{\frac{1}{2}} = e^{-\int_0^t q \circ \kappa_t^{s-t}(x) ds} a_0(0, \kappa_t^{-t}(x)) \sqrt{\bar{g}(\kappa_t^{-t}(x))} |\det d_x \kappa_t^{-t}|^{\frac{1}{2}} |dxdx|^{\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent,

$$a_0(t, x) = e^{-\int_0^t q \circ \kappa_t^{s-t}(x) ds} a_0(0, \kappa_t^{-t}(x)) \frac{\sqrt{\bar{g}(\kappa_t^{-t}(x))}}{\sqrt{\bar{g}(x)}} |\det d_x \kappa_t^{-t}|^{\frac{1}{2}}.$$

Puisque

$$\kappa_t^{-t} : x \mapsto \pi\Phi^{-t}(x, \partial_x\varphi(t, x, \eta)) = \partial_\eta\varphi(t, x, \eta),$$

il est clair que $|\det d_x\kappa_t^{-t}(x)| = |\det \partial_{x\eta}^2\varphi(t, x, \eta)|$. Introduisons l'opérateur \mathcal{T}_s^t qui transporte les fonctions f sur M à support dans $\pi\Lambda_{s,\eta}$ vers les fonctions supportées sur $\pi\Lambda_{t+s,\eta}$ tout en les amortissant le long de la trajectoire :

$$\mathcal{T}_s^t(f)(x) = e^{-\int_0^t q \circ \kappa_{t+s}^{\sigma-t} d\sigma} f(\kappa_{t+s}^{-t}(x)) \frac{\sqrt{\bar{g}(\kappa_{t+s}^{-t}(x))}}{\sqrt{\bar{g}(x)}} |\det d_x\kappa_{t+s}^{-t}(x)|^{\frac{1}{2}}.$$

Cet opérateur joue un rôle prépondérant, puisque l'on a

$$a_0(t, \cdot) = \mathcal{T}_0^t(a_0(0, \cdot)) = \mathcal{T}_0^t F, \quad (5.31)$$

ce qui permet de voir que $a_0(t, \cdot)$ est bien supporté dans $\pi\Lambda_{t,\eta}$. La formule de Duhamel permet maintenant de calculer les termes suivants, qui sont donnés par

$$a_k(t, \cdot) = \int_0^t \mathcal{T}_s^{t-s} \left(\frac{i}{2} \Delta_g a_{k-1}(s) \right) ds.$$

L'Ansatz $v_K(t, x)$ construit jusqu'ici satisfait l'équation

$$\frac{\partial v_K}{\partial t} = (i\hbar\Delta_g - q)v_K - \frac{i}{2}\hbar^K \iint e^{i\hbar(\varphi(t,x,\eta) - \langle y, \eta \rangle)} u(y) \Delta_g a_{K-1}(t, x, y, \eta) dy d\eta.$$

La différence avec la véritable solution $\mathcal{U}^t \mathcal{P}_\gamma u$ est bornée en norme L^2 par

$$\hbar^K t \|\Delta_g a_{K-1}\| \leq Ct \hbar^K,$$

où $C = C^{(2K)}(M, \mathcal{V})$. L'équation (5.37) est bien satisfaite, ce qui signifie que $\mathcal{U}^t \mathcal{P}$ est bien un opérateur intégral de Fourier au sens où nous les avons définis au chapitre 3.

5.4.3 Évolution des états lagrangiens élémentaires

Utilisant (5.26), des estimées de propagation du théorème 3.27 montrent que

$$\mathcal{U}^{t_0} \Pi_{\beta_1} = \mathcal{U} \mathcal{P}_{\gamma_{t_0}} \dots \mathcal{U} \mathcal{P}_{\gamma_1} + \mathcal{O}_{L^2 \rightarrow L^2}(\hbar^\infty), \quad \mathcal{U} \equiv \mathcal{U}^1,$$

et des propriétés similaires pour $\mathcal{U}^{t_0} \Pi_{\beta_k}$, $k > 1$. Finalement,

$$\mathcal{U}_{\beta_N} \dots \mathcal{U}_{\beta_1} \mathcal{U} \text{Op}_{\hbar}(\chi) = \mathcal{U} \mathcal{P}_{\gamma_{Nt_0}} \dots \mathcal{U} \mathcal{P}_{\gamma_1} \mathcal{U} \text{Op}_{\hbar}(\chi) + \mathcal{O}_{L^2 \rightarrow L^2}(\hbar^\infty). \quad (5.32)$$

Prenons maintenant $\Psi \in L^2(M)$. Pour montrer la proposition 5.8, nous écrivons $\text{Op}_{\hbar}(\chi)\Psi$ comme une combinaison linéaire d'états lagrangiens élémentaires, et nous étudierons l'évolution de tels états élémentaires par \mathcal{U}^{Nt_0+1} . Ce type de méthode a été introduit d'abord dans [Ana08] et constitue l'outil principal pour montrer la proposition 5.8. La décomposition de

$\text{Op}_{\hbar}(\chi)\Psi$ est obtenue en explicitant l'action de $\text{Op}_{\hbar}(\chi)$ localement. Lorsque l'on applique $\text{Op}_{\hbar}(\chi)$ à Ψ en utilisant des cartes locales labellées par ℓ , nous obtenons

$$\begin{aligned} [\text{Op}_{\hbar}(\chi)\Psi](x) &= \sum_{\ell} \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int e^{i\frac{\langle \eta, x-z_0 \rangle}{\hbar}} \chi\left(\frac{x+z_0}{2}, \eta\right) \varphi_{\ell}(z_0) \phi_{\ell}(x) \Psi(z_0) d\eta dz_0 \\ &= \sum_{\ell} \int \delta_{\chi, z_0}^{\ell}(x) \Psi(z_0) dz_0, \end{aligned}$$

ou nous avons défini

$$\delta_{\chi, z_0}^{\ell}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int e^{i\frac{\langle \eta, x-z_0 \rangle}{\hbar}} \chi\left(\frac{x+z_0}{2}, \eta\right) \varphi_{\ell}(z_0) \phi_{\ell}(x) d\eta.$$

Ceci est un état lagrangien, supporté sur la lagrangienne (cf. l'exemple 3.20) :

$$\Lambda^0 \stackrel{\text{def}}{=} T_{z_0}^* M \cap \mathcal{E}^{\delta} \subset T^* M.$$

Géométriquement, Λ^0 correspond à une union de petits morceaux de sphère connexes $\{T_{z_0}^* M \cap p^{-1}(\frac{1}{2} + \nu), |\nu| \leq \delta\}$. Si nous projetons et évoluons Ψ en appliquant l'opérateur apparaissant dans le membre de droite de (5.32), nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U}^t \mathbf{P}_{\gamma_{Nt_0}} \dots \mathcal{U} \mathbf{P}_{\gamma_1} \mathcal{U} \text{Op}_{\hbar}(\chi) \Psi\| &\leq \sum_{\ell} \sup_{z_0} \|\mathcal{U}^t \mathbf{P}_{\gamma_{Nt_0}} \dots \mathbf{P}_{\gamma_1} \mathcal{U} \delta_{\chi, z_0}^{\ell}\| \int_M |\Psi(x)| dx \\ &\leq C \sum_{\ell} \sup_{z_0} \|\mathcal{U}^t \mathbf{P}_{\gamma_{Nt_0}} \dots \mathbf{P}_{\gamma_1} \mathcal{U} \delta_{\chi, z_0}^{\ell}\| \|\Psi\| \end{aligned} \quad (5.33)$$

où $C > 0$ dépend uniquement de la variété M . Ainsi, nous sommes conduits à étudier en détail des états de la forme $\mathcal{U}^t \mathbf{P}_{\gamma_n} \dots \mathcal{U} \mathbf{P}_{\gamma_1} \mathcal{U} \delta_{\chi, z_0}^{\ell}$, pour $n \in \llbracket 1, Nt_0 \rrbracket$ et $t \in [0, 1]$. Par souci de simplicité, nous omettrons les cartes locales dans les formules car elles ne vont jouer aucun rôle par la suite.

5.4.3.1 Ansatz pour les temps courts

Nous décrivons ici la première étape d'évolution donnée dans (5.32) : l'objectif est d'obtenir une description de $\mathcal{U}^t \delta_{\chi, z_0}$ avec $t \in [0, 1]$. Les calculs qui suivent sont similaires à ceux menés dans [Ana08, Sec. 3.1], l'amortissement en plus. En procédant comme aux paragraphes précédents, on peut écrire une représentation en intégrale oscillante

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^t \text{Op}_{\hbar}(\chi) \Psi &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \iint e^{i\frac{1}{\hbar}(\varphi(t, x, \eta) - \langle z_0, \eta \rangle)} b_{\hbar}(t, x, z_0, \eta) \Psi(z_0) dz_0 d\eta \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int v_{z_0}^0(t, x) \Psi(z_0) dz_0 \end{aligned}$$

où φ génère le flot près de Λ_0 . En d'autres termes, $\mathcal{U}^t \text{Op}_{\hbar}(\chi)\Psi$ est une superposition linéaire d'états $v_{z_0}^0(t) = \mathcal{U}^t \delta_{\chi, z_0}$. Par construction,

$$v_{z_0}^0(t, x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int e^{\frac{i}{\hbar}(\varphi(t, x, \eta) - \langle z_0, \eta \rangle)} b_{\hbar}(t, x, z_0, \eta) d\eta$$

Pour $t > 0$, nous pouvons appliquer la phase stationnaire en η dans cette intégrale oscillante. Oublions pour simplifier les notations les indices référant à z_0 pour le moment. Les points critiques de la phase sont donné par

$$\partial_{\eta}\varphi(t, x, \eta) = z_0$$

Soit η_c un point critique. Un tel point est forcément unique : en effet, on a

$$(x, \eta_c) \xrightarrow{j_{\varphi}} (x, \partial_x \varphi(t, x, \eta_c))$$

ce qui signifie que $(x, \partial_x \varphi(t, x, \eta))$ est l'image de $(\partial_{\eta}\varphi(t, x, \eta), \eta)$ par le flot géodésique. S'il existait deux impulsions, disons η_1 et η_2 telles que $\partial_{\eta}\varphi(t, x, \eta_i) = z_0$ et satisfaisant

$$\begin{aligned} (z_0, \eta_1) &= (\partial_{\eta}\varphi(t, x, \eta_1), \eta_1) \xrightarrow{\Phi^t} (x, \partial_{\eta}\varphi(t, x, \eta_1)) \\ (z_0, \eta_2) &= (\partial_{\eta}\varphi(t, x, \eta_2), \eta_2) \xrightarrow{\Phi^t} (x, \partial_{\eta}\varphi(t, x, \eta_2)) \end{aligned}$$

ceci contredirait clairement le fait que le rayon d'injectivité est supérieur à 2. Il existe donc $\eta_c = \eta_c(x)$, unique vecteur permettant de joindre z_0 à x en un temps $t \leq 1$. Posons $S(t, x, z_0, \eta) = \varphi(t, x, \eta) - \langle z_0, \eta \rangle$, et appliquons la phase stationnaire (théorème C.3) :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^t \delta_{\chi, z_0} &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{\sqrt{\det \text{Hess } S(t, x, z_0, \eta_c)}} e^{\frac{i\pi}{4}\sigma + \frac{iS(t, x, z_0, \eta_c)}{\hbar}} b_{\hbar}(t, x, z_0, \eta_c) \\ &+ e^{\frac{iS(t, x, z_0, \eta_c)}{\hbar}} \sum_{k=1}^{K-1} \hbar^{k+\frac{d}{2}} A_{2k}(x, \hbar D_x) b_{\hbar}(t, x, z_0, \eta)|_{\eta=\eta_c} \\ &+ \hbar^{K+\frac{d}{2}} R_K \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que l'on a $b_{\hbar} \sim \sum \hbar^k b_k$ où les b_k sont déterminés de la même manière que les a_k l'ont été dans la section précédente, nous pouvons réécrire $\mathcal{U}^t \delta_{\chi, z_0}$ comme

$$\begin{aligned} v^0(t, x, z_0) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{U}^t \delta_{\chi, z_0}(x) \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{d}{2}}} \left(e^{i\frac{S_0(t, x, z_0)}{\hbar}} \sum_{k=0}^{K-1} \hbar^k b_k^0(t, x, z_0) + \hbar^K B_K^0(t, x, z_0) \right). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Il est immédiat de constater que la fonction $S_0(t, x, z_0) = \varphi(t, x, \eta_c) - \langle z_0, \eta_c \rangle$ est une fonction génératrice de $\Lambda^0(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi^t(\Lambda^0)$ puisque

$$\{(x, d_x S_0)\} = \{(x, \partial_x \varphi(t, x, \eta_c))\} = \Phi^t(T_{z_0}^* M \cap \mathcal{E}^{\delta})$$

Toujours en utilisant le théorème C.3, on peut affirmer que les fonctions $b_k^0(t, x, z_0)$ sont lisses et supportées sur $\pi\Lambda^0(t)$. De plus, pour tout ℓ , elles satisfont

$$\|\partial_x^\ell b_k^0(t, \cdot, z_0)\| \leq C_{\ell, k} \quad (5.35)$$

ou les constantes $C_{\ell, k}$ dépendent seulement de M (via le flot hamiltonien de p), de l'amortissement a , de la fonction cutoff χ et de leur dérivées jusqu'à l'ordre $2k + \ell$. Cependant, notons que $C_{0,0}$ dépend seulement de M . Le reste satisfait $\|B_K^0\| \leq C_K$ où la constante C_K dépend également de M , a , χ et est uniformément bornée par rapport à x, z_0 . Le point de base z_0 sera fixé jusqu'à la section 5.4.4, nous ne l'inscrivons donc pas dans les formules pour simplifier.

Nous avons vu ci-dessus que $\mathcal{U}^t \delta_{\chi, z_0}$ est un état lagrangien, supporté sur

$$\Lambda^0(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi^t(\Lambda^0), \quad t \in [0, 1].$$

À cause de nos hypothèses sur le rayon d'injectivité, le flot $\Phi^t : \Lambda^0(s) \rightarrow \Lambda^0(t)$ pour $1 \geq t \geq s > 0$, induit sur M une bijection de $\pi\Lambda^0(s)$ vers $\pi\Lambda^0(t)$. En d'autres termes, la projection sur M de $\Lambda^0(t)$ est un difféomorphisme local pour $t \in]0, 1]$, i.e. $\ker d\pi|_{\Lambda^0(t)} = 0$: dans ce cas, nous dirons que $\Lambda^0(t)$ est *projectible*. Les calculs ci-dessus montrent que $\Lambda^0(t)$, $t \in]0, 1]$ est bien générée par le graphe de la différentielle de S_0 :

$$\Lambda^0(t) = \{(x, d_x S_0(t, x, z_0)) : 1 \geq t > 0, x \in \pi\Phi^t(\Lambda^0)\}.$$

C'est la raison pour introduire cette étape de propagation durant un temps 1 : la variété lagrangienne $\Lambda^0(0)$ n'est pas projectible, mais dès que $t \in]0, 1]$, $\Lambda^0(t)$ se projette bien. Le fait de traiter séparément cette évolution pour les temps $t \in [0, 1]$ permet d'éviter certaines complications non nécessaires. Par extension, nous dirons qu'un état lagrangien est projectible lorsque sa variété lagrangienne l'est.

5.4.3.2 La suite des variétés Lagrangiennes évoluées

L'objectif de ce qui suit est de construire un Ansatz lagrangien pour l'état

$$v^n(t, x) = \mathcal{U}^t \mathbf{P}_{\gamma_n} \mathcal{U}^1 \mathbf{P}_{\gamma_{j-1}} \dots \mathcal{U}^1 \mathbf{P}_{\gamma_1} \mathcal{U}^1 \delta_\chi, \quad n \in \llbracket 1, Nt_0 \rrbracket.$$

Commençons par définir une suite de variétés lagrangiennes qui nous seront utiles dans la description de $v^n(t, x)$. Si $j = 1$, définissons $\Lambda^1(0)$ comme

$$\Lambda^1(0) = \Lambda^0(1) \cap \mathbf{V}_{\gamma_1},$$

et pour $t \in [0, 1]$ posons $\Lambda^1(t) = \Phi^t(\Lambda^1(0))$. Pour $j \geq 1$, nous définissons $\Lambda^j(t)$ par une procédure similaire : connaissant $\Lambda^{j-1}(1)$, nous prenons pour $\Lambda^j(t)$, $t \in [0, 1]$ la variété lagrangienne

$$\Lambda^j(0) \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda^{j-1}(1) \cap \mathbf{V}_{\gamma_j}, \quad \text{et} \quad \Lambda^j(t) = \Phi^t(\Lambda^j(0)).$$

Bien sûr, si l'intersection $\Lambda^{j-1}(1) \cap \mathcal{V}_{\gamma_j}$ est vide, nous stoppons la construction car dans ce cas $\|v^n\| = \mathcal{O}(\hbar^\infty)$ et la proposition 5.8 est vraie. Nous supposons donc par la suite que

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \Lambda^j(0) \neq \emptyset.$$

La variété $\Lambda^j(t)$ correspond à une petite partie de $\Phi^{t+j}(\Lambda^0)$ à cause des projections successives sur les ouverts \mathcal{V}_{γ_i} . Puisque Λ^0 est transverse à la direction stable [Kli74], son évolution par le flot se rapproche exponentiellement vite de la variété lagrangienne instable (qui elle est toujours projectible) : ceci signifie que $\Lambda^j(t)$ ne développera jamais de caustiques (voir la section A.1.4). D'un autre côté, $\Phi^{j+t}(\Lambda^0)$ n'est pas projectible si $j \gg 1$: elle s'étire le long de la variété instable et peut recouvrir $x \in M$ de nombreuses fois. Par contre, $\Lambda^j(t)$ est bien projectible. En effet, un point $x' \in M$ ne peut être atteint en un temps $t \leq 1$ que par au plus un point $x \in \pi\mathcal{V}_\gamma$ avec une implusion initiale de norme $\leq \sqrt{1+2\delta}$: s'il existait deux géodésiques partant de $\Lambda^0(0)$ avec la même trajectoire $\mathcal{V}_{\gamma_1}, \dots, \mathcal{V}_{\gamma_j}$ aux temps $t = 1, \dots, j$ et s'intersectant au temps j , ces deux géodésiques seraient homotopes et donc donneraient lieu à deux géodésiques avec les mêmes extrémités dans le recouvrement universel : ceci est impossible puisque la courbure est strictement négative.

Ainsi, pour tout $j \geq 1$ la variété lagrangienne $\Lambda^j(t)$ est projectible, il existe donc une fonction génératrice $S_j(t, x)$ telle que

$$\Lambda^j(t) = \{x, d_x S_j(t, x)\}.$$

Introduisons aussi des notations qui seront utiles un peu plus loin. Supposons que $x \in \pi\Lambda^j(t)$, $j \geq 1$. Alors, il existe un unique $y = y(x) \in \pi\Lambda^j(0)$ tel que

$$\pi \circ \Phi^t(y, d_y S_j(0, y)) = x.$$

Si nous notons pour $t \in [0, s]$ l'application inverse induite sur M par

$$\phi_{S_j(s)}^{-t} : x \in \pi\Lambda^j(s) \mapsto \pi\Phi^{-t}(x, d_x S_j(s, x)) \in \pi\Lambda^j(s-t),$$

nous avons $y(x) = \phi_{S_j(t)}^{-t}(x)$. Si $x \in \pi\Lambda^j(t)$, alors par construction,

$$\Phi^{-t-k}(x, d_x S_j(t, x)) \in \Lambda^{j-k}(0) \subset \Lambda^{j-k-1}(1), \quad k \in \llbracket 0, j-1 \rrbracket.$$

Par définition, nous écrivons

$$\phi_{S_j(t)}^{-t-k}(x) = \pi\Phi^{-t-k}(x, d_x S_j(t, x)) \quad \text{and} \quad \phi_{S_j}^{-k}(x) = \pi\Phi^{-k}(x, d_x S_j(1, x)).$$

Nous allons finalement montrer que l'état

$$v^j(t, x) = \mathcal{U}^t \mathbf{P}_{\gamma_j} \mathcal{U}^1 \mathbf{P}_{\gamma_{j-1}} \dots \mathcal{U}^1 \mathbf{P}_{\gamma_1} \mathcal{U}^1 \delta_\chi$$

est un état lagrangien pour tout $j \geq 1$, supporté sur $\Lambda^j(t)$. Ceci signifie que la séquence de projection et d'évolutions que nous voulons décrire peut se résumer dans le diagramme

suisant :

$$\delta_\chi \xrightarrow{\mathcal{U}^1} v^0(1, \cdot) \xrightarrow{P_1} v^1(0, \cdot) \xrightarrow{\mathcal{U}} v^1(1, \cdot) \xrightarrow{P_2} \dots \xrightarrow{P_n} v^n(0, \cdot) \xrightarrow{\mathcal{U}^t} v^n(t, \cdot) \quad (5.36)$$

$$\Lambda^0 \xrightarrow{\Phi^1} \Lambda^0(1) \xrightarrow{|v_1} \Lambda^1(0) \xrightarrow{\Phi^1} \Lambda^1(1) \xrightarrow{|v_2} \dots \xrightarrow{|v_n} \Lambda^n(0) \xrightarrow{\Phi^t} \Lambda^n(t)$$

Sur la ligne supérieure est inscrit l'évolution des états lagrangiens, tandis que sur la ligne inférieure est représentée l'évolution classique des variétés lagrangiennes associées. (la notation $|_{\mathbf{V}}$ indique la restriction à l'ensemble $\mathbf{V} \subset T^*M$).

5.4.3.3 Évolution d'un état lagrangien projectible

Pour montrer que v^j est lagrangien, nous allons procéder par récurrence. Nous savons déjà que $v^0(t, x)$ est lagrangien, et donc qu'il en est de même pour $v^1(0, x)$. Soit \mathbf{V}_γ et $\mathbf{P}_\gamma = \mathbf{F}_\gamma^w$ comme dans la section 5.4.2. Soit $w_\hbar(x) = w(x) e^{\frac{i}{\hbar}\psi(x)}$ un état lagrangien projectible, supporté dans

$$\Lambda = \{x, d_x\psi(x)\} \subset \mathbf{V}_\gamma.$$

Nous ferons l'hypothèse cruciale suivante :

Pour $t \in [0, 1]$, la variété lagrangienne $\Phi^t\Lambda$ est projectible.

Notons que c'est une hypothèse satisfaite s'il existe $j \geq 1$ tel que $\Lambda = \Lambda^j$. Nous cherchons maintenant à décrire l'état $\mathcal{U}^t \mathbf{P}_\gamma w_\hbar$: nous allons montrer qu'il s'agit d'un état lagrangien, supporté sur la variété lagrangienne $\Lambda(t) = \Phi^t\Lambda$. Utilisant ce que nous savons déjà sur la représentation en intégrale oscillante de $\mathcal{U}^t \mathbf{P}_\gamma$, nous allons effectuer le développement de phase stationnaire de

$$\mathcal{U}^t \mathbf{P}_\gamma w_\hbar \stackrel{\text{def}}{=} w_\hbar(t, x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \iint e^{\frac{i}{\hbar}(\varphi_\gamma(t, x, \eta) - \langle y, \eta \rangle + \psi(y))} b_\hbar(t, x, y, \eta) w(y) dy d\eta, \quad (5.37)$$

dans les deux variables y et η . Ici encore, nous allons omettre les indices référant à γ pour simplifier les notations. Puisque $b_\hbar \sim \sum \hbar^k a_k$, nous posons

$$I_k(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \iint e^{\frac{i}{\hbar}(\varphi(t, x, \eta) - \langle y, \eta \rangle + \psi(y))} a_k(t, x, y, \eta) w(y) dy d\eta.$$

Les points stationnaires de cette intégrale sont donné par

$$\begin{cases} \psi'(y) = \eta \\ \partial_\eta \varphi(t, x, \eta) = y, \end{cases}$$

pour lesquelles il existe une solution $(y_c, \eta_c) \in \Lambda(0)$ au vu des propriétés (5.29) de φ . De plus, cette solution est unique car $\Lambda(t)$ est projectible : $y_c = y_c(x) \in \pi\Lambda(0)$ est l'unique point de

$\pi\Lambda(0)$ tel que $x = \pi\Phi^t(y_c, \psi'(y_c))$, et donc $\eta_c = \psi'(y_c)$ est l'unique vecteur permettant à y_c d'atteindre x au temps t . En posant $S(t, x, y, \eta) = \varphi_\gamma(t, x, \eta) - \langle y, \eta \rangle + \psi(y)$, nous obtenons ainsi une fonction génératrice pour $\Lambda(t)$, qui vaut

$$\psi(t, x) = S(t, x, y_c(x), \eta_c(x)).$$

Si l'on applique le théorème de la phase stationnaire à chaque I_k et que l'on additionne les résultats en les regroupant selon leur puissance de \hbar , nous voyons que l'on obtient

$$w_\hbar(t, x) = e^{i\frac{\psi(t, x)}{\hbar}} \sum_{k=0}^{K-1} \hbar^k w_k(t, x) + \hbar^K r_K(t, x) \quad (5.38)$$

où les différents termes ont les propriétés suivantes : les fonctions w_k satisfont

$$w_0(t, x) = e^{i\beta(t)} \frac{a_0(t, x, y_c, \eta_c)}{|\det(1 - \partial_{\eta\eta}^2 \varphi(t, x, \eta_c) \circ \psi''(y_c))|^{\frac{1}{2}}} w(y_c), \quad \beta \in C^\infty(\mathbb{R}),$$

et

$$w_k(t, x) = \sum_{i=0}^k A_{2i}(x, D_{x,\eta})(a_{k-i}(t, x, y, \eta)w(y))|_{(y,\eta)=(y_c,\eta_c)}. \quad (5.39)$$

A_{2i} est un opérateur différentiel d'ordre $2i$, dont les coefficients dépendent de manière lisse de φ , ψ et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre $2i + 2$. Ceci mène aux bornes suivantes :

$$\|w_k\|_{C^\ell} \leq C_{\ell,k} \|w\|_{C^{\ell+2k}}$$

où $C_{\ell,k} = C^{(\ell,k)}(M, \mathcal{V})$. Le terme de reste $r_K(t, x)$ est la somme de tous les termes provenant du développement de phase stationnaire de I_k jusqu'à l'ordre $K - k$. Chaque reste d'ordre $K - k$ a une norme C^ℓ bornée par $C_{\ell, K-k} \hbar^{K-k} \|w\|_{C^{\ell+2(K-k)+d}}$, donc nous voyons que

$$\|r_K\|_{C^\ell} \leq C_{\ell,K} \|w\|_{C^{\ell+2K+d}}, \quad C = C^{(\ell,K)}(M, \mathcal{V}).$$

Le symbole principal w_0 peut aussi être interprété plus géométriquement. Comme dans la section 5.4.3.2, appelons $\phi_{\psi(t)}^{-t}$ l'application suivante

$$\phi_{\psi(t)}^{-t} : \begin{cases} \pi\Lambda(t) \rightarrow \pi\Lambda(0) \\ x \mapsto \pi\Phi^{-t}(x, d_x\psi(t, x)). \end{cases}$$

Écrivons la différentielle de $\Phi^t : (y, \eta) \mapsto (x, \xi)$ comme $d\Phi^t(\delta y, \delta \eta) = (\delta x, \delta \xi)$. En utilisant (5.29), nous avons

$$\begin{aligned} \delta y &= \partial_{x\eta}^2 \varphi \delta x + \partial_{\eta\eta}^2 \varphi \delta \eta \\ \delta \xi &= \partial_{xx}^2 \varphi \delta x + \partial_{x\eta}^2 \varphi \delta \eta, \end{aligned}$$

et donc, puisque $\partial_{x\eta}^2 \varphi$ est inversible,

$$\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{x\eta}^2 \varphi^{-1} & -\partial_{x\eta}^2 \varphi^{-1} \partial_{\eta\eta}^2 \varphi \\ \partial_{xx}^2 \varphi \partial_{x\eta}^2 \varphi^{-1} & \partial_{x\eta}^2 \varphi - \partial_{xx}^2 \varphi \partial_{x\eta}^2 \varphi^{-1} \partial_{\eta\eta}^2 \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta y \\ \delta \eta \end{pmatrix}$$

Si nous restreignons Φ^t à $\Lambda(0)$, nous avons $\delta\eta = \psi''(y)\delta y$, ce qui signifie que pour $x \in \pi\Lambda(t)$,

$$d\phi_{\psi(t)}^{-t}(x) = \partial_{x\eta}^2 \varphi(t, x, \eta_c) (1 - \partial_{\eta\eta}^2 \varphi(t, x, \eta_c) \psi''(y_c))^{-1}.$$

Il s'ensuit que

$$w_0(t, x) = e^{\frac{i}{\hbar}\beta(t)} \mathbf{F}(y_c, \eta_c) e^{-\int_0^1 q(\phi_{\psi(t)}^{-t+s}(x)) ds} |\det d\phi_{\psi(t)}^{-t}(x)|^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\bar{g}(\phi_{\psi(t)}^{-t}(x))}{\bar{g}(x)}}^{\frac{1}{2}} w(y_c)$$

Remarque 5.13. Les deux derniers facteurs s'interprètent naturellement comme la racine carrée du jacobien de $\phi_{\psi(t)}^{-t} : M \rightarrow M$ mesuré par rapport au volume riemannien.

5.4.3.4 Ansatz pour les temps $n > 1$

Dans la séquence de projections-évolutions décrite en (5.32), nous avons effectué la première étape, et obtenu une description de $\mathcal{U}^t \delta_\chi$, $t \in]0, 1]$ en terme d'état lagrangien, jusqu'à un ordre $\hbar^{K-d/2}$ pour tout $K \geq 0$. Ainsi, $v^0(1, x)$ est lagrangien. En utilisant la section précédente, on montre de même que

$$v^1(t, x) = \mathcal{U}^t \mathbf{P}_{\gamma_1}(v^0(1, \cdot))(x)$$

est lagrangien, de lagrangienne $\Lambda^1(t)$. En continuant itérativement, on peut obtenir un Ansatz lagrangien pour

$$v^n(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{U}^t \mathbf{P}_{\gamma_n} \mathcal{U} \mathbf{P}_{\gamma_{n-1}} \dots \mathcal{U} \mathbf{P}_{\gamma_1} \mathcal{U} \delta_\chi, \quad t \in [0, 1], \quad n \geq 1. \quad (5.40)$$

Les γ_j sont définis par $j - 1 \pmod{t_0}$ comme dans la section précédente, mais maintenant n est arbitraire dans l'intervalle $[[1, Nt_0]]$. Plus précisément, nous montrons dans [Sch09a, Prop. 11] le résultat suivant :

Proposition 5.14. *Il existe une séquence de fonctions*

$$\{b_k^n(t, x), S_n(t, x) : n \geq 1, k < K, x \in M, t \in [0, 1]\}$$

avec les propriétés suivantes :

1. $S_n(t, x)$ est une fonction génératrice pour $\Lambda^n(t)$.
2. $\text{supp } b_k^n(t, \cdot) \subset \pi\Lambda^n(t)$.

3. Les symboles principaux $\{b_0^n(t, x)\}_{n \in \llbracket 1, N_{t_0} \rrbracket}$ sont reliés par la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} b_0^n(t, x) &= e^{\frac{i}{\hbar} \beta_n(t)} F_{\gamma_n}(y_c, \eta_c) e^{-\int_0^1 q(\phi_{S_n(t)}^{-t+s}(x)) ds} \\ &\quad \times |\det d\phi_{S_n(t)}^{-t}(x)|^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\bar{g}(\phi_{S_n(t)}^{-t}(x))^{\frac{1}{2}}}{\bar{g}(x)}} b_0^{n-1}(1, y_c) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}_n(t, x) b_0^{n-1}(1, y_c), \end{aligned}$$

où $(y_c, \eta_c) = (y_c(t, x), \eta_c(t, x)) = \Phi^{-t}(x, d_x S_n(t, x))$ et β_n est lisse.

4. On a

$$v^n(t, x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{d}{2}}} e^{i \frac{S_n(t, x)}{\hbar}} \sum_{k=0}^{K-1} \hbar^k b_k^n(t, x) + \hbar^{K-\frac{d}{2}} R_K^n(t, x) \quad (5.41)$$

où R_K^n satisfait

$$\|R_K^n\| \leq C_K (1 + C\hbar)^n \left(\sum_{i=2}^n \sum_{k=0}^{K-1} \|b_k^{i-1}(1, \cdot)\|_{C^{2(K-k)+d}} + C' \right) \quad (5.42)$$

Les constantes sont telles que $C' = C^{(K)}(M, \chi)$, $C_K = C^{(K)}(M, \chi, \mathcal{V})$ et $C > 0$ est fixé.

Étant donné $v^{n-1}(1, \cdot)$, nous avons donc construit $v^n(t, x)$ comme en (5.41), mais il faut désormais contrôler le reste R_K^n en norme L^2 . L'équation (5.42) nous indique qu'il est crucial pour cela d'estimer les normes C^ℓ des coefficients b_k^j pour $j \geq 1$ et $k \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket$. C'est l'objet du lemme suivant :

Lemme 5.15. *Soit $n \geq 1$, et définissons*

$$\mathcal{D}_n = \sup_{x \in \pi\Lambda^n(1)} \left| \prod_{i=0}^{n-1} \mathcal{D}_{n-i}(1, \phi_{S_n}^{-i}(x)) \right|, \quad \mathcal{D}_0 = 1.$$

Si $x \in \pi\Lambda^n(1)$, le symbole principal b_0^n est donné par

$$b_0^n(1, x) = \left(\prod_{j=0}^{n-1} \mathcal{D}_{n-j}(1, \phi_{S_n}^{-j}(x)) \right) b_0^0(1, \phi_{S_n}^{-n}(x)). \quad (5.43)$$

Pour $k \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket$, les fonctions b_k^n satisfont

$$\|b_k^n(1, \cdot)\|_{C^\ell} \leq C_{k, \ell} (n+1)^{3k+\ell} \mathcal{D}_n \quad (5.44)$$

où $C_{k, \ell} = C^{(\ell, k)}(M, \chi, \mathcal{V})$. Il s'ensuit que

$$\|B_K^n(1, \cdot)\| \leq C_K n^{3K+d} \mathcal{D}_{n-1} \quad (5.45)$$

$$\|R_K^n(1)\| \leq C_K (1 + C\hbar)^n \sum_{j=1}^n j^{3K+d} \mathcal{D}_{j-1} \quad (5.46)$$

où $C > 0$ et $C_K = C^{(K)}(M, \chi, \mathcal{V})$. D'un autre côté, si $x \notin \pi\Lambda^n(1)$, nous avons $b_k^n(x) = 0$ pour $k \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket$.

La preuve (sensiblement fastidieuse) est détaillée dans [Sch09a, Lem. 13].

5.4.4 L'estimée de dispersion hyperbolique

Comme nous l'avons fait remarquer auparavant, les lagrangiennes Λ^n convergent exponentiellement vite lorsque $n \rightarrow \infty$ vers la foliation instable faible. Par conséquent, si $x \in \pi\Lambda^j(1)$, les jacobiens $J_{S_j}(x) \stackrel{\text{def}}{=} |\det \phi_{S_j(1)}^{-1}(x)|$ satisfont

$$\forall j \geq 2, \forall (x, \xi) \in \Lambda^j(1), \left| \frac{J_{S_j}(x)}{J_{S^u(x, \xi)}(x)} - 1 \right| \leq C e^{-j/C}, \quad C = C(M) > 0.$$

Ici, S^u génère la variété Lagrangienne instable (faible) au point (x, ξ) . Ainsi, uniformément par rapport à n , nous avons

$$\prod_{j=0}^{n-1} J_{S_{n-j}}(\phi_{S_n}^{-j}(x)) \leq C(M) \prod_{j=0}^{n-1} J_{S^u(\Phi^{-j}(x, \xi))}(\phi_{S_n}^{-j}(x)).$$

Le jacobien $J_{S^u(x, \xi)}(x)$ mesure la contraction de Φ^{-1} le long des sous-espaces instables $E^u(\Phi^1(\rho))$, où $\Phi^1(\rho) = (x, \xi)$, et $x \in M$ sert de coordonnées pour calculer ce jacobien (via la projection π). Le jacobien instable $J^u(\rho) \stackrel{\text{def}}{=} |\det (d\Phi^{-1}|_{E^{u,0}(\Phi(\rho))})|$ défini en (2.2) exprime aussi cette contraction, mais dans les coordonnées différentes. Pour n assez grand, l'inégalité ci-dessus peut alors être étendue à

$$\prod_{j=0}^{n-1} J_{S_{n-j}}(\phi_{S_n}^{-j}(x)) \leq C \prod_{j=0}^{n-1} J_{S^u(\Phi^{-j}(x, \xi))}(\phi_{S_n}^{-j}(x)) \leq \tilde{C} \prod_{j=0}^{n-1} J^u(\Phi^{-j}(\rho)). \quad (5.47)$$

ou C, \tilde{C} dépendent seulement de M . Les produits ci-dessus décroissent exponentiellement avec n à cause de la propriété d'Anosov. Puisque la fonction d'amortissement est positive, il s'ensuit que le membre de droite de (5.45) décroît aussi exponentiellement avec n . Souvenons-nous que $1 \leq n \leq Nt_0$ et $N = T \log \hbar^{-1}$. En utilisant (5.46), nous voyons donc que les restes R_K^n dans (5.41) sont uniformément bornés : il satisfont

$$\|R_K^n\| \leq C_K, \quad C_K = C^{(K)}(M, \chi, \mathcal{V})$$

uniformément en n et z_0 , le point sur lequel δ_{χ, z_0} était basé. De par la construction même des $b_k^n(t, x)$, nous avons donc

$$v^n = \mathcal{U}^1 P_{\gamma_n} \dots \mathcal{U}^1 P_{\gamma_1} \mathcal{U}^1 \delta_\chi = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{d/2}} \sum_{k=0}^{K-1} \hbar^k b_k^n(1, \cdot) + \mathcal{O}_{L^2}(\hbar^{K-d/2}). \quad (5.48)$$

Les bornes sur les symboles b_k^n , $k > 0$ donnés dans le lemme 5.15 nous permettent, quitte à choisir \hbar assez petit – disons $\hbar \leq \hbar_0(\varepsilon)$, de contrôler v^n dans l'équation ci-dessus par le symbole principal b_0^n : si $\hbar \leq \hbar_0$, alors

$$\|\mathcal{U}^1 \mathbf{P}_{\gamma_n} \dots \mathcal{U}^1 \mathbf{P}_{\gamma_1} \mathcal{U}^1 \delta_\chi\| \leq 2(2\pi\hbar)^{-\frac{d}{2}} \|b_0^n(1, \cdot)\| + C_K \hbar^{K-d/2}.$$

En utilisant maintenant (5.43), (5.47) et le fait que $|\mathbf{F}_\gamma| \leq 1$, nous pouvons conclure qu'avec a^u comme en (5.3), nous avons

$$\|b_0^n(1, x)\| \leq C e^{n\mathcal{O}(\hbar)} \sup_{x \in \pi\Lambda^n(1)} \exp \sum_{j=1}^n a^u \circ \Phi^{-j}(x, d_x S_n(1, x))$$

Le facteur $e^{n\mathcal{O}(\hbar)}$ provient du fait que $q = \sqrt{2za}$ et que $z = \frac{1}{2} + \mathcal{O}(\hbar)$ d'après (5.15). Ici, $C = C(M)$ dépend seulement de la variété M . Considérons maintenant le cas particulier $n = Nt_0$ avec $N = T \log \hbar^{-1}$. Il s'ensuit immédiatement que

$$\sup_{x \in \pi\Lambda^{Nt_0}(1)} \exp \sum_{j=1}^{Nt_0} a^u \circ \Phi^{-j}(x, d_x S_n(1, x)) \leq \prod_{k=1}^N e^{\langle a^u \rangle_{t_0, \beta_k}}.$$

Par le principe de superposition déjà mentionné en (5.33), nous obtenons pour un $C = C(M) > 0$ dépendant seulement de M :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U} \mathbf{P}_{\gamma_{Nt_0}} \dots \mathcal{U} \mathbf{P}_{\gamma_1} \mathcal{U}^1 \text{Op}_\hbar(\chi)\| &\leq C \sum_\ell \sup_{z_0} \|\mathcal{U} \mathbf{P}_{\gamma_{Nt_0}} \dots \mathbf{P}_{\gamma_1} \mathcal{U}^1 \delta_{z, \alpha_0}^\ell\| \\ &\leq C \hbar^{-d/2} \|b_0^n\| + C_K \hbar^{K-d/2} \\ &\leq C \hbar^{-\frac{d}{2}} \prod_{k=1}^N e^{\langle a^u \rangle_{t_0, \beta_k}} \end{aligned}$$

Pour obtenir la dernière ligne, remarquons que K peut être choisi arbitrairement grand : puisque $n \leq Tt_0 \log \hbar^{-1}$, nous voyons que pour \hbar assez petit, le terme principal du membre de droite de la deuxième ligne est plus grand que $C_K \hbar^{K-d/2}$, de même $e^{Nt_0\mathcal{O}(\hbar)} = \mathcal{O}(1)$ est absorbé dans la constante. Ceci complète la preuve de la proposition 5.8.

Conclusion

Dans une première partie, nous avons étudiés des systèmes modèles appelés applications quantiques. Ce type de système peut être vu comme une mécanique quantique provenant de la quantification du tore \mathbb{T}^2 vu comme espace des phases classique modèle, muni d'un difféomorphisme symplectique jouant le rôle de la dynamique classique. On peut alors transposer à cette "mécanique quantique sur le tore" la plupart des résultats de base de l'analyse microlocale, avec comme avantage (analytique et numérique) la dimension finie des opérateurs étudiés et la dynamique à temps discret. Nous avons rendu ces applications sous-unitaires en introduisant une sorte d'amortissement, ou dissipation, qui consiste à composer une application unitaire avec un opérateur pseudodifférentiel elliptique de norme < 1 . Le travail publié effectué sur ces applications concernent leur spectre. En supposant la dynamique classique chaotique (ergodicité, propriété d'Anosov), nous avons pu montrer plusieurs résultats concernant la localisation précise de ce spectre dans le disque unité. Les méthodes utilisées concernent principalement l'analyse semiclassique transposée sur le 2-tore (théorème d'Egorov, calcul fonctionnel), ainsi que plusieurs résultats en systèmes dynamiques (théorème ergodique, grandes déviations, décroissance des corrélations), utilisés ici de façon essentielle. Ces résultats ont pour la plupart des analogues dans le cas de l'équation des ondes amorties : nous nous sommes naturellement orienté vers l'étude de cette équation dans la deuxième partie de la thèse.

Cette partie constitue le travail le plus récent. Si (M, g) est une variété riemannienne compacte, sans bords, nous avons considéré l'équation des ondes amorties :

$$(\partial_t^2 - \Delta_g + 2a\partial_t)u = 0, \quad a \in C^\infty(M)$$

Si $a \geq 0$, l'énergie d'une solution de cette équation décroît avec le temps, et c'est un problème classique (également important pour les applications) que d'estimer la vitesse de cette décroissance, en fonction de diverses hypothèses géométriques ou dynamiques que l'on peut faire sur le système. Le cas auquel je me suis intéressé suppose que la courbure de M est strictement négative, ce qui implique que le flot géodésique possède la propriété d'Anosov. Nous avons supposé la négativité de la pression topologique d'une certaine fonction sur l'espace cotangent unitaire S^*M . Cette fonction est donnée par $-a + \frac{1}{2}\varphi \log J^u$, où J^u est le jacobien instable du flot géodésique. Sous cette hypothèse, non équivalente au contrôle géométrique, nous avons alors montré une décroissance exponentielle de l'énergie pour toute données initiales assez lisses (en termes d'espaces de Sobolev), en calculant explicitement

le taux de décroissance et la perte de dérivées. Ce résultat découle de la présence d'un gap spectral dans une bande autour de l'axe réel et d'estimées de résolvante dans cette bande. Les outils utilisés ici proviennent des systèmes dynamiques (systèmes Anosov, formalisme thermodynamique) et de l'analyse semiclassique (opérateurs intégraux de Fourier).

Annexe A

Géométrie

A.1 Variétés Riemanniennes

Pour cette section, voir [PP90, GHL80] pour des références complètes.

A.1.1 Flots Géodésiques

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, et $c : [a, b] \rightarrow M$ une courbe C^1 tracée sur M . On définit la longueur de c par

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))} dt.$$

On définit une géodésique comme une courbe sur M qui extrémise la longueur ci dessus entre deux extrémités fixées $c(a), c(b)$. En considérant une famille de chemins $c_s(t) : [-\epsilon, \epsilon] \times [a, b] \rightarrow M$ telle que $c_0(t) = c(t)$, on peut calculer $\frac{d}{ds} L(c_s)|_{s=0}$. En imposant que cette quantité soit nulle, on trouve que c doit satisfaire

$$\nabla_{\dot{c}(t)} \dot{c}(t) = 0$$

où ∇ est la connexion de Levi-Civita. Puisque la longueur d'une géodésique est invariante par reparamétrisation, on peut toujours paramétrer c par la longueur d'arc. Remarquons que les solutions sont de vitesse constante, puisque

$$\frac{d}{dt} g(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = 2g(\nabla_{\dot{c}(t)} \dot{c}(t), \dot{c}(t)) = 0$$

Le flot géodésique sur le fibré unitaire $SM = \{(x, v) \in TM : g_x(v, v) = 1\}$ est une famille de difféomorphismes Φ^t à un paramètre réel t défini par

$$\Phi^t(x, v) = (\gamma_{x,v}(t), \gamma'_{x,v}(t))$$

où $\gamma_{x,v}(t)$ est la géodésique (unique) issue de x , avec comme vitesse initiale v de norme unité. Les géodésiques sont donc parcourues à vitesse 1.

Remarque A.1. Nous allons dans ce qui suit considérer uniquement l'espace tangent TM de M . Tous les résultats sont transposables à l'espace cotangent T^*M , à l'aide de l'identification usuelle entre TM et T^*M donnée par la métrique g .

A.1.2 Application exponentielle

L'application

$$\begin{aligned} \exp_x : T_x M &\rightarrow M \\ v &\mapsto \gamma_{x,v}(1) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme local près de 0. Le rayon d'injectivité de M est le plus grand $r \geq 0$ tel que \exp_x soit un difféomorphisme local sur la boule de rayon r pour tout $x \in M$. En particulier, deux points à distance $d \leq r$ ne peuvent être reliés que par au plus une géodésique de longueur $\leq d$.

A.1.3 Courbure et Champs de Jacobi

Soient X, Y, Z trois champs de vecteurs non nuls. On définit le tenseur de courbure $R(X, Y)Z$ par

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

qui est un champ de vecteurs sur M . La courbure sectionnelle des plans générés par $X(m), Y(m)$ est définie par

$$K_m(X, Y) = \frac{g_m(R(X, Y)X, Y)}{|X \wedge Y|},$$

où $|X \wedge Y|$ est l'aire du parallélogramme généré par $X(m), Y(m)$ mesuré avec la métrique g . On peut montrer que K_m ne dépend pas des vecteurs choisis pour représenter un même plan tangent en m , et que $K_m(X, Y)$ est la courbure de la surface (comme sous variété de M) donnée par $\exp_m(tX(m) + sY(m))$ pour t, s petits.

Soit maintenant $f : [-\epsilon, \epsilon] \times [0, 1]$ une variation (C^3) de géodésique, i.e. $f(0, t) = \gamma(t)$ et $f_s(t) = \gamma_s(t)$ est encore une géodésique. Alors on appelle champ de vecteurs de Jacobi le long de γ le champ de vecteurs

$$J(t) = \frac{\partial}{\partial s} f(s, t)|_{s=0}$$

Un champ de Jacobi satisfait l'équation fondamentale

$$J''(t) + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0 \tag{A.1}$$

où $J'(t) \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_{\gamma'(t)} J(t)$. Un tel champ est déterminé par sa valeur ainsi que celle de sa dérivée en un point de γ .

A.1.4 Propriété d'Anosov pour les flots géodésiques

L'établissement de la propriété d'Anosov pour les flots géodésiques en courbure négative passe par une compréhension fine de la structure de TSM . Nous avons résumé ici les exposés de [Rug07, PP90] sur le sujet.

A.1.4.1 Décomposition de TSM en fibrés horizontaux et verticaux

Considérons le flot géodésique comme groupe à un paramètre $\Phi^t : SM \rightarrow SM$. L'espace tangent à $\rho = (x, \xi) \in SM$ peut se décomposer en deux sous-espaces transverses, appelés espaces vertical et horizontal que l'on construit à l'aide de deux applications linéaires de TSM vers SM .

Soit $\pi : TM \rightarrow M$ la projection canonique. Sa différentielle est telle que

$$d_\rho \pi : \begin{cases} T_\rho SM \rightarrow T_x M \\ (\delta x, \delta \xi) \mapsto \delta x \end{cases}$$

L'espace vertical V_ρ au point $\rho \in SM$ est par définition :

$$V_\rho = \ker d_\rho \pi,$$

et l'on a $\dim V_\rho = d - 1$.

Remarque A.2. Il est aisé de voir que les éléments de $T_\rho S_x M$ s'identifient naturellement aux vecteurs de l'espace vertical V_ρ , puisque le point x est "fixé" dans ce cas.

Pour définir l'espace horizontal, on part de $Z \in T_\rho SM$ et d'un courbe $C(t) = (x(t), \xi(t))$ tracée sur SM , définie au voisinage de 0 et telle que

$$C'(0) = (x'(t), \xi'(t)) = Z.$$

La courbe $C(t)$ engendre une courbe sur M donnée par $x(t) = \pi \circ C(t)$ ainsi qu'un champ de vecteurs $\xi(t)$ le long de $x(t)$. Ceci permet de définir l'application linéaire

$$\mathcal{K}_\rho : \begin{cases} T_\rho(SM) \rightarrow T_x M \\ Z \mapsto \nabla_{x'(t)} \xi(t)|_{t=0} \end{cases}$$

Par définition, l'espace horizontal H_ρ au point ρ est défini par

$$H_\rho = \ker \mathcal{K}_\rho$$

Comme il existe une unique manière de transporter parallèlement un vecteur quelconque de $T_x M$ le long de $x(t)$, on voit que l'espace des vecteurs horizontaux s'identifie avec $T_x M$, c'est donc un espace vectoriel de dimension d . En utilisant des coordonnées locales sur $T_\rho TM$, on peut montrer en se servant des symboles de Christoffel qu'il est exclu qu'un élément non

nul de $T_\rho SM$ soit à la fois horizontal et vertical. En d'autres termes, les espaces V_ρ et H_ρ sont transverses :

$$T_\rho SM = H_\rho \oplus V_\rho.$$

Cette décomposition permet de définir une métrique sur SM appelée métrique de Sasaki, donnée par

$$\langle X, Y \rangle_\rho = \langle d_\rho \pi X, d_\rho \pi Y \rangle_x + \langle \mathcal{K}_\rho(X), \mathcal{K}_\rho(Y) \rangle_x$$

Par construction, les espaces verticaux et horizontaux sont orthogonaux pour cette métrique. En particulier,

$$\|X\|_S^2 = \|d_\rho \pi X\|_x^2 + \|\mathcal{K}_\rho X\|_\rho^2.$$

Le lemme suivant est capital, car il relie les champs de Jacobi à la décomposition de la proposition précédente :

Lemme A.3. *Soit $\theta = (h, v) \in H_\rho \oplus V_\rho$ un vecteur de $T_\rho SM$. L'application qui à θ associe le champ de vecteurs de Jacobi $J_{h,v}(t)$ tel que $J_{h,v}(0) = d_\rho \pi(\theta)$, $J'_{h,v}(0) = \mathcal{K}_\rho(\theta)$ est un isomorphisme linéaire de $T_\rho SM$ vers l'ensemble des champs de Jacobi le long de γ_ρ , qui est la géodésique déterminée par ρ . De plus,*

$$D_\rho \Phi^t(h, v) = (J_{h,v}(t), J'_{h,v}(t))$$

dans les coordonnées de $T_{\Phi^t \rho}(SM) = H_\rho \oplus V_\rho$.

Ce lemme est important, car il établit un lien fort entre la structure de $T_\rho SM$ et celle des champs de Jacobi le long de γ_ρ .

On peut montrer que si $J(t)$ est un champ de Jacobi le long d'une géodésique $\gamma(t)$, alors

$$\frac{d^2}{dt^2} g_{\gamma(t)}(J(t), \gamma'(t)) = \frac{d}{dt} g_{\gamma(t)}(J'(t), \gamma'(t)) = 0,$$

ce qui signifie que $g_{\gamma(t)}(J(t), \gamma'(t)) = g_{\gamma(0)}(J(0), \gamma'(0)) + t g_{\gamma(0)}(J'(0), \gamma'(0))$. Donc si $J(0)$ et $J'(0)$ sont perpendiculaire à $\gamma(0)$ alors $J(t)$ reste perpendiculaire au flot. Ceci indique qu'il suffit d'étudier la dynamique de $D\Phi^t$ au niveau du sous-fibré de TSM perpendiculaire au flot. En effet, si on note N_ρ le sous-espace de $T_\rho SM$ orthogonal à $\mathbb{R}\mathcal{X}_H$, la direction du flot, alors on peut montrer à l'aide des remarques précédentes que N est invariant le long du flot.

A.1.4.2 Champs de Jacobi stables et instables

Le fait que la courbure de M soit strictement négative implique l'absence de points conjugués sur M . Ceci permet de définir les champs de Jacobi stables et instables. Soit $V \in T_{\gamma(0)}M$ un vecteur perpendiculaire à $\gamma'(0)$. Il existe un unique champ de Jacobi $J_V^s(t)$ appelé champ stable le long de γ tel que $J_V^s(0) = V$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} J_V^s(t) = 0$. Puisqu'il n'y a pas de points conjugués sur M , un tel champ existe et est unique, de plus c'est un champ perpendiculaire à $\gamma'(t)$ pour tout t . De même, on montre l'existence d'un unique champ de Jacobi instable $J_V^u(t)$, perpendiculaire à $\gamma'(t)$ pour tout t , et qui satisfait $J_V^u(0) = V$,

$\lim_{t \rightarrow -\infty} J_v^u(t) = 0$. Puisque V est choisi librement dans le sous-espace de dimension $d - 1$ de $T_{\gamma'(0)}M$ perpendiculaire à $\gamma'(0)$, on voit qu'il existe $d - 1$ champs de Jacobi stables linéairement indépendants, et $d - 1$ champs instables linéairement indépendants également. Ils forment donc une base de l'ensemble des champs de Jacobi perpendiculaires à $\gamma'(t)$. Si $e_1(t) = \gamma'(t), \dots, e_d(t)$ est une base orthonormale définie le long de $T_{\gamma(t)}M$, ces champs de base sont définis par leurs conditions initiales

$$J_i^{s(u)}(0) = e_i(0), \quad i \in \llbracket 1, d \rrbracket.$$

Si l'on définit la matrice

$$\mathbf{K}(\gamma(t))_{ij} = g_{\gamma(t)}(R(\gamma'(t), e_i(t))\gamma'(t), e_j(t))$$

l'équation de Jacobi pour $J_i^{s(u)}$ écrite dans les coordonnées définies par $e_i(t)$ donne lieu à une équation de Jacobi matricielle

$$\mathbf{J}''(t) + \mathbf{K}(\gamma(t))\mathbf{J}(t) = 0$$

où $\mathbf{J}_{ij}(t) = g_{\gamma(t)}(J_i(t), e_j(t))$ et $J_i = J_i^{s(u)}$. On peut montrer en utilisant des résultats de comparaison de solutions des équations différentielles ordinaires du second ordre que ces champs de Jacobi sont des solutions de (A.1) qui satisfont

$$\|J_V^s(t)\| \leq e^{-\lambda t} \|J_V^s(0)\|, \quad t \geq 0, \quad \text{et} \quad \|J_V^u(t)\| \leq e^{\lambda t} \|J_V^u(0)\|, \quad t \leq 0.$$

Ceci est dû au fait que les coefficients $g_{\gamma(t)}(R(\gamma'(t), e_i(t))\gamma'(t), e_j(t))$ de \mathbf{K} sont strictement négatifs à cause de l'hypothèse faite sur la courbure.

La décomposition de $T S^*M$ en sous espaces neutres, stables et instables se fait de la manière suivante. Soit $\rho = \gamma(0)$ et $\mathcal{H}_\rho = H_\rho \cap N_\rho$, $\mathcal{V}_\rho = V_\rho \cap N_\rho$. On a donc

$$T S M = \mathbb{R}\mathcal{X}_\rho \oplus \mathcal{H}_\rho \oplus \mathcal{V}_\rho.$$

Maintenant, un champ de Jacobi stable $J_i^s(0)$ définit de manière unique (à l'aide du lemme A.3) deux vecteurs de N_ρ donnés par $(J_i^s(0), J_i^{s'}(0)) = (V, W)$ dans les coordonnées $\mathcal{H}_\rho \oplus \mathcal{V}_\rho$. Nous pouvons faire de même pour tous les champs de Jacobi instables $J_i^u(0)$, et nous obtenons alors la décomposition hyperbolique souhaitée de $T S M$.

Remarque A.4. Transversalité de S_x^*M par rapport aux variétés stables et instables. Soit $\rho = (x, \xi) \in S^*M$. Nous avons vu que $T_\rho S_x^*M \simeq V_\rho$. D'après ce qui précède, l'espace stable $E^s(\rho)$ est généré par les vecteurs du type $v_i^s = (J_i^s(0), J_i^{s'}(0)) \in \mathcal{H}_\rho \oplus \mathcal{V}_\rho$. Puisque $J_i^s(0) = e_i(0)$ est de norme 1, nous voyons que l'angle θ_i formé par v_i et V_ρ est minoré uniformément par une constante non nulle puisque M est compacte. Ceci signifie que $E^s(\rho)$ est uniformément transverse à $T_\rho S_x^*M$. De même, on montrerait que c'est aussi le cas pour $E^u(\rho)$. Soit alors $h = (h^u, h^s) \in E^u(\rho) \oplus E^s(\rho)$ un vecteur de $T_\rho S_x^*M$. Alors $d_\rho \Phi^t(h) = d_\rho \Phi^t(h^u) + \mathcal{O}(e^{-\lambda t}) \in T_{\Phi^t \rho} \Phi^t(S_x^*M)$. Mais par construction, $d_\rho \Phi^t(h^u) \in E^u(\Phi^t \rho)$. Puisque S_x^*M est transverse à $W^s(\rho)$, nous avons $h^u \neq 0$, donc nous voyons effectivement que $\Phi^t S_x^*M$ se rapproche exponentiellement vite de la variété instable $W^u(\rho)$.

A.2 Densités

Une bonne référence pour cette section est [Dui96]. Une densité a d'ordre α sur une variété M lisse de dimension d est une section d'un fibré en droite complexe au dessus de M dont les fonctions de transition sont définies comme suit. Pour deux cartes (U_1, f_1) et (U_2, f_2) , si $y = f_2 \circ f_1^{-1}(x)$ alors

$$a \circ f_2^{-1}(y) = a \circ f_1^{-1}(x) |\det d(f_1^{-1} f_2)|^\alpha$$

On écrira souvent pour des raisons pratiques une densité comme $a = a(x)|dx|^\alpha$. Si $\phi : M \rightarrow M$ est un difféomorphisme, on peut "tirer en arrière" les densités par la formule

$$[\phi^* a](x) |dx|^\alpha = a \circ \phi(x) |\det d_x \phi(x)|^\alpha |dx|^\alpha.$$

Remarque A.5. On peut voir les densités d'ordre 1 sur \mathbb{R}^d comme les duales des fonctions. Cette dualité est donnée par l'intégration :

$$\langle f, a \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) a(x) |dx|$$

Ainsi, deux demi densités (ou une densité d'ordre α et une d'ordre $1 - \alpha$) a, b sont en dualité par la formule

$$\langle a, b \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} ab |dx|$$

On remarque alors qu'une manière naturelle d'introduire les densités d'ordre quelconque sur M est d'avoir une mesure d'intégration "naturelle" sur M . En prenant la mesure Riemannienne $\sqrt{g}|dx|$, on justifie ainsi l'identification entre fonctions et densités $a \rightarrow a|d\text{vol}|^\alpha = a(x)\sqrt{g}^\alpha|dx|^\alpha$ sur M .

Proposition A.6. *Soit $a|dx|^\alpha$ une densité d'ordre α . Si X est un champ de vecteurs, alors on a*

$$\mathcal{L}_X(a|dx|^\alpha) = (X[a] + \alpha a \operatorname{div} X)|dx|^\alpha$$

où \mathcal{L}_X est la dérivée de Lie le long du champ de vecteurs X , et $\operatorname{div} X = \partial_i X^i$.

Démonstration. En effet, par définition

$$\mathcal{L}_X(a|dx|^\alpha) = \frac{d}{dt} \Phi_t^*(a|dx|^\alpha)|_{t=0}$$

où l'on a noté Φ_t le flot engendré par le champ de vecteur X . Or, par construction nous avons

$$\Phi_t^* a(x) |dx|^\alpha = a(\Phi_t(x)) |\det d\Phi_t(x)|^\alpha |dx|^\alpha$$

Dans des coordonnées locales où l'on identifie un voisinage de x avec son espace tangent $T_x M$, on a :

$$\Phi_t(x) = x + tX(x) + \mathcal{O}(t^2)$$

d'où on tire que $d\Phi_t = \text{Id} + t dX + \mathcal{O}(t^2)$. Il suffit de prendre le déterminant, ce qui donne

$$\det d\Phi_t = 1 + t \text{Tr}(dX) + \mathcal{O}(t^2) = 1 + t \text{div} X + \mathcal{O}(t^2).$$

Il s'ensuit alors que

$$\frac{d}{dt} \det d\Phi_t|_{t=0} = \text{div} X.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Phi_t^* a|_{t=0} &= \partial_i a(x) X^i(x) |dx|^\alpha + a(x) \frac{d}{dt} |\det d\Phi_t|^\alpha|_{t=0} |dx|^\alpha \\ &= X[a] |dx|^\alpha + a \alpha \text{div} X |dx|^\alpha \end{aligned}$$

□

En particulier, si on considère une demi-densité Riemannienne $a |d\text{vol}|^\alpha = a \sqrt{g}^\alpha |dx|^\alpha$, on trouve que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(a |d\text{vol}|^\alpha) &= (X^i \partial_i [a \sqrt{g}^\alpha] + \alpha \sqrt{g}^\alpha \partial_i X^i) |dx|^\alpha \\ &= X^i (\sqrt{g}^\alpha \partial_i a + \frac{a}{\sqrt{g}} \alpha \sqrt{g}^\alpha \partial_i \sqrt{g}) |dx|^\alpha + \alpha \sqrt{g}^\alpha \partial_i X^i |dx|^\alpha \\ &= X[a] |d\mu_g|^\alpha + a \alpha \frac{1}{\sqrt{g}} (\partial_i \sqrt{g} + \sqrt{g} \partial_i X^i) |d\text{vol}|^\alpha \\ &= (X[a] + a \alpha \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \sqrt{g} X^i) |d\text{vol}|^\alpha \\ &= (X[a] + a \alpha \text{div}_g X) |d\text{vol}|^\alpha. \end{aligned}$$

où

$$\text{div}_g X \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \sqrt{g} X^i.$$

A.3 Géométrie symplectique

Les résultats présentés ici proviennent essentiellement de [Hör83, GS94, DS99].

A.3.1 Algèbre linéaire symplectique

Une forme symplectique ω sur un espace vectoriel E de dimension finie est une forme bilinéaire, antisymétrique non-dégénérée. Dans ce cas, on appelle (E, ω) un espace vectoriel symplectique.

Lemme A.7. *Il existe une base de E , notée $(e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_d, f_d)$ telle que $\omega = \sum_{i=1}^d f_i^* \wedge e_i^*$ (les e_i^*, \dots dénotent la base duale de la précédente). En particulier, la dimension de E est paire égale à $2n$, et l'application $x \mapsto \omega(x, \cdot)$ de E dans E^* est un isomorphisme.*

Par exemple, $F \oplus F^*$ est naturellement muni d'une structure symplectique en posant

$$\omega((x, \xi), (x', \xi')) = \xi(x') - \xi'(x).$$

En introduisant une base $\frac{\partial}{\partial x_i}$ de F et $\frac{\partial}{\partial \xi_i}$ de F^* , on obtient la forme canonique sur \mathbb{R}^{2n} avec

$$\omega = \sum d\xi_i \wedge dx_i$$

L'orthogonal de $L \subset E$ pour la forme ω se notera $L^{\perp\omega}$. Il vérifie :

$$\begin{aligned} L \subset M &\Rightarrow M^{\perp\omega} \subset L^{\perp\omega} \\ (L^{\perp\omega})^{\perp\omega} &= L \\ (L \cap M)^{\perp\omega} &= L^{\perp\omega} + M^{\perp\omega} \\ (L + M)^{\perp\omega} &= L^{\perp\omega} \cap M^{\perp\omega} \\ \dim L + \dim L^{\perp\omega} &= \dim E \end{aligned}$$

Définition A.8. On dira que $L \subset E$ est isotrope si $L \subset L^{\perp\omega}$, coisotrope si $L^{\perp\omega} \subset L$, lagrangien si $L^{\perp\omega} = L$. En fait, L est lagrangien ssi L est isotrope et $\dim L = d$: les espaces lagrangiens sont des sous-espaces isotropes maximaux (au sens de l'inclusion).

A.3.2 Variétés symplectiques

Une variété symplectique (X, ω) est une variété X (qu'on supposera C^∞) munie d'une 2-forme différentielle ω fermée ($d\omega = 0$), non dégénérée. En d'autres termes, l'espace cotangent T_ρ^*X est muni en tout point ρ d'une structure d'espace vectoriel symplectique. Si U et V sont deux ouverts de X et $\kappa : U \rightarrow V$ est un difféomorphisme, on dit que κ est *canonique* (ou encore symplectique) s'il préserve la forme canonique ω :

$$\kappa^*\omega|_U = \omega|_V$$

où $\kappa^*\omega(u, v)|_\rho = \omega(d\kappa_\rho u, d\kappa_\rho v)$. Comme exemple fondamental, citons le relevé canonique d'un difféomorphisme $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$. En cherchant une matrice A telle que

$$\mathbb{R}^{2d} \ni (x, \xi) \rightarrow \tilde{f}(x, \xi) = (f(x), A(x, \xi)\xi) \in \mathbb{R}^{2d}$$

soit canonique pour la forme $\omega = \sum_i d\xi_i \wedge dx_i$, on trouve

$$\tilde{f}(x, \xi) = (f(x), {}^t df_x^{-1} \xi)$$

On dit que \tilde{f} est le *relevé canonique* de f . Il est alors naturel d'interpréter p comme la variable duale de x , et de voir $\mathbb{R}^{2d} \simeq T^*\mathbb{R}^d$ comme l'espace cotangent à \mathbb{R}^d . Plus généralement, le fibré cotangent $X = T^*M$ d'une variété M (compacte pour simplifier¹) de dimension d est naturellement muni d'une structure symplectique. Ceci peut se voir de deux manières. En

1. la généralisation au cas non compact ne pose pas de problème

coordonnées, si ϕ est une carte locale, alors on peut relever ϕ en une carte Φ de T^*M appelée carte induite, telle que

$$\Phi : \begin{cases} T^*M \rightarrow T^*\mathbb{R}^d \\ (x, \xi) \mapsto (\phi(x), {}^t d\phi_x^{-1}\xi) \end{cases}$$

On peut alors définir la forme symplectique ω sur T^*M en posant

$$\omega = \Phi^* \omega_0$$

où $\omega_0 = d\xi \wedge dx$ est la forme canonique sur $T^*\mathbb{R}^d$. On peut vérifier que ceci ne dépend pas de la carte locale. Il est possible de définir ω de manière plus intrinsèque. Soit π la projection canonique $T^*M \rightarrow M$. Alors $d\pi_{(x,\xi)} : T_{(x,\xi)}T^*M \rightarrow T^*M$ et on définit la 1-forme canonique sur $T_{(x,\xi)}T^*M$ par :

$$\alpha_{(x,\xi)} = \xi \circ d\pi_{(x,\xi)}$$

On pose ensuite $\omega = d\alpha$. En coordonnées locales, on a $\alpha = \xi dx$ et $\omega = d\xi \wedge dx$. La 2-forme ω s'appelle la 2-forme canonique sur T^*M . Elle induit sur T^*M une forme volume $\frac{1}{d!} |\wedge^d \omega|$ non dégénérée, appelée mesure de Liouville, qui fait de T^*M une variété orientée.

Pour terminer ce paragraphe, mentionnons le théorème de Darboux, qui affirme que localement, "toutes les variétés symplectiques se ressemblent" puisque si X est symplectique, on peut toujours trouver des coordonnées locales (x, ξ) autour d'un point $\rho \in X$ dans lesquelles la 2-forme s'écrit $\omega = \sum_{i=1}^d d\xi_i \wedge dx_i$.

A.3.3 Flots hamiltoniens

Soit $H(x, \xi) \in C^\infty(T^*M)$ un hamiltonien. On a vu au début du chapitre 2 que le champ hamiltonien \mathcal{X}_H engendre un flot $e^{t\mathcal{X}_H}$ sur T^*M . On peut vérifier que

$$dH = -\omega(\mathcal{X}_H, \cdot)$$

ce qui montre qu'on peut en fait définir de manière intrinsèque \mathcal{X}_H comme le gradient symplectique de H par rapport à ω . Notons quelques propriétés essentielles :

Théorème A.9. *Soit $H \in C^\infty(T^*M)$, et ω la 2-forme canonique sur T^*M . Les propriétés suivantes sont satisfaites :*

1. H est constant le long des trajectoires de $e^{t\mathcal{X}_H}$.
2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application $e^{t\mathcal{X}_H} : T^*M \rightarrow T^*M$ est canonique.
3. Le flot $e^{t\mathcal{X}_H}$ préserve la mesure de Liouville $dL = \frac{1}{d!} |\wedge^d \omega|$ sur T^*M .
4. Le flot $e^{t\mathcal{X}_H}$ préserve la mesure de Liouville dL_E sur les couches d'énergie constante $H(x, \xi) = E$.
5. Si $\kappa : T^*M \rightarrow T^*M$ est canonique, alors $\mathcal{X}_H = \kappa_*(\mathcal{X}_{\kappa^*H})$, autrement dit le pull-back de \mathcal{X}_H est égal au champ hamiltonien généré par le pull-back de H .

Démonstration. (1) se montre en utilisant le fait que $dH(\mathcal{X}_H) = -\omega(\mathcal{X}_H, \mathcal{X}_H) = 0$. Le point (2) se montre à l'aide de la formule de Cartan :

$$\mathcal{L}_{\mathcal{X}_H}\omega = d(\mathcal{X}_H \lrcorner \omega) + \mathcal{X}_H \lrcorner d\omega = -d^2H = 0, \quad \mathcal{X} \lrcorner \omega \stackrel{\text{def}}{=} \omega(\mathcal{X}, \cdot)$$

Les points (3) et (4) sont des conséquences immédiates de (2). Enfin, (5) se montre en calculant $\mathcal{X}_{\kappa^*H} \lrcorner \omega = \kappa^*(\mathcal{X}_H) \lrcorner \omega$ et en utilisant le fait que ω est non-dégénérée. \square

A.3.4 Variétés lagrangiennes

Une sous-variété de X est isotrope (resp. coisotrope, lagrangienne) si son espace tangent $T_\rho\Lambda \subset T_\rho X$ vu comme sous espace vectoriel de $T_\rho X$ est isotrope (resp. coisotrope, lagrangien). Ainsi, Λ est lagrangienne ssi pour tout $\rho \in \Lambda$, on a $T_\rho\Lambda^\perp = T_\rho\Lambda$, ssi $\omega|_\Lambda = 0$ et $\dim\Lambda = d$. Dans ce qui suit on va toujours s'intéresser aux variétés lagrangiennes de $X \stackrel{\text{def}}{=} T^*M$, muni de sa structure symplectique canonique.

Exemple. Si M est muni de la forme symplectique canonique, alors les espaces affines

$$\{x_0\} \times \mathbb{R}^{n^*} \simeq T_{x_0}^*X$$

sont lagrangiens. De même, si $\Omega \subset X$ est un ouvert et a est une 1-forme sur Ω , alors, en notant $\text{graph } a = \{(x, a(x))\} \subset T^*X$,

$$\text{graph } a \text{ est lagrangien} \Leftrightarrow da = 0$$

Réciproquement, $\{(d_\xi f(\xi), \xi)\} \subset T^*M$ est aussi lagrangien. Le fait que le graphe d'une 1-forme soit toujours lagrangien n'est pas anodin :

Théorème A.10. [GS94] Soit Λ une sous variété de T^*M telle que $\pi|_\Lambda : \Lambda \rightarrow M$ est un difféomorphisme local. On a équivalence entre :

1. Λ est lagrangienne
2. Pour tout $\rho \in \Lambda$, il existe $\varphi \in C^\infty(M)$ tel qu'au voisinage de ρ , on ait $\Lambda = \text{graph}(d\varphi)$.

On dit alors que φ est une *fonction génératrice* de Λ . Les points pour lesquels $\pi|_\Lambda$ n'est pas un difféomorphisme au voisinage de ρ s'appelle la caustique de Λ . En élargissant un peu la notion de fonction génératrice, on peut montrer que toute variété lagrangienne admet une fonction génératrice en chacun de ses points. Introduisons pour ceci la définition suivante :

Définition A.11. Soit $N \in \mathbb{N}$. On dit qu'une fonction $\varphi(x, \theta) \in C^\infty(M \times \mathbb{R}^N)$ est une fonction de phase non dégénérée si elle satisfait :

1. $d_{x,\theta}\varphi \neq 0$
2. Si $d_\theta\varphi(x, \theta) = 0$, alors au point (x, θ) les différentielles $d\partial_{\theta_1}\varphi, \dots, d\partial_{\theta_N}\varphi$ sont indépendantes.

L'ensemble critique de φ est par définition

$$C_\varphi = \{(x, \theta) : d_\theta \varphi(x, \theta) = 0\} \quad (\text{A.2})$$

D'après les hypothèses faites sur φ , C_φ est une sous-variété fermée de $M \times \mathbb{R}^N$ de codimension N , conique si φ est homogène de degré 1 en θ . De plus :

Proposition A.12. *L'application*

$$j_\varphi : \begin{cases} C_\varphi \rightarrow T^*M \\ (x, \theta) \mapsto (x, d_x \varphi(x, \theta)) \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

est localement injective. Son image est une variété lagrangienne de T^*M , que l'on note Λ_φ .

Le fait que j_φ soit injective vient du point (2) de la définition précédente. En identifiant C_φ et Λ_φ , on a

$$\alpha|_{\Lambda_\varphi} = d\varphi|_{C_\varphi} = (d\varphi)|_{C_\varphi}$$

et donc $\omega = d\alpha$ s'annule sur C_φ (on rappelle que α est la 1-forme canonique).

Dans ce cas, on dit encore que φ est une fonction génératrice pour Λ_φ . Le résultat suivant affirme que la réciproque est toujours vraie, au moins localement :

Théorème A.13. *Soit $\rho \in \Lambda$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ et une fonction de phase non dégénérée $\varphi(x, \theta) \in C^\infty(M \times \mathbb{R}^N)$ telle que au voisinage de ρ , on ait*

$$\Lambda = \Lambda_\varphi.$$

Dans le théorème précédent, on montre qu'en fait on peut prendre $N = \dim \ker d\pi_\Lambda \leq d$.

A.3.5 Équations de Hamilton-Jacobi et Fonctions génératrices

Soit $e^{t\mathcal{X}_H} : T^*M \rightarrow T^*M$ le flot d'un champ hamiltonien \mathcal{X}_H engendré par H . Soit U un ouvert borné, contractible de T^*M centré en $(y_0, 0)$. Pour simplifier, on supposera que dans une carte locale, $y_0 = 0$ et donc on identifiera U à un ouvert borné de \mathbb{R}^{2d} centré en $(0, 0)$. Pour (y, η) dans U on note $e^{t\mathcal{X}_H}(y, \eta) = (y(t), \eta(t))$. On suppose enfin que la projection suivante de graphe de $e^{t\mathcal{X}_H}$

$$(t, y, \eta, y(t), \eta(t)) \rightarrow (t, y(t), \eta) \quad (\text{A.4})$$

est un difféomorphisme local pour $|t| \leq t_0$ où $t_0 > 0$. On a le résultat suivant (voir [Hör83, EZ]) :

Théorème A.14. *Pour $|t| \leq t_0$, il existe une fonction lisse $\varphi(t, x, \eta)$ définie dans $[-t_0, t_0] \times U \times U$ telle que*

$$e^{t\mathcal{X}_H}(y, \eta) = (x, \xi) \quad \Leftrightarrow \quad \xi = \partial_x \varphi(t, x, \eta) \quad \text{et} \quad y = \partial_\eta \varphi(t, x, \eta)$$

De plus, $\det \partial_{x\eta}^2 \varphi \neq 0$ et φ est solution de l'équation de Hamilton-Jacobi :

$$\begin{cases} \partial_t \varphi(t, x, \eta) + H(x, \partial_x \varphi(t, x, \eta)) = 0 \\ \varphi(0, x, \eta) = \langle x, \eta \rangle. \end{cases}$$

La conclusion que l'on peut tirer du résultat précédent est que sous l'hypothèse d'une "bonne projection" du graphe de $e^{t\mathcal{X}_H}$, il existe une fonction génératrice pour le flot. Le théorème suivant est d'une grande importance dans la théorie des opérateurs intégraux de Fourier, car il permet en pratique de se ramener à l'aide d'un changement de variables à la situation où localement une transformation symplectique possède une fonction génératrice (voir par exemple [Mar02, GS94]) :

Théorème A.15. *Soit κ une transformation symplectique définie près de (y_0, η_0) . On suppose que $\eta_0 \neq 0$. Soit $(x_0, \xi_0) = \kappa(y_0, \eta_0)$. Il existe un changement de variables sur la base $f : M \rightarrow M$ défini près de $y_0 \in M$ tel que si l'on note*

$$\tilde{f} : (y, \eta) \mapsto (f(y), {}^t df_y^{-1} \eta) = (\tilde{y}, \tilde{\eta})$$

la transformation canonique induite, la projection

$$(\tilde{y}, \tilde{\eta}; x, \xi) \rightarrow (x, \tilde{\eta})$$

est un difféomorphisme local. Par conséquent, l'application symplectique

$$\kappa \circ \tilde{f}^{-1} : (\tilde{y}, \tilde{\eta}) \rightarrow (x, \xi)$$

admet une fonction génératrice $\varphi(x, \eta)$ définie près de $(x_0, \tilde{\eta}_0)$.

Autrement dit, quitte à changer de variables sur la base (et dans les fibres suivant la transformation canonique induite), une transformation symplectique a toujours localement une fonction génératrice.

Annexe B

Semigroupes d'évolution

Nous avons ici collecté quelques résultats provenant de [Paz83].

B.1 Opérateurs, spectre, résolvante

Soit X un espace de Banach. On considère dans la suite des opérateurs linéaires de X dans X . Un opérateur T linéaire sur X est borné si

$$\sup_{x \in X} \|Tx\| < \infty.$$

L'espace $\mathcal{L}(X)$ des opérateurs linéaires bornés sur X est alors un espace de Banach pour la norme

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|, \|x\| \leq 1\}, \quad T \in \mathcal{L}(X).$$

On rappelle d'abord trois notions de topologie sur l'ensemble des opérateurs linéaires (pas forcément bornés) sur X : une suite d'opérateurs T_n peut converger vers T au sens de la topologie d'opérateur :

1. uniforme :

$$\|T - T_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

2. forte :

$$\forall x \in X, \quad \|(T_n - T)x\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

3. faible :

$$\forall x, y \in X, \quad \langle x, (T_n - T)y \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

De manière générale, un opérateur linéaire sur X est une paire $(A, D(A))$ où $D(A) \subset X$ telle que A est une application linéaire de $D(A)$ dans X . Le graphe d'un opérateur $(A, D(A))$ est l'ensemble

$$\Gamma(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset X \times X$$

On dit que $(B, D(B))$ est une extension de $(A, D(A))$ lorsque $\Gamma(A) \subset \Gamma(B)$. Un opérateur est fermé lorsque son graphe est fermé, fermable lorsqu'il a une extension fermée. La fermeture de A est la plus petite extension fermée de A , si elle existe elle est unique.

B.2 Semigroupes d'évolution

Définition B.1. Un *semigroupe d'évolution* à un paramètre $(T(t))_{t \geq 0}$ sur un espace de Banach X est un opérateur borné qui satisfait l'équation fonctionnelle

$$\begin{cases} T(t)T(s) = T(t+s), \quad \forall t, s \geq 0. \\ T(0) = \text{Id} \end{cases}$$

On dit que T est uniformément continu (resp. fortement continu) si l'application

$$\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto T(t)$$

est continue pour la topologie d'opérateurs uniforme (resp. forte). Les semigroupes uniformément continus sont relativement simples, car tous de la forme

$$T(t) = e^{tA}$$

où $A \in \mathcal{L}(X)$ est borné. Dans ce cas, le spectre du semigroupe $\text{Spec } T(t)$ est égal à $\exp(t \text{Spec } A)$.

B.2.1 Semi groupes fortement continus

Pour un semigroupe fortement continu, l'application d'orbite de x :

$$F_x : t \mapsto T(t)x$$

être dérivable sur \mathbb{R}_+^* est équivalent à être dérivable à droite en 0. On appelle générateur de T l'opérateur A défini par

$$Ax = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x - x}{h},$$

dont le domaine $D(A)$ est défini par

$$D(A) = \{x \in X, F_x \text{ est dérivable en } t = 0^+\}$$

On peut montrer que A est linéaire, fermé et de domaine dense, et qu'il détermine le semi groupe de manière unique. De plus, on a les propriétés suivantes :

1. $D(A)$ est stable par $T(t)$.
2. Pour tout $t \geq 0$, $\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x$
3. Pour tout $t \geq 0$ et $x \in X$, $\int_0^t T(s)x ds \in D(A)$
4. $T(t)x = x + A \int_0^t T(s)x ds$
5. Si $x \in D(A)$, $T(t)x = x + \int_0^t T(s)Ax ds$

Tout semigroupe possède une borne de croissance "a priori" :

Proposition B.2. *Pour tout semi groupe fortement continu $T(t)$ il existe $w \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ tels que*

$$\|T(t)\| \leq M e^{wt} \quad (\text{B.1})$$

pour tout $t \geq 0$. On appelle borne de croissance de T l'infimum des $w \in \mathbb{R}$ tels que l'équation ci-dessus soit vérifiée, on le notera w_0 .

On dit que $T(t)$ est un *semigroupe de contractions* si $\omega = 0$ et $M = 1$. En particulier, si $M = 1$ mais $\omega \neq 0$, alors $e^{-\omega t} T(t)$ est un semigroupe de contractions. Enfin, des liens étroits existent entre la résolvante du générateur A et le semi groupe $T(t)$, que nous regroupons ici. Soit w, M comme en (B.1). Alors, on a les faits suivants :

Théorème B.3. *Soit w, M comme en (B.1). Alors, on a les faits suivants :*

1. *Si pour $z \in \mathbb{C}$ l'intégrale $R(z)x = \int_0^\infty e^{-zs} T(s)x ds$ existe pour tout $x \in X$, alors $z \in \rho(A)$ et*

$$\mathcal{R}(z, A) = R(z).$$

2. *Si $\text{Re } z > w$, alors $z \in \rho(A)$, et*

$$\mathcal{R}(z, A) = \int_0^\infty e^{-zs} T(s) ds$$

Si l'on note

$$s(A) = \sup\{\text{Re } \lambda : \lambda \in \text{Spec}(A)\}$$

on voit que

$$-\infty \leq s \leq w_0 < \infty.$$

Autrement dit, on n'a pas toujours égalité entre borne supérieure du spectre du générateur et borne de croissance du semigroupe.

B.2.2 Les théorèmes de génération des semigroupes

Dans le paragraphe précédent, on a vu que les générateurs des semigroupes sont fermés, à domaine dense, et leur spectre est contenu dans un demi plan. Dans les situations que nous concernent, nous avons toujours un opérateur pseudodifférentiel donné impliqué dans une EDP faisant intervenir le temps (ondes, Schrödinger). La question est donc de savoir dans quelles mesure on peut exprimer les solutions de ces EDP en terme de semigroupe. Nous n'aurons besoin de considérer que les semigroupes de contractions, pour lesquels on a le théorème suivant :

Théorème B.4. *Soit $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ un opérateur non borné de domaine dense. On suppose qu'il existe $\omega \in \mathbb{R}$ et $\lambda_0 > \omega$ tel que pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, l'application*

$$A + \lambda : D(A) \rightarrow X$$

soit bijective et vérifie

$$\|(A + \lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}$$

Alors A génère un semigroupe $T(t)$ de contractions fortement continu sur X , qui satisfait

$$\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$$

Si les hypothèses du théorèmes sont également satisfaites pour $-A$, on voit que $T(t)$ génère en fait un groupe d'évolution qui satisfait $T(s)T(t) = T(s+t)$ pour tout $s, t \in \mathbb{R}$. Dans le cas où X est un espace de Hilbert, on peut préciser les résultats précédents.

Définition B.5. Soit \mathcal{A} un opérateur non borné sur un espace de Hilbert \mathcal{H} . On dit que A est *accrétif* si pour tout $u \in D(A)$ on a

$$\operatorname{Re}(\langle Au, u \rangle) \geq 0$$

On dit que A est maximal accrétif s'il est accrétif et s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\lambda_0 + A$ soit surjectif de $D(A)$ sur \mathcal{H} .

Remarquons que si A est accrétif, alors par le lemme des opérateurs coercifs¹ $A + \lambda$ est injectif pour tout $\lambda > 0$. Il s'ensuit que si A est maximal accrétif, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\lambda_0 + A$ est bijectif de $\mathcal{D}(A)$ sur \mathcal{H} . Le théorème fondamental que nous utiliserons est le suivant :

Théorème B.6. *Sur un espace de Hilbert, les générateurs infinitésimaux des semigroupes de contractions sont les opérateurs maximaux accrétifs.*

Exemple B.7. Le générateur de l'équation des ondes amorties. Nous montrons ici, en utilisant les notations du chapitre 5, que $i\mathcal{B}$ génère un semigroupe d'évolution sur \mathcal{H} . Nous allons considérer séparément l'espace propre E_0 correspondant à la valeur propre $\tau = 0$ et aux fonctions propres constantes. Soit Π_0 le projecteur spectral sur E_0 . On a :

$$\Pi_0 = \frac{1}{2i\pi} \oint (-\mathcal{B})^{-1}$$

et un calcul simple utilisant (5.5) montre que

$$\mathcal{H} = E_0 \oplus \mathcal{H}_0$$

où \mathcal{H}_0 est un sous espace de Hilbert de \mathcal{H} de codimension 1, égal au noyau de la forme linéaire

$$\mathcal{H} \ni \mathbf{u} \mapsto k(\mathbf{u}) = \int (2i au_0 + u_1) d\operatorname{vol} \in \mathbb{C}.$$

L'espace E_0 est généré par les fonctions de la forme $\mathbf{c} = (c, 0)$ où c est une constante. On définit une norme sur \mathcal{H}_0 dite norme "d'énergie" à partir du produit scalaire

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{H}_0} = \langle \nabla u_0, \nabla v_0 \rangle + \langle u_1, v_1 \rangle$$

1. Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est tel qu'il existe $C > 0$ vérifiant $|\langle Tu, u \rangle| \geq C\|u\|^2$ pour tout $u \in \mathcal{H}$ alors T est bijectif.

Nous la noterons $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_0}$. Cette norme est équivalente à $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ sur \mathcal{H}_0 car elle lui est comparable et rend \mathcal{H}_0 complet. Il existe donc $C > 0$ tel que pour tout $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_0$, on ait

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}} \leq C \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}_0}.$$

Nous allons d'abord montrer que \mathcal{B} engendre un semigroupe fortement continu de contractions sur \mathcal{H}_0 pour la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_0}$ en utilisant les résultats sur les semigroupes rappelés dans la section B.2. Premièrement, un calcul direct montre que $\langle i\mathcal{B}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathcal{H}_0} \geq 0$ car $a \geq 0$, donc $i\mathcal{B}$ est accréatif. Pour montrer que $i\mathcal{B}$ est maximal accréatif, il suffit de vérifier que pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $\lambda + i\mathcal{B}$ est surjectif de $D(\mathcal{B})$ sur \mathcal{H}_0 . En écrivant

$$(\lambda + i\mathcal{B})\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

on trouve que pour tout $v \in H^1$ on doit avoir

$$\langle \nabla u_0, \nabla v \rangle + \lambda^2 \langle u_0, v \rangle + 2\lambda \langle au_0, v \rangle = \langle i f_1 + (2a + \lambda)f_0, v \rangle.$$

On vérifie facilement que la forme sesquilinéaire de gauche $(u_0, v) \mapsto b(u_0, v)$ est coercive², donc on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram qui nous assure l'existence d'un unique u_0 satisfaisant l'équation ci-dessus pour tout v . La deuxième composante u_1 est alors donnée par $u_1 = \lambda u_0 - f_0$. Finalement, $\lambda + i\mathcal{B}$ est bien surjectif de $D(\mathcal{B})$ sur \mathcal{H}_0 . Une application du théorème B.6 montre que $i\mathcal{B}$ génère un semigroupe de contractions pour $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_0}$. Il est maintenant aisé de revenir à \mathcal{H} en écrivant pour $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$

$$\mathbf{u} = \Pi_0 \mathbf{u} + (1 - \Pi_0) \mathbf{u} \in E_0 \oplus \mathcal{H}_0$$

et nous obtenons le résultat suivant :

Proposition B.8. *L'opérateur $i\mathcal{B}$ est le générateur infinitésimal d'un semigroupe $e^{-it\mathcal{B}}$ fortement continu sur \mathcal{H} , tel que pour tout $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$, $\mathbf{u}(t) = e^{-it\mathcal{B}} \mathbf{u}$ est solution de (5.6). De plus, il existe $C > 0$ tel que*

$$\|e^{-it\mathcal{B}}\|_{\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}} \leq C, \quad \|e^{-it\mathcal{B}}\|_{\mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0} \leq 1.$$

B.2.3 Formule d'inversion

Dans de nombreux cas, on possède des estimations sur la résolvante d'un opérateur donné, et l'on cherche à en déduire des informations sur le semigroupe que cet opérateur génère. Une première manière consiste à utiliser la formule de Post-Widder :

$$T(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{t} \mathcal{R}\left(\frac{n}{t}, A\right) \right)^n$$

avec convergence uniforme pour t dans un ensemble compact. Cependant ceci nécessite de connaître les puissances de la résolvante, et une approche alternative peut s'avérer utile. En particulier, nous avons vu que la résolvante est en fait la transformée de Laplace du semigroupe. On peut donc chercher à inverser cette transformation. Une approche possible est donnée par le théorème suivant.

2. c'est à dire qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in H^1$, $|b(u, u)| \geq C \|u\|^2$.

Théorème B.9. *Soit T un semigroupe fortement continu, de taux de croissance w_0 . Alors, pour tout $x \in D(A^2)$ et $\alpha > w_0$,*

$$T(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{\alpha-in}^{\alpha+in} e^{\lambda t} \mathcal{R}(\lambda, A)x d\lambda,$$

avec convergence uniforme pour t dans tout compact.

Notons que cette représentation du semigroupe impose de prendre $x \in D(A^2)$.

Annexe C

Divers

C.1 Systèmes dynamiques topologiques

Soit (X, d) un espace métrique. En particulier, c'est un espace topologique pour la topologie induite par la distance d . Si $\kappa : X \rightarrow X$ est une application continue, l'ensemble (X, κ) s'appelle un *système dynamique topologique*. L'étude de ce genre de systèmes tourne principalement autour de la question de savoir quelles sont les propriétés topologiques orbites de κ dans X .

Introduisons un peu de vocabulaire. Un point $x \in X$ est *récurrent* s'il existe une suite d'entiers (n_k) tels que $\kappa^{n_k} x \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$. Un point est *sédentaire* si pour tout voisinage U de x il existe $n > 0$ tel que $\kappa^n U \cap U \neq \emptyset$. L'ensemble des points sédentaire est fermé, κ -invariant et tout point récurrent est sédentaire. Un système dynamique $\kappa : X \rightarrow X$ est *topologiquement transitif* s'il existe un point x tel que l'orbite $(\kappa^n x)_{n \in \mathbb{N}}$ de x dans le futur est dense dans X . Enfin, κ est *mélangeant* si pour tout ouverts non vides U, V il existe $n_0 > 0$ tel que $\kappa^n(U) \cap V \neq \emptyset$ dès que $n \geq n_0$. En particulier, la propriété de mélange implique la transitivité.

Dans la grande majorité des cas que nous avons rencontré, $\kappa : X \rightarrow X$ est un homéomorphisme. On peut également généraliser sans ambiguïté les notions précédentes pour des systèmes dynamiques engendrés par un flot sur X , c'est à dire une application $\Phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ tel que $(t, x) \mapsto \Phi^t(x)$ est continu, et pour tous $s, t \in \mathbb{R}$ $\Phi^s \Phi^t = \Phi^{s+t} : X \rightarrow X$ et $\Phi^0 = \text{Id}$. Dans ce cas l'orbite de x est par définition $(\Phi^t x)_{t \in \mathbb{R}}$.

C.2 Phase Stationnaire

Considérons l'intégrale

$$I(\phi, a) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i\phi(x)}{\hbar}} a(x) dx,$$

avec $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Lorsque \hbar tend vers 0, les oscillations rapides de la phase vont avoir tendance à rendre cette intégrable négligeable, sauf si ϕ est stationnaire.

Lemme C.1. *Si $d\phi \neq 0$ sur le support de a , alors pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a*

$$|I(\phi, a)| \leq C\hbar^N \sum_{|\alpha| \leq N} \sup_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha a|$$

où C ne dépend que de $\text{supp } a$, de la dimension n et des dérivées de ϕ jusqu'à l'ordre $N+1$. En d'autres termes,

$$I(\phi, a) = \mathcal{O}(\hbar^\infty)$$

Démonstration. Définir $L = -i\hbar|\nabla\phi|^{-2}\nabla\phi \cdot \partial_x$ pour lequel on a $Le^{\frac{i\phi}{\hbar}} = e^{\frac{i\phi}{\hbar}}$, et intégrer par parties en utilisant le fait que $\text{supp } a$ est compact. \square

On voit donc que les points qui contribuent à l'intégrale sont localisés sur $C_\phi = \{x : d_x\phi = 0\}$. De tels points sont appelés points critiques. On dira qu'un point critique est non dégénéré si

$$d\phi_{x_c} = 0, \quad \det d\phi_{x_c} \neq 0.$$

Lemme C.2. *(Morse) Supposons que ϕ a un point critique non dégénéré en x_c . Il existe un voisinage U de x_c , un voisinage V de 0 et un difféomorphisme*

$$\kappa : U \rightarrow V$$

tel que

$$\phi \circ \kappa^{-1} : \begin{cases} V \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \phi(x_c) + \langle x, \text{Hess } \phi(x_c)x \rangle \end{cases}$$

où $\text{Hess } \phi(x_c)$ est la matrice Hessienne de ϕ au point x_c .

Démonstration. (Esquisse) Plaçons nous après un changement de variables linéaire de telle manière que $x_c = 0$. Par la formule de Taylor :

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi(x_c) + \int_0^1 (1-t) \langle x - x_c, \text{Hess } \phi(x_c + t(x - x_c))(x - x_c) \rangle dt \\ &= \phi(0) + \frac{1}{2} \langle x, Q(x)x \rangle \end{aligned}$$

où $Q(x) = 2 \int_0^1 (1-t) \text{Hess } \phi(tx) dt$. En particulier, $Q(0) = \text{Hess } \phi(0)$. On cherche à écrire

$$\langle x, Q(x)x \rangle = \langle A(x)x, Q(0)A(x)x \rangle$$

où $\kappa(x) = A(x)x$ est le changement de variables souhaité. Ceci revient à trouver A telle que $Q(x) = A^T(x)Q(0)A(x)$, ce qui peut se faire grâce au théorème d'inversion locale près de l'identité appliqué à

$$F : A \rightarrow A^T Q(0)A,$$

car on a supposé $\det Q(0) \neq 0$. \square

On en tire alors le théorème de la phase stationnaire :

Théorème C.3. (*Phase stationnaire*) Soit $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. On suppose que ϕ n'a qu'un seul point critique sur $\text{supp } a$, qui de plus est non dégénéré. Alors

$$\begin{aligned} I(\phi, a) &= (2\pi\hbar)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{\det \text{Hess } \phi(x_c)}} e^{\frac{i\pi}{4}\sigma + \frac{i\phi(x_c)}{\hbar}} a(x_c) \\ &\quad + e^{\frac{i\phi(x_c)}{\hbar}} \sum_{k=1}^{N-1} \hbar^{k+\frac{n}{2}} A_{2k}(x, \hbar D_x) a(x)|_{x=x_c} \\ &\quad + \hbar^{N+\frac{n}{2}} R_N \end{aligned}$$

avec A_{2k} un opérateur différentiel d'ordre $\leq 2k$ ne dépendant que de ϕ , et

$$|R_N| \leq C_N \sum_{|\alpha| \leq 2N+n+1} \sup_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha a|$$

où C_N ne dépend que de $\text{supp } a$ et de ϕ .

Une fois qu'on applique le lemme de Morse, en ajoutant une fonction cutoff près de x_c , on se ramène à

$$I(\phi, a) = I(Q, u) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i\langle x, Qx \rangle}{2\hbar}} u + \mathcal{O}(\hbar^\infty)$$

où $u = a \circ \kappa^{-1} \times |\det d\kappa^{-1}|$ avec κ comme dans le Lemme de Morse et $Q = \text{Hess } \phi(x_c)$. On utilise alors la phase stationnaire dans sa forme quadratique :

Théorème C.4. Soit Q une matrice réelle symétrique non dégénérée. Alors

$$I(Q, u) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\hbar^k (2\pi\hbar)^{\frac{d}{2}} e^{\frac{i\pi \text{sgn } Q}{4}} \langle D_x, Q^{-1} D_x \rangle^k u|_{x=0} + S_N(u, \hbar)$$

et

$$S_N(u, \hbar) \leq \frac{\hbar^{N+\frac{n}{2}}}{2^N N! |\det Q|^{\frac{1}{2}}} \sum_{|\alpha| \leq n+1} \|\partial_x^\alpha \langle D_x, Q^{-1} D_x \rangle^N u\|_{L^1}$$

Pour voir cela, notons que

$$\begin{aligned} I(Q, u) &= \langle e^{\frac{ixQx}{2\hbar}}, u \rangle_{S', S} \\ &= \langle \mathcal{F}_1^{-1} e^{\frac{ixQx}{2\hbar}}, \mathcal{F}_1 u \rangle_{S', S} \\ &= \frac{\hbar^{\frac{n}{2}} e^{\frac{i\pi}{4} \text{sgn } Q}}{|\det Q|^{\frac{1}{2}}} \langle e^{-\frac{i\hbar\xi \cdot Q\xi}{2}}, \hat{u}(\xi) \rangle \end{aligned}$$

et on applique simplement une formule de Taylor pour l'exponentielle du dernier crochet. On a utilisé le fait crucial que

$$\mathcal{F}_1^{-1} \left(e^{\frac{ixQx}{2\hbar}} \right) = \frac{\hbar^{\frac{n}{2}} e^{\frac{i\pi}{4} \text{sgn } Q}}{|\det Q|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{i\hbar\xi \cdot Q\xi}{2}} .$$

C.3 Faà di Bruno

Soit dans un premier temps $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ tels que $f \circ g$ soient bien définis. Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ un multi indice, de sorte que

$$\partial^\alpha g = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d} g$$

À ce multi indice α on associe l'ensemble de variables

$$I = \{y_1, \dots, y_{|\alpha|}\}$$

Les variables $y_1, \dots, y_{|\alpha_1|}$ sont identiques, égales à x_1 , les variables $y_{|\alpha_1|+1}, \dots, y_{|\alpha_1|+|\alpha_2|}$ égales à x_2 , etc. Ainsi on indexe toutes les variables de dérivation, sans tenir compte de leur discernabilité :

$$\frac{\partial}{\partial y_1 \dots \partial y_{|\alpha|}} g = \partial^\alpha g$$

On note Π l'ensemble des partitions de $\{y_1, \dots, y_{|\alpha|}\}$ et pour $\pi \in \Pi$, on écrira

$$\pi = \{B_1, \dots, B_r\}, \quad |\pi| = r$$

On a donc $r \leq |\alpha|$. La dérivée $\partial^\alpha f \circ g$ peut alors s'exprimer comme :

$$\partial^\alpha f \circ g = \sum_{\pi \in \Pi} \partial^{|\pi|} f(g) \prod_{B \in \pi} \frac{\partial^{|B|} g}{\prod_{y_i \in B} \partial y_i}$$

Dans le cas où $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, on a

$$f \circ g = f(g_1, \dots, g_d)$$

La formule précédente se généralise à

$$\partial^\alpha f \circ g = \sum_{\pi \in \Pi} \sum_{i_1 \dots i_{|\pi|}} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_{|\pi|}} f(g) \prod_{k=1}^{|\pi|} \frac{\partial^{|B_k|} g_{i_k}}{\prod_{j \in B_k} \partial y_j},$$

ce que l'on note schématiquement

$$\partial^\alpha f \circ g = \sum_{\pi \in \Pi} \partial^{|\pi|} f(g) \prod_{B \in \pi} \partial^B g$$

Il est important de noter que l'on a toujours $\sum_{i=1}^{|\pi|} |B_i| = |\alpha|$.

C.4 Inégalités de Weyl

Celles-ci relient les valeurs propres d'un opérateur A à ses valeurs singulières, c'est à dire, les valeurs propres de $\sqrt{A^\dagger A}$ (voir [Kön86]) :

Proposition C.5. *[Inégalités de Weyl] Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur compact. Notons $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ (respectivement β_1, β_2, \dots) ses valeurs propres (resp. ses valeurs singulières) ordonnées par module décroissant et comptées avec multiplicité algébrique. Alors, $\forall k \leq \dim \mathcal{H}$, nous avons :*

$$\prod_{i=1}^k |\alpha_i| \leq \prod_{i=1}^k \beta_i, \quad \sum_{i=1}^k |\alpha_i| \leq \sum_{i=1}^k \beta_i \quad (\text{C.1})$$

On en déduit immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire C.6. *Soit $n \geq 1$, et $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ les valeurs propres de A et $s_1^{(n)}, s_2^{(n)}, \dots$ les valeurs singulières de $A_n = \sqrt[n]{A^\dagger A^n}$, ordonnées comme ci-dessus. Alors, pour tout $k \leq \dim \mathcal{H}$:*

$$\sum_{i=1}^k \log |\lambda_i| \leq \sum_{i=1}^k \log s_i^{(n)}, \quad \prod_{i=1}^k |\lambda_i| \leq \prod_{i=1}^k s_i^{(n)}.$$

Annexe D

Articles

Resonance distribution in open quantum chaotic systems

S. Nonnenmacher and E. Schenck

Institut de Physique Théorique, CEA/DSM/IPhT, CEA-Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette, France

(Received 7 March 2008; published 31 October 2008)

In order to study the resonance spectra of chaotic cavities subject to some damping (which can be due to absorption or partial reflection at the boundaries), we use a model of damped quantum maps. In the high-frequency limit, the distribution of (quantum) decay rates is shown to cluster near a “typical” value, which is larger than the classical decay rate of the corresponding damped ray dynamics. The speed of this clustering may be quite slow, which could explain why it has not been detected in previous numerical data.

DOI: [10.1103/PhysRevE.78.045202](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.78.045202)

PACS number(s): 05.45.Mt, 03.65.Nk, 42.55.Sa

Recent experimental and theoretical studies have focused on the dynamics of waves inside quasi-two-dimensional (2D) cavities which are “partially open;” this partial opening may be due to various physical phenomena. For instance, an acoustic wave evolving in air or in a metallic slab will lose intensity due to friction and heating. In a microwave cavity, the dissipation mostly occurs at the boundary through Ohmic losses. The light propagating inside a dielectric (micro)cavity is partially reflected at the boundary, which can be described as an “effective damping” at the boundary. In all these systems, the discrete stationary modes correspond to complex eigenvalues (or resonances) of the form $k_n = \omega_n - i\Gamma_n/2$, where Γ_n is called the *decay rate* of the mode.

When the shape of the cavity induces a *chaotic* ray dynamics (e.g., the “stadium” shape), the eigenvalues $\{k_n\}$ cannot be computed analytically, but methods of “quantum chaos” can be applied to predict their statistical distribution in the high-frequency limit $\omega_n \rightarrow \infty$. Statistical studies of resonances started in the 1960s with initial applications to nuclear physics [1]. New applications emerged when experiments on mesoscopic quantum dots [2], microwave cavities [3] or optical fibers [4] allowed the construction of cavities with prescribed geometries, and the study of the dependence of the quantum dynamics with respect to this geometry. A recent interest in dielectric microcavities comes from the potential applications to microlasers: choosing the shape of the cavity appropriately allows one to produce a strongly directional emission [5]. The first step to understanding the (non-linear) lasing modes is to study the passive (resonant) modes of the cavity.

Various dissipation effects have been taken into account by adding to the self-adjoint Hamiltonian (representing the dissipationless system) an effective imaginary part, which describes the coupling between the internal cavity modes and the external channels [6]. One analytical tool to study chaotic cavities has been to replace the Hamiltonian (and sometimes also the effective coupling) by some sort of random matrix; this has led to theoretical distributions, which have been favorably compared with numerical or experimental spectra [7,8].

In this Rapid Communication we focus on situations where the coupling is strongly nonperturbative and is distributed over a large part of the cavity or of its boundary, so that the number of coupled channels becomes macroscopic in the high-frequency (semiclassical) limit. Using a nonrandom model of *damped quantum maps*, we find that, in this limit,

the distribution of quantum decay rates becomes asymptotically peaked at a “typical” value γ_{typ} , which is the ergodic mean of the local damping rate. This clustering does not seem to appear if one replaces the unitary part of the quantum map by a random unitary matrix, as is often done in the quantum chaos literature [9,10]. Such a clustering has been rigorously proved for damped waves on ergodic manifolds [11]; we believe it to occur as well in the various types of partially open quantum systems mentioned above. Yet the width of the distribution may decay very slowly in the semiclassical limit [$\approx (\ln k)^{-1/2}$], which could explain why this semiclassical clustering is hardly visible in numerical computations of chaotic dielectric cavities [12–14] or damped quantum maps [9]; such a slow decay indeed occurs within a solvable toy model we briefly describe at the end of this paper.

Let us now describe the model of damped quantum maps, which has been introduced and numerically investigated in [9] to mimic the resonance spectra of dielectric microcavities. To motivate this model, we first briefly analyze the dynamics of a few cavity wave systems. The first situation consists in a smooth absorption inside the cavity, represented by the damped wave equation $[\partial_t^2 - \Delta + 2b(x)\partial_t]\psi(x, t) = 0$. Here the damping function $b(x) \geq 0$ measures the local absorption rate. A high-frequency wave packet evolving along a classical trajectory is continuously damped by a factor $\approx \exp(-\int_0^t b[x(s)] ds)$. The classical limit of the dynamics consists in the propagation of rays with decreasing intensity, also called *weighted ray dynamics* [Fig. 1(a)]. When the dissipation occurs at the boundary (e.g., through Ohmic losses), an incident high-frequency wave packet hitting the boundary will be reflected, with its amplitude reduced by a subunitary factor $a(q, \varphi)$ [Fig. 1(b)]. The same phenomenon effectively

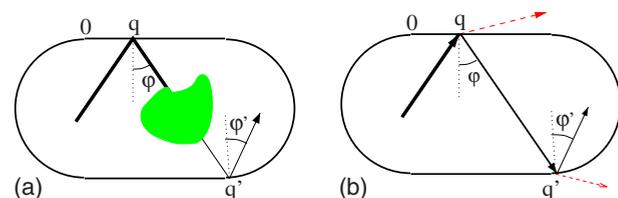


FIG. 1. (Color online) (a) Weighted ray dynamics inside a cavity with inhomogeneous absorption. (b) Absorption (or partial reflection) at the boundary. The ray intensity corresponds to its thickness. Dashed lines correspond to refracted rays.

occurs in the case of light scattering through a quasi-2D dielectric microcavity of optical index $n > 1$. The rays propagating inside the cavity are partially reflected at the boundary, the remaining part being refracted outside and never returning provided the cavity is convex [dashed lines in Fig. 1(b)]. In the high-frequency limit, the reflection factor is given by Fresnel's coefficient, which depends on the light polarization and on $p = \sin \varphi$. For instance, in the case of transverse magnetic polarization, the coefficient is a simple complex function $a_{\text{TM}}(p)$ [9], which has unit modulus when $|p| \geq 1/n$ (full reflection) and is minimal at $a_{\text{TM}}(0) = (n-1)/(n+1)$.

To analyze a 2D classical billiard, it is convenient to reduce the flow to the *bounce map* $\kappa: (q, p = \sin \varphi) \mapsto (q', p' = \sin \varphi')$, which acts canonically on the boundary phase space. At the quantum level, the spectrum of the closed cavity can be obtained by studying a k -dependent integral operator acting on the boundary, which effectively quantizes the bounce map, with an effective Planck's constant $\hbar_{\text{eff}} = k^{-1}$ [15].

This observation leads one to consider canonical maps κ on simple two-dimensional phase spaces, and to quantize them into unitary propagators (quantum maps) $U_N(\kappa)$ of finite dimension $N \sim \hbar_{\text{eff}}^{-1}$ [16]. A Gaussian wave packet $|q, p\rangle$ localized at the phase space point (q, p) is first transformed unitarily into a deformed wave packet $U_N|q, p\rangle$, localized near $\kappa(q, p)$. To induce some damping, we then multiply this state by a factor $a(\kappa(q, p))$, which can be implemented by applying to $U_N|q, p\rangle$ the operator \hat{a} quantizing the damping factor. The latter is generally complex valued. We will assume that it satisfies the following bounds:

$$0 < a_{\min} \leq |a(q, p)| \leq a_{\max} = 1, \quad \forall q, p. \quad (1)$$

These two steps lead to the definition of the damped quantum map

$$M_N = M_N(a, \kappa) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{a} U_N(\kappa).$$

The classical limit of the dynamics generated by M_N acts on “weighted point particles:” a point at position (q, p) is moved to $\kappa(q, p)$ and its weight is reduced by a factor $|a(\kappa(q, p))|^2$. This is the discrete-time version of a weighted ray dynamics. Compared with cavity systems, this model has two main advantages: one can easily engineer a map κ with specific dynamical properties; and the spectrum of $M_N(a, \kappa)$ is easier to study both numerically and analytically.

The spectrum $\{\lambda_j^{(N)}\}_{1 \leq j \leq N}$ of $M_N(a, \kappa)$ is the main object of our study (eigenvalues are ordered by decreasing moduli). To compare it with the resonance spectrum of a damped cavity, one should extract from the latter an interval $\{|\omega_n - k| \leq \pi\}$ around the frequency $k \sim N$. The distribution of the decay rates $\{\Gamma_n: |\omega_n - k| \leq \pi\}$ should parallel that of the decay rates $\{\gamma_j^{(N)} = -2 \ln |\lambda_j^{(N)}|\}_{1 \leq j \leq N}$.

A similar model was introduced in [17,18] to mimic fully open cavities: the damping factor $a(z)$ was then vanishing inside the opening. Such systems were characterized by a *fractal Weyl law* [17–19]: the number of resonances in a strip $\{|\omega_n| \leq k, \Gamma_n \leq \Gamma\}$ grew as $k^{1+\delta}$, where $\delta < 1$ was given by the fractal dimension of the trapped set. In contrast, the bounds

TABLE I. Values of the theoretical rates for κ and the various damping functions we use.

	γ_{gap}	γ_{cl}	γ_{typ}
a_1	0.715	1.079	2.774
\tilde{a}_1	0.734	1.079	3.070
a_2	-0.523	0.521	0.633

(1) imply that for N large enough M_N is invertible, and its N eigenvalues are contained inside the annulus $\{a_{\min} \leq |\lambda_j^{(N)}| \leq 1\}$. Transposed to the case of an absorbing cavity, it implies that all high-frequency resonances are contained in a fixed strip $\{\Gamma_n \leq \Gamma_{\max}\}$, and the number of modes $\mathcal{N}\{k_n: |\omega_n| \leq k\}$ asymptotically grows like Ck^2 , thus satisfying a standard Weyl law [11]. The situation is more complicated for dielectric cavities. Explicit solutions in the case of the circular cavity [20] suggest that resonances split between two well-separated groups: inner resonances contained in a strip $\{\Gamma_n \leq \Gamma\}$, and outer resonances $\Gamma_n \sim \omega_n^{1/3}$ associated with modes localized outside the cavity. Since our damped quantum map only acts on states localized inside the torus, we believe that the above Weyl asymptotics correctly counts the inner resonances of dielectric cavities (the fractal Weyl law recently observed in [14] is probably a finite-frequency artifact).

To obtain a more precise description, one needs to iterate the dynamics, that is, study the time- n evolution M_N^n . Applying the quantum-classical correspondence (Egorov's theorem), we find that

$$[M_N(a, \kappa)^{n\dagger} M_N(a, \kappa)^n]^{1/2n} \approx \hat{a}_n, \quad (2)$$

where the function $a_n = (\prod_{i=1}^n |a \circ \kappa^i|)^{1/n}$ is the average damping over trajectory stretches of length n . The approximation is valid in the semiclassical limit $N \rightarrow \infty$.

Much can be drawn from the knowledge of the functions $-2 \ln a_n$ in the long-time limit $n \gg 1$. Their ranges consist in intervals $I_n(a) \subset I_{n-1}(a)$, which converge to a limit interval $I_\infty(a)$ when $n \rightarrow \infty$. The above identity implies that the quantum decay rates $\gamma_j^{(N)}$ must be contained in $I_\infty(a)$ for large enough N [11]. Numerical [9] and analytical [21] studies indicate that the “quantum ranges” $J_N(a) = [\gamma_1^{(N)}, \gamma_N^{(N)}]$ generally remain strictly inside $I_\infty(a)$, in particular, they stay at finite distance from zero. Adapting methods used to study scattering systems [22,23], one finds that high-frequency decay rates should be larger than $\gamma_{\text{gap}} = -2\mathcal{P}_\kappa(\ln|a| - \lambda^u/2)$, where $\mathcal{P}_\kappa(\cdot)$ is the *topological pressure* associated with the map κ and the observable $(\ln|a| - \lambda^u/2)$ [24], $\lambda^u(z)$ being the expansion rate of κ along the unstable direction. The lower bound γ_{gap} may be trivial (negative) when $|a(z)|$ varies little across the phase space (see the last line in Table I).

Since κ is chaotic, the *value distribution* of $-2 \ln a_n(z)$ becomes peaked around its average $\gamma_{\text{typ}} = -2 \int \ln|a(z)| dz$ when $n \rightarrow \infty$. The central limit theorem [25] shows that this distribution is asymptotically a Gaussian of width $\sigma(a)/\sqrt{n}$ around γ_{typ} . This distribution is semiclassically connected with the spectral density of \hat{a}_n : denoting by $\{s_i^{(N,n)}\}_{1 \leq i \leq N}$ its

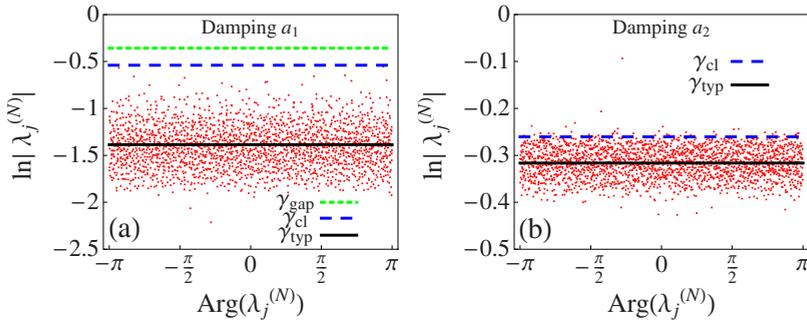


FIG. 2. (Color online) Spectra of $M_N(\kappa, a_i)$ for $N=2100$ and damping factors a_1 (a) and a_2 (b). We plot $\{i \ln(\lambda_j^{(N)})\}$ to mimic the spectrum of a damped cavity near $k \sim N$ (the vertical coordinates correspond to $-\gamma_j^{(N)}/2$). The horizontal lines indicate $-\gamma_*/2$ for the theoretical rates given in Table I.

eigenvalues and by \mathcal{V} the volume on the torus, we have the Weyl law

$$\mathcal{N}\{s_i^{(N,n)} \leq s\} \approx N\mathcal{V}(a_n^{-1}([a_{\min}, s])). \quad (3)$$

From (2), the left-hand side approximately counts the singular values of the matrix M_N^n . Using the Weyl inequalities [26], we obtain that most of the decay rates $\{\gamma_j^{(N)}\}_{1 \leq j \leq N}$ satisfy $\gamma_j^{(N)} \geq \gamma_{\text{typ}} - \epsilon$.

Applying the same argument to the inverse quantum map $M_N^{-1} \approx M_N(a^{-1} \circ \kappa, \kappa^{-1})$, we eventually find that, in the semiclassical limit, most decay rates cluster around γ_{typ} , which we thus call the typical decay rate. More precisely, the fraction of the decay rates $\{\gamma_j^{(N)}\}$ which are not in the interval $[\gamma_{\text{typ}} - \epsilon, \gamma_{\text{typ}} + \epsilon]$ goes to zero when $N \rightarrow \infty$.

By pushing the quantum-classical correspondence up to its limit, namely the Ehrenfest time $n \sim C \ln N$, we find that the width of the decay rate distribution is at most of order $(\ln N)^{-1/2}$ (a rigorous proof will be given in [27]). Our numerics (see Fig. 3) are compatible with this upper bound. Such a slow decay could explain why this concentration has not been detected in previous studies. For a solvable toy model presented at the end of this paper, the distribution will be shown to be indeed a Gaussian of width $\sim C(\ln N)^{-1/2}$.

Let us compare the quantum decay rates with the classical decay rate γ_{cl} of the corresponding weighted dynamics. The latter, introduced in [28] in the framework of dielectric microcavities, is obtained by evolving an initial smooth distribution of points through the weighted dynamics: for large times n , the total weight of the distribution decays as $We^{-n\gamma_{\text{cl}}}$. As in the case of fully open systems [22], γ_{cl} can be expressed as the topological pressure $\gamma_{\text{cl}} = -\mathcal{P}_\kappa(2 \ln|a| - \lambda^u)$. Convexity properties of the pressure allow us to compare this classical decay rate with the two rates obtained above, $\gamma_{\text{gap}} \leq \gamma_{\text{cl}} \leq \gamma_{\text{typ}}$, and the inequalities are generally strict (see

Table I). The quantum ranges $J_N(a)$ may or may not contain the classical rate γ_{cl} (see Fig. 2).

The map we consider in our numerics is the three-baker's map, which acts canonically on the two-dimensional torus $\{(q, p) \in [0, 1)^2\}$. It is given by $\kappa(q, p) = [3q \bmod 1, (p + [3q])/3]$, and generates a strongly chaotic dynamics. This map is quantized as in [29], into a sequence of unitary matrices

$$U_N = G_N^{-1} \begin{pmatrix} G_{N/3} & & \\ & G_{N/3} & \\ & & G_{N/3} \end{pmatrix},$$

where $(G_M)_{jk} = (1/\sqrt{M}) \exp[-(2i\pi/M)(j+1/2)(k+1/2)]$ is the symmetrized discrete Fourier transform. We choose damping factors of the form $a(q)$, so their quantizations \hat{a} are simply diagonal matrices with entries $a[(j+1/2)/N]$. The factor $a_1(q)$ has a plateau $a_1(q) \equiv 1$ for $q \in [1/3, 2/3]$, another one $a_1(q) \equiv 0.1$ for $q \in [0, 1/6] \cup [5/6, 1]$, and varies smoothly in between. It approximates the piecewise constant function $\tilde{a}_1(q)$ which takes values 0.1, 1, and 0.1, respectively, on the intervals $[0, 1/3)$, $[1/3, 2/3)$, and $[2/3, 1)$. Our second choice is the smoother function $a_2(q) = 1 - \sin(2\pi q)^2/2$. Since we use a single map κ , the damped quantum maps will be abbreviated by $M_N(a_i)$.

We first notice that all these factors reach their extremal values a_{\min}, a_{\max} on the fixed points (0,0) and (1/2, 1/2) of κ . As a result, for each of them the asymptotic range $I_\infty(a)$ is equal to $[a_{\min}, a_{\max}]$. The theoretical rates γ_{gap} , γ_{cl} , and γ_{typ} for these three factors are given in Table I. In Fig. 2 we plot the spectra of $M_N(a_i)$ for $N=2100$ (the theoretical bound γ_{gap} for a_2 is negative, hence irrelevant). We check that all quantum rates are larger than γ_{gap} . In the case of $M_N(a_1)$, all quantum rates are also larger than γ_{cl} , while $M_N(a_2)$ admits a few smaller decay rates.

The clustering of decay rates around γ_{typ} is already per-

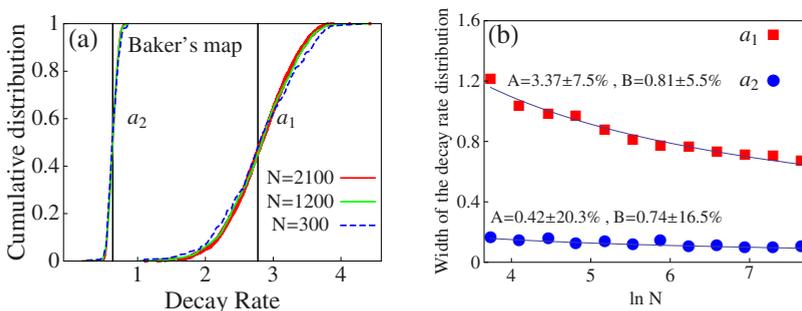


FIG. 3. (Color online) (a) Cumulative decay rate distribution for $M_N(\kappa, a_i)$. The vertical bars indicate the rates γ_{typ} . (b) Widths of the decay rate distributions, together with the best two-parameter fits $A(\ln N)^{-B}$ and the asymptotic standard errors. The power-law fits $A'N^{-B'}$ yield $A' = 1.35 \pm 5\%$, $B' = 0.09 \pm 8\%$ for $M_N(a_1)$ and $A' = 0.2 \pm 18\%$, $B' = 0.10 \pm 26.5\%$ for $M_N(a_2)$.

ceptible in Fig. 2. To make it more quantitative, in Fig. 3(a) we plot the cumulative distributions of decay rates. At first glance, the widths of the distributions around γ_{typ} seem to depend little on N . Enlarging the set of data, we plot these widths on Fig. 3(b). They indeed decay with N . The two-parameter power-law fits $A'N^{-B'}$ lead to small exponents B' , which seem to favor the logarithmic fits $A(\ln N)^{-B}$; the latter decay slightly faster than the theoretical upper bound $(\ln N)^{-1/2}$.

It is possible to construct a *solvable* quantization of the baker's map by taking the quantum parameter $N=3^k$, $k \in \mathbb{N}$, and replacing the discrete Fourier transform G_N by the Walsh transform [18]. If we then select a damping factor which, like \tilde{a}_1 , takes constant values a^j on the intervals $q \in [j/3, (j+1)/3)$, the quantum model remains solvable. The spectrum of M_N relies on the eigenvalues $\{\lambda_i\}$ of the 3×3 matrix $\text{diag}(a^j)G_3^{-1}$. Taking $\gamma_i = -2 \ln|\lambda_i|$, the N quantum decay rates can be indexed by the sequences $\boldsymbol{\eta} = \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_k$, with $\eta_i \in \{1, 2, 3\}$: they are given by $\gamma_{\boldsymbol{\eta}} = (1/k) \sum_{m=1}^k \gamma_{\eta_m}$. For instance, in the case of the damping function \tilde{a}_1 , the rates γ_i

take the values (0.803, 3.801, 4.605). From this explicit expression, one easily draws that, in the limit $k \rightarrow \infty$, the distribution of the $\{\gamma_{\boldsymbol{\eta}}\}$ converges to a Gaussian of average $\gamma_{\text{typ}} = (\sum_{i=1}^3 \gamma_i)/3$ and variance $(1/3k) \sum_{i=1}^3 (\gamma_i - \gamma_{\text{typ}})^2 = C(\ln N)^{-1}$.

To summarize, we have studied the spectra and eigenmodes of damped quantum chaotic maps, a toy model for various types of partially open quantized chaotic cavities, in a régime where the damping is both macroscopic and strongly nonperturbative. We have shown that the quantum decay rates remain inside a fixed interval, and that most of them cluster around the mean damping rate γ_{typ} . These statistical properties seem to differ from those of non-Hermitian random matrices used to represent such open systems.

This work was partially supported by Grant No. ANR-05-JCJC-0107-01 of the Agence Nationale de la Recherche. We have benefited from discussions with F. Faure and Y. Fyodorov, and thank E. Bogomolny and R. Dubertrand for sharing their results prior to publication.

-
- [1] P. A. Moldauer, Phys. Rev. **171**, 1164 (1968).
 [2] R. A. Jalabert, H. U. Baranger, and A. D. Stone, Phys. Rev. Lett. **65**, 2442 (1990).
 [3] U. Kuhl *et al.*, J. Phys. A **38**, 10433 (2005).
 [4] V. Doya, O. Legrand, F. Mortessagne, and C. Miniatura, Phys. Rev. Lett. **88**, 014102 (2001).
 [5] C. Gmachl *et al.*, Science **280**, 1556 (1998).
 [6] C. H. Lewenkopf and H.-A. Weidenmüller, Ann. Phys. (N.Y.) **212**, 53 (1991).
 [7] Y. V. Fyodorov and H.-J. Sommers, J. Phys. A **36**, 3303 (2003).
 [8] T. Kottos, J. Phys. A **38**, 10761 (2005).
 [9] J. P. Keating, M. Novaes, and H. Schomerus, Phys. Rev. A **77**, 013834 (2008).
 [10] Y. Wei and Y. V. Fyodorov, e-print arXiv:0809.2726.
 [11] J. Sjöstrand, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **36**, 573 (2000).
 [12] M. Leventhal, J. S. Lauret, J. Zyss, C. Schmit, and E. Bogomolny, Phys. Rev. A **75**, 033806 (2007).
 [13] S. Shinohara and T. Harayama, Phys. Rev. E **75**, 036216 (2007).
 [14] J. Wiersig and J. Main, Phys. Rev. E **77**, 036205 (2008).
 [15] J.-M. Tualle and A. Voros, Chaos, Solitons Fractals **5**, 1085 (1995).
 [16] *The Mathematical Aspects of Quantum Maps*, edited by M. Degli Esposti and S. Graffi (Springer, Berlin, 2003).
 [17] H. Schomerus and J. Tworzydło, Phys. Rev. Lett. **93**, 154102 (2004).
 [18] S. Nonnenmacher and M. Zworski, J. Phys. A **38**, 10683 (2005).
 [19] W. T. Lu, S. Sridhar, and M. Zworski, Phys. Rev. Lett. **91**, 154101 (2003).
 [20] R. Dubertrand, E. Bogomolny, N. Djellali, M. Leventhal, and C. Schmit, Phys. Rev. A **77**, 013804 (2008); E. Bogomolny *et al.*, e-print arXiv:0807.2374.
 [21] M. Asch and G. Lebeau, Exp. Math. **12**, 227 (2003).
 [22] P. Gaspard and S. A. Rice, J. Chem. Phys. **90**, 2242 (1989).
 [23] M. Ikawa, J. Philipp Med. Assoc. **38**, 113 (1988); S. Nonnenmacher and M. Zworski, e-print arXiv:0706.3242.
 [24] P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory* (Springer, Berlin, 1982).
 [25] M. Ratner, Isr. J. Math. **16**, 181 (1973).
 [26] Assume that the singular values $\{s_j\}$ and eigenvalues $\{\lambda_j\}$ of an $N \times N$ matrix are ordered by decreasing moduli. Then, for any $t > 0$ and any $j \leq N$, one has $\sum_{i=1}^j |\lambda_i|' \leq \sum_{i=1}^j s_i'$.
 [27] E. Schenck (unpublished).
 [28] S.-Y. Lee *et al.*, Phys. Rev. Lett. **93**, 164102 (2004).
 [29] M. Saraceno, Ann. Phys. (N.Y.) **199**, 37 (1990).

Weyl Laws for Partially Open Quantum Maps

Emmanuel Schenck

Abstract. We study a toy model for “partially open” wave-mechanical system, like for instance a dielectric micro-cavity, in the semiclassical limit where ray dynamics is applicable. Our model is a quantized map on the 2-dimensional torus, with an additional damping at each time step, resulting in a subunitary propagator, or “damped quantum map”. We obtain analogues of Weyl’s laws for such maps in the semiclassical limit, and draw some more precise estimates when the classical dynamics is chaotic.

1. Introduction

A quantum billiard Ω is a “closed quantum system”, as it preserves probability. Mathematically, this corresponds to the Laplace operator in Ω with Dirichlet boundary conditions. In this case, the spectrum is discrete and the associated eigenfunctions are bound states. This system can be “opened” in various ways: among others, one possibility is to consider the situation where the refractive index takes two different values $n_{in/out}$ inside and outside the billiard. This model can describe certain types of two-dimensional optical microresonators: in the simplest approximation, the electromagnetic field satisfies the scalar Helmholtz equation $(\Delta + k_{in/out}^2)\Psi = 0$ inside and outside Ω . For transverse magnetic polarization of the electromagnetic field, Ψ and $\nabla\Psi$ are continuous across $\partial\Omega$, and the relation between $k_{in/out}$ and the energy E is expressed by $k_{in/out}^2 = n_{in/out}^2 E$. In that case, the spectrum is purely absolutely continuous, and all bound states are replaced by metastable states: they correspond to complex generalized eigenvalues, called *resonances*, which are the poles of the meromorphic continuation of the resolvent from the upper to the lower half plane. These quantum resonances play a physically significant role, as their imaginary part govern the decay in time of the metastable states.

For such systems with a refractive index jump, the semiclassical (equivalently, the geometric optics) limit can be described as follows. A wavepacket travels along a single ray until it hits $\partial\Omega$, then it generally *splits* between two rays, one reflected,

the other refracted according to Snell's law. If the cavity Ω is convex, the refracted ray will escape to infinity, and we may concentrate to what happens inside: the wavepacket follows the same trajectory as in the case of the closed cavity, but it is *damped* at each bounce by a reflection factor depending on the incident angle. If we encode the classical dynamics inside the billiard by the bounce map, then the effect of that reflection factor is to damp the wavepacket after each step (or bounce). This map does *not* preserve probability, it is a “weighted symplectic map”, as studied in [22].

The toy model we will study below has the same characteristics as this bounce map, and has been primarily introduced in [17] to mimick the resonance spectra of dielectric microcavities. It consists in a symplectic smooth map κ acting on a compact phase space (the 2-dimensional torus \mathbb{T}^2), plus a damping function on that phase space $a \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, with $|a| \leq 1$. Throughout the paper we will not always assume precise dynamical property for the map κ , although the main result take a very specific form when κ has the Anosov property. We will also assume that for each time $n \geq 1$, the fixed points of κ^n form a “thin” set (the precise condition is given in Section 2.2).

The corresponding quantum system will be constructed as follows: we first quantize κ into a family of $N \times N$ unitary propagators, where the quantum dimension $N = (2\pi\hbar)^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \hbar^{-1}$ will be large, and the damping function a is quantized into an operator $\text{Op}_\hbar(a)$. All these quantities will be described in more detail in Section 2. To have a damping effect at the quantum level, we also need to assume that $\|\text{Op}_\hbar(a)\| \leq 1$ for all $\hbar \leq 1$.

If we denote $U_\hbar(\kappa)$ the unitary propagator obtained from a quantization of κ , the damped quantum map then takes the form

$$M_\hbar(a, \kappa) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Op}_\hbar(a) U_\hbar(\kappa). \quad (1.1)$$

Apart from the ray-splitting situation described above, the above damped quantum map is also relevant as a toy model for the *damped wave equation* in a cavity or on a compact Riemannian manifold. Evolved through the damped wave equation, a wavepacket follows a geodesic at speed unity, and it is *continuously* damped along this trajectory [3,26]. The above damped quantum map is a discrete time version of this type of evolution; it can be seen as a “stroboscopic” or “Poincaré” map for such an evolution. To compare the spectrum of our quantum maps with the complex modes $k_n = \omega_n - i\frac{\Gamma_n}{2}$ of a damped cavity, one should look at the modes contained in an interval $|\omega_n - k| \leq \pi$ around the frequency $k \approx \hbar^{-1}$: the distribution of the decay rates $\Gamma_n : |\omega_n - k| \leq \pi$ is expected to exhibit the same behavior as that of the decay rates $\{\gamma_n^{(h)} = -2 \log |\lambda_n^{(h)}|, |\lambda_n^{(h)}| \in \text{Spec}(M_\hbar(a, \kappa))\}$, as we will see below. Some of the theorems we present here are analogues of theorems relative to the spectrum for the damped wave equation, proved in [3,26]. Some of the latter theorems become trivial in the present framework, while the proofs of some others simplifies in the case of maps. Besides, the numerical diagonalization of finite matrices is simpler than that of wave operators. Also, it is easier to construct maps

with pre-defined dynamical properties, than manifolds with pre-defined properties of the geodesic flow.

We now come to our results concerning the maps (1.1). Some of them – Theorems 1.2 and 1.3 – have already been presented without proof in [21].

In general, the matrix $M_h(a, \kappa)$ is not normal, and may not be diagonalizable. It is known that the spectrum of non-normal matrices can be very sensitive to perturbations, leading to the more robust notion of pseudospectrum [12]. We will show that, under the condition of nonvanishing damping factor $|a| \geq a_{\min} > 0$, the spectrum of $M_h(a, \kappa)$ is still rather constrained in the semiclassical limit: it resembles the spectrum of the unitary (undamped) map $U_h(\kappa)$.

Theorem 1.1. *Let $M_h(a, \kappa)$ be the damped quantum map described above, where κ is a smooth, symplectic map on \mathbb{T}^2 and the damping factor $a \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ satisfies $1 \geq |a| > 0$. For each value of $h = N^{-1}$, $N \in \mathbb{N}$, we denote by $\{\lambda_j^{(h)}\}_{j=1 \dots h^{-1}}$ the eigenvalues of $M_h(a, \kappa)$, counted with algebraic multiplicity. In the semiclassical limit $h \rightarrow 0$, these eigenvalues are distributed as follows. Let us call*

$$a_n : x \mapsto \prod_{i=1}^n |a \circ \kappa^i(x)|^{\frac{1}{n}},$$

and using the Birkhoff ergodic theorem, define

$$\text{EI}_\infty(a) = \text{ess inf}_{n \rightarrow \infty} \lim a_n, \quad \text{ES}_\infty(a) = \text{ess sup}_{n \rightarrow \infty} \lim a_n.$$

Then the spectrum semiclassically concentrates near an annulus delimited by the circles of radius $\text{EI}_\infty(a)$ and $\text{ES}_\infty(a)$: $\delta > 0$,

$$\forall \delta > 0, \lim_{h \rightarrow 0} h \# \left\{ 1 \leq j \leq h^{-1} : \text{EI}_\infty(a) - \delta \leq |\lambda_j^{(h)}| \leq \text{ES}_\infty(a) + \delta \right\} = 1. \quad (1.2)$$

Suppose now that κ is ergodic with respect to the Lebesgue measure μ on \mathbb{T}^2 , and denote

$$\langle a \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \exp \left\{ \int_{\mathbb{T}^2} \log |a| d\mu \right\} \quad \text{the geometric mean of } |a| \text{ on } \mathbb{T}^2.$$

In this case, the spectrum concentrates near the circle of radius $\langle a \rangle$ and the arguments of the eigenvalues become homogeneously distributed over $\mathbb{S}^1 \simeq [0, 1)$:

Theorem 1.2. *If κ is ergodic with respect to the Lebesgue measure,*

$$(i) \quad \forall \delta > 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} h \# \left\{ 1 \leq j \leq h^{-1} : \left| |\lambda_j^{(h)}| - \langle a \rangle \right| \leq \delta \right\} = 1,$$

$$(ii) \quad \forall f \in C^0(\mathbb{S}^1), \quad \lim_{h \rightarrow 0} h \sum_{j=1}^{h^{-1}} f \left(\frac{\arg \lambda_j^{(h)}}{2\pi} \right) = \int_{\mathbb{S}^1} f(t) dt.$$

Note that (i) is an immediate consequence of Theorem 1.1, since the Birkhoff ergodic theorem states that $\text{EI}_\infty(a) = \text{ES}_\infty(a) = \langle a \rangle$ if κ is ergodic with respect to μ . We remark that the ergodicity of κ ensures that the spectrum of the unitary quantum maps $U_h(\kappa)$ becomes uniformly distributed as $h \rightarrow 0$ [7, 20]. Actually, for

this property to hold one only needs a weaker assumption, contained in Proposition 2.2.

If we now suppose that κ has the Anosov property (which implies ergodicity), we can estimate more precisely the behavior of the spectrum as it concentrates around the circle of radius $\langle a \rangle$ in the semiclassical limit.

Theorem 1.3. *Suppose that κ is Anosov. Then, for any $\varepsilon > 0$,*

$$\lim_{h \rightarrow 0} h \# \left\{ 1 \leq j \leq h^{-1} : \left| |\lambda_j^{(h)}| - \langle a \rangle \right| \leq \left(\frac{1}{\log h^{-1}} \right)^{\frac{1}{2} - \varepsilon} \right\} = 1. \tag{1.3}$$

This theorem is our main result, and is proven in Section 4. It relies principally on the knowledge of the rate of convergence of the function a_n to $\langle a \rangle$ as $n \rightarrow \infty$, when κ is Anosov.

In general, for chaotic maps the radial distribution of the spectrum around $\langle a \rangle$ does not shrink to 0 in the semiclassical limit, as numerical and analytical studies indicate [3]. Toward this direction, we estimate the number of “large” eigenvalues, i.e. the subset of the spectrum that stay at a finite distance $c > 0$ from $\langle a \rangle$, as $h \rightarrow 0$: we show that this number is bounded by $h^{\nu-1}$, where $0 < \nu < 1$ can be seen as a “fractal” exponent and depend on both a and κ . One more time, we use for this purpose information about the “probability” for the function a_n to take values away from $\langle a \rangle$, as n becomes large. This involves *large deviations properties* for a_n , which are usually expressed in terms of a *rate function* $I \geq 0$ (see Section 4) depending on both a and κ . For $d > 0$, considering the interval $[\log \langle a \rangle + d, \infty[$, one has

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mu \{ x : \log a_n(x) \geq d + \log \langle a \rangle \} = -I(d).$$

Our last result then takes the form:

Theorem 1.4. *Suppose as before that κ is Anosov, and choose $c > 0$. Define*

$$\Gamma = \log \left(\sup_x \|D\kappa|_x\| \right), \quad \ell c = \log (1 + c/\langle a \rangle), \quad a_- = \min_{\mathbb{T}^2} |a|.$$

For any constant $C > 0$ and $\varepsilon > 0$ arbitrary small, denote $C^\pm = C \pm \varepsilon$, and set $T_{a,\kappa} = (2\Gamma - 12 \log a_-)^{-1}$. Then, if I denotes the rate function associated to a and κ , we have

$$h \# \{ 1 \leq j \leq h^{-1} : |\lambda_j^{(h)}| \geq \langle a \rangle + c \} = \mathcal{O}(h^{\nu_{a,\kappa}(c)}),$$

where $\nu_{a,\kappa}(c) = \frac{I(\ell c^-) T_{a,\kappa}^-}{1 + I(\ell c^-) T_{a,\kappa}^-}$.

At this time, we do not know if the upper bound in Theorem 1.4 is optimal. The proof of the preceding result involves the use of an evolution time of order $n_\tau \approx \tau \log h^{-1}$, similar to an Ehrenfest time, up to which the quantum to classical correspondence – also known as Egorov theorem – is valid. The above bound is

optimal in the sense that a particular choice of $\tau = \tau_c$ makes minimal the bound we can obtain. It is given by

$$\tau_c \stackrel{\text{def}}{=} \frac{T_{a,\kappa}^-}{1 + I(\ell c^-)T_{a,\kappa}^-}.$$

It is remarkable that in our setting, a small Ehrenfest time does not give any relevant bound, but a large Ehrenfest time does not provide an optimal bound either, because the remainder terms in the Egorov theorem become too large.

We also find interesting to note that in the context of the damped wave equation, a result equivalent to Theorems 1.1 and 1.2 was obtained by Sjöstrand under the assumption that the geodesic flow is ergodic [26]. But to our knowledge, no results similar to Theorem 1.3 are known in this framework. Concerning Theorem 1.4, a comparable result has been announced very recently in the case of the damped wave equation on manifolds of negative curvature [1], but working with flows on manifolds add technical complications compared to our framework. Although, it could be appealing to compare the nature of the upper bounds obtained in these two formalisms, and in both cases, it is still an open question to know if any lower bound could be determined for the number of eigenvalues larger than $\langle a \rangle + c$, in the semiclassical limit. We also note that this “fractal Weyl law” is different from the fractal law for resonances presented in [27], although the two systems share some similarities.

In the whole paper, we discuss quantum maps on the 2-torus \mathbb{T}^2 . The generalization to the $2n$ -dimensional torus, or any “reasonable” compact phase space does not present any new difficulty, provided a quantization can be constructed on it, in the spirit of [20].

In Section 2, we introduce the general setting of quantum mechanics and pseudodifferential calculus on the torus. Theorems 1.1 and 1.2, together with some intermediate results are proved in Section 3, while the Anosov case is treated in Section 4. In Section 5, we present numerical calculations of the spectrum of such maps to illustrate Theorems 1.1, 1.2 and 1.3. The observable a is chosen somewhat arbitrary (with $|a| > 0$), while κ is a well-known perturbed cat map.

2. Quantum mechanics on the torus \mathbb{T}^2

We briefly recall the setting of quantum mechanics on the 2-torus. We refer to the literature for a more detailed presentation [6, 10, 15].

2.1. The quantum torus

When the classical phase space is the torus $\mathbb{T}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \{x = (q, p) \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2\}$, one can define a corresponding quantum space by imposing periodicity conditions in position and momentum on wave functions. When Planck’s constant takes the discrete values $\hbar = (2\pi N)^{-1}$, $N \in \mathbb{N}$, these conditions yield a subspace of finite dimension N , which we will denote by \mathcal{H}_N . This space can be equipped with a “natural” hermitian scalar product.

We begin by fixing the notations for the \hbar -Fourier transform on \mathbb{R} , which maps position to momentum. Let \mathcal{S} denote the Schwartz space of functions and \mathcal{S}' its dual, i.e. the space of tempered distributions. The \hbar -Fourier transform of any $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ is defined as

$$F_{\hbar}\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \psi(q)e^{-\frac{i}{\hbar}qp} dq.$$

A wave function on the torus is a distribution periodic in both position and momentum:

$$\psi(q + 1) = e^{2i\pi\theta_2}\psi(q), \quad F_{\hbar}\psi(p + 1) = e^{2i\pi\theta_1}F_{\hbar}\psi(p).$$

Such distributions can be nontrivial iff $\hbar = (2\pi N)^{-1}$ for some $N \in \mathbb{N}$, in which case they form a subspace \mathcal{H}_N of dimension N . For simplicity we will take here $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Then this space admits a ‘‘position’’ basis $\{e_j\} : j \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\}$, where

$$\langle q | e_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \delta(q - \nu - j/N). \tag{2.1}$$

A ‘‘natural’’ hermitian product on \mathcal{H}_N makes this basis orthonormal:

$$\langle e_j | e_k \rangle = \delta_{jk}, \quad j, k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, \tag{2.2}$$

and we will denote by $\|\cdot\|$ the corresponding norm.

Let us now describe the quantization of observables on the torus. We start from pseudodifferential operators on $L^2(\mathbb{R})$ [11, 14]. To any $f \in \mathcal{S}(T^*\mathbb{R})$ is associated its \hbar -Weyl quantization, that is the operator f_{\hbar}^w acting on $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ as:

$$f_{\hbar}^w\psi(q) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi\hbar} \int f\left(\frac{q+r}{2}, p\right) e^{\frac{i}{\hbar}(q-r)p}\psi(r) dr dp. \tag{2.3}$$

This defines a continuous mapping from \mathcal{S} to \mathcal{S} , hence from \mathcal{S}' to \mathcal{S}' by duality. Furthermore, it can be shown that the mapping $f \mapsto f_{\hbar}^w$ can be extended to any $f \in C_b^{\infty}(T^*\mathbb{R})$, the space of smooth functions with bounded derivatives, and the Calderón–Vaillancourt theorem shows that f_{\hbar}^w is also continuous on $L^2(\mathbb{R})$.

A complex valued observable on the torus $f \in C^{\infty}(\mathbb{T}^2)$ can be identified with a biperiodic function on \mathbb{R}^2 (for all $q, p, f(q + 1, p) = f(q, p + 1) = f(q, p)$). When $\hbar = 1/2\pi N$, one can check that the operator f_{\hbar}^w maps the subspace $\mathcal{H}_N \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ to itself. In the following, we will always adopt the notation $h \stackrel{\text{def}}{=} 2\pi\hbar$, so that on the torus we have $h = N^{-1}$. This number h will play the role of a small parameter and remind us the standard \hbar -pseudodifferential calculus in $T^*\mathbb{R}$. We will then write $\text{Op}_h(f)$ for the restriction of f_{\hbar}^w on \mathcal{H}_N , which will be the quantization of f on the torus. It is a $N \times N$ matrix in the basis (2.1).

The operator $\text{Op}_h(f)$ inherits some properties from f_{\hbar}^w . We will list the ones which will be useful to us. $\text{Op}_h(f)^{\dagger} = \text{Op}_h(f^*)$, so if f takes real values, $\text{Op}_h(f)$ is self-adjoint. The function $f \equiv f_h$ may also depend on h , and to keep on the torus the main features of the standard pseudodifferential calculus in $T^*\mathbb{R}$, these functions – or symbols – must belong to particular classes. On the torus, these different classes are defined exactly as for symbols in $C_b^{\infty}(T^*\mathbb{R})$. For a sequence of

functions $(f_{\hbar})_{\hbar \in]0,1]}$, $f_{\hbar} \equiv f(x, \hbar) \in C_b^\infty(T^*\mathbb{R}) \times]0,1]$, we will say that $f_{\hbar} \in S_\delta^m(1)$, with $\delta \in]0, \frac{1}{2}]$, $m \in \mathbb{R}$ if $\hbar^m f_{\hbar}$ is uniformly bounded with respect to \hbar and for any multi-index $\alpha = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ of length $|\alpha| = n_1 + n_2$, we have:

$$\|\partial^\alpha f_{\hbar}\|_{C^0} \leq C_\alpha \hbar^{-m-|\alpha|\delta}.$$

In the latter equation, $\|\cdot\|_{C^0}$ denotes the sup-norm on \mathbb{T}^2 and ∂^α stands for $\frac{\partial^{n_1+n_2}}{\partial q^{n_1} \partial p^{n_2}}$. On the torus, one simply has $2\pi\hbar = h = N^{-1}$ for some $N \in \mathbb{N}$, and $C_b^\infty(T^*\mathbb{R})$ is replaced by $C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Let us denote S_δ^m these symbol classes. We have the following inequality of norms, useful to carry properties of \hbar -pseudodifferential operators on \mathbb{R} to the torus [6]:

$$\forall f \in C^\infty(\mathbb{T}^2), \quad \|\text{Op}_h(f)\| \leq \|f_{\hbar}^w\|_{L^2 \rightarrow L^2}. \tag{2.4}$$

Note that this property remains valid if $f \equiv f_{\hbar}$ depends on \hbar , with $f_{\hbar} \in S_\delta^0(1)$. The L^2 continuity states that if $f_{\hbar} \in S_\delta^0(1)$, then f_{\hbar}^w is a bounded operator (with \hbar -uniform bound) from $L^2(\mathbb{R})$ to $L^2(\mathbb{R})$. Since $\text{Op}_h(f)$ is the restriction of f_{\hbar}^w on \mathcal{H}_N , Eq. (2.4) implies the existence of a constant C independent of h such that for $f \in S_\delta^0$ and $h \in]0, 1]$,

$$\|\text{Op}_h(f)\| \leq C.$$

The symbol calculus on the Weyl operators f_{\hbar}^w easily extends to their restrictions on \mathcal{H}_N . We have, for symbols f and g in S_δ^0 the composition rule

$$\text{Op}_h(f) \text{Op}_h(g) = \text{Op}_h(f \#_h g),$$

where $f \#_h g$ is defined as follows: for $X = (x, \xi) \in \mathbb{R}^2$ we have

$$(f \#_h g)(X) = \left(\frac{2}{h}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^4} f(X+Z)g(X+Y) e^{\frac{4i\pi}{h}\sigma(Y,Z)} dY dZ \tag{2.5}$$

where σ denotes the usual symplectic form. Another useful expression for $f \#_h g$ is given by

$$(f \#_h g)(X) = e^{\frac{i\hbar}{2\pi}\sigma(D_X, D_Y)} (f(X)g(Y))|_{X=Y} \tag{2.6}$$

where $D_X = (D_x, D_\xi) = (\frac{1}{i}\partial_x, \frac{1}{i}\partial_\xi)$. This representation is particularly useful for \hbar -expansions of $f \#_h g$. If $f \in S_\delta^m$ and $g \in S_\delta^n$, then $f \#_h g \in S_\delta^{m+n}$, and at first order we have:

$$\|\text{Op}_h(f) \text{Op}_h(g) - \text{Op}_h(fg)\| \leq C_{f,g} h^{1-2\delta-m-n}. \tag{2.7}$$

The Weyl operators on \mathcal{H}_N , $\hat{T}_{m,n} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Op}_h(e_{mn})$, with

$$e_{mn}(q, p) \stackrel{\text{def}}{=} e^{2i\pi(mq-np)}, \quad m, n \in \mathbb{Z},$$

allow us to represent $\text{Op}_h(f)$:

$$\text{Op}_h(f) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} f_{m,n} \hat{T}_{m,n}, \quad \text{where} \quad f_{m,n} = \int_{\mathbb{T}^2} f \overline{e_{mn}} d\mu. \tag{2.8}$$

From the trace identities

$$\text{Tr } \hat{T}_{\mu,\nu} = \begin{cases} (-1)^{h\mu\nu} h^{-1} & \text{if } \mu, \nu = 0 \pmod{h^{-1}} \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{2.9}$$

one easily shows that for any $f \in S_\delta^0$ we have

$$h \text{Tr} (\text{Op}_h(f)) = f_{0,0} + \mathcal{O}(h^\infty) = \int_{\mathbb{T}^2} f d\mu + \mathcal{O}(h^\infty). \tag{2.10}$$

Let $a \in S_0^0$. We will write $a_- = \min_{\mathbb{T}^2} |a|$, and $a_+ = \max_{\mathbb{T}^2} |a|$. The next proposition adapts the sharp Gårding inequality to the torus setting.

Proposition 2.1. *Let $a \in S_\delta^0$ be a real, positive symbol, with $\text{Ran } a = [a_-, a_+]$. There exist a constant $C > 0$ such that, for small enough h and any normalized state $u \in \mathcal{H}_N$:*

$$a_- - Ch^{1-2\delta} \leq \langle u, \text{Op}_h(a)u \rangle \leq a_+ + Ch^{1-2\delta}.$$

Proof. We first sketch the proof of the sharp Gårding inequality in the case of pseudodifferential operators on $T^*\mathbb{R}$ with real symbol $a \in S_\delta^0(1)$. For the lower bound, we suppose without loss of generality that $a_- = 0$.

For $X = (x, \xi) \in \mathbb{R}^2$, consider $\Gamma(X) = \Gamma(x, \xi) = 2e^{-\frac{x^2+\xi^2}{h}}$. Using Eq. (2.5) for symbols on $T^*\mathbb{R}$, a straightforward calculation involving Gaussian integrals shows that $\Gamma_h^w \Gamma = \Gamma$, hence Γ_h^w is an orthogonal projector, and thus a positive operator. Define the symbol

$$a \star \Gamma(X) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi h} \int_{\mathbb{R}^2} a(X+Y) 2e^{-\frac{Y^2}{h}} dY.$$

To connect $(a \star \Gamma)_h^w$ with a_h^w , we make use of the Taylor formula at point X in the above definition. Because of the parity of Γ and the fact that $\int_{\mathbb{R}^2} \Gamma(X) dX = 2\pi h$, we have

$$\begin{aligned} a \star \Gamma(X) &= a(X) + \frac{2}{2\pi h} \iint (1-\theta) a''(X+\theta Y) Y^2 e^{-\frac{Y^2}{h}} dY d\theta \\ &= a(X) + \underbrace{\frac{1}{\pi} \iint (1-\theta) h a''(X+\theta Z\sqrt{h}) Z^2 e^{-Z^2} dZ d\theta}_{r(X)}. \end{aligned}$$

To evaluate $\|r_h^w\|_{L^2 \rightarrow L^2}$, we rescale the variable $X \mapsto \tilde{X} = X/\sqrt{h}$, and call $\tilde{r}(X) = r(\sqrt{h}X)$. If $u \in L^2$, we denote $\tilde{u}(\tilde{x}) = h^{\frac{1}{4}}u(x)$. This transformation is unitary: $\|\tilde{u}\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}$. Now, a simple change of variables using (2.3) shows that $\|r_h^w u\|_{L^2} = \|\tilde{r}_1^w \tilde{u}\|_{L^2}$ where \tilde{r}_1^w denotes the $\hbar = 1$ quantization of the symbol \tilde{r} . Because of the term $h a'' = \mathcal{O}(h^{1-2\delta})$ appearing in the definition of r , for any multi-index $|\alpha|$ we have

$$\partial_{\tilde{X}}^\alpha \tilde{r}(\tilde{X}) \lesssim h^{1+\frac{|\alpha|}{2}} h^{-\delta(|\alpha|+2)} = h^{1-2\delta} h^{|\alpha|(\frac{1}{2}-\delta)}.$$

Since the L^2 continuity theorem applied to \tilde{r}_1^w yields to a bound that involves a finite number of derivatives of \tilde{r} , we get $\|\tilde{r}_1^w\|_{L^2 \rightarrow L^2} = \mathcal{O}(\hbar^{1-2\delta})$. Here and below, by $f \lesssim g$ we will mean that $|f| \leq C|g|$ for some $C \geq 0$. Hence,

$$\|r_{\hbar}^w u\|_{L^2} = \|\tilde{r}_1^w \tilde{u}\|_{L^2} \leq \|\tilde{r}_1^w\|_{L^2 \rightarrow L^2} \|u\|_{L^2} \lesssim \hbar^{1-2\delta} \|u\|_{L^2},$$

and we conclude by $\|r_{\hbar}^w\|_{L^2 \rightarrow L^2} = \mathcal{O}(\hbar^{1-2\delta})$.

Now, from the definition of $a \star \Gamma$, we also have

$$(a \star \Gamma)_{\hbar}^w = \frac{1}{2\pi\hbar} \int a(Y) (\Gamma(\cdot - Y))_{\hbar}^w dY.$$

But as we noticed above, $(\Gamma(\cdot - Y))_{\hbar}^w > 0$, and then $(a \star \Gamma)_{\hbar}^w$ is positive definite. Using the fact that $a \star \Gamma = a + r$ and $\|r_{\hbar}^w\|_{L^2 \rightarrow L^2} = \mathcal{O}(\hbar^{1-2\delta})$, this implies the existence of a constant $c > 0$ such that

$$\langle u, a_{\hbar}^w u \rangle \geq -c\hbar^{1-2\delta}. \tag{2.11}$$

The upper bound is obtained similarly, assuming $a_+ = 0$ and considering the symbol $-a \geq 0$.

It is now a straightforward calculation to transpose these properties on the torus by making use of Eq. (2.4). \square

2.2. Quantum dynamics

The classical dynamics will simply be given by a smooth symplectic diffeomorphism $\kappa : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$. Since we are mainly interested in the case of chaotic dynamics, we will sometimes make the hypothesis that κ is Anosov, hence ergodic with respect to the Lebesgue measure μ . From this ergodicity we draw the following consequence on the set of periodic points. We recall that a set has *Minkowski content zero* if, for any $\varepsilon > 0$, it can be covered by equiradial Euclidean balls of total measure less than ε .

Proposition 2.2. *Assume the diffeomorphism κ is ergodic with respect to the Lebesgue measure. Then, for any $n \geq 1$, the fixed points of κ^n form a set of Minkowski content zero.*

Proof. Let us first check that, for any $n \neq 0$, the set of n -periodic points $\text{Fix}(\kappa^n)$ has Lebesgue measure zero. Indeed, this set is κ -invariant, so by ergodicity it has measure 0 or 1. In the latter case, the map κ would be n -periodic on a set of full measure, and therefore not ergodic.

Let us now fix $n \neq 0$. Since κ^n is continuous, for any $\epsilon \geq 0$ the set

$$F_{\epsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in \mathbb{T}^2, \text{dist}(x, \kappa^n(x)) \leq \epsilon \right\} \text{ is closed in } \mathbb{T}^2.$$

Since $F_{\epsilon} \subset F_{\epsilon'}$ if $\epsilon \leq \epsilon'$, for any Borel measure ν on \mathbb{T}^2 we have

$$\nu(F_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \nu(F_{\epsilon}).$$

Since $F_0 = \text{Fix}(\kappa^n)$ has zero Lebesgue measure, it is of Minkowski content zero. \square

We will not study in detail the possible quantization recipes of the symplectic map κ (see e.g. [10, 16, 29] for discussions on this question), but assume that some quantization can be constructed. In dimension $d = 1$, the map κ can be decomposed into the product of three maps $L, t_{\mathbf{v}}$ and ϕ_1 where $L \in SL(2, \mathbb{Z})$ is a linear automorphism of the torus, $t_{\mathbf{v}}$ is the translation of vector \mathbf{v} and ϕ_1 is a time 1 hamiltonian flow [16]. One quantizes the map $\kappa = L \circ t_{\mathbf{v}} \circ \phi_1$ by quantizing separately $L, t_{\mathbf{v}}$ and ϕ_1 into $U_h(L), U_h(t_{\mathbf{v}})$ and $U_h(\phi_1)$ and setting $U_h(\kappa) = U_h(L)U_h(t_{\mathbf{v}})U_h(\phi_1)$. We are mainly interested in the Egorov property, or “quantum to classical correspondence principle” of such maps, which is expressed for $f \in S_\delta^0$ by

$$\|U_h(\kappa)^{-1} \text{Op}_h(f)U_h(\kappa) - \text{Op}_h(f \circ \kappa)\| = o_h(1), \quad \text{where } o_h(1) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

The following lemma makes the defect term $o_h(1)$ in the preceding equation more precise.

Lemma 2.3. *Let $f \in S_\delta^0$. There is a constant $C_{f,\kappa}$ such that*

$$\|U_h(\kappa)^{-1} \text{Op}_h(f)U_h(\kappa) - \text{Op}_h(f \circ \kappa)\| \leq C_{f,\kappa} h^{1-2\delta}. \tag{2.12}$$

Proof. Since it is well known that for linear maps L , one has

$$U_h(L)^{-1} \text{Op}_h(f)U_h(L) = \text{Op}_h(f \circ L),$$

we will consider only the quantizations of $t_{\mathbf{v}}$ and ϕ_1 . The map $t_{\mathbf{v}}$ is quantized by a quantum translation operator of vector \mathbf{v}_h , which is at distance $|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h| = \mathcal{O}(h)$:

$$U_h(t_{\mathbf{v}})^{-1} \text{Op}_h(f)U_h(t_{\mathbf{v}}) = \text{Op}_h(f \circ t_{\mathbf{v}_h}).$$

Consequently, we need to estimate $\|\text{Op}_h(f \circ t_{\mathbf{v}} - f \circ t_{\mathbf{v}_h})\|$. For this purpose, we first evaluate $\|f \circ t_{\mathbf{v}} - f \circ t_{\mathbf{v}_h}\|_{C^0}$. Denote $\mathbf{v} = (v^q, v^p)$ and $\mathbf{v}_h = (v_h^q, v_h^p)$. A Taylor expansion shows that

$$\|f(q + v_h^q + (v^q - v_h^q), p + v_h^p + (v^p - v_h^p)) - f(q + v_h^q, p + v_h^p)\|_{C^0} = \mathcal{O}(h^{1-\delta})$$

and then,

$$\|f \circ t_{\mathbf{v}} - f \circ t_{\mathbf{v}_h}\|_{C^0} = \mathcal{O}(h^{1-\delta}).$$

Hence, $h^{\delta-1}(f \circ t_{\mathbf{v}} - f \circ t_{\mathbf{v}_h}) \in S_\delta^0$. Using Proposition 2.1, we conclude by

$$\|\text{Op}_h(f \circ t_{\mathbf{v}} - f \circ t_{\mathbf{v}_h})\| = \mathcal{O}(h^{1-\delta}).$$

Let us denote by $H \in S_0^0$ the Hamiltonian, X_H the associated Hamiltonian vector field, and $\phi_t = \exp(tX_H)$ the classical Hamiltonian flow at time t . For simplicity, we denote the quantum propagator at time t by $\mathcal{U}^t \stackrel{\text{def}}{=} \exp(-\frac{2i\pi t}{h} \text{Op}_h(H))$, and write $\phi_t^* f \stackrel{\text{def}}{=} f \circ \phi_t$. In particular, note that $\mathcal{U}^1 = U_h(\phi_1)$. From the equations:

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \phi_{t+s}^* f|_{s=0} = \{H, \phi_t^* f\} \\ \frac{d}{ds} \mathcal{U}^{t+s} \text{Op}_h(\phi_{t+s}^* f) \mathcal{U}^{-(t+s)}|_{s=0} = \mathcal{U}^t \text{Diff}_t(H, f) \mathcal{U}^{-t} \end{cases}$$

with $\text{Diff}_t(H, f) = \text{Op}_h(\{H, \phi_t^* f\}) - \frac{2i\pi}{h} [\text{Op}_h(H), \text{Op}_h(\phi_t^* f)]$, we get

$$\text{Op}_h(\phi_t^* f) = \mathcal{U}^{-t} \text{Op}_h(f) \mathcal{U}^t + \int_0^t \mathcal{U}^{s-t} \text{Diff}_s(H, f) \mathcal{U}^{t-s} ds.$$

A straightforward application of (2.6) yields to

$$\frac{2i\pi}{h} [\text{Op}_h(H), \text{Op}_h(\phi_t^* f)] = \text{Op}_h(\{H, \phi_t^* f\}) + \frac{i}{h} \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h^{2-2\delta}),$$

where $\mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(q)$ denotes an operator in \mathcal{H}_N whose norm is of order q . If we use the unitarity of \mathcal{U}^t , we thus obtain:

$$\|\mathcal{U}^{-1} \text{Op}_h(f) \mathcal{U}^1 - \text{Op}_h(\phi_1^* f)\| = \mathcal{O}(h^{1-2\delta}).$$

Adding all these estimates, we end up with

$$\|U_h(\kappa)^{-1} \text{Op}_h(f) U_h(\kappa) - \text{Op}_h(f \circ \kappa)\| \leq C_{f,\kappa} h^{1-2\delta}. \quad \square$$

Taking into account the damping, our damped quantum map is given by the matrix $M_h(a, \kappa)$ in (1.1). The damping factor $a \in S_0^0$ is chosen such that, for h small enough, $\|\text{Op}_h(a)\| \leq 1$ and $a_- = \min_{\mathbb{T}^2} |a| > 0$. From Proposition 2.1, this implies that $\text{Op}_h(a)$, and thus $M_h(a, \kappa)$, are invertible, with inverses uniformly bounded with respect to h :

$$\|M_h(a, \kappa)\| = a_+ + \mathcal{O}(h), \quad \|M_h(a, \kappa)^{-1}\| = a_-^{-1} + \mathcal{O}(h). \quad (2.13)$$

As explained in the introduction, $M_h(a, \kappa)$ is not a normal operator, and it may not be diagonalizable. Nevertheless, we may write its spectrum as

$$\text{Spec}(M_h(a, \kappa)) = \{\lambda_1^{(h)}, \lambda_2^{(h)}, \dots, \lambda_{h-1}^{(h)}\},$$

where each eigenvalue is counted according to its algebraic multiplicity, and eigenvalues are ordered by decreasing modulus (in the following we will sometimes omit the $^{(h)}$ superscripts). The bounds (2.13) trivially imply

$$a_+ + Ch \geq |\lambda_1^{(h)}| \geq |\lambda_2^{(h)}| \geq \dots \geq |\lambda_{h-1}^{(h)}| \geq a_- - Ch, \quad (2.14)$$

for some constant $C > 0$. Since we assumed $a_- > 0$, the spectrum is localized in an annulus for h small enough. The above bounds are similar with the ones obtained for the damped wave equation [3, Eq.(2-2)].

For later use, let us now recall the Weyl inequalities [18], which relate the eigenvalues of an operator A to its singular values (that is, the eigenvalues of $\sqrt{A^\dagger A}$):

Proposition 2.4 (Weyl’s inequalities). *Let \mathcal{H} be a Hilbert space and $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ a compact operator. Denote respectively $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ (respectively β_1, β_2, \dots) its eigenvalues (resp. singular values) ordered by decreasing moduli and counted with algebraic multiplicities. Then, $\forall k \leq \dim \mathcal{H}$, we have:*

$$\prod_{i=1}^k |\alpha_i| \leq \prod_{i=1}^k \beta_i, \quad \sum_{i=1}^k |\alpha_i| \leq \sum_{i=1}^k \beta_i. \quad (2.15)$$

We immediately deduce from this the following

Corollary 2.5. *Fix $n \geq 1$. Let $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ be the eigenvalues of A and $s_1^{(n)}, s_2^{(n)}, \dots$ the eigenvalues of $A_n = \sqrt[2n]{A^\dagger A^n}$, ordered as above. Then for any $k \leq \dim \mathcal{H}$:*

$$\sum_{i=1}^k \log |\lambda_i| \leq \sum_{i=1}^k \log s_i^{(n)}, \quad \prod_{i=1}^k |\lambda_i| \leq \prod_{i=1}^k s_i^{(n)}.$$

2.3. A first-order functional calculus on $\mathcal{L}(\mathcal{H}_N)$

In Section 3 we will need to analyze the operators

$$\left\{ \sqrt[2n]{M_h(a, \kappa)^{\dagger n} M_h(a, \kappa)^n}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}.$$

We will show that they are (self-adjoint) pseudodifferential operators (i.e. “quantum observables”) on \mathcal{H}_N , and then draw some estimates on their spectra in the semiclassical limit via counting functions and trace methods. We will use for this a functional calculus for operators in $\mathcal{L}(\mathcal{H}_N)$, obtained from a Cauchy formula, via the method of almost analytic extensions.

Let $a \in S^0_\delta$ be a real symbol. In order to localize the spectrum of $\text{Op}_h(a)$ over a set depending on h , we will make use of compactly supported functions $f_w \in C^\infty_0(\mathbb{R})$ which can have variations of order 1 over distances of order $w(h)$, for some continuous function $w > 0$, satisfying $w(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

The functions f_w have derivatives growing as $h \rightarrow 0$: for any $m \in \mathbb{N}$, we will assume that

$$\|\partial^m f_w\|_{C^0} \leq C_m w(h)^{-m}. \tag{2.16}$$

We will call such functions $w(h)$ -admissible. Our main goal in this section consist in defining the operators $f_w(\text{Op}_h(a))$ and characterize them as pseudodifferential operators on the torus.

We first construct an almost analytic extension $\tilde{f}_w \in C^\infty_0(\mathbb{C})$ satisfying

$$\|\bar{\partial} \tilde{f}_w\|_{C^0} \leq C_m |\Im z|^m w(h)^{-m-2}, \quad \forall m \geq 0 \tag{2.17}$$

$$\tilde{f}_w|_{\mathbb{R}} = f_w, \tag{2.18}$$

where $\bar{\partial}$ stands for $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$. For this purpose, we follow closely [11] : one put $\chi \in C^\infty_0(\mathbb{R})$ be equal to 1 in a neighborhood of 0, $\psi \in C^\infty_0(\mathbb{R})$ equal to 1 in a neighborhood of $\text{Supp}(f_w)$ and define

$$\tilde{f}_w(x + iy) = \frac{\psi(x)\chi(y)}{2\pi} \int e^{i(x+iy)\xi} \chi(y\xi) \hat{f}_w(\xi) d\xi.$$

We will now check that \tilde{f}_w is a function that satisfies Eqs. (2.17) and (2.18). Notice first that \tilde{f}_w is compactly supported in \mathbb{C} , and that Eq. (2.18) follows clearly from

the Fourier inversion formula. To derive (2.17), remark that

$$\begin{aligned} \bar{\partial} \tilde{f}_w &= \frac{i\psi(x)\chi(y)}{4\pi} y^m \int e^{i(x+iy)\xi} \frac{\chi'(y\xi)}{(y\xi)^m} \xi^{m+1} \hat{f}_w(\xi) d\xi \\ &\quad + \frac{\psi'(x)\chi(y) + i\psi(x)\chi'(y)}{4\pi} \int e^{i(x+iy-\tilde{x})\xi} \chi(y\xi) f_w(\tilde{x}) d\tilde{x} d\xi \\ &= \text{I} + \text{II}. \end{aligned}$$

Note that if $y = 0$, $\text{I} = \text{II} = 0$ because of the properties of χ and ψ , so (2.17) is satisfied with $C_m = 0$. We now suppose $y \neq 0$. Since f_w is compactly supported, we can integrate by parts and using (2.16), we obtain, setting $t = y\xi$:

$$\left| \int \frac{\chi'(y\xi)}{(y\xi)^m} \xi^{m+2} \hat{f}_w(\xi) \frac{d\xi}{\xi} \right| \leq \int \left| \frac{\chi'(t)}{t^{m+1}} (\partial_x^{m+2} f_w(x)) \right| dt dx \leq C_m w(h)^{-m-2}.$$

In the last inequality, we used the fact that f_w and $t \mapsto t^{-m-1}\chi'(t)$ are compactly supported. Hence, this shows that $|\text{I}| \leq C_m |y|^m w(h)^{-m-2}$. To treat the term II , denote

$$F(x, y) = \frac{\psi'(x)\chi(y) + i\psi(x)\chi'(y)}{4\pi} \quad \text{and} \quad G(x, \tilde{x}, y) = (i + D_{\tilde{x}})^2 D_{\tilde{x}}^m \left(\frac{f_w(\tilde{x})}{x - \tilde{x} + iy} \right).$$

Since $y \neq 0$, we can rewrite II to get

$$\text{II} = iF(x, y) \int y^m e^{i(x-\tilde{x}+iy)\xi} \frac{\chi'(y\xi)y}{(\xi + i)^2 (y\xi)^m} G(x, \tilde{x}, y) d\tilde{x} d\xi.$$

As above, we set $t = y\xi$. This gives

$$\begin{aligned} \int \left| y^m \frac{\chi'(y\xi)y}{(\xi + i)^2 (y\xi)^m} G(x, \tilde{x}, y) \right| d\tilde{x} d\xi &\leq \int \left| y^{m+2} \frac{\chi'(t)}{(t + iy)^2 t^m} G(x, \tilde{x}, y) \right| dt d\tilde{x} \\ &\leq \int \left| y^{m+2} \frac{\chi'(t)}{t^{m+2}} G(x, \tilde{x}, y) \right| dt d\tilde{x}. \end{aligned}$$

Let us distinguish two cases.

- If $x \notin \text{Supp } \psi$, then $\tilde{x} \in \text{Supp } f_w \Rightarrow x - \tilde{x} \neq 0$, from which we deduce that $\int |G(x, \tilde{x}, y)| d\tilde{x} \leq c_m w(h)^{-m-2}$.
- If $x \in \text{Supp } \psi$, then $F(x, y) = i(4\pi)^{-1} \chi'(y)$. If $\chi'(y) = 0$, we get $\text{II} = 0$. Otherwise, we have $b_1 \leq |y| \leq b_2$ for some fixed constants $b_1, b_2 > 0$ depending on χ . In this case, we get again $\int |G(x, \tilde{x}, y)| d\tilde{x} \leq c_m w(h)^{-m-2}$.

Grouping the results, we see that $|\text{II}| \leq C_m |y|^{m+2} w(h)^{-m-2} \leq \tilde{C}_m |y|^m w(h)^{-m-2}$, and since $|\text{I}| \leq C_m |y|^m w(h)^{-m-2}$, it follows that Eq. (2.17) holds.

Considering a function f_w as above, we now characterize $f_w(\text{Op}_h(a))$ as a pseudodifferential operator on the torus. We begin by two lemmas concerning resolvent estimates. For $z \notin \text{Spec Op}_h(a)$, we denote $\mathcal{R}_z(a) = (\text{Op}_h(z - a))^{-1}$ the resolvent of $\text{Op}_h(a)$ at point z .

Lemma 2.6. *Let $a \in S_\delta^0$ be a real symbol, and $\Omega \subset \mathbb{C}$ a bounded domain such that $\text{Supp}(\tilde{f}_w) \subset \Omega$. Take $z \in \Omega$ and suppose that $|\Im z| \geq h^\varepsilon$ for some $\varepsilon \in]0, 1]$ such that $\delta + \varepsilon < \frac{1}{2}$. Then,*

$$\frac{1}{z - a} \in S_{\delta+\varepsilon}^\varepsilon.$$

Proof. The hypothesis $|\Im z| \geq h^\varepsilon$ implies immediately that

$$\frac{1}{|z - a|} \leq h^{-\varepsilon}. \tag{2.19}$$

To control the derivatives of $(z - a)^{-1}$, we will make use of the Faà di Bruno formula [9]. For $n \geq 2$, Let $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ be a multi-index, and Π be the set of partitions of the ensemble $\{1, \dots, |\alpha|\}$. For $\pi \in \Pi$, we write $\pi = \{B_1, \dots, B_r\}$, where B_i is some subset of $\{1, \dots, |\alpha|\}$ and can then be seen as a multi-index. Here $|\alpha| \geq r \geq 1$, and we denote $|\pi| = r$. For two smooth functions $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ and $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ such that $f \circ g$ is well defined, one has

$$\partial^\alpha f \circ g = \sum_{\pi \in \Pi} \partial^{|\pi|} f(g) \prod_{B \in \pi} \frac{\partial^{|B|} g}{\prod_{j \in B} \partial x_{\alpha_j}}. \tag{2.20}$$

We now take $n = 2$, and $\alpha \in \mathbb{N}^2$. Using this formula for $\partial^\alpha \frac{1}{z-a}$ and recalling that $a \in S_\delta^0$, we get for each partition $\pi \in \Pi$ a sum of terms which can be written:

$$\frac{1}{(z - a)^{r+1}} \prod_{B \in \pi} \partial^B (z - a) \lesssim h^{-\varepsilon(r+1)} h^{-\delta|\alpha|}.$$

Since we have $r \leq |\alpha|$, this concludes the proof. □

The preceding lemma allows us to obtain now a useful resolvent estimate:

Lemma 2.7. *Choose $\varepsilon < \frac{1-2\delta}{4}$. Suppose as above that $a \in S_\delta^0$ is real and $z \in \Omega$ with $|\Im z| \geq h^\varepsilon$. Then,*

$$\mathcal{R}_z(a) = \text{Op}_h \left(\frac{1}{z - a} \right) + R_h(z),$$

where $R_h(z) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_N)$ satisfies $\|R_h(z)\| = \mathcal{O}(h^{1-2(\delta+2\varepsilon)})$, uniformly in z .

Proof. We will denote $\mathcal{O}_{\mathcal{H}_N, z}(q)$ an operator which depends continuously on z and whose norm in \mathcal{H}_N is of order q . By the preceding lemma and the symbolic calculus (2.7), for $|\Im z| \geq h^\varepsilon$ we can write:

$$\text{Op}_h(z - a) \text{Op}_h \left(\frac{1}{z - a} \right) = \text{Id} - \text{Op}_h(r_z)$$

with $\text{Op}_h(r_z) = \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N, z}(h^{1-2\delta-3\varepsilon})$. For h small enough, the right hand side is invertible:

$$(\text{Id} - \text{Op}_h(r_z))^{-1} = \text{Id} + \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N, z}(h^{1-2\delta-3\varepsilon}). \tag{2.21}$$

We now remark that the Gårding inequality implies $\text{Op}_h\left(\frac{1}{z-a}\right) = \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N, z}(h^{-\varepsilon})$. Since we have obviously

$$\mathcal{R}_z(a) = \text{Op}_h\left(\frac{1}{z-a}\right) (\text{Id} - \text{Op}_h(r_z))^{-1},$$

we obtain using Eq. (2.21)

$$\mathcal{R}_z(a) = \text{Op}_h\left(\frac{1}{z-a}\right) + \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N, z}(h^{1-2\delta-4\varepsilon}).$$

It is now straightforward to check that all the remainder terms are uniform with respect to z , since we have $z \in \Omega$ and $|\Im z| \geq h^\varepsilon$. \square

We can now formulate a first order functional calculus for $a \in S_\delta^0$.

Proposition 2.8 (Functional calculus). *Let $a \in S_\delta^0$ real, and f_w a w -admissible function with $w(h)^{-1} \lesssim h^{-\eta}$ such that*

$$0 \leq \eta < \frac{1-2\delta}{6}. \tag{2.22}$$

Then, for any $\varepsilon > 0$ such that $\eta < \varepsilon < \frac{1-2\delta}{6}$, we have:

$$f_w(\text{Op}_h(a)) = \text{Op}_h(f_w(a)) + \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h^{1-2\delta-6\varepsilon})$$

and $f_w(a) \in S_{\eta+\delta}^0$.

Proof. Let us write the Lebesgue measure $dx dy = \frac{d\bar{z} \wedge dz}{2i}$. From the operator theory point of view, we already know that for any bounded self-adjoint operator A

$$f_w(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \bar{\partial} \tilde{f}_w(z, \bar{z})(z - A)^{-1} d\bar{z} \wedge dz,$$

see for example [11] for a proof.

Because of the condition expressed by Eq. (2.22), it is possible to choose $\varepsilon > 0$ such that $\eta < \varepsilon < \frac{1-2\delta}{6}$. We now divide the complex plane into two subsets depending on ε : $\mathbb{C} = \Omega_1 \cup \Omega_2$, where $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |\Im z| < h^\varepsilon\}$ and $\Omega_2 = \mathbb{C} \setminus \Omega_1$. We first treat the case $z \in \Omega_1$. We recall that for $z \notin \mathbb{R}$, one has

$$\|\mathcal{R}_z(a)\| \leq \frac{1}{|\Im z|} \quad \text{and} \quad \frac{1}{|z-a|} \leq \frac{1}{|\Im z|}. \tag{2.23}$$

Using Eqs. (2.17) and (2.23), we obtain for any $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\Omega_1} \bar{\partial} \tilde{f}_w(z, \bar{z}) \mathcal{R}_z(a) d\bar{z} \wedge dz \right\| &\leq \int_{\Omega_1 \cap \text{Supp}(\tilde{f}_w)} \frac{1}{|\Im z|} C_m |\Im z|^m w(h)^{-m-2} d\bar{z} \wedge dz \\ &\lesssim h^{(m-1)\varepsilon} w(h)^{-m-2}. \end{aligned}$$

Since $h^\varepsilon w(h)^{-1} \lesssim h^{\varepsilon-\eta} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, by taking m sufficiently large we obtain

$$\left\| \int_{\Omega_1} \bar{\partial} \tilde{f}_w \mathcal{R}_z(a) d\bar{z} \wedge dz \right\| = \mathcal{O}(h^\infty).$$

We now consider $z \in \Omega_2$. Using Lemma 2.7, we obtain

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} \bar{\partial} \tilde{f}_w(z, \bar{z}) \mathcal{R}_z(a) \frac{d\bar{z} \wedge dz}{2i\pi} &= \int_{\Omega_2} \bar{\partial} \tilde{f}_w(z, \bar{z}) \text{Op}_h \left(\frac{1}{z-a} \right) \frac{d\bar{z} \wedge dz}{2i\pi} \\ &\quad + \int_{\Omega_2} \bar{\partial} \tilde{f}_w(z, \bar{z}) R_h(z) \frac{d\bar{z} \wedge dz}{2i\pi} \\ &= \text{I} + \text{II}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

To rewrite the first term I in the right hand side, we use the Fourier representation (2.8):

$$\begin{aligned} \text{I} &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Omega_2} \bar{\partial} \tilde{f}_w \sum_{\mu, \nu \in \mathbb{Z}} \hat{T}_{\mu, \nu} c_{\mu, \nu}(z) d\bar{z} \wedge dz \\ &= \sum_{\mu, \nu \in \mathbb{Z}} \hat{T}_{\mu, \nu} \int_{\mathbb{T}^2} dx dy e^{2i\pi(\mu x - \nu y)} \frac{1}{2i\pi} \int_{\Omega_2} \frac{\bar{\partial} \tilde{f}_w(z, \bar{z})}{z - a(x, y)} d\bar{z} \wedge dz \\ &= \text{Op}_h \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\Omega_2} \frac{\bar{\partial} \tilde{f}_w(z, \bar{z})}{z - a} d\bar{z} \wedge dz \right), \end{aligned}$$

where we used the uniform convergence of the Fourier series (2.8), the Fubini Theorem and the linearity of the quantization $f \mapsto \text{Op}_h(f)$. Note that

$$\int_{\Omega_2} \frac{\bar{\partial} \tilde{f}_w(z, \bar{z})}{z - a} d\bar{z} \wedge dz = \int_{\mathbb{C}} \frac{\bar{\partial} \tilde{f}_w(z, \bar{z})}{z - a} d\bar{z} \wedge dz - \int_{\Omega_1} \frac{\bar{\partial} \tilde{f}_w(z, \bar{z})}{z - a} d\bar{z} \wedge dz.$$

Now, Eqs. (2.23) and (2.17) yields to

$$\int_{\Omega_1} \frac{\bar{\partial} \tilde{f}_w(z, \bar{z})}{z - a} d\bar{z} \wedge dz = \mathcal{O}(h^\infty),$$

and since the Cauchy formula for C^∞ functions implies that

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\bar{\partial} \tilde{f}_w(z, \bar{z})}{z - a} d\bar{z} \wedge dz = \tilde{f}_w|_{\mathbb{R}}(a) = f_w(a),$$

we can simply write

$$\text{I} = \text{Op}_h \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\Omega_2} \frac{\bar{\partial} \tilde{f}_w(z, \bar{z})}{z - a} d\bar{z} \wedge dz \right) = \text{Op}_h(f_w(a)) + \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h^\infty). \tag{2.25}$$

For the term II in Eq. (2.24), we first remark that $\bar{\partial} \tilde{f}_w$ is compactly supported. Then, we use Eq. (2.17) and Lemma 2.7 to write:

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\Omega_2} \bar{\partial} \tilde{f}_w(z, \bar{z}) R_h(z) d\bar{z} \wedge dz \right\| &\leq \int_{\Omega_2} \|R_h(z)\| |\bar{\partial} \tilde{f}_w(z, \bar{z})| d\bar{z} \wedge dz \\ &\lesssim h^{1-2\delta-4\epsilon} h^{-2\eta} \leq h^{1-2\delta-6\epsilon}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Hence, combining Eqs. (2.24), (2.25) and (2.26),

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \bar{\partial} \tilde{f}_w(z, \bar{z}) \mathcal{R}_z(a) d\bar{z} \wedge dz = \text{Op}_h(f_w(a)) + \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h^{1-2\delta-6\varepsilon}),$$

as was to be shown. The last assertion is a direct application of Eqs. (2.20) and (2.16). \square

Below, we will frequently make use of the functional calculus for some perturbed operators. Our main tool for this purpose is stated as follows:

Corollary 2.9 (Functional calculus – perturbations). *Let $a \in S_{\delta}^0$ be a real symbol and f_w be a w -admissible function with $w(h)^{-1} \lesssim h^{-\eta}$ and $0 \leq \eta < \frac{1-2\delta}{6}$. Consider $B_h \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_N)$, with the properties:*

- (i) $\text{Op}_h(a) + B_h$ is self-adjoint,
- (ii) $\|B_h\| = \mathcal{O}(h^{\nu})$ for some $\nu > 4\eta > 0$.

Then, at first order, the functional calculus is still valid: for any $\varepsilon > 0$ such that

$$\eta < \varepsilon < \frac{1-2\delta}{6} \quad \text{and} \quad \eta < \varepsilon < \frac{\nu}{4},$$

we have:

$$f_w(\text{Op}_h(a) + B_h) = \text{Op}_h(f_w(a)) + \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h^{\min(1-2\delta-6\varepsilon, \nu-4\varepsilon)})$$

and $f_w(a) \in S_{\eta+\delta}^0$.

Proof. We must find the resolvent of $\text{Op}_h(a) + B_h$. From (ii) we can choose $\varepsilon > 0$ such that $\eta < \varepsilon < \frac{1-2\delta}{6}$ and $\eta < \varepsilon < \frac{\nu}{4}$. Note that this implies $\nu - 4\varepsilon > 0$. As in Lemma 2.7, we choose a compact domain $\Omega \subset \mathbb{C}$ with $z \in \Omega$, and split $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ as above. Suppose first that $z \in \Omega_2$, i.e. $|\Im(z)| \geq h^{\varepsilon}$. Then, using the condition (ii) we get

$$\text{Id} - (\text{Op}_h(z - a) - B_h) \text{Op}_h\left(\frac{1}{z - a}\right) = \text{Op}_h(r_z) + B_h \text{Op}_h\left(\frac{1}{z - a}\right).$$

The norm of the right hand side is of order $h^{\min(1-2\delta-3\varepsilon, \nu-\varepsilon)}$ uniformly for $z \in \Omega_2$, hence for h small enough, we can use the same method employed in the Lemma 2.7 to get:

$$\begin{aligned} (z - \text{Op}_h(a) - B_h)^{-1} &= \text{Op}_h\left(\frac{1}{z - a}\right) \left(\text{Id} - \text{Op}_h(r_z) - B_h \text{Op}_h\left(\frac{1}{z - a}\right)\right)^{-1} \\ &= \text{Op}_h\left(\frac{1}{z - a}\right) + R_h \end{aligned}$$

where $\|R_h\| \lesssim h^{\min(1-2\delta-4\varepsilon, \nu-2\varepsilon)}$ uniformly in z . The next steps are now exactly the same as above, and we end up with

$$f_w(\text{Op}_h(a) + B_h) = \text{Op}_h(f_w(a)) + \int_{\Omega_2} \bar{\partial} \tilde{f}_w(z, \bar{z}) R_h(z) \frac{d\bar{z} \wedge dz}{2i\pi} + \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h^{\infty}),$$

where now $\|R_h(z)\| \lesssim h^{\min(1-2\delta-4\varepsilon, \nu-2\varepsilon)}$. Since $\|\bar{\partial}\tilde{f}_w\|_{C^0} \lesssim h^{-2\eta}$, this concludes the proof. \square

As a direct application of the last two propositions, let us show an analogue of the spectral Weyl law on the torus.

Proposition 2.10. *Let $a \in S_0^0$, and $B_h \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_N)$ as in Corollary 2.9. Choose $\varepsilon > 0$ arbitrary small but fixed, and call $A_h = \text{Op}_h(a) + B_h$. Let E_1, E_2 be positive numbers, $I \stackrel{\text{def}}{=} [E_1, E_2]$ and $I_{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} [E_1 \mp \varepsilon, E_2 \pm \varepsilon]$. Then,*

$$\int_{\mathbb{T}^2} \mathbb{1}_{I_-}(a)d\mu + o_h(1) \leq h\#\{\lambda \in \text{Spec } A_h \cap I\} \leq \int_{\mathbb{T}^2} \mathbb{1}_{I_+}(a) + o_h(1). \quad (2.27)$$

Proof. Define a smooth function χ^+ such that for some $C > 0$, $\chi^+(x) = 1$ if $x \in I$ and $\chi^+(x) = 0$ if $x \notin I_+$. Define as well $\chi^- = 0$ outside I and $\chi^- = 1$ on I_- . Denote $D_h = h\#\{\lambda \in \text{Spec } A_h \cap I\}$. Then,

$$h \text{Tr}(\chi^-(A_h)) \leq D_h \leq h \text{Tr}(\chi^+(A_h)).$$

By the Corollary 2.9, $h \text{Tr}(\chi^+(\text{Op}_h(a) + B_h)) = \int_{\mathbb{T}^2} \chi^+(a)d\mu + \mathcal{O}(h^\alpha)$ for some $\alpha > 0$, and $h \text{Tr}(\chi^-(\text{Op}_h(a) + B_h)) = \int_{\mathbb{T}^2} \chi^-(a)d\mu + \mathcal{O}(h^\alpha)$ as well. But obviously,

$$\int_{\mathbb{T}^2} \mathbb{1}_{I_-}(a)d\mu \leq \int_{\mathbb{T}^2} \chi^-(a) \quad \text{and} \quad \int_{\mathbb{T}^2} \chi^+(a) \leq \int_{\mathbb{T}^2} \mathbb{1}_{I_+}(a).$$

This yields to

$$\int_{\mathbb{T}^2} \mathbb{1}_{I_-}(a)d\mu + o_h(1) \leq D_h \leq \int_{\mathbb{T}^2} \mathbb{1}_{I_+}(a) + o_h(1). \quad \square$$

3. Eigenvalues density

3.1. The operator S_n

Consider our damping function $a \in S_0^0$, with $\text{Ran}(|a|) = [a_-, a_+]$, $a_- > 0$, $a_+ \leq 1$. To simplify the following analysis, we will suppose without any loss of generality that $a_+ = 1$. As mentioned above, to study the radial distribution of $M_h(a, \kappa)$ it will be useful to first consider the sequence of operators

$$\tilde{S}_n(a) \stackrel{\text{def}}{=} M_h(a, \kappa)^{\dagger n} M_h(a, \kappa)^n, \quad n \geq 1. \quad (3.1)$$

Let us show that for $h \rightarrow 0$ and $n \geq 1$ possibly depending on h , these operators can be rewritten into a more simple form, involving n -time evolutions of the observable a by the map κ . Using the composition of operators (2.7) and the Egorov property (2.12), we will show that the quantum to classical correspondence is valid up to times of order $\log h^{-1}$, as it is usually expected. In what follows, for any constant C , we will make use of the notation $C^\pm = C \pm \varepsilon$ with $\varepsilon > 0$ arbitrary small but *fixed* as $h \rightarrow 0$. We allow the value of ε to change from equation to equation, hence C^\pm denotes any constant arbitrary close to C , C^+ being larger than C and C^- smaller: ε will then be chosen small enough so that the equations

where C^\pm appear are satisfied. We also recall the following definitions, already introduced in Theorem 1.4:

$$\Gamma = \log \left(\sup_x \|D\kappa|_x\| \right) \quad \text{and} \quad T_{a,\kappa} = \frac{1}{2\Gamma - 12 \log a_-}. \tag{3.2}$$

Proposition 3.1. *Let $\tau > 0$ be a constant such that $\tau < T_{a,\kappa}$. If $E(x)$ denotes the integer part of x , define $n_\tau = E(\tau \log h^{-1})$. Then, for $n \leq n_\tau$, the operators*

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n(a) &= (M_h(a, \kappa)^{\dagger n} M_h(a, \kappa)^n)^{\frac{1}{2n}} \\ \ell \mathcal{S}_n(a) &= \log \mathcal{S}_n(a) \end{aligned}$$

are well defined if and only if $\text{Ker}(M_h(a, \kappa)) = 0$. Furthermore, if we set

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^n |a \circ \kappa^i|^{\frac{1}{n}}, \quad \ell a_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log |a \circ \kappa^i|,$$

we have for $n \leq n_\tau$:

$$\ell \mathcal{S}_n(a) = \text{Op}_h(\ell a_n) + \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h^{\sigma^-}) \tag{3.3}$$

$$\mathcal{S}_n(a) = \text{Op}_h(a_n) + \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h^{\sigma^-}) \tag{3.4}$$

where $\sigma = 1 - \tau/T_{a,\kappa} > 0$.

Proof. Let us underline the main steps we will encounter below. Writing first

$$\tilde{a}_n \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^n |a \circ \kappa^i|^2$$

for $n \in \mathbb{N}$, we show that for $\tau < \frac{1}{2\Gamma}$, \tilde{a}_n belongs to a symbol class $S_{\delta^+}^0$ with $\delta^+ < 1/2$. Then, we show by using the symbolic calculus (2.7) and the Egorov property (2.12) that $\tilde{\mathcal{S}}_n(a) = \text{Op}_h(\tilde{a}_n) + \mathcal{O}(h^{\nu^-})$ for some $\nu^- > 0$. Finally, by bounding the spectrum of $\tilde{\mathcal{S}}_n(a)$, we will complete the proof of the proposition by using the functional calculus to define and compute both $\ell \mathcal{S}_n(a)$ and $\mathcal{S}_n(a)$.

Lemma 3.2. *Let $a \in S_0^0$ be a symbol on the torus. Then, for any multi-index $\alpha \in \mathbb{N}^2$, there exists $C_{\alpha,a,\kappa} > 0$ such that*

$$\forall n \geq 1, \quad \|\partial^\alpha(a \circ \kappa^n)\|_{C^0} \leq C_{\alpha,a,\kappa} e^{n|\alpha|\Gamma}. \tag{3.5}$$

Hence for any $\tau > 0$ such that $\tau < \frac{1}{2\Gamma}$, we have uniformly for $n \leq n_\tau$:

$$a \circ \kappa^n \in S_\delta^0, \quad \delta = \tau\Gamma < \frac{1}{2}. \tag{3.6}$$

Proof. The behavior expressed by Eq. (3.5) is well known for flows [8], and we refer to [13], Lemma 1 for a detailed proof in the case of applications. The second part of the lemma follows easily from (3.5). \square

Lemma 3.3. *If $\tau < \frac{1}{2\Gamma}$, we have:*

$$\forall n \leq n_\tau, \quad \tilde{a}_n \in S_{\delta^+}^0 \quad \text{with} \quad \delta^+ = \tau\Gamma^+ < \frac{1}{2}.$$

Proof. Since $a_+ = 1$ and $0 < a_- < 1$, \tilde{a}_n is uniformly bounded from above with respect to h . It is then enough to show that for every multi index $\alpha \in \mathbb{N}^2$ and $n \leq n_\tau$, one has

$$\partial^\alpha \prod_{i=1}^n (a \circ \kappa^i) \lesssim h^{-\delta^+|\alpha|}.$$

Set by convention $\partial^0 f = f$. Applying the Leibniz rule, we can write

$$\left\| \partial^\alpha \prod_{i=1}^n a \circ \kappa^i \right\|_{C^0} \leq n^{|\alpha|} \sup_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = \alpha} \prod_{i=1}^n \|\partial^{\alpha_i} (a \circ \kappa^i)\|_{C^0}.$$

Let us look at a typical term in the product appearing in the right hand side. Since at most $|\alpha|$ indices α_i in are non zero and $|a \circ \kappa^i| \leq 1$,

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n \|\partial^{\alpha_i} (a \circ \kappa^i)\|_{C^0} &\leq \prod_{i=1}^n C_{\alpha_i, a, \kappa} e^{i|\alpha_i|\Gamma} \\ &\leq \left(\sup_{|\beta| \leq |\alpha|} C_{\beta, a, \kappa} \right)^{|\alpha|} e^{n|\alpha|\Gamma} \stackrel{\text{def}}{=} K_{\alpha, a, \kappa} e^{n|\alpha|\Gamma}. \end{aligned}$$

Finally, we simply get

$$\left\| \partial^\alpha \prod_{i=1}^n a \circ \kappa^i \right\|_{C^0} \leq K_{\alpha, a, \kappa} e^{|\alpha|(\Gamma n + \log n)} \leq K_{\alpha, a, \kappa} e^{|\alpha|\Gamma' n}$$

for some $\Gamma' > \Gamma$. If we choose $\Gamma' = \Gamma + \epsilon$ and $\Gamma - \epsilon$ small enough such that $\tau\Gamma + \epsilon < \frac{1}{2}$, the last equation will be true only for $n \geq n_0$, with n_0 fixed independent of h . Since for $n < n_0$, we obviously have $\tilde{a}_n \in S_{\delta^+}^0$, we finally conclude that if $\tau\Gamma + \epsilon < \frac{1}{2}$, $\tilde{a}_n \in S_{\delta^+}^0$ with $\delta^+ = \tau\Gamma + \epsilon < \frac{1}{2}$, uniformly for $n \leq n_\tau$. \square

We can now rewrite more explicitly Eq. (3.1).

Lemma 3.4. *Choose $\tau > 0$ small enough such that $\delta = \tau\Gamma < \frac{1}{2}$, and take as before $n \leq n_\tau$. Then, we have*

$$\tilde{S}_n(a) = \text{Op}_h(\tilde{a}_n) + \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h^{\nu^-}) \tag{3.7}$$

where $\nu = 1 - 2\delta$.

Proof. The Lemmas 3.2 and 3.3 tell us that uniformly for $n \leq E(\tau \log h^{-1})$, the symbols $a \circ \kappa^n$ and \tilde{a}_n belong to the class $S_{\delta^+}^0$ if $\delta = \tau\Gamma < \frac{1}{2}$. This allows to write (using $U \equiv U_h(\kappa)$ for simplicity):

$$\begin{aligned} U^\dagger \text{Op}_h(\tilde{a}) \text{Op}_h(a) U &= U^\dagger \text{Op}_h(\tilde{a} \#_h a) U \\ &= U^\dagger \text{Op}_h(|a|^2) U + \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h^{1-2\delta^+}) \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} &= \text{Op}_h(|a \circ \kappa|^2) + \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h^{1-2\delta^+}) \\ &= \text{Op}_h(\tilde{a}_1) + R_1^1, \end{aligned} \tag{3.9}$$

where the symbolic calculus (2.7) has been used to get (3.8) and Eq. (2.12) to deduce Eq. (3.9). The remainder R_1^1 have a norm of order $h^{1-2\delta^+}$ in \mathcal{H}_N . This calculation can be iterated: suppose that the preceding step gave

$$\tilde{\mathcal{S}}_k(a) = \text{Op}_h(\tilde{a}_k) + \sum_{i=1}^k R_i^k,$$

with $R_i^k = \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h^{1-2\delta^+})$ for $1 \leq i \leq k$. Then, with the same arguments as those we used for the first step, we can find $R_{k+1}^{k+1} = \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h^{1-2\delta^+})$ such that

$$U^\dagger \text{Op}_h(\bar{a}) \text{Op}_h(\tilde{a}_k) \text{Op}_h(a)U = \text{Op}_h(\tilde{a}_{k+1}) + R_{k+1}^{k+1}.$$

If we define now $R_i^{k+1} = U^\dagger \text{Op}_h(\bar{a}) R_i^k \text{Op}_h(a)U = \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h^{1-2\delta^+})$, we get

$$\begin{aligned} U^\dagger \text{Op}_h(\bar{a}) \tilde{\mathcal{S}}_k(a) \text{Op}_h(a)U &= U^\dagger \text{Op}_h(\bar{a}) \text{Op}_h(\tilde{a}_k) \text{Op}_h(a)U + \sum_{i=1}^k R_i^{k+1} \\ &= \text{Op}_h(\tilde{a}_{k+1}) + \sum_{i=1}^{k+1} R_i^{k+1}. \end{aligned}$$

This shows that

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}}_n(a) &= \text{Op}_h(\tilde{a}_n) + n \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h^{1-2\delta^+}) \\ &= \text{Op}_h(\tilde{a}_n) + \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h^{1-2\delta^+}). \end{aligned}$$

In the preceding equation, the second line comes from the fact that $n \lesssim \log h^{-1}$. Since we defined $\nu = 1 - 2\delta$, the lemma is proved. \square

From now on, we will always assume $n \leq n_\tau$ for some $\tau > 0$ fixed. We will also choose τ small enough such that

$$\tau < T_{a,\kappa} = \frac{1}{2\Gamma - 12 \log a_-}. \tag{3.10}$$

This condition ensures in particular that Lemma 3.4 is valid, but it turns out that we will need a stronger condition than $\tau\Gamma < 1/2$ to complete the proof of Proposition 3.1.

In order to apply the functional calculus to $\tilde{\mathcal{S}}_n(a)$, we must bound its spectrum with the help of Proposition 2.1. This is expressed in the following

Proposition 3.5. *Define $\eta = -2\tau \log a_- > 0$. For $h > 0$ small enough, we have*

$$\text{Spec } \tilde{\mathcal{S}}_n(a) \subset [C_{n,h}, 2],$$

where $C_{n,h} = e^{2n \log a_-} - ch^{1-2\delta^+}$ and $c > 0$. In particular, there exists a constant $C > 0$ such that $C_{n,h} \geq Ch^\eta$, and $\tilde{\mathcal{S}}_n(a)$ has strictly positive spectrum.

Proof. We begin by proving the result for $\text{Op}_h(\tilde{a}_n)$. Since we have for some $c_1 > 0$

$$\tilde{a}_n \geq a_-^{2n} = e^{2n \log a_-} \geq c_1 h^{-2\tau \log a_-},$$

we will consider the symbol $b_n = \tilde{a}_n - e^{2n \log a_-} \geq 0$. From Lemma 3.3, we have $b_n \in S_{\delta^+}^0$ and we can apply Proposition 2.1: for any $\lambda \in \text{Spec}(\text{Op}_h(\tilde{a}_n))$, there exists $c > 0$ such that $|\lambda| \geq e^{2n \log a_-} - ch^{1-2\delta^+} \geq c_1 h^{-2\tau \log a_-} - ch^{1-2\delta^+}$. In order to have a strictly positive spectrum, we must have $-2\tau \log a_- < 1 - 2\delta^+$, which is satisfied if τ is chosen according to Eq. (3.10). Hence, there is a constant $C > 0$ such that for h small enough, $c_1 h^{-2\tau \log a_-} - ch^{1-2\delta^+} > Ch^{-2\tau \log a_-}$, and the lower bound is obtained. For the upper bound, we remark that we assumed that $a_+ = 1$. By Proposition 2.1, it follows that any constant strictly bigger than 1 gives an upper bound for the spectrum. We return now to $\tilde{\mathcal{S}}_n(a)$. Since we have $\|\tilde{\mathcal{S}}_n(a) - \text{Op}_h(\tilde{a}_n)\| = \mathcal{O}(h^{\nu^-})$ and $\nu^- > \eta$ thanks to Eq. (3.10), we get the final result if h is small enough. \square

Let us finish now the proof of Proposition 3.1. For $n \leq n_\tau$, we begin by constructing a smooth function $\chi_{n,h}$ compactly supported, equal to 1 on $\text{Spec}(\tilde{\mathcal{S}}_n)$. To do this, we define

$$\chi_{n,h}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq \frac{1}{2}C_{n,h} \\ 1 & \text{if } x \in [C_{n,h}, 2] \\ 0 & \text{if } x \geq 3. \end{cases}$$

Then, the function

$$\ell_n : x \mapsto \frac{\chi_{n,h}(x)}{2n} \log x$$

is smooth and equal to the function $\frac{1}{2n} \log(x)$ on $\text{Spec } \tilde{\mathcal{S}}_n(a)$, since we have shown that $\text{Spec}(\tilde{\mathcal{S}}_n(a)) \subset [C_{n,h}, 2]$. Furthermore, ℓ_n is compactly supported, uniformly bounded with respect to h . Since $C_{n,h} \geq Ch^\eta$, the function $\chi_{n,h}$ can easily be chosen h^η -admissible, which means that ℓ_n will also be h^η -admissible. Applying the standard functional calculus, we have

$$\ell_n(\tilde{\mathcal{S}}_n(a)) = \frac{1}{2n} \log \tilde{\mathcal{S}}_n(a) \stackrel{\text{def}}{=} \ell \mathcal{S}_n(a),$$

where the first equality follow from the fact that $\ell_n(x) = \frac{1}{2n} \log x$ on $\text{Spec}(\tilde{\mathcal{S}}_n(a))$. To complete the proof of Proposition 3.1, we compute $\ell_n(\tilde{\mathcal{S}}_n(a))$ using both Lemma 3.4 and Corollary 2.9. For this purpose, we must check that the conditions required by this corollary are fulfilled. First, $\tilde{a}_n \in S_{\delta^+}^0$, and from Eq. (3.10) we have $\eta < \frac{1-2\delta^+}{6}$. Second, the remainder in Eq. (3.7) is of order h^{ν^-} with $\nu = 1 - 2\delta$, and we clearly have

$$\frac{\nu^-}{4} > \frac{1 - 2\delta^-}{6} > \eta.$$

We now apply the Corollary 2.9 to obtain

$$\ell \mathcal{S}_n(a) = \ell_n(\text{Op}_h(\tilde{a}_n) + \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h^{\nu^-})) = \text{Op}_h(\ell a_n) + \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h^r), \quad r > 0. \quad (3.11)$$

Let us show that $r = \sigma^-$, where $\sigma = 1 - \tau/T_{a,\kappa}$. Indeed, the functional calculus states that

$$r = \min\{1 - 2\delta^+ - 6\varepsilon, \nu^- - 4\varepsilon\}$$

where ε has to be chosen in the interval $]\eta, \min(\frac{1-2\delta^+}{6}, \frac{\nu^-}{4})[$. Let us choose $\varepsilon = \eta^+$. Since $\nu = 1 - 2\delta$, we have

$$r = \min\{1 - 2\delta^+ - 6\eta^+, \nu^- - 4\eta^+\} = 1 - 2\delta^+ - 6\eta^+ = (1 - \tau/T_{a,\kappa})^- = \sigma^- . \tag{3.12}$$

To get now $\mathcal{S}_n(a)$, we again apply the standard functional calculus, and we obtain

$$\exp\left(\ell_n(\tilde{\mathcal{S}}_n(a))\right) = \exp\left(\frac{1}{2n} \log \tilde{\mathcal{S}}_n\right) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}_n(a)$$

where the first equality follows again from the property of ℓ_n on $\text{Spec}(\ell\mathcal{S}_n)$. We already stress that this equation is essential to study the eigenvalues distribution of $M_h(a, \kappa)$. Since $\tilde{a}_n \in S_{\delta^+}^0$, $\ell a_n = \frac{1}{2n} \log \tilde{a}_n \in S_{\delta^+}^0$. To compute $\mathcal{S}_n(a)$, we simply choose a smooth cutoff function supported in a h -independent neighborhood of $\text{Spec}(\ell\mathcal{S}_n(a))$. The Corollary 2.9 is used again to get

$$\mathcal{S}_n(a) \stackrel{\text{def}}{=} \exp(\ell\mathcal{S}_n(a)) = \text{Op}_h(a_n) + \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h^{\sigma^-}) . \tag{3.13}$$

□

3.2. Radial spectral density

We begin by recalling some elementary properties of ergodic means with respect to the map κ . Since $|a| > 0$ on \mathbb{T}^2 , the function $x \mapsto \log |a \circ \kappa^i(x)|$ is continuous on \mathbb{T}^2 for any $i \in \mathbb{N}$. The Birkhoff ergodic theorem then states that $\lim_{n \rightarrow \infty} \ell a_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \ell a_\infty(x)$ exists for μ -almost every x . More precisely, if we denote $\text{EI}_\infty(a) \stackrel{\text{def}}{=} \text{ess inf } a_\infty$ and $\text{ES}_\infty(a) \stackrel{\text{def}}{=} \text{ess sup } a_\infty$ for $a_\infty = \exp(\ell a_\infty)$, we have:

$$\text{EI}_\infty(a) \leq a_\infty(x) \leq \text{ES}_\infty(a) \text{ for } \mu - \text{almost every } x .$$

In particular, if κ is ergodic with respect to the Lebesgue measure μ , the Birkhoff ergodic theorem states that:

$$\text{For } \mu - a.e. \ x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n(x) = \int_{\mathbb{T}^2} \log |a| \, d\mu = \log \langle a \rangle , \tag{3.14}$$

and in this case, $\text{EI}_\infty(a) = \text{ES}_\infty(a) = \langle a \rangle$.

Proof of Theorem 1.1. As in Proposition 2.4, we order the eigenvalues of $M_h(a, \kappa)$ and $\mathcal{S}_n(a)$ by decreasing moduli. Take arbitrary small $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ and $0 < \gamma \leq \frac{\epsilon}{3}\delta$.

We recall that $I_\delta = [\text{EI}_\infty(a) - \delta, \text{ES}_\infty(a) + \delta]$ and define $\Omega_{n,\gamma^-} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{T}^2 \setminus a_n^{-1}(I_{\gamma^-})$, so

$$\mu(a_n^{-1}(I_{\gamma^-})) = 1 - \mu(\Omega_{n,\gamma^-}) .$$

Eq. (3.14) implies that $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\Omega_{n,\gamma^-}) = 0$. Hence, there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that

$$n \geq n_0 \implies \mu(\Omega_{n,\gamma^-}) \leq \frac{\epsilon \delta}{6a_+ - 3\langle a \rangle} = \frac{\epsilon \delta}{6 - 3\langle a \rangle} .$$

We now choose some $n \geq n_0$. Applying Proposition 2.10 to the operator $\mathcal{S}_n(a)$, we get immediately:

$$h \# \left\{ s \in \text{Spec}(\mathcal{S}_n(a)) : s \in I_\gamma \right\} \geq \mu(a_n^{-1}(I_{\gamma^-})) + o_h(1). \tag{3.15}$$

Using the Weyl inequalities, we can relate the spectrum of $\mathcal{S}_n(a)$ with that of $M_h(a, \kappa)$. Call $d_h \stackrel{\text{def}}{=} \#\{\lambda \in \text{Spec}(M_h(a, \kappa)) : |\lambda| > \text{ES}_\infty(a) + \delta\}$, where eigenvalues are counted with their algebraic multiplicities. Hence, using Corollary 2.5, we get

$$d_h (\text{ES}_\infty(a) + \delta) \leq \sum_{k=1}^{d_h} |\lambda_k| \leq \sum_{k=1}^{d_h} s_k. \tag{3.16}$$

Among the d_h first (therefore, largest) eigenvalues $(s_i)_{i=1, \dots, d_h}$ of $\mathcal{S}_n(a)$, we now distinguish those which are larger than $\gamma + \text{ES}_\infty(a)$, and call $d'_h = \#\{1 \leq i \leq d_h, s_i \leq \gamma + \text{ES}_\infty(a)\}$ the number of remaining ones.

Applying Proposition 2.1 to the observable a_n , we are sure that for h small enough, $s_j \in \text{Spec}(\mathcal{S}_n(a)) \Rightarrow s_j < 2$. Hence, for h small enough, (3.16) induces

$$d_h \delta \leq d'_h \gamma + (d_h - d'_h)(2 - \text{ES}_\infty(a)). \tag{3.17}$$

By construction,

$$d_h - d'_h \leq \#\left\{ s \in \text{Spec}(\mathcal{S}_n(a)) : s \notin I_\gamma \right\},$$

and using (3.15), we deduce

$$d_h - d'_h \leq h^{-1}(\mu(\Omega_{n, \gamma^-}) + o_h(1)).$$

Dividing now (3.17) by $h^{-1}\delta$ and using the preceding equation, we obtain:

$$\begin{aligned} h d_h &\leq \frac{\gamma}{\delta} + \frac{2 - \langle a \rangle}{\delta} \mu(\Omega_{n, \gamma^-}) + o_h(1) \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + o_h(1). \end{aligned}$$

To get the second inequality we used the condition on $\gamma > 0$. There exists $h_0(\epsilon, n)$ such that for any $h \leq h_0(\epsilon, n)$, the last remainder is smaller than $\epsilon/3$. We conclude that $\forall \epsilon, \delta > 0, \exists h_0^{-1} \in \mathbb{N}$ such that:

$$h \leq h_0 \Rightarrow \#\left\{ \lambda \in \text{Spec}(M_h(a, \kappa)) : |\lambda| > \text{ES}_\infty(a) + \delta \right\} \leq h^{-1}\epsilon. \tag{3.18}$$

To estimate the number of eigenvalues $|\lambda| < \text{EI}_\infty(a) - \delta$, we use the inverse propagator:

$$M_h(a, \kappa)^{-1} = U_h(\kappa)^{-1} \text{Op}_h(a)^{-1} = \text{Op}_h(a^{-1} \circ \kappa) U_h(\kappa)^{-1} + \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h), \tag{3.19}$$

where Eq. (2.12) has been used for the last equality. Since $U_h(\kappa)^{-1}$ is a quantization of the map κ^{-1} , the right hand side has a form similar with (1.1), with a small perturbation of order h . The function a^{-1} satisfies

$$a_+^{-1} \leq |a^{-1}| \leq a_-^{-1} \quad \text{and} \quad a_\infty^{-1} = (a_\infty)^{-1}.$$

Hence, we also have $\text{EI}_\infty(a^{-1}) = (\text{ES}_\infty(a))^{-1}$, $\text{ES}_\infty(a^{-1}) = (\text{EI}_\infty(a))^{-1}$. Applying the above results to the operator $M_h(a, \kappa)^{-1}$, we find some $h_1(\epsilon, \delta) > 0$ such that

$$h \leq h_1 \Rightarrow \#\{\lambda \in \text{Spec}(M_h(a, \kappa)) : |\lambda| < \text{EI}_\infty(a) - \delta\} \leq h^{-1}\epsilon. \tag{3.20}$$

Grouping (3.18) and (3.20) and taking ϵ arbitrarily small, we obtain Eq. (1.2). \square

3.3. Angular density

From Eq. (2.13), we know that for h small enough, all eigenvalues of $M_h(a, \kappa)$ satisfy $|\lambda_i| \geq a_-/2$. We can then write these eigenvalues as

$$\lambda_i = r_i e^{2i\pi\theta_i}, \quad r_i = |\lambda_i|, \quad \theta_i \in \mathbb{S}^1 \equiv [0, 1).$$

(we skip the superscript (h) for convenience). We want to show that, under the ergodicity assumption on the map κ , the arguments θ_i become homogeneously distributed over \mathbb{S}^1 in the semiclassical limit. We adapt the method presented in [7, 20] to show that the same homogeneity holds for the eigenangles of the map $U_h(\kappa)$. The main tool is the study of the traces $\text{Tr}(M_h(a, \kappa)^n)$, where $n \in \mathbb{N}$ is taken arbitrary large but independent of the quantum dimension h^{-1} .

Proof of Theorem 1.2, (ii). We begin by showing a useful result concerning the trace of $M_h(a, \kappa)^n$:

Proposition 3.6. *The ergodicity assumption on κ implies that*

$$\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad \lim_{h \rightarrow 0} h \text{Tr} M_h(a, \kappa)^n = 0. \tag{3.21}$$

Proof. Note here that n is fixed, independently of h . As before, we write $U \equiv U_h(\kappa)$ for convenience. Inserting products $U^{-1}U$ and using Egorov’s property, we get:

$$M_h(a, \kappa)^n = \text{Op}_h(a'_n)U^n + \mathcal{O}_n(h), \quad \text{where} \quad a'_n \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=0}^{n-1} a \circ \kappa^{-j}. \tag{3.22}$$

Let $\epsilon_0 > 0$. The next step consists of exhibiting a finite open cover $\mathbb{T}^2 = D_0 \cup \bigcup_{i=1}^M D_i$ with the following properties:

- D_0 contains the fixed points of κ^n and has Lebesgue measure $\mu(D_0) \leq \epsilon_0$. Such a set can be constructed thanks to Proposition 2.2.
- For each $i = 1, \dots, M$, $\kappa^n(D_i) \cap D_i = \emptyset$. This is possible, because κ^n is continuous and without fixed points on $\mathbb{T}^2 \setminus D_0$.

Then, a partition of unity subordinated to this cover can be constructed:

$$1 = \chi_0 + \sum_{i=1}^M \chi_i,$$

with $\chi_i \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, $\text{Supp } \chi_i \subset D_i$ for $0 \leq i \leq M$. Notice that the condition on D_i , $i \geq 1$ implies that $\chi_i(\chi_i \circ \kappa^{-n}) \equiv 0$. After quantizing this partition we write:

$$M_h(a, \kappa)^n = \text{Op}_h(\chi_0)M_h(a, \kappa)^n + \sum_{i=1}^M \text{Op}_h(\chi_i) M_h(a, \kappa)^n.$$

Using (3.22) and taking the trace:

$$\begin{aligned} h \text{Tr} (M_h(a, \kappa)^n) &= h \text{Tr} (\text{Op}_h(\chi_0) \text{Op}_h(a'_n)U^n) \\ &\quad + h \sum_{i=1}^M \text{Tr} (\text{Op}_h(\chi_i) \text{Op}_h(a'_n)U^n) + \mathcal{O}_n(h). \end{aligned}$$

Since $\chi_0 \geq 0$, $\text{Op}_h(\chi_0)^\dagger = \text{Op}_h(\chi_0)$ and we can perform the first trace in the right hand side in the basis where $\text{Op}_h(\chi_0)$ is diagonal. This yields to

$$|\text{Tr} (\text{Op}_h(\chi_0) \text{Op}_h(a'_n)U^n)| \leq a_+^n |\text{Tr} (\text{Op}_h(\chi_0))| + \mathcal{O}(1).$$

The estimates (2.10) and Eq. (2.7) imply that

$$h \text{Tr} (\text{Op}_h(\chi_0)) = \int_{\mathbb{T}^2} \chi_0 d\mu + \mathcal{O}(h).$$

Since $\mu(D_0) \leq \epsilon_0$, the integral on the right hand side satisfies $|\int_{\mathbb{T}^2} \chi_0 d\mu| \leq \epsilon_0$, and finally $h \text{Tr} (\text{Op}_h(\chi_0) \text{Op}_h(a'_n)U^n) = \mathcal{O}(\epsilon_0) + \mathcal{O}(h)$.

To treat the terms $i \geq 1$, we take first $\epsilon > 0$ arbitrary small and a smooth function $\tilde{\chi}_i \in C_0^\infty$ such that $\text{Supp } \tilde{\chi}_i \subset \text{Supp } \chi_i$ and $\|\tilde{\chi}_i^2 - \chi_i\|_{C^0} = \mathcal{O}(\epsilon)$. Then, we use the symbolic calculus to write

$$\begin{aligned} U^n \text{Op}_h(\chi_i) &= U^n \text{Op}_h(\tilde{\chi}_i)^2 + \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h) + \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(\epsilon) \\ &= U^n \text{Op}_h(\tilde{\chi}_i)U^{-n} U^n \text{Op}_h(\tilde{\chi}_i) + \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h) + \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(\epsilon). \end{aligned}$$

Using the cyclicity of the trace, this gives

$$\begin{aligned} h \text{Tr} (\text{Op}_h(\chi_i) \text{Op}_h(a'_n) U^n) &= h \text{Tr} (U^n \text{Op}_h(\tilde{\chi}_i)U^{-n}U^n \text{Op}_h(\tilde{\chi}_i) \text{Op}_h(a'_n)) \\ &\quad + \mathcal{O}(h) + \mathcal{O}(\epsilon) \\ &= h \text{Tr} (\text{Op}_h(\tilde{\chi}_i \circ \kappa^{-n})U^n \text{Op}_h(\tilde{\chi}_i) \text{Op}_h(a'_n)) \\ &\quad + \mathcal{O}(h) + \mathcal{O}(\epsilon) \\ &= h \text{Tr} (\text{Op}_h(a'_n \tilde{\chi}_i(\tilde{\chi}_i \circ \kappa^{-n}))U^n) + \mathcal{O}(h) + \mathcal{O}(\epsilon) \\ &= \mathcal{O}(h) + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned}$$

In the last line we used $\tilde{\chi}_i(\tilde{\chi}_i \circ \kappa^{-n}) \equiv 0$. Adding up all these expressions, we finally obtain

$$h \text{Tr} (M_h(a, \kappa)^n) = \mathcal{O}(\epsilon_0) + \mathcal{O}(\epsilon) + \mathcal{O}(h). \tag{3.23}$$

Since this estimate holds for arbitrary small ϵ_0 and ϵ , it proves the proposition. \square

We will now use these trace estimates, together with the information we already have on the radial spectral distribution (Theorem 1.2, (i)) to prove the homogeneous distribution of the angles (θ_j) .

Remark. This step is not obvious a priori: for a general non-normal $h^{-1} \times h^{-1} = N \times N$ matrix M , the first few traces $\text{Tr}(M^n)$ cannot, when taken alone, provide much information on the spectral distribution. As an example, the $N \times N$ Jordan block J_N of eigenvalue zero and its perturbation on the lower-left corner $J_{N,\varepsilon} = J_N + \varepsilon E_{N,1}$ both satisfy $\text{Tr} J^n = 0$ for $n = 1, \dots, N - 1$. However, their spectra are quite different: $\text{Spec}(J_{N,\varepsilon})$ consists in N equidistant points of modulus $\varepsilon^{1/N}$. Only the trace $\text{Tr} J^N$ distinguishes these two spectra.

By the Stone–Weierstrass theorem, any function $f \in C^0(\mathbb{S}^1)$ can be uniformly approximated by trigonometric polynomials. Hence, for any ϵ there exists a Fourier cutoff $K \in \mathbb{N}$ such that the truncated Fourier serie of f satisfies

$$f^{(K)}(\theta) = \sum_{k=-K}^K f_k e^{2i\pi k\theta} \quad \text{satisfies} \quad \|f_K - f\|_{L^\infty} \leq \epsilon. \tag{3.24}$$

We first study the average of $f^{(K)}$ over the angles (θ_j) :

$$h \sum_{j=1}^{h^{-1}} f^{(K)}(\theta_j) = \sum_{k=-K}^K f_k h \sum_{j=1}^{h^{-1}} e^{2i\pi k\theta_j}.$$

For each power $k \in [-K, K]$, we relate as follows the sum over the angles to the trace $\text{Tr} M_h(a, \kappa)^k$:

$$h \sum_{j=1}^{h^{-1}} e^{2i\pi k\theta_j} = \frac{h}{\langle a \rangle^k} \text{Tr} (M_h(a, \kappa)^k) + h \sum_{j=1}^{h^{-1}} \frac{\langle a \rangle^k - r_j^k}{\langle a \rangle^k} e^{2i\pi k\theta_j}. \tag{3.25}$$

Although this relation holds for any nonsingular matrix M , it becomes useful when one notices that most radii r_j are close to $\langle a \rangle$: this fact allows to show that the second term in the above right hand side is much smaller than the first one.

Take $\delta > 0$ arbitrary small, and denote $I_\delta \stackrel{\text{def}}{=} [\langle a \rangle - \delta, \langle a \rangle + \delta]$. From Theorem 1.2, (i) we learnt that $h\#\{r_j \in I_\delta\} = 1 + o_h(1)$. Hence the second term in the right hand side of (3.25) can be split into:

$$h \sum_{j=1}^{h^{-1}} \frac{\langle a \rangle^k - r_j^k}{\langle a \rangle^k} e^{2i\pi k\theta_j} = h \sum_{r_l \in I_\delta} \frac{\langle a \rangle^k - r_l^k}{\langle a \rangle^k} e^{2i\pi k\theta_l} + o_h(1). \tag{3.26}$$

By straightforward algebra, there exists $C_K > 0$ such that

$$\forall r \in I_\delta, \quad \forall k \in [-K, K], \quad \frac{|\langle a \rangle^k - r^k|}{\langle a \rangle^k} \leq C_K \delta,$$

so that the left hand side in (3.26) is bounded from above by $C_K \delta + o_h(1)$. By summing over the Fourier indices k , we find

$$h \sum_{j=1}^{h^{-1}} f^{(K)}(\theta_j) = f_0 + \sum_{\substack{k=-K \\ k \neq 0}}^K \frac{f_k}{\langle a \rangle^k} h \operatorname{Tr} (M_h(a, \kappa)^k) + \mathcal{O}_{K,f}(\delta) + o_h(1).$$

Using the trace estimates of Proposition 3.6 for the traces up to $|k| = K$, we thus obtain

$$h \sum_{j=1}^{h^{-1}} f^{(K)}(\theta_j) = f_0 + \mathcal{O}_{K,f}(\delta) + o_h(1).$$

Since this is true for every $\delta > 0$, we deduce:

$$h \sum_{j=1}^{h^{-1}} f^{(K)}(\theta_j) = f_0 + o_h(1).$$

We now use the estimate (3.24) to write:

$$h \sum_{j=1}^{h^{-1}} f(\theta_j) = f_0 + o_h(1) + \mathcal{O}(\epsilon).$$

ϵ being arbitrarily small, this concludes the proof. □

4. The Anosov case

4.1. Width of the spectral distribution

If κ is Anosov, one can obtain much more precise spectral asymptotics using dynamical information about the *decay of correlations* of classical observables under the dynamics generated by κ . We will make use of probabilistic notations: a symbol a is seen as a random variable, and its value distribution will be denoted P_a . If we denote as before the Lebesgue measure by μ , this distribution is defined for any interval $I \in \mathbb{R}$ by:

$$\begin{aligned} P_a(I) &\stackrel{\text{def}}{=} \mu(a^{-1}(I)) \\ &= \int_I P_a(dt). \end{aligned}$$

This is equivalent to the following property: for any continuous function $f \in C(\mathbb{R})$, one has

$$\mathbb{E}(f(a)) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{T}^2} f(a) d\mu = \int_{\mathbb{R}} f(t) P_a(dt).$$

We now state a key result concerning ℓa_n when κ is Anosov.

Lemma 4.1. *Set $\ell a = \log \langle a \rangle$, and*

$$x_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log |a \circ \kappa^i| - \ell a = \ell a_n - \ell a.$$

If κ is Anosov, we have

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(nx_n^2) < \infty.$$

Proof. Denote $f_i = \log |a \circ \kappa^i| - \ell a$ and define the correlation function c_{ij} as

$$c_{ij} = \mathbb{E}(f_i f_j).$$

Then,

$$\mathbb{E}(nx_n^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}.$$

But for κ Anosov, $|c_{ij}| \lesssim e^{-\rho|i-j|}$ for some $\rho > 0$ (see [19]). Hence

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} = \mathcal{O}(n),$$

and the proposition follows easily. □

Proof of Theorem 1.3. We now have all the tools to get our main result. In this paragraph, we will assume that $n = n_\tau = E(\tau \log h^{-1})$, with $\tau < T_{a,\kappa}$ as above. It will be more convenient to show the following statement: for any $\varepsilon > 0$ and $C > 0$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} h \# \left\{ 1 \leq j \leq h^{-1} : \left| \log |\lambda_j^{(h)}| - \log \langle a \rangle \right| \leq C(\log h^{-1})^{\varepsilon-1/2} \right\} = 1. \quad (4.1)$$

For h small enough, this equation is equivalent to (1.3) because $|\lambda_j^{(h)}| \geq a_-/2$. We will proceed exactly as in Section 3.2, but now δ and γ will depend on h .

First we define as before two positive sequences $(\delta_h)_{h \in]0,1[}$ and $(\gamma_h)_{h \in]0,1[}$ going to 0 as $h \rightarrow 0$, and such that

$$\frac{1}{\gamma_h \sqrt{\log h^{-1}}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \text{and} \quad \frac{\gamma_h}{\delta_h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

A simple choice can be made by taking $\delta_h \propto (\log h^{-1})^{\varepsilon-1/2}$ and $\gamma_h \propto (\log h^{-1})^{\frac{\varepsilon}{2}-1/2}$, for some $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$.

We call ℓs_i the (positive) eigenvalues of $\ell \mathcal{S}_n(a)$, and define the integer d_h such that

$$d_h = \#\{1 \leq i \leq h^{-1} : \log |\lambda_i| - \ell a \geq \delta_h\}.$$

The Weyl inequalities imply

$$d_h(\ell a + \delta_h) \leq \sum_{i=1}^{d_h} \log |\lambda_i| \leq \sum_{i=1}^{d_h} \ell s_i. \quad (4.2)$$

Among the d_h first (therefore, largest) numbers $(\ell s_i - \ell a)_{i=1, \dots, d_h}$, we now distinguish the d'_h first ones which are larger than γ_h , and call

$$d_h - d'_h = \#\{1 \leq i \leq d_h, \ell s_i - \ell a < \gamma_h\}$$

the number of remaining ones. Hence:

$$d'_h = \#\{1 \leq i \leq h^{-1} : \ell s_i - \ell a \geq \gamma_h\}.$$

Subtracting $d_h \ell a$ in Eq. (4.2) and noticing that $d_h - d'_h \leq h^{-1}$, we get:

$$d_h \leq \frac{\gamma_h}{h \delta_h} + \frac{1}{\delta_h} \sum_{i=1}^{d'_h} (\ell s_i - \ell a). \tag{4.3}$$

Recall that $\ell \mathcal{S}_n - \ell a = \text{Op}_h(\ell a_n - \ell a) + \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h^\alpha)$ for $\alpha = \sigma^- > 0$. From now on, α will denote a strictly positive constant which value may change from equation to equation. Hence, the sum in the right hand side of Eq. (4.3) can be expressed as:

$$\sum_{i=1}^{d'_h} (\ell s_i - \ell a) = \text{Tr Id}_{[\gamma_h, 2]} (\text{Op}_h(\ell a_n - \ell a) + \mathcal{O}(h^\alpha)).$$

The function $\text{Id}_{[\gamma_h, 2]}$ can easily be smoothed to give a function \mathcal{I}_h such that $\mathcal{I}_h(x) = 0$ for $x \in \mathbb{R} \setminus [\gamma_h/2, 3]$ and $\mathcal{I}_h(t) = t$ on $[\gamma_h, 2]$. Such a function can be clearly chosen w -admissible with $(\log h^{-1})^{-1/2+\varepsilon} \lesssim w(h)$. Note also that the logarithmic decay of w in this case will always make the function \mathcal{I}_h suitable for the functional calculus expressed in Proposition 2.8 and Corollary 2.9 – see the discussion at the end of Section 3.1. Continuing from these remarks, we obtain:

$$\begin{aligned} h d_h &\leq \frac{\gamma_h}{\delta_h} + \frac{1}{\delta_h} h \text{Tr } \mathcal{I}_h (\text{Op}_h(\ell a_n - \ell a) + \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h^\alpha)) \\ &\leq \frac{\gamma_h}{\delta_h} + \frac{1}{\delta_h} h \text{Tr Op}_h (\mathcal{I}_h(\ell a_n - \ell a)) + \mathcal{O}(h^\alpha) \\ &\leq \frac{\gamma_h}{\delta_h} + \frac{1}{\delta_h} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{I}_h(x) P_{x_n}(dx) + \mathcal{O}(h^\alpha), \end{aligned}$$

where the functional calculus with perturbations has been used. We now remark that $\forall x \in \text{Supp } \mathcal{I}_h$, one has

$$\mathcal{I}_h(x) \lesssim x^2 \sqrt{n}. \tag{4.4}$$

Indeed, we can clearly choose \mathcal{I}_h such that $|\mathcal{I}'_h(x)| \lesssim 1$. Hence $\mathcal{I}_h(x) \lesssim x$, but since for $C > 0$ fixed we have $C(\log h^{-1})^{-\frac{1}{2}} \leq x$ for h small enough and $x \in \text{Supp } \mathcal{I}_h$, we get

$$x \lesssim x^2 \sqrt{\log h^{-1}},$$

which imply Eq. (4.4). Using Lemma 4.1, we continue from these remarks and obtain

$$\int_{\mathbb{R}} \sqrt{n} \mathcal{I}_h(x) P_{x_n}(dx) \leq \int_{\mathbb{R}} n x^2 P_{x_n}(dx) = \mathbb{E}(n x_n^2) < \infty,$$

from which we conclude that

$$h d_h \leq \frac{\gamma_h}{\delta_h} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\log h^{-1} \delta_h}}\right) + \mathcal{O}(h^\alpha) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

The theorem is completed by using the inverse map $M_h(a, \kappa)^{-1}$, exactly as for the proof of Theorem 1.1, since $\|\text{Op}_h(a^{-1} \circ \kappa)U_h(a)^{-1} - M_h(a, \kappa)^{-1}\| = \mathcal{O}(h)$. \square

4.2. Estimations on the number of “large” eigenvalues

In this paragraph, we address the question of counting the eigenvalues of $M_h(a, \kappa)$ outside a circle with radius *strictly* larger than $\langle a \rangle$ when κ is Anosov. As we already noticed, informations on the eigenvalues of $\mathcal{S}_n(a)$ can be obtained from the function a_n , via the functional calculus. Hence, if we want to count the eigenvalues of $M_h(a, \kappa)$ away from the average $\langle a \rangle$, we are lead to estimate the function a_n away from its typical value $\langle a \rangle$. More dynamically speaking, we are interested in large deviations results for the map κ . For $a \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, these estimates take usually the following form [23, 24]:

Theorem 4.2 (Large deviations). *Let $c > 0$ be a positive constant, and define*

$$\ell c = \log(1 + c/\langle a \rangle).$$

If κ is Anosov, there exists a function $I : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$, positive, continuous and monotonically increasing, such that

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mu(x : x_n \in [\ell c, +\infty]) \leq -I(\ell c). \tag{4.5}$$

In particular, for $n \geq 1$ large enough, one has

$$P_{x_n}([\ell c, \infty]) = \mathcal{O}(e^{-nI(\ell c)}). \tag{4.6}$$

We now proceed to the proof of the theorem concerning the “large” eigenvalues of $M_h(a, \kappa)$.

Proof of Theorem 1.4. As before, we prove the result for $\ell \mathcal{S}_n(a)$, the extension to $\mathcal{S}_n(a)$ being straightforward by taking the exponential. Define as before

$$d_h = \#\{1 \leq j \leq h^{-1} : \log |\lambda_j^{(h)}| \geq \ell a + \ell c\}.$$

We also choose a small $\rho > 0$, and define

$$d'_h = \#\{1 \leq j \leq h^{-1} : \ell s_j \geq \ell a + \ell c - \rho\}.$$

The Weyl inequality can be written:

$$d_h(\ell a + \ell c) \leq \sum_{j=1}^{d'_h} \ell s_j + (d_h - d'_h)(\ell a + \ell c - \rho).$$

Subtracting $d_h(\ell a + \ell c - \rho)$ on both sides, we get for ρ small enough

$$d_h \rho \leq \sum_{j=1}^{d'_h} (\ell s_j - \ell a) - d'_h(\ell c - \rho) \leq \sum_{j=1}^{d'_h} (\ell s_j - \ell a).$$

If we choose $n = n_\tau = E(\tau \log h^{-1})$ and $\tau < T_{a,\kappa}$ as before, we can use exactly the same methods as above to evaluate the right hand side of the preceding equation. Let \mathcal{I} be a smooth function with $\mathcal{I} = 1$ on $[\ell c - \rho, 2]$, and $\mathcal{I} = 0$ on $\mathbb{R} \setminus [\ell c - 2\rho, 3]$. We have

$$h \sum_{j=1}^{d'_h} (\ell s_j - \ell a) \leq h \operatorname{Tr} \mathcal{I}(\operatorname{Op}_h(\ell a_n - \ell a) + \mathcal{O}_{\mathcal{H}_N}(h^{\sigma^-})).$$

Recall that $\ell a_n - \ell a \in S_{\delta^+}^0$ and $\sigma = 1 - 2\delta - 6\eta = 1 - \tau/T_{a,\kappa}$. We easily check that σ^- satisfies the condition (ii) of Corollary 2.9 since \mathcal{I} does not depend on h . Hence,

$$h \sum_{j=1}^{d'_h} (\ell s_j - \ell a) \leq \int_{\mathbb{T}^2} \mathbb{1}_{[\ell c - 2\rho, 3]}(\ell a_n - \ell a) + \mathcal{O}(h^r), \quad r > 0.$$

Let us show that in fact, $r = \sigma^-$. By the functional calculus, we have

$$r = \min\{1 - 2\delta^+ - 6\varepsilon, \sigma^- - 4\varepsilon\} = \min\{1 - 2\delta^+ - 6\varepsilon, 1 - 2\delta^+ - 6\eta^+ - 4\varepsilon\}$$

where now, $\varepsilon > 0$ is arbitrary since \mathcal{I} does not depend on h : this implies immediately $r = \sigma^-$. Using (4.6), we get

$$h d_h \leq \frac{1}{\rho} P_{x_n}([\ell c - 2\rho, \infty[) + \mathcal{O}(h^{\sigma^-}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\rho} e^{-nI(\ell c - 2\rho)}\right) + \mathcal{O}(h^{\sigma^-}).$$

Since ρ is arbitrarily small, we end up with

$$\begin{aligned} h d_h &= \mathcal{O}(h^{\tau I(\ell c^-)} + h^{\sigma^-}) = \mathcal{O}(h^{\tau I(\ell c^-)} + h^{1-\tau/T_{a,\kappa}^-}) \\ &= \mathcal{O}(h^{\min\{\tau I(\ell c^-), 1-\tau/T_{a,\kappa}^-\}}). \end{aligned} \tag{4.7}$$

It is now straightforward to see that the bound is minimal if we choose

$$\tau = \tau_c = \frac{T_{a,\kappa}^-}{1 + I(\ell c^-)T_{a,\kappa}^-}. \quad \square$$

5. Numerical examples

In this section, we present a numerical illustration of Theorems 1.2 and 1.3 for a simple example, the well known quantized cat map.

5.1. The quantized cat map and their perturbations

We represent a point of the torus $x \in \mathbb{T}^2$ by a vector of \mathbb{R}^2 that we denote $X = (q, p)$. Any matrix $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ induces an invertible symplectic flow $\kappa : x \mapsto x'$ on \mathbb{T}^2 via a transformation of the vector X given by:

$$X' = AX \pmod{1}.$$

The inverse transformation is induced by A^{-1} , with $X = A^{-1}X' \pmod{1}$. If $\operatorname{Tr} A > 2$, this classical map, known as ‘‘cat map’’, has strong chaotic features: in particular, it has the Anosov property (which implies ergodicity). Any quantization $U_h(A)$

(see [10]) of $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ with $\text{Tr } A > 2$ satisfies the hypotheses required for the unitary part of the maps (1.1), and the Egorov estimate (2.12) turns out to be exact, i.e. it holds without any remainder term.

Let us give a concrete example that will be treated numerically below. Let $m \in \mathbb{N}$ and $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ of the form:

$$A = \begin{pmatrix} 2m & 1 \\ 4m^2 - 1 & 2m \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

Then, in the position basis we have

$$U_h(A)_{jk} = \sqrt{h} \exp 2i\pi h[mk^2 - kj + mj^2]. \tag{5.2}$$

We can also define some simple perturbations of the cat maps, by multiplying $U_h(A)$ with a matrix of the form $\exp(\frac{-2i\pi}{h} \text{Op}_h(H))$, with $H \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ a real function, playing the role of a ‘‘Hamiltonian’’. If we denote by e^{X_H} the classical flow generated by H for unit time, the total classical map will be $\kappa \stackrel{\text{def}}{=} e^{X_H} \circ \kappa_A$. For reasonable choices of ‘‘Hamiltonians’’ H , κ still define an Anosov maps on the torus, and the operators

$$\tilde{U}_h(A, H) = e^{-\frac{2i\pi}{h} \text{Op}_h(H)} U_h(A) \tag{5.3}$$

quantize the map κ . In our numerics, we have chosen $m = 1$, and

$$\text{Op}_h(H) = \frac{\alpha}{4\pi^2} \sin(2\pi q)$$

with $\alpha = 0.05$. This operator is diagonal in the position representation, and for $\alpha < 0.33$ [4], the classical map $e^{X_H} \circ \kappa_A$ is Anosov.

Remark that because of the perturbation, Egorov property (2.12) now holds with some nonzero remainder term a priori. Such perturbed cat maps do not present in general the numerous spectral degeneracies characteristic for the non-perturbed cat maps [10], hence they can be seen as a classical map with generic, strong chaotic features.

For the damping terms, we choose two symbols of the form $a(q)$, whose quantizations are then diagonal matrices with entries $a(hj)$, $j = 1, \dots, h^{-1}$. The function $a_1(q)$ has a plateau $a_1(q) = 1$ for $q \in [1/3, 2/3]$, another one for $q \in [0, 1/6] \cup [5/6, 1]$ and varies smoothly in between. For the second one, we take $a_2(q) = 1 - \frac{1}{2} \sin(2\pi q)^2$. Numerically, we have computed

$$\langle a_1 \rangle \approx 0.250 \quad \text{and} \quad \langle a_2 \rangle \approx 0.728.$$

Figure 1 and 2 represent the spectrum of our perturbed cat map for $h^{-1} = 2100$, with dampings a_1 and a_2 . The spectrum stay inside an annulus delimited by a_{i+} and a_{i-} , as stated in Eq. (2.14), and the clustering of the eigenvalues around $\langle a \rangle_i$ is remarkable. For a more quantitative observation, the integrated radial and angular density of eigenvalues for different values of h^{-1} are represented in Figure 1. We check that for moduli, the curve jumps around $\langle a \rangle$, which denotes a maximal density around this value, and we clearly see the homogeneous angular repartition of the eigenvalues of $M_h(a, \kappa)$.

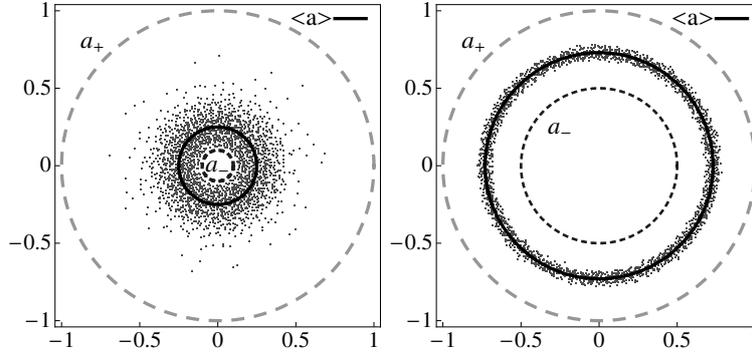


FIGURE 1. Spectrum of $M_h(a, \kappa)$ in the complex plane for $h^{-1} = 2100$. The dashed circles correspond to a_+ and a_- , while the plain circle has radius $\langle a \rangle$. To the left, we plot $a = a_1$, and $a = a_2$ to the right.

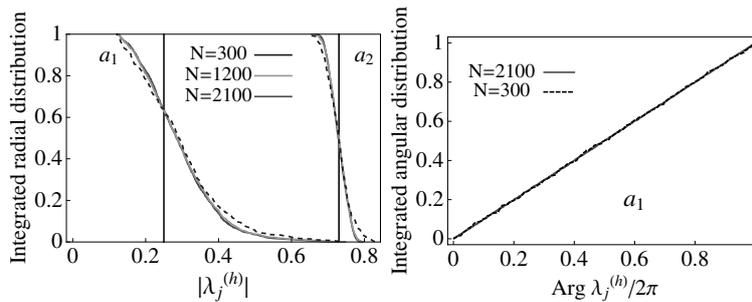


FIGURE 2. Integrated spectral densities for the perturbed cat map. The radial distribution is represented to the left, the vertical bars indicate the value $\langle a \rangle$ for $a = a_1$ and $a = a_2$. The angular distribution is represented to the right for the map $M_h(a_1, \kappa)$.

As we can observe in Figure 2, the width of the jumps do not depend a lot upon h , at least for the numerical range we have explored. This behavior could be explained by Theorem 1.3, which states that the speed of the clustering may be governed by $\log h^{-1}$. To check this observation more in detail, we define the *width* W_h of the spectral distribution of $M_h(a, \kappa)$ as

$$W_h = \left| \lambda_{E(\frac{1}{4h})}^{(h)} \right| - \left| \lambda_{E(\frac{3}{4h})}^{(h)} \right|,$$

and plot W_h as a function of h – see Figure 3. We clearly observe a decay with h^{-1} , although the 2-parameter fits $A(\log h^{-1})^{-B}$ hints a decay slightly faster than $(\log h^{-1})^{-1/2}$. Other numerical investigations presented in [21] for the quantum baker map show the same type of decay, and a solvable quantization of the baker

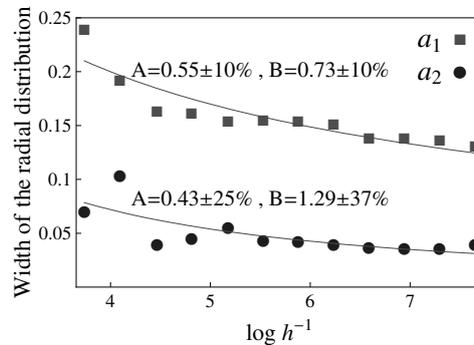


FIGURE 3. Width of the radial distribution, together with the best 2-parameter fits $A(\log h^{-1})^{-B}$ and the asymptotic standard errors.

map allows to compute explicitly the width W_h , which turns to be exactly proportional to $\sqrt{\log h^{-1}}$. This result, together with the numerics presented above, seems to indicate that the bound on the decay of the eigenvalue distribution expressed by Theorem 1.3 may be optimal.

Acknowledgements

I would like to thank very sincerely Stéphane Nonnenmacher for suggesting this problem, and above all for his generous help and patience while introducing me to the subject. I also have benefitted from his careful reading of preliminary versions of this work. I would also like to thank Frédéric Faure and Maciej Zworski for helpful and enlightening discussions.

References

- [1] N. Anantharaman, workshop *Spectrum and dynamics*, Centre de Recherche Mathématiques, Montréal, April 7–11, 2008.
- [2] V. I. Arnold and A. Avez, *Ergodic problems of classical mechanics*, Addison-Wesley, 1968.
- [3] M. Asch and G. Lebeau, *The spectrum of the damped wave operator for a bounded domain in \mathbb{R}^2* , *Experimental math.* **12** (2003), 227–241.
- [4] P. A. Boasman and J. P. Keating, *Semiclassical asymptotics of perturbed cat maps*, *Proc. R. Soc. Math. & Phys. Sc.* **449** no. 1937, 629–653.
- [5] D. Borthwick and A. Uribe, *On the pseudospectra of Berezin-Toeplitz operators*, *Meth. Appl. Anal.* **10** (2003), 31–65.
- [6] A. Bouzouina and S. De Bièvre, *Equipartition of the eigenfunctions of quantized ergodic maps on the torus*, *Commun. Math. Phys.* **178** (1996), 83–105.

- [7] A. Bouzouina and S. De Bièvre, *Équidistribution des valeurs propres et ergodicité semi-classique de symplectomorphismes du tore quantifiés*, C. R. Acad. Sci. Paris Série I **326** (1998), 1021–1024.
- [8] A. Bouzouina and D. Robert, *Uniform semiclassical estimates for the propagation of quantum observables*, Duke Math. Journal **111** no. 2 (2002), 223–252.
- [9] L. Comtet, *Analyse combinatoire*, Vol. 1, Collection SUP: “Le Mathématicien” **4**, Presses Univ. France, Paris, 1970. MR 41:6697.
- [10] M. Degli Esposti and S. Graffi (eds): *The mathematical aspects of quantum maps*, Springer, 2003.
- [11] M. Dimassi and J. Sjöstrand, *Spectral Asymptotics in the semi-classical limit*, Cambridge University Press, 1999.
- [12] M. Embree and L.N. Trefethen, *Spectra and pseudospectra, the behaviour of non-normal matrices and operators*, Princeton Univ. Press, 2005.
- [13] A. Fannjiang, S. Nonnenmacher and L. Wolowski, *Relaxation time for quantized toral maps*, Annales Henri Poincaré **7** no. 1 (2006), 161–198.
- [14] A. Grigis and J. Sjöstrand, *Microlocal analysis for differential operators*, London math. soc. L.N.S. 196, Cambridge University Press (1983).
- [15] J.H. Hannay and M.V. Berry, *Quantization of linear maps on a torus – Fresnel diffraction by a periodic grating*, Physica **D1** (1980), 267–290.
- [16] J.P. Keating, F. Mezzadri and J.M. Robbins, *Quantum boundary conditions for torus maps*. Nonlinearity **12** (1991), 579–591.
- [17] J.P. Keating, M. Novaes and H. Schomerus, *Model for chaotic dielectric microresonators*, Phys. Rev. **A 77** (2008), 013834.
- [18] H. König, *Eigenvalues distribution for compact operators*, Birkhäuser, 1986.
- [19] C. Liverani, *Decay of correlations*, Ann. of Math. **142** (1995), 239–301.
- [20] J. Markolf and S. O’Keefe, *Weyl’s law and quantum ergodicity for maps with divided phase space*. Nonlinearity **18** (2005), 277–304.
- [21] S. Nonnenmacher and E. Schenck, arXiv:0803.1075v2 [nlin.CD] (2008), to appear in Phys. Rev. **E**.
- [22] S. Nonnenmacher and M. Zworski, *Distribution of resonances for open quantum maps*, Commun. Math. Phys. **269** (2007), 311–365.
- [23] S. Orey and S. Pelikan, *Deviations of trajectories averages and the defect in Pesin’s formula for Anosov diffeomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc. **315** no. 2 (1989), 741–753.
- [24] L. Rey-Bellet and L.-S. Young, *Large deviations in non-uniformly hyperbolic dynamical systems*, Erg. Th. & Dynam. Sys. **28** (2008), 587–612.
- [25] W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill, 1991.
- [26] J. Sjöstrand, *Asymptotic distribution of eigenfrequencies for damped wave equations*, Publ. R.I.M.S. **36** (2000), 573–611.
- [27] J. Sjöstrand and M. Zworski, *Fractal upper bound on the density of semiclassical resonances*, Duke Math. J. **137** no. 3 (2007), 381–459.
- [28] M. Tabor, *A semiclassical quantization of area-preserving maps*, Physica **D6** (1983), 195–210.

- [29] S. Zelditch, *Index and dynamics of quantized contact transformations*, Annales de l'institut Fourier **47** no. 1 (1997), 305–363.

Emmanuel Schenck
Institut de Physique Théorique
CEA Saclay
F-91191 Gif-sur-Yvette
France
e-mail: emmanuel.schenck@cea.fr

Communicated by Jens Marklof.

Submitted: October 16, 2008.

Accepted: April 3, 2009.

ENERGY DECAY FOR THE DAMPED WAVE EQUATION UNDER A PRESSURE CONDITION

EMMANUEL SCHENCK

ABSTRACT. We establish the presence of a spectral gap near the real axis for the damped wave equation on a manifold with negative curvature. This result holds under a dynamical condition expressed by the negativity of a topological pressure with respect to the geodesic flow. As an application, we show an exponential decay of the energy for all initial data sufficiently regular. This decay is governed by the imaginary part of a finite number of eigenvalues close to the real axis.

1. INTRODUCTION

One of the standard questions in geometric control theory concerns the so-called stabilization problem: given a dissipative wave equation on a manifold, one is interested in the behaviour of the solutions and their energies for long times. The answers that can be given to this problem are closely related to the underlying manifold and the geometry of the control (or damping) region.

In this paper, we shall study these questions in the particular case of the damped wave equation on a compact Riemannian manifold (M, g) with negative curvature and dimension $d \geq 2$. For simplicity, we will assume that M has no boundary. If $a \in C^\infty(M)$ is a real valued function on M , this equation reads

$$(1.1) \quad (\partial_t^2 - \Delta_g + 2a(x)\partial_t)u = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times M,$$

with initial conditions

$$\begin{aligned} u(0, x) &= \omega_0(x) \in H^1 \\ i\partial_t u(0, x) &= \omega_1(x) \in H^0. \end{aligned}$$

Here $H^s \equiv H^s(M)$ are the usual Sobolev spaces on M . The Laplace-Beltrami operator $\Delta_g \equiv \Delta$ is expressed in local coordinates by

$$(1.2) \quad \Delta_g = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \partial_i (g^{ij} \sqrt{\bar{g}} \partial_j), \quad \bar{g} = \det g.$$

We will also denote by $d\text{vol} = \sqrt{\bar{g}} dx$ the natural Riemannian density, and $\langle u, v \rangle = \int_M u \bar{v} d\text{vol}$ the associated scalar product.

In all the following, we will consider only the case where the waves are *damped*, which corresponds to take $a \geq 0$ with a non identically 0. We can reformulate the above problem into an equivalent one by considering the unbounded operator

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ -\Delta_g & -2ia \end{pmatrix} : H^1 \times H^0 \rightarrow H^1 \times H^0$$

with domain $D(\mathcal{B}) = H^2 \times H^1$, and the following evolution equation :

$$(1.3) \quad (\partial_t + i\mathcal{B})\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u} = (u_0, u_1) \in H^1 \times H^0.$$

From the Hille-Yosida theorem, one can show that \mathcal{B} generates a uniformly bounded, strongly continuous semigroup $e^{-it\mathcal{B}}$ for $t \geq 0$, mapping any $(u_0, u_1) \in H^1 \times H^0$ to a solution $(u(t, x), i\partial_t u(t, x))$ of (1.3). Since \mathcal{B} has compact resolvent, its spectrum $\text{Spec } \mathcal{B}$ consist in a discrete sequence of eigenvalues $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. The eigenspaces E_n corresponding to the eigenvalues τ_n are all finite dimensional, and the sum $\bigoplus_n E_n$ is dense in $H^1 \times H^0$, see [GoKr]. If $\tau \in \text{Spec } \mathcal{B}$, there is $v \in H^1$ such that

$$(1.4) \quad u(t, x) = e^{-it\tau} v(x),$$

and the function u then satisfies

$$(1.5) \quad P(\tau)u = 0, \quad \text{where } P(\tau) = -\Delta - \tau^2 - 2ia\tau.$$

From (1.5), it can be shown that the spectrum is symmetric with respect to the imaginary axis, and satisfies

$$-2\|a\|_\infty \leq \text{Im } \tau_n \leq 0$$

while $|\text{Re } \tau_n| \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$. Furthermore, if $\text{Re } \tau \neq 0$, we have $\text{Im } \tau \in [-\|a\|_\infty, 0]$, and the only real eigenvalue is $\tau = 0$, associated to the constant solutions of (1.1).

The question of an asymptotic density of modes has been adressed by Markus and Mat-saev in [MaMa], where they proved the following Weyl-type law, also found later independently by Sjöstrand in [Sjö] :

$$\text{Card}\{n : 0 \leq \text{Re } \tau_n \leq \lambda\} = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^d \int_{p^{-1}([0, \lambda])} dx d\xi + \mathcal{O}(\lambda^{d-1}).$$

Here $p = \frac{1}{2}g^x(\xi, \xi)$ is the principal symbol of $-\Delta_g$ and $dx d\xi$ denotes the Liouville measure on T^*M coming from its symplectic structure. Under the assumption of ergodicity for the geodesic flow with respect to the Liouville measure, Sjöstrand also showed that most of the eigenvalues concentrate on a line in the high-frequency limit. More precisely, he proved that given any $\varepsilon > 0$,

$$(1.6) \quad \text{Card}\{n : \tau_n \in [\lambda, \lambda + 1] + i(\mathbb{R} \setminus [-\bar{a} - \varepsilon, -\bar{a} + \varepsilon])\} = o(\lambda^{d-1}).$$

The real number \bar{a} is the ergodic mean of a on the unit cotangent bundle $S^*M = \{(x, \xi) \in T^*M, g^x(\xi, \xi) = 1\}$. It is given by

$$\bar{a} = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_0^T a \circ \Phi^t dt, \quad \text{well defined } dx d\xi \text{ - almost everywhere on } S^*M.$$

Hence the eigenvalues close to the real axis, say with imaginary parts in $[\alpha, 0]$, $0 > \alpha > -\bar{a}$ can be considered as “exceptional”. The first result we will present in this paper show that a spectral gap of finite width can actually exist below the real axis under some dynamical hypotheses, see Theorem 1 below.

The second object studied in this work is the energy of the waves. From now on, we call $\mathcal{H} = H^0 \times H^1$ the space of Cauchy data. Let u be a solution of (1.1) with initial data $\omega \in \mathcal{H}$. The energy of u is defined by

$$E(u, t) = \frac{1}{2}(\|\partial_t u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2).$$

As a well known fact, E is decreasing in time, and $E(u, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. It is then natural to ask if a particular rate of decay of the energy can be identified. Let $s > 0$ be a positive number, and define the Hibert space

$$\mathcal{H}^s = H^{1+s} \times H^s \subset \mathcal{H}.$$

Generalizing slightly a definition of Lebeau, we introduce the best exponential rate of decay with respect to $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^s}$ as

$$(1.7) \quad \rho(s) = \sup\{\beta \in \mathbb{R}_+ : \exists C > 0 \text{ such that } \forall \omega \in \mathcal{H}^s, E(u, t) \leq C e^{-\beta t} \|\omega\|_{\mathcal{H}^s}\}$$

where the solutions u of (1.1) have been identified with the Cauchy data $\omega \in \mathcal{H}^s$. It is shown in [Leb] that

$$\rho(0) = 2 \min(G, C(\infty)),$$

where $G = \inf\{-\operatorname{Im} \tau; \tau \in \operatorname{Spec} \mathcal{B} \setminus \{0\}\}$ is the spectral gap, and

$$C(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{\rho \in T^*M} \frac{1}{t} \int_0^t \pi^* a(\Phi^s \rho) ds \geq 0.$$

Here $\Phi^t : T^*M \rightarrow T^*M$ is the geodesic flow, and $\pi : T^*M \rightarrow M$ is the canonical projection along the fibers. It follows that the presence of a spectral gap below the real axis is of significant importance in the study of the energy decay. However, an explicit example is given in [Leb], where $G > 0$ while $C(\infty) = 0$, and then $\rho(0) = 0$. This particular situation is due to the failure of the geometrical control, namely, the existence of orbits of the geodesic flow not meeting $\operatorname{supp} a$ (which implies $C(\infty) = 0$). Hence, the spectrum of \mathcal{B} may not always control the energy decay, and some dynamical assumptions on the geodesic flow are required if we want to solve positively the stabilization problem. In the case where geometric control holds [RaTa], it has been shown in various settings that $\rho(0) > 0$, see for instance [BLR, Leb, Hit]. In [Chr], a particular situation is analyzed where the geometric control does not hold near a closed hyperbolic orbit of the geodesic flow: in this case, there is a sub-exponential decay of the energy with respect to $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^\varepsilon}$ for some $\varepsilon > 0$.

Dynamical assumptions. In this paper, we first assume (M, g) has strictly negative sectional curvatures. This implies that the geodesic flow has the Anosov property on every energy layer, see Section 2.1 below. Without loss of generality, we suppose that the injectivity radius satisfies $r \geq 2$. Then, we drop the geometric control assumption, and replace it with a dynamical hypothesis involving the topological pressure of the geodesic flow on S^*M , which we define now. For every $\varepsilon > 0$ and $T > 0$, a set $\mathcal{S} \subset S^*M$ is (ε, T) -separated if $\rho, \theta \in \mathcal{S}$ implies that $d(\Phi^t \rho, \Phi^t \theta) > \varepsilon$ for some $t \in [0, T]$, where d is the distance induced from the adapted metric on T^*M . For f continuous on S^*M , set

$$Z(f, T, \varepsilon) = \sup_{\mathcal{S}} \left\{ \sum_{\rho \in \mathcal{S}} \exp \sum_{k=0}^{T-1} f \circ \Phi^k(x) \right\}.$$

The topological pressure $\operatorname{Pr}(f)$ of the function f with respect to the geodesic flow is defined by

$$\operatorname{Pr}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log Z(f, T, \varepsilon).$$

The pressure $\operatorname{Pr}(f)$ contains useful information on the Birkhoff averages of f and the complexity of the geodesic flow, see for instance [Wal] for a general introduction and further properties. The particular function we will deal with is given by

$$(1.8) \quad a^u : \rho \in S^*M \mapsto a^u(\rho) = - \int_0^1 \pi^* a \circ \Phi^s(\rho) ds + \frac{1}{2} \log J^u(\rho) \in \mathbb{R}$$

where $J^u(\rho)$ is the unstable Jacobian at ρ for time 1, see Section 2.1. In this paper, we will always assume that

$$(1.9) \quad \operatorname{Pr}(a^u) < 0.$$

Main results. Under the condition $\text{Pr}(a^u) < 0$, we will see that a spectral gap of finite width exists below the real axis. As a consequence, there is an exponential decay of the energy of the waves with respect to $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^\kappa}$ for any $\kappa > d/2$, and if $G < |\text{Pr}(a^u)|$, we have $\rho(\kappa) = 2G$. We begin by stating the result concerning the spectral gap.

Theorem 1. (Spectral gap) *Suppose that the topological pressure of a^u with respect to the geodesic flow on S^*M satisfies $\text{Pr}(a^u) < 0$, and let $\varepsilon > 0$ be such that*

$$\text{Pr}(a^u) + \varepsilon < 0.$$

Then, there exists $e_0(\varepsilon) > 0$ such that for any $\tau \in \text{Spec } \mathcal{B}$ with $|\text{Re } \tau| \geq e_0(\varepsilon)$, we have

$$\text{Im } \tau \leq \text{Pr}(a^u) + \varepsilon.$$

The presence of a spectral gap of finite width below the real axis is not obvious a priori if geometric control does not hold, since there may be a possibility for $|\text{Im } \tau_n|$ to become arbitrary small as $n \rightarrow \infty$: see for instance [Hit], Theorem 1.3. However, this accumulation on the real axis can not occur faster than a fixed exponential rate, as it was shown in [Leb] that

$$\exists C > 0 \text{ such that } \forall \tau \in \text{Spec } \mathcal{B}, \quad \text{Im } \tau \leq -\frac{1}{C} e^{-C|\text{Re } \tau|}.$$

Let us mention a result comparable to Theorem 1 in the framework of chaotic scattering obtained recently by Nonnenmacher and Zworski [NoZw], in the semiclassical setting. For a large class of Hamiltonians, including $P(\hbar) = -\hbar\Delta + V$ on \mathbb{R}^d with V compactly supported, they were able to show a resonance-free region near the energy E :

$$\exists \delta, \gamma > 0 \text{ such that } \text{Res}(P(\hbar)) \cap ([E - \delta, E + \delta] - i[0, \gamma\hbar]) = \emptyset \text{ for } 0 < \hbar \leq \hbar_{\delta, \gamma}.$$

This holds provided that the hamiltonian flow Φ^t on the trapped set K_E at energy E is hyperbolic, and that the pressure of the unstable Jacobian with respect to the geodesic flow on K_E is strictly negative. We will adapt several techniques of [NoZw] to prove Theorem 1, some of them coming back to [Ana1, AnNo].

In a recent paper, Anantharaman [Ana2] studied the spectral deviations of $\text{Spec } \mathcal{B}$ with respect to the line of accumulation $\text{Im } z = -\bar{a}$ appearing in (1.6). In the case of constant negative curvature, she obtained an upper bound for the number of modes with imaginary parts above $-\bar{a}$, and showed that for $\alpha \in [-\bar{a}, 0[$, there exists a function $H(\alpha)$ such that

$$(1.10) \quad \forall c > 0, \quad \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\log \text{Card}\{\tau_n : \text{Re } \tau_n \in [\lambda - c, \lambda + c], \text{Im } \tau_n \geq \alpha\}}{\log \lambda} \leq H(\alpha).$$

$H(\alpha)$ is a dynamical quantity defined by

$$H(\alpha) = \sup\{h_{KS}(\mu), \mu \in \mathcal{M}_{\frac{1}{2}}, \int ad\mu = -\alpha\}$$

where $\mathcal{M}_{\frac{1}{2}}$ denotes the set of Φ^t -invariant measures on S^*M , and h_{KS} stands for the Kolmogorov–Sinai entropy of μ . As a consequence of Theorem 1, the result of Anantharaman is not always optimal: $H(\alpha) \neq 0$ for $\alpha \in [-\bar{a}, 0[$, but if $\text{Pr}(a^u) < 0$, there is no spectrum in a strip of finite width below the real axis, i.e. the limsup in (1.10) vanishes for some $\alpha = \alpha(a) \neq 0$.

The operator \mathcal{B} being non-selfadjoint, its eigenfunctions may fail to form a Riesz basis of \mathcal{H} . However, if a solution \mathbf{u} of (1.3) has initial data sufficiently regular, it is still possible to expand it on eigenfunctions which eigenmodes are close to the real axis, up to an exponentially small error in time:

Theorem 2. (Eigenvalues expansion) *Let $\varepsilon > 0$ such that $\text{Pr}(a^u) + \varepsilon < 0$, and $\kappa > \frac{d}{2}$. There exists $e_0(\varepsilon) > 0$, $n = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ and a (finite) sequence $\tau_0, \dots, \tau_{n-1}$ of eigenvalues of \mathcal{B} with*

$$\tau_j \in [-e_0(\varepsilon), e_0(\varepsilon)] + i[\text{Pr}(a^u) + \varepsilon, 0], \quad j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket,$$

such that for any solution $\mathbf{u}(t, x)$ of (1.3) with initial data $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{H}^\kappa$, we have

$$\mathbf{u}(t, x) = \sum_{j=0}^{n-1} e^{-i t \tau_j} \mathbf{u}_j(t, x) + \mathbf{r}_n(t, x), \quad t > 0.$$

The functions \mathbf{u}_j, r_n satisfy

$$\|\mathbf{u}_j(t, \cdot)\|_{\mathcal{H}} \leq C t^{m_j} \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathcal{H}} \quad \text{and} \quad \|\mathbf{r}_n(t, \cdot)\|_{\mathcal{H}} \leq C_\varepsilon e^{t(\text{Pr}(a^u) + \varepsilon)} \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathcal{H}^\kappa},$$

where m_j denotes the multiplicity of τ_j , the constants $C > 0$ depends only on M and a , while $C_\varepsilon > 0$ depending on M, a and ε .

A similar eigenvalues expansion can be found in [Hit], where no particular assumption on the curvature of M is made, however the geometric control must hold. Our last result deals with an exponential decay of the energy, which will be derived a consequence of the preceding theorem :

Theorem 3. (Exponential energy decay) *Let $\varepsilon > 0$, $(\tau_j)_{0 \leq j \leq n(\varepsilon)-1}$, κ and \mathbf{u} as in Theorem 2. Set by convention $\tau_0 = 0$. The energy $E(u, t)$ satisfies*

$$E(u, t) \leq \left(\sum_{j=1}^{n-1} e^{t \text{Im} \tau_j} t^{m_j} C \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathcal{H}} + C_\varepsilon e^{t(\text{Pr}(a^u) + \varepsilon)} \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathcal{H}^\kappa} \right)^2$$

where m_j denotes the multiplicity of τ_j . The constants $C > 0$ depends only on M and a , while $C_\varepsilon > 0$ depending on M, a and ε . In particular, $\rho(\kappa) = 2 \min(G, |\text{Pr}(a^u) + \varepsilon|) > 0$.

Remark. In our setting, it may happen that geometric control does not hold, while $\text{Pr}(a^u) < 0$. In this particular situation, it follows from [BLR] that we can not have an exponential energy decay uniformly for all Cauchy data in \mathcal{H} , where by uniform we mean that the constant C appearing in (1.7) does not depend on \mathbf{u} . However, if for $\kappa > \frac{d}{2}$ we look at $\rho(\kappa)$ instead of $\rho(0)$, our results show that we still have uniform exponential decay, namely $\rho(\kappa) > 0$ while $\rho(0) = 0$.

1.1. Semiclassical reduction. The main step yielding to Theorem (1) is more easily achieved when working in a semiclassical setting. From the eigenvalue equation (1.5), we are lead to study the equation

$$P(\tau)u = 0$$

where $\text{Im} \tau = \mathcal{O}(1)$. To obtain a spectral gap below the real axis, we are lead to study eigenvalues with arbitrary large real parts since $\text{Spec} \mathcal{B}$ is discrete. For this purpose, we introduce a semiclassical parameter $\hbar \in]0, 1]$, and write the eigenvalues as

$$\tau = \frac{1}{\hbar} + \nu, \quad \nu \in \mathbb{C}, \quad |\nu| = \mathcal{O}(1).$$

If we let \hbar go to 0, the eigenvalues τ we are interested in then satisfy $\tau \hbar \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} 1$. Putting $\tau = \frac{\lambda}{\hbar}$ and $z = \lambda^2/2$, we rewrite the stationary equation

$$\left(-\frac{\hbar^2 \Delta}{2} - z - i \hbar q_z \right) u = 0, \quad q_z(x) = \sqrt{2z} a(x).$$

Equivalently, we write

$$(1.11) \quad (\mathcal{P}(z, \hbar) - z)u = 0$$

where $\mathcal{P}(z, \hbar) = -\frac{\hbar^2 \Delta}{2} - i\hbar q_z$. The parameter z plays the role of a complex eigenvalue of the non-selfadjoint quantum Hamiltonian \mathcal{P} . In the semiclassical limit, it is close to the “energy” $E = 1/2$, while $\text{Im } z$ is of order \hbar and represents the “decay rate” of the mode. In order to recall these properties, we will also often write

$$(1.12) \quad z = \frac{1}{2} + \hbar\zeta, \quad \zeta \in \mathbb{C} \text{ and } |\zeta| = \mathcal{O}(1).$$

In most of the following, we will deal with the semiclassical analysis of the non-selfadjoint Schrödinger operator $\mathcal{P}(z, \hbar)$ and the associated Schrödinger equation

$$(1.13) \quad i\hbar\partial_t\Psi = \mathcal{P}(z, \hbar)\Psi \quad \text{with } \|\Psi\|_{L^2} = 1.$$

The basic facts and notations we will use from semiclassical analysis are recalled in Appendix A. The operator \mathcal{P} has a principal symbol equal to $p(x, \xi) = \frac{1}{2}g^x(\xi, \xi)$, and a subprincipal symbol given by $-iq_z$. Note that the classical Hamiltonian $p(x, \xi)$ generates the geodesic flow on the energy surface $p^{-1}(\frac{1}{2}) = S^*M$. The properties of the geodesic flow on S^*M which will be useful to us are summarized in the next section, where is also given an alternative definition of the topological pressure more adapted to our purposes. We will denote the quantum propagator by

$$\mathcal{U}^t \equiv e^{-\frac{it}{\hbar}\mathcal{P}},$$

so that if $\Psi \in L^2(M)$ satisfies (1.13), we have $\Psi(t) = \mathcal{U}^t\Psi(0)$. Using standard methods of semiclassical analysis, one can show that \mathcal{U}^t is a Fourier integral operator (see [EvZw], chapter 10) associated with the symplectic diffeomorphism given by the geodesic flow Φ^t . Since we assumed that $a \geq 0$, it is true that $\|\mathcal{U}^t\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq 1$, $\forall t \geq 0$.

Denote

$$\Sigma_{\frac{1}{2}} = \Sigma_{\frac{1}{2}}(\hbar) = \{z = \frac{1}{2} + \mathcal{O}(\hbar) \in \mathbb{C}, \exists \Psi \in L^2(M), (\mathcal{P}(z, \hbar) - z)\Psi = 0\}.$$

If $z \in \Sigma_{\frac{1}{2}}$ and Ψ is such that (1.11) holds, the semiclassical wave front set of Ψ satisfies

$$\text{WF}_{\hbar}(\Psi) \subset S^*M.$$

This comes from the fact that Ψ is an eigenfunction associated with the eigenvalue $\frac{1}{2}$ of a pseudodifferential operator with principal symbol $p(x, \xi) = \frac{1}{2}g_x(\xi, \xi)$. Using these semiclassical settings, we will show the following key result :

Theorem 4. *Let $\varepsilon > 0$ be such that $\text{Pr}(a^u) + \varepsilon < 0$, and $z \in \Sigma_{\frac{1}{2}}(\hbar)$. There exists $\hbar_0 = \hbar_0(\varepsilon)$ such that*

$$\hbar \leq \hbar_0 \Rightarrow \frac{\text{Im } z}{\hbar} \leq \text{Pr}(a^u) + \varepsilon.$$

From (1.12), we also notice that the above equation implies $\text{Im } \tau \leq \text{Pr}(a^u) + \varepsilon + \mathcal{O}(\hbar)$ since $\tau = \hbar^{-1}\sqrt{2z}$, and then $\text{Im } \tau = \hbar^{-1}\text{Im } z + \mathcal{O}(\hbar)$. It follows by rescaling that Theorem 4 is equivalent to Theorem 1.

2. QUANTUM DYNAMICS AND SPECTRAL GAP

2.1. Hyperbolic flow and topological pressure. We call

$$\Phi^t = e^{tH_p} : T^*M \rightarrow T^*M$$

the geodesic flow, where H_p is the Hamilton vector field of p . In local coordinates,

$$H_p \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^d \frac{\partial p}{\partial \xi_i} \partial_{x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} \partial_{\xi_i} = \{p, \cdot\}$$

where the last equality refers to the Poisson bracket with respect to the canonical symplectic form $\omega = \sum_{i=1}^d d\xi_i \wedge dx_i$. Since M has strictly negative curvature, the flow generated by H_p on constant energy layers $\mathcal{E} = p^{-1}(E) \subset T^*M$, $E > 0$ has the Anosov property: for any $\rho \in \mathcal{E}$, the tangent space $T_\rho \mathcal{E}$ splits into flow, stable and unstable subspaces

$$T_\rho \mathcal{E} = \mathbb{R}H_p \oplus E^s(\rho) \oplus E^u(\rho).$$

The spaces $E^s(\rho)$ and $E^u(\rho)$ are $d-1$ dimensional, and are stable under the flow map:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad d\Phi_\rho^t(E^s(\rho)) = E^s(\Phi^t(\rho)), \quad d\Phi_\rho^t(E^u(\rho)) = E^u(\Phi^t(\rho)).$$

Moreover, there exist $C, \lambda > 0$ such that

$$(2.1) \quad \begin{aligned} i) \quad & \|d\Phi_\rho^t(v)\| \leq C e^{-\lambda t} \|v\|, \quad \text{for all } v \in E^s(\rho), t \geq 0 \\ ii) \quad & \|d\Phi_\rho^{-t}(v)\| \leq C e^{-\lambda t} \|v\|, \quad \text{for all } v \in E^u(\rho), t \geq 0. \end{aligned}$$

One can show that there exist a metric on T^*M call the adapted metric, for which one can takes $C = 1$ in the preceding equations. At each point ρ , the spaces $E^u(\rho)$ are tangent to the unstable manifold $W^u(\rho)$, the set of points $\rho^u \in \mathcal{E}$ such that $d(\Phi^t(\rho^u), \Phi^t(\rho)) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$ where d is the distance induced from the adapted metric. Similarly, $E^s(\rho)$ is tangent to the stable manifold $W^s(\rho)$, the set of points ρ^s such that $d(\Phi^t(\rho^s), \Phi^t(\rho)) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

The adapted metric induces a the volum form Ω_ρ on any d dimensional subspace of $T(T^*M)$. Using Ω_ρ , we now define the unstable Jacobian at ρ for time t . Let us define the weak-stable and weak-unstable subspaces at ρ by

$$E^{s,0}(\rho) = E^s(\rho) \oplus \mathbb{R}H_p, \quad E^{u,0}(\rho) = E^u(\rho) \oplus \mathbb{R}H_p.$$

We set

$$J_t^u(\rho) = \det d\Phi^{-t}|_{E^{u,0}(\Phi^t(\rho))} = \frac{\Omega_\rho(d\Phi^{-T}v_1 \wedge \dots \wedge d\Phi^{-t}v_d)}{\Omega_{\Phi^t(\rho)}(v_1 \wedge \dots \wedge v_d)}, \quad J^u(\rho) \stackrel{\text{def}}{=} J_1^u(\rho),$$

where (v_1, \dots, v_d) can be any basis of $E^{u,0}(\rho)$. While we do not necessarily have $J^u(\rho) < 1$, it is true that $J_t^u(\rho)$ decays exponentially as $t \rightarrow +\infty$.

The definition of the topological pressure of the geodesic flow given in the introduction, although quite straightforward to state, is not really suitable for our purposes. The alternative definition of the pressure we will work with is based on refined covers of S^*M , and can be stated as follows. For $\delta > 0$, let $\mathcal{E}^\delta = p^{-1}[\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} + \delta]$ be a thin neighbourhood of the constant energy surface $p^{-1}(\frac{1}{2})$, and $V = \{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ a finite number of open sets of \mathcal{E}^δ such that V is an open cover of $p^{-1}[\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\delta, \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\delta]$. In what follows, we shall always choose $\delta < 1/2$. For $T \in \mathbb{N}^*$, we define the refined cover $V^{(T)}$, made of the sets

$$V_\beta = \bigcap_{k=0}^{T-1} \Phi^{-k}(V_{b_k}), \quad \beta = b_0 b_1 \dots b_{T-1} \in I^T.$$

It will be useful to coarse-grain any continuous function f on \mathcal{E}^δ with respect to $V^{(T)}$ by setting

$$\langle f \rangle_{T,\beta} = \sup_{\rho \in V_\beta} \sum_{i=0}^{T-1} f \circ \Phi^i(\rho).$$

One then define

$$Z_T(V, f) = \inf_{B_T} \left\{ \sum_{\beta \in B_T} \exp(\langle f \rangle_{T, \beta}) : B_T \subset I^T, \mathcal{E}^{3\delta/4} \subset \bigcup_{\beta \in B_T} V_\beta \right\}.$$

The topological pressure of f with respect to the geodesic flow on $\mathcal{E}^{3\delta/4}$ is defined by :

$$\Pr^\delta(f) = \lim_{\text{diam } V \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log Z_T(V, f).$$

The pressure on the unit tangent bundle S^*M is simply obtained by continuity, taking the limit $\Pr(f) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \Pr^\delta(f)$. To make the above limits easier to work with, we now take $f = a^u$ and fix $\varepsilon > 0$ such that $\Pr(a^u) + \varepsilon < 0$. Then, we choose the width of the energy layer $\delta \in]0, 1[$ sufficiently small such that $|\Pr(a^u) - \Pr^\delta(a^u)| \leq \varepsilon/2$. Given a cover $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ (of arbitrary small diameter), there exist a time t_0 depending on the cover \mathcal{V} such that

$$\left| \frac{1}{t_0} \log Z_{t_0}(\mathcal{V}, a^u) - \Pr^\delta(a^u) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Hence there is a subset of t_0 -strings $\mathcal{B}_{t_0} \subset \mathcal{A}^{t_0}$ such that $\{\mathcal{V}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{B}_{t_0}}$ is an open cover of $\mathcal{E}^{3\delta/4}$ and satisfies

$$(2.2) \quad \sum_{\beta \in \mathcal{B}_{t_0}} \exp(\langle a^u \rangle_{t_0, \beta}) \leq \exp\left(t_0(\Pr^\delta(a^u) + \frac{\varepsilon}{2})\right) \leq \exp(t_0(\Pr(a^u) + \varepsilon)).$$

For convenience, we denote by $\{\mathcal{W}_\beta\}_{\beta \in \mathcal{B}_{t_0}} \equiv \{\mathcal{V}_\beta\}_{\beta \in \mathcal{B}_{t_0}}$ the sub-cover of $\mathcal{V}^{(t_0)}$ such that (2.2) holds. Note that in this case, the diameter of \mathcal{V} , t_0 and then \mathcal{W} depends on ε .

2.2. Discrete time evolution. Let $\{\varphi_\beta\}_{\beta \in \mathcal{B}_{t_0}}$ be a partition of unity adapted to \mathcal{W} , so that its Weyl quantization $\varphi_\beta^w \stackrel{\text{def}}{=} \Pi_\beta$ (see Appendix A) satisfy

$$\text{WF}_{\hbar}(\Pi_\beta) \subset \mathcal{E}^\delta, \quad \Pi_\beta^* = \Pi_\beta, \quad \sum_{\beta} \Pi_\beta = \mathbb{1} \quad \text{microlocally near } \mathcal{E}^{\delta/2}.$$

We will also consider a partition of unity $\{\tilde{\varphi}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ adapted to the cover \mathcal{V} , and its Weyl quantization $\tilde{\Pi} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\varphi}^w$. In what follows, we will be interested in the propagator \mathcal{U}^{Nt_0+1} , and

$$N = T \log \hbar^{-1}, \quad T > 0.$$

It is important to note that T can be arbitrary large, but is fixed with respect to \hbar . The propagator \mathcal{U}^{Nt_0} is decomposed by inserting $\sum_{\beta \in \mathcal{B}_{t_0}} \Pi_\beta$ at each time step of length t_0 . Setting first $\mathcal{U}_\beta = \mathcal{U}^{t_0} \Pi_\beta$, we have (microlocally near $\mathcal{E}^{\delta/2}$) the equality $\mathcal{U}^{t_0} = \sum_{\beta} \mathcal{U}_\beta$, and then

$$(2.3) \quad \mathcal{U}^{Nt_0} = \sum_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N \in \mathcal{B}_{t_0}} \mathcal{U}_{\beta_N} \dots \mathcal{U}_{\beta_1}, \quad \text{near } \mathcal{E}^{\delta/2}.$$

2.3. Proof of Theorem 4. We begin by choosing $\chi \in C_0^\infty(T^*M)$ such that $\text{supp } \chi \Subset \mathcal{E}^\delta$ and $\chi \equiv 1$ on $\mathcal{E}^{\delta/4}$, and considering $\text{Op}_{\hbar}(\chi)$. Applying the Cauchy-Schwartz inequality, we get immediately

$$(2.4) \quad \|\mathcal{U}^{Nt_0+1} \text{Op}_{\hbar}(\chi)\| \leq \sum_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N \in \mathcal{B}_{t_0}^N} \|\mathcal{U}_{\beta_N} \dots \mathcal{U}_{\beta_1} \mathcal{U}^1 \text{Op}_{\hbar}(\chi)\| + \mathcal{O}_{L^2 \rightarrow L^2}(\hbar^\infty).$$

Unless otherwise stated, the norms $\|\cdot\|$ always refer to $\|\cdot\|_{L^2 \rightarrow L^2}$ or $\|\cdot\|_{L^2}$, according to the context. The proof of Theorem (4) relies on the following intermediate result, proven much later in Section 4.

Proposition 5. (Hyperbolic dispersion estimate) *Let $\varepsilon > 0$, and δ, \mathcal{V}, t_0 be as in Section 2.1. For $N = T t_0 \log h^{-1}$, $T > 0$, take a sequence β_1, \dots, β_N and $\mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_{\beta_N}$ the associated open sets of the refined cover \mathcal{W} . Finally, let $\text{Op}_{\hbar}(\chi)$ be as above. There exists a constant $C > 0$ and $\hbar_0(\varepsilon) \in]0, 1[$ such that*

$$\hbar \leq \hbar_0 \Rightarrow \|\mathcal{U}^{t_0} \Pi_{\beta_N} \dots \mathcal{U}^{t_0} \Pi_{\beta_1} \mathcal{U}^1 \text{Op}_{\hbar}(\chi)\| \leq C \hbar^{-d/2} \prod_{j=1}^N e^{\langle a^u \rangle_{t_0, \beta_j}}$$

where $\langle a^u \rangle_{t_0, \beta} = \sup_{\rho \in \mathcal{W}_{\beta}} \sum_{j=0}^{t_0-1} a^u \circ \Phi^j(\rho)$. The constant C only depends on the manifold M .

We also state the following crucial consequence :

Corollary 6. *Take $\varepsilon > 0$ such that $\text{Pr}(a^u) + \varepsilon < 0$. There exists $C > 0$ and $\hbar_0(\varepsilon) \in]0, 1[$ such that*

$$\hbar \leq \hbar_0 \Rightarrow \|\mathcal{U}^{N t_0 + 1} \text{Op}_{\hbar}(\chi)\| \leq C \hbar^{-\frac{d}{2}} e^{N t_0 (\text{Pr}(a^u) + \varepsilon)}$$

The constant C only depends on M .

Proof. Given $\varepsilon > 0$, we choose $\delta, \mathcal{V}, t_0, \mathcal{W}$ as in the preceding proposition. Using (2.4), we then have

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U}^{N t_0 + 1} \text{Op}_{\hbar}(\chi)\| &\leq C \hbar^{-\frac{d}{2}} \sum_{\beta_1 \dots \beta_N \in \mathcal{B}_{t_0}^N} \left(\prod_{j=1}^N e^{\langle a^u \rangle_{t_0, \beta_j}} + \mathcal{O}(\hbar^{\infty}) \right) \\ &\leq C \hbar^{-\frac{d}{2}} \left(\sum_{\beta \in \mathcal{B}_{t_0}} e^{\langle a^u \rangle_{t_0, \beta}} \right)^N + \mathcal{O}(\hbar^{\infty}). \end{aligned}$$

To get the second line, notice that the number of terms in the sum is of order $(\text{Card } \mathcal{B}_{t_0})^N = \hbar^{-T \log \text{Card } \mathcal{B}_{t_0}}$. From our choice of ε and δ , we can use (2.2), and for \hbar small enough, rewrite this equation as

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U}^{N t_0 + 1} \text{Op}_{\hbar}(\chi)\| &\leq C \hbar^{-\frac{d}{2}} e^{N t_0 (\text{Pr}^{\delta}(a^u) + \varepsilon/2)} \\ &\leq C \hbar^{-\frac{d}{2}} e^{N t_0 (\text{Pr}(a^u) + \varepsilon)} \end{aligned}$$

where $C > 0$ only depends on the manifold M . □

Let us show how this result implies Theorem 4. We assume that Ψ satisfies (1.11), and therefore $\|\mathcal{U}^{N t_0 + 1} \Psi\| = e^{\frac{(N t_0 + 1) \text{Im } z}{\hbar}}$. Notice also that we have

$$\text{Op}_{\hbar}(\chi) \Psi = \Psi + \mathcal{O}(\hbar^{\infty})$$

since $\text{WF}_{\hbar}(\Psi) \subset S^*M$, and then

$$\|\mathcal{U}^{N t_0 + 1} \text{Op}_{\hbar}(\chi) \Psi\| = \|\mathcal{U}^{N t_0 + 1} \Psi\| + \mathcal{O}(\hbar^{\infty}) = e^{(N t_0 + 1) \text{Im } z} + \mathcal{O}(\hbar^{\infty}).$$

It follows from the corollary that

$$e^{\frac{N t_0 + 1}{\hbar} \text{Im } z} \leq C \hbar^{-\frac{d}{2}} e^{N t_0 (\text{Pr}(a^u) + \varepsilon)} + \mathcal{O}(\hbar^m),$$

where m can be arbitrary large. Taking the logarithm, this yields to

$$\frac{\operatorname{Im} z}{\hbar} \leq \frac{\log C}{Nt_0} - \frac{d}{2Nt_0} \log \hbar + \operatorname{Pr}(a^u) + \varepsilon + \mathcal{O}\left(\frac{1}{Nt_0}\right).$$

But given $\varepsilon > 0$, we can take $N = T \log \hbar^{-1}$ with T arbitrary. Hence there is $\hbar_0(\varepsilon) \in]0, 1[$ and T sufficiently large, such that

$$\hbar \leq \hbar_0(\varepsilon) \Rightarrow \frac{\operatorname{Im} z}{\hbar} \leq \operatorname{Pr}(a^u) + 2\varepsilon.$$

Since the parameter ε can be chosen as small as wished, this proves Theorem 4.

3. EIGENVALUES EXPANSION AND ENERGY DECAY

3.1. Resolvent estimates. To show the exponential decay of the energy, we follow a standard route from resolvent estimates in a strip around the real axis. Let us denote

$$Q(z, \hbar) = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta - z - i \hbar \sqrt{2za}(x) = \mathcal{P}(z, \hbar) - z.$$

The following proposition establish a resolvent estimate in a strip of width $|\operatorname{Pr}(a^u) + \varepsilon|$ below the real axis in the semiclassical limit. This is the main step toward Theorems 2 and 3, see also [NoZw2] for comparable resolvent estimates in the chaotic scattering situation :

Proposition 7. *Let $\varepsilon > 0$, and $z = \frac{1}{2} + \hbar\zeta$, with $|\zeta| = \mathcal{O}(1)$ satisfying*

$$(3.1) \quad \operatorname{Pr}(a^u) + \varepsilon \leq \operatorname{Im} \zeta \leq 0.$$

There exists $\hbar_0(\varepsilon) > 0$, $C_\varepsilon > 0$ depending on M, a and ε such that

$$\hbar \leq \hbar_0(\varepsilon) \Rightarrow \|Q(z, \hbar)^{-1}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C_\varepsilon \hbar^{-1 - \frac{d}{2}} \log \hbar^{-1}.$$

Proof. Given $\varepsilon > 0$, we choose $\varepsilon' = \varepsilon/4$, and fix $\hbar_0(\varepsilon')$ so that Corollary 6 holds with ε' . Note that $\hbar \leq \hbar_0$ implies that any $z \in \Sigma_{\frac{1}{2}}$ satisfies $\hbar^{-1} \operatorname{Im} z \leq \operatorname{Pr}(a^u) + 2\varepsilon' < \operatorname{Pr}(a^u) + \varepsilon$. This implies that for $\hbar \leq \hbar_0$, any $z = \frac{1}{2} + \hbar\zeta$ with ζ satisfying (3.1) is not in the spectrum. Hence we fix from now on $\hbar \leq \hbar_0(\varepsilon')$, and $Q(z, \hbar)^{-1}$ is well defined. Finally, we set

$$\operatorname{Pr}(a^u)^+ = \operatorname{Pr}(a^u) + \varepsilon'.$$

In order to bound $Q(z, \hbar)^{-1}$, we proceed in two steps, by finding two operators which approximate Q^{-1} : one on the energy surface \mathcal{E}^δ , the other outside \mathcal{E}^δ . Let χ be as in Section 2, and choose also Let $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(T^*M)$ with $\operatorname{supp} \tilde{\chi} \Subset \operatorname{supp} \chi$, such that we also have $\tilde{\chi} = 1$ near S^*M . We first look for an operator $A_0 = A_0(z, \hbar)$ such that

$$QA_0 = (1 - \operatorname{Op}_\hbar(\chi)) + \mathcal{O}_{L^2 \rightarrow L^2}(\hbar^\infty).$$

For this, consider $Q(z, \hbar) + i \operatorname{Op}_\hbar(\tilde{\chi}) \stackrel{\text{def}}{=} Q_0(z, \hbar)$. Because of the property of $\tilde{\chi}$, the operator Q_0 is elliptic. Hence, there is an operator \tilde{A}_0 , uniformly bounded in $L^2(M)$, such that

$$Q_0 \tilde{A}_0 = \operatorname{Id} + \mathcal{O}_{L^2 \rightarrow L^2}(\hbar^\infty).$$

The operator A_0 we are looking for is obtained by taking $A_0 = \tilde{A}_0(1 - \operatorname{Op}_\hbar(\chi))$. Indeed,

$$\begin{aligned} Q(z, \hbar)A_0(z, \hbar) &= 1 - \operatorname{Op}_\hbar(\chi) - i \operatorname{Op}_\hbar(\tilde{\chi}) \tilde{A}_0(1 - \operatorname{Op}_\hbar(\chi)) + \mathcal{O}_{L^2 \rightarrow L^2}(\hbar^\infty) \\ &= 1 - \operatorname{Op}_\hbar(\chi) + \mathcal{O}_{L^2 \rightarrow L^2}(\hbar^\infty) \end{aligned}$$

since $\tilde{\chi}$ and $1 - \chi$ have disjoint supports by construction.

We now look for the solution on \mathcal{E}^δ . From Corollary 6, we have an exponential decay of the propagator \mathcal{U}^{Nt_0} if N becomes large. To use this information, we set

$$A_1(z, \hbar, T_\hbar) = \frac{i}{\hbar} \int_0^{T_\hbar} \mathcal{U}^t e^{\frac{it}{\hbar}z} \text{Op}_\hbar(\chi) dt$$

where T_\hbar has to be adjusted. Hence,

$$Q(z, \hbar)A_1(z, \hbar, T_\hbar) = \text{Op}_\hbar(\chi) - \mathcal{U}^t e^{\frac{it}{\hbar}z} \Big|_{t=T_\hbar} \text{Op}_\hbar(\chi) = \text{Op}_\hbar(\chi) + R_1.$$

Since $\text{Im } z/\hbar = \text{Im } \zeta = \mathcal{O}(1)$, we have

$$(3.2) \quad \|R_1\| = e^{-T_\hbar \text{Im } \zeta} \|\mathcal{U}^{T_\hbar} \text{Op}_\hbar(\chi)\|.$$

From Corollary 6, we know that for $N = Tt_0 \log \hbar^{-1}$ with $\hbar \leq \hbar_0$,

$$\|\mathcal{U}^{Nt_0+1} \text{Op}_\hbar(\chi)\| \leq C\hbar^{-\frac{d}{2}} e^{Nt_0 \text{Pr}(a^u)^+}.$$

We observe that this bound is useful only if does not diverge as $\hbar \rightarrow 0$, which is the case if

$$T \geq \frac{d}{2t_0|\text{Pr}(a^u)^+|} \stackrel{\text{def}}{=} T_0.$$

Let us define

$$(3.3) \quad T_\hbar^0 = T_0 t_0 \log \hbar^{-1} + 1 = \frac{d}{2|\text{Pr}(a^u)^+|} \log \hbar^{-1} + 1.$$

If $T_\hbar = T \log \hbar^{-1} t_0 + 1$, with $T > T_0$ chosen large enough, we find

$$\|R_1\| \leq C\hbar^{Tt_0(\text{Pr}(a^u)^+ + \varepsilon)} \hbar^{-\frac{d}{2} - Tt_0 \text{Pr}(a^u)^+} = \mathcal{O}(\hbar^m)$$

with $m = m(T_\hbar) \geq 0$, since $\varepsilon - \varepsilon' > 0$. Consequently, there is $T_1 = T_1(\varepsilon) > 0$ such that $T_\hbar^1 = T_1 t_0 \log \hbar^{-1} + 1$ satisfies $m(T_\hbar^1) = 0$. This means that for $T_\hbar \geq T_\hbar^1$, we have

$$Q(z, \hbar)(A_0(z, \hbar) + A_1(z, \hbar, T_\hbar)) = 1 + \mathcal{O}_{L^2 \rightarrow L^2}(1),$$

in other words, $A_0 + A_1$ is ‘‘close’’ to the resolvent Q^{-1} . Hence, we impose now $T_\hbar \geq T_\hbar^1$, and evaluate the norms of A_0 and A_1 . By construction, $\|A_0\| = \mathcal{O}(1)$. For A_1 , we have to estimate an integral of the form

$$I_{T_\hbar} = \int_0^{T_\hbar} e^{-t \text{Im } \zeta} \|\mathcal{U}^t \text{Op}_\hbar(\chi)\| dt.$$

Let us split the integral according to T_\hbar^0 , and use the decay of $\mathcal{U}^t \text{Op}_\hbar(\chi)$ for $t \geq T_\hbar^0$:

$$\begin{aligned} |I_{T_\hbar}| &\leq T_\hbar^0 e^{-T_\hbar^0 \text{Im } \zeta} + C\hbar^{-\frac{d}{2}} \int_{T_\hbar^0}^\infty e^{-t \text{Im } \zeta} e^{(t-1) \text{Pr}(a^u)^+} dt \\ &\leq T_\hbar^0 e^{-T_\hbar^0 \text{Im } \zeta} (1 + C_\varepsilon \hbar^{-\frac{d}{2}} e^{(T_\hbar^0-1) \text{Pr}(a^u)^+}) \\ &\leq C_\varepsilon T_\hbar^0 e^{-T_\hbar^0 \text{Im } \zeta}. \end{aligned}$$

Using (3.3) and (3.1), this gives

$$\|A_1(z, \hbar, T_\hbar)\| \leq C_\varepsilon \hbar^{-1 - \frac{d}{2}} \log \hbar^{-1}$$

where $C_\varepsilon > 0$ depends now on M , a and ε . □

We now translate these results obtained in the semiclassical settings in terms of τ . Recall

$$P(\tau) = -\Delta - \tau^2 - 2i a \tau \equiv \frac{1}{\hbar^2} Q(z, \hbar).$$

and set $R(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} P(\tau)^{-1}$. The operator $R(\tau)$ is directly related to the resolvent $(\tau - \mathcal{B})^{-1}$: a straightforward computation shows that

$$(\tau - \mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix} R(\tau)(-2i a - \tau) & -R(\tau) \\ R(\tau)(2i a \tau - \tau^2) & -R(\tau)\tau \end{pmatrix}.$$

Proposition 8. *Let $\varepsilon > 0$ be such that $\text{Pr}(a^u) + \varepsilon < 0$. Let $\tau \in \mathbb{C} \setminus \text{Spec } \mathcal{B}$ be such that $\text{Pr}(a^u) + \varepsilon \leq \text{Im } \tau < 0$. Set also $\langle \tau \rangle = (1 + |\tau|^2)^{\frac{1}{2}}$. There exists a constant $C > 0$ depending on M, a and ε such that for any $\kappa > d/2$, we have*

$$\begin{aligned} (i) \quad & \|R(\tau)\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C_\varepsilon \langle \tau \rangle^{-1 + \frac{d}{2}} \log \langle \tau \rangle \\ (ii) \quad & \|R(\tau)\|_{L^2 \rightarrow H^2} \leq C_\varepsilon \langle \tau \rangle^{1 + \frac{d}{2}} \log \langle \tau \rangle \\ (iii) \quad & \|R(\tau)\|_{H^\kappa \rightarrow H^1} \leq C_\varepsilon \\ (iv) \quad & \|\tau R(\tau)\|_{H^\kappa \rightarrow H^0} \leq C_\varepsilon. \end{aligned}$$

Proof. (i) follows directly from rescaling the statements of the preceding proposition. For (ii), observe that

$$\|R(\tau)u\|_{H^2} \leq C(\|R(\tau)u\|_{L^2} + \|\Delta R(\tau)u\|_{L^2}), \quad C > 0.$$

But

$$\|\Delta R(\tau)u\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^2} + |\tau|^2 + 2\tau i a \|R(\tau)u\|_{L^2},$$

so using (i), we get

$$\|R(\tau)u\|_{H^2} \leq C((1 + |\tau|^2 + 2i a \tau) \|R(\tau)u\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}) \leq C_\varepsilon \langle \tau \rangle^{1 + \frac{d}{2}} \log \langle \tau \rangle \|u\|_{L^2}.$$

To arrive at (iii), we start from the following classical consequence of the Hölder inequality:

$$(3.4) \quad \|R(\tau)u\|_{H^{1-s}}^2 \leq \|R(\tau)u\|_{H^2}^{1-s} \|R(\tau)u\|_{L^2}^{1+s}, \quad s > 0.$$

From (i) and (ii), we obtain

$$\|R(\tau)u\|_{H^{1-s}} \leq C_\varepsilon \langle \tau \rangle^{(\frac{d}{2}-s)} \log \langle \tau \rangle \|u\|_{L^2}.$$

If we choose $s > \frac{d}{2}$, we get $\|R(\tau)\|_{H^0 \rightarrow H^{1-s}} \leq C_\varepsilon$. Hence, for any $s' \geq 0$ we have

$$\|R(\tau)\|_{H^{s'} \rightarrow H^{s'+1-s}} \leq C_\varepsilon.$$

Taking $s' = s$ shows (iii), where we must have $\kappa > \frac{d}{2}$. The last equation (iv) is derived as (iii), by considering

$$\|\tau R(\tau)u\|_{H^{1-s}}^2 \leq |\tau|^2 \|R(\tau)u\|_{H^2}^{1-s} \|R(\tau)u\|_{L^2}^{1+s}, \quad s > 0,$$

and choosing s so that $\|\tau R(\tau)\|_{H^0 \rightarrow H^{1-s}}^2 \leq C_\varepsilon$. \square

3.2. Eigenvalues expansion. We now prove Theorem 2. Let us fix $\varepsilon > 0$ so that $\text{Pr}(a^u) + \varepsilon < 0$. From Theorem 1 we know that

$$\text{Card}(\text{Spec } \mathcal{B} \cap (\mathbb{R} + i[\text{Pr}(a^u) + \varepsilon, 0])) \stackrel{\text{def}}{=} n(\varepsilon) < \infty.$$

Hence there is $e_0(\varepsilon) > 0$ such that $\text{Spec } \mathcal{B} \cap (\mathbb{R} + i[\text{Pr}(a^u) + \varepsilon]) \subset \Omega$, where

$$\Omega = \Omega(\varepsilon) = [-e_0, e_0] + i[\text{Pr}(a^u) + \varepsilon, 0].$$

We then call $\{\tau_0, \dots, \tau_{n(\varepsilon)-1}\} = \text{Spec } \mathcal{B} \cap \Omega$, and set by convention $\tau_0 = 0$. We define as above $\text{Pr}(a^u)^+ = \text{Pr}(a^u) + \varepsilon$. Since we look at the eigenvalues $\tau \in \Omega$, let us introduce the spectral projectors on the generalized eigenspace E_j for $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$:

$$\Pi_j = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma_j} (\tau - \mathcal{B})^{-1} d\tau, \quad \Pi_j \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, D(\mathcal{B}^\infty)),$$

where γ_j are small circles centered in τ_j . We also denote by

$$\Pi = \sum_{j=0}^n \Pi_j$$

the spectral projection onto $\bigoplus_{j=0}^n E_j$. We call E_0 the eigenspace corresponding to the eigenvalue $\tau_0 = 0$. It can be shown [Leb] that E_0 is one dimensional over \mathbb{C} and spanned by $(1, 0)$, so

$$\Pi_0 \boldsymbol{\omega} = (c(\boldsymbol{\omega}), 0) \quad \text{with } c(\boldsymbol{\omega}) \in \mathbb{C}.$$

Let now $\boldsymbol{\omega} = (\omega_0, \omega_1)$ be in \mathcal{H}^κ . Near a pole τ_j of $(\tau - \mathcal{B})^{-1}$, we have

$$(\tau - \mathcal{B})^{-1} = \frac{\Pi_j}{\tau - \tau_j} + \sum_{k=2}^{m_j} \frac{(\mathcal{B} - \tau_j)^{k-1} \Pi_j}{(\tau - \tau_j)^k} + H_j(\tau)$$

where H_j is an operator depending holomorphically on τ in a neighbourhood of τ_j , and m_j is the multiplicity of τ_j . Since $\Pi \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, D(\mathcal{B}^\infty))$, we have the following integral representation of $e^{-it\mathcal{B}} \Pi \boldsymbol{\omega}$, with absolute convergence in \mathcal{H} :

$$(3.5) \quad e^{-it\mathcal{B}} \Pi \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty+i\alpha}^{+\infty+i\alpha} e^{-it\tau} (\tau - \mathcal{B})^{-1} \Pi \boldsymbol{\omega} d\tau, \quad t > 0, \alpha > 0.$$

The integrand in the right hand side has poles located at τ_j , $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, so that

$$\begin{aligned} e^{-it\mathcal{B}} \Pi \boldsymbol{\omega} &= \sum_j \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma_j} e^{-it\tau} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{(\mathcal{B} - \tau_j)^{k-1} \Pi_j}{(\tau - \tau_j)^k} \boldsymbol{\omega} d\tau \\ &= \sum_j e^{-it\tau_j} p_{\tau_j}(t) \boldsymbol{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j e^{-it\tau_j} \mathbf{u}_j(t), \end{aligned}$$

where

$$p_{\tau_j}(t) = \Pi_j + \sum_{k=2}^{m_j} \frac{(-it)^{k-1}}{(k-1)!} (\mathcal{B} - \tau_j)^{k-1} \Pi_j.$$

The operators $p_{\tau_j}(t)$ are polynomials in t , with degree at most m_j , taking their values in $\mathcal{L}(\mathcal{H}, D(\mathcal{B}^\infty))$. It follows that for some $C > 0$ depending only on M and a ,

$$\|\mathbf{u}_j(t)\|_{\mathcal{H}} \leq Ct^{m_j} \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathcal{H}}.$$

The remainder term appearing in Theorem 2 is now identified :

$$\mathbf{r}_n(t) = e^{-it\mathcal{B}} (1 - \Pi) \boldsymbol{\omega}.$$

To conclude the proof, we have therefore to evaluate $\|\mathbf{r}_n\|_{\mathcal{H}}$. To do so, we will use in a crucial way the resolvent bounds below the real axis that we have obtained in the preceding section. We consider the solution $u(t, x)$ of (1.1) with initial data $\mathbf{u} = (u_0, u_1) = (1 - \Pi)\boldsymbol{\omega}$, with $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{H}^\kappa$, $\kappa > d/2$. Let us define $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq \chi \leq 1$, such that $\chi = 0$ for $t \leq 0$ and $\chi = 1$ for $t \geq 1$. If we set $v = \chi u$, we have

$$(3.6) \quad (\partial_t^2 - \Delta + 2a\partial_t)v = g_1$$

where

$$(3.7) \quad g_1 = \chi''u + 2\chi'\partial_t u + 2a\chi'u.$$

Note also that $\text{supp } g_1 \subset [0, 1] \times M$, and $v(t) = 0$ for $t \leq 0$. Let us denote the inverse Fourier transform in time by

$$\mathcal{F}_{t \rightarrow -\tau} : u \mapsto \check{u}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{i t \tau} u(t) dt.$$

Applying $\mathcal{F}_{t \rightarrow -\tau}$ (in the distributional sense) to both sides of (3.6) yields to

$$P(\tau)\check{v}(\tau, x) = \check{g}_1(\tau, x).$$

We then remark that $R(\tau)\check{g}_1(\tau, x)$ is the first component of

$$i(\tau - \mathcal{B})^{-1} \mathcal{F}_{t \rightarrow -\tau} (\chi'(t)(u, i\partial_t u)).$$

From the properties of Π , it is clear that the operator $(\tau - \mathcal{B})^{-1}(1 - \Pi)$ depends holomorphically on τ in the half-plane $\text{Im } \tau \geq \text{Pr}(a^u)^+$. From $(u, i\partial_t u) = e^{-i t \mathcal{B}}(1 - \Pi)\boldsymbol{\omega}$, we then conclude that $i(\tau - \mathcal{B})^{-1} \mathcal{F}_{t \rightarrow -\tau} (\chi'(t)(u, i\partial_t u))$ depends also holomorphically on τ in the half plane $\text{Im } \tau \geq \text{Pr}(a^u)^+$. Hence $\check{v}(\tau, x) = R(\tau)\check{g}_1(\tau, x)$ and an application of the Parseval formula yields to

$$\begin{aligned} \|e^{-t \text{Pr}(a^u)^+} v\|_{L^2(\mathbb{R}_+, H^1)} &= \|\check{v}(\cdot + i \text{Pr}(a^u)^+)\|_{L^2(\mathbb{R}, H^1)} \\ &= \|R(\cdot + i \text{Pr}(a^u)^+)\check{g}_1(\cdot + i \text{Pr}(a^u)^+)\|_{L^2(\mathbb{R}, H^1)} \\ &\leq C_\varepsilon \|\check{g}_1(\cdot + i \text{Pr}(a^u)^+)\|_{L^2(\mathbb{R}, H^\kappa)} \\ &\leq C_\varepsilon \|g_1\|_{L^2(\mathbb{R}_+, H^\kappa)}. \end{aligned}$$

where we have used Proposition 8. The term appearing in the last line can in fact be controlled by the initial data. From (3.7), we have

$$(3.8) \quad \|g_1\|_{L^2(\mathbb{R}_+; H^\kappa)} \leq C (\|u\|_{L^2([0, 1]; H^\kappa)} + \|\partial_t u\|_{L^2([0, 1]; H^\kappa)}).$$

A direct computation shows

$$\partial_t \|u\|_{\mathcal{H}^\kappa}^2 \leq C (\|u\|_{\mathcal{H}^\kappa}^2 + \|\partial_t u\|_{H^\kappa}^2 + \|\nabla u\|_{H^\kappa}^2).$$

The Gronwall inequality for $t \in [0, 1]$ gives

$$\begin{aligned} \|u(t, \cdot)\|_{H^\kappa}^2 &\leq C \left(\|u(0, \cdot)\|_{H^\kappa}^2 + \int_0^t (\|\partial_s u(s)\|_{H^\kappa}^2 + \|\nabla u(s)\|_{H^\kappa}^2) ds \right) \\ &\leq C \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathcal{H}^\kappa}^2, \end{aligned}$$

since the κ -energy

$$E^\kappa(t, u) = \frac{1}{2} (\|\partial_t u\|_{H^\kappa}^2 + \|\nabla u\|_{H^\kappa}^2)$$

is also decreasing in t . Coming back to (3.8), we see that $\|g_1\|_{L^2(\mathbb{R}_+; H^\kappa)} \leq C \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathcal{H}^\kappa}$ and then,

$$\|e^{-t(\text{Pr}(a^u)^+ + \varepsilon)} v(t, x)\|_{L^2(\mathbb{R}_+, H^1)} \leq C_\varepsilon \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathcal{H}^\kappa}.$$

This is the exponential decay we are looking for, but in the integrated form. It is now easy to see that

$$\|u(t, \cdot)\|_{H^1} \leq C_\varepsilon e^{t(\text{Pr}(a^u)+\varepsilon)} \|\omega\|_{\mathcal{H}^\kappa}.$$

We have to check that the same property is valid for $\partial_t u$. Using the same methods as above, we also have

$$P(\tau)\mathcal{F}_{t \rightarrow -\tau}(\partial_t v) = -\tau\check{g}_1(\tau),$$

and then, $\mathcal{F}_{t \rightarrow -\tau}(\partial_t v) = -\tau R(\tau)\check{g}_1(\tau)$. It follows that

$$\begin{aligned} \|e^{-t\text{Pr}(a^u)^+} \partial_t v(t, x)\|_{L^2(\mathbb{R}_+, H^0)} &= \|\check{v}(\tau + i\text{Pr}(a^u)^+)\|_{L^2(\mathbb{R}, H^0)} \\ &= \|\tau R(\tau + i\text{Pr}(a^u)^+)\check{g}_1(\tau + i\text{Pr}(a^u)^+, x)\|_{L^2(\mathbb{R}, H^0)} \\ &\leq C_\varepsilon \|\check{g}_1(\tau + i\text{Pr}(a^u)^+, x)\|_{L^2(\mathbb{R}, H^\kappa)} \\ &\leq C_\varepsilon \|g_1(t, x)\|_{L^2(\mathbb{R}_+, H^\kappa)}. \end{aligned}$$

Grouping the results, we see that

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}} \leq C_\varepsilon e^{t(\text{Pr}(a^u)+\varepsilon)} \|\omega\|_{\mathcal{H}^\kappa}$$

and this concludes the proof of Theorem 2.

3.3. Energy decay. We end this section with the proof of the Theorem 3, which gives the exponential energy decay. This is an immediate consequence of the following lemma, that tells us that the energy can be controlled by the H^1 norm of u , for $t \geq 2$:

Lemma 9. *There exists $C > 0$ such that for any solution u of (1.1) and $E(u, t)$ the associated energy functional, we have*

$$E(u, T) \leq C \|u\|_{L^2([T-2, T+1]; H^1)}^2, \quad T \geq 2.$$

Proof. This is a standard result, we borrow the proof from [EvZw]. For $T > 2$, we choose $\chi_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq \chi_2 \leq 1$ such that $\chi_2(t) = 1$ for $t \geq T$ and $\chi_2(t) = 0$ if $t \leq T - 1$. Setting $u_2(t, x) = \chi_2(t)u(t, x)$, we have

$$(\partial_t^2 - \Delta + 2a\partial_t)u_2 = g_2$$

for $g_2 = \chi_2''u + 2\chi_2'\partial_t u + 2a\chi_2'u$. Note that g_2 is compactly supported in t . Define now

$$E_2(u, t) = \frac{1}{2} \int_M (|\partial_t u_2|^2 + |\nabla u_2|^2) d\text{vol}$$

and compute

$$\begin{aligned} E_2'(u, t) &= \langle \partial_t^2 u_2, \partial_t u_2 \rangle - \langle \Delta u_2, \partial_t u_2 \rangle \\ &= -2\langle a\partial_t u_2, \partial_t u_2 \rangle + \langle g_2, \partial_t u_2 \rangle \\ &\leq C \int_M |\partial_t u_2| (|\partial_t u| + |u|) d\text{vol} \\ &\leq C \left(E_2(u, t) + \int_M (|\partial_t u|^2 + |u|^2) d\text{vol} \right). \end{aligned}$$

We remark that $E_2(u, T - 1) = 0$ and $E_2(u, T) = E(u, T)$, so the Gronwall inequality on the interval $[T - 1, T]$ gives

$$(3.9) \quad E(u, T) \leq C \left(\|\partial_t u\|_{L^2([T-1, T]; L^2)}^2 + \|u\|_{L^2([T-1, T]; L^2)}^2 \right).$$

To complete the proof, we need to bound the term $\|\partial_t u\|_{L^2([T-1, T]; L^2)}^2$. For this purpose, we choose $\chi_3 \in C^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq \chi_3 \leq 1$ such that $\chi_3(t) = 1$ for $t \in [T-1, T]$ and $\chi_3(t) = 0$ if $t \leq T-2$ and $t \geq T+1$. From (1.1), we get

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{T-2}^{T+1} \langle \chi_3^2 u, \partial_t^2 u - \Delta u + 2a\partial_t u \rangle dt \\ &= \int_{T-2}^{T+1} -\chi_3^2 \langle \partial_t u, \partial_t u \rangle - 2\chi_3 \chi_3' \langle u, \partial_t u \rangle + 2\chi_3^2 \langle u, a\partial_t u \rangle + \chi_3^2 \langle u, -\Delta u \rangle dt, \end{aligned}$$

whence

$$\|\partial_t u\|_{L^2([T-1, T]; L^2)} \leq C \|u\|_{L^2([T-2, T+1]; H^1)}.$$

Substituting this bound in (3.9) yields to the result. \square

The Theorem 3 follows now from the preceding lemma. Let us denote by $u_j(t, x)$ and $r_n(t, x)$ the first component of $p_{\tau_j}(t)\omega$ and $e^{-it\mathcal{B}}(1 - \Pi)\omega$ respectively. We learned above that

$$u(t, x) = \sum_{j=0}^n e^{-it\tau_j} u_j(t, x) + r_n(t, x)$$

with $\|u_j(t, \cdot)\|_{H^1} \leq Ct^{m_j} \|\omega\|_{\mathcal{H}^\kappa}$, and $\|r_n(t, \cdot)\|_{H^1} \leq C_\varepsilon e^{t(\text{Pr}(a^u) + \varepsilon)} \|\omega\|_{\mathcal{H}^\kappa}$. Suppose first that the projection of ω on E_0 vanishes, i.e. $\Pi_0\omega = 0$. Then, from the preceding lemma we clearly have

$$E(u, t)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{j=1}^n e^{t \text{Im } \tau_j} C \|u_j(t, x)\|_{H^1} + C_\varepsilon e^{t(\text{Pr}(a^u) + \varepsilon)} \|\omega\|_{\mathcal{H}^\kappa}.$$

This shows Theorem 3 when $\Pi_0\omega = 0$. But the general case follows easily: we can write $\tilde{u}(t, x) = u(t, x) - \Pi_0\omega$ for which we have the expected exponential decay, and notice that $E(\tilde{u}, t) = E(u, t)$ since $\Pi_0\omega$ is constant.

4. HYPERBOLIC DISPERSION ESTIMATE

This last section is devoted to the proof of Proposition 5. Let $\varepsilon, \delta, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ and $\text{Op}_h(\chi)$ be as in Section 2. We also set $N = T \log h^{-1}$, $T > 0$.

4.1. Decomposition into elementary Lagrangian states. Recall that each set $\mathcal{W}_\beta \equiv \mathcal{W}_{b_0 \dots b_{t_0-1}}$ in the cover \mathcal{W} has the property

$$(4.1) \quad \Phi^k(\mathcal{W}_\beta) \subset \mathcal{V}_{b_k}, \quad k \in \llbracket 0, t_0 - 1 \rrbracket$$

for some sequence $b_0, b_1, \dots, b_{t_0-1}$. To every sequence β_1, \dots, β_N of open sets \mathcal{W}_{β_k} , we associate a sequence $\gamma_1, \dots, \gamma_{Nt_0}$ of open sets $\mathcal{V}_{\gamma_k} \subset \mathcal{V}$ such that

$$\Phi^k(\mathcal{W}_{\beta_i}) \subset \mathcal{V}_{\gamma_{(i-1)t_0+k+1}} \quad k \in \llbracket 0, t_0 - 1 \rrbracket.$$

Hence, any point of \mathcal{W}_i visits the sets $\mathcal{V}_{\gamma_{(i-1)t_0+1}}, \dots, \mathcal{V}_{\gamma_{(i-1)t_0+t_0}}$ at the times $0, \dots, t_0 - 1$.

We now decompose further each evolution of length t_0 in (2.3) by inserting additional quantum projectors. To unify the notations, we define for $j \in \llbracket 1, Nt_0 \rrbracket$ the following projectors and the corresponding open sets in T^*M :

$$(4.2) \quad P_{\gamma_j} = \begin{cases} \Pi_{\beta_k} & \text{if } j-1 = kt_0, \quad k \in \mathbb{N} \\ \tilde{\Pi}_{\gamma_j} & \text{if } j-1 \neq 0 \pmod{t_0} \end{cases}, \quad \mathcal{V}_{\gamma_j} = \begin{cases} \mathcal{W}_{\beta_k} & \text{if } j-1 = kt_0, \quad k \in \mathbb{N} \\ \mathcal{V}_{\gamma_j} & \text{if } j-1 \neq 0 \pmod{t_0}. \end{cases}$$

We will also denote by $F_\gamma \in C_0^\infty(T^*M)$ the function such that $\text{supp } F_\gamma \subset \mathcal{V}_\gamma$ and $P_\gamma = F_\gamma^w$.

Let us set up also a notation concerning the constants appearing in the various estimates we will deal with. Let $\ell, K \in \mathbb{N}$ be two parameters (independent of \hbar), and $e_1, e_2, e_3 > 0$ some fixed numbers. For a constant C depending on M and derivatives of χ , a , Φ^t (for t bounded) up to order $e_1\ell + e_2K + e_3$, we will write $C^{(\ell, K)}(M, \chi)$, or simply $C^{(K)}(M, \chi)$ if only one parameter is involved. If the constant C depends also on the cutoff functions F_γ and their derivatives, we will write

$$C = C^{(\ell, K)}(M, \chi, \mathcal{V}).$$

This is to recall us the dependence on the cutoff function χ supported inside \mathcal{E}^δ , and the refined cover \mathcal{V} . We will sometimes use the notation $C^{(\ell, K)}(M, \mathcal{V})$ when no dependence on χ is assumed. Note that \mathcal{V} depends implicitly on ε since its diameter was chosen such that (2.2) holds.

Using (4.1), standard propagation estimates give

$$\mathcal{U}^{t_0} \Pi_{\beta_1} = \mathcal{U} P_{\gamma_{t_0}} \dots \mathcal{U} P_{\gamma_1} + \mathcal{O}_{L^2 \rightarrow L^2}(\hbar^\infty), \quad \mathcal{U} \equiv \mathcal{U}^1,$$

and similar properties for $\mathcal{U}^{t_0} \Pi_{\beta_k}$, $k > 1$. Finally,

$$(4.3) \quad \mathcal{U}_{\beta_{Nt_0}} \dots \mathcal{U}_{\beta_1} \mathcal{U} \text{Op}_\hbar(\chi) = \mathcal{U} P_{\gamma_{Nt_0}} \dots \mathcal{U} P_{\gamma_1} \mathcal{U} \text{Op}_\hbar(\chi) + \mathcal{O}_{L^2 \rightarrow L^2}(\hbar^\infty).$$

Take now $\Psi \in L^2(M)$. In order to show Proposition 5, we will write $\text{Op}_\hbar(\chi)\Psi$ as a linear decomposition over some elementary Lagrangian states, and study the individual evolution of such elementary states by \mathcal{U}^{Nt_0+1} . This type of method comes back to [Ana1] and is the key tool to prove Proposition 5. The decomposition of $\text{Op}_\hbar(\chi)\Psi$ is obtained by expliciting the action of $\text{Op}_\hbar(\chi)$ in local coordinates (see Appendix A). When applying $\text{Op}_\hbar(\chi)$ to Ψ using local charts labelled by ℓ , we get

$$\begin{aligned} [\text{Op}_\hbar(\chi)\Psi](x) &= \sum_\ell \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int e^{i \frac{\langle \eta, x-z_0 \rangle}{\hbar}} \chi\left(\frac{x+z_0}{2}, \eta\right) \varphi_\ell(z_0) \phi_\ell(x) \Psi(z_0) d\eta dz_0 \\ &= \sum_\ell \int \delta_{\chi, z_0}^\ell(x) \Psi(z_0) dz_0, \end{aligned}$$

where we have defined

$$\delta_{\chi, z_0}^\ell(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int e^{i \frac{\langle \eta, x-z_0 \rangle}{\hbar}} \chi\left(\frac{x+z_0}{2}, \eta\right) \varphi_\ell(z_0) \phi_\ell(x) d\eta.$$

This is a Lagrangian state, which Lagrangian manifold is given by

$$\Lambda^0 \stackrel{\text{def}}{=} T_{z_0}^* M \cap \mathcal{E}^\delta \subset T^* M.$$

Geometrically, Λ^0 corresponds to a small, connected piece taken out of the union of spheres $\{T_{z_0}^* M \cap p^{-1}(\frac{1}{2} + \nu), |\nu| \leq \delta\}$. If we project and evolve Ψ according to the operator appearing in the right hand side of (4.3), we get :

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \|\mathcal{U}^t P_{\gamma_{Nt_0}} \dots \mathcal{U} P_{\gamma_1} \mathcal{U} \text{Op}_\hbar(\chi)\Psi\| &\leq \sum_\ell \sup_z \|\mathcal{U}^t P_{\gamma_{Nt_0}} \dots P_{\gamma_1} \mathcal{U} \delta_{\chi, z_0}^\ell\| \int_M |\Psi(x)| dx \\ &\leq C \sum_\ell \sup_z \|\mathcal{U}^t P_{\gamma_{Nt_0}} \dots P_{\gamma_1} \mathcal{U} \delta_{\chi, z_0}^\ell\| \|\Psi\| \end{aligned}$$

where $C > 0$ depends only on the manifold M . Hence we are lead by this superposition principle to study in detail states of the form $\mathcal{U}^t P_{\gamma_n} \dots \mathcal{U} P_{\gamma_1} \mathcal{U} \delta_{\chi, z_0}^\ell$, for $n \in \llbracket 1, Nt_0 \rrbracket$ and $t \in [0, 1]$. For simplicity, because the local charts will not play any role in the following, we will omit them in the formulæ.

4.2. Evolution of Lagrangian states and their Lagrangian manifolds.

4.2.1. *Ansatz for short times.* In this section we investigate the first step of the sequence of projection–evolution given in (4.3): our goal is to describe the state $\mathcal{U}^t \delta_{\chi, z_0}$ with $t \in [0, 1]$. Since \mathcal{U}^t is a Fourier integral operator, we know that $\mathcal{U}^t \delta_{\chi, z_0}$ is a Lagrangian state, supported on the Lagrangian manifold

$$\Lambda^0(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi^t(\Lambda^0), \quad t \in [0, 1].$$

Because of our assumptions on the injectivity radius, the flow $\Phi^t : \Lambda^0(s) \rightarrow \Lambda^0(t)$ for $1 \geq t \geq s > 0$, induces on M a bijection from $\pi\Lambda^0(s)$ to $\pi\Lambda^0(t)$. In other words, $\Lambda^0(t)$ projects diffeomorphically on M for $t \in]0, 1]$, i.e. $\ker d\pi|_{\Lambda^0(t)} = 0$: in this case, we will say that $\Lambda^0(t)$ is *projectible*. This is the reason for introducing a first step of propagation during a time 1 : the Lagrangian manifold $\Lambda^0(0)$ is not projectible, but as soon as $t \in]0, 1]$, $\Lambda^0(t)$ projects diffeomorphically. Treating separately this evolution for times $t \in [0, 1]$ avoid some unnecessary technical complications.

The remark above implies that the Lagrangian manifold $\Lambda^0(t)$, $t \in]0, 1]$ is generated by the graph of the differential of a smooth, well defined function S_0 :

$$\Lambda^0(t) = \{(x, d_x S_0(t, x, z_0)) : 1 \geq t > 0, x \in \pi\Phi^t(\Lambda^0)\}.$$

This means that for $t \in]0, 1]$, we have the Lagrangian Ansatz :

$$(4.5) \quad \begin{aligned} v^0(t, x, z_0) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{U}^t \delta_{\chi, z_0}(x) \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{d}{2}}} \left(e^{i \frac{S_0(t, x, z_0)}{\hbar}} \sum_{k=0}^{K-1} \hbar^k b_k^0(t, x, z_0) + \hbar^K B_K^0(t, x, z_0) \right). \end{aligned}$$

The functions $b_k^0(t, x, z_0)$ are smooth, and $x \in \pi\Lambda^0(t)$. Furthermore, given any multi index ℓ , they satisfy

$$(4.6) \quad \|\partial_x^\ell b_k^0(t, \cdot, z_0)\| \leq C_{\ell, k}$$

where the constants $C_{\ell, k}$ depends only on M (via the Hamiltonian flow of p), the damping a , the cutoff function χ and their derivatives up to order $2k + \ell$. However, note that $C_{0,0}$ only depends on M . The remainder satisfies $\|B_K^0\| \leq C_K$ where the constant C_K also depends on M , a , χ and is uniformly bounded with respect to x, z_0 . The base point z_0 will be fixed until section 4.5, so it will be omitted in the following to simplify the notations.

4.2.2. *Further evolution.* In the sequence of projection–evolution (4.3), we then have performed the first step, and obtained an Ansatz for $\mathcal{U}^t \delta_{\chi}$, $t \in]0, 1]$ up to terms of order $\hbar^{K-d/2}$, for any $K \geq 0$. The main goal of the next paragraphs consist in finding an Ansatz for the full state

$$(4.7) \quad v^n(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{U}^t P_{\gamma_n} \mathcal{U} P_{\gamma_{n-1}} \dots \mathcal{U} P_{\gamma_1} \mathcal{U} \delta_{\chi}, \quad t \in [0, 1], \quad n \geq 1.$$

The β_j are defined according to $j - 1 \pmod{t_0}$ as in the preceding section, but here n is arbitrary in the interval $[[1, Nt_0]]$. Because the operator $\mathcal{U}^t P$ is a Fourier integral operator, $v^j(t, x)$, $j \geq 1$ is a Lagrangian state, with a Lagrangian manifold which will be denoted by $\Lambda^j(t)$. This manifold consist in a small piece of $\Phi^{j+t}(\Lambda^0)$, because of the successive applications of the projectors P_γ between the evolution operator \mathcal{U} . If $j = 1$, the Lagrangian manifold $\Lambda^1(0)$ is given by

$$\Lambda^1(0) = \Lambda^0(1) \cap V_{\gamma_1},$$

and for $t \in [0, 1]$ we have $\Lambda^1(t) = \Phi^t(\Lambda^1(0))$. For $j \geq 1$, $\Lambda^j(t)$ can be obtained by a similar procedure: knowing $\Lambda^{j-1}(1)$, we take for $\Lambda^j(t)$, $t \in [0, 1]$ the Lagrangian manifold

$$\Lambda^j(0) \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda^{j-1}(1) \cap \mathbf{V}_{\gamma_j}, \quad \text{and} \quad \Lambda^j(t) = \Phi^t(\Lambda^j(0)).$$

Of course, if the intersection $\Lambda^{j-1}(1) \cap \mathbf{V}_{\gamma_j}$ is empty, the construction has to be stopped, since by standard propagation estimates, v^j is of order $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$ and the Proposition 5 is true. We will then assume that

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \Lambda^j(0) \neq \emptyset.$$

One can show (see [AnNo], Section 3.4.1 for an argument) that the Lagrangian manifolds $\Lambda^j(t)$ are projectible for all $j \geq 1$. This is mainly because M has no conjugate points. In particular, any $\Lambda^j(t)$ can be parametrized as a graph on M of a differential, which means that there is a generating function $S_j(t, x)$ such that

$$\Lambda^j(t) = \{x, d_x S_j(t, x)\}.$$

By extension, we will call a Lagrangian state projectible if its Lagrangian manifold is.

Let us introduce now some notations that will be often used later. Suppose that $x \in \pi\Lambda^j(t)$, $j \geq 1$. Then, there is a unique $y = y(x) \in \pi\Lambda^j(0)$ such that

$$\pi \circ \Phi^t(y, d_y S_j(0, y)) = x.$$

If we denote for $t \in [0, s]$ the (inverse) induced flow on M by

$$\phi_{S_j(s)}^{-t} : x \in \pi\Lambda^j(s) \mapsto \pi\Phi^{-t}(x, d_x S_j(s, x)) \in \pi\Lambda^j(s-t),$$

we have $y(x) = \phi_{S_j(t)}^{-t}(x)$. If $x \in \pi\Lambda^j(t)$, then by construction

$$\Phi^{-t-k}(x, d_x S_j(t, x)) \in \Lambda^{j-k}(0) \subset \Lambda^{j-k-1}(1), \quad k \in \llbracket 0, j-1 \rrbracket.$$

By definition, we will write

$$\phi_{S_j(t)}^{-t-k}(x) = \pi\Phi^{-t-k}(x, d_x S_j(t, x)) \quad \text{and} \quad \phi_{S_j}^{-k}(x) = \pi\Phi^{-k}(x, d_x S_j(1, x)).$$

To summarize, our sequence of projections and evolutions can be cast into the following way:

$$(4.8) \quad \delta_x \xrightarrow{\mathcal{U}^1} v^0(1, \cdot) \xrightarrow{\mathbf{P}_1} v^1(0, \cdot) \xrightarrow{\mathcal{U}} v^1(1, \cdot) \xrightarrow{\mathbf{P}_2} \dots \xrightarrow{\mathbf{P}_n} v^n(0, \cdot) \xrightarrow{\mathcal{U}^t} v^n(t, \cdot)$$

$$\Lambda^0 \xrightarrow{\Phi^1} \Lambda^0(1) \xrightarrow{|\mathbf{V}_1} \Lambda^1(0) \xrightarrow{\Phi^1} \Lambda^1(1) \xrightarrow{|\mathbf{V}_2} \dots \xrightarrow{|\mathbf{V}_n} \Lambda^n(0) \xrightarrow{\Phi^t} \Lambda^n(t)$$

On the top line are written the successive evolutions of the Lagrangian states, while the evolution of their respective Lagrangian manifolds is written below (the notation $|\mathbf{V}$ denotes a restriction to the set $\mathbf{V} \subset T^*M$).

4.3. Evolution of a projectible Lagrangian state. Let \mathbf{V}_γ and \mathbf{P}_γ be as in (4.2). The next proposition contains an explicit description of the action of the Fourier integral operators $\mathcal{U}^t \mathbf{P}$ on projectible Lagrangian states localized inside \mathbf{V}_γ .

Proposition 10. *Let \mathbf{V}_γ and $\mathbf{P}_\gamma = \mathbf{F}_\gamma^w$ be as in Section 4.1. Let $w_\hbar(x) = w(x) e^{\frac{i}{\hbar}\psi(x)}$ be a projectible Lagrangian state, supported on a projectible Lagrangian manifold*

$$\Lambda = \{x, d_x \psi(x)\} \subset \mathbf{V}_\gamma.$$

Assume also that $\Lambda(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi^t \Lambda$ is projectible for $t \in [0, 1]$. We have the following asymptotic development :

$$(4.9) \quad [\mathcal{U}^t \mathbf{P}_\gamma w_\hbar](x) = e^{\frac{i}{\hbar} \psi(t, x)} \sum_{k=0}^{K-1} \hbar^k w_k(t, x) + \hbar^K r_K(t, x)$$

where $\psi(t, \cdot)$ is a generating function for $\Lambda(t)$. The amplitudes w_k can be computed from the geodesic flow (via the function φ_γ), the damping q and the function F_γ . Moreover, the following bounds hold :

$$\begin{aligned} \|w_k\|_{C^\ell} &\leq C_{\ell, k} \|w\|_{C^{\ell+2k}} \\ \|r_K\|_{C^\ell} &\leq C_{\ell, K} \|w\|_{C^{\ell+2K+d}} \end{aligned}$$

where the constants depend on φ_γ , a , F_γ and their derivatives up to order $\ell + 2K + d$, namely $C_{\ell, k} = C^{(\ell, k)}(M, \mathcal{V})$. An explicit expression for w_k will be given in the proof.

Proof. The steps we will encounter below are very standard in the non-damping case, i.e. $q = 0$. If the diameter of the partition \mathcal{V} of \mathcal{E}^δ is chosen small enough, we can assume without loss of generality the existence of a function $\varphi_\gamma \in C^\infty([0, 1] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ which generates the canonical transformation given by the geodesic flow on V_γ for times $t \in [0, 1]$, in other words :

$$(4.10) \quad \forall (y, \eta) \in V_\gamma, \quad \Phi^t(y, \eta) = (x, \xi) \Leftrightarrow \xi = \partial_x \varphi_\gamma(t, x, \eta) \text{ and } y = \partial_\eta \varphi_\gamma(t, x, \eta).$$

Furthermore, φ_γ satisfies $\det \partial_{x, \eta}^2 \varphi_\gamma \neq 0$, and solves the following Hamilton-Jacobi equation

$$\begin{cases} \partial_t \varphi_\gamma + p(x, d_x \varphi_\gamma) = 0 \\ \varphi_\gamma(0, x, \eta) = \langle \eta, x \rangle. \end{cases}$$

We first look for an oscillatory integral representation:

$$(4.11) \quad \begin{aligned} \mathcal{U}^t \mathbf{P}_\gamma w_\hbar(x) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \iint e^{\frac{i}{\hbar} (\varphi_\gamma(t, x, \eta) - \langle y, \eta \rangle + \psi(y))} \sum_{k=0}^{K-1} \hbar^k a_k^\gamma(t, x, y, \eta) w(y) dy d\eta \\ &\quad + \mathcal{O}_{L^2}(\hbar^K) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} b_\hbar(t, x) + \hbar^K \tilde{r}_K(t, x), \quad \|\tilde{r}_K\| = \mathcal{O}(1), \end{aligned}$$

with $(y, \eta) \in V_\gamma$. For simplicity, we will omit the dependence on γ in the formulæ. We have to determine the amplitudes a_k . For this, we want b_\hbar to solve

$$\frac{\partial b_\hbar}{\partial t} = \left(\frac{i \hbar \Delta_g}{2} - q \right) b_\hbar$$

up to order \hbar^K . Direct computations using (1.2) show that the functions φ and a_k must satisfy the following equations :

$$(4.12) \quad \begin{cases} \partial_t \varphi + p(x, d_x \varphi) = 0 & \text{(Hamilton-Jacobi equation)} \\ \partial_t a_0 + q a_0 + X[a_0] + \frac{1}{2} a_0 \operatorname{div}_g X = 0 & \text{(0-th transport equation)} \\ \partial_t a_k + q a_k + X[a_k] + \frac{1}{2} a_k \operatorname{div}_g X = \frac{i}{2} \Delta_g a_{k-1} & \text{(k - th transport equation)} \end{cases}$$

with initial conditions

$$\begin{cases} \varphi(0, x, \eta) = \langle x, \eta \rangle \\ a_0(0, x, y, \eta) = F\left(\frac{x+y}{2}, \eta\right) \\ a_k(0, x, y, \eta) = 0 \text{ for } k \geq 1. \end{cases}$$

The variables y and η are fixed in these equations, so they will play the role of parameters for the moment and will sometimes be skipped in the formulæ. X is a vector field on M depending on t , and $\operatorname{div}_g X$ its Riemannian divergence. In local coordinates,

$$X = g^{ij}(x)\partial_{x_j}\varphi(t, x)\partial_{x_i} = \partial_{\xi_i}p(x, \partial_x\varphi(t, x))\partial_{x_i} \quad \text{and} \quad \operatorname{div}_g X = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i(\sqrt{g}X^i).$$

The Hamilton-Jacobi equation is satisfied by construction. To deal with the transport equations, we notice that X corresponds to the projection on M of the Hamiltonian vector field H_p at $(x, d_x\varphi(t, x, \eta)) \in T^*M$. Let us call first

$$\Lambda_{t,\eta} = \{(x, d_x\varphi(t, x, \eta)), x \in \pi\Phi^t\Lambda\}, \quad \eta \text{ fixed.}$$

This Lagrangian manifold is the image of the Lagrangian manifold $\Lambda_{0,\eta} = \{(y, \eta) : y \in \pi\Lambda\}$ by the geodesic flow Φ^t . The flow κ_s^t on M generated by X can be now identified with the geodesic flow restricted to $\Lambda_{s,\eta}$:

$$\kappa_s^t : \pi\Lambda_{s,\eta} \ni x \mapsto \pi\Phi^t(x, \partial_x\varphi(t, x, \eta)) \in \pi\Lambda_{t+s,\eta}.$$

The inverse flow $(\kappa_s^t)^{-1}$ will be denoted by κ_{s+t}^{-t} . Let us extend now the flow κ_s^t of X on M to the flow \mathcal{K}^t generated by the vector field $\mathcal{X} = \partial_t + X$ on $\mathbb{R} \times M$:

$$\mathcal{K}^t : \begin{cases} \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R} \times M \\ (s, x) \mapsto (s+t, \kappa_s^t(x)). \end{cases}$$

We then identify the functions a_k with Riemannian half-densities on $\mathbb{R} \times M$ – see [Dui, EvZw]:

$$a_k(t, x) \equiv a_k(t, x)\sqrt{dtd\operatorname{vol}(x)} = a_k(t, x)\sqrt{\bar{g}(x)}^{\frac{1}{2}}|dtdx|^{\frac{1}{2}} \in C^\infty(\mathbb{R} \times M, \Omega_{\frac{1}{2}}).$$

Since we have

$$\mathcal{L}_{\mathcal{X}}(a_k\sqrt{dtd\operatorname{vol}}) = (\mathcal{X}[a_k] + \frac{1}{2}a_k\operatorname{div}_g X)\sqrt{dtd\operatorname{vol}},$$

the 0-th transport equation takes the simple form of an ordinary differential equation:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{X}}(a_0\sqrt{dtd\operatorname{vol}}) + qa_0\sqrt{dtd\operatorname{vol}} = 0.$$

This is the same as

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{K}^t)^*a_0\sqrt{dtd\operatorname{vol}} = -qa_0\sqrt{dtd\operatorname{vol}},$$

which is solved by

$$a_0\sqrt{dtd\operatorname{vol}} = e^{-\int_0^t q \circ \mathcal{K}^{s-t} ds}(\mathcal{K}^{-t})^*a_0\sqrt{dtd\operatorname{vol}}.$$

We now have to make explicit the coordinates dependence, which yields to

$$a_0(t, x)\sqrt{\bar{g}(x)}^{\frac{1}{2}}|dxdt|^{\frac{1}{2}} = e^{-\int_0^t q \circ \kappa_t^{s-t}(x) ds} a_0(0, \kappa_t^{-t}(x))\sqrt{\bar{g}(\kappa_t^{-t}(x))}|\det d_x\kappa_t^{-t}|^{\frac{1}{2}}|dxdt|^{\frac{1}{2}}.$$

Consequently,

$$a_0(t, x) = e^{-\int_0^t q \circ \kappa_t^{s-t}(x) ds} a_0(0, \kappa_t^{-t}(x)) \frac{\sqrt{\bar{g}(\kappa_t^{-t}(x))}}{\sqrt{\bar{g}(x)}} |\det d_x\kappa_t^{-t}|^{\frac{1}{2}}.$$

Since

$$\kappa_t^{-t} : x \mapsto \pi\Phi^{-t}(x, \partial_x\varphi(t, x, \eta)) = \partial_\eta\varphi(t, x, \eta),$$

it is clear that $|\det d_x \kappa_t^{-t}(x)| = |\det \partial_{x\eta}^2 \varphi(t, x, \eta)|$. For convenience, we introduce the following operator \mathcal{T}_s^t transporting functions f on M with support inside $\pi\Lambda_{s,\eta}$ to functions on $\pi\Lambda_{t+s,\eta}$ while damping them along the trajectory :

$$\mathcal{T}_s^t(f)(x) = e^{-\int_0^t q \circ \kappa_{t+s}^{\sigma-t} d\sigma} f(\kappa_{t+s}^{-t}(x)) \frac{\sqrt{\bar{g}(\kappa_{t+s}^{-t}(x))}}{\sqrt{\bar{g}(x)}} |\det d_x \kappa_{t+s}^{-t}(x)|^{\frac{1}{2}}.$$

This operator plays a crucial role, since we have

$$(4.13) \quad a_0(t, \cdot) = \mathcal{T}_0^t(a_0(0, \cdot)) = \mathcal{T}_0^t \mathbf{F},$$

from which we see that $a_0(t, \cdot)$ is supported inside $\pi\Lambda_{t,\eta}$. By the Duhamel formula, the higher order terms can now be computed, they are given by

$$a_k(t, \cdot) = \int_0^t \mathcal{T}_s^{t-s} \left(\frac{i}{2} \Delta_g a_{k-1}(s) \right) ds.$$

The ansatz $b_{\hbar}(t, x)$ constructed so far satisfies the approximate equation

$$\frac{\partial b_{\hbar}}{\partial t} = (i\hbar\Delta_g - q)b_{\hbar} - \frac{i}{2}\hbar^K \iint e^{\frac{i}{\hbar}S(t,x,\eta,y)} w(y) \Delta_g a_{K-1}(t, x, y, \eta) dy d\eta.$$

The difference with the actual solution $\mathcal{U}^t \mathbf{P}$ is bounded by

$$\hbar^K t \|\Delta_g a_{K-1}\| \leq C t \hbar^K,$$

where $C = C^{(2K)}(M, \mathcal{V})$, so (4.11) is satisfied.

As noticed above, for time $t > 0$, the state $\mathcal{U}^t \mathbf{P} w_{\hbar}$ is a Lagrangian state, supported on the Lagrangian manifold $\Lambda(t) = \Phi^t \Lambda$. By hypothese, $\Lambda(t)$ is projectible, so we expect an asymptotic expansion for $b_{\hbar}(t, x)$, exactly as in (4.5). To this end, we now proceed to the stationary phase development of the oscillatory integral in (4.11). We set

$$I_k(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \iint e^{\frac{i}{\hbar}(\varphi(t,x,\eta) - \langle y, \eta \rangle + \psi(y))} a_k(t, x, y, \eta) w(y) dy d\eta.$$

The stationary points of the phase are given by

$$\begin{cases} \psi'(y) = \eta \\ \partial_{\eta} \varphi(t, x, \eta) = y, \end{cases}$$

for which there exists a solution $(y_c, \eta_c) \in \Lambda(0)$ in view of (4.10). Moreover, this solution is unique since $\Lambda(t)$ is projectible: $y_c = y_c(x) \in \pi\Lambda(0)$ is the unique point in $\pi\Lambda(0)$ such that $x = \pi\Phi^t(y_c, \psi'(y_c))$, and then $\eta_c = \psi'(y_c)$ is the unique vector allowing the point y_c to reach x in time t . The generating function for $\Lambda(t)$ we are looking for is then given by

$$\psi(t, x) = S(t, x, y_c(x), \eta_c(x)).$$

Applying now the stationary phase theorem for each I_k (see for instance [Hör], Theorem 7.7.6, or [NoZw], Lemma 4.1 for a similar computation), summing up the results and ordering the different terms according to their associated power of \hbar , we see that (4.14) holds with

$$w_0(t, x) = e^{\frac{i}{\hbar}\beta(t)} \frac{a_0(t, x, y_c, \eta_c)}{|\det(1 - \partial_{\eta\eta}^2 \varphi(t, x, \eta_c) \circ \psi''(y_c))|^{\frac{1}{2}}} w(y_c), \quad \beta \in C^\infty(\mathbb{R}),$$

and

$$(4.14) \quad w_k(t, x) = \sum_{i=0}^k A_{2i}(x, D_{x,\eta})(a_{k-i}(t, x, y, \eta) w(y))|_{(y,\eta)=(y_c,\eta_c)}.$$

A_{2i} denotes a differential operator of order $2i$, with coefficients depending smoothly on φ , ψ and their derivatives up to order $2i + 2$. This yields to the following bounds :

$$\|w_k\|_{C^\ell} \leq C_{\ell,k} \|w\|_{C^{\ell+2k}}$$

where $C_{\ell,k} = C^{(\ell,k)}(M, \mathcal{V})$. The remainder terms $r_K(t, x)$ is the sum of the remainders coming from the stationary phase development of I_k up to order $K - k$. Each remainder of order $K - k$ has a C^ℓ norm bounded by $C_{\ell,K-k} \hbar^{K-k} \|w\|_{C^{\ell+2(K-k)+d}}$ so we see that

$$\|r_K\|_{C^\ell} \leq C_{\ell,K} \|w\|_{C^{\ell+2K+d}}, \quad C = C^{(\ell,K)}(M, \mathcal{V}).$$

The principal symbol w_0 can also be interpreted more geometrically. As in Section 4.2, denote by $\phi_{\psi(t)}^{-t}$ the following map

$$\phi_{\psi(t)}^{-t} : \begin{cases} \pi\Lambda(t) \rightarrow \pi\Lambda(0) \\ x \mapsto \pi\Phi^{-t}(x, d_x\psi(t, x)). \end{cases}$$

Let us write the differential of $\Phi^t : (y, \eta) \mapsto (x, \xi)$ as $d\Phi^t(\delta y, \delta \eta) = (\delta x, \delta \xi)$. Using (4.10), we have

$$\begin{aligned} \delta y &= \partial_{x\eta}^2 \varphi \delta x + \partial_{\eta\eta}^2 \varphi \delta \eta \\ \delta \xi &= \partial_{xx}^2 \varphi \delta x + \partial_{x\eta}^2 \varphi \delta \eta, \end{aligned}$$

and then, since $\partial_{x\eta}^2 \varphi$ is invertible,

$$\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{x\eta}^2 \varphi^{-1} & -\partial_{x\eta}^2 \varphi^{-1} \partial_{\eta\eta}^2 \varphi \\ \partial_{xx}^2 \varphi \partial_{x\eta}^2 \varphi^{-1} & \partial_{x\eta}^2 \varphi - \partial_{xx}^2 \varphi \partial_{x\eta}^2 \varphi^{-1} \partial_{\eta\eta}^2 \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta y \\ \delta \eta \end{pmatrix}$$

If we restrict Φ^t to $\Lambda(0)$, we have $\delta \eta = \psi''(y) \delta y$, which means that for $x \in \pi\Lambda(t)$,

$$d\phi_{\psi(t)}^{-t}(x) = \partial_{x\eta}^2 \varphi(t, x, \eta_c) (1 - \partial_{\eta\eta}^2 \varphi(t, x, \eta_c) \psi''(y_c))^{-1}.$$

It follows from (4.14) that

$$\begin{aligned} w_0(t, x) &= e^{\frac{i}{\hbar}\beta(t)} w(y_c) F(y_c, \eta_c) e^{-\int_0^1 q(\phi_{\psi(t)}^{-t+s}(x)) ds} |\det d\phi_{\psi(t)}^{-t}(x)|^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\bar{g}(\phi_{\psi(t)}^{-t}(x))}{\bar{g}(x)}}^{\frac{1}{2}} \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}\beta(t)} w(y_c) F(y_c, \eta_c) e^{-\int_0^1 q(\phi_{\psi(t)}^{-t+s}(x)) ds} \left| \text{Jac}(d\phi_{\psi(t)}^{-t}(x)) \right|^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

where $\text{Jac}(f)$ denotes the Jacobian of $f : M \rightarrow M$ measured with respect to the Riemannian volume. \square

4.4. Ansatz for $n > 1$. In this paragraph, we construct by induction on n a Lagrangian state $b^n(t, x)$ supported on $\Lambda^n(t)$, in order to approximate $v^n(t, x)$ up to order $\hbar^{K-d/2}$.

Proposition 11. *There exists a sequence of functions*

$$\{b_k^n(t, x), S_n(t, x) : n \geq 1, k < K, x \in M, t \in [0, 1]\}$$

such that $S_n(t, x)$ is a generating function for $\Lambda^n(t)$ and $\text{supp } b_k^n(t, \cdot) \subset \pi\Lambda^n(t)$. Furthermore, we have

$$(4.15) \quad v^n(t, x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{d}{2}}} e^{i\frac{S_n(t,x)}{\hbar}} \sum_{k=0}^{K-1} \hbar^k b_k^n(t, x) + \hbar^{K-\frac{d}{2}} R_K^n(t, x)$$

where R_K^n satisfies

$$(4.16) \quad \|R_K^n\| \leq C_K(1 + C\hbar)^n \left(\sum_{i=2}^n \sum_{k=0}^{K-1} \|b_k^{i-1}(1, \cdot)\|_{C^{2(K-k)+d}} + C' \right).$$

The constants satisfy $C' = C^{(K)}(M, \chi)$, $C_K = C^{(K)}(M, \chi, \mathcal{V})$ and $C > 0$ is fixed.

Proof. The construction of the amplitudes b_k^n for all $k \geq 0$ is done by induction on n , following step by step the sequence (4.8). In Section 4.2 we obtained $\mathcal{U}^1 \delta_\chi$ as a projectible Lagrangian state:

$$\begin{aligned} v^0(1, x) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{d/2}} e^{i \frac{S_0(1, x)}{\hbar}} \sum_{k=0}^{K-1} \hbar^k b_k^0(1, x) + \hbar^{K-d/2} B_K^0(1, x) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi\hbar)^{d/2}} b^0(1, x) + \hbar^{K-d/2} R_K^0(1, x), \end{aligned}$$

and we know that $b^0(1, \cdot)$ satisfies the hypotheses of Proposition 10, which will be used to describe $\mathcal{U}^t \mathbf{P}_{\gamma_1} v^0(1, \cdot)$. More generally, suppose that the preceding step has lead for some $n \geq 1$ to

$$\begin{aligned} v^{n-1}(t, x) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{d}{2}}} e^{i \frac{S_{n-1}(t, x)}{\hbar}} \sum_{k=0}^{K-1} \hbar^k b_k^{n-1}(t, x) + \hbar^{K-d/2} R_K^{n-1}(t, x) \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{d}{2}}} b^{n-1}(t, x) + \hbar^{K-d/2} R_K^{n-1}(t, x) \end{aligned}$$

where $b^{n-1}(t, \cdot)$ is a Lagrangian state, supported on the Lagrangian manifold $\Lambda^{n-1}(t)$, and R_K^{n-1} is some remainder in $L^2(M)$. We now apply Proposition 10 to each Lagrangian state $e^{i \frac{1}{\hbar} S_{n-1}(1, x)} \hbar^k b_k^{n-1}(1, x)$ appearing in the definition of b^{n-1} . Because of the term \hbar^k , if we want an Ansatz as in (4.15), it is enough to describe $\mathcal{U}^t \mathbf{P}_{\gamma_n} v_k^{n-1}(1, \cdot)$ up to order $K - k$, which gives a remainder of order $C_{K-k} \hbar^{K-k} \|b_k^{n-1}(1, \cdot)\|_{C^{2(K-k)+d}}$. Grouping the terms corresponding to the same power of \hbar when applying Proposition 10 to each $(v_k^{n-1})_{0 \leq k < K-1}$ yields to

$$[\mathcal{U}^t \mathbf{P}_{\gamma_n} b^{n-1}](x) = e^{i \frac{1}{\hbar} S_n(t, x)} \sum_{k=0}^{K-1} \hbar^k b_k^n(t, x) + \hbar^K B_K^n(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} b^n(t, x) + \hbar^K B_K^n(t, x),$$

where $S_n(t, x)$ is a generating function of the Lagrangian manifold

$$\Lambda^n(t) = \Phi^t(\Lambda^{n-1}(1) \cap \mathbf{V}_{\gamma_n}).$$

The coefficients b_k^n are given by

$$(4.17) \quad b_k^n(t, x) = \sum_{i=0}^k \sum_{l=0}^{k-i} A_{2l} (a_{k-i-l}^{\gamma_n}(t, x, y, \eta) b_i^{n-1}(1, y))|_{(y, \eta) = (y_c, \eta_c)}$$

where $y_c = \phi_{S_n(t)}^{-t}(x)$, $\eta_c = d_y S_{n-1}(1, y_c)$. In particular, $b_0^n(t, x) = \mathcal{D}_n(t, x) b_0^{n-1}(1, y_c)$, with

$$(4.18) \quad \mathcal{D}_n(t, x) = e^{-\int_0^1 q(\phi_{S_n(t)}^{s-t}(x)) ds} \left| \text{Jac}(d\phi_{S_n(t)}^{-t}(x)) \right|^{\frac{1}{2}} e^{i \frac{1}{\hbar} \beta_n(t)} \mathbf{F}_{\gamma_n}(y_c, \eta_c)$$

for some $\beta_n(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$. The remainder B_K^n satisfies

$$(4.19) \quad \|B_K^n(t)\| \leq C_K \sum_{k=0}^{K-1} \|b_k^{n-1}(1, \cdot)\|_{C^{2(K-k)+d}}, \quad C_K = C^{(K)}(M, \chi, \mathcal{V}).$$

Hence, we end up with

$$\begin{aligned} v^n(1, x) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{d}{2}}} \left(e^{i\frac{S_n(1, x)}{\hbar}} \sum_{k=0}^{K-1} \hbar^k b_k^n(1, x) + \hbar^K (B_K^n(1, x) + \mathcal{U}^1 \mathcal{P}_{\gamma_1} B_K^{n-1}(1)) \right) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{d}{2}}} b^n(1, x) + \hbar^{K-d/2} R_K^n(1, x) \end{aligned}$$

where $R_K^n(1, x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} (B_K^n(1, x) + \mathcal{U}^1 \mathcal{P}_{\gamma_n} R_K^{n-1}(1, \cdot))$. Again, b^n satisfies the hypotheses of Proposition 10, so we can continue iteratively. To complete the proof, we now have to take all the remainders into account. From the discussion above, we get :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^t \mathcal{P}_{\gamma_n} v^{n-1}(1, \cdot) &= (2\pi\hbar)^{-\frac{d}{2}} \mathcal{U}^t \mathcal{P}_{\gamma_n} b^{n-1}(1, \cdot) + \hbar^{K-d/2} \mathcal{U}^t \mathcal{P}_{\gamma_n} (R_K^{n-1}(1, \cdot)) \\ &= (2\pi\hbar)^{-\frac{d}{2}} (b^n(t, \cdot) + \hbar^K B_K^n(t, \cdot)) + \hbar^{K-d/2} \mathcal{U}^t \mathcal{P}_{\gamma_n} (R_K^{n-1}(1, \cdot)) \\ &= (2\pi\hbar)^{-\frac{d}{2}} b^n(t, \cdot) + \hbar^{K-d/2} R_K^n(t, \cdot) \end{aligned}$$

where we defined $R_K^n = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} B_K^n + \mathcal{U}^t \mathcal{P}_{\gamma_n} (R_K^{n-1})$. Since $|\mathbb{F}_{\gamma_n}| \leq 1$, we have

$$\|\mathcal{U}^t \mathcal{P}_{\gamma_n}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq 1 + C\hbar, \quad C > 0.$$

This implies that $\|\mathcal{U}^t \mathcal{P}_{\gamma_n} (R_K^{n-1}(1, \cdot))\| \leq (1 + C\hbar) \|R_K^{n-1}(1, \cdot)\|$, and finally R_K^n satisfies

$$(4.20) \quad \|R_K^n\| \leq (1 + C\hbar)^n (\|B_K^n\| + \|B_K^{n-1}\| + \dots + \|B_K^1\| + \|B_K^0\|)$$

In view of (4.19) and (4.5), this concludes the proof. \square

Given $v^{n-1}(1, \cdot)$, we have then constructed $v^n(t, x)$ as in (4.15), but it remains to control the remainder R_K^n in L^2 norm : from (4.19) and (4.20), we see that it is crucial for this to estimate properly the C^ℓ norms of the coefficients b_k^j for $j \geq 1$ and $k \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket$.

Lemma 12. *Let $n \geq 1$, and define*

$$\mathcal{D}_n = \sup_{x \in \pi\Lambda^n(1)} \left| \prod_{i=0}^{n-1} \mathcal{D}_{n-i}(1, \phi_{S_n}^{-i}(x)) \right|, \quad \mathcal{D}_0 = 1.$$

If $x \in \pi\Lambda^n(1)$, the principal symbol b_0^n is given by

$$(4.21) \quad b_0^n(1, x) = \left(\prod_{j=0}^{n-1} \mathcal{D}_{n-j}(1, \phi_{S_n}^{-j}(x)) \right) b_0^0(1, \phi_{S_n}^{-n}(x)).$$

For $k \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket$, the functions b_k^n satisfy

$$(4.22) \quad \|b_k^n(1, \cdot)\|_{C^\ell} \leq C_{k, \ell} (n+1)^{3k+\ell} \mathcal{D}_n$$

where $C_{k, \ell} = C^{(\ell, k)}(M, \chi, \mathcal{V})$. It follows that

$$(4.23) \quad \|B_K^n(1, \cdot)\| \leq C_K n^{3K+d} \mathcal{D}_{n-1}$$

$$(4.24) \quad \|R_K^n(1)\| \leq C_K (1 + C\hbar)^n \sum_{j=1}^n j^{3K+d} \mathcal{D}_{j-1}$$

where $C > 0$ and $C_K = C^{(K)}(M, \chi, \mathcal{V})$. On the other hand, if $x \notin \pi\Lambda^n(1)$, we have $b_k^n(x) = 0$ for $k \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket$.

Proof. First, if $x \notin \pi\Lambda^n(1)$, then there is no $\rho \in \mathbf{V}_{\gamma_n}$ such that $\pi\Phi^1(\rho) = x$, and then $v^n(1, x) = \mathcal{O}(\hbar^\infty)$. In what follows, we then consider the case $x \in \pi\Lambda^n(1)$. We first see that (4.21) simply follows from (4.18) applied recursively. If $\rho_n = (x_n, \xi_n) \in \Lambda^n(1)$, we call $\rho_j = (x_j, \xi_j) = \Phi^{j-n}(\rho_n) \in \Lambda^j(1)$ if $j \geq 0$. In other words,

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad x_{j-1} = \phi_{S_j}^{-1}(x_j).$$

It will be useful to keep in mind the following sequence, which illustrates the backward trajectory of $\rho_n \in \Lambda^n(1)$ under Φ^{-k} , $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ and its projection on M :

$$\begin{array}{ccccccc} \rho_0 \in \Lambda^0(1) & \xleftarrow{\Phi^{-1}} & \rho_1 \in \Lambda^1(1) & \xleftarrow{\Phi^{-1}} & \dots & \xleftarrow{\Phi^{-1}} & \rho_{n-1} \in \Lambda^{n-1}(1) & \xleftarrow{\Phi^{-1}} & \rho_n \in \Lambda^n(1) \\ \pi \downarrow & & \pi \downarrow & & & & \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\ x_0 & \xleftarrow{\phi_{S_1}^{-1}} & x_1 & \xleftarrow{\phi_{S_2}^{-1}} & \dots & \xleftarrow{\phi_{S_{n-1}}^{-1}} & x_{n-1} & \xleftarrow{\phi_{S_n}^{-1}} & x_n \end{array}$$

We denote schematically the Jacobian matrix $d\phi_{S_j}^{-i} = \frac{\partial x_{j-i}}{\partial x_j}$ for $1 \leq i \leq j \leq n$. Since for any $E > 0$, the sphere bundle $T_z^*M \cap p^{-1}(E)$ is transverse to the stable direction [Kli], the Lagrangians $\Lambda^n \subset \Phi^n\Lambda^0$ converge exponentially fast to the weak unstable foliation as $n \rightarrow \infty$. This implies that $\Phi^t|_{\Lambda^0}$ is asymptotically expanding as $t \rightarrow \infty$, except in the flow direction. Hence, the inverse flow $\Phi^{-t}|_{\Lambda^n}$ acting on Λ^n and its projection $\phi_{S_n}^{-t}$ on M have a tangent map uniformly bounded with respect to n, t . As a result, the Jacobian matrices $\partial x_{j-i}/\partial x_j$ are uniformly bounded from above : for $1 \leq i \leq j \leq n$ there exists $C = C(M)$ independent of n such that

$$(4.25) \quad \left\| \frac{\partial x_{j-i}}{\partial x_j} \right\| \leq C.$$

It follows that if we denote $D_j = \sup_{x_j} \mathcal{D}_j(1, x_j)$, there exists $C = C(M) > 0$ such that

$$(4.26) \quad C^{-1} \leq D_j \leq C.$$

Note also that

$$\sup_{x \in \pi\Lambda^n(1)} \left| \prod_{j=0}^{n-1} \mathcal{D}_{n-j}(1, \phi_{S_n}^{-j}(x)) \right| = \prod_{j=0}^{n-1} D_{n-j} = \mathcal{D}_n.$$

We first establish the following crucial estimate :

Lemma 13. *Let $n \geq 1$, and $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. For every multi index α of length $|\alpha| \geq 2$, there exists a constant $C_\alpha > 0$ depending on M such that*

$$(4.27) \quad \left\| \frac{\partial^\alpha x_{n-k}}{\partial x_n^\alpha} \right\| \leq C_\alpha k^{\alpha-1}$$

Proof. We proceed by induction on k , from $k = 1$ to $k = n$. The case $k = 1$ is clear. Let us assume now that

$$\left\| \frac{\partial^\alpha x_{n-k'}}{\partial x_n^\alpha} \right\| \leq C_\alpha k'^{\alpha-1}, \quad k' \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$$

and let us show the bound for $k' = k$. For simplicity, we will denote

$$\partial_j^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^\alpha}{\partial x_j^\alpha}, \quad \partial^\alpha x_j = \frac{\partial^\alpha x_j}{\partial x_{j+1}^\alpha}.$$

In particular, $\|\partial^\alpha x_j\| \leq C_\alpha$. We also recall the Faà di Bruno formula : let Π be the set of partitions of the ensemble $\{1, \dots, |\alpha|\}$, and for $\pi \in \Pi$, write $\pi = \{B_1, \dots, B_k\}$ where B_i is some

subset of $\{1, \dots, |\alpha|\}$. Here $|\alpha| \geq k \geq 1$, and we denote $|\pi| = k$. For two smooth functions $g : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ and $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ such that $f \circ g$ is well defined, one has

$$(4.28) \quad \partial^\alpha f \circ g \equiv \sum_{\pi \in \Pi} \partial^{|\pi|} f(g) \prod_{B \in \pi} \partial^B g.$$

The term in the right hand side is written schematically, to indicates a sum of derivatives of f of order $|\pi|$, times a product of $|\pi|$ terms, each of them corresponding to derivatives of g of order $|B|$. It is important for our purpose to note that $\sum |B| = |\alpha|$. Continuing from theses remarks, we compute

$$\begin{aligned} X_k &\stackrel{\text{def}}{=} \partial_n^\alpha x_{n-k} = \partial x_{n-k} \partial_n^\alpha x_{n-k+1} \\ &+ \sum_{\pi \in \Pi, |\pi| > 1} \partial^{|\pi|} x_{n-k} \prod_{B \in \pi} \partial_n^B x_{n-k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \partial x_{n-k} X_{k-1} + Y_{k-1}. \end{aligned}$$

By the induction hypothesis,

$$(4.29) \quad \|Y_i\| \leq C_\alpha i^{\alpha-2}$$

since the partitions π involved in the sum contains at least two elements. Setting $M_{k-1} = \partial x_{n-k}$, we have

$$\begin{aligned} X_k &= M_{k-1} \dots M_1 X_1 + M_{k-2} \dots M_1 Y_1 + M_{k-3} \dots M_1 Y_2 \\ &+ \dots + M_1 Y_{k-1}. \end{aligned}$$

From the chain rule we have

$$\frac{\partial x_{j-i}}{\partial x_j} = \frac{\partial x_{j-i}}{\partial x_{j-i+1}} \dots \frac{\partial x_{j-1}}{\partial x_j},$$

and (4.25) yields to $\|M_{i-1} \dots M_1\| = \mathcal{O}(1)$ for $2 \leq i \leq k$. Adding up all the terms contributing to X_k and taking (4.29) into account yields to

$$\|X_k\| \leq C_\alpha (1 + 1^{\alpha-2} + 2^{\alpha-2} + \dots + (k-1)^{\alpha-2}) \leq C_\alpha k^{\alpha-1}$$

and the lemma is proved. \square

We now prove (4.22). For this, we will proceed in two steps. First, we show the bounds for the principal symbol b_0^n . Then, we treat the higher order terms $b_k^n, k \geq 1$ using the bounds on $\|b_0^n\|_{C^\ell}$ for any ℓ . For b_0^n , The C^0 norm estimate follows directly from (4.21). From now on, we denote for convenience

$$\mathcal{D}_0(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} b_0^0(1, x_0).$$

Computing

$$\partial_n^\ell b_0^n(x_n) = \partial_n^\ell (\mathcal{D}_n(x_n) \dots \mathcal{D}_1(x_1) \mathcal{D}_0(x_0)),$$

we will obtain a sum of terms, each of them of the form

$$M_{\alpha_n \dots \alpha_0} = \partial_n^{\alpha_n} \mathcal{D}_n \partial_n^{\alpha_{n-1}} \mathcal{D}_{n-1} \dots \partial_n^{\alpha_1} \mathcal{D}_1 \partial_n^{\alpha_0} \mathcal{D}_0,$$

with $\alpha_n + \dots + \alpha_0 = \ell$. Note that if ℓ is fixed with respect to n , most of the multi-indices α_i vanish when n becomes large : actually, at most $|\ell|$ are non-zero, and we will denote them by $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}, k \leq |\ell|$. Hence the above expression is made of long strings of \mathcal{D}_i , alternating with some derivative terms $\partial_n^{\alpha_i} \mathcal{D}_i$ which number depends only on ℓ . We can then write

$$(4.30) \quad \|M_{\alpha_n \dots \alpha_0}\|_{C^0} \leq \mathcal{D}_n \times \frac{\|\partial_n^{\alpha_{i_1}} \mathcal{D}_{i_1} \dots \partial_n^{\alpha_{i_{k-1}}} \mathcal{D}_{i_{k-1}} \partial_n^{\alpha_{i_k}} \mathcal{D}_{i_k}\|_{C^0}}{D_{i_1} \dots D_{i_k}}.$$

Let us examine each term $\partial_n^\alpha \mathcal{D}_i$ appearing in the right hand side individually. By the Faà di Bruno formula and Lemma 13, we have for $i \neq 0$

$$(4.31) \quad \partial_n^\alpha \mathcal{D}_i(x_i) = \sum_{\pi} \partial_i^{|\pi|} \mathcal{D}_i \prod_{B \in \pi} \partial_n^B x_i \leq C_\pi n^{\alpha - |\pi|} \leq C_\alpha n^{\alpha - 1}$$

where $C_\alpha = C^{(\ell, K)}(M, \chi, \mathcal{V})$. Of course, if $i = 0$, $\|\partial_0^\alpha \mathcal{D}_0(x_0)\|_{C^0} \leq C_\alpha \|\partial_0^\alpha b_0^0\|_{C^0}$ for some constant $C_\alpha > 0$. Now, for a fixed configuration of derivatives $\{\alpha\} = \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}\}$ we have to choose i_1, \dots, i_k indices among $n+1$ to form the right hand side in (4.30), and the number of such choices is at most of order $\mathcal{O}((n+1)^k)$. Hence,

$$(4.32) \quad \begin{aligned} \|\partial_n^\ell b_0^n\|_{C^0} &\leq \mathcal{D}_n \sum_{\{\alpha\}} \sum_{i_1, \dots, i_k} \frac{\|\partial_n^{\alpha_{i_1}} \mathcal{D}_{i_1} \dots \partial_n^{\alpha_{i_{k-1}}} \mathcal{D}_{i_{k-1}} \partial_n^{\alpha_{i_k}} \mathcal{D}_{i_k}\|_{C^0}}{D_{i_1} \dots D_{i_k}} \\ &\leq \mathcal{D}_n \sum_{\{\alpha\}} C_\alpha (n+1)^k (n+1)^{\alpha_1 - 1} \dots (n+1)^{\alpha_k - 1} \\ &\leq C_\ell \mathcal{D}_n (n+1)^\ell \end{aligned}$$

where $C_\ell = C^{(\ell)}(M, \chi, \mathcal{V})$. For higher order terms (b_k^n , $k > 0$), we remark from (4.17) that we can write

$$(4.33) \quad b_k^n(x_n) = \mathcal{D}_n(x_n) b_k^{n-1}(x_{n-1}) + \sum_{j=1}^k \sum_{|\alpha| \leq 2j} \Gamma_{j\alpha}^n(x_n) \partial_{n-1}^\alpha b_{k-j}^{n-1}(x_{n-1}).$$

The function $\Gamma_{j\alpha}^n$ can be expressed with the flow, the damping and the cutoff function F_{γ_n} . It follows that the norms $\|\Gamma_{j\alpha}^n\|_{C^\ell}$ are uniformly bounded with respect to n :

$$\|\Gamma_{j\alpha}^n\|_{C^\ell} = C^{(\ell, K)}(M, \chi, \mathcal{V}).$$

In order to show the bounds (4.22) for $k > 0$, we will proceed by induction on the index k . The case $k = 0$ has been treated above. Suppose now that for any ℓ and $k' \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ we have proven

$$\|\partial_n^\ell b_{k'}^n\|_{C^0} \leq C_\ell (n+1)^{3k'+\ell} \mathcal{D}_n, \quad C_\ell = C^{(\ell, K)}(M, \chi, \mathcal{V}).$$

As above, to treat the case $k' = k$, we begin by the situation where $\ell = 0$. To shorten the formulæ, we introduce for $1 \leq i \leq j \leq n$ the functions

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}^{i,k}(x_n) &= \sum_{j=1}^k \sum_{|\alpha| \leq 2j} \Gamma_{j\alpha}^i(x_i) \partial_{i-1}^\alpha b_{k-j}^{i-1}(x_{i-1}) \\ \mathbf{J}_i^j(x_n) &= \mathcal{D}_j(x_j) \mathcal{D}_{j-1}(x_{j-1}) \dots \mathcal{D}_i(x_i) \end{aligned}$$

where the x_i , $i \leq n$ have to be considered as functions of x_n , namely $x_i = \phi_{S_n}^{-n+i}(x_n)$. Iterating (4.33) further, we have :

$$(4.34) \quad \begin{aligned} b_k^n(x_n) &= \mathbf{J}_n^n b_k^{n-1}(x_{n-1}) + \mathbf{\Gamma}^{n,k} \\ &= \mathbf{J}_n^n (\mathbf{J}_{n-1}^{n-1} b_k^{n-2}(x_{n-2}) + \mathbf{\Gamma}^{n-1,k}) + \mathbf{\Gamma}^{n,k} \\ &= \mathbf{J}_{n-1}^n b_k^{n-2}(x_{n-1}) + \mathbf{J}_n^n \mathbf{\Gamma}^{n-1,k} + \mathbf{\Gamma}^{n,k} \\ &= \mathbf{J}_1^n b_k^0(x_0) + \mathbf{J}_2^n \mathbf{\Gamma}^{1,k} + \mathbf{J}_3^n \mathbf{\Gamma}^{2,k} + \dots + \mathbf{J}_n^n \mathbf{\Gamma}^{n-1,k} + \mathbf{\Gamma}^{n,k} \end{aligned}$$

By the induction hypothesis and (4.26), each term $\mathbf{\Gamma}^{i,k}$, $i > 0$ satisfies

$$\|\mathbf{\Gamma}^{n-i,k}\|_{C^0} \leq C_k (n-i)^{3k-1} \mathcal{D}_{n-i}$$

hence adding up all the terms we get

$$\|b_k^n\|_{C^0} \leq C_k \mathcal{D}_n(b_k^0(x_0)) + \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)^{3k-1} \leq C_k \mathcal{D}_n(n+1)^{3k}$$

and we obtain the bounds (4.22) for $\ell = 0$. To evaluate $\partial^\ell b_k^n$, $\ell > 1$, we start from the expression (4.34). We notice first that

$$\partial_n^\beta \mathbf{\Gamma}^{n-i,k} = \sum_{\beta_1+\beta_2=\beta} \sum_{j=1}^k \sum_{|\alpha| \leq 2j} (\partial_n^{\beta_1} \Gamma_{j\alpha}^{n-i}(x_{n-i})) (\partial_n^{\beta_2} \partial^\alpha b_{k-j}^{n-i-1}(x_{n-i-1})).$$

Using the Faà di Bruno formula and Lemma 13, we get

$$\|\partial_n^{\beta_1} \Gamma_{j\alpha}^{n-i,k}(x_{n-i})\|_{C^0} \leq C_{\beta_1} i^{\beta_1-1} \quad \text{and} \quad \|\partial_n^{\beta_2} \partial^\alpha b_{k-j}^{n-i-1}(x_{n-i-1})\|_{C^0} \leq C_{\beta_2} i^{3k-1+\beta_2},$$

and this implies

$$\|\partial_n^\beta \mathbf{\Gamma}^{n-i,k}\|_{C^0} \leq C_\beta i^{3k-1+\beta}.$$

Then, exactly the same strategy used to derive (4.32) shows that

$$\|\partial_n^\ell \mathbf{J}_{i+1}^n \mathbf{\Gamma}^{i,k}\|_{C^0} \leq C_\ell n^{3k-1+\ell}.$$

Using these estimates and (4.34) yields to

$$\|\partial_n^\ell b_k^n\|_{C^0} \leq C_\ell (n+1) n^{3k-1+\ell} \leq C_\ell (n+1)^{3k+\ell},$$

where the constant C_ℓ is such that $C_\ell = C^{(\ell,K)}(M, \chi, \mathcal{V})$.

□

4.5. The main estimate : proof of Proposition 5. As noted before, the Lagrangians Λ^n converge exponentially fast as $n \rightarrow \infty$ to the weak unstable foliation. This implies that for $x \in \pi \Lambda^j(1)$, the Jacobians $J_{S_j}(x) \stackrel{\text{def}}{=} |\det \phi_{S_j(1)}^{-1}(x)|$ satisfy

$$\forall j \geq 2, \forall (x, \xi) \in \Lambda^j(1), \left| \frac{J_{S_j}(x)}{J_{S^u(x,\xi)}(x)} - 1 \right| \leq C e^{-j/C}, \quad C = C(M) > 0.$$

Here, S^u generates the (Lagrangian) local weak instable manifold at point (x, ξ) . Moreover, these Jacobians decay exponentially with j as $j \rightarrow \infty$. This means that uniformly with respect to n ,

$$\prod_{j=0}^{n-1} J_{S_{n-j}}(\phi_{S_n}^{-j}(x)) \leq C(M) \prod_{j=0}^{n-1} J_{S^u(\Phi^{-j}(x,\xi))}(\phi_{S_n}^{-j}(x)).$$

The Jacobian $J_{S^u(x,\xi)}(x)$ measures the contraction of Φ^{-1} along the unstable subspace $E^u(\Phi^1(\rho))$, where $\Phi^1(\rho) = (x, \xi)$, and $x \in M$ serves as coordinates to compute this Jacobian (via the projection π). The unstable Jacobian $J^u(\rho) \stackrel{\text{def}}{=} |\det(d\Phi^{-1}|_{E^{u,0}(\Phi(\rho))})|$ defined in Section 2.1 express also this contraction, but in different coordinates: for n large enough, the above inequality can then be extended to

$$(4.35) \quad \prod_{j=0}^{n-1} J_{S_{n-j}}(\phi_{S_n}^{-j}(x)) \leq C \prod_{j=0}^{n-1} J_{S^u(\Phi^{-j}(x,\xi))}(\phi_{S_n}^{-j}(x)) \leq \tilde{C} \prod_{j=0}^{n-1} J^u(\Phi^{-j}(\rho)).$$

where C, \tilde{C} only depends on M . As noted above, because of the Anosov property of the geodesic flow, the above products decay exponentially with n . Together with the fact that the damping function is positive, it follows that the right hand side in (4.23) also decay

exponentially with n . Recall now that $1 \leq n \leq Nt_0$ and $N = T \log \hbar^{-1}$. Using (4.24), we then see that the remainders R_K^n in (4.15) are uniformly bounded : they satisfy

$$\|R_K^n\| \leq C_K, \quad C_K = C^{(K)}(M, \chi, \mathcal{V})$$

uniformly in n and z_0 , the point on which δ_{χ, z_0} was based. From the very construction of $b^n(t, x)$, we then have

$$(4.36) \quad \|\mathcal{U}^1 \mathbf{P}_{\gamma_n} \dots \mathcal{U}^1 \mathbf{P}_{\gamma_1} \mathcal{U}^1 \delta_\chi - \frac{1}{(2\pi\hbar)^{d/2}} b^n(1, \cdot)\| \leq C_K \hbar^{K-d/2}.$$

But the bounds on the symbols b_k^n , $k > 0$ given in Lemma 12 tells us that (4.36) also holds if we replace the full symbol b^n by the principal symbol b_0^n , provided \hbar is chosen small enough – say $\hbar \leq \hbar_0(\varepsilon)$. Hence, for $\hbar \leq \hbar_0$,

$$\|\mathcal{U}^1 \mathbf{P}_{\gamma_n} \dots \mathcal{U}^1 \mathbf{P}_{\gamma_1} \mathcal{U}^1 \delta_\chi\| \leq (2\pi\hbar)^{-\frac{d}{2}} \|b_0^n(1, \cdot)\| + C_K \hbar^{K-d/2}.$$

Now, using (4.21), (4.35) and the fact that $|\mathbf{F}_\gamma| \leq 1$, we conclude that for a^u as in (1.8),

$$\|b_0^n(1, x)\| \leq C e^{n\mathcal{O}(\hbar)} \sup_{x \in \pi\Lambda^n(1)} \exp \sum_{j=1}^n a^u \circ \Phi^{-j}(x, d_x S_n(1, x))$$

Here, $C = C(M)$ depends only on the manifold M . Let us consider now the particular case $n = Nt_0$ with $N = T \log \hbar^{-1}$. It follows immediately that

$$\sup_{x \in \pi\Lambda^{Nt_0}(1)} \exp \sum_{j=1}^{Nt_0} a^u \circ \Phi^{-j}(x, d_x S_n(1, x)) \leq \prod_{k=1}^N \sup_{\rho \in \mathcal{W}_{\beta_k}} \left(\exp \sum_{j=0}^{t_0-1} a^u \circ \Phi^j(\rho) \right).$$

By the superposition principle already mentioned in (4.4), we then obtain for some $C = C(M) > 0$ depending only on M :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U} \mathbf{P}_{\gamma_{Nt_0}} \dots \mathcal{U} \mathbf{P}_{\gamma_1} \mathcal{U}^1 \text{Op}_\hbar(\chi)\| &\leq C \sum_{\ell} \sup_{z_0} \|\mathcal{U} \mathbf{P}_{\gamma_{Nt_0}} \dots \mathbf{P}_{\gamma_1} \mathcal{U}^1 \delta_{z, \alpha_0}^\ell\| \\ &\leq C \hbar^{-d/2} \|b_0^n\| + C_K \hbar^{K-d/2} \\ &\leq C \hbar^{-\frac{d}{2}} \prod_{k=1}^N \sup_{\rho \in \mathcal{W}_{\beta_k}} \left(\exp \sum_{j=0}^{t_0-1} a^u \circ \Phi^j(\rho) \right) \end{aligned}$$

To get the last line, we have noticed that K can be chosen arbitrary large: since $n \leq Tt_0 \log \hbar^{-1}$, we see that for \hbar small enough, the main term in the right hand side of the second line is larger than the remainder $C_K \hbar^{K-d/2}$, and $e^{Nt_0\mathcal{O}(\hbar)} = \mathcal{O}(1)$. This completes the proof of Proposition 5.

APPENDIX A. SEMICLASSICAL ANALYSIS ON COMPACT MANIFOLDS

In this appendix we gather standard notions of pseudodifferential calculus on a compact, d dimensional manifold M endowed with a Riemannian structure coming from a metric g . As usual, M is equipped with an atlas $\{f_\ell, V_\ell\}$, where $\{V_\ell\}$ is an open cover of M and each f_ℓ is a diffeomorphism from V_ℓ to a bounded open set $W_\ell \subset \mathbb{R}^d$. Functions on \mathbb{R}^d can be pulled back via $f_\ell^* : C^\infty(W_\ell) \rightarrow C^\infty(V_\ell)$. The canonical lift of f_ℓ between T^*V_ℓ and T^*W_ℓ is denoted by \tilde{f}_ℓ :

$$(x, \xi) \in T^*V_\ell \mapsto \tilde{f}_\ell(x, \xi) = (f_\ell(x), (Df_\ell(x)^{-1})^T \xi) \in T^*W_\ell,$$

where A^T denotes the transpose of A . Its corresponding pull-back will be denoted by $\tilde{f}_\ell^* : C^\infty(T^*W_\ell) \rightarrow C^\infty(T^*V_\ell)$. A smooth partition of unity adapted to the cover $\{V_\ell\}$ is a set of functions $\phi_\ell \in C_c^\infty(V_\ell)$ such that $\sum_\ell \phi_\ell = 1$ on M .

Any observable (i.e. a function $a \in C^\infty(T^*M)$) can now be split into $a = \sum_\ell a_\ell$ where $a_\ell = \phi_\ell a$, and each term pushed to $\tilde{a}_\ell = (\tilde{f}_\ell^{-1})^* a_\ell \in C^\infty(T^*W_\ell)$. If a belongs to a standard class of symbols, for instance

$$a \in S^{m,k} = S^k(\langle \xi \rangle^m) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ a = a_\hbar \in C^\infty(M), |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a| \leq C_{\alpha,\beta} \hbar^{-k} \langle \xi \rangle^{m-|\beta|} \right\},$$

each a_ℓ can be Weyl-quantized into a pseudodifferential operator on $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ via the formula

$$\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \text{Op}_\hbar^w(\tilde{a}_\ell)u(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int e^{\frac{i}{\hbar}\langle x-y, \xi \rangle} \tilde{a}_\ell\left(\frac{x+y}{2}, \xi; \hbar\right) u(y) dy d\xi$$

To pull-back this operator on $C^\infty(V_\ell)$, one first takes another smooth cutoff $\psi_\ell \in C_c^\infty(V_\ell)$ such that $\psi = 1$ in a neighbourhood of $\text{supp } \phi_\ell$. The quantization of $a \in S^{m,k}$ is finally defined by gluing local quantizations together, yielding to

$$\forall u \in C^\infty(M), \text{Op}_\hbar(a)u = \sum_\ell \psi_\ell \times f_\ell^* \circ \text{Op}_\hbar^w(\tilde{a}_\ell) \circ (f_\ell^{-1})^*(\psi_\ell u)$$

The space of pseudodifferential operators obtained from $S^{k,m}$ by this quantization will be denoted by $\Psi^{m,k}$. Although this quantization depends on the cutoffs, the principal symbol map $\sigma : \Psi^{m,k} \rightarrow S^{m,k}/S^{m,k-1}$ is intrinsically defined and do not depend on the choice of coordinates. The residual class is made of operators in the space $\Psi^{m,-\infty}$. As an example, the (semiclassical) Laplacian $-\hbar^2 \Delta_g \in \Psi^{0,2}$ is a pseudodifferential operator, and its principal symbol is given by $\sigma(-\hbar^2 \Delta_g) = \|\xi\|_g^2 = g_x(\xi, \xi) \in S^{2,0}$.

In this article, we are concerned with a purely semiclassical theory and then deal only with compact subsets of T^*M . If $A \in \Psi^{m,k}$, we will denote by $\text{WF}_\hbar(A)$ the semiclassical wave front set of A . A point $\rho \in T^*M$ belongs to $\text{WF}_\hbar(A)$ if for some choice of local coordinates near the projection of ρ , the full symbol of A is in the class $S^{m,-\infty}$. $\text{WF}_\hbar(A)$ is a closed subset of T^*M , and $\text{WF}_\hbar(AB) \subset \text{WF}_\hbar(A) \cup \text{WF}_\hbar(B)$. In particular, if $\text{WF}_\hbar(A) = \emptyset$, then A is a negligible operator, i.e. $A \in \Psi^{m,-\infty}$. If $\Psi \in L^2(M)$, we also define the semiclassical wave front set of Ψ by :

$$\text{WF}_\hbar(\Psi) = \{(x, \xi) : \exists a \in S^{m,0}, a(x, \xi) \neq 0, \|\text{Op}_\hbar(a)\Psi\|_{L^2(M)} = \mathcal{O}(\hbar^\infty)\}^c$$

where the superscript c indicates the complementary set. We will often make use of the following fundamental propagation property : if U^t is a Fourier integral operator associated to a symplectic diffeomorphism $\Phi^t : T^*M \rightarrow T^*M$, then

$$\text{WF}_\hbar(U^t \Psi) = \Phi^t(\text{WF}_\hbar(\Psi)).$$

REFERENCES

- [Ana1] N. Anantharaman, *Entropy and the localization of eigenfunctions*, Ann. of Math. **168** (2008), No. 2, p. 435–475.
- [Ana2] N. Anantharaman, arXiv:0904.1736.
- [AnNo] N. Anantharaman and S. Nonnenmacher, *Half delocalization of eigenfunctions of the Laplacian on an Anosov manifold*, Ann. Inst. Fourier **57** (2007), No. 7, p. 2465–2523.
- [Ano] D. V. Anosov, *Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature*. Trudy Mat. Inst. Steklov. **90** (1967).
- [AsLe] M. Asch and G. Lebeau, *The spectrum of the damped wave operator for a bounded domain in \mathbb{R}^2* , Experimental math. **12** (2003), p. 227–241.

- [BLR] C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch, *Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary*, SIAM J. Control and Optimization **30** (1992), No 5, p. 1024–1065.
- [Chr] H. Christianson, *Semiclassical non-concentration near hyperbolic orbits, Corrigendum*, J. Funct. Anal. **246**, No. 2 (2007), p. 145–195.
- [CoZu] S. Cox and E. Zuazua, *The rate at which the energy decays in a damped string, C.P.D.E.; Estimations sur le taux de décroissance exponentielle de l'énergie dans l'équation d'ondes*, Note C.R.A.S. Paris, **317** (1993), p. 249–254.
- [Dui] J. J. Duistermaat, *Fourier Integral Operators*, Progress in Mathematics **130** (1996), Birkhäuser.
- [EvZw] L.C. Evans and M. Zworski, <http://math.berkeley.edu/~zworski/>
- [GoKr] I. C. Gohberg and M.G. Krein, *Introduction to the theory of linear non selfadjoint operators*, Translation of Mathematical Monograph **18**, Amer. Math. Soc. (1969).
- [Hit] M. Hitrik, *Eigenfrequencies and expansions for damped wave equations*, Meth. Appl. Anal. **10**, No 4 (2003), p. 1–22.
- [Hör] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, Vol. I, II, Springer Verlag, Berlin, 1983.
- [Kli] W.P.A. Klingenberg, *Riemannian manifolds with geodesic flows of Anosov type*, Ann. of Math. **99**, No. 2 (1974), p. 1–13.
- [Leb] G. Lebeau, *Équation des ondes amorties*. Algebraic and geometric methods in mathematical physics (Kaciveli, 1993), 73–109, Math. Phys. Stud., **19**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996.
- [MaMa] A.S. Markus and V.I. Matsaev, *Comparison theorems for spectra of linear operators and spectral asymptotics*, Trudy. Moskov. Mat. Obshch. **45** (1982), 133–181.
- [NoZw] S. Nonnenmacher and M. Zworski, *Quantum decay rates in chaotic scattering*, arXiv:0706.3242, to appear in Acta Math.
- [NoZw2] S. Nonnenmacher and M. Zworski, *Semiclassical resolvent estimates in chaotic scattering*, arXiv:0904.2986v2.
- [RaTa] J. Rauch and M. Taylor, *Decay of solutions to nondissipative hyperbolic systems on compact manifolds*, CPAM **28** (1975), p. 501–523.
- [Sjö] J. Sjöstrand, *Asymptotic distribution of eigenfrequencies for damped wave equations*. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **36** (2000), No. 5, p. 573–611.
- [Wal] P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*, Graduate Texts in Mathematics **79** (1975), Springer.

ACKNOWLEDGEMENTS

I am very grateful to Stéphane Nonnenmacher for numerous helpful discussions on the subject of the present paper. I would also like to thank sincerely Maciej Zworski for interesting suggestions, and the UC Berkeley for its hospitality during March and April 2008.

INSTITUT DE PHYSIQUE THÉORIQUE, CEA SACLAY, 91191 GIF-SUR-YVETTE, FRANCE
E-mail address: emmanuel.schenck@cea.fr

Bibliographie

- [AL03] M. ASCH et G. LEBEAU – « The spectrum of the damped wave operator for a bounded domain in \mathbb{R}^2 », *Experimental math.* **12** (2003), p. 227–241.
- [AN07] N. ANANTHARAMAN et S. NONNENMACHER – « Half delocalization of eigenfunctions of the laplacian on an anosov manifold », *Ann. Inst. Fourier* **57** (2007), no. 7, p. 2465–2523.
- [Ana08] N. ANANTHARAMAN – « Entropy and the localization of eigenfunctions », *Ann. of Math.* **168** (2008), no. 2, p. 435–475.
- [Ana09] — , « Spectral deviations for the damped wave equation », *arXiv :0904.1736* (2009).
- [Ano67] D. V. ANOSOV – « Geodesic flows on closed riemannian manifolds of negative curvature », *Trudy Mat. Inst. Steklov* **90** (1967).
- [Bér77] P. BÉRARD – « On the wave equation on a compact manifold without conjugate points », *Math. Zeitschrift* **155** (1977), p. 249–276.
- [BB96] A. BOUZOUINA et S. D. BIÈVRE – « Equipartition of the eigenfunctions of quantized ergodic maps on the torus », *Comm. Math. Phys.* **178** (1996), p. 83–105.
- [BC71] E. BALSLEV et J. COMBES – « Spectral properties of many-body schrodinger operators with dilatation-analytic interactions », *Comm. Math. Phys.* **22** (1971), p. 280.
- [BdB98] A. BOUZOUINA et S. DE BIÈVRE – « équidistribution des valeurs propres et ergodicité semi-classique de symplectomorphismes du tore quantifiés », *C. R. Acad. Sci. Paris Série I* **326** (1998), p. 1021–1024.
- [BGS84] O. BOHIGAS, M. GIANNONI et C. SCHMIDT – « Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws », *Phys. Rev. Lett.* **52** (1984), p. 1–4.
- [BH06] N. BURQ et M. HITRIK – « Energy decay for damped wave equations on partially rectangular domains », *arXiv :0601195v1*, 2006.
- [BK95] P. BOASMAN et J. KEATING – « Semiclassical asymptotics of perturbed cat maps », *Proc. R. Soc. Math. & Phys. Sc.* **449** (1995), no. 1937, p. 629–653.

- [BLR92] C. BARDOS, G. LEBEAU et J. RAUCH – « Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary », *SIAM J. Control and Optimization* **30** (1992), no. 5, p. 1024–1065.
- [Bow75] R. BOWEN – *Equilibrium states and the ergodic theory of anosov diffeomorphisms*, Lect. Notes in Math., vol. 470, Springer, 1975.
- [BR75] R. BOWEN et D. RUELLE – « The ergodic theory of axiom a flows », *Invent. Math.* **29** (1975), p. 181–202.
- [BR02] A. BOUZOUINA et D. ROBERT – « Uniform semiclassical estimates for the propagation of quantum observables », *Duke Math. J.* **111** (2002), no. 2, p. 223–252.
- [Bur98] N. BURQ – « Décroissance de l'énergie locale de l'équation des ondes pour le problème extérieur et absence de résonance au voisinage du réel », *Acta Math.* **180** (1998), p. 1–29.
- [BZ01] N. BURQ et M. ZWORSKI – « Resonance expansions in semi-classical propagation », *Comm. Math. Phys.* **223** (2001), no. 1, p. 1–12.
- [Chr07] H. CHRISTIANSON – « Corrigendum to semiclassical non-concentration near hyperbolic orbits », *J. Funct. Anal.* **246** (2007), no. 2, p. 145–195.
- [DBD⁺08] R. DUBERTRAND, E. BOGOMOLNY, N. DJELLALI, M. LEBENTAL et C. SCHMIT – « Circular dielectric cavity and its deformations », *Phys. Rev. A* **77** (2008), no. 1, p. 013804.
- [DG75] J. DUISTERMAAT et V. GUILLEMIN – « The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics », *Invent. Math.* **29** (1975), p. 39–79.
- [DH72] J. DUISTERMAAT et L. HÖRMANDER – « Fourier integral operators. ii », *Acta Math.* **128** (1972), no. 1, p. 183–269.
- [DS99] M. DIMASSI et J. SJÖSTRAND – *Spectral asymptotics in the semi-classical limit*, Cambridge University Press, 1999.
- [Dui96] J. DUISTERMAAT – *Fourier integral operators*, Progress in Mathematics, vol. 130, Birkhäuser, 1996.
- [CdV80] Y. COLIN DE VERDIÈRE – « Spectre conjoint d'opérateurs différentiels qui commutent ii : le cas intégrable », *Math. Zeitschrift* **171** (1980), p. 51–73.
- [CdV85] — , « Ergodicité et fonctions propres du laplacien », *Comm. Math. Phys.* **102** (1985), p. 497.
- [EG03] M. D. ESPOSTI et S. GRAFFI (éds.) – *The mathematical aspects of quantum maps*, Springer, 2003.
- [Ein17] A. EINSTEIN – « Zum quantensatz from Sommerfeld and Epstein », *Verh. Deutsch. Phys. Ges.* **19** (1917), p. 82–92.
- [ET05] M. EMBREE et L. TREFETHEN – *Spectra and pseudospectra, the behaviour of non-normal matrices and operators*, Princeton university press, 2005.
- [EZ] L. EVANS et M. ZWORSKI,
<http://math.berkeley.edu/~zworski/seminclassical.pdf>

- [FNW06] A. FANNJIANG, S. NONNENMACHER et L. WOLOWSKI – « Relaxation time for quantized toral maps », *Ann. Henri Poincaré* **7** (2006), no. 1, p. 161–198.
- [GCN⁺98] C. GMACHL, F. CAPASSO, E. NARIMANOV, J. NOCKEL, A. STONE, J. FAIST, D. SIVCO et A. CHO – « High-power directional emission from microlasers with chaotic resonators », *Science* **280** (1998), p. 1556.
- [GHL80] S. GALLOT, D. HULIN et J. LAFONTAINE – *Riemannian geometry*, 3 éd., Springer, 1980.
- [GK69] I. C. GOHBERG et M. KREIN – *Introduction to the theory of linear non selfadjoint operators*, Translation of Mathematical Monograph, vol. 18, Amer. Math. Soc., 1969.
- [GR89a] P. GASPARD et S. RICE – « Semiclassical quantization of the scattering from a classically chaotic repeller », *J. Chem. Phys.* **90** (1989), no. 4, p. 2242.
- [GR89b] P. GASPARD et S. RICE – « Scattering from a classically chaotic repeller », *J. Chem. Phys.* **90** (1989), no. 4, p. 2225.
- [GS94] A. GRIGIS et J. SJÖSTRAND – *Microlocal analysis for differential operators*, Cambridge University Press, 1994.
- [Gut71] M. GUTZWILLER – « Periodic orbits and classical quantizations conditions », *J. Math. Phys.* **12** (1971), p. 343–358.
- [GZ97] L. GUILLOPÉ et M. ZWORSKI – « Scattering asymptotics on riemann surfaces », *Ann. of Math.* **145** (1997), p. 597–660.
- [Hör83] L. HÖRMANDER – *The analysis of linear partial differential operators*, Grundlehren, vol. I-IV, Springer, 1983.
- [Hit03] M. HITRIK – « Eigenfrequencies and expansions for damped wave equations », *Meth. Appl. Anal.* **10** (2003), no. 4, p. 1–22.
- [HMA⁺07] S. HEUSLER, S. MÜLLER, A. ALTLAND, P. BRAUN et F. HAAKE – « Periodic orbit theory of level correlations », *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007), p. 144103.
- [HS86] B. HELFFER et J. SJÖSTRAND – « Résonances en limite semi-classique », *Mém. Soc. Math. France* **114** (1986), no. 3.
- [Ika88] M. IKAWA – « Decay of solutions of the wave-equation in the exterior of several convex-bodies », *Ann Inst. Fourier* **38** (1988), p. 113.
- [Kön86] H. KÖNIG – *Eigenvalues distribution for compact operators*, Birkäuser, 1986.
- [KH95] A. KATOK et B. HASSELBLADT – *Introduction to the theory of modern dynamical systems*, Cambridge University Press, 1995.
- [Kli74] W. KLINGENBERG – « Riemannian manifolds with geodesic flows of anosov type », *Ann of Math.* **99** (1974), no. 2, p. 1–13.
- [KM07] J. KEATING et S. MÜLLER – « Resummation and the semiclassical theory of spectral statistics », *Proc. R. Soc. London A* **463** (2007), p. 3241–3250.

- [KMR91] J. KEATING, F. MEZZADRI et J. ROBBINS – « Quantum boundary conditions for torus maps », *Nonlinearity* **12** (1991), p. 579–591.
- [KNPS06] J. KEATING, M. NOVAES, S. PRADO et M. SIEBER – « Semiclassical structure of chaotic resonance eigenfunctions », *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006), p. 150406.
- [KNS08] J. P. KEATING, M. NOVAES et H. SCHOMERUS – « Model for chaotic dielectric microresonators », *Phys. Rev. A* **77** (2008), no. 1, p. 013834.
- [KSW05] U. KUHL, H. STÖCKMAN et R. WEAVER – « Classical wave experiments on chaotic scattering », *J. Phys. A* **38** (2005), p. 10433.
- [KT95] H. KOCH et D. TATARU – « On the spectrum of hyperbolic semigroups », *Comm. Part. Diff. Eq.* **20** (1995), no. 5-6, p. 901–937.
- [Leb93] G. LEBEAU – *Équation des ondes amorties*, Algebraic and geometric methods in mathematical physics, vol. 19, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993.
- [Ler09] N. LERNER – *Metrics on the Phase Space and Non-Selfadjoint Operators* <http://people.math.jussieu.fr/lerner/index.pse.html>
- [Liv96] C. LIVERANI – *Central limit theorem for deterministic systems*, Pitman Res. Notes Math. Ser., 1996.
- [LLZ⁺07] M. LEBENTAL, J.-S. LAURET, J. ZYSS, C. SCHMIT et E. BOGOMOLNY – « Directional emission of stadium-shaped micro-lasers », *Phys. Rev. A* **75** (2007), p. 033806.
- [LRR⁺04] S. LEE, S. RIM, J. RYU, T. KWON, M. CHOI et C. KIM – « Quasiscattered resonances in a spiral-shaped microcavity », *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004), p. 164102.
- [LSZ03] W. T. LU, S. SRIDHAR et M. ZWORSKI – « Fractal weyl laws for chaotic open systems », *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003), no. 15, p. 154101.
- [LW91] C. LEWENKOPF et H.-A. WEIDENMÜLLER – « Stochastic versus semiclassical approach to quantum chaotic scattering », *Ann. Phys.* **212** (1991), no. 1, p. 53.
- [Mar02] A. MARTINEZ – *An introduction to semiclassical and microlocal analysis*, Universitext, Springer, 2002.
- [MM82] A. MARKUS et V. MATSAEV – « Comparison theorems for spectra of linear operators and spectral asymptotics », *Trudy. Moskov. Mat. Obshch.* **45** (1982), p. 133–181.
- [MO05] J. MARKLOF et S. O’KEEFE – « Weyl’s law and quantum ergodicity for maps with divided phase space », *Nonlinearity* **18** (2005), p. 277–304.
- [Mol68] P. MOLDAUER – « Resonance widths and spacings - their averages and distributions », *Phys. Rev.* **171** (1968), p. 1164.
- [NR07] S. NONNENMACHER et M. RUBIN – « Resonant eigenstates in quantum chaotic scattering », *Nonlinearity* **20** (2007), p. 1387.
- [NZ08] S. NONNENMACHER et E. SCHENCK – « Resonance distribution in open quantum chaotic systems », *Phys. Rev. E* **78** (2008), p. 045202. Voir Chapitre 6.

- [NZ07a] S. NONNENMACHER et M. ZWORSKI – « Quantum decay rates in chaotic scattering », *À paraître dans Acta. Math.*
- [NZ07b] — , « Semiclassical resolvent estimates in chaotic scattering », *À paraître dans A.M.R.X.*
- [NZ07c] — , « Distribution of resonances for open quantum maps », *Comm. Math. Phys.* **269** (2007), p. 311–365.
- [OP89] S. OREY et S. PELIKAN – « Deviations of trajectories averages and the defect in Pesin’s formula for Anosov diffeomorphisms », *Trans. Amer. Math. Soc.* **315** (1989), no. 2, p. 741–753.
- [Paz83] A. PAZY – *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Appl. Math. Sci., vol. 44, Springer, 1983.
- [PP90] W. PARRY et M. POLLICOTT – *Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics*, Astérisque, vol. 187-188, Soc. Math. de France, 1990.
- [PS01] Y. B. PESIN et V. SADOVSKAYA – « Multifractal analysis and conformal axiom a flows », *Comm. Math. Phys.* **216** (2001), p. 277–312.
- [RBY08] L. REY-BELLET et L.-S. YOUNG – « Large deviations in non-uniformly hyperbolic dynamical systems », *Erg. Th. & Dynam. Sys.* **28** (2008), p. 587–612.
- [RT75] J. RAUCH et M. TAYLOR – « Decay of solutions to nondissipative hyperbolic systems on compact manifolds », *Comm. in Pure and Appl. Anal.* **28** (1975), p. 501–523.
- [Rue04] D. RUELLE – *Thermodynamic formalism : The mathematical structure of equilibrium statistical mechanics*, 2 éd., Cambridge University Press, 2004.
- [Rug07] R. RUGGIERO – « Dynamics and global geometry of manifolds without conjugate points », *Ensaïos Matematicos* **12** (2007), p. 1–181.
- [Sch09a] E. SCHENCK – « Energy decay for the damped wave equation under a pressure condition », arXiv :0909.2093v1. Voir Chapitre 6.
- [Sch09b] — , « Weyl laws for partially open quantum maps », *Ann. Henri Poincaré* **10** (2009), p. 711–747. Voir Chapitre 6.
- [Sch01] R. SCHUBERT – « Semiclassical localization in phase space », Thèse de doctorat, Univ. Ulm, 2001.
- [Sjö90a] J. SJÖSTRAND – « Geometric bounds on the density of resonances for semiclassical problems », *Duke Math. J.* **60** (1990), p. 1–57.
- [SJ90b] H.-J. STÖCKMANN et J. STEIN – « Quantum chaos in billiards studied by microwave-absorption », *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990), p. 2215.
- [Sjö96] J. SJÖSTRAND – « Asymptotic distribution of resonances for strictly convex analytic obstacles », *Can. J. Math.* **48** (1996), no. 2, p. 397–447.
- [Sjö00] — , « Asymptotic distribution of eigenfrequencies for damped wave equations », *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **36** (2000), no. 5, p. 573–611.

- [ST04] H. SCHOMERUS et J. TWORZYDŁO – « Quantum-to-classical crossover of quasi-bound states in open quantum systems », *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004), p. 154102.
- [SZ99] J. SJÖSTRAND et M. ZWORSKI – « Asymptotic distribution of resonances for convex obstacles », *Acta Math.* **183** (1999), p. 191–253.
- [SZ02] — , « Quantum monodromy and semi-classical trace formulæ », *J. Math. Pures et Appl.* **81** (2002), p. 1–33.
- [SZ07] — , « Fractal upper bounds on the density of semiclassical resonances », *Duke Math. J.* **137** (2007), p. 381–459.
- [Šni74] A. ŠNIREL'MAN – « Ergodic properties of eigenfunctions », *Usp. Mat. Nauk.* **29** (1974), no. 6, p. 181–182.
- [Wal75] P. WALTERS – *An introduction to ergodic theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 79, Springer, 1975.
- [Zel97] S. ZELDITCH – « Index and dynamics of quantized contact transformations », *Ann Inst. Fourier* **47** (1997), no. 1, p. 305–363.