UNIVERSITÉ PARIS 6 - PIERRE ET MARIE CURIE

et

INSTITUT DE PHYSIQUE THÉORIQUE - CEA/SACLAY

Thèse de doctorat

Spécialité

Physique Théorique

présentée par

Guillaume BEUF

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Paris 6

Sujet de la thèse :

Contributions à l'étude des interactions fortes à haute énergie et haute densité

Soutenue le 26 juin 2009 devant le jury composé de :

Ian BALITSKY,	Rapporteur,
Andrzej BIAŁAS,	Examinateur,
Yuri DOKSHITZER,	Examinateur,
Edmond IANCU,	Examinateur,
Alfred MUELLER,	Rapporteur,
Robi PESCHANSKI,	Directeur de thèse,
Jean-Bernard ZUBER,	Président du jury.

UNIVERSITÉ PARIS 6 - PIERRE ET MARIE CURIE

et

INSTITUT DE PHYSIQUE THÉORIQUE - CEA/SACLAY

Thèse de doctorat

Spécialité

Physique Théorique

présentée par

Guillaume BEUF

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Paris 6

Sujet de la thèse :

Contributions à l'étude des interactions fortes à haute énergie et haute densité

Soutenue le 26 juin 2009 devant le jury composé de :

Ian BALITSKY,	Rapporteur,
Andrzej BIAŁAS,	Examinateur,
Yuri DOKSHITZER,	Examinateur,
Edmond IANCU,	Examinateur,
Alfred MUELLER,	Rapporteur,
Robi PESCHANSKI,	Directeur de thèse,
Jean-Bernard ZUBER,	Président du jury.

Contributions à l'étude des interactions fortes à haute énergie et haute densité

Résumé :

En Chromodynamique Quantique (QCD), des effets de haute densité apparaissent non seulement lors des collisions de gros objets comme des noyaux, mais aussi dans la limite de haute énergie, pour des collisions de hadrons quelconques. Dans cette limite, la fonction d'onde des hadrons entrant en collision contient de plus en plus de gluons mous. A partir d'une certaine énergie, ces gluons commencent à former un système dense, et suivent une dynamique non-linéaire. On dit qu'il y a saturation de gluons. Les solutions de cette évolution non-linéaire convergent rapidement vers une solution asymptotique universelle. Cela implique une propriété d'universalité pour les sections efficaces ou les amplitudes de diffusion.

Après avoir introduit le formalisme du Condensat de Verre de Couleur, permettant de décrire ces phénomènes nonlinéaires, on étudie cette propriété d'universalité à l'ordre des logarithmes dominants. Les différents effets correctifs pouvant intervenir sont ensuite discutés, et leur impact sur la dynamique non-linéaire est analysé. Il s'agit de contributions au delà des logarithmes dominants, du couplage mobile, et des fluctuations et corrélations. Une des principales conséquences de la propriété d'universalité de la saturation de gluons est l'existence d'une loi d'échelle valable dans un vaste domaine cinématique. On effectue une étude phénoménologique des lois d'échelles possibles en utilisant les données de diffusion inélastique profonde à haute énergie sur un proton.

A part ces effets de haute densité dans l'état initial, il peut aussi exister des effets de haute densité dans l'état final. Lors des collisions de noyaux lourds à haute énergie, un milieu dense et opaque est en effet formé, qui semble être fortement couplé. Son étude nécessite donc l'introduction d'outils non-perturbatifs. Parmi ceux-ci, l'hydrodynamique relativiste est présentée en détail, et la dualité AdS/CFT est appliquée à deux problèmes reliés aux collisions de noyaux lourds.

Mots clés : physique des particules, chromodynamique quantique, régime perturbatif, saturation de gluons, collisions de noyaux lourds, hydrodynamique relativiste, dualité entre théorie de jauge et gravité.

Contributions to the study of strong interactions at high energy and high density

Abstract :

In Quantum Chromodynamics (QCD), high-density effects appear not only when colliding big nuclei, but also in the high-energy limit for the collision of generic hadrons. In that limit, the colliding hadrons' wave-functions contain more and more soft gluons. At high enough energy, those gluons form a dense system, and follow a non-linear evolution. That phenomenon is called gluon saturation. The solutions of that non-linear evolution have a fast convergence towards a universal asymptotic solution. The cross sections and the scattering amplitudes have thus universal properties.

We first introduce the Color Glass Condensate framework, allowing to describe these nonlinear effects. Then we study the universal properties of the solutions at the leading logarithmic accuracy. Various effects beyond this accuracy, which might have some influence on the solutions, are discussed, *e.g.* next-to-leading logarithmic effects, running coupling effects, and fluctuations and correlations. One of the main consequences of the universality property of the solutions is the validity of a scaling law over a wide kinematical range. Using the data for high energy deep inelastic scattering on a proton, we perform a phenomenological study of possible scaling laws.

In addition to those initial-state high-density effects, there can be final-state high-density effects. A dense and opaque medium is indeed formed in high-energy heavy ion collisions, which seems to be strongly coupled. Its study thus requires non-perturbative tools, such as relativistic hydrodynamics which is thoroughly presented, or the AdS/CFT duality, which is applied to two problems related to heavy ion collisions.

Key words : particle physics, quantum chromodynamics, perturbative regime, gluon saturation, heavy ions collisions, relativistic hydrodynamics, gauge/gravity correspondence.

Remerciements

Cette thèse a été effectuée à l'Institut de Physique Théorique du Commissariat à l'énergie atomique. C'est un lieu extrèmement agréable et stimulant intellectuellement. Je remercie Henri Orland ainsi que l'ensemble de l'équipe pour m'y avoir accueilli pendant ces trois années. Je suis aussi très reconnaissant envers les membres du secrétariat, du service informatique et de la documentation pour leur disponibilité et leur redoutable efficacité.

Cela a été pour moi un grand plaisir de travailler avec Robi Peschanski. Il m'a fait partager son enthousiasme et son goût pour une approche pluridisciplinaire de la recherche. Il a toujours été présent pour me guider quand j'en avais besoin, mais il m'a aussi encouragé à explorer les pistes que j'ai pu trouver par moi-même. Je le remercie pour tout ce qu'il m'a apporté.

Je remercie les membres du groupe de chromodynamique quantique, notamment Edmond Iancu, François Gelis et Jean-Yves Ollitrault, pour tout ce qu'ils ont pu m'apprendre, au cours des nombreuses discussions que nous avons eu.

Au cours de cette thèse, j'ai eu l'occasion de collaborer avec Christophe Royon et avec Romuald Janik. Ils m'ont tous les deux beaucoup appris, sur les expériences et la phénoménologie en physique des particules pour le premier, et sur la correspondance théorie de jauge/gravité pour le second. Je leur dois beaucoup.

En avril 2008, j'ai eu la chance d'effectuer un stage d'un mois à l'Université Columbia dans l'équipe d'Al Mueller. Je le remercie vivement pour son invitation.

Je suis très reconnaissant envers Ian Balitsky et Al Mueller qui ont volontiers accepté le rôle, laborieux, de rapporteur. Je remercie aussi Andrzej Białas, Yuri Dokshitzer, Edmond Iancu et Jean-Bernard Zuber d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse.

Je remercie Emil Avsar, Simon Badger, Grégory Giecold, Clément Gombeaud, Yoshi Hatta, Michal Heller, Olda Kepka, Simone Kugeratski, Tuomas Lappi, Cyrille Marquet, Licinio Portugal, David Šálek, Manos Saridakis, Grégory Soyez, Bowen Xiao, et tous les autres jeunes physiciens et physiciennes rencontrés au cours de ces trois ans, pour nos discussions scientifiques aussi bien que pour tous les moments que nous avons partagé.

Merci à tous les thésards de l'IPhT pour la joyeuse ambiance au cours de ces trois ans. A quand notre prochaine rencontre le premier mardi du mois ? Merci notamment à Michael, dont j'ai partagé le bureau, et qui m'a fait part de ses recherches en combinatoire et en topologie aussi bien ribonucléique que linguistique.

Je remercie tous mes amis, notamment mes colocataires pour ces quatre ans de vie commune très agréables. Je dois aussi beaucoup au soutien de mes parents, et de Alice (Désolé d'avoir déja fini !) et Javier.

Table des matières

Introduction **9**

I Propriété d'universalité de la saturation de gluons en Chromodynamique quantique dans la limite de haute énergie **11**

1 QCD à haute énergie et saturation : formalisme **13**
1.1 Généralités sur la diffusion inélastique profonde 14
1.2 Diffusion inélastique profonde à petit x_{Bj} 18
1.3 Le Condensat de Verre de Couleur appliquée à la DIS 31

2 Solution des équations BK et BFKL à l'ordre LL **43**
2.1 Solutions de l'équation BFKL 43
2.2 Solutions de l'équation BK homogènes en paramètre d'impact 46
2.3 Cas des solutions dépendantes du paramètre d'impact 53

3 Au delà de l'ordre LL **57**
3.1 Equations d'évolution à l'ordre NLL, et couplage mobile 58
3.2 Solutions en ondes progressives avec couplage mobile 60
3.3 Effet des contributions NLL au noyau d'évolution 64
3.4 Retour sur les solutions avec couplage mobile 68

4 Effet des fluctuations et corrélations **73**
4.1 Fluctuations et corrélations en QCD à haute énergie 73
4.2 Effets de fluctuations gaussiennes 76

Phénoménologie : lois d'échelle en diffusion inélastique profonde **81**

II Approches non perturbatives pour les collisions ultrarelativistes de noyaux lourds **83**

Collisions de noyaux lourds et Plasma de Quarks et de Gluons **85**

5 Hydrodynamique d'un fluide parfait en 1+1 dimensions **89**
5.1 Hydrodynamique relativiste d'un fluide parfait 89
5.2 Hydrodynamique en $1+1$ dimensions et formalisme de Khalatnikov 92
5.3 Lien avec les observables en 1+1 dimensions 94

6 La correspondance AdS/CFT **97**
6.1 Préliminaires 97
6.2 Des branes à la correspondance AdS/CFT 98

6.3 AdS/CFT à l'œuvre : correspondance champs/opérateurs. 102
6.4 Quelques extensions utiles de la dualité 104

Liste de publications **107**

Comptes rendus de conférences **109**

Bibliographie générale **109**

Annexes : publications personnelles **118**

Introduction

Les expériences de diffusion inélastique profonde à SLAC au cours des années 60 ont mis en évidence une structure interne au proton. Mais celle-ci a des propriétés surprenantes : les constituants du proton sondé à courte distance semblent libres. Or, la stabilité du proton implique que ses constituants doivent interagir fortement entre eux. Ceci a été éclairci quand la propriété de liberté asymptotique des théories de Yang-Mills a été découverte. Dans ces théories, le couplage est grand à grande distance impliquant le confinement des particules élémentaires à l'intérieur d'états liés stables. A plus courte distance, le couplage devient de plus en plus petit, et asymptotiquement, les particules élémentaires semblent libres. Les théories de Yang-Mills sont les seules théories des champs en 4 dimensions à vérifier cette propriété, ce qui en fait les seules théories des champs pouvant décrire les interactions fortes. En ajoutant à cette remarque un petit nombre de résultats expérimentaux, la théorie gouvernant les interactions fortes, appelée chromodynamique quantique (QCD), a pu être complètement déterminée dès les années 70.

En QCD, toutes les particules stables ou métastables sont des hadrons, c'est à dire des états liés des quarks et des gluons, qui sont les particules élémentaires de cette théorie. On ne sait pas, en général, décrire ces états liés fortement couplés. Il semble alors difficile de pouvoir décrire des processus de collision faisant intervenir au moins un hadron. Une simplification très importante apparait lorsque l'on considère les rares processus lors desquels se produit un grand transfert d'impulsion. Un tel processus, appelé processus dur, consiste en une collision très rapide avec grand transfert d'impulsion entre deux quarks ou gluons se déroulant à l'intérieur d'une collision molle, plus lente, impliquant les hadrons incidents dans leur ensemble. Pour des raisons de causalité, la hiérarchie entre ces deux échelles de temps implique une propriété de factorisation : la collision dure entre quarks ou gluons peut se calculer indépendamment de la collision molle entre hadrons. La collision dure, se déroulant à courte distance, est calculable en théorie des perturbations grâce à la liberté asymptotique. La dynamique non-perturbative des hadrons peut quant à elle être absorbée dans les distributions de quarks ou de gluons dans les hadrons incidents. Cette propriété de factorisation dite colinéaire est un des piliers de la physique des particules moderne, notamment grâce à ses applications pour la recherche de nouvelles particules.

Ce formalisme ne permet de décrire que des processus rares, à très grand transfert d'impulsion. Récemment, des progrès notables ont été fait dans un autre régime cinématique, correspondant à la limite de haute énergie pour la collision hadronique, à transfert d'impulsion assez grand mais fixé. Dans cette limite, les hadrons incidents apparaissent habillés d'un grand nombre de gluons mous. Plus exactement, le nombre d'occupation des gluons dans les fonctions d'onde de ces hadrons devient grand, jusqu'à induire des effets nonlinéaires de saturation des fonctions d'onde. D'une part, la présence de ces effets nonlinéaires jouent un rôle de coupure, limitant l'influence des autres effets non-perturbatifs dans la limite de haute énergie. D'autre part, ce phénomène de saturation vérifie une propriété d'universalité contraignant fortement la dynamique.

Dans le cas des collisions ultrarelativistes de noyaux lourds, ce formalisme de saturation

de gluons s'applique pour décrire la première étape de la collision, en prenant en compte les effets de haute densité des deux noyaux incidents ainsi que les effets dûs à la limite de haute énergie. Après cette première étape, les particules produites continuent d'interagir entre elles, et forment un milieu qui semble être la plasma de quarks et de gluons. La description de ce milieu par des méthodes perturbatives semble difficile, notamment parce que ce milieu pourrait être à couplage fort. Certaines approches non-perturbatives sont donc employées pour étudier les propriétés de ce milieu, comme l'hydrodynamique ou encore les dualités entre théories de jauge et théories des cordes.

Organisation de la thèse

Le corps de cette thèse est conçu comme une introduction aux différentes publications auxquelles elle a donné lieu, données en annexes. Les résultats de certains articles sont toutefois discutés en détail dans le corps de texte, dans une version mise à jour. Pour les différencier, les publications personnelles sont numérotées en chiffres romains, alors que les autres le sont en chiffres arabes.

La partie I, constituant la majeure partie de la thèse, est consacrée à la saturation de gluons. A l'intérieur de cette partie, le chapitre 1 introduit pas à pas différents formalismes, sur l'exemple de la diffusion inélastique profonde. Après des généralités concernant ce processus et une brève introduction au formalisme de la factorisation colinéaire, on présente le modèle des dipôles. L'analyse des problèmes de ce modèle montre la nécessité de prendre en compte les effets de saturation de gluons. Nous présentons alors le formalisme du Condensat de Verre de Couleur, permettant d'inclure ces effets.

Les chapitres 2, 3 et 4 constituent une discussion complète de la propriété d'universalité des solutions des équations d'évolution en rapidité avec saturation. Le chapitre 2 traite le cas de l'équation BK à l'ordre des logarithmes dominants (LL), le chapitre 3 celui de l'équation BK à l'ordre suivant NLL et/ou avec couplage mobile, et le chapitre 4 présente les effets de fluctuations et de corrélations. En particulier, le chapitre 3 présente sous une version mise à jour les résultats des publications [I] et [III]. Le chapitre 4 constitue une introduction à l'article [II].

L'épilogue de la partie I est une revue des études phénoménologiques de la saturation de gluons dans le contexte de la diffusion inélastique profonde. Il constitue une introduction aux publications [IV] et [VI].

La partie II est consacrée aux études non-perturbatives effectuées dans le cadre de cette thèse à propos des collisions de noyaux lourds, réactions faisant intervenir des effets de haute énergie et de haute densité, à couplage probablement fort. Cette partie contient d'abord une revue à propos des collisions de noyaux lourds, justifiant l'usage de l'hydrodynamique et des dualités entre théories de jauge et théories des cordes dans ce contexte. Les quatre articles [V], [VII], [VIII] et [IX] y sont motivés et présentés succintement. La publication [V] utilise l'hydrodynamique tandis que les articles [VII], [VIII] et [IX] sont basés sur la dualité AdS/CFT.

Le chapitre 5 constitue une présentation détaillée du formalisme de l'hydrodynamique relativiste en $1+1$ dimensions, constituant le cadre de la publication [V].

Le chapitre 6 présente l'idée générale de la correspondance AdS/CFT, et introduit le formalisme requis pour aborder les articles [VII], [VIII] et [IX].

Première partie

Propriété d'universalité de la saturation de gluons en Chromodynamique quantique dans la limite de haute énergie

Chapitre 1

QCD à haute énergie et saturation : formalisme

Sommaire

1.1 Généralités sur la diffusion inélastique profonde 14
1.1.1 Cinématique de la diffusion inélastique profonde 14
1.1.2 Image partonique de la DIS 15
1.1.3 Factorisation colinéaire et évolution DGLAP 17
1.2 Diffusion inélastique profonde à petit x_{Bj} 18
1.2.1 Rapidité et logarithmes dominants à haute énergie 20
1.2.2 Factorisation de dipôle 22
1.2.3 Modèle des dipôles 24
1.2.4 Limitations de l'évolution BFKL et du modèle des dipôles 29
1.3 Le Condensat de Verre de Couleur appliquée à la DIS 31
1.3.1 Le formalisme du CGC au niveau classique 31
1.3.2 Evolution à l'ordre LL pour le CGC 36

Tout au long de la partie I, nous prendrons comme exemple le processus de diffusion inélastique profonde pour illustrer notre propos. Le formalisme introduit dans le chapitre 1 et les résultats des chapitres 2, 3 et 4 ont toutefois un domaine d'application beaucoup plus vaste. Le phénomène de saturation de gluons est en effet essentiel dans la description de la production de particules vers l'avant dans les collisions proton-proton, proton-noyau ou noyau-noyau à très haute énergie, et de la production de particules dans la région centrale lors des collisions ultrarelativistes de noyaux lourds. Le formalisme présenté peut aussi s'appliquer à des processus plus exclusifs, comme les processus diffractifs.

Nous présentons dans la section 1.1 le processus de diffusion inélastique profonde, et nous mentionnons le formalisme de la factorisation colinéaire des processus durs et les équations DGLAP. Dans la section 1.2, nous décrivons, notamment dans le cadre du modèle des dipôles, la resommation de grands logarithmes survenant dans la limite de haute énergie, dans l'hypothèse où les particules entrant en collision forment un milieu dilué. Enfin, dans la section 1.3, nous présentons la théorie effective du CGC, permettant de réaliser cette resommation tout en prenant en compte si nécessaire les effets de haute densité.

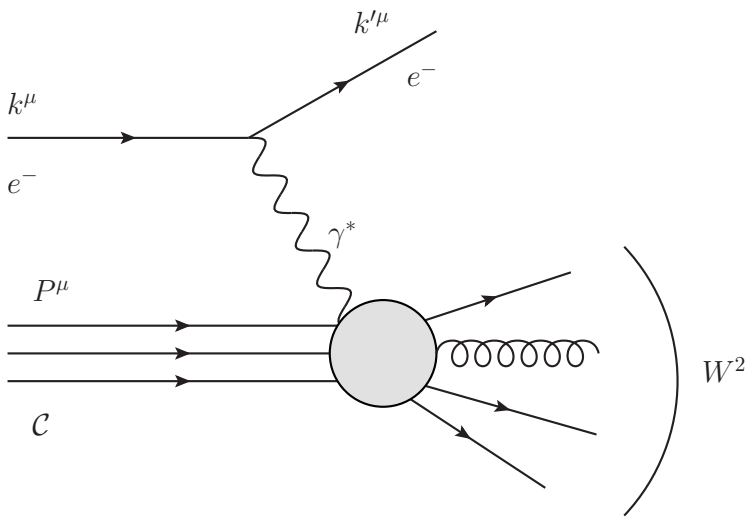

FIG. 1.1 – Processus de diffusion inélastique profonde sur une cible $\mathcal{C}$.

1.1 Généralités sur la diffusion inélastique profonde

1.1.1 Cinématique de la diffusion inélastique profonde

Considérons la diffusion d'un lepton (typiquement un électron ou éventuellement un muon) sur une cible, qui pourra être un proton ou un noyau, en ne précisant dans l'état final que l'état du lepton. Notons P^μ la quadri-impulsion de la cible, k^μ celle du lepton incident et k'^μ celle du lepton dans l'état final, comme indiqué sur la figure 1.1. La mesure de k'^μ donne accès à la quadri-impulsion $q^\mu = k^\mu - k'^\mu$ du boson virtuel échangé. A partir de ces quadri-impulsions, on peut former les invariants cinématiques suivants : la virtualité du boson échangé $Q^2 \equiv -q^\mu q_\mu > 0$, la variable de Mandelstam $s = (P^\mu + k^\mu)(P_\mu + k_\mu)$ et la masse invariante au carré de l'état final hormis le lepton $W^2 = (P^\mu + q^\mu)(P_\mu + q_\mu)$. Si $W = M_\mathcal{C}$, en notant $M_\mathcal{C}$ la masse de la cible, le processus est élastique. Nous nous concentrerons plutôt sur le processus de diffusion inélastique profonde, inélastique signifiant $W > M_\mathcal{C}$, et profond $Q > 0$ assez grand, puisque Q^{-1} donne la résolution spatiale à laquelle le boson virtuel sonde la cible, comme nous l'expliquerons plus loin. Dans le domaine $Q^2 \gg \Lambda^2_{QCD}$, le couplage α_s est petit, grâce à la liberté asymptotique. Cela justifie l'usage de méthodes perturbatives. Typiquement, nous prendrons $Q^2 > 1\,\mathrm{GeV}^2$. Pour $Q^2 \gtrsim {m_Z}^2 \sim 8300\,\mathrm{GeV}^2$, le boson virtuel échangé peut être un Z^0. Nous allons nous focaliser sur un domaine cinématique où Q^2 a des valeurs nettement plus faibles, ce qui implique que le boson échangé ne pourra être qu'un photon virtuel.

Plutôt que les variables W^2 et s, on utilise souvent la variable x_{Bj} de Bjorken et y, définies par

$$x_{Bj} \equiv \frac{Q^2}{2\,P_\mu q^\mu} = \frac{Q^2}{W^2 - M_\mathcal{C}^2 + Q^2} \quad \text{et} \quad y \equiv \frac{Q^2}{x_{Bj}\,s}\,. \tag{1.1}$$

Remarquons que $0 < x_{Bj} < 1$, puisque $W > M_\mathcal{C}$ et $Q > 0$. En intégrant sur l'angle azimuthal du lepton de l'état final, on peut exprimer la section efficace différentielle de la diffusion inélastique profonde (DIS, pour *deep inelastic scattering*) en fonction de x_{Bj} et Q^2 (voir par exemple [1])

$$\frac{d^2\sigma}{dx_{Bj}\,dQ^2} = \frac{2\pi\alpha_{em}^2}{x_{Bj}\,Q^4}\,\left[\left(1 + (1-y)^2\right)\,F_2(x_{Bj}, Q^2) - y^2\,F_L(x_{Bj}, Q^2)\right]\,, \tag{1.2}$$

où α_{em} est la constante de structure fine. Pour arriver à cette formule, il faut calculer l'émission du photon virtuel par le lepton au premier ordre de perturbation en α_{em}, qui est le seul ordre pertinent ici. Compte tenu des symétries du problème, deux fonctions de structure F_2 et F_L suffisent pour paramétrer la partie hadronique du processus. On utilise aussi, parfois, la fonction $F_T = F_2 - F_L$. En effet, comme le photon échangé est virtuel, il peut avoir une polarisation non seulement transverse, mais aussi longitudinale. Les fonctions F_T et F_L donnent la contribution de l'échange d'un photon transverse ou longitudinal respectivement. Nous utiliserons plutôt les sections efficaces $\sigma_T^{\gamma^*\mathcal{C}}$ et $\sigma_L^{\gamma^*\mathcal{C}}$ des sous-processus de collision du photon virtuel, transverse ou longitudinal, avec la cible

$$\sigma_{T,L}^{\gamma^*\mathcal{C}}(x_{Bj}, Q^2) \equiv \frac{4\pi^2\,\alpha_{em}}{Q^2}\,F_{T,L}(x_{Bj}, Q^2)\,. \tag{1.3}$$

Ainsi, la section efficace différentielle de la DIS (1.2) peut s'écrire

$$\frac{d^2\sigma}{dx_{Bj}\,dQ^2} = \frac{\alpha_{em}}{\pi\,x_{Bj}\,Q^2}\left[\left(1 - y + \frac{y^2}{2}\right)\sigma_T^{\gamma^*\mathcal{C}}(x_{Bj}, Q^2) + (1-y)\,\sigma_L^{\gamma^*\mathcal{C}}(x_{Bj}, Q^2)\right]. \tag{1.4}$$

1.1.2 Image partonique de la DIS

Considérons d'abord un hadron dans le référentiel où il est au repos. A cause du confinement, et du couplage α_s qui est grand à basse énergie, il est extrèmement difficile de décrire le contenu de ce hadron en chromodynamique quantique. Par contre, des simplifications importantes apparaissent dans un référentiel où il est ultrarelativiste. Du fait de la dilatation du temps, le temps de vie de ses fluctuations peut devenir grand. Le hadron est alors constitué de quarks et de gluons presque réels et libres puisqu'ils interagissent rarement, que l'on appelle des partons.

Utilisons les coordonnées du cône de lumière définies par

$$x^{\pm} \equiv \frac{x^0 \pm x^3}{\sqrt{2}}\,. \tag{1.5}$$

Plaçons nous dans un répère tel que la cible se déplace le long de x^+ avec une très grande implusion P^+ et le photon virtuel le long de x^- avec une impulsion q^- (voir figure 1.2). Dans ce repère, nous avons

$$P^- = \frac{M_{\mathcal{C}}^2}{2\,P^+} \simeq 0\,, \quad q^+ = -\frac{Q^2}{2\,q^-} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_\perp = \mathbf{q}_\perp = 0\,. \tag{1.6}$$

La variable x_{Bj} s'écrit alors

$$x_{Bj} = \frac{Q^2}{2\,P^+ q^-}\,. \tag{1.7}$$

La coordonnée x^+ joue le rôle du temps pour la cible, et x^- celui de la dimension longitudinale. Grâce au principe d'incertitude, le photon sonde donc la cible avec un résolution temporelle

$$\Delta x^+\big|_{\gamma^*} \simeq \frac{1}{q^-} = \frac{2\,x_{Bj}\,P^+}{Q^2} \tag{1.8}$$

et une résolution longitudinale

$$\Delta x^-\big|_{\gamma^*} \simeq \frac{1}{|q^+|} = \frac{2\,q^-}{Q^2} = \frac{1}{x_{Bj}\,P^+}\,. \tag{1.9}$$

Considérons un quark (ou un antiquark) qui est un parton de la cible, d'impulsion longitudinale $p^+ = zP^+$ et transverse $\mathbf{p}_\perp$. Sa masse est négligeable, et il est approximativement sur

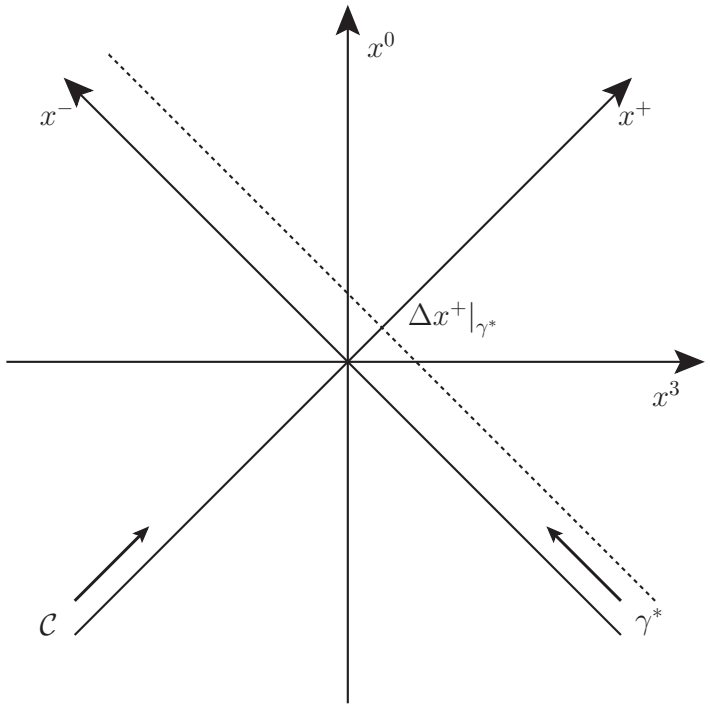

FIG. 1.2 – DIS dans les coordonnées du cône de lumière. La cible se déplace le long de x^+ et le photon virtuel le long de x^-. La collision sonde la cible pendant une durée $\Delta x^+|_{\gamma^*}$ (voir équation 1.8).

couche de masse, donc $p^- \simeq \mathbf{p}_\perp^2/(2zP^+)$. En réutilisant le principe d'incertitude, on trouve que ce quark correspond à une fluctuation de la cible de durée de vie

$$\Delta x^+\big|_p \simeq \frac{1}{p^-} \simeq \frac{2\,z\,P^+}{\mathbf{p}_\perp^2} \tag{1.10}$$

et occupant une longueur

$$\Delta x^-\big|_p \simeq \frac{1}{p^+} = \frac{1}{z\,P^+}\,. \tag{1.11}$$

Le photon virtuel peut être absorbé par ce parton si il a résolution temporelle et spatiale suffisante pour détecter ce parton. Les conditions

$$\Delta x^+\big|_{\gamma^*} \lesssim \Delta x^+\big|_p \quad \text{et} \quad \Delta x^-\big|_{\gamma^*} \lesssim \Delta x^-\big|_p \tag{1.12}$$

donnent finalement les inégalités

$$\frac{\mathbf{p}_\perp^2}{Q^2}\,x_{Bj} \lesssim z \lesssim x_{Bj} \quad \text{et donc} \quad |\mathbf{p}_\perp| \lesssim Q \quad \text{et} \quad z \sim x_{Bj}\,. \tag{1.13}$$

Un processus de DIS à x_{Bj} et Q^2 correspond alors à l'absorption du photon virtuel par un quark ou un antiquark d'impulsion transverse $|\mathbf{p}_\perp| \leq Q$ emportant une fraction $z \sim x_{Bj}$ de l'impulsion de la cible P^+. Et Q^{-1} joue le rôle de la résolution du photon virtuel dans le plan transverse.

1.1.3 Factorisation colinéaire et évolution DGLAP

Dans le cadre du Modèle des Quarks Partons, antérieur à la QCD, on suppose que la cible est diluée et que ses constituants sont libres. On peut alors écrire la section efficace de DIS comme une somme incohérente des sections efficaces de collision élastique entre le lepton et un des constituants. En comparant l'expression obtenue avec la formule générale (1.2), on peut déduire

$$F_2(x_{Bj}, Q^2) = \sum_i e_i^2 \, x_{Bj} \, \left[q_i(x_{Bj}) + \bar{q}_i(x_{Bj}) \right] , \tag{1.14}$$

ainsi que la relation de Callan-Gross $F_L(x_{Bj}, Q^2) = 0$. Dans l'expression (1.14), la distribution de parton $q_i(x_{Bj})$ (respectivement $\bar{q}_i(x_{Bj})$) est la probabilité de trouver un quark (respectivement un antiquark) de saveur i dans la cible, emportant une fraction x_{Bj} de l'impulsion de celle-ci. La charge électrique d'un quark de saveur i est $\pm e_i$. Remarquons que la formule (1.14) donne une fonction de structure F_2 dépendante de x_{Bj} mais pas de Q^2, ce qui est la loi d'échelle prédite par Bjorken. Celle-ci est approximativement vérifiée expérimentalement pour des valeurs de x_{Bj} modérées.

En QCD, on prend en compte les interactions entre partons, mais certaines idées du Modèle des Quarks Partons restent malgré tout valables. Grâce à la hiérarchie entre le temps de vie des partons et la résolution temporelle du photon, on peut toujours considérer que pour Q^2 assez grand, le photon entre en collision avec un seul parton apparemment libre. On peut calculer perturbativement la section efficace pour ce sous-processus, qui peut maintenant être inélastique, par radiation de gluons, ou séparation de gluon en une paire quark-antiquark. A chaque ordre de perturbation, il peut y avoir émission d'un parton supplémentaire. Comme la DIS est un processus inclusif, on doit intégrer sur l'impulsion des partons émis. Considérons le cas où un unique gluon est émis par le quark (ou antiquark) avant l'interaction avec le photon. L'impulsion transverse relative $\mathbf{k}_\perp$ entre le gluon et le quark est inférieure à Q, d'après (1.13). Perturbativement, il y a une divergence logarithmique pour $\mathbf{k}_\perp \to 0$, c'est à dire pour l'émission d'un gluon colinéaire. En coupant l'intégrale à une échelle μ, cela donne un logarithme $\ln(Q^2/\mu^2)$, qui peut être assez grand pour compenser la petitesse du couplage α_s. Plus généralement, si $Q^2 \gg \mu^2$, la contribution dominante à l'ordre α_s^n vient du diagramme correspondant à l'émission de n partons ordonnés en impulsion transverse avant la collision avec le photon, ce qui donne un terme du type

$$\frac{1}{n!} \left(\alpha_s \ln \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right) \right)^n , \tag{1.15}$$

où le facteur $1/n!$ provient de l'ordonnancemment en impulsion transverse. De plus, à cause de cet ordonnancemment, on peut considérer que les gluons, quarks et antiquarks d'implusion transverse $|\mathbf{k}_\perp| < \mu$ sont ceux déja contenus dans les distributions de partons. Celles-ci deviennent donc dépendantes de l'échelle de coupure μ. Elles donnent alors la probabilité de trouver un parton dans la cible, emportant une fraction x_{Bj} de l'impulsion de celle-ci, lorsque l'on regarde la cible avec une résolution transverse μ^{-1}. De manière générale, on peut montrer que les fonctions de structure vérifient des propriété de factorisation, par exemple pour F_2

$$\begin{aligned} F_2(x_{Bj}, Q^2) = \sum_i e_i^2 \, x_{Bj} \int_0^1 \frac{dz}{z} \Bigg\{ \Big[q_i(x_{Bj}, \mu^2) + \bar{q}_i(x_{Bj}, \mu^2) \Big] \Bigg[\delta \left(1 - \frac{x_{Bj}}{z} \right) \\ + \frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi} \, C_{2,q} \left(\frac{x_{Bj}}{z}, \frac{Q^2}{\mu^2} \right) \Bigg] + \frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi} \, g(x_{Bj}, \mu^2) \, C_{2,g} \left(\frac{x_{Bj}}{z}, \frac{Q^2}{\mu^2} \right) \Bigg\} \end{aligned} \tag{1.16}$$

à des termes d'ordre Λ^2_{QCD}/Q^2 près pour $Q^2 \gg \Lambda^2_{QCD}$. La dépendance en μ des fonctions coefficients $C_{2,q}$ et $C_{2,q}$ est donnée par les contributions de type (1.15) calculables perturbativement. Or, la formule (1.16) doit être indépendante de la coupure μ choisie. On peut donc déduire la dépendance en μ des distributions de partons, qui doit compenser celle des fonctions coefficients. Elle est donnée par les équations de Dokshitzer, Gribov, Lipatov, Altarelli et Parisi (DGLAP) [2, 3, 4]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q_i(x_{Bj},\mu^2)}{\partial \ln \mu^2} &= \frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi}\int_{x_{Bj}}^1 \frac{dz}{z}\left[P_{qq}\left(\frac{x_{Bj}}{z}\right)\, q_i(z,\mu^2) + P_{qg}\left(\frac{x_{Bj}}{z}\right)\, g(z,\mu^2)\right] \\
\frac{\partial \bar{q}_i(x_{Bj},\mu^2)}{\partial \ln \mu^2} &= \frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi}\int_{x_{Bj}}^1 \frac{dz}{z}\left[P_{qq}\left(\frac{x_{Bj}}{z}\right)\, \bar{q}_i(z,\mu^2) + P_{qg}\left(\frac{x_{Bj}}{z}\right)\, g(z,\mu^2)\right] \\
\frac{\partial g(x_{Bj},\mu^2)}{\partial \ln \mu^2} &= \frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi}\int_{x_{Bj}}^1 \frac{dz}{z}\Bigg[P_{gg}\left(\frac{x_{Bj}}{z}\right)\, g(z,\mu^2) \\
&\qquad + P_{gq}\left(\frac{x_{Bj}}{z}\right)\sum_i \Big(q_i(z,\mu^2) + \bar{q}_i(z,\mu^2)\Big)\Bigg],
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Les fonctions d'Altarelli-Parisi P_{qq}, P_{qg}, P_{gg} et P_{gq} sont reliées aux probabilités de séparation d'un parton en deux de plus grande impulsion transverse, de directions opposées. Le choix $\mu = Q$ permet de resommer toutes les contributions de type (1.15) dans les distributions de partons, et on peut alors se restreindre à un ordre fini en α_s pour le calcul des fonctions coefficients. Finalement, toute la physique non-perturbative, en particulier liée à la nature de la cible, est contenue dans les conditions initiales pour les distributions de partons à une échelle μ_0.

Une factorisation colinéaire de type (1.16) se généralise au delà des fonctions de structure F_2 et F_L à plusieurs observables faisant intervenir une échelle dure d'impulsion transverse ou de virtualité, comme la section efficace du processus Drell-Yan, ou encore les sections efficaces de production de jets dans les collisions hadroniques. Pour un hadron ou noyau donné, les distributions de partons solutions des équations DGLAP sont les mêmes pour ces différentes observables. Les fonctions coefficients dépendent par contre de l'observable étudiée. Plutôt que de considérer les distributions de quark q_i et d'antiquark $\bar{q}_i$ des différentes saveurs u, $\bar{u}$, d, $\bar{d}$, s, $\bar{s}$, *etc.*..., on peut introduire les distributions de quark de valence $u_V = u - \bar{u}$, $d_V = d - \bar{d}$ et $s_V = s - \bar{s}$ ainsi que les différences entre saveurs de quark $\bar{u} - \bar{d}$, $\bar{d} - \bar{s}$. Toutes ces distributions ont une équation DGLAP indépendante du reste du système. Finalement, seule la distribution de gluons g et la distribution de quarks de la "mer" $\Sigma = \sum_i q_i + \bar{q}_i$ restent couplées. Dans la distribution Σ, la somme s'effectue sur les saveurs de quark actives i, c'est à dire celles qui ont une masse telle que $m_i < Q$.

Plusieurs équipes fournissent des ensembles de distributions de partons dans un proton, obtenues par ajustement global sur les données pour les observables admettant une factorisation colinéaire, en tenant compte de l'évolution DGLAP (voir [5, 6] pour les dernières versions). Un exemple de distributions de partons est donné sur la figure 1.3.

1.2 Diffusion inélastique profonde à petit x_{Bj}

La factorisation colinéaire que nous venons de présenter est un des plus grands succès de la QCD. Pour la DIS, elle est valable dans la limite de Bjorken W^2, $Q^2 \gg \Lambda^2$ pour W^2 et Q^2 du même ordre. Cela suppose que x_{Bj} n'est pas trop petit. Par contre, elle peut être incomplète dans d'autre régimes cinématiques. En effet, si au contraire $W^2 \gg Q^2$, et donc $x_{Bj} \ll 1$, de grands logarithmes $\ln(1/x_{Bj})$ apparaissent dans la série perturbative, et il faut les resommer

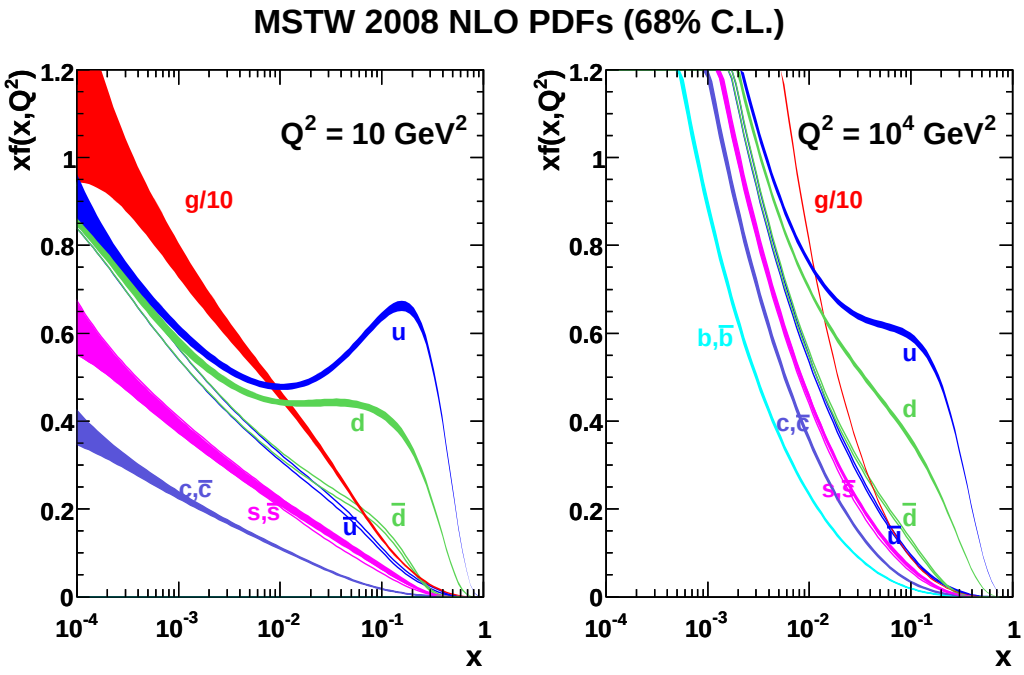

FIG. 1.3 – Distributions de partons $x_{Bj}\, q_i(x_{Bj}, Q^2)$, $x_{Bj}\, \bar{q}_i(x_{Bj}, Q^2)$ et $x_{Bj}\, g(x_{Bj}, Q^2)$ dans un proton données par l'ajustement MSTW 2008 NLO [6], tracées en fonction de x_{Bj}. *A gauche* : pour $Q^2 = 10$ GeV^2. *A droite* : pour $Q^2 = 10^4$ GeV^2. La distribution de gluons a été divisée par 10 pour pouvoir être représentée sur la même figure que les autres. Figure extraite de [7].

à tous les ordres. Après une discussion générale, nous présentons dans cette section comment s'effectue cete resommation, sur l'exemple dans la DIS dans le cadre du modèle des dipôles.

1.2.1 Rapidité et logarithmes dominants à haute énergie

Considérons une collision à haute énergie entre un projectile $\mathcal{P}$ et une cible $\mathcal{C}$ hadroniques, de quadri-impulsions $Q^\mu = (0, Q^-, 0, 0)$ et $P^\mu = (P^+, 0, 0, 0)$ respectivement. Notons $k^\mu = (k^+, k^-, \mathbf{k}_\perp)$ la quadri-impulsion d'une particule de masse m produite lors de la collision. Il est utile d'introduire la masse transverse $m_\perp$ et la rapidité y de cette particule, définies par

$$m_\perp^2 \equiv m^2 + \mathbf{k}_\perp^2 \quad \text{et} \quad y \equiv \frac{1}{2} \log \frac{k^+}{k^-} = \log \frac{\sqrt{2}\, k^+}{m_\perp} = \log \frac{m_\perp}{\sqrt{2}\, k^-} \,. \tag{1.18}$$

Notons aussi $z_\mathcal{C} = k^+/P^+$, $z_\mathcal{P} = k^-/Q^-$ et $s = (P^\mu + Q^\mu)^2 = 2P^+Q^-$. On peut interpréter $z_\mathcal{C}$ comme la fraction d'impulsion de la cible emportée par la particule produite, et $z_\mathcal{P}$ celle du projectile. Ainsi, on doit avoir $z_\mathcal{C} \leq 1$ et $z_\mathcal{P} \leq 1$. Or, la condition de couche de masse pour la particule produite donne $z_\mathcal{C} z_\mathcal{P} s = m_\perp^2$. On peut en déduire que

$$\frac{m_\perp^2}{s} \leq z_\mathcal{C}\,, z_\mathcal{P} \leq 1 \,. \tag{1.19}$$

Définissons aussi la rapidité de la cible et du projectile respectivement par

$$y_\mathcal{C} = \log \frac{\sqrt{2}\, P^+}{m_\perp} \quad \text{et} \quad y_\mathcal{P} = \log \frac{m_\perp}{\sqrt{2}\, Q^-} \,. \tag{1.20}$$

De même que l'émission d'un gluon colinéaire, l'émission par un parton d'un gluon *mou*, c'est à dire d'énergie et d'impulsion beaucoup plus faible, est logarithmiquement divergente. Dans les deux cas, la divergence disparait des observables physiques, mais il peut rester de grands logarithmes amplifiant certaines contributions. Dans la limite de haute énergie $s \to \infty$, des particules de masse transverse $m_\perp$ peuvent être produites jusqu'à des valeurs très petites de $z_\mathcal{C}$ ou de $z_\mathcal{P}$ d'après les inégalités (1.19), puisque dans ce cas $m_\perp^2 \ll s$. A l'ordre α_s^n, il y aura des contributions en

$$\frac{1}{n!} \left(\alpha_s \ln \left(\frac{s}{m_\perp^2} \right) \right)^n \,, \tag{1.21}$$

provenant des diagrammes dans lesquels n gluons ordonnés en rapidité y sont produits, comme sur la figure 1.4. Le facteur $1/n!$ apparait à cause de l'ordonnancemment en rapidité. En parcourant le diagramme de la cible vers le projectile, chaque gluon produit a un $z_\mathcal{C}$ négligeable devant celui du gluon produit précédent, et un $z_\mathcal{P}$ beaucoup plus grand. On appelle approximation des logarithmes dominants (LL) la resommation des termes de type (1.21). Cette resommation a été effectuée par Balitsky, Fadin, Kuraev et Lipatov [8, 9, 10], et conduit à l'équation BFKL, donnant l'évolution avec l'énergie des sections efficaces hadroniques. Nous discuterons de cette évolution sur l'exemple de la DIS dans le paragraphe 1.2.4 et dans la section 2.1, dans le formalisme du modèle des dipôles [11, 12, 13], différent de l'approche BFKL originelle.

Puisque les diagrammes dominants sont ordonnés en rapidité, il est naturel de factoriser le diagramme de la manière suivante. On peut choisir une rapidité y^0 comprise entre $y_\mathcal{P}$ et $y_\mathcal{C}$, et considérer que la partie du diagramme correspondant à $y_\mathcal{C} > y > y^0$ fait partie de l'évolution de la fonction d'onde de la cible avant la collision. De même, on inclut la partie $y^0 > y > y_\mathcal{P}$ dans l'évolution de la fonction d'onde de la cible. Finalement, la collision proprement dite correspond à la partie du diagramme autour de la rapidité y^0 seulement. Dans ce cas, on interprète les gluons produits à $y_\mathcal{C} > y > y^0$ comme des constituants de la cible libérés lors

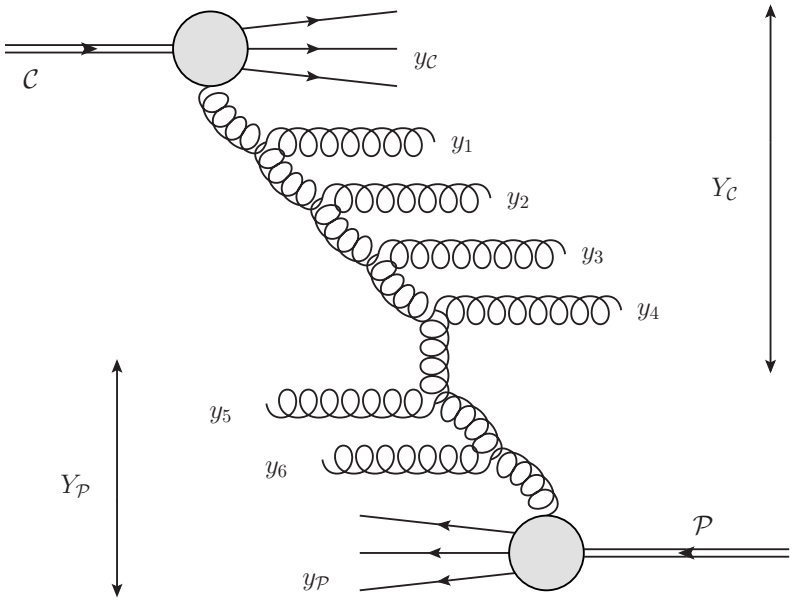

FIG. 1.4 – Diagramme d'ordre LL pour la collision entre un projectile $\mathcal{P}$ et une cible $\mathcal{C}$ hadroniques. Les gluons émis sont ordonnés en rapidité : $y_{\mathcal{P}} < y_6 < y_5 < y_4 < y_3 < y_2 < y_1 < y_{\mathcal{C}}$.

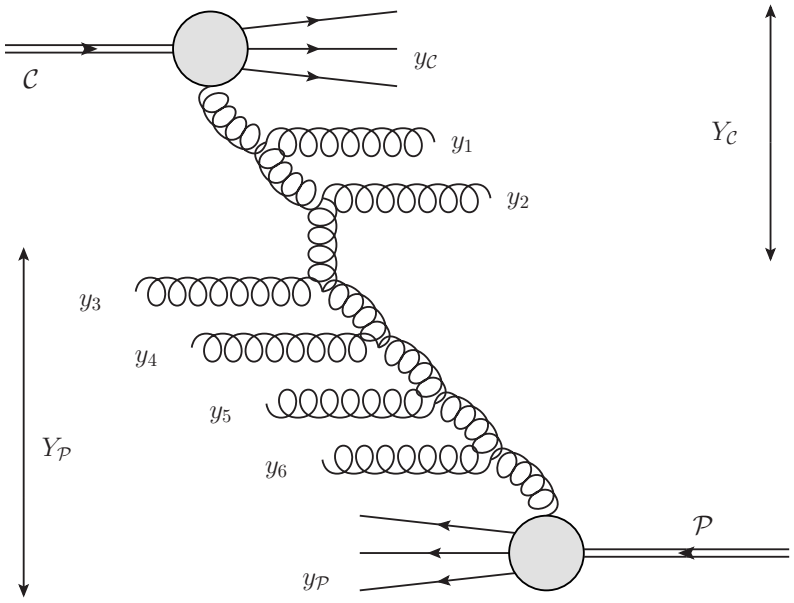

FIG. 1.5 – Même diagramme que sur la figure 1.4, mais vu dans un référentiel où le projectile a une rapidité plus grande en valeur absolue, et la cible une rapidité plus petite.

de la collision, et de même ceux à $y^0 > y > y_{\mathcal{P}}$ comme des constituants du projectile. On peut remarquer que seuls les constituants de la cible emportant une fraction de l'impulsion $z_{\mathcal{C}} \geq z_{\mathcal{C}}^{cut}$ pourront être libérés sur couche de masse, avec une coupure $z_{\mathcal{C}}^{cut}$ correspondant à un intervalle de rapidité

$$Y_{\mathcal{C}} = y_{\mathcal{C}} - y^0 = \ln \frac{1}{z_{\mathcal{C}}^{cut}} \,. \tag{1.22}$$

Il nous suffira donc de connaitre la partie la fonction d'onde de la cible décrivant les constituants avec $z_{\mathcal{C}} > z_{\mathcal{C}}^{cut}$. De même, on peut se restreindre à la partie $z_{\mathcal{P}} > z_{\mathcal{P}}^{cut}$ de la fonction d'onde du projectile, avec une coupure $z_{\mathcal{P}}^{cut}$ correspondant à un intervalle de rapidité

$$Y_{\mathcal{P}} = y^0 - y_{\mathcal{P}} = \ln \frac{1}{z_{\mathcal{P}}^{cut}} \,. \tag{1.23}$$

Finalement, choisir la rapidité y^0 où l'on factorise le processus revient à choisir les coupures $z_{\mathcal{C}}^{cut}$ et $z_{\mathcal{P}}^{cut}$ dans les fonctions d'ondes, reliées entre elles par la condition de couche de masse $z_{\mathcal{C}}^{cut}\, z_{\mathcal{P}}^{cut}\, s = m_\perp^2$, ou encore à choisir comment séparer entre $Y_{\mathcal{C}}$ et $Y_{\mathcal{P}}$ l'intervalle de rapidité total

$$Y = \ln \frac{s}{m_\perp^2} = Y_{\mathcal{C}} + Y_{\mathcal{P}} \,. \tag{1.24}$$

Une transformation de Lorentz spéciale le long de l'axe de la collision translate toutes les rapidités d'une même constante. Les intervalles de rapidité Y, $Y_{\mathcal{C}}$ et $Y_{\mathcal{P}}$ sont par contre invariants sous un tel changement de référentiel. Néanmoins, il est naturel de toujours se placer dans le référentiel tel que $y^0 = 0$. Ainsi, les gluons contenus dans la cible seront libérés avec une rapidité positive, c'est à dire une impulsion longitudinale k^3 positive, et les gluons contenus dans le projectile avec une rapidité négative. On pourra alors assimiler un changement de coupures $z_{\mathcal{C}}^{cut}$ et $z_{\mathcal{P}}^{cut}$ à un changement de référentiel, ce qui est illustré par les figures 1.4 et 1.5. Dans la suite de ce mémoire, nous utiliserons constamment la notion d'intervalle de rapidité, mais très peu celle de rapidité. Alors, par abus de langage, nous appelerons souvent rapidité un intervalle de rapidité.

1.2.2 Factorisation de dipôle

Revenons maintenant au cas de la DIS à haute énergie, c'est à dire $x_{Bj} \to 0$ et Q^2 fixé. Q joue le rôle de la masse transverse $m_\perp$ typique des particules produites, et l'intervalle de rapidité total est donné par

$$Y \equiv \log \frac{2P^+q^-}{Q^2} = \log \frac{1}{x_{Bj}} \,. \tag{1.25}$$

Nous pouvons voir sur la figure 1.3 qu'à petit x_{Bj}, le contenu du proton est largement dominé par les gluons. C'est le cas pour toutes les cibles hadroniques, selon notre discussion de la section précédente. Par ailleurs, pour $x_{Bj} < 10^{-2}$ typiquement, la contribution des quarks de valence devient petite devant celle des quarks de la mer. En effet, seuls pour ces derniers on peut avoir des diagrammes d'ordre LL, comme celui indiqué sur la figure 1.6. Un diagramme d'ordre LL correspond effectivement à une cascade de gluons de plus en plus mous, dont le dernier fluctue en paire quark-antiquark pour permettre le couplage électromagnétique au photon virtuel. A petit x_{Bj}, nous allons donc négliger la contribution des quarks de valence. Et pour rendre explicite l'importance des gluons dans la dynamique de la contribution des quarks de la mer, nous allons effectuer un changement de référentiel. Plutôt que de se placer dans le référentiel de Bjorken où la rapidité du photon virtuel est négligeable $y_{\mathcal{P}} \simeq 0$, on peut choisir un référentiel où celui-ci à une rapidité plus importante $|y_{\mathcal{P}}| > 0$. En changeant simultanément le partage de l'intervalle de rapidité total Y entre $Y_{\mathcal{C}}$ et $Y_{\mathcal{P}}$, de manière à garder $Y_{\mathcal{P}} = -y_{\mathcal{P}}$ et $Y_{\mathcal{C}} = y_{\mathcal{C}}$, comme discuté précédemment, la paire quark-antiquark de la mer n'est

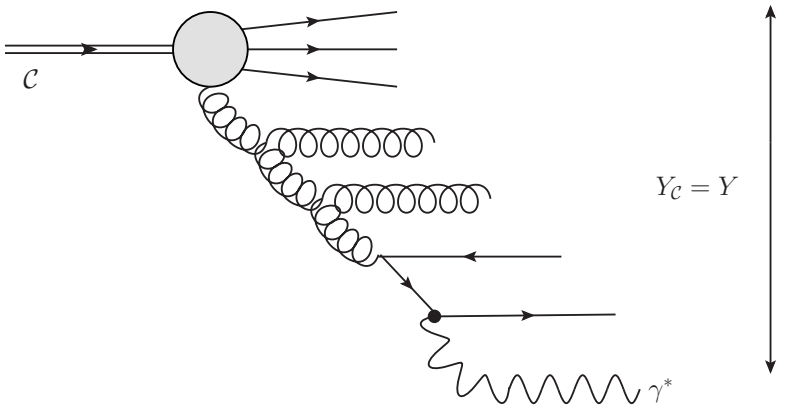

FIG. 1.6 – Diagramme d'ordre LL typique pour la DIS vue dans la référentiel de Bjorken.

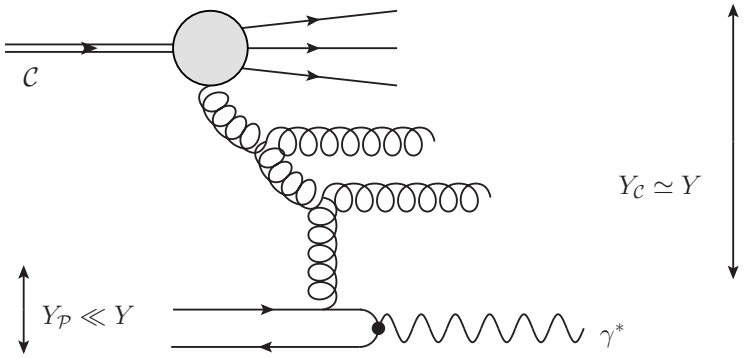

FIG. 1.7 – Même diagramme que la figure 1.6, mais vu dans le référentiel de dipôle.

plus considérée comme une fluctuation contenue dans la fonction d'onde de la cible mais dans celle du photon virtuel, comme indiqué sur la figure 1.7. Cette paire quark-antiquark est dans l'état singlet de couleur, et forme donc un dipôle de couleur. On peut toujours trouver un tel référentiel, avec de plus $Y_{\mathcal{P}} < 1$ et $Y_{\mathcal{C}} \simeq Y$, que l'on appellera référentiel de dipôle.

Dans ce référentiel de dipôle, on peut calculer la fonction d'onde du photon virtuel en théorie des perturbations. Puisque $Y_{\mathcal{P}} < 1$, on peut se limiter à un ordre fini. Par contre, comme $Y_{\mathcal{C}} \simeq Y \gg 1$, il faudra effectuer la resommation des grands logarithmes analogues à (1.21) dans la fonction d'onde de la cible. Si l'on effectue cette resommation à l'ordre LL, on peut se limiter à l'ordre dominant pour la fonction d'onde du photon. Cela correspond simplement à la transition purement électromagnétique $\gamma^* \to q\bar{q}$. On peut alors montrer que les sections efficaces photon-cible admettent la factorisation de dipôle [14]

$$\sigma_{T,L}^{\gamma^* \mathcal{C}}(x_{Bj}, Q^2) = \int d^2\mathbf{r}\ \sigma^{dip\,\mathcal{C}}(\mathbf{r}, Y) \int_0^1 dz\ \left|\Psi_{T,L}\left(z, \mathbf{r}, Q^2\right)\right|^2 . \tag{1.26}$$

Dans cette formule, la fonction d'onde $\Psi_{T,L}\left(z, \mathbf{r}, Q^2\right)$ du photon virtuel transverse ou longitudinal, donne l'amplitude de probabilité d'une fluctuation du photon en un dipôle quark-antiquark dont la taille et l'orientation dans le plan transverse sont données par $\mathbf{r}$. Le quark emporte une fraction z de l'impulsion q^- du photon, et donc l'antiquark une fraction $1 - z$. Le module au carré de ces fonctions d'onde est donné à l'ordre dominant en α_{em} en électro-

dynamique quantique par

$$|\Psi_T(z,\mathbf{r},Q^2)|^2 = \frac{N_c\alpha_{em}}{2\pi^2}\sum_i e_i^2\Big[\left(z^2+(1-z)^2\right)\bar{Q}_i^2\,\mathrm{K}_1^2\left(\bar{Q}_i|\mathbf{r}|\right)+m_i^2\,\mathrm{K}_0^2\left(\bar{Q}_i|\mathbf{r}|\right)\Big]$$
$$|\Psi_L(z,\mathbf{r},Q^2)|^2 = \frac{N_c\alpha_{em}}{2\pi^2}\sum_i 4\,e_i^2\,Q^2\,z^2(1-z)^2\,\mathrm{K}_0^2\left(\bar{Q}_i|\mathbf{r}|\right) \qquad (1.27)$$
$$\text{avec}\quad \bar{Q}_i \equiv \sqrt{m_i^2+z(1-z)Q^2}\,,$$

où K_0 et K_1 sont des fonctions de Bessel modifiées. Ces expressions contiennent évidemment une somme sur les saveurs i de quarks, ainsi qu'une somme sur les couleurs donnant le préfacteur N_c. Ces expressions sont régulières en $z=0$ et $z=1$. Il est donc improbable que le quark ou l'antiquark n'emporte qu'une fraction négligeable de q^-. Ceci est bien compatible avec notre hypothèse $Y_{\mathcal{P}}<1$. Dans la formule (1.26), $\sigma^{dip\,\mathcal{C}}(\mathbf{r},Y)$ représente la section efficace totale pour la collision entre le dipôle et la cible. Dans la limite de haute énergie que l'on étudie, on peut négliger l'effet de la masse du quark et de l'antiquark. Grâce à cela, cette section efficace est indépendante de la saveur du dipôle. Puisque z et $1-z$ ne sont pas trop petits, en général, l'intervalle de rapidité entre le quark et l'antiquark est petit, et donc $\sigma^{dip\,\mathcal{C}}(\mathbf{r},Y)$ est indépendante de z. On peut remarquer que l'échelle Q^2 n'intervient pas dans la collision dipôle-cible, où apparait par contre la taille $|\mathbf{r}|$ du dipôle. Il faudrait donc, en toute rigueur, remplacer dans $\sigma^{dip\,\mathcal{C}}$ l'intervalle de rapidité Y (1.25) par

$$Y_{dip} \equiv \log(2P^+q^-\,\mathbf{r}^2)\,. \qquad (1.28)$$

Toutefois, à l'ordre LL, on peut utiliser indifféremment Y_{dip} ou Y. La différence entre les deux n'engendre des corrections qu'à des ordres supérieurs.

On peut utiliser le théorème optique pour exprimer la section efficace totale $\sigma^{dip\,\mathcal{C}}$ en fonction de l'amplitude de collision élastique dipôle-cible $\mathcal{A}_{el}(\mathbf{r},\mathbf{b},Y)$ à paramètre d'impact $\mathbf{b}$

$$\sigma^{dip\,\mathcal{C}}(\mathbf{r},Y) = 2\int d^2\mathbf{b}\;\mathrm{Im}\mathcal{A}_{el}(\mathbf{r},\mathbf{b},Y)\,. \qquad (1.29)$$

1.2.3 Modèle des dipôles

Nous avons pour l'instant présenté la factorisation de dipôle pour la DIS, et repoussé le problème de la resommation des termes d'ordre LL. Ceux-ci sont contenus dans la section efficace dipôle-cible $\sigma^{dip\,\mathcal{C}}(\mathbf{r},Y)$. Nous allons maintenant présenter le modèle des dipôles [11, 12, 13], qui réalise cette resommation dans la voie s, à l'intérieur de la fonction d'onde d'un dipôle, et donne un résultat équivalent à l'équation BFKL. Cela donne accès à l'évolution de la section efficace de la DIS en fonction de l'intervalle de rapidité total Y, mais aussi à la section efficace de la collision entre deux photons virtuels, qui n'est autre qu'une DIS dont la cible est un photon virtuel. Nous verrons ensuite que le modèle des dipôles et l'équation BFKL ne peuvent être valables que sur un intervalle de rapidité fini, et doivent être corrigés dans la limite de haute énergie.

Construction de la fonction d'onde d'un dipôle par évolution en rapidité

Considérons un objet dont la fonction d'onde à l'ordre dominant en théorie des perturbations se réduit à un dipôle quark-antiquark dans l'état singlet de couleur, comme par exemple la partie hardonique d'un photon virtuel. Notons $\Phi^{(0)}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0,z_0)$ le module carré de cette fonction d'onde à l'ordre dominant, où $\mathbf{x}_0$ est la position du quark dans le plan transverse, $\mathbf{y}_0$ celle

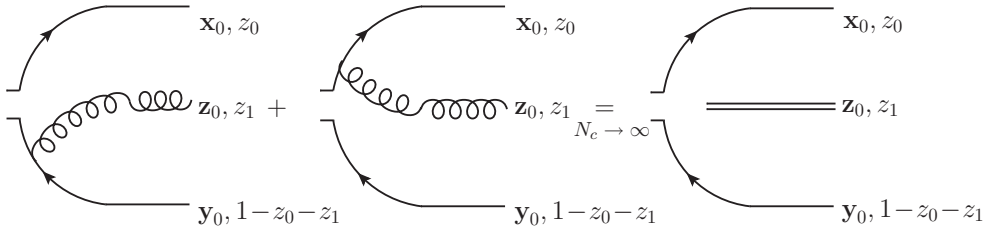

FIG. 1.8 – *A gauche* : Les deux diagrammes avec émission d'un gluon par le dipôle à l'ordre α_s. *A droite* : Dans la limite de 't Hooft $N_c \to \infty$ à $N_c\alpha_s$ fixé, ces diagrammes donnent la séparation du dipôle $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ en deux dipôles, $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$ et $(\mathbf{z}_0, \mathbf{y}_0)$.

de l'antiquark, et z_0 la fraction de l'impulsion sur le cône de lumière du dipôle emportée par le quark. A l'ordre suivant, en QCD, un gluon pourra être émis par le quark ou l'antiquark. On notera $\mathbf{x}_1$ et z_1 respectivement la position transverse de ce gluon et la fraction de l'impulsion sur le cône de lumière qu'il emporte. Ainsi, la fonction d'onde aura une composante $q\bar{q}g$, et une composante $q\bar{q}$ avec des corrections virtuelles. La composante $q\bar{q}g$ se calcule grâce aux diagrammes indiqués sur la figure 1.8. On peut montrer [11] que si le gluon est mou, c'est à dire $z_1 \ll z_0$ et $z_1 \ll 1 - z_0$, le module carré de la composante $q\bar{q}g$ prend la forme factorisée

$$\Phi^{(1)}_{q\bar{q}g}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, z_0; \mathbf{x}_1, z_1) = \frac{\alpha_s\,(N_c^2-1)}{2N_c\,\pi^2\,z_1}\,\frac{(\mathbf{x}_0-\mathbf{y}_0)^2}{(\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_1)^2\,(\mathbf{x}_1-\mathbf{y}_0)^2}\,\Phi^{(0)}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, z_0)\,. \tag{1.30}$$

La probabilité d'émettre un gluon mou est donc, à cet ordre,

$$\int_{z^\epsilon_{\mathcal{P}}}^{z_0} dz_1 \int d^2\mathbf{x}_1 \Phi^{(1)}_{q\bar{q}g}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, z_0; \mathbf{x}_1, z_1) = \frac{\alpha_s\,(N_c^2-1)}{\pi\,N_c}\,\ln\left(\frac{z_0}{z^\epsilon_{\mathcal{P}}}\right) I_\rho(|\mathbf{x}_0-\mathbf{y}_0|)\,\Phi^{(0)}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, z_0)\,. \tag{1.31}$$

en notant l'intégrale sur la position transverse du gluon

$$I_\rho(|\mathbf{x}_0-\mathbf{y}_0|) \equiv \int_\rho \frac{d^2\mathbf{x}_1}{2\pi}\,\frac{(\mathbf{x}_0-\mathbf{y}_0)^2}{(\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_1)^2\,(\mathbf{x}_1-\mathbf{y}_0)^2}\,. \tag{1.32}$$

Remarquons que dans l'expression (1.31), toutes les intégrales sont divergentes, puisqu'aussi bien l'émission d'un gluon mou que d'un gluon colinéaire conduit à une divergence logarithmique. L'indice ρ dans l'expression (1.32) indique que l'on régularise l'intégrale en enlevant du domaine d'intégration les points tels que $|\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_1|<\rho$ ou que $|\mathbf{x}_1-\mathbf{y}_0|<\rho$, pour une longueur ρ petite donnée. Comme expliqué dans la section 1.2.1, on introduit une coupure $z^\epsilon_{\mathcal{P}}$ dans l'intégration sur z_1, qui correspond à un intervalle de rapidité $Y_{\mathcal{P}}$. Celà conduit à un grand logarithme si $z^\epsilon_{\mathcal{P}}$ est très petit.

Aux ordres supérieurs en théories des perturbations, il pourra y avoir au plus un grand facteur logarithmique de ce type par puissance de α_s, seulement dans le cas où on rajoute à chaque ordre un gluon de plus en plus mou : $z_0 \gg z_1 \gg z_2 \gg z_3 \gg \ldots \gg z^\epsilon_{\mathcal{P}}$. Cette hiérarchie sur les z_i implique une hiérarchie sur les temps de vie de ces partons (*cf* formule (1.10)). Ainsi, lors de l'émission d'un gluon mou supplémentaire, les partons déja présents dans la fonction d'onde paraissent figés. Comme expliqué dans la section 1.2.1, il faut resommer ces contributions d'ordre LL pour pouvoir étudier des collisions en QCD dans la limite de haute énergie. Ici, ces contributions ont une structure assez complexe en général. Mais dans la limite de 't Hooft [15], c'est à dire $N_c \to \infty$ à $N_c\,\alpha_s$ fixé, de grandes simplifications interviennent.

D'une part, seuls les diagrammes planaires subsistent. D'autre part, on peut assimiler chaque gluon à une paire quark-antiquark colinéaires et de couleurs indépendantes. Ainsi, on peut réinterpréter l'émission d'un gluon mou par un dipôle en séparation de ce dipôle en deux dipôles jointifs, comme illustré sur la figure 1.8. Ceci ce généralise à toutes les contributions d'ordre LL [11]. La limite de 't Hooft revient typiquement à négliger des termes en $1/N_c^2$ par rapport aux termes dominants. On peut donc *a priori* s'attendre à des résultats valables à 10% près environ en QCD, c'est à dire pour $N_c = 3$.

Grâce à ces simplifications et à la hiérarchie des temps de vie des gluons successivement émis, on peut adopter une image probabiliste très simple pour la construction de la fonction d'onde d'un dipôle par resommation à l'ordre LL : lorsque l'on déplace la coupure $z_{\mathcal{P}}^{\epsilon}$ de manière à accroître $Y_{\mathcal{P}}$ de $dY_{\mathcal{P}}$, chaque dipôle de coordonnées $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ présent dans la fonction d'onde a une probabilité élémentaire

$$d\mathcal{P}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \bar{\alpha}\,\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2}{(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2\,(\mathbf{z}-\mathbf{y})^2}\,\frac{d^2\mathbf{z}}{2\pi}\,dY \tag{1.33}$$

de se séparer en un dipôle $(\mathbf{x},\mathbf{z})$ et un dipôle $(\mathbf{z},\mathbf{y})$, d'après le résultat (1.30). On a introduit ici la notation

$$\bar{\alpha} \equiv \frac{\alpha_s\,N_c}{\pi} \tag{1.34}$$

pour le couplage pertinent dans la limite de 't Hooft. L'évolution avec $Y_{\mathcal{P}}$ d'un dipôle initial est donc un processus stochastique classique, aboutissant à une chaîne de dipôle jointifs, comme illustré par la figure 1.9. Ce processus stochastique peut être étudié en utilisant une fonctionnelle génératrice [11]. Ici, nous le présentons plutôt sous la forme d'une équation maîtresse [16, 17]. Notons $P_N(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{N-1}|Y)$ la probabilité d'obtenir, après évolution d'un dipôle $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$ sur un intervalle de rapidité Y, une chaîne de N dipôles jointifs de coordonnées $(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{N-1},\mathbf{y}_0)$ en parcourant la chaîne d'une extrémité à l'autre. P_N est donc normalisé par

$$\sum_{N=1}^{\infty}\int d^2\mathbf{x}_1\ldots\mathbf{x}_{N-1}\,P_N(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{N-1}|Y) = 1\,. \tag{1.35}$$

L'évolution en rapidité de P_N est donnée par l'équation maîtresse

$$\begin{aligned} P_N(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{N-1}|Y+dY) &= \left[1-\bar{\alpha}\,dY\,\sum_{i=1}^{N} I_\rho\Big(|\mathbf{x}_{i-1}-\mathbf{x}_i|\Big)\right] P_N(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{N-1}|Y) \\ &+\bar{\alpha}\,dY\sum_{i=1}^{N-1}\frac{1}{2\pi}\,\frac{(\mathbf{x}_{i-1}-\mathbf{x}_{i+1})^2}{(\mathbf{x}_{i-1}-\mathbf{x}_i)^2\,(\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_{i+1})^2}\,P_{N-1}(\mathbf{x}_1,\ldots,\not{\mathbf{x}}_i,\ldots,\mathbf{x}_{N-1}|Y)\,, \end{aligned} \tag{1.36}$$

avec la notation $\mathbf{x}_N \equiv \mathbf{y}_0$. Le $\mathbf{x}_i$ est barré dans la deuxième ligne pour indiquer que cette variable n'est pas présente. Dans la première ligne, chaque terme de la somme correspond à la probabilité totale que dipôle $(\mathbf{x}_{i-1},\mathbf{x}_i)$ se scinde en deux pendant dY. Le facteur entre crochets correspond donc à la probabilité qu'aucun des dipôles de la chaîne ne se sépare en deux pendant dY. La deuxième ligne, par contre, donne la probabilité d'obtenir la chaîne $(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{N-1},\mathbf{y}_0)$ par séparation d'un dipôle en deux pendant dY dans une chaîne comprenant un dipôle de moins. Comme nous voulons étudier l'évolution sur un intervalle de rapidité Y de la fonction d'onde du dipôle $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$, nous prenons la condition initiale à $Y = 0$ correspondant à la présence de ce dipôle primordial seulement, c'est à dire

$$\begin{aligned} &P_1(0) = 1 \\ &P_N(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{N-1}|0) = 0 \quad \text{pour} \quad N > 1\,. \end{aligned} \tag{1.37}$$

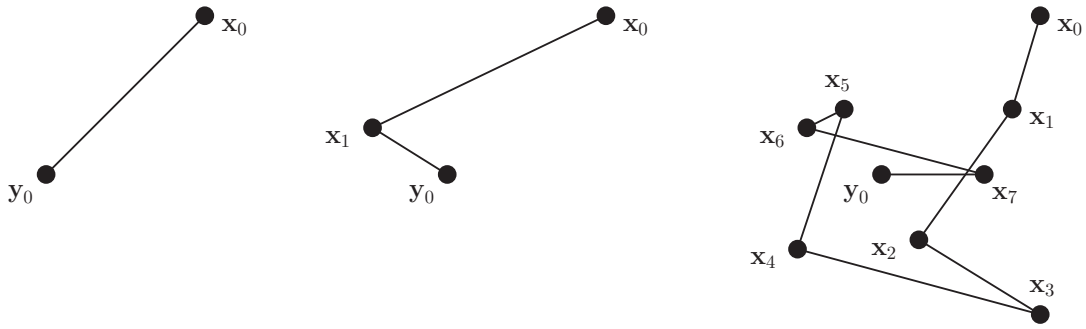

FIG. 1.9 – Exemples de configuration dans le plan transverse de la chaîne de dipôles engendrée par l'évolution (1.36). *A gauche* : Configuration initiale. *Au milieu* : Configuration après une séparation du dipôle initial en deux. *A droite* : Configuration après sept séparations de dipôles en deux.

On peut définir la densité moyenne en dipoles $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ dans la chaîne obtenue par évolution pendant Y du dipôle primordial $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ par

$$n_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}|\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \equiv \sum_{N=1}^{\infty} \int d^2\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{N-1}\, P_N(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N-1}|Y) \sum_{i=1}^{N} \delta(\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x})\, \delta(\mathbf{x}_i - \mathbf{y})\,. \quad (1.38)$$

Cette quantité est normalisée de manière à donner par intégration le nombre moyen $\langle N \rangle_Y$ de dipôles constituant la chaîne

$$\int d^2\mathbf{x}\, d^2\mathbf{y}\, n_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}|\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \sum_{N=1}^{\infty} \int d^2\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{N-1}\, P_N(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N-1}|Y)\, N = \langle N \rangle_Y\,. \quad (1.39)$$

A partir des relations (1.37) et (1.38), on vérifie facilement que la condition initiale pour n_Y est bien

$$n_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}|\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \delta(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})\, \delta(\mathbf{y}_0 - \mathbf{y})\,. \quad (1.40)$$

De la même manière, on pourrait definir une densité de paires de dipôles, ou plus généralement de multiplets de dipôles. L'évolution suivant le processus stochastique (1.36) conduit à une grande corrélation entre les dipôles présents à Y, ainsi qu'à des fluctuations importantes du nombre de dipôles [18].

On pourrait obtenir l'équation d'évolution pour $n_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}|\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ à partir de l'équation maîtresse (1.36) [17]. Il est toutefois plus simple de l'obtenir directement. n_Y doit effectivement vérifier la relation de récurrence

$$n_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}|\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = e^{-\bar{\alpha}\, I_\rho(|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|)\, Y}\ \delta(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})\, \delta(\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}) + \int_0^Y dY_1\, e^{-\bar{\alpha}\, I_\rho(|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|)\, (Y - Y_1)}$$
$$\times\ \bar{\alpha} \int_\rho \frac{d^2\mathbf{z}_0}{2\pi}\ \frac{(\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0)^2}{(\mathbf{x}_0 - \mathbf{z}_0)^2\, (\mathbf{z}_0 - \mathbf{y}_0)^2}\ \Big[n_{Y_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}|\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) + n_{Y_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}|\mathbf{z}_0, \mathbf{y}_0) \Big]\,, \quad (1.41)$$

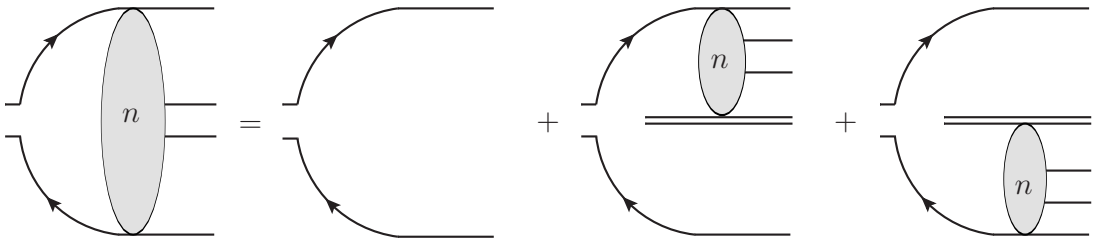

FIG. 1.10 – Ecriture symbolique de la relation de récurrence (1.41) vérifiée par la densité de dipôles $n_Y(\mathbf{x},\mathbf{y}|\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$.

que l'on peut représenter symboliquement comme sur la figure 1.10. Cette relation est l'analogue de celle présentée dans [11, 12], pour une quantité liée à n_Y. La probabilité que le dipôle primordial $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$ n'évolue pas durant Y est $e^{-\bar{\alpha}\, I_\rho(|\mathbf{x}_0-\mathbf{y}_0|)\, Y}$. La densité de dipôle reste dans ce cas identique à la condition initiale (1.40), d'où le premier terme dans le second membre de l'équation (1.41). Si au contraire le dipôle primordial évolue, on note $Y-Y_1$ la rapidité au bout de laquelle ce dipôle parent se scinde en deux dipôles enfants. On reconnait dans le second terme du membre de droite de l'équation (1.41) la probabilité élémentaire (1.33) de cette séparation, avec une intégration sur Y_1 et sur la position transverse $\mathbf{z}_0$ de l'extrémité commune aux deux dipôles enfants. L'exponentielle donne la probabilité qu'il n'y ait pas eu d'évolution avant, entre 0 et $Y-Y_1$. Une fois que cette séparation a eu lieu, la densité de dipôles est la somme des densités de dipôles dans les dipôles enfants $(\mathbf{x}_0,\mathbf{z}_0)$ et $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$, qui doivent encore évoluer sur un intervalle de rapidité Y_1, d'où la formule (1.41). En multipliant cette formule par $e^{\bar{\alpha}\, I_\rho(|\mathbf{x}_0-\mathbf{y}_0|)\, Y}$ et en prenant la dérivée par rapport à Y, nous obtenons l'équation d'évolution

$$\partial_Y n_Y(\mathbf{x},\mathbf{y}|\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0) = \bar{\alpha}\int \frac{d^2\mathbf{z}_0}{2\pi}\,\frac{(\mathbf{x}_0-\mathbf{y}_0)^2}{(\mathbf{x}_0-\mathbf{z}_0)^2(\mathbf{z}_0-\mathbf{y}_0)^2}\,\Big[n_Y(\mathbf{x},\mathbf{y}|\mathbf{x}_0,\mathbf{z}_0) + n_Y(\mathbf{x},\mathbf{y}|\mathbf{z}_0,\mathbf{y}_0) - n_Y(\mathbf{x},\mathbf{y}|\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)\Big]\,, \tag{1.42}$$

dont le noyau est identique à celui de l'équation BFKL à l'ordre LL [8, 9, 10] écrite dans l'espace des positions transverses [19]. Remarquons que dans l'équation (1.42), nous pouvons prendre la limite $\rho \to 0$ pour la coupure, car il y a annulation des divergences colinéaires entre les termes de l'équation. Cette équation est donc bien définie.

DIS et collisions $\gamma^*\gamma^*$ dans le modèle des dipôles.

Examinons maintenant comment utiliser le modèle des dipôles pour calculer des sections efficaces à haute énergie. Par exemple, considérons d'abord le cas d'une collision entre deux photons virtuels, qui est un processus *a priori* observable auprès de collisionneurs d'électrons ou de positrons. Dans ce cas, on peut utiliser la factorisation de dipôle (1.26) aussi bien pour le projectile que pour la cible, et écrire

$$\sigma^{\gamma^*\gamma^*}_{T,L;T,L}(x_{Bj},Q^2,Q'^2) = \int d^2\mathbf{r}\int_0^1 dz\,\left|\Psi_{T,L}\left(z,\mathbf{r},Q^2\right)\right|^2 \times \int d^2\mathbf{r}'\int_0^1 dz'\,\left|\Psi_{T,L}\left(z',\mathbf{r}',Q'^2\right)\right|^2 \sigma^{dip\,dip}(\mathbf{r},\mathbf{r}',Y)\,. \tag{1.43}$$

Il reste donc à déterminer la section efficace totale $\sigma^{dip\,dip}(\mathbf{r},\mathbf{r}',Y)$ entre deux dipôles avec un intervalle de rapidité total Y. En utilisant le théorème optique, on réécrit cette section efficace

totale comme

$$\sigma^{dip\,dip}(\mathbf{r},\mathbf{r}',Y) = 2\int d^2\mathbf{b}\;\alpha_s^2\,\mathcal{A}_Y\left(\mathbf{b}+\frac{\mathbf{r}}{2},\mathbf{b}-\frac{\mathbf{r}}{2}\middle|\frac{\mathbf{r}'}{2},-\frac{\mathbf{r}'}{2}\right)\,, \tag{1.44}$$

en notant $\alpha_s^2\,\mathcal{A}_Y(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0|\mathbf{x}_0',\mathbf{y}_0')$ la partie imaginaire de l'amplitude de collision élastique entre deux dipôles de positions $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$ et $(\mathbf{x}_0',\mathbf{y}_0')$ dans le plan transverse. Quand l'intervalle de rapidité est petit ($Y\simeq 0$), cette amplitude de collision élastique est donnée à l'ordre dominant en théorie des perturbations par l'échange de deux gluons, et l'on a [12, 16]

$$\alpha_s^2\,\mathcal{A}_0(\mathbf{x},\mathbf{y}|\mathbf{x}',\mathbf{y}') \equiv \frac{\alpha_s^2}{8}\,\ln^2\left(\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y}')^2\,(\mathbf{x}'-\mathbf{y})^2}{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')^2\,(\mathbf{y}'-\mathbf{y})^2}\right). \tag{1.45}$$

Pour passer de la relation (1.45) à $\mathcal{A}_Y(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0|\mathbf{x}_0',\mathbf{y}_0')$, il faut prendre en compte l'évolution (1.36) des fonctions d'ondes des dipôles primordiaux de taille $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}'$ avec l'intervalle de rapidité. Nous pouvons partager l'intervalle de rapidité Y de manière arbitraire entre $Y_{\mathcal{P}}$ et $Y_{\mathcal{C}}$, et calculer l'évolution pendant $Y_{\mathcal{P}}$ (respectivement $Y_{\mathcal{C}}$) du dipôle projectile (respectivement cible). Pour chaque réalisation de chacun de ces deux processus stochastiques, il faut calculer l'amplitude de collision élastique entre les deux chaînes de dipôles obtenues. En principe, chaque dipôle de l'une peut interagir avec chaque dipôle de l'autre, suivant (1.45). Chaque collision dipôle-dipôle va amener un facteur α_s^2 supplémentaire. On peut donc se limiter, en première approximation, à une seule collision dipôle-dipôle lors de la collision entre les deux chaînes de dipôles. Dans ce cas, on peut effectuer explicitement la moyenne sur les réalisations des processus stochastiques donnant l'évolution de la cible et du projectile, et écrire cette amplitude élastique en utilisant les densités moyennes de dipôles

$$\alpha_s^2\,\mathcal{A}_Y^{(1)}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0|\mathbf{x}_0',\mathbf{y}_0') = \int d^2\mathbf{x}\,d^2\mathbf{y}\,d^2\mathbf{x}'\,d^2\mathbf{y}'\,n_{Y_{\mathcal{P}}}(\mathbf{x},\mathbf{y}|\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)\;\alpha_s^2\,\mathcal{A}_0(\mathbf{x},\mathbf{y}|\mathbf{x}',\mathbf{y}')\;n_{Y_{\mathcal{C}}}(\mathbf{x}',\mathbf{y}'|\mathbf{x}_0',\mathbf{y}_0')\,. \tag{1.46}$$

Par analogie, on peut écrire pour la section efficace dipôle-cible apparaissant dans la factorisation de dipôle (1.26) de la DIS

$$\sigma^{dip\,\mathcal{C}}(\mathbf{r}_0,Y) = \int d^2\mathbf{r}\,d^2\mathbf{b}\;n_{Y_{\mathcal{P}}}\left(\mathbf{b}+\frac{\mathbf{r}}{2},\mathbf{b}-\frac{\mathbf{r}}{2}\middle|\frac{\mathbf{r}_0}{2},-\frac{\mathbf{r}_0}{2}\right)\;\sigma^{dip\,\mathcal{C}}(\mathbf{r},Y_{\mathcal{C}})\,, \tag{1.47}$$

dans l'approximation où un seul dipôle contenu dans le projectile évolué jusqu'à $Y_{\mathcal{P}}$ va interagir avec la cible. On est libre de choisir $Y_{\mathcal{P}}\simeq Y$ et $Y_{\mathcal{C}}\simeq 0$ dans la formule (1.47), et ainsi de placer toute l'évolution en rapidité dans la densité de dipôle $n_{Y_{\mathcal{P}}}$, vérifiant l'équation (1.42).

1.2.4 Limitations de l'évolution BFKL et du modèle des dipôles

Dans le cadre du modèle des dipôles, d'après les relations (1.46) et (1.47), le comportement dans la limite de haute énergie des sections efficaces totales des collisions $\gamma^*\gamma^*$ et de la DIS est gouverné par l'équation (1.42), si l'on l'on suppose qu'il ne va se produire qu'une seule collision entre un constituant du projectile et un constituant de la cible. Comme nous l'avons mentionné, l'équation (1.42) possède le même noyau que l'équation BFKL [8, 9, 10], et donne donc la même dépendance en Y. Effectivement, ces deux équations resomment toutes deux les mêmes termes en logarithmes dominants, même si elles sont obtenues dans des formalismes assez différents.

Le noyau BFKL commun à ces deux équations conduit à deux problèmes indiquant qu'elles sont incomplètes dans la limite de haute énergie. Nous étudierons les solutions de l'évolution BFKL dans la section 2.1, et nous anticipons ici sur certaines de leurs propriétés :

1. *Non unitarité* : Le noyau BFKL conduit à une croissance exponentielle des solutions, en $e^{4\ln 2\ \bar{\alpha}Y}$. Or, l'unitarité de la théorie implique que les amplitudes de collision élastique à paramètre d'impact fixé doivent rester bornées. En particulier, dans la limite de haute énergie où la partie réelle de ces amplitudes est négligeable, la partie imaginaire doit être bornée par 1. L'évolution BFKL conduit donc à une violation de l'unitarité. Cela indique que l'on a oublié des contributions essentielles dans la limite de haute énergie.
2. *Diffusion vers l'infrarouge* : L'échelle transverse typique, impulsion des gluons ou taille des dipôles, ne reste pas du même ordre de grandeur au cours d'une évolution de type BFKL. Le noyau conduit à un comportement diffusif des solutions où le rôle de la position est joué par le logarithme de ces échelles transverses. Par exemple, après une évolution suivant le processus (1.36) sur un intervalle de rapidité Y, la variance de l'ordre de grandeur de la taille des dipôles présents dans la chaîne sera $(\Delta \ln r^2)^2 \propto \bar{\alpha}Y$. Considérons un processus apparemment entièrement calculable en théorie des perturbations, comme la section efficace totale des collisions $\gamma^*\gamma^*$ avec des virtualités Q^2 et Q'^2 du même ordre et grandes devant l'échelle nonperturbative Λ_{QCD}. Le caractère diffusif de l'évolution BFKL semble indiquer que même cette section efficace sera sensible au domaine nonperturbatif de la QCD pour $\bar{\alpha}Y \gtrsim \ln^2(Q^2/\Lambda_{QCD})$. Jusque là, nous avons supposé le couplage α_s fixe. Un des principaux raffinement à apporter à l'approximation LL est de prendre en compte la liberté asymptotique de la QCD. Comme cela implique un couplage plus grand dans l'infrarouge que dans l'ultraviolet, la dynamique des solutions devient nettement plus rapide dans l'infrarouge. Cela aggrave fortement le problème de diffusion, et conduit à des solutions entièrement dominées par la QCD nonperturbative. Finalement, cela ne laisse que deux possibilités : soit l'évolution BFKL est incomplète et les termes négligés empêcheraient cette diffusion vers l'infrarouge, soit la QCD est intrinsèquement nonperturbative dans la limite de haute énergie.

Dans le cadre du modèle des dipôles, pour la section efficace totale $\gamma^*\gamma^*$, on pourrait penser que la violation de l'unitarité est due à l'approximation effectuée pour obtenir la formule (1.46), c'est à dire la restriction à une seule collision dipôle-dipôle lors de la collision entre le projectile et la cible. Il a été proposé [13] de prendre en compte les collisions multiples dipôle-dipôle pour unitariser l'amplitude (1.46). Cela permet bien d'obtenir $\alpha_s^2\,\mathcal{A}_Y \leq 1$, mais cela soulève de nouveaux problèmes.

Chaque collision multiple dipôle-dipôle apporte un facteur α_s^2 supplémentaire. Dans le cadre de la limite de 't Hooft, il convient de réécrire ce facteur $\alpha_s^2 = \pi^2\bar{\alpha}^2/N_c^2$. Nous avons explicitement négligé les termes supprimés à grand N_c lors du calcul de l'évolution en Y de la fonction d'onde d'un dipôle. Il ne semble donc pas très cohérent de garder ces termes ici. De plus, on s'attend à ce que les théories de jauge non-abéliennes restent unitaires dans la limite de grand N_c, où ces termes ne peuvent pas être présents. Cela suggère que la solution complète du problème d'unitarité se trouve au delà du modèle des dipôles.

Par ailleurs, l'unitarité de la théorie n'impose pas seulement une contrainte sur l'amplitude de diffusion élastique à paramètre d'impact fixé. On doit aussi vérifier la borne de Froissart [20, 21], c'est à dire

$$\sigma(Y) \leqslant \mathcal{O}(Y^2) \qquad \text{pour} \quad Y \to \infty\ , \tag{1.48}$$

en gardant tous les échelles d'impulsion transverse ou de taille transverse ou de virtualité fixées. Cette borne s'obtient de manière générale pour une section efficace totale hadronique, en supposant simplement l'unitarité de la théorie, l'absence de hadrons de masse nulle, et des propriétés d'analyticité des amplitudes des diffusion hadron-hadron. Dans le modèle des dipôles, même en prenant en compte les collisions multiples dipôle-dipôle, on obtient une section efficace totale dipôle-dipôle croissant exponentiellement en Y [13, 16]. Cela est dû au caractère diffusif du noyau BFKL, qui se manifeste non seulement en terme de taille de

dipôle, mais aussi de paramètre d'impact. La séparation d'un dipôle en deux dipôles de très grande taille peut effectivement agrandir rapidement le rayon typique dans le plan transverse de la chaîne de dipôles. Pour résoudre ce problème, il faudrait modifier l'évolution (1.36) pour interdire les dipôles de taille plus grande que l'échelle de confinement de la couleur Λ_{QCD}^{-1}, de manière à freiner cette diffusion en paramètre d'impact.

L'équation BFKL et le modèle des dipôles traitent le projectile et la cible considérés comme des objets dilués. Leurs constituants, gluons ou dipôles, évoluent donc de manière indépendante avec la rapidité. Or, cette évolution conduit à des systèmes de plus en plus peuplés, et il va falloir modifier cette évolution pour inclure les effets collectifs de saturation de la fonction d'onde. Dans la section suivante, nous allons présenter un formalisme permettant de prendre en compte cela. Ces effets de saturation résolvent tous les problèmes que nous avons signalé.

1.3 Le Condensat de Verre de Couleur appliquée à la DIS

1.3.1 Le formalisme du CGC au niveau classique

Idée générale

Jusqu'ici, nous avons utilisé une description en termes de partons pour les projectiles ou cibles hadroniques. Cela correspond à exprimer leur fonction d'onde sur la base des états de Fock, c'est à dire

$$|\Psi\rangle = a_0 \,|uud\rangle + a_1 \,|uudg\rangle + a_2 \,|uudgg\rangle + \cdots + a_n \left|uudggg \ldots \bar{d}d\right\rangle + \ldots \tag{1.49}$$

pour un proton, par exemple. Comme nous l'avons vu dans la section 1.1, cette description est très fructueuse pour les partons emportant une fraction z non négligeable de l'impulsion P^+ de la cible. Ceux-ci ont en effet un long temps de vie, dans un référentiel où P^+ est grande, et semblent libres.

D'après la relation 1.10, les partons à petit z, essentiellement des gluons, ont un temps de vie plus court que ceux à grand z. On peut donc considérer qu'ils sont émis par les partons à plus grand z, comme dans le modèle des dipôles. Et lors de l'émission, ces partons à plus grand z semblent gelés. Nous avons vu que les gluons mous sont émis en grand nombre, puisque les termes correspondants dans les séries perturbatives sont amplifiées par des grands logarithmes. On ne peut donc pas représenter fidèlement ces gluons mous en utilisant une base de Fock tronquée à un nombre fini donné de partons. Par ailleurs les gluons mous sont délocalisés sur une longueur assez grande d'après la relation (1.11), et peuvent donc avoir un recouvrement important, jusqu'à former un état cohérent. Tout ceci est analogue avec le théorème de Low-Burnett-Kroll [22, 23], selon lequel les gluons mous émis lors d'un processus dur constituent une radiation essentiellement classique. Il est alors plus naturel de décrire la partie molle des champs de gluons en termes d'états cohérents semi-classiques plutôt que d'états de Fock.

Le formalisme du Condensat de Verre de Couleur (CGC) [24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37] est une théorie effective permettant de décrire la fonction d'onde d'un objet hadronique de grande impulsion P^+, en particulier les gluons mous qu'il contient. L'idée centrale est d'introduire une coupure en z ou, de manière équivalente, en rapidité, séparant les partons rapides des gluons mous. Ces derniers sont assimilés au champ classique rayonné par les partons rapides. Comme ce champ classique n'est pas sensible à la nature et aux nombres quantiques des partons qui le rayonnent, excepté la charge de couleur, on peut décrire l'ensemble des partons rapides simplement par une densité de courant de charges de couleur J_a^μ. On peut dériver de la QCD une équation de groupe de renormalisation donnant

l'évolution de cette théorie effective quand on déplace la coupure entre les deux types de modes, ce qui justifie ce formalisme. Ceci sera l'objet de la section 1.3.2. Décrivons pour l'instant les autres ingrédients de la théorie effective du CGC.

Courant de couleur de la cible

Dans une cible ultrarelativiste de très grande impulsion P^+, les partons rapides emportant une fraction z importante de P^+ vont se déplacer approximativement parallèlement à la direction x^+. La densité de courant de couleur J_a^μ qui les décrit n'a donc qu'une composante J_a^+ non nulle. De même, le support de $J_a^+(x^+, x^-, \mathbf{x})$ doit être très étroit dans la la direction x^-, traduisant la contraction de la cible ultrarelativiste dans la direction longitudinale. Puisque ces partons rapides ont une grande durée de vie devant celle des gluons mous, et qu'ils émettent les gluons mous sans recul, on est tentés de considérer que le courant J_a^+ est indépendant de x^+. Au niveau classique, l'équation de conservation des charges de couleur s'écrit

$$[D_\mu, J^\mu] = 0\,, \tag{1.50}$$

avec la dérivé covariante $D_\mu = \partial_\mu - ig_s A_\mu$, et en se plaçant dans une représentation $\mathcal{R}$ de $SU(3)$ de générateurs $T_\mathcal{R}^a$, de sorte que $J^\mu = J_a^\mu T_\mathcal{R}^a$ et $A^\mu = A_a^\mu T_\mathcal{R}^a$. Puisque J^μ n'a qu'une composante $+$, la relation (1.50) devient

$$\partial_+ J^+ = ig_s \left[A^-, J^+\right]\,. \tag{1.51}$$

On ne peut donc pas prendre J^+ indépendant de x^+, puisque l'équation (1.51) implique une précession de J^+ dans l'espace des couleurs $SU(N_c)$. On peut toutefois définir une densité de charge $\rho = \rho_a T_\mathcal{R}^a$ indépendante de x^+, et résoudre (1.51) explicitement sous la forme

$$J^+(x^+, x^-, \mathbf{x}) = U[A^-](x^+, x^-, \mathbf{x})\ \rho(x^-, \mathbf{x})\ U^\dagger[A^-](x^+, x^-, \mathbf{x})\,, \tag{1.52}$$

en prenant en compte cette précession dans l'espace des couleurs grâce à la ligne de Wilson

$$U[A^-](x^+, x^-, \mathbf{x}) \equiv P \exp\left[ig_s \int_{-\infty}^{x^+} dx'^+ A^-(x'^+, x^-, \mathbf{x})\right]\,, \tag{1.53}$$

où le P signifie que les matrices $T_\mathcal{R}^a$ contenues dans les champs A^- sont ordonnées de la droite vers la gauche selon les x'^+ croissants.

Champ de gluons classique de la cible

Etudions maintenant le champ classique de gluons rayonné par la densité de courant (1.52). Il est donné par les équations de Yang-Mills classiques

$$[D_\mu, F^{\mu\nu}] = J^\nu\,, \tag{1.54}$$

avec $F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - ig_s\,[A^\mu, A^\nu]$. Puisque l'on se place dans un référentiel où la cible a une très grande impulsion P^+, nous pouvons nous limiter aux composantes du champ $F^{\mu\nu}$ qui sont amplifiées par la transformation de Lorentz par rapport au référentiel où la cible est au repos, c'est à dire $F^{+i} = -F^{i+}$, où $i = 1, 2$ désigne les directions transverses. Nous voulons donc résoudre les équations

$$\left[D_i, F^{i+}\right] = J^+ \tag{1.55}$$

$$\left[D_+, F^{+i}\right] = 0 \tag{1.56}$$

$$0 = F^{+-} = \partial_- A^- - \partial_+ A^+ - ig_s \left[A^+, A^-\right] \tag{1.57}$$

$$F^{ij} = 0 \quad \text{pour} \quad i, j = 1, 2\,. \tag{1.58}$$

L'équation (1.58) signifie que pour chaque x^+ et x^-, les champs A^i forment une pure jauge bidimensionelle. Il existe donc une fonction $\mathcal{U}(x^+, x^-, \mathbf{x})$ à valeurs dans $SU(N_c)$ telle que

$$A^i(x^+, x^-, \mathbf{x}) \equiv \frac{i}{g_s}\, \mathcal{U}(x^+, x^-, \mathbf{x})\; \partial^i \mathcal{U}^\dagger(x^+, x^-, \mathbf{x})\,. \tag{1.59}$$

L'équation (1.56) est du même type que (1.51) et implique une précession du champ F^{+i} dans le groupe de couleur $SU(N_c)$. Pour simplifier cette équation ainsi que l'expression (1.52) de la densité de courant de couleur, choisissons un jauge telle que $A^- \equiv 0$. Dans ce cas, la densité de courant $J^+ = \rho$, le champ F^{+i} et le champ A^+ sont indépendants du temps x^+, d'après les relations (1.52), (1.56) et (1.57) respectivement. On peut alors supposer $\mathcal{U}$ indépendante de x^+ sans perte de généralité.

A ce stade, il ne nous reste plus que l'équation (1.55) à résoudre, et nous avons deux fonctions inconnues $A^+(x^-, \mathbf{x})$ et $\mathcal{U}(x^-, \mathbf{x})$. La condition $A^- \equiv 0$ ne fixe effectivement pas complètement la jauge : toute transformation de jauge

$$A^\mu \mapsto \tilde{A}^\mu = \mathcal{V} A^\mu \mathcal{V}^\dagger + \frac{i}{g_s}\, \mathcal{V}\; \partial^\mu \mathcal{V}^\dagger \tag{1.60}$$

avec une matrice $\mathcal{V}$ de $SU(N_c)$ indépendante de x^+ conserve la condition $A^- \equiv 0$. Pour finir de fixer la jauge, on peut par exemple choisir $\mathcal{V}(x^-, \mathbf{x}) \equiv \mathcal{U}^\dagger(x^-, \mathbf{x})$, ce qui donne $\tilde{A}^i \equiv 0$. Il ne reste donc que le champ $\tilde{A}^+(x^-, \mathbf{x})$. On appelle jauge covariante ce choix de jauge, puisque $\partial_\mu \tilde{A}^\mu = 0$ est alors automatiquement vérifié. Comme dans la littérature (en particulier [35]), nous notons avec un tilde les quantités exprimées dans cette jauge covariante, et nous notons $\alpha(x^-, \mathbf{x}) \equiv \tilde{A}^+(x^-, \mathbf{x})$. Le champ chromo-électrique est alors $\tilde{F}^{i+} = -\partial_i \alpha$, et l'équation (1.55) s'écrit

$$-\Delta_\perp \alpha(x^-, \mathbf{x}) = \tilde{\rho}(x^-, \mathbf{x})\,. \tag{1.61}$$

En utilisant la fonction de Green du Laplacien bidimensionnel, on peut résoudre explicitement cette équation par

$$\alpha(x^-, \mathbf{x}) = \int \frac{d^2\mathbf{x}'}{4\pi}\; \ln \frac{1}{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 \mu^2}\; \tilde{\rho}(x^-, \mathbf{x}')\,, \tag{1.62}$$

où μ est une échelle d'impulsion nécessaire pour écrire la fonction de Green, et qui devrait disparaitre dans l'expression de quantités physiques. Rappelons nous que $\tilde{\rho}(x^-, \mathbf{x})$ a un support très étroit dans la direction x^-, par contraction des longueurs. Le champ $\alpha(x^-, \mathbf{x}) = \alpha_a T^a_{\mathcal{R}}$ a donc le même support.

Lignes de Wilson et matrice S

Dans le formalisme du CGC, l'état de la cible est caractérisé par la densité de charge de couleur $\tilde{\rho}(x^-, \mathbf{x})$ dans la jauge covariante, correspondant aux partons d'impulsion p^+ telle que $e^{-Y_\mathcal{C}} P^+ < p^+ < P^+$. $Y_\mathcal{C}$ indique la coupure entre partons rapides et gluons mous. Le champ de gluons mous se déduit de $\tilde{\rho}$ par la formule (1.62). Nous écrirons donc un état quantique générique de la cible

$$|\mathcal{C}, Y_\mathcal{C}\rangle = \int D[\tilde{\rho}]\; \Phi_{Y_\mathcal{C}}[\tilde{\rho}]\; |\tilde{\rho}\rangle\,, \tag{1.63}$$

en utilisant une fonction d'onde $\Phi_{Y_\mathcal{C}}[\tilde{\rho}]$, et les états $|\tilde{\rho}\rangle$ normalisés par $\langle \tilde{\rho}' \,|\tilde{\rho}\rangle = \delta[\tilde{\rho}' - \tilde{\rho}]$, en notant $\delta[.]$ la mesure de Dirac sur l'espace des fonctions de $(x^-, \mathbf{x})$.

Discutons maintenant comment appliquer le formalisme du CGC à la DIS à petit x_{Bj}, avec la factorisation des dipôles. D'après la formule (1.29), il nous faut calculer l'amplitude de diffusion élastique entre la cible et le dipôle constituant le projectile. A petit x_{Bj}, le dipôle va interagir avec le champ de gluons mous, mais pas directement avec les partons rapides en

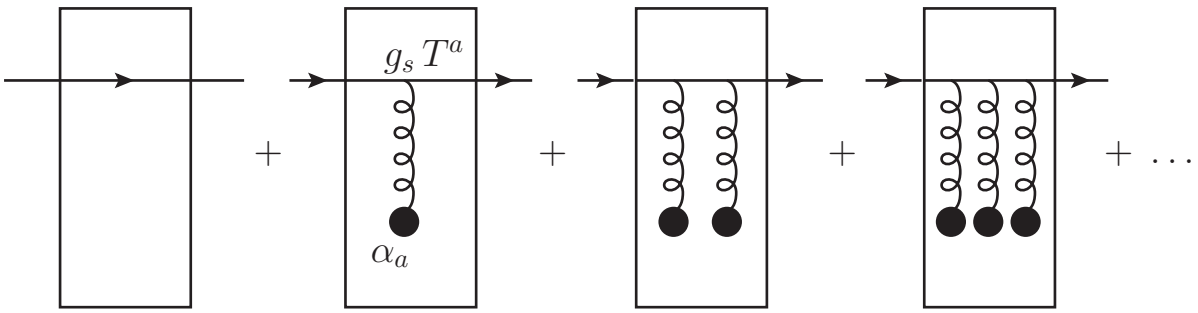

FIG. 1.11 – Diagrammes contribuants à la matrice S pour la diffusion élastique d'un quark par un champ de gluons classique $\alpha_a(x^-,\mathbf{x}) \equiv \tilde{A}^+_a(x^-,\mathbf{x})$ dans l'approximation eikonale. Le rectangle symbolise la zone de l'espace-temps où le champ classique est non nul.

général. Il suffit donc de calculer la diffusion élastique d'un dipôle par un champ de gluons classique, très localisé dans la direction x^-. A haute énergie, le temps que met le dipôle pour traverser ce champ est très court devant le temps typique d'interaction entre le quark et l'antiquark dans le dipôle. On peut donc traiter la diffusion du quark par le champ et celle de l'antiquark indépendemment l'une de l'autre. Nous nous plaçons dans le cadre de l'approximation eikonale, selon laquelle, à haute énergie, la diffusion de chaque parton du projectile par le champ classique de la cible ne modifie pas la configuration de ce champ.

Nous devons donc calculer l'élément de matrice S correspondant à la diffusion d'un parton par un champ classique donné. Chaque insertion du champ classique arrive avec un facteur g_s. Or, même si g_s est petit, le champ classique $\alpha(x^-,\mathbf{x})$ peut être aussi grand que $1/g_s$, si la cible est dense. Il nous faut donc resommer les termes en $[g_s\alpha_a(x^-,\mathbf{x})]^n$ correspondants aux interactions multiples du parton avec le champ classique, c'est à dire les diagrammes représentés sur la figure 1.11 dans le cas d'un quark. Nous négligeons par contre les corrections d'ordre $g_s^2[g_s\alpha_a(x^-,\mathbf{x})]^n$. Dans l'approximation eikonale, on peut montrer que chaque interaction avec le champ α_a laisse le spin du quark inchangé. De plus, $\alpha_a(x^-,\mathbf{x})$ est indépendant de x^+, et donc sa transformée de Fourier est proportionnelle à $\delta(p^-)$. La champ ne peut donc pas modifier l'impulsion k^- du quark. On peut aussi vérifier qu'à cet ordre, le champ ne peut pas dévier le quark de sa trajectoire purement longitudinale. La position de celui-ci dans le plan transverse reste donc inchangée au cours du processus. Finalement, le seul effet de la diffusion élastique est une modification de la couleur du quark. Notons $|q(\mathbf{x},\zeta)\rangle$ l'état initial du quark, où $\mathbf{x}$ est sa position transverse et ζ sa couleur. Le calcul de la série des diagrammes 1.11 donne simplement une exponentiation du diagramme avec une seule insertion du champ classique α_a. On trouve alors l'action de la matrice S sur l'état initial

$$\hat{S}|q(\mathbf{x},\zeta)\rangle \otimes |\tilde{\rho}\rangle = \sum_\eta \Big[V[\alpha](\mathbf{x})\Big]_{\zeta\eta}\, |q(\mathbf{x},\eta)\rangle \otimes |\tilde{\rho}\rangle\,, \tag{1.64}$$

en notant $V[\alpha](\mathbf{x})$ la ligne de Wilson dans la représentation fondamentale

$$V[\alpha](\mathbf{x}) = P\exp\left[ig_s\int_{-\infty}^{+\infty} dx^-\alpha_a(x^-,\mathbf{x})\,T^a\right]\,, \tag{1.65}$$

où les matrices T^a sont les générateurs de $SU(N_c)$ dans la représentation fondamentale. De même, pour la diffusion par le champ classique α_a d'un antiquark dans un état initial $|\bar{q}(\mathbf{x},\dot{\zeta})\rangle$, on obtient l'action de la matrice S

$$\hat{S}|\bar{q}(\mathbf{x},\dot{\zeta})\rangle \otimes |\tilde{\rho}\rangle = \sum_{\dot{\eta}} \Big[V^\dagger[\alpha](\mathbf{x})\Big]_{\dot{\eta}\dot{\zeta}}\, |\bar{q}(\mathbf{x},\dot{\eta})\rangle \otimes |\tilde{\rho}\rangle\,. \tag{1.66}$$

Les indices pointés sont ceux associés aux anticouleurs. Et dans le cas d'un gluon dans l'état initial $|g(\mathbf{x},b)\rangle$ diffusant dans le champs classique α_a, l'action de la matrice S

$$\hat{S}|g(\mathbf{x},b)\rangle \otimes |\tilde{\rho}\rangle = \sum_c V_A^{bc}[\alpha](\mathbf{x})\ |g(\mathbf{x},c)\rangle \otimes |\tilde{\rho}\rangle\,, \tag{1.67}$$

est donnée par la ligne de Wilson dans la représentation adjointe de $SU(N_c)$

$$V_A^{bc}[\alpha](\mathbf{x}) = \left\{ P \exp\left[ig_s \int_{-\infty}^{+\infty} dx^- \alpha_a(x^-,\mathbf{x})\, t^a \right] \right\}^{bc}\,, \tag{1.68}$$

en notant $(t^a)^{bc}$ les générateurs de la représentation adjointe. Nous utilisons ici des états quantiques à un parton normalisés par

$$\begin{aligned} \langle q(\mathbf{x},\eta)|q(\mathbf{x},\zeta)\rangle &= \delta_{\eta\zeta} \\ \langle \bar{q}(\mathbf{x},\dot{\eta})|\bar{q}(\mathbf{x},\dot{\zeta})\rangle &= \delta_{\dot{\eta}\dot{\zeta}} \\ \langle g(\mathbf{x},c)|g(\mathbf{x},b)\rangle &= \delta_{cb}\,. \end{aligned} \tag{1.69}$$

En effet, la dépendance en position transverse, notamment, est déja traitée implicitement dans la factorisation de dipôle (1.26).

Maintenant que nous avons décrit la diffusion élastique à haute énergie d'un parton isolé sur un champ classique, revenons au cas d'un dipôle. L'état quantique d'un dipôle $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ singlet de couleur s'écrit

$$|q\bar{q}(\mathbf{x},\mathbf{y})\rangle \equiv \sum_{\zeta,\dot{\zeta}} \frac{\delta_{\zeta\dot{\zeta}}}{\sqrt{N_c}} |q(\mathbf{x},\zeta)\rangle \otimes |\bar{q}(\mathbf{y},\dot{\zeta})\rangle\,, \tag{1.70}$$

de manière à avoir $\langle q\bar{q}(\mathbf{x},\mathbf{y})|q\bar{q}(\mathbf{x},\mathbf{y})\rangle = 1$. Calculons maintenant l'élément de matrice S pour la diffusion élastique de ce dipôle sur la cible.

$$\begin{aligned} &\langle \mathcal{C}, Y_{\mathcal{C}}| \otimes \langle q\bar{q}(\mathbf{x},\mathbf{y})|\hat{S}|q\bar{q}(\mathbf{x},\mathbf{y})\rangle \otimes |\mathcal{C}, Y_{\mathcal{C}}\rangle \\ &= \int D[\tilde{\rho}']\ \Phi^*_{Y_{\mathcal{C}}}[\tilde{\rho}']\ \int D[\tilde{\rho}]\ \Phi_{Y_{\mathcal{C}}}[\tilde{\rho}]\ \sum_{\zeta,\dot{\zeta}} \frac{\delta_{\zeta\dot{\zeta}}}{\sqrt{N_c}} \sum_{\theta,\dot{\theta}} \frac{\delta_{\theta\dot{\theta}}}{\sqrt{N_c}} \\ &\quad \times \langle \tilde{\rho}'| \otimes \langle \bar{q}(\mathbf{y},\dot{\theta})| \otimes \langle q(\mathbf{x},\theta)|\hat{S}|q(\mathbf{x},\zeta)\rangle \otimes |\bar{q}(\mathbf{y},\dot{\zeta})\rangle \otimes |\tilde{\rho}\rangle \\ &= \int D[\tilde{\rho}']\ \Phi^*_{Y_{\mathcal{C}}}[\tilde{\rho}']\ \int D[\tilde{\rho}]\ \Phi_{Y_{\mathcal{C}}}[\tilde{\rho}]\ \sum_{\zeta,\dot{\zeta}} \frac{\delta_{\zeta\dot{\zeta}}}{\sqrt{N_c}} \sum_{\theta,\dot{\theta}} \frac{\delta_{\theta\dot{\theta}}}{\sqrt{N_c}} \\ &\quad \times \sum_{\eta,\dot{\eta}} \Big[V[\alpha](\mathbf{x})\Big]_{\zeta\eta}\ \Big[V^\dagger[\alpha](\mathbf{y})\Big]_{\dot{\eta}\dot{\zeta}}\ \delta[\tilde{\rho}'-\tilde{\rho}]\ \delta_{\theta\eta}\ \delta_{\dot{\theta}\dot{\eta}} \\ &= \int D[\tilde{\rho}]\ |\Phi_{Y_{\mathcal{C}}}[\tilde{\rho}]|^2\ \frac{1}{N_c}\ \mathrm{tr}\left(V^\dagger[\alpha](\mathbf{y})V[\alpha](\mathbf{x})\right)\,. \end{aligned} \tag{1.71}$$

Le module carré de la fonction d'onde de la cible est habituellement noté

$$W_{Y_{\mathcal{C}}}[\tilde{\rho}] \equiv |\Phi_{Y_{\mathcal{C}}}[\tilde{\rho}]|^2\,, \tag{1.72}$$

et la moyenne sur l'état de la cible d'une observable $\mathcal{O}[\alpha]$ dépendant du champ α rayonné par $\tilde{\rho}$ est notée

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{Y_{\mathcal{C}}} \equiv \int D[\tilde{\rho}]\ W_{Y_{\mathcal{C}}}[\tilde{\rho}]\ \mathcal{O}[\alpha]\,. \tag{1.73}$$

De plus, en utilisant les relations (1.61) ou (1.62) entre la densité de charges de couleurs $\tilde{\rho}$ de la cible et le champ classique α qu'elle rayonne, nous pouvons considérer $W_{Y_\mathcal{C}}$ indifféremment comme étant une fonctionnelle de $\tilde{\rho}$ ou de α. Dans le deuxième cas, nous absorberons le Jacobien du changement de variable dans $W_{Y_\mathcal{C}}$ de manière à avoir $D[\tilde{\rho}]\, W_{Y_\mathcal{C}}[\tilde{\rho}] = D[\alpha]\, W_{Y_\mathcal{C}}[\alpha]$. Ainsi, l'élément de matrice S pour la diffusion élastique entre le dipôle $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et la cible s'écrit

$$S[\alpha](\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \frac{1}{N_c}\, \mathrm{tr}\left(V^\dagger[\alpha](\mathbf{y}) V[\alpha](\mathbf{x})\right) \tag{1.74}$$

si la cible est dans un état classique $|\tilde{\rho}\rangle$, où $\tilde{\rho}$ rayonne le champ α, et

$$\langle S(\mathbf{x}, \mathbf{y})\rangle_{Y_\mathcal{C}} \equiv \int D[\alpha]\; W_{Y_\mathcal{C}}[\alpha]\; S[\alpha](\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tag{1.75}$$

si la cible est dans un état générique (1.63).

En anticipant sur la section suivante, nous choisissons $Y_\mathcal{C} \simeq Y$, ce qui correspondra à effectuer la resommation des termes d'ordre LL entièrement dans la fonction d'onde de la cible. Finalement, on trouve la partie imaginaire de l'amplitude de diffusion élastique dipôle-cible intervenant dans le théorème optique (1.29)

$$\mathrm{Im}\mathcal{A}_{el}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, (\mathbf{x} + \mathbf{y})/2, Y) = 1 - \langle S(\mathbf{x}, \mathbf{y})\rangle_Y = \langle T_{\mathbf{xy}}\rangle_Y\,, \tag{1.76}$$

avec

$$T_{\mathbf{xy}}[\alpha] \equiv 1 - S[\alpha](\mathbf{x}, \mathbf{y})\,. \tag{1.77}$$

En utilisant le théorème optique (1.29), on obtient alors la section efficace totale dipôle-cible

$$\sigma^{dip\,\mathcal{C}}(\mathbf{r}, Y) = 2 \int d^2\mathbf{b}\; \langle T_{\mathbf{b}+\mathbf{r}/2\;\mathbf{b}-\mathbf{r}/2}\rangle_Y\,, \tag{1.78}$$

donnant la section efficace de la DIS grâce à la factorisation de dipôle (1.26).

1.3.2 Evolution à l'ordre LL pour le CGC

Comme nous l'avons vu, le formalisme du CGC est basé sur la séparation des modes de la cible en deux types : les partons rapides et les gluons mous, représentés respectivement par des sources de couleur classiques et par un champ de gluons classique. La position exacte de la coupure en rapidité entre ces deux types de modes est arbitraire. Nous allons maintenant étudier les équations de groupe de renormalisation décrivant l'évolution de la théorie effective par rapport à un déplacement de cette coupure. Cette évolution traduit le fait que les fluctuations quantiques d'ordre LL peuvent être resommées, et transformées en fluctuations statistiques classiques de la densité de sources de couleur $\tilde{\rho}$. Cela établit la validité de la théorie effective du CGC à l'ordre LL.

Evolution du projectile : Hiérarchie de Balitsky

La manière la plus simple d'étudier l'évolution de la théorie effective du CGC sous l'effet d'un déplacement de la coupure est la suivante. Considérons comme dans la section précedente la collision élastique dipôle-cible, dans un référentiel tel que $Y_\mathcal{C} \simeq Y$ et $Y_\mathcal{P} \simeq 0$. Comparons dans deux référentiels différents l'effet sur $\langle S(\mathbf{x}, \mathbf{y})\rangle_Y$ d'une augmentation infinitésimale de l'énergie de la collision, donnant une augmentation dY de l'intervalle de rapidité total. Premièrement, si l'on donne toute cette énergie supplémentaire à la cible, on a alors $Y_\mathcal{C} \simeq Y + dY$ et $Y_\mathcal{P} \simeq 0$. Cela revient à faire évoluer la fonction d'onde de la cible en $\Phi_{Y+dY}[\tilde{\rho}]$. C'est le module carré de cette fonction d'onde qui intervient dans la moyenne (1.75) sur l'état de la cible, donnant $\langle S(\mathbf{x}, \mathbf{y})\rangle_{Y+dY}$.

Deuxièmement, on peut aussi faire un choix de référentiel qui revient à donner l'énergie supplémentaire au dipôle projectile. On a dans ce cas $Y_{\mathcal{C}} \simeq Y$ et $Y_{\mathcal{P}} \simeq dY$. Comme nous l'avons vu dans le cadre du modèle des dipôles, une augmentation dY de l'intervalle de rapidité pour le projectile autorise ce dernier à émettre un gluon mou. On peut réutiliser le résultat (1.30), et écrire le module carré de la composante de la fonction d'onde du dipôle $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ contenant un gluon mou à la position $\mathbf{z}$ dans le plan transverse, à $d^2\mathbf{z}$ près

$$\Psi_{q\bar{q}g}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})\, d^2\mathbf{z} = \bar{\alpha}\, dY \, \left(1 - \frac{1}{N_c^2}\right) \, \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2}{(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2\,(\mathbf{z}-\mathbf{y})^2} \, \frac{d^2\mathbf{z}}{2\pi}\,. \tag{1.79}$$

Le module carré de la composante de la fonction d'onde du dipôle $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ sans gluon supplémentaire est quand à elle

$$\begin{aligned}\Psi_{q\bar{q}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= 1 - \bar{\alpha}\, dY \, \left(1 - \frac{1}{N_c^2}\right) \int_\rho \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2}{(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2\,(\mathbf{z}-\mathbf{y})^2} \, \frac{d^2\mathbf{z}}{2\pi} \\ &= 1 - \bar{\alpha} dY \, \left(1 - \frac{1}{N_c^2}\right) \, I_\rho(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)\,,\end{aligned} \tag{1.80}$$

en réutilisant la notation (1.32) pour l'intégrale dans la plan transverse.

Ainsi, le projectile est soit dans un état dipôle quark-antiquark, soit dans un état quark-antiquark gluon, lors de l'interaction avec la cible. Les relations (1.79) et (1.80) donnent les poids respectifs de ces deux contributions. Nous avons déja calculé dans la section précédente l'élément de matrice S pour la diffusion élastique dipôle-cible (1.71). Calculons maintenant l'élément de matrice S pour la diffusion élastique entre la cible et l'état $q\bar{q}g$

$$|q\bar{q}g(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})\rangle \equiv \sum_{\zeta,\dot{\zeta},b} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N_c^2-1}} \, (T^b)_{\dot{\zeta}\zeta} \, |q(\mathbf{x},\zeta)\rangle \otimes |\bar{q}(\mathbf{y},\dot{\zeta})\rangle \otimes |g(\mathbf{z},b)\rangle\,, \tag{1.81}$$

qui est normalisé de manière à avoir $\langle q\bar{q}g(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})|q\bar{q}g(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})\rangle = 1$.

$$\begin{aligned}&\langle \mathcal{C}, Y_{\mathcal{C}}| \otimes \langle q\bar{q}g(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})|\hat{S}|q\bar{q}g(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})\rangle \otimes |\mathcal{C}, Y_{\mathcal{C}}\rangle \\ &= \int D[\tilde{\rho}']\; \Phi^*_{Y_{\mathcal{C}}}[\tilde{\rho}'] \; \int D[\tilde{\rho}]\; \Phi_{Y_{\mathcal{C}}}[\tilde{\rho}] \; \sum_{\zeta,\dot{\zeta},b} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N_c^2-1}} \, (T^b)_{\dot{\zeta}\zeta} \sum_{\theta,\dot{\theta},d} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N_c^2-1}} \, (T^d)_{\theta\dot{\theta}} \\ &\quad \times \langle \tilde{\rho}'| \otimes \langle g(\mathbf{z},d| \otimes \langle \bar{q}(\mathbf{y},\dot{\theta})| \otimes \langle q(\mathbf{x},\theta)|\hat{S}|q(\mathbf{x},\zeta)\rangle \otimes |\bar{q}(\mathbf{y},\dot{\zeta})\rangle \otimes |g(\mathbf{z},b)\rangle \otimes |\tilde{\rho}\rangle \\ &= \int D[\alpha]\; W_{Y_{\mathcal{C}}}[\alpha] \; \frac{2}{N_c^2-1} \; \sum_{\zeta,\dot{\zeta},b} (T^b)_{\dot{\zeta}\zeta} \sum_{\theta,\dot{\theta},d} (T^d)_{\theta\dot{\theta}} \\ &\quad \times \sum_{\eta,\dot{\eta},c} \Big[V[\alpha](\mathbf{x})\Big]_{\zeta\eta} \, \Big[V^\dagger[\alpha](\mathbf{y})\Big]_{\dot{\eta}\dot{\zeta}} \, V_A^{bc}[\alpha](\mathbf{z}) \; \delta_{\theta\eta} \; \delta_{\dot{\theta}\dot{\eta}} \; \delta_{cd} \\ &= \int D[\alpha]\; W_{Y_{\mathcal{C}}}[\alpha] \; \frac{2}{N_c^2-1} \; \mathrm{tr}\left(V^\dagger[\alpha](\mathbf{y})\, T^b \, V[\alpha](\mathbf{x})\, T^c\right) \; V_A^{bc}[\alpha](\mathbf{z})\,.\end{aligned} \tag{1.82}$$

En utilisant les identités de Fierz

$$(T^a)_{\zeta\eta}\,(T^a)_{\theta\xi} = \frac{1}{2} \; \delta_{\zeta\xi} \; \delta_{\eta\theta} - \frac{1}{2N_c} \; \delta_{\zeta\eta} \; \delta_{\theta\xi} \tag{1.83}$$

$$\Big[V[\alpha](\mathbf{x})\Big]_{\zeta\eta} \, \Big[V^\dagger[\alpha](\mathbf{x})\Big]_{\dot{\eta}\dot{\zeta}} = 2V_A^{ab}[\alpha](\mathbf{x})\,(T^a)_{\zeta\dot{\zeta}}\,(T^b)_{\dot{\eta}\eta} + \frac{1}{N_c} \; \delta_{\zeta\dot{\zeta}} \; \delta_{\dot{\eta}\eta}\,, \tag{1.84}$$

on peut démontrer la relation

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\left(V^\dagger[\alpha](\mathbf{y})\,T^b\,V[\alpha](\mathbf{x})\,T^c\right)\;V_A^{bc}[\alpha](\mathbf{z}) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(V^\dagger[\alpha](\mathbf{z})\,V[\alpha](\mathbf{x})\right)\;\mathrm{tr}\left(V^\dagger[\alpha](\mathbf{y})\,V[\alpha](\mathbf{z})\right)\\ &\quad -\frac{1}{2N_c}\,\mathrm{tr}\left(V^\dagger[\alpha](\mathbf{y})\,V[\alpha](\mathbf{x})\right)\\ &= \frac{N_c^2}{2}\,S[\alpha](\mathbf{x},\mathbf{z})\,S[\alpha](\mathbf{z},\mathbf{y}) - \frac{1}{2}\,S[\alpha](\mathbf{x},\mathbf{y})\,, \qquad (1.85)\end{aligned}$$

permettant d'écrire, dans l'expression (1.82), la contribution de l'état $q\bar{q}g$ comme celle de deux dipôles $q\bar{q}$, mais en prenant en compte les corrections pour N_c fini, contrairement à ce que l'on a fait dans le modèle des dipôles.

Rassemblons maintenant les deux contributions, $q\bar{q}$ et $q\bar{q}g$. L'élément de matrice S pour la diffusion élastique dipôle-cible dans le référentiel où $Y_\mathcal{C} \simeq Y$ et $Y_\mathcal{P} \simeq dY$ s'écrit donc

$$\begin{aligned}&\Psi_{q\bar{q}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\langle S(\mathbf{x},\mathbf{y})\rangle_Y + \int_\rho d^2\mathbf{z}\,\Psi_{q\bar{q}g}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})\,\langle\mathcal{C},Y|\otimes\langle q\bar{q}g(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})|\hat{S}|q\bar{q}g(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})\rangle\otimes|\mathcal{C},Y\rangle\\ &= \Psi_{q\bar{q}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\langle S(\mathbf{x},\mathbf{y})\rangle_Y + \int_\rho d^2\mathbf{z}\,\frac{\Psi_{q\bar{q}g}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})}{N_c^2-1}\,\langle N_c^2 S[\alpha](\mathbf{x},\mathbf{z})\,S[\alpha](\mathbf{z},\mathbf{y}) - S[\alpha](\mathbf{x},\mathbf{y})\rangle_Y\\ &= \langle S(\mathbf{x},\mathbf{y})\rangle_Y - \bar{\alpha}dY\,\left(1-\frac{1}{N_c^2}\right)\,I_\rho(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)\,\langle S(\mathbf{x},\mathbf{y})\rangle_Y\\ &\quad + \frac{\bar{\alpha}dY}{N_c^2}\int_\rho\frac{d^2\mathbf{z}}{2\pi}\,\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2}{(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2(\mathbf{z}-\mathbf{y})^2}\,\langle N_c^2 S(\mathbf{x},\mathbf{z})\,S(\mathbf{z},\mathbf{y}) - S(\mathbf{x},\mathbf{y})\rangle_Y\\ &= \langle S(\mathbf{x},\mathbf{y})\rangle_Y + \bar{\alpha}dY\int_\rho\frac{d^2\mathbf{z}}{2\pi}\,\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2}{(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2(\mathbf{z}-\mathbf{y})^2}\,\Big[\langle S(\mathbf{x},\mathbf{z})\,S(\mathbf{z},\mathbf{y})\rangle_Y - \langle S(\mathbf{x},\mathbf{y})\rangle_Y\Big]\,. \qquad (1.86)\end{aligned}$$

La matrice S doit être invariante de Lorentz. L'expression (1.86), obtenue dans le référentiel où $Y_\mathcal{C} \simeq Y$ et $Y_\mathcal{P} \simeq dY$ doit donc être égale à $\langle S(\mathbf{x},\mathbf{y})\rangle_{Y+dY}$, qui est le résultat obtenu dans le référentiel où $Y_\mathcal{C} \simeq Y + dY$ et $Y_\mathcal{P} \simeq 0$. Nous en déduisons l'équation d'évolution avec l'intervalle de rapidité total Y

$$\partial_Y\langle S(\mathbf{x},\mathbf{y})\rangle_Y = \bar{\alpha}\int\frac{d^2\mathbf{z}}{2\pi}\,\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2}{(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2(\mathbf{z}-\mathbf{y})^2}\,\Big[\langle S(\mathbf{x},\mathbf{z})\,S(\mathbf{z},\mathbf{y})\rangle_Y - \langle S(\mathbf{x},\mathbf{y})\rangle_Y\Big]\,. \qquad (1.87)$$

Remarquons que nous pouvons prendre la limite $\rho \to 0$. En effet, pour tout champ classique α de la cible, $S[\alpha](\mathbf{x},\mathbf{z}) \to 1$ quand $\mathbf{z} \to \mathbf{x}$, d'après la définition (1.74). Grâce à cette propriété, il y a bien annulation des divergences colinéaires dans l'équation (1.87). En utilisant la définition (1.77), on peut réécrire l'équation (1.87) sous la forme

$$\partial_Y\langle T_{\mathbf{xy}}\rangle_Y = \bar{\alpha}\int\frac{d^2\mathbf{z}}{2\pi}\,\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2}{(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2(\mathbf{z}-\mathbf{y})^2}\,\Big[\langle T_{\mathbf{xz}}\rangle_Y + \langle T_{\mathbf{zy}}\rangle_Y - \langle T_{\mathbf{xy}}\rangle_Y - \langle T_{\mathbf{xz}}\,T_{\mathbf{zy}}\rangle_Y\Big]\,. \qquad (1.88)$$

Remarquons que les équations (1.87) et (1.88) ne sont pas des équations fermées. Par exemple, l'équation (1.87) ne donne l'évolution de $\langle S(\mathbf{x},\mathbf{y})\rangle_Y$ qu'en fonction du corrélateur $\langle S(\mathbf{x},\mathbf{z})\,S(\mathbf{z},\mathbf{y})\rangle_Y$, qui reste à déterminer. En reprenant la méthode que nous avons suivi dans cette section, et en l'appliquant dans le cas où le projectile est initialement formé de deux dipôles jointifs $(\mathbf{x},\mathbf{z})$ et $(\mathbf{z},\mathbf{y})$ plutôt que d'un seul dipôle, nous pouvons obtenir l'équation d'évolution de $\langle S(\mathbf{x},\mathbf{z})\,S(\mathbf{z},\mathbf{y})\rangle_Y$. Une fois exprimée en termes de $\langle T_{\mathbf{xz}}\,T_{\mathbf{zy}}\rangle_Y$, cette dernière

s'écrit

$$\partial_Y \langle T_{\mathbf{xz}}\, T_{\mathbf{zy}}\rangle_Y = \bar{\alpha} \int \frac{d^2\mathbf{z}'}{2\pi} \left\{ \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2}{(\mathbf{x}-\mathbf{z}')^2(\mathbf{z}'-\mathbf{z})^2} \left[\langle T_{\mathbf{xz}'}\, T_{\mathbf{zy}}\rangle_Y + \langle T_{\mathbf{z}'\mathbf{z}}\, T_{\mathbf{zy}}\rangle_Y - \langle T_{\mathbf{xz}}\, T_{\mathbf{zy}}\rangle_Y \right.\right.$$
$$\left. - \langle T_{\mathbf{xz}'}\, T_{\mathbf{z}'\mathbf{z}}\, T_{\mathbf{zy}}\rangle_Y \right] + \frac{(\mathbf{z}-\mathbf{y})^2}{(\mathbf{z}-\mathbf{z}')^2(\mathbf{z}'-\mathbf{y})^2} \left[\langle T_{\mathbf{xz}}\, T_{\mathbf{zz}'}\rangle_Y + \langle T_{\mathbf{xz}}\, T_{\mathbf{z}'\mathbf{y}}\rangle_Y - \langle T_{\mathbf{xz}}\, T_{\mathbf{zy}}\rangle_Y - \langle T_{\mathbf{xz}}\, T_{\mathbf{zz}'}\, T_{\mathbf{z}'\mathbf{y}}\rangle_Y \right]$$
$$+ \frac{1}{N_c^2} \left(\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2}{(\mathbf{x}-\mathbf{z}')^2(\mathbf{z}'-\mathbf{z})^2} + \frac{(\mathbf{z}-\mathbf{y})^2}{(\mathbf{z}-\mathbf{z}')^2(\mathbf{z}'-\mathbf{y})^2} - \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2}{(\mathbf{x}-\mathbf{z}')^2(\mathbf{z}'-\mathbf{y})^2} \right)$$
$$\left. \times \left[2\langle T_{\mathbf{xy}}\rangle_Y - \langle T_{\mathbf{xzz}'\mathbf{yzz}'}\rangle_Y - \langle T_{\mathbf{xz}'\mathbf{zyz}'\mathbf{z}}\rangle_Y \right] \right\}. \tag{1.89}$$

Cette équation ne ferme toujours pas le système puisqu'elle fait intervenir $\langle T_{\mathbf{xz}'}\, T_{\mathbf{z}'\mathbf{z}}\, T_{\mathbf{zy}}\rangle_Y$, mais aussi l'amplitude de diffusion d'un multipôle

$$T_{\mathbf{uvwxyz}}[\alpha] \equiv 1 - \frac{1}{N_c} \operatorname{tr}\left(V[\alpha](\mathbf{u})\, V^\dagger[\alpha](\mathbf{v})\, V[\alpha](\mathbf{w})\, V^\dagger[\alpha](\mathbf{x})\, V[\alpha](\mathbf{y})\, V^\dagger[\alpha](\mathbf{z}) \right). \tag{1.90}$$

On peut en principe engendrer de cette manière une hiérarchie infinie d'équation couplées, appelée hiérarchie de Balitsky [38]. Cette hiérarchie a d'abord été dérivée non pas dans le cadre du CGC, mais dans un formalisme basé sur les développements de produits d'opérateurs à haute énergie [38, 39], en principe plus proche de la QCD perturbative traditionnelle. Le CGC et ce formalisme développé par Balitsky, équivalents [34, 37] au moins à l'ordre LL, permettent donc d'effectuer la resommation des termes LL même si la cible est un objet très dense.

Evolution de la cible : équation JIMWLK

La stratégie que nous venons de suivre pour effectuer la resommation des termes d'ordre LL est assez indirecte. En effet, elle se base sur l'évolution en rapidité du projectile, alors que l'on veut absorber toutes les contributions d'ordre LL dans la fonction d'onde de la cible. Il est possible de procéder de manière plus directe, en étudiant la variation de la fonction d'onde de la cible (ou plus exactement de son module carré $W_{Y_\mathcal{C}}[\tilde{\rho}]$) lorsque l'on augmente l'intervalle de rapidité $Y_\mathcal{C}$ décrit par cette fonction d'onde. On peut faire ce calcul indépendemment du projectile, de manière analogue à la dérivation de l'équation maîtresse (1.36) du modèle des dipôles. L'idée générale de cette étude est la suivante. Partant de la théorie effective du CGC à $Y_\mathcal{C}$, où la cible est décrite par la densité de charges de couleurs $\tilde{\rho}_a$ et le champ classique α_a, on peut calculer les effets quantiques, émission de gluon mou ou corrections virtuelles, se déroulant à un intervalle de rapidité de la cible compris entre $Y_\mathcal{C}$ et $Y_\mathcal{C} + dY$. Ces effets quantiques ne doivent pas être calculés dans le vide, mais en présence du champ de fond α_a. Cela modifie notamment le propagateur des gluons. Ensuite on identifie les résultats obtenus à la théorie effective du CGC à $Y_\mathcal{C} + dY$, en ajoutant ces gluons mous quantiques à la densité de charges de couleur classique $\tilde{\rho}_a$, et en modifiant le champ classique α_a en conséquence, de manière à toujours vérifier la relation (1.62). Ceci est possible car les fluctuations quantiques obtenues peuvent être réinterprétées comme des fluctuations statistiques classiques de la densité de charges $\tilde{\rho}_a$, que l'on prend en compte en modifiant la fonction de poids $W_{Y_\mathcal{C}+dY}[\tilde{\rho}]$. Ainsi, on obtient [30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37] une équation d'évolution pour $W_Y[\tilde{\rho}]$, appelée équation JIMWLK, du nom des personnes les plus impliquées dans ce calcul : Jalilian-Marian, Iancu, McLerran, Weigert, Leonidov et Kovner. On peut aussi exprimer l'équation JIMWLK sur $W_Y[\alpha]$, en utilisant le changement de variables donné par la relation (1.62). Nous ne discuterons pas plus en détail de la dérivation[1], très technique, de l'équation JIMWLK. Nous

[1] Cette dérivation est présentée en détail dans les articles [35, 37] ou bien, à un niveau plus élémentaire, dans le cours [40].

nous contentons de donner l'équation JIMWLK, exprimée pour $W_Y[\alpha]$

$$\partial_Y W_Y[\alpha] = \frac{1}{2}\int d^2\mathbf{x}\, d^2\mathbf{y}\ \frac{\delta}{\delta\alpha_a^Y(\mathbf{x})}\,\eta^{ab}[\alpha](\mathbf{x},\mathbf{y})\,\frac{\delta}{\delta\alpha_b^Y(\mathbf{y})}\,W_Y[\alpha]\,, \tag{1.91}$$

avec le noyau d'évolution

$$\eta^{ab}[\alpha](\mathbf{x},\mathbf{y}) \equiv \frac{1}{\pi}\int \frac{d^2\mathbf{z}}{(2\pi)^2}\ \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{z})\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{z})}{(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2(\mathbf{z}-\mathbf{y})^2}\,(1-V^\dagger[\alpha](\mathbf{z})\,V[\alpha](\mathbf{x}))_{ca}\,(1-V^\dagger[\alpha](\mathbf{z})\,V[\alpha](\mathbf{y}))_{cb}\,. \tag{1.92}$$

Dans les dérivées fonctionnelles présentes dans l'équation JIMWLK (1.91), on a utilisé la notation

$$\alpha_a^Y(\mathbf{x}) \equiv x^-\,\alpha_a(x^-,\mathbf{x})\Big|_{x^-=\frac{\exp(Y)}{P^+}}\,. \tag{1.93}$$

L'équation JIMWLK a une structure d'équation de Fokker-Planck fonctionnelle, où le champ α_a (ou bien $\tilde{\rho}_a$) joue le rôle de la variable aléatoire. Il est possible de changer de variable dans l'équation JIMWLK, de manière à l'exprimer comme une équation sur des fonctionnelles de la ligne de Wilson $V[\alpha]$ plutôt que de α ou $\tilde{\rho}$. Ce changement de variable est intéressant car il permet de reformuler [34, 41] l'évolution JIMWLK sous la forme d'une équation de Langevin plutôt que de Fokker-Planck, ce qui rend possible son étude numérique [42].

A partir de l'équation JIMWLK, il est possible de dériver [37] les équations (1.88) et (1.89) et, en principe, toutes les suivantes dans la hiérarchie d'équation de Balitsky, ce qui montre la cohérence entre les différentes approches à la resommation des termes LL à haute énergie qui incluent les effets de haute densité. Dans la suite de ce mémoire, nous appellerons collectivement équations B-JIMWLK la hiérarchie d'équations de Balitsky et l'équation JIMWLK.

Equation BK

Comme la hiérarchie d'équations de Balitsky est infinie, elle est difficile à utiliser en pratique. L'équation JIMWLK a une écriture très compacte, mais elle est tout aussi difficile à étudier, puisque c'est une équation aux dérivées fonctionnelles. Ces équations se simplifient nettement si l'on fait l'approximation

$$\langle T_{\mathbf{xz}}\,T_{\mathbf{zy}}\rangle_Y \simeq \langle T_{\mathbf{xz}}\rangle_Y\,\langle T_{\mathbf{zy}}\rangle_Y\,. \tag{1.94}$$

Effectivement, la première équation de la hiérarchie de Balitsky devient dans ce cas une équation fermée [38]. Avec la notation $N(\mathbf{x},\mathbf{y},Y) \equiv \langle T_{\mathbf{xy}}\rangle_Y$, elle s'écrit

$$\begin{aligned}\partial_Y N(\mathbf{x},\mathbf{y},Y) = \bar{\alpha}\int \frac{d^2\mathbf{z}}{2\pi}\ \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2}{(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2(\mathbf{z}-\mathbf{y})^2}\ \Big[&N(\mathbf{x},\mathbf{z},Y)+N(\mathbf{z},\mathbf{y},Y)-N(\mathbf{x},\mathbf{y},Y)\\ &-N(\mathbf{x},\mathbf{z},Y)\ N(\mathbf{z},\mathbf{y},Y)\Big]\,.\end{aligned} \tag{1.95}$$

Cette équation a été obtenue [43, 44] indépendamment par Kovchegov lors de l'étude de la DIS sur un grand noyau dans le cadre du modèle des dipôles. On appelle donc l'équation (1.95) équation de Balitsky-Kovchegov (BK).

On remarque que l'équation BK est une équation d'évolution non-linéaire, dont la partie linéaire se réduit au noyau BFKL écrit dans l'espace des positions transverses, comme dans l'équation (1.42). Le terme non-linéaire dans l'équation (1.95), qui traduit les effets de haute densité de partons, est un terme d'amortissement s'opposant à la croissance exponentielle des solutions due au noyau BFKL. Plus précisément, si l'on part d'une condition initiale vérifiant $0 \leq N(\mathbf{x},\mathbf{y},Y=Y_0) \leq 1$, et donc compatible avec l'unitarité de la QCD, le terme

non-linéaire permet de conserver cette propriété $0 \leq N(\mathbf{x}, \mathbf{y}, Y) \leq 1$ tout au long de l'évolution. Les équations B-JIMWLK complètes vérifient aussi cette propriété. Le chapitre 2 est consacré à l'étude des solutions de l'équation BK (1.95). Nous discuterons de la validité de l'approximation (1.94) dans le chapitre 4.

Chapitre 2

Solution des équations BK et BFKL à l'ordre LL

Sommaire

2.1 Solutions de l'équation BFKL 43
2.1.1 Solutions générales de l'équation BFKL 43
2.1.2 Solutions de l'équation BFKL homogènes en paramètre d'impact . . 44
2.2 Solutions de l'équation BK homogènes en paramètre d'impact 46
2.2.1 L'équation FKPP et ses solutions en front d'onde 47
2.2.2 Application à l'équation BK 49
2.3 Cas des solutions dépendantes du paramètre d'impact 53

Dans ce chapitre, nous dérivons et étudions les propriétés des solutions de l'évolution BFKL et de l'équation BK, toutes deux à l'ordre LL. Nous mettons en particulier en évidence le rôle essentiel de la saturation en temps que phénomène d'amortissement non-linéaire, impliquant des propriétés d'universalité remarquables pour les solutions de l'équation BK.

2.1 Solutions de l'équation BFKL

2.1.1 Solutions générales de l'équation BFKL

Avant résoudre l'équation BK, il faut étudier sa partie linéaire. C'est une équation d'évolution basée sur le noyau BFKL [8, 9, 10] exprimé dans l'espace des positions.

$$\partial_Y N(\mathbf{x},\mathbf{y},Y) = \bar{\alpha}\int \frac{d^2\mathbf{z}}{2\pi}\ \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2}{(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2(\mathbf{z}-\mathbf{y})^2}\ [N(\mathbf{x},\mathbf{z},Y)+N(\mathbf{z},\mathbf{y},Y)-N(\mathbf{x},\mathbf{y},Y)] \quad (2.1)$$

Le noyau de cette équation possède une invariance conforme, ce qui permet de le diagonaliser [19], en utilisant la représentation complexe pour les vecteurs du plan transverse : on remplace $\mathbf{x}=(x^1,x^2)$ par $(\underline{x},\bar{\underline{x}})$, avec $\underline{x}=x^1+ix^2$, et $\bar{\underline{x}}=x^1-ix^2$. Les fonctions propres du noyau, indexées par un nombre réel ν et un entier relatif n appelé spin conforme, s'écrivent

$$E_{n,\nu}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \left(\frac{\underline{x}-\underline{y}}{\underline{x}\ \underline{y}}\right)^h \left(\frac{\bar{\underline{x}}-\bar{\underline{y}}}{\bar{\underline{x}}\ \bar{\underline{y}}}\right)^{\bar{h}}\ , \quad (2.2)$$

en utilisant les notations

$$h=\frac{1}{2}+i\nu+\frac{n}{2} \qquad \text{et} \qquad \bar{h}=\frac{1}{2}+i\nu-\frac{n}{2}\ . \quad (2.3)$$

En effectuant l'intégrale dans l'équation

$$\int \frac{d^2\mathbf{z}}{2\pi} \, \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2}{(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2(\mathbf{z}-\mathbf{y})^2} \, \left[E_{n,\nu}(\mathbf{x},\mathbf{z}) + E_{n,\nu}(\mathbf{z},\mathbf{y}) - E_{n,\nu}(\mathbf{x},\mathbf{y})\right] = \chi(n,\nu) E_{n,\nu}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \ , \quad (2.4)$$

on trouve [19] les valeurs propres associées à ces fonctions propres :

$$\chi(n,\nu) = 2\Psi(1) - \Psi\left(\frac{1+|n|}{2} + i\nu\right) - \Psi\left(\frac{1+|n|}{2} - i\nu\right) \ . \quad (2.5)$$

La fonction digamma Ψ est la dérivée du logarithme de la fonction Γ d'Euler. Ainsi, les solutions générales de l'équation BFKL sont de la forme

$$N(\mathbf{x},\mathbf{y},Y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d\nu \ e^{\bar{\alpha}\chi(n,\nu)Y} \ f_I(n,\nu) \ E_{n,\nu}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \ , \quad (2.6)$$

en notant $f_I(n,\nu)$ les coefficients du développement de la condition initiale sur la base des fonctions propres (2.2). Les valeurs propres (2.5) sont réelles, et pour chaque valeur de n, $\chi(n,\nu)$ a un unique maximum, qui est en $\nu = 0$. Il est donc possible d'appliquer la méthode du col dans la limite de haute énergie, ce qui donnera pour chaque valeur du spin conforme n un comportement en $e^{\bar{\alpha}\chi(n,0)Y}$. Puisque $\chi(0,0) = 4\ln 2$ et $\chi(\pm 1,0) = 0$, et que pour toutes les autres valeurs de n, $\chi(n,0) < 0$, seule la composante de spin conforme nul est croissante dans la limite de haute énergie. Pour la suite de ce mémoire, nous nous focalisons sur cette limite, et nous ne conservons donc que la composante $n = 0$ des solutions (2.6) de l'équation BFKL.

2.1.2 Solutions de l'équation BFKL homogènes en paramètre d'impact

Les solutions générales (2.6) de l'équation BFKL dépendent des coordonnées dans le plan transverse de manière assez compliquée. Plutôt que les positions $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ du quark et de l'anti-quark constituant le projectile, on peut utiliser la taille $\mathbf{r} = \mathbf{x}–\mathbf{y}$ de ce dipôle, et son paramètre d'impact $\mathbf{b} = (\mathbf{x}+\mathbf{y})/2$ par rapport à la cible. Dans le cas où la cible est un très grand noyau, on peut la supposer homogène et isotrope dans le plan transverse. L'amplitude dipôle-cible est alors indépendante de $\mathbf{b}$, et aussi de la direction de $\mathbf{r}$. On la réécrira dans ce cas avec la notation

$$N(\mathbf{x},\mathbf{y},Y) \equiv N(L,Y) \ , \qquad \text{avec} \qquad L \equiv -\ln(|\mathbf{r}|^2 k_0^2) \ , \quad (2.7)$$

où k_0 est une échelle arbitraire d'impulsion. Plus exactement, on négligera la dépendance en $\mathbf{b}$ lors de la résolution de l'équation BFKL ou BK, mais il faudra réintroduire une dépendance en $\mathbf{b}$ lors du calcul de la section efficace totale dipôle-cible, par exemple en multipliant par une fonction de profil $S(\mathbf{b})$, de manière à tenir compte de la taille finie de la cible pour obtenir un résultat fini. Typiquement, pour estimer la section efficace dipôle-cible, on pourra prendre la prescription

$$\sigma_{dip} \equiv 2\int d^2\mathbf{b} \ N(\mathbf{x},\mathbf{y},Y) \sim 2\,\pi R_c^2 \ N(L,Y) \ , \quad (2.8)$$

où R_c est le rayon géométrique de la cible.

L'obtention de ces solutions $N(L,Y)$ homogènes dans le plan transverse à partir des solutions générales (2.6) n'est pas immédiate dans l'espace réel, mais est beaucoup plus simple dans l'espace de Fourier. Nous y reviendrons dans de la section 2.3.

Ici, nous construisons ces solutions $N(L,Y)$ directement, en remarquant que les fonctions $r^{2\gamma}$, avec $0 < Re(\gamma) < 1$, sont des fonctions propres du noyau BFKL

$$\int \frac{d^2\mathbf{r}'}{2\pi} \, \frac{\mathbf{r}^2}{\mathbf{r}'^2(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2} \, \left[|\mathbf{r}'|^{2\gamma} + |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{2\gamma} - |\mathbf{r}|^{2\gamma}\right] = \chi(\gamma) \ |\mathbf{r}|^{2\gamma} \ . \quad (2.9)$$

L'identité (2.9) est démontrée dans l'appendice 2.3. La fonction caractéristique $\chi(\gamma)$ du noyau BFKL est reliée aux valeurs propres $\chi(n,\nu)$ (2.5) par $\chi(\gamma=1/2+i\nu) \equiv \chi(n=0,\nu)$. Nous avons alors

$$\chi(\gamma) = 2\Psi(1) - \Psi(\gamma) - \Psi(1-\gamma) \ . \tag{2.10}$$

Utilisons pour l'amplitude dipôle-cible $N(L,Y)$ la représentation de Laplace en Y et en L, qui est aussi une représentation de Mellin en r

$$\begin{aligned} N(L,Y) &= \int_{\gamma_0-i\infty}^{\gamma_0+i\infty} \frac{d\gamma}{2\pi i} \int_{\omega_0-i\infty}^{\omega_0+i\infty} \frac{d\omega}{2\pi i}\ e^{-\gamma L+\omega Y}\ \phi(\gamma,\omega) \\ &= \int_{\gamma_0-i\infty}^{\gamma_0+i\infty} \frac{d\gamma}{2\pi i} \int_{\omega_0-i\infty}^{\omega_0+i\infty} \frac{d\omega}{2\pi i}\ (rk_o)^{2\gamma} e^{\omega Y}\ \phi(\gamma,\omega)\ , \end{aligned} \tag{2.11}$$

en prenant $0 < Re(\gamma_0) < 1$, et ω_0 à droite des singularités de $\phi(\gamma,\omega)$. Grâce à la relation (2.9), on peut voir que l'action du noyau BFKL revient à multiplier par $\chi(\gamma)$ dans l'intégrand de (2.11). On peut alors écrire formellement l'équation BFKL restreinte aux solutions homogènes et isotropes dans le plan transverse comme

$$\partial_Y N(L,Y) = \bar\alpha\ \chi(-\partial_L)\ \ N(L,Y)\ . \tag{2.12}$$

En représentation de Laplace, cela donne

$$\int_{\gamma_0-i\infty}^{\gamma_0+i\infty} \frac{d\gamma}{2\pi i} \int_{\omega_0-i\infty}^{\omega_0+i\infty} \frac{d\omega}{2\pi i}\ e^{-\gamma L+\omega Y}\ \ [\omega - \bar\alpha\ \chi(\gamma)]\,\phi(\gamma,\omega) = 0\,. \tag{2.13}$$

Ainsi, $\phi(\gamma,\omega)$ peut avoir un pôle en $\omega = \bar\alpha\ \chi(\gamma)$ mais pas d'autres singularités contribuant à l'intégrale en ω. Les solutions générales de l'équation (2.12) s'écrivent donc sous la forme

$$\begin{aligned} N(L,Y) &= \int_{\gamma_0-i\infty}^{\gamma_0+i\infty} \frac{d\gamma}{2\pi i}\ \int_{\omega_0-i\infty}^{\omega_0+i\infty} \frac{d\omega}{2\pi i}\ e^{-\gamma L+\omega Y}\ \frac{\phi_0(\gamma,\omega)}{\omega - \bar\alpha\ \chi(\gamma)} \\ &= \int_{\gamma_0-i\infty}^{\gamma_0+i\infty} \frac{d\gamma}{2\pi i}\ e^{-\gamma L+\bar\alpha\ \chi(\gamma) Y}\ \phi_0(\gamma)\ , \end{aligned} \tag{2.14}$$

avec une fonction $\phi_0(\gamma,\omega)$ holomorphe en ω, et $\phi_0(\gamma) \equiv \phi_0(\gamma, \bar\alpha\ \chi(\gamma))$. Le comportement de $N(L,Y)$ dans la limite $Y \to \infty$ à L fixé se calcule par la méthode du col. La seule solution de $\chi'(\gamma) = 0$ est $\gamma = 1/2$. En posant $\gamma = 1/2 + i\nu$, on a, pour $\nu \simeq 0$,

$$\chi(\gamma) = \chi\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\gamma - \frac{1}{2}\right)^2\ \chi''\left(\frac{1}{2}\right) + \cdots = 4\ln 2 - 14\zeta(3)\ \nu^2 + \ldots \tag{2.15}$$

Dans cette limite, la solution de l'équation (2.12) se comporte alors comme

$$\begin{aligned} N(L,Y) &\simeq \int \frac{d\nu}{2\pi}\ e^{-(1/2+i\nu)L + 4\ln 2\,\bar\alpha Y - 14\zeta(3)\,\bar\alpha Y\,\nu^2}\ \phi_0\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\simeq \frac{1}{\sqrt{56\pi\zeta(3)\,\bar\alpha Y}}\ \exp\left(-\frac{L}{2} + 4\ln 2\ \bar\alpha Y - \frac{L^2}{56\zeta(3)\,\bar\alpha Y}\right)\ \phi_0\left(\frac{1}{2}\right)\ . \end{aligned} \tag{2.16}$$

Nous trouvons bien pour $Y \to \infty$ le comportement

$$N(L,Y) \propto \exp(4\ln 2\,\bar\alpha Y)\ , \tag{2.17}$$

mentionné dans la section 1.2.4, qui est en contradiction avec l'unitarité de la QCD, selon laquelle $N(L,Y) \leq 1$. Le terme en L^2/Y dans l'exponentielle dans la solution asymptotique

(2.16) met en évidence le caractère diffusif de l'équation BFKL, lui aussi mentionné dans la section 1.2.4.

Avant de clore cette section, examinons ce que devient l'équation BFKL restreinte aux solutions homogènes (2.12) si on utilise la transformée de Fourier dans le plan transverse

$$\tilde{N}(\tilde{L},Y) = \int \frac{d^2\mathbf{r}}{2\pi\,\mathbf{r}^2}\; e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}}\; N(L,Y) = \int_0^\infty \frac{dr}{r}\; J_0(k\,r)\; N(L,Y)\,,\ \text{avec}\ \tilde{L} \equiv \ln\left(\frac{|\mathbf{k}|^2}{k_0^2}\right)\,. \quad (2.18)$$

En appliquant cette transformée de Fourier aux solutions (2.14), on trouve

$$\begin{aligned}
\tilde{N}(\tilde{L},Y) &= \int \frac{d^2\mathbf{r}}{2\pi}\;\frac{1}{\mathbf{r}^2}\; e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}}\; \int_{\gamma_0-i\infty}^{\gamma_0+i\infty}\frac{d\gamma}{2\pi i}\; e^{\bar{\alpha}\;\chi(\gamma)Y}\;(|\mathbf{r}|k_0)^{2\gamma}\;\phi_0(\gamma)\\
&= \int_{\gamma_0-i\infty}^{\gamma_0+i\infty}\frac{d\gamma}{2\pi i}\; e^{\bar{\alpha}\;\chi(\gamma)Y}\;\phi_0(\gamma)\int_0^\infty\frac{dr}{r}J_0(kr)\;(rk_0)^{2\gamma}\\
&= \int_{\gamma_0-i\infty}^{\gamma_0+i\infty}\frac{d\gamma}{2\pi i}\; e^{-\gamma\tilde{L}+\bar{\alpha}\;\chi(\gamma)Y}\;\phi_0(\gamma)\;\frac{2^{2\gamma-1}\;\Gamma(\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)}\,, \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

en utilisant l'intégrale

$$\int_0^\infty du\; J_0(u)\;(u)^{2\gamma-1} = \frac{2^{2\gamma-1}\;\Gamma(\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)}\,. \quad (2.20)$$

Le comportement des solutions de (2.12) est donc le même dans l'espace des positions transverses et dans l'espace de Fourier, en remplaçant simplement r par $1/k$, et en incluant la nouvelle contribution (2.20) au facteur d'impact $\phi_0(\gamma)$. Comme cette contribution n'a pas de singularités pour $0<Re(\gamma)<1$, elle ne modifie pas significativement les solutions. Et comme elle vaut 1 pour $\gamma = 1/2$, elle ne modifie même pas la normalisation de $\tilde{N}(\tilde{L},Y)$ dans la limite $Y \to \infty$. Remarquons aussi, grâce à l'expression (2.19), que l'équation BFKL (2.12) conserve la même forme dans l'espace de Fourier

$$\partial_Y \tilde{N}(\tilde{L},Y) = \bar{\alpha}\;\chi\left(-\partial_{\tilde{L}}\right)\;\tilde{N}(\tilde{L},Y)\;. \quad (2.21)$$

2.2 Solutions de l'équation BK homogènes en paramètre d'impact

Nous allons maintenant discuter de la dynamique des solutions de l'équation BK (1.95), en nous restreignant pour l'instant aux solutions $N(L,Y)$ indépendantes du paramètre d'impact $\mathbf{b}$ et de l'orientation du vecteur dipôlaire $\mathbf{r}$, comme nous l'avons fait dans la section précédente pour les solutions de l'équation BFKL. Les reformulations (2.12) et (2.21) trouvées pour l'équation BFKL dans ce cas se généralisent à l'équation BK, en ajoutant simplement le terme non-linéaire. On trouve alors l'équation

$$\begin{aligned}
\partial_Y N(L,Y) &= \bar{\alpha}\chi(-\partial_L)N(L,Y)\\
&\quad -\bar{\alpha}\int\frac{d^2\mathbf{r}'}{2\pi}\;\frac{|\mathbf{r}|^2}{|\mathbf{r}'|^2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}N\big(-\ln(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2k_0^2),Y\big)\,N\big(-\ln(|\mathbf{r}'|^2k_0^2),Y\big) \quad (2.22)
\end{aligned}$$

dans l'espace des positions tranverses, ou bien

$$\partial_Y \tilde{N}(\tilde{L},Y) = \bar{\alpha}\chi(-\partial_{\tilde{L}})\tilde{N}(\tilde{L},Y) - \bar{\alpha}\tilde{N}^2(\tilde{L},Y) \quad (2.23)$$

en utilisant la définition (2.18) pour la transformée de Fourier.

2.2.1 L'équation FKPP et ses solutions en front d'onde

Ainsi, le comportement de solutions des équations (2.22) et (2.23) est le même quand leur amplitude est faible : elle croissent exponentiellement avec Y, et diffusent dans la direction L ou $\tilde{L}$, respectivement. Le terme non-linéaire présent dans ces équations freine la croissance des solutions quand leur amplitude devient d'ordre 1. L'équation (2.22) admet comme point fixe attractif la solution $N(L,Y) \equiv 1$. Cette propriété n'est pas évidente pour l'équation (2.22), mais elle est héritée de l'équation BK sous sa forme originale (1.95). L'équation dans l'espace de Fourier (2.23) n'a pas de solution d'amplitude non nulle aussi simple.

De manière générale, les équations (2.22) et (2.23) correspondent alors à une dynamique du même type que l'équation de Fisher et Kolmogorov-Petrovki-Piskounov (FKPP) [45, 46]

$$\partial_t u(x,t) = \partial_x^2 u(x,t) + u(x,t) - u^2(x,t) \ , \tag{2.24}$$

avec diffusion, croissance exponentielle dans le régime dilué, et amortissement non-linéaire. On retrouve d'ailleurs l'équation FKPP lorsque l'on fait une approximation diffusive du noyau BFKL dans l'équation (2.23) [47]. L'équation FKPP est l'approximation de champ moyen commune de plusieurs processus de réaction-diffusion en une dimension, par exemple le processus incluant les réactions locales $A \to A+A$ et $A+A \to A$ en plus de la diffusion. L'approximation de champ moyen revient ici à décrire le système non pas par un ensemble discret d'individus munis de leur positions, mais par une densité locale d'individus $u(x,t)$. Nous reviendrons sur cette approximation dans le chapitre 4. L'équation FKPP est un modèle couramment utilisé en chimie ou en biologie, par exemple pour décrire l'évolution d'une population de bactéries dans un milieu, ou encore la propagation d'une épidémie.

Pour la partie linéaire de l'équation FKPP (2.24), les solutions s'écrivent

$$u_{lin}(x,t) = \int_{\gamma_0-i\infty}^{\gamma_0+i\infty} \frac{d\gamma}{2\pi i}\ e^{-\gamma x+(1+\gamma^2)t}\ \phi_0(\gamma) \simeq \frac{\phi_0(0)}{\sqrt{4\pi t}}\ e^{t-\frac{x^2}{4t}} \ , \tag{2.25}$$

la deuxième expression correspondant au comportement à grand temps t. Elle sont très similaire aux solutions homogènes (2.14,2.16) de l'équation BFKL. En fait, les propriétés des solutions de l'équation FKPP sont bien comprises, au delà de ce régime linéaire. Les solutions les plus intéressantes pour nous sont celles décrivant un front, séparant une zone dense en individus d'une zone diluée. Ce sont les solutions vérifiant les conditions aux limites

$$\forall t \geqslant 0, \quad \lim_{x\to-\infty} u(x,t) = 1 \tag{2.26}$$

$$\text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} u(x,t) = 0 \, . \tag{2.27}$$

Tout d'abord, il existe une famille de solutions exactes $u_\gamma(x-v(\gamma)t)$ qui sont de tels fronts d'onde se propageant à une vitesse $v(\gamma)$ sans déformation. L'indice γ donne le comportement de la solution loin en avant du front par

$$u_\gamma(x-v(\gamma)t) \simeq A\ e^{-\gamma(x-v(\gamma)t)} \quad \text{pour } \ x-v(\gamma)t \to \infty \, . \tag{2.28}$$

La vitesse du front est alors donnée par la relation de dispersion

$$v(\gamma) = \gamma + \frac{1}{\gamma} \, , \tag{2.29}$$

et la forme du front vérifie l'équation différentielle ordinaire

$$u_\gamma'' + \left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right) u_\gamma' + u_\gamma = u_\gamma^2 \, . \tag{2.30}$$

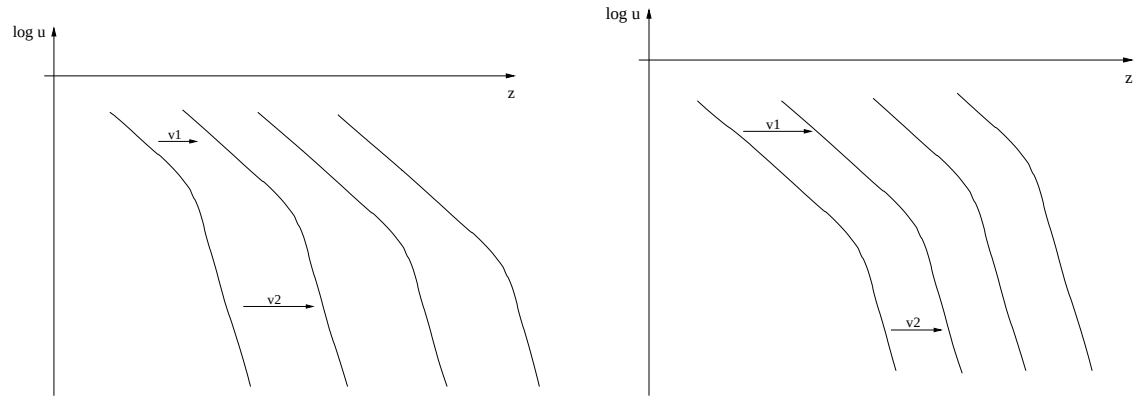

FIG. 2.1 – Solutions $u(z,t)$ de la partie linéaire de l'équation FKPP (2.24), en échelle logarithmique, présentant deux domaines avec des pentes γ_1 et $\gamma_2 > \gamma_1$ différentes. *A gauche* : cas où $v(\gamma_1) < v(\gamma_2)$. *A droite* : cas où $v(\gamma_1) > v(\gamma_2)$.

D'après la relation de dispersion (2.29), la vitesse admet un minimum en $\gamma = \gamma_c = 1$ qui vaut $v = v_c = 2$. Cela correspond au cas critique pour la partie linéaire de l'équation (2.30). On a donc le comportement

$$u_{\gamma_c}(x - v_c t) \simeq A\ (x - v_c t + B)\ e^{-\gamma_c (x - v_c t)} \quad \text{pour } x - v_c t \to \infty \tag{2.31}$$

au lieu de (2.28).

L'existence de cette vitesse minimale et du terme d'amortissement non-linéaire conduisent à une propriété tout à fait remarquable des solutions de l'équation FKPP. A partir d'une condition initiale telle que

$$u(x, t=0) \propto e^{-\gamma_0 x} \quad \text{pour } x \to \infty\,, \tag{2.32}$$

trois cas seulement sont possibles pour la solution [48] :

- Si $\gamma_0 < \gamma_c = 1$, alors elle converge vers le front u_{γ_0}, se propageant à la vitesse $v(\gamma_0)$. On appelle une telle solution un *front poussé*.
- Si la condition initiale est ajustée finement pour coïncider sur tout l'axe réel avec la forme du front u_{γ_0}, avec $\gamma_0 > \gamma_c = 1$, alors la solution reste évidemment le front u_{γ_0} par la suite. Mais ce type de solution est très instable et ne se rencontre donc pas en pratique.
- Si $\gamma_0 \geqslant \gamma_c = 1$, génériquement, la solution va converger à grand temps vers le front critique u_{γ_c}. On appelle une telle solution un *front tiré*.

En dehors de la condition sur la pente, le comportement limite à grand temps t des solutions de type front tiré est donc indépendant de la condition initiale. En fait, l'universalité de ces solutions est plus forte que cela. Dans un développement asymptotique de ces solutions à grand t, que nous expliciterons plus tard dans le cas de l'équation BK, les deux premiers ordres correctifs sont eux aussi indépendants de la condition initiale [48, 49]. De plus, si on modifie la forme du terme d'amortissement non-linéaire dans l'équation FKPP (2.24), ou bien qu'on le remplace par n'importe quel mécanisme limitant l'amplitude de $u(x,t)$, seule la forme du front dans la région où $u(x,t)$ est d'ordre 1 sera modifiée, à condition que l'amortissement choisi impose $\gamma_{eff}(x,t) \equiv -\partial_x \ln(u(x,t)) < \gamma_c$ quand $u(x,t)$ est d'ordre 1. La vitesse effective du front et sa forme dans la région où la valeur du terme non-linéaire est petite (devant celle des termes linéaires dans l'équation FKPP) sont indépendantes du type d'amortissement choisi.

On peut expliquer qualitativement ce mécanisme de formation d'un front d'onde universel de la manière suivante. Tout d'abord, considérons seulement l'évolution linéaire, avec la relation de dispersion (2.29). Prenons comme condition initiale un front décroissant exponentiellement à grand x avec une pente $\gamma_{eff}(x,t) = \gamma_1$ dans un domaine et $\gamma_{eff}(x,t) = \gamma_2 > \gamma_1$ dans un autre domaine à des valeurs de x plus grandes. La figure 2.1 indique alors l'évolution du front, selon la hiérarchie entre les vitesses $v(\gamma_1)$ et $v(\gamma_2)$. Dans les deux cas, la partie du front la plus rapide aura tendance a rattraper l'autre et à s'aligner avec elle. Les domaines dont la pente correspond à une faible vitesse s'étendent donc, et envahissent ceux dont la pente correspond à une grande vitesse, dans le cas où la quantité $\gamma_{eff}(x,t)$ est une fonction croissante de x. A l'inverse, si $\gamma_{eff}(x,t)$ est décroissante, les domaines de grande vitesse vont envahir ceux de faible vitesse. Le terme d'amortissement dans l'équation FKPP impose à $u(x,t)$ d'être borné par 1, et de tendre vers 1 à grand t. Cette non-linéarité joue donc le rôle d'une condition au bord dynamique

$$\gamma_{eff}(x,t) \simeq 0 \quad \text{pour} \quad u(x,t) \simeq 1 \tag{2.33}$$

en haut du front. Ainsi, éventuellement après un régime transitoire, une solution de l'équation FKPP avec une condition initiale vérifiant (2.32) a une forme telle que $\gamma_{eff}(x,t)$ est croissante avec x, et donc le domaine où $v(\gamma_{eff}(x,t))$ est minimale va s'étendre et envahir tout le front. Alors, si $\gamma_0 < \gamma_c$, c'est la queue du front qui a la vitesse minimale $v(\gamma_0)$. On a alors un front poussé se déplaçant à la vitesse $v(\gamma_0)$. Et si $\gamma_0 > \gamma_c$, le domaine de vitesse minimale $v(\gamma_c)$ est quelque part au milieu du front, et on a une solution de type front tiré.

2.2.2 Application à l'équation BK

Nous avons déja signalé une analogie entre l'équation BK et l'équation FKPP, ou du moins avec ses formes (2.22) et (2.23) restreintes aux solutions homogènes dans le plan transverse. Il s'agit maintenant de vérifier que les conditions d'existence de solutions de type front tiré sont vérifiées pour l'équation BK, et que ce sont ces solutions qui nous intéressent en QCD à haute énergie, en suivant la démonstration donnée dans [47, 50] (voir aussi [51]).

Existence des solutions de type front tiré pour l'équation BK

La première étape est la mise en évidence d'une famille à un paramètre de solutions de (2.22) en front d'onde se déplaçant sans déformation

$$N(L,Y) = N_\gamma(s) \quad \text{avec} \quad s = L - \bar{\alpha} v(\gamma) Y \,. \tag{2.34}$$

En insérant cela dans (2.22), on obtient

$$-v(\gamma)\,\frac{d}{ds} N_\gamma(s) = \chi\left(-\frac{d}{ds}\right) N_\gamma(s) - \text{Terme Non-Linéaire en } N_\gamma(s)\,. \tag{2.35}$$

On recherche des solutions tendant vers 0 comme

$$N_\gamma(s) \sim e^{-\gamma s}\, f_\gamma(s) \quad \text{pour } s \to +\infty\,, \tag{2.36}$$

où f_γ est typiquement une fonction puissance de s. A grand s, on peut alors négliger le terme non-linéaire, et en développant le noyau autour de γ, l'équation (2.35) se réduit à l'équation sur f_γ

$$v(\gamma)\gamma\, f_\gamma(s) - v(\gamma)\,\frac{d}{ds} f_\gamma(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \chi^{(n)}(\gamma)\, \left(\frac{d}{ds}\right)^n f_\gamma(s)\,. \tag{2.37}$$

Pour être sûr que la sommation du développement asymptotique de $f_\gamma(s)$ n'engendre pas de facteur exponentiel, on se restreint aux solutions de (2.37) telles que $f''_\gamma(s) \equiv 0$, et donc toutes les dérivées d'ordre supérieur sont elles aussi identiquement nulles. On obtient alors la relation de dispersion

$$v(\gamma) = \frac{\chi(\gamma)}{\gamma}\,, \tag{2.38}$$

et les termes en $f'_\gamma(s)$ doivent être égaux. Cette dernière relation peut être vérifiée de deux manières :

– soit $f_\gamma(s)$ est constante, et donc $N_\gamma(s) \sim A\, e^{-\gamma s}$ en avant du front.
– soit on a la relation $v(\gamma) = \chi'(\gamma)$, qui avec (2.38) fixe $\gamma = \gamma_c$.

La valeur critique $\gamma_c \simeq 0.6275\ldots$ est la solution de l'équation

$$\chi(\gamma_c) = \gamma_c\, \chi'(\gamma_c)\,, \tag{2.39}$$

pour $0 < \gamma_c < 1$, et cela correspond bien au minimum $v_c = v(\gamma_c)$ de la vitesse (2.38). Finalement, la solution critique est telle que

$$N_{\gamma_c}(s) \;\sim\; A\,(s+B)\, e^{-\gamma_c s} \quad \text{en avant du front,} \tag{2.40}$$

$$\text{avec} \quad s \;=\; L - \bar\alpha\, \frac{\chi(\gamma_c)}{\gamma_c}\, Y\,. \tag{2.41}$$

L'équation (2.22) possède donc le même type de famille de solutions en front d'onde se propageant à vitesse uniforme que l'équation FKPP. De manière évidente, il en est de même pour (2.23).

Dans l'espace des positions, les solutions de l'équation BK sont bornées par 1, comme celles de l'équation FKPP. Dans l'espace des impulsions, les solutions $\tilde N(\tilde L, Y)$ sont non bornées, mais comme on le montre dans l'appendice 2.3, elles sont telles que $\gamma_{eff}(\tilde L, Y) \equiv -\partial_{\tilde L} \ln(\tilde N) \simeq 0$ quand $\tilde N(\tilde L, Y)$ est d'ordre 1 ou plus.

Ainsi, on peut appliquer directement les résultats généraux [48, 49], et conclure que les solutions de (2.22) et (2.23) avec une condition initiale telle que $\gamma_{eff}(L, Y=0) > \gamma_c$ à grand L sont des front tirés qui convergent vers la solution critique (2.40, 2.41).

La condition initiale est effectivement de ce type pour l'amplitude de diffusion dipôle-cible $N(L,Y)$ est QCD. En effet, $\gamma_c < 1$ et, d'après la propriété de transparence de couleur, $N(L,Y)$ doit vérifier

$$N(L,Y) \propto r^2 \propto e^{-L} \quad \text{pour } \; r \to \infty \text{ à } Y \text{ fixé,} \tag{2.42}$$

éventuellement à des corrections en puissances de L près. Cette propriété signifie qu'un petit dipôle de couleur dans la représentation singlet n'interagit que très peu avec la matière hadronique, car les fluctuations de grande longueur d'onde d'onde dans la cible ne peuvent pas le résoudre.

Universalité de la convergence des solutions homogènes de l'équation BK

Nous avons montré que les solutions homogènes de l'équation BK ont une forme limite à grand rapidité Y donnée par (2.40,2.41). Comme nous l'avons mentionné précédemment, la manière de converger vers cette limite est elle aussi dominée par des contributions universelles, indépendantes des détails de la condition initiale et de l'amortissement non-linéaire. Nous détaillons ici la méthode pour calculer ce comportement sous-asymptotique universel.

De manière générale, la partie haute du front d'onde converge assez vite vers sa forme limite, puis cette convergence s'étend progressivement vers l'avant du front. A partir d'un

certain Y, ce processus a entièrement lieu dans la région diluée, dans laquelle le terme non-linéaire de l'équation BK est petit devant les termes linéaires. En avant de cette zone de transition, la solution garde la mémoire de la condition initiale.

Pour étudier la zone de transition, plaçons nous dans le référentiel se déplaçant à la vitesse v_c de la solution asymptotique, c'est à dire en variables s et Y, avec s défini par (2.41). Factorisons aussi la décroissance exponentielle de la solution asymptotique, ce qui donne l'Ansatz

$$N(L,Y) = e^{-\gamma_c s}\, f_{LE}(s,Y)\,. \tag{2.43}$$

En introduisant cette expression dans l'équation (2.22), nous obtenons

$$\partial_Y f_{LE}(s,Y) = \bar{\alpha} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \chi^{(n)}(\gamma_c)\, \partial_s{}^n f_{LE}(s,Y)\,. \tag{2.44}$$

C'est une équation de diffusion généralisée, avec termes en dérivées spatiales d'ordre supérieur. Elle va donner une dynamique non-triviale pour $s = \mathcal{O}(\sqrt{Y})$. Pour étudier cela plus en détail, utilisons la variable $z = s/\sqrt{Y}$ au lieu de s. Les solutions de l'équation (2.44) peuvent s'écrire sous la forme du développement

$$f_{LE}(s,Y) = h(Y)\left[G(z) + \frac{1}{\sqrt{Y}}\, H(z) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{Y}\right)\right] \quad \text{pour } Y \to \infty \text{ et } z = \mathcal{O}(1)\,. \tag{2.45}$$

Nous ne calculerons ici que l'ordre dominant de ce développement, plus exactement $G(z)$ et le comportement dominant de $\ln h(Y)$ à grand Y. Avec le développement (2.45), les termes dominants dans (2.44) donnent

$$h'(Y)\, G(z) - \frac{z}{2Y}\, h(Y)\, G'(z) = \frac{\bar{\alpha}}{2Y}\, \chi''(\gamma_c)\, h(Y)\, G''(z) \tag{2.46}$$

Cela indique qu'asymptotiquement, $h'(Y) \sim h(Y)/Y$, et donc que $h(Y)$ est une fonction puissance, à des facteurs correctifs près. Nous écrivons cette puissance

$$h(Y) = Y^{\frac{1}{2} - \gamma_c \beta}\,, \tag{2.47}$$

avec un paramètre β à determiner. Alors, (2.46) devient

$$\bar{\alpha}\, \chi''(\gamma_c)\, G''(z) + z G'(z) + (2\gamma_c \beta - 1)\; G(z) = 0\,. \tag{2.48}$$

Pour $z \to \infty$, c'est à dire $s \gg \sqrt{Y}$, on quitte la zone de transition et on entre dans la partie de la queue du front toujours dominée par la condition initiale. Pour pouvoir recoller notre solution avec la condition initiale dans ce domaine, on doit imposer à $G(z)$ d'être bornée pour $z \to \infty$. Par ailleurs, il faut aussi que notre solution contienne la solution asymptotique (2.40) pour $s \ll \sqrt{Y}$. A ce stade, la solution dans la région de transition s'écrit

$$N(L,Y) = e^{-\gamma_c s}\, f_{LE}(s,Y) \simeq e^{-\gamma_c (s + \beta \ln Y)}\, \sqrt{Y}\, G\left(\frac{s}{\sqrt{Y}}\right)\,. \tag{2.49}$$

Dans la la limte $s \ll \sqrt{Y}$, cela donne

$$N(L,Y) \simeq e^{-\gamma_c (s + \beta \ln Y)} \left[\sqrt{Y}\, G(0) + G'(0)\, s + \mathcal{O}\left(\frac{s^2}{\sqrt{Y}}\right)\right]\,. \tag{2.50}$$

Pour pouvoir espérer retrouver le bon facteur affine présent dans le front critique (2.40), il faut donc imposer $G(0) = 0$. Par contre, si l'on suppose simultanément $G(0) = 0$ et $\beta = 0$, l'équation (2.48) n'a pas de solution régulière pour $z \to \infty$. Cela veut dire que $\beta \neq 0$. Même

dans la région $s \ll \sqrt{Y}$ où la forme du front a déja convergé vers la forme du front critique (2.40), la vitesse du front n'est pas exactement la vitesse asymptotique v_c. Pour se placer dans le référentiel du front d'onde en tenant compte de cette modification de la vitesse, on utilise la variable

$$\bar{s} \equiv s + \beta \ln Y = L - \bar{\alpha} \frac{\chi(\gamma_c)}{\gamma_c} Y + \beta \ln Y . \tag{2.51}$$

A des corrections d'ordre supérieur près, la solution dans la région de transition s'écrit alors

$$N(L,Y) \simeq e^{-\gamma_c \bar{s}} \sqrt{Y}\, G\left(\frac{\bar{s}}{\sqrt{Y}}\right) . \tag{2.52}$$

En prenant la limite $\bar{s} \ll \sqrt{Y}$ de cette expression, on retrouve alors le front critique (2.40), au remplacement de la variable s par $\bar{s}$ près, avec les conditions $G(0) = 0$ et $G'(0) = A$. On obtiendrait le terme en B de (2.40) en prenant en compte l'ordre suivant dans le développement (2.45). Les deux conditions en $z = 0$ déterminent la solution $G(z)$ de (2.48) pour chaque valeur de β. Celle-ci n'est bornée à l'infini que pour $\beta = 3/(2\gamma_c)$. Dans ce cas, on obtient

$$G(z) = A\, z\, e^{-\frac{z^2}{2\bar{\alpha}\,\chi''(\gamma_c)}} . \tag{2.53}$$

Finalement, nous avons la solution de l'équation BK (2.22) couvrant la région du front où $\bar{s} \leqslant \mathcal{O}(\sqrt{Y})$ et $N(L,Y) \ll 1$

$$N(L,Y) = A\,(\bar{s}+B)\; e^{-\gamma_c \bar{s} - \frac{\bar{s}^2}{2\bar{\alpha}\,\chi''(\gamma_c)\,Y}} \left[1 + \mathcal{O}(1/\sqrt{Y})\right] \tag{2.54}$$

$$\bar{s} = L - \bar{\alpha} \frac{\chi(\gamma_c)}{\gamma_c} Y + \frac{3}{2\gamma_c} \ln Y + \mathcal{O}\left(1/\sqrt{Y}\right) . \tag{2.55}$$

En utilisant l'universalité de ces solutions en front tiré, on obtient directement la solution $\tilde{N}(\tilde{L},Y)$ de l'équation (2.23) dans l'espace de Fourier en remplaçant directement L par $\tilde{L}$ dans le résultat (2.54, 2.55), c'est à dire r par $1/k$.

Par divers arguments, les auteurs de [52, 53] avaient déja trouvé le comportement limite de la solution, avec les paramètres γ_c et v_c déterminés par les relations (2.38) et (2.39) du fait de la saturation de gluons. La première correction sous-asymptotique, que nous venons de dériver, a d'abord été calculée [51] en remplaçant le terme d'amortissement non-linéaire par un mur absorbant suivant le front, et placé à une position déterminée de manière dynamique. L'analogie [47] entre l'équation FKPP et l'équation BK restreinte aux solutions homogènes dans le plan transverse (2.22, 2.23) a permis de confirmer [50] ces résultats en justifiant cette approximation par l'universalité des solutions de type front tiré. Cela permet aussi d'éliminer certains détails superflus du calcul de [51], liés à la condition de mur absorbant mobile, pour aboutir à la dérivation que l'on vient de présenter, indépendante du type d'amortissement non-linéaire utilisé. Enfin, le calcul de la seconde correction sous-asymptotique, representée par le termes $\mathcal{O}(1/\sqrt{Y})$ dans (2.54, 2.55) a pu être effectué [54], en utilisant la méthode développée pour l'équation FKPP [49]. La troisième correction sous-asymptotique arrive à l'ordre $\mathcal{O}(1/Y)$ dans $\bar{s}$, mais elle n'est pas universelle car elle dépend des conditions initiales. Une translation de la rapidité $Y \mapsto Y + Y_0$ engendre en effet à partir du terme logarithmique en Y dans (2.55) un nouveau terme à l'ordre $\mathcal{O}(1/Y)$.

Echelle de saturation et loi d'échelle géométrique.

Toutes les solutions de l'équation BK dont la condition initiale vérifie la propriété de transparence de couleur convergent donc vers une solution universelle de type front tiré. Dans

la région $\bar{s}^2 \ll 2\bar{\alpha}\,\chi''(\gamma_c)\,Y$, cette convergence a déja eu lieu et, comme on le voit dans le résultat (2.54), les solution ne dépendent plus de de L et de Y indépendamment, mais uniquement par l'intermédiaire de la variable $\bar{s}$, ce qui est typique d'une solution en onde progressive. Il est possible de réécrire la variable $\bar{s}$ (2.55) sous la forme

$$\bar{s} = -\ln(r^2\,Q_s^2(Y)) + cste\,. \tag{2.56}$$

On appelle $Q_s(Y)$ l'échelle de saturation de la cible. On ajuste la constante présente dans la relation (2.56) de manière à ce que $Q_s(Y)$ marque le début du régime non-linéaire. Pour $r < Q_s^{-1}(Y)$, la forme de la solution ne dépend pas explicitement du terme nonlinéaire : soit elle est donnée par (2.54), soit elle dépend encore de la condition initiale. Pour $r > Q_s^{-1}(Y)$, la forme du front commence à dépendre explicitement du terme nonlinéaire de l'équation BK. Grâce à la relation (2.55), on obtient l'expression de l'échelle de saturation

$$Q_s^2(Y) = \Lambda^2\,\exp\left[\bar{\alpha}\,\frac{\chi(\gamma_c)}{\gamma_c}\,Y - \frac{3}{2\gamma_c}\,\ln Y + \mathcal{O}\left(1/\sqrt{Y}\right)\right]\,, \tag{2.57}$$

où Λ est une échelle d'impulsion typique de la cible, *a priori* non-perturbative. Λ dépend donc des conditions initiales, mais l'évolution de $Q_s(Y)$ est universelle.

Sur le plan phénoménologique, la structure en onde progressive des solutions implique une loi d'échelle très intéressante : pour $-\ln(r^2\,Q_s^2(Y)) \ll \sqrt{2\bar{\alpha}\,\chi''(\gamma_c)\,Y}$, avec Y assez grand, les solutions homogènes en paramètre d'impact de l'équation BK doivent vérifier la loi d'échelle géométrique

$$N(L,Y) = N(r^2\,Q_s^2(Y))\,. \tag{2.58}$$

En utilisant la factorisation de dipôle (1.26) ainsi que la prescription (2.8), on en déduit que la section efficace totale de DIS doit vérifier la loi d'échelle géométrique

$$\sigma_{T,L}^{\gamma^*\mathcal{C}}(Y,Q^2) = \sigma_{T,L}^{\gamma^*\mathcal{C}}\left(\frac{Q^2}{Q_s^2(Y)}\right)\,. \tag{2.59}$$

Grâce à l'universalité des solutions en front d'onde, cette loi d'échelle est une conséquence assez générale de l'existence de la saturation de gluons, indépendamment du formalisme précis utilisé pour la décrire. Avant même que la solution (2.54, 2.55) ne soit connue, cette loi d'échelle avait été proposée [55] comme conséquence de la saturation, est vérifiée expérimentalement dans les données de DIS sur un proton. Ceci constitue un des principaux indices expérimentaux de la saturation de gluons.

2.3 Cas des solutions dépendantes du paramètre d'impact

Pour le moment, nous n'avons étudié que les solutions de l'équation BK homogènes dans le plan transverse, c'est à dire indépendantes du vecteur paramètre d'impact $\mathbf{b}$. Il est temps de dire ce qu'il en est des solutions génerales de l'équation BK. Pour comprendre ces solutions, il faut déja comprendre les solutions de la partie linéaire de cette équation, c'est à dire l'équation BFKL. Nous avons déja présenté ces solutions dans le paragraphe 2.1.1. A cause de la forme (2.2) des fonctions propres du noyau BFKL, les solutions générales (2.6) n'ont apparement pas une structure d'onde progressive. Cela semble compromettre l'extension aux solutions générales de l'équation BK du mécanisme de formation d'un front tiré. En fait, cette discussion se simplifie dans l'espace de Fourier. En prenant la transformation

$$\tilde{N}(\mathbf{k},\mathbf{q},Y) = \int\frac{d^2\mathbf{x}}{2\pi}\,\int\frac{d^2\mathbf{y}}{2\pi}\,\frac{1}{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2}\,e^{i\mathbf{k}.\mathbf{x}+i(\mathbf{q}-\mathbf{k}).\mathbf{y}}\,N(\mathbf{x},\mathbf{y},Y)\,, \tag{2.60}$$

où l'impulsion transférée $\mathbf{q}$ est la variable conjuguée du paramètre d'impact du dipôle $\mathbf{b} \equiv (\mathbf{x}+\mathbf{y})/2$, les auteurs de [56] ont remarqué que pour $\mathbf{q} \ll \mathbf{k}$, les solutions de l'équation BFKL ont une structure d'onde progressive, et donc les solutions générale de l'équation BK dans ce régime cinématique convergent universellement vers un front tiré. Dans le cas où $|\mathbf{q}|$ est une échelle dure, il joue automatiquement le rôle de l'échelle de référence Λ dans l'échelle de saturation (2.57). Dans le régime $\mathbf{q} \gg \mathbf{k}$, il n'y a pas de formation de front d'onde. Ces résultats restent valables dans une représentation mixte où l'on exprime les solutions en fonction de $\mathbf{r}$ et $\mathbf{q}$. En particulier, $\mathbf{q}=0$ donne alors les solutions de BFKL indépendantes de $\mathbf{b}$, que nous avons étudié dans les sections précédentes.

Il est possible d'expliquer qualitativement ces résultats de manière très simple. En calculant avec (2.60) la transformée de Fourier complète de l'équation BK, on trouve [57]

$$\begin{aligned}\partial_Y \tilde{N}(\mathbf{k},\mathbf{q},Y) &= \frac{\bar{\alpha}}{\pi}\int \frac{d^2\mathbf{k}'}{(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2}\,\left\{\tilde{N}(\mathbf{k}',\mathbf{q},Y) - \frac{1}{4}\,\left[\frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}'^2}+\frac{(\mathbf{q}-\mathbf{k})^2}{(\mathbf{q}-\mathbf{k}')^2}\right]\,\tilde{N}(\mathbf{k},\mathbf{q},Y)\right\} \\ &\quad -\bar{\alpha}\int\frac{d^2\mathbf{q}'}{2\pi}\,\tilde{N}(\mathbf{k},\mathbf{q}',Y)\tilde{N}(\mathbf{k}-\mathbf{q}',\mathbf{q}-\mathbf{q}',Y)\,. \end{aligned} \tag{2.61}$$

On remarque que la partie linéaire de cette équation est diagonale en $\mathbf{q}$. Dans le régime linéaire, $\tilde{N}(\mathbf{k},\mathbf{q},Y)$ suit une évolution de type BFKL en $(\mathbf{k},Y)$ de manière indépendante pour chaque valeur de $\mathbf{q}$, et seul le terme non-linéaire introduit un couplage pour la solution à différentes valeurs de $\mathbf{q}$. Cela rend possible la généralisation des propriétés universelles des solutions au delà des solutions uniformes en $\mathbf{b}$.

2.A Calcul de la fonction caracteristique du noyau BFKL

Nous calculons ici l'intégrale de l'équation (2.9), de manière à déterminer la fonction caractéristique $\chi(\gamma)$ du noyau de l'équation BFKL. En général, on attend des divergences logarithmiques en $\mathbf{r}'=0$ ou en $\mathbf{r}'=\mathbf{r}$ pour l'intégrale de chacun des trois termes dans (2.9), mais ces divergences se compensent dans la somme des trois termes. On régularise ces divergences ultraviolettes en rajoutant un facteur $(|\mathbf{r}'|\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)^{2\epsilon}/|\mathbf{r}|^{4\epsilon}$. Il faudra donc prendre la limite $\epsilon\to 0$ à la fin du calcul. Une fois cette régularisation effectuée, on remarque que les deux premiers termes dans (2.9) sont égaux, à un changement de variables près. On réécrit alors le premier membre de l'équation (2.9) comme

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r},\gamma,\epsilon) &= \int\frac{d^2\mathbf{r}'}{2\pi}\,\frac{|\mathbf{r}|^{2-4\epsilon}}{|\mathbf{r}'|^{2-2\epsilon}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{2-2\epsilon}}\,\left[2|\mathbf{r}'|^{2\gamma}-|\mathbf{r}|^{2\gamma}\right] \\ &= \int\frac{d\underline{r}'\,d\bar{\underline{r}}'}{4\pi i}\,\frac{\underline{r}^{1-2\epsilon}\,\bar{\underline{r}}^{1-2\epsilon}}{\underline{r}'^{1-\epsilon}\,\bar{\underline{r}}'^{1-\epsilon}\,(\underline{r}-\underline{r}')^{1-\epsilon}\,\left(\bar{\underline{r}}-\bar{\underline{r}}'\right)^{1-\epsilon}}\,\left[2\underline{r}'^{\gamma}\,\bar{\underline{r}}'^{\gamma}-\underline{r}^{\gamma}\,\bar{\underline{r}}^{\gamma}\right] \\ &= \underline{r}^{\gamma}\,\bar{\underline{r}}^{\gamma}\int\frac{d\underline{z}\,d\bar{\underline{z}}}{4\pi i}\,\left[2\,\underline{z}^{\gamma+\epsilon-1}\,\bar{\underline{z}}^{\gamma+\epsilon-1}\,(1-\underline{z})^{\epsilon-1}\,(1-\bar{\underline{z}})^{\epsilon-1}\right. \\ &\qquad\left.-\underline{z}^{\epsilon-1}\,\bar{\underline{z}}^{\epsilon-1}\,(1-\underline{z})^{\epsilon-1}\,(1-\bar{\underline{z}})^{\epsilon-1}\right]\,, \end{aligned} \tag{2.62}$$

avec les notations pour les nombres complexes introduites dans la section 2.1.1, et les changements de variables $\underline{z}=\underline{r}'/\underline{r}$ et $\bar{\underline{z}}=\bar{\underline{r}}'/\bar{\underline{r}}$. Grâce à la formule [58]

$$\int\frac{d\underline{z}\,d\bar{\underline{z}}}{2\pi i}\,\underline{z}^{\alpha-1}\,\bar{\underline{z}}^{\alpha-1}\,(1-\underline{z})^{\beta-1}\,(1-\bar{\underline{z}})^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)\,\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)}\,, \tag{2.63}$$

on trouve finalement

$$
\begin{aligned}
I(\mathbf{r},\gamma,\epsilon) &= \frac{1}{2}\,\underline{r}^{\gamma}\,\overline{\underline{r}}^{\gamma}\left[2\,\frac{\Gamma(\gamma+\epsilon)\,\Gamma(\epsilon)\,\Gamma(1-\gamma-2\epsilon)}{\Gamma(\gamma+2\epsilon)\,\Gamma(1-\gamma-\epsilon)\,\Gamma(1-\epsilon)} - \frac{\Gamma(\epsilon)\,\Gamma(\epsilon)\,\Gamma(1-2\epsilon)}{\Gamma(2\epsilon)\,\Gamma(1-\epsilon)\,\Gamma(1-\epsilon)}\right] \\
&= \underline{r}^{\gamma}\,\overline{\underline{r}}^{\gamma}\left[\frac{1}{\epsilon}\,\frac{\Gamma(\gamma+\epsilon)\,\Gamma(1+\epsilon)\,\Gamma(1-\gamma-2\epsilon)}{\Gamma(\gamma+2\epsilon)\,\Gamma(1-\gamma-\epsilon)\,\Gamma(1-\epsilon)} - \frac{1}{\epsilon}\,\frac{\Gamma(1+\epsilon)\,\Gamma(1+\epsilon)\,\Gamma(1-2\epsilon)}{\Gamma(1+2\epsilon)\,\Gamma(1-\epsilon)\,\Gamma(1-\epsilon)}\right] \\
&= \underline{r}^{\gamma}\,\overline{\underline{r}}^{\gamma}\left[\frac{1}{\epsilon}\left(1+2\epsilon\Psi(1)-\epsilon\Psi(\gamma)-\epsilon\Psi(1-\gamma)+\mathcal{O}\big(\epsilon^2\big)\right)-\frac{1}{\epsilon}\left(1+\mathcal{O}\big(\epsilon^2\big)\right)\right]. \qquad (2.64)
\end{aligned}
$$

Il y a bien annulation des pôles en ϵ, et donc des divergences ultraviolettes, et nous obtenons les relations (2.9,2.10).

2.B Comportement de $\tilde{N}(\tilde{L},Y)$ dans la régime saturé

Nous donnons ici une estimation qualitative de la forme dans le régime non-linéaire des fronts d'onde solutions de l'équation (2.23). Puisque cette équation est simplement la transformée de Fourier (2.18) de l'équation (2.22), il doit en être de même de ses solutions. Prenons pour les fronts d'onde $N_\gamma(s)$ solutions de (2.22) l'approximation suivante

$$N_\gamma(s) = \theta(-s) + \theta(s)\,e^{-\gamma s}\,. \qquad (2.65)$$

Celle-ci donne les limites correctes pour $s \to \pm\infty$, mais traite de manière simpliste l'intérieur du front, pour $s \simeq 0$, c'est à dire $r \simeq Q_s^{-1}(Y)$. La transformée de Fourier $\tilde{N}_\gamma$ de N_γ s'écrit alors

$$
\begin{aligned}
\tilde{N}_\gamma &= \int_0^\infty \frac{dr}{r}\,J_0(k\,r)\,\left[\theta(r-Q_s^{-1}) + (Q_s^2 r^2)^\gamma\,\theta(Q_s^{-1}-r)\right] \\
&= \int_{k/Q_s}^\infty \frac{du}{u}\,J_0(u) + \left(\frac{Q_s^2}{k^2}\right)^\gamma \int_0^{k/Q_s} du\,u^{2\gamma-1}\,J_0(u)\,. \qquad (2.66)
\end{aligned}
$$

Dans le régime dilué, pour $k \gg Q_s$, le premier terme tend vers 0, et, grâce à la formule (2.20), le second terme donne

$$\tilde{N}_\gamma(\tilde{s}) = \frac{2^{2\gamma-1}\,\Gamma(\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)}\,e^{-\gamma\tilde{s}}\,, \qquad (2.67)$$

avec $\tilde{s} \equiv \tilde{L} - v(\gamma)Y$, ce qui est bien le comportement attendu dans le régime linéaire, puisque l'on a une fonction propre de l'équation BFKL.

Par ailleurs, dans le régime fortement saturé $k \ll Q_s$, (2.66) devient

$$
\begin{aligned}
\tilde{N}_\gamma(\tilde{s}) &\simeq \int_{k/Q_s}^\infty \frac{du}{u}\,J_0(u) + \frac{1}{2\gamma} \\
&\propto \ln\left(\frac{Q_s}{k}\right) + Cste \\
&\propto -\frac{\tilde{s}}{2} + Cste \qquad (2.68)
\end{aligned}
$$

Ainsi, le comportement de $\tilde{N}_\gamma(\tilde{s})$ n'est pas borné dans le régime fortement saturé, mais néanmoins, la pente exponentielle effective du front dans ce domaine est

$$\gamma_{eff}(\tilde{L},Y) \equiv -\partial_{\tilde{L}}\ln(\tilde{N}_\gamma) \simeq -\frac{1}{\tilde{s}}\,. \qquad (2.69)$$

Alors, si l'on se place suffisament loin dans le régime saturé, pour $-\tilde{s} \gg 1$ on a $\gamma_{eff}(\tilde{L}, Y) < \gamma_c$. Il en est de même pour tous les fronts d'onde solutions de l'équation (2.23). Grâce à cela, on peut appliquer directement dans l'espace des impulsions les résultats généraux concernant le comportement en front tiré des solutions suffisamment localisées.

Chapitre 3

Au delà de l'ordre LL

Sommaire

3.1 Equations d'évolution à l'ordre NLL, et couplage mobile 58

3.2 Solutions en ondes progressives avec couplage mobile 60

3.3 Effet des contributions NLL au noyau d'évolution 64

3.4 Retour sur les solutions avec couplage mobile 68

Dans ce chapitre, les sections 3.3 et 3.4 présentent dans une version condensée et mise à jour les résultats des publications [I] et [III], respectivement. Ces résultats sont précédés d'une revue sur les équations d'évolution en rapidité avec saturation au delà de l'ordre LL dans la section 3.1, et d'une présentation des résultats analytiques connus concernant les solutions de l'équation BK avec couplage mobile dans la section 3.2.

Dans les chapitres précédents, nous avons présenté les équations d'évolution resommant les logarithmes dominants $(\alpha_s Y)^n$ dans la limite de haute énergie en QCD, et nous avons discuté leurs solutions. Cela donne des informations précieuses sur le comportement qualitatif à haute énergie de certaines observables. Mais comme souvent en QCD, l'ordre dominant ne suffit pas pour obtenir des résultats théoriques quantitativement corrects. Par exemple, pour la section efficace de DIS, les données indiquent une dépendance en rapidité plus lente que celle prédite aussi bien par l'équation BFKL que par l'équation BK. Nous y reviendrons dans le chapitre 4.2.2. On est donc conduit à considérer la resommation des premiers logarithmes sous-dominants $\alpha_s\,(\alpha_s Y)^n$, que l'on appelle approximation NLL. De plus, le couplage α_s doit décroître quand on augmente la ou les échelles dures du problème Q, $k_\perp$, ou encore r^{-1}, d'après la propriété de liberté asymptotique de la QCD. Or, les équations d'évolution à haute énergie sont obtenues en calculant l'effet d'une augmentation infinitésimale de la rapidité, en fixant les échelles dures. A cause de cela, l'évolution du couplage n'est pas présente à l'ordre LL, et n'apparait que marginalement à l'ordre NLL. Or, quand on utilise ces équations d'évolution sur un grand intervalle de rapidité, on balaye aussi plusieurs ordres de grandeur pour les échelles dures, du fait de la diffusion dans le cas de BFKL, et du fait de la propagation du front d'onde dans le cas des équations avec saturation. Les effets de l'évolution du couplage peuvent être très importants, et doivent être implémentés à tous les ordres, au delà d'une approximation NLL stricte.

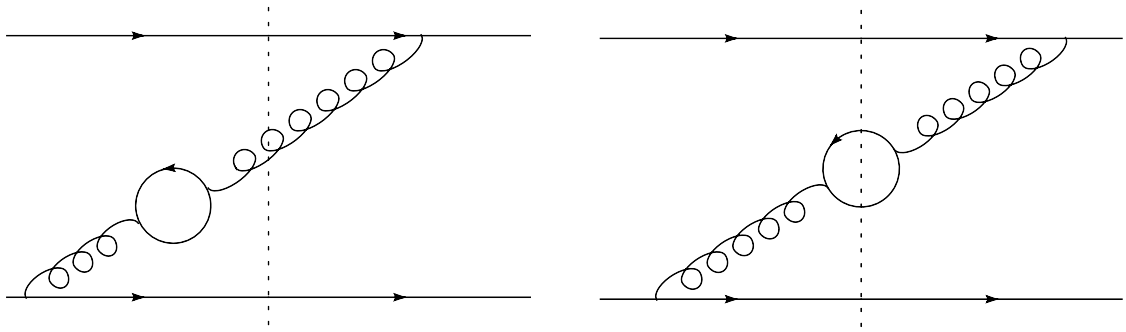

FIG. 3.1 – Diagrammes avec une boucle de quarks intervenant à l'ordre NLL dans l'équation BK. *A gauche :* correction virtuelle. *A droite :* correction réelle, avec une nouvelle paire quark-antiquark dans l'état final.

3.1 Equations d'évolution à l'ordre NLL, et couplage mobile

Plusieurs équipes ont été impliqués ces dernières années dans le calcul des corrections au delà de l'ordre LL pour l'équation BK mais aussi pour l'équation JIMWLK. La contribution des boucles de quarks a été étudiée [59, 60, 61] pour ces deux équations. Le calcul complet de la première équation de la hiérarchie de Balitsky à l'ordre NLL a aussi été achevé [62]. Ce dernier résultat n'a pas encore été exploité, du fait de sa complexité, ni même analysé en détail. Par contre, différentes versions améliorées de l'équation BK à l'ordre LL, incluant le couplage mobile à des échelles d'impulsions adéquates, ont été proposées [60, 61].

De manière générale, le couplage mobile s'obtient à partir du calcul perturbatif de la polarisation du vide en QCD. A une boucle, avec une échelle de renormalisation μ, cela donne

$$\bar{\alpha}(k^2) \equiv \frac{N_c}{\pi}\,\alpha_s(k^2) = \bar{\alpha}(\mu^2) - b\,\bar{\alpha}^2(\mu^2)\,\ln\frac{k^2}{\mu^2} + \mathcal{O}\left(\bar{\alpha}^3(\mu^2)\right) \tag{3.1}$$

$$\text{avec le coefficient} \qquad b = \frac{11N_c - 2N_f}{12N_c}\,. \tag{3.2}$$

On peut éliminer l'échelle de renormalisation de l'expression du couplage mobile, en la remplaçant par l'échelle Λ_{QCD} à laquelle l'expression perturbative du couplage mobile est singulière. A l'ordre d'une boucle on obtient

$$\bar{\alpha}(k^2) = \frac{1}{b\ln\frac{k^2}{{\Lambda_{QCD}}^2}} = \frac{1}{b\tilde{L}}\,. \tag{3.3}$$

Dès que l'on considère un couplage mobile, il est effectivement naturel de prendre $k_0 = \Lambda_{QCD}$ comme échelle de référence dans la définition de $\tilde{L}$, et de même pour L (voir les relations (2.7) et (2.18)).

Une partie des diagrammes apparaissant dans le calcul des équations BK ou JIMWLK à l'ordre NLL sont les corrections à une boucle du propagateur du gluon produit à l'ordre LL. Ces diagrammes donnent alors le début d'un développement de type (3.1). Grâce à l'échelle présente dans le logarithme dans (3.1), on peut en principe deviner à quelle échelle du problème il faut prendre le couplage mobile pour resommer le maximum de termes d'ordre supérieur. Le calcul des boucles de quarks est suffisant pour cela. En remplaçant le nombre de saveurs de quarks N_f par $-6N_cb$ dans le résultat, on obtient alors en principe l'ensemble de ces corrections à une boucle au propagateur du gluon. C'est la méthode suivie dans les articles [60, 61] pour construire une équation BK à l'ordre LL avec couplage mobile.

Néanmoins cette méthode n'est pas sans ambiguité. En effet, il y a deux types de diagrammes contenant une boucle de quarks (voir Fig.3.1), correspondant aux corrections virtuelles ou réelles. Les premières ne contribuent qu'à l'évolution du couplage dans la partie LL de l'équation. Les secondes, par contre, donnent un nouvel état final en deux dipôles disjoints, qui n'existe pas à l'ordre LL, et contribuent donc à des termes NLL de l'équation plutôt qu'à la variation du couplage dans les termes LL. Dans le cas où le gluon s'est scindé en une paire quark antiquark quasiment colinéaire, l'état final ne se distingue plus de celui en deux dipôles jointifs présent à l'ordre LL. Cette correction réelle contribue alors aussi à la variation du couplage. Il y a donc une certaine part d'arbitraire dans la séparation des résultats NLL pour les boucles de quarks en une contribution à la mobilité du couplage que l'on veut resommer à tous les ordres et une contribution à de nouveaux termes l'on néglige. Ainsi, Balitsky [60], et Kovchegov et Weigert [61] ont proposé deux versions différentes pour l'équation BK à l'ordre LL avec couplage mobile, toutes deux correctes mais basées sur des prescriptions différentes. L'étude numérique [63] de ces deux équations suggère toutefois que la prescription proposée dans [60] est plus efficace, car les termes négligés sont plus petits. Comme il est remarqué dans [63], les termes négligés dans [60] sont quadratiques en amplitude dipôle-cible N, alors que dans [61], certains termes linéaires sont aussi négligés. Comme nous le discuterons plus loin, une universalité des solutions en front d'onde de l'équation BK subsiste dans le cas du couplage mobile. Là encore, les termes linéaires jouent en principe un rôle essentiel dans la structure des solutions, contrairement aux détails des termes non-linéaires. Cet argument permet donc de confirmer que la prescription donnée par Balitsky [60] est plus utile en pratique. Elle conduit à l'équation[1]

$$\begin{aligned}\partial_Y N(\mathbf{x},\mathbf{y},Y) = \bar{\alpha}(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2)\int \frac{d^2\mathbf{z}}{2\pi}\ \Bigg\{&\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2}{(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2(\mathbf{z}-\mathbf{y})^2}\\ &+\frac{1}{(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2}\left[\frac{\bar{\alpha}(|\mathbf{x}-\mathbf{z}|^2)}{\bar{\alpha}(|\mathbf{z}-\mathbf{y}|^2)}-1\right]+\frac{1}{(\mathbf{z}-\mathbf{y})^2}\left[\frac{\bar{\alpha}(|\mathbf{z}-\mathbf{y}|^2)}{\bar{\alpha}(|\mathbf{x}-\mathbf{z}|^2)}-1\right]\Bigg\}\\ &\times\Big[N(\mathbf{x},\mathbf{z},Y)+N(\mathbf{z},\mathbf{y},Y)-N(\mathbf{x},\mathbf{y},Y)-N(\mathbf{x},\mathbf{z},Y)N(\mathbf{z},\mathbf{y},Y)\Big]\,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

On peut vérifier facilement que lorsque la taille d'un des dipôles, parent ou enfant, est beaucoup plus petite que les deux autres, c'est elle qui donne l'échelle pour le couplage mobile. C'est bien ce qui est attendu dans les limites colinéaires.

Au delà du couplage mobile, il faut se demander quels sont les effets des autres contributions d'ordre (au moins) NLL. En supposant l'universalité des solutions en front d'onde de l'équation BK, on peut se restreindre à l'étude des termes linéaires seulement, plutôt que l'équation BK à l'ordre NLL complète [62]. Cette partie linéaire n'est autre, en principe[2], que l'équation BFKL à l'ordre NLL [66, 67]. Initialement, le résultat des calculs NLL pour le noyau BFKL avait semé le doute tant il avait paru étrange. Ceci est maintenant compris : il contient des contributions singulières héritées de l'ordre LL, qui doivent être resommées à tous les ordres afin d'obtenir des résultats utilisables [68].

Le problème le plus sévère de ce type est associé au choix de l'échelle de référence dans la définition de la rapidité. Dans la section 1.2.2 introduisant la factorisation de dipôle, nous avons dit qu'à l'ordre LL, il est possible d'utiliser indifféremment les définitions (1.25) ou (1.28) pour la rapidité, où le rôle de l'échelle dure de référence est joué par Q ou par r^{-1}

[1] Pour alléger les notations, on note le couplage mobile évalué à une distance r $\bar{\alpha}(r^2)$ plutôt que $\bar{\alpha}(r^{-2})$, comme on devrait le faire par cohérence avec (3.3). On a alors $\bar{\alpha}(r^2) \equiv 1/bL$, avec $L \equiv -\ln(r^2\Lambda^2_{QCD})$.

[2] Il y a un petit désaccord [62] à l'ordre NLL entre la partie linéaire de l'équation BK et l'équation BFKL. Cette différence semble maintenant en grande partie comprise [64, 65] et justifiée par des ambiguïtés dans la définition des certaines grandeurs à l'ordre NLL, et par une implémentation différente de la coupure en rapidité éliminant les gluons infiniment mous de la fonction d'onde de la cible.

respectivement. A l'ordre NLL par contre, une telle différence est importante. Ce problème a une portée très générale, et si des échelles dures sont présentes aussi bien du côté du projectile que de la cible, elles peuvent toutes intervenir dans la définition de l'intervalle de rapidité total Y. Ces échelles dures peuvent être aussi bien liées à l'état initial, comme Q pour la DIS, ou bien à l'état final, comme la masse transverse $m_\perp$ d'un jet produit. Notons k_1 et k_2 les échelles dures associées respectivement au projectile et à la la cible. Dans le formalisme BFKL, la symétrie entre le traitement de la cible et du projectile rend naturel le choix symétrique de $\sqrt{k_1 k_2}$ comme échelle de référence pour la rapidité. L'équation BFKL à l'ordre LL resomme alors les termes de type

$$(\alpha_s Y_{sym})^n = \left(\alpha_s \ln \frac{s}{k_1 k_2}\right)^n \tag{3.5}$$

Dans le cas où $k_1 \gg k_2$, c'est à dire la limite des doubles logarithmes dominants (DLL) de BFKL, il va apparaitre un logarithme $\ln k_1^2/k_2^2$ pour chaque puissance de α_s. Dans cette limite, l'équation BFKL resomme alors

$$\begin{aligned}\left(\alpha_s \ln \frac{s}{k_1 k_2} \ln \frac{k_1^2}{k_2^2}\right)^n &= \left(\alpha_s \left(\ln \frac{s}{k_1^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{k_1^2}{k_2^2}\right) \ln \frac{k_1^2}{k_2^2}\right)^n \\ &= \left(\alpha_s \ln \frac{s}{k_1^2} \ln \frac{k_1^2}{k_2^2}\right)^n + \frac{n}{2} \alpha_s \ln^2 \left(\frac{k_1^2}{k_2^2}\right) \left(\alpha_s \ln \frac{s}{k_1^2} \ln \frac{k_1^2}{k_2^2}\right)^{n-1} + \ldots \end{aligned} \tag{3.6}$$

L'échelle de référence naturelle pour la rapidité dans ce régime est effectivement k_1. Cela engendre donc des contributions d'ordre NLL et au delà, avec des logarithmes colinéaires superflus, qui n'existent pas dans le formalisme de l'équation DGLAP. Ces nouveaux termes s'annulent en fait avec des termes contenant des pôles non physiques en $(1-\gamma)^{-3}$ présents dans le noyau BFKL à l'ordre NLL, et plus généralement en $(1-\gamma)^{-2k-1}$ attendus dans le noyau BFKL à l'ordre N^{k}LL. Par symétrie entre le projectile et la cible, le noyau BFKL à l'ordre N^{k}LL doit aussi contenir des pôles en γ^{-2k-1}. La resommation à tous les ordres de ces pôles associés au choix de l'échelle d'énergie de référence pour la rapidité a été effectuée [68].

D'autres problèmes du même genre existent. Par exemple, si l'on choisit mal l'échelle à laquelle prendre le couplage mobile dans chacun des termes du noyau BFKL à l'ordre LL, cela va engendrer des pôles en $(1-\gamma)^{-k-1}$ ou en γ^{-k-1} dans la fonction caractéristique du noyau à l'ordre N^{k}LL. Globalement, tous ces problèmes sont maintenant sous contrôle, et l'on dispose de plusieurs schémas pour obtenir une équation BFKL à l'ordre NLL physiquement correcte [69, 70, 71], qui diffèrent par des termes réguliers d'ordre au moins NNLL.

3.2 Solutions en ondes progressives avec couplage mobile

Avant de discuter de manière générale de l'effet des contributions NLL sur les solutions, ou d'ordre supérieur, étudions séparément l'effet de la liberté asymptotique dans un cas simple. Pour cela, considérons d'abord l'équation BK à l'ordre LL, dans laquelle on remplace simplement le couplage fixe par le couplage mobile à une boucle évalué à une échelle dure du problème. Dans l'espace des positions transverses, un choix raisonnable est de prendre le couplage à l'échelle donnée par la taille r du dipôle parent. L'équation (2.22) devient alors

$$\begin{aligned}\partial_Y N(L,Y) = &\frac{1}{bL}\, \chi(-\partial_L) N(L,Y) \\ &- \frac{1}{bL} \int \frac{d^2\mathbf{r}'}{2\pi}\, \frac{|\mathbf{r}|^2}{|\mathbf{r}'|^2 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} N\big(-\ln(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 k_0^2), Y\big)\, N\big(-\ln(|\mathbf{r}'|^2 k_0^2), Y\big) \ . \end{aligned} \tag{3.7}$$

On peut faire une étude similaire dans l'espace de Fourier. Dans ce cas, le choix le plus pratique est de prendre le couplage à l'échelle k, conjuguée de r par la transformée de Fourier (2.18).

L'équation (2.23) devient alors

$$\partial_Y \tilde{N}(\tilde{L},Y) = \frac{1}{b\tilde{L}}\,\chi(-\partial_{\tilde{L}})\tilde{N}(\tilde{L},Y) - \frac{1}{b\tilde{L}}\,\tilde{N}^2(\tilde{L},Y)\,. \tag{3.8}$$

Qualitativement, on peut deviner certaines modifications des solutions en onde progressive que la variation du couplage va induire. D'une part, le couplage typique au niveau du front d'onde va décroître au fur et et à mesure que celui-ci se déplace vers des valeurs de L plus grandes. Comme le couplage est le préfacteur du second membre dans les équations d'évolution (3.7) ou (3.8), cela va entrainer un ralentissement progressif de la dynamique de la solution, en particulier une diminution de la vitesse de propagation du front. Par ailleurs, à une rapidité Y donnée, le couplage varie le long du front : il est plus petit en avant du front, dans la région ultraviolette, qu'en arrière, dans la région infrarouge. L'arrière du front aura donc tendance à rattraper l'avant, ce qui va conduire à un front plus pentu qu'à couplage fixe. Les simulations numériques [72, 42, 73, 59, 63, 74] de l'équation BK avec couplage mobile (3.7) mettent effectivement en évidence ces deux différences par rapport aux solutions de l'équation BK à couplage fixe. On peut effectivement voir sur la figure 3.2 (en haut à gauche) que le front est plus pentu si le couplage est mobile.

Recherchons les solutions de (3.7) en onde progressive $N_\gamma(s_g)$ au moins dans le régime linéaire, avec $s_g = L - t(Y)$. Du fait du préfacteur $1/L$ dans le second membre de l'équation, de telles solutions ne peuvent être qu'approchées. Asymptotiquement pour $Y \to \infty$, mais suffisamment près du front d'onde $|s_g| \ll L$, de telles solutions approchées existent. Et pour que les deux membres de l'équation (3.7) soit du même ordre pour $Y \to \infty$, il faut que $t(Y) \propto \sqrt{Y}$. On peut de manière générale prendre

$$s_g = L - \sqrt{\frac{2v(\gamma)\,(Y-Y_0)}{b}} \tag{3.9}$$

où Y_0 est une constante d'intégration. On trouve alors facilement que $v(\gamma)$ est de nouveau donné par la relation de dispersion (2.38). Par analogie avec le cas à couplage fixe, l'étude de la convergence des solutions vers un front tiré a été effectuée dans [51, 76] en remplaçant la non-linéarité par un mur absorbant mobile, et dans [50] en utilisant les résultats mathématiques généraux sur les fronts tirés. Le comportement asymptotique universel trouvé dans ces études est

$$N(L,Y) \;\sim\; Ae^{-\gamma_c \bar{s}_g} \left(D\sqrt{\frac{2v_c\,(Y-Y_0)}{b}} \right)^{1/3} \mathrm{Ai}\left(\xi_1 + \frac{\bar{s}_g}{\left(D\sqrt{\frac{2v_c\,(Y-Y_0)}{b}} \right)^{1/3}} \right) \tag{3.10}$$

$$\text{avec} \quad \bar{s}_g \;=\; L - \sqrt{\frac{2v_c\,(Y-Y_0)}{b}} - \frac{3\xi_1}{4} \left(D\sqrt{\frac{2v_c\,(Y-Y_0)}{b}} \right)^{1/3} + \mathcal{O}(\ln Y)\,. \tag{3.11}$$

pour $Y \to \infty$ et $\bar{s}_g = \mathcal{O}((Y-Y_0)^{1/6})$, c'est à dire dans la zone de transition entre l'intérieur du front où le régime asymptotique est atteint et la queue du front où l'influence de la condition initiale subsiste. Le comportement diffusif de la solution (3.10) est donné par la fonction d'Airy Ai, comme dans le cas de l'équation BFKL avec couplage mobile [19]. $\xi_1 \simeq -2.228\ldots$ est le zéro le plus à droite de la fonction d'Airy. Le coefficient de diffusion D est donné par

$$D \equiv \frac{\chi''(\gamma_c)}{2\,\gamma_c \chi'(\gamma_c)} = \frac{\chi''(\gamma_c)}{2\,\chi(\gamma_c)}\,. \tag{3.12}$$

A grand Y, la position du front en L croît comme $\sqrt{Y}$. Ainsi, on trouve bien le ralentissement attendu de la propagation du front d'onde. Par ailleurs, la première correction est en $Y^{1/6}$,

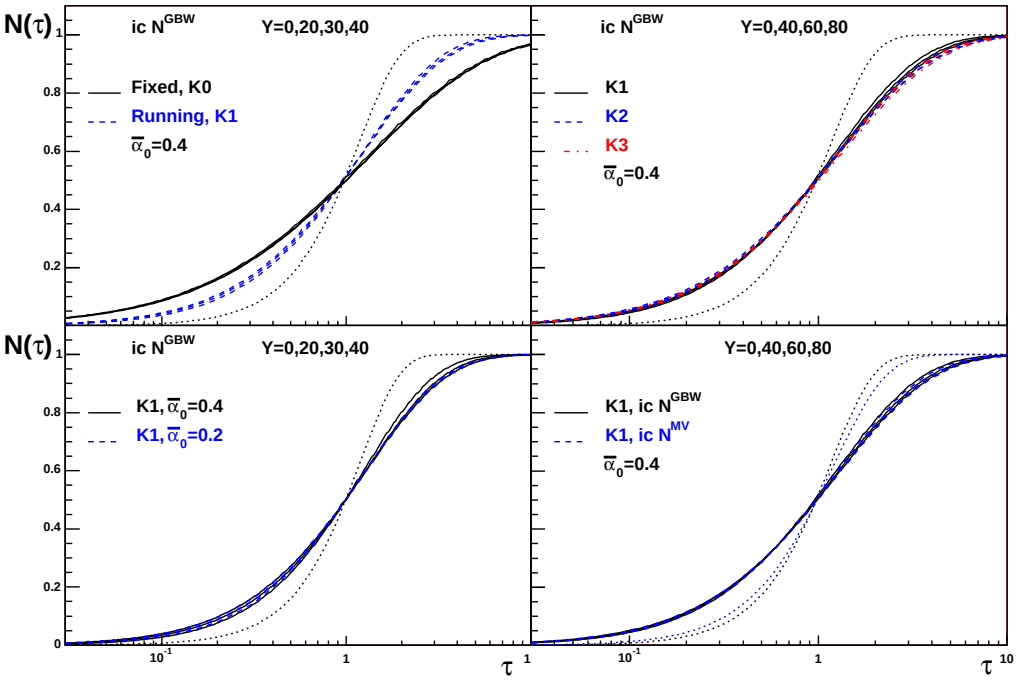

FIG. 3.2 – Forme du front obtenue par simulations numériques de l'équation BK à couplage mobile (3.7), tracée en fonction de $\tau \equiv r\,Q_s(Y)$, pour les valeurs de Y indiquées sur les graphiques. $Q_s(Y)$ est ici ajustée de manière à faire coïncider les courbes quand $N(\tau) = 0.5$. La croissance du couplage dans l'infrarouge est stoppée à une valeur $\bar{\alpha}_0 = 0.4$ ou 0.2 indiquée sur les graphiques. La condition initiale par défaut est donnée par le modèle de Golec-Biernat–Wüsthoff (GBW) [75]. *En haut à gauche* : Comparaison entre les solutions de l'équation BK à couplage fixe (2.22) en trait plein et à couplage mobile (3.7) en tirets. *En haut à droite* : Comparaison des solutions en prenant différentes prescriptions pour implémenter le couplage mobile. $K1$ correspond à l'équation (3.7). Pour $K2$ et $K3$, se reporter à [73]. *En bas à gauche* : Etude de la sensibilité des solutions aux détails du régime infrarouge : comparaison des solutions obtenues pour $\bar{\alpha}_0 = 0.4$ et 0.2. *En bas à droite* : Comparaison entre les solutions obtenues en prenant comme condition initiale le modèle GBW ou bien le modèle de McLerran–Venugopalan (MV) [24, 25, 26], donnant un front de pente plus faible. Dans tous les graphiques, les condition initiales sont représentées en pointillés. Figure extraite de la Ref. [73].

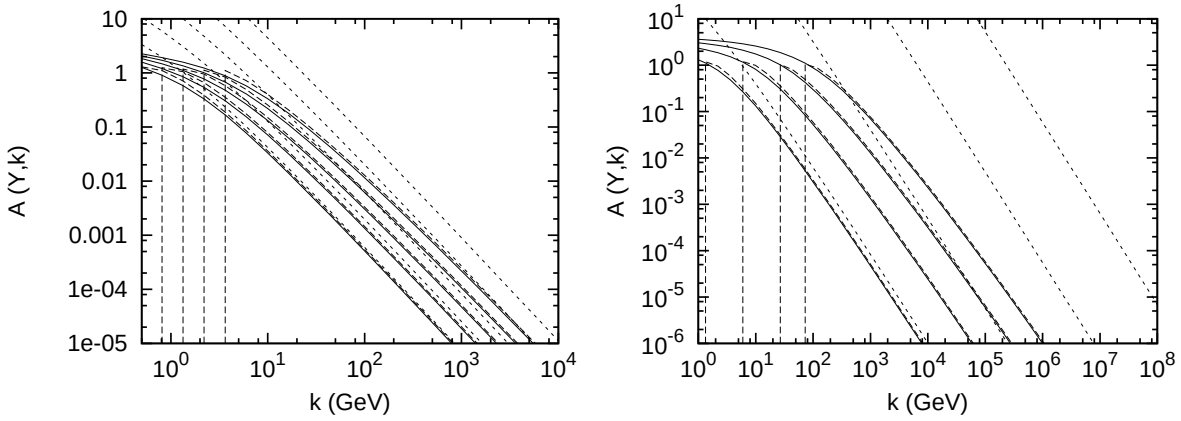

FIG. 3.3 – Résultat des simulations numériques à couplage mobile pour l'équation BK (trait plein), l'équation BFKL avec un mur absorbant mobile (tirets longs) et l'équation BFKL (tirets courts). *A gauche* : pour $Y = 6$, 8, 10, 12 et 14 (domaine physique). *A droite* : pour $Y = 10$, 20, 30 et 40 (extrapolation). $A(Y,k) \equiv \tilde{N}(\tilde{L},Y)$, dans nos notations. Figure extraite de [74].

et donc la hierarchie entre les ordres successifs est moins nette que dans le cas des solutions à couplage fixe. Dans la région interne du front $0 \lesssim \bar{s}_g \ll (Y - Y_0)^{1/6}$, où la diffusion est négligeable, on retrouve une loi d'échelle géometrique, mais avec une échelle de saturation $Q_s(Y)$ donnée par

$$\ln\left(\frac{Q_s(Y)}{\Lambda_{QCD}}\right) = \sqrt{\frac{2v_c\ (Y-Y_0)}{b}} + \frac{3\xi_1}{4}\left(D\sqrt{\frac{2v_c\ (Y-Y_0)}{b}}\right)^{1/3} + \mathcal{O}(\ln Y)\,. \tag{3.13}$$

Par contre, dans cette région, on trouve que la forme du front est en $e^{-\gamma_c L}$, c'est à dire la même que dans le cas à couplage fixe. La solution (3.10, 3.11) ne capture donc pas l'effet de redressement du front attendu dans le cas d'un couplage mobile, et observé dans les simulations [72, 42, 73, 59, 63, 74].

Dans le cas de l'équation BK à couplage mobile (3.7), l'universalité des solutions de type front tiré n'est pas démontrée de manière mathématiquement rigoureuse, et n'est pas aussi bien comprise que pour les équations BK à couplage fixe et FKPP. Néanmoins, cette universalité semble visible dans les simulations numériques. En particulier, l'indépendance des solutions de l'équation BK à couplage mobile par rapport aux détails de la condition initiale est vérifiée dans [73] (voir figure 3.2, en bas à droite). De même, les simulations réalisées dans [74] montrent l'impact important sur les solutions d'un mécanisme de saturation, mais aussi leur insensibilité au type de mécanisme, terme non-linéaire comme dans l'équation BK ou mur absorbant mobile (voir figure 3.3). Cela suggère donc que le résultat (3.10, 3.11) de [51, 50] est exact pour l'équation BK avec couplage mobile (3.7), et aussi pour (3.8) en remplaçant r par $1/k$.

Si l'on développe asymptotiquement la formule (3.13) pour $Y \gg Y_0$, le terme en $\sqrt{Y-Y_0}$ va engendrer un terme non universel en $Y_0/\sqrt{Y}$. A partir de cet ordre, le développement de l'échelle de saturation logarithmique (3.13) est donc non universel, dépendant de la condition initiale. Par contre, les ordres précédents pourraient être universels, et donc calculables indépendemment de la condition initiale. Asymptotiquement à grand Y, le rôle du temps pour la propagation du front d'onde est joué par $t(Y) \propto \sqrt{Y}$. A cause de cela, la méthode de calcul par développement asymptotique dans la région de transition fait intervenir la quantité $d\ln Q_s^2/dt$.

L'échelle de temps typique pour les phénomènes diffusifs est $t^{1/3}$, et elle donne la hiérarchie entre les ordres successifs dans ce développement asymptotique. Ainsi, pour $Y \to \infty$, on obtient on développement de la forme

$$\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{Q_s(Y)}{\Lambda_{QCD}}\right) = \# + 0\, t^{-1/3} + \# \, t^{-2/3} + \# \, t^{-1} + \# \, t^{-4/3} + \# \, t^{-5/3} + \# \, t^{-2} + \dots \,, \quad (3.14)$$

où $\#$ désigne des constantes non spécifiées ici. Le second terme dans ce développement est effectivement nul pour la solution critique. En intégrant le développement (3.14) par rapport à t, et en changeant de variable de t à Y, on obtient un développement

$$\ln\left(\frac{Q_s(Y)}{\Lambda_{QCD}}\right) = \#\sqrt{Y} + \# \, Y^{1/6} + \# \, \ln Y + \text{Cste} + \# \, Y^{-1/6} + \# \, Y^{-1/3} + \# \, Y^{-1/2} + \dots \,. \quad (3.15)$$

Le terme constant dans ce développement est probablement non-universel, puisqu'il correspond à une constante d'intégration. Comme nous l'avons dit, les termes d'ordres $Y^{-1/2}$ au moins ne peuvent pas être universels non plus. En plus des termes en $\sqrt{Y}$ et en $Y^{1/6}$ déja connus, il reste vraisemblablement trois termes universels à calculer, en $\ln Y$, en $Y^{-1/6}$ et en $Y^{-1/3}$. Il semblerait donc que cinq termes dans le développement du logarithme de l'échelle de saturation soient universels, contrairement au cas du couplage fixe où il n'y en a que trois. Cette différence ne semble pas avoir été mentionnée dans la littérature jusqu'à présent. Le problème reste ouvert.

3.3 Effet des contributions NLL au noyau d'évolution

Nous discutons dans cette section de l'influence sur les solutions de l'équation BK des corrections NLL ou d'ordre supérieur par rapport à l'équation (3.7). Cette discussion correspond à une version mise à jour de la publication [I], qui généralise au cas du couplage mobile l'étude [77] de schémas NLL pour lesquels le couplage reste fixe dans le noyau.

En guise de préambule, examinons l'effet des corrections d'ordre NLL ou au delà si le couplage est fixe, comme cela est fait dans [78]. Cela correspond à certains schémas d'approximations à l'ordre NLL, ou bien à l'analogue de l'équation BK dans une théorie conforme comme $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills. Dans la partie linéaire de l'équation le nouveau noyau a maintenant une fonction caractéristique[3]

$$\chi(\gamma, \bar{\alpha}) = \chi_{LL}(\gamma) + \bar{\alpha}\, \chi_{NLL}(\gamma) + \dots \quad (3.16)$$

dépendante du couplage. Le calcul des solutions en onde progressive de l'équation BK à l'ordre LL reste valable, en remplaçant simplement $\chi_{LL}(\gamma)$ par $\chi(\gamma, \bar{\alpha})$. Les paramètres γ_c et v_c ainsi que le coefficient de diffusion dans (2.44) recoivent simplement des corrections d'ordre supérieur en $\bar{\alpha}$, mais la structure de la solution est toujours (2.54, 2.55). Ces corrections des paramètres critiques peuvent induire une modification notable de la vitesse et de la pente du front d'onde [78].

Discutons maintenant des résultats de l'article [I]. Considérons formellement une équation BK contenant des termes d'ordre NLL ou au delà, avec le couplage mobile toujours pris à l'échelle donnée par la taille du dipôle parent r, comme dans (3.7), et autorisons aussi l'intervention de l'opérateur ∂_Y dans le noyau

$$\partial_Y N(L,Y) = \frac{1}{bL}\left[\chi_0(-\partial_L, \partial_Y) + \frac{1}{bL}\chi_1(-\partial_L, \partial_Y) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{b^2L^2}\right)\right] N(L,Y) - \text{Non-Linéaire}\,[N] \,. \quad (3.17)$$

[3] Dans cette section, pour plus de clarté, notons $\chi_{LL}(\gamma)$ au lieu de $\chi(\gamma)$ la fonction caractéristique (2.10) du noyau BFKL à l'ordre LL.

Cette équation, très générale, englobe différentes situations. Par exemple, les équations BK à couplage mobile comme (3.4) ou bien celle proposée dans [61] entrent dans cette catégorie : elles contiennent des contributions des boucles de quarks à tout ordre N^{k}LL. De même, si l'on inclut dans l'équation BK le noyau BFKL à un ordre N^{k}LL, on obtient une équation du même type. On a ajouté la possibilité d'une dépendance en ∂_Y dans le noyau pour pouvoir traiter aussi le cas des noyaux BFKL améliorés, obtenus par resommation des singularités non physiques héritées des ordres inférieurs [69, 70, 71]. Comme toujours, pour étudier les solutions en front d'onde, nous pouvons nous limiter à la partie linéaire de l'équation. Ici, les termes d'ordre NLL ou plus dans le noyau peuvent contenir des pôles non physiques d'ordre élevé en $\gamma = 0$ ou en $\gamma = 1$. Ces pôles peuvent en principe perturber la convergence des solutions vers leur forme asymptotique pour $Y \to \infty$. Pour traiter ce problème, utilisons un développement en ω, la variable conjuguée de Laplace de Y (voir (2.11)), inspiré par celui proposé dans [79] pour l'équation BFKL avec couplage mobile. Il s'agit de remplacer le développement en série du noyau en $\bar{\alpha}(r^2) = 1/bL$ par un développement en puissances de ∂_Y. Pour la fonction caractéristique, cela correspond à un développement en puissances de ω. L'expression

$$N(L,Y) = \int_{\omega_0 - i\infty}^{\omega_0 + i\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \int_{\gamma_0 - i\infty}^{\gamma_0 + i\infty} \frac{d\gamma}{2\pi i}\, \Phi(\gamma,\omega)\, \exp\left(-\gamma L + \omega Y + \frac{1}{b\omega} X_\alpha(\gamma,\omega,1/bL)\right) \quad (3.18)$$

est la solution de la partie linéaire de l'équation (3.17) dans l'approximation du point selle pour $L \to \infty$, en prenant

$$X_\alpha(\gamma,\omega,1/bL) = \int^{\gamma} d\gamma' \chi_\alpha(\gamma',\omega,1/bL)\,, \quad (3.19)$$

et en notant le noyau complet de l'équation (3.17)

$$\chi_\alpha(\gamma,\omega,1/bL) = \chi_0(\gamma,\omega) + \frac{1}{bL}\chi_1(\gamma,\omega) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{b^2L^2}\right). \quad (3.20)$$

Effectivement, la condition de point selle à $L \to \infty$ pour (3.18) s'écrit

$$bL\omega = \chi_\alpha(\gamma,\omega,1/bL)\,, \quad (3.21)$$

ce qui correspond bien à l'image de la partie linéaire de (3.17). Cherchons un noyau effectif dont la fonction caractéristique $\chi_{eff}(\gamma,\omega)$ est indépendante du couplage mobile $\bar{\alpha}(r^2) = 1/bL$, et tel que l'équation

$$bL\omega = \chi_{eff}(\gamma,\omega) \quad (3.22)$$

soit équivalente à (3.21). χ_{eff} doit donc vérifier la relation

$$\chi_{eff}(\gamma,\omega) = \chi_\alpha\left(\gamma,\omega,\frac{\omega}{\chi_{eff}(\gamma,\omega)}\right). \quad (3.23)$$

Cette équation implicite peut se résoudre ordre par ordre, et l'on obtient

$$\chi_{eff}(\gamma,\omega) = \chi_0(\gamma,\omega)\left[1 + \frac{\omega\chi_1(\gamma,\omega)}{{\chi_0}^2(\gamma,\omega)} + \frac{\omega^2}{{\chi_0}^2(\gamma,\omega)}\left(\frac{\chi_2(\gamma,\omega)}{\chi_0(\gamma,\omega)} - \frac{{\chi_1}^2(\gamma,\omega)}{{\chi_0}^2(\gamma,\omega)}\right) + \mathcal{O}(\omega^3)\right]. \quad (3.24)$$

Ainsi, la solution asymptotique (3.18) peut se réécrire

$$N(L,Y) = \int_{\omega_0 - i\infty}^{\omega_0 + i\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \int_{\gamma_0 - i\infty}^{\gamma_0 + i\infty} \frac{d\gamma}{2\pi i}\, \Phi(\gamma,\omega)\, \exp\left(-\gamma L + \omega Y + \frac{1}{b\omega} X_{eff}(\gamma,\omega)\right), \quad (3.25)$$

avec

$$X_{eff}(\gamma,\omega,1/bL)=\int^{\gamma}d\gamma'\chi_{eff}(\gamma',\omega)\,. \tag{3.26}$$

Etudions maintenant la limite $Y\to\infty$ de (3.25), dans l'approximation du point selle. Nous avons alors la condition de point selle

$$Yb\,\omega^2-X_{eff}(\gamma,\omega)+\omega\,\partial_\omega X_{eff}(\gamma,\omega)=0\,. \tag{3.27}$$

Dans le cas de l'équation simplifiée (3.7) que nous avons déja étudié, le comportement en $\sqrt{Y}$ dans (3.9) implique que la position du point selle en ω à grand Y se comporte comme $\omega\propto Y^{-1/2}$. Vérifions si la contribution des ordres supérieurs dans (3.27) peut modifier le comportement asymptotique des solutions. Pour cela, développons la condition (3.27) en série par rapport à ω

$$\left[Yb+\frac{1}{2}X^{(2)}_{eff}\left(\gamma,0\right)\right]\omega^2=X_{eff}\left(\gamma,0\right)-\left\{\sum_{p=3}^{\infty}\frac{1}{p(p-2)!}X^{(p)}_{eff}\left(\gamma,0\right)\omega^p\right\}\,, \tag{3.28}$$

et discutons des singularités de $X_{eff}\left(\gamma,\omega\right)$ dans les différents cas qui nous intéressent.

- *Equation BK avec couplage mobile (prescription de Balitsky ou de Kovchegov-Weigert)* : Lorsque l'on réexprime ces deux équations en fonction du couplage mobile $\bar\alpha(r^2)=1/bL$ à l'échelle r, cela engendre, des contributions à tous les ordres au noyau, comme dans (3.17), telles qu'à l'ordre N^{k}LL, $\chi_k(\gamma,\omega)$ a des pôles en γ^{-k-1} et en $(1-\gamma)^{-k-1}$. De plus, $\chi_0(\gamma,\omega)\equiv\chi_{LL}(\gamma)$. L'expression entre crochets dans l'équation (3.24) est donc régulière en γ, puisque ces pôles sont compensés par ceux de $\chi_{LL}(\gamma)$ au dénominateur. Finalement, les dérivées successives $X^{(p)}_{eff}\left(\gamma,0\right)$ par rapport à ω n'ont pas de pôles, mais des singularités logarithmiques en $\ln\gamma$ et $\ln(1-\gamma)$.
- *Equation avec le noyau BFKL à un ordre N^{k}LL strict* : En plus de singularités du même type que dans le cas précédent, les termes d'ordres supérieur $\chi_k(\gamma,\omega)$ contiennent des pôles en γ^{-2k-1} dûs aux problème de choix d'échelle de référence dans la rapidité. En choisissant comme référence l'échelle dure donnée par le projectile, on évite la présence de tels pôles au point $\gamma=1$. On a toujours $\chi_0(\gamma,\omega)\equiv\chi_{LL}(\gamma)$. Dans l'équation (3.24), les coefficients de la série entre crochets contiennent donc des pôles, en γ^{-n} pour le coefficient de ω^n. Ainsi, dans le développement de $X_{eff}\left(\gamma,\omega\right)$, $X^{(p)}_{eff}\left(\gamma,0\right)$ a un pôle en γ^{-p} en plus des singularités logarithmiques.
- *Noyau BFKL à un ordre N^{k}LL, avec resommation des doubles logarithmes colinéaires* : Dans ce cas, on aura $\chi_0(\gamma,\omega)\equiv 2\Psi(1)-\Psi(\gamma+\omega)-\Psi(1-\gamma)$. Et les autres termes $\chi_k(\gamma,\omega)$ du noyau auront *a priori* des pôles en $(1-\gamma)^{-k-1}$ et des pôles déplacés de type $(\gamma+\omega)^{-k-1}$. Par analogie avec le premier cas, $X_{eff}\left(\gamma,\omega\right)$ a donc des singularités en $\ln(1-\gamma)$ et en $\ln(\gamma+\omega)$. Lors du développement en série en ω, ce $\ln(\gamma+\omega)$ donne alors pour $X^{(p)}_{eff}\left(\gamma,0\right)$ un pôle en γ^{-p}.

Dans le cas des équations BK à l'ordre LL avec couplage mobile comme (3.4) [60] ou bien celle proposée dans [61], les coefficients du développement (3.28) n'ont que des singularités en $\ln\gamma$ et $\ln(1-\gamma)$. Dans la limite $Y\to\infty$, la position du point selle en ω ne pourra dévier de $\omega\propto Y^{-1/2}$ que dans un voisinage exponentiellement petit de $\gamma=0$ ou de $\gamma=1$, de taille e^{-aY}, avec $a>0$. On aura alors ω fini. En comparant cela avec la condition de point selle pour γ (3.22), on peut voir que ceci ne peut se produire que dans le domaine $L\propto e^{aY}$ quand $Y\to\infty$, ce qui évidemment hors du domaine de validité du formalisme de l'équation BK. En pratique, dès que Y est relativement grand, les équations données dans [60, 61] ont des solutions identiques à l'ordre dominant à celles de (3.7).

Passons au cas des équations de type BK avec un noyau NLL au moins, que les doubles logarithmes colinéaires engendrés par la liberté de choix de l'échelle d'énergie de référence soient resommés ou non. Cette fois-ci, la position du point selle en ω peut être différente de $\omega \propto Y^{-1/2}$ si $\omega \sim \gamma$, et alors dans ce cas $\omega \ll Y^{-1/2}$. En utilisant (3.22), on voit que cela correspond a $L \gg Y$, qui est encore hors du domaine de validité de l'équation BK. Ainsi, pour $L \leq \mathcal{O}(Y)$, dès que $\sqrt{Y}$ est grand, les contributions d'ordre supérieur au noyau pour l'équation BK, y compris les doubles logarithmes colinéaires, ne peuvent s'opposer à ce que les solutions soient, à l'ordre dominant, les mêmes que celles de (3.7).

On sait maintenant que les différentes équations considérées auront bien pour $Y \to \infty$ des solutions de type front tiré, ne dépendant approximativement que de la variable s_g (3.9), avec les paramètres critiques γ_c et v_c. Discutons maintenant de l'influence des contributions d'ordre supérieur sur le comportement sous-asymptotique des solutions. A Y et L suffisamment grand, la partie linéaire de l'équation (3.17) s'écrit

$$\partial_Y N(L,Y) = \frac{1}{bL}\,\chi_{eff}(-\partial_L,\partial_Y)\,N(L,Y)\,. \tag{3.29}$$

En insérant dans cette équation l'Ansatz

$$N(L,Y) = e^{-\gamma_c s_g}\,f(s_g,t) \quad \text{avec} \quad s_g \equiv L - t \quad \text{et} \quad t \equiv \sqrt{\frac{2v_c(Y-Y_0)}{b}}\,, \tag{3.30}$$

nous obtenons l'équation

$$v_c\left(1+\frac{s_g}{t}\right)\left(\gamma_c-\partial_{s_g}+\partial_t\right)f = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{v_c}{b}\right)^n\chi_{eff}^{(p,n)}(\gamma_c,0)\left[\frac{1}{t}\left(\gamma_c-\partial_{s_g}+\partial_t\right)\right]^n\partial_{s_g}^p f\,. \tag{3.31}$$

Tout d'abord, il faut se rappeler que l'on a $\chi_{eff}(\gamma,0) \equiv \chi_{LL}(\gamma)$. Seuls les termes dans le membres de droite correspondants à $n \geq 1$ sont donc nouveaux par rapport au cas de l'équation (3.7). La partie NLL du noyau BFKL intervient à partir de $n = 1$, la partie NNLL à partir de $n = 2$, et ainsi de suite. Etudions le régime $t \to \infty$ et $s_g \propto t^{1/3}$, qui correspond au domaine de validité de la solution (3.10, 3.11). Les termes aux deux ordres dominants t^0 et $t^{-1/3}$ s'annulent identiquement dans l'équation (3.31), grâce au choix des paramètres critiques γ_c et v_c dans l'Ansatz (3.30). L'ordre suivant, en $t^{-2/3}$, détermine le comportement diffusif de la solution ainsi que le terme en $Y^{1/6}$ dans le développement asymptotique du logarithme de l'échelle de saturation (3.13). Or, les termes avec $n = 1$ n'interviennent qu'à partir de l'ordre suivant, en t^{-1}, et les termes avec $n = 2$ qu'en t^{-2}. Ainsi, on trouve que la solution (3.10, 3.11) et l'échelle de saturation (3.13) sont valables pour l'équation BK avec couplage mobile quels que soient les termes que l'on prend en compte au delà de l'ordre LL, et que le couplage soit pris à l'échelle donnée par la taille du dipôle parent, ou que l'on prenne une prescription plus physique comme dans l'équation (3.4). Nous avons toutefois mentionné que les premiers ordres suivants, en t^{-1}, $t^{-4/3}$ et $t^{-5/3}$, dans l'équation (3.31) correspondent vraisemblablement encore à un comportement universel des solutions, donnant en particulier les termes en $\ln Y$, en $Y^{-1/6}$ et en $Y^{-1/3}$ dans le logarithme de l'échelle de saturation (3.13). D'après notre discussion, les solutions doivent être sensibles à ces ordres-là aux termes NLL dans le noyau de l'équation BK. Les termes NNLL ou plus, eux, ne peuvent contribuer qu'au comportement sous-asymptotique non universel des solutions. La liberté asymptotique est donc une correction changeant en profondeur les propriétés universelles des solutions, tout en les rendant très peu sensibles aux autres corrections d'ordre NLL au moins. A l'inverse, à couplage fixe, les corrections NLL au noyau influent sur l'ordre dominant du comportement universel des solutions de l'équation BK.

3.4 Retour sur les solutions avec couplage mobile

Dans cette section, nous exposons les résultats de l'article [III]. Nous savons maintenant comment se manifestent les corrections NLL, ou liées à l'échelle choisie pour le couplage, dans le comportement asymptotique des solutions de l'équation BK avec couplage mobile. Il est temps de revenir sur la solution (3.10, 3.11). Celle-ci est indépendante des corrections NLL, mais comme nous l'avons dit, elle ne semble pas complètement en accord avec les simulations numériques, qui donnent un front avec une pente plus forte que dans le cas avec couplage fixe. Il faut aussi comprendre plus en détail le domaine de validité de cette solution.

La principale difficulté apportée par la mobilité du couplage est l'absence de famille de solutions exactes en ondes progressives. La solution (3.10, 3.11) a pu être construite en se basant sur la famille de solutions approchées en ondes progressives $N_\gamma(s_g)$ avec la variable s_g défini par (3.9). Celles-ci ne sont valables que pour $Y \to \infty$, et $L = \mathcal{O}(\sqrt{Y})$. En fait, d'autres types de solutions peuvent être tout aussi valables, asymptotiquement, que celles en s_g. Considérons les variables définies par

$$s_\delta = \frac{L}{2\delta}\left[1-\left(\frac{2\,v\,Y}{b\,L^2}\right)^\delta\right], \tag{3.32}$$

dépendant du paramètre $\delta > 0$ ainsi que de v. Pour $\delta = 1/2$, on a $s_{1/2} \equiv s_g$, et pour $\delta = 1$, on obtient

$$s_1 = \frac{L}{2} - \frac{v\,Y}{b\,L} = \frac{L}{2} - v\,\bar{\alpha}(r^2)Y\,, \tag{3.33}$$

qui, si l'on ignore le facteur 1/2, correspond à la substitution du couplage fixe par le couplage mobile dans la variable utilisée à couplage fixe. Pour chaque valeur de δ, on peut montrer que, dans la limite $s_\delta \ll L$, on a une famille de solutions en ondes progressives $A\exp(-\gamma\, s_\delta)$ dans le régime linéaire, avec toujours la relation de dispersion (2.38). Il y a toujours une solution critique pour $\gamma = \gamma_c$ défini par (2.39), de la forme $A(s_\delta + B)\exp(-\gamma_c\, s_\delta)$.

En fait, la valeur de δ n'influe que faiblement sur le comportement des solutions dans le régime considéré. Plus exactement, on peut montrer facilement à partir de l'expression (3.33) que pour tout $\delta > 0$

$$s_\delta = s_{1/2} - \frac{(1-2\delta){s_{1/2}}^2}{2L} + \mathcal{O}\left(\frac{{s_{1/2}}^3}{L^2}\right) \quad \text{pour} \;\; s_{1/2} \ll L\,. \tag{3.34}$$

Changer de valeur de γ et donc de $v(\gamma)$ correspond à parcourir la famille des solutions asymptotiques en onde progressive. Par contre, changer de valeur de δ ne fait pas changer de solution asymptotique, mais donne une nouvelle représentation de la même solution, équivalente asymptotiquement.

Discutons maintenant de la convergence de ces solutions vers la solution critique. Pour cela, il faut garder une deuxième variable, en plus de s_δ. Plutôt que de garder Y, comme dans les cas précédents, gardons la variable L. Ce choix est suggéré par la forme de la variable s_δ. Il permet aussi de vérifier à chaque étape que l'on reste bien dans le domaine perturbatif $\bar{\alpha}(r^2) = 1/bL \ll 1$. Après avoir fait le changement de variable $(L, Y) \mapsto (s_\delta, L)$, on peut s'inspirer de la méthode de [50]. On obtient la solution

$$N(L,Y) \;\sim\; A\,e^{-\gamma_c\,\bar{s_\delta}}\,(DL)^{1/3}\,\mathrm{Ai}\left(\xi_1 + \frac{\bar{s_\delta}}{(DL)^{1/3}}\right) \tag{3.35}$$

$$\text{avec} \quad \bar{s_\delta} \;=\; \frac{L}{2\delta}\left[1-\left(\frac{2\,v\,Y}{b\,L^2}\right)^\delta\right] - \frac{3\xi_1}{4}\,(DL)^{1/3} + \mathcal{O}(\ln L)\,. \tag{3.36}$$

pour $L \to \infty$ et $\bar{s_\delta} = \mathcal{O}(L^{1/3})$, avec les mêmes définitions que précédemment pour tous les paramètres. On pourrait, comme dans (3.11), inclure une translation de la rapidité avec une constante Y_0. Mais comme nous l'avons dit, cela correspond formellement à une correction d'ordre supérieur dans le développement (3.36). On remarque que toute la dépendance en δ de cette solution est contenue dans la variable $\bar{s_\delta}$. En effet, δ n'apparait pas dans l'équation d'Airy obtenue. Par contre, on peut déduire de la relation (3.34) que δ intervient dans l'équation que l'on obtiendrait à l'ordre suivant, pour calculer la première correction à (3.35,3.36).

Analysons maintenant le contenu physique des solutions (3.35,3.36). Discutons d'abord de l'échelle de saturation que l'on peut en extraire en introduisant la notation

$$L_s(Y) \equiv \log\left(\frac{Q_s^2(Y)}{\Lambda^2_{QCD}}\right) \tag{3.37}$$

pour l'échelle de saturation logarithmique. En principe, on devrait définir l'échelle de saturation comme étant celle correspondant à une valeur donnée pour $N(L,Y)$, par exemple $N(L_s(Y),Y) = 0.1$. Pour simplifier, nous négligeons ici l'influence du facteur donné par la fonction d'Airy dans (3.35). Nous pouvons alors définir l'échelle de saturation directement selon la valeur de $\bar{s_\delta}$:

$$\bar{s_\delta}(L_s(Y),Y) \equiv \zeta_{sat}\,, \tag{3.38}$$

où ζ_{sat} est un paramètre d'ordre 1. Pour $\delta = 1$, par exemple, l'expression (3.36) donne l'équation implicite

$$\frac{L_s(Y)}{2} = \frac{v_c\, Y}{b L_s(Y)} + \frac{3\xi_1}{4}(D L_s(Y))^{\frac{1}{3}} + \mathcal{O}(\ln L_s(Y)) + \zeta_{sat}\,. \tag{3.39}$$

On peut résoudre cette équation dans la limite $Y \to \infty$, et l'on trouve

$$L_s(Y) = \sqrt{\frac{2v_c\, Y}{b}} + \frac{3\xi_1}{4}\left(D\sqrt{\frac{2v_c\, Y}{b}}\right)^{1/3} + \mathcal{O}\left(\ln\sqrt{\frac{2v_c\, Y}{b}}\right) + \zeta_{sat}\,. \tag{3.40}$$

Cela correspond précisement à (3.13). Le coefficient du terme logarithmique ne change pas entre (3.39) et (3.40). Par contre, la résolution de l'équation implicite engendre des termes supplémentaires à partir de l'ordre $\mathcal{O}(Y^{-1/6})$ dans $L_s(Y)$. Les courbes $L_s(Y)$ données par (3.39) et (3.40) sont tracées sur la figure 3.4, en négligeant dans les deux cas les termes logarithmiques. Ces courbes ne diffèrent donc que par des termes en $\mathcal{O}(Y^{-1/6})$ dans $L_s(Y)$. Ceux-ci ont une influence notable sur la position de la courbe $L_s(Y)$. C'est aussi le cas pour le terme constant ζ_{sat}. Par contre, la dérivée $\lambda_{eff} \equiv \mathrm{d}L_s/\mathrm{d}Y$ est peu sensible à ces termes d'ordre $\mathcal{O}(Y^{-1/6})$ (voir figure 3.4). On vérifie aussi que les courbes pour $L_s(Y)$ à couplage mobile ou fixe ont une forme très différente. Les modèles phénoménologiques ajustés sur les données indiquent typiquement une valeur $\lambda_{eff} \simeq 0.3$, constante ou bien lentement variable. On peut voir sur la figure 3.4 que cette valeur est en désaccord avec la solution à couplage fixe. Cela pourrait par contre correspondre aux solutions à couplage mobile, à une translation $Y \mapsto Y - Y_0$ près.

Comparons maintenant la forme du front d'onde donnée par les différentes expressions pour les solutions de l'équation BK à couplage mobile. La figure 3.5 représente $N(L,Y)$ en échelle logarithmique pour (3.35, 3.36) avec $\delta = 1$ et pour (3.10, 3.11). Toutes ces expressions ont été obtenues par un développement asymptotique des solutions dans la région de transition entre le régime où l'influence des conditions initiales subsiste et celui où elles ont été oubliées. On peut voir cette région de transition sur la figure 3.5, puisque les deux types de courbes coincident sur un domaine assez important. Cela confirme que les expressions obtenues pour différentes valeurs de δ correspondent bien à des approximations différentes de la même solution, qui

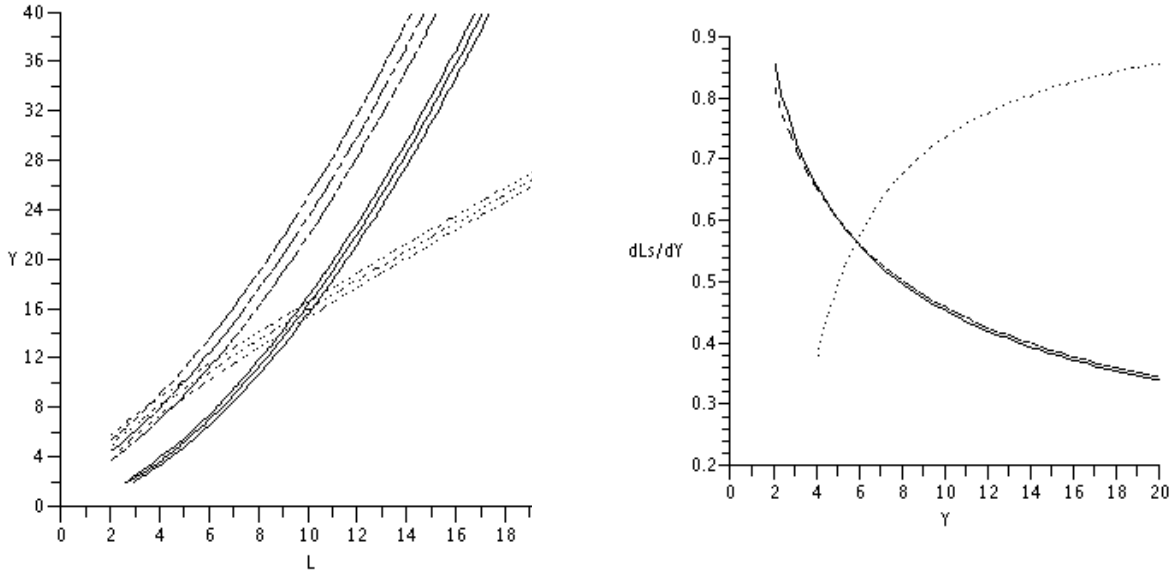

FIG. 3.4 – *Echelle de saturation. A gauche* : Ligne de saturation dans le plan (L,Y). Pour chaque solution, les trois courbes correspondent (de gauche à droite) aux valeurs 0.5, 1 et 1.5 du paramètre ζ_{sat} (voir équation (3.38)). *A droite* : Dérivée logarithmique de l'échelle de saturation $\lambda_{eff} \equiv \mathrm{d}L_s/\mathrm{d}Y$ en fonction de la rapidité Y. Trait plein : solution avec couplage mobile (3.39), pour $\delta = 1$; Tirets : solution avec couplage mobile (3.40) ; Pointillés : solution avec couplage fixe (2.54, 2.55).

diffèrent lorsque l'on s'éloigne de cette région de transition. On voit que le domaine où les courbes se superposent croît lentement et se déplace lentement vers l'avant du front. On attend effectivement ces deux phénomènes, avec une dynamique en $Y^{1/6}$ ou $L^{1/3}$. Il n'y a pas lieu de discuter de la forme des fronts d'ondes pour $N(L,Y)$ plus petit que dans cette zone de transition, puisque les solutions physiques dépendent ici des conditions initiales.

Par contre, dans la région appelée intérieur du front, pour $N(L,Y)$ entre 0.01 et 0.1 typiquement, le front doit avoir une forme universelle. Effectivement, d'après notre compréhension de la dynamique des fronts tirés, cette région ne fait que suivre la région de transition, à la vitesse déterminée par cette dernière. Ainsi, la forme de la solution dans l'intérieur du front doit être indépendante des détails de la conditions initiales et de l'amortissement non-linéaire. Les deux expressions que l'on teste diffèrent fortement dans cette région. L'expression (3.10, 3.11) implique ici une forme très analogue à celle des solutions à couplage fixe. L'expression pour $\delta = 1$, par contre, donne un front avec une pente nettement plus forte. L'extrapolation vers l'intérieur du front de nos résultats asymptotiques obtenus dans la région de transition pour une valeur de δ revient implicitement à supposer que la solution vérifie exactement la loi d'échelle $N(L,Y) = N_{\gamma_c}(s_\delta)$ dans l'intérieur du front. A couplage fixe, une telle propriété est vérifiée. C'est pour cela que la solution (2.54, 2.55) reste valable dans l'intérieur du front. A couplage mobile, par contre, une telle loi d'échelle n'est pas possible, ce qui semble invalider une telle extrapolation pour toute valeur de δ. Néanmoins, il existe certainement une valeur de δ conduisant à une approximation assez fidèle de la solution exacte dans l'intérieur du front.

La figure 3.6 représente la fonction

$$\gamma_{eff}(L,Y) \equiv -\partial_L \ln N(L,Y) \tag{3.41}$$

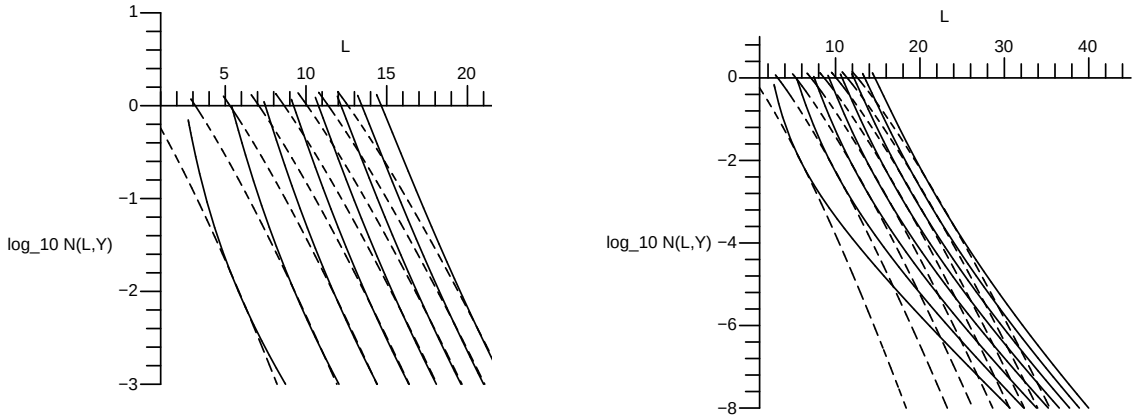

FIG. 3.5 – $N(L,Y)$ en fonction de L pour la solution (3.10, 3.11) en tirets, et pour la solution (3.35,3.36) avec $\delta = 1$ en trait plein. De gauche à droite les différentes courbes correspondent à des rapidités de $Y = 2$ à $Y = 30$ par pas de 4. L'axe vertical est en logarithme base 10. Le premier graphique est simplement un agrandissement du second.

pour les deux expressions que l'on compare. La dimension anormale de $N(L,Y)$ est donnée par $1 - \gamma_{eff}$. Pour l'expression (3.10, 3.11), qui donne des résultats analogues aux solutions à couplage fixe, on peut voir que $\gamma_{eff} \simeq \gamma_c$ dans la partie haute du front. Par contre, la fonction d'Airy contribue de manière significative dans la région de transition, ce qui augmente γ_{eff}. Pour l'expression avec $\delta = 1$, la valeur de γ_{eff} n'est pas reliée de manière simple à γ_c, du fait de la dépendance non triviale en L de s_1, et est toujours supérieure à γ_c dans la région intéressante. γ_{eff} ne se rapproche de γ_c que dans la queue du front, où nos solutions ne s'appliquent pas puisque ce domaine doit être dominé par la condition initiale.

Finalement, nous avons résolu le problème posé par la solution (3.10, 3.11), qui indiquait un front de forme analogue au cas du couplage fixe, en désaccord avec les simulations numériques et l'intuition. Elle n'est qu'une expression approchée de la solution parmi d'autres (3.35,3.36) dans la région de transition. Toutes ces expressions sont bien équivalentes dans cette région, et conduisent donc à la même évolution de l'échelle de saturation. Par contre, suivant la valeur du paramètre δ, la pente du front près de l'échelle de saturation varie fortement. En particulier, pour $\delta > 1/2$, on obtient une pente plus forte qu'à couplage fixe. Il reste à faire une comparaison détaillée de ces expressions avec les solutions numériques pour déterminer quelle est la valeur de δ à choisir pour obtenir la meilleure approximation des solutions de type front tiré de l'équation BK à couplage mobile. La comparaison de ces résultats aux données de DIS à HERA a été entreprise dans la publication [IV], sur laquelle nous reviendrons dans le chapitre 4.2.2.

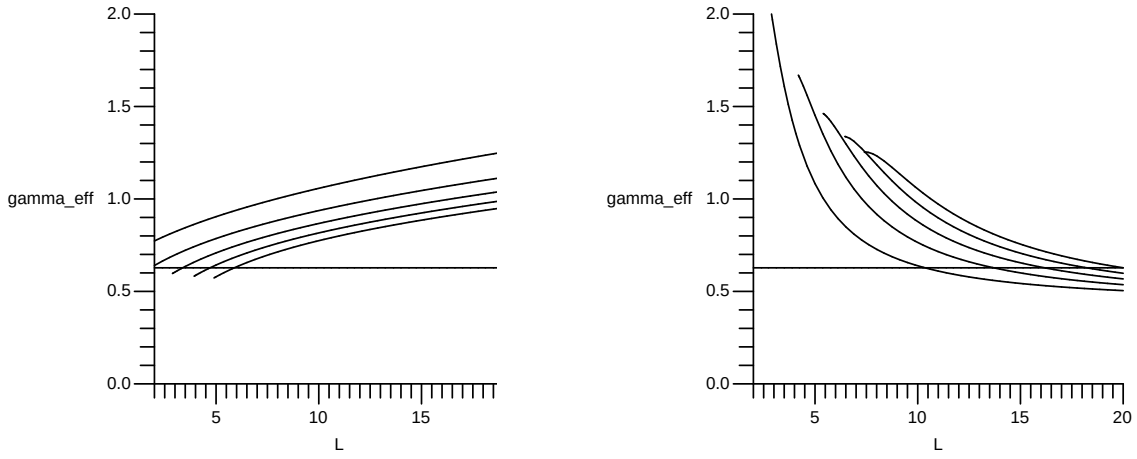

FIG. 3.6 – $\gamma_{eff}(L, Y)$ (voir équation (3.41)) en fonction de L, calculée pour l'expression (3.10, 3.11) (à gauche) et pour (3.35,3.36) (à droite). De gauche à droite, les courbes correspondent dans les deux cas à des rapidités de $Y = 2$ à $Y = 10$ par pas de 2. La ligne horizontale signale la valeur du paramètre critique de la saturation $\gamma_c \simeq 0.63$.

Chapitre 4

Effet des fluctuations et corrélations

Sommaire

4.1 Fluctuations et corrélations en QCD à haute énergie 73
4.1.1 Corrélations dans les équations B-JIMWLK à grand N_c 73
4.1.2 Effets à N_c fini 75
4.1.3 Corrélations et fluctuations dans le régime dilué 76
4.2 Effets de fluctuations gaussiennes 76
4.2.1 Effets à couplage fixe 76
4.2.2 Effets à couplage mobile 78

Ce chapitre est conçu comme une introduction à la publication [II]. Dans les sections 4.1.1 et 4.1.2, nous discutons des fluctuations et corrélations présentes dans les équations B-JIMWLK, et négligées dans l'équation BK. Par comparaison avec le modèle des dipôles qui implique de grandes fluctuations dans le régime dilué, nous expliquons dans la section 4.1.3 que les équations B-JIMWLK sont incomplètes dans le régime dilué. La section 4.2.1 présente les résultats connus à propos des effets de fluctuations sur les solutions universelles en onde progressives de l'équation BK à couplage fixe. La généralisation de ces résultats au cas du couplage mobile a été dérivée dans la publication [II], dont les résultats sont résumés en section 4.2.2.

4.1 Fluctuations et corrélations en QCD à haute énergie

Dans le chapitre 2, nous avons dérivé le comportement universel des solutions de l'équation BK (1.95) à l'ordre LL, et dans le chapitre 3 nous avons étudié l'effet des ordres supérieurs. Comme nous l'avons dit dans le chapitre 1, l'équation BK, qui est une équation déterministe, est obtenue par troncation de la hiérarchie de Balitsky, qui décrit un processus stochastique. Nous allons maintenant examiner quels sont les fluctuations et les corrélations que l'on élimine par cette troncation. Nous verrons que même les équations B-JIMWLK complètes négligent certaines fluctuations, qui peuvent avoir des effets importants.

4.1.1 Corrélations dans les équations B-JIMWLK à grand N_c

La première équation (1.88) de la hiérarchie des Balitsky ne contient pas de dépendance explicite en N_c, à part le coefficient N_c absorbé dans $\bar{\alpha}$. Elle s'écrit donc de la même manière à N_c fini ou dans la limite de grand N_c. A partir de la deuxième équation de la hiérarchie

(1.89) apparaissent des termes en $1/{N_c}^2$. Ce sont d'ailleurs les termes les plus compliqués : ils couplent l'amplitude de diffusion de projectiles formés de dipôles avec celles de projectiles contenant aussi des multipôles. Dans un premier temps, il convient donc de prendre la limite de 't Hooft, c'est à dire $N_c \to \infty$ en gardant $\bar{\alpha}$ constant. La deuxième équation de la hiérarchie devient

$$\begin{aligned}\partial_Y \langle T_{\mathbf{xz}}\, T_{\mathbf{zy}}\rangle_Y = \bar{\alpha} \int \frac{d^2\mathbf{z}'}{2\pi} \Bigg\{ \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2}{(\mathbf{x}-\mathbf{z}')^2(\mathbf{z}'-\mathbf{z})^2} \Big[\langle T_{\mathbf{xz}'}\, T_{\mathbf{zy}}\rangle_Y + \langle T_{\mathbf{z}'\mathbf{z}}\, T_{\mathbf{zy}}\rangle_Y - \langle T_{\mathbf{xz}}\, T_{\mathbf{zy}}\rangle_Y \\ - \langle T_{\mathbf{xz}'}\, T_{\mathbf{z}'\mathbf{z}}\, T_{\mathbf{zy}}\rangle_Y \Big] + \frac{(\mathbf{z}-\mathbf{y})^2}{(\mathbf{z}-\mathbf{z}')^2(\mathbf{z}'-\mathbf{y})^2} \Big[\langle T_{\mathbf{xz}}\, T_{\mathbf{zz}'}\rangle_Y + \langle T_{\mathbf{xz}}\, T_{\mathbf{z}'\mathbf{y}}\rangle_Y \\ - \langle T_{\mathbf{xz}}\, T_{\mathbf{zy}}\rangle_Y - \langle T_{\mathbf{xz}}\, T_{\mathbf{zz}'}\, T_{\mathbf{z}'\mathbf{y}}\rangle_Y \Big] \Bigg\} . \end{aligned} \tag{4.1}$$

Dans le second membre on trouve manifestement des termes correspondant à l'évolution de $T_{\mathbf{xz}}$, et d'autres à l'évolution de $T_{\mathbf{zy}}$. Pour chacun d'eux, on trouve une contribution linéaire de type BFKL, et un terme d'amortissement non-linéaire. Cette structure se généralise aux équations suivantes de la hiérarchie dans la limite de grand N_c. D'après [80, 81], si l'on part d'une condition initiale déterministe, la solution des équations B-JIMWLK dans la limite $N_c \to \infty$ reste déterministe. Cela peut se comprendre très simplement de la manière suivante. On peut remplacer toute la hiérarchie à grand N_c par l'équation

$$\partial_Y T_Y(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \bar{\alpha} \int \frac{d^2\mathbf{z}}{2\pi}\, \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2}{(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2(\mathbf{z}-\mathbf{y})^2}\, \left[T_Y(\mathbf{x},\mathbf{z}) + T_Y(\mathbf{z},\mathbf{y}) - T_Y(\mathbf{x},\mathbf{y}) - T_Y(\mathbf{x},\mathbf{z}) T_Y(\mathbf{z},\mathbf{y}) \right] . \tag{4.2}$$

Cette équation s'applique à un état générique de la cible, indépendemment de la moyenne sur l'état de la cible $\langle \ldots \rangle_Y$. Elle donne donc l'évolution de $T_Y(\mathbf{x},\mathbf{y})$ évènement par évènement. En dehors de cela, cette équation est formellement identique à l'équation BK (1.95). L'évolution des corrélateurs se calcule simplement en insérant l'évolution selon (4.2) pour chacun des opérateurs $T_Y(\mathbf{x},\mathbf{y})$:

$$\partial_Y \langle T_{\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1} \ldots T_{\mathbf{x}_n\mathbf{y}_n}\rangle_Y = \sum_{i=1}^{n} \langle T_{\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1} \ldots (\partial_Y T_{\mathbf{x}_i\mathbf{y}_i}) \ldots T_{\mathbf{x}_n\mathbf{y}_n}\rangle_Y . \tag{4.3}$$

Finalement, les équations B-JIMWLK dans la limite $N_c \to \infty$ sont un processus stochastique d'un type simple : une évolution déterministe (4.2) à partir d'une condition initiale aléatoire. Si l'on se donne la densité de probabilité $W_{Y_0}[\alpha]$ à une rapidité Y_0, on peut calculer évènement par évènement $T_Y(\mathbf{x},\mathbf{y})$ à partir de $T_{Y_0}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ par (4.2), puis obtenir les corrélateurs en moyennant sur l'état initial

$$\begin{aligned}\langle T_{\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1} \ldots T_{\mathbf{x}_n\mathbf{y}_n}\rangle_Y &= \int D[\alpha]\, W_{Y_0}[\alpha]\, T_Y(\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_1) \ldots T_Y(\mathbf{x}_n,\mathbf{y}_n) \\ &= \int D[T_{Y_0}]\, P_{Y_0}[T_{Y_0}]\, T_Y(\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_1) \ldots T_Y(\mathbf{x}_n,\mathbf{y}_n) . \end{aligned} \tag{4.4}$$

On note $P_{Y_0}[T_{Y_0}]$ la densité de probabilité obtenue en intégrant $W_{Y_0}[\alpha]$ par rapport aux degrés de liberté non dipôlaires, qui découplent à grand N_c.

Puisque les solutions de l'équation BK ont un comportement asymptotique universel, une grande partie de l'information contenue dans $P_{Y_0}[T_{Y_0}]$ est oubliée au cours de l'évolution. Pour simplifier, discutons le cas où l'on n'autorise que des conditions initiales indépendantes du paramètre d'impact $T_{Y_0}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \equiv T_{Y_0}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$. A couplage fixe, le comportement asymptotique de ces solutions est essentiellement fixé à une translation du front d'onde près, ou de manière

équivalente à la normalisation de $Q_s(Y)$ près. Suivant la condition initiale T_{Y_0}, le front va se former plus ou moins vite. Asymptotiquement, il y aura alors une certaine dispersion de la position du front, et donc de l'échelle de saturation. Cette dispersion est entièrement due à la forme de la condition intiale et au régime transitoire de formation du front. Pour Y assez grand, on aura donc évènement par évènement une échelle de saturation logarithmique $L_s(Y) = \overline{L_s}(Y) + \Delta L_s$, dont $\overline{L_s}(Y)$ est la valeur moyenne, et ΔL_s est l'écart à cette valeur moyenne qui est indépendant de Y une fois que le front d'onde universel est formé. En se limitant à l'ordre dominant, les solutions de l'équation (4.2) vérifient la loi d'échelle géométrique $T_Y(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = T(L-L_s(Y))$, et l'on a donc, pour Y suffisamment grand

$$N(L,Y) = \langle T_{\mathbf{xy}} \rangle_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} d(\Delta L_s)\ P_\infty(\Delta L_s)\ T(L-\overline{L_s}(Y)-\Delta L_s)\,, \tag{4.5}$$

en notant $P_\infty(\Delta L_s)$ la distribution de probabilité pour ΔL_s issue de $P_{Y_0}[T_{Y_0}]$ une fois que le front est formé pour presque toutes les conditions initiales. Finalement, $N(L,Y)$ vérifie la loi d'échelle géométrique $N(L,Y) = N(L-\overline{L_s}(Y))$ avec la même évolution de $\overline{L_s}(Y)$ que celle de $L_s(Y)$ pour les solutions de l'équation BK. A cause de la convolution, le front de la solution moyenne (4.5) devrait être moins pentu que celui des solutions de l'équation BK. Cela devrait être le seul effet du au caractère stochastique des équations B-JIMWLK à grand N_c survivant à Y grand.

4.1.2 Effets à N_c fini

Les corrections à N_c fini empèchent d'écrire les équations B-JIMWLK comme une évolution déterministe à partir d'une condition initiale aléatoire, comme nous l'avons fait dans la limite $N_c \to \infty$. Ces termes doivent donc introduire des fluctuations dans l'évolution, et devraient pouvoir engendrer des corrélations non triviales même à partir d'une condition initiale déterministe.

Ces effets ont été assez peu étudiés analytiquement. Numériquement [42], la solution de l'équation JIMWLK donne une amplitude dipôle-cible $\langle T_{\mathbf{xy}} \rangle_Y$ extrèmement proche des solutions de l'équation BK. L'écart est de l'ordre de 0.1%, bien plus faible que les 10% attendus naïvement puisque les termes additionnels sont en $1/{N_c}^2$. Ce phénomène a été éclairci récemment. Dans [82], la différence entre le second membre de la première équation de la hiérarchie de Balitsky et celui de l'équation BK

$$\Delta_{\mathbf{xzy}} \equiv \langle T_{\mathbf{xz}}\, T_{\mathbf{zy}} \rangle_Y - \langle T_{\mathbf{xz}} \rangle_Y \langle T_{\mathbf{zy}} \rangle_Y \tag{4.6}$$

a été analysé en détail. Cette étude s'appuie sur des contraintes venant de la théorie des groupes sur les produits de lignes de Wilson de différentes représentations, dans la limite où ces lignes de Wilson suivent la même courbe géométrique. Les auteurs de [82] trouvent

$$\Delta_{\mathbf{xzy}} \begin{cases} \to \frac{1}{{N_c}^2} & \text{pour } |\mathbf{x}-\mathbf{z}| \sim |\mathbf{z}-\mathbf{y}| \gg Q_s^{-1}(Y) \gg |\mathbf{x}-\mathbf{y}| \\ \ll \frac{1}{{N_c}^2} & \text{dans les autres configurations cinématiques.} \end{cases} \tag{4.7}$$

Or, le seul régime où $\Delta_{\mathbf{xzy}} \sim 1/{N_c}^2$ est précisément celui où $(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2/[(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2(\mathbf{z}-\mathbf{y})^2]$ est très petit devant $Q_s^2(Y)$. La première équation de la hiérarchie de Balitsky diffère donc de l'équation BK d'un terme toujours petit devant $1/{N_c}^2$. Ainsi, les corrections à N_c fini ont un impact négligeable sur $\langle T_{\mathbf{xy}} \rangle_Y$ et sur l'évolution de l'échelle de saturation, même si elle peuvent en principe avoir un effet notable sur les corrélateurs d'ordre supérieur.

4.1.3 Corrélations et fluctuations dans le régime dilué

D'après les sections 4.1.1 et 4.1.2, les effets de fluctuations et de corrélations présents dans les équations B-JIMWLK doivent être relativement faibles, et même absents si l'on part d'une condition initiale déterministe et que l'on prend la limite de grand N_c. Les équations B-JIMWLK peuvent sembler *a priori* contenir le modèle des dipôles, et le généraliser en incluant la saturation de gluons. Or, le modèle des dipôles est construit dans la limite de grand N_c, et décrit l'évolution en rapidité de la fonction d'onde d'un dipôle donné. Si l'évolution d'un dipôle cible par l'équation JIMWLK incluait effectivement l'évolution donnée par le modèle des dipôles, celle-ci ne devrait donc pas produire de fluctuations ou de corrélations.

Or, l'étude numérique du modèle des dipôles [18, 16, 83] a révélé des effets de fluctuations et de corrélations très importants. Les fluctuations sont en particulier associées au nombre de dipôles (et donc de gluons) présents dans la fonction d'onde. Le nombre de dipôles présents est évidemment un entier. Dans un système dense, on peut remplacer sans problème ce nombre de dipôles par une densité continue de dipôles. Dans un système dilué, par contre, ce n'est pas le cas : un dipôle en plus ou en moins correspond à un changement essentiel du sytème. Cela implique des effets de fluctuations évènement par évènement importants au cours de l'évolution en rapidité. De même, les dipôles présents sont corrélés puisqu'ils sont obtenus par fragmentation d'un même dipôle. A haute densité, chaque dipôle est corrélé avec beaucoup d'autres, ce qui diminue l'importance de chaque corrélation.

Ainsi, les équations B-JIMWLK sont incomplètes, car elles négligent des effets de fluctuations et de corrélation importants dans le régime dilué. L'étude numérique [84] a d'ailleurs montré que ces effets induisent une contribution non négligeable à la différence (4.6). L'approximation (1.94) conduisant à l'équation BK est donc moins valable si on prend on compte ces effets au delà des équations B-JIMWLK.

Ce problème est en partie lié à celui de la dissymétrie entre le traitement du projectile et de la cible. Un formalisme symétrique généralisant l'approche BFKL par ajout de la saturation de la cible et du projectile avait été proposé dans [85]. Depuis qu'on a réalisé [86] que les équations B-JIMWLK sont incomplètes dans le régime dilué, un grand nombre d'études ont été consacrées à ce problème, notamment [87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94]. Ces études ont conduit à diverses généralisations des équations B-JIMWLK, pour certaines dans la limite de grand N_c, et présentées dans des formalismes variés : action effective, équation de Langevin, hiérarchie d'équations couplées, ou encore formalisme hamiltonien. Ces constructions ne sont pas toutes équivalentes, et il n'y a pas encore de consensus à propos d'un formalisme correct. De plus, aucune solution, analytique ou même numérique, n'a pu être obtenue de ces généralisations des équations B-JIMWLK.

4.2 Effets de fluctuations gaussiennes

4.2.1 Effets à couplage fixe

Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre 2, la dynamique des solutions de type front tirée est gouvernée par le processus de diffusion permettant à la solution universelle d'envahir le régime toujours influencé par la condition initiale. A rapidité assez grande, ce phénomène se déroule dans le régime dilué, loin en avant du front, et donc de l'échelle de saturation. On peut donc s'attendre à ce que la dynamique de ces solutions universelles soit fortement perturbée par l'ajout de fluctuations dans le régime dilué. Pour étudier ce type d'effets malgré les incertitudes quant au formalisme correct pour les décrire en QCD, il convient introduire un modèle-jouet. Nous ajoutons simplement un terme de bruit multiplicatif à l'équation BK évènement par évènement (4.2), écrite par exemple dans l'espace de Fourier, et nous nous

limitons aux solutions homogènes en paramètre d'impact. Nous obtenons alors

$$\partial_Y \tilde{T}(\tilde{L},Y) = \bar{\alpha}\chi(-\partial_{\tilde{L}})\tilde{T}(\tilde{L},Y) - \bar{\alpha}\tilde{T}^2(\tilde{L},Y) + \bar{\alpha}\sqrt{\kappa\,\alpha_s^2\,\tilde{T}(\tilde{L},Y)}\,\eta(\tilde{L},Y)\,, \tag{4.8}$$

où κ est un paramètre du modèle déterminant la force du bruit, et $\eta(\tilde{L},Y)$ un bruit blanc Gaussien de variance

$$\langle \eta(\tilde{L},Y)\eta(\tilde{L}',Y')\rangle = \frac{4}{\bar{\alpha}}\,\delta(\tilde{L}-\tilde{L}')\,\delta(Y-Y')\,. \tag{4.9}$$

L'équation (4.8) doit être utilisée avec la prescription d'Itô[1]. L'équation (4.8) a été obtenue [86] comme approximation d'équations obtenues en QCD. Elle peut aussi être justifiée par analogie avec les processus de réaction-diffusion. Nous avons effectivement vu que l'équation BK est dans la même classe d'universalité que l'équation FKPP, qui est une équation de champ moyen pour certains processus de réaction-diffusion. Une partie des processus de réaction-diffusion généralisant l'équation FKPP peuvent se mettre sous la forme d'une équation de Langevin avec un terme de bruit multiplicatif analogue à celui de l'équation (4.8). Un des principaux exemples est l'équation sFKPP (où le s signifie stochastique), qui s'écrit

$$\partial_t u(x,t) = \partial_x^2 u(x,t) + u(x,t) - u^2(x,t) + \sqrt{2\lambda\,u(x,t)\,(1-u(x,t))}\;\nu(x,t)\,, \tag{4.10}$$

avec le bruit blanc gaussien $\nu(x,t)$ tel que $\langle \nu(x,t)\,\nu(x',t')\rangle = \delta(x-x')\,\delta(t-t')$. Le facteur $(1-u(x,t))$ présent sous la racine dans l'équation (4.10) n'est pas important pour le problème de la dynamique des solutions universelles qui nous intéresse, puisqu'il est proche de 1 dans la région diluée $u(x,t) \ll 1$. Pour l'équation sFKPP, les fluctuations traduisent notamment le fait que le nombre de particules sur chaque site du réseau microscopique est fini, comme le nombre de dipôles dans le modèle des dipôles. Etant données toutes ces similitudes, il a été conjecturé [97] que l'évolution en rapidité pour la QCD à haute énergie est dans la classe d'universalité d'un processus de réaction-diffusion, probablement non-local puisque dans la limite de grand N_c, il doit impliquer la séparation de dipôles en deux, ou leur recombinaison.

Les résultats connus en physique statistique sur la formation de fronts d'ondes solutions de l'équation sFKPP dans la limite de bruit faible ont alors été appliqués au cas de la QCD, ou plutôt de l'équation simplfiée (4.8), puis complétés. Le premier effet du bruit dans les équation (4.10) et (4.8) est le suivant. Quand l'amplitude est très petite, une petite fluctuation peut fréquemment faire diminuer l'amplitude vers zéro, ce qui empêche la croissance exponentielle de l'amplitude dans le régime linéaire de se mettre en place [98]. Cet effet domine jusqu'à ce que l'amplitude soit d'ordre $u(x,t) \simeq \lambda$ pour l'équation sFKPP, ou $\tilde{T}(\tilde{L},Y) \simeq \kappa\,\alpha_s^2$ pour l'équation (4.8). Quand l'amplitude est plus grande, le terme de bruit est plus petit que les autres, et peut être négligé pour calculer la forme du front. Cet effet de fluctuation a un grand impact, car il bloque l'avancée la région de transition déterminant la vitesse du front, et l'empêche de se trouver en avant de la région où $u(x,t) \simeq \lambda$ ou $\tilde{T}(\tilde{L},Y) \simeq \kappa\,\alpha_s^2$. Cela influe bien évidemment sur la valeur asymptotique de la vitesse du front elle-même. Pour l'équation (4.8), cette vitesse asymptotique n'est plus v_c comme pour l'équation BK, mais

$$v_f = v_c - \frac{\pi^2\,\gamma_c^2\,v''(\gamma_c)}{\ln^2(1/\alpha_s^2)}\,. \tag{4.11}$$

De résultats similaires ont été obtenus indépendamment en QCD dans [99].

En plus de cet effet de coupure, traduisant des fluctuations petites mais fréquentes, le terme de bruit produit un deuxième effet, dû aux fluctuations grandes mais rares [100]. Une grande fluctuation peut parfois amener l'amplitude à dépasser $\kappa\,\alpha_s^2$ en un point situé relativement

[1] Voir par exemple [95, 96].

loin en avant du front. L'amplitude peut alors croître exponentiellement en ce point, et former un deuxième front en avant du premier. Après un certain temps, les deux parties de la solution se rejoignent, et l'effet net de la grande fluctuation est un saut du front en avant. A partir d'hypothèses simples, il est possible de trouver analytiquement [100] un résultat en accord avec les simulations numériques pour les cumulants de la position du front d'onde, c'est à dire le logarithme de l'échelle de saturation en QCD. En partant d'une condition initiale déterministe, les cumulants d'ordre 2 ou $n > 2$ trouvés s'écrivent

$$\kappa_2 = D\,t \quad \text{et} \quad \kappa_n = \frac{3\gamma_c^2\, n!\,\zeta(n)}{\pi^2\,\gamma_c^n}\,D\,t\,,$$
$$\text{avec} \quad D = \frac{\pi^4\,\gamma_c\,v''(\gamma_c)}{3\ln^3(1/\alpha_s^2)} \tag{4.12}$$

et, dans le cas de l'équation (4.8), la notation $t = \bar{\alpha}Y$. Ces grandes fluctuations induisent aussi une correction à la vitesse (4.11).

A partir de ces cumulants la densité de probabilité pour la position du front d'onde a été calculée [101]. Le résultat est proche d'une distribution Gaussienne. Cela justifie la remarque [97] selon laquelle la loi d'échelle géométrique (2.58) devrait disparaitre à haute énergie, et être remplacée par une nouvelle loi d'échelle, appelée loi d'échelle diffusive. Cela peut se trouver de manière assez simple. Si l'on résoud l'équation (4.8) avec une condition initiale déterministe, et que l'on fait la moyenne sur les réalisations du bruit, on devrait trouver une solution de type (4.5), mais avec cette fois une distribution Gaussienne pour ΔL_s dont la variance $D\,\bar{\alpha}Y$, donnée par (4.12) croît linéairement. A partir d'une rapidité suffisamment grande, la largeur typique du front pour chaque solution évènement par évènement va être petite devant la dispersion de l'échelle de saturation. Pour le calcul de la solution moyenne de type (4.5) on peut alors remplacer $T(L-\overline{L_s}(Y)-\Delta L_s)$ par une fonction de Heaviside. On obtient alors

$$\begin{aligned} N(L,Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d(\Delta L_s)\ \frac{1}{\sqrt{2\pi D\bar{\alpha}Y}}\ \exp\left(\frac{(\Delta L_s)^2}{2D\bar{\alpha}Y}\right)\ \Theta(\overline{L_s}(Y)+\Delta L_s-L) \\ &= \frac{1}{2}\ \mathrm{erfc}\left(\frac{L-\overline{L_s}(Y)}{\sqrt{2D\bar{\alpha}Y}}\right)\,, \end{aligned} \tag{4.13}$$

où le logarithme moyen de $Q_s^2(Y)$ est $\overline{L_s}(Y) = v_f\bar{\alpha}Y$, avec v_f donnée par (4.11), plus éventuellement les corrections dues aux grandes fluctuations. erfc(x) est la fonction d'erreur complémentaire. En fait, la validité de la loi d'échelle diffusive donnée par (4.13) ne semble pas limitée à la limite de bruit faible. Le résultat (4.13) a en effet été trouvé par une autre méthode dans la limite de bruit fort [102].

4.2.2 Effets à couplage mobile

Nous avons vu que le couplage mobile et les fluctuations apportent chacun des modifications notables à la dynamique des fronts d'ondes solutions de l'équation BK, contrairement à d'autres effets, comme les autres contributions NLL, ou à N_c fini, ou bien les détails de l'amortissement nonlinéaire, qui n'apportent que des corrections marginales aux solutions. Il est donc important d'étudier le cas où l'on prend en compte simultanément le couplage mobile et les fluctuations. Ceci a été fait dans la publication [II], faisant partie de cette thèse. La méthode [98, 100] permettant de calculer la vitesse et les cumulants de la position des fronts d'onde stochastiques dans la limite de bruit faible y est généralisée pour l'équation (4.8) en présence du couplage mobile. Notons que la force du bruit dans l'équation (4.8) est donnée par $\kappa\,\alpha_s^2$. Ainsi, cette méthode, valable uniquement dans la limite de bruit faible, ne s'applique qu'au comportement à grand $\tilde{L}$ des solutions à couplage mobile, et donc à grand Y, à cause

des propriétés de loi d'échelle. Le comportement asymptotique des cumulants de la position du front a donc été calculé [II]. La vitesse v_f et la dispersion D sont modifiées, et deviennent des fonctions de Y. La dépendance en n des cumulants est par contre la même qu'à couplage fixe (4.12). Cela prouve que les résultats de [101] et donc la loi d'échelle diffusive restent valables à couplage mobile dans la limite $Y \to \infty$. La dispersion de l'échelle de saturation croît néanmoins plus lentement qu'à couplage fixe, et la vitesse v converge lentement vers la vitesse v_c obtenue sans fluctuations. L'étude [II] ne donne par contre pas d'information concernant le comportement sous asymptotique des solutions. Les simulations numériques [103] indiquent une formation du front relativement lente dans le cas du couplage mobile, ce qui rejette le régime étudié dans la publication [II] à très grande rapidité, et prolonge de domaine de validité de la solution étudiée dans le chapitre 3. Le domaine de validité de la loi d'échelle diffusive est donc hors d'atteinte de l'accélérateur HERA, mais pourrait éventuellement être exploré au LHC.

Phénoménologie : lois d'échelle en diffusion inélastique profonde

Cet épilogue de la première partie constitue un résumé des études phénoménologiques de la saturation en diffusion inélastique profonde, introduisant les publications [IV] et [VI].

Les expériences de diffusion inélastique profonde constituent l'environnement idéal pour mesurer les effets de la saturation de gluons dans un hadron à haute énergie. Dans le domaine des paramètres (x_{Bj}, Q^2) tel que $Q^2 \lesssim Q_s^2(Y)$, avec $Y = \ln 1/x_{Bj}$, on peut s'attendre à ce que la saturation ait un impact majeur sur les observables. En particulier, la factorisation colinéaire et les équations DGLAP ne devraient pas être valables dans ce domaine, car les collisions multiples entre partons n'y sont pas négligeables. Le phénomène de saturation de gluons n'est bien compris que dans le cadre de la théorie des perturbations. Pour arriver à distinguer clairement les effets de saturation d'autres types d'effets, non-perturbatifs, au delà du formalisme de la factorisation colinéaire, il faut donc en principe que l'échelle de saturation soit assez grande $(Q_s^2(Y) \gg \Lambda_{QCD}^2)$ pour que le phénomène de saturation se produise dans le domaine perturbatif $Q^2 \gg \Lambda_{QCD}^2$. Pour cela, deux stratégies sont possibles. La première est de se placer à haute énergie, c'est à dire à petit x_{Bj} et donc à grande rapidité Y. Nous avons effectivement montré dans les chapitres 2 et 3 que $Q_s^2(Y)$ est une fonction croissante de Y. La deuxième stratégie est de prendre pour cible un noyau le plus gros possible. En effet, par des arguments géométriques simples, on s'attend à ce que la condition initiale à basse énergie pour l'échelle de saturation $Q_s^2(Y)$ croisse avec le nombre atomique A du noyau comme $A^{1/3}$. Pour l'instant, les données disponibles pour la DIS sur des noyaux lourds ne couvrent qu'un domaine relativement bas en énergie. Elles sont donc d'un intérêt limité pour étudier la saturation. Il existe par contre plusieurs projets de collisionneurs électron-noyau à haute énergie, qui seraient très utiles de ce point de vue. Concernant la DIS sur un proton, les données de plus haute énergie sont celles obtenues auprès de l'accélérateur HERA, par les expériences H1 et ZEUS. Ces données ont motivé de nombreuses études phénoménologiques pour rechercher des effets de la saturation.

Le premier type d'études consiste à proposer un modèle pour la section efficace dipôle-proton intervenant dans la factorisation des dipôles, et à l'ajuster sur les données. Cela permet en particulier d'estimer $Q_s^2(Y)$, par l'importance relative des effets de collisions multiples. Après les études pionnières [75, 104], appliquées aux fonctions de structures inclusives et diffractives du proton, plusieurs raffinements ont été ajoutés à ce type de modèle, comme d'inclure les effets de l'évolution DGLAP à grand Q^2 [105], ou la structure (2.54, 2.55) des solutions de l'équation BK [106]. La production exclusive de vecteurs mésons ou la diffusion Compton profondément virtuelle (DVCS) admettent elles aussi une factorisation de dipôle, mais faisant intervenir l'amplitude de diffusion élastique dipôle-proton, avant intégration sur le paramètre d'impact. Pour décrire aussi ces observables, ces modèles de saturation ont été généralisés à l'amplitude de diffusion élastique dipôle-proton, soit en supposant que la dépendance en paramètre d'impact se factorise [107, 108], soit en utilisant le comportement

à transfert non nul des solutions générales de l'équation BK [109].

Ce type de modélisation a permis la découverte [55] de la loi d'échelle géométrique (2.59) dans les données de HERA pour la section efficace totale proton-photon virtuel. Cette loi d'échelle a ensuite été observée [110] dans les données pour la diffraction inclusive, la production exclusive de vecteurs mésons et la DVCS. Ceci est particulièrement intéressant, puisque cette loi d'échelle est une propriété inévitable des solutions de l'équation BK (et certainement aussi des équations B-JIMWLK) à couplage fixe. Les effets de couplage mobile ou de fluctuations modifient comme nous l'avons vu cette loi d'échelle. Mais toutes les lois d'échelles obtenues peuvent se confondre, si le domaine cinématique couvert par les données est restreint. De plus, nous avons remarqué que ces lois d'échelles ne sont pas limitées au régime cinématique où il y a effectivement saturation $Q^2 \lesssim Q_s^2(Y)$, mais restent valables assez loin dans le domaine *a priori* linéaire $Q^2 \gtrsim Q_s^2(Y)$. Ceci va à l'encontre de l'idée reçue selon laquelle les équations DGLAP et/ou BFKL sont suffisantes dans tout le domaine où les termes d'amortissement nonlinéaires, de saturation ou d'unitarisation, sont petits. On peut donc mesurer certains effets de la saturation dans un domaine cinématique plus vaste que le régime véritablement nonlinéaire $Q_s^2(Y) \gtrsim Q^2$, par exemple $\bar{s}^2 \ll 2\bar{\alpha}\,\chi''(\gamma_c)\,Y$ à couplage fixe, avec $\bar{s}$ défini par (2.55).

Etudier ces lois d'échelle a un autre avantage : cela permet de s'affranchir des incertitudes liées à la modélisation de la forme de la section efficace. Par contre, les études [55] et [110] étaient essentiellement qualitatives, par manque d'outil permettant d'estimer quantitativement la validité d'une loi d'échelle dans les données. Cette lacune a été comblée par l'introduction [111] du facteur de qualité (QF) d'une loi d'échelle. Il s'agit d'un estimateur permettant des comparer la validité de différentes lois d'échelles pour un même ensemble de données. Dans la publication [IV] faisant partie de cette thèse, ce facteur de qualité a été utilisé pour réaliser une étude des lois d'échelles obtenues théoriquement appliquée à la DIS inclusive et diffractive, à la DVCS et à la production exclusive de vecteurs mésons. Les lois d'échelles obtenues théoriquement sont valables au niveau de l'amplitude dipôle-cible $N(L,Y)$. Par simple changement de variable, les lois d'échelles de type géométrique $N(L,Y) = N(r^2\,Q_s^2(Y))$ se traduisent en une loi d'échelle $\sigma_{T,L}^{\gamma^*\mathcal{C}}(Y,Q^2) = \sigma_{T,L}^{\gamma^*\mathcal{C}}\left(\frac{Q^2}{Q_s^2(Y)}\right)$ au niveau de la section efficace. La loi d'échelle obtenue à couplage fixe ainsi que celle correspondant à $\delta = 1/2$ dans le cas du couplage mobile sont de ce type. Ce n'est pas le cas pour les variables d'échelle (3.32) avec $\delta \neq 1/2$, ni pour la loi d'échelle diffusive $N(L,Y) = N(\ln(r^2\,Q_s^2(Y))/\sqrt{Y})$. Pour simplifier, nous avons néanmoins supposé que ces lois d'échelle restent approximativement valables au niveau de la section efficace avec simplement le changement $r \mapsto 1/Q$. Toutes les observables testées vérifient dans une large mesure la d'échelle géométrique à couplage fixe, ainsi que les lois d'échelle à couplage mobile, pour un grand intervalle en δ. Le domaine cinématique accessible à HERA n'est effectivement pas suffisant pour les différencier. La loi d'échelle diffusive semble défavorisée, ce qui suggère l'absence d'effets de fluctuations importants au cours de l'évolution en Y.

Dans la publication [VI], cette étude a été prolongée par une comparaison de la contribution F_2^c des quarks charmés à la fonction de structure F_2 dans les données et dans diverses paramétrisations des distributions de partons vérifiant les équations DGLAP. Les données pour F_2^c ne sont pas suffisamment précises pour obtenir des résultats clairs à propos de possibles lois d'échelles. Par contre, les propriétés de loi d'échelle dans les paramétrisations sont très différentes selon qu'elles contiennent ou non du charme intrinsèque, c'est à dire des distributions de quarks c et $\bar{c}$ non nulles à bas Q^2. En principe, la présence de charme intrinsèque à petit x_{Bj} pourrait mimer certains effets de saturation, absents de ces paramétrisations. Cela encourage à poursuivre cette étude en utilisant dans l'avenir des données plus précises pour F_2^c.

Deuxième partie

Approches non perturbatives pour les collisions ultrarelativistes de noyaux lourds

Collisions de noyaux lourds et Plasma de Quarks et de Gluons

Nous présentons ici une revue rapide de la physique des collisions de noyaux lourds. Cela permet de décrire le contexte dans lequel les publications [V], [VII], [VIII] et [IX] se situent.

Les calculs numériques de QCD sur réseau indiquent qu'à haute température, la matière hadronique devrait subir une transition de phase de déconfinement vers un état de plasma de quarks et de gluons (QGP). Dans les collisions de noyau lourds à haute énergie, une très grande densité d'énergie peut être atteinte. Cela peut permettre de produire ce nouvel état, à condition que la matière produite par la collision atteigne assez rapidement un équilibre thermodynamique local, avant que son expansion ne rende la densité d'énergie trop basse. Pour cette raison, un programme expérimental de collisions de noyaux lourds a été conduit auprès des accélérateurs AGS et SPS, se poursuit depuis l'année 2000 auprès de RHIC, et continuera auprès du LHC prochainement. Lors d'une telle collision, la durée de vie d'un QGP est très courte. On ne peut donc détecter que les hadrons produits dans l'état final, une fois que la matière "refroidie" est repassée sous forme hadronique. Une des principales difficultés de l'étude de ces collisions de noyaux lourds est alors de trouver des observables pouvant mettre en évidence sans ambgüité l'étape intermédiaire de QGP.

A RHIC, plusieurs observations indiquent des effets collectifs importants [112, 113, 114, 115], ce qui représente un signal de la production du QGP. D'une part, la distribution de particules produites lors de collisions semi-centrales n'est pas isotrope. Il existe un flot elliptique relativement fort, signalant un comportement hydrodynamique des particules sous l'effet de gradients de pression [116]. De plus, ce flot elliptique des hadrons produits est proportionnel au nombre de quarks de valence, ce qui suggère que ce flot est principalement produit avant l'hadronisation. Par ailleurs, le rapport entre nombre de hadrons produits dans une collision centrale de noyaux lourds et dans une collision proton-proton, divisé par le nombre de nucléons participants, est typiquement de l'ordre de 1/5, alors qu'il est bien d'ordre 1 pour les photons. Vraisemblablement, les partons interagissent donc assez fortement avec le milieu dans lequel ils sont produits. De plus, la mesure des corrélations à deux particules donne des résultats remarquables. Dans une collision de protons ou de noyaux légers, ou encore dans une collision périphérique de noyaux lourds, si une particule de grande impulsion est produite, une autre sera typiquement émise dans la direction opposée, par conservation de l'impulsion. Cela n'est plus vrai dans les collisions centrales de noyaux lourds : aucune particule de grande impulsion n'est produite dans la direction opposée. L'interprétation la plus simple de ce résultat est la suivante : si une paire de partons de directions opposées est produite en périphérie de la distribution de matière, un des partons pourra s'échapper rapidement du milieu tandis que l'autre devra traverser le milieu, et y déposera la majeure partie de son énergie. Le milieu produit semble donc particulièrement opaque aux quarks et aux gluons.

Hydrodynamique (introduction à l'article [V])

Ces résultats expérimentaux ont motivé l'utilisation de l'hydrodynamique pour la modélisation du milieu produit à RHIC, qui pourrait être le QGP. De nombreuses simulations numériques ont été effectuées, d'abord dans l'hypothèse du fluide parfait [117, 118, 119, 120, 121], puis en incluant la viscosité [122, 123, 124], voire même en allant jusqu'au second ordre dans le développement en gradients [125]. Ces simulations fournissent une description précise des données pour la plupart des observables, hormis celles associées à la production de particules de très grande impulsion. Les simulations nécessitent par contre un assez grand nombre de données d'entrée. Il faut évidemment préciser les conditions initiales, mais aussi l'équation d'état du liquide et ses coefficients de transport. Il faut aussi donner une description du découplage des particules du fluide se déroulant à la fin de la période hydrodynamique, afin de pouvoir traduire les résultats hydrodynamiques en termes de particules mesurées dans les détecteurs. Etant données toutes ces sources d'incertitudes, il est intéressant de développer des approches analytiques, même très idéalisées, en parallèle avec ces études numériques détaillées, afin de comprendre plus directement l'effet des différents paramètres, au moins qualitativement. La publication [V] de cette thèse a été effectuée dans cette perspective. Nous l'introduirons en présentant dans le chapitre 5 l'hydrodynamique relativiste en 1+1 dimensions, qui permet des calculs analytiques exacts.

Un milieu à couplage fort ? (introduction à l'article [VII])

La comparaison des données et des simulations numériques favorise une valeur non nulle mais remarquablement faible [122, 123, 124, 125] du rapport η/s, entre la viscosité et la densité d'entropie. Une valeur si petite semble hors d'atteinte dans le cadre de la QCD perturbative. Par ailleurs, la perte d'énergie par un parton traversant un milieu dense calculée perturbativement [126, 127, 128, 129, 130, 131] a tendance à être un peu trop faible pour expliquer les données concernant la réduction du nombre de hadrons produits et les corrélations à deux particules. Ces deux observations suggèrent que le milieu produit à RHIC est soit très dense, soit fortement couplé, soit les deux.

Dans l'hypothèse où le milieu est à couplage fort, la QCD perturbative n'est plus adéquate. La QCD sur réseau, elle, ne permet pas d'accéder aisément à des grandeurs dynamiques, comme les coefficients de transport du milieu, ou la perte d'énergie des partons. Le seul outil connu pour calculer ces quantités à couplage fort est la dualité AdS/CFT [132, 133, 134], ou plus généralement les dualités entre théories de jauge et théories des cordes. La dualité la mieux connue concerne la théorie $\mathcal{N} = 4$ Super-Yang-Mills (SYM), et le dual de la QCD n'est pas connu. Il semblerait toutefois que la QCD dans la phase QGP et $\mathcal{N} = 4$ SYM à température finie soient très semblables. De plus, certaines quantités semblent peu sensibles aux détails de la théorie. C'est en particulier le cas du rapport η/s. Le calcul à l'ordre dominant [135] de ce rapport dans la limite de couplage fort pour $\mathcal{N} = 4$ SYM donne $\eta/s = 1/4\pi$, et le même résultat a été retrouvé dans les autres théories de jauge dont on connait le dual gravitationnel. Les valeurs de ce rapport favorisées par les simulations hydrodynamiques sont du même ordre de grandeur.

Le calcul de la perte d'énergie par un quark lourd a été effectué [136, 137] dans le cadre de la dualité AdS/CFT étendue par ajout d'une $D7$ brane dans la théorie des cordes, duale d'un multiplet contenant une saveur de quark lourde [138]. Du côté gravitationnel de la dualité dans ce calcul, on considère une corde se déplaçant à vitesse constante, dont une extrémité attachée à la $D7$ brane représente le quark lourd. L'autre extrémité touche l'horizon d'une brane noire représentant le milieu thermalisé. La perte d'énergie du quark lourd au profit du milieu est représenté par un flot constant d'énergie s'écoulant le long de la corde vers l'horizon de la brane noire. Cette solution nécessite un apport d'énergie au quark lourd pour le maintenir à

vitesse constante, par exemple grâce à un champ électrique extérieur. La publication [VII] est une généralisation de cette étude au cas non stationnaire où l'on laisse le quark ralentir sous l'effet de sa perte d'énergie due au milieu.

CGC, thermalisation et AdS/CFT (introduction aux articles [VIII] et [IX])

Lors des collisions de noyaux lourds, avant la période décrite par l'hydrodynamique, il existe nécessairement une étape hors-équilibre. Une des raisons de s'intéresser à cette étape est qu'elle fournit les conditions initiales nécessaires pour les simulations numériques hydrodynamiques. L'incertitude sur les conditions initiales constitue une des principales incertitudes sur la viscosité obtenue après ajustement des simulations sur les données. A haute énergie, le formalisme adéquat pour décrire les noyaux juste avant la collision est la théorie effective du CGC, que l'on a étudié dans la partie I. Le CGC détermine alors ce qu'il se passe au moment même de la collision. Récemment, une propriété de factorisation [139, 140, 141] basée sur le CGC a été démontrée pour la production inclusive d'un nombre donné quelconque de gluons au début d'une collision de noyaux lourds. Cela ouvre la voie à un calcul des conditions initiales pour les simulations à partir des premiers principes de la QCD principalement.

Le processus de thermalisation permettant de passer de l'état initial donné par le CGC à un fluide en équilibre thermodynamique local est encore très mal compris. Une première étude [142] dans le cadre de la QCD perturbative a conduit à un temps de thermalisation apparemment trop long, par comparaison avec les simulations hydrodynamiques. Or, la collision de deux noyaux lourds décrits dans le formalisme CGC produit un état hors-équilibre appelé Glasma [143] contenant des champs de gluons semiclassiques très intenses et anisotropes. Des instabilités de ces champs, non prises en compte dans [142], pourraient accélérer le processus de thermalisation [144]. A l'inverse, si l'on suppose que le milieu thermalisé obtenu est à couplage fort, on peut penser que le processus de thermalisation se déroule en grande partie selon une dynamique à couplage fort. Cela suggère d'étudier ce processus dans le cadre d'AdS/CFT, en complément des études perturbatives. Il a été démontré que dans le contexte d'AdS/CFT, le seul comportement possible à temps long pour de la matière en expansion longitudinale est un comportement hydrodynamique [145]. Il reste à comprendre l'approche à ce régime. A cet effet, plusieurs études [146, 147, 148] de collisions d'ondes de choc gravitationnelles ont été conduites, pour tenter de modéliser des collisions de noyaux lourds complètes en AdS/CFT. La publication [VIII] est une étude des ondes de choc pouvant servir de condition initiale pour ces collisions. Sur le cône de lumière, les équations d'Einstein deviennent linéaires, ce qui a permis d'obtenir dans l'article [VIII] des solutions en onde gravitationnelle avec des profils transverses et longitudinaux arbitraires. Il y a de nombreuses similitudes formelles entre ce calcul et celui du champ de gluons rayonné par une distributions de sources classiques se déplaçant sur le cône de lumière, conduisant à l'équation (1.61). L'article [IX] est une étude générale des équations d'Einstein pour une géométrie duale d'un milieu homogène en expansion longitudinale, et de leurs solutions à temps court. Le comportement de ces solutions semble compatible avec une thermalisation relativement rapide du milieu dans la théorie de jauge duale.

Chapitre 5

Hydrodynamique d'un fluide parfait en 1+1 dimensions

Dans ce chapitre nous introduisons le formalisme décrivant l'hydrodynamique d'un fluide parfait relativiste en $1+1$ *dimensions. Cela constitue une introduction à la publication [V].*

5.1 Hydrodynamique relativiste d'un fluide parfait

5.1.1 Thermodynamique :

Considérons un système à l'équilibre dont les lois microscopiques sont celles de la QCD. L'état macroscopique de ce système va être spécifié par la donnée de son énergie U, son volume V et la valeur de certains nombres quantiques N_i. Ceux-ci correspondent soit aux nombres quantiques conservés, comme le nombre baryonique N_B, soit à des nombres quantiques que l'on supposera conservés à l'échelle de temps considéré, comme par exemple l'étrangeté N_s.

Le potentiel thermodynamique associé à cette description du système est l'entropie S que l'on suppose extensive. C'est à dire qu'elle vérifie la loi d'échelle

$$\forall \lambda > 0, \qquad S(\lambda U, \lambda V, \{\lambda N_i\}_i) = \lambda \; S(U, V, \{N_i\}_i)\,. \tag{5.1}$$

La température T, la pression P, et les potentiels chimiques μ_i associés aux quantités N_i sont définis à partir des dérivées partielles de S de manière à avoir

$$dS = \frac{1}{T}\; dU + \frac{P}{T}\; dV - \sum_i \frac{\mu_i}{T}\; dN_i\,. \tag{5.2}$$

En dérivant la relation (5.1) par rapport à λ, puis en prenant $\lambda = 1$, nous arrivons à la relation

$$T\; S = U + P\; V - \sum_i \mu_i\; N_i\,. \tag{5.3}$$

En prenant la différentielle de (5.3) et en utilisant (5.2), nous obtenons la relation de Gibbs-Duhem

$$S\; dT = V\; dP - \sum_i N_i\; d\mu_i\,. \tag{5.4}$$

Comme l'hydrodynamique décrit des systèmes lentement variables et en équilibre thermodynamique local, nous aurons besoin des formes locales des équations précédentes. Introduisons les densités volumiques d'entropie, d'énergie et de nombre N_i, respectivement notées s,

ϵ et n_i. Ces densités sont définies dans le référentiel où le fluide est au repos. Les équations (5.3) et (5.4) s'écrivent alors localement

$$T\ s = \epsilon + P - \sum_i \mu_i\ n_i \tag{5.5}$$

$$s\ dT = dP - \sum_i n_i\ d\mu_i\,. \tag{5.6}$$

Nous pouvons déduire de (5.5) et (5.6) la relation

$$T\ ds = d\epsilon - \sum_i \mu_i\ dn_i\,. \tag{5.7}$$

5.1.2 Hydrodynamique d'un fluide parfait :

De manière générale, nous disposons des lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion

$$\partial_\mu\ T^{\mu\nu} = 0\,, \tag{5.8}$$

et des nombres quantiques N_i

$$\partial_\mu\ j_i^\mu = 0\ . \tag{5.9}$$

L'expression du tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$ et des densités de courants j_i^μ en fonction des grandeurs thermodynamiques et cinématiques dépend du modèle considéré.

Dans toute la suite de ce chapitre, nous étudions le cas d'un fluide parfait. Le champ de vitesses du fluide est noté u^μ, et est normalisé par la condition $u^\mu u_\mu = 1$. Dans un fluide parfait, le transport des quantités conservées N_i s'effectue seulement par entrainement par le fluide, donc la densité de courant de nombre N_i s'écrit

$$j_i^\mu = n_i u^\mu\,. \tag{5.10}$$

De plus, dans le cas d'un fluide parfait, le tenseur énergie-impulsion s'écrit

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + P)u^\mu u^\nu - P\eta^{\mu\nu}\,, \tag{5.11}$$

où $\eta^{\mu\nu}$ est la métrique de Minkowski. On peut justifier la relation (5.11) de la manière suivante. Puisque u^μ est de genre temps, on peut choisir de se placer dans le référentiel par rapport auquel un élément de fluide donné est au repos. Le tenseur énergie-impulsion de cet élément de fluide est alors diagonal. Par définition, la densité d'énergie est donnée par $T^{00} = \epsilon$. Les composantes spatiales diagonales sont égales, grâce à l'hypothèse d'équilibre local, et donnent la pression $T^{ij} = P\,\delta^{ij}$. La seule généralisation covariante de Lorentz de ces relations utilisant seulement les tenseurs $\eta^{\mu\nu}$ et u^μ, les seuls disponibles dans ce problème, est l'expression (5.11).

En pratique, il est souvent utile de considérer les projections de l'équation (5.8) dans la direction de la vitesse u^μ de l'élément de fluide et dans les directions orthogonales à celle-ci. Dans la direction de u^ν, nous avons

$$\begin{aligned} 0 &= u_\nu \partial_\mu\ T^{\mu\nu} \\ &= u^\mu \partial_\mu \epsilon + (\epsilon + P)\partial_\mu u^\mu \\ &= T\ u^\mu \partial_\mu s + \sum_i \mu_i\ u^\mu \partial_\mu n_i + (T\ s + \sum_i \mu_i\ n_i)\partial_\mu u^\mu \\ &= T\ \partial_\mu(s u^\mu) + \sum_i \mu_i\ \partial_\mu j_i^\mu\ . \end{aligned} \tag{5.12}$$

Grâce aux lois (5.9) de conservation des nombres quantiques N_i, nous trouvons, comme attendu pour un fluide parfait, que l'entropie se conserve

$$\partial_\mu(su^\mu) = 0 \ . \tag{5.13}$$

D'autre part, pour tout champ a^μ vérifiant $a^\mu u_\mu = 0$, la projection de l'équation (5.8) sur a^ν donne

$$\begin{aligned} 0 &= a_\nu \ \partial_\mu \ T^{\mu\nu} \\ &= a_\nu(\epsilon + P)u^\mu\partial_\mu u^\nu - a^\mu\partial_\mu P \\ &= a_\nu(T \ s + \sum_i \mu_i \ n_i)u^\mu \ \partial_\mu u^\nu - a^\mu \ s \ \partial_\mu T - a^\mu \ \sum_i n_i \ \partial_\mu\mu_i \ . \end{aligned} \tag{5.14}$$

5.1.3 Fluide sans baryons et sans saveurs :

Aux énergies de RHIC ou du LHC, les quarks de valence d'un des noyaux incidents ne sont en général pas arrêtés par l'autre noyau. Or ce sont eux qui transportent une densité non nulle pour les nombres quantiques N_i, notamment le nombre baryonique. Ainsi, lors de ces collisions, les densités n_i seront nulles sauf dans les régions de fragmentation à grande rapidité. Or, la modélisation par l'hydrodynamique est plus justifiée dans la région centrale, où plus de particules sont produites, que dans les régions de fragmentation. Nous allons donc nous restreindre à l'étude de la région centrale, et prendre pour tous les nombres quantiques conservés $n_i = 0$ dans tout l'écoulement.

Les équations (5.14) vont donc se simplifier en

$$0 \ = \ a_\nu T \ u^\mu \ \partial_\mu u^\nu - a^\mu \ \partial_\mu T \ , \tag{5.15}$$

et les relations thermodynamiques (5.5,5.6,5.7) en

$$T \ s \ = \ \epsilon + P \tag{5.16}$$

$$s \ dT \ = \ dP \tag{5.17}$$

$$T \ ds \ = \ d\epsilon \, . \tag{5.18}$$

L'état thermodynamique du fluide est donc complètement spécifié par un paramètre, par exemple la température. On peut donc considérer que ϵ, P, et s sont des fonctions de T uniquement. Pour finir de déterminer notre modèle, il reste à spécifier la fonction $s(T)$, en choisissant une équation d'état. Pour un fluide parfait, cela revient à donner la vitesse du son en fonction de la température. Celle-ci est définie par

$$c_s(T) \equiv \sqrt{\frac{dP(T)}{d\epsilon(T)}} \ . \tag{5.19}$$

En introduisant la notation $g \equiv 1/c_s^2$, et en utilisant les relations (5.17) et (5.18), nous obtenons

$$g(T) = \frac{1}{c_s^2(T)} = \frac{d\log(s)}{d\log(T)} \ . \tag{5.20}$$

Dans le cas d'une théorie conforme le tenseur énergie-impulsion est nécéssairement de trace nulle ($T^\mu_\mu = 0$), ce qui donne, pour un fluide parfait, $\epsilon = (d-1)P$. Ainsi la vitesse du son est déterminée : $c_s = 1/\sqrt{d-1}$. En QCD, la symétrie conforme est brisée d'une part au niveau classique par la présence des masses des quarks, et d'autre part au niveau

quantique par la liberté asymptotique. A haute énergie, ces deux contributions deviennent négligeables, et la QCD est alors supposée approximativement invariante conforme. Ainsi, cette symétrie approchée suggère $g(T) \simeq d-1=3$ pour le plasma de quarks et de gluons à haute température. Néanmoins, il faut s'attendre à une variation rapide de $g(T)$ au voisinage de la transition entre QGP et matière hadronique, où $\epsilon(T)$, $P(T)$ et $s(T)$ varient rapidement.

5.2 Hydrodynamique en 1+1 dimensions et formalisme de Khalatnikov

5.2.1 Hydrodynamique en $1+1$ dimensions

Après avoir supposé le fluide parfait, et sans densité nette de nombre baryonique ou d'autres nombres quantiques, notre troisième hypothèse est la petitesse du flot transverse comparé au flot longitudinal. En première approximation, nous prenons donc une vitesse du fluide partout longitudinale, et nous considérons toutes les grandeurs physiques indépendentes de la position dans le plan transverse. Cela revient à étudier le modèle hydrodynamique relativiste de la section précédente en $1+1$ dimensions. Ces hypothèses sont celles qui ont été utilisées dans [149, 150]

Nous nous plaçons en coordonnées du cône de lumière. De ce chapitre, nous les normalisons de manière à avoir la métrique

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.21}$$

dans ces coordonnées $(+,-)$. La condition de normalisation de u^μ s'écrit donc $u^\mu u_\mu = u^+u^- = 1$. Autrement dit, nous pouvons parametrer $u^\mu(x^+,x^-)$ par la rapidité locale du fluide $y(x^+,x^-)$, telle que $u^\pm = e^{\pm y}$.

En $1+1$ dimensions, le champ a^μ tel que $(a^+,a^-)=(u^+,-u^-)$ donne en chaque point (x^+,x^-) la seule direction orthogonale à $u^\mu(x^+,x^-)$. Nous avons donc une équation de type (5.14), qui est

$$-\frac{T}{2}(u^+u^-)\partial_+u^+ - \frac{T}{2}(u^-)^2\partial_-u^+ + \frac{T}{2}(u^+u^-)\partial_-u^- + \frac{T}{2}(u^+)^2\partial_+u^- - u^+d_+T + u^-d_-T = 0\ . \tag{5.22}$$

En utilisant

$$(u^-)^2\partial_-u^+ = u^-\partial_-(u^+u^-) - (u^+u^-)\partial_-u^- = -\partial_-u^- \tag{5.23}$$

et la relation analogue par échange des indices $+$ et $-$, nous arrivons à l'équation

$$\partial_+(Tu^+) = \partial_-(Tu^-)\ . \tag{5.24}$$

Etant donnée une fonction $g(T)$, les équations (5.13), (5.20) et (5.24) constituent le problème que l'on souhaite résoudre, correspondant à l'hydrodynamique relativiste d'un fluide parfait sans densité baryonique nette ni autre densité de nombre quantique conservée, en écoulement purement longitudinal. Ce problème semble *a priori* non-linéaire. Mais nous allons voir qu'il est possible de le reformuler de manière linéaire, ce qui facilite sa résolution.

5.2.2 Formalisme de Khalatnikov

Discutons maintenant le formalisme de Khalatnikov, introduit dans [151] puis exploré dans [152]. L'équation (5.24) est équivalente à l'existence d'un potentiel $\Phi(x^+,x^-)$, tel que

$$\partial_\mp\Phi(x^+,x^-) = u^\pm T\ . \tag{5.25}$$

L'équation (5.13) peut alors être vue comme l'équation d'évolution du potentiel Φ. Cette réécriture ne simplifie pas particulièrement notre problème. Par contre, il est intéressant d'effectuer, à ce stade, une transformation de Legendre. Au lieu d'étudier T et $u^{\pm}$ en fonction des coordonnées x^+ et x^-, considérons les coordonnées x^+ et x^- en fonction de Tu^+ et Tu^-. Le potentiel de Khalatnikov χ, transformé de Legendre du potentiel Φ, est alors défini par

$$\chi(Tu^+, Tu^-) \equiv \Phi\left(x^+(Tu^+, Tu^-), x^-(Tu^+, Tu^-)\right) - x^- u^+ T - x^+ u^- T \; . \tag{5.26}$$

En combinant (5.25) et (5.26), nous obtenons

$$\frac{\partial \chi}{\partial (Tu^{\mp})} \; = -x^{\pm} \, . \tag{5.27}$$

Plutôt que les variables Tu^+ et Tu^-, utilisons la rapidité du fluide $y \equiv \log(u^+/u^-)/2$ et $\theta \equiv \log(T/T_0)$, T_0 étant une échelle arbitraire de température. Les relations (5.27) deviennent alors

$$x^{\pm}(\theta, y) = \frac{1}{2T_0} \; e^{-\theta \pm y} \; \left(-\partial_\theta \chi \pm \partial_y \chi\right) \; . \tag{5.28}$$

Il est parfois utile d'utiliser le temps propre $\tau \equiv \sqrt{x^+ x^-}$ et la rapidité d'espace-temps $\eta \equiv \log(x^+/x^-)/2$ à la place des coordonnées du cône de lumière x^+ et x^-. Les équations (5.28) se réécrivent dans ces variables

$$\begin{aligned} \tau(\theta, y) &= \frac{e^{-\theta}}{2T_0} \; \sqrt{(\partial_\theta \chi)^2 - (\partial_y \chi)^2} \\ \eta(\theta, y) &= y + \frac{1}{2} \log\left(\frac{-\partial_\theta \chi + \partial_y \chi}{-\partial_\theta \chi - \partial_y \chi}\right) = y - \mathrm{Argth}\left(\frac{\partial_y \chi}{\partial_\theta \chi}\right) \; . \end{aligned} \tag{5.29}$$

Il reste à exploiter l'équation (5.13) pour déterminer le potentiel de Khalatnikov χ. Une solution de notre problème hydrodynamique va être localement une bijection entre les variables y et θ et les coordonnées x^+ et x^-. Nous avons donc les relations entre les dérivées

$$\partial_\theta \;\; = \;\; (\partial_\theta x^+)\partial_+ + (\partial_\theta x^-)\partial_- \tag{5.30}$$

$$\partial_y \;\; = \;\; (\partial_y x^+)\partial_+ + (\partial_y x^-)\partial_- \, . \tag{5.31}$$

Le déterminant $D \equiv (\partial_\theta x^+)(\partial_y x^-) - (\partial_\theta x^-)(\partial_y x^+)$ de ce système est non nul (sauf éventuellement sur des lignes exceptionnelles, notamment les ondes de choc). L'inversion du système (5.31) donne

$$\partial_+ \;\; = \;\; \frac{1}{D}\left[(\partial_y x^-)\partial_\theta - (\partial_\theta x^-)\partial_y\right] \tag{5.32}$$

$$\partial_- \;\; = \;\; \frac{1}{D}\left[-(\partial_y x^+)\partial_\theta + (\partial_\theta x^+)\partial_y\right] \; . \tag{5.33}$$

En utilisant ces relations dans l'équation (5.13), et puis (5.20), nous avons

$$0 \;\; = \;\; \partial_+(su^+) + \partial_-(su^-) \tag{5.34}$$

$$\;\; = \;\; \frac{1}{D}\left[(\partial_y x^-)\partial_\theta(su^+) - (\partial_\theta x^-)\partial_y(su^+) - (\partial_y x^+)\partial_\theta(su^-) + (\partial_\theta x^+)\partial_y(su^-)\right] \tag{5.35}$$

$$\;\; = \;\; \frac{s}{D}\left[e^y g(T)(\partial_y x^-) - e^y(\partial_\theta x^-) - e^{-y} g(T)(\partial_y x^+) - e^{-y}(\partial_\theta x^+)\right] \; . \tag{5.36}$$

Finalement, en insérant la relation (5.28) dans (5.36), nous obtenons l'équation de Khalatnikov

$$\partial_\theta^2 \chi(\theta, y) + [g(T) - 1] \;\; \partial_\theta \chi(\theta, y) - g(T) \;\; \partial_y^2 \chi(\theta, y) = 0 \, . \tag{5.37}$$

L'hydrodynamique relativiste en $1+1$ dimensions d'un fluide parfait sans baryon ni autre charge nette, décrite par les équations (5.13), (5.20) et (5.24), est un problème apparement non-linéaire. Le formalisme de Khalatnikov permet de révéler la structure linéaire cachée de ce problème, rendant sa résolution beaucoup plus aisée. L'équation de Khalatnikov (5.37) est en effet une équation aux dérivées partielles linéaire hyperbolique du second ordre. Il est donc possible, en principe, d'écrire sa solution générale. Une fois que l'on connait le potentiel χ, nous pouvons en déduire la solution inverse $x^{\pm}(\theta, y)$ du problème hydrodynamique par la formule (5.28). La principale difficulté restante, est l'implémentation des conditions initiales adéquates pour l'équation de Khalatnikov. Puisque χ n'est pas une quantité physique, il faudrait écrire les conditions initiales non pas directement sur χ, mais plutôt sur les grandeurs physiques que l'on peut dériver de χ, soit les coordonnées $x^{\pm}(\theta, y)$, soit des observables en principe accessibles expérimentalement. Cela complique en pratique la sélection d'une solution physique donnée parmi les solutions génériques de l'équation de Khalatnikov.

5.3 Lien avec les observables en 1+1 dimensions

Les hypothèses constituant le modèle permettent une étude analytique plutôt que numérique, mais malheureusement, elles limitent aussi le nombre d'observables que l'on peut étudier. Par exemple, si on étudie le spectre de particules produites, notre modèle ne permet de décrire ni la dépendance en impulsion transverse des particules, ni de comparer la production de particules de différents types. Nous allons maintenant considérer deux grandeurs physiques, les distributions d'entropie et d'énergie le long d'une courbe donnée, et montrer comment les obtenir à partir du potentiel de Khalatnikov χ. Cette dérivation s'inspire de la méthode utilisée dans [153] et dans la publication [V].

Considérons une courbe Σ d'équation $\theta = \theta_\Sigma(y)$ dans le plan (θ, y). Pour une solution donnée de l'hydrodynamique, Σ va correspondre à une courbe dans le plan (x^+, x^-), paramétrée par $x^{\pm}_\Sigma(y) = x^{\pm}(\theta_\Sigma(y), y)$, que l'on supposera de genre espace. Le vecteur infinitésimal tangent à la courbe en y est $(dx^+_\Sigma(y), dx^-_\Sigma(y))$, avec

$$dx^{\pm}_\Sigma(y) = \left[\theta'_\Sigma(y)\ \partial_\theta x^{\pm}(\theta_\Sigma(y), y) + \partial_y x^{\pm}(\theta_\Sigma(y), y)\right] dy\,. \tag{5.38}$$

Le vecteur $dn^\mu(y) \equiv (dx^+_\Sigma(y), -dx^-_\Sigma(y))$ est normal à la courbe en y, et $dn^\mu dn_\mu = -dx^+_\Sigma dx^-_\Sigma > 0$ est la longueur au carré de l'élément de courbe dans le plan (x^+, x^-) correspondant à la portion de la courbe Σ entre y et $y + dy$. La distribution en rapidité le long de la courbe Σ d'une quantité extensive Q (en pratique l'énergie ou l'entropie) est donnée par

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dQ}{dy}\right|_\Sigma (y) &= j^\mu_Q\ \frac{dn_\mu}{dy} \\
&= \frac{1}{2}\left\{ j^-_Q\ \frac{dx^+_\Sigma}{dy} - j^+_Q\ \frac{dx^-_\Sigma}{dy} \right\} \\
&= \frac{1}{2}\Bigg\{ j^-_Q\ \left[\theta'_\Sigma(y)\ \partial_\theta x^+(\theta_\Sigma(y), y) + \partial_y x^+(\theta_\Sigma(y), y)\right] \\
&\qquad - j^+_Q\ \left[\theta'_\Sigma(y)\ \partial_\theta x^-(\theta_\Sigma(y), y) + \partial_y x^-(\theta_\Sigma(y), y)\right] \Bigg\} \\
&= \frac{e^{-\theta_\Sigma}}{4T_0}\Bigg\{ j^-_Q e^{+y}\ \left[\theta'_\Sigma\ \left(-\partial^2_\theta\chi + \partial_\theta\chi + \partial_\theta\partial_y\chi - \partial_y\chi\right) + \partial_y\chi - \partial_\theta\partial_y\chi + \partial^2_y\chi - \partial_\theta\chi\right] \\
&\qquad - j^+_Q e^{-y}\ \left[\theta'_\Sigma\ \left(-\partial^2_\theta\chi + \partial_\theta\chi - \partial_\theta\partial_y\chi + \partial_y\chi\right) + \partial_y\chi - \partial_\theta\partial_y\chi - \partial^2_y\chi + \partial_\theta\chi\right] \Bigg\}\,,
\end{aligned} \tag{5.39}$$

en notant j_Q^μ la densité de courant de Q.

Distribution d'entropie :

La densité de courant d'entropie s'écrit $j_S^\mu = su^\mu$. On déduit donc de l'expression (5.39) la distribution d'entropie en rapidité le long de la courbe Σ

$$\left.\frac{dS}{dy}\right|_\Sigma (y) = \frac{s(T_\Sigma)}{2T_\Sigma}\left\{\theta'_\Sigma\left[\partial_\theta\partial_y\chi - \partial_y\chi\right] + \partial_y^2\chi - \partial_\theta\chi\right\}, \tag{5.40}$$

en notant $T_\Sigma \equiv T_0\ \exp(\theta_\Sigma(y))$ la température sur la courbe Σ en y.

Distribution d'énergie :

La densité de courant d'énergie est donnée par le tenseur énergie-implusion (5.11). Nous avons

$$j_E^\mu = T^{0\mu} = \frac{1}{2}\left(T^{+\mu} + T^{-\mu}\right) = (\epsilon + P)\ \mathrm{ch}(y)\ u^\mu - P\ \left(\delta^{+\mu} + \delta^{-\mu}\right). \tag{5.41}$$

En insérant cette expression dans l'équation (5.39), nous obtenons

$$\begin{aligned}\left.\frac{dE}{dy}\right|_\Sigma (y) &= \frac{\epsilon(T_\Sigma) - P(T_\Sigma)}{2T_\Sigma}\ \mathrm{ch}(y)\left\{\theta'_\Sigma\left[\partial_\theta\partial_y\chi - \partial_y\chi\right] + \partial_y^2\chi - \partial_\theta\chi\right\} \\ &\quad -\frac{P(T_\Sigma)}{T_\Sigma}\ \mathrm{sh}(y)\left\{\theta'_\Sigma\left[-\partial_\theta^2\chi - \partial_\theta\chi\right] + \partial_y\chi - \partial_\theta\partial_y\chi\right\}.\end{aligned} \tag{5.42}$$

Cas des courbes isothermes :

Pour pouvoir utiliser les formules (5.40) et (5.42), il reste à préciser la courbe Σ. Le choix le plus simple consiste à prendre une courbe isotherme. En effet, cela revient à imposer $\theta'_\Sigma(y) \equiv 0$. Sur l'isotherme à température T, (5.40) et (5.42) se réduisent à

$$\left.\frac{dS}{dy}\right|_T (y) = \frac{s(T)}{2T}\left\{\partial_y^2\chi - \partial_\theta\chi\right\} \tag{5.43}$$

$$\left.\frac{dE}{dy}\right|_T (y) = \frac{\epsilon(T) - P(T)}{2T}\ \mathrm{ch}(y)\left\{\partial_y^2\chi - \partial_\theta\chi\right\} - \frac{P(T)}{T}\ \mathrm{sh}(y)\left\{\partial_y\chi - \partial_\theta\partial_y\chi\right\}. \tag{5.44}$$

Remarquons que ces deux grandeurs sont linéaires en χ.

A la fin de l'évolution hydrodynamique, les particules constituant le fluide se découplent. On peut supposer en première approximation que ceci se déroule à une température finale T_f donnée. La distribution d'énergie et d'entropie en rapidité sont peu sensibles à ce processus. La distribution d'énergie en rapidité n'évolue pas après ce découplage. On peut donc identifier la distribution d'énergie mesurée dans le détecteur avec celle dans le fluide à $T = T_f$. Après le découplage, le fluide devient un gaz en régime balistique. Sa densité d'entropie est alors proportionnelle à la densité de particules. On identifiera donc la densité de particules par unité de rapidité mesurée dans le détecteur avec la distribution d'entropie en rapidité dans le fluide à $T = T_f$, à une constante de normalisation près. Pour un traitement plus fin de ce découplage du fluide, on peut utiliser la prescription donnée dans [154].

Cas des autres courbes :

Il est aussi possible de considérer d'autres types de courbes Σ pour calculer les distributions d'énergie et d'entropie. Mais la détermination de la fonction $\theta_\Sigma(y)$ correspondante est plus compliquée. Par exemple, étudions le cas d'une courbe à temps propre τ_Σ fixé. Nous pouvons écrire son équation sous la forme

$$\tau_\Sigma^2 = \tau^2(\theta_\Sigma(y), y) = x^+(\theta_\Sigma(y), y)\ x^-(\theta_\Sigma(y), y)\,, \tag{5.45}$$

ou bien, sous la forme différentielle

$$x_\Sigma^-\ dx_\Sigma^+ + x_\Sigma^+\ dx_\Sigma^- = 0\,. \tag{5.46}$$

En utilisant les équations (5.28) et (5.38) dans (5.46), nous obtenons

$$\partial_\theta\chi\left[-\partial_\theta\partial_y\chi + \theta'_\Sigma\left(-\partial_\theta^2\chi + \partial_\theta\chi\right)\right] + \partial_y\chi\left[\partial_y^2\chi + \theta'_\Sigma\left(\partial_\theta\partial_y\chi - \partial_y\chi\right)\right] = 0\,. \tag{5.47}$$

Il est donc possible, si l'on connait le potentiel de Khalatnikov χ, de trouver une équation différentielle déterminant $\theta_\Sigma(y)$, mais celle-ci sera en général fortement non-linéaire. En pratique, il est difficile de se servir des équations (5.40), (5.42) et (5.47) pour essayer d'imposer *a priori* des conditions initiales ou finales sur le potentiel χ, puisque cela va réintroduire une non-linéarité dans le problème.

Chapitre 6

La correspondance AdS/CFT

Dans ce chapitre nous donnons une introduction élémentaire aux correspondances entre théories des cordes et théories de jauges, en particulier la dualité AdS/CFT. Nous nous focalisons sur le formalisme requis pour les publications [VII] et [VIII].

6.1 Préliminaires

Les théories des cordes ont été développées à partir de la fin années soixante, d'abord dans le but de décrire les interactions fortes, que l'on pensait à l'époque impossibles à décrire à l'aide d'une théorie des champs. Cette voie de recherche a été abandonnée quelques années plus tard, d'une part à cause de la découverte de la liberté asymptotique des théories de Yang-Mills, qui a permis d'établir la QCD en tant que théorie des interactions fortes, d'autre part à cause de problèmes internes aux premières théories des cordes (absence de fermions, présence de tachyon, ...), résolus par la suite dans le cadre des théories de supercordes. L'étude des théories de cordes a été toutefois poursuivie, mais cette fois dans le but de construire une théorie quantique de la gravitation, voire une "*theory of everything*".

6.1.1 Développement à grand N_c d'une théorie de Yang-Mills : cordes ?

Pour une théorie de Yang-Mills dans la limite de grand nombre de couleurs N_c, le couplage gouvernant la théorie des perturbations[1] n'est pas $\alpha_s \equiv g_{YM}^2/4\pi$, mais plutôt $\bar{\alpha} = N_c\,\alpha_s/\pi$ comme nous l'avons remarqué dans la première partie de cette thèse, ou de manière équivalente $\lambda \equiv N_c\, g_{YM}^2$. En prenant la limite de grand N_c à λ fixé, on obtient un développement perturbatif à petit λ pour les amplitudes de la théorie de Yang-Mills dont la structure évoque un développement perturbatif en théorie des cordes [15]. Par exemple, la somme des diagrammes du vide peut s'écrire formellement

$$\mathcal{A}_{vide} = \sum_{g=0}^{+\infty} N_c^{2-2g} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{g,n}\,\lambda^n = \sum_{g=0}^{+\infty} (g_{YM}^2)^{-(2-2g)} \sum_{k=2}^{+\infty} b_{g,k}\,\lambda^k\,, \tag{6.1}$$

où g est le genre de la surface de Riemann sur laquelle on peut tracer le diagramme sans que les lignes internes ne se croisent, et $\chi = 2-2g$ est la charactéristique d'Euler de cette surface. Dans une théorie des cordes fermées, le développement perturbatif à couplage g_{string} faible

[1] Dans ce chapitre, nous noterons g_{YM} plutôt que g_s le couplage d'une théorie de Yang-Mills, afin de distinguer celui-ci du couplage d'une théorie de cordes, souvent noté g_s dans la littérature, et pour lequel nous choisissons la notation g_{string}.

d'une amplitude de diffusion s'écrit

$$\sum_{g=0}^{+\infty} g_{string}^{-(2-2g)}\, c_g\,. \tag{6.2}$$

La contribution d'ordre g à l'amplitude correspond au cas d'une feuille d'univers de la corde formant une surface de Riemann de genre g. La similitude de l'interprétation topologique des développements (6.1) et (6.2) a conduit à conjecturer [15] que les théories de Yang-Mills à grand N_c et à λ finis pourraient être équivalentes à des théories des cordes fermées dans la limite de couplage g_{string} faible, avec $g_{string} \sim 1/N_c$ ou bien $g_{string} \sim g_{YM}^2$. Cela a permis de comprendre que la description des interactions fortes par la QCD n'est pas nécessairement incompatible avec une description par une théorie des cordes. Cette correspondence entre théorie des champs de jauge et théorie des cordes est assez subtile, et il a fallu 25 ans pour en construire un exemple concret : la dualité AdS/CFT.

Remarquons quelques problèmes que l'on doit surmonter pour construire une telle correspondence. Les théories des cordes connues ne sont bien définies que pour un espace-cible de dimension 26 dans le cas des cordes bosoniques ou 10 dans le cas des supercordes. Il faut ainsi préciser comment une théorie des cordes en 10 ou 26 dimensions peut être équivalente à une théorie des champs en 4 dimensions. Par ailleurs, les théories de Yang-Mills dépendent de deux paramètres sans dimension, par exemple N_c et λ, et les théories des cordes du couplage sans dimension g_{string} et de la longueur de la corde l_s. Toutefois, l'espace-cible peut fournir des paramètres supplémentaires pouvant influer sur la propagation des cordes. En particulier, dans le cas d'un espace-cible courbe, de rayon de courbure L, les coefficients c_g du développement (6.2) peuvent dépendre du paramètre sans dimension l_s/L. Cela suggère que les théories des cordes duales des théories de Yang-Mills ont des espaces-cibles courbes, et que l_s/L est relié à λ.

6.1.2 Spectre à basse énergie

Dans la limite de basse énergie, les théories de supercordes se ramènent à des théories des champs définies dans l'espace-cible. On peut négliger les modes de vibration des cordes donnant des champs de masse d'ordre l_s^{-1}, et ne conserver que les modes fondamentaux, donnant des champs de masse nulle. Dans le cas de cordes fermées, on obtient notamment l'action d'Einstein-Hilbert pour l'espace-cible, couplée à un champ scalaire Φ appelé dilaton, ainsi que des formes antisymétriques. Dans le cas de cordes ouvertes, on obtient notamment un champ vectoriel. De manière générale, on obtient aussi des champs fermioniques, et le tout forme une théorie de supergravité en dimension 10.

6.2 Des branes à la correspondance AdS/CFT

6.2.1 *D*-branes

Au milieu des années quatre-vingt-dix, on a remarqué qu'une formulation complète des théories des cordes nécessite l'introduction des nouveaux objets : les p-branes. Ce sont des objets étendus suivant p dimensions d'espace, et donc leur propagation décrit un volume d'univers de dimension $p+1$. Ils sont chargés électriquement ou magnétiquement par rapport à certaines des formes antisymétriques. Il en existe plusieurs types, mais nous ne discuterons ici que des Dp-branes [155], qui sont des objets sur lesquels on peut attacher l'extrémité de cordes ouvertes. Ces cordes ouvertes vérifient alors des conditions aux bords de Dirichlet[2] dans

[2]Le D de Dp-brane signifie Dirichlet.

les directions orthogonales à la brane. Lorsque les deux extrémités d'une corde ouverte sont attachées à une Dp-brane, les dix composantes du champ vectoriel contenu dans le spectre à basse énergie de la corde se séparent en deux types : $9-p$ champs scalaires décrivant le plongement du volume d'univers de la brane dans l'espace-cible, et $p+1$ composantes forment un champ vectoriel défini dans le volume d'univers de la brane. Ainsi, le spectre des cordes ouvertes attachées à une $D3$-brane contient un champ de jauge en $3+1$ dimensions. Ce type de brane est présent dans la théorie des cordes de type IIB.

De plus, on peut considérer un empilement de N_c $D3$-branes coïncidentes. Les deux extrémités d'une corde ouverte peuvent être attachées à deux branes différentes. Dans ce cas, on obtient dans la limite de basse énergie une théorie de jauge[3] $U(N_c) = U(1) \times SU(N_c)$. Dans cette théorie de jauge, le champ associé au facteur $U(1)$ se découple naturellement de ceux associés à $SU(N_c)$. Finalement, la théorie effective à basse énergie pour un empilement de N_c $D3$-branes contient un champ de Yang-Mills $SU(N_c)$ en $3+1$ dimensions, ainsi que divers champs bosoniques ou fermioniques, définis soit dans le volume d'univers des branes, de dimension $3+1$, soit dans l'espace-cible, de dimension $9+1$. Le couplage g_{YM} de la théorie de Yang-Mills effective est relié au couplage de la théorie des cordes par

$$g_{YM}^2 = 4\pi\, g_{string}\,. \tag{6.3}$$

6.2.2 Branes comme solutions de la supergravité

Pour l'instant, nous avons considéré les $D3$-branes simplement comme des objets auxquels on peut attacher des cordes ouvertes, en supposant implicitement qu'elles ne modifient pas la géométrie de l'espace-cible. Ceci n'est valable que pour $N_c\, g_{string} \ll 1$. Pour $N_c\, g_{string} \gg 1$ l'empilement de N_c $D3$-branes déforme l'espace-cible de manière notable. Dans cette limite, la métrique de l'espace-cible est donnée par une solution [156] de supergravité en 10 dimensions[4]

$$ds^2 = \left(1+\frac{L^4}{r^4}\right)^{-1/2} \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu + \left(1+\frac{L^4}{r^4}\right)^{1/2} \left(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2\right)\,, \tag{6.4}$$

où $\eta_{\mu\nu}$ est la métrique de Minkowski en $3+1$ dimensions, et le rayon de courbure L de la métrique (6.4) est donné par

$$L^4 = 4\pi g_{string}\, N_c\, l_s^4\,. \tag{6.5}$$

Cette solution de supergravité contient aussi une valeur non triviale pour la 5-forme antisymétrique auto-duale F_5.

6.2.3 Dualité cordes ouvertes / cordes fermées

L'empilement de N_c $D3$-branes peut donc être décrit soit comme conditions de bord pour les cordes ouvertes, soit comme source de champs de la supergravité de type IIB en dimension 10. Ces deux descriptions sont en fait duales l'une de l'autre. Cela correspond, de manière plus générale, à une dualité entre cordes ouvertes et cordes fermées. Par exemple, la contribution la plus simple à l'interaction entre deux $D3$-branes, avec une corde dont la feuille d'univers est un cylindre est représentée sur la figure 6.1. Elle peut s'interpréter de deux manières différentes.

On peut considérer (voir Fig.6.1, à gauche) que le cylindre est engendré par la propagation à une boucle d'une corde ouverte dont les extrémités sont attachées à deux $D3$-branes. Cette

[3] Nous ne considérons ici que le cas de cordes orientées. Pour des cordes non orientées, on obtiendrait un groupe de jauge $O(N_c)$ ou $Sp(N_c)$.

[4] Dans ce chapitre, contrairement au reste de la thèse, nous écrivons toutes les métriques avec la signature $(-,+,+,\ldots,+)$, usuelle en relativité générale et en théorie des cordes.

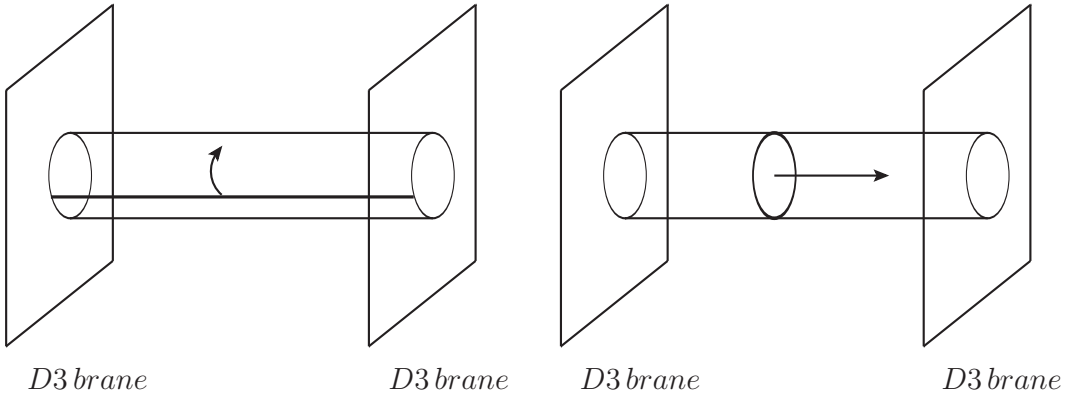

FIG. 6.1 – Illustration de la dualité cordes ouvertes / cordes fermées : deux interprétations pour le diagramme en cylindre pour l'interaction entre deux $D3$-branes. *A gauche :* Diagramme à une boucle pour une corde ouverte dont les extrémités sont attachées à des $D3$-branes. *A droite :* Interaction entre deux $D3$-branes par l'échange d'une corde fermée. Dans les deux cas, les $D3$-branes sont représentées éloignées l'une de l'autre plutôt que confondues, pour plus de clarté.

contribution contient notamment, à basse énergie, le diagramme du vide à une boucle de gluon pour la théorie de Yang-Mills définie dans le volume d'univers des $D3$-branes.

Alternativement, on peut considérer que le cylindre est engendré (voir Fig.6.1, à droite) par la propagation d'une corde fermée d'une $D3$-brane vers une autre. Cette contribution contient notamment, à basse énergie, l'interaction gravitationnelle des $D3$-branes, par échange d'un graviton.

Il est généralement admis que ce genre de dualité se généralise aux contributions contenant des feuilles d'univers de genre plus élevé, et même à la théorie des cordes au niveau non-perturbatif.

6.2.4 La limite de découplage

Du côté "cordes ouvertes" de cette dualité, pour $N_c\, g_{string} \ll 1$, nous avons la théorie des cordes de type IIB dans l'espace de Minkowski en dimension 10, couplée à un empilement de N_c $D3$-branes, dont les excitations sont décrites en termes de cordes ouvertes. A basse énergie, on peut se restreindre à la théorie effective ne contenant que les champs de masse nulle. Les excitations massives des cordes n'interviennent que pour donner des couplages, en général non renormalisables, entre ces champs de masse nulle. Si l'on prend la limite $l_s \to 0$, les termes d'interaction entre les champs vivants dans l'espace-cible et ceux vivants dans le volume d'univers des $D3$-branes s'annulent tous. Dans cette limite, les champs de l'espace cible forment la supergravité de type IIB dans l'espace de Minkowski en dimension 10. Les champs du volume d'univers des $D3$-branes forment, eux, la théorie $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills (SYM) $U(N_c)$ en dimension 4, après élimination des couplages non renormalisables grâce à la limite $l_s \to 0$.

Du côté "cordes fermées" de la dualité, pour $N_c\, g_{string} \gg 1$, nous avons la théorie des cordes de type IIB dans l'espace cible donné par la métrique (6.4), avec un champ de fond F_5 non trivial. On peut remarquer que la région $r \simeq 0$ constitue un puits de potentiel dans cet

espace. Cela rend la limite de basse énergie plus subtile. Même si l'on se place à suffisamment basse énergie pour que l'on puisse négliger les excitations massives des cordes se trouvant à grand r, on ne pourra pas les négliger pour des cordes se trouvant à petit r. Intuitivement, on peut comprendre cela en remarquant que le champ gravitationnel à petit r est très intense, et peut exciter, par effet de marée, de nombreux modes de vibration des cordes. La limite de basse énergie qu'il convient de prendre correspond à $l_s \to 0$ en gardant r/l_s^2 fixé, afin de garder l'énergie des cordes se trouvant à petit r constante en unité de l_s^{-1}. Dans cette limite, la région de l'espace cible à petit r à grand champ gravitationnel est de taille tendant vers 0. Hors de cette région, la théorie des cordes se réduit alors à la supergravité de type IIB. A la limite, les champs contenus dans cette théorie effective auront une trop grande longueur d'onde pour pouvoir sonder la région de petit r. Par ailleurs, cette région de petit r agit, dans cette limite de basse énergie, comme un puits de potentiel infini piégeant pour les cordes qui s'y trouvent. On a donc découplage entre les modes non localisés à petit r, qui sont décrits par la supergravité de type IIB dans l'espace de Minkowski de dimension 10, et les modes localisés à petit r, qui sont décrits par la théorie des cordes de type IIB dans la métrique

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2}\,\eta_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu + \frac{L^2}{r^2}\,dr^2 + L^2\,d\Omega_5^2\,, \tag{6.6}$$

obtenue à partir de la métrique (6.4) dans cette limite de basse énergie. Cette métrique correspond à l'espace $AdS_5 \times S_5$, produit de l'espace Anti de Sitter de dimension 5 par la sphère de dimension 5.

Si l'on admet la validité de la dualité entre cordes ouvertes et cordes fermées, on doit avoir dualité entre les limites de basse énergie obtenues dans les deux cas. A chaque fois, cette limite donne deux théories découplées, dont la supergravité IIB dans l'espace de Minkowski en dimension 10. On doit donc avoir une dualité entre les autres théories obtenues. Pour la théorie $\mathcal{N} = 4$ SYM de groupe de jauge $U(N_c) = U(1) \times SU(N_c)$, obtenue du côté "cordes ouvertes", les champs correspondants au sous-groupe $U(1)$ se découplent de ceux correspondants au sous-groupe $SU(N_c)$. Les modes duaux de cette théorie de jauge $U(1)$ ont été identifiés comme étant des modes zéros vivant sur le bord de l'espace AdS_5, que l'on peut inclure ou non dans la théorie des cordes sur $AdS_5 \times S_5$. Nous ne les prendrons pas en compte. Ainsi, la dualité entre cordes ouvertes et cordes fermées se traduit par une dualité [132] entre la théorie $\mathcal{N} = 4$ SYM en dimension 4 avec le groupe de jauge $SU(N_c)$, et la théorie des cordes de type IIB dans l'espace cible $AdS_5 \times S_5$.

La dualité ainsi obtenue ne concerne pas la QCD, mais la théorie $\mathcal{N} = 4$ SYM, qui contient quatre fermions de Weyl et six scalaires réels en plus du champ de jauge. Tous ces champs sont dans la représentation adjointe du groupe de jauge $SU(N_c)$. Cette théorie possède quatre supersymétries, ce qui la rend maximalement supersymérique. Elle est aussi invariante conforme, y compris au niveau quantique : le couplage de jauge g_{YM} est invariant d'échelle à tout ordre de perturbation. C'est donc une théorie des champs conforme (CFT, pour *conformal field theory*), d'où l'appelation AdS/CFT pour la correspondance que nous avons présentée.

Un des tests les plus élémentaires de la correspondance AdS/CFT est de vérifier que les symétries globales sont les mêmes pour les deux théories. La théorie $\mathcal{N} = 4$ SYM est invariante notamment sous le groupe des transformations conformes en dimensions 4, qui généralise le groupe de Lorentz. Son algèbre de Lie est isomorphe à $so(4, 2)$, qui est aussi l'algèbre des isométries de l'espace AdS_5. Les quatre générateurs de la supersymétrie jouent un rôle équivalent dans la théorie $\mathcal{N} = 4$ SYM. Grâce à cela, cette dernière possède une symétrie globale $SU(4)$, dite R-symétrie, correspondant aux rotations dans l'espace des générateurs de la supersymétrie. Les quatre fermions de Weyl forment un multiplet fondamental pour cette symétrie, et les six scalaires un multiplet adjoint. Le groupe des isométries de la sphère S_5

est $SO(6)$, et les groupes $SU(4)$ et $SO(6)$ ont même algèbre de Lie. Les groupes bosoniques de symétrie des deux théories ont donc les mêmes algèbres de Lie. On peut montrer que cette correspondance se généralise aux générateurs fermioniques. Ainsi, la théorie $\mathcal{N} = 4$ SYM en dimension 4 et la théorie des cordes IIB dans l'espace $AdS_5 \times S_5$ ont bien la même superalgèbre de symétries globales.

Les paramètres des deux théories, g_{YM} et N_c pour $\mathcal{N} = 4$ SYM et g_{string}, l_s et L pour la théorie des cordes, sont reliés par les équations (6.3) et (6.5). En particulier, on trouve que le couplage de 't Hooft λ de $\mathcal{N} = 4$ SYM est donné par

$$\lambda \equiv N_c \, g_{YM}^2 = \frac{L^4}{l_s^4} \, . \tag{6.7}$$

Il mesure donc la validité de l'approximation de supergravité de la théorie des cordes dans $AdS_5 \times S_5$: pour $\lambda \gg 1$, et donc $L \gg l_s$, la supergravité est une bonne approximation. Dans le cas contraire, les effets cordistes sont importants. La longueur de Planck dans une théorie des cordes est donnée par $l_P = g_{string}^{1/4} \, l_s$. On a donc la deuxième relation

$$4\pi \, N_c = \frac{L^4}{l_P^4} \, . \tag{6.8}$$

Il faut donc prendre N_c grand pour que la théorie des cordes duale soit faiblement couplée. Le régime de la théorie des cordes que l'on maîtrise le mieux est celui où elle se réduit à la supergravité classique. D'après les relations (6.7) et (6.8), on voit que cela correspond aux limites $N_c \to \infty$ et $\lambda \to \infty$. En fait, il faut aussi $g_{string} \ll 1$. Cela impose de prendre la limite $N_c \to \infty$ avant la limite $\lambda \to \infty$. Ce régime de supergravité classique correspond donc au régime de couplage fort de la théorie $\mathcal{N} = 4$ SYM dans la limite planaire, hors de portée des méthodes perturbatives. Cela rend la dualité AdS/CFT à la fois très utile, et très difficile à démontrer.

Dans la pratique, il est souvent utile de développer les champs de la supergravité IIB dans $AdS_5 \times S_5$ en harmoniques sphériques suivant S_5. On obtient alors une théorie de supergravité dans AdS_5, incluant des champs masse d'ordre L^{-1} donnés par les harmoniques d'ordre supérieur. En utilisant le changement de variable $z = L^2/r$, on écrit la métrique

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} \left(dz^2 + \eta_{\mu\nu} \, dx^\mu dx^\nu \right) \, . \tag{6.9}$$

6.3 AdS/CFT à l'œuvre : correspondance champs/opérateurs.

Une formulation plus complète de la correspondance AdS/CFT a été proposée dans les articles [133, 134], ouvrant la porte à de nombreuses applications. Dans la limite de la supergravité, la correspondance AdS/CFT est en fait une dualité entre les opérateurs de la théorie $\mathcal{N} = 4$ SYM et les champs de la supergravité dans $AdS_5 \times S_5$.

Considérons un opérateur $\mathcal{O}$ de la théorie $\mathcal{N} = 4$ SYM, et ajoutons à l'action de cette théorie un terme de source pour cet opérateur

$$S_{SYM} \mapsto S_{SYM} + \int d^4x \, j_{\mathcal{O}}(x) \, \mathcal{O}(x) \, . \tag{6.10}$$

La fonction de partition de la théorie est alors donnée par l'intégrale fonctionnelle

$$Z_{SYM}[j_{\mathcal{O}}] = \int D\Psi \, e^{iS_{SYM} + i \int d^4x \, j_{\mathcal{O}}(x) \, \mathcal{O}(x)} \, , \tag{6.11}$$

où Ψ désigne de manière générique les champs de $\mathcal{N}=4$ SYM. Les fonctions de corrélation connexes à n points de l'opérateur $\mathcal{O}$ s'obtiennent par

$$\langle \mathcal{O}(x_1)\dots\mathcal{O}(x_n)\rangle_c = (-i)^n \left.\frac{\delta^n \ln(Z_{SYM}[j_\mathcal{O}])}{\delta j_\mathcal{O}(x_1)\dots\delta j_\mathcal{O}(x_n)}\right|_{j_\mathcal{O}=0} . \tag{6.12}$$

Notons ϕ le champ de supergravité dual de l'opérateur $\mathcal{O}$, et Δ la dimension conforme de l'opérateur $\mathcal{O}$. La correspondance AdS/CFT s'écrit [133, 134], dans la limite de supergravité,

$$Z_{SYM}[j_\mathcal{O}] = e^{iS_{grav}[\phi]} , \tag{6.13}$$

où $S_{grav}[\phi]$ est l'action de la supergravité évaluée sur la solution classique de la supergravité vérifiant des conditions de bord reliées à la source $j_\mathcal{O}(x^\mu)$. Plus précisément, le bord de l'espace AdS_5 est situé à $z=0$, c'est à dire $r\to\infty$, et on considère la solution classique vérifiant la condition de bord

$$\lim_{z\to 0}\frac{\phi(x^\mu,z)}{z^{4-\Delta}} = j_\mathcal{O}(x^\mu) . \tag{6.14}$$

Pour calculer les fonctions de corrélations connexes d'opérateurs de la théorie $\mathcal{N}=4$ SYM, il suffit donc de calculer la solution classique de la supergravité vérifiant la condition de bord (6.14) pour une distribution de sources $j_\mathcal{O}(x^\mu)$ arbitraire, évaluer la valeur de l'action pour cette solution comme fonctionnelle de $j_\mathcal{O}$, puis dériver cette fonctionnelle par rapport à $j_\mathcal{O}$ autant de fois que nécessaire suivant la relation (6.12).

Par exemple, le dilaton est le champ dual de l'opérateur $-\mathcal{L}_{SYM}$, où $\mathcal{L}_{SYM}$ est la densité de Lagrangien pour la théorie $\mathcal{N}=4$ SYM. Le champ dual de l'opérateur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ de $\mathcal{N}=4$ SYM est lui la perturbation $h_{\mu\nu}$ de la métrique (6.9) définie comme

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2}\left[dz^2 + (\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}(x^\rho,z))\,dx^\mu dx^\nu\right] . \tag{6.15}$$

Nous avons toutefois caché deux subtilités importantes dans cette méthode.

- **Deuxième condition :** Les équations du mouvement pour les champs de la supergravité sont typiquement du second ordre en z. Elle ont donc un ensemble de solutions à deux paramètres, et il faut une deuxième condition en plus de la condition de bord (6.14) pour spécifier complètement une solution. Si l'on veut calculer une fonction de corrélation entre des points de l'espace de Minkowski séparés d'un intervalle de genre espace (ou bien si l'on étudie la version euclidienne de la théorie), il suffit de réclamer la régularité de la solution $\phi(x^\mu,z)$ à grand z pour achever de la déterminer. Dans le cas où certains points sont séparés d'un intervalle de genre temps, plusieurs choix sont possibles pour la solution classique $\phi(x^\mu,z)$, ce qui en correspondance avec les différentes prescriptions possibles pour définir les propagateurs : retardé, avancé, etc ...
- **Renormalisation holographique :** Lors de l'application de cette méthode, il apparait typiquement des divergences logarithmiques pour $z\to 0$. On sait traiter ces divergences par la procédure de renormalisation holographique [157, 158]. La première étape consiste à imposer la condition (6.14) non pas à $z=0$ mais à une valeur finie $z=\epsilon$, puis à calculer une version régularisée de l'action classique en limitant le domaine d'intégration à $z\geq\epsilon$. On peut ensuite construire des contre-termes à partir de l'action de champs vivant sur le bord $z=0$ de l'espace AdS_5. Enfin, par soustraction entre ces deux actions, on obtient une action classique renormalisée régulière dans la limite $\epsilon\to 0$. Comme pour la renormalisation d'une théorie quantique des champs, il y a une part d'arbitraire dans les termes finis obtenus après soustraction. De même, dans le cas d'une divergence logarithmique, l'action renormalisée contient une échelle de renormalisation holographique arbitraire.

6.4 Quelques extensions utiles de la dualité

Nous présentons ici deux extensions de la dualité AdS/CFT particulièrement utiles pour l'étude du plasma de quarks et de gluons à couplage fort : la dualité pour $\mathcal{N} = 4$ SYM à température finie, et l'ajout de fermions (et de scalaires) dans la représentation fondamentale de $SU(N_c)$, permettant de modéliser les quarks de la QCD.

6.4.1 Dualité AdS/CFT à température finie

Il existe des solutions de la supergravité IIB associées à un empilement de $D3$-branes plus générales que (6.4), données par

$$ds^2 = \left(1+\frac{L^4}{r^4}\right)^{-1/2}\left[-\left(1-\frac{r_0^4}{r^4}\right)dt^2+\sum_{i=1}^{3}\left(dx^i\right)^2\right]+\left(1+\frac{L^4}{r^4}\right)^{1/2}\left[\left(1-\frac{r_0^4}{r^4}\right)^{-1}dr^2+r^2d\Omega_5^2\right]. \tag{6.16}$$

On peut considérer la théorie des cordes de type IIB dans cette métrique, et prendre la limite de découplage $l_s \to 0$ à r/l_s^2 fixé, comme nous l'avons fait dans la section 6.2.4. Cette fois ci, la théorie des champs obtenue dans le volume d'univers des $D3$-branes est duale [132] à la théorie des cordes IIB dans l'espace-cible donné par la métrique

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2}\left[-\left(1-\frac{r_0^4}{r^4}\right)dt^2+\sum_{i=1}^{3}\left(dx^i\right)^2\right]+\frac{L^2}{r^2}\left(1-\frac{r_0^4}{r^4}\right)^{-1}dr^2+L^2\,d\Omega_5^2\,. \tag{6.17}$$

On remarque que cette métrique correspond à un trou noir, ou plutôt à une brane noire, avec un horizon à $r = r_0$. La température de Hawking T de cette brane noire est reliée à la position de l'horizon par $r_0 = \pi L^2 T$. La dualité AdS/CFT est supposée relier la théorie des cordes IIB dans cet espace à la théorie $\mathcal{N} = 4$ SYM à température T finie identifiée à cette température de Hawking.

La première application de cette dualité concerne le calcul de la densité d'entropie de $\mathcal{N} = 4$ SYM à couplage fort. D'après l'expression (6.17) de la métrique, le volume ou aire de l'horizon de dimension 8 de la brane noire est

$$A = \left(\frac{r_0}{L}\right)^3 V\,L^5\,\Omega_5 = \pi^6\,L^8\,T^3\,V\,, \tag{6.18}$$

si l'on restreint l'intégration sur les variables (x^1, x^2, x^3) à un volume V. Celui-ci est en effet dilaté d'un facteur $(r_0/L)^3$ pour $r = r_0$, et le volume de la sphère S_5 est $L^5\,\Omega_5$. En utilisant l'expression pour la constante de Newton en théorie des cordes

$$G = 2\pi^6\,g_{string}^2\,l_s^8 \tag{6.19}$$

ainsi que la relation (6.5), on peut calculer l'entropie de Bekenstein-Hawking de la brane noire comme

$$S_{BH} \equiv \frac{A}{4G} = \frac{\pi^2}{2}\,N_c^2\,T^3\,V\,. \tag{6.20}$$

En identifiant l'entropie des deux côtés de la dualité, on en déduit la densité d'entropie pour la théorie $\mathcal{N} = 4$ SYM à la température T, dans la limite de grand N_c et couplage fort

$$s_\infty = \frac{\pi^2}{2}\,N_c^2\,T^3\,. \tag{6.21}$$

Remarquons que cela ne diffère que d'un facteur 3/4 de la densité d'entropie de $\mathcal{N} = 4$ SYM à la température T dans la limite de grand N_c et à couplage λ nul

$$s_0 = \frac{2\pi^2}{3}\,N_c^2\,T^3\,. \tag{6.22}$$

6.4.2 Ajout de quarks dans la représentation fondamentale

Il est possible de généraliser la correspondance AdS/CFT en ajoutant à la théorie $\mathcal{N} = 4$ SYM des supermultiplets $\mathcal{N} = 2$ dans la représentation fondamentale du groupe de jauge $SU(N_c)$. Ces supermultiplets contiennent deux fermions de Weyl et 4 scalaires réels, et brisent deux des quatre supersymétries de la théorie $\mathcal{N} = 4$ SYM. Nous avons vu que les champs dans la représentation adjointe du groupe de jauge sont associés aux cordes ouvertes dont les deux extrémités sont attachées à une des N_c $D3$-branes empilées. Pour obtenir des champs dans la représentation fondamentale, il faut introduire des cordes ouvertes dont une seule des extrémités est attaché à une des N_c $D3$-branes. Or, dans les théories des cordes de type II, les cordes ouvertes ne peuvent pas avoir d'extrémité libre. Il faut donc introduire un autre type de brane pour pouvoir y attacher la deuxième extrémité de ces cordes. Il a été démontré [138] que les $D7$-branes conviennent pour cela, et que ce sont les seules. On note N_f le nombre de $D7$-branes introduites, correspondant au nombre de supermultiplets $\mathcal{N} = 2$, c'est à dire le nombre de saveurs de quarks. De manière générale, l'introduction de ces $D7$-branes brise la symétrie conforme. Nous ne considérons ici que le cas où N_f reste fini même lorsque l'on prend la limite $N_c \to \infty$. Dans cette limite, les $D7$-branes permettent de sonder la métrique (6.6) sans la modifier, et la symétrie conforme est restaurée. Cette limite est analogue à l'approximation *quenched* couramment utilisée en QCD sur réseau, dans laquelle on néglige l'effet des boucles de quarks sur la dynamique du champ de jauge. La limite $N_c \to \infty$ à N_f fini conduit aussi à un découplage des cordes ouvertes dont les deux extrémités sont attachées à des $D7$-branes, pour $l_s \to 0$ à r/l_s^2 fixé.

Le plongement adéquat du volume d'univers de dimension 8 d'une telle $D7$-brane dans l'espace $AdS_5 \times S_5$ est le suivant. La $D7$-brane doit s'étendre suivant les 5 dimensions de l'espace AdS_5, et dans trois directions dans la sphère S_5. Pour discuter cela plus en détail, réécrivons la métrique de l'espace-cible (6.6) comme

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2}\,\eta_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu + \frac{L^2}{r^2}\left[d\rho^2 + \rho^2\,d\Omega_3^2 + dw_1^2 + dw_2^2\right], \tag{6.23}$$

où w_1 et w_2 sont les coordonnées dans les directions orthogonales au volume d'univers de la $D7$-brane, et $r^2 = \rho^2 + w_1^2 + w_2^2$. On identifie les coordonnées autres que w_1 et w_2 avec les coordonnées intrinsèques du volume d'univers de la $D7$-brane. Le plongement du volume d'univers dans l'espace-cible est alors donné[5] par les positions w_1 et w_2 de la $D7$-brane en fonction des autres coordonnées. Afin de conserver l'invariance de Poincaré de la théorie des champs duale à 4 dimensions, w_1 et w_2 ne doivent pas dépendre des quatre coordonnées x^μ. Afin de briser le moins possible de R-symétries, on prend w_1 et w_2 indépendantes des angles correspondants à $d\Omega_3$. Ainsi, w_1 et w_2 ne sont *a priori* fonctions que de la coordonnée ρ. En introduisant cet Ansatz dans les équations classiques du mouvement de la $D7$-brane, on trouve que w_1 et w_2 sont en fait constantes.

Si l'on choisit $w_1 = w_2 = 0$, il y a une intersection non nulle entre la $D7$-brane et les $D3$-branes. Il peut donc exister des cordes de longueur nulle attachées d'un côté à la $D7$-brane et de l'autre à une $D3$-brane. Le spectre à basse énergie de ce type de corde contient un quark de masse nulle. Si, au contraire, on choisit w_1 et w_2 non tous deux nuls, la $D7$-brane est à une distance $\Delta l = \sqrt{w_1^2 + w_2^2}$ des $D3$-branes. Cette distance Δl donne la longueur minimale et donc l'énergie minimale des cordes joignant la $D7$-brane à une $D3$-brane. Ces cordes contiennent dans leur spectre à basse énergie un quark massif, de masse $m_q = \Delta l/(2\pi l_s^2)$. Dans ce cas, le plongemement de la $D7$-brane ne peut pas couvrir tout l'espace AdS_5, mais seulement la région telle que $r^2 = \rho^2 + w_1^2 + w_2^2 \geq (\Delta l)^2$.

[5] On suppose nuls les champs électriques et magnétiques associés aux formes antisymétriques définies dans le volume d'univers de la $D7$-brane.

De la même manière, il est possible d'ajouter des quarks dans la représentation fondamentale de $SU(N_c)$ dans le cas de la dualité AdS/CFT à température finie. La principale différence avec ce que l'on vient de décrire est que les équations du mouvement des $D7$-branes n'impliquent plus que w_1 et w_2 sont des constantes, mais des fonctions compliquées de ρ que l'on ne connait que numériquement.

Liste de publications

[I] G. Beuf and R. B. Peschanski, "Universality of QCD traveling-waves with running coupling," *Phys. Rev.* **D 75** (2007) 114001 [arXiv :hep-ph/0702131].

[II] G. Beuf, "Asymptotics of QCD traveling waves with fluctuations and running coupling effects," *Nucl. Phys.* **A 810** (2008) 142 [arXiv :0708.3659 [hep-ph]].

[III] G. Beuf, "An alternative scaling solution for high-energy QCD saturation with running coupling," arXiv :0803.2167 [hep-ph].

[IV] G. Beuf, R. Peschanski, C. Royon and D. Šálek, "Systematic Analysis of Scaling Properties in Deep Inelastic Scattering," *Phys. Rev.* **D 78** (2008) 074004 [arXiv :0803.2186 [hep-ph]].

[V] G. Beuf, R. Peschanski and E. N. Saridakis, "Entropy flow of a perfect fluid in (1+1) hydrodynamics," *Phys. Rev.* **C 78** (2008) 064909 [arXiv :0808.1073 [nucl-th]].

[VI] G. Beuf, C. Royon and D. Šálek, "Geometric Scaling of F_2 and F_2^c in data and QCD Parametrisations," arXiv :0810.5082 [hep-ph].

[VII] G. Beuf, C. Marquet and B. W. Xiao, "Heavy-quark energy loss and thermalization in a strongly coupled SYM plasma," *Phys. Rev.* **D 80**, 085001 (2009) [arXiv :0812.1051 [hep-ph]].

[VIII] G. Beuf, "Gravity dual of N=4 SYM theory with fast moving sources," *Phys. Lett.* **B 686**, 55 (2010) [arXiv :0903.1047 [hep-th]].

[IX] G. Beuf, M. P. Heller, R. A. Janik and R. Peschanski, "Boost-invariant early time dynamics from AdS/CFT," *JHEP* **0910**, 043 (2009) [arXiv :0906.4423 [hep-th]].

Comptes rendus de conférences

[X] G. Beuf, R. B. Peschanski and S. Sapeta, "Universality of QCD traveling waves with running coupling," arXiv :0706.1457 [hep-ph] ;
Proc. of XV Int. Workshop on Deep-Inelastic Scattering and Related Topics, Munich, Germany, April 2008

[XI] G. Beuf, "Universality of QCD traveling-waves with running coupling beyond leading logarithmic accuracy," Proceedings of Summer School on QCD, Low X Physics, Saturation and Diffraction, Calabria, Italy, 1-14 Jul 2007,
arXiv :0806.0764 [hep-ph] ;
publié dans : *Acta Phys. Polon.* **B 39** (2008) 2557.

[XII] G. Beuf, "La saturation en QCD à haute énergie," Comptes rendus des Journées de Rencontre Jeunes Chercheurs 2007, 111.
Journées de Rencontre Jeunes Chercheurs 2007 (JRJC07), Dinard, France, Décembre 2007.

[XIII] C. Royon, G. Beuf, R. Peschanski and D. Šálek, "Scaling properties in deep inelastic scattering," arXiv :0811.2257 [hep-ph],
Proc. of XVI Int. Workshop on Deep-Inelastic Scattering and Related Topics, London, England, April 2008.

[XIV] H. Jung *et al.*, "Proceedings of the workshop : HERA and the LHC workshop series on the implications of HERA for LHC physics," arXiv :0903.3861 [hep-ph].

Bibliographie générale

[1] Yuri L. Dokshitzer, Valery A. Khoze, Alfred H. Mueller, and S. I. Troian. Basics of perturbative QCD. Gif-sur-Yvette, France : Ed. Frontieres (1991) 274 p. (Basics of).

[2] V. N. Gribov and L. N. Lipatov. Deep inelastic e p scattering in perturbation theory. *Sov. J. Nucl. Phys.*, 15 :438–450, 1972.

[3] Guido Altarelli and G. Parisi. Asymptotic Freedom in Parton Language. *Nucl. Phys.*, B126 :298, 1977.

[4] Yuri L. Dokshitzer. Calculation of the Structure Functions for Deep Inelastic Scattering and e+ e- Annihilation by Perturbation Theory in Quantum Chromodynamics. (In Russian). *Sov. Phys. JETP*, 46 :641–653, 1977.

[5] Pavel M. Nadolsky et al. Implications of CTEQ global analysis for collider observables. *Phys. Rev.*, D78 :013004, 2008.

[6] A. D. Martin, W. J. Stirling, R. S. Thorne, and G. Watt. Parton distributions for the LHC. 2009.

[7] http ://projects.hepforge.org/mstwpdf/.

[8] L. N. Lipatov. Reggeization of the vector meson and the vacuum singularity in nonabelian gauge theories. *Sov. J. Nucl. Phys.*, 23 :338–345, 1976.

[9] E. A. Kuraev, L. N. Lipatov, and Victor S. Fadin. The pomeranchuk singularity in nonabelian gauge theories. *Sov. Phys. JETP*, 45 :199–204, 1977.

[10] I. I. Balitsky and L. N. Lipatov. The pomeranchuk singularity in quantum chromodynamics. *Sov. J. Nucl. Phys.*, 28 :822–829, 1978.

[11] Alfred H. Mueller. Soft gluons in the infinite momentum wave function and the BFKL pomeron. *Nucl. Phys.*, B415 :373–385, 1994.

[12] Alfred H. Mueller and Bimal Patel. Single and double BFKL pomeron exchange and a dipole picture of high-energy hard processes. *Nucl. Phys.*, B425 :471–488, 1994.

[13] Alfred H. Mueller. Unitarity and the BFKL pomeron. *Nucl. Phys.*, B437 :107–126, 1995.

[14] Nikolai N. Nikolaev and B. G. Zakharov. Colour transparency and scaling properties of nuclear shadowing in deep inelastic scattering. *Z. Phys.*, C49 :607–618, 1991.

[15] Gerard 't Hooft. A planar diagram theory for strong interactions. *Nucl. Phys.*, B72 :461, 1974.

[16] G. P. Salam. Studies of unitarity at small x using the dipole formulation. *Nucl. Phys.*, B461 :512–538, 1996.

[17] E. Iancu and A. H. Mueller. From color glass to color dipoles in high-energy onium onium scattering. *Nucl. Phys.*, A730 :460–493, 2004.

[18] G. P. Salam. Multiplicity distribution of color dipoles at small x. *Nucl. Phys.*, B449 :589–604, 1995.

[19] L. N. Lipatov. The Bare Pomeron in Quantum Chromodynamics. *Sov. Phys. JETP*, 63 :904–912, 1986.

[20] Marcel Froissart. Asymptotic behavior and subtractions in the Mandelstam representation. *Phys. Rev.*, 123 :1053–1057, 1961.

[21] Andre Martin. Extension of the axiomatic analyticity domain of scattering amplitudes by unitarity. 1. *Nuovo Cim.*, A42 :930–953, 1965.

[22] F. E. Low. Bremsstrahlung of very low-energy quanta in elementary particle collisions. *Phys. Rev.*, 110 :974–977, 1958.

[23] T. H. Burnett and Norman M. Kroll. Extension of the low soft photon theorem. *Phys. Rev. Lett.*, 20 :86, 1968.

[24] Larry D. McLerran and Raju Venugopalan. Computing quark and gluon distribution functions for very large nuclei. *Phys. Rev.*, D49 :2233–2241, 1994.

[25] Larry D. McLerran and Raju Venugopalan. Gluon distribution functions for very large nuclei at small transverse momentum. *Phys. Rev.*, D49 :3352–3355, 1994.

[26] Larry D. McLerran and Raju Venugopalan. Green's functions in the color field of a large nucleus. *Phys. Rev.*, D50 :2225–2233, 1994.

[27] Yuri V. Kovchegov. Non-Abelian Weizsaecker-Williams field and a two- dimensional effective color charge density for a very large nucleus. *Phys. Rev.*, D54 :5463–5469, 1996.

[28] Yuri V. Kovchegov. Quantum structure of the non-Abelian Weizsaecker-Williams field for a very large nucleus. *Phys. Rev.*, D55 :5445–5455, 1997.

[29] Jamal Jalilian-Marian, Alex Kovner, Larry D. McLerran, and Heribert Weigert. The intrinsic glue distribution at very small x. *Phys. Rev.*, D55 :5414–5428, 1997.

[30] Jamal Jalilian-Marian, Alex Kovner, Andrei Leonidov, and Heribert Weigert. The bfkl equation from the wilson renormalization group. *Nucl. Phys.*, B504 :415–431, 1997.

[31] Jamal Jalilian-Marian, Alex Kovner, Andrei Leonidov, and Heribert Weigert. The wilson renormalization group for low x physics : Towards the high density regime. *Phys. Rev.*, D59 :014014, 1999.

[32] Jamal Jalilian-Marian, Alex Kovner, and Heribert Weigert. The wilson renormalization group for low x physics : Gluon evolution at finite parton density. *Phys. Rev.*, D59 :014015, 1999.

[33] Alex Kovner, J. Guilherme Milhano, and Heribert Weigert. Relating different approaches to nonlinear qcd evolution at finite gluon density. *Phys. Rev.*, D62 :114005, 2000.

[34] Heribert Weigert. Unitarity at small bjorken x. *Nucl. Phys.*, A703 :823–860, 2002.

[35] Edmond Iancu, Andrei Leonidov, and Larry D. McLerran. Nonlinear gluon evolution in the color glass condensate. i. *Nucl. Phys.*, A692 :583–645, 2001.

[36] Edmond Iancu, Andrei Leonidov, and Larry D. McLerran. The renormalization group equation for the color glass condensate. *Phys. Lett.*, B510 :133–144, 2001.

[37] Elena Ferreiro, Edmond Iancu, Andrei Leonidov, and Larry McLerran. Nonlinear gluon evolution in the color glass condensate. ii. *Nucl. Phys.*, A703 :489–538, 2002.

[38] I. Balitsky. Operator expansion for high-energy scattering. *Nucl. Phys.*, B463 :99–160, 1996.

[39] I. Balitsky. High-energy QCD and Wilson lines. 2001.

[40] Edmond Iancu, Andrei Leonidov, and Larry McLerran. The colour glass condensate : An introduction. 2002.

[41] Jean-Paul Blaizot, Edmond Iancu, and Heribert Weigert. Non linear gluon evolution in path-integral form. *Nucl. Phys.*, A713 :441–469, 2003.

[42] Kari Rummukainen and Heribert Weigert. Universal features of JIMWLK and BK evolution at small x. *Nucl. Phys.*, A739 :183–226, 2004.

[43] Yuri V. Kovchegov. Small-x F2 structure function of a nucleus including multiple pomeron exchanges. *Phys. Rev.*, D60 :034008, 1999.

[44] Yuri V. Kovchegov. Unitarization of the BFKL pomeron on a nucleus. *Phys. Rev.*, D61 :074018, 2000.

[45] R. A. Fisher. *Ann. Eugenics*, 7 :355, 1937.

[46] A. Kolmogorov, I. Petrovsky, and N. Piskounov. *Moscow University Bulletin of Mathematics*, A 1 :1, 1937.

[47] S. Munier and R. Peschanski. Geometric scaling as traveling waves. *Phys. Rev. Lett.*, 91 :232001, 2003.

[48] M Bramson. *Mem. Am. Math. Soc.*, 44 :285, 1983.

[49] U. Ebert and W. van Saarloos. *Physica*, D 146 :1, 2000.

[50] S. Munier and R. Peschanski. Traveling wave fronts and the transition to saturation. *Phys. Rev.*, D69 :034008, 2004.

[51] A. H. Mueller and D. N. Triantafyllopoulos. The energy dependence of the saturation momentum. *Nucl. Phys.*, B640 :331–350, 2002.

[52] L. V. Gribov, E. M. Levin, and M. G. Ryskin. Semihard Processes in QCD. *Phys. Rept.*, 100 :1–150, 1983.

[53] Edmond Iancu, Kazunori Itakura, and Larry McLerran. Geometric scaling above the saturation scale. *Nucl. Phys.*, A708 :327–352, 2002.

[54] S. Munier and R. Peschanski. Universality and tree structure of high energy qcd. *Phys. Rev.*, D70 :077503, 2004.

[55] A. M. Stasto, K. Golec-Biernat, and J. Kwiecinski. Geometric scaling for the total gamma* p cross-section in the low x region. *Phys. Rev. Lett.*, 86 :596–599, 2001.

[56] C. Marquet, R. Peschanski, and G. Soyez. Traveling waves and geometric scaling at non-zero momentum transfer. *Nucl. Phys.*, A756 :399–418, 2005.

[57] C. Marquet and G. Soyez. The balitsky-kovchegov equation in full momentum space. *Nucl. Phys.*, A760 :208–222, 2005.

[58] Jeffrey S. Geronimo and Henri Navelet. On certain two dimensional integrals that appear in conformal field theory. *J. Math. Phys.*, 44 :2293–2319, 2003.

[59] Einan Gardi, Janne Kuokkanen, Kari Rummukainen, and Heribert Weigert. Running coupling and power corrections in nonlinear evolution at the high-energy limit. *Nucl. Phys.*, A784 :282–340, 2007.

[60] Ian Balitsky. Quark contribution to the small-x evolution of color dipole. *Phys. Rev.*, D75 :014001, 2007.

[61] Yuri V. Kovchegov and Heribert Weigert. Triumvirate of running couplings in small-x evolution. *Nucl. Phys.*, A784 :188–226, 2007.

[62] Ian Balitsky and Giovanni A. Chirilli. Next-to-leading order evolution of color dipoles. *Phys. Rev.*, D77 :014019, 2008.

[63] Javier L. Albacete and Yuri V. Kovchegov. Solving high energy evolution equation including running coupling corrections. *Phys. Rev.*, D75 :125021, 2007.

[64] Ian Balitsky and Giovanni A. Chirilli. NLO evolution of color dipoles in N=4 SYM. 2009.

[65] V. S. Fadin, R. Fiore, and A. V. Grabovsky. On the discrepancy of the low-x evolution kernels. 2009.

[66] Victor S. Fadin and L. N. Lipatov. BFKL pomeron in the next-to-leading approximation. *Phys. Lett.*, B429 :127–134, 1998.

[67] Marcello Ciafaloni and Gianni Camici. Energy scale(s) and next-to-leading BFKL equation. *Phys. Lett.*, B430 :349–354, 1998.

[68] G. P. Salam. A resummation of large sub-leading corrections at small x. *JHEP*, 07 :019, 1998.

[69] M. Ciafaloni, D. Colferai, and G. P. Salam. Renormalization group improved small-x equation. *Phys. Rev.*, D60 :114036, 1999.

[70] M. Ciafaloni, D. Colferai, G. P. Salam, and A. M. Stasto. Renormalisation group improved small-x Green's function. *Phys. Rev.*, D68 :114003, 2003.

[71] Guido Altarelli, Richard D. Ball, and Stefano Forte. Perturbatively stable resummed small x evolution kernels. *Nucl. Phys.*, B742 :1–40, 2006.

[72] Krzysztof J. Golec-Biernat, L. Motyka, and A. M. Stasto. Diffusion into infra-red and unitarization of the BFKL pomeron. *Phys. Rev.*, D65 :074037, 2002.

[73] J. L. Albacete, N. Armesto, J. G. Milhano, C. A. Salgado, and U. A. Wiedemann. Numerical analysis of the balitsky-kovchegov equation with running coupling : Dependence of the saturation scale on nuclear size and rapidity. *Phys. Rev.*, D71 :014003, 2005.

[74] Emil Avsar and Edmond Iancu. BFKL and CCFM evolutions with saturation boundary. *Phys. Lett.*, B673 :24–29, 2009.

[75] Krzysztof J. Golec-Biernat and M. Wusthoff. Saturation effects in deep inelastic scattering at low Q**2 and its implications on diffraction. *Phys. Rev.*, D59 :014017, 1999.

[76] D. N. Triantafyllopoulos. The energy dependence of the saturation momentum from rg improved bfkl evolution. *Nucl. Phys.*, B648 :293–316, 2003.

[77] R. Peschanski and S. Sapeta. Qcd traveling waves beyond leading logarithms. *Phys. Rev.*, D74 :114021, 2006.

[78] Rikard Enberg. Traveling waves and the renormalization group improved balitsky-kovchegov equation. *Phys. Rev.*, D75 :014012, 2007.

[79] M. Ciafaloni and D. Colferai. The BFKL equation at next-to-leading level and beyond. *Phys. Lett.*, B452 :372–378, 1999.

[80] Romuald A. Janik and Robert B. Peschanski. QCD saturation equations including dipole-dipole correlation. *Phys. Rev.*, D70 :094005, 2004.

[81] R. A. Janik. QCD saturation in the dipole sector with correlations. *Phys. Lett.*, B604 :192–198, 2004.

[82] Yuri V. Kovchegov, Janne Kuokkanen, Kari Rummukainen, and Heribert Weigert. Subleading-N_c corrections in non-linear small-x evolution. 2008.

[83] Alfred H. Mueller and G. P. Salam. Large multiplicity fluctuations and saturation effects in onium collisions. *Nucl. Phys.*, B475 :293–320, 1996.

[84] Emil Avsar and Yoshitaka Hatta. Quantitative study of the transverse correlation of soft gluons in high energy QCD. *JHEP*, 09 :102, 2008.

[85] M. A. Braun. Nucleus nucleus scattering in perturbative qcd with n(c) – > infinity. *Phys. Lett.*, B483 :115–123, 2000.

[86] E. Iancu and D. N. Triantafyllopoulos. A langevin equation for high energy evolution with pomeron loops. *Nucl. Phys.*, A756 :419–467, 2005.

[87] A. H. Mueller, A. I. Shoshi, and S. M. H. Wong. Extension of the jimwlk equation in the low gluon density region. *Nucl. Phys.*, B715 :440–460, 2005.

[88] Eugene Levin and Michael Lublinsky. Towards a symmetric approach to high energy evolution : Generating functional with pomeron loops. *Nucl. Phys.*, A763 :172–196, 2005.

[89] E. Iancu and D. N. Triantafyllopoulos. Non-linear qcd evolution with improved triple-pomeron vertices. *Phys. Lett.*, B610 :253–261, 2005.

[90] Alex Kovner and Michael Lublinsky. In pursuit of pomeron loops : The jimwlk equation and the wess-zumino term. *Phys. Rev.*, D71 :085004, 2005.

[91] Alex Kovner and Michael Lublinsky. From target to projectile and back again : Self-duality of high energy evolution. *Phys. Rev. Lett.*, 94 :181603, 2005.

[92] Y. Hatta, E. Iancu, L. McLerran, A. Stasto, and D. N. Triantafyllopoulos. Effective hamiltonian for qcd evolution at high energy. *Nucl. Phys.*, A764 :423–459, 2006.

[93] Tolga Altinoluk, Alex Kovner, Michael Lublinsky, and Javier Peressutti. QCD Reggeon Field Theory for every day : Pomeron loops included. *JHEP*, 03 :109, 2009.

[94] Tolga Altinoluk, Alex Kovner, and Michael Lublinsky. Inclusive Gluon Production in the QCD Reggeon Field Theory : Pomeron Loops Included. *JHEP*, 03 :110, 2009.

[95] N. G. van Kampen. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry.* North-Holland, 2007.

[96] C.W. Gardiner. *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences.* Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[97] E. Iancu, A. H. Mueller, and S. Munier. Universal behavior of qcd amplitudes at high energy from general tools of statistical physics. *Phys. Lett.*, B606 :342–350, 2005.

[98] Eric Brunet and Bernard Derrida. Shift in the velocity of a front due to a cutoff. *Phys. Rev. E*, 56(3) :2597–2604, Sep 1997.

[99] A. H. Mueller and A. I. Shoshi. Small-x physics beyond the kovchegov equation. *Nucl. Phys.*, B692 :175–208, 2004.

[100] E. Brunet, B. Derrida, A. H. Mueller, and S. Munier. A phenomenological theory giving the full statistics of the position of fluctuating pulled fronts. *Phys. Rev.*, E73 :056126, 2006.

[101] C. Marquet, G. Soyez, and Bo-Wen Xiao. On the probability distribution of the stochastic saturation scale in qcd. *Phys. Lett.*, B639 :635–641, 2006.

[102] C. Marquet, R. Peschanski, and G. Soyez. Consequences of strong fluctuations on high-energy qcd evolution. *Phys. Rev.*, D73 :114005, 2006.

[103] A. Dumitru, E. Iancu, L. Portugal, G. Soyez, and D. N. Triantafyllopoulos. Pomeron loop and running coupling effects in high energy QCD evolution. *JHEP*, 08 :062, 2007.

[104] Krzysztof J. Golec-Biernat and M. Wusthoff. Saturation in diffractive deep inelastic scattering. *Phys. Rev.*, D60 :114023, 1999.

[105] J. Bartels, Krzysztof J. Golec-Biernat, and H. Kowalski. A modification of the saturation model : DGLAP evolution. *Phys. Rev.*, D66 :014001, 2002.

[106] E. Iancu, K. Itakura, and S. Munier. Saturation and BFKL dynamics in the HERA data at small x. *Phys. Lett.*, B590 :199–208, 2004.

[107] Henri Kowalski and Derek Teaney. An impact parameter dipole saturation model. *Phys. Rev.*, D68 :114005, 2003.

[108] H. Kowalski, L. Motyka, and G. Watt. Exclusive diffractive processes at HERA within the dipole picture. *Phys. Rev.*, D74 :074016, 2006.

[109] C. Marquet, Robert B. Peschanski, and G. Soyez. Exclusive vector meson production at HERA from QCD with saturation. *Phys. Rev.*, D76 :034011, 2007.

[110] C. Marquet and L. Schoeffel. Geometric scaling in diffractive deep inelastic scattering. *Phys. Lett.*, B639 :471–477, 2006.

[111] F. Gelis, R. Peschanski, G. Soyez, and L. Schoeffel. Systematics of geometric scaling. *Phys. Lett.*, B647 :376–379, 2007.

[112] I. Arsene et al. Quark Gluon Plasma an Color Glass Condensate at RHIC ? The perspective from the BRAHMS experiment. *Nucl. Phys.*, A757 :1–27, 2005.

[113] B. B. Back et al. The PHOBOS perspective on discoveries at RHIC. *Nucl. Phys.*, A757 :28–101, 2005.

[114] John Adams et al. Experimental and theoretical challenges in the search for the quark gluon plasma : The STAR collaboration's critical assessment of the evidence from RHIC collisions. *Nucl. Phys.*, A757 :102–183, 2005.

[115] K. Adcox et al. Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus nucleus collisions at RHIC : Experimental evaluation by the PHENIX collaboration. *Nucl. Phys.*, A757 :184–283, 2005.

[116] Jean-Yves Ollitrault. Anisotropy as a signature of transverse collective flow. *Phys. Rev.*, D46 :229–245, 1992.

[117] D. Teaney, J. Lauret, and Edward V. Shuryak. Flow at the SPS and RHIC as a quark gluon plasma signature. *Phys. Rev. Lett.*, 86 :4783–4786, 2001.

[118] P. Huovinen, P. F. Kolb, Ulrich W. Heinz, P. V. Ruuskanen, and S. A. Voloshin. Radial and elliptic flow at RHIC : further predictions. *Phys. Lett.*, B503 :58–64, 2001.

[119] P. F. Kolb, Ulrich W. Heinz, P. Huovinen, K. J. Eskola, and K. Tuominen. Centrality dependence of multiplicity, transverse energy, and elliptic flow from hydrodynamics. *Nucl. Phys.*, A696 :197–215, 2001.

[120] Tetsufumi Hirano and Keiichi Tsuda. Collective flow and two pion correlations from a relativistic hydrodynamic model with early chemical freeze out. *Phys. Rev.*, C66 :054905, 2002.

[121] Peter F. Kolb and Ralf Rapp. Transverse flow and hadro-chemistry in Au + Au collisions at s(NN)**(1/2) = 200-GeV. *Phys. Rev.*, C67 :044903, 2003.

[122] Paul Romatschke. Causal viscous hydrodynamics for central heavy-ion collisions. II : Meson spectra and HBT radii. *Eur. Phys. J.*, C52 :203–209, 2007.

[123] Paul Romatschke and Ulrike Romatschke. Viscosity Information from Relativistic Nuclear Collisions : How Perfect is the Fluid Observed at RHIC ? *Phys. Rev. Lett.*, 99 :172301, 2007.

[124] A. K. Chaudhuri. Saturation of elliptic flow and shear viscosity. 2007.

[125] Matthew Luzum and Paul Romatschke. Conformal Relativistic Viscous Hydrodynamics : Applications to RHIC results at sqrt(sNN) = 200 GeV. *Phys. Rev.*, C78 :034915, 2008.

[126] R. Baier, Yuri L. Dokshitzer, Alfred H. Mueller, S. Peigne, and D. Schiff. Radiative energy loss and p(T)-broadening of high energy partons in nuclei. *Nucl. Phys.*, B484 :265–282, 1997.

[127] R. Baier, Yuri L. Dokshitzer, Alfred H. Mueller, and D. Schiff. Medium-induced radiative energy loss : Equivalence between the BDMPS and Zakharov formalisms. *Nucl. Phys.*, B531 :403–425, 1998.

[128] B. G. Zakharov. Fully quantum treatment of the Landau-Pomeranchuk-Migdal effect in QED and QCD. *JETP Lett.*, 63 :952–957, 1996.

[129] B. G. Zakharov. Radiative energy loss of high energy quarks in finite-size nuclear matter and quark-gluon plasma. *JETP Lett.*, 65 :615–620, 1997.

[130] Urs Achim Wiedemann. Gluon radiation off hard quarks in a nuclear environment : Opacity expansion. *Nucl. Phys.*, B588 :303–344, 2000.

[131] M. Gyulassy, P. Levai, and I. Vitev. Reaction operator approach to non-Abelian energy loss. *Nucl. Phys.*, B594 :371–419, 2001.

[132] Juan Martin Maldacena. The large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2 :231–252, 1998.

[133] S. S. Gubser, Igor R. Klebanov, and Alexander M. Polyakov. Gauge theory correlators from non-critical string theory. *Phys. Lett.*, B428 :105–114, 1998.

[134] Edward Witten. Anti-de Sitter space and holography. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2 :253–291, 1998.

[135] G. Policastro, D. T. Son, and A. O. Starinets. The shear viscosity of strongly coupled N = 4 supersymmetric Yang-Mills plasma. *Phys. Rev. Lett.*, 87 :081601, 2001.

[136] C. P. Herzog, A. Karch, P. Kovtun, C. Kozcaz, and L. G. Yaffe. Energy loss of a heavy quark moving through N = 4 supersymmetric Yang-Mills plasma. *JHEP*, 07 :013, 2006.

[137] Steven S. Gubser. Drag force in AdS/CFT. *Phys. Rev.*, D74 :126005, 2006.

[138] Andreas Karch and Emanuel Katz. Adding flavor to AdS/CFT. *JHEP*, 06 :043, 2002.

[139] Francois Gelis, Tuomas Lappi, and Raju Venugopalan. High energy factorization in nucleus-nucleus collisions. *Phys. Rev.*, D78 :054019, 2008.

[140] Francois Gelis, Tuomas Lappi, and Raju Venugopalan. High energy factorization in nucleus-nucleus collisions II - Multigluon correlations. *Phys. Rev.*, D78 :054020, 2008.

[141] F. Gelis, T. Lappi, and R. Venugopalan. High energy factorization and long range rapidity correlations in the Glasma. 2008.

[142] R. Baier, Alfred H. Mueller, D. Schiff, and D. T. Son. 'Bottom-up' thermalization in heavy ion collisions. *Phys. Lett.*, B502 :51–58, 2001.

[143] T. Lappi and L. McLerran. Some features of the glasma. *Nucl. Phys.*, A772 :200–212, 2006.

[144] Peter Arnold, Jonathan Lenaghan, and Guy D. Moore. QCD plasma instabilities and bottom-up thermalization. *JHEP*, 08 :002, 2003.

[145] Romuald A. Janik and Robert B. Peschanski. Asymptotic perfect fluid dynamics as a consequence of AdS/CFT. *Phys. Rev.*, D73 :045013, 2006.

[146] K. Kajantie, Jorma Louko, and T. Tahkokallio. Gravity dual of conformal matter collisions in 1+1 dimensions. *Phys. Rev.*, D77 :066001, 2008.

[147] Daniel Grumiller and Paul Romatschke. On the collision of two shock waves in AdS5. *JHEP*, 08 :027, 2008.

[148] Javier L. Albacete, Yuri V. Kovchegov, and Anastasios Taliotis. Modeling Heavy Ion Collisions in AdS/CFT. *JHEP*, 07 :100, 2008.

[149] L. D. Landau. On the multiparticle production in high-energy collisions. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Fiz.*, 17 :51–64, 1953.

[150] J. D. Bjorken. Highly Relativistic Nucleus-Nucleus Collisions : The Central Rapidity Region. *Phys. Rev.*, D27 :140–151, 1983.

[151] I.M. Khalatnikov. *Zh.Eksp. Teor. Fiz.*, 26 :529, 1954.

[152] S. Z. Belenkij and L. D. Landau. Hydrodynamic theory of multiple production of particles. *Nuovo Cim. Suppl.*, 3S10 :15, 1956.

[153] A. Bialas, R. A. Janik, and Robert B. Peschanski. Unified description of Bjorken and Landau 1+1 hydrodynamics. *Phys. Rev.*, C76 :054901, 2007.

[154] Fred Cooper and Graham Frye. Comment on the Single Particle Distribution in the Hydrodynamic and Statistical Thermodynamic Models of Multiparticle Production. *Phys. Rev.*, D10 :186, 1974.

[155] Joseph Polchinski. Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges. *Phys. Rev. Lett.*, 75 :4724–4727, 1995.

[156] Gary T. Horowitz and Andrew Strominger. Black strings and P-branes. *Nucl. Phys.*, B360 :197–209, 1991.

[157] Sebastian de Haro, Sergey N. Solodukhin, and Kostas Skenderis. Holographic reconstruction of spacetime and renormalization in the AdS/CFT correspondence. *Commun. Math. Phys.*, 217 :595–622, 2001.

[158] Massimo Bianchi, Daniel Z. Freedman, and Kostas Skenderis. Holographic Renormalization. *Nucl. Phys.*, B631 :159–194, 2002.

Article [I]

Universality of QCD traveling-waves with running coupling

Guillaume Beuf* and Robi Peschanski†
Service de physique théorique, CEA/Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette cedex, France‡

The Balitsky-Kovchegov QCD equation for rapidity evolution describing saturation effects at high energy admits *universal* asymptotic traveling-wave solutions when the nonlinear damping becomes effective. The asymptotic solutions fall in universality classes depending only on some specific properties of the solution of the associated linear equation. We derive these solutions for the recent QCD formulations of the Balitsky-Kovchegov equation with running coupling constant obtained from quark-loop calculation. While the associated linear solutions depend in different ways with observables and higher-order effects, we show that the asymptotic traveling-wave solutions all belong to the same universality class whose solutions are given. Hence the influence of saturation stabilizes the QCD evolution with respect to higher order effects and leads to universal features at high enough rapidity, such as the form of the traveling waves, the intercept of the saturation scale and geometric scaling in square-root of the rapidity.

I. INTRODUCTION

In the leading-logarithm (LL) approximation of high-energy (high-density) QCD, the evolution with rapidity Y of deep-inelastic scattering cross-sections is driven by the nonlinear Balitsky-Kovchegov (BK) equation [1–3]. This equation is supposed to capture essential features of saturation effects in the "mean-field" approximation where fluctuations (or "Pomeron-loop" effects [4]) can be neglected. More specifically, for the dipole-target amplitude in 2-dimensional transverse position space $\mathcal{N}(\mathbf{x},\mathbf{y},Y)$, it reads

$$\partial_Y \mathcal{N}(\mathbf{x},\mathbf{y},Y) = \frac{\bar{\alpha}}{2\pi}\int d^2z\ \frac{|xy|^2}{|xz|^2|zy|^2}\left\{\mathcal{N}(\mathbf{x},\mathbf{z},Y)+\mathcal{N}(\mathbf{z},\mathbf{y},Y)-\mathcal{N}(\mathbf{x},\mathbf{y},Y)-\mathcal{N}(\mathbf{x},\mathbf{z},Y)\times\mathcal{N}(\mathbf{z},\mathbf{y},Y)\right\}\ , \quad (1)$$

where $|xy|^2 \equiv (\mathbf{x}-\mathbf{y})^2$, $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ are the transverse space positions of the quark and antiquark constituting the QCD dipole. In Eq.(1), the coupling $\bar{\alpha} = \alpha_s N_c/\pi$ is kept fixed, since the derivation of the equation is made at leading logaritmic approximation, and thus zeroeth perturbative order in the coupling. Indeed, this nonlinear equation corresponds to resumming QCD "fan diagrams" in the LL approximation [2, 3].

In the 1-dimensional case, without impact-parameter dependence (*e.g.* for large targets), $\mathcal{N}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \equiv \mathcal{N}(|xy|)$, the equation acquires a simple form in the Fourier-transformed momentum space, namely [3]

$$\bar{\alpha}^{-1}\partial_Y N(L,Y) = \chi(-\partial_L)\, N(L,Y) - N^2(L,Y), \quad (2)$$

where $L(k) = \log(k^2/\Lambda^2)$, and Λ is here an arbitrary scale. The Fourier-transformed amplitude

$$N(L,Y) = \int_0^\infty \frac{d|xy|}{|xy|}\ J_0(k|xy|)\,\mathcal{N}(|xy|,Y) \quad (3)$$

can be related by convolution (see *e.g.* [5]) to the *unintegrated* gluon distribution in the 1-dimensional space in transverse momentum $k \equiv |\mathbf{k}|$. In this LL approximation the characteristic function of the kernel has the standard Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov (BFKL) form [6–8], namely

$$\chi(\gamma) = 2\psi(1) - \psi(\gamma) - \psi(1-\gamma)\ . \quad (4)$$

Quite recently, the extension of the BK equation to running coupling has been the subject of interesting theoretical studies. More generally, the extension of the saturation formalism beyond LL order is of present concern.

The goal of the present paper is to apply the traveling-wave method to the problem of solving the nonlinear BK equation with running coupling. This method allows to find asymptotic solutions to nonlinear equations of the BK type and to discuss their universality properties.

---

‡ URA 2306, unité de recherche associée au CNRS.

*Electronic address: gbeuf@dsm-mail.saclay.cea.fr
†Electronic address: pesch@dsm-mail.saclay.cea.fr

Indeed, we will consider the recent theoretical advances towards a full QCD formulation of the BK equation at next-to-leading logarithmic (NLL) order in the coupling constant and beyond. This implies in particular taking into account in a proper way the running QCD coupling and NLL and higher order contributions to the kernel. The first part of our study is devoted to the equations incorporating the terms determined through the quark-loop contributions to the BK equation [9–11] (see also related older [12] and recent [13–15] references). Then, we consider the full NLL contributions to the kernel [16, 17] and the higher-order contributions implied by the renormalization-group constraints [18–21].

Since a few years, the solutions of saturation with running coupling have been considered in the literature. Already in the papers [22, 23], the dominant asymptotic term of the solution has been obtained from the knowledge of the BFKL equation. Using this equation with absorbing boundary conditions, the subasymptotic term could also be derived [24] and extended to NLL BFKL kernels [25].

Our tools for the analysis rely on the powerful traveling-wave method. Indeed, it has been remarked that, contrary perhaps to naive expectation, the nonlinear character of the BK equation leads to some simplification w.r.t. the linear BFKL equations. Interesting *universal* properties, *i.e.* asymptotic solutions which do not depend either on initial conditions, on the precise form of the nonlinear terms or on details of the linear kernel. This is tightly linked to a mathematical property of a well-known class of nonlinear equations [26, 27] which admits asymptotic solutions in terms of *traveling-waves* [28–30]. The relevance of this class of equations and traveling-waves for the BK equation has been raised in [31, 32].

There exist previous analytical results relevant for our study on the BK equation with running coupling. Heuristically, the running coupling has been considered together with the 1-dimensional BK equation (2) by substituting the fixed coupling in front of the equation with a running coupling $\bar{\alpha}(L)$ depending on the *gluon* momentum scale [24, 32]. One writes

$$\bar{\alpha}(L)^{-1}\partial_Y N(L,Y) = \chi(-\partial_L)\, N(L,Y) - N^2(L,Y)\ . \tag{5}$$

We define $L(k) = \log(k^2/\Lambda^2)$, where Λ is now the QCD scale. One considers the LL kernel function as in Eq.(4) and the running coupling reads

$$\bar{\alpha}(L) = \frac{1}{bL}\ , \qquad\qquad b = \frac{11N_c - 2N_f}{12N_c}\ . \tag{6}$$

In this case, the asymptotic universal solution has been found, either by approximation of the linear regime with absorbing conditions [24, 25] or directly [31, 32] from the traveling wave method of solving equation (5).

In Ref.[9], the quark-loop contributions to the small-x evolution has been computed for the dipole-target amplitude in transverse-position space. Through a separation scheme between the running coupling at next-to-leading order level and the kernel at NLL level, an evolution equation has been derived. For the 1-dimensional amplitude $\mathcal{N}(|xy|,Y)$ the correspondingly modified BK equation (see [9], formula (52) where the equation is in fact written using traces over Wilson-line operators, easily translated in terms of $\mathcal{N}$) reads

$$\begin{aligned} b\tilde{L}\ \frac{\partial}{\partial Y}\mathcal{N}(|xy|,Y) = \int \frac{d^2z}{2\pi}\,\left[\mathcal{N}(|xz|,Y) + \mathcal{N}(|zy|,Y) - \mathcal{N}(|xy|,Y) - \mathcal{N}(|xz|,Y)\,\mathcal{N}(|zy|,Y)\right] \quad \times \\ \times\left\{\frac{|xy|^2}{|xz|^2\ |zy|^2} + \frac{1}{|xz|^2}\left(\frac{\bar{\alpha}(|xz|)}{\bar{\alpha}(|zy|)} - 1\right) + \frac{1}{|yz|^2}\left(\frac{\bar{\alpha}(|yz|)}{\bar{\alpha}(|zx|)} - 1\right)\right\} \quad , \end{aligned} \tag{7}$$

where

$$\bar{\alpha}(|xy|) = \frac{1}{b\tilde{L}(|xy|)}\ , \qquad\qquad \tilde{L}(|xy|) = -\log(|xy|^2\Lambda^2)\ . \tag{8}$$

Note that the expression (7) needs some regularization procedure, since Landau poles appear in the z-integration over $\bar{\alpha}(|xz|)$ and $\bar{\alpha}(|yz|)$. We will consider this important point in detail later on for our study.

In the same time, another consistent derivation of the BK equation with running coupling constant has been performed both for the dipole amplitude in position space and for the unintegrated gluon distribution in momentum space [10, 11]. The same quark-loop contribution as in [9] has been found, but using a different separation scheme. The quark-loop contributions have been splitted differently into a contribution to the running coupling and a contribution to the kernel. The equation found in position space is thus different from (7). The involved running couplings appear to form a "triumvirate" structure in terms of three different scales. More precisely (see [11], where formula (48) the equation is written with additional factors $e^{-5/3}$ absorbed here in Λ) one writes

$$\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial Y}(k,Y)\ =\ \int\frac{d^2\mathbf{q}}{2\pi}\ \frac{\bar{\alpha}(q^2)\ \bar{\alpha}((\mathbf{k}-\mathbf{q})^2)}{\bar{\alpha}(k^2)}\left[\frac{1}{(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}\ \tilde{\phi}(q,Y) + \frac{1}{q^2}\ \tilde{\phi}(|\mathbf{k}-\mathbf{q}|,Y) - \frac{k^2}{q^2(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}\ \tilde{\phi}(k,Y)\right] + \textit{nonlinear terms} \tag{9}$$

with

$$\tilde{\phi}(k,Y) = \bar{\alpha}(k^2)^{-1}\phi(k,Y) \ , \tag{10}$$

$\phi(k,Y)$ being the unintegrated gluon distribution in tranverse momentum space. The *nonlinear terms* in Eq.(9) are not explicitely written, but as already known from other studies of the BK equation in momentum space [33], their precise form is not needed for the derivation of the traveling-wave solutions in the transition region towards saturation, provided they ensure the necessary damping.

This "triumvirate" of coupling constants has been advocated long ago from bootstrap properties [12], while the definition (10) has been introduced more recently [11]. Quite interestingly, the consistency of the equation for the dipole amplitude (7) with the one for the unintegrated gluon distribution has been established in [11]. However, the corresponding Pomeron intercept driving the leading rapidity behaviour of the linear equation is different in both cases at NLL order, by contrast with the identical rapidity behaviour at LL level. The question of the universality properties of the asymptotic solutions of these equations (5,7,9) when taking into account nonlinear damping terms is thus interesting to investigate. Indeed, the dependence on the separation schemes and the dependence of the Pomeron intercept on the observable valid for the linear regime at NLL order and beyond have to be reexamined when including saturation effects.

Concerning the scheme dependence related to the renormalisation-group constraints, one starts with the expectation that the linear regime of the BK equation is driven by the full NLL BFKL kernel already available from the calculation of [16, 17]. It is known that one introduces a "renormalization-group improved" (RG-improved) kernel at all orders of perturbation. One has to get rid of unwanted spurious singularities brought together with the NLL calculation. This boils down to the existence of different RG-improved schemes which are equivalent at NLL accuracy but with different resummations at higher orders (see, *e.g.*, the S3 and S4 schemes [18] and the CCS scheme [20]).

The traveling-wave method for the BK equation with the NLL and higher-order kernels have already been used in Refs.[34, 35]. In Ref.[34], the NLL kernels have been considered together with a fixed value of the QCD coupling. In this case also the method works for finding suitable asymptotic solutions, and they depend on both the value of the coupling and on the NLL framework. In some sense, our study is a continuation of Ref.[35] where the RG-improved scheme dependence is studied for the heuristic equation (5). Note that using the fixed coupling in the definition of the RG-improved scheme leads to a scheme dependence of the traveling waves [35]. We want to reanalyze the non linear problem when using a running coupling for the scheme definition, as done for the corresponding linear problem in [20, 21].

It is important to note that, for the Balitsky scheme, Eq.(7), as well as for the "triumvirate case", Eq.(9), the question of spurious singularities and of renormalization-group improved kernels have not yet been studied. Moreover, the regularization of Landau poles may introduce some extra subtelties in this problem. We will show, by a careful study of singularities in the NLL kernels, that such collinear singularities do not change the determination of the universal terms in the asymptotic expansion but they are responsible of a slowing down of the convergence of the asymptotic expansion and probably introduce stronger nonuniversal subasymptotic contributions. Such subasymptotic contributions have been discussed *e.g.* in Ref.[25]. They certainly deserve a separate further study in the framework of traveling waves.

The plan of the paper is as follows. In section II we consider the BK equation (5) with momentum-space running coupling and recall the known results on its traveling-wave solutions [32, 35], including a new discussion of the effect of NLL kernel singularities on the universality properties.In section III we turn to position space and derive the corresponding linear-regime and traveling-wave solutions for the Balitsky scheme of [9]. In section IV we consider the "triumvirate " case [10, 11], and exhibits its solutions in the same way. In section V we discuss the RG-improved scheme dependence. In section VI we summarize our results by concluding that all corresponding traveling-wave solutions fall into the same universality class and indicate the corresponding asymptotic predictions.

II. BK EQUATION WITH RUNNING COUPLING CONSTANT IN MOMENTUM-SPACE

A. Solution of the linear equation

Let us first remind briefly the method used in Ref.[32] to obtain the traveling-wave solutions of the Balitsky equation (5). Following the general method [32], we first write the solution to the linearized version of the equation. In the saddle-point approximation, it has the form of a double Mellin transform [20]

$$N(L,Y) = \int \frac{d\gamma}{2\pi i} \int \frac{d\omega}{2\pi i} \, N_0(\gamma,\omega) \, \exp\left(-\gamma L + \omega Y + \frac{1}{b\omega} X(\gamma)\right), \tag{11}$$

with the kernel dependence appearing through the function

$$X(\gamma) = \int_{\hat{\gamma}}^{\gamma} d\gamma' \, \chi(\gamma') \ , \tag{12}$$

$\hat{\gamma}$ being an unspecified constant. Indeed, using the saddle-point method for the integration over γ at large enough L, one gets the equation

$$-L + \frac{1}{b\omega} \, \partial_\gamma X(\gamma) \equiv -L + \frac{1}{b\omega} \, \chi(\gamma) = 0 \ , \tag{13}$$

or equivalently in the form of an operator acting on the amplitude

$$bL \, \partial_Y N(L,Y) = \chi(-\partial_L) \, N(L,Y) \ . \tag{14}$$

Hence the solution (11) verifies the restriction to linear terms of (5), within the saddle-point approximation.

As a next step one performs the saddle point integration over ω in the limit of large Y. The saddle point ω_s is given by

$$\omega_s = \sqrt{\frac{X(\gamma)}{bY}} \ , \tag{15}$$

behaving like $\omega_s \sim Y^{-\frac{1}{2}}$. With this form of ω_s the gluon density is given by

$$N(L,Y) \sim \int \frac{d\gamma}{2\pi i} \, N_0(\gamma) \ \exp(-\gamma L + \Omega(\gamma) t), \tag{16}$$

where the time variable is interpreted as $t = \sqrt{Y}$ and

$$\Omega(\gamma) = \sqrt{\frac{4}{b} X(\gamma)} \ . \tag{17}$$

B. Traveling-wave solutions

A critical *group velocity* (defined as the minimum of the *phase velocity* in the wave language) is obtained as

$$v_g = \Omega(\gamma_c)/\gamma_c = \Omega'(\gamma_c) \ . \tag{18}$$

However, γ_c determined in such a way still depends on the arbitrary constant $\hat{\gamma}$. Thus, requiring v_g to be independent on the choice of $\hat{\gamma}$ means $dv_g(\hat{\gamma})/d\hat{\gamma} = 0$, which in turn gives $dv_g(\gamma_c)/d\gamma_c = 0$ since the dependence of the velocity on $\hat{\gamma}$ comes through γ_c only. Applying this condition to Eq. (17) one gets

$$dv_g(\hat{\gamma})/d\hat{\gamma} = \frac{d\,(\Omega(\gamma_c)/\gamma_c)}{d\gamma_c} \ = 0 \quad \Rightarrow \quad v_g \ = \ \sqrt{\frac{2\chi(\gamma_c)}{b\,\gamma_c}} \ , \tag{19}$$

eliminating all dependence on the arbitrary constant $\hat{\gamma}$ in the definition (12). As a consequence, one finds the equation for the critical exponent

$$\gamma_c = \frac{\chi(\gamma_c)}{\chi'(\gamma_c)} \ , \tag{20}$$

which is the well-known value ($\gamma_c = .6275$) associated to the saturation solutions using the LL BFKL kernel (4).

Finally, using an ansatz technique borrowed from statistical physics [29], one finds [32] the result for the gluon density

$$N(L,t) = \text{const} \cdot t^{\frac{1}{3}} \cdot \text{Ai}\left(\left(\frac{\sqrt{2\gamma_c b \, \chi(\gamma_c)}}{\chi''(\gamma_c)} \right)^{\frac{1}{3}} \log \frac{k^2}{Q_s^2(t)} \, t^{-\frac{1}{3}} + \xi_1 \right) \cdot \left(\frac{k^2}{Q_s^2(t)} \right)^{-\gamma_c} , \tag{21}$$

in agreement with [24]. $\xi_1 = -2.338$ is the first zero of the Airy function $\mathrm{Ai}(\xi)$ and the saturation scale has the form

$$Q_s^2(t) = Q_0^2 \, \exp\left(\sqrt{\frac{2\chi(\gamma_c)}{b\gamma_c}} \, t + \frac{3}{4} \left(\frac{\chi''(\gamma_c)}{\sqrt{2\gamma_c b \, \chi(\gamma_c)}} \right)^{\frac{1}{3}} \xi_1 \, t^{\frac{1}{3}} \right) \, , \tag{22}$$

up to a non universal multiplicative constant. Hence the two first terms of the expansion a large t of $d\log(Q_s^2)/dt$ (and thus of the *saturation intercept* $d\log(Q_s^2)/dY$) are completely specified. Note that the result (21) is known to be valid in the transition region towards saturation but not in the deep infrared saturation domain. However, the infra-red region is also universally constrained by unitarity, namely $N \sim \log(Qs/k)$.

The important output of this traveling-wave solution with running coupling constant $\alpha(L)$ is that the amplitude (21) depends only on the ratio $k^2/Q_s^2(t)$ at asymptotic values of t. It thus corresponds to a geometric-scaling property [36] of the gluon density as a function of $t \equiv \sqrt{Y}$ [37], instead of Y in the non-running case.

It is useful to note that the ansatz leads to the solution (21,22) which do not depend on the saddle-point approximation used initially in (11). Indeed, all parameters of the ansatz are determined self-consistently from the asymptotic analysis of the original nonlinear equation. The saddle-point approximation has been useful to determine the appropriate form of the ansatz [32].

C. Extension of traveling waves to a ω-dependent kernel

In the following, and throughout the rest of the paper, we introduce the possibility of dealing with a more general kernel $\chi(-\partial_L, \partial_Y)$. This generalization comes naturally from the NLL studies. For instance it has been introduced in the ω-expansion method of Ref.[19], in order to define RG-improved kernels. More generally, it is useful in order to perform a change of variable $\bar{\alpha}(L) \to \omega$ in the linearized equation, which is the starting point of the traveling wave method. It allows to express the solution of the linear equation in terms of a linear superposition of waves. The nonlinear term will then select the critical wave as the traveling wave solution.

Let us recall for further use the extension [35] of the traveling wave method in the case of a kernel $\chi(-\partial_L, \partial_Y)$ in (5), namely

$$\bar{\alpha}(L)^{-1} \partial_Y N(L,Y) = \chi(-\partial_L, \partial_Y) \, N(L,Y) - N^{\,2}(L,Y) \, . \tag{23}$$

In double Mellin space, the linear part of the equation reads $bL\omega = \chi(\gamma, \omega)$. Introducing

$$X(\gamma, \omega) = \int_{\hat{\gamma}}^{\gamma} d\gamma' \, \chi(\gamma', \omega) \, , \tag{24}$$

the saddle-point integration over ω leads to the asymptotic solution in Y

$$N(L,Y) = \int \frac{d\gamma}{2\pi i} N_0(\gamma) \, \exp\left[-\gamma L + \frac{1}{b\omega_s} \left(2X(\gamma, \omega_s) - \omega_s \dot{X}(\gamma, \omega_s) \right) \right] \, , \tag{25}$$

where ω_s is given by the saddle-point equation

$$Yb\omega_s^2 - X(\gamma, \omega_s) + \omega_s \dot{X}(\gamma, \omega_s) = 0 \tag{26}$$

and the "dot" means the derivative with respect to ω.

The solution $\omega_s(\gamma, Y)$ of Eq.(26) defines the asymptotic properties of the amplitude (25). In order to solve it, one has to take into account the analytic properties of the kernel integral (24), which posesses singularities near $\gamma = 0, 1$. The solution will depend on the position of the critical value $\gamma = \gamma_c$ for the saturation solution with respect to the singularities. Indeed, as we shall now prove, one has to avoid some well-defined regions around the singularities in order to find the universality properties.

Let us first consider the situation where γ_c is not in the neighbourhood of the singularities of the kernel. Then, the expansion of the integral of the kernel (24) and its derivative at $\omega = 0$ is analytic near $\gamma \sim \gamma_c$. One can use the Taylor expansion around $\omega = 0$

$$X\left(\gamma, \omega\right) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{X^{(p)}(\gamma, 0)}{p!} \, \omega^p \, , \tag{27}$$

and by collecting terms with the same powers of ω_s, Eq. (26) writes

$$\left[Yb + \frac{1}{2}\ddot{X}\left(\gamma,0\right)\right]\omega_s^2 = X\left(\gamma,0\right) - \left\{\sum_{p=3}^{\infty}\frac{1}{p(p-2)!}X^{(p)}\left(\gamma,0\right)\omega_s^p\right\} \ . \tag{28}$$

Following [35], the term in braces will contribute only to subleading nonuniversal terms in the traveling wave expansion while the left-hand term with the second derivative w.r.t. ω can be absorbed by a translation in Y. This term (and the higher derivative terms) depends thus on initial conditions, and we have the universal asymptotic behaviour at large rapidity

$$\omega_s = \sqrt{\frac{X\left(\gamma,0\right)}{bY}}. \tag{29}$$

Hence the previous relations (15-20) remains valid once substituting $\chi(\gamma) \to \chi(\gamma,\omega=0)$.

Now, we have to take into account the singularity regions, in order to discuss the validity range of the previous derivation. The singularities of the function $X(\gamma,\omega)$ depend crucially of the use of a renormalization-group improved kernel or not, due to the presence of spurious singularities in NLL contributions of the kernel, which have to be cancelled by the renormalization-group improvement scheme. We shall however consider also the case when spurious singularities are still present, by comparison.

- *Renormalization-group improved kernels.* The behaviour of the kernels χ near the singularities are simple poles (apart possibly from the quark contributions, which we shall not consider in this derivation). By integration, see (24), this leads to logarithmic singularities in the function $X(\gamma,\omega)$ and thus in Eq.(26). Hence, the singularity region to be avoided is $\gamma_c, 1-\gamma_c \leq \mathcal{O}\left(\omega_s \log|\omega_s|\right) = \mathcal{O}\left(\log Y/\sqrt{Y}\right)$. Inside this region, the expansion (28) and thus the universal hierarchy in ω_s is spoiled.
- *NLL kernels with spurious singularities.* The NLL kernels χ contain singularities up to triple poles. By the integration in (24), new single and double-pole singularities appear at next-to-leading order. Hence, the singularity region to be avoided becomes $\gamma_c, 1-\gamma_c \leq \mathcal{O}\left(\omega_s^{1/2}\right) = \mathcal{O}\left(Y^{-1/4}\right)$. Inside this region, the expansion (28) and thus the universal hierarchy in ω_s is spoiled. Thus the useful region of analyticity requires a much higher rapidity to be valid.

This discussion shows that the universality properties will show up at different scales in rapidity, depending on the singularity structure of the NLL kernels. In fact, if one considers NLL contributions keeping spurious singularities, subasymptotic nonuniversal terms may be dominant up to high rapidities. Hence, the singularity structure of the NLL kernels will affect the subasymptotic behaviour.

We note that the running coupling case, introducing the integration (24), softens the singularities. It may also happen that the ω-expansion itself softens the singularities (even the spurious ones, if present), hence possibly improving the rapidity range of universality properties. This, and the question of quark contributions deserve a more detailed study. In the present work we will focus on the case where the critical γ_c is well inside the analyticity region. Since γ_c takes the same universal value $\gamma_c = .6275$ as for the LL kernel, the universality properties will appear when the region of singularities is avoided and thus for large enough rapidities. The price to pay for the eventual presence of spurious singularities is that the convergence to the universal features may be sizeably pushed away in rapidity.

In order to finally get the universal asymptotic terms of traveling-wave solutions, one has to express the linearized version of the BK equation (23) retaining only terms in the kernel relevant for the asymptotc analysis. By expanding around $\omega = 0$, $\gamma = \gamma_c$ up to the second order, one gets

$$\begin{aligned}\frac{bL}{2t}\,\partial_t N \ = \ & \left\{-\frac{b}{2}v_g^2\,\partial_L + \frac{1}{2}\chi''(\,\partial_L^2 + 2\gamma_c\,\partial_L + \gamma_c^2)\right. \\ & \left. + \frac{1}{2t}\,\dot{\chi}\,\partial_t - \frac{1}{2t}\,\dot{\chi}'\,\partial_L\partial_t - \frac{1}{2t}\,\dot{\chi}'\,\gamma_c\partial_t + \frac{1}{8t^2}\,\ddot{\chi}\,(\partial_t^2 - \frac{1}{t}\,\partial_t)\right\} N \ ,\end{aligned} \tag{30}$$

where the "prime" is the derivative with respect to γ.

The terms in the first line of (30) correspond to the same expansion as for the ω-independent case and they contribute up to order $Y^{-1/6}$, which is enough to determine the two first asymptotic terms of the amplitude and the saturation intercept. The second line contains new terms, with derivatives in ω, which contribute only to higher order.

It is interesting to note however that the first dominant term in the second line of (30) contributes with order $Y^{-1/3}$. The nonuniversal contributions are expected to start at order $Y^{-1/2}$, since they correspond to a shift $t \to t+t_0$ which results in nonuniversal terms of order $Y^{-1/2}$. Hence the first term in the second line of (30) gives a contribution related to the ω-dependence of the kernel, since it depends on $\dot{\chi}$ which could be the remaining track of NLL effects in the universal traveling-wave solutions.

All in all, one finds the same solutions as (21,22) with the substitution $\chi(\gamma) \to \chi(\gamma, \omega = 0)$.

III. BK EQUATION WITH RUNNING COUPLING FOR BALITSKY'S SCHEME

A. Balitsky's formalism and regularization

Let us now derive the traveling-wave solutions for Eq.(7). Following the abovementionned method, one first look for the solution of its linear part. However, in order to give mathematical and physical consistency, one has to introduce some regularization procedure of the integration over z in position space in order to avoid the Landau poles at $\tilde{L}(|xz|) = 0$ and $\tilde{L}(|yz|) = 0$.

Starting with solving the linear part of (7)

$$\begin{aligned} b\tilde{L}\,\frac{\partial}{\partial Y}\mathcal{N}(|xy|,Y) \;&=\; \int_{\mathcal{R}} \frac{d^2z}{2\pi}\left[\mathcal{N}(|xz|,Y)+\mathcal{N}(|zy|,Y)-\mathcal{N}(|xy|,Y)\right] \;\times \\ &\times\; \left\{ \frac{|xy|^2}{|xz|^2|zy|^2} + \frac{1}{|xz|^2}\frac{\log\left(|zy|^2/|xz|^2\right)}{\log(|xz|^2\Lambda^2)} + \frac{1}{|zy|^2}\frac{\log\left(|xz|^2/|zy|^2\right)}{\log(|zy|^2\Lambda^2)} \right\} , \end{aligned} \tag{31}$$

where the subscript $\mathcal{R}$ denotes the regularization procedure, we insert the Mellin transforms $\hat{\mathcal{N}}(\gamma, Y)$ of the dipole amplitude in position space.

$$\mathcal{N}(r,Y) \equiv \int \frac{d\gamma}{2\pi i}\, e^{-\gamma\tilde{L}(r)}\,\hat{\mathcal{N}}(\gamma,Y) = \int \frac{d\gamma}{2\pi i}\int \frac{d\omega}{2\pi i}\, e^{\omega Y-\gamma\tilde{L}(r)}\,\tilde{\mathcal{N}}(\gamma,\omega)\ . \tag{32}$$

Applying the Mellin-transform (32) to the right-hand side of (31), one obtains the diagonalized form of the linear kernel

$$\chi^{Bal}_{\mathcal{R}}(\gamma,\bar{\alpha}(|xy|)) = \int_{\mathcal{R}} \frac{d^2z}{2\pi}\left[\left(\frac{|xz|}{|xy|}\right)^{2\gamma}+\left(\frac{|yz|}{|xy|}\right)^{2\gamma}-1\right]\left\{ \frac{|xy|^2}{|xz|^2|zy|^2} + \frac{1}{|xz|^2}\frac{\log\left(\frac{|zy|^2}{|xz|^2}\right)}{\log(|xz|^2\Lambda^2)} + \frac{1}{|zy|^2}\frac{\log\left(\frac{|xz|^2}{|zy|^2}\right)}{\log(|zy|^2\Lambda^2)} \right\} . \tag{33}$$

The first term in braces corresponds to the LL kernel (4). The two other terms give an additional contribution to higher orders of perturbation which by symmetry reads

$$2\int_{\mathcal{R}} \frac{d^2z}{2\pi}\left[\left(\frac{|xz|}{|xy|}\right)^{2\gamma}+\left(\frac{|zy|}{|xy|}\right)^{2\gamma}-1\right]\ \frac{1}{|xz|^2}\frac{\log\left(|zy|^2/|xz|^2\right)}{\log(|xz|^2\Lambda^2)}\ . \tag{34}$$

In order to regularize (34), we choose to introduce a truncation of the perturbative expansion as a function of $\bar{\alpha}(|xy|) \equiv [-b\log(|xy|^2\Lambda^2)]^{-1}$. We will discuss later the regularization dependence.

Using a rescaling variable $\lambda = (\mathbf{x}-\mathbf{z})/|xy|$ and going to the complex λ-plane one writes

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{R}} \frac{d\lambda d\bar{\lambda}}{2i\pi}\left[\left(\lambda\bar{\lambda}\right)^{\gamma}+\left((1-\lambda)(1-\bar{\lambda})\right)^{\gamma}-1\right]\ \frac{1}{\lambda\bar{\lambda}}\frac{\log\left(\frac{(1-\lambda)(1-\bar{\lambda})}{\lambda\bar{\lambda}}\right)}{\log(\lambda\bar{\lambda}|xy|^2\Lambda^2)} \\ =\;& \int_{\mathcal{R}} \frac{d\lambda d\bar{\lambda}}{2i\pi}\left[\left(\lambda\bar{\lambda}\right)^{\gamma}+\left((1-\lambda)(1-\bar{\lambda})\right)^{\gamma}-1\right]\ \frac{1}{\lambda\bar{\lambda}}\frac{\log\left(\frac{(1-\lambda)(1-\bar{\lambda})}{\lambda\bar{\lambda}}\right)}{\log(\lambda\bar{\lambda})-[b\bar{\alpha}(|xy|)]^{-1}} \\ =\;& \int \frac{d\lambda d\bar{\lambda}}{2i\pi}\left[\left(\lambda\bar{\lambda}\right)^{\gamma}+\left((1-\lambda)(1-\bar{\lambda})\right)^{\gamma}-1\right]\ \frac{1}{\lambda\bar{\lambda}}\log\left(\frac{\lambda\bar{\lambda}}{(1-\lambda)(1-\bar{\lambda})}\right)\sum_{n=1}^{N}(b\bar{\alpha}(|xy|))^n\ \log(\lambda\bar{\lambda}))^{n-1}\ , \end{aligned} \tag{35}$$

where N defines the level of truncation. For instance, $N = 1$ corresponds to the contribution of the running coupling to the NLL term of the kernel. Note that the only remaining scale dependence comes from $\bar{\alpha}(|xy|)$.

It is then possible to express analytically the expansion (35) term-by-term. One writes

$$\chi_{\mathcal{R}}^{Bal}(\gamma,\bar{\alpha}(|xy|)) = \chi(\gamma) + \bar{\alpha}(|xy|) \lim_{\epsilon,\delta\to 0} \sum_{n=1}^{N} \left(-b\bar{\alpha}(|xy|)\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right)^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial\delta} - \frac{\partial}{\partial\epsilon}\right) I_1(\gamma,\epsilon,\delta) \ , \tag{36}$$

where the integral $I_1(\gamma,\epsilon,\delta)$ is given in Appendix A.

In particular, the contribution ($N=1$) to the NLL kernel reads

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{R}}^{Bal}(\gamma,\bar{\alpha}(|xy|)) &= \chi(\gamma) + b\bar{\alpha}(|xy|)\left\{\frac{1}{2}\left(\chi(\gamma)^2 + \Psi'(\gamma) - \Psi'(1-\gamma)\right) - \frac{2\chi(\gamma)}{\gamma}\right\} \\ &= \chi(\gamma) + \frac{1}{\tilde{L}}\left\{\frac{1}{2}\left(\chi(\gamma)^2 + \Psi'(\gamma) - \Psi'(1-\gamma)\right) - \frac{2\chi(\gamma)}{\gamma}\right\} , \end{aligned} \tag{37}$$

which agrees with the result of [9], confirmed by [11] (up to the inclusion of the factor $\frac{5}{3}$ in a redefinition of Λ and a change $\gamma \to 1-\gamma$ w.r.t. [11]).

Finally, the saddle-point (7) gives, in double-Mellin in position space at NLL order

$$\omega = \frac{1}{b\tilde{L}}\chi(\gamma) + \frac{1}{b\tilde{L}^2}\chi^{(1)}(\gamma) \ , \tag{38}$$

where

$$\chi^{(1)}(\gamma) \equiv \frac{1}{2}\left(\chi(\gamma)^2 + \Psi'(\gamma) - \Psi'(1-\gamma)\right) - \frac{2\chi(\gamma)}{\gamma} \ . \tag{39}$$

As well-known, the NLL contribution (39) to the kernel has a spurious singularity in $1/\gamma^2$. As we shall now see, this will not influence the determination of the universal terms in the traveling-wave solution. However, as explained in the introduction, it may delay the convergence of the asymptotic expansion.

B. Derivation of the traveling-wave solution in position space

Keeping in a first stage the truncation at NLL level, namely $N=1$ in (35,36), the nonlinear equation in position space can be formally written

$$\frac{1}{\bar{\alpha}(\tilde{L})}\,\partial_Y \mathcal{N}(\tilde{L},Y) = \chi_1^{Bal}(-\partial_{\tilde{L}},\bar{\alpha}(\tilde{L}))\,\mathcal{N}(\tilde{L},Y) - \mathcal{N}^{\otimes 2}(\tilde{L},Y) \ , \tag{40}$$

where $\tilde{L} = -\log[(|xy|\Lambda)^2)]$. One should care about the exact meaning of Eq. (40), which remains at this stage formal in two aspects. The nonlinear term $\mathcal{N}^{\otimes 2}$ coming from the quadratic part of the integrant in (31) is not explicitely given and the operator $\chi_1^{Bal}(-\partial_{\tilde{L}},\bar{\alpha}(\tilde{L}))$ is to be well-defined, since it contains two non-comutative variables.

Concerning the nonlinear terms, we know from general traveling-wave properties that its precise analytic form is irrelevant for the asymptotic solutions. The same remains true with the yet unknown NLL contributions to the LL nonlinear term.

For the action of the kernel in Eq.(40) we consider the kernel obtained in diagonalized form (38,39), namely

$$\chi_1^{Bal}(\gamma,\bar{\alpha}(\tilde{L})) = \chi(\gamma) + b\bar{\alpha}(\tilde{L})\ \chi^{(1)}(\gamma) \ . \tag{41}$$

By solving (38) as a function of ω, one obtains a new ω-dependent kernel $\kappa_1(\gamma,\omega)$ which leads to the equation

$$b\tilde{L}\omega \ = \ \kappa_1(\gamma,\omega) \equiv \frac{\chi(\gamma) + \sqrt{\chi(\gamma)^2 + 4b\omega\chi^{(1)}(\gamma)}}{2} \ , \tag{42}$$

where we have only kept the physical root. Then Eq.(40) takes the operator form

$$b\tilde{L}\,\partial_Y \mathcal{N}(\tilde{L},Y) = \kappa_1(-\partial_{\tilde{L}},\partial_Y)\mathcal{N}(\tilde{L},Y) - \mathcal{N}^{\otimes 2}(\tilde{L},Y) \ . \tag{43}$$

The derivation of the traveling-wave solutions comes from a simple extension of the arguments of subsection II C on the extension of the traveling-wave method to a ω-dependent kernel. Indeed, Eq.(43) is similar to (23) in section II, substituting L by $\tilde{L}$, see (8).

Taking into account the same same substitution $L \to \tilde{L}$ and considering formula (42), the traveling-wave solution is driven by the value of the ω-dependent kernel $\kappa_1(\gamma,\omega)$ at $\omega = 0$, namely

$$\kappa_1(\gamma,\omega=0) \equiv \chi(\gamma) \ . \tag{44}$$

We see from Eq.(44), that for ω small enough, that is for the universal terms dominant at large enough rapidity, the NLL contribution will not modify the saturation saddle-point γ_c.

From this general argument, we see that the traveling-wave solution is given from the LL kernel with running coupling constant in *position space*. By the momentum-position substitution property and the independence of the result on the precise form the nonlinear damping (despite the fact that they possess a different form in both representations) one is led to the universal form of the solution

$$\mathcal{N}(\tilde{L},Y) = \text{const} \cdot Y^{\frac{1}{6}} \cdot \text{Ai}\left(-2\log\left[|xy|Q_s(\sqrt{Y})\right] \left(\frac{\sqrt{2\gamma_c b\,\chi(\gamma_c)}}{\chi''(\gamma_c)} \right)^{\frac{1}{3}} Y^{-\frac{1}{6}} + \xi_1 \right) \cdot \left(|xy|Q_s(\sqrt{Y})\right)^{2\gamma_c} \ , \tag{45}$$

where ξ_1, γ_c are the same as in formula (21) (note that (45), as well as (21), is not valid in the infra-red. However, the infra-red region is also universally constrained by unitarity in position space, namely $\mathcal{N} \sim 1$). The saturation scale is then identical to (22) up to a non universal multiplicative constant, meaning that the saturation intercept is predicted to be the same as (22) at large rapidity.

C. Truncation and regularization independence

Let us sketch the general argument leading to the independence of the traveling-wave solution w.r.t. the truncation and the regularization scheme. For this sake, we shall use a method of "ω-expansion" introduced in the derivation of the linear BFKL equations at NLL order with renormalization-group constraints [19–21]. Briefly, this amounts to transform the perturbative expansion of the kernel into an equivalent expansion in ω.

The asymptotic universality property can be extended to a given finite value of N in a more general truncation of the expansions (35,36). Indeed one can write the corresponding saddle-point equation as

$$\omega = \alpha(\tilde{L})\ \chi_N^{Bal}(\gamma,\alpha(\tilde{L}))\ , \tag{46}$$

where $\chi_N^{Bal}(\gamma,\alpha(\tilde{L}))$ is a polynomial of degree N in $\alpha(\tilde{L})$. This can be considered as as an implicit equation for $\tilde{L}$ as a function of ω namely

$$\tilde{L} = \frac{1}{b\omega}\ \kappa_N(\gamma,\omega)\ , \tag{47}$$

where the function κ_N verifies thus

$$\kappa_N(\gamma,\omega) = \chi_N^{Bal}\left\{\gamma, \omega/\kappa_N(\gamma,\omega)\right\}\ . \tag{48}$$

Then, coming back to the truncation equation (36), one finds that $\chi_N^{Bal}(\gamma,\bar{\alpha}=0) = \chi(\gamma)$. Then the implicit equation (48) leads to $\kappa_N(\gamma,\omega=0) \equiv \chi(\gamma)$. One again falls in the same universality class. Indeed, this is expected from the remark that ω and $\alpha(\tilde{L})$ are of the same order and jointly go to zero at the limit.

The same result should apply for any consistent scheme for the regularization of the Landau poles, *e.g.* by freezing of the coupling constants beyond some scale $|xz|, |yz| > r_0$ in the integral (31). The perturbative consistency of the regularization implies the existence of a convergence domain in $\bar{\alpha}, \omega$ near zero. In physical terms, the traveling-wave solutions are valid in the domain of high enough rapidity to have a perturbative saturation scale and driven by the ultra-violet behaviour. Hence the nonperturbative effects related to the regularization should not be relevant. This is a natural constraint on the regularization scheme.

The regularization, which corresponds to a given kernel $\chi_{\mathcal{R}}^{Bal}$ will then give rise to an implicit equation

$$\kappa_{\mathcal{R}}(\gamma,\omega) = \chi_{\mathcal{R}}^{Bal}\left\{\gamma, \omega/\kappa_{\mathcal{R}}(\gamma,\omega)\right\}\ , \tag{49}$$

defining a new ω-dependent kernel $\kappa_{\mathcal{R}}$. By the same arguments, one again expects $\kappa_{\mathcal{R}}(\gamma,\omega=0) \equiv \chi(\gamma)$.

D. Traveling-wave solution in momentum space

Now we shall demonstrate that the traveling-wave solution obtained in position space in the preceeding subsection is in fact in the same universality class as the solution found for the initial BK equation (5) with running coupling in momentum space. Since a Fourier transform of the asymptotic position-space solution (21) is not mathematically justified, it is convenient to start directly by transforming the equations from position to momentum space and then find the asymptotic solutions.

Due to the previous universality properties in this space, the problem reduces to the solution of the initial equation (7) when keeping only the LL kernel:

$$b\tilde{L}\,\frac{\partial}{\partial Y}\mathcal{N}(|xy|,Y)=\int\frac{d^2z}{2\pi}\,\frac{|xy|^2}{|xz|^2\;|zy|^2}\;\left[\mathcal{N}(|xz|,Y)+\mathcal{N}(|zy|,Y)-\mathcal{N}(|xy|,Y)-\mathcal{N}(|xz|,Y)\,\mathcal{N}(|zy|,Y)\right]\;, \tag{50}$$

where the coupling depends only on the parent-dipole size $|xy|$.

Then, performing the Fourier transform (3) on the two sides of the equation gives

$$\int_0^\infty\frac{d|xy|}{|xy|}\,\mathrm{J}_0(k|xy|)\,b\tilde{L}\,\frac{\partial}{\partial Y}\mathcal{N}(|xy|,Y)=\chi(-\partial_L)N(k,Y)-N^2(k,Y)\,. \tag{51}$$

Using the identity

$$b\tilde{L}(|xy|)=bL(k)-b\log(|xy|^2k^2)\;, \tag{52}$$

one arrives at the equation:

$$bL\frac{\partial}{\partial Y}N(k,Y)-\int_0^\infty\frac{d|xy|}{|xy|}\,\mathrm{J}_0(kr)\,b\log(|xy|^2k^2)\frac{\partial}{\partial Y}\mathcal{N}(|xy|,Y)=\chi(-\partial_L)N(k,Y)-N^2(k,Y)\,, \tag{53}$$

where an extra term appears with respect to (5), depending still on the derivative of the position-space dipole amplitude $\mathcal{N}$.

Denoting $\hat{\mathcal{N}}$ the Mellin transform of $\mathcal{N}(|xy|,Y)$ and $\hat{N}$, the Mellin transform of $N(k,Y)$, they can be simply related (see appendix B) by

$$\hat{N}(\gamma,Y)=2^{2\gamma-1}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)}\,\hat{\mathcal{N}}(\gamma,Y)\;. \tag{54}$$

For the derivative term, by insertion of Mellin-transform, one writes the relations

$$\begin{aligned}
&b\int_0^\infty\frac{d|xy|}{|xy|}\,\mathrm{J}_0(k|xy|)\;\log(|xy|^2k^2)\frac{\partial}{\partial Y}\int\frac{d\gamma}{2\pi i}\,e^{-\gamma\tilde{L}}\,\hat{\mathcal{N}}(\gamma,Y)\;=\\
&=\;b\int\frac{d\gamma}{2\pi i}\,\frac{\partial}{\partial Y}\hat{\mathcal{N}}(\gamma,Y)\,\Lambda^{2\gamma}\int_0^\infty d|xy|\,\mathrm{J}_0(k|xy|)\;\log(|xy|^2k^2)\;|xy|^{2\gamma-1}\;=\\
&=\;b\int\frac{d\gamma}{2\pi i}\,\frac{\partial}{\partial Y}\hat{\mathcal{N}}(\gamma,Y)\,\left(\frac{\Lambda}{k}\right)^{2\gamma}\,\frac{\partial}{\partial\gamma}\int_0^\infty du\,\mathrm{J}_0(u)\,u^{2\gamma-1}\;=\\
&=\;b\int\frac{d\gamma}{2\pi i}\,\frac{\partial}{\partial Y}\hat{\mathcal{N}}(\gamma,Y)\,e^{-\gamma L}\,\frac{\partial}{\partial\gamma}\left[2^{2\gamma-1}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)}\right]\;.
\end{aligned} \tag{55}$$

Using now the relation (54) between Mellin transforms, one finally finds the simple expression

$$b\int\frac{d\gamma}{2\pi i}\,e^{-\gamma L}\;\varphi(\gamma)\frac{\partial}{\partial Y}\hat{N}(\gamma,Y)\;, \tag{56}$$

with $\varphi(\gamma)\equiv\frac{\partial}{\partial\gamma}\log\left[2^{2\gamma-1}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)}\right]=\Psi(\gamma)+\Psi(1-\gamma)+2\log 2$. Hence, (53) becomes

$$bL\frac{\partial}{\partial Y}N(k,Y)=\chi(-\partial_L)N(k,Y)+b\varphi(-\partial_L)\frac{\partial}{\partial Y}N(k,Y)-N^2(k,Y)\,. \tag{57}$$

Following the same derivation as previously, the linear solution of the linear regime writes

$$\mathcal{N}(L,Y)=\int\frac{d\gamma}{2\pi i}\int\frac{d\omega}{2\pi i}\,\mathcal{N}_0(\gamma,\omega)\,\exp\left(-\gamma L+\omega Y+\frac{1}{b\omega}X(\gamma)+\int_{\hat{\gamma}}^{\gamma}d\gamma'\varphi(\gamma')\right)\;, \tag{58}$$

where $X(\gamma)$ is the function considered in the LL case, see (12). This solution can thus be identified as a change of the kernel eigenvalue $\chi(\gamma) \to \chi(\gamma,\omega) \equiv \chi(\gamma) + b\omega\varphi(\gamma)$. Hence, the universality class of the non-linear equation (57) is determined by $\chi(\gamma,\omega=0) = \chi(\gamma)$. This result can also be obtained by noting that the term $\int_{\hat\gamma}^{\gamma} d\gamma' \varphi(\gamma') = \log\left[2^{2\gamma-2\hat\gamma}\ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(1-\hat\gamma)}{\Gamma(\hat\gamma)\Gamma(1-\gamma)}\right]$ can be absorbed in a redefinition of the impact factor $\mathcal{N}_0(\gamma,\omega)$. As easy to realize from the initial saddle point equation (13), a contribution of the impact factor may only consist in a change of the non universal reference scale Q_0.

The final conclusion is thus that the traveling-wave solutions of the Balitsky equation (7) are in the same universality class as the original BK equation (5) with LL kernel both in position and in momentum space. Note that this result extends in a non trivial way to running coupling a property which was easy to derive when the coupling is fixed and thus factorized from the Fourier transform.

IV. TRIUMVIRATE OF RUNNING COUPLINGS

Let us now apply the traveling-wave method to the evolution equation (9). As previously, one has to consider first its linear part. As in section III, one has to introduce a regularization procedure to avoid the Landau poles, except that the integration is now done in momentum space. Let us choose the same type of truncation $\mathcal{R}$ as for the previous equation: we expand the Landau poles denominators and truncate the resulting series.

Starting with the linear part of Eq.(9)

$$\frac{\partial}{\partial Y}\tilde\phi(k,Y) \;=\; \int_{\mathcal{R}} \frac{d^2\mathbf{q}}{2\pi}\ \frac{\bar\alpha(q^2)\bar\alpha((\mathbf{k}-\mathbf{q})^2)}{\bar\alpha(k^2)}\left[\frac{1}{(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}\tilde\phi(q,Y) + \frac{1}{q^2}\tilde\phi(|\mathbf{k}-\mathbf{q}|,Y) - \frac{k^2}{q^2(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}\tilde\phi(k,Y)\right]\ , \tag{59}$$

we rewrite the triumvirate of running coupling

$$\frac{\bar\alpha(q^2)\ \bar\alpha((\mathbf{k}-\mathbf{q})^2)}{\bar\alpha(k^2)} \;=\; \bar\alpha(k^2)\ \frac{\log^2(\frac{k^2}{\Lambda^2})}{\log(\frac{q^2}{\Lambda^2})\ \log(\frac{(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}{\Lambda^2})} = \frac{\bar\alpha(k^2)}{\left[1+b\bar\alpha(k^2)\log(\frac{q^2}{k^2})\right]\ \left[1+b\bar\alpha(k^2)\log(\frac{(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}{k^2})\right]}\ . \tag{60}$$

Inserting (60) and the Mellin representation $\tilde\phi(k,Y) = \int \frac{d\gamma}{2\pi i}\, e^{-\gamma L}\,\hat\phi(\gamma,Y)$ in the right-hand side of (59), one obtains the diagonalized form of the regularized kernel $\chi_{\mathcal{R}}^{Tri}$

$$\chi_{\mathcal{R}}^{Tri}(\gamma,\bar\alpha(k^2)) = \int_{\mathcal{R}} \frac{d^2\mathbf{q}}{2\pi}\ \left\{\frac{\frac{1}{(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}\left(\frac{q^2}{k^2}\right)^{-\gamma} + \frac{1}{q^2}\left(\frac{(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}{k^2}\right)^{-\gamma} - \frac{k^2}{q^2(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}}{\left(1+b\bar\alpha(k^2)\log(\frac{q^2}{k^2})\right)\ \left(1+b\bar\alpha(k^2)\log(\frac{(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}{k^2})\right)}\right\}\ . \tag{61}$$

Using a rescaling $\lambda = \mathbf{q}/k$ and going to the complex λ plane, one writes

$$\begin{aligned}
\chi_{\mathcal{R}}^{Tri}(\gamma,\bar\alpha(k^2)) \;&=\; \int_{\mathcal{R}} \frac{d\lambda d\bar\lambda}{4\pi i}\ \frac{1}{\left[1+b\bar\alpha(k^2)\log(\lambda\bar\lambda)\right]\ \left[1+b\bar\alpha(k^2)\log((1-\lambda)(1-\bar\lambda))\right]}\ \times \\
&\qquad \times\left[\frac{\left(\lambda\bar\lambda\right)^{-\gamma}}{(1-\lambda)\left(1-\bar\lambda\right)} + \frac{\left((1-\lambda)(1-\bar\lambda)\right)^{-\gamma}}{\left(\lambda\bar\lambda\right)} - \frac{1}{\left(\lambda\bar\lambda(1-\lambda)(1-\bar\lambda)\right)}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N-n}(b\bar\alpha(k^2))^{n+m}\int\frac{d\lambda d\bar\lambda}{4\pi i}\log^n(\lambda\bar\lambda)\ \log^m((1-\lambda)(1-\bar\lambda))\ \left[\frac{\left(\lambda\bar\lambda\right)^{-\gamma}}{(1-\lambda)\left(1-\bar\lambda\right)}\ +\right. \\
&\qquad \left. +\ \frac{\left((1-\lambda)(1-\bar\lambda)\right)^{-\gamma}}{\left(\lambda\bar\lambda\right)} - \frac{1}{\left(\lambda\bar\lambda(1-\lambda)(1-\bar\lambda)\right)}\right]\ ,
\end{aligned} \tag{62}$$

where N defines the level of truncation. For instance, $N=0$ corresponds to the LL BFKL kernel, and $N=1$ to the NLL term of the kernel. It is then possible to express the expansion (62) analytically term-by-term. One formally writes

$$\chi_{\mathcal{R}}^{Tri}(\gamma,\bar\alpha(k^2)) \;=\; \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N-n}(b\bar\alpha(k^2))^{n+m}\lim_{\epsilon,\delta\to 0}\frac{\partial^n}{\partial\epsilon^n}\frac{\partial^m}{\partial\delta^m}I_2(\gamma,\epsilon,\delta)\ , \tag{63}$$

where the generating functional $I_2(\gamma,\epsilon,\delta)$ is given in Appendix C.

At the NLL level one finds

$$\chi_{\mathcal{R}}^{Tri}(\gamma,\bar{\alpha}(k^2)) \;=\; \chi(\gamma)+b\bar{\alpha}(k^2)\left[\frac{\chi(\gamma)^2}{2}+\frac{3}{2}\left(\Psi'(\gamma)-\Psi'(1-\gamma)\right)\right]+\mathcal{O}\left(\left[b\bar{\alpha}(k^2)\right]^2\right)\;. \tag{64}$$

Once going from the function $\tilde{\phi}$ (see (10)) to the unintegrated gluon distribution ϕ, which results in changing the factor 3/2 into 1/2, this result gives back the one found in [11].

Eq.(9) then reads in double Mellin space at NLL order

$$\omega=\frac{1}{bL}\chi(\gamma)+\frac{1}{bL^2}\;\chi^{Tri\;(1)}(\gamma)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{L^3}\right)\;, \tag{65}$$

where

$$\chi^{Tri\;(1)}(\gamma)=\frac{\chi(\gamma)^2}{2}+\frac{3}{2}\left(\Psi'(\gamma)-\Psi'(1-\gamma)\right)\;. \tag{66}$$

We note that this result is different than for the dipole amplitude, (39), as discussed in [11].

Keeping in a first stage the truncation at NLL level, namely $N=1$ in (62,63), the nonlinear equation in momentum space can be formally written

$$\frac{1}{\bar{\alpha}(L)}\,\partial_Y N(L,Y)=\chi_1^{Tri}(-\partial_L,\bar{\alpha}(L))N(L,Y)-N^{\otimes 2}(L,Y)\;, \tag{67}$$

where

$$\chi_1^{Tri}(-\partial_L,\bar{\alpha}(L))=\chi(-\partial_L)+b\bar{\alpha}(L)\;\chi^{Tri\;(1)}(-\partial_L) \tag{68}$$

with the nonlinear contribution in momentum space denoted by $N^{\otimes 2}(L,Y)$. Again and also in previous QCD traveling wave studies at nonzero transverse momentum [33] the precise form of $N^{\otimes 2}$ will not matter for the universal behaviour of asymptotic solutions and thus need not be explicitely derived.

As in the previous section, one has to solve (65) as a second-order equation for L. One finds

$$bL\omega \;=\; \frac{\chi(\gamma)+\sqrt{\chi(\gamma)^2+4b\omega\chi^{Tri\;(1)}(\gamma)}}{2}\;. \tag{69}$$

As explained in the introduction, and valid already for the Balitsky scheme, the spurious collinear pole contained in the NLL term of (68) will not change the universal terms, while it may delay the convergence of the asymptotic expansion.

The whole derivation of traveling wave solutions parallels the one described in the previous section, except for the transformation from position to momentum space. Hence finally the traveling wave solutions are directly expressed as in (21,22).

Once again, the generalisation to a fixed perturbative truncation is expected to hold. The universality class of a regularized BK equation with the triumvirate of running couplings is the same as the equation including the running coupling with the "external" gluon momentum (5). Thus, including the effects of the transition to saturation leads to an unification of the asymptotic solutions, irrespective of the differences at the level of the solutions of the linear regime.

V. RENORMALIZATION-GROUP IMPROVED SCHEME DEPENDENCE

Let us recall why the solutions of the BFKL equation with NLL corrections require some special treatment and why this introduces a NLL scheme dependence. Indeed, although the NLL corrections are known [16, 17] they turn out to be negative and large. This is due to spurious singularities which are in contradiction with constraints coming from the QCD renormalization-group properties. Indeed the cancellation of these singularities can be obtained by suitable contributions at higher orders. However, since these contributions are not yet calculated, there is a need for convenient schemes ensuring the compatibility with the renormalization group, which are not uniquely defined. If one admits that the linear part of the various nonlinear evolution equations we are studying will be driven by the corresponding BFKL kernels, we have to take into account this scheme dependence in our discussion of universality properties. A first discussion of the scheme dependence can be found in ref.[35], where different schemes were discussed for the

kernel of equation (5). The aim of the present section is to extend the discussion to the equations considered in the previous sections and to consider the running coupling also in the scheme definition. Note that the RG-improvement plays already an important role in the convergence aspects of the universality properties, see section II-C.

For our discussion, one could consider at least two different classes of schemes, following Ref. [35]. In a first class, containing *e.g.* the schemes of Refs. [20, 21], the dependence of the scheme on the higher orders of the perturbation expansion has been expressed through the ω-dependence, following the method of [19]. In this case, the higher order resummation appears in the kernel only through the dependence over the two Mellin variables, *i.e.* $\chi(\gamma=-\partial_L, \omega=\partial_Y)$, where $\omega=\mathcal{O}(\bar{\alpha})$ drives the higher-order corrections. For this class of two-variable NLL kernels, the general argument that the traveling-wave solutions are driven by $\chi(\gamma,\omega=0)=\chi(\gamma)$ applies, see section II-C.

In a second class of schemes such as S3 and S4 [18], the analysis of [35] leads to results depending on the value chosen for the fixed coupling appearing in the definition of the renormalization-group scheme. Indeed, the traveling-wave solutions are driven by the kernel $\chi(\gamma,\omega=0,\bar{\alpha}\neq 0)\neq\chi(\gamma)$. Hence, even if the form of the solutions is similar [35], the critical parameters are different and thus the traveling-wave solutions appear to be scheme-dependent. One practical question, for instance, is to know what are the predictions for the traveling-wave solutions when choosing the coupling defining the scheme varying with the momentum scale, see *e.g.* [38]. Indeed, one would prefer a unified treatment of the running coupling effects taking into account the running coupling in the RG improved kernel itself. We shall show, that in this case, and on variance with the results at fixed coupling for the regularization, the same universality class defined by the LL kernel (with running coupling) is recovered.

For this sake, we can consider in the same way all previous equations, either that corresponding to the BK equation in transverse momentum, (13), or in transverse position space (38), or for the case of the triumvirate (65), using any of the renormalization-group improved NLL kernels. Then the corresponding saddle-point equations become

$$\omega = \alpha(L \text{ or } \tilde{L})\ \chi^{NLL}(\gamma,\omega,\alpha(L \text{ or } \tilde{L}))\ . \tag{70}$$

Now, in parallel with the previous discussion, Eq.(70) can be interpreted in all cases as an implicit equation for L or $\tilde{L}$ namely

$$L \text{ or } \tilde{L} = \frac{1}{b\omega}\ \kappa^{NLL}(\gamma,\omega)\ , \tag{71}$$

where the function κ^{NLL} verifies the implicit equation

$$\kappa^{NLL}(\gamma,\omega) = \chi^{NLL}\left\{\gamma,\omega,\frac{\omega}{\kappa^{NLL}(\gamma,\omega)}\right\}\ . \tag{72}$$

This boils down to reformulate schemes, starting from S3 and S4, by using an appropriate ω-expansion [19]. These schemes are now in the same first class discussed above.

Then, the condition $\kappa^{NLL}(\gamma,\omega=0)\equiv\chi(\gamma)$ is expected to be verified in all cases by perturbative consistency, and thus by the same argument, one again falls in the same universality class. Indeed, if we use the ω-expansion method to redefine the schemes S3 or S4, it is possible to show that $\kappa^{NLL}(\gamma,\omega=0)=\chi(\gamma,\omega=0,\alpha=0)=\chi(\gamma)$. All other schemes verifying this relation will again fall in the same universality class, defined by the traveling-wave solutions (21,22). The question remains for further study whether other types of NLL schemes, such as the one of Ref.[39] can be given a similar treatment.

VI. SUMMARY AND PREDICTIONS

To summarize, we considered three versions of the QCD evolution equation in rapidity in the mean-field approximation, *i.e.* the Balitsky-Kovchegov [1–3] equation (2), extended to take into account the running coupling of QCD. The first one considers the 1-dimensional BK equation for the dipole amplitude in momentum space, with the substitution of the fixed coupling by a running coupling in terms of the gluon transverse momentum, see (5). The two other forms come from recent theoretical calculation of the quark-loop contributions. They differ by a separation scheme for higher orders between the running coupling and the kernel. The second equation we consider is written for the dipole amplitude in transverse position space , see (7) [9]. The last one can also be written for the dipole amplitude in transverse position space, leading to a "triumvirate" of running couplings, and differs from the previous one. We study it in its equivalent formulation as the evolution equation for the unintegrated gluon distribution in momentum space see (9) [10, 11]. We have also enlarged the discussion by considering the modified BK equations including the renormalization-group improvements of the NLL BFKL kernels [18, 20, 21].

Let us summarize our results. The saturation effects which are formulated through the nonlinear damping terms in the BK equation leads to asymptotic traveling-wave solutions for all equations. Their behaviour at high rapidity

is highly universal. More precisely the form of the solution at high rapidity and the two first terms of the rapidity expansion of the the saturation intercept $d\log(Q_s)/dY$ are the same. Hence they are identical to those found and derived in [32] for the initial BK equation with running coupling (5).

For establishing this strong universality property, We have examined the different types of higher order dependence which modify the solutions of the linear regime

- *Observable dependence:* The traveling wave solutions at high rapidity happen to be independent of the considered distribution functions, by contrast with the solutions of the linear part of the equations. For instance the dipole amplitude and the unintegrated gluon distribution which lead to different rapidity dependence in the linear regime for the same scheme [11] have the same saturation intercept and traveling-wave spectrum. This leads to an unified asymptotic NLL predictions for observables, independently of its formulation in terms of dipole or gluon distributions.

- *Separation scheme dependence:* By computing the traveling-wave solutions for both the Balitsky scheme [9] and the Kovchegov-Weigert one [10, 11], we find the same results, belonging to the universality class of the simpler equation(5) .

- *Regularization dependence:* The definition of equations (7,9) requires a regularization, since their consistent formulation should avoid Landau-pole singularities. Using a finite truncation of the QCD perturbative expansion, we show that the order of truncation, which affects the linear regime, does not change the asymptotic traveling-wave solutions. We propose a general argument for general perturbatively consistent regularization schemes.

- *RG-improved scheme dependence:* The QCD coupling appears also in the definition of appropriate schemes for using the NLL BFKL kernels in order to avoid spurious singularities. The improved NLL kernels with constant coupling were shown to give scheme-dependent traveling wave solutions [34], even if the overall coupling is running [35]. If the scheme is defined using the running coupling through the ω-expansion [19], we recover the strong universality property.

- *Position* vs. *momentum-space dependence:* The universality class is the same when the equations are expressed either in position, or momentum-space formalism by Fourier transformation. This shows that the saturation intercept is the same. The form of the front is also invariant except for the infra-red (with respect to the saturation scale) regions which are not bound by universality properties. We have already mentionned that the infra-red region in both representations is also universally constrained, by unitarity, namely $\mathcal{N} \sim 1$ in position space and $N \sim \log(Qs/k)$ in momentum.

- *Rapid* vs. *slow convergence:* By discussing the effects of the singularities contained in the NLL kernels, we have distinguished between the RG-improved kernels and those containing spurious singularities. Indeed, the rapidity region where the universal properties appear is expected to be delayed in the case where such singularities remain. It is thus important to use, whenever known, a RG-improved scheme for exhibiting the universality properties.

From our results, we conclude that the saturation effects on the rapidity evolution of the dipole amplitude or the unintegrated gluon distribution with running coupling give a stabilisation of the solutions with respect to higher order corrections at high enough rapidity. They appear to be independent of higher order contribution either to the linear kernel or to the nonlinear damping terms. however, subasymptotic nonuniversal contributions may be present.

In mathematical terms one expresses this property as the existence of a large *universality class* of solutions given by (21,22).

At this stage, it is possible to formulate predictions for the behaviour of the exact solutions of the evolution equations which can be obtained through numerical simulations. We can list them as follows:

- The form of the traveling-wave fronts (except in the full saturation region) should converge at high rapidity for the solution of the different equations in the same representation space, either in position or momentum.

- The saturation-scale intercept $d\log(Q_s)/dY$ which can be determined from these fronts should converge to the same function.

- Geometric scaling in $\sqrt{Y}$, related to the constant limit of the wave speed should be seen from the solutions, at least in the middle of the front.

These predictions can be tested using numerical simulations of the rapidity evolution corresponding to modified BK equations with running coupling. In Ref.[40], the running coupling was heuristically introduced for models in position space and compared with the fixed coupling case. Naturally, they could not include the recent theoretical advances, but some of the conclusions are still interesting to quote and seem to fit approximately with our predictions, even if

the equations are different. The traveling-wave regime is observed at high enough rapidity, the saturation scales for running coupling seem to converge, at variance with the fixed coupling case where they depend on the value of the coupling. The form of the front verifies geometric scaling.

While completing this theoretical analysis we were informed of interesting numerical simulations of the relevant equations [41] using a regularization scheme based on the freezing of the coupling. The simulations [41] seem to indicate that the traveling-wave structure is preserved at moderate rapidities and independent of the initial conditions. However, the wave parameters seem to differ from the critical ones. We predict that at higher enough rapidity this difference will decrease and disappear. Note that arguments based on subasymptotic parametric solutions of the nonlinear equations [42] show that the traveling wave structure can be maintained at moderate rapidity but with modified speed as observed in [41]. Also the form of the wave front is modified, which could give an explanation of the difference already noticed in [40] between the running and non running cases.

On a phenomenological ground, such a theoretical solution is characterized by a geometric scaling [36] in $\sqrt{Y}$, either in momentum or position space. By contrast with fixed coupling which leads to geometric scaling in Y [24, 31], this property is characteristic of the BK equation with running coupling [25, 32]. Geometric scaling in Y or $\sqrt{Y}$ seem to be consistent with data on the proton structure functions [37]. However, the precise comparison with the parameters of the theoretical traveling-wave solutions show that nonuniversal terms are present, and thus nonasymptotic contributions cannot be neglected. Parametric solutions, as in [42] could help to take into account nonuniversal contributions.

As an outlook for further directions of theoretical study, we mention the extension of our investigation beyond the mean-field approximation leading to the BK equation. For this sake, one has to consider the hierarchy of QCD evolution equations including fluctuations, *i.e.* Pomeron-loop terms, when the coupling constant is running. Also the role of impact factors, *e.g.* for the coupling to the virtual photon in deep inelastic scattering has not been yet studied at NLL level. Let us also note that a third (and last) universal term in the asymptotic expansion of the saturation intercept, which is known for the fixed coupling case [31], could be the remaining track of the NLL kernels in the universal traveling-wave solutions as discussed after equation (30). Finally a specific study of subasymptotic terms is deserved. It may lead to traveling-wave properties at more moderate rapidities and thus interesting on a phenomenological point of view.

Acknowledgments

We thank Cyrille Marquet and Sebastian Sapeta for fruitful discussions at the origin at the present work. We are grateful to Ian Balitsky and Yuri Kovchegov for useful explanations on their recent papers and Javier Albacete for valuable information on very recent results with Yuri Kovchegov before publication.

APPENDIX A: CALCULATION OF $I_1(\gamma,\epsilon,\delta)$

The integral to be computed in (35) is

$$\begin{aligned} I_1(\gamma,\epsilon,\delta) &\equiv \int \frac{d\lambda d\bar\lambda}{2i\pi}\left[\left(\lambda\bar\lambda\right)^\gamma+\left((1-\lambda)(1-\bar\lambda)\right)^\gamma-1\right]\ \frac{1}{(\lambda\bar\lambda)^{1+\epsilon}(1-\lambda)^\delta(1-\bar\lambda)^\delta} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma-\epsilon)\Gamma(1-\delta)\Gamma(-\gamma+\epsilon+\delta)}{\Gamma(1-\gamma+\epsilon)\Gamma(\delta)\Gamma(1+\gamma-\epsilon-\delta)}+\frac{\Gamma(-\epsilon)\Gamma(1+\gamma-\delta)\Gamma(-\gamma+\epsilon+\delta)}{\Gamma(1+\epsilon)\Gamma(-\gamma+\delta)\Gamma(1+\gamma-\epsilon-\delta)}-\frac{\Gamma(-\epsilon)\Gamma(1-\delta)\Gamma(\epsilon+\delta)}{\Gamma(1+\epsilon)\Gamma(\delta)\Gamma(1-\epsilon-\delta)}\,. \end{aligned} \tag{A1}$$

Then, one finds

$$\lim_{\delta\to0}\left(\frac{\partial}{\partial\delta}-\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right)I_1(\gamma,\epsilon,\delta) \;=\; \frac{1}{\epsilon^2}-\frac{1}{(\gamma-\epsilon)^2}-\frac{\gamma^2}{\epsilon(\gamma-\epsilon)^2}J(\gamma,\epsilon)\left[\frac{1}{\epsilon}+\Psi(1-\epsilon)+\Psi(1+\epsilon)-\Psi(\gamma)-\Psi(1-\gamma)-\frac{2}{\gamma}\right] \tag{A2}$$

where

$$J(\gamma,\epsilon)\equiv\frac{\Gamma(1-\epsilon)\Gamma(\gamma)\Gamma(1-\gamma+\epsilon)}{\Gamma(1+\epsilon)\Gamma(\gamma-\epsilon)\Gamma(1-\gamma)}=1-\epsilon\chi(\gamma)+\frac{\epsilon^2}{2}[\chi(\gamma)^2+\Psi'(1-\gamma)-\Psi'(\gamma)]+\mathcal{O}(\epsilon^3)\,. \tag{A3}$$

Applying the expansion operator (36) on the result (A2), one writes

$$b\bar\alpha(r^2)\lim_{\epsilon\to0}\sum_{n=1}^{N}\left(-b\bar\alpha(r^2)\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right)^{n-1}\left\{\frac{1}{\epsilon^2}-\frac{1}{(\gamma-\epsilon)^2}-\frac{\gamma^2}{\epsilon(\gamma-\epsilon)^2}J(\gamma,\epsilon)\left[\frac{1}{\epsilon}+\Psi(1-\epsilon)+\Psi(1+\epsilon)-\Psi(\gamma)-\Psi(1-\gamma)-\frac{2}{\gamma}\right]\right\}, \tag{A4}$$

At first next-to-leading order, one finds

$$
\begin{aligned}
& b\bar{\alpha}(r^2)\lim_{\epsilon\to 0}\sum_{n=1}^{N}\left(-b\bar{\alpha}(r^2)\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right)^{n-1}\left\{\frac{1}{2}\left(\chi(\gamma)^2+\Psi'(\gamma)-\Psi'(1-\gamma)\right)-\frac{2\chi(\gamma)}{\gamma}+\mathcal{O}(\epsilon)\right\} \\
= \;& b\bar{\alpha}(r^2)\left\{\frac{1}{2}\left(\chi(\gamma)^2+\Psi'(\gamma)-\Psi'(1-\gamma)\right)-\frac{2\chi(\gamma)}{\gamma}\right\}+\mathcal{O}(b^2\bar{\alpha}^2(r^2)) \\
= \;& \frac{1}{\tilde{L}}\left\{\frac{1}{2}\left(\chi(\gamma)^2+\Psi'(\gamma)-\Psi'(1-\gamma)\right)-\frac{2\chi(\gamma)}{\gamma}\right\}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\tilde{L}^2}\right) .
\end{aligned}
\tag{A5}
$$

APPENDIX B: MELLIN-TRANSFORMS IN POSITION *VS.* MOMENTUM

The Mellin-transforms of the dipole amplitude are defined in position space as

$$
\mathcal{N}(r,Y)=\int\frac{d\gamma}{2\pi i}\,e^{-\gamma\tilde{L}}\,\hat{\mathcal{N}}(\gamma,Y)=\int\frac{d\gamma}{2\pi i}\int\frac{d\omega}{2\pi i}\,e^{\omega Y-\gamma\tilde{L}}\,\tilde{\mathcal{N}}(\gamma,\omega)\ , \tag{B1}
$$

and in momentum space as

$$
N(k,Y)=\int\frac{d\gamma}{2\pi i}\,e^{-\gamma L}\,\hat{N}(\gamma,Y)=\int\frac{d\gamma}{2\pi i}\int\frac{d\omega}{2\pi i}\,e^{\omega Y-\gamma L}\,\tilde{N}(\gamma,\omega)\ . \tag{B2}
$$

Let us relate these Mellin-transformed amplitudes by rewriting the initial dipole amplitude in momentum space (3).

$$
\begin{aligned}
N(k,Y) \;&=\; \int_0^\infty\frac{dr}{r}\,\mathrm{J}_0(kr)\int\frac{d\gamma}{2\pi i}\,e^{-\gamma\tilde{L}}\,\hat{\mathcal{N}}(\gamma,Y)=\int\frac{d\gamma}{2\pi i}\,\hat{\mathcal{N}}(\gamma,Y)\,\Lambda^{2\gamma}\int_0^\infty dr\,\mathrm{J}_0(kr)\;r^{2\gamma-1} \\
&=\; \int\frac{d\gamma}{2\pi i}\,\hat{\mathcal{N}}(\gamma,Y)\,\Lambda^{2\gamma}\,k^{-2\gamma}2^{2\gamma-1}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)}=\int\frac{d\gamma}{2\pi i}\,e^{-\gamma L}\,2^{2\gamma-1}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)}\,\hat{\mathcal{N}}(\gamma,Y)\ .
\end{aligned}
\tag{B3}
$$

Hence, by comparing (B2) with the last expression in Eq.(B3), the two Mellin transformed functions are found related by

$$
\hat{N}(\gamma,Y)=2^{2\gamma-1}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)}\,\hat{\mathcal{N}}(\gamma,Y)\ . \tag{B4}
$$

APPENDIX C: CALCULATION OF $I_2(\gamma,\epsilon,\delta)$

The integral to be computed in (63) is

$$
\begin{aligned}
I_2(\gamma,\epsilon,\delta) \;&=\; \int\frac{d\lambda d\bar{\lambda}}{4\pi i}\,\left(\lambda\bar{\lambda}\right)^{\epsilon}\left((1-\lambda)(1-\bar{\lambda})\right)^{\delta}\left[\frac{\left(\lambda\bar{\lambda}\right)^{-\gamma}}{(1-\lambda)\left(1-\bar{\lambda}\right)}+\frac{\left((1-\lambda)(1-\bar{\lambda})\right)^{-\gamma}}{\left(\lambda\bar{\lambda}\right)}-\frac{1}{\left(\lambda\bar{\lambda}(1-\lambda)(1-\bar{\lambda})\right)}\right] \\
&=\; \frac{\Gamma(1-\gamma+\epsilon)\Gamma(\delta)\Gamma(\gamma-\epsilon-\delta)}{2\Gamma(\gamma-\epsilon)\Gamma(1-\delta)\Gamma(1-\gamma+\epsilon+\delta)}+\frac{\Gamma(\epsilon)\Gamma(1-\gamma+\delta)\Gamma(\gamma-\epsilon-\delta)}{2\Gamma(1-\epsilon)\Gamma(\gamma-\delta)\Gamma(1-\gamma+\epsilon+\delta)}-\frac{\Gamma(\epsilon)\Gamma(\delta)\Gamma(1-\epsilon-\delta)}{2\Gamma(1-\epsilon)\Gamma(1-\delta)\Gamma(\epsilon+\delta)}\ .
\end{aligned}
\tag{C1}
$$

The next-to-leading result comes from the expansion

$$
I_2(\gamma,\epsilon,\delta)=\chi(\gamma)+(\epsilon+\delta)\left[\frac{\chi(\gamma)^2}{4}+\frac{3}{4}\left(\Psi'(\gamma)-\Psi'(1-\gamma)\right)\right]+\mathcal{O}(\epsilon^2)+\mathcal{O}(\epsilon\delta)+\mathcal{O}(\delta^2)\ . \tag{C2}
$$

---

[1] I. Balitsky, Nucl. Phys. **B463**, 99 (1996).
[2] Y. V. Kovchegov, Phys. Rev. **D60**, 034008 (1999).
[3] Y. V. Kovchegov, Phys. Rev. **D61**, 074018 (2000).
[4] For a recent review on these problems and a list of references:
D. N. Triantafyllopoulos, Acta Phys. Polon. B **36**, 3593 (2005)

[5] A. Bialas, H. Navelet and R. Peschanski, Nucl. Phys. B **593**, 438 (2001)
[6] L. N. Lipatov, Sov. J. Nucl. Phys. **23**, 338 (1976).
[7] E. A. Kuraev, L. N. Lipatov, and V. S. Fadin, Sov. Phys. JETP **45**, 199 (1977).
[8] I. I. Balitsky and L. N. Lipatov, Sov. J. Nucl. Phys. **28**, 822 (1978).
[9] I. Balitsky, Phys. Rev. D **75**, 014001 (2007)
[10] Y. V. Kovchegov and H. Weigert, Nucl. Phys. A **784**, 188 (2007)
[11] Y. V. Kovchegov and H. Weigert, "Quark loop contribution to BFKL evolution: Running coupling and leading-N(f) NLO intercept," arXiv:hep-ph/0612071.
[12] E. Levin, Nucl. Phys. B **453**, 303 (1995)
[13] E. Gardi, J. Kuokkanen, K. Rummukainen and H. Weigert, Nucl. Phys. A **784**, 282 (2007)
[14] V. S. Fadin, R. Fiore and A. Papa, "On the coordinate representation of NLO BFKL," arXiv:hep-ph/0612284.
[15] V. S. Fadin, R. Fiore and A. Papa, Phys. Lett. B **647**, 179 (2007)
[16] V. S. Fadin and L. N. Lipatov, Phys. Lett. **B429**, 127 (1998).
[17] M. Ciafaloni and G. Camici, Phys. Lett. **B430**, 349 (1998).
[18] G. P. Salam, JHEP **9807**, 019 (1998).
[19] M. Ciafaloni and D. Colferai, Phys. Lett. B **452**, 372 (1999)
[20] M. Ciafaloni, D. Colferai, and G. P. Salam, Phys. Rev. **D60**, 114036 (1999).
[21] M. Ciafaloni, D. Colferai, G. P. Salam and A. M. Stasto, Phys. Rev. D **68**, 114003 (2003)
[22] L. V. Gribov, E. M. Levin and M. G. Ryskin, Phys. Rept. **100**, 1 (1983).
[23] E. Iancu, K. Itakura and L. McLerran, Nucl. Phys. A **708**, 327 (2002)
[24] A. H. Mueller and D. N. Triantafyllopoulos, Nucl. Phys. **B640**, 331 (2002).
[25] D. N. Triantafyllopoulos, Nucl. Phys. **B648**, 293 (2003).
[26] R. A. Fisher, Ann. Eugenics. **7**, 355 (1937).
[27] A. Kolmogorov, I. Petrovsky, and N. Piscounov, Moscow University Bulletin of Mathematics **A1**, 1 (1937).
[28] M. Bramson, Mem. Am. Math. Soc. **44**, 285 (1983).
[29] E. Brunet and B. Derrida, Phys. Rev. **E56**, 2597 (1997).
[30] U. Ebert, W. van Saarloos, Physica **D 146**, 1 (2000). For a review, see W. van Saarloos, Phys. Rep. **386**, 29 (2003).
[31] S. Munier and R. Peschanski, Phys. Rev. Lett. **91**, 232001 (2003); *ibid.* Phys. Rev. **D70**, 077503 (2004).
[32] S. Munier and R. Peschanski, Phys. Rev. **D69**, 034008 (2004).
[33] C. Marquet, R. Peschanski and G. Soyez, Nucl. Phys. A **756**, 399 (2005)
C. Marquet and G. Soyez, Nucl. Phys. A **760**, 208 (2005)
[34] R. Enberg, Phys. Rev. D **75**, 014012 (2007)
[35] R. Peschanski and S. Sapeta, Phys. Rev. D **74**, 114021 (2006)
[36] A. M. Stasto, K. Golec-Biernat, and J. Kwiecinski, Phys. Rev. Lett. **86**, 596 (2001).
[37] F. Gelis, R. Peschanski, G. Soyez and L. Schoeffel, Phys. Lett. B **647**, 376 (2007)
[38] R. Peschanski, C. Royon, and L. Schoeffel, Nucl. Phys. **B716**, 401 (2005).
[39] S. J. Brodsky, V. S. Fadin, V. T. Kim, L. N. Lipatov and G. B. Pivovarov, JETP Lett. **70**, 155 (1999)
[40] J. L. Albacete, N. Armesto, J. G. Milhano, C. A. Salgado and U. A. Wiedemann, Phys. Rev. D **71**, 014003 (2005)
[41] J. Albacete, "Recent advances in high energy QCD evolution equations", Invited talk at the workshop "High Energy QCD: from RHIC to LHC", ECT,Trento, 9-13 January, 2007; J. L. Albacete and Y. V. Kovchegov, "Solving High Energy Evolution Equation Including Running Coupling Corrections," arXiv:0704.0612 [hep-ph].
[42] R. Peschanski, Phys. Lett. **B622**, 178 (2005). C. Marquet, R. Peschanski, and G. Soyez, Phys. Lett. **B628**, 239 (2005).

Article [II]

Asymptotics of QCD traveling waves with fluctuations and running coupling effects

Guillaume Beuf*
Institut de Physique Théorique, CEA, IPhT, F-91191 Gif-sur-Yvette, France, CNRS, URA 2306.

Extending the Balitsky-Kovchegov (BK) equation independently to running coupling or to fluctuation effects due to *pomeron loops* is known to lead in both cases to qualitative changes of the traveling-wave asymptotic solutions. In this paper we study the extension of the forward BK equation, including both running coupling and fluctuations effects, extending the method developed for the fixed coupling case [1]. We derive the exact asymptotic behavior in rapidity of the probabilistic distribution of the saturation scale.

I. INTRODUCTION

In the leading-logarithmic (LL) approximation of high-energy QCD, the evolution with rapidity Y of the dipole-target scattering amplitude which appears in the dipole factorization of hadronic cross-sections, is given by the Balitsky hierarchy [2], or by the equivalent JIMWLK equation [3–10], and in their mean-field approximation, by the Balitsky-Kovchegov (BK) equation [2, 11, 12]. These equations describe the transition from the dilute regime to the dense (saturated) regime of hadronic matter at weak coupling. The BK equation complements the linear Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov (BFKL) [13–15] equation, whose solutions are exponentially growing, by involving a nonlinear damping term ensuring the taming of the growth, *i.e.* saturation. The Balitsky and JIMWLK equations include correlation effects in the dense regime.

The BK equation has been mapped [16–18] onto the Fisher and Kolmogorov-Petrovsky-Piscounov (FKPP) equation [19, 20], which admits universal traveling-wave solutions [21, 22]. This mapping has allowed to rederive some analytical results found in [23], to find various additional results [18, 24, 25], and to give a simple picture of high-energy QCD. In particular *geometric scaling* [26], observed in the HERA data, corresponds to a traveling-wave structure of the dipole-target amplitude, and can be understood in term of solutions to the BK equation [27]. The geometric scaling is the scaling of the dipole-target amplitude

$$\mathcal{N}(Y, k_T^2) \equiv \mathcal{N}\left(\tau_g = \frac{k_T^2}{Q_s^2(Y)}\right) , \tag{1}$$

k_T being the transverse momentum scale of the dipole, $Q_s(Y)$ the saturation scale, τ_g the scaling variable.

A key feature of the FKPP equation is that its traveling-wave solutions are driven by the dilute region. Hence these solutions are extremely sensitive to discreteness or disorder effects in the dilute regime which can be added as a noise term to the FKPP equation. The exponential growth in the dilute regime tends indeed to enhance the effect of the fluctuations. The obtained equation is called the stochastic FKPP equation (sFKPP). In particular, if one interprets the FKPP equation as a reaction-diffusion equation for a system of walkers (which we will call *particles*), the particle density can be arbitrary small forward the front of the traveling-wave solutions, even much smaller than the density corresponding to one particle in the whole system, while this very forward region drives the wave solution. The FKPP equation is thus only a mean-field approximation of a reaction-diffusion process, neglecting the relevant fluctuations due to the particle discreteness . These fluctuations can be separated between two types, which have different consequences. First, most of them can be taken into account by cutting off the particle density when it is unphysically small. In [28], the modification of the traveling-waves solutions of the FKPP equation in the presence of this cut-off has been derived. The velocity of the wave is reduced w.r.t. the mean field case, and the shape of the front is modified in the dilute region. In the small cut-off limit, the solution is very slowly converging to the mean field solution, typically through inverse of logarithms of the cut-off. Second, in [1], the effect of large fluctuations, not taken into account by the cut-off formalism, has been studied. Those fluctuations, which bring some particles far away forward the wave front, provide a random shift of the front. Hence, the position of the front becomes a random variable.

This problem of sensitivity to the discreteness of the interacting particles has been raised in the QCD context in [29–32] for the simulations of onium scattering with unitarity corrections, and discussed in [33, 34] where they

*Electronic address: guillaume.beuf@cea.fr

are associated with pomeron loops. This has led to conjecture that high-energy scattering processes in QCD may fall in the same universality class as a reaction-diffusion process [35], extending the mapping from BK to FKPP beyond the mean field approximation. The generalization of the Balitsky and JIMWLK equations including pomeron loops have been investigated[1] through various formalisms [34, 36–44]. For example, the QCD evolution equation with pomeron loops has been formulated in [34, 38] as a Langevin equation. If one neglects the non-locality of the dipole-dipole interactions and performs a coarse-graining approximation, the evolution equation with pomeron loops can be rewritten as a simpler Langevin equation[2] [34], namely

$$\partial_Y \mathcal{N}(L,Y) = \bar{\alpha}\left[\chi(-\partial_L)\mathcal{N}(L,Y) - \mathcal{N}^2(L,Y) + \sqrt{\kappa\alpha_s^2\,\mathcal{N}(L,Y)}\;\eta(L,Y)\right]\,, \tag{2}$$

where $\mathcal{N}$ is the forward dipole-target scattering amplitude, L is related to the dipole momentum scale k_T and some reference scale Q_0 by $L \equiv \log(k_T^2/Q_0^2)$, κ is a coarse-graining factor taking into account the approximation, and $\bar{\alpha} \equiv N_c\alpha_s/\pi$. $\chi(-\partial_L)$ is the LL BFKL kernel restricted to zero momentum transfer and zero conformal spin, with the eigenvalues $\chi(\gamma) = 2\Psi(1) - \Psi(\gamma) - \Psi(1-\gamma)$. η is a Gaussian white noise with the correlation

$$\langle \eta(L,Y)\,\eta(L',Y')\rangle = \frac{4}{\bar{\alpha}}\;\delta(L-L')\delta(Y-Y')\,, \tag{3}$$

and the equation (2) should be understood with the Ito prescription[3]. Our goal will be to study this equation with running coupling instead of fixed.

The main prediction of the fluctuations studies at fixed coupling is the existence of *diffusive scaling* at high rapidity. The fluctuations indeed seems to randomly shift the wave front. Hence, geometric scaling holds event by event but is no more valid in average, and is replaced by diffusive scaling, *i.e.*

$$\mathcal{N}(Y,k_T^2) \equiv \mathcal{N}\left(\tau_d = \frac{\log\left(k_T^2/Q_s^2(Y)\right)}{\sqrt{DY}}\right)\,, \tag{4}$$

DY being the variance of the random saturation scale. Moreover, the averaging reduces the slope of the amplitude. The diffusive scaling has been conjectured in [35], and derived in the small noise limit in [48], using the results of [1] applied to the equation (2). It has been also derived in the strong noise limit [49]. Numerical simulations indicates that this diffusive scaling holds in the case of a finite noise term [50, 51]. The diffusion coefficient D is a growing function of the strength of the noise.

Almost all the above-mentioned studies have been performed at LL accuracy. But the extension of the saturation equations beyond LL level is one hot topic. A part of the Next to Leading Logarithm (NLL) corrections to the BK equation is already known [52–55]. In general, some of the NLL corrections contribute to the running coupling and some other to the kernel and to the nonlinear terms. If one knows them, one can resum higher order contributions to the running of the coupling, and obtain an equation containing the running coupling at the relevant scale and NLL kernel and nonlinear terms. The precise shape of the nonlinear terms is not relevant at high rapidity in the dilute regime, due to universal properties of the traveling waves solutions. It has also been shown [56] that the NLL corrections to the kernel are not relevant for the transition to the saturation regime at high enough rapidity in the running coupling case. By contrast, the replacement of the fixed coupling by the running coupling has a significant impact on the asymptotic solutions [17, 23, 57]. In particular, one has at large rapidity $\log Q_s^2(Y) \propto \sqrt{Y}$, instead of $\log Q_s^2(Y) \propto Y$ in the fixed coupling case.

As the fluctuations and the running coupling seem to be both relevant for the saturation at high energy, they have *a priori* to be both taken into account[4]. The purpose of the present work is to study the solution of a model extending the BK equation, with both running coupling and fluctuations effects.

---

[1] The aim of these studies is not only to include fluctuations, but also to build a formalism for saturation with a symmetric treatment of projectile and target.

[2] The approximations leading from the full equation with pomeron loops to (2) are not well understood. Moreover, some doubt has been cast on the validity of the approximation (2) for QCD [38, 45]. However, (2) is a useful toy model to investigate the fluctuation effects in QCD, and we will keep this approximation in our work.

[3] See for example [46] or [47] for a review.

[4] A first attempt in that direction can be found in [58].

We explain in section II how we implement the running coupling in (2) to build our model. Then, we apply the method developed in [1] to our model, implementing the cut-off in section III A and the large fluctuations in section III B. Our final result is presented in section IV. In concluding section V, we compare our result to the one in the fixed coupling case, and discuss the relevance of our model.

II. FORMULATION OF THE MODEL

Let us take into account the running coupling effects in the equation (2). As mentioned in the introduction, the full NLL corrections to the BK equation are being calculated, but not yet available. However they are not all contributing to the asymptotic behavior of interest in the present paper [56]. Even the precise choice of the momentum scale for the running coupling will have no effect on our results[5]. In the following, we take the running coupling at the saturation scale everywhere in the equation (2), namely

$$\bar{\alpha}^{-1} \equiv b\ \rho_s(Y) \quad \text{where} \quad b = \frac{11N_c - 2N_f}{12N_c} \quad \text{and} \quad \rho_s(Y) \equiv \log(Q_s^2(Y)/\Lambda_{QCD}^2)\ . \tag{5}$$

With the assumption (5), the evolution equation (2) becomes

$$\begin{aligned} b\ \rho_s(Y)\ \partial_Y \mathcal{N}(L,Y) \ &= \ \chi(-\partial_L)\mathcal{N}(L,Y) - \mathcal{N}^2(L,Y) + \sqrt{\frac{\kappa\pi^2\ \mathcal{N}(L,Y)}{N_c^2 b^2\ \rho_s^2(Y)}}\ \eta(L,Y)\ , \\ \text{with} \qquad & \langle \eta(L,Y)\,\eta(L',Y')\rangle = 4b\ \rho_s(Y)\ \delta(L-L')\delta(Y-Y')\ , \end{aligned} \tag{6}$$

where L is now defined by $L \equiv \log(k_T^2/\Lambda_{QCD}^2)$. As $\rho_s(Y)$ is a priori unknown, one start with the assumption that (6) has indeed a traveling front solution, $\rho_s(Y)$ being the position of the front in L variable, and then check for consistency. Thus $\rho_s(Y)$ and $\mathcal{N}(L,Y)$ can be both determined by (6).

Let us start our analysis by considering the Ansatz $\rho_s(Y) \equiv v(Y^\beta)\ Y^\beta$ where $v(t)$ has a finite and non-zero limit for $t \to \infty$, $t \equiv Y^\beta$ being the *effective time* of the wave propagation. Writing the equation (6) in the t variable, one remarks that the only consistent value of β is $1/2$ (as expected from the previous studies of BK equations with running coupling [17, 23]). Then, the evolution equation writes

$$\begin{aligned} \frac{b\ v(t)}{2}\ \partial_t N(L,t) \ &= \ \chi(-\partial_L)N(L,t) - N^2(L,t) + \sqrt{\frac{\bar{\kappa}\ N(L,t)}{v(t)\ t^2}}\ \nu(L,t)\ , \\ \text{with} \qquad & \langle \nu(L,t)\,\nu(L',t')\rangle = \delta(L-L')\delta(t-t')\ , \end{aligned} \tag{7}$$

where $t \equiv \sqrt{Y}$, $N(L,t) \equiv \mathcal{N}(L, Y=t^2)$, $\nu(L,t) \equiv \eta(L,t^2)\ /\sqrt{2b\ v(t)}$, and $\bar{\kappa} \equiv 2\kappa\pi^2/N_c^2 b$.

III. DERIVATION OF THE SOLUTION

A. Cut-off contribution

The fluctuation term in (7) is relevant only at very small density, namely for $N(L,t) \lesssim \bar{\kappa}/v(t)\ t^2$. Hence, the shape of the wave front should not be modified at larger densities. However, in the standard BK equation case, the selection of the wave velocity happens forward the front, where the density is very small. One expects that the fluctuations modify the forward part of the front, and thus the velocity of the wave front. Following [28], we replace the fluctuation

---

[5] *A priori*, the scales present in the problem are the size the parent and daughter dipoles. The first NLL parts calculated for the BK equation give hints to determine the running coupling scale [52, 53], except for the fluctuation term, which does not come from the typical fan diagram structure of the BK equation. However, only a rough estimate of the running coupling scale is needed, because the result of the present paper is quite robust with respect to a change of the running coupling scale, especially for the α_s^2 coupling present in the fluctuation term. In order to check the independence of our result from this choice, the following analysis is done in the appendix A with the choice of the parent dipole momentum, *i.e.* the Fourier conjugate of the parent dipole size, as the running coupling scale.

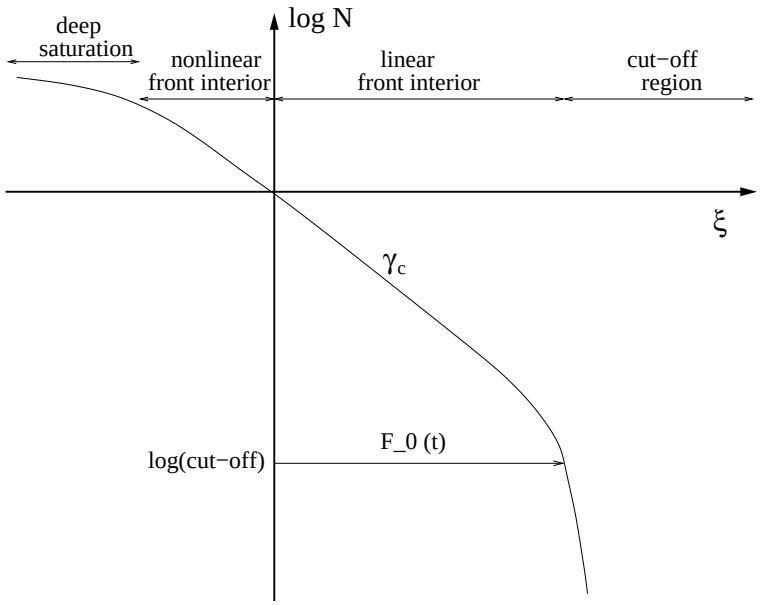

FIG. 1: Shape of the solution in the presence of the cut-off, in the comoving frame of the wave front.

term in (7) by a cut-off, which corresponds to a deterministic approximation for the bulk of the fluctuations (see Fig. 1). When the density is small, a fluctuation may indeed set the density back to zero where it stays since zero is a fixed point.

We first study the *linear* part of the *front interior* region (see Fig. 1), defined by

$$\frac{\bar{\kappa}}{v(t)\ t^2} < N(L,t) \ll 1\,, \tag{8}$$

where we can neglect both the nonlinear and fluctuation terms. In this region

$$\frac{b\ v(t)}{2}\ \partial_t N(L,t) \simeq \chi(-\partial_L) N(L,t)\,. \tag{9}$$

We now switch to the comoving frame of the front, replacing L by $\xi \equiv L - v(t)t + \xi_0$ and $\bar{N}(\xi,t) \equiv N(L,t)$, ξ_0 being some parameter. Then

$$\frac{b\ v(t)}{2}[\partial_t \bar{N}(\xi,t) - (v(t) + t\dot{v}(t))\partial_\xi \bar{N}(\xi,t)] = \chi(-\partial_\xi)\bar{N}(\xi,t)\,. \tag{10}$$

The free parameter ξ_0 is fixed by imposing that $\xi = 0$ corresponds to the separation between the regions where the nonlinearity is relevant or not (see Fig. 1). Then, the linear part of the front interior is defined by $0 < \xi < F_0(t)$, $F_0(t)$ being the position of the cut-off in the comoving frame. In [28], the velocity has been found decreased by a term depending on the cut-off through logarithm. In our case, the cut-off is decreasing like t^{-2} because of the running of the coupling. Hence, we can expect that the velocity is decreasing through powers of logarithm of t. We thus drop the time derivative term in (10), which is decreasing like t^{-1}. We obtain the differential equation

$$-\frac{b\ v(t)}{2}(v(t) + t\dot{v}(t))\ \partial_\xi \bar{N}(\xi,t) = \chi(-\partial_\xi)\bar{N}(\xi,t) \tag{11}$$

whose solutions are

$$\bar{N}(\xi,t) = \sum_i C_i\ e^{-\gamma_i(t)\xi}\,, \tag{12}$$

where the $\gamma_i(t)$ are the solutions of the dispersion relation

$$\frac{b}{2}v(t)(v(t)+t\dot{v}(t)) = \frac{\chi(\gamma(t))}{\gamma(t)}\,. \tag{13}$$

As the fluctuation term is vanishing for $t \to \infty$, $\gamma(t)$ and $v(t)$ should converge to the critical values γ_c and v_c of the BK equation with running coupling [17], namely

$$\chi(\gamma_c) = \gamma_c\ \chi'(\gamma_c)\ , \quad \text{and} \quad v_c \equiv \sqrt{\frac{2\chi(\gamma_c)}{b\gamma_c}}\ . \tag{14}$$

Following the method of [28], we expand the dispersion relation (13) around these critical values, and find

$$-bv_c\delta v(t) - \frac{bv_c}{2}\ t\delta\dot{v}(t) + \mathcal{O}((\delta v(t))^2) = \frac{\chi''(\gamma_c)}{2\gamma_c}\ (\delta\gamma(t))^2 + \mathcal{O}((\delta\gamma(t))^3)\,, \tag{15}$$

where $\delta\gamma(t) \equiv \gamma(t) - \gamma_c$ and $\delta v(t) \equiv v_c - v(t)$ ($\delta v > 0$, since the cut-off is expected to reduce the velocity). We have supposed that $\delta v(t) \propto (\log t)^{-\zeta}$ with some positive ζ, then $t\ \delta\dot{v}(t) \propto (\log t)^{-\zeta-1}$ is a subleading term at very large t in the expansion (15). Hence

$$\delta\gamma(t) = \pm i\pi\sqrt{\frac{\delta v(t)}{\lambda}}\ , \quad \text{where} \quad \lambda \equiv \frac{\pi^2\chi''(\gamma_c)}{2b\gamma_c v_c}\,. \tag{16}$$

We can rewrite at large t the solutions (12) as

$$\bar{N}(\xi,t) = e^{-\gamma_c\xi}\left[C\sin\left(\pi\sqrt{\frac{\delta v(t)}{\lambda}}\xi\right) + D\cos\left(\pi\sqrt{\frac{\delta v(t)}{\lambda}}\xi\right)\right]\,. \tag{17}$$

The shape of the front at small ξ, away from the cut-off, has to be the same as the one without fluctuations

$$\bar{N}(\xi,t) \sim A\ \xi e^{-\gamma_c\xi}\,. \tag{18}$$

One finds the constants C and D by matching (17) with (18), and writes

$$\bar{N}(\xi,t) = \frac{A}{\pi}\ \sqrt{\frac{\lambda}{\delta v(t)}}\ \sin\left(\pi\sqrt{\frac{\delta v(t)}{\lambda}}\xi\right)e^{-\gamma_c\xi} \quad \text{for} \quad 0 \le \xi \le F_0(t) \quad \text{and} \quad t \gg 1\ . \tag{19}$$

At the cut-off, one has

$$\bar{N}(F_0(t),t) = \frac{A}{\pi}\ \sqrt{\frac{\lambda}{\delta v(t)}}\ \sin\left(\pi\sqrt{\frac{\delta v(t)}{\lambda}}F_0(t)\right)e^{-\gamma_c F_0(t)} = \frac{\bar{\kappa}}{v(t)\ t^2}\,. \tag{20}$$

As $F_0(t)$ and $\delta v(t)$ are both unknown, we have also to ensure the continuity of the derivative of the front at $F_0(t)$ in order to determine them both. The idea of the cut-off method is to prevent the front from having a too large tail in the dilute region. So let us impose at $F_0(t)$ a stronger slope $\bar{\gamma} > \gamma_c$, with for example $\bar{\gamma} - \gamma_c \simeq 1$. This gives a second equation

$$\left[-\frac{\gamma_c A}{\pi}\ \sqrt{\frac{\lambda}{\delta v(t)}}\ \sin\left(\pi\sqrt{\frac{\delta v(t)}{\lambda}}F_0(t)\right) + A\cos\left(\pi\sqrt{\frac{\delta v(t)}{\lambda}}F_0(t)\right)\right]\ e^{-\gamma_c F_0(t)} = -\frac{\bar{\gamma}\bar{\kappa}}{v(t)\ t^2} \tag{21}$$

The equations (20) and (21) are similar to the ones in [28], and gives the following result

$$v(t) = v_c - \frac{\lambda}{F_0^2(t)} = v_c - \frac{\pi^2 \chi''(\gamma_c)}{2b\gamma_c v_c F_0^2(t)} \tag{22}$$

$$\bar{N}(\xi, Y) = \frac{AF_0(t)}{\pi} \sin\left(\frac{\pi\xi}{F_0(t)}\right) e^{-\gamma_c \xi} \quad \text{for} \quad 0 \leq \xi \leq F_0(t) \quad \text{and } t \text{ large} \tag{23}$$

$$F_0(t) = \frac{1}{\gamma_c} \log\left(\frac{Av(t)t^2}{(\bar{\gamma}-\gamma_c)\bar{\kappa}}\right) = \frac{2}{\gamma_c}\log t + \frac{1}{\gamma_c}\log\left(\frac{Av_c}{(\bar{\gamma}-\gamma_c)\bar{\kappa}}\right) + \mathcal{O}(\delta v(t))$$

These results have only a weak dependence in the free parameter $\bar{\gamma}$ and in the coarse-graining factor κ. In fact, as we have already truncated asymptotic series of $\log t$ in (15), only the first term is really significant. Thus, our result is

$$F_0(t) = \frac{2}{\gamma_c}\log t \quad \text{for the width of the front,} \tag{24}$$

$$v(t) = v_c - \frac{\pi^2 \gamma_c \chi''(\gamma_c)}{8bv_c \log^2 t} \quad \text{for the velocity of the front,} \tag{25}$$

$$\bar{N}(\xi, Y) = \frac{2A\log t}{\pi\gamma_c} \sin\left(\frac{\pi\gamma_c\xi}{2\log t}\right) e^{-\gamma_c\xi} \quad \text{for the shape of the front, for } 0 \leq \xi \leq \frac{2}{\gamma_c}\log t \text{ and } t \text{ large}. \tag{26}$$

B. Contribution from large fluctuations

As explained in [1], the cut-off method allows to take into account the frequent but small fluctuations, which can eventually set N to zero. But the large fluctuations, which can give a non-zero value to N far away forward the front, are too rare to be modeled in a deterministic way. However they can have an important effect. The physical picture is the following (see Fig. 2): the traveling-wave is essentially given by the cut-off contribution, but sometimes, a fluctuation brings a few particles forward the tip of the front, setting there N of the same order as the cut-off. Then, this seed grows, forming a new forward-wave front, and also a backward-wave front. Finally, the old wave front meets the backward-wave front, and only the forward front created by the fluctuation remains. The long-time effect of a large fluctuation is thus to shift the wave front a bit forward.

The first assumption in [1] is that such a fluctuation has a probability to happen during $\mathrm{d}t$ at a distance between δ and $\delta + \mathrm{d}\delta$ forward the front

$$\mathcal{P}(\delta)\ \mathrm{d}\delta\ \mathrm{d}t = C_1 e^{-\gamma_c \delta}\ \mathrm{d}\delta\ \mathrm{d}t\,, \tag{27}$$

with C_1 being some unknown normalization constant. This probability law depends on the shape of the front because the noise term in the sFKPP equation depends on the particle density, as in equation (7). We keep the assumption (27) in the running coupling case[6].

Following [1], one has to study the effect of one single fluctuation, *i.e.* the relaxation of the front, starting from an initial condition at $t = t_0$ corresponding to the cut-off traveling-wave solution plus a seed at a distance δ (see the first picture in Fig. 2). t_0 is taken very large, so that $F_0(t_0)$ is large. The effective width of the front interior $F(t)$ is larger than the one for the cut-off solution $F_0(t)$, starting at $F(t_0) = F_0(t_0) + \delta$. In the comoving frame (with the velocity (25)), this relaxation is due to diffusion on the interval $[0, F(t_0)]$. Hence, the typical relaxation time is of order $(F_0(t_0))^2$. For the linear front interior up to the fluctuation, we take a similar Ansatz as in [1], namely

$$N(L,t) = F(t)\ G\left(\frac{L - v_e(t)t + \xi_0}{F(t)}, \frac{t-t_0}{(F_0(t_0))^2}\right) e^{-\gamma_c(L - v(t)t + \xi_0)}\,, \tag{28}$$

where $v_e(t)$ is an effective velocity of the front, such that

$$v_e(t_0) = v(t_0) \quad \text{and} \quad R(\delta) \equiv \lim_{t\to\infty} [v_e(t)t - v(t)t]\,; \tag{29}$$

---

[6] The assumption (27) has been verified numerically in the sFKPP case, and the physical arguments supporting it hold for the equation (7).

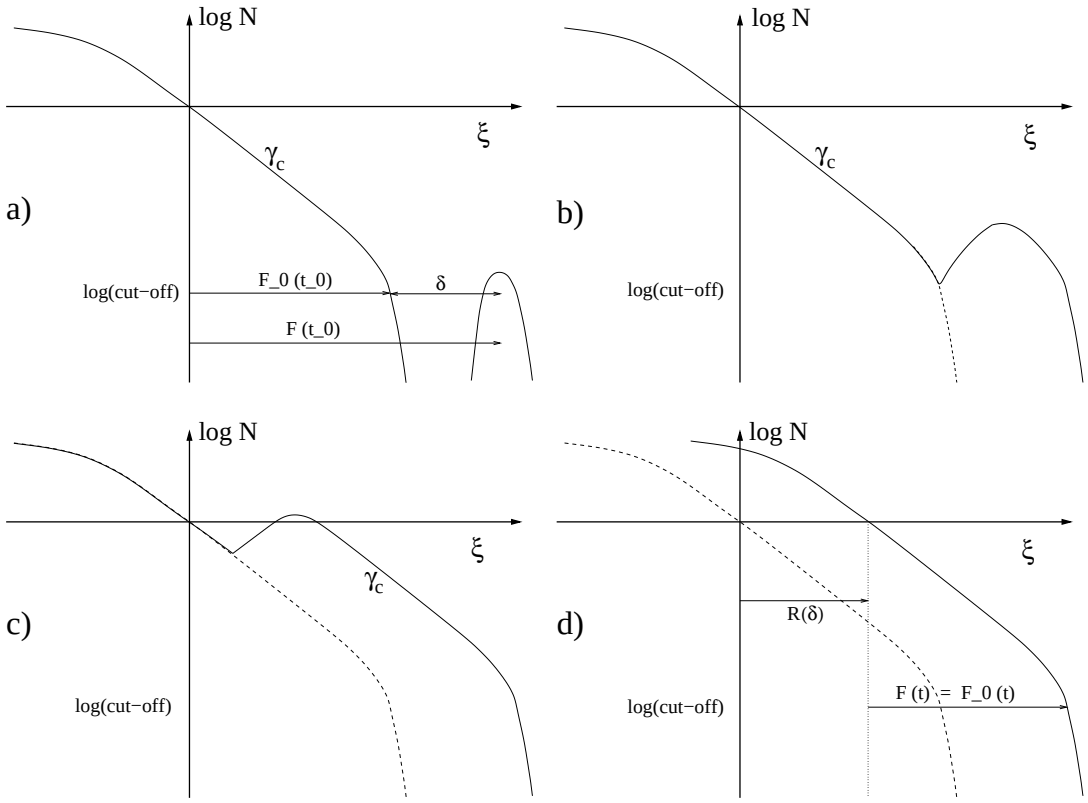

FIG. 2: Relaxation of the front after the creation of a seed by a large fluctuation. a) shows the initial condition with the cut-off front and the seed, b) the growth of the seed and c) the merging between the fronts. d) represents the final state of the relaxation, with a front similar the initial one (in dashed line), but translated by $R(\delta)$. Note that the solution is drawn in the comoving frame with the velocity determined with the cut-off formalism.

$R(\delta)$ being the shift of the wave front induced by the fluctuation. As $v_e(t)t - v(t)t$ evolves only during the relaxation, and $R(\delta)$ is of order 1, as δ, one has

$$\partial_t \left[v_e(t)t - v(t)t \right] \propto \left(F_0(t_0) \right)^{-2} . \tag{30}$$

As $\gamma_c \simeq 0.6275$, $F(t) - F_0(t)$ starts of order 1, according to (27), and relaxes to 0. Hence, one infers

$$\partial_t \, \left[F(t) - F_0(t) \right] \propto \left(F_0(t_0) \right)^{-2} \quad \text{and then} \quad \partial_t \, F(t) \propto \left(F_0(t_0) \right)^{-2} . \tag{31}$$

Inserting the Ansatz (28) in

$$\frac{b \; v_e(t)}{2} \; \partial_t N(L,t) = \chi(-\partial_L) N(L,t) \tag{32}$$

with the assumptions (30,31), one gets

$$b v_c \; \partial_\tau G(y,\tau) - \pi^2 \chi''(\gamma_c) \; G(y,\tau) = \chi''(\gamma_c) \; \partial_y^2 G(y,\tau) \, , \tag{33}$$

where

$$\begin{aligned} y &\equiv \frac{L - v_e(t)t + \xi_0}{F(t)} = \frac{\xi - (v_e(t)t - v(t)t)}{F(t)} \\ \tau &\equiv \frac{t - t_0}{\left(F_0(t_0) \right)^2} \, . \end{aligned} \tag{34}$$

We take as boundary conditions

$$G(0,\tau) = G(1,\tau) = 0\,, \tag{35}$$

because the solution has to match (18) at small y in order to take the nonlinear term into account, and $y = 1$ corresponds to the position of the cut-off for the wave front generated by the fluctuation. The value of the cut-off gives a boundary condition for G too small to be relevant within the accuracy of our calculations.

The equation (33), with (35), is the same as for the FKPP case and for the BK equation with fixed coupling, after a rescaling of τ. Hence, as in these cases, the first Fourier mode of G is constant, and the others decay exponentially. Calculating this first Fourier mode for the chosen initial condition, and matching it with the cut-off solution (26) translated by $R(\delta)$, one finds

$$R(\delta) = \frac{1}{\gamma_c}\ \log\left(1 + \frac{C_2 e^{\gamma_c \delta}}{(F_0(t_0))^3}\right)\,, \tag{36}$$

where C_2 is some unknown constant of order 1.

We turn now to the problem of the long time behavior of the solution, including several large fluctuations. (36) tells us that a fluctuation is relevant if $e^{\gamma_c \delta}$ is at least of order $(F_0(t_0))^3$. Hence, using (27), one can conclude that the typical time between two relevant fluctuations is of order $(F_0(t))^3$. For t large enough, this time is much larger than the relaxation time of a large fluctuation, which is of order $(F_0(t))^2$. Hence we can admit that the wave front has enough time to completely relax between two large fluctuations.

The calculation of the time derivatives of the cumulants of the position of the front done in [1] holds, thanks to this property, to (27), and to (36). It gives

$$\begin{aligned}
\partial_t \langle \rho_s(t^2)\rangle &= v_c - \frac{\pi^2 \chi''(\gamma_c)}{2b\gamma_c v_c F_0^2(t)} + \frac{C_1 C_2}{\gamma_c^2}\ \frac{3\log F_0(t)}{(F_0(t))^3} \\
\partial_t \langle \rho_s^n(t^2)\rangle_c &= \frac{C_1 C_2\ n!\zeta(n)}{\gamma_c^{n+1}\ (F_0(t))^3} \quad \text{for} \quad n \geq 2\,,
\end{aligned} \tag{37}$$

where the $\langle . \rangle$ means, in mathematical terms, the average w.r.t. the noise realizations, and is interpreted in QCD context as the average w.r.t. the target's color fields configurations. The index c denotes cumulants instead of moments of random variables.

IV. FINAL RESULTS

In the result (37) only the constant $C_1 C_2$ remain unknown. We use the same trick as in [1] in order to guess it. As explained in [1], the expression of the velocity in the presence of the cut-off (25) is still valid if one adds large fluctuations, but with a larger effective front width

$$F_{eff}(t) = F_0(t) + \frac{3}{\gamma_c}\log F_0(t)\,. \tag{38}$$

Then, by matching with (37) the expression obtained, one can find $C_1 C_2$. One gets

$$\begin{aligned}
\partial_t \langle \rho_s(t^2)\rangle &= v_c - \frac{\pi^2 \chi''(\gamma_c)}{2b\gamma_c v_c F_0^2(t)} + \frac{3\pi^2 \chi''(\gamma_c)\log F_0(t)}{b\gamma_c^2 v_c (F_0(t))^3} \\
\partial_t \langle \rho_s^n(t^2)\rangle_c &= \frac{n!\zeta(n)\pi^2\chi''(\gamma_c)}{\gamma_c^{n+1} b v_c\ (F_0(t))^3} \quad \text{for} \quad n \geq 2\,.
\end{aligned} \tag{39}$$

Up to now, our results are quite similar to the ones at fixed coupling [1]. However, as the method used in sections III A and III B is valid only if $F_0(t) \gg 1$, which is equivalent to $\log Y \gg \gamma_c$, we have only studied the asymptotic behavior of the saturation scale cumulants, above some very large rapidity Y_0. Hence, integrating above Y_0,

$$\begin{aligned}
\langle \rho_s(Y)\rangle &= \langle \rho_s(Y_0)\rangle + v_c\left(\sqrt{Y}-\sqrt{Y_0}\right) - \frac{\gamma_c\pi^2\chi''(\gamma_c)}{8bv_c}\int_{\sqrt{Y_0}}^{\sqrt{Y}}\frac{\mathrm{d}t}{\log^2 t} \\
&\quad + \frac{3\gamma_c\pi^2\chi''(\gamma_c)}{8bv_c}\int_{\sqrt{Y_0}}^{\sqrt{Y}}\mathrm{d}t\,\frac{\log\log t}{\log^3 t} \\
\langle \rho_s^n(Y)\rangle_c &= \langle \rho_s^n(Y_0)\rangle_c + \frac{n!\zeta(n)\pi^2\chi''(\gamma_c)}{8\gamma_c^{n-2}bv_c}\int_{\sqrt{Y_0}}^{\sqrt{Y}}\frac{\mathrm{d}t}{\log^3 t} \qquad \text{for} \quad n\geq 2\,. \qquad (40)
\end{aligned}$$

Two of the integrals in (40) can be rewritten using the Logarithmic Integral Li [59]. Then our final result is

$$\begin{aligned}
\langle \rho_s(Y)\rangle &= \langle \rho_s(Y_0)\rangle + v_c\left(\sqrt{Y}-\sqrt{Y_0}\right) - \frac{\gamma_c\pi^2\chi''(\gamma_c)}{8bv_c}\left[\mathrm{Li}\left(\sqrt{Y}\right) - \frac{\sqrt{Y}}{\log\sqrt{Y}} - \mathrm{Li}\left(\sqrt{Y_0}\right) + \frac{\sqrt{Y_0}}{\log\sqrt{Y_0}}\right] \\
&\quad + \frac{3\gamma_c\pi^2\chi''(\gamma_c)}{8bv_c}\int_{\sqrt{Y_0}}^{\sqrt{Y}}\mathrm{d}t\,\frac{\log\log t}{\log^3 t} \\
\langle \rho_s^n(Y)\rangle_c &= \langle \rho_s^n(Y_0)\rangle_c + \frac{n!\zeta(n)\pi^2\chi''(\gamma_c)}{16\gamma_c^{n-2}bv_c}\left[\mathrm{Li}\left(\sqrt{Y}\right) - \frac{\sqrt{Y}}{\log\sqrt{Y}} - \frac{\sqrt{Y}}{\left(\log\sqrt{Y}\right)^2} - \mathrm{Li}\left(\sqrt{Y_0}\right) + \frac{\sqrt{Y_0}}{\log\sqrt{Y_0}} + \frac{\sqrt{Y_0}}{\left(\log\sqrt{Y_0}\right)^2}\right] \\
&\quad \text{for} \quad n\geq 2\,. \qquad (41)
\end{aligned}$$

We will consider also the following approximated form of our result. Assuming that the logs are not varying much and can be factorized out of the integrals in (40), one obtains

$$\begin{aligned}
\langle \rho_s(Y)\rangle &\simeq \langle \rho_s(Y_0)\rangle + v_c\left(\sqrt{Y}-\sqrt{Y_0}\right) - \frac{\gamma_c\pi^2\chi''(\gamma_c)}{8bv_c}\,\frac{\sqrt{Y}-\sqrt{Y_0}}{\log^2\sqrt{Y}} \\
&\quad + \frac{3\gamma_c\pi^2\chi''(\gamma_c)}{8bv_c}\left(\sqrt{Y}-\sqrt{Y_0}\right)\,\frac{\log\log\sqrt{Y}}{\log^3\sqrt{Y}} \\
\langle \rho_s^n(Y)\rangle_c &\simeq \langle \rho_s^n(Y_0)\rangle_c + \frac{n!\zeta(n)\pi^2\chi''(\gamma_c)}{8\gamma_c^{n-2}bv_c}\,\frac{\sqrt{Y}-\sqrt{Y_0}}{\log^3\sqrt{Y}} \qquad \text{for} \quad n\geq 2\,. \qquad (42)
\end{aligned}$$

On Fig. 3, the increase of the variance of the logarithmic saturation scale is plotted for the result (41) and for the approximated result (42) as a function of the *effective time* $\sqrt{Y/b}$ associated with the traveling-wave dynamics at running coupling. Precisely, the plotted function is

$$Var(Y) - Var(Y_0) \equiv \langle \rho_s^2(Y)\rangle_c - \langle \rho_s^2(Y_0)\rangle_c\,. \qquad (43)$$

We have also plotted on Fig. 3 the result for another model, mixing fixed and running coupling, in which one takes in (2) $\bar{\alpha}$ at the scale $Q_s(Y)$ and α_s^2 for the fluctuation term at the scale $Q_s(Y_0)$. Hence, it features the running coupling mean-field dynamics, but fixed coupling cut-off and fluctuations. It shows a linear rise of the variance of the front as a function of the *effective time*, as expected by analogy with the full fixed coupling case. Running coupling in the noise term strongly reduces the rise of the variance of the front. The truncation (42) of our result leads to significantly underestimate that variance, and thus should not be performed.

The threshold Y_0 has to be adjusted, choosing a compromise between the precision needed and the phenomenological relevance of the rapidity range. We expect that the result (41) catches at least the qualitative features of the full solution for $Y_0 \simeq 12$ (which corresponds to consider that $\log Y_0 \simeq 2.5$ is large enough compared to $\gamma_c \simeq 0.63$), and maybe down to $Y_0 \simeq 10$. Hence, our result might be relevant for forward physics at the LHC.

In addition, an implicit assumption has been done in our calculations. We have assumed that the wave front is formed down to the low density region where the noise term is relevant, so that it can drive the whole solution. The rapidity interval needed for the solution to form such a wave front is called Y_{form}. Hence, we have an additional constraint on Y_0 which is $Y_0 \geq Y_{form}$. In the present knowledge of QCD evolution equations, no reliable estimate of Y_{form} is available in the running coupling case. It is yet difficult to estimate analytically (even roughly). It requires a much better understanding of the non-asymptotic behavior of the solutions of the BK equation with running

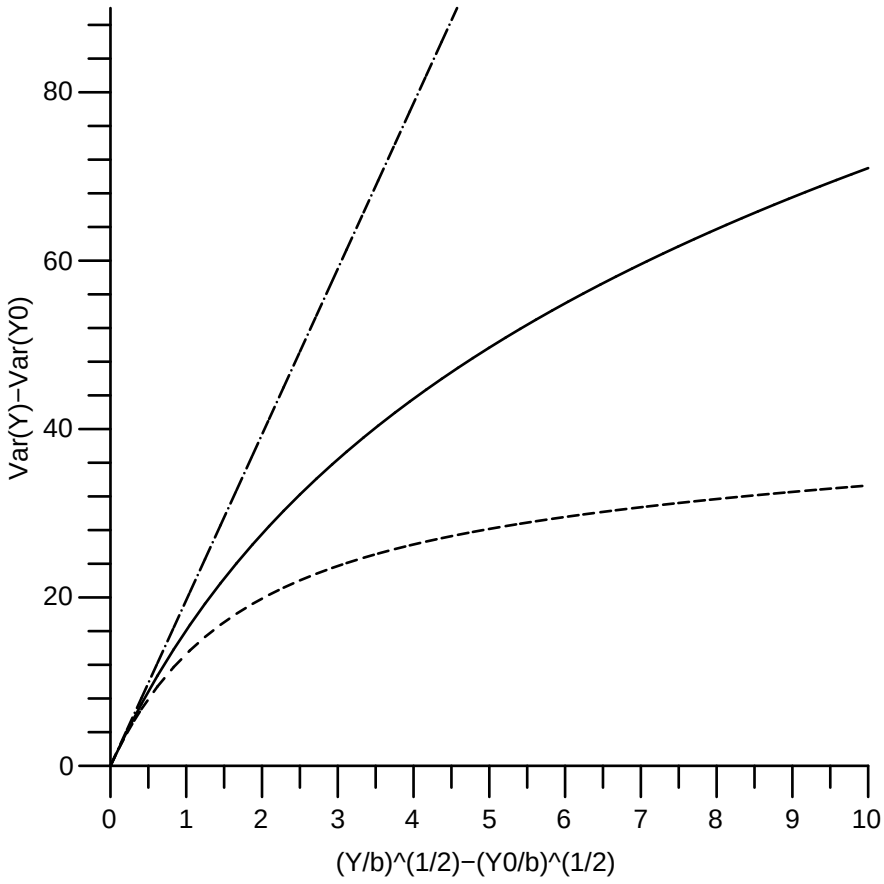

FIG. 3: Increase of the variance of the logarithmic saturation scale $Var(Y) - Var(Y_0) \equiv \langle \rho_s^2(Y) \rangle_c - \langle \rho_s^2(Y_0) \rangle_c$, as a function of $\sqrt{Y/b} - \sqrt{Y_0/b}$. Our result (41) is the solid line. The dashed line is the approximation (42), and the dashed-dotted line corresponds to the result for a model with running coupling mean-field dynamics plus fixed coupling noise effects. We have taken here $Y_0 = e^{2.5} \simeq 12$.

coupling[7]. Moreover, no numerical simulation of the full BK equation with running coupling and pomeron loops effects has been successful.

In our running coupling results (41), the increase of the cumulants has the same n dependence as in the fixed coupling result of [1]. Hence, the calculation of [48] is also valid in the running coupling case when the values of the cumulants at Y_0 are small compared to the increase between Y_0 and Y we have calculated. It happens for $Y \geq Y_0$ if $Y_0 \simeq Y_{form}$ or generically for large enough Y. We can conclude that at high rapidity, the dipole-target amplitude is expected to show diffusive scaling

$$\mathcal{N}(Y, k_T^2) \equiv \mathcal{N}\left(\tau_d \equiv \frac{L - \langle \rho_s(Y) \rangle}{\sqrt{\langle \rho_s^2(Y) \rangle_c}}\right) , \tag{44}$$

with $\langle \rho_s(Y) \rangle$ and $\langle \rho_s^2(Y) \rangle_c$ given by (41).

[7] A rough estimate relying on the asymptotic behavior of the solutions has been attempted in ref.[60], but it does not work in practice.

V. CONCLUSION AND DISCUSSION

In this paper we have studied a model extending the BK equation, and expected to include both the main features of fluctuations related to pomeron loops and of running coupling. Using the method developed in [1], we have been able to calculate the high energy asymptotic behavior of its solution, and in particular the asymptotic behavior of the cumulants of the random saturation scale (41). The *effective time* scale corresponding to the diffusive processes contributing to the front formation or relaxation is very short compared to the *effective time* scale related to the decrease of the coupling. That is why the method of [1], built for fixed coupling, works also in the running coupling case.

Let us compare the results obtained in the running coupling and in the fixed coupling case. Our result (39) is rather similar to the one of [1] in the fixed coupling case, but some features are modified. The first difference is that the *effective time* is $\bar{\alpha}Y$ in the fixed coupling case and $\sqrt{Y/b}$ in the running coupling case. That difference is already present in the mean field approximation. The second difference is the logarithmic denominators in the running coupling case, which lower the rise of all the cumulants.

The most subtle difference is in the validity range of the formula (39). In our case, it is valid only at high rapidity, whereas in the fixed coupling case, the corresponding formula is valid for any rapidity, provided that the cut-off front is formed, *i.e.* above Y_{form}. Hence, in the fixed coupling case, one determines the cumulants completely. This result has been used in [48] to demonstrate diffusive scaling (4). It comes from a Gaussian approximation, which is valid because the magnitude of the cumulants is not growing too fast with the index of the cumulants.

On the contrary, in the running coupling case, we have been able to calculate only the asymptotic behavior of the cumulants. At smaller rapidity, the front is forming, and this evolution is deterministic. This first regime is characterized by geometric scaling. Then, at $Y = Y_{form}$, when the front is formed up to the region of small N where the fluctuation term becomes relevant, the cumulants start to rise almost linearly, which breaks geometric scaling. Then, as the coupling at the saturation scale decrease, the relevant fluctuations becomes rarer. The rate of growth of the cumulants thus decreases and the evolution of the probability law of the saturation scale slows down, without stopping. Our result (41) concerns only this last regime. *A priori*, a large contribution to the cumulants may come from an intermediate region in rapidity, between Y_{form} and Y_0. It might delay the onset of diffusive scaling and lead to a non-scaling regime between the geometric and the diffusive scaling regimes. Hence, our result is not sufficient to predict if diffusive scaling holds in the physical domain in the running coupling case. Nevertheless, for large enough rapidity compared to Y_0 the contributions calculated in the present paper will be large compared to the cumulants at Y_0, and allow us to predict diffusive scaling (44) in the high energy limit. Moreover, numerical simulations indicate that the diffusive scaling at fixed coupling is valid not only in the small noise limit, but also at finite noise. One can thus assume that in the running coupling case, the value of the cumulants at Y_0 or below should also be compatible with diffusive scaling. Hence our result (41)

- proves the diffusive scaling (as formulated in (44)) in the high rapidity limit in the running coupling case;
- provides a hint that the diffusive scaling should hold for smaller rapidity, perhaps down to Y_{form}, in the running coupling case.

It is important to note that diffusive scaling can occur only at rapidities larger than Y_{form}, whereas geometric scaling is valid at smaller rapidities. Hence, a large Y_{form} could explain the success of the geometric scaling to describe the HERA data. Thus, one infers an experimental lower bound $Y_{form} > 9$. If $Y_{form} \leq 12$, it should be possible to observe diffusive scaling (44) at the LHC. If Y_{form} is larger, geometric scaling will remain valid in the LHC rapidity range.

Let us recall and discuss the main assumptions made in the building of our model.

- The choice of the running coupling at the saturation scale can be *a priori* a matter of debate. It is indeed not completely consistent, as the saturation scale is supposed to be dynamically generated. For that reason, the choice of the running coupling at the saturation scale in the BK equation is the only one giving an equation which can be exactly mapped onto the BK equation with fixed coupling. Except the precise value of the parameters and the fact that the effective time is $\sqrt{Y}$ in the first case and Y in the second, those two equations give the same results. But other choices for the running coupling scale, involving the parent and daughters dipole sizes or momentum scales, give solutions with a slow convergence to the critical asymptotic front and more complicated subasymptotic dynamics. It is a major issue to understand the solution at intermediate rapidity, and hence for phenomenological studies. But it makes no difference for our result, valid only at very high rapidity, when the wave front has been already formed. In the appendix A, the whole analysis is redone with the choice of the parent dipole momentum as running coupling scale. The results are exactly the same. One can understand this fact in the following way. The relevant region governing the whole solution is the one mentioned as the

linear part of the front interior. Indeed, the softer modes are cut-off by the saturation, and the harder by the fluctuations. The size $F_0(t)$ of this region is growing, but only as $\log Y$, whereas this region as a whole moves with the front as $\sqrt{Y}$. Therefore, for two arbitrary logarithmic scales L and L' in that region at large rapidity, $(L-L')/L$ is always suppressed as an inverse power of Y. The appendix A provides an explicit example of this mechanism. Thus we can conclude that any choice for the running coupling scale involving the parent and daughters dipoles sizes or momentum will give the same result. Note that, as mentioned in the introduction, the other NLL contributions cannot be relevant asymptotically [56]. Hence, our result (41) can be considered as safe from NLL and higher order effects.

- Concerning the fluctuations, our approximations are obviously the ones giving the Langevin equation (2). In particular, the off-diagonal Gaussian noise [38] is replaced by a diagonal one, and the dipole-dipole scattering is taken local. These approximations are supposed to provide, at least qualitatively, the same type of fluctuations effects as the full pomeron loops equations. However that is not sure, as neither analytical nor numerical solutions to the full pomeron loops problem are available yet.

As an outlook, it would be interesting to obtain analytical results at smaller rapidity than in the present work. However, it would probably require a different framework than the method of [1] used here. It would also be sensitive to more details of the model. It would be useful to have a better understanding of the front formation in the running coupling case, in order to have a theoretical prediction for Y_{form}. The main open problem remains however the understanding of the solutions to the full pomeron loops equations.

Note that our results might be relevant outside QCD, as a study of a reaction-diffusion process with space-dependant reaction and diffusion rates. A chemical system with a temperature gradient could show such features.

While completing this work, results of the numerical simulation [60] concerning the extension with running coupling of a 1+1 dimensional reaction-diffusion model [51] for high energy QCD have appeared. The main result of [60] is that fluctuations effects are very strongly suppressed in the running coupling case, up to a quite high rapidity. Indeed, Y_{form} is found to be large in that toy model, of the order of a few hundreds, and thus beyond the reach of experiments. It remains to study if such a large Y_{form} is specific to that model, or occurs also in QCD. The results of [60] and of the present study seem however to be compatible concerning the asymptotic behavior of the cumulants of the saturation scale. Note also that the model used in [60] is a one-dimensional model with similar assumptions concerning the fluctuation term as the one studied here.

Acknowledgments

I would like to thank Robi Peschanski for suggesting to me the subject of this paper, and for many comments and advices. I also thank Edmond Iancu for insightful discussions, in particular about the results of [60] before publication. I also acknowledge Al Mueller and Gregory Soyez for useful remarks.

APPENDIX A: RUNNING COUPLING AT THE PARENT DIPOLE MOMENTUM SCALE

In this paper, the running coupling has been taken at the saturation scale for convenience. But our results are more general, as they does not depend on the precise scale of the running coupling. As an example, let us present the derivation when one chooses the running coupling scale to be the parent dipole momentum k_T. Inserting

$$\bar{\alpha} \equiv \frac{1}{bL} \tag{A1}$$

in the equation (2), one gets, instead of (6),

$$\begin{aligned} b\ L\ \partial_Y \mathcal{N}(L,Y) \ &= \ \chi(-\partial_L)\mathcal{N}(L,Y) - \mathcal{N}^2(L,Y) + \sqrt{\frac{\kappa\pi^2\ \mathcal{N}(L,Y)}{N_c^2 b^2\ L^2}}\ \eta(L,Y)\ , \\ \text{with} \qquad & \langle \eta(L,Y)\,\eta(L',Y')\rangle = 4b\ L\ \delta(L-L')\delta(Y-Y')\ . \end{aligned} \tag{A2}$$

Rewriting (A2) with $t \equiv \sqrt{Y}$ instead of Y and with $\nu(L,t) \equiv \eta(L,t^2)\ \sqrt{t/2bL}$, one gets

$$\begin{aligned} \frac{b\ L}{2\ t}\ \partial_t N(L,t) \ &= \ \chi(-\partial_L)N(L,t) - N^2(L,t) + \sqrt{\frac{\bar{\kappa}\ N(L,t)}{t\ L}}\ \nu(L,t)\ , \\ \text{with} \qquad & \langle \nu(L,t)\,\nu(L',t')\rangle = \delta(L-L')\delta(t-t')\ , \end{aligned} \tag{A3}$$

in analogy with equation (7). The differences between the equations (7) and (A3) are more explicit if we use the comoving coordinate $\xi \equiv L - v(t)t$ to rewrite (A3) as

$$\frac{b}{2}\left(v(t)+\frac{\xi}{t}\right)\,\partial_t N(L,t) \;=\; \chi(-\partial_L)N(L,t) - N^2(L,t) + \sqrt{\frac{\bar\kappa\; N(L,t)}{t^2\left(v(t)+\frac{\xi}{t}\right)}}\;\nu(L,t)\,. \tag{A4}$$

Hence, the cut-off is now for

$$N(L,t) \sim \frac{\bar\kappa}{t^2\left(v(t)+\frac{F_0(t)}{t}\right)}\,, \tag{A5}$$

instead of $\bar\kappa/t^2 v(t)$. In the linear part of the front interior region, we have the equation

$$\frac{b}{2}\left(v(t)+\frac{\xi}{t}\right)\left[\partial_t \bar N(\xi,t) - (v(t)+t\dot v(t))\partial_\xi \bar N(\xi,t)\right] = \chi(-\partial_\xi)\bar N(\xi,t)\,, \tag{A6}$$

instead of (10). In the next step of the method one neglects power suppressed terms. Thus one recovers the equation (11). Hence, the following steps are the same, up to the equations (20) and (21) in which the explicit value of the cut-off appears. These two equations are replaced by

$$\frac{A}{\pi}\,\sqrt{\frac{\lambda}{\delta v(t)}}\,\sin\left(\pi\sqrt{\frac{\delta v(t)}{\lambda}}F_0(t)\right)e^{-\gamma_c F_0(t)} \;=\; \frac{\bar\kappa}{t^2\,\left(v(t)+\frac{F_0(t)}{t}\right)} \tag{A7}$$

$$\left[-\frac{\gamma_c A}{\pi}\,\sqrt{\frac{\lambda}{\delta v(t)}}\,\sin\left(\pi\sqrt{\frac{\delta v(t)}{\lambda}}F_0(t)\right) + A\cos\left(\pi\sqrt{\frac{\delta v(t)}{\lambda}}F_0(t)\right)\right]\,e^{-\gamma_c F_0(t)} \;=\; -\frac{\bar\gamma\bar\kappa}{t^2\,\left(v(t)+\frac{F_0(t)}{t}\right)}\,. \tag{A8}$$

The $F_0(t)/t$ terms in the denominators of (A7) and (A8) gives a contribution to $F_0(t)$ only at the order $\mathcal{O}(F_0(t)/t)$. Hence, the results of the cut-off formalism (25-24) remain the same.

Let us now consider the study of large fluctuations. The equation describing the relaxation after one large fluctuation is again (A6) instead of (32). The ξ/t term is power suppressed in the linear part of the front interior, thus one finds again the equation (33). As the boundary condition for G at the cut-off is not sensitive to the exact value of the cut-off, the following results are the same.

Hence, the results of our asymptotic study are identical if one chooses to take the running coupling either at the saturation scale or at the parent dipole momentum k_T. From the comparison of these two cases, one can infer that our results should hold for any reasonable choice of the running coupling scale.

[1] E. Brunet, B. Derrida, A. H. Mueller and S. Munier, Phys. Rev. **E73**, 056126 (2006), [cond-mat/0512021].
[2] I. Balitsky, Nucl. Phys. **B463**, 99 (1996), [hep-ph/9509348].
[3] J. Jalilian-Marian, A. Kovner, A. Leonidov and H. Weigert, Nucl. Phys. **B504**, 415 (1997), [hep-ph/9701284].
[4] J. Jalilian-Marian, A. Kovner, A. Leonidov and H. Weigert, Phys. Rev. **D59**, 014014 (1999), [hep-ph/9706377].
[5] J. Jalilian-Marian, A. Kovner and H. Weigert, Phys. Rev. **D59**, 014015 (1999), [hep-ph/9709432].
[6] A. Kovner, J. G. Milhano and H. Weigert, Phys. Rev. **D62**, 114005 (2000), [hep-ph/0004014].
[7] H. Weigert, Nucl. Phys. **A703**, 823 (2002), [hep-ph/0004044].
[8] E. Iancu, A. Leonidov and L. D. McLerran, Nucl. Phys. **A692**, 583 (2001), [hep-ph/0011241].
[9] E. Iancu, A. Leonidov and L. D. McLerran, Phys. Lett. **B510**, 133 (2001), [hep-ph/0102009].
[10] E. Ferreiro, E. Iancu, A. Leonidov and L. McLerran, Nucl. Phys. **A703**, 489 (2002), [hep-ph/0109115].
[11] Y. V. Kovchegov, Phys. Rev. **D60**, 034008 (1999), [hep-ph/9901281].
[12] Y. V. Kovchegov, Phys. Rev. **D61**, 074018 (2000), [hep-ph/9905214].
[13] L. N. Lipatov, Sov. J. Nucl. Phys. **23**, 338 (1976).
[14] E. A. Kuraev, L. N. Lipatov and V. S. Fadin, Sov. Phys. JETP **45**, 199 (1977).
[15] I. I. Balitsky and L. N. Lipatov, Sov. J. Nucl. Phys. **28**, 822 (1978).
[16] S. Munier and R. Peschanski, Phys. Rev. Lett. **91**, 232001 (2003), [hep-ph/0309177].
[17] S. Munier and R. Peschanski, Phys. Rev. **D69**, 034008 (2004), [hep-ph/0310357].
[18] S. Munier and R. Peschanski, Phys. Rev. **D70**, 077503 (2004), [hep-ph/0401215].
[19] R. A. Fisher, Ann. Eugenics **7**, 355 (1937).

[20] A. Kolmogorov, I. Petrovsky and N. Piskounov, Moscow University Bulletin of Mathematics **A 1**, 1 (1937).
[21] M. Bramson, Mem. Am. Math. Soc. **44**, 285 (1983).
[22] U. Ebert and W. van Saarloos, Physica **D 146**, 1 (2000).
[23] A. H. Mueller and D. N. Triantafyllopoulos, Nucl. Phys. **B640**, 331 (2002), [hep-ph/0205167].
[24] C. Marquet, R. Peschanski and G. Soyez, Nucl. Phys. **A756**, 399 (2005), [hep-ph/0502020].
[25] C. Marquet, R. Peschanski, G. Soyez and A. Bialas, Phys. Lett. **B633**, 331 (2006), [hep-ph/0509216].
[26] A. M. Stasto, K. Golec-Biernat and J. Kwiecinski, Phys. Rev. Lett. **86**, 596 (2001), [hep-ph/0007192].
[27] F. Gelis, R. Peschanski, G. Soyez and L. Schoeffel, Phys. Lett. **B647**, 376 (2007), [hep-ph/0610435].
[28] E. Brunet and B. Derrida, Phys. Rev. E **56**, 2597 (1997).
[29] G. P. Salam, Nucl. Phys. **B449**, 589 (1995), [hep-ph/9504284].
[30] G. P. Salam, Nucl. Phys. **B461**, 512 (1996), [hep-ph/9509353].
[31] G. P. Salam, Comput. Phys. Commun. **105**, 62 (1997), [hep-ph/9601220].
[32] A. H. Mueller and G. P. Salam, Nucl. Phys. **B475**, 293 (1996), [hep-ph/9605302].
[33] E. Iancu and A. H. Mueller, Nucl. Phys. **A730**, 494 (2004), [hep-ph/0309276].
[34] E. Iancu and D. N. Triantafyllopoulos, Nucl. Phys. **A756**, 419 (2005), [hep-ph/0411405].
[35] E. Iancu, A. H. Mueller and S. Munier, Phys. Lett. **B606**, 342 (2005), [hep-ph/0410018].
[36] M. A. Braun, Phys. Lett. **B483**, 115 (2000), [hep-ph/0003004].
[37] M. A. Braun, Phys. Lett. **B632**, 297 (2006), [hep-ph/0512057].
[38] E. Iancu and D. N. Triantafyllopoulos, Phys. Lett. **B610**, 253 (2005), [hep-ph/0501193].
[39] A. H. Mueller, A. I. Shoshi and S. M. H. Wong, Nucl. Phys. **B715**, 440 (2005), [hep-ph/0501088].
[40] E. Levin and M. Lublinsky, Nucl. Phys. **A763**, 172 (2005), [hep-ph/0501173].
[41] A. Kovner and M. Lublinsky, Phys. Rev. **D71**, 085004 (2005), [hep-ph/0501198].
[42] A. Kovner and M. Lublinsky, Phys. Rev. Lett. **94**, 181603 (2005), [hep-ph/0502119].
[43] I. Balitsky, Phys. Rev. **D72**, 074027 (2005), [hep-ph/0507237].
[44] Y. Hatta, E. Iancu, L. McLerran, A. Stasto and D. N. Triantafyllopoulos, Nucl. Phys. **A764**, 423 (2006), [hep-ph/0504182].
[45] M. Kozlov, E. Levin and A. Prygarin, Nucl. Phys. **A792**, 122 (2007), [arXiv:0704.2124 [hep-ph]].
[46] N. G. van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* (North-Holland, 2007).
[47] C. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences* (Springer-Verlag, Berlin, 2004).
[48] C. Marquet, G. Soyez and B.-W. Xiao, Phys. Lett. **B639**, 635 (2006), [hep-ph/0606233].
[49] C. Marquet, R. Peschanski and G. Soyez, Phys. Rev. **D73**, 114005 (2006), [hep-ph/0512186].
[50] G. Soyez, Phys. Rev. **D72**, 016007 (2005), [hep-ph/0504129].
[51] E. Iancu, J. T. de Santana Amaral, G. Soyez and D. N. Triantafyllopoulos, Nucl. Phys. **A786**, 131 (2007), [hep-ph/0611105].
[52] I. Balitsky, Phys. Rev. **D75**, 014001 (2007), [hep-ph/0609105].
[53] Y. V. Kovchegov and H. Weigert, Nucl. Phys. **A784**, 188 (2007), [hep-ph/0609090].
[54] Y. V. Kovchegov and H. Weigert, Nucl. Phys. **A789**, 260 (2007), [hep-ph/0612071].
[55] J. L. Albacete and Y. V. Kovchegov, Phys. Rev. **D75**, 125021 (2007), [arXiv:0704.0612 [hep-ph]].
[56] G. Beuf and R. Peschanski, Phys. Rev. **D75**, 114001 (2007), [hep-ph/0702131].
[57] D. N. Triantafyllopoulos, Nucl. Phys. **B648**, 293 (2003), [hep-ph/0209121].
[58] A. H. Mueller and A. I. Shoshi, Nucl. Phys. **B692**, 175 (2004), [hep-ph/0402193].
[59] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions* (Dover Publications, New York, 1964).
[60] A. Dumitru, E. Iancu, L. Portugal, G. Soyez and D. N. Triantafyllopoulos, JHEP **0708**, 062 (2007), [arXiv:0706.2540 [hep-ph]].

Article [III]

An alternative scaling solution for high-energy QCD saturation with running coupling

Guillaume Beuf*
Institut de physique théorique, CEA/Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette cedex, France
URA 2306, unité de recherche associée au CNRS

A new type of approximate scaling compatible with the Balitsky-Kovchegov equation with running coupling is found, which is different from the previously known running coupling geometric scaling. The corresponding asymptotic traveling wave solution is derived. Although featuring different scaling behaviors, the two solutions are complementary approximations of the same universal solution, and they become equivalent in the high energy limit. The new type of scaling is observed in the small-x DIS data.

I. INTRODUCTION

Due to intense soft gluon radiation, hadronic processes at high energy involves strong color fields which have a nonlinear evolution, with in particular saturation effects. The mixing between quantum and nonlinear effects makes this high energy behavior difficult to derive from the QCD Lagrangian. However, in the last decade, many progresses have been made, in particular for the case of dense-dilute collisions, such as deep inelastic scattering (DIS) or proton-nucleus collisions. Two dual formulations of the same renormalization group evolution with rapidity for such collisions have been built, *i.e.* Balitsky's hierarchy [1] and the JIMWLK equation [2–7]. These equations resum, at the leading logarithmic (LL) accuracy, the soft gluon emissions, taking into account nonlinear high-density effects at all orders for one of the two colliding particles. Neglecting correlations in the dense regime, those two formalisms reduce to the Balitsky-Kovchegov (BK) equation [1, 8, 9]. In fact, numerical simulations of the JIMWLK equation show no significant differences from solutions of the BK equation [10]. The BK equation gives the evolution with rapidity of the dipole-target amplitude, appearing in the dipole factorization of DIS, for example. The *geometric scaling* [11] property,

$$\sigma_{DIS}(Q^2, Y) \simeq \sigma\left(s_f\left(\log(Q^2/\Lambda^2_{QCD}), Y\right)\right) \tag{1}$$

$$\text{with} \quad s_f(L, Y) \equiv L - \bar{\alpha} v Y\,, \tag{2}$$

seen in the DIS data at high rapidity, can be explained by the scaling $N(L,Y) = N(s_f(L,Y))$ of the weighted Fourier transform [9] of the dipole-target amplitude, which is approximately verified by the generic solutions of the BK and of the Balitsky-JIMWLK equations [12]. We use the notation $\bar{\alpha} \equiv N_c\ \alpha_s/\pi$, and $L \equiv \log(\mathbf{k_t}^2/\Lambda^2_{QCD})$, $\mathbf{k_t}$ being the Fourier conjugate of the parent dipole size $\mathbf{r}$.

In the three last years, a lot of efforts have been devoted to the improvement of the saturation equations, in mainly two directions. First, the calculation of next-to-leading logarithmic (NLL) contributions has started [13–15], which are certainly required to achieve precision on the theory side. Moreover, at the LL accuracy, the QCD coupling remains fixed. Hence, the BK equation at LL accuracy is not expected to give good results over a wide energy range, due to the lack of asymptotic freedom. NLL contributions provides however indications about the best way to implement running coupling in the saturation equations [13, 14]. Running coupling effects significantly modifies the whole behavior of the solutions [12, 16–18], whereas NLL contributions to the kernel or to the nonlinear term become irrelevant at high enough energy [19].

Second, the study of the inclusion of Pomeron loops in the saturation equations, and of the fluctuation effects induced by them, has been very active. However, it has been recently realized that in the case of dense-dilute processes, running coupling effects reduce the fluctuation effects in the high energy limit [20, 21], and even kill them completely at phenomenologically relevant rapidities [20]. Therefore we won't discuss further those effects in the present paper.

For the case of inclusive DIS, one has to calculate the forward part of the dipole-target amplitude. Assuming impact parameter independance [9], or a factorized momentum-transfert dependence [22], the BK equation for the forward dipole-target amplitude writes

$$\partial_Y N(L,Y) = \bar{\alpha}\chi(-\partial_L) N(L,Y) - \bar{\alpha} N^2\,. \tag{3}$$

*Electronic address: guillaume.beuf@cea.fr

In the previous formula, $\chi(\gamma) \equiv 2\Psi(1) - \Psi(\gamma) - \Psi(1-\gamma)$ is the characteristic function of the BFKL kernel. Considering the parent dipole relative $\mathbf{k_t}^2$ as the relevant scale for the coupling, one obtains the forward BK equation with running coupling

$$\partial_Y N(L,Y) = \frac{1}{bL}\chi(-\partial_L)N(L,Y) - \frac{1}{bL}N^2\,, \tag{4}$$

where $b = (11N_c - 2N_f)/12N_c$.

Our main tool to study Eqs. (3,4) is the traveling wave method [23, 24], borrowed from nonlinear physics. The BK equation (3) shares indeed the same qualitative structure with the FKPP equation [25, 26], for which that method has been developped, with an instability of the vacuum, a diffusion term, and a nonlinear damping. Thanks to this, those two equations have both traveling wave solutions [18, 27], with the following property. For any initial condition with a steep enough tail (which is the case in QCD due to color transparency) the traveling wave solution will evolve to an universal asymptotic solution, loosing memory of the initial condition. This universality property constrains not only the limit of the solution, but also the behavior of the solution at the first two subleading orders. This whole universal behavior is known [28] for the BK equation with fixed coupling (3). In the running coupling case, similar universal asymptotic traveling wave solutions appears, although the convergence towards the asymptotic behavior is less spectacular. The solution has the approximate scaling property $N(L,Y) = N(s_g(L,Y))$ [12] with the variable

$$s_g(L,Y) \;=\; L - \sqrt{\frac{vY}{b}}\,, \tag{5}$$

for large L and $s_g \ll \sqrt{Y}$, which becomes exact in the large L and large Y limit. This corresponds to a *geometric-scaling* property with $\log Q_s^2 \sim \sqrt{Y}$, instead of $\log Q_s^2 \propto Y$ for the fixed coupling *geometric-scaling* (2). In the running coupling case, the universal asymptotic solution is known including the first subleading order [16, 18] only [1].

From the theory point of view, the BK equation with running coupling is the most efficient tool to derive analytically the dipole-target amplitude. However, numerical simulations [29, 30] of the BK equation with running coupling have pointed out that the scaling function is significantly steeper near the saturation scale in the running coupling case than in the fixed coupling case, whereas the running coupling solution from [16, 18] and the fixed coupling solution have similar shapes, with in particular the same coefficient $\gamma_c \simeq 0.62$ playing the role of an anomalous dimension. That fact seem to rise some doubts about the relevance of the previously known asymptotic solution of (4): either this solution is not the same one as in the simulations, either strong corrections have been missed. Moreover, the running coupling geometric scaling (5) has been shown compatible with DIS data [31], but not significantly better than the fixed coupling geometric scaling (2). The too narrow Q^2 range of the available low-x data can explain partly that observation, but maybe not completely, as fixed coupling and running coupling solutions differ significantly. The purpose of the present paper is then to reexamine the problem of finding analytical approximate solutions of the BK equation with running coupling (4), and understanding their validity range.

For sake of simplicity, let us give the main results of our study, whose complete derivation is rather technical and is given in the text. We perform a search for scaling variables compatible with the equation (4). As a main result we find that, contrary to the fixed coupling case (3), no exact scaling can be obtained, but only approximative ones. We find two different versions of asymptotic scaling valid in the vicinity of the saturation scale and above, including the previously known one (5) and a new one

$$s_n(L,Y) \;=\; \frac{L}{2} - \frac{vY}{2bL}\,, \tag{6}$$

for large L and $s_n \ll L$, which is not, rigorously speaking a *geometric-scaling* variable since it cannot be rewritten (by exponentiation) as $\mathbf{k_t}^2/Q_s^2(Y)$. In Eqs. (2,5,6), the index f stands for *fixed coupling*, the index g for *geometric* and the index n for *new*. The asymptotic traveling wave solution associated with the scaling variable (6) is derived using the traveling-wave method [23, 24]. It writes

$$N(L,Y) \;\propto\; e^{-\gamma_c \bar{s}_n + \mathcal{O}(\log L)} \left[\mathrm{Ai}\left(\xi_1 + \frac{\bar{s}_n}{(DL)^{1/3}}\right) + \dots\right] \tag{7}$$

$$\text{with} \quad \bar{s}_n \;=\; \frac{L}{2} - \frac{v_c Y}{2bL} - \frac{3\xi_1}{4}(DL)^{1/3}\,, \tag{8}$$

---

[1] However, some unpublished preliminary results concerning the second subleading order have been obtained by Stéphane Munier.

for large L and $1 \ll \bar{s}_n \ll \sqrt{L}$. The neglected terms ... are of order $\mathcal{O}(L^{-1/3})$ when $\bar{s}_n = \mathcal{O}\left(L^{1/3}\right)$. The parameters γ_c, v_c, and D are defined in the text (see Eqs. (44,45,A8)), and Ai is the Airy function. The two asymptotic traveling wave solutions, associated with the scaling variables s_g and s_n are two complementary approximations of the same exact solution. In particular, they both include the universal features of the exact solution, but differ significantly concerning some non universal features, such as the shape of the wave front near the saturation scale. Having two different approximate solutions allows a better control on the validity range of each, and can help to estimate a part of the errors.

The plan of our analysis is the following. In section II, a search for scaling variables compatible with the BK equation with running coupling (4) is performed. In section III, the asymptotic traveling wave solution (7,8) associated with the scaling variable (6) is derived using the traveling wave method [23, 24]. The approximate asymptotic traveling wave solutions associated with the scaling variables s_g (5) and s_n (6) are compared in section IV. The phenomenological relevance of the new type of scaling s_n is shown in section V. The last section contains the conclusion and an outlook.

II. SCALING VARIABLES FROM SATURATION WITH RUNNING COUPLING

A. Preliminaries: Scaling for a medium-dependent FKPP equation

The FKPP equation has been useful [27] to understand the scaling properties of the BK equation at fixed coupling. Therefore, before considering the BK equation with running coupling (4), let us study the following modified FKPP equation, mimicking running coupling effects

$$\partial_t F(x,t) = \frac{1}{x}\left[\partial_x^2 F(x,t) + F(x,t) - F^2(x,t)\right] , \tag{9}$$

where the operator $\partial_x^2 + \mathbb{I}$ plays the same role as the kernel $\chi(-\partial_L)$ in (4). Note that this equation might be interesting also as a mean field description of a reaction diffusion process in statistical physics when a particular medium implies a *time* dependence decreasing with the *distance* x.

F is a scaling solution associated with the scaling variable $s(x,t)$ if it writes

$$F(x,t) = F_s(s(x,t)) . \tag{10}$$

Inserting the condition (10) in (9), one gets

$$x(\partial_t s(x,t))F_s'(s) = (\partial_x^2 s(x,t))F_s'(s) + (\partial_x s(x,t))^2 F_s''(s) + F_s(s) - F_s^2(s) . \tag{11}$$

As $F_s(s) - F_s^2(s)$, $F_s'(s)$ and $F_s''(s)$ are scaling functions, *i.e.* depend only on s, the coefficients of these functions must be scaling functions, in such a way that $F(x,t) = F_s(s)$ remains really an exact scaling solution of (9). All in all, finding an exact scaling variable s associated with an exact scaling solution (10) of (9) is equivalent to solving the equations

$$x\partial_t s(x,t) = f_1(s) \tag{12}$$
$$\partial_x s(x,t) = f_2(s) , \tag{13}$$

f_1 and f_2 being some arbitrary functions of s.

In order to have a smooth scaling variable $s(x,t)$, one has also to impose that

$$\partial_t \partial_x s(x,t) = \partial_x \partial_t s(x,t) . \tag{14}$$

Eqs. (12,13) give

$$\partial_t \partial_x s(x,t) = \frac{1}{x}\, f_1(s)\, f_2'(s) \tag{15}$$
$$\partial_x \partial_t s(x,t) = \frac{1}{x}\, f_1'(s)\, f_2(s) - \frac{1}{x^2}\, f_1(s) . \tag{16}$$

One concludes that the inhomogeneous FKPP equation (9) has no nontrivial exact scaling solution.

Note that for the standard FKPP equation, the same approach would give the scaling conditions (12,13) without the x prefactor in (12). Hence, the two conditions would be compatible, and give the analog of the geometric scaling variable with $\log Q_s^2(Y) \propto Y$ and nothing else.

Large x approximate scaling solutions are interesting. For x large, one can drop the last term in (16) without assuming $f_1(s) \equiv 0$. Matching the $1/x$ terms in (15) and (16) gives

$$\frac{f_1'(s)}{f_1(s)} = \frac{f_2'(s)}{f_2(s)}\,, \tag{17}$$

then $f_1(s)$ and $f_2(s)$ are proportional, which allows us to write

$$x\ \partial_t s(x,t) \ = \ -\frac{v}{2} f_2(s) \quad \text{with } v \text{ any real number} \tag{18}$$

$$\partial_x s(x,t) \ = \ f_2(s)\,. \tag{19}$$

f_2 reflects the invariance of the Ansatz (10) under reparametrizations. One can choose a specific f_2 function without loss of generality. Choosing $f_2(s) \equiv 1$, one has

$$x\ \partial_t s(x,t) \ = \ -\frac{v}{2} \quad \text{with } v \text{ any real number} \tag{20}$$

$$\partial_x s(x,t) \ = \ 1\,. \tag{21}$$

As discussed before, the equation (9) has no exact scaling solutions. Then, the equations (20) and (21) cannot be solved simultaneously beyond a large x approximation.

Consider the following alternative

i) *An exact solution for* (21) *and an approximative one for* (20): One gets from (21) $s(x,t) = x - \phi(t)$, then

$$x\ \partial_t s(x,t) = -x\ \phi'(t) = -\phi'(t)\ \phi(t)\ \left(1 + \frac{s(x,t)}{\phi(t)}\right)\,. \tag{22}$$

Hence, the equation (20) is approximately verified if

$$\phi'(t)\ \phi(t)\ \left(1 + \frac{s(x,t)}{\phi(t)}\right) \simeq \frac{v}{2}\,. \tag{23}$$

That equation can be solved for $s \ll \phi(t)$, as

$$\phi(t) = \sqrt{v(t - t_0)}, \tag{24}$$

t_0 being an integration constant. Thus, we find the scaling

$$s(x,t) = x - \sqrt{v(t - t_0)}\,, \tag{25}$$

which is valid for x large and $s(x,t) \ll x$. The second condition means that $t - t_0 = \mathcal{O}(x^2)$, hence this scaling can be valid only if x and t are both large. This solution corresponds, in the case of the BK equation with running coupling, to the solution with a modified geometric scaling involving the square root of the rapidity, as proposed in [12, 16–18].

ii) *An exact solution for* (20) *and an approximative one for* (21): One gets from (20)

$$s(x,t) = \varphi(x) - \frac{vt}{2x}\,. \tag{26}$$

Then, the equation (21) rewrites

$$1 \simeq \varphi'(x) + \frac{vt}{2x^2} = \varphi'(x) + \frac{\varphi(x)}{x} - \frac{s(x,t)}{x}\,. \tag{27}$$

As previously, one finds an approximate solution for x large and $s(x,t) \ll x$, which is

$$\varphi(x) = \frac{x}{2} - \frac{vt_0}{2x}, \tag{28}$$

t_0 being an integration constant. Hence, for x large and $s(x,t) \ll x$ we have the approximate scaling variable

$$s(x,t) = \frac{x}{2} - \frac{v(t - t_0)}{2x}\,. \tag{29}$$

B. QCD case: the Balitsky-Kovchegov equation with running coupling

Let us now consider the BK equation with running coupling (4) with the same approach. In order to search for scaling solutions

$$N(L,Y) = N_s(s(L,Y))\,, \tag{30}$$

it is convenient to write the kernel of (4) as

$$\chi(-\partial_L) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}\, \chi^{(p)}(\gamma)\, (-\gamma - \partial_L)^p \quad \text{with} \quad \gamma \in]0,1[\,. \tag{31}$$

Thus, if $(-\gamma - \partial_L)s(L,Y)$ is a scaling function, then $(-\gamma - \partial_L)^p N_s(s(L,Y))$ is a scaling function, and then $\chi(-\partial_L)N_s(s(L,Y))$ is a scaling function too. Hence, the constraints

$$bL\partial_Y s(L,Y) \;=\; f_1(s) \tag{32}$$

$$\partial_L s(L,Y) \;=\; f_2(s) \tag{33}$$

are sufficient conditions to have a scaling solution $N_s(s(L,Y))$ of the equation (4), and they are likely to be necessary too. As the conditions (32) and (33) are similar to (12) and (13), the results found for the equation (9) apply for the Balitsky-Kovchegov equation (4).

We can thus give the following conclusions.

- On the contrary to the fixed coupling case, the BK equation with running coupling seems to have no exact scaling solutions. But in fact it is not really a problem, as the travelling wave method requires only a family of asymptotic scaling solutions. Moreover, an exact scaling would depend on the behavior of the coupling at transverse scales of the order of Λ_{QCD} or smaller. As the BK equation has been derived in perturbation theory, it should not give such non perturbative information. Thus, even if exact scaling solutions of (4) exist, beyond the large L approximation, they would be unphysical.

- The BK equation with running coupling (4) has solutions with large L scaling similar to to the solutions (25,29) of the modified FKPP equation (9). The region near the front, where $Y = \mathcal{O}(L^2)$, is compatible with two types of scaling behavior at large L, either the geometric scaling depending on the square root of the rapidity

$$s_g \;=\; L - \sqrt{\frac{v(Y-Y_0)}{b}}\,, \tag{34}$$

  as derived in [12, 16–18], or a new non-geometric scaling

$$s_n \;=\; \frac{L}{2} - \frac{v(Y-Y_0)}{2bL}\,. \tag{35}$$

In both cases, the parameter Y_0 reflects subasymptotic contributions. We will sometimes drop it in the following of the present theoretical study, but it is relevant for phenomenological studies of scaling [31, 32].

III. TRAVELING WAVE SOLUTION WITH THE NEW SCALING VARIABLE

In this section we apply the traveling wave method [23, 24] to derive the asymptotic solution of the BK equation with running coupling based on the scaling (35) at large L and $Y = \mathcal{O}(L^2)$. The most technical part of the calculation is given in the Appendix A. The calculation is similar to the ones done in [18], in particular for the running coupling solution based on the scaling (34). However, we use a slightly different presentation of the method, doing the calculation step by step, instead of taking an Ansatz. It is useful in order to clarify the validity range of the solution, and to understand the dynamics hidden in the Ansatz.

The first step is to rewrite the equation (4) in term of the scaling variable s_n. In order to find the solution with both the scaling and the subleading scaling violations, one has to keep a second variable. It is possible to keep the *effective time* t, following [16–18], except that now $t \equiv \bar{\alpha}(L)(Y-Y_0) = (Y-Y_0)/bL$. However, it seems more interesting to keep L. On the one hand, one can verify that, in that case, this choice will drive us to neglect less terms than the

choice of t, giving hope to obtain a more accurate solution. On the other hand, it allows us to have an easier control on the validity range of our result, as our first approximation is the validity of perturbation theory *i.e.* $bL \gg 1$. Note that for all positive L and $Y \geq Y_0$, $s_n(L,Y) \leq L/2$, and that $s_n = L/2$ corresponds to $Y = Y_0$. Finally, the equation (4) rewrites in terms of s_n and L

$$-\frac{v}{2}\,\partial_{s_n}\bar{N}(s_n,L) = \chi\left(-\left(1-\frac{s_n}{L}\right)\partial_{s_n} - \partial_L\right)\bar{N}(s_n,L) - \bar{N}^2(s_n,L) \tag{36}$$

where $\bar{N}(s_n(L,Y),L) \equiv N(L,Y)$.

In the traveling wave formalism for nonlinear equations, one distinguishes different phase-space regions depending on the dynamical mechanism at work. Let us examine two important such regions where it is possible to make analytical predictions on the form of the solution. These two regions are the "front interior" and the "leading edge", following the standard notations of Ref.[24].

A. "Front interior" of the traveling wave solution:

As discussed in section II, the scaling in s_n is valid only at large L. Let us first study the "front interior" of the solution, *i.e.* the region defined by $s_n = \mathcal{O}(1)$. The solution of (36) here admits a large L expansion in the front interior

$$\bar{N}(s_n,L) = \bar{N}_0(s_n) + \frac{1}{L}\,\bar{N}_1(s_n) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^2}\right). \tag{37}$$

Inserting (37) in equation (36), one finds that $\bar{N}_0(s_n)$ verifies

$$-\frac{v}{2}\,\partial_{s_n}\bar{N}_0(s_n) = \chi\left(-\partial_{s_n}\right)\bar{N}_0(s_n) - \bar{N}_0^2(s_n)\,. \tag{38}$$

This equation can be solved numerically for any relevant value of v. Nevertheless we will need later an analytic expression for the tail of $\bar{N}_0(s_n)$ in the dilute regime, *i.e.* the solution of

$$-\frac{v}{2}\,\partial_{s_n}\bar{N}_0(s_n) \simeq \chi\left(-\partial_{s_n}\right)\bar{N}_0(s_n)\,. \tag{39}$$

Factorizing the leading exponential decay (with some unknown parameter γ), one writes

$$\bar{N}_0(s_n) = e^{-\gamma s_n}\; f_{FI}(s_n)\,, \tag{40}$$

$f_{FI}(s_n)$ behaving as a power for s_n large. The equation (39) then becomes

$$\frac{\gamma\, v}{2}\; f_{FI}(s_n) - \frac{v}{2}\;\partial_s f_{FI}(s_n) = \chi(\gamma)\;f_{FI}(s_n) - \chi'(\gamma)\;\partial_{s_n} f_{FI}(s_n) + \sum_{p=2}^{\infty}\chi^{(p)}(\gamma)\frac{(-1)^p}{p!}\;\partial_{s_n}^p f_{FI}(s_n)\,. \tag{41}$$

One gets from (41) the dispersion relation

$$v = \frac{2\;\chi(\gamma)}{\gamma}\,. \tag{42}$$

Then, either γ is arbitrary and all the derivatives of f_{FI} have to vanish, either the first derivative is the only non-vanishing one, which gives

$$v = 2\;\chi'(\gamma) \tag{43}$$

and thus $\gamma = \gamma_c$, defined by

$$\chi(\gamma_c) = \gamma_c\;\chi'(\gamma_c)\,. \tag{44}$$

The velocity of the wave corresponding to γ_c is

$$v_c = \frac{2\;\chi(\gamma_c)}{\gamma_c}\,. \tag{45}$$

Hence, the solutions of the equation (39) are

$$\bar{N}_0(s_n) \;=\; A\; e^{-\gamma s_n} \qquad \text{with} \quad \gamma \neq \gamma_c \tag{46}$$

$$\text{or} \qquad \bar{N}_0(s_n) \;=\; A\; (s_n + B)\; e^{-\gamma_c s_n}\,, \tag{47}$$

with A positive and B real. The solutions (46) are valid large L solutions of (36) for $s_n \ll \sqrt{L}$. When $s_n = \mathcal{O}(\sqrt{L})$ the terms with f'_{FI} come at the same order as some term suppressed with s_n/L, and the dynamics is modified. The solutions (47) are the large L critical solutions of (36). They are valid for $s_n \ll L^{1/3}$. New dynamical effects occur for $\mathcal{O}(s_n) = \mathcal{O}(L^{1/3})$, when the term with f''_{FI} comes at the same order as a term suppressed with s_n/L. This region is called the "leading edge" [24] and will be studied in the next subsection.

Eqs.(46,47) give both valid solutions of the linear part of the BK equation with running coupling (4). However, if the initial condition is steep enough, the nonlinear damping term will select dynamically [23, 24] the critical solution (47), and then the contributions of the non-critical solutions (46) will not survive asymptotically. In that case, the resulting solution is called a *pulled front*. By contrast, *pushed fronts* are solutions in which the generic partial waves of the type (46) would survive, for exemple if the initial condition were not steep or if the phase velocity given by the dispersion relation would have no minimum.

Going back to the equations (36) and (37), one can in principle calculate $\bar{N}_1(s_n)$ and higher order terms recursively. But we will stop here in this work for two reasons. First, $\bar{N}_1(s_n)$ is not needed for the following calculations at the accuracy considered in this paper. Second, $\bar{N}_0(s_n)$ is free from NLL corrections (beyond the resummed corrections giving the running coupling considered here), whereas $\bar{N}_1(s_n)$ would depend on NLL contributions, $\bar{N}_2(s_n)$ on NNLL contributions, *etc.*

B. "Leading edge" of the traveling wave solution:

We study now the equation (36) when L and s_n are both large. We drop the nonlinear term, because s_n large corresponds to the tail of the front. Let us factorize the exponential decay of the solution as in (40), but for the whole solution

$$\bar{N}(s_n, L) = e^{-\gamma s_n}\; f_{LE}(s_n, L)\,. \tag{48}$$

Then, expanding the kernel around γ, the equation (36) becomes

$$\frac{v\gamma}{2}\; f_{LE}(s_n, L) - \frac{v}{2}\; \partial_{s_n} f_{LE}(s_n, L) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \chi^{(p)}(\gamma) \left[-\left(1 - \frac{s_n}{L}\right) \partial_{s_n} - \partial_L - \frac{\gamma s_n}{L} \right]^p f_{LE}(s_n, L)\,. \tag{49}$$

Hence for $s_n \ll L$, the cancelation of the leading term on each side gives again the dispersion relation (42), and it remains

$$-\frac{v}{2}\; \partial_{s_n} f_{LE}(s_n, L) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \chi^{(p)}(\gamma) \left[-\left(1 - \frac{s_n}{L}\right) \partial_{s_n} - \partial_L - \frac{\gamma s_n}{L} \right]^p f_{LE}(s_n, L)\,. \tag{50}$$

As we are interested by the solution selected by the front formation mechanism, which corresponds to (47), $\partial_{s_n} f_{LE}$ has to be non-zero. Then, for $f_{LE} \times s_n/L \ll \partial_{s_n} f_{LE}$, which corresponds *a priori* to $s_n \ll \sqrt{L}$, the leading terms in the equation (50) gives

$$-\frac{v}{2}\; \partial_{s_n} f_{LE}(s_n, L) = -\chi'(\gamma)\; \partial_{s_n} f_{LE}(s_n, L) \tag{51}$$

Hence, the relation (43) holds while $s_n \ll \sqrt{L}$, which fixes $\gamma = \gamma_c$ and $v = v_c \equiv 2\chi(\gamma_c)/\gamma_c$. Then, the equation (50) becomes

$$0 = \chi'(\gamma_c) \left[\frac{s_n}{L} \partial_{s_n} - \partial_L - \frac{\gamma_c s_n}{L} \right] f_{LE}(s_n, L) + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p!} \chi^{(p)}(\gamma_c) \left[-\left(1 - \frac{s_n}{L}\right) \partial_{s_n} - \partial_L - \frac{\gamma_c s_n}{L} \right]^p f_{LE}(s_n, L)\,. \tag{52}$$

For $s_n \ll \sqrt{L}$, the leading terms in (52) gives

$$\chi'(\gamma_c) \left[\partial_L + \frac{\gamma_c s_n}{L} \right] f_{LE}(s_n, L) = \frac{1}{2}\; \chi''(\gamma_c)\; \partial^2_{s_n} f_{LE}(s_n, L)\,. \tag{53}$$

Hence, non-trivial effects appears for $s_n = \mathcal{O}(L^{1/3})$, and f_{LE} is allowed to have an L-dependance constrained by

$$\partial_L \; f_{LE} \leq \mathcal{O}(L^{-2/3} \; f_{LE}) \, . \tag{54}$$

Thus, the leading term in f_{LE} can be factorized as a prefactor $\exp(-3\gamma_c \beta L^{1/3})$ times a scaling function depending only on $s_n/L^{1/3}$, where β is a constant which have to be determined. This prefactor amounts to give a subleading correction to the traveling-wave scaling. We are thus led to define a more accurate scaling variable

$$\bar{s}_n \equiv s_n + 3\beta L^{\frac{1}{3}} = \frac{L}{2} - \frac{v_c Y}{2bL} + 3\beta L^{\frac{1}{3}} \, . \tag{55}$$

The rather technical derivation of the leading edge solution is given in Appendix 1.

Finally, the universal asymptotic traveling wave solution of the BK equation with running coupling associated with the scaling (35) writes, for large L and $1 \ll \bar{s}_n \ll \sqrt{L}$

$$N(L,Y) \; \propto \; e^{-\gamma_c \bar{s}_n + \mathcal{O}(\log L)} \; \mathrm{Ai}\left(\xi_1 + \frac{\bar{s}_n}{(DL)^{1/3}}\right) \tag{56}$$

$$\text{with} \quad \bar{s}_n \; = \; \frac{L}{2} - \frac{v_c Y}{2bL} - \frac{3\xi_1}{4}(DL)^{1/3} \, . \tag{57}$$

IV. COMPARISON BETWEEN THE SCALING SOLUTIONS

Let us recall the known results concerning the scaling variable s_g (34). The beginning of the leading edge expansion of the traveling wave solution associated to s_g has been calculated in [16, 18], and writes, in our notations

$$N(L,Y) \; \propto \; e^{-\gamma_c \bar{s}_g + \mathcal{O}(\log Y)} \; \left[\mathrm{Ai}\left(\xi_1 + \frac{\bar{s}_g}{\left(D\sqrt{\frac{v_c \, Y}{b}} \right)^{1/3}} \right) + \dots \right] \tag{58}$$

$$\text{with} \quad \bar{s}_g \; = \; L - \sqrt{\frac{v_c \, Y}{b}} - \frac{3\xi_1}{4}\left(D\sqrt{\frac{v_c \, Y}{b}} \right)^{1/3} \, . \tag{59}$$

It is valid for large L and $1 \ll \bar{s}_g \ll Y^{1/4}$. The neglected terms $\dots$ are of order $\mathcal{O}(Y^{-1/6})$ when $\bar{s}_g = \mathcal{O}\left(Y^{1/6}\right)$.

This section is devoted to the comparison of that solution with the solution (7) derived in the previous section.

A. The saturation scale

The saturation scale is the typical scale at which occurs the transition between the dilute and the dense regime, *i.e.* between the linear and the nonlinear regime. As the transition is smooth, that definition for the saturation scale is ambiguous. For simplicity, we assume that the magnitude of the solution (56) is dominated by the exponential factor. It leads to define the logarithmic saturation scale $L_s(Y)$ by the implicit relation

$$s_1 \left(L_s(Y), Y \right) - \mathcal{O}(\log L) \equiv \zeta_{sat} \, , \tag{60}$$

with ζ_{sat} some parameter of order one. Then, the usual saturation scale $Q_s(Y)$ is defined by

$$L_s(Y) \equiv \log\left(\frac{Q_s^2(Y)}{\Lambda_{QCD}^2} \right) \, . \tag{61}$$

Equivalently, it is useful to consider the reciprocal function $Y_s(L)$ of $L_s(Y)$, *i.e.* the saturation rapidity at a given transverse scale. Using our result (6), one gets

$$Y_s(L) = \frac{2bL}{v_c}\left[\frac{L}{2} - \frac{3\xi_1}{4}(DL)^{\frac{1}{3}} + \mathcal{O}(\log L) - \zeta_{sat} \right] + Y_0 \, . \tag{62}$$

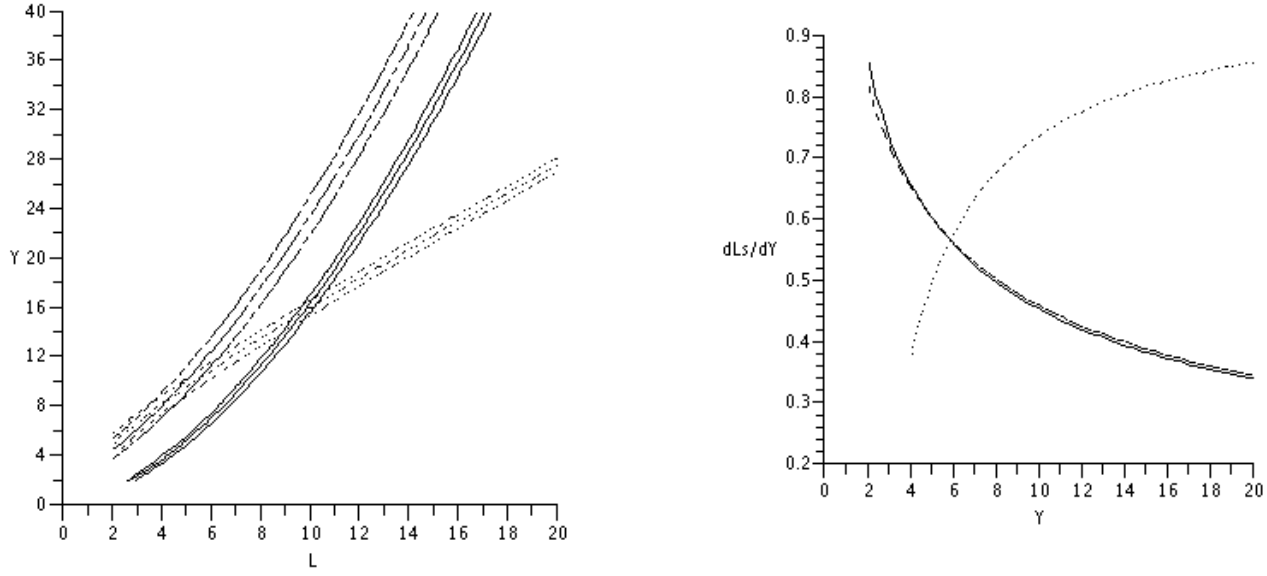

FIG. 1: *Saturation scale.* Solid lines: new running coupling scaling solution (62); Dashed lines: running coupling geometric scaling solution (64); Dotted lines: fixed coupling geometric scaling solution. *Left*: Saturation curve in the (L,Y) plane. For each scaling solution, the three curves corresponds (from the left to the right) to the values 0.5, 1 and 1.5 for the parameter ζ_{sat} (see equation (60)). *Right*: Derivative of the logarithmic saturation scale $\mathrm{d}L_s/\mathrm{d}Y$ (see equation (61)) as a function of the rapidity Y.

Note that the ζ_{sat} dependance, parametrizing the ambiguity in the definition of the saturation scale, is subleading compared to the universal terms, even the unknown one $\mathcal{O}(\log L)$. The subasymptotic Y_0 parameter is even less relevant. Then we just drop it in the following. Inverting approximately the expansion (62), one finds

$$L_s^2(Y) = \frac{v_c Y}{b} + \frac{3\xi_1}{2} D^{\frac{1}{3}} \left(\frac{v_c Y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{v_c Y}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\mathcal{O}(\log Y) + 2\zeta_{sat}\right] . \tag{63}$$

Finally, the square root of that expression gives

$$L_s(Y) = \sqrt{\frac{v_c Y}{b}} + \frac{3\xi_1}{4} \left(D\sqrt{\frac{v_c Y}{b}}\right)^{\frac{1}{3}} + \mathcal{O}(\log Y) + \zeta_{sat} \, , \tag{64}$$

which is exactly the expression for the logarithmic saturation scale given by the other running coupling solution (59), neglecting the Y_0. Hence, although the two approximate asymptotic solutions of the BK equation with running coupling are different, their prediction for the saturation scale agree asymptotically. It is a first evidence that those two approximate solutions are approximations of the same exact solution. They agree concerning the first subasymptotic correction to the saturation scale, and they would presumably agree for the second one, which is still unknown in both cases. Indeed, these first corrections are constrained by the universality property of the asymptotic traveling waves solutions. For that reason, the two approximate solutions allow both to extract the leading terms of the exact logarithmic saturation scale at running coupling.

The behavior of the saturation scale determined from the two running coupling scaling variables $\bar{s}_g$ and $\bar{s}_n$ and from the corresponding fixed coupling scaling variable are compared in FIG. 1. The saturation line and the derivative of $L_s(Y)$ (see equation (61)) are plotted using the expressions (64), (62), dropping the $\mathcal{O}(\log Y)$ or $\mathcal{O}(\log L)$ terms, and taking $Y_0 = 0$. For each solution, the saturation line is plotted for three different values of the parameter ζ_{sat}. As expected [12], at large Y the saturation line is parabolic for running coupling and linear for fixed coupling. The two running coupling solutions agrees concerning the shape, but not concerning the normalization of $L_s(Y)$. It comes

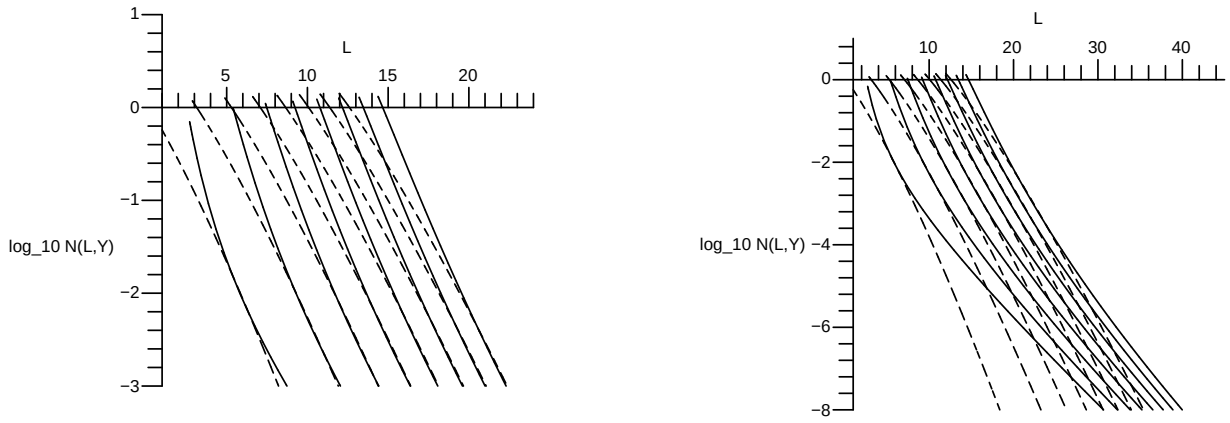

FIG. 2: $N(L,Y)$ as a function of L for the s_g solution (58) in dashed line, and for the s_n solution (56) in solid line. From the left to the right the different curves corresponds to $Y = 2$ to $Y = 30$ by step of 4. The vertical axis is in logarithmic (base 10) scale. The two plots just differ by the range they cover.

partly from the dropped terms, and partly from the ambiguity in the definition of the saturation scale. The parameter ζ_{sat} affects indeed more the the normalization of $L_s(Y)$ than its shape. The derivative of $L_s(Y)$ corresponds in the saturation models (*e.g.* [33] and many following models) to the parameter usually called λ. One remarks that the fixed coupling solution is not consistent with the fitted value $\lambda \simeq 0.3$, λ being stable in the rapidity range covered by HERA. By contrast, such low and stable value can be provided in the running coupling case, as noticed in [17], but seems to require a large rapidity shift Y_0, which may be considered as a signal of important NLL corrections. The shape of the saturation scale is indeed less sensitive than the additionnal Y_0 parameter to higher orders.

B. The shape of the front

To compare the solutions (58) and (56) further, let us now consider the shape of $N(L,Y)$ obtained in both cases. They are plotted on FIG. 2, down to the vicinity of the saturation scale, but not beyond, as we have explicit solutions only in the linear regime. The values chosen for the parameters are $A = 1$, $B = 4$ and $Y_0 = 0$. The left hand plot corresponds to a range more relevant for phenomenology, but the right hand plot is interesting concerning the mathematical meaning of these two approximate solutions. They are both derived with the traveling wave method, as the beginning of an expansion in the leading edge region. As the two solutions coincide over a part of the linear region, it is obvious that they correspond to *different expansions* of the *same* exact solution of (4), *i.e.* the exact pulled front solution selected dynamically. The range over which the two solutions agree is growing with Y and drifting towards the tail of N, as expected for the leading edge region. Hence, the two approximate solutions (58) and (56) are in agreement concerning all the features constrained by the universality property of the pulled front solutions, *i.e.* the evolution of the saturation scale and the shape of the front in the leading edge region. They give presumably an accurate description of these features, at least in the large L limit (at $\bar{s}_g$ or $\bar{s}_n$ fixed). However they differ concerning other features, such as the shape of the front around the saturation scale (*i.e.* in the front interior) or in the tail forward the leading edge. For exemple, asymptotic freedom effects are stronger for the s_n solution (56,57) than for the s_g solution (58,59), as the tail of the front evolves slower than the bulk in the former one. The left hand plot shows that near the saturation scale, the front given by the s_n solution is significantly steeper than the one given by the s_g solution. One can study the shape of the front more precisely by calculating an effective anomalous dimension

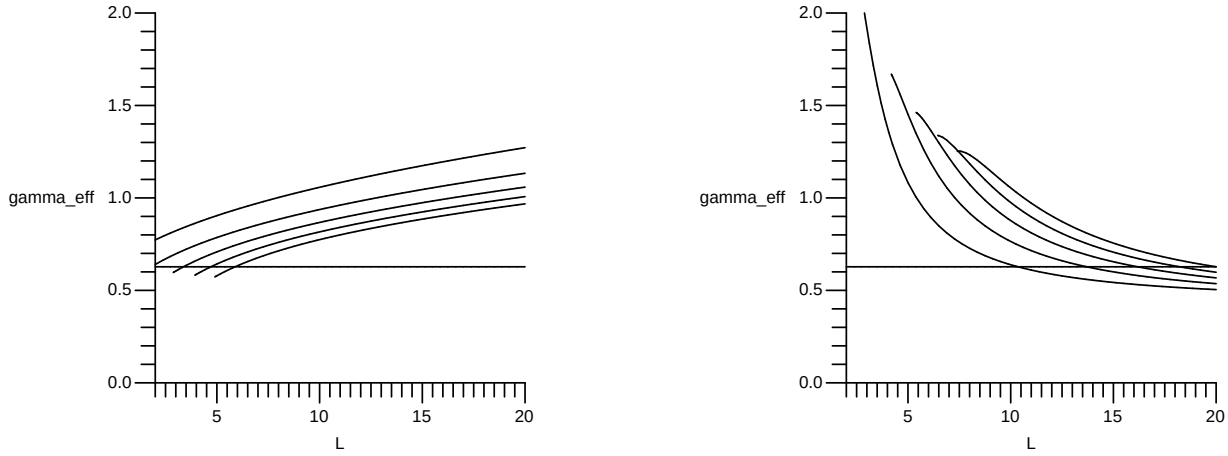

FIG. 3: Effective anomalous dimension $\gamma_{eff}(L,Y)$ (as defined by equation (65)) as a function of L, calculated for the solutions s_g solution (left panel) and s_n solution (right panel). From the left to the right the different curves corresponds in both cases to $Y = 2$ to $Y = 10$ by step of 2. The horizontal line stands for the value of the critical saturation exponent $\gamma_c \simeq 0.63$.

defined as

$$\gamma_{eff}(L,Y) \equiv -\partial_L \log N(L,Y)\,. \tag{65}$$

The behavior of $\gamma_{eff}(L,Y)$ for the two running coupling approximate solutions is compared on FIG. 3. They give very different results. Moreover, both differ from the naive expectation $\gamma_{eff}(L,Y) \simeq \gamma_c$. The factor containing the Airy fonction indeed contributes to the shape of the front in the leading edge, and the nontrivial structure of the scaling variable s_n gives also a contribution to $\gamma_{eff}(L,Y)$ even in the front interior. Therefore, the theoretical solutions (58) and (56) (and the fixed coupling one) involve the exponent γ_c, but it *does not* mean that the anomalous dimension of these theoretical solutions is indeed γ_c, especially at finite L and Y. For completeness, it is useful to recall the behavior of the universal travelling wave solution of the fixed coupling BK equation (3). This solution and the corresponding $\gamma_{eff}(L,Y)$ are plotted on FIG. 4. Its front has a shape very different from the one of the s_n solution, but rather similar to the one of the s_g solution.

These observations allow to address a puzzle raised by the numerical simulations of the BK equation with running coupling [29, 30]. It was noticed that numerical simulations leads to a wave front much steeper at running coupling than at fixed coupling, whereas one expect a similar wave front from the theoretical fixed coupling solution and s_g running coupling solution (58). We have shown that the latter is only an approximate solution of (4), and that (56) is another one, within a complementary approximation. Hence the exact pulled front solution of (4) lies probably between these two approximate solutions, and can then have a stronger $\gamma_{eff}(L,Y)$ than the fixed coupling solution in the front interior.

V. PHENOMENOLOGY

In this section, we discuss the phenomenological validity of the new scaling, using the results of Ref.[32]. The quality factor method [31] allows to test and quantify scaling behaviors of experimental data. For a given data set, the higher is the quality factor value, the better is the scaling behavior. This method is used in [32] to compare scaling behaviors at the cross section level. Indeed, geometric scaling at the cross section level comes from geometric scaling properties of the dipole-target amplitude through dipole factorization and the replacement $k_t^2 \mapsto Q^2$ in the scaling variable. Note that such property is only approximate for the new scaling variable s_n.

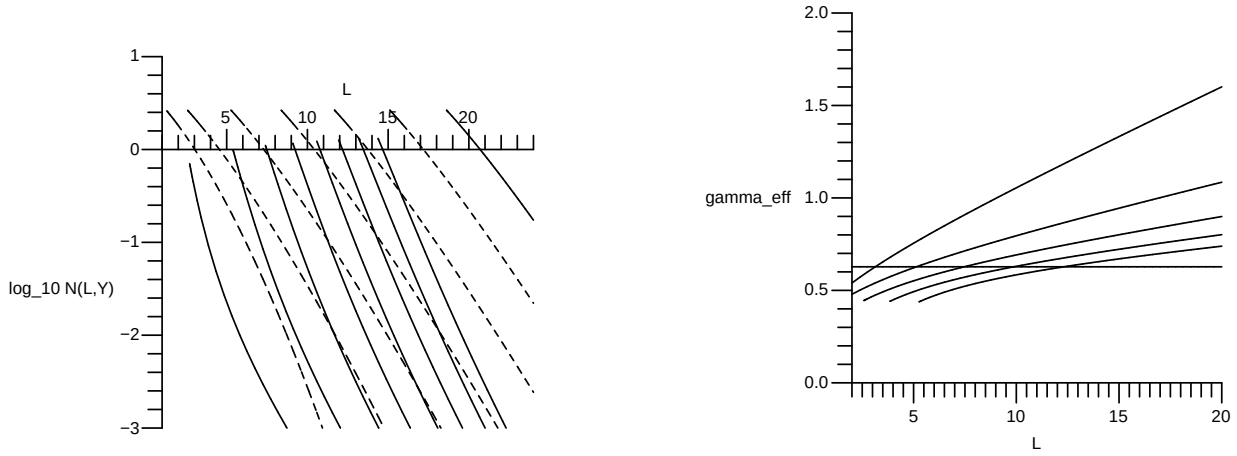

FIG. 4: *Left*: $N(L,Y)$ as a function of L for the fixed coupling solution [16, 18] in dashed line, and for the s_n solution (56) in solid line. From the left to the right the different curves corresponds to $Y = 2$ to $Y = 30$ (or $Y = 26$ for fixed coupling) by step of 4. The vertical axis is in logarithmic (base 10) scale. *Right*: Effective anomalous dimension $\gamma_{eff}(L,Y)$ (as defined by equation (65)) as a function of L, calculated for the fixed solution. From the left to the right the different curves corresponds in both cases to $Y = 2$ to $Y = 10$ by step of 2. The horizontal line stands for the value of the critical saturation exponent $\gamma_c \simeq 0.63$.

Starting from the theoretical scaling variables s_f (2), s_g (34) and s_n (35), we shall use the following versions at the cross section level

$$\tau_f \;=\; \log\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right) - \lambda\, Y\,, \tag{66}$$

$$\tau_g \;=\; \log\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right) - \lambda\, \sqrt{Y - Y_0}\,, \tag{67}$$

$$\text{and} \quad \tau_n \;=\; \log\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right) - \lambda\, \frac{Y - Y_0}{\log\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)}\,. \tag{68}$$

λ is taken as a free parameter in each case. The rapidity shift Y_0 is either fixed to zero or treated as a free parameter. Note that such shift cannot affect the quality of the scaling with the τ_f variable. The value of Λ has an influence on the scaling quality only in the τ_n scaling case. Λ is either fixed to $\Lambda_{QCD} = 0.2$ GeV, or treated as a free parameter.

Using the quality factor method on the inclusive DIS cross section data from H1, ZEUS, E665 and NMC experiments (see [32] for a complete discussion of data selection and references) in the range 3 GeV$< Q^2 < 150$ GeV and $x < 10^{-2}$, we have found the following results [32]. The optimal quality factor from one scaling variable to another, when λ is the only free parameter, do not differ more than 4%. The data thus scale equally well with the three variables. The results for the new variable are displayed in FIG.5. On the right-hand plot, the data shows a nice scaling property with τ_n, which is effectively as good as with τ_f [11, 31] or as with τ_g [31]. On the left-hand plot, one remarks a sharp peak in the quality factor, showing that the parameter λ is determined unambiguously. That peak is remarquably stable when the study is done on some subsets of the data, like H1+ZEUS data only, or H1 only, or ZEUS only. It illustrates the robustness of the quality factor fit in that case.

When introducing the other parameters Y_0 and Λ in the quality factor fit, we find that for the running coupling geometric scaling variable τ_g, the optimal value for Y_0 remains compatible with zero. By contrast, for the new scaling with τ_n, letting Λ and Y_0 free improves significantly the quality factor from $QF = 1.69$ to $QF = 1.82$ (in 10^{-3} units). The optimal values of the additional parameters are $Y_0 = -1.2$ and $\Lambda = 0.3$ GeV, which are moderate shifts. Hence,

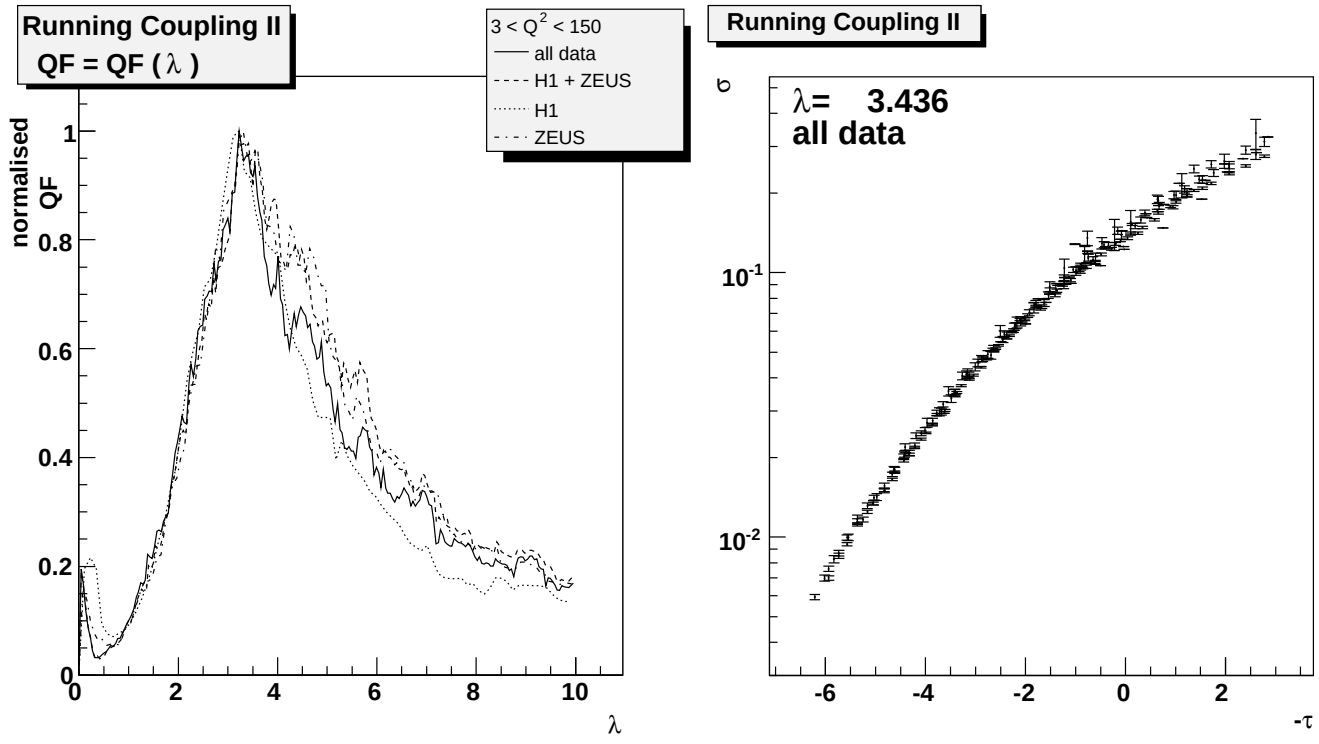

FIG. 5: Phenomenological results for the new running coupling scaling variable τ_n (68), with $Y_0 = 0$ and $\Lambda_{QCD} = 0.2$ GeV. *Left*: Normalized quality factor as a function of the parameter λ for different data sets. *Right*: Inclusive DIS cross section as a function of the scaling variable $\tau_n(Q^2, Y)$.

the prefered scaling behavior found in the inclusive DIS cross section data is obtained using the new scaling variable τ_n. This new scaling works as well for DVCS, vector meson production, and diffractive data [32].

VI. CONCLUSION AND OUTLOOK

We have shown that the Balitsky-Kovchegov equation with running coupling has no *exact* scaling solution, contrary to the fixed coupling case. However, that equation is compatible with two types of approximate scaling solutions, which we have analyzed. The first type of scaling behavior boils down to the running coupling geometric scaling (5), already known [12], while the second one (6) is new, and goes beyond the notion of geometric scaling.

Using the traveling wave method, we have derived the asymptotic traveling wave solution (7,8) associated with the new scaling variable (6). Both running coupling traveling wave solutions are shown to be compatible concerning the evolution of the saturation scale, and the shape of the leading edge of the pulled front, while they differ in the front interior. It means that the asymptotic traveling wave solutions associated with the two scaling variables are both approximations of a same exact solution. The asymptotic shape of the leading edge and the evolution of the saturation scale are universal features of the exact solution, and the traveling wave method allows to reach them, within both approximations, because both approximate scalings become exact asymptotically.

By contrast, other features such as the shape of the front closer to the saturation scale are more difficult to calculate within the traveling wave framework. One finds that the front is steeper (see FIG.2) for the new solution (7) than for the geometric scaling solution (58). As the two approximate solutions rely on similar but distinct approximations, one could estimate their uncertainty by their difference. The exact solution is presumably lying between the two approximate solutions. Hence, it should have a steeper front than the running coupling geometric scaling solution, and than the fixed coupling solution, as found in numerical simulations [29, 30].

In the fixed coupling (and mean field) case, the main geometric scaling violations are the universal ones resulting from the convergence towards the asymptotic behavior. In the running coupling case, the dipole target amplitude shows simultaneously the two scaling behaviors (5) and (6). As these two scalings are compatible only in a large L

and large Y limit, that property should bring violations of both scalings at nonasymptotic energies, in addition the universal scaling violations. Those stronger scaling violations at running coupling, and the fact that the new scaling is slightly favoured by the DIS data [32], explain why the running coupling geometric scaling is not significantly better than the fixed coupling geometric scaling at HERA energies.

The NLL and higher order terms are quantitatively important at HERA energies [17]. The phenomenological determination of the scaling parameters done in [32] and in section V may be useful to understand the nonasymptotic effects of those contributions.

Let us briefly discuss our various theoretical approximations. Following [20], we have neglected Pomeron loops effects, which seem irrelevant in dense-dilute collisions in the running coupling case. Our result (7,8) is free from NLL corrections. They appear indeed at the next order in the leading edge expansion (7) only. However, NLL and higher orders are phenomenologically important, as mentionned previously. Our choice for the running coupling scale differs from the best ones [13, 14], but this difference is only marginally relevant in numerical simulations [30]. The dipole or parton correlations present in the Balitsky-JIMWLK equations, and the off-diagonal momentum transfert dependance, do not appear in the linear part of the equation. Hence, the universality of the pulled front solutions guaranties that these correlations cannot modify our result (7,8). Note that the effect of all those approximations is obviously the same for the previous approximate solution (58,59).

As an outlook, it would be interesting, on the theoretical side, to explore the tail of the front. The two scaling behaviors are no more relevant when s_n (6) or s_g (5) are of order L, *i.e.* in the forward region of the front, where the initial condition still propagates. Hence, the crossover between the pulled front and the forward region seems more complex than in the fixed coupling case. It should be also important to calculate the next order of the leading edge expansion of the two running coupling solutions, including NLL effects. Moreover, the variable s_n may be useful to study the solutions of the (LL or NLL) BFKL equation with running coupling.

On the phenomenological side, a systematic study [32] of scaling properties of inclusive and exclusive DIS cross sections has been conducted simultaneously to the present paper. A further step would be to use our results to build a running coupling saturation model, in a similar way as the Iancu-Itakura-Munier model [34] for the fixed coupling case. Most available phenomenological models of saturation are built at fixed coupling. Although successful to describe HERA data, they may fail to give reasonable predictions for the LHC, due to the different evolution of the saturation scale. This justifies the need for a running coupling saturation model, *e.g.* based on the new scaling variable.

Acknowledgments

I would like to thank Robi Peschanski for useful remarks and the careful reading of the manuscript. I thank him, Christophe Royon and David Šálek for a fruitful collaboration.

APPENDIX A: DERIVATION OF THE LEADING-EDGE OF THE NEW ASYMPTOTIC SOLUTION

We finish in this appendix the calculation of section III, starting from Eq. (52)

$$0 = \chi'(\gamma_c)\left[\frac{s_n}{L}\partial_{s_n} - \partial_L - \frac{\gamma_c s_n}{L}\right] f_{LE}(s_n, L) + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p!}\chi^{(p)}(\gamma_c)\left[-\left(1-\frac{s_n}{L}\right)\partial_{s_n} - \partial_L - \frac{\gamma_c s_n}{L}\right]^p f_{LE}(s_n, L)\,. \tag{A1}$$

As discussed in section III, one can factorize f_{LE} as

$$f_{LE}(s_n, L) \simeq e^{-3\gamma_c \beta L^{1/3}} G(z)\,, \tag{A2}$$

z being

$$z \equiv \frac{\bar{s}_n}{L^{\frac{1}{3}}} = \frac{s_n}{L^{\frac{1}{3}}} + 3\beta\,, \tag{A3}$$

with the shifted scaling variable

$$\bar{s}_n \equiv s_n + 3\beta L^{\frac{1}{3}} = \frac{L}{2} - \frac{v_c(Y-Y_0)}{2bL} + 3\beta L^{\frac{1}{3}} \,.$$

Inserting (A2) in the equation (A1) written in z and L variables, *i.e.* doing the replacements

$$\begin{aligned} \partial_{s_n} &\to L^{-\frac{1}{3}}\, \partial_z \\ \partial_L &\to \partial_L - \frac{z-3\beta}{3L}\, \partial_z \,, \end{aligned}$$

one gets

$$\chi'(\gamma_c)\left[-\frac{4(z-3\beta)}{3L}\partial_z + \frac{\gamma_c(z-4\beta)}{L^{\frac{2}{3}}}\right] G(z) \simeq \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!}\chi^{(p)}(\gamma_c)\left[L^{-\frac{1}{3}}\partial_z - \frac{4(z-3\beta)}{3L}\partial_z + \frac{\gamma_c(z-4\beta)}{L^{\frac{2}{3}}}\right]^p G(z)\,. \quad \text{(A4)}$$

$G(z)$ is determined by the terms of order $L^{-2/3}$, for $z = \mathcal{O}(1)$. Hence we have

$$\chi'(\gamma_c)\ \gamma_c(z-4\beta)\ G(z) = \frac{1}{2}\ \chi''(\gamma_c)\ G''(z)\,. \quad \text{(A5)}$$

The following terms in (A4) are of order L^{-1}. The subleading term in f_{LE} is thus suppressed by a factor $L^{-1/3}$, compared to $G(z)$. A factor L^{δ} appears when calculating the subleading term in f_{LE}, in the same way as the factor $\exp(-3\gamma_c\beta L^{1/3})$ appears when calculating the leading term. Our choice is to single out an $L^{1/3}$ factor from this L^{δ}, and to write the remaining part as a $\mathcal{O}(\log L)$ correction to the scaling variable. Finally, f_{LE} writes

$$f_{LE}(s,L) = e^{-3\gamma_c\beta L^{1/3} + \mathcal{O}(\log L)}\ L^{1/3}\left[G(z) + L^{-\frac{1}{3}}H(z) + \mathcal{O}\left(L^{-\frac{2}{3}}\right)\right], \quad \text{(A6)}$$

for L large, and $z = \mathcal{O}(1)$. The function $H(z)$ would be determined at the next order, as the $\mathcal{O}(\log L)$ correction to the scaling variable.

Let us now calculate $G(z)$ and β from the equation (A5). Up to an affine change of the variable z, this equation can be mapped into the Airy equation. Hence $G(z)$ writes

$$G(z) = C_1\ \mathrm{Ai}\left(\frac{z-4\beta}{D^{\frac{1}{3}}}\right) + C_2\ \mathrm{Bi}\left(\frac{z-4\beta}{D^{\frac{1}{3}}}\right), \quad \text{(A7)}$$

where Ai and Bi are the Airy functions, C_1 and C_2 are two integration constants and D, playing the role of a diffusion coefficient, is defined by

$$D \equiv \frac{\chi''(\gamma_c)}{2\ \gamma_c\chi'(\gamma_c)} = \frac{\chi''(\gamma_c)}{2\ \chi(\gamma_c)}\,. \quad \text{(A8)}$$

Our calculations are valid only if $s_n \ll \sqrt{L}$. *A priori*, it allows $\bar{s}_n$ to be large compared to $(DL)^{1/3}$, and then z to be arbitrary large for $L \to \infty$. Thus, $G(z)$ has to be regular for $z \to \infty$, which gives $C_2 = 0$. The other boundary of the interval of validity of the solution (A6) is located at $z \simeq 0$, and corresponds to the transition to the saturation regime. For $1 \ll \bar{s}_n \ll L^{1/3}$, the solutions (A6) and (47) are both valid, and then we have to match them. We have determined that the scaling is modified by the leading edge dynamics from s_n to $\bar{s}_n$. And in the front interior, the difference between s_n and $\bar{s}_n$ is a subleading effect for the solution (47). Hence, we can match the leading edge solution

$$\bar{N}(s_n,L) = e^{-\gamma_c\bar{s}_n + \mathcal{O}(\log L)}\ L^{\frac{1}{3}}\left[C_1\ \mathrm{Ai}\left(\frac{\bar{s}_n}{(DL)^{\frac{1}{3}}} - \frac{4\beta}{(D)^{\frac{1}{3}}}\right) + L^{-\frac{1}{3}}H\left(\frac{s_1}{L^{\frac{1}{3}}}\right) + \dots\right] \quad \text{(A9)}$$

with the front interior solution with s_n replaced by $\bar{s}_n$

$$\bar{N}_0(\bar{s}_n) = A\ (\bar{s}_n + B)\ e^{-\gamma_c\bar{s}_n}\,. \quad \text{(A10)}$$

For $1 \ll \bar{s}_n \ll L^{1/3}$, (A9) can be expanded as

$$\bar{N}(s_n,L) = e^{-\gamma_c\bar{s}_n + \mathcal{O}(\log L)}\ L^{\frac{1}{3}}\left[C_1\ \mathrm{Ai}\left(-\frac{4\beta}{D^{\frac{1}{3}}}\right) + C_1\ \frac{\bar{s}_n}{(DL)^{\frac{1}{3}}}\ \mathrm{Ai}'\left(-\frac{4\beta}{(D)^{\frac{1}{3}}}\right) + L^{-\frac{1}{3}}H(0) + \dots\right]. \quad \text{(A11)}$$

Hence, one finds that $-4\beta/D^{1/3}$ has to be a zero of the Airy function Ai. Requiring that $\bar{N}(s_n, L)$ is positive for $z > 0$ selects the rightmost zero $\xi_1 \simeq -2.338$. Hence, one has

$$\beta = -\frac{1}{4}\ \xi_1\ D^{\frac{1}{3}}\,. \tag{A12}$$

The matching of the terms proportional to $\bar{s}_n$ gives

$$C_1 = \frac{D^{1/3}}{\mathrm{Ai}'(\xi_1)}\ A\,. \tag{A13}$$

The constant terms give then $H(0) = AB$. However, one can replace $\bar{s}_n$ by $\bar{s}_n + B$ in the argument of the Airy function Ai in (A9). It corresponds to a choice of the repartition of the higher order terms, very similar to the choice of the $L^{1/3}$ in front of the solution (A9). Using this prescription, one has $H(0) = 0$, and then the contribution of the higher orders is reduced, at least in the neighborhood of $z = 0$.

Finally, the universal asymptotic traveling wave solution of the BK equation with running coupling associated with the scaling (35) writes, for large L and $1 \ll \bar{s}_n \ll \sqrt{L}$

$$N(L,Y) \ = \ \frac{A}{\mathrm{Ai}'(\xi_1)}(DL)^{1/3}e^{-\gamma_c \bar{s}_n + \mathcal{O}(\log L)}\ \left[\mathrm{Ai}\left(\xi_1 + \frac{\bar{s}_n + B}{(DL)^{1/3}}\right) + L^{-1/3}H\left(\frac{\bar{s}_n}{L^{1/3}}\right) + \dots\right] \tag{A14}$$

$$\text{with} \quad \bar{s}_n \ = \ \frac{L}{2} - \frac{v_c(Y - Y_0)}{2bL} - \frac{3\xi_1}{4}(DL)^{1/3}\,. \tag{A15}$$

Note that we have not determined the parameters A and B. However, they are not completely free, and they should be constrained by matching the expression (47) with numerical, or analytical if possible, solution of the nonlinear equation (38) with $v = v_c$. Note also that the prefactor $(DL)^{1/3}$ is arbitrary, as it is part of the still unknown $\mathcal{O}(\log L)$ term in the exponent. We have written it just for convenience, in order to cancel in the large L limit the $(DL)^{1/3}$ denominator present in the Airy function. The same is true for the $Y^{1/6}$, or $t^{1/3}$, prefactor in the solution associated the variable s_g in [16, 18].

[1] I. Balitsky, Nucl. Phys. **B463**, 99 (1996), [hep-ph/9509348].
[2] J. Jalilian-Marian, A. Kovner, A. Leonidov and H. Weigert, Nucl. Phys. **B504**, 415 (1997), [hep-ph/9701284].
[3] J. Jalilian-Marian, A. Kovner, A. Leonidov and H. Weigert, Phys. Rev. **D59**, 014014 (1999), [hep-ph/9706377].
[4] J. Jalilian-Marian, A. Kovner and H. Weigert, Phys. Rev. **D59**, 014015 (1999), [hep-ph/9709432].
[5] E. Iancu, A. Leonidov and L. D. McLerran, Nucl. Phys. **A692**, 583 (2001), [hep-ph/0011241].
[6] E. Iancu, A. Leonidov and L. D. McLerran, Phys. Lett. **B510**, 133 (2001), [hep-ph/0102009].
[7] E. Ferreiro, E. Iancu, A. Leonidov and L. McLerran, Nucl. Phys. **A703**, 489 (2002), [hep-ph/0109115].
[8] Y. V. Kovchegov, Phys. Rev. **D60**, 034008 (1999), [hep-ph/9901281].
[9] Y. V. Kovchegov, Phys. Rev. **D61**, 074018 (2000), [hep-ph/9905214].
[10] K. Rummukainen and H. Weigert, Nucl. Phys. **A739**, 183 (2004), [hep-ph/0309306].
[11] A. M. Stasto, K. Golec-Biernat and J. Kwiecinski, Phys. Rev. Lett. **86**, 596 (2001), [hep-ph/0007192].
[12] E. Iancu, K. Itakura and L. McLerran, Nucl. Phys. **A708**, 327 (2002), [hep-ph/0203137].
[13] Y. V. Kovchegov and H. Weigert, Nucl. Phys. **A784**, 188 (2007), [hep-ph/0609090].
[14] I. Balitsky, Phys. Rev. **D75**, 014001 (2007), [hep-ph/0609105].
[15] I. Balitsky and G. A. Chirilli, Phys. Rev. D **77**, 014019 (2008), [arXiv:0710.4330 [hep-ph]].
[16] A. H. Mueller and D. N. Triantafyllopoulos, Nucl. Phys. **B640**, 331 (2002), [hep-ph/0205167].
[17] D. N. Triantafyllopoulos, Nucl. Phys. **B648**, 293 (2003), [hep-ph/0209121].
[18] S. Munier and R. Peschanski, Phys. Rev. **D69**, 034008 (2004), [hep-ph/0310357].
[19] G. Beuf and R. Peschanski, Phys. Rev. **D75**, 114001 (2007), [hep-ph/0702131].
[20] A. Dumitru, E. Iancu, L. Portugal, G. Soyez and D. N. Triantafyllopoulos, JHEP **08**, 062 (2007), [arXiv:0706.2540 [hep-ph]].
[21] G. Beuf,"Asymptotics of QCD traveling waves with fluctuations and running coupling arXiv:0708.3659 [hep-ph].
[22] C. Marquet and G. Soyez, Nucl. Phys. **A760**, 208 (2005), [hep-ph/0504080].
[23] M. Bramson, Mem. Am. Math. Soc. **44**, 285 (1983).
[24] U. Ebert and W. van Saarloos, Physica **D 146**, 1 (2000).
[25] R. A. Fisher, Ann. Eugenics **7**, 355 (1937).
[26] A. Kolmogorov, I. Petrovsky and N. Piskounov, Moscow University Bulletin of Mathematics **A 1**, 1 (1937).
[27] S. Munier and R. Peschanski, Phys. Rev. Lett. **91**, 232001 (2003), [hep-ph/0309177].

[28] S. Munier and R. Peschanski, Phys. Rev. **D70**, 077503 (2004), [hep-ph/0401215].
[29] J. L. Albacete, N. Armesto, J. G. Milhano, C. A. Salgado and U. A. Wiedemann, Phys. Rev. **D71**, 014003 (2005), [hep-ph/0408216].
[30] J. L. Albacete and Y. V. Kovchegov, Phys. Rev. **D75**, 125021 (2007), [arXiv:0704.0612 [hep-ph]].
[31] F. Gelis, R. Peschanski, G. Soyez and L. Schoeffel, Phys. Lett. **B647**, 376 (2007), [hep-ph/0610435].
[32] G. Beuf, R. Peschanski, C. Royon and D. Salek, "Systematic Analysis of Scaling Properties in Deep Inelastic Scattering," arXiv:0803.2186 [hep-ph]. The QF analysis and Fig.4 are extracted from this reference, see text .
[33] K. J. Golec-Biernat and M. Wusthoff, Phys. Rev. **D59**, 014017 (1999), [hep-ph/9807513].
[34] E. Iancu, K. Itakura and S. Munier, Phys. Lett. **B590**, 199 (2004), [hep-ph/0310338].

Article [IV]

Systematic Analysis of Scaling Properties in Deep Inelastic Scattering

Guillaume Beuf* and Robi Peschanski†
Institut de physique théorique, CEA/Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette cedex, France
URA 2306, unité de recherche associée au CNRS

Christophe Royon‡
IRFU/Service de Physique des Particules, CEA/Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette cedex, France

David Šálek§
Institute of Particle and Nuclear Physics, Charles University, Prague, Czech Republic

Using the "Quality Factor" (QF) method, we analyse the scaling properties of deep-inelastic processes at HERA and fixed target experiments for $x \leq 10^{-2}$. We look for scaling formulae of the form $\sigma^{\gamma^* p}(\tau)$, where $\tau(L = \log Q^2, Y)$ is a scaling variable suggested by the asymptotic properties of QCD evolution equations with rapidity Y. We consider four cases: "Fixed Coupling", corresponding to the original geometric scaling proposal and motivated by the asymptotic properties of the Balitsky-Kovchegov (BK) equation with *fixed* QCD coupling constant, two versions "Running Coupling I,II" of the scaling suggested by the BK equation with *running* coupling, and "Diffusive Scaling" suggested by the QCD evolution equation with Pomeron loops. The Quality Factors, quantifying the phenomenological validity of the candidate scaling variables, are fitted on the total and DVCS cross-section data from HERA and predictions are made for the elastic vector-meson and for the diffractive cross-sections at fixed small $x_{I\!P}$ or β. The first three scaling formulae have comparably good QF while the fourth one is disfavored. Adjusting initial conditions gives a significant improvement of the "Running Coupling II" scaling.

I. INTRODUCTION

Geometric scaling [1] is a remarkable empirical property verified by data on high energy deep inelastic scattering (DIS) *i.e.* virtual photon-proton cross-sections. It was realized that one can represent with reasonable accuracy the cross section $\sigma^{\gamma^* p}$ by the formula $\sigma^{\gamma^* p}(Y, Q) = \sigma^{\gamma^*}(\tau)$, where Q is the virtuality of the photon, Y the total rapidity in the γ^*-proton system and

$$\tau = \log Q^2 - \log Q_s^2(Y) = \log Q^2 - \lambda Y \ , \tag{1}$$

is the scaling variable. The value $\lambda \sim 0.3$ confirms the value found within the Golec-Biernat and Wüsthoff model [2] where geometric scaling was explicitely used for the parametrization.

The scaling using the variable τ defined in Formula (1) was intimately related to the concept of *saturation* [3], i.e. the behaviour of perturbative QCD amplitudes when the density of partons becomes high enough to exercise nonlinear effects ensuring the unitarity bound. Indeed, there were many theoretical arguments to infer that in a domain in Y and Q^2 where saturation effects set in, geometric scaling is expected to occur. Within this framework, the function $Q_s(Y)$ can be called the saturation scale, since it delineates the approximate lower bound of the saturation domain.

This type of geometric scaling is motivated by asymptotic properties of QCD evolution equations with rapidity. Using the nonlinear Balitsky-Kovchegov (BK) equation [4] which represents the "mean-field" approximation of high energy (or high density) QCD, geometric scaling could be derived from its asymptotic solutions [5]. This equation is supposed to capture some essential features of saturation effects. Considering the BK equation with *fixed* coupling constant leads asymptotically to the original geometric scaling of Formula (1). Considering a *running* coupling leads to the following scaling:

$$\tau = \log Q^2 - \log Q_s^2(Y) = \log Q^2 - \lambda \sqrt{Y} \ , \tag{2}$$

*Electronic address: guillaume.beuf@cea.fr
†Electronic address: robi.peschanski@cea.fr
‡Electronic address: christophe.royon@cea.fr
§Electronic address: salekd@mail.desy.de

Recently [6], it was noticed that the scaling solution (2) of the BK equation with running coupling is only approximate and not unique. Another equivalent approximation leads to a different scaling variable, namely

$$\tau = \log Q^2 - \lambda \, \frac{Y}{\log Q^2} \ . \tag{3}$$

The key ingredient to theoretically prove geometric scaling of the asymptotic solutions of the nonlinear BK equation is the *traveling wave* method [5]. Indeed, the BK equation admits solutions in the form of *traveling waves* $\mathcal{N}(L - v_c t)$. $L = \log Q^2$ has the interpretation of a space variable while t, interpreted as time, is an increasing function of rapidity Y, namely $t \propto Y$ for the fixed coupling case and $t \propto \sqrt{Y}$ for the running one. v_c is the *critical velocity* of the wave. These properties confirmed results previously obtained [7], for instance by replacing the nonlinear damping term by absorbing boundary conditions, and thus considering only the linear part of the BK equation, which is equivalent to the Balitsky Fadin Kuraev Lipatov (BFKL) equation [8].

The subsequent elaboration on QCD evolution equations led to go beyond the mean-field approximation. The effect of fluctuations was examined in Ref. [9] in the fixed coupling scheme and gives rise to a new "diffusive scaling", the scaling variable being

$$\tau = \frac{\log Q^2 - \lambda Y}{\sqrt{Y}} \ . \tag{4}$$

The aim of this paper from a theoretical point-of-view is to test and compare the different scaling behaviors, arising from different versions of QCD evolution, using the data available from HERA. We shall study the phenomenological relevance of the four kinds of scaling and refer to them in the following as "Fixed Coupling" for the variable (1), "Running Coupling I" and "Running Coupling II" for the variables (2) and (3) respectively, and to "Diffusive Scaling" for (4). Our method can be easily applied to any new proposal of scaling.

From an experimental point-of view, one wants to include not only the newest published data on $\sigma^{\gamma^* p}$ from HERA, but also from other processes where the small-x physics allow one to discuss scaling properties. We thus include the data on DVCS cross sections and, following the geometric scaling analysis performed in Ref. [10], we extend the analysis to elastic vector-meson production and to diffractive cross-sections at fixed and small $x_{I\!P}$. Moreover, and as a new aspect of scaling analysis, we are led to also include diffractive cross-sections at fixed and small β, since scaling should also be considered for the $\gamma^* Pomeron$ cross section, following the Ingelman-Schlein interpretation of diffractive structure functions [11].

In order to define how good the scalings are, the authors of Ref. [12] introduce a *Quality Factor* (QF) as an estimator on the validity of scaling. The main property of the QFs is that it does not depend *a priori* on a given parametrization of the scaling curve as in an ordinary χ^2 approach. The aim of this paper is thus to extend on the same footing the QF studies to all scaling laws, including the new scaling Running Coupling II, and to compare them. We perform a systematic analysis using the QF techique investigating the scaling properties in deep-inelastic scattering using all data available. It will include both the largest available set of published data where scaling is expected to occur and the new status on theoretical scaling properties using QCD evolution equations.

The plan of the paper is as follows. In section **II** we describe the theoretical motivation and the give the precise formulation of the various scaling hypotheses. In section **III** we present the Quality Factor method we shall use in the analysis and the set of data we consider for the fitting procedure. We provide and comment our results in section **IV**, and present our conclusions in the final section **V**.

II. SCALING VARIABLES

Let us sketch the theoretical motivation for the different forms of scaling (1-4) in deep-inelastic scattering and their extension to DVCS cross-section data, elastic vector-meson and for diffractive cross-sections at fixed and small $x_{I\!P}$ or β. We shall focus on the general arguments leading to scaling which could be independent from too specific theoretical predictions. The different types of scaling we refer to originate from properties of nonlinear QCD evolution equations, and the existence of asymptotic traveling wave solutions. We shall first introduce the general hint for these traveling wave solutions in the four cases and subsequently study the effect of varying the initial values of the phase space variables Y and L. This amounts to introduce some natural non asymptotic effects.

For the three first cases (1, 2, 3), let us start with a "mean-field" equation for the dipole-target amplitude of the type

$$\partial_Y \mathcal{N}(L,Y) = \bar{\alpha}\,\chi(-\partial_L)\,\mathcal{N}(L,Y) - \bar{\alpha}\,\mathcal{N}^2(L,Y), \tag{5}$$

where $L=\log(k^2/k_0^2)$, k is the gluon transverse momentum (Fourier conjugate to the dipole size), k_0 is an arbitrary constant and Y is the rapidity. In Eq. (5), the coupling constant will be considered in the following as fixed, or running such that $\bar{\alpha}(L)=1/bL$, $b=11N_c-2N_f/12N_c$ where N_f and N_C are the numbers of flavours and colours respectively. As we will show, for the sake of a general derivation of scaling, the differential operator kernel $\chi(-\partial_L)$ can be considered to be general, provided the function $\chi(\gamma)/\gamma$ admits a minimum value at some point γ_c. Indeed, the kernel at the leading logarithm (LL) accuracy of the perturbative QCD expansion, the BFKL kernel [8] $\chi(\gamma)=2\psi(1)-\psi(\gamma)-\psi(1-\gamma)$ verifies this property but large corrections at next-to-leading logarithm (NLL) accuracy exist (see, for the initial references, *e.g.* [13–16]). We will thus consider a general argument, instead of using a specific form of the QCD kernel.

Let us first consider the "Fixed Coupling" scheme $\bar{\alpha}=cst$. The solution to the linear part of equation (5) corresponds to a linear superposition of waves:

$$\mathcal{N}(L,Y) = \int_{\mathcal{C}} \frac{d\gamma}{2i\pi}\,\mathcal{N}_0(\gamma)\,\exp\left\{-\gamma\left(L-\frac{\omega(\gamma)}{\gamma}Y\right)\right\}\ , \tag{6}$$

where $\omega(\gamma)=\bar{\alpha}\chi(\gamma)$ is the Mellin transform of the kernel. In particular, one can interpret (6) by stipulating that each partial wave of wave-number γ has a velocity $v(\gamma)=\frac{\omega(\gamma)}{\gamma}$. By contrast, the *critical velocity* is defined [5, 17] by the minimum γ_c of the exponential phase factor $v=\left.\frac{d\omega}{d\gamma}\right|_{\gamma_c}=\frac{\omega(\gamma_c)}{\gamma_c}\equiv v_c$. v_c is thus the *minimal* velocity of the waves. So, the balance between the initial velocity (for fast enough initial condition with $\gamma_0>\gamma_c$, see [5]) and the damping due to the nonlinear term in Eq (5) leads to an asymptotic *blocking* of the velocity (and of the wave front) on the minimal and critical value v_c. As a consequence, reporting this dominant value in formula (6), one finds

$$\mathcal{N}(L,Y) \sim \exp\left\{-\gamma_c\left(L-\frac{\omega(\gamma_c)}{\gamma_c}Y\right)\right\}\ , \tag{7}$$

which is the expression of scaling with the variable (1).

For the running coupling case of Eq. 5, the situation is more subtle, since different approximate traveling wave solutions may coexist. In the original derivation of Ref. [5], one starts with the linear solution analogue to Eq. (6), namely

$$\mathcal{N}(L,Y) = \int \frac{d\gamma}{2i\pi}\mathcal{N}_0(\gamma)\exp\left\{-\gamma\left(L-\sqrt{Y}\sqrt{\frac{4X(\gamma)}{b\gamma}}\right)\right\}\ , \tag{8}$$

where $X(\gamma)(\equiv\int^\gamma d\gamma'\,\chi(\gamma'))$ plays the role of the new effective kernel. The key point is that the equivalent of the *time* variable is now $\sqrt{Y}$ instead of Y. This $\sqrt{Y}$ comes from a saddle-point integration over ω, the conjugate variable to the rapidity [15]. Consequently, after the same "blocking" mechanism due to the nonlinear damping terms, the scaling variable is $\tau(L,Y)=\log Q^2-\lambda\sqrt{Y}$, which is nothing else than the "Running Coupling I" case, see Eq. (2). However, the scaling inferred by Eq. (8) is neither an exact nor unique approximate scaling solution.

As an alternative to that Mellin transform method, it was proposed recently in Ref. [6] to search directly for the running coupling analog of partial wave solutions, *i.e.* scaling solutions of Eq. (5) with running coupling $\bar{\alpha}(L)=1/bL$, with some generic velocity v. Imposing the scaling of the left hand and right hand side of the equation as a function of the scaling variable $\tau(L,Y)$ leads to two different constraints, namely the functions $bL\partial_Y\mathcal{N}[\tau(L,Y)]$ and $\partial_L^n\mathcal{N}[\tau(L,Y)]$ should be both functions of τ only

$$bL\partial_Y\mathcal{N}[\tau(L,Y)] \;=\; f(\tau) \tag{9}$$

$$\partial_L^n\mathcal{N}[\tau(L,Y)] \;=\; g(\tau) \tag{10}$$

which are conditions to have a scaling solution $\mathcal{N}(L,Y) \equiv \mathcal{N}[\tau(L,Y)]$. In fact conditions (9) and (10) cannot be fulfiled simultaneously (contrary to the 'Fixed Coupling" case, see [6]) and can only be considered in an approximate way. If one choses to fulfil condition (10) exactly, and (9) only approximately, one finds again the scaling variable $\tau(L,Y) = \log Q^2 - \lambda\sqrt{Y}$, which is the "Running Coupling I" case, see Eq. (2). By this way one recovers the scaling variable previously found in Refs. [5, 7] in a different way. If, conversely, one chooses to satisfy exactly (9) and only approximately (10), one finds a new form of scaling, with the variable $\tau(L,Y) = L - \lambda\frac{Y}{L}$, which corresponds to the "Running Coupling II" case, see Eq.(3). As the "blocking" mechanism is more general than the approximations leading to the variables "Running Coupling I" or "Running Coupling II", one expects that Eq. (5) with running coupling has no exact scaling solution, but admits at least two different approximate solutions, namely "Running coupling I" and "Running coupling II". One aim of our study is to make a phenomenological comparison between both solutions.

For the case of diffusive scaling, one considers the modification of Eq. (5) due to Pomeron-loop contributions, which appear when the system of QCD partons or dipoles is dilute. It may seem irrelevant to an equation describing the high density partonic effects on the amplitude, but the structure of the equation, with an exponential increase of the linear regime may lead to important modifications [1] w.r.t. the mean-field solutions of (5). Indeed, it was shown that, while traveling-wave solutions of the type (7) are formed, the effect of event-by-event fluctuations leads to a stochastic superposition of these waves around an average solution which is governed by some diffusion coefficient and thus to a different scaling variable $\tau(L,Y) = \frac{\log Q^2 - \lambda Y}{\sqrt{Y}}$ which corresponds to the "Diffusive Scaling" case, see Eq.(4).

The following comments are in order. One would like to confront the QCD predictions on the scaling form of the amplitude (*i.e.* the wave front) with data. However, the precise determination of the wave front seems at present to be less reliable than the scaling variable (*i.e.* the wave structure). The form of the linear kernel and of the non linear damping at next-to-leading logarithmic order have just been derived [19]. However, in the kinematical range where scaling is observed, higher order contributions may be relevant, leading to a modified kernel in Eq. (5). Hence we will stick to a rather general and model independent (for each case) prediction for the scaling variable. The phenomenological analysis may on contrary help the development of the theoretical investigation.

Another important comment concerns the non-asymptotic corrections. While some of them can be deduced from the *blocking* mechanism itself (see *e.g.* [5]) we shall consider the simplest and expected nonasymptotic corrections due to the definition of the typical momentum and rapidity scales Λ and Y_0. Hence we will consider, if necessary the modification of all scaling variables (1-4), by a shift $L \to L - \log\Lambda^2$ and $Y - Y_0$. Note that the reference value (without shift) is always $Y_0 = 0$.

Let us now consider diffractive, elastic vector-meson and DVCS cross-sections. As discussed in Ref. [10], geometric scaling was shown to be valid and the "Fixed Coupling" was verified within uncertainties for these reactions, using $x_{I\!P}$ instead of the Bjorken x in the scaling variable (1).

In our phenomenological discussion, we shall thus extend the scaling properties to all four cases including the one studied in [10], by considering the various scaling variables (1-4).

We shall thus investigate the following scaling properties. The scaling prediction is

$$\sigma_{DVCS}^{\gamma^* p \to \gamma p}(x,Q^2) = \sigma_{DVCS}^{\gamma^* p \to \gamma p}(\tau[x,Q^2]) \tag{11}$$

for the DVCS cross-section,

$$\sigma_{VM}^{\gamma^* p \to V p}(x_{I\!P},Q^2,M_V^2) = \sigma_{VM}^{\gamma^* p \to V p}(\tau_V[x_{I\!P},Q^2+M_V^2])) \tag{12}$$

for the elastic vector meson cross sections, where the hard scale is assumed to be $Q^2 + M_V^2$, from the known properties of the vector meson wave function, and

$$\frac{d\sigma_{diff}^{\gamma^* p \to X p}}{d\beta}(\beta, x_{I\!P}, Q^2) = \frac{d\sigma_{diff}^{\gamma^* p \to X p}}{d\beta}(\beta, \tau_d[x_{I\!P}, Q^2]) \tag{13}$$

for the diffractive cross-section at fixed β and small $x_{I\!P}$.

For completion, besides the cases studied in [10], we may also consider the diffractive cross section at fixed $x_{I\!P}$ and small β, namely

$$\frac{d\sigma_{diff}^{\gamma^* p \to X p}}{d\beta}(\beta, x_{I\!P}, Q^2) = \frac{d\sigma_{diff}^{\gamma^* p \to X p}}{d\beta}(x_{I\!P}, \tau_b[\beta, Q^2]) \ , \tag{14}$$

---

[1] Recent results on a toy model with running coupling and fluctuations [18] seem not to give diffusive scaling. A more complete QCD study is still missing.

	scaling	τ formula	parameters
FC	"Fixed Coupling"	$\log Q^2 - \lambda Y$	λ
RCI	"Running Coupling I"	$\log Q^2 - \lambda\sqrt{Y}$	λ
RCIb	"Running Coupling Ibis"	$\log Q^2 - \lambda\sqrt{Y-Y_0}$	$\lambda,\ Y_0$
RCII	"Running Coupling II"	$\log(Q^2/\Lambda^2) - \lambda\frac{Y}{\log(Q^2/\Lambda^2)}$ Λ =0.2 GeV	λ
RCIIb	"Running Coupling IIbis"	$\log(Q^2/\Lambda^2) - \lambda\frac{Y-Y_0}{\log(Q^2/\Lambda^2)}$	$\lambda,\ Y_0,\ \Lambda$
DS	"Diffusive Scaling"	$\frac{\log(Q^2/\Lambda^2)-\lambda Y}{\sqrt{Y}}$ Λ =1 GeV	λ
DSb	"Diffusive Scaling bis"	$\frac{\log Q^2/\Lambda^2-\lambda(Y-Y_0)}{\sqrt{Y-Y_0}}$	$\lambda,\ Y_0,\ \Lambda$

TABLE I: Scaling variables used in the fits to deep inelastic scattering data.

since in the hypothesis of factorisation of the Pomeron flux, it relates to $\sigma^{\gamma^*\mathcal{P}\to X\mathcal{P}}(\beta, Q^2)$ (*i.e.* the total "Pomeron-photon" cross-section) at small β for which the scaling arguments should also hold.

The prediction for DVCS (see Eq. (11)) does not rely on any nonperturbative assumption. This interesting feature of DVCS cross-sections will allow us to include the data in the fitting procedure. Note that we will not use the diffractive data nor the vector meson ones for the fit. Instead, we will consider the fit to total and DVCS cross-sections as scaling predictions for diffractive and vector meson data.

Hence, in our phenomenological discussion, we shall extend the scaling properties to our four cases, by considering the various scaling variables (1-4) in the equations (11-14).

III. THE QUALITY FACTOR METHOD

In order to fit the parameters in the scaling variables (1-4), it is useful to use a quantity called *quality factor* [12] (QF). The quality factor is used to find the best parameters for a given scaling and to compare quantitatively the different scalings.

Given a set of data points $(Q^2, x, \sigma = \sigma(Q^2, x))$ and a parametric scaling variable $\tau = \tau(Q^2, Y = log(1/x); \lambda)$ we want to know whether the cross-section can be parametrised as a function of the variable τ only. Since we do not know the function of the τ variable describing the data, we need to define the QF independently of the form of that function. Therefore the QF is defined in such a way that it quantitatively describes how close the data points $\sigma = \sigma(Q^2, x)$ are to the scaling law $\sigma = \sigma(\tau)$, for a given $\tau = \tau(Q^2, Y; \lambda)$.

Let us consider a set of points (u_i, v_i), where u_i's are ordered, and introduce the QF as follows [12]

$$QF(\lambda) = \left[\sum_i \frac{(v_i - v_{i-1})^2}{(u_i - u_{i-1})^2 + \epsilon^2}\right]^{-1}, \tag{15}$$

where ϵ is a small constant that prevents the sum from being infinite in case of two points having the same value of u. Using this definition, the contribution to the sum in (15) is large when two successive points are close in u and far in v. Thus, we expect a set of points lying close to a unique curve to have large QF (small sum in (15)) compared to a QF of a set of points that are more scattered.

Since the cross-section in data differs by orders of magnitude and τ is more or less linear in $log(Q^2)$ (see 1-3), we decided to take $v_i = log(\sigma_i)$ and $u_i = \tau_i(\lambda)$. This ensures that the low Q^2 data points contribute to the QF with a similar weight as the higher Q^2 data points. To complete the definition of the QF, the set (u_i, v_i) is also rescaled so that $0 \leq u_i, v_i \leq 1$, and ordered in u before entering the QF formula. All the QFs in this paper are calculated with $\epsilon = 0.01$.

In order to test a scaling law τ, we search for the parameter λ that minimises the 1/QF variable. To do that, we fit 1/QF with the `MINUIT` package. Given the maximum value of the QF, we are able to directly compare different scaling laws. In this paper, we test the scaling laws (1-4). The different scaling variables are given in Table I.

Some comments are in order. We always define two versions of the scaling variables, the former depending only on a single parameter λ, and the later on two or three parameters $\lambda,\ Y_0,\ \Lambda$. As an example, we define in this way the "Running Coupling II" and "Running Coupling IIbis" in this way respectively. The "Fixed Coupling" scaling does

not depend on the scale Λ and the rapidity Y_0 since these additional variables disappear in the definition of the quality factor QF. The conclusion remains the same for the Λ dependence of the "Running Coupling I" scaling. Concerning the "Running Coupling II" scaling, we fixed the parameter Λ to a typical non perturbative scale inside the proton, $\Lambda = \Lambda_{QCD} = 0.2$ GeV.

The QF defined above raise two additional technical issues which require further checks. First, it does not take into account the errors on data points. The errors can be introduced to the QF in an error weight function by modifying the definition (15) in the following way

$$QF(\lambda) = \left[\sum_i \frac{(v_i - v_{i-1})^2 W_{i,i-1}}{(u_i - u_{i-1})^2 + \epsilon^2} \right]^{-1}, \tag{16}$$

where $W_{i,j}$ is the error weight function of the data points i, j. In the simplest form, we can take

$$W_{i,j} = \rho_i \rho_j, \tag{17}$$

where ρ_i is the relative statistical or uncorrelated error of point i. This definition allows to take into account the statistical scatter of the different data points. This is particularly important if the statistical uncertainty differs from one data point to the other, and is significantly large. The data points we use in the following (mainly the structure function F_2 from the H1 and ZEUS experiments) show very little statistical uncertainties. We compared the results using either formula (15) or formula (16), and as expected, we get similar values of the parameters for both definitions. For sake of simplicity, we choose the QF (15) without any error weight function.

The second possible shortcoming is an ambiguity of the QF related to the (u_i, v_i) point ordering if two or more u_i's are equal. The order of these points in the data set is not unique; any permutation of these points satisfy the definition above. Obviously, we get diffrent QF for different permutations. The comparison of the fit results with different data point ordering was performed and the results were found similar (both in the value of the fitted parameters and the QF itself).

IV. FITS TO F_2 AND DVCS DATA

The first natural data set to test the different scaling laws are the F_2 data measured at low x by the H1 [20], ZEUS [21], NMC [22] and E665 [23] experiments. These data are very precise and cover a wide range in x and Q^2.

We choose to consider all available data from H1, ZEUS, NMC and E665 experiments with Q^2 in the range $[1; 150]$ GeV^2 and $x < 0.01$. Fig. 1 displays the different kinematical domains reached by the H1, ZEUS, NMC and E665 experiments. While the H1 and ZEUS kinematic coverage is similar (with a tendency for H1 to reach lower x and Q^2 values), the data from NMC and E665 cover mostly the low Q^2, higher x kinematic domain of our sample. We choose not to consider the data with $x > 10^{-2}$ since they are dominated by the valence and sea quark densities, and the formalism of saturation does not apply in this kinematical region. In the same way, the upper Q^2 cut is introduced while the lower Q^2 cut ensures that we stay away from the soft QCD domain. We will show in the following that the data points with $Q^2 < 1$ GeV^2 spoil the fit stability. Two kinds of fits to the scaling laws are performed, either in the full mentioned Q^2 range, or in a tighter Q^2 range $[3; 150]$ GeV^2 to ensure that we are in the domain where perturbative QCD applies. We will study the Q^2-dependence of the fit parameters, as a possible indication of smooth scaling violations.

A. Fits to F_2 data with $Q^2 > 3$ GeV^2

We first give the results of the different scalings for the structure function F_2 with $Q^2 > 3$ GeV^2. Fig. 2-6 show the normalised QF dependence on the value of the fitted parameters and the scaling curves in the $Q^2 > 3$ GeV^2 range for the "Fixed Coupling", "Running Coupling I", "Running Coupling II", "Running Coupling II bis", and "Diffusive Scaling" respectively. To see the impact of the different data sets, we choose to divide the data points in H1 alone, ZEUS alone, H1+ZEUS, and all data. In the figures, we normalise the QF to 1. so that we are able to compare the values of the λ, Y_0 and Λ parameters for the different data sets. Table II give the fit parameters and absolute QF values — to distinguish the quality of the different scalings — for the various scaling laws (see Table I). On the different figures, we see that the λ parameter is well determined in the fit and the different data sets lead to values of λ which are quite close to one another. As an example, for fixed coupling, λ ranges between 0.33 to 0.38, for "Running

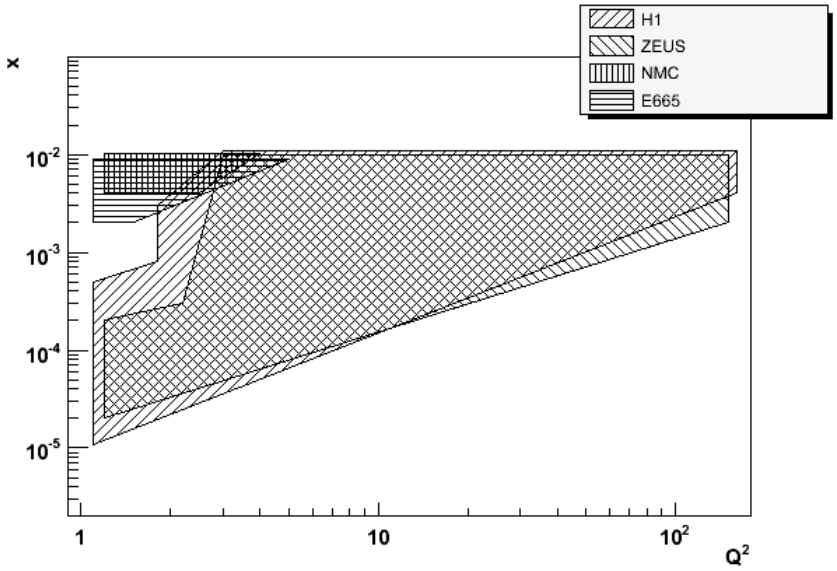

FIG. 1: Kinematical domain in x and Q^2 covered by the different data sets from H1, ZEUS, NMC and E665 used in this anlysis. Only the kinematical domain with $x < 10^{-2}$ and $1 < Q^2 < 150$ Gev^2 is shown.

Coupling I" between 1.74 and 1.84, for "Running Coupling II" between 3.23 and 3.44, and for "Diffusive Scaling" between 0.31 and 0.37. The scaling plots (always on the right of Fig.2, 3, 4, 5, and 6) show similar behaviour for the different scalings while it is clear that the scaling plot for diffusive scaling is slightly worse.

To improve the scaling quality, we checked the dependence of our results to additional parameters which can be introduced in the scaling. Introducing a shift in rapidity Y_0 or a scale Λ in the "Fixed Coupling" scaling does not change the results since these new parameters disappear in the definition of QF. This effect is the same if one introduces a Λ scale in the "Running Coupling I" scaling. Introducing a new parameter Y_0 to shift the rapidity in the "Running Coupling I" scaling does not lead to an improvement of the scaling. The fit leads to a value of Y_0 compatible with 0 for all data sets considered. The results are similar when one introduces the Y_0 parameter and the scale Λ in "Diffusive Scaling" and the parameters are found to be close to 0 and 1 after the fit. We notice that "Diffusive Scaling" including the additional parameters Y_0 and Λ admits also other solutions leading to better QF, but these solutions are either instable from one data set to another or lead to unphysical values of the parameters (large values of λ and large negative values of Y_0).

The QF plots in figure 5 show the dependence on one of the parameters while the remaining parameters are fixed

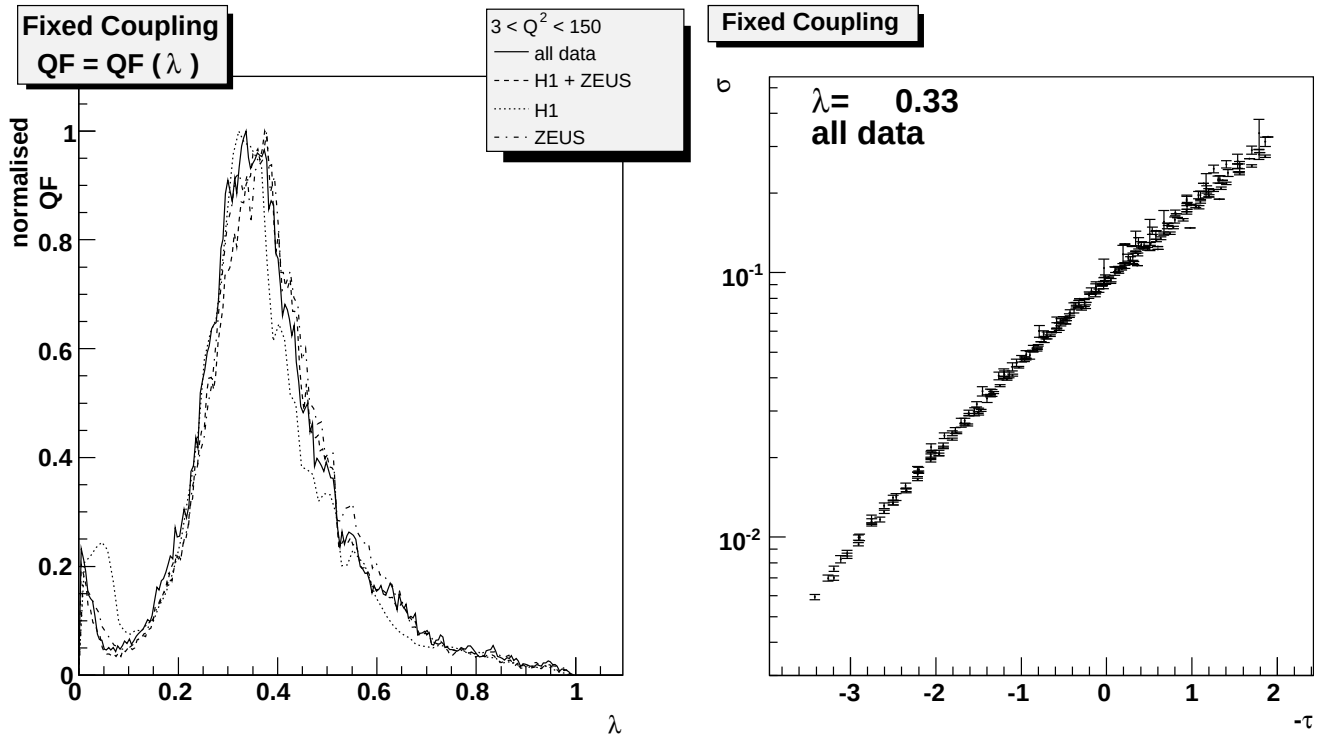

FIG. 2: F_2 **data:** Normalised QF to 1. as a function of λ and scaling curve with λ fixed to the value corresponding to the best QF for "Fixed Coupling". A $Q^2 > 3$ cut was applied to the data.

to the fitted values. It is important to notice that in the case of the "Running Coupling IIbis" version, it is difficult to find the absolute minimum since the $QF = QF(\lambda, Y_0, \Lambda)$ is not smooth and shows several minima. There is even a plateau of minimal values in λ, Y_0 parameters and we picked the parameter values leading to the smallest values of QF. This is why the "Running Coupling IIbis" scaling law shows larger spread concerning the parameter values (λ varies between 3.91 and 4.89). The typical values for the Y_0 (respectively Λ) parameters vary between -1.2 and -2.5 (respectively 0.2 and 0.35). The values of Λ are in a typical range of non-pertubative scale in the proton as expected.

We also notice in Table II that the best quality factor is obtained for "Running Coupling IIbis" for all data sets while the worst one is for the diffusive scaling. The comparison of the different QF is also shown in Fig. 9, left.

B. Fits to F_2 data with $Q^2 > 1$ GeV^2

Figure 7 shows the QF plots for different scalings in the Q^2 range $[1; 150]$ GeV^2. We notice that the spread on the parameter values is larger than after the cut on $Q^2 > 3$ GeV^2. The values of the parameters are given in Table II. We also notice a tendency to find lower values of λ for the "Fixed Coupling", "Running Coupling I" and "Running Coupling II" scalings when one introduced more low Q^2 data. The QF values are similar for the "Fixed Coupling", "Running Coupling I", and "Running Coupling IIbis" — with a tendency to be slightly better for "Running Coupling IIbis" — and is worse for diffusive scaling as before. The corresponding scaling curves are displayed in Fig. 8. They show similar behaviour with a tendency for "Diffusive Scaling" to show a larger spread of data. These figures also depict the $Q^2 < 1$ GeV^2 data points in grey, which were not used in the fit. These data points tend to show the same kind of scalings with a larger spread, and this is why they were not included in the fit.

Fig. 9, right, gives the $QF = QF(\lambda)$ curves for all data and different scaling laws in the Q^2 regions $[1; 150]$ GeV^2 (on Fig. 9 left in the $[3; 150]$ GeV^2 range) so that the different scalings can be compared easily. As we mentionned already, in both Q^2 ranges, the "Fixed Coupling", the "Running Coupling I", and the "Running Coupling II" are quite good, and the "Diffusive Scaling" is disfavoured. For $Q^2 > 3$ GeV^2, the "Running Coupling IIbis" scaling shows the best QF.

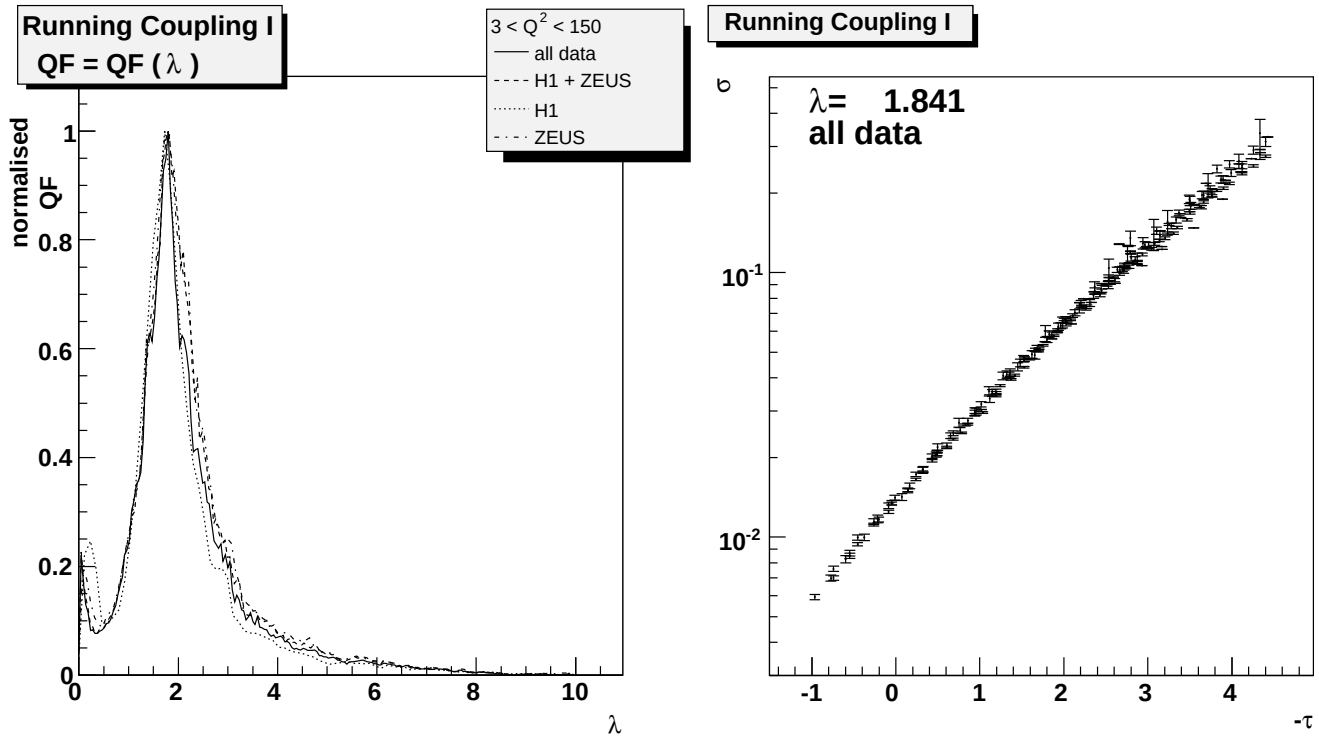

FIG. 3: F_2 **data:** Normalised QF to 1. as a function of λ and scaling curve with λ fixed to the value corresponding to the best QF for "Running Coupling I". A $Q^2 > 3$ cut was applied to the data.

C. Dependence of the fitted parameters on Q^2

To study the Q^2 dependence of the fitted parameters and to quantify the amplitude of scaling violations, the data points are divided into four separate Q^2 samples: $[1;3]$, $[3;10]$, $[10;35]$, and $[35;150]$ GeV^2. The number of points in each region is similar (see table III). The lower and upper bounds of 1 GeV^2 and 150 GeV^2 are chosen for the same reason as before. The Q^2 dependence of the parameter λ is depicted in figure 10, and the fitted parameters together with the QF values are shown in table III. There is a slight increase of the λ parameter in the case of "Fixed Coupling" while "Running Coupling I" is quite flat. This can be easily understood since "Running Coupling I" shows a natural Q^2 evolution. We notice a stronger increase in the case of "Running Coupling II", showing the breaking of this scaling as a function of Q^2. Since this scaling gives already the best QF, it would be worth to study the breaking of scaling and introduce it in the model to improve further the description of the data. The λ parameter decreases strongly (especially in the last Q^2 bin) for the diffusive scaling. The fact that λ depends strongly on Q^2 confirms the fact that this scaling leads to the worst description of the data.

D. Fits to DVCS data from H1 and ZEUS

After fitting all H1 and ZEUS F_2 data, it is worth studying whether the DVCS data measured by the same experiments [24] lead to the same results. The amount of data is smaller (34 points for H1 and ZEUS requiring $x \leq 0.01$ as for F_2 data) and the precision on the λ parameter will be weaker. The kinematic coverage of the DVCS data covers a smaller region in x and Q^2 as F_2: $4 < Q^2 < 25$ GeV^2 and $5 \cdot 10^{-4} < x < 5 \cdot 10^{-3}$. The results of the fits can be found in table IV and Fig.11 and 12. The scaling results are displayed only for "Fixed Coupling" and "Running Coupling IIbis" since all plots look similar. To facilitate the comparison between the results of the fits to F_2 and DVCS data, a star is put in Fig. 12 at the position of the λ value fitted to the H1+ZEUS F_2 data with Q^2 in the range $[3;150]$ GeV^2. We note that the DVCS data lead to similar λ values to the F_2 data, showing the consistency of the scalings. The values of the QF show a tendency to favour fixed coupling, but all different scalings (even "Diffusive Scaling") lead to reasonable values of QF.

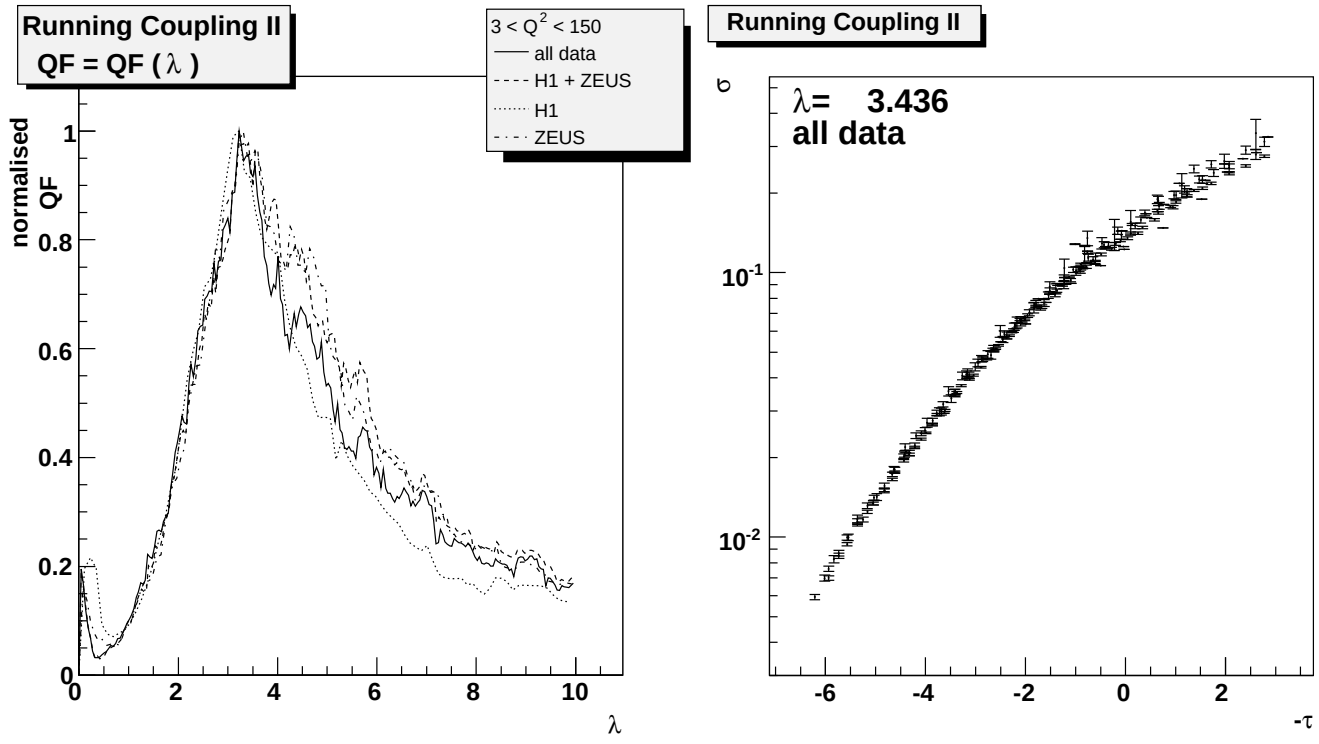

FIG. 4: F_2 **data:** Normalised QF to 1. as a function of λ and scaling curve with λ fixed to the value corresponding to the best QF for "Running Coupling II". A $Q^2 > 3$ cut was applied to the data.

V. IMPLICATIONS FOR DIFFRACTION AND VECTOR MESONS

In this section, we check if the scalings found in the previous section can also describe diffractive and vector meson data. Since these data are much less precise than the F_2 or DVCS data and depend more on non-perturbative inputs (meson wave function, diffractive parton distribution inputs...), we choose to impose the same values of parameters found in the previous section and check if the scaling is also observed using this value. A fit to the diffractive data leads to large uncertainties on the parameter values since the number of data points is quite small and their uncertainties large.

Let us first describe the diffractive data. We use the latest t-integrated diffractive cross section measurements from H1 and ZEUS experiment [25], derived from the diffractive processes $e + p \to e + X + Y$, where the proton stays either intact or turns into a low mass state Y. The diffractive cross section in terms of the t-integrated reduced cross section $\sigma_r^{D(3)}(x_{I\!P}, x, Q^2)$ reads

$$\frac{d^3\sigma^{ep\to eXY}}{dx_{I\!P}dxdQ^2} = \frac{4\pi^2\alpha_{em}}{xQ^4}\left(1 - y + \frac{y^2}{2}\right)\sigma_r^{D(3)}(x_{I\!P}, x, Q^2), \tag{18}$$

$$\sigma_r^{D(3)} = F_2^{D(3)} - \frac{y^2}{1+(1-y)^2}F_L^{D(3)}. \tag{19}$$

The latter equation can be simplified to $\sigma_r^{D(3)} = F_2^{D(3)}$, since it is a very good approximation anywhere but at large y. H1 large rapidity gap measurements are realised with $M_Y < 1.6$ GeV cut, whereas ZEUS measures with the $M_Y < 2.3$ GeV cut using the M_X-method. Both experiments do not measure exactly the same cross section. However, the difference is a known constant factor; the ZEUS data points can be converted to the same M_Y range as H1 by multiplying ZEUS values by factor of 0.85. In case of the $e + p \to e + X + p$ processes where the proton is tagged in Roman pot detectors (both H1 and ZEUS), the data points have to be multiplied by 1.23.

In order to test the geometrical scaling properties we plot the τ dependence of $\beta d\sigma_{diff}^{\gamma^* p\to Xp}/d\beta$, which can be

expressed in terms of diffractive structure function as follows

$$\beta \frac{d\sigma_{diff}^{\gamma^* p \to Xp}}{d\beta} = \frac{4\pi^2 \alpha_{em}}{Q^2} x_{I\!P} F_2^{D(3)}. \quad (20)$$

The definition of the τ variable is the same as in Table I replacing the variable x by $x_{I\!P}$, Q^2 remaining the same.

In figure 13, we show the H1 and ZEUS diffractive data for $\beta d\sigma_{diff}^{\gamma^* p \to Xp}/d\beta$ as a function of the fixed coupling scaling variable τ for six different fixed values of β: 0.04, 0.1, 0.2, 0.4, 0.65, and 0.90. Only the data points in the Q^2 region $[5; 90]$ GeV^2 and with $x_{I\!P} < 0.01$ are plotted. The restriction to the mentioned fixed values implies that the data set is dominated by H1 data. We just give in Fig. 13 the results for "Fixed Coupling" since the other scalings give similar results which are not distinguishable given the large uncertainties on F_2^D. The parameters fitted to the H1 and ZEUS F_2 data are used to make the prediction on F_2^D. Up to $\beta = 0.65$ (the first five bins), the data points lie on a unique curve and thus confirm the geometrical scaling prediction. The data points at the highest β values (low masses) are more sensitive to low mass resonances and are not expected to show a perfect scaling. The values of the QF are also given in Table V. In many bins, "Running Coupling IIbis" gives the best QF.

Following the Ingelman-Schlein model of the Pomeron, we also tested the scaling in β, Q^2 in the diffraction data. The definition of the τ variable is the same as in Table I replacing the variable x by β, Q^2 remaining the same. Figure 14 presents the H1 and ZEUS diffractive data in the same Q^2 region with $\beta < 0.5$ at five different fixed values of $x_{I\!P}$: 0.0003, 0.001, 0.003, 0.01, and 0.03. The restriction to these fixed values results in favouring the H1 LRG data. Similarly as in the previous case, the parameter values from the fit to H1 and ZEUS F_2 data are used. The scaling is definitely not as good as the one for a fixed β.

The fits to H1 and ZEUS F_2 data are also tested on vector meson data from both experiments [26]. Note the scale M_V^2 present in the scaling function in (12). The definition of the τ variable is the same as in Table I replacing the variable Q^2 by $Q^2 + M_V^2$ M_V^2 being the mass of the vector meson, x remaining the same. The QFs are given in table VI and scaling curves for "Fixed Coupling" are given in Fig. 15. We only show the results for "Fixed Coupling" since all scalings give similar results. We see that the scaling is indeed verified for ρ, J/Ψ, and ϕ and the data points show a tendency to be more dispersed for ϕ. Interestingly enough, "Diffusive Scaling" leads to the best QF.

VI. CONCLUSIONS

In this paper we analysed the scaling properties of deep inelastic observables such as the total cross section, DVCS, vector meson production, and the diffractive cross section, using all available low x data, *i.e.* from the H1 [20], ZEUS [21], NMC [22] and E665 [23] experiments. In order to be as model independant as possible, we used the quality factor method [12], allowing to test the validity of scaling variables without any assumption concerning the shape of the scaling function. Four scaling variables (1-4), motivated by various approximations of QCD high energy evolution, were considered, including the new "Running Coupling II" one derived in [6]. Different versions of those scalings were tested, setting the rapidity shift Y_0 to 0 and the reference scale Λ to either 0.2 GeV or to 1 GeV, or taking Λ and Y_0 as free parameters to be fitted.

We showed that the "Fixed Coupling", "Running Coupling I" and "Running Coupling II" scaling variables lead to a good scaling behavior of the total cross section from the F_2 data, with similar quality factors. The "Diffusive scaling" is disfavoured compared to them. More precisely, the "Running Coupling IIbis", with the free parameters Y_0 and Λ, gives the best scaling behavior in the range 3 GeV$^2 < Q^2 < 150$ GeV^2 and $x < 0.01$, with reasonnable values of Y_0 and Λ extracted from the fit of the quality factor. The "Fixed Coupling" scaling is less deteriorated than the "Running Coupling II" scaling when one adds the points with 1 GeV$^2 < Q^2 < 3$ GeV^2 to the fit, which corresponds to the boundary of the validity range of the *perturbative* scaling predictions. Dividing the data in four Q^2 bins, we also studied the Q^2 dependence of the optimal value for the λ parameter. "Running Coupling I" gives the most stable values and "Diffusive scaling" the less stable, and "Running Coupling II" gives stable values except at low Q^2.

The quality factors of the scaling variables were fitted independantly on the DVCS data, and give similar results as on the total cross section. In particular, for each scaling variable, the values of the parameter λ obtained from the fit in the two cases are very close.

We used the values of the parameters obtained from a fit to F_2 data to test the various scaling variables on the diffractive cross section and vector meson production data. For the former observable we tested both the fixed β scaling behavior in $x_{I\!P}$ and the fixed $x_{I\!P}$ scaling behavior in β. At fixed β, we found a scaling behavior up to $\beta = 0.65$. For most β bins the best results are given by "Running Coupling " scaling variables, and the "Diffusive scaling" is often disfavoured.

At fixed $x_{I\!P}$, the scaling behavior of the diffractive cross section as a function of β and Q^2 is far less obvious. This is not a surprise, as not enough data is available in the genuine small β region. A tendency of scaling is however

observed for the $x_{I\!P} = 0.03$ bin.

Concerning ρ, J/Ψ, and ϕ production, we found a reasonable scaling behavior for all tested scaling variables, with the hard scale $Q^2 + M_V^2$, borrowed from vector mesons wave function studies. Surprisingly, the best scaling is for all three vector mesons the "Diffusive scaling".

As a phenomenological outlook, it seems useful to work out models dipole amplitude wich could incorporate the successful scaling laws following the example of *e.g.* the Iancu Itakura Munier model [27]. The quality factor method is a good tool to detect the scaling properties of data, and can guide the formulation of models with good χ^2. Our study is a good incentive for the formulation of appropriate models with running coupling scaling. There exists phenomenological models based on fixed coupling diffusive scaling [28]. The test of scaling and the formulation of model will be important to analyse future LHC data. In particular, the wider kinematical range open by the LHC could help disentangling the scaling laws in competition, or reveal a new scaling (such as the diffusive one) at higher energies.

On the theoretical ground, our phenomenological analysis can help to improve the theoretical analysis of scaling. Indeed, a mere comparison between the values of λ and the corresponding prediction based on the leading order BFKL kernel shows that one should go beyond this approximation to get an agreement. Thus, our determination of the basic scaling parameters can help the theoretical QCD analysis.

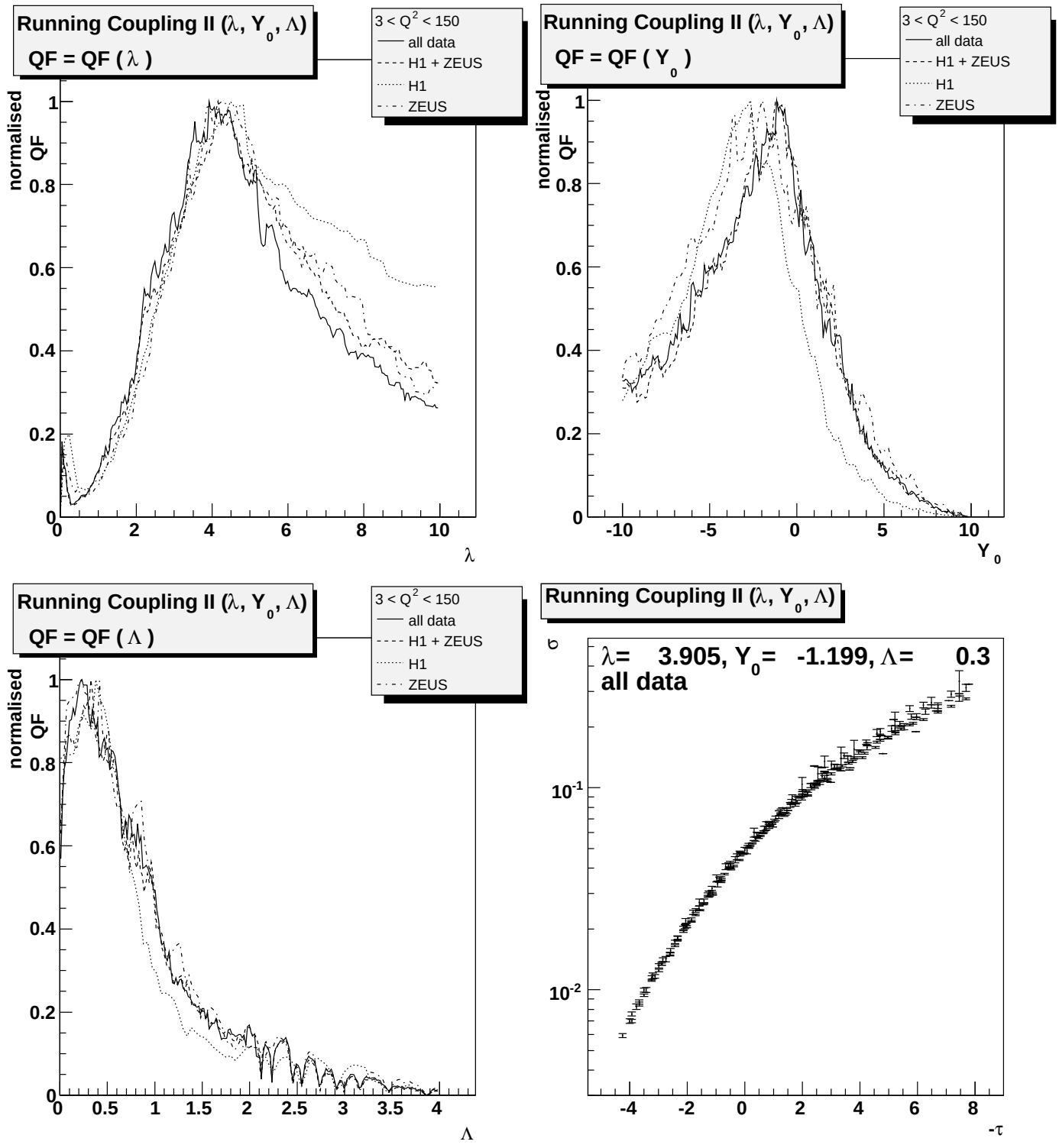

FIG. 5: F_2 **data:** Normalised QF to 1. as a function of λ and scaling curve with λ fixed to the value corresponding to the best QF for "Running Coupling IIbis". A $Q^2 > 3$ cut was applied to the data.

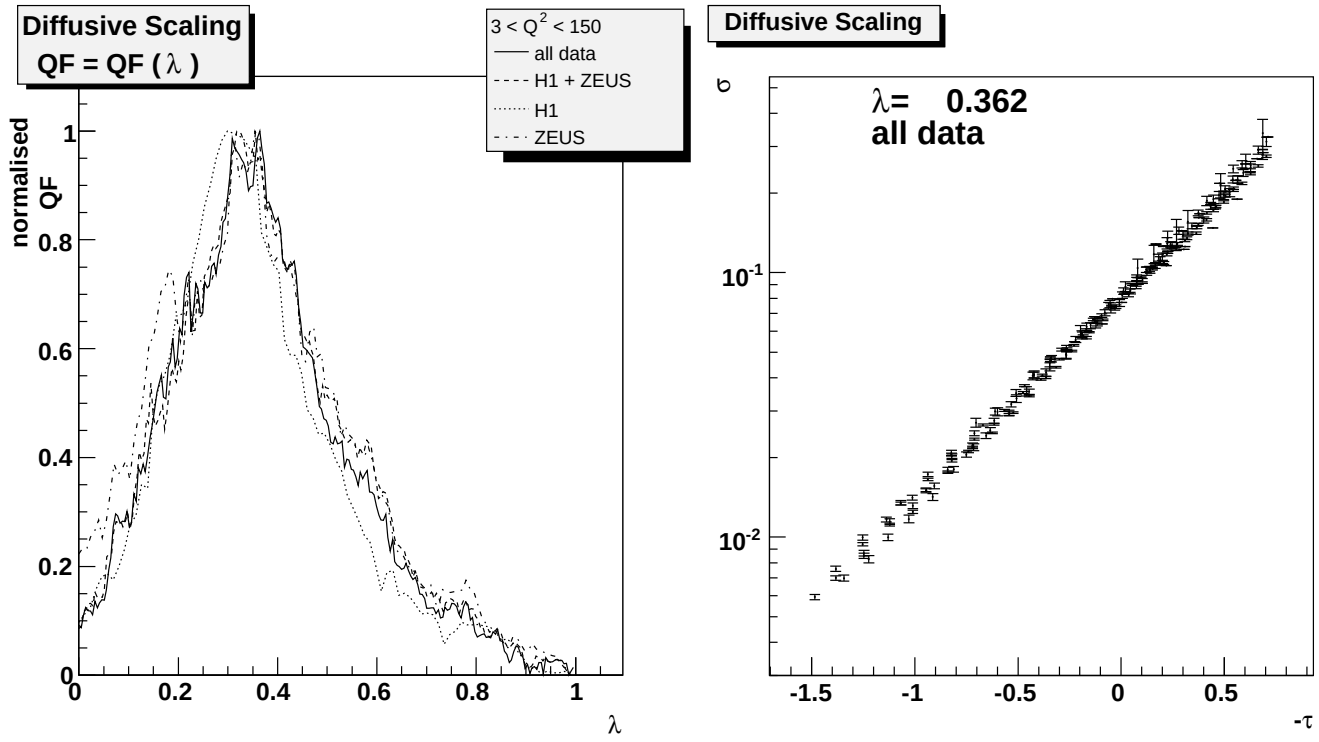

FIG. 6: F_2 **data:** Normalised QF to 1. as a function of λ and scaling curve with λ fixed to the value corresponding to the best QF for "Diffusive Scaling". A $Q^2 > 3$ cut was applied to the data.

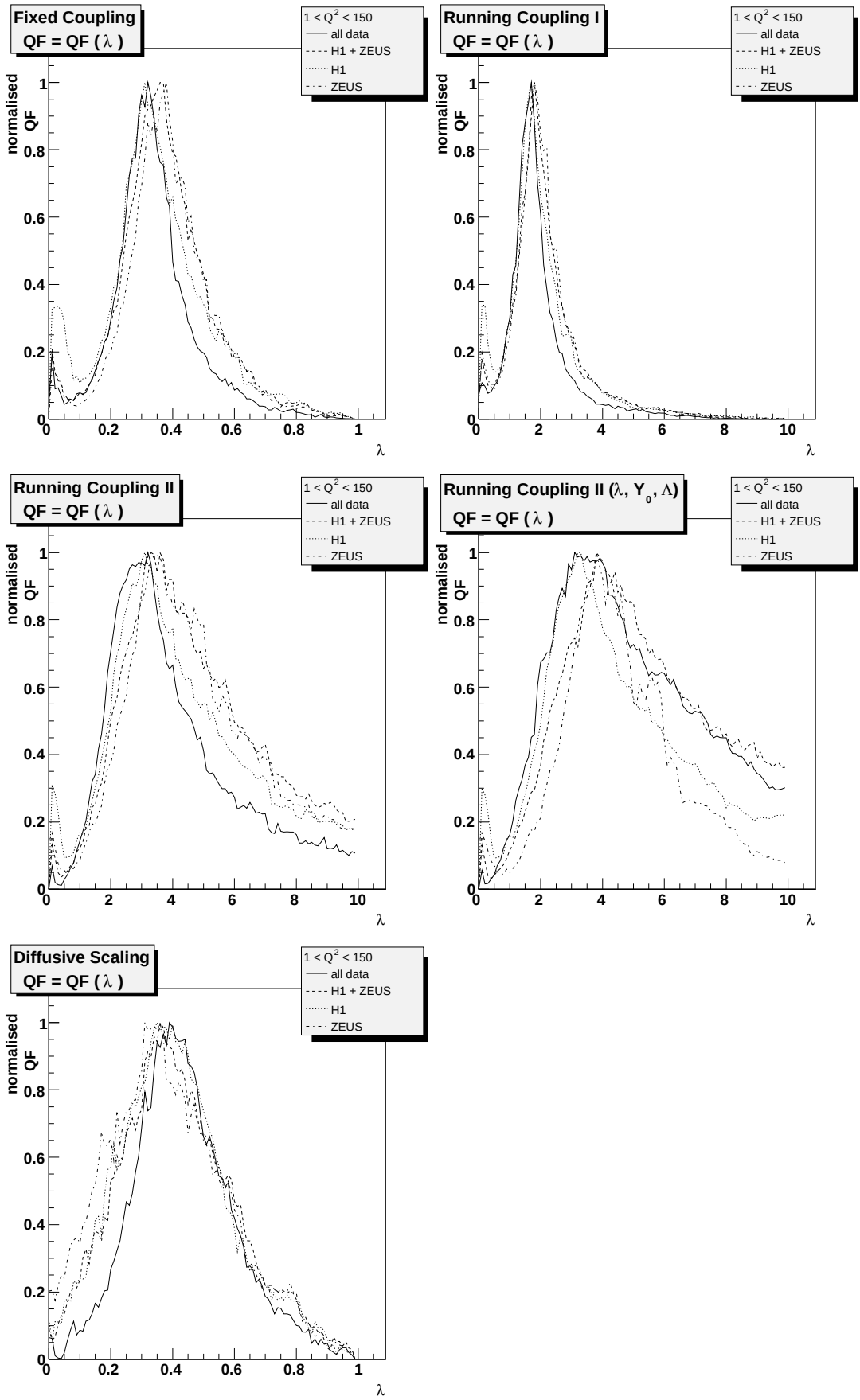

FIG. 7: F_2 **data:** λ dependence of the normalised QF to 1. for "Fixed Coupling", "Running Coupling I", "Running Coupling II", "Running Coupling IIbis" and "Diffusive Scaling". A $Q^2 > 1$ cut was applied to the data.

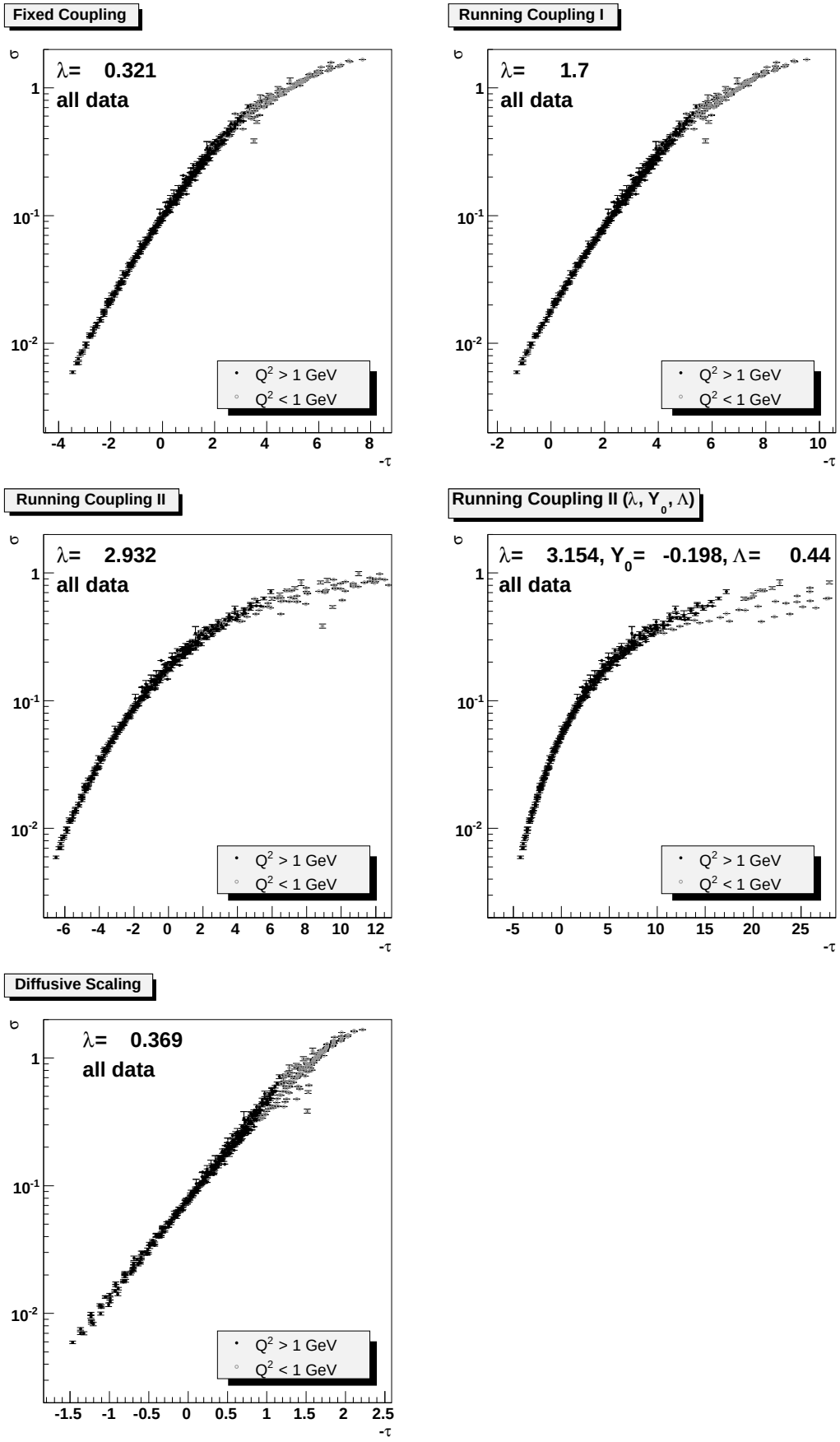

FIG. 8: F_2 **data:** scaling plot for "Fixed Coupling", "Running Coupling I", "Running Coupling II", "Running Coupling IIbis" and "Diffusive Scaling". A $Q^2 > 1$ cut was applied to the data to obtain the values of the λ parameter. The data with $Q^2 < 1$, not included in the fit, are also shown as grey points.

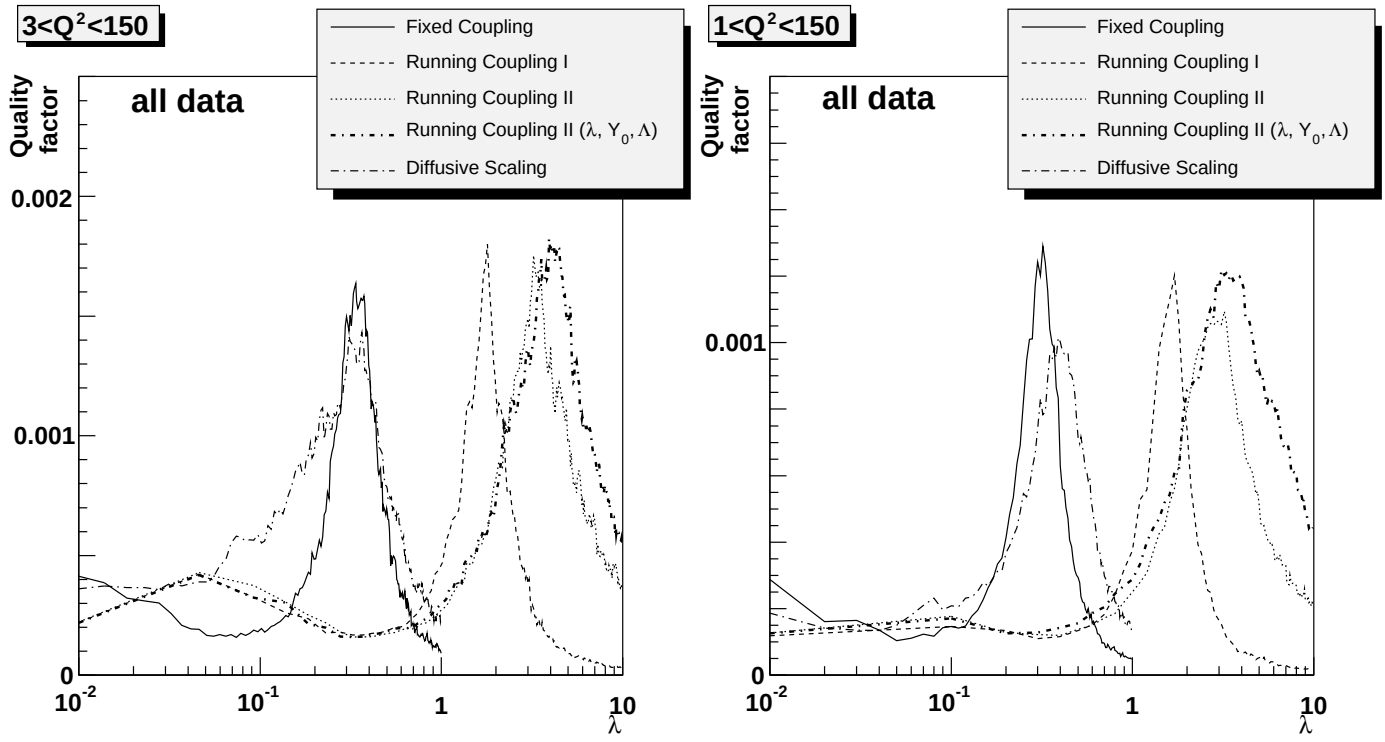

FIG. 9: F_2 **data:** Comparison of the QF for the different scaling as a function of λ. A $Q^2 > 3$ (left plot) or $Q^2 > 1$ (right plot) cut was applied to the data.

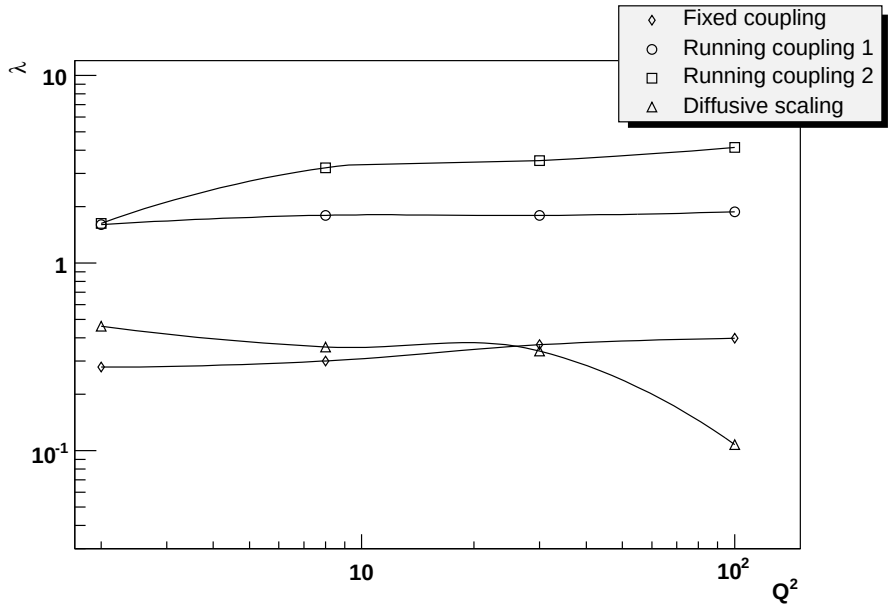

FIG. 10: F_2 **data:** Variation of lambda as a function of Q^2 for the different scalings.

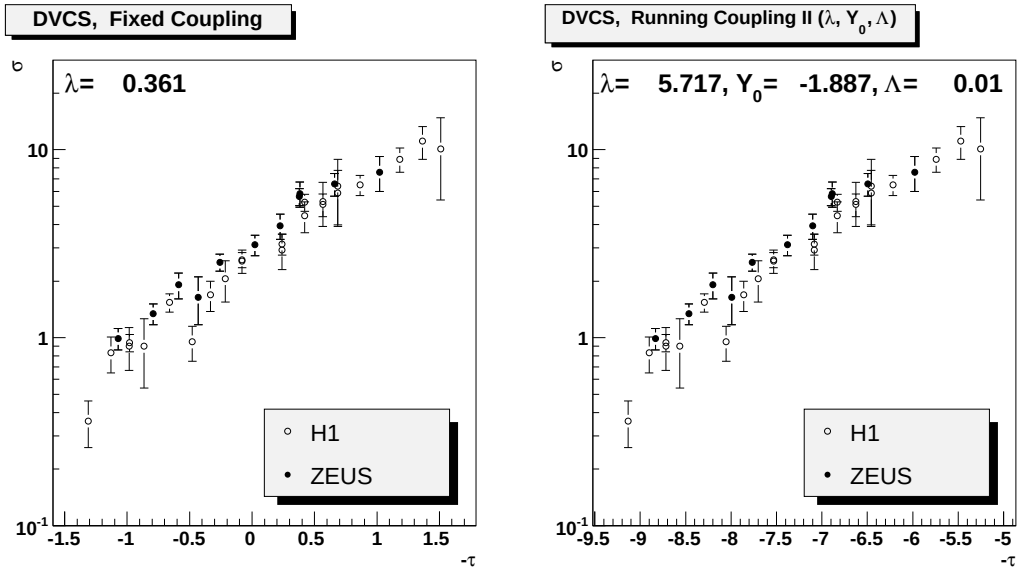

FIG. 11: **DVCS data:** Scaling curves for DVCS data and for "Fixed Coupling" and "Running Coupling IIbis".

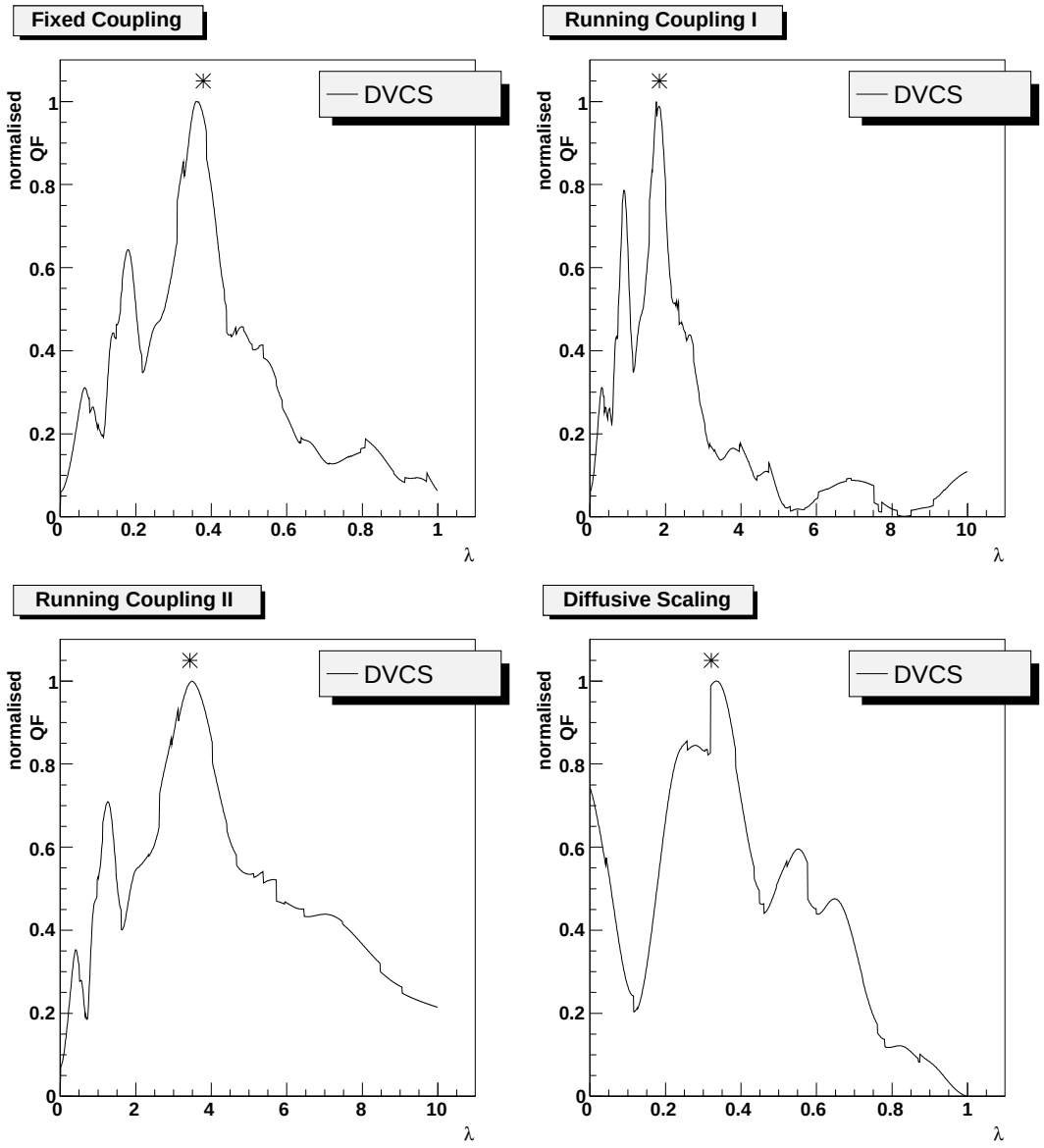

FIG. 12: **DVCS data:** λ dependence of the normalised QF to 1. for DVCS data and for "Fixed Coupling", "Running Coupling I", "Running Coupling II" and "Diffusive Scaling". The star indicated the values of λ obtained with a fit to F_2, $Q^2 > 3$ GeV^2. The values of λ obtained in a fit to DVCS data are similar to te ones obtained in a fit to F_2 data.

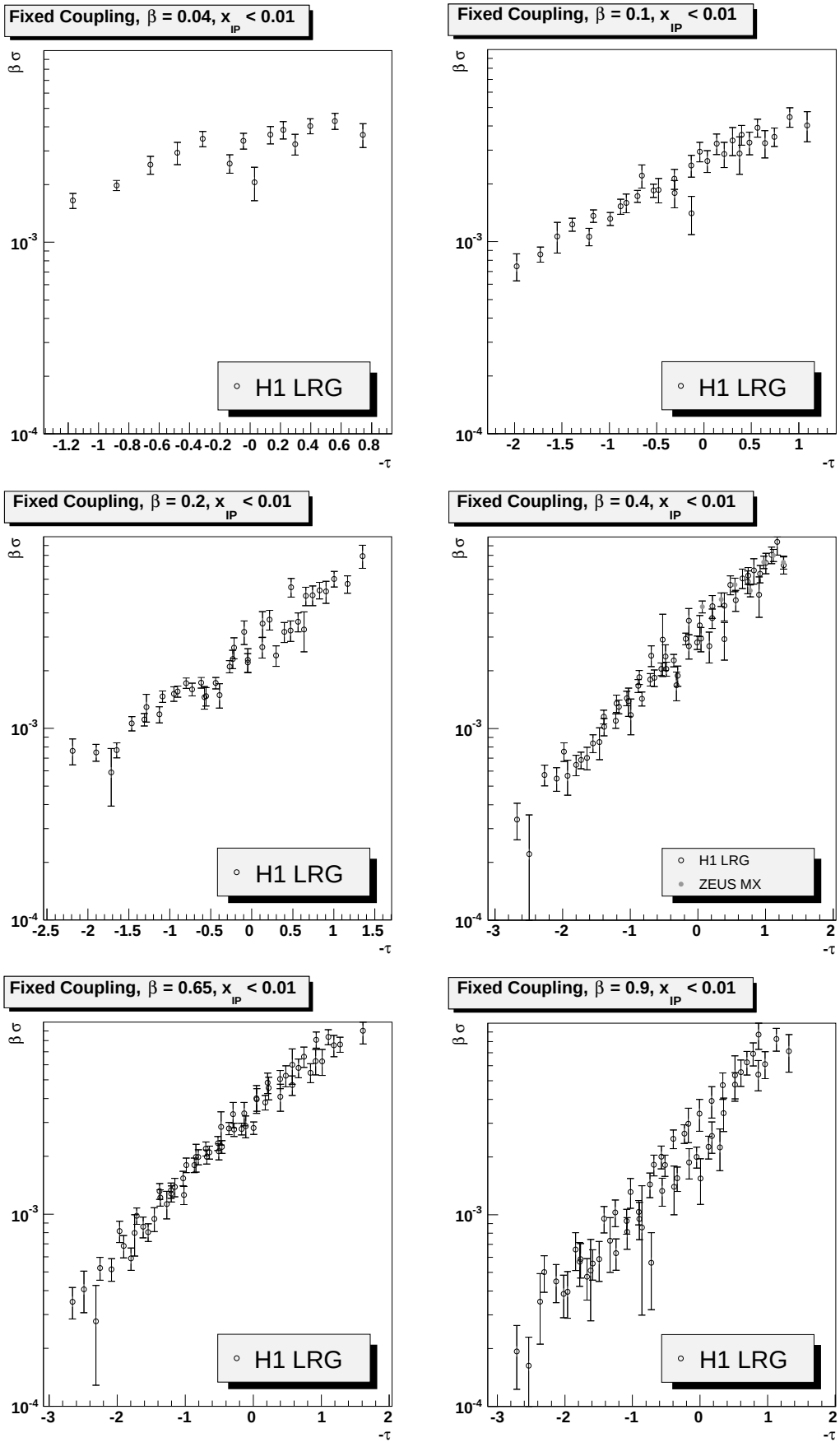

FIG. 13: F_2^D **data:** Scaling curves obtained for fixed values of β for F_2^D and fixed coupling. The parameters are fixed to the values obtained with a fit to F_2 data with $Q^2 > 3$ GeV^2.

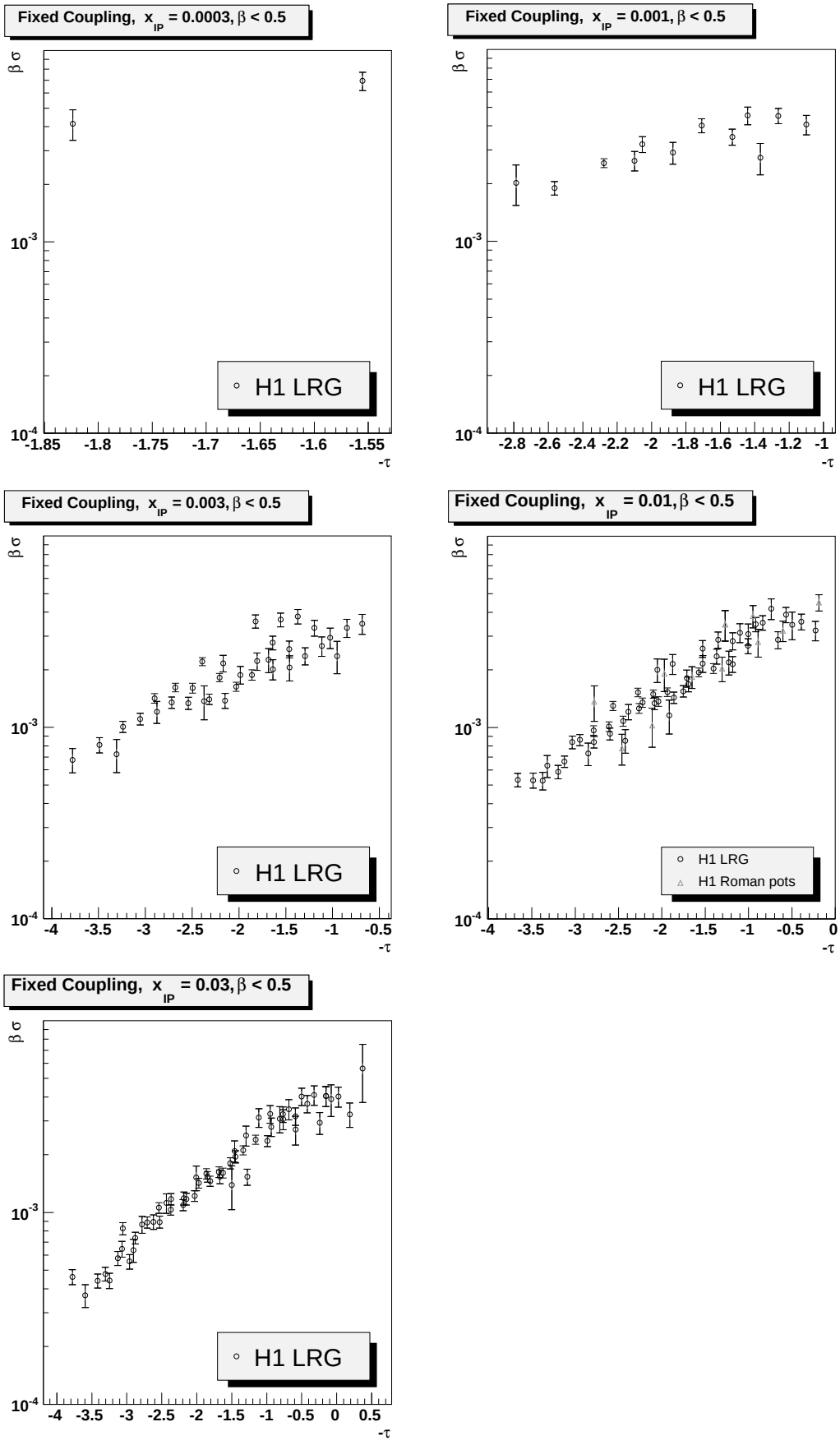

FIG. 14: F_2^D **data:** Scaling curves obtained for fixed values of $x_{I\!P}$ for F_2^D and "Fixed Coupling". The parameters are fixed to the values obtained with a fit to F_2 data with $Q^2 > 3$ GeV^2.

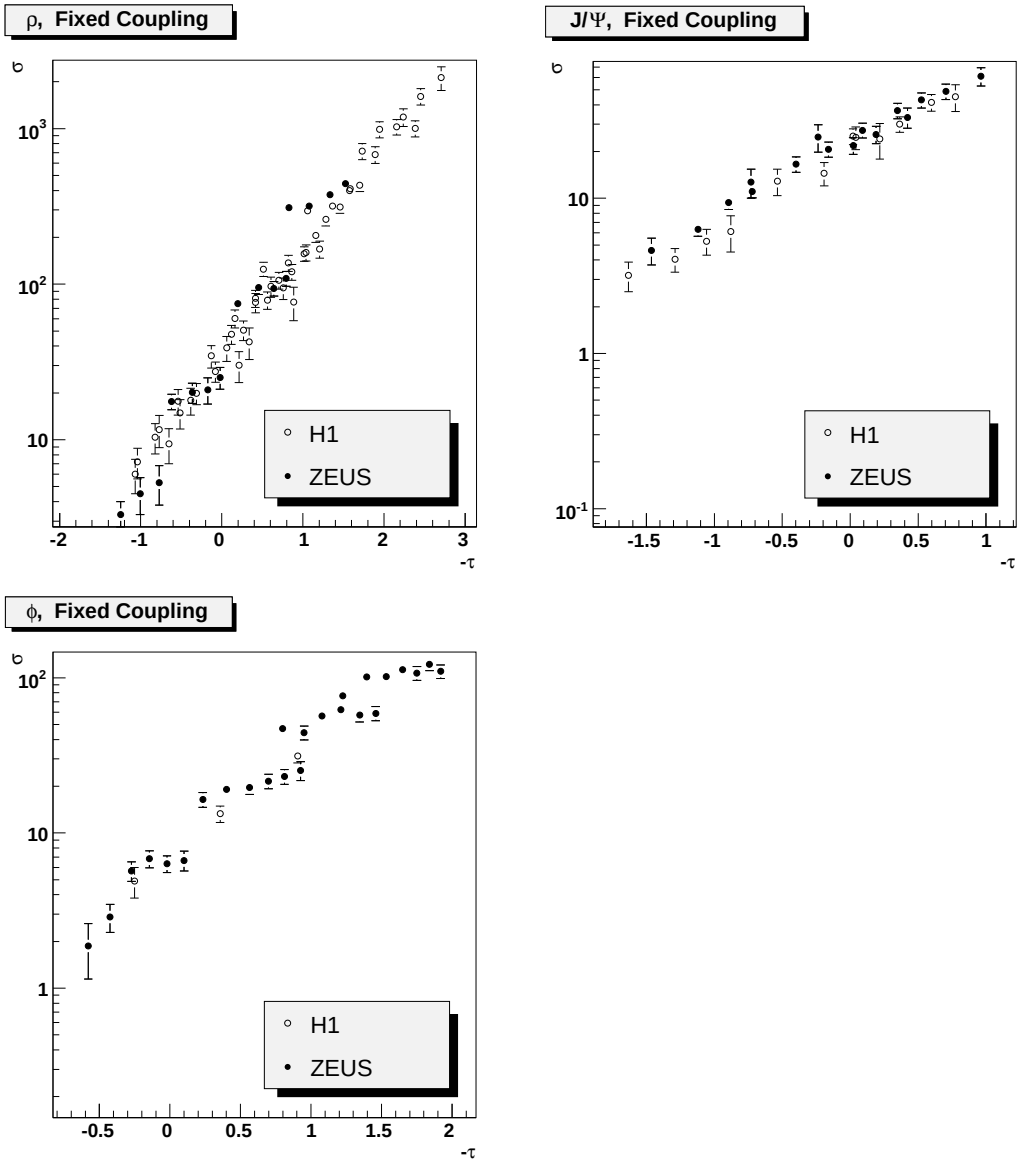

FIG. 15: **Vector meson data:** Scaling curves obtained for fixed values of $x_{I\!P}$ and for "Fixed Coupling", for vector meson data. The parameters are fixed to the values obtained with a fit to F_2 data with $Q^2 > 3$ GeV^2.

Q^2	data	n_{points}	FC	RC I	RC II	RC II bis	DS
$Q^2 \geq 3$	all data	217	λ=0.330	λ=1.841	λ=3.436	λ=3.905	λ=0.362
						Y_0=-1.200	
						Λ = 0.300	
			QF=1.63	QF=1.62	QF=1.69	QF=1.82	QF=1.44
$Q^2 \geq 3$	H1	87	λ=0.331	λ=1.736	λ=3.228	λ=4.891	λ=0.311
						Y_0=-2.516	
						Λ = 0.351	
			QF=5.72	QF=5.88	QF=5.79	QF=6.31	QF=5.28
$Q^2 \geq 3$	ZEUS	127	λ=0.368	λ=1.809	λ=3.395	λ=4.327	λ=0.366
						Y_0=-1.917	
						Λ = 0.203	
			QF=3.03	QF=3.08	QF=3.00	QF=3.28	QF=2.32
$Q^2 \geq 3$	H1+ZEUS	214	λ=0.379	λ=1.839	λ=3.436	λ=4.147	λ=0.321
						Y_0=-1.182	
						Λ = 0.333	
			QF=1.99	QF=1.76	QF=1.83	QF=2.02	QF=1.54
$Q^2 \geq 1$	all data	308	λ=0.321	λ=1.700	λ=2.932	λ=3.154	λ=0.369
						Y_0=-0.199	
						Λ = 0.440	
			QF=1.30	QF=1.20	QF=1.07	QF=1.27	QF=1.02
$Q^2 \geq 1$	H1	135	λ=0.314	λ=1.710	λ=3.073	λ=3.159	λ=0.353
						Y_0=-0.367	
						Λ = 0.201	
			QF=3.43	QF=3.56	QF=3.51	QF=3.52	QF=2.79
$Q^2 \geq 1$	ZEUS	147	λ=0.358	λ=1.809	λ=3.331	λ=3.747	λ=0.313
						Y_0=1.290	
						Λ = 0.060	
			QF=3.28	QF=3.20	QF=3.05	QF=3.29	QF=2.22
$Q^2 \geq 1$	H1+ZEUS	282	λ=0.368	λ=1.797	λ=3.226	λ=3.918	λ=0.367
						Y_0=-1.201	
						Λ = 0.225	
			QF=1.69	QF=1.71	QF=1.61	QF=1.74	QF=1.32

TABLE II: F_2 **data:** QF (multiplied by 10^3) and pamameters of the fixed coupling, running coupling I and II, and diffusive scalings for the different data sets. We distinguish the data sets for $Q^2 > 3$ and $Q^2 > 1$ GeV^2, and we compare the fit results using the full data set, or the H1 or ZEUS data only.

Q^2	n_{points}	FC	RC I	RC II	DS
$1 \leq Q^2 \leq 3$	91	λ=0.279	λ=1.603	λ=1.627	λ=0.461
		QF=0.594	QF=0.575	QF=0.600	QF=0.571
$3 < Q^2 \leq 10$	98	λ=0.301	λ=1.800	λ=3.219	λ=0.357
		QF=0.584	QF=0.544	QF=0.547	QF=0.526
$10 < Q^2 \leq 35$	86	λ=0.367	λ=1.794	λ=3.521	λ=0.340
		QF=3.53	QF=3.06	QF=3.22	QF=2.67
$35 < Q^2 \leq 150$	53	λ=0.397	λ=1.877	λ=4.135	λ=0.108
		QF=8.33	QF=8.00	QF=8.26	QF=6.37

TABLE III: F_2 **data:** λ dependence as a function of Q^2 - The QF are multiplied by 10^3 for simplification.

n_{points}	FC	RC I	RC II	RC II bis	DS
34	λ=0.361	λ=1.829	λ=3.481	λ=5.717	λ=0.335
				Y_0=-1.89	
				Λ = 0.01	
	QF=3.75	QF=3.62	QF=3.24	QF=3.52	QF=3.38

TABLE IV: **DVCS data:** Values of QF (multiplied by 10^3) and fit parameters for the different scalings. The paramters obtained for all scaling (except "Running Coupling IIbis") are close to those found for F_2 (see Table II). We note that the small amount of data lead to a bad precision of the fit for "Running Coupling IIbis" when three parameters are used.

β	n_{points}	FC	RC I	RC II	RC II bis	DS
0.04	14	2.54	2.80	2.91	3.02	1.64
0.1	30	0.610	0.579	0.600	0.605	0.660
0.2	40	0.951	1.13	1.20	1.46	1.14
0.4	64	1.05	0.952	0.984	0.998	1.00
0.65	60	1.34	1.47	1.93	1.35	1.20
0.9	59	0.380	0.510	0.572	0.492	0.372

TABLE V: F_2^D **data:** Values of QF (multiplied by 10^3) for the different scalings. The parameters λ, Y_0 and Λ are fixed to the values obtained in the fits to F_2 data. Cuts on data $x_{I\!P} < 0.01$, $5 \leq Q^2 \leq 90$ were applied.

VM	n_{points}	FC	RC I	RC II	RC II bis	DS
J/ψ	28	2.16	1.83	1.88	1.93	2.50
ρ	62	1.02	0.814	0.803	0.964	1.28
ϕ	28	1.95	2.44	2.41	3.17	3.18

TABLE VI: **Vector mesons data:** Values of QF (multiplied by 10^3) for the different scalings. The parameters λ, Y_0 and Λ are fixed to the values obtained in the fits to F_2 data.

[1] A. M. Staśto, K. Golec-Biernat, and J. Kwiecinski, Phys. Rev. Lett. **86**, 596 (2001).
[2] K. Golec-Biernat and M. Wusthoff, Phys. Rev. D **59**, 014017 (1999).
[3] A.H. Mueller, "Parton saturation: An overview", [arXiv:hep-ph/0111244].
[4] I. Balitsky, Nucl. Phys. B **463**, 99 (1996); Y. V. Kovchegov, Phys. Rev. D **60**, 034008 (1999), D **61**, 074018 (2000).
[5] S. Munier and R. Peschanski, Phys. Rev. Lett. **91**, 232001 (2003), Phys. Rev. **D69**, 034008 (2004), D **70**, 077503 (2004).
[6] G. Beuf, arXiv:0803.2167 [hep-ph].
[7] E. Iancu, K. Itakura and L. McLerran, Nucl. Phys. A **708**, 327 (2002); A. H. Mueller and D. N. Triantafyllopoulos, Nucl. Phys. B **640**, 331 (2002); D. N. Triantafyllopoulos, Nucl. Phys. B **648**, 293 (2003).
[8] L. N. Lipatov, Sov. J. Nucl. Phys. **23**, 338 (1976); E. A. Kuraev, L. N. Lipatov, and V. S. Fadin, Sov. Phys. JETP **45**, 199 (1977), I. I. Balitsky and L. N. Lipatov, Sov. J. Nucl. Phys. **28**, 822 (1978).
[9] E. Iancu, A. H. Mueller and S. Munier, Phys. Lett. B **606**, 342 (2005) [arXiv:hep-ph/0410018]; Y. Hatta, E. Iancu, C. Marquet, G. Soyez and D. N. Triantafyllopoulos, Nucl. Phys. A **773**, 95 (2006) [arXiv:hep-ph/0601150].
[10] C. Marquet and L. Schoeffel, Phys. Lett. B **639**, 471 (2006) [arXiv:hep-ph/0606079].
[11] G. Ingelman and P. E. Schlein, Phys. Lett. B **152**, 256 (1985).
[12] F. Gelis, R. Peschanski, G. Soyez and L. Schoeffel, Phys. Lett. B **647**, 376 (2007) [arXiv:hep-ph/0610435].
[13] V. S. Fadin and L. N. Lipatov, Phys. Lett. B **429**, 127 (1998); M. Ciafaloni and G. Camici, Phys. Lett. B **430**, 349 (1998).
[14] G. P. Salam, JHEP **07**, 019 (1998).
[15] M. Ciafaloni, D. Colferai, and G. P. Salam, Phys. Rev. D **60**, 114036 (1999).
[16] R. Peschanski, C. Royon and L. Schoeffel, Nucl. Phys. B **716**, 401 (2005);
O. Kepka, C. Marquet, R. Peschanski and C. Royon, Phys. Lett. B **655**, 236 (2007); Eur. Phys. J. C **55**, 259 (2008).
[17] L. V. Gribov, E. M. Levin and M. G. Ryskin, Phys. Rept. **100** (1983) 1.
[18] A. Dumitru, E. Iancu, L. Portugal, G. Soyez and D. N. Triantafyllopoulos, JHEP **0708**, 062 (2007) [arXiv:0706.2540

[hep-ph]].
[19] Y. V. Kovchegov and H. Weigert, Nucl. Phys. A **784** (2007) 188 [arXiv:hep-ph/0609090]; I. Balitsky, Phys. Rev. D **75**, 014001 (2007) [arXiv:hep-ph/0609105]; I. Balitsky and G. A. Chirilli, Phys. Rev. D **77**, 014019 (2008) [arXiv:0710.4330 [hep-ph]].
[20] C. Adloff *et al.* [H1 Collaboration], Eur. Phys. J. C **21** (2001) 33 [arXiv:hep-ex/0012053]; Eur. Phys. J. C **30** (2003) 1 [arXiv:hep-ex/0304003].
[21] J. Breitweg *et al.* [ZEUS Collaboration], Eur. Phys. J. C **7** (1999) 609 [arXiv:hep-ex/9809005]; Phys. Lett. B **487** (2000) 273 [arXiv:hep-ex/0006013]; S. Chekanov *et al.* [ZEUS Collaboration], Eur. Phys. J. C **21** (2001) 443 [arXiv:hep-ex/0105090]. Phys. Rev. D **70** (2004) 052001 [arXiv:hep-ex/0401003].
The data in the last ZEUS paper include contributions for F_L and xF_3 but those can be neglected within the kinematical domain we consider.
[22] M. Arneodo *et al.* [New Muon Collaboration], Nucl. Phys. B **483** (1997) 3 [arXiv:hep-ph/9610231].
[23] M. R. Adams *et al.* [E665 Collaboration], Phys. Rev. D **54** (1996) 3006.
[24] A. Aktas *et al.* [H1 Collaboration], Phys. Lett. B**659** (2008) 796-806 A. Aktas *et al.* [H1 Collaboration], Eur. Phys. J. C **44** (2005) 1-11 [arXiv:hep-ex/0505061]
[25] A. Aktas *et al.* [H1 Collaboration], Eur. Phys. J. C **48** (2006) 715-748 [arXiv:hep-ex/0606004] S. Chekanov *et al.* [ZEUS Collaboration], Nucl. Phys. B **713** (2005) 3-80 S. Chekanov *et al.* [ZEUS Collaboration], Eur. Phys. J. C **38** (2004) 43-67
[26] S. Chekanov *et al.* [ZEUS Collaboration], Nucl. Phys. B **718** (2005) 3-31 A. Aktas *et al.* [H1 Collaboration], Eur. Phys. J. C **46** (2006) 585-603 [arXiv:hep-ex/0510016] A. Aktas *et al.* [H1 Collaboration], Eur.Phys.J. C **13** (2000) 371-396 [arXiv:hep-ex/9902019]
[27] E. Iancu, K. Itakura and S. Munier, Phys. Lett. B **590** (2004) 199 [arXiv:hep-ph/0310338].
[28] M. Kozlov, A. Shoshi and W. Xiang, JHEP **0710** (2007) 020 [arXiv:0707.4142 [hep-ph]].

Article [V]

Entropy flow of a perfect fluid in (1+1) hydrodynamics

Guillaume Beuf* and Robi Peschanski†
Institut de Physique Théorique,
CEA, IPhT, F-91191 Gif-sur-Yvette, France
CNRS, URA 2306

Emmanuel N. Saridakis‡
Department of Physics,
University of Athens,
GR-15771 Athens, Greece

Using the formalism of the Khalatnikov potential, we derive exact general formulae for the entropy flow dS/dy, where y is the rapidity, as a function of temperature for the (1+1) relativistic hydrodynamics of a perfect fluid. We study in particular flows dominated by a sufficiently long hydrodynamic evolution, and provide an explicit analytical solution for dS/dy. We discuss the theoretical implications of our general formulae and some phenomenological applications for heavy-ion collisions.

PACS numbers: 12.38.Mh,24.10.Nz

I. INTRODUCTION

There is an accumulating evidence that hydrodynamics may be relevant for the description of the medium created in high-energy heavy ion collisions [1]. Indeed, experimental measurements such as the elliptic flow [2] shows the existence of a collective effect on the produced particles which can be described in terms of a motion of the fluid. More precisely, numerical simulations of the hydrodynamic equations describe quite well the distribution of low-$p_\perp$ particles [1], with an equation of state close to that of a "perfect fluid" with a rather low viscosity. On the other hand, it seems useful to discuss a simplified picture [3, 4], which can be qualitatively understood in physical terms, namely the idea that the evolution of the system before freeze-out is dominated by the longitudinal motion. Thus, the hydrodynamic transverse motion can be neglected or at least factorized out in order to study the longitudinal flow only.

Indeed, the two seminal applications of relativistic hydrodynamics to particle and heavy-ion collisions, by Landau [3] and by Bjorken [4], start with this $1+1$ approximation, valid in the determinative stage of the reaction. The longitudinal hydrodynamic approach has found many applications. It has been used in the literature [5, 6] in order to discuss aspects of the hydrodynamical flow which are relevant for the physical understanding of high-energy particle scattering and, more recently [7], of heavy-ion collisions.

Soon after the first proposal by Landau and its derivation of a large-time approximation [3], Khalatnikov [8] showed that (1+1) hydrodynamics derive from a potential verifying a linear equation. The Khalatnikov potential has been used in the literature in an initial period [9, 10], but has not been recently considered, to our knowledge. Very recently, the interest on looking for exact solutions of (1+1) hydrodynamics has been revived and one finds new examples and applications of exact solutions, *e.g.* [11, 12]. For instance, in a recent paper [11], a unified description of Bjorken and Landau (1+1) flows has been proposed as a class of exact solutions of (1+1) hydrodynamics based on harmonic flows. (1+1) hydrodynamics appears also quite recently in the application of string-theoretical ideas to the formation a strongly interacting quark-gluon plasma [13]. These exact solutions allow to find explicit analytical solutions for relevant observables. Among these, the entropy flow dS/dy, where y is the rapidity, is quite interesting, since it may be related to the multiplicity distribution of particles. Our goal is to go beyond particular cases and obtain a general expression of the entropy flows as a function of the temperature for a generic solution of (1+1) hydrodynamics, i.e. for a generic solution of the Khalatnikov equation.

We are interested in the distribution dS/dy of entropy density per unit of the rapidity y which is related to the flow velocities $u_\pm = e^{\pm y}$ in the (1+1) approximation. This "hydrodynamic observable" depends in an essential

*Electronic address: guillaume.beuf@cea.fr
†Electronic address: robi.peschanski@cea.fr
‡Electronic address: msaridak@phys.uoa.gr

way on the assumed hypersurface[1] through which we want to compute the flow (and eventually relate it to physical observables in collisions). For given entropy s and energy ϵ densities, dS/dy depends on the hypersurface one considers to follow the hydrodynamic evolution. It is particularly interesting to consider hypersurfaces corresponding to a fixed-temperature. Indeed, it allows to follow the cooling of the hydrodynamic flow, from an initial stage characterized by a high temperature, towards a final stage which is often associated to a freeze-out temperature. Hence our aim is to derive an expression of dS/dy as a function of temperature for a given Khalatnikov potential and to investigate its properties, both on theoretical and phenomenological points of view.

Our main new result, *i.e.* the general expressions for the entropy flow as a function of the Khalatnikov potential, can be found in three different versions (49, 50, 53). One or the other expressions can be more suitable for a given explicit problem.

The plan of our paper is as follows. First, in section II, we group, for completion, all the necessary material, including the hydrodynamic equations, the Khalatnikov potential, its equation and solutions, recast and derived in a modern framework using light-cone variables. In section III, we formulate and derive the general expression of the entropy flow in rapidity as a function of the temperature evolution. In section IV, we derive and study a family of exact solutions, namely the ones where the final entropy distribution is dominated by the hydrodynamical evolution and not by the initial conditions. They generalize the Landau flow, and give the asymptotic behavior of physical flows in the limit of long hydrodynamical evolution. We provide in particular the exact analytic expression of the final entropy distribution corresponding to the Belenkij-Landau [9] solution. Then, in section V, we compare the profile of the entropy distributions, as well as their energy dependence, with the relevant experimental data. The final section is traditionally devoted to conclusions and outlook.

II. (1+1) RELATIVISTIC HYDRODYNAMICS OF A PERFECT FLUID

A. Hydrodynamic equations

We consider a perfect fluid whose energy-momentum tensor is

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p)u^\mu u^\nu - p\eta^{\mu\nu} \tag{1}$$

where ϵ is the energy density, p is the pressure and u^μ ($\mu = \{0, 1, 2, 3\}$) is the 4-velocity in the Minkowski metric $\eta^{\mu\nu}$. It obeys the equation

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \ . \tag{2}$$

Using the standard thermodynamical identities (where we have assumed for simplicity vanishing chemical potential):

$$p + \epsilon = Ts \ ; \ \ d\epsilon = Tds \ ; \ \ dp = sdT \ , \tag{3}$$

the system of hydrodynamic equations closes by relating energy density and pressure through the general equation of state

$$\frac{dp}{d\epsilon} = \frac{sdT}{Tds} = c_s^2(T) \ . \tag{4}$$

We consider now the (1+1) approximation of the hydrodynamic flow, restricting it only to the longitudinal direction. Within such an approximation, the effect of the transverse dimensions is only reflected through the equation of state (4). Note that we do not *a priori* assume the traceless condition $T^{\mu\mu} = 0$, and thus the fluid is considered as "perfect" (null viscosity) but not necessarily "conformal" (null trace).

Let us introduce light-cone coordinates

$$z^\pm = t \pm z = z^0 \pm z^1 = \tau e^{\pm\eta} \ \Rightarrow \ \left(\frac{\partial}{\partial z^0} \pm \frac{\partial}{\partial z^1}\right) = 2\frac{\partial}{\partial z^\pm} \equiv 2\partial_\pm \tag{5}$$

where $\tau = \sqrt{z^+ z^-}$ is the proper time and $\eta = \frac{1}{2}\ln(z^+/z^-)$ is the space-time rapidity of the fluid. We also introduce for further use the light-cone components of the fluid velocity

$$u^\pm \equiv u^0 \pm u^1 = e^{\pm y} \ , \tag{6}$$

---

[1] We keep the term *hypersurface* in the (1+1) case to keep track, even formally, of the transverse motion.

where y is the usual rapidity variable (in the energy-momentum space).

The hydrodynamic equations (2) take the form

$$\begin{aligned}(\partial_+ + \partial_-)\, T^{00} + (\partial_+ - \partial_-)\, T^{01} &= 0 \\ (\partial_+ + \partial_-)\, T^{01} + (\partial_+ - \partial_-)\, T^{11} &= 0\ .\end{aligned} \tag{7}$$

B. Khalatnikov potential

It is known [8, 9] that one can replace to the non-linear problem of (1+1) hydrodynamic evolution with a linear equation for a suitably defined potential. In this section we follow the method of Ref.[8], recasting the calculations in the light-cone variables.

Inserting in (7) the known relations (1) for $T^{\mu\nu}$and expressing everything in light-cone coordinates using (5,6), one obtains the following two equations:

$$\begin{aligned}\left(\frac{e^{2y}-1}{2}\right)\partial_+(\epsilon+p) + e^{2y}(\epsilon+p)\,\partial_+ y + \left(\frac{1-e^{-2y}}{2}\right)\partial_-(\epsilon+p) + e^{-2y}(\epsilon+p)\,\partial_- y + \partial_+ p - \partial_- p &= 0 \\ \left(\frac{e^{2y}+1}{2}\right)\partial_+(\epsilon+p) + e^{2y}(\epsilon+p)\,\partial_+ y + \left(\frac{1+e^{-2y}}{2}\right)\partial_-(\epsilon+p) - e^{-2y}(\epsilon+p)\,\partial_- y - \partial_+ p - \partial_- p &= 0\ .\end{aligned} \tag{8}$$

In (8) the energy density ϵ and pressure p are considered as functions of the kinematic light-cone variables (z^+, z^-). One key ingredient of the potential method [8] is to express the hydrodynamic equations in terms of the hydrodynamical variables $y = \log u^+ = -\log u^-$ and $\theta = \log[T/T_0]$, where T_0 is an arbitrary temperature scale.

Relations (8) can be further transformed by inserting the differentials of the thermodynamic relations (3), namely

$$\begin{aligned}\partial_\pm(\epsilon+p) &= T_0\ \partial_\pm\left(s\ e^\theta\right) \\ \partial_\pm p &= T_0\ s\ \partial_\pm e^\theta\ .\end{aligned} \tag{9}$$

Multiplying the first equation of (8) by $(e^{-2y}+1)$, the second by $(e^{-2y}-1)$, adding them and using (9), one obtains:

$$\partial_+\left(e^{\theta+y}\right) = \partial_-\left(e^{\theta-y}\right). \tag{10}$$

Eq.(10) proves the existence of a potential[2] $\Phi(z^+, z^-)$ verifying:

$$\partial_\mp \Phi(z^+, z^-) \equiv u^\pm T = T_0\ e^{\theta\pm y}\ . \tag{11}$$

In this way, (10) is automatically satisfied.

In order to transform the system of equations (8) from the kinematic variables (z^+, z^-) to the dynamical ones (θ, y), one introduces [8] the Khalatnikov potential χ, considered as a function of (u^+T, u^-T) through a Legendre transform:

$$\chi(u^+T, u^-T) \equiv \Phi(z^+, z^-) - z^- u^+ T - z^+ u^- T\ , \tag{12}$$

where $z^\pm$ are functions of (u^+T, u^-T) implicitly defined by (11). Hence, we get:

$$\frac{\partial\chi}{\partial(u^\mp T)} = -z^\pm + \left[\partial_+\Phi - u^- T\right]\ \frac{\partial z^+}{\partial(u^\mp T)} + \left[\partial_-\Phi - u^+ T\right]\frac{\partial z^-}{\partial(u^\mp T)} \equiv -z^\pm\,, \tag{13}$$

where, due to the relations (11), the terms between brackets are zero. Knowing the Khalatnikov potential χ, which is a function of the thermodynamic variables, one can find the kinematic variables of the flow by derivation.

In the following, we will always consider the Khalatnikov potential χ as function of θ and y, keeping the same notation for χ. That change of variables corresponds for the differential operators to

$$\frac{\partial}{\partial(u^\pm T)} = \frac{1}{2T_0}\ e^{-\theta\mp y}\left(\partial_\theta \pm \partial_y\right). \tag{14}$$

---

[2] The function Φ has some degree of arbitrariness since we could define $\partial_\mp\Phi \equiv T_0 e^{\theta\pm y} + \varphi_\mp(z^\mp)$, with $\varphi_-(z^-)$ and $\varphi_+(z^+)$ arbitrary one-variable functions. This freedom, analogous to a gauge choice, does not modify the final results.

In those variables, relation (13) writes

$$z^{\pm}(\theta, y) = \frac{1}{2T_0}\, e^{-\theta \pm y}\ \left(-\partial_\theta \chi \pm \partial_y \chi\right)\ . \tag{15}$$

From (15), one also gets the expressions for the proper time τ and the space-time rapidity η (defined as in (5))

$$\begin{aligned} \tau(\theta, y) &= \frac{e^{-\theta}}{2T_0}\ \sqrt{(\partial_\theta \chi)^2 - (\partial_y \chi)^2} \\ \eta(\theta, y) &= y + \frac{1}{2}\log\left(\frac{-\partial_\theta \chi + \partial_y \chi}{-\partial_\theta \chi - \partial_y \chi}\right) = y - \tanh^{-1}\left(\frac{\partial_y \chi}{\partial_\theta \chi}\right)\ . \end{aligned} \tag{16}$$

C. Khalatnikov equation

Coming back to the system of equations (8), another independent combination can be obtained. Multiplying the first equation by $(e^{-2y}-1)$, the second by $(e^{-2y}+1)$ and adding, we obtain $\partial_+\left(e^y s\right) + \partial_-\left(e^{-y} s\right) = 0$, or equivalently:

$$\partial_+\left(u^+ s\right) + \partial_-\left(u^- s\right) = 0. \tag{17}$$

This relation corresponds physically to the conservation of the entropy along the flow. It is a property of the perfect fluid that the motion of the pieces of the fluid along the velocity lines is isentropic.

Following the logics of the Legendre transform, we transform relation (17) using the (θ, y)-base. For this sake, we write down the following partial derivatives:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u^{\pm} s)}{\partial \theta} \equiv u^{\pm}\frac{ds}{d\theta} &= \frac{\partial(u^{\pm} s)}{\partial z^+}\frac{\partial z^+}{\partial \theta} + \frac{\partial(u^{\pm} s)}{\partial z^-}\frac{\partial z^-}{\partial \theta} \\ \frac{\partial(u^{\pm} s)}{\partial y} \equiv \pm u^{\pm} s &= \frac{\partial(u^{\pm} s)}{\partial z^+}\frac{\partial z^+}{\partial y} + \frac{\partial(u^{\pm} s)}{\partial z^-}\frac{\partial z^-}{\partial y}. \end{aligned} \tag{18}$$

Solving this system of linear equations we obtain:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u^+ s)}{\partial z^+} &= \frac{1}{D}\left[u^+\frac{\partial z^-}{\partial y}\frac{ds}{d\theta} - u^+ s\frac{\partial z^-}{\partial \theta}\right] \\ \frac{\partial(u^- s)}{\partial z^-} &= -\frac{1}{D}\left[u^-\frac{\partial z^+}{\partial y}\frac{ds}{d\theta} + u^- s\frac{\partial z^+}{\partial \theta}\right], \end{aligned} \tag{19}$$

where[3]

$$D = \frac{\partial z^+}{\partial \theta}\frac{\partial z^-}{\partial y} - \frac{\partial z^+}{\partial y}\frac{\partial z^-}{\partial \theta}\ . \tag{20}$$

Inserting (19) into the entropy-flow conservation relation (17) we acquire:

$$\frac{ds}{d\theta}\left[u^+\frac{\partial z^-}{\partial y} - u^-\frac{\partial z^+}{\partial y}\right] - s\left[u^+\frac{\partial z^-}{\partial \theta} + u^-\frac{\partial z^+}{\partial \theta}\right] = 0. \tag{21}$$

Obtaining the expression of the $z^{\pm}$ derivatives from (15), the equation (21) leads to:

$$\frac{1}{s}\frac{ds}{d\theta}\left[\partial_\theta \chi - \partial_y^2 \chi\right] - \partial_\theta \chi + \partial_\theta^2 \chi = 0\ . \tag{22}$$

Making use of the sound velocity relation (4) we finally arrive at the Khalatnikov equation [8, 9]:

$$c_s^2\, \partial_\theta^2 \chi(\theta, y) + \left[1 - c_s^2\right] \partial_\theta \chi(\theta, y) - \partial_y^2 \chi(\theta, y) = 0. \tag{23}$$

Hence, the non-linear system of equations which governs the (1+1) hydrodynamical flow has been converted into a linear, second-order, hyperbolic partial differential equation. Note that the Khalatnikov equation is valid independently from the specific form of the sound velocity.

---

[3] We assume that the determinant D is non-zero, which is the case except on exceptional lines [9].

D. Application: solutions of the Khalatnikov equation for fixed c_s.

In this section, for our purpose, we present the solutions of the Khalatnikov equation with a constant speed of sound:

$$c_s^2 \equiv \frac{p}{\epsilon} = g^{-1} \ , \tag{24}$$

where g will be considered as a parameter in the Khalatnikov equation (23). Note that in this case the general relations (3) write

$$\epsilon = gp = \epsilon_0 \ \left(\frac{T}{T_0}\right)^{g+1} = \ \epsilon_0 \ e^{(g+1)\theta}, \tag{25}$$

for the energy density and

$$s = s_0 \ \left(\frac{T}{T_0}\right)^{g} = s_0 \ e^{g\theta} \tag{26}$$

for the entropy density.

Writing

$$\chi(\theta, y) = e^{-\left(\frac{g-1}{2}\right)\theta} \ Z(\theta, y) \tag{27}$$

and inserting it into (23), we acquire:

$$\partial_\theta^2 Z - g \ \partial_y^2 Z - \left(\tfrac{g-1}{2}\right)^2 \ Z = 0, \tag{28}$$

where we have used a compact notation for partial derivatives.

It is convenient to replace the variables θ and y by α and β, defined by

$$\alpha \equiv -\theta + \frac{y}{\sqrt{g}} \quad \text{and} \quad \beta \equiv -\theta - \frac{y}{\sqrt{g}} \, , \tag{29}$$

such that equation (28) takes the form

$$\partial_\alpha \partial_\beta \bar{Z}(\alpha, \beta) - \tfrac{(g-1)^2}{16} \ \bar{Z}(\alpha, \beta) = 0 \ . \tag{30}$$

We solve this equation following the Green's functions formalism, i.e. we look for distributions $\bar{G}(\alpha, \beta)$ such that

$$\partial_\alpha \partial_\beta \bar{G}(\alpha, \beta) - \tfrac{(g-1)^2}{16} \ \bar{G}(\alpha, \beta) = \delta(\alpha)\delta(\beta) \, . \tag{31}$$

The relevant solution of equation (31) is[4]

$$\bar{G}(\alpha, \beta) = \Theta(\alpha) \ \Theta(\beta) \ I_0 \left(\frac{g-1}{2}\sqrt{\alpha\beta}\right) \, , \tag{32}$$

with I_0 the modified Bessel function of the first kind and Θ the Heaviside function. Using the relation

$$\delta(\alpha) \, \delta(\beta) \equiv \delta\left(-\theta + \frac{y}{\sqrt{g}}\right) \ \delta\left(-\theta - \frac{y}{\sqrt{g}}\right) = \sqrt{g} \ \delta(\theta) \ \delta(y) \, , \tag{33}$$

we deduce from (32) the relevant Green's function of (28):

$$G(\theta, y) = \frac{1}{4\sqrt{g}} \ \bar{G}(\alpha, \beta) = \frac{1}{4\sqrt{g}} \, \Theta\left(-\theta + \frac{y}{\sqrt{g}}\right) \ \Theta\left(-\theta - \frac{y}{\sqrt{g}}\right) \ I_0 \left(\frac{g-1}{2}\sqrt{\theta^2 - \frac{y^2}{g}}\right) , \tag{34}$$

---

[4] There exist other Green's functions of equation (31), with *e.g.* $\Theta(-\alpha)$ instead of $\Theta(\alpha)$, or $\Theta(-\beta)$ instead of $\Theta(\beta)$. Assuming that the fluid naturally expands and cools down during the evolution, and taking the arbitrary temperature scale T_0 to be the maximal temperature of the sources, $-\theta$ increases with time. Thus (32) gives the only physical solution of equation (31), analogous to the retarded propagator of the D'Alembert equation. Finally, note that for the obvious physical requirement of finite behavior at $\alpha, \beta \to \infty$, we reject the solutions of (31) containing the Bessel-K_0 function instead of I_0.

which verifies

$$\partial_\theta^2 G - g\ \partial_y^2 G - (\tfrac{g-1}{2})^2\ G = \delta(\theta)\delta(y)\,. \tag{35}$$

Thus, we can construct the general solution of Khalatnikov equation (23), inserting a distribution of sources $F(\hat{\theta},\hat{y})$, as:

$$\begin{aligned}\chi(\theta,y) &= e^{-\left(\frac{g-1}{2}\right)\theta}\ \int d\hat{y}\ \int d\hat{\theta}\, G(\theta-\hat{\theta},y-\hat{y})\, F(\hat{\theta},\hat{y}) \\ &= \frac{e^{-\left(\frac{g-1}{2}\right)\theta}}{4\sqrt{g}}\ \int d\hat{y}\ \int_{\theta+|y-\hat{y}|/\sqrt{g}}^{+\infty} d\hat{\theta}\, F(\hat{\theta},\hat{y})\, I_0\left(\frac{g-1}{2}\sqrt{(\theta-\hat{\theta})^2-\frac{(y-\hat{y})^2}{g}}\right)\,. \end{aligned}\tag{36}$$

Equation (36) gives the most general solution, for any distribution of sources of hydrodynamic flow. In the context of heavy-ion collisions, we are mostly interested in solutions that correspond to the evolution of a flow starting from initial conditions on a curve of the (θ,y) plane. Therefore, one should impose constraints on $F(\hat{\theta},\hat{y})$, in order to decribe the initial conditions. In section IV we will consider a physically-interesting sub-class of solutions.

III. DERIVATION OF THE ENTROPY FLOW

Coming back to the general formalism, let us now derive the exact formula for the entropy flow dS/dy at a given fixed temperature $T_F = T_0\ e^{\theta_F}$, as a function of rapidity y. For a general (1+1) hydrodynamic expansion we consider the solution formulated in terms of the general Khalatnikov potential $\chi(\theta,y)$, given by (36). The entropy distribution at fixed temperature is expressed through the amount of entropy flowing through the hypersurface of fixed temperature T_F, in an infinitesimal rapidity interval. It is given by (see *e.g.* [11])

$$\frac{dS}{dy} \equiv s_F \frac{u^\mu d\lambda_\mu}{dy} = s_F u^\mu n_\mu \frac{d\lambda}{dy}\,, \tag{37}$$

where $d\lambda$ is the infinitesimal (space-like) length element along the hypersurface of fixed temperature T_F, and n^μ is the normal to the hypersurface. The entropy density depends only on the temperature and not on y. Hence it is constant along the fixed-temperature hypersurface, namely $s_F \equiv s(T_F) \propto T_F^g$.

A. The flow through the fixed-temperature hypersurface

As we have mentioned, we concentrate on hypersurfaces at fixed temperature T_F (or equivalently at $\theta_F = \log[T_F/T_0]$). It is convenient to use as kinematical functions the proper time $\tau = \sqrt{z^+ z^-}$ and the space-time rapidity $\eta = \frac{1}{2}\ln(z^+/z^-)$, considered as functions of θ and y. In this (θ,y)-base, the fixed-temperature hypersurface is parameterized by

$$\begin{aligned}\tau_F(y) &= \tau(\theta_F,y) \\ \eta_F(y) &= \eta(\theta_F,y)\end{aligned}\tag{38}$$

considered as functions of y at θ_F fixed. The tangent vector to the hypersurface reads:

$$\begin{aligned}V^+(y) \equiv z_F^{+'}(y) &= (\tau_F' + \eta_F'\tau_F)\ e^{\eta_F} \\ V^-(y) \equiv z_F^{-'}(y) &= (\tau_F' - \eta_F'\tau_F)\ e^{-\eta_F},\end{aligned}\tag{39}$$

where the primes denote derivatives with respect to y. Hence, we can construct the normalized perpendicular vector to the fixed-temperature curve $(n^+(y),n^-(y))$ defined by

$$\begin{aligned}n^+(y)\ n^-(y) &= 1 \\ \frac{1}{2}\ [n^+(y)\ V^-(y) + n^-(y)\ V^+(y)] &= 0\,.\end{aligned}\tag{40}$$

Using (39) the second equation translates into

$$n^+(y)\ e^{-\eta_F}\ (\eta_F'\tau_F - \tau_F') = n^-(y)\ e^{\eta_F}\ (\eta_F'\tau_F + \tau_F')\,. \tag{41}$$

Provide $|\eta'_F(y)| > \left|\frac{\tau'_F(y)}{\tau_F(y)}\right|$ for all y, we find

$$\begin{aligned} n^+(y) &= \sqrt{\frac{\eta'_F\tau_F+\tau'_F}{\eta'_F\tau_F-\tau'_F}}\; e^{\eta_F} \\ n^-(y) &= \sqrt{\frac{\eta'_F\tau_F-\tau'_F}{\eta'_F\tau_F+\tau'_F}}\; e^{-\eta_F}. \end{aligned} \tag{42}$$

Following Ref.[11], $d\lambda^\mu \equiv d\lambda\; n^\mu$ is defined such that

$$(d\lambda)^2 = d\lambda^\mu d\lambda_\mu = -dz_F^+\; dz_F^- = -(\tau_F'^2 - \tau_F^2\;\eta_F'^2)(dy)^2, \tag{43}$$

where the minus sign comes from the fact that the hypersurface is a space-like curve. Thus, we have

$$d\lambda = \sqrt{\tau_F^2\;\eta_F'^2 - \tau_F'^2}\; dy\,. \tag{44}$$

So, inserting (42) and (44) in (37), we finally find

$$\frac{dS}{dy}(y) = s_F\,[\tau_F(y)\;\eta'_F(y)\;\cosh(\eta_F(y)-y) + \tau'_F(y)\;\sinh(\eta_F(y)-y)]\,. \tag{45}$$

B. Expression of the entropy flow

Let us now introduce the expression of the entropy flow in terms of the Khalatnikov potential. Starting from (15), we obtain:

$$\begin{aligned} \cosh(\eta-y) &= -\frac{1}{2\tau T_0 e^\theta}\;\partial_\theta\chi(\theta,y) \\ \sinh(\eta-y) &= \frac{1}{2\tau T_0 e^\theta}\;\partial_y\chi(\theta,y)\,. \end{aligned} \tag{46}$$

Now, inserting (46) in (45) we can eliminate the hyperbolic trigonometrical functions acquiring:

$$\frac{dS}{dy}(y) = s_F\;\left.\frac{[-\tau_F(y)\;\eta'_F(y)\;\partial_\theta\chi(\theta,y) + \tau'_F(y)\;\partial_y\chi(\theta,y)]}{2T_0\;e^{\theta_F}\;\tau_F(y)}\right|_{\theta=\theta_F}. \tag{47}$$

Furthermore, by differentiation of the relations (16) with respect to y, at $\theta=\theta_F$, we find

$$\begin{aligned} \tau'_F(y) &= \frac{e^{-\theta}}{2}\;\left.\frac{[(\partial_\theta\chi)(\partial_y\partial_\theta\chi) - (\partial_y\chi)(\partial_y^2\chi)]}{\sqrt{(\partial_\theta\chi)^2-(\partial_y\chi)^2}}\right|_{\theta=\theta_F} \\ \eta'_F(y) &= \left.\frac{[(\partial_\theta\chi)^2 - (\partial_y\chi)^2 + (\partial_y\chi)(\partial_y\partial_\theta\chi) - (\partial_\theta\chi)(\partial_y^2\chi)]}{(\partial_\theta\chi)^2-(\partial_y\chi)^2}\right|_{\theta=\theta_F}. \end{aligned} \tag{48}$$

Then, inserting the relations (48) and (16) in (47), we obtain a remarkably simple expression, namely:

$$\frac{dS}{dy}(y) = \frac{s_F}{2T_F}\;\left.[\partial_y^2\chi(\theta,y) - \partial_\theta\chi(\theta,y)]\right|_{\theta=\theta_F}, \tag{49}$$

which possesses a full generality, as long as the Khalatnikov potential $\chi(\theta,y)$ exists. In addition, using the Khalatnikov equation (23), (49) can be also written as:

$$\frac{dS}{dy}(y) = \frac{s_F\;c_s^2(T_F)}{2T_F}\;\left.[\partial_\theta^2\chi(\theta,y) - \partial_\theta\chi(\theta,y)]\right|_{\theta=\theta_F}. \tag{50}$$

There is an interesting third version of equations (49,50), featuring the potential Φ instead of χ. The definition (12) of χ can be written alternatively

$$\chi = \Phi - T\tau e^{\eta-y} - T\tau e^{-\eta+y} \equiv \Phi - 2T\tau\cosh(\eta-y)\,. \tag{51}$$

Inserting in (51) the first relation of (46), one obtains

$$\Phi = \chi(\theta, y) - \partial_\theta \chi(\theta, y)\,. \tag{52}$$

Inserting that last relation into (50), and considering the potential Φ (originally defined in (11) as a function of z^+ and z^-) now as a function of θ and y, one gets a third equivalent formula for the entropy flow through fixed-temperature hypersurfaces, namely

$$\frac{dS}{dy}(y) = -\frac{s_F\ c_s^2(T_F)}{2T_F}\ \partial_\theta \Phi(\theta, y)|_{_{\theta=\theta_F}}\,. \tag{53}$$

The set of expressions (49), (50) and (53) form our main formal result. They provide the exact form of the entropy flow along fixed-temperature hypersurfaces, for a general (1+1) hydrodynamic evolution. We also mention that, beyond the derivation of the Khalatnikov potential at fixed sound velocity, formulae (49,50,53) still hold for a general speed of sound, once the solution of the general Khalatnikov equation (23) is known. It is important to note that relations (49,52) are valid as long as there exist χ or Φ potentials, even if there is no reduction to a linear equation, *i.e.* no entropy conservation in the (1+1) projection of the flow, while relations (50,53) are valid when the Khalatnikov equation holds *i.e.* with entropy conservation in the (1+1) projection of the flow.

C. Examples

Let us check the general formulae for the entropy flow considering exact hydrodynamical solutions known in the literature, namely the Bjorken flow [4] and the harmonic flows [11].

a. Bjorken flow: The Bjorken flow corresponds to boost-invariance, *i.e.* $\partial_y \chi \equiv 0$. In this case, the Khalatnikov equation (23) reduces to

$$\chi''(\theta) + (g-1)\chi'(\theta) = 0\,, \tag{54}$$

which has as generic solution

$$\chi(\theta) = Ce^{-(g-1)\theta}\,, \tag{55}$$

C being an integration constant. Let us choose C and the arbitrary temperature scale T_0 such that at the proper time $\tau = \tau_0$, the temperature of the fluid is $T = T_0$. Inserting (55) in relations (16) one finds $C = 2T_0\tau_0/(g-1)$, and the known expressions for the Bjorken flow, namely

$$\tau(\theta, y) = \tau_0\ e^{-g\theta} \qquad \text{and} \qquad \eta \equiv y\,, \tag{56}$$

i.e. the equality of rapidity with space-time rapidity. Finally, the Khalatnikov potential for the Bjorken solution writes

$$\chi(\theta) = \frac{2T_0\tau_0}{(g-1)} e^{-(g-1)\theta} = \frac{2T\tau}{(g-1)}\,. \tag{57}$$

Inserting (57) into (49), one obtains the entropy flow

$$\frac{dS}{dy}(y) = s_F\tau_F = s_0\tau_0 = cst..\tag{58}$$

Hence, as expected from boost invariance of the Bjorken flow, not only the total entropy but also the entropy flow is conserved.

b. Harmonic flows: Following Ref.[11], one is led to introduce new auxiliary variables $l^+(z^+)$ and $l^-(z^-)$ satisfying

$$\frac{dl^\pm}{dz^\pm} = \lambda\ e^{-l^{\pm 2}}\ , \tag{59}$$

where $\lambda = cst$. The thermodynamic variables can be explicitly written [11] as[5]

$$\begin{aligned} \theta &= -\frac{g+1}{4g}\left(l^{+2}+l^{-2}\right)+\frac{g-1}{2g}\ l^+l^- \\ y &= \frac{1}{2}\left(l^{+2}-l^{-2}\right)\ . \end{aligned} \tag{60}$$

Using the property (11) of the potential Φ one writes

$$\frac{\partial\Phi}{\partial l^\pm} = \frac{dz^\pm}{dl^\pm}\ \partial_\pm\Phi = \frac{dz^\pm}{dl^\pm}\ T_0\ e^{\theta\mp y}\ . \tag{61}$$

Now, inserting (59) and the expressions (60), one obtains

$$\frac{\partial\Phi}{\partial l^\pm} \ = \ \lambda T_0\ e^{l^{\pm 2}}e^{\theta\mp y} = \lambda T_0\ e^{\frac{g-1}{4g}(l^++l^-)^2}\ . \tag{62}$$

The expressions (62) are symmetric in l^+ and l^- and thus, by mere integration, one gets

$$\Phi(l^+,l^-) = \lambda T_0\ \int^{l^++l^-} dv\ e^{\frac{g-1}{4g}v^2}\ , \tag{63}$$

where the potential can be expressed in terms of θ and y through

$$l^+ + l^- = \sqrt{2}\ |y|\ \left(-\theta-\sqrt{\theta^2-\frac{y^2}{g}}\right)^{-1/2}\ . \tag{64}$$

Now, using our relation (53), and the relation

$$\partial_\theta\Phi = \lambda T_0\ e^{\frac{g-1}{4g}(l^++l^-)^2}\ \partial_\theta(l^++l^-)\ , \tag{65}$$

one gets the result for the entropy flow

$$\frac{dS}{dy}(y) = \frac{\sqrt{2}\lambda T_0 s_F}{gT_F}\ e^{\frac{g-1}{2}\left(\theta+\sqrt{\theta^2-y^2/g}\right)}\ \frac{|y|}{\sqrt{\theta^2-y^2/g}}\left(-\theta-\sqrt{\theta^2-y^2/g}\right)^{-1/2}. \tag{66}$$

Using our general formalism, we thus recover the nontrivial result obtained by direct calculation (see Ref.[11], formula (58)). Interestingly enough, we note that for the family of harmonic flows as an example, it appears to be much simpler to use formula (53) for the potential Φ than using the Khalatnikov potential χ itself.

Note that we have to make a specific discussion of the limiting case when $g = 1$, that is when the speed of sound equals the speed of light. In fact in this case, the harmonic flow cannot be obtained as above and the solution for the flow acquires a more general form. Coming back to equation (23), one finds that the Khalatnikov potential itself is harmonic, namely $\chi(\theta,y) \equiv h_+(y+\theta\sqrt{g}) + h_-(y-\theta\sqrt{g})$ where h_+, h_- are arbitrary functions. We thus recover the results noted in Refs.[15].

IV. EVOLUTION DOMINATED SOLUTIONS

In general, a longitudinal flow in the final state follows from a longitudinal pressure gradient and/or from a longitudinal flow in the initial state. Let us consider the sub-class of solutions where the effect of the initial flow is negligible compared to the one of the initial pressure gradient. This sub-class corresponds to the dominance of the hydrodynamic evolution over the influence of the initial conditions. A typical example of such a solution is the Belenkij-Landau solution [9], where the fluid is initially at rest (the so-called "full stopping" initial conditions), and then expands into the vacuum.

---

[5] Here we use our convention $\theta = \log T/T_0$ with opposite sign w.r.t. [11].

A. Khalatnikov potential and entropy flow

In order to model an evolution-dominated flow, let us consider all the sources at rest, *i.e.* $F(\hat{\theta},\hat{y}) \propto \delta(\hat{y})$. Let us also take the arbitrary temperature scale T_0 to be the maximal temperature of the sources (hence $\theta \equiv \log(T/T_0) \leq 0$), *i.e.* $F(\hat{\theta},\hat{y}) \propto \Theta(-\hat{\theta})$. All in all, we write

$$F(\hat{\theta},\hat{y}) = 4\sqrt{g}\; K(\hat{\theta})\; \Theta(-\hat{\theta})\; \delta(\hat{y})\,. \tag{67}$$

Inserting (67) in (36), and replacing the variable $\hat{\theta}$ by $\theta' \equiv \theta - \hat{\theta}$, one gets

$$\chi(\theta,y) = e^{-(\frac{g-1}{2})\theta} \int_{\theta}^{-\frac{|y|}{\sqrt{g}}} I_0\left(\frac{g-1}{2}\sqrt{\theta'^2 - y^2/g}\right)\; K(\theta-\theta')d\theta'\,, \tag{68}$$

where the function $K(\theta-\theta')$ carries the information on the initial conditions. Note that θ' is also negative.

In the following it is convenient to use a Laplace representation of (68). Since $\theta \leq 0$, we introduce the Laplace transform, and its inverse, with respect to $-\theta$ as:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\gamma) &= \int_{-\infty}^{0} d\theta\; e^{\gamma\theta}\; f(\theta) \\ f(\theta) &= \int_{\gamma_0-i\infty}^{\gamma_0+i\infty} \frac{d\gamma}{2\pi i}\; e^{-\gamma\theta}\; \tilde{f}(\gamma)\;, \end{aligned} \tag{69}$$

where γ_0 is a real constant that exceeds the real part of all the singularities of the integrand, i.e the integral is calculated on an imaginary contour that lies on the right of all singularities. Following [9], the Khalatnikov potential (68) can be written as a convolution of the two functions :

$$\begin{aligned} \Theta(-\theta)\, K(\theta) &= \int_{\gamma_0-i\infty}^{\gamma_0+i\infty} \frac{d\gamma}{2\pi i}\, e^{-\gamma\theta}\tilde{K}(\gamma) \\ \Theta\left(-\theta-|y|/\sqrt{g}\right) I_0\left(\frac{g-1}{2}\sqrt{\theta^2-y^2/g}\right) &= \int_{\gamma_0-i\infty}^{\gamma_0+i\infty} \frac{d\gamma}{2\pi i}\, \frac{1}{\sqrt{\gamma^2-\frac{(g-1)^2}{4}}} \left[e^{-\gamma\theta-\frac{|y|}{\sqrt{g}}\sqrt{\gamma^2-\frac{(g-1)^2}{4}}}\right]. \end{aligned} \tag{70}$$

As the Laplace transform changes convolutions into ordinary products, one gets the Laplace representation

$$\chi(\theta,y) = \int_{\gamma_0-i\infty}^{\gamma_0+i\infty} \frac{d\gamma}{2\pi i} \left[e^{-\left(\gamma+\frac{g-1}{2}\right)\;\theta-\frac{|y|}{\sqrt{g}}\sqrt{\gamma^2-\frac{(g-1)^2}{4}}}\right] \frac{\tilde{K}(\gamma)}{\sqrt{\gamma^2-\frac{(g-1)^2}{4}}}\,. \tag{71}$$

Notice that, while the expression of the solution (68) restricts the phase-space domain in the interval $|y| \leq -\sqrt{g}\;\theta$, equation (71) may allow for an analytic continuation of the solution of the Khalatnikov potential outside this region. However the outside region may be different (*e.g.* with $\chi \equiv 0$, as in [9]).

Let us now investigate the properties of the entropy flow given by the solutions (71) of the Khalatnikov equation. Inserting the Khalatnikov potential (71) into the expression of the entropy distribution (50), one is led to the following formula:

$$\frac{dS}{dy}(y) = \frac{s_F}{2gT_F} \int_{\gamma_0-i\infty}^{\gamma_0+i\infty} \frac{d\gamma}{2\pi i}\; e^{-\theta_F(\gamma+\frac{g-1}{2})} \left[(\gamma+g/2)^2-1/4\right]\; \tilde{K}(\gamma)\; \frac{e^{-\frac{|y|}{\sqrt{g}}\sqrt{\gamma^2-\frac{(g-1)^2}{4}}}}{\sqrt{\gamma^2-\frac{(g-1)^2}{4}}}\quad. \tag{72}$$

In formula (72), one may distinguish the *kernel*

$$\mathcal{Q}(\gamma,y) \equiv \frac{\exp -\frac{|y|}{\sqrt{g}}\sqrt{\gamma^2-\frac{(g-1)^2}{4}}}{\sqrt{\gamma^2-\frac{(g-1)^2}{4}}} \tag{73}$$

driving the dynamical hydrodynamic evolution as expressed on the entropy flow, and the *coefficient function*

$$\tilde{C}_f(\gamma) = \left[(\gamma+g/2)^2-1/4\right]\; \tilde{K}(\gamma) \tag{74}$$

which encodes the initial conditions of the entropy flow.

B. Total entropy

Since we have a well-defined relation (72) for the entropy distribution, it is easy to perform the integration over y and obtain the total entropy flux through the hypersurface with fixed temperature $T = T_F$.

Formally, (72) leads to:

$$S_{tot}\,|_{\theta=\theta_F} \;=\; 2\int_0^{-\theta_F\sqrt{g}} dy\;\frac{s_F}{2gT_F}\int_{\gamma_0-i\infty}^{\gamma_0+i\infty}\frac{d\gamma}{2\pi i}\left(\gamma+\frac{g-1}{2}\right)\left(\gamma+\frac{g+1}{2}\right)e^{-\frac{|y|}{\sqrt{g}}\sqrt{\gamma^2-\frac{(g-1)^2}{4}}}\;\times \\ \times\frac{\tilde{K}(\gamma)}{\sqrt{\gamma^2-\frac{(g-1)^2}{4}}}\,e^{-\theta_F(\gamma+\frac{g-1}{2})}\;, \tag{75}$$

where we took into account the $\Theta\left(-\theta-|y|/\sqrt{g}\right)$ function present in (70). Indeed, the hydrodynamical flow is limited in the region inside this domain, with possible contributions on the boundary $\theta=-|y|/\sqrt{g}$ (Riemann waves, see, *e.g.* [9]).

We know that, by construction, the flow is isentropic and thus the total entropy S_{tot} is conserved. In fact it is possible to show that the dominant part of the total conserved entropy results from the kernel (73) more than other sources such as the coefficient function (74) or the boundary Riemann waves. Hence the hydrodynamical dynamics dominate. For this sake, let us release for simplicity the boudary limitations of the integral over y. One writes

$$S_{tot}\approx\frac{s_F}{T_F\sqrt{g}}\int_{\gamma_0-i\infty}^{\gamma_0+i\infty}\frac{d\gamma}{2\pi i}\,\frac{\gamma+\left(\frac{g+1}{2}\right)}{\gamma-\left(\frac{g-1}{2}\right)}\,\tilde{K}(\gamma)\,e^{-\theta_F(\gamma+\frac{g-1}{2})}=\frac{s_F\sqrt{g}}{T_F}\,\tilde{K}\left[(g-1)/2\right]\;e^{-(g-1)\theta_F}\;. \tag{76}$$

Indeed, the complex integral is obtained through the singularities of the integrand, which can be due either to the initial conditions (through singularities of $\tilde{K}(\gamma)$) or to the hydrodynamical dynamics (through the pole at $\gamma=(g-1)/2$), or both. If the singularities of $\tilde{K}(\gamma)$ are situated at the left (resp. right) of the pole, they will be subdominant (resp. dominant) in the total entropy. Assuming a dominance of the hydrodynamic flow, we get the final result of (76). The physical meaning of (76) becomes clear when using the thermodynamical relation (26) and the entropy density s_0 at the temperature T_0. The total entropy writes[6]

$$S_{tot}\approx\frac{s_0\sqrt{g}}{T_0}\,\tilde{K}\left[(g-1)/2\right]\;, \tag{77}$$

and thus does not depend on the features of the flow at $T=T_F$. In conformity with the isentropic property of the flow, the total hydrodynamic entropy of the perfect fluid should be conserved, as the expression (77) is independent of T_F. This provides a self-consistency check for an evolution-dominated flow. In more general cases, one should also take into account the other contributions.

A final comment is in order. A priori, the domain of integration $|y|\leq Y/2$ comes from energy-momentum conservation. However, the formula (68) for the Khalatnikov potential is only valid in the domain $|y|\leq-\sqrt{g}\;\theta_F$. In the flow-dominated approximation, $-\sqrt{g}\theta_F$ and $Y/2$ are considered large enough such that the integration domain can extend to infinity and the kernel only contributes[7].

C. Relation to the Belenkij-Landau solution

We have studied the dependence of our results on the coefficient function (74) by imposing various relevant analytic forms for $\tilde{K}(\gamma)$. We observed that typical meromorphic functions bounded by a constant[8] at infinity and with poles at the left of $\gamma=\frac{g-1}{2}$, give smooth and similar entropy flow distributions, almost identical at large enough θ_F. Hence we conjecture that all physical evolution-dominated solutions to be almost identical, at least for a sufficiently large

---

[6] Note that $\tilde{K}$ is dimensionless as the potential χ.

[7] We have performed numerical checks which show that thanks to the decreasing exponential behavior, the boundary term contributes negligibly to the total entropy.

[8] Indeed, choosing $\tilde{K}(\gamma)$ of strictly positive degree leads to an unphysical angular point at $y=0$ and to a function $K(\theta)$, see (70), containing derivatives of Dirac distributions, i.e. structures that are too singular to describe physical flows.

value of $\theta_F = \log(T_F/T_0)$. In order to provide an analytic expression for the entropy flow characteristic of the family of solutions, we remark that the following choice of the coefficient function (74)

$$\tilde{C}_f(\gamma) = C\left(\gamma + \frac{g-1}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{K}(\gamma) = \frac{C}{(\gamma + \frac{g+1}{2})}, \tag{78}$$

where C is a dimensionless constant, corresponds to the hydrodynamical flow with an initial full stopping condition [9].

The Belenkij-Landau solution [9] describes the evolution of a slice of fluid of width $2L$ initially at rest and expanding in the vacuum. It consists in a hydrodynamical flow bounded by Riemann waves. The matching conditions between the flow and the waves in space-time translated in terms of temperature and rapidity variables are realized by imposing zero boundary conditions on the Khalatnikov potential χ on the characteristics $\theta = \pm y/\sqrt{g}$. Another condition on the potential is that the center of the slice remains by symmetry at rest ($y = 0$) during the evolution.

We have checked that the energy flow, resulting from modifications of the Ansatz (78) satisfying the dominance of the kernel singularity, is not sensibly modified from the one given by inserting the coefficient function (78) into (72).

Inserting now (78) into (71), the Khalatnikov potential between the characteristics $-\theta \geq |y|/\sqrt{g}$ acquires the analytic form [9, 10]

$$\chi(\theta, y) = C \int_{\theta}^{-\frac{|y|}{\sqrt{g}}} I_0\left(\frac{g-1}{2}\sqrt{\theta'^2 - \frac{y^2}{g}}\right) e^{\theta - (\frac{g+1}{2})\theta'} d\theta' \ . \tag{79}$$

The potential is identically zero in the region $-\theta \leq |y|/\sqrt{g}$. Note that the constant in (78,79) is such that $C \propto LT_0$ with our notations.

Let us now insert this specific solution to our general formula (50) for the entropy distribution. Calculating the derivatives we find:

$$\frac{dS}{dy}(y) = s_F \frac{(g-1)C}{4g\ T_F}\, e^{-\frac{(g-1)}{2}\theta_F}\left[I_0\left(\frac{g-1}{2}\sqrt{\theta_F^2 - y^2/g}\right) - I_1\left(\frac{g-1}{2}\sqrt{\theta_F^2 - y^2/g}\right)\frac{\theta_F}{\sqrt{\theta_F^2 - y^2/g}}\right] \ . \tag{80}$$

Since θ_F is negative, this expression is always positive, at least in the region $\theta_F^2 - y^2/g \geq 0$. Hence the positivity of the entropy flow is ensured. Finally, the expression (80) is divergence-free, since it is finite for $\theta_F^2 = y^2/g$. We also note that it is still real in the analytic continuation of the solution (80) for $\theta_F^2 < y^2/g$, since in this case both the numerator and the denominator of the second term are purely imaginary[9].

For the total entropy, inserting (78) into the general formula (75) one gets, using the thermodynamic relations (26)

$$S_{tot} = \frac{C\ s_F}{\sqrt{g}\ T_F}\ e^{-(g-1)\theta_F} = \frac{C\ s_0}{\sqrt{g}\ T_0} \ . \tag{81}$$

A comment is in order at this point. Condition (78) has been considered to describe the so-called full stopping conditions. In the original papers [9], it consists in the assumptions that i) there is a specific plane where the medium is at rest for all times, and that ii) on the vacuum-boundary we have just a simple (Riemann) wave. In fact, the resulting entropy flow distribution is expected to be more general and is characteristic of the evolution-dominated hydrodynamic flows. Hence the Khalatnikov potential (79) (already obtained in [9]) and the entropy flow (80) may serve as an analytic formulation for the class of evolution-dominated flows. In fact, their features are essentially determined by the evolution kernel $\mathcal{Q}(\gamma, y)$ (see formula (73)).

Finally, it is interesting to note that formula (72) gives the possibility to compare the hydrodynamic predictions with those of other existing models of heavy-ion (and eventually hadron-hadron, soft scattering) reactions. This relies on the possibility of relating thermodynamic quantities, such as the temperature and the entropy, to observed properties of the particle multiplicities. In this scheme, the rapidity of particles is defined by the corresponding value of $y \equiv \log u^+$ obtained from the fluid velocity of the lump of fluid giving rise locally to the hadrons. In the same context, the overall temperature gradient θ_F will be related to the total available rapidity and the entropy to the multiplicity up to phenomenological factors. We will discuss in the next section the phenomenological issues of our derivation, but the general theoretical idea is that formula (72) can be compared with the one-particle inclusive hadronic cross section which is related to the scattering amplitudes. In this respect the generic form (73) of the hydrodynamic evolution kernel may serve for a comparison of hydrodynamic properties with conventional models of scattering amplitudes.

---

[9] Positivity may also extend, but is not ensured due to the appearance of Bessel function zeroes.

V. PHENOMENOLOGICAL APPLICATIONS

Motivated by the seminal works of Landau [3] and Bjorken [4], the comparison of their predictions for (1+1) hydrodynamics with some features of the data has been made (see *e.g.* [5–7, 9, 10]). Even if such a rough approximation, ignoring the details of the transverse motion or of the hadronization, cannot replace the numerical simulations, it has given some useful information on the dynamics of the quark-gluon plasma. For instance, the order of magnitude estimates made using the Bjorken flow in the central region [4] and the comparison of the multiplicity distributions with the predictions of the Landau flow [6, 7] have indicated that the proper-time region during which the hydrodynamic flow is approximately (1+1) dimensional has a deep impact on the whole process. Our aim is to take benefit of the explicit form (80) representative of the entropy of evolution-dominated flows, based on the Khalatnikov potential (79), to revisit the discussion in the light of recent experimental results.

For the phenomenological application, we will concentrate on the entropy flow corresponding to the Belenkij-Landau solution. From (80) and (81), one obtains the formula

$$\frac{dS}{dy}(y) = S_{tot}\ \frac{(g-1)}{4\sqrt{g}}\ e^{\frac{(g-1)}{2}\theta_F}\left[I_0\left(\frac{g-1}{2}\sqrt{\theta_F^2 - y^2/g}\right) - I_1\left(\frac{g-1}{2}\sqrt{\theta_F^2 - y^2/g}\right)\frac{\theta_F}{\sqrt{\theta_F^2 - y^2/g}}\right]\ , \tag{82}$$

where we have used the normalization by the total entropy S_{tot}. Formula (82) still depends on two hydrodynamical parameters θ_F, the logarithmic temperature evolution, and the speed of sound $c_s = g^{-1/2}$.

A. Multiplicity distribution at fixed energy

In order to investigate the phenomenological validity of formula (82), let us consider the experimental BRAHMS data for the charged multiplicity distribution in the most central collisions as a function of the rapidity measured recently at RHIC [16]. For sake of simplicity, in accordance with the (1+1) dimensional approximation of the dynamics that we consider, we will make the following assumptions. We will identify the rapidity if the fluid elements $y_f \equiv 1/2\log(u^+/u^-)$ with the rapidity of the particles $y_p \equiv 1/2\log(p^+/p^-)$. We thus keep the same notation y. In the same way, we assume that the multiplicity distribution of produced particles dN/dy in rapidity can be considered to be equal, up to a constant factor, to the entropy distribution[10] dS/dy. One expects that the end of the hydrodynamic behavior appears at a typical temperature T_F, related to a hadronization or freeze-out temperature, and independent of the total c.o.m. energy of the collision. On the other hand, the initial temperature T_0 is expected to depend on the total c.o.m. energy (or equivalently on the total rapidity Y) and on the centrality of the collision, through the energy density $\epsilon(T_0)$ of the medium produced by the pre-hydrodynamic stage of the collision. Thus, $\theta_F = \log T_F/T_0$, should be a function of Y and of the centrality. Our formalism, based on the $1+1$ dimensional approximation of the flow, is not appropriate to have a precise description of the freeze-out. Note however that some improvement could be obtained by using, *e.g.*, the Cooper-Frye formalism [17] in the derivation of the entropy flow. We postpone this to further studies.

Using then formula (82) for dN/dy and fitting BRAHMS data by adjusting the parameter θ_F we obtain a good description for different values of g. In Fig. 1, as an example, we present the BRAHMS data fitted with (82), for four pairs of g and θ_F values, reported on the figure. In these plots the solid line corresponds to the physically meaningful region ($\frac{y^2}{g} \leq \theta_F^2$), while the dotted line corresponds to the analytic continuation of formula (82) in the region $\frac{y^2}{g} > \theta_F^2$, where the applicability of the solution (82) is theoretically questionable.

The phenomenological application appears to be correct for quite different values of the speed of sound $c_s \equiv g^{-1/2}$. The overall form of the curves is satisfactory. For the first curve at $c_s = 1/\sqrt{3}$ (*i.e.* the conformal case), however,the analytic continuation beyond $\frac{y^2}{g} \leq \theta_F^2$ is soon reached[11]. We will comment on this remark later on. Indeed, when decreasing the speed of sound, *e.g.* for $g = 5$, the physical domain $\frac{y^2}{g} \leq \theta_F^2$ extends in rapidity.

Some comments on these results are in order.

a) It has been well-known since long [6] and confirmed more recently that a Gaussian fit to the data

$$\frac{dS}{dy}(y) \sim e^{-y^2/Y} \tag{83}$$

---

[10] We also assume that the multiplicity distribution of charged particles is proportional to the total one.

[11] One may also note that the curve indicates a violation of positivity before the kinematical limit.

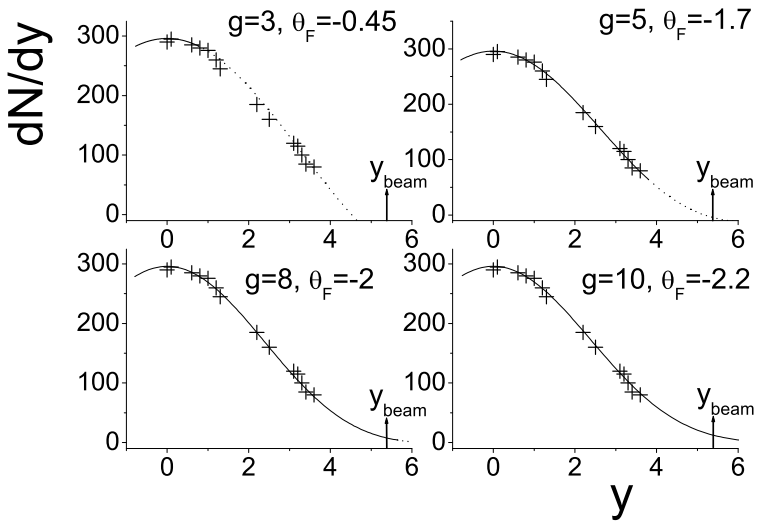

FIG. 1: *BRAHMS data fitted with the hydrodynamic formula.* The data are taken from [16] and they correspond to charged pions in cental Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV. The solid line corresponds to the physical region ($\frac{y^2}{g} \leq \theta_F^2$), while the dotted one corresponds to its analytic continuation ($\frac{y^2}{g} > \theta_F^2$). The small vertical line marks the experimental beam-rapidity $Y_{beam} \sim Y/2$.

with a variance $\sqrt{Y}$, as predicted by Landau [3], was reasonably verified. We noticed, that, indeed, expression (82) has an approximate Gaussian form, but it does not correspond, except for very large θ_F, to the expansion of the exact entropy distribution near $y = 0$, as in the original argument [3] which was based on an asymptotic approximation[12]. Hence, the sub-asymptotic features of the full solution plays an important phenomenological role.

b) There is apparently no track of the transition between the physical regime $\frac{y^2}{g} \leq \theta_F^2$ and its analytic continuation, described by the dotted lines in Fig.1. This is related to the mathematical property of the general solution (72) expressed using a Laplace transform. In short, the $I_{0,1}$ Bessel functions are transformed into $J_{0,1}$ with the same argument up to a factor i, without discontinuity.

c) This transition is however meaningful. In fact one knows that the lines $\frac{y}{\sqrt{g}} = \mp\theta_F$ delineate different regions of the hydrodynamical regime. Discontinuities, and thus shock or Riemann waves may occur at these boundaries, called characteristics of the equation [18]. Hence some other solutions may branch at this point (see *e.g.* [9, 10]). However, our results do not depend on the specific form of these other solutions such as the shock waves considered in [9, 10].

B. Energy dependence of the multiplicity distributions

Going a step further, we would like to interpret the energy dependence (*i.e.* the Y dependence) of the (1+1) solution for the entropy flow compared with multiplicity data. For this sake, we make use of the Gaussian fits reported[13] in [16] for different sets of data ranging from the AGS to RHIC.

In Fig. 2 we give the determination of θ_F as a function of Y which gives a good description of the Gaussian fits with the variance taken from [16]. As in the previous study of BRAHMS data, we performed this fit for six different values of g. As shown in Fig. 2 the corresponding relation is clearly linear. We can write:

$$\theta_F = -\kappa\,(Y - Y_0)\ . \tag{84}$$

As shown on the figure, the constant term Y_0 depends appreciably on g while the slope $\kappa \approx 0.2$ remains only slightly dependent on it. On a physical ground, the linear relation (84) has a reasonable interpretation. The initial

[12] It is indeed easy to verify that for phenomenological values of θ_F, this approximation does not work in the data range.
[13] In fact, the prediction (83) fits reasonably well, but we used instead the actual best-fit determination of the variances provided in [16].

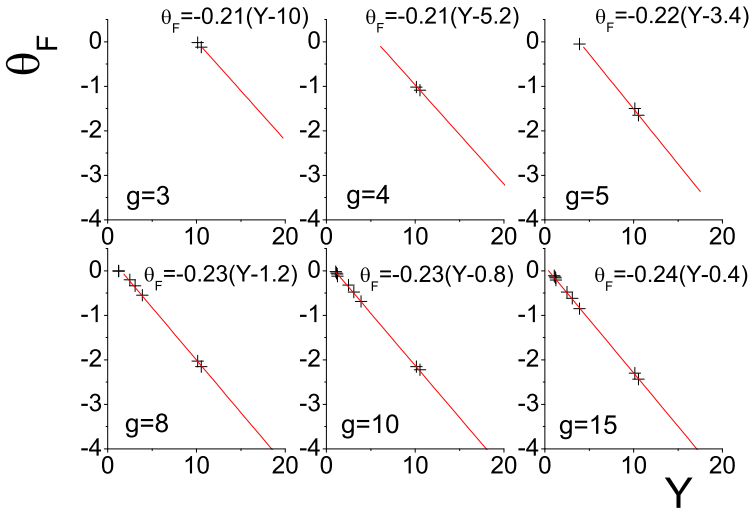

FIG. 2: *The hydrodynamical parameter θ_F as a function of Y.* We describe the dependence for for six values of g, in a large range starting from the canonical value 3 which would correspond to a conformal fluid in $(3+1)$ dimensions.

temperature of the medium is expected to grow as a power $\kappa \leq 1$ of the incident energy. One finds approximately $T_0/T_F = e^{-\theta_F} \sim e^{.22(Y-Y_0)}$. Hence the more energy is available, the longer the hydrodynamical evolution lasts. At smaller speed of sound the hydrodynamical evolution has to occur on a larger temperature interval in order to describe the same entropy distribution, as could be expected.

Moreover, there is a physical argument, analogous to the one proposed by Landau [3], for the existence of a linear relation (84) between the temperature ratio and the total c.o.m. energy. Assuming the approximate validity of the Bjorken relation[14] $\tau_0/\tau_F \approx (T_F/T_0)^g$, where τ_0 (resp. τ_F) are the initial (resp. final) proper-times of the (1+1) hydrodynamical evolution and reporting in (84) one finds

$$\log \tau_0/\tau_F \approx \kappa g\,(Y - Y_0) \ . \tag{85}$$

Indeed, following [3], the separation proper-time from (1+1) hydrodynamics to the (1+3) regime is of order $\log \Delta\tau_s \sim \frac{1}{2}Y$ where Δ is the typical transverse size of the initial particles. Assuming that we can approximate $\Delta\tau_s$ by τ_0/τ_F, and taking into account the Bjorken flow approximation, formula (85) is suggestive of the proportionality property. We leave the precise values for κ, τ_0/τ_F and Y_0 to a further determination of g since the data we discussed do not prefer a precise value of κg (to be compared with $1/2$ obtained for $\log \Delta\tau_s$).

An interesting consequence of the linear relation (84) between θ_F and Y at fixed g is the possibility of relating the general hydrodynamic entropy distribution (72) to the one-particle inclusive cross-section and thus to the appropriate scattering amplitudes. These are not easy to formulate in the hydrodynamical formalism. Being more specific, let us transform the formula (72) in terms of the energy dependence using κ as the coefficient of proportionality in (84). We get

$$\frac{dN}{dy}(y,Y) \propto \int_{\gamma_0-i\infty}^{\gamma_0+i\infty} \frac{d\gamma}{2\pi i}\, e^{-\kappa(Y-Y_0)(\gamma+\frac{g-1}{2})} \left[(\gamma+g/2)^2-1/4\right]\ \tilde{K}(\gamma)\ \frac{e^{-\frac{|y|}{\sqrt{g}}\sqrt{\gamma^2-\frac{(g-1)^2}{4}}}}{\sqrt{\gamma^2-\frac{(g-1)^2}{4}}} \ . \tag{86}$$

Formula (86) shows that the characteristic hydrodynamic kernel $\mathcal{Q}$ (see (73)) appears also as the kernel of the Laplace transform in Y of the one-particle inclusive cross-section, up to a redefinition of the conjugate moment $\omega = \kappa\gamma$ of the total rapidity Y. This relation may be useful to compare various theories and models for scattering amplitudes of high-energy collisions with the predictions of hydrodynamic evolution.

---

[14] This relation, properly stating, is exact only for the Bjorken boost-invariant flow. However, one expects that it remains approximately valid in the central region of more general flows (see, *e.g.* [11].)

VI. CONCLUSIONS AND OUTLOOK

Let us summarize the results of our study:

On the theoretical ground, we have the following results:

i) We have recalled and reformulated the derivation of the Khalatnikov potential and equation in terms of light-cone variables. This allows to formulate the initial nonlinear problem of (1+1) hydrodynamics of a perfect fluid in terms of solutions of a linear equation. As an application, using the Green function formalism we derive the general form of the solution for constant speed of sound.

ii) Expressing the flow of entropy through fixed-temperature hypersurfaces, we provide general and simple expressions of the entropy flow dS/dy in terms of the Khalatnikov potential[15].

iii) We check and illustrate the simplicity of the obtained formulae for dS/dy by applying the formalism to some exact hydrodynamic solutions which were not using the Khalatnikov formulation, such as the Bjorken flow and the less straightforward example of the harmonic flows of Ref.[11].

iv) We use our formalism to find the entropy flow for the subclass of solutions for which the hydrodynamic evolution dominates over the influence of initial conditions. A characteristic example of such flows is the one studied long ago by Landau and Belenkij [9], corresponding to full stopping initial conditions. We provide an exact expression for the related entropy flow.

As a phenomenological application, we discuss the relevance of the full stopping entropy flow for modern heavy-ion experiments which was advocated, *e.g.* in Refs.[6, 7].

i) The exact expression of dS/dy for the Belenkij-Landau solution, depending only on the ratio T_F/T_0 and on the speed of sound c_s, is in agreement with the shape of the multiplicity distribution of particles $dN/dy(y, Y)$ observed in heavy-ion reactions, with a linear relation between the temperature ratio and the total rapidity $\log T_0/T_F = \kappa\,[Y - Y_0(c_s)]$.

ii) However, comparing our exact results with the asymptotic Gaussian predictions [3, 6] for the multiplicity distributions, we find that nonasymptotic contributions play an important role in the phenomenological description.

iii) The speed of sound, which is the remaining parameter in our study, is not determined by the multiplicity distribution, since the phenomenological description seems satisfactory for a rather large range of the parameter $g \equiv 1/c_s^2$. However, even if one does not see any sizable effect on the curve for $dS/dy(y, T)$ one notices that the physical domain of the hydrodynamic expansion is restricted by the condition $y^2 \leq g\ \theta_F^2$, especially for a speed of sound as large as the conformal one $c_s = 1/\sqrt{3}$.

This summary of conclusions leads to a few comments on possible further developments of our approach. Some of them are technical but could provide a further insight on the features of (1+1) hydrodynamics. First, it should be useful to study in detail a larger set of solutions. Second, implementing the Cooper-Frye formalism [17] directly in terms of the Khalatnikov potential could refine the hypothesis of a fixed final temperature T_F. Also, the investigation of the entropy flow through other hypersurfaces, in particular the proper-time ones (*cf.* [11]) would be welcome, in particular to allow for a straightforward implementation of fixed proper-time initial conditions.

On the phenomenological point-of-view, it is important to develop the comparison of the (1+1) approach with the data and including more corrections to the idealized dominance of the longitudinal motion. One question could be settled at least phenomenologically, which is the determination of the best fit for the speed of sound parameter, which is presently rather free. Also, including a viscosity contribution is another important issue, together with the investigation of the entropy flows with varying speed-of-sound.

One may ask what is the meaning of the transition on the lines $y^2 = g\theta_F^2$, which appear even in the physical rapidity region. Mathematically, they are the Riemann characteristics of the Khalatnikov equations and as such, they are regions where discontinuities may appear [18]. Indeed, these characteristics were used in the old studies [9, 10] to connect boundary Riemann waves to the domain of dynamical hydrodynamic evolution. What is their meaning, if any, in the modern view we have now of high-energy collisions, is an interesting open question.

On a more conceptual point-of-view, our study of the entropy flow and its dependence on rapidity may have some impact on recent studies [13, 14] of the AdS/CFT correspondence. It relates the hydrodynamics of a fluid, whose microscopic description is the one of a gauge field theory, with the string theory in a higher-dimensional space where the Einstein equations govern the gravitational properties of its low-energy regime. The actual realizations of the duality correspondence for a collective flow require boost-invariance and thus are limited to the Bjorken flow. This flow contains an infinite energy, and is thus of limited relevance. Knowing the analytic form of more physical solutions should be helpful to derive their dual gravitational backgrounds, which is *a priori* a formidable task.

---

[15] After the completion of this paper, we noticed a related study in Ref.[19]

Acknowledgements: We thank Andrzej Bialas and Jean-Yves Ollitrault for useful suggestions. One of us (E.N.S) wishes to thanks Institut de Physique Théorique, CEA, for the hospitality during the preparation of the present work.

---

[1] See, for instance, T. Hirano, "Hydrodynamic approaches to relativistic heavy ion collisions," Acta Phys. Polon. B **36**, 187 (2005);
P. Huovinen and P. V. Ruuskanen, "Hydrodynamic models for heavy ion collisions," Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **56**, 163 (2006).

[2] J. Y. Ollitrault, "Anisotropy As A Signature Of Transverse Collective Flow," Phys. Rev. D **46**, 229 (1992).

[3] L. D. Landau, "On the multiparticle production in high-energy collisions," Izv. Akad. Nauk Ser. Fiz. **17**, 51 (1953) (in russian). [English translation: *Collected Papers of L. D. Landau, edited by D. ter Haar (Gordon and Breach, New-York, 1968)*].

[4] J. D. Bjorken, "Highly Relativistic Nucleus-Nucleus Collisions: The Central Rapidity Region," Phys. Rev. D **27**, 140 (1983).

[5] See for instance:
F. Cooper, G. Frye and E. Schonberg, "Landau's Hydrodynamic Model Of Particle Production And Electron Positron Annihilation Into Hadrons," Phys. Rev. D **11**, 192 (1975);
K. J. Eskola, K. Kajantie and P. V. Ruuskanen, "Hydrodynamics of nuclear collisions with initial conditions from perturbative QCD," Eur. Phys. J. C **1**, 627 (1998).

[6] P. Carruthers and M. Duong-Van, "New scaling law based on the hydrodynamical model of particle production," Phys. Lett. B **41** (1972) 597,
"Rapidity and angular distributions of charged secondaries according to the hydrodynamical model of particle production," Phys. Rev. D **8** (1973) 859.

[7] P. Steinberg, "Landau hydrodynamics and RHIC phenomena," Acta Phys. Hung. A **24**, 51 (2005).

[8] I.M.Khalatnikov, Zh.Eksp. Teor. Fiz. **26** 529 (1954) (in Russian). For an english version, see Ref.[9], with a correction of the equation for the potential.

[9] S. Z. Belenkij and L. D. Landau, "Hydrodynamic theory of multiple production of particles," Nuovo Cim. Suppl. **3S10** (1956) 15 [Usp. Fiz. Nauk **56** (1955) 309];
L. D. Landau, with S. Z. Belenkij, *Collected Papers of L. D. Landau, edited by D. ter Haar (Gordon and Breach, New-York, 1968), Paper # 88, page 665* (the derivation of Khalatnikov's solution is not given in Nuovo Cimento's version).

[10] S. Amai, H. Fukuda, C. Iso, M. Sato, "The Relations Between Correlation Functions Of Produced Particles And The Dynamics Of High-Energy Multiparticle Production," Prog. Theor. Phys. **17**, 241 (1957);
G. A. Milekhin, "On the vibrations of the electronic plasma," Sov. Phys. JETP **35**, 682; [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **35**, 978 (1958)].

[11] A. Bialas, R. A. Janik and R. B. Peschanski, "Unified description of Bjorken and Landau 1+1 hydrodynamics," Phys. Rev. C **76**, 054901 (2007).

[12] T. Csorgo, M. I. Nagy and M. Csanad, "A New Family of Simple Solutions of Perfect Fluid Hydrodynamics," Phys. Lett. B **663**, 306 (2008);
S. Pratt, "A co-moving coordinate system for relativistic hydrodynamics," Phys. Rev. C **75**, 024907 (2007).

[13] R. A. Janik and R. Peschanski, "Asymptotic perfect fluid dynamics as a consequence of AdS/CFT," Phys. Rev. D **73**, 045013 (2006);
"Gauge / gravity duality and thermalization of a boost-invariant perfect fluid," Phys. Rev. D **74**, 046007 (2006).

[14] G. Policastro, D. T. Son and A. O. Starinets, "The shear viscosity of strongly coupled N = 4 supersymmetric Yang-Mills plasma," Phys. Rev. Lett. **87**, 081601 (2001);
H. Nastase, "The RHIC fireball as a dual black hole," arXiv:hep-th/0501068;
E. Shuryak, S. J. Sin and I. Zahed, "A gravity dual of RHIC collisions," J. Korean Phys. Soc. **50**, 384 (2007);
Y. V. Kovchegov and A. Taliotis, "Early time dynamics in heavy ion collisions from AdS/CFT correspondence," Phys. Rev. C **76**, 014905 (2007).

[15] M. S. Borshch and V. I. Zhdanov, "Exact Solutions of the Equations of Relativistic Hydrodynamics Representing Potential Flows," SIGMA **3**, 116 (2007) [arXiv:0709.1053 [math-ph]];
M. I. Nagy, T. Csorgo and M. Csanad, "Detailed description of accelerating, simple solutions of relativistic perfect fluid hydrodynamics," Phys. Rev. C **77**, 024908 (2008).

[16] I. G. Bearden *et al*, BRAHMS Collaboration, "Centrality dependence of charged-particle pseudorapidity distributions from d + Au collisions at s(NN)**(1/2) = 200-GeV," Phys. Rev. Lett. **94**, 162301 (2005).

[17] F. Cooper and G. Frye , "Landau's Hydrodynamic Model Of Particle Production And Electron Positron Annihilation Into Hadrons," Phys. Rev. D **10**, 186 (1974).

[18] R. Courant and D. Hilbert, "Methods of Mathematical Physics", Vol. 2, New York : Wiley, (1989).

[19] G.A.Milekhin, "Hydrodynamic theory of multiple production of particles in collisions between fast nucleons and nuclei" Zh. Eksp. Teor. Fiz. **35**, 1185 (1958) [Sov. Phys. JETP **35**, 829 (1959)].

Article [VI]

Geometric Scaling of F_2 and F_2^c in data and QCD Parametrisations

Guillaume Beuf*
Institut de physique théorique, CEA/Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette cedex, France
URA 2306, unité de recherche associée au CNRS

Christophe Royon†
IRFU/Service de Physique des Particules, CEA/Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette cedex, France

David Šálek‡
Institute of Particle and Nuclear Physics, Charles University, Prague, Czech Republic

The scaling properties at low x of the proton DIS cross section and its charm component are analyzed with the help of the quality factor method. Scaling properties are tested both in the deep inelastic scattering data and in the structure functions reconstructed from CTEQ, MRST and GRV parametrisations of parton density functions. The results for DIS cross sections are fully compatible between data and parametrisations. Even with larger error bars, the charm component data favors the same geometric scaling properties as the ones of inclusive DIS. This is not the case for all parametrisations of the charm component.

I. INTRODUCTION

Geometric scaling [1] is a remarkable empirical property verified by data on high energy deep inelastic scattering (DIS) *i.e.* virtual photon-proton cross-sections. One can indeed represent with reasonable accuracy the cross section $\sigma^{\gamma^* p}$ in the low Bjorken x regime by the formula

$$\sigma^{\gamma^* p}(x,Q) = \sigma^{\gamma^*}(\tau) \ , \quad \text{where} \quad \tau = \log\left(\frac{Q^2}{Q_s^2(Y)}\right) \tag{1}$$

is the scaling variable, Q the virtuality of the photon, and $Y \equiv \log(1/x)$ the total rapidity in the γ^*-proton system. That empirical property is often considered as a hint for gluon saturation effects. Indeed, including non-linear effects due to high parton density in the evolution equations for parton distributions towards low x leads to such geometric scaling properties. In that context, $Q_s(Y)$ is called the saturation scale, and gives the typical scale for the onset of nonlinear effects. Using the dipole factorization of DIS observables, one predicts geometric scaling to hold also for deeply virtual Compton scattering, exclusive vector meson production and inclusive diffraction, which has been verified empirically [2]. Several types of geometric scaling or of generalizations of geometric scaling have been proposed in the literature, which correponds to various sets of approximations in the theoretical description of parton evolution and gluon saturation.

The quality factor (QF) introduced in [3] is an interesting tool in order to discuss scaling properties. It allows to compare the validity of different scaling laws on a given data set, without any assumption concerning the shape of the scaling function. It has been used in [3, 4] in order to study the above-mentioned scaling properties in the data for DIS observables. A standard fit to data tests locally in each bin the value of an observable, whereas the QF only considers point-to-point correlations for the observable. Hence, the QF method could give complementary informations, difficult to catch with a standard fit if the data are not very precise. For that reason, it is interesting to test with the QF method to what extend global fits to parton distribution functions (PDF) leads to the same scaling properties as the data. Many efforts have been made in the last few years by the MRST and CTEQ groups in order to implement heavy quark mass effects in a consistent way in their global fits. That justifies the comparison of data and PDF sets not only for the inclusive DIS cross section $\sigma \sim F_2/Q^2$ but also for its charm component $\sigma^c \sim F_2^c/Q^2$. The data for the bottom component F_2^b/Q^2 are not suitable for a scaling analysis, since they contain too few points.

The plan of the paper is as follows. In section **II** we review recent improvements in the treatment of heavy flavors in PDF's global fits, and we present the PDF sets used in the present study. In section **III** we describe the various

*Electronic address: guillaume.beuf@cea.fr
†Electronic address: christophe.royon@cea.fr
‡Electronic address: salekd@mail.desy.de

scaling hypotheses to be tested and their theoretical motivation. In section **IV** we present the Quality Factor method we shall use in the analysis and the set of data we consider for the fitting procedure. We provide and comment our results for F_2 in section **V** and for F_2^c in section **VI**. The section **VII** is devoted to the summary and the discussion of the results.

II. PDFS WITH HEAVY QUARK MASS EFFECTS

Let us briefly discuss the recent progresses concerning the treatment of heavy quark mass effects in PDFs global fits[1]. In the collinear factorization framework, one factorizes observables (*e.g.* proton structure functions) as a convolution of coefficient functions, describing partonic matrix elements, and PDFs for active flavors. In that formalism, active flavors are massless. Thus it should be relevant only if the quark masses corresponding to active flavors are small compared to the factorization scale μ_F, usually chosen to be a hard scale of the problem, such as Q for DIS. The most standard pQCD scheme for heavy flavors is the *fixed flavor number scheme* (FFNS), where heavy flavors are not considered as active, and are generated only by boson-gluon fusion. It gives reliable results for $Q = \mu_F$ of the order of the heavy quark mass m_{hf}. However, for $Q^2 \gg m_{hf}^2$ higher order terms in the coefficient functions are enhanced by powers of $\log(Q^2/m_{hf}^2)$, so that perturbation theory breaks down. In order to overcome this difficulty, *variable flavor number schemes* (VFNS) have been introduced. They consist in a succession of FFNS with one additional active flavor each time Q becomes larger than the mass of a heavy quark flavor. Two successive FFNS are matched with each other at the value $Q^2 \simeq m_{hf}^2$ chosen for the change of scheme, in order to ensure that renormalization is done in a consistent way for all FFNS. In the the first implementations of VFNS, called *zero-mass*-VFNS (ZM-VFNS), the switching from one FFNS to another at $Q^2 \simeq m_{hf}^2$, which is an unphysical change of factorization scheme, was coinciding with the threshold of production of the heavy flavor in the final state. That is not considered to be correct, and the latter should correspond to a threshold in the total energy W rather than in Q. That difficulty and a few others are solved if one goes to the *general-mass*-VFNS (GM-VFNS), build in [6]. One of the ingredients used in the GM-VFNS is the replacement of x by the rescaled variable

$$\chi = x\left(1 + \frac{4m_{hf}^2}{Q^2}\right) \tag{2}$$

when a pair of heavy quarks $H\bar{H}$ is produced in the final state, in order to ensure the right kinematical threshold: for W as small as $2m_{hf}$, χ goes to 1 and thus the cross section for heavy quark pair production vanishes.

The recent global fits of PDFs of the CTEQ and MRST groups are using such GM-VFNS. However, the details of the implementation differs between the two groups [7, 8]. In particular, they use different conventions to name the order of the analysis (see *e.g.* [5]), such as LO, NLO, etc. In our study, we use the following general purpose GM-VFNS PDFs sets: the NLO CTEQ6.6M [9], the NNLO MRST2006 [10], and the NLO MRST2004 [11]. We consider also the NNLO MRST2004 [11], which only uses an approximate implementation of GM-VFNS, and the older GRV98 [12] PDFs set based on a FFNS with 3 flavors.

In all of the abovementioned parametrisations, the charm production in DIS appears only pertubatively and the charm and anticharm PDFs (if any) start from zero at an intial factorization scale below the charm mass. Alternatively, some theoretical models for the nucleon content feature a non-perturbative intrinsic charm component. The CTEQ group studied that possibility, and released the PDFs sets CTEQ6.6C1 to CTEQ6.6C4 [9], which extend CTEQ6.6M by including various types of intrinsic charm component. The CTEQ6.6C1 and CTEQ6.6C2 parametrisations correspond respectively to a moderate and a strong intrinsic charm contribution of the form predicted by the BHPS model [13], which is non-negligible only at large x. By contrast, the CTEQ6.6C3 and CTEQ6.6C4 parametrisations correspond respectively to a moderate and a strong intrinsic charm contribution proportional to the light sea quark contribution at the initial scale for the global fit. They are not motivated by theoretical models.

III. SCALING VARIABLES FROM SATURATION PHYSICS

Let us sketch the theoretical motivation for the different forms of scaling (see TABLE I) proposed for deep-inelastic scattering at high energy. The evolution of unintegrated parton densities towards large rapidity Y at fixed k_T^2 is given

[1] For a recent pedagogical review, see [5].

by the BFKL [14] equation, provided that these unintegrated parton densities are small. Generic solutions of that linear evolution can be written as a sum of elementary wave solutions, with the help of Mellin transform. Each of these elementary wave solutions have scaling properties, but generically not their superposition. However, the BFKL evolution in Y leads to larger and larger unintegrated gluon density due to soft gluon radiation. At some point, the partons are so packed that additional soft gluons are emitted collectively. Thus, the soft gluons radiation is reduced by destructive interferences and the evolution becomes nonlinear in domain typically given by $k_T < Q_s(Y)$. The BFKL equation is then generalized *e.g.* by the BK [15] or JIMWLK [16] nonlinear equations. For a review about that gluon saturation phenomenon, see [17]. Such a nonlinear evolution equation has the following property. Even in the kinematical domain in which the nonlinear terms are negligible compared to the linear ones, the nonlinearity of the equation constrains the solution, acting as a dynamical boundary condition to the linear BFKL evolution [18]. The interplay between that specific boundary condition and the BFKL kernel selects dynamically [19] a specific wave solution (the *critical* one) of the BFKL equation in a window $k_T^2 \gtrsim Q_s(Y)$, which determines the evolution of $Q_s(Y)$. In that kinematical range, the solution of the nonlinear evolution loses memory of the initial condition. Hence, one finds that the unintegrated gluon distribution scales with $k_T^2/Q_s(Y)$ above the saturation scale. Due to the k_T-factorization in the linear regime, that property result in a geometric scaling (1) of the DIS cross-section, and of other observables.

In a fixed coupling α_s approximation, that mechanism is well understood, and leads to a saturation scale $\log Q_s(Y) \sim \lambda Y$. This corresponds to the geometric scaling variable FC in TABLE I. If one goes to the running coupling case, the mechanism leading to the scaling holds, but is analytically under control only at large enough Q^2, due to asymptotic freedom. One can deduce only the large Y behavior of the saturation scale, which is $\log Q_s(Y) \sim \lambda\sqrt{Y}$. Thus, one gets the predicted scaling property at large Y and Q^2 (with $\log Q^2 \propto \sqrt{Y}$). However, the extrapolation of that scaling property towards the finite Q^2 and Y phenomenologically relevant domain is not unique. We consider in particular two different scaling variables, which both give the theoretical asymptotic behavior. The first one is a genuine geometric scaling variable (as defined in (1)). It is called RCI in TABLE I. The second scaling variable [20] compatible with the asymptotic prediction is given in TABLE I and called RCII. Its value for the parameter λ should be the square of the one for the RCI scaling. In the recent years, the possible impact on saturation of fluctuations due *e.g.* to Pomeron loops has been extensively discussed. They lead to a random saturation scale, but event-by-event the geometric scaling property is preserved. In the fixed coupling approximation[2], the distribution of $\log Q_s^2(Y)$ is approximately gaussian, with a variance proportionnal to Y. Finally, one expect the cross section to scale with the diffusive scaling variable [21] (DS in TABLE I) which is the original geometric scaling variable divided by the dispersion $\sqrt{Y}$.

IV. THE QUALITY FACTOR METHOD

In this section, we remind briefly the definition of the Quality Factor (QF) which we use to compare quantitatively the different scaling variables (see Table I). We already used this method to compare the scaling results for the proton structure function F_2, the deeply virtual Compton scattering (DVCS), the diffractive structure function, and the exclusive vector meson production data measured at HERA [4] .

Given a set of data points $(Q^2, x, \sigma = \sigma(Q^2, x))$ and a parametric scaling variable $\tau = \tau(Q^2, Y = \log(1/x); \lambda)$ we want to know whether the cross-section can be parametrised as a function of the variable τ only. Since the function of τ that describes the data is not known, the QF has to be defined independently of the form of that function. The QF allows to quantitatively describe whether pairs of $\sigma = \sigma(Q^2, x)$ and $\tau = \tau(Q^2, Y = \log(1/x); \lambda)$ lie on a single curve for a given parameter λ.

For a set of points (u_i, v_i), where u_i's are ordered, we introduce QF as follows [3]

$$QF(\lambda) = \left[\sum_i \frac{(v_i - v_{i-1})^2}{(u_i - u_{i-1})^2 + \epsilon^2}\right]^{-1}, \tag{3}$$

where ϵ is a small constant that prevents the sum from being infinite in case of two points have the same value of u. According to this definition, the contribution to the sum in (3) is large when two successive points are close in u and far in v. Therefore, a set of points lying close to a unique curve is expected to have larger QF (smaller sum in (3)) compared to a situation where the points are more scattered.

---

[2] In the running coupling case, such a scenario is expected to hold in the high Y limit [22]. However, the running of the coupling seems to suppress the fluctuations effects in the accessible rapidity range at collider experiments [23].

	scaling	τ formula	parameters
FC	"Fixed Coupling"	$\log Q^2 - \lambda Y$	λ
RCI	"Running Coupling I"	$\log Q^2 - \lambda\sqrt{Y}$	λ
RCII	"Running Coupling II"	$\log(Q^2/\Lambda^2) - \lambda\frac{Y}{\log(Q^2/\Lambda^2)}$	λ Λ =0.2 GeV
DS	"Diffusive Scaling"	$\frac{\log(Q^2/\Lambda^2)-\lambda Y}{\sqrt{Y}}$	λ Λ =1 GeV

TABLE I: Scaling variables used in the fits to deep inelastic scattering data [4].

Since the cross-section in data differs by orders of magnitude and τ is more or less linear in $\log(Q^2)$ (see Table I), we decided to take $u_i = \tau_i(\lambda)$ and $v_i = \log(\sigma_i)$. This ensures that low Q^2 data points contribute to the QF with a similar weight as higher Q^2 data points. The set (u_i, v_i) has to be ordered in u before entering the QF formula. In order to stay independent of the exact values of u and v, all the values are rescaled so that $0 \leq u_i, v_i \leq 1$. All the QF's in this Letter are calculated with $\epsilon = 0.01$.

In order to test a scaling law τ and say whether the points (σ_i, τ_i) lie on a single line or not, we search for the parameter λ that minimises the $1/QF$ variable. The minimum value of $1/QF$ is obtained using the `MINUIT` package. Given the maximum value of the QF (minimum of $1/QF$), we are able to directly compare different scaling laws.

In this Letter, we aim to extend the study performed in Ref. [4] by considering the different F_2 parametrisations and the proton charm structure function data F_2^c measured at HERA and given by different parametrisations.

V. FITS TO INCLUSIVE DIS

We first aim to test the scaling quality using parametrisations of the proton structure function F_2 using the parametrisations from the CTEQ, MRSTW and GRV groups discussed in section II.

In a previous paper [4], we tested the scaling properties of F_2/Q^2 using the data available from the H1 [24], ZEUS [25], NMC [26] and E665 [27] experiments. We follow the same kinematical cuts for the parametrisations as we used for the experimental data [4]. We only consider data with $x < 10^{-2}$ and Q^2 in the range $[3; 150]$ GeV^2. The points with $x > 10^{-2}$ are removed from the data since valence quark densities dominate here, and the formalism of saturation cannot apply in this kinematical region. Similarly, the upper Q^2 cut is introduced, while the lower Q^2 cut ensures that we stay away from the soft QCD domain. In this kinematical domain, 217 data points are used. In order to be able to directly compare scaling properties in the CTEQ, MRST and GRV parametrisations to the experimental data, we choose the same 217 pairs of x and Q^2 as in data.

The QF method is more likely to prefer the parametrisations over data, since there is no statistical fluctuation in the parametrisations, contrary to data. It becomes clear from the definition that the statistically scattered values of structure functions in the experimental data lead to worse QF than a smooth parametrisation. In this sense, we cannot use the value of the QF to compare the scaling properties between experimental data and parametrisations. However, the QF can be directly compared among different parametrisations and can also test the differences among scaling laws tested on one particular data set.

Table II shows the fit results for all data and the parametrisations. Similarly as in data, the MRST and GRV parametrisations give similar QF for fixed coupling, running coupling I and running couping II. On the contrary, CTEQ favours fixed coupling. All parametrisations disfavour diffusive scaling, and all λ values are consistent among different data sets. We can also see that GRV leads to smaller values of QF than MRST and CTEQ, but all parametrisations lead to a good QF. Scaling curves and fit results for experimental data and the CTEQ6.6M parametrisation, as an example, are shown in figure 1.

We note that the CTEQ, MRST and GRV parametrisations of the data lead to good scalings, whereas they do not contain any saturation hypothesis. One may wonder if such result comes from the chosen form of the parametrisation at the initial scale Q_0, or if DGLAP evolution itself leads to a scaling in the HERA kinematical range.

VI. FITS TO THE CHARM COMPONENT OF DIS

In a second part of the paper, we want to study the scaling properties of the charm component of the structure function F_2^c/Q^2, both in data and in parametrisations.

A. Fits to F_2^c/Q^2 in data and parametrisations

First we test the scaling properties using experimental data. The requirements on the kinematical domain remain the same as in the previous section. Now the lower $Q^2 > 3$ GeV^2 cut also allows to remove a part of the charm mass effects. We use the charm F_2^c measurements from the H1, ZEUS and EMC experiments [28]. Only 25 data points lie in the kinematical region we want to analyse.

Since the statistics in the data is low, the fit results are not precise. Nevertheless, they still lead to clear results that are comparable to F_2 fits. Table III shows the results of the fits to the F_2^c data for different scaling laws. The results are found similar between F_2 and F_2^c (see Fig. 2, top left plot). All λ parameters are similar except for Diffusive Scaling. As in the case of the F_2 scaling analysis [4], Fixed Coupling, Running Coupling I and Running Coupling II give similar values of QF, and Diffusive Scaling is disfavoured.

It is now interesting to check whether the scaling properties are also observed using the F_2^c parametrisation of the data, as seen in the previous section for the proton structure functions F_2. The results are given in Table III and Fig. 2. Fig. 2 displays the values of the QF for Fixed Coupling and different parametrisations. The value of λ favoured by the GRV and MRST parametrisations has a tendency to be larger (about 1) than the value favoured in data (about 0.3). It is worth noticing however that the data show a smaller peak in the QF distribution around 1 as well which is disfavoured, and the MRST parametrisation another peak towards 0.3. The CTEQ parametrisation is definitely closer to the results in data leading to a value of λ close to 0.5 for the CTEQ6.6M NLO parametrisation, and to 0.4 when one introduces an additional sea-like intrinsic charm contribution[3] (CTEQ6.6C3 and CTEQ6.6C4). The results for the different scalings are given in Table III, and the conclusion remains unchanged.

Let us now summarize what we obtained comparing data and simulation of F_2^c. First of all, the value of λ favoured in data is compatible with the one obtained for F_2, DVCS... Of course the value of λ shows a large error bar since the number of data points is only 25, but it is quite striking that the same value as for F_2 is found. Everything looks as if the charm quark was behaving like any other light quark from the point of view of scaling. New data on F_2^c which will be published soon by the H1 and ZEUS collaborations are of great interest. The MRST and GRV parametrisations favour different values of λ while the CTEQ ones are compatible with data, especially when an instrinsic charm component is added.

The next step of our study relies more in understanding in more detail the differences between the parametrisations, since we recall that they lead to a good description of F_2^c itself.

B. Comparison between different F_2^c parametrisations

Taking the same 25 points as in data is not sufficient to investigate differences among the parametrisations. In order to analyse the parametrisations in detail, we choose to use the same x and Q^2 as for F_2 which leads to 217 points.

The results for the 217 points are given in Table IV for the CTEQ parametrisation. For the sake of clarity, we choose to perform the study for Fixed Coupling geometric scaling only — the differences among different scaling laws are not large and do not modify the conclusion of the study. We note that scaling is indeed obtained in the different CTEQ parametrisations, and the value of λ which maximises QF is compatible with the value measured in data. The CTEQ6.6C4 parametrisation, which has a strong sea-like intrinsic charm contribution, gives the λ value that is closest to $\lambda = 0.3$ found in data and leads to a much better QF than the other parametrisations. It is also worth noticing that the values of λ are quite stable for different Q^2 cuts.

A new striking result appear with the MRST and GRV parametrisations when one uses 217 points. The MRST 2006 NNLO and the MRST 2004 NLO and NNLO parametrisations, as well as the GRV98 one, do not show any scaling at all. No value of λ that maximises QF is found within an acceptable range. We now study the behaviour of the MRST and GRV parametrisations after different cuts on Q^2. Increasing the cut to 5 GeV^2 does not help, therefore we choose to study the effects of higher Q^2 cuts. Table V gives the fit results in three different Q^2 ranges, namely $[10; 150]$, $[15; 150]$ and $[25; 150]$ GeV^2. Scaling properties are not observed using the MRST parametrisations even in the Q^2 range $[10; 150]$ GeV^2. The values of QF are much smaller than the ones obtained with CTEQ (see Table V). However, geometric scaling appears at higher Q^2 and the value of $\lambda \sim 0.65$. The situation for the GRV98 parametrisation is found to be similar as for MRST, but leading to a higher value of λ.

---

[3] CTEQ6.6C1 and CTEQ6.6C2 lead to the same results as for CTEQ6.6M since the intrinsic charm contribution only appears at high x and does not affect our study performed for $x < 10^{-2}$.

data set	FC	RC I	RC II	DS
data	λ=0.33	λ=1.84	λ=3.44	λ=0.36
	QF=1.63	QF=1.62	QF=1.69	QF=1.44
GRV98	λ=0.33	λ=1.87	λ=3.35	λ=0.37
	QF=5.5	QF=5.2	QF=4.8	QF=3.7
MRST 2004 NLO	λ=0.34	λ=1.72	λ=3.31	λ=0.31
	QF=11.3	QF=9.6	QF=7.2	QF=4.4
MRST 2004 NNLO	λ=0.34	λ=1.72	λ=3.30	λ=0.36
	QF=11.2	QF=11.3	QF=7.6	QF=4.3
CTEQ 6.6 M	λ=0.35	λ=1.84	λ=3.40	λ=0.38
	QF=12.4	QF=6.6	QF=6.4	QF=2.7
CTEQ 6.6 C1	λ=0.35	λ=1.84	λ=3.40	λ=0.38
	QF=12.3	QF=6.5	QF=6.4	QF=2.7
CTEQ 6.6 C2	λ=0.35	λ=1.84	λ=3.40	λ=0.37
	QF=12.1	QF=6.4	QF=6.3	QF=2.7
CTEQ 6.6 C3	λ=0.33	λ=1.84	λ=3.33	λ=0.31
	QF=11.7	QF=6.2	QF=7.2	QF=2.9
CTEQ 6.6 C4	λ=0.33	λ=1.66	λ=3.11	λ=0.38
	QF=13.1	QF=9.0	QF=6.9	QF=2.4

TABLE II: Values of QF and λ parameters for F_2 data and the different F_2 parametrisations from CTEQ, GRV and MRST and for fixed coupling, running coupling I, running coupling II and diffusive scalings. We note that all scalings lead to a good QF except for diffusive scaling and that the values of the λ parameters are found similar in data and in the parametrisations

As a conclusion to this second study, it looks like the MRST, GRV and CTEQ parametrisations of F_2^c show a different behaviour from the scaling point of view. While the CTEQ parametrisation shows a scaling even at lower Q^2 (which seems observed in data), the MRST parametrisation only shows scaling at higher Q^2. Further more, the GRV parametrisation leads to a much higher value of λ than the one favoured in data. This difference might be due to the different forms of the gluon distribution at the initial scale Q_0^2 chosen by the CTEQ and MRST groups. It will be worth to test this further using new measurements of F_2^c which should be available soon.

Finally, let us mention that we have checked that substitution in the scaling formulae of x by the rescaled variable χ (see Formula (2)) used in the GM-VFNS has a negligible effect in the considered kinematical ranges and does not change our results and conclusions.

VII. CONCLUSIONS

We have investigated with the Quality Factor method the scaling properties of F_2/Q^2 and of its charm component F_2^c/Q^2, both in the data and in a selection of PDFs parametrisations. The parametrisations lead to the same scaling properties of F_2/Q^2 as in data for all types of scaling variables suggested by gluon saturation theory. Thanks to the precision of the F_2 data, the global fits can indeed catch precisely the evolution of F_2. The F_2^c HERA data contain few points and still show large error bars. The QF method shows that the F_2^c data favors precisely the same value of the parameter λ for each type of scaling as the one found by the QF fit on F_2/Q^2 and on DVCS data [4]. The CTEQ parametrisation gives the closest scaling properties for F_2^c/Q^2 to the data, and the MRST and GRV parametrisations lead to favoured values of λ higher than in data.

To study further the differences between the parametrisations, we used 217 points, at the same x and Q^2 values as for F_2. The parametrisations of the MRST and GRV groups have no scaling behavior at all if one includes points with Q^2 in the range $[3; 10]$ GeV^2. Only the CTEQ (and especially the CTEQ6.6C4 parametrisation, which includes a strong sea-like intrinsic charm component) has a scaling behavior with a value of λ close to data. Moreover, it is the only parametrisation which leads to a very good scaling of F_2^c/Q^2 for Q^2 down to 3 GeV^2. The fact that the F_2/Q^2 and F_2^c/Q^2 data shows the same scaling properties seems to indicate that the behavior of the charm quark distribution in the proton is closer to light sea quarks in data than in most parametrisations.

Of course, our study rely to a large extent on the QF analysis of the F_2^c data which are not very precise. Hence, new

data set	FC	RC I	RC II	DS
data	λ=0.34	λ=1.72	λ=3.18	λ=0.22
	QF=1.21	QF=1.20	QF=1.17	QF=1.16
GRV98	λ=1.05	λ=5.67	$\lambda >10$	λ=0.17
	QF=28.4	QF=25.2		QF=9.9
MRST 2004 NLO	λ=0.96	λ=5.24	$\lambda >10$	λ=0.16
	QF=10.0	QF=7.8		QF=11.3
MRST 2006 NNLO	λ=0.98	λ=5.35	$\lambda >10$	λ=0.16
	QF=8.3	QF=6.7		QF=9.9
CTEQ 6.6 M	λ=0.49	λ=2.58	λ=7.73	λ=0.56
	QF=28.3	QF=33.3	QF=29.1	QF=36.9
CTEQ 6.6 C3	λ=0.48	λ=2.42	λ=6.03	λ=0.51
	QF=46.1	QF=48.7	QF=35.2	QF=46.5
CTEQ 6.6 C4	λ=0.42	λ=2.00	λ=4.50	λ=0.31
	QF=51.7	QF=54.9	QF=40.1	QF=48.2

TABLE III: Values of QF and the λ parameters using F_2^c data measured at HERA and the different F_2^c parametrisations for fixed coupling, running coupling I, running coupling II and diffusive scalings. We note that the values of λ are similar than the ones found with the proton structure function F_2 and that diffusive scaling is disfavoured.

	CTEQ 6.6 M	CTEQ 6.6 C1	CTEQ 6.6 C2	CTEQ 6.6 C3	CTEQ 6.6 C4
$Q^2 > 3$	λ=0.70	λ=0.70	λ=0.68	λ=0.56	λ=0.44
	QF=0.8	QF=0.8	QF=0.8	QF=3.5	QF=14.6
$Q^2 > 5$	λ=0.61	λ=0.61	λ=0.61	λ=0.52	λ=0.42
	QF=5.0	QF=5.0	QF=5.0	QF=12.5	QF=19.6
$Q^2 > 10$	λ=0.56	λ=0.56	λ=0.56	λ=0.50	λ=0.43
	QF=19.2	QF=19.3	QF=19.4	QF=22.2	QF=21.2

TABLE IV: Values of QF and of the λ parameter for F_2^c data and the different CTEQ parametrisations for different Q^2 lower cuts for fixed coupling scaling. We note that the scaling is observed in the CTEQ parametrisations and the value of λ is stable for different Q^2 cuts.

F_2^c data with improved statistics would be welcome, in order to check accurately if the scaling properties of F_2/Q^2 and F_2^c/Q^2 are indeed the same. However, as the coincidence for the optimal value of λ for F_2^c/Q^2, F_2/Q^2 and DVCS is very striking, let us consider that there could be a deep reason for that, and discuss possible explanations.

Since the behavior of the GRV98, which is based on a FFNS, and of recent MRST parametrisations based on GM-VFNS is similar, we conclude that the type of scheme for heavy flavors does not change much our discussion. Similarly, the order (NLO or NNLO) of the global fit seems not to be essential for the scaling properties. Thus, the similarity of the scaling properties of F_2/Q^2 and F_2^c/Q^2 in the data seems to result from a theoretical ingredient at low Q^2 or low x, which is missing in all of the usual global fits.

The parametrisation which gives the best scaling properties and is the closest to data is CTEQ6.6C4. It could be tempting to say that our study gives hints for a strong sea-like intrinsic charm component in the proton. However, this is not the only possible explanation. For example, low x resummations and/or saturation effects would lead to a larger and more stable gluon distribution at low x and low Q^2 in a global fit. This would enhance the charm contribution produced by boson gluon fusion in that kinematical range without the need of intrinsic charm. Moreover, in that scenario, the light and heavy sea quark distributions would be both driven by the gluon distribution rather than by their initial conditions, and thus would naturally behave in a similar way.

	MRST 2004 NLO	MRST 2004 NNLO	MRST 2006 NNLO	GRV98
$Q^2 > 10$	λ=0.80	λ=0.80	λ=0.80	λ=0.94
	QF=2.7	QF=3.0	QF=2.5	QF=4.4
$Q^2 > 15$	λ=0.68	λ=0.70	λ=0.71	λ=0.90
	QF=7.9	QF=7.9	QF=6.7	QF=8.7
$Q^2 > 25$	λ=0.66	λ=0.64	λ=0.67	λ=0.87
	QF=18.5	QF=18.7	QF=18.7	QF=21.2

TABLE V: Values of QF and of the λ parameter for F_2^c and the different MRST and GRV parametrisations for different Q^2 lower cuts for fixed coupling scaling. Scaling is not observed for a Q^2 cut lower than 10 GeV^2 in the parametrisations. We note that the quality of scaling at low Q^2 is poor. For a higher Q^2 cut, scaling is observed but the value of the λ parameter is different from the one in data for the GRV parametrisation.

Acknowledgments

The authors thank Robi Peschanski for useful discussions, and Jon Pumplin for suggesting the study of the F_2^c scaling properties.

[1] A. M. Staśto, K. Golec-Biernat, and J. Kwiecinski, Phys. Rev. Lett. **86**, 596 (2001).
[2] C. Marquet and L. Schoeffel, Phys. Lett. B **639**, 471 (2006) [arXiv:hep-ph/0606079].
[3] F. Gelis, R. Peschanski, G. Soyez and L. Schoeffel, Phys. Lett. B **647**, 376 (2007) [arXiv:hep-ph/0610435].
[4] G. Beuf, R. Peschanski, C. Royon and D. Salek, "Systematic Analysis of Scaling Properties in Deep Inelastic Scattering," arXiv:0803.2186 [hep-ph].
[5] R. S. Thorne and W. K. Tung, arXiv:0809.0714 [hep-ph].
[6] J. C. Collins and W. K. Tung, Nucl. Phys. B **278**, 934 (1986), J. C. Collins, Phys. Rev. D **58**, 094002 (1998) [arXiv:hep-ph/9806259].
[7] W. K. Tung, H. L. Lai, A. Belyaev, J. Pumplin, D. Stump and C. P. Yuan, JHEP **0702**, 053 (2007) [arXiv:hep-ph/0611254].
[8] R. S. Thorne, Phys. Rev. D **73**, 054019 (2006) [arXiv:hep-ph/0601245].
[9] P. M. Nadolsky *et al.*, Phys. Rev. D **78**, 013004 (2008) [arXiv:0802.0007 [hep-ph]].
[10] A. D. Martin, W. J. Stirling, R. S. Thorne and G. Watt, Phys. Lett. B **652**, 292 (2007) [arXiv:0706.0459 [hep-ph]].
[11] A. D. Martin, R. G. Roberts, W. J. Stirling and R. S. Thorne, Phys. Lett. B **604**, 61 (2004) [arXiv:hep-ph/0410230].
[12] M. Gluck, E. Reya and A. Vogt, Eur. Phys. J. C **5**, 461 (1998) [arXiv:hep-ph/9806404].
[13] S. J. Brodsky, P. Hoyer, C. Peterson and N. Sakai, Phys. Lett. B **93**, 451 (1980).
[14] L. N. Lipatov, Sov. J. Nucl. Phys. **23**, 338 (1976); E. A. Kuraev, L. N. Lipatov, and V. S. Fadin, Sov. Phys. JETP **45**, 199 (1977), I. I. Balitsky and L. N. Lipatov, Sov. J. Nucl. Phys. **28**, 822 (1978).
[15] I. Balitsky, Nucl. Phys. **B463**, 99 (1996); Y. V. Kovchegov, Phys. Rev. **D60**, 034008 (1999), **D61**, 074018 (2000).
[16] J. Jalilian-Marian, A. Kovner, A. Leonidov and H. Weigert, Nucl. Phys. B **504**, 415 (1997) [arXiv:hep-ph/9701284], Phys. Rev. D **59**, 014014 (1999) [arXiv:hep-ph/9706377]. J. Jalilian-Marian, A. Kovner and H. Weigert, Phys. Rev. D **59**, 014015 (1999) [arXiv:hep-ph/9709432]. A. Kovner, J. G. Milhano and H. Weigert, Phys. Rev. D **62**, 114005 (2000) [arXiv:hep-ph/0004014]. H. Weigert, Nucl. Phys. A **703**, 823 (2002) [arXiv:hep-ph/0004044]. E. Iancu, A. Leonidov and L. D. McLerran, Nucl. Phys. A **692**, 583 (2001) [arXiv:hep-ph/0011241], Phys. Lett. B **510**, 133 (2001) [arXiv:hep-ph/0102009]. E. Ferreiro, E. Iancu, A. Leonidov and L. McLerran, Nucl. Phys. A **703**, 489 (2002) [arXiv:hep-ph/0109115].
[17] E. Iancu and R. Venugopalan, "The color glass condensate and high energy scattering in QCD," arXiv:hep-ph/0303204.
[18] A. H. Mueller and D. N. Triantafyllopoulos, Nucl. Phys. B **640**, 331 (2002) [arXiv:hep-ph/0205167], D. N. Triantafyllopoulos, Nucl. Phys. B **648**, 293 (2003) [arXiv:hep-ph/0209121].
[19] S. Munier and R. Peschanski, Phys. Rev. Lett. **91**, 232001 (2003), Phys. Rev. **D69**, 034008 (2004), **D70**, 077503 (2004).
[20] G. Beuf, arXiv:0803.2167 [hep-ph].
[21] E. Iancu, A. H. Mueller and S. Munier, Phys. Lett. B **606**, 342 (2005) [arXiv:hep-ph/0410018]; Y. Hatta, E. Iancu, C. Marquet, G. Soyez and D. N. Triantafyllopoulos, Nucl. Phys. A **773**, 95 (2006) [arXiv:hep-ph/0601150].
[22] G. Beuf, Nucl. Phys. A **810**, 142 (2008) [arXiv:0708.3659 [hep-ph]].
[23] A. Dumitru, E. Iancu, L. Portugal, G. Soyez and D. N. Triantafyllopoulos, JHEP **0708**, 062 (2007) [arXiv:0706.2540 [hep-ph]].
[24] C. Adloff *et al.* [H1 Collaboration], Eur. Phys. J. C **21** (2001) 33 [arXiv:hep-ex/0012053]; Eur. Phys. J. C **30** (2003) 1 [arXiv:hep-ex/0304003].
[25] J. Breitweg *et al.* [ZEUS Collaboration], Eur. Phys. J. C **7** (1999) 609 [arXiv:hep-ex/9809005]; Phys. Lett. B **487** (2000) 273 [arXiv:hep-ex/0006013]; S. Chekanov *et al.* [ZEUS Collaboration], Eur. Phys. J. C **21** (2001) 443 [arXiv:hep-ex/0105090].

Phys. Rev. D **70** (2004) 052001 [arXiv:hep-ex/0401003].
The data in the last ZEUS paper include contributions for F_L and xF_3 but those can be neglected within the kinematical domain we consider.
[26] M. Arneodo *et al.* [New Muon Collaboration], Nucl. Phys. B **483** (1997) 3 [arXiv:hep-ph/9610231].
[27] M. R. Adams *et al.* [E665 Collaboration], Phys. Rev. D **54** (1996) 3006.
[28] C. Adloff *et al.* [H1 Collaboration], Zeit. Phys. C **72** (1996) 503 C. Adloff *et al.* [H1 Collaboration], Phys. Lett. B **528** (2002) 199 A. Aktas *et al.* [H1 Collaboration], Eur. Phys. J. **C40** (2005) 349-359 A. Aktas *et al.* [H1 Collaboration], Eur. Phys. J. **C45** (2006) 23-33 J. Breitweg et al. [ZEUS Collaboration], Phys. Lett. B **407** (1997) 402 J. J. Aubert *et al.* [EMC Collaboration], Nucl. Phys. B **213** (1983) 31

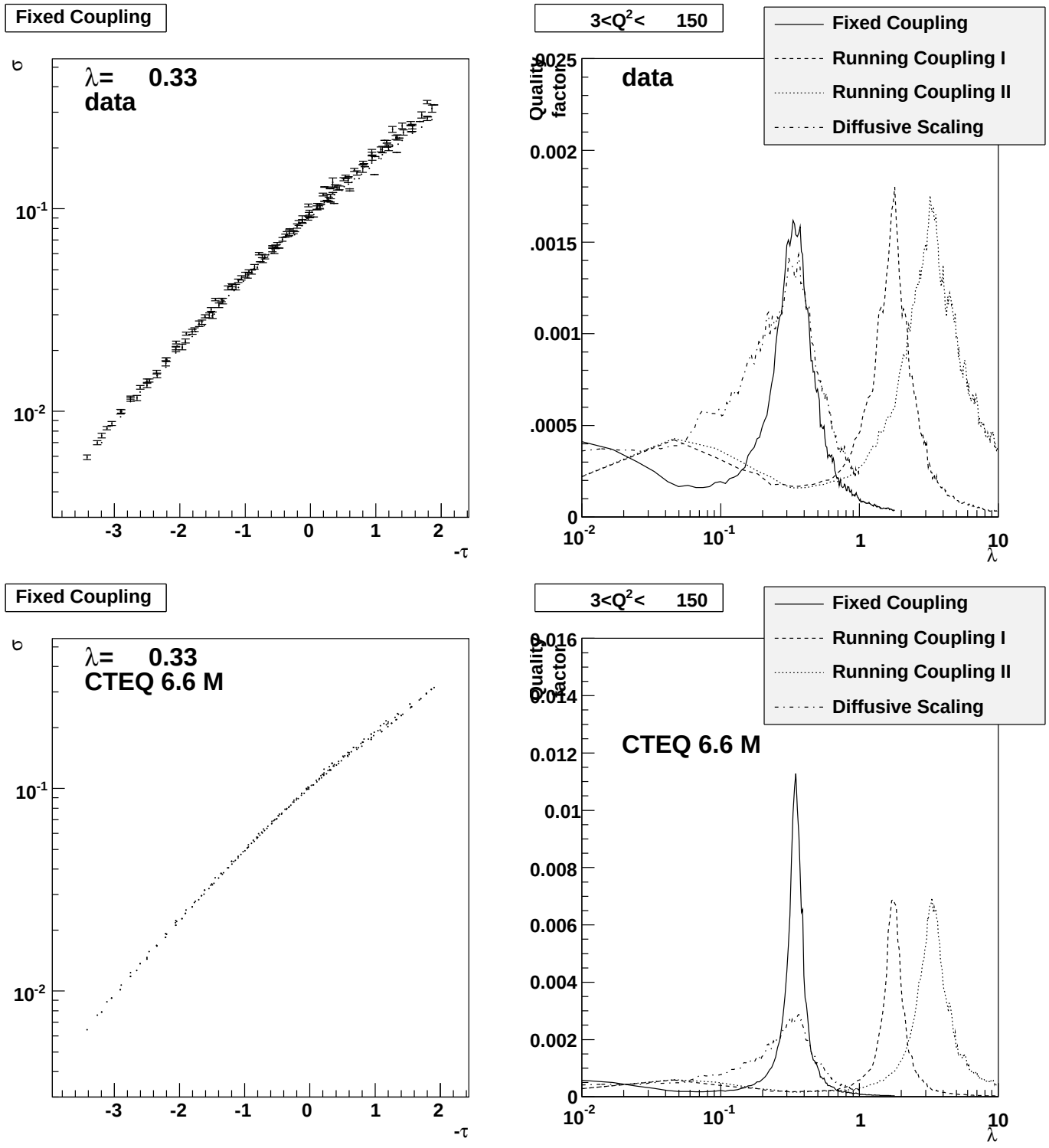

FIG. 1: **Different scalings for F_2/Q^2 measured data and the CTEQ6.6M parametrisation for $Q^2 > 3$ GeV^2:** Upper curves: Scaling curve for "Fixed Coupling" (left) and QF against λ for different scalings laws in data (right). Lower curves: same studies for the CTEQ6.6M parametrisation. Results are found similar for the different CTEQ, GRV and MRST parametrisations and are similar to data.

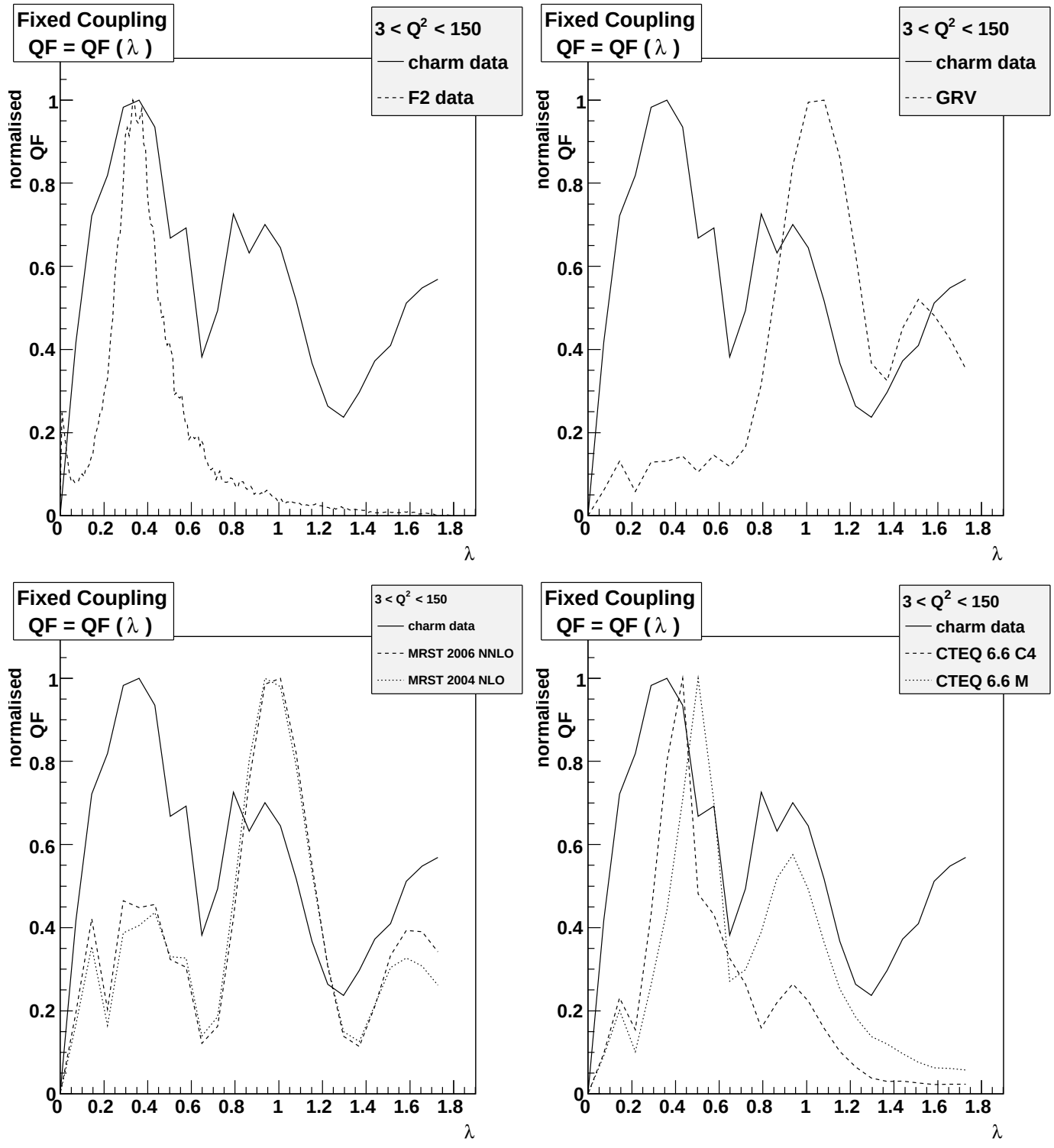

FIG. 2: Quality factor as a function of λ for Fixed Coupling using different data sets. Quality factor peaks at the same value in F_2 and F_2^c data. Quality factor in the F_2^c parametrisations peaks at higher values of λ than in F_2^c data.

Article [VII]

Heavy-quark energy loss and thermalization in a strongly coupled SYM plasma

Guillaume Beuf*
Institut de Physique Théorique, CEA/Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette cedex, France
URA 2306, unité de recherche associée au CNRS

Cyrille Marquet†
Institut de Physique Théorique, CEA/Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette cedex, France
Department of Physics, Columbia University, New York, NY 10027, USA

Bo-Wen Xiao‡
Department of Physics, Columbia University, New York, NY 10027, USA
Nuclear Science Division, Lawrence Berkeley National Laboratory, Berkeley, CA 94720, USA

Using the AdS/CFT correspondence, we compute the radiative energy loss of a slowly decelerating heavy quark with mass M moving through a supersymmetric Yang Mills (SYM) plasma at temperature T at large t'Hooft coupling λ. The calculation is carried out in terms of perturbation in $\sqrt{\lambda}T/M$, and the rate of the energy loss is computed up to second order. We explain the physical meaning of each correction and estimate the thermalization time of a heavy quark moving in a strongly-coupled plasma.

PACS numbers: 12.38.Mh, 11.25.Tq, 25.75.-q

I. INTRODUCTION

Understanding the quark-gluon plasma created in nucleus-nucleus collisions [1–4] at the Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) is a challenging task. Many measurements have been carried out to provide insight on the properties of that dense QCD matter, yet a few years after the discovery, the question whether the plasma formed at RHIC is weakly or strongly coupled remains unanswered. On the one hand, results on bulk quantities like the elliptic flow v_2 [5] or the shear viscosity to entropy ratio η/s [6–8] fit within a perfect-liquid picture. The large flow and low viscosity are naturally understood from strong cross-sections. This quickly prompted claims that the plasma is strongly coupled, although from a broader perspective, these issues are still being debated. On the other hand, one would like to establish a global picture and be able to also answer the question using hard probes.

Hard probes are believed to be ideal processes to study the properties of the quark-gluon plasma, they are thought to be understood well enough to provide clean measurements. Observables built to measure medium effects on particle production, like the nuclear modification factors R_{AA}, are not easily reproduced in perturbative QCD (pQCD), even for hard production. For instance to reproduce light-hadron R_{AA}'s within the pQCD framework of medium-induced energy loss [9–13], the value of the so-called jet quenching parameter $\hat{q}$ is adjusted to $5-10$ GeV^2/fm [14]. It is otherwise estimated to be smaller ($1-3$ GeV^2/fm) for a weakly coupled plasma at RHIC temperatures. Results on heavy-quark energy loss are also puzzling, high$-p_\perp$ electrons from charm and bottom mesons decays seem to indicate a similar suppression for light, charm and bottom quarks. By contrast in pQCD, the heavier the quark the weaker the suppression. While our current understanding of the pQCD picture must be still be improved (for instance collisional energy loss should be included as well), it is unclear if a pQCD approach can describe the suppression of high$-p_\perp$ particles at RHIC. Recent review and extensive discussion can be found in Refs. [15–17].

This motivates to think about strongly coupled plasmas. Addressing the strong coupling dynamics in QCD is an outstanding problem, the available tools are quite limited. However for the $\mathcal{N}=4$ Super Yang Mills (SYM) theory, the AdS/CFT correspondence [18–20] is a powerful approach. Essentially, in the large$-N_c$ limit, the correspondence maps the quantum dynamics of the gauge theory at strong coupling into classical gravity dynamics in the fifth dimension of a curved space-time. While the SYM theory is quite different from QCD (it is highly supersymetric and conformal), let us assume that the SYM plasma approximates well the QCD plasma, just above T_c, the temperature of the phase transiton. In fact it has been argued that some SYM results hold for any gauge theory with a gravity dual, like the

*Electronic address: guillaume.beuf@cea.fr
†Electronic address: cyrille@phys.columbia.edu
‡Electronic address: bowen@phys.columbia.edu

lower bound of the shear viscosity [6, 7]. If the plasma formed at RHIC really is strongly-coupled, this insight gained in AdS/CFT calculations like the one in this paper could help developing a qualitative understanding.

Recently, there have been a lot of AdS/CFT studies on heavy quark propagating in the SYM plasma. The energy loss is computed in Refs. [21, 22], the momentum broadening is calculated in Refs. [23–25], the jet quenching parameter is evaluated in Ref. [26–28] and the stress-tensor of the system is derived in Ref. [29–32]. Moreover, the saturation momentum and structure functions of SYM plasma are studied in Ref. [33–36] and jet fragmentation and energy correlation are investigated in Ref. [37–40]. Finally, there have been a few interesting studies which compare the predictions of heavy quark energy loss and jet correlations in pQCD with the ones in AdS/CFT [41–46].

In this work we study the propagation of a very energetic heavy quark through the SYM plasma at strong 't Hooft coupling and at temperature T. Our starting point is the trailing-string picture of Herzog et al [21], which allows to compute the energy loss of the heavy quark in a static infinite-extend plasma. The heavy quark, in the fundamental representation, lives on a flavor brane close to the boundary with a string attached to it, hanging down to the horizon. The classical dynamics of the string is given by the Nambu-Goto action and from the string shape the energy loss can be determined. In [21, 22] a constant electric field is imposed on the flavor brane to drag the heavy quark at a constant speed v. The electric field feeds energy into the string and is adjusted to compensate the energy lost into the plasma. This calculation gives the leading order contribution to the energy loss when the mass of the heavy quark is extremely large. However, it is not such a realistic model.

In this paper we study what happens if one turns off the electric field, meaning if one stops pulling on the heavy quark. Then the energy loss of the quark is not compensated anymore, and the string actually losses energy, the heavy quark decelerates. Since we are working in the limit of large mass M, the deceleration is slow and $\dot{v} \sim \sqrt{\lambda}T^2/M$ can be treated as a perturbation. The deceleration modifies the shape of the string which in turns modifies the rate of energy loss by a correction of order $\sqrt{\lambda}T/M$. This adds a higher order correction to $\dot{v}$ and so on. This is the problem that we solve. The calculation is carried out up to second order in $\frac{\sqrt{\lambda}T}{M}$. We explain the physical meaning of each correction which adds insights to the process of the heavy quark slowing down in a strongly coupled plasma. Finally, in this picture the trailing string slowly gets straighter to eventually become that of a static quark. Of course we do not except our picture to apply that far. What will happen is that the heavy quark will eventually thermalize and when that happens, the discussion should be modified. However our calculation allows to estimate the thermalization time.

The plan of the paper in as follows. In Section II, we recall the string equations of motion derived from the Nambu-Goto action. In Section III, we discuss the possible ways the string gains and loses energy, and define the medium-induced energy loss which we are interested in. In Section IV, we compute the first and second order corrections to the trailing string picture, when one stops pulling on the heavy quark and it slows down. Finally Section V is devoted to an estimate of the thermalization time. Section VI concludes.

II. THE EQUATIONS OF MOTION OF THE STRING

We consider the large N_c, small gauge coupling g_{YM} limit

$$N_c \to \infty \ , \quad g_{YM} \to 0 \ , \quad \lambda \equiv g_{YM}^2 N_c \text{ finite}, \tag{1}$$

where the 't Hooft coupling λ controls the $\mathcal{N} = 4$ SYM theory. The strong couping regime means $\lambda \gg 1$, and then the equivalent string theory in $AdS_5 \times S_5$ space is weakly coupled and weakly curved:

$$g_{YM} \ll 1 \Leftrightarrow g_s \ll 1 \text{ and } \lambda \gg 1 \Leftrightarrow R \gg l_s \ , \tag{2}$$

where g_s is the string coupling, l_s is the string length and R is the curvature radius of the AdS_5 and S_5 spaces. In this limit of small string coupling and large curvature radius, classical gravity is a good approximation of the string theory and we can neglect excited modes along the S_5 space. The metric corresponding to the SYM theory at finite temperature is the AdS black brane solution in 5 dimensions which can be written as

$$ds^2 = R^2 \left\{ \frac{du^2}{u^2 f(u)} - u^2 f(u) dt^2 + u^2 \left(dx^2 + dy^2 + dz^2 \right) \right\} \ , \quad f(u) = 1 - \frac{u_h^4}{u^4} \ , \tag{3}$$

where $u_h = \pi T$ is a black-hole horizon. The corresponding Hawking temperature T is the temperature of the SYM theory. The coordinate in the fifth dimension $u = r/R^2$ has the dimension of momentum and the SYM theory lives formally on the boundary at $u = \infty$.

In order to have one flavor of quarks in the fundamental representation in the field theory side, one introduces a D7 brane in the string theory side, whose embedding covers the part of the AdS_5 space with $u \geq u_m = 2\pi m/\sqrt{\lambda}$,

m being the lagrangian mass of the heavy quark[1]. The heavy quark and the color field it generates are dual to a string attached to the D7 brane at $u = u_m$ and hanging down to the horizon. Points on the string can be identified to quantum fluctuations in the heavy quark wave function with virtuality $\sim u$. Indeed, the quantum dynamics in the SYM theory is mapped onto classical dynamics in the 5th dimension. More precisely, the string dynamics is given by the Nambu-Goto action

$$S = -T_0 \int d\tau d\sigma \mathcal{L} = -T_0 \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det g_{ab}} \tag{4}$$

where (τ, σ) are the string world-sheet coordinates and T_0 is the string tension. We define $X^\mu(\tau, \sigma)$ as a map from the string world-sheet to the five dimensional space time, and introduce the following notations for derivatives: $\dot{X}^\mu = \partial_\tau X^\mu$ and $X'^\mu = \partial_\sigma X^\mu$. The determinant of the induced metric $-\det g_{ab} = -g$ is given by

$$-\det g_{ab} = \left(\dot{X}^\mu X'_\mu\right)^2 - \left(\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu\right)\left(X'^\mu X'_\mu\right). \tag{5}$$

It is useful to define the string canonical momentum densities as follows

$$\pi^\tau_\mu = -T_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = -T_0 \frac{\left(\dot{X}^\nu X'_\nu\right) X'_\mu - \left(X'^\nu X'_\nu\right) \dot{X}_\mu}{\sqrt{-g}}, \tag{6}$$

$$\pi^\sigma_\mu = -T_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'_\mu} = -T_0 \frac{\left(\dot{X}^\nu X'_\nu\right) \dot{X}_\mu - \left(\dot{X}^\nu \dot{X}_\nu\right) X'_\mu}{\sqrt{-g}}. \tag{7}$$

Now let us consider an arbitrary variation δX^μ in the action. After neglecting the surface terms, we can obtain the equations of motion of the string according to the variation principle

$$\frac{\delta S}{\delta X^\mu} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\mu} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} - \frac{d}{d\sigma}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} = 0. \tag{8}$$

When one chooses a static gauge by setting $(\tau, \sigma) = (t, u)$, and defines $X^\mu = (t, u, x(t,u), 0, 0)$ (we assume that the quark moves along the x direction), it is straightforward to find that

$$-\det g_{ab} = R^4 \left(1 - \frac{\dot{x}^2}{f(u)} + u^4 f(u) x'^2\right). \tag{9}$$

The string canonical momentum densities reduce to

$$\begin{pmatrix} \pi^\tau_x \\ \pi^\tau_u \\ \pi^\tau_t \end{pmatrix} = \frac{T_0 R^4}{\sqrt{-g}} \begin{bmatrix} \dot{x}\ f^{-1} \\ -\dot{x}\, x'\ f^{-1} \\ -1 - (x')^2 u^4 f \end{bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pi^\sigma_x \\ \pi^\sigma_u \\ \pi^\sigma_t \end{pmatrix} = \frac{T_0 R^4}{\sqrt{-g}} \begin{bmatrix} -x'\, u^4 f \\ -1 + (\dot{x})^2 f^{-1} \\ \dot{x}\, x'\, u^4 f \end{bmatrix}. \tag{10}$$

For $X^\mu = x(t,u)$ and $X^\mu = t$, Eq. (8) gives two equations which represent the conservation of momentum and energy, respectively:

$$\frac{\partial \pi^\tau_x}{\partial \tau} + \frac{\partial \pi^\sigma_x}{\partial \sigma} = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial \pi^\tau_t}{\partial \tau} + \frac{\partial \pi^\sigma_t}{\partial \sigma} = 0. \tag{12}$$

For $X^\mu = u$, one obtains

$$\frac{\partial \pi^\tau_u}{\partial \tau} + \frac{\partial \pi^\sigma_u}{\partial \sigma} = -T_0 \frac{2}{\mathcal{L}} \left(\frac{\dot{x}^2}{f^2(u)} \frac{u_h^4}{u^5} + u^3 x'^2\right). \tag{13}$$

Due to the curvature in the fifth dimension, $\frac{\partial L}{\partial u}$ generates a tidal force on the string in the u direction. However, among those three equations of motion above, there is only one independent equation due to the gauge fixing. One can just solve Eq. (11), and check that the solution $x(t,u)$ is also the solution of the other two. Therefore, derived from Eq. (11), the equation of motion of the classical string in the x direction can be written as

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u^4 f(u) x'}{\sqrt{-g}}\right) - \frac{1}{f(u)} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{-g}}\right) = 0. \tag{14}$$

---

[1] In fact, the relation between m and u_m is modified at finite temperature. See Eq.(3.3) of Ref.[21]. However, this modification will bring only higher order terms in our large mass expansion compared to the terms we calculate.

III. THE ENERGY OF THE STRING DURING THE HEAVY QUARK DECELERATION

The energy flow along the string at the position $u = \sigma$ towards smaller u is given by

$$\Phi(t,u) \equiv \pi_t^\sigma = \frac{T_0 R^4}{\sqrt{-g}} \dot{x} x' u^4 f(u). \tag{15}$$

The energy density of the string is given by π_t^τ as:

$$e(t,u) \equiv -\pi_t^\tau = \frac{T_0 R^4}{\sqrt{-g}} \left[1 + x'^2 u^4 f(u)\right]. \tag{16}$$

We consider a string which moves at a velocity v in AdS_5. Generally speaking, at finite temperature and velocity, there is always an event horizon in the fifth dimension which divides the trailing string into two parts. The upper part genuinely belongs to the dual of the heavy quark and its wave function, while the lower part is part of the plasma. This horizon is located at[2] $u = u_s$ where

$$u_s = \sqrt{\gamma} u_h \text{ with } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} . \tag{17}$$

On the gauge theory side, this means that the part of the string above u_s corresponds to highly virtual fluctuations part of the heavy quark wave function while the part of the string below u_s corresponds to longer-lived fluctuations which became emitted radiation. In the following we study the system formed by the upper part of the string, dual to the heavy quark dressed by the highly virtual fluctuations. Therefore, we consider the energy of upper part of the string

$$E(t) = \int_{u_s}^{u_m} du\ e(t,u) = -\int_{u_s}^{u_m} du\ \pi_t^\tau = T_0 R^4 \int_{u_s}^{u_m} du\ \frac{1 + u^4 f(u) x'^2}{\sqrt{-g}} . \tag{18}$$

Then, from (18), one calculates the energy change of the system during dt

$$\begin{aligned} dE &= d\left(-\int_{u_s}^{u_m} du\ \pi_t^\tau(t,u)\right) \\ &= \pi_t^\tau(t,u_s)\ d(u_s) - dt \int_{u_s}^{u_m} du\ \partial_t \pi_t^\tau(t,u) \\ &= \pi_t^\tau(t,u_s)\ d(u_s) + dt \int_{u_s}^{u_m} du\ \partial_u \pi_t^\sigma(t,u) \\ &= \pi_t^\tau(t,u_s)\ d(u_s) - \pi_t^\sigma(t,u_s) dt + \pi_t^\sigma(t,u_m) dt , \end{aligned} \tag{19}$$

where we have used Eq. (12) to go from the second to the third line. Hence, the global energy conservation equation of the system during dt reads

$$dE = \delta\ E|_{du_s} - \Phi(t,u_s)\ dt + \Phi(t,u_m)\ dt, \tag{20}$$

where

$$\delta\ E|_{du_s} = \pi_t^\tau(t,u_s)\ \frac{u_s \gamma^2 v \dot{v}}{2} dt = e(t,u_s)\ \frac{u_s \gamma^2 v(-\dot{v})}{2} dt \tag{21}$$

is the energy gain of the system during dt due to the increase of the size of our system. Indeed, u_s decrease as v decrease.

$$\Phi(t,u_s)\ dt = \pi_t^\sigma(t,u_s)\ dt \tag{22}$$

---

[2] This has been shown explicitly in Ref. [43]. u_s is also the location where the local speed of light in AdS space coincides with the propagation speed of the string. From the heavy quark point of view, the event horizon is at u_s.

is the energy loss of the system during dt due to the energy flow along the string at $u = u_s$, and

$$\Phi(t, u_m)\ dt = \pi_t^\sigma(t, u_m)\ dt \tag{23}$$

is the energy gain of the system during dt due to the incoming energy flow at the top of the string at $u = u_m$.

In the heavy quark energy loss problem, these contributions can be interpreted as follows: $\Phi(t, u_m)\ dt$ is the work of external forces acting on the heavy quark and $\Phi(t, u_s)\ dt$ is the energy radiated by the dressed heavy quark: fluctuations softer than the scale given by u_s are freed into the plasma. As the heavy quark decelerates, u_s becomes softer and more fluctuations are kept in the wave function. This leads to the energy gain $\delta E|_{du_s}$.

In Ref. [21], an external force is acting on the heavy quark and adjusted in order to have a stationary solution, with $\dot{v} = 0$ and $dE/dt = 0$ for the upper part of the string. Thus, the energy flow is uniform along the string, meaning $\Phi(t, u_s) = \Phi(t, u_m)$. The same amount of energy is put into the string at the top than flows at the bottom into the horizon, or equivalently is radiatively lost by the heavy quark. However, this model does not describe the heavy quark energy loss so satisfactorily, since in reality the heavy quark will slow down when propagating in the plasma.

In this paper we would like to consider the case where the external force is turned off and the heavy quark is allowed to decelerate slowly. In this case, we always keep $\Phi(t, u_m)$ vanishing, and we compute the energy loss. Although the total energy loss $-dE/dt$ of the upper part of the string includes the contribution from the term $\delta\ E|_{du_s}$, we focus on the radiative energy loss $\Phi(t, u_s)$ which is physically more important. For instance, this contribution could be compared to calculations performed in the pQCD framework [9–13].

IV. PERTURBATIONS OF THE TRAILING STRING DUE TO DECELERATION

A. The stationary solution as the leading contribution in a large quark mass expansion.

Let us review briefly the main result of Ref. [21, 22], which is the stationary solution corresponding to a the heavy quark ($u_m \to \infty$) pulled by a external force imposing a constant velocity. The stationarity condition gives the Ansatz

$$x = x_0 + vt + vF(u) \text{ with } \dot{v} = 0\ . \tag{24}$$

Since there is no time dependence in both $\dot{x}$ and x', the time derivative gives vanishing result in the equation of motion. Thus, one can equate both the space-dependent and time-dependent parts of Eq. (14) to zero, respectively. Therefore, one obtains

$$x'^2 = \frac{C_0^2}{\left[u^4 f\left(u\right)\right]^2} \frac{1 - \frac{u_h^4}{u^4} - v^2}{1 - \frac{u_h^4}{u^4} - \frac{C_0^2}{u^4}}, \tag{25}$$

where C_0 is an integration constant. In order to maintain finite and positive value of x'^2, we should require that the numerator and denominator change sign at the same u value ($u = u_s = \sqrt{\gamma} u_h$). Thus, this fixes the constant $C_0 = u_h^2 v\gamma$, and yields $x' = \pm \frac{u_h^2 v}{u^4 f(u)}$, where the + sign corresponds to a flow into the horizon at u_h and the − sign corresponds to a flow out of the horizon. By requiring the incoming boundary condition, we pick up the solution with the + sign and discard the other solution.

Then, the shape of the string is found to be

$$F(u) = \frac{1}{2u_h}\left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{u}{u_h}\right) - \coth^{-1}\left(\frac{u}{u_h}\right)\right] \quad \text{with} \quad vF'(u) = \frac{vu_h^2}{u^4 - u_h^4} \tag{26}$$

and with the boundary condition $F\left(u\right)|_{u=\infty} = 0$. Using that solution, one can compute the energy density of the string and the energy flow along the string:

$$e(u) = \frac{T_0 R^4}{\sqrt{-g}}\left[1 + u^4 f(u) x'^2\right] = \frac{T_0 R^2}{\gamma} \frac{\gamma^2 u^4 - u_h^4}{u^4 - u_h^4}\ , \tag{27}$$

$$\Phi(u) = \frac{T_0 R^4}{\sqrt{-g}}\ \dot{x} x' u^4 f(u) = T_0 R^2\ \gamma v^2 u_h^2\ . \tag{28}$$

The energy flow along the string is constant, and the energy stored in the upper part of the string ($u > u_s$) is

$$E = \int_{u_s}^{u_m} du\ e(u) = T_0 R^2\ \gamma\left\{u_m - u_s + v^2 u_h^2 [F(u_m) - F(u_s)]\right\}\ . \tag{29}$$

The energy conservation equation (20) is trivially satisfied: $dE/dt = \delta\ E|_{du_s}/dt = 0$ and $\Phi(u_m) = \Phi(u_s)$.

When the external force is turned off, $\Phi(t, u_m) = 0$ and in order to keep (20) satisfied, $\dot{v}$ must be non zero (unless the mass of the heavy quark is stricly infinite). Indeed dE/dt is no longer zero:

$$\frac{dE}{dt} = T_0 R^2 \gamma^3 v\dot{v} \left[u_m - u_s + \frac{\gamma^2+1}{\gamma^2} u_h^2 (F(u_m) - F(u_s)) - \frac{\gamma^2+1}{2\gamma^2} u_s \right] + \mathcal{O}(\dot{v}^2) \ , \tag{30}$$

and this imposes that in the large u_m limit, $-\dot{v} \propto u_h^2/u_m$ [3]. This follows from the fact that in the energy conservation equation (20), the finite term (when $u_m \to \infty$) $\Phi(t, u_s) = T_0 R^2\ \gamma v^2 u_h^2 + \mathcal{O}(\dot{v})$ in the right-hand side must be compensated by a finite piece in dE/dt. There is indeed no finite terms coming from the other contribution

$$\frac{\delta\ E|_{du_s}}{dt} = -e(t, u_s)\ \frac{u_s \gamma^2 v\dot{v}}{2} = -T_0 R^2\ \ \frac{\gamma(\gamma^2+1)}{2}\ v\ \dot{v}\ u_s + \mathcal{O}(\dot{v}^2) \ . \tag{31}$$

Therefore we now treat $\dot{v}$ as a small parameter in the heavy quark deceleration problem. On the field theory side, this corresponds to a small $(T\sqrt{\lambda})/(2m)$ expansion according to the AdS/CFT dictionary.

B. First order in solving the equation of motion

Since the deceleration is very slow for heavy quarks, one can view the string as a quasi-static trailing string at every moment. Its shape should not be too different from the trailing string solution found above, except close to $u = u_m$ where corrections are of order one, as is the case for $\Phi(t, u_m)$ which is now vanishing. Thus, we perform a perturbative expansion of the shape $x(t, u)$ of the string as a series in the small parameter $\dot{v}/u_h$. In our quasi-static picture, we can assume that the coefficients of the expansion depend on time only through $v(t)$. Hence, we write the generalization of the Ansatz (24) including the first order correction as

$$x(t, u) = x_0 + \int^t v(t')dt' + v(t)F(u) + \dot{v}(t)\ \zeta(u, v(t)) \ . \tag{32}$$

After neglecting the $\dot{v}^2$ and $\ddot{v}$ terms, which are suppressed by one more factor of $\frac{u_h}{u_m}$, we reach the equation of motion at first order in $\frac{u_h}{u_m}$ (the terms which are proportional to $\dot{v}$).

$$\gamma\dot{v}\frac{\partial}{\partial u}\left[\left(u^4 f(u) - \gamma^2 v^2 u_h^4\right) \zeta'(u, v) + \gamma^2 v^2 u_h^2 \frac{F(u)}{f(u)} \right] = \frac{\gamma^3 \dot{v}}{f(u)}. \tag{33}$$

Solving Eq. (33) yields

$$\zeta'(u, v) = \frac{\gamma^2 \left[u + u_h^2 F(u) - v^2 u_h^2 \frac{F(u)}{f(u)} - C_1 \right]}{u^4 - \gamma^2 u_h^4} = \frac{\gamma^2 \left[u - C_1 \right]}{u^4 - u_s^4} + F'(u)\ F(u) \ . \tag{34}$$

As for the previous order, we determine the integration constant C_1 by requiring a regular shape of the string at $u = u_s$, and thus $C_1 = u_s$. After the final integration and requiring that $\zeta(u)|_{u=\infty} = 0$, one gets

$$\zeta(u, v) = \frac{\gamma^2}{2u_s^2} \left[\tan^{-1}\left(\frac{u}{u_s}\right) + \log\left(\frac{u + u_s}{\sqrt{u^2 + u_s^2}}\right) - \frac{\pi}{2} \right] + \frac{F^2(u)}{2} \ . \tag{35}$$

Strictly speaking the conditions $\zeta(u)|_{u=\infty} = 0$ and $F(u)|_{u=\infty} = 0$ imply that $v(t)$ is not really the velocity of the quark, which is supposed to live at $u = u_m$. However, as we show *a posteriori* in appendix, the difference is relevant only at higher orders in our large mass expansion.

For any arbitrary point on the string, one can compute the energy flow $\Phi(t, u)$ which runs through it from the top part of the string to the bottom. First at $u = u_m$, all the contributions in x' are of the same order, and one obtains

$$\Phi(t, u_m) \ = \ -\frac{T_0 R^4}{\sqrt{-g}} \dot{x} x' u^4 f(u) \Big|_{u=u_m} \tag{36}$$

$$= \ -\frac{T_0 R^2}{\sqrt{1-v^2}} v \left\{ v u_h^2 + \dot{v}\zeta'(u_m, v) u_m^4 f\left(u_m\right) \right\} \ . \tag{37}$$

---

[3] The $\mathcal{O}(\dot{v}^2)$ terms come from the fact that after switching off the external field, the energy of the string differs from (29) by a contribution of order $\dot{v}$.

Imposing the Neumann boundary condition $\Phi(t,u_m)=0$ on the flavor brane gives

$$0 = T_0 R^2 \gamma v^2 u_h^2 \left[1 + \frac{\dot{v}\gamma^2(u_m-u_s)}{v u_h^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\dot{v}^2}{u_h^2}\right)\right] . \tag{38}$$

The deceleration of the string at first order is then given by

$$\dot{v}(t) = -\frac{v\ u_h^2}{\gamma^2(u_m-u_s)} . \tag{39}$$

This equation allows us to specify our expansion parameter, it is actually $u_h/(u_m-u_s)$, and not u_h/u_m. In particular, our perturbative expansion breaks down if u_s is too close to u_m, meaning if the point which determines the energy loss is too close to the flavor brane[4]. In order to interpret this parameter on the gauge theory side, let us come back to the energy of the upper part of the string. The first order contribution is

$$E(t) = T_0 R^2\ \gamma(u_m-u_s)\left[1+\mathcal{O}\left(\frac{u_h}{u_m-u_s}\right)\right] . \tag{40}$$

On the gauge theory side, this is the energy of the color field of the quark. It is smaller than in the vacuum due to the screening of soft fluctuations by the plasma. As in Ref. [21, 49], we shall use an abuse of language and denote E/γ the *thermal* mass of the quark M. It is different from the Lagrangian mass m because of the finite temperature, but the interpretation as a quark mass on the field theory side is not entirely clear. In particular, while for the heavy quark at rest all three definitions of the mass M coincide, for a moving quark the γ dependence proposed in [21, 49] is different from ours. In our case, the γ dependence accounts for the fact that as the heavy quark decelerates, softer modes are allowed (not screened by the plasma anymore) in his wavefunction:

$$M = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}(u_m-u_s) . \tag{41}$$

It is also defined so that $-Md\gamma/dt = \Phi(t,u_s)$, the radiative energy loss, which for now can be checked at leading order. In terms of M, we can now write our expansion parameter as $(T\sqrt{\lambda})/(2M)$. In appendix, we give the second order and third order (this one is obtained from the correction $\zeta(u,v)$ to the trailing string) corrections to the energy and therefore to the mass.

Now we can compute the energy flow for $u \ll u_m$, using equations (32) and (34):

$$\Phi(t,u) = \frac{T_0 R^4}{\sqrt{-g}}\dot{x}x' u^4 f(u) = T_0 R^2 \gamma v^2 u_h^2 \left[1 + (1+\gamma^2)\frac{\dot{v}}{v}F(u) + \frac{\dot{v}\gamma^2(u-u_s)}{v u_h^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\dot{v}^2}{u_h^2}\right)\right] . \tag{42}$$

By evaluating equation (42) at $u=u_s$ and inserting equation (39), one finds the outgoing energy flow from the upper part of the string

$$\Phi(t,u_s) = T_0 R^2 \gamma v^2 u_h^2 \left[1 - \frac{(1+\gamma^2)u_h^2 F(u_s)}{\gamma^2(u_m-u_s)} + \mathcal{O}\left(\frac{u_h^2}{(u_m-u_s)^2}\right)\right] . \tag{43}$$

Using formulae (31) and (43), it is easy to see that the energy conservation equation

$$\frac{dE}{dt} = -\Phi(t,u_s) + \frac{\delta\ E|_{du_s}}{dt} \tag{44}$$

is verified, and to recover the net energy loss of the system at first order (30). Using the AdS/CFT dictionnary, one deduces the energy radiated as soft gluons by a dressed heavy quark moving through the SYM plasma at a speed v

$$\Phi(t,u_s) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}\gamma v^2(\pi T)^2\left[1 - \left(\frac{\sqrt{\lambda}T}{2M}\right)\frac{(1+\gamma^2)\pi T}{\gamma^2}F(\sqrt{\gamma}\pi T) + \mathcal{O}\left(\frac{\lambda T^2}{4M^2}\right)\right] \tag{45}$$

$$\underbrace{\simeq}_{\gamma\gg 1} \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}\gamma v^2(\pi T)^2\left[1 + \frac{1}{3\gamma^{3/2}}\left(\frac{\sqrt{\lambda}T}{2M}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{\lambda T^2}{4M^2}\right)\right] . \tag{46}$$

---

[4] For $u \lesssim u_m$, this string picture is modified anyway [32, 47, 48]. The string is actually a narrow tube: the interaction of the string with the D7 brane deforms the brane in the neighborhood of the endpoint of the string over a length scale of order $1/M$.

As $F(u)$ is negative, the first order correction to the soft gluon emission $\Phi(t,u_s)$ is always positive, meaning that the rate of energy loss is stronger for lighter quarks. Interestingly enough, in the ultrarelativistic case $\gamma \gg 1$, the first order correction to $\Phi(t,u_s)$ is further suppressed by a factor $\gamma^{-3/2}$, which is unexpected. In the non-relativistic case $\gamma \gtrsim 1$, due to the expansion $F(u) \sim \frac{1}{4u_h}\log((u-u_h)/u_h)$ when $u \to u_h$, the first correction to $\Phi(t,u_s)$ is dominated by the logarithmically enhanced term. It shows that our large mass perturbative expansion breaks down at very small velocities. And even if due to the v^2 prefactor that logarithmic singularity does not lead to a divergent energy loss in the small velocity limit, but to a vanishing one as expected, in reality γ never reaches 1. The heavy quark will thermalize before this happens and already then the picture has to be modified.

C. Second order in solving the equation of motion

At second order in $u_h/(u_m-u_s)$, we assume the solution of the string to be of the following form

$$x(t,u) = x_0 + \int^t v(t')dt' + v(t)F(u) + \dot{v}(t)\zeta(u,v(t)) + \dot{v}^2(t)\chi_1\left(u,v(t)\right) + \ddot{v}(t)\chi_2\left(u,v(t)\right) \ . \tag{47}$$

Thus one finds

$$\dot{x}^2 = v^2 + 2\dot{v}vF(u) + 2\ddot{v}v\zeta(u,v) + \dot{v}^2F^2(u) + 2v\dot{v}^2\frac{\partial\zeta(u,v)}{\partial v} + \cdots , \tag{48}$$

$$x'^2 = v^2F'^2(u) + 2\dot{v}vF'(u)\zeta'(u,v) + 2v\dot{v}^2F'(u)\chi_1'\left(u,v\right) + 2\ddot{v}vF'(u)\chi_2'(u,v) + \dot{v}^2\zeta'^2(u,v) + \cdots . \tag{49}$$

Expanding the time derivative part of the equation of motion up to second order, one finds

$$\begin{aligned}\frac{1}{f\left(u\right)}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{-g}}\right) &= \frac{1}{f\left(u\right)}\left\{\gamma^3\dot{v} + \gamma\ddot{v}\left[F(u) + \gamma^2v^2\frac{F(u)}{f\left(u\right)} - \gamma^2v^2u_h^2\zeta'(u,v)\right]\right\} \\ &\quad + \dot{v}^2\frac{v\gamma^3F(u)}{f\left(u\right)}\left[\frac{3\gamma^2v^2}{f\left(u\right)} + \frac{2}{f\left(u\right)} + 1\right] - \dot{v}^2\frac{v\gamma^3u_h^2}{f\left(u\right)}\left[\left(2+3\gamma^2v^2\right)\zeta'(u,v) + v\frac{\partial\zeta'(u,v)}{\partial v}\right] \ .\end{aligned} \tag{50}$$

Expanding the spatial derivative part yields

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u^4f\left(u\right)x'}{\sqrt{-g}}\right) &= \gamma\dot{v}\partial_u\left[u^4f(u)\zeta'(u,v) - \gamma^2v^2u_h^4\zeta'(u,v) + \gamma^2v^2u_h^2\frac{F(u)}{f\left(u\right)}\right] \\ &\quad + \gamma\ddot{v}\partial_u\left[u^4f(u)\chi_2'(u,v) - \gamma^2v^2u_h^4\chi_2'(u,v) + \gamma^2v^2u_h^2\frac{\zeta(u,v)}{f\left(u\right)}\right] \\ &\quad + \gamma\dot{v}^2\partial_u\left[u^4f(u)\chi_1'(u,v) - \gamma^2v^2u_h^4\chi_1'(u,v) + \gamma^2vu^4f(u)\zeta'(u,v)\left(\frac{F(u)}{f\left(u\right)} - u_h^2\zeta'(u,v)\right)\right] \\ &\quad + \gamma\dot{v}^2\partial_u\left[\gamma^2vu_h^2\left(\frac{1}{2}\frac{F^2(u)}{f\left(u\right)} - \frac{1}{2}u^4f(u)\zeta'^2(u,v) + \frac{v}{f\left(u\right)}\frac{\partial\zeta(u,v)}{\partial v}\right)\right] \\ &\quad + \gamma\dot{v}^2\partial_u\left[\frac{3}{2}\gamma^4v^3u_h^2\left(\frac{F(u)}{f\left(u\right)} - u_h^2\zeta'(u,v)\right)^2\right] .\end{aligned} \tag{51}$$

Comparing the coefficients of $\dot{v}^2$ and $\ddot{v}$ gives the equations of motion for χ_1 and χ_2, respectively[5]:

$$\begin{aligned}&\partial_u\left[u^4f(u)\chi_1'(u,v) - \gamma^2v^2u_h^4\chi_1'(u,v) + \gamma^2vu^4f(u)\zeta'(u,v)\left(\frac{F(u)}{f\left(u\right)} - u_h^2\zeta'(u,v)\right)\right] \\ &+\partial_u\left[\gamma^2vu_h^2\left(\frac{1}{2}\frac{F^2(u)}{f\left(u\right)} - \frac{1}{2}u^4f(u)\zeta'^2(u,v) + \frac{v}{f(u)}\frac{\partial\zeta(u,v)}{\partial v}\right) + \frac{3}{2}\gamma^4v^3u_h^2\left(\frac{F(u)}{f\left(u\right)} - u_h^2\zeta'(u,v)\right)^2\right] \\ &= \frac{v\gamma^2F(u)}{f\left(u\right)}\left[\frac{3\gamma^2v^2}{f\left(u\right)} + \frac{2}{f\left(u\right)} + 1\right] - \frac{v\gamma^2u_h^2}{f\left(u\right)}\left[\left(2+3\gamma^2v^2\right)\zeta'(u,v) + v\frac{\partial\zeta'(u,v)}{\partial v}\right],\end{aligned} \tag{52}$$

[5] Strictly speaking, there is physically only one unknown function in our Ansatz (47) at second order, $\dot{v}\chi_1 + \ddot{v}\chi_2$, but we choose to determine χ_1 and χ_2 separately.

and

$$\partial_u \left[u^4 f(u) \chi_2'(u,v) - \gamma^2 v^2 u_h^4 \chi_2'(u,v) + \gamma^2 v^2 u_h^2 \frac{\zeta(u)}{f(u)} \right] = \frac{1}{f(u)} \left[F(u) + \gamma^2 v^2 \frac{F(u)}{f(u)} - \gamma^2 v^2 u_h^2 \zeta'(u,v) \right]. \tag{53}$$

First, let us integrate over u once on both sides of the equations. For $\chi_1'(u,v)$ and $\chi_2'(u,v)$, one gets, respectively:

$$\begin{aligned} \left(u^4 - u_s^4\right) \chi_1'(u,v) \;=\; & -\gamma^2 v u^4 f(u) \zeta'(u,v) \left(\frac{F(u)}{f(u)} - u_h^2 \zeta'(u,v) \right) \\ & -\gamma^2 v u_h^2 \left(\frac{1}{2} \frac{F^2(u)}{f(u)} - \frac{1}{2} u^4 f(u) \zeta'^2(u,v) + \frac{v}{f(u)} \frac{\partial \zeta(u,v)}{\partial v} \right) \\ & -\frac{3}{2} \gamma^4 v^3 u_h^2 \left(\frac{F(u)}{f(u)} - u_h^2 \zeta'(u,v) \right)^2 - v \gamma^2 u_h^2 \left[2 + 3\gamma^2 v^2 \right] \left[\zeta(u,v) - \frac{1}{2} F^2(u) \right] \\ & -\gamma^4 v u_h^2 \left[2 + 3\gamma^2 v^2 \right] \varrho(u,v) + 3 v \gamma^4 \sigma(u) - v^2 \gamma^2 \phi(u,v) + C_2 \,, \end{aligned} \tag{54}$$

and

$$\left(u^4 - u_s^4\right) \chi_2'(u,v) \;=\; -\gamma^2 v^2 u_h^2 \frac{\zeta(u,v)}{f(u)} + \gamma^2 \sigma(u) \tag{55}$$

$$-v^2 u_h^2 \gamma^2 \left[\zeta(u,v) - \frac{1}{2} F^2(u) \right] - \gamma^4 v^2 u_h^2 \varrho(u,v) + C_3 \,, \tag{56}$$

where where C_2 and C_3 are integration constants. We have also introduced the following functions

$$\varrho(u,v) \;=\; u_h^4 \int du \frac{1}{u^4 - u_h^4} \frac{u - u_s}{u^4 - u_s^4} \tag{57}$$

$$\sigma(u) \;=\; \int du \frac{F(u)}{f(u)} = \frac{u_h^2}{2} F^2(u) + u F(u) + \frac{1}{4} \ln \frac{u^2 + u_h^2}{u^2 - u_h^2} \tag{58}$$

$$\phi(u,v) \;=\; u_h^2 \int du \frac{1}{f(u)} \frac{\partial \zeta'(u,v)}{\partial v} = \gamma u_h^2 \int du \frac{1}{f(u)} \frac{4u^3 + 3u^2 u_s + 2u_s^2 u + u_s^3}{2 (u + u_s)^2 \left(u^2 + u_s^2\right)^2} \,, \tag{59}$$

with

$$\varrho(u,v) \;=\; \frac{u_h}{4u_s^2 \left(u_h^4 - u_s^4\right)} \left[2u_s^3 \tan^{-1}\left(\frac{u}{u_h}\right) - 2u_h^3 \tan^{-1}\left(\frac{u}{u_s}\right) + u_s^2 (u_h - u_s) \log(u - u_h) \right] \tag{60}$$

$$+\frac{u_h}{4u_s^2 \left(u_h^4 - u_s^4\right)} \left[u_s^2 (u_h + u_s) \log(u + u_h) - 2u_h^3 \log(u + u_s) \right] \tag{61}$$

$$+\frac{u_h}{4u_s^2 \left(u_h^4 - u_s^4\right)} \left[-u_s^2 u_h \log\left(u^2 + u_h^2\right) + u_h^3 \log\left(u^2 + u_s^2\right) \right]. \tag{62}$$

By requiring that $\chi_1'(u)$ and $\chi_2'(u)$ are finite at $u = u_s$, one can determine the integration constants. They are such that in the large u limit for the right-hand side of (54) and (56), one finds

$$\left(u^4 - u_s^4\right) \chi_1'(u,v) \;=\; C_2' + \left(5 - \frac{5}{3\gamma^2}\right) \frac{v u_h^2 \gamma^6}{u^2} + \mathcal{O}\left(\frac{u_h^4}{u^4}\right) + \cdots \,, \tag{63}$$

$$\left(u^4 - u_s^4\right) \chi_2'(u,v) \;=\; C_3' + \left(1 - \frac{5}{6\gamma^2}\right) \frac{u_h^2 \gamma^4}{u^2} + \mathcal{O}\left(\frac{u_h^4}{u^4}\right) + \cdots \,, \tag{64}$$

with

$$C_2' \;=\; -\left(\frac{1}{4} + \frac{5\pi}{8} - \frac{5\log 2}{4}\right) v \gamma^5, \tag{65}$$

$$C_3' \;=\; -\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\log 2}{2}\right) \gamma^3 \,. \tag{66}$$

We shall not integrate the equations of motion any further to get the shape of the string, the knowledge of $\chi_1'(u)$ and $\chi_2'(u)$ is enough to compute the energy flow $\Phi(t,u)$. First at $u = u_m$, all the contributions in x' are of the same

order, and one obtains

$$\Phi(t,u_m) = \left.\frac{T_0R^4}{\sqrt{-g}}\dot{x}x'u^4f(u)\right|_{u=u_m} \tag{67}$$

$$= -\frac{T_0R^2}{\sqrt{1-v^2}}v\left\{vu_h^2+\left[\dot{v}\zeta'(u_m,v)+\dot{v}^2\chi_1'(u_m,v)+\ddot{v}\chi_2'(u_m,v)\right]u_m^4f(u_m)\right\} . \tag{68}$$

Imposing a vanishing flow at the top of the string gives the second order correction to $\dot{v}$:

$$\dot{v} = -\frac{vu_h^2}{\gamma^2(u_m-u_s)}+\frac{vu_h^4}{\gamma(u_m-u_s)^3}\left(\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}-\frac{\log 2}{4}\right) . \tag{69}$$

Note that in the second order correction, we only gave the large γ result[6], in order to get a lighter expression. We will also need the second order expressions

$$\dot{v}^2 = \frac{v^2(1-v^2)u_h^4}{\gamma^2(u_m-u_s)^2} , \quad \ddot{v} = \frac{v(1-3v^2)u_h^4}{\gamma^2(u_m-u_s)^2} . \tag{70}$$

Now we can compute the energy flow for $u \ll u_m$ up to second order in $u_h/(u_m-u_s)$, by expanding $\sqrt{-g}$, $\dot{x}$, and $x'u^4f(u)$ up to second order:

$$\Phi(t,u) = \frac{T_0R^4}{\sqrt{-g}}\dot{x}x'u^4f(u) \tag{71}$$

$$\begin{aligned}
&= T_0R^2(\pi T)^2\frac{v^2}{\sqrt{1-v^2}}\left\{1+\left[\frac{\gamma^2\ u^4-u_h^4}{u^4-u_h^4}\right]\frac{\dot{v}F(u)}{v}+\left[u^4-\gamma^2u_h^4\right]\frac{\dot{v}\zeta'(u,v)}{vu_h^2}\right\}\\
&+T_0R^2(\pi T)^2\frac{v^2}{\sqrt{1-v^2}}\left\{\left[\frac{\gamma^2\ u^4-u_h^4}{u^4-u_h^4}\right]\frac{\ddot{v}\zeta(u,v)}{v}+\left[u^4-\gamma^2u_h^4\right]\frac{\ddot{v}\chi_2'(u,v)}{vu_h^2}\right\}\\
&+T_0R^2(\pi T)^2\frac{v^2}{\sqrt{1-v^2}}\left\{\dot{v}^2\gamma^2\left[\frac{F^2(u)}{2f(u)}-\frac{\zeta'^2(u,v)u^4f(u)}{2}\right]\right\}\\
&+T_0R^2(\pi T)^2\frac{v^2}{\sqrt{1-v^2}}\left\{\dot{v}^2\gamma^2\left(F(u)+\frac{\zeta'(u,v)u^4f(u)}{u_h^2}\right)\left(-u_h^2\zeta'(u,v)+\frac{F(u)}{f(u)}\right)\right\}\\
&+T_0R^2(\pi T)^2\frac{v^2}{\sqrt{1-v^2}}\left\{\dot{v}^2\frac{F(u)\zeta'(u,v)u^4f(u)}{v^2u_h^2}+\left[u^4-\gamma^2u_h^4\right]\frac{\dot{v}^2\chi_1'(u,v)}{vu_h^2}+\frac{\dot{v}^2}{v}\frac{\partial\zeta(u,v)}{\partial v}\frac{\gamma^2u^4-u_h^4}{u^4-u_h^4}\right\}
\end{aligned} \tag{72}$$

The energy flow at $u=u_s$ does not depend on $\chi_1'(u)$ or $\chi_2'(u)$, and is found to be (in the large γ limit where the second order correction to $\dot{v}$ is subdominant)

$$\Phi(t,u_s)\underbrace{\simeq}_{\gamma\gg1}T_0R^2\ u_h^2\gamma v^2\left[1+\frac{1}{3\gamma^{3/2}}\frac{u_h}{u_m-u_s}+\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\log 2-\frac{7}{32}\right)\gamma\left(\frac{u_h^2}{(u_m-u_s)^2}\right)+\mathcal{O}\left(\frac{u_h^3}{(u_m-u_s)^3}\right)\right] , \tag{73}$$

where we have used the results

$$\frac{\partial\zeta(u_s,v)}{\partial v} = -v\gamma^3\frac{1}{2u_h^2}\left(\frac{1}{4}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2\right) . \tag{74}$$

In order to rewrite this in terms of the heavy quark mass, and other gauge theory quantities, one should first determine M up to second order. From formula (29), one finds

$$M = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}(u_m-u_s)\ \left(1-\frac{v^2u_h^2}{u_m-u_s}F(u_s)\right)\underbrace{\simeq}_{\gamma\gg1}\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}(u_m-u_s)\ \left(1+\frac{v^2u_h}{3\gamma^{3/2}(u_m-u_s)}\right) , \tag{75}$$

---

[6] While formula (17) is valid for the trailing string solution, the first order correction to the string shape modifies the γ dependence of u_s, the point where the local speed of light in AdS space coincides with the propagation speed of the string. In principle this should be accounted for in the second order calculation, however in the large γ limit, these corrections are always subdominant.

which is again consistent with $-Md\gamma/dt = \Phi(t,u_s)$. Then in formula (73), when introducing $(u_m-u_s)^{-1} = \sqrt{\lambda}/(2\pi M)\left[1+\mathcal{O}(u_h/(u_m-u_s))\right]$, one sees that what was first order in $u_h/(u_m-u_s)$ will introduce a second order correction in terms of $\sqrt{\lambda}T/(2M)$. However, in the large γ limit, this contribution is subdominant. Therefore one gets for the radiative energy loss

$$\Phi(t,u_s)\underbrace{\simeq}_{\gamma\gg 1}\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}\left(\pi T\right)^2\gamma v^2\left[1+\frac{1}{3\gamma^{3/2}}\frac{\sqrt{\lambda}T}{2M}+\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\log 2-\frac{7}{32}\right)\gamma\left(\frac{\lambda T^2}{4M^2}\right)+\mathcal{O}\left(\frac{\lambda^{3/2}T^3}{8M^3}\right)\right] . \tag{76}$$

The second order correction is also positive ($\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\log 2-\frac{7}{32}\simeq 0.00066$) but very tiny. This continues to enhance the energy loss for heavy quark with lighter mass. Also, one can check that the second order correction is always small as long as $u_s=\sqrt{\gamma}u_h \ll u_m$. It is also interesting to notice that the second order correction is proportional to $\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}a^2$ [50, 51] when a is identified as $\gamma^3\dot{v}$ in relativity. One can interpret this term energy lost by radiation due to the deceleration.

V. THERMALIZATION TIME

To finish, let us estimate the thermalization time of the heavy quark, and show that our perturbative expansion can be trusted, provided u_m is large enough and the heavy quark slows down in a quasistatic way. In order to show how our calculation improves the previous estimations, let us rewrite formula (69) in the following way:

$$(\mu-\sqrt{\gamma})\frac{dv}{d\tilde{t}}=-v(1-v^2)\left[1-\frac{\gamma}{(\mu-\sqrt{\gamma})^2}\left(\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}-\frac{\log 2}{4}\right)\right] , \tag{77}$$

where $\tilde{t}=\pi T\ t$ and $\mu=u_m/u_h=2m/(\sqrt{\lambda}T)$ is expressed in terms of the bare mass of the heavy quark. Note that $\mu\gg\sqrt{\gamma}$ in order for our perturbative expansion to be valid.

In Ref. [21, 22], the equation proposed for $\dot{v}$ is $\mu\ dv/d\tilde{t}=-v(1-v^2)$ and the solution is

$$v(t)=\sqrt{\frac{v_0^2}{v_0^2+(1-v_0^2)\exp\left(\frac{2\pi Tt}{\mu}\right)}} , \tag{78}$$

with $v_0=\sqrt{1-1/\gamma_0^2}$ the initial velocity. This naturally implies the thermalization time scale to be $\frac{2m}{\sqrt{\lambda}\pi T^2}$. However the equation proposed in Ref. [21, 22] is different from our first order equation $(\mu-\sqrt{\gamma})\ dv/d\tilde{t}=-v(1-v^2)$, which indicates that the thermalization time is rather given in terms of the thermal mass of the quark:

$$\tau=\frac{2M}{\sqrt{\lambda}\pi T^2} . \tag{79}$$

Strictly speaking M slightly varies with t, from $m-T\sqrt{\lambda\gamma_0}/(2\pi)$ to about $m-T\sqrt{\lambda}/(2\pi)$, which bounds the thermalization time. In any case it is a smaller time than $\frac{2m}{\sqrt{\lambda}\pi T^2}$, and this leads to a faster thermalization.

Let us point out that this difference comes from the fact that we had to pick a particular point on the string to evaluate the energy loss, while in the stationary problem solved in Ref. [21, 22], it doesn't matter at what value of u the energy flow is computed because the flow is constant when $\dot{v}=0$. In our study, we actually let the heavy quark slow down and the point on the string where the energy loss is evaluated becomes crucial. Our choice to evaluate the radiative energy loss at $u=u_s$ is motivated by the fact that the part of the string below u_s is not causally connected to the part of the string above [43], and therefore corresponds to emitted radiation on the gauge theory side.

In Fig.1, equation (77) is solved numerically at first order (without the square bracket term) and at second order. The comparison with the solution (78) confirms that our calculations imply a faster thermalization: the time it takes to reduce the initial speed in half is about $2\mu/(\pi T)$, instead of $3\mu/(\pi T)$. We also see that the second order correction is quite small, although one should keep in mind that the dashed curve should be modified for small values of γ : the second order correction in (77) is only valid in the limit $\gamma\gg 1$.

VI. CONCLUSION

In this paper, we study the radiative energy loss of a slowly decelerating heavy quark moving through a strongly coupled SYM plasma by using AdS/CFT correspondence. The calculation is done in terms of perturbation in $\sqrt{\lambda}T/M$,

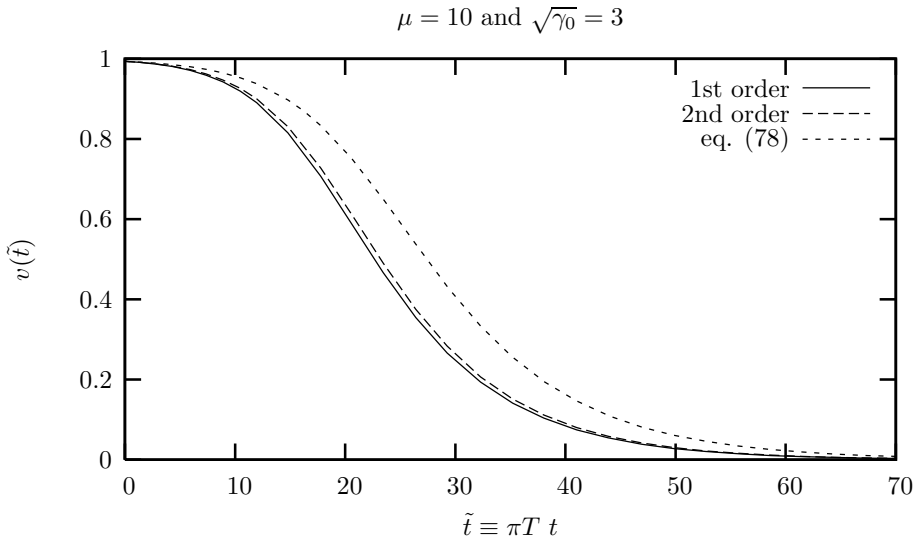

FIG. 1: Numerical solutions of equation (77) without the square bracket term (first order), with the square bracket term (second order), and the solution (78) proposed in [21, 22]. Our results indicate a faster heavy quark thermalization.

where λ is the strong coupling of the SYM theory, T is the temperature of the plasma and M is the thermal mass of the heavy quark. The shape of the string trailing behind the heavy quark in the fifth dimension determines the medium-induced energy loss of the quark. At zeroth order, the heavy quark propagates at a constant speed, and the trailing string (24)-(26) is that found in Ref. [21, 22]. We determine the corrections to the shape of the string up to first order, formulae (32), (35) and (39), and the radiative energy loss of the heavy quark up to second order (73). In this case we only gave the large γ result explicitely, but the exact expression was also found. The physical interpretation of each correction is provided. Especially, the second order correction can be understood as energy loss due to the decelaration. Last but not least, these calculations allow us to evaluate the thermalization time of the heavy quark moving in the strongly-coupled SYM plasma. Our parametric estimate is given by (79).

Acknowledgments

We would like to thank Prof. A.H. Mueller for numerous discussions and helpful comments. G.B. acknowledges helpful discussions with Edmond Iancu, Robi Peschanski and François Gelis. G.B. would like to thank Prof. A.H. Mueller and other members of the Department of Physics of Columbia University for hospitality and support during the early stage of this work. B.X. would like to thank Prof. Bo-Qiang Ma for hospitality and support during his visit to the Physics Department of Peking University when this work was finalized. C.M. is supported by the European Commission under the FP6 program, contract No. MOIF-CT-2006-039860. B.X. is supported by the US Department of Energy.

APPENDIX A: VELOCITY OF THE QUARK *vs.* $v(t)$

Using our Ansatz (47), the velocity of the heavy quark, which is the velocity of the string at the flavor brane, is

$$\dot{x}(t,u_m) = v(t) + \dot{v}(t)F(u_m) + \ddot{v}(t)\zeta(u_m,v) + \dot{v}^2(t)\partial_v\zeta(u_m,v) + \dots \ . \tag{A1}$$

On the other hand, we have the expansions

$$F(u_m) \ = \ -\frac{u_h^2}{3u_m^3} + \mathcal{O}\left(\frac{u_h^6}{u_m^7}\right) \ , \tag{A2}$$

$$\zeta(u_m,v) \ = \ -\frac{\gamma^2}{2u_m^2} + \mathcal{O}\left(\frac{u_h}{u_m^3}\right) \ . \tag{A3}$$

Therefore, the velocity of the quark reads

$$\dot{x}(t,u_m) = v(t) + \mathcal{O}\left(\frac{u_h^4}{u_m^4}\right) \ . \tag{A4}$$

The discrepancy between $v(t)$ and the velocity of the quark appears only at higher orders in the large mass expansion than the ones considered in this study.

APPENDIX B: CHECKING ENERGY CONSERVATION UP TO SECOND ORDER

According to Eq. (16) the energy of the system is

$$E = \int_{u_s}^{u_m} du\ e(t,u) = T_0 R^4 \int_{u_s}^{u_m} du\ \frac{1+u^4 f(u) x'^2}{\sqrt{-g}} \ . \tag{B1}$$

Inserting Eq. (47), one finds

$$\frac{1+u^4 f(u)x'^2}{\sqrt{-g/R^4}} = \gamma\left[\left(1+\frac{v^2u_h^4}{u^4-u_h^4}\right) + \dot{v}v\gamma^2\left(1+\frac{v^2u_h^4}{u^4-u_h^4}\right)\left(\frac{F(u)}{f(u)} - u_h^2\zeta'(u,\gamma)\right) + 2\dot{v}vu_h^2\zeta'(u,v) + \mathcal{O}\left(\frac{\dot{v}^2}{u_h^2}\right)\right] \ , \tag{B2}$$

and thus, neglecting terms suppressed by powers of u_m, one gets

$$E = T_0R^2\gamma\Big\{u_m - u_s - v^2u_h^2F(u_s) - v\dot{v}\Big[-(\gamma^2-2)u_h^2\zeta(u_s,v) + \gamma^2\sigma(u_s) + (\gamma^2-1)\frac{u_h^2}{2}F^2(u_s) \\ -\gamma^2(\gamma^2-1)u_h^2\rho(u_s)\Big] + \mathcal{O}\left(\frac{\dot{v}^2}{u_h^2}\right)\Big\} \ . \tag{B3}$$

Using

$$\frac{\delta\ E|_{du_s}}{dt} = -e(t,u_s)\ \frac{u_s\gamma^2v\dot{v}}{2} = T_0R^2\ v^2u_h^2\left\{\frac{(\gamma^2+1)}{2\gamma}\frac{u_s}{u_m-u_s} \right. \\ \left. -\frac{v^2u_s^3}{2\gamma^2(u_m-u_s)^2}\left[\frac{1+\gamma^4}{\gamma^2-1}F(u_s) - \frac{\gamma(\gamma^2-1)}{4u_s}\right] + \mathcal{O}\left(\frac{u_h^3}{(u_m-u_s)^3}\right)\right\} \ , \tag{B4}$$

and substracting $\Phi(t,u_s)$ (formula (73)), one can check that the energy conservation equation is verified, meaning that one recovers the net energy loss dE/dt from derivating (B3).

[1] I. Arsene *et al.* [BRAHMS Collaboration], *Nucl. Phys.* **A757** (2005) 1.
[2] B.B. Back *et al.* [PHOBOS Collaboration], *Nucl. Phys.* **A757** (2005) 28.
[3] J. Adams *et al.* [STAR Collaboration], *Nucl. Phys.* **A757** (2005) 102.
[4] K. Adcox *et al.* [PHENIX Collaboration], *Nucl. Phys.* **A757** (2005) 184.
[5] D. Molnar and M. Gyulassy, Nucl. Phys. A **697**, 495 (2002) [Erratum-ibid. A **703**, 893 (2002)].
[6] G. Policastro, D. T. Son and A. O. Starinets, Phys. Rev. Lett. **87**, 081601 (2001).
[7] P. Kovtun, D. T. Son and A. O. Starinets, Phys. Rev. Lett. **94**, 111601 (2005).
[8] D. Teaney, Phys. Rev. C **68**, 034913 (2003).
[9] R. Baier, Y. L. Dokshitzer, A. H. Mueller, S. Peigne and D. Schiff, Nucl. Phys. B **484** (1997) 265.
[10] R. Baier, Y. L. Dokshitzer, A. H. Mueller and D. Schiff, Nucl. Phys. B **531** (1998) 403.
[11] B. G. Zakharov, JETP Lett. **63** (1996) 952; JETP Lett. **65** (1997) 615.
[12] U. A. Wiedemann, Nucl. Phys. B **588** (2000) 303.
[13] M. Gyulassy, P. Levai and I. Vitev, Nucl. Phys. B **594** (2001) 371.
[14] K. J. Eskola, H. Honkanen, C. A. Salgado and U. A. Wiedemann, Nucl. Phys. A **747**, 511 (2005).
[15] N. Armesto *et al.*, J. Phys. G **35**, 054001 (2008).
[16] J. Casalderrey-Solana and C. A. Salgado, Acta Phys. Polon. B **38**, 3731 (2007).
[17] W. A. Zajc, Nucl. Phys. A **805**, 283 (2008).
[18] J. M. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998) [Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113 (1999)].
[19] E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 253 (1998).

[20] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, Phys. Lett. B **428**, 105 (1998).
[21] C. P. Herzog, A. Karch, P. Kovtun, C. Kozcaz and L. G. Yaffe, JHEP **0607**, 013 (2006).
[22] S. S. Gubser, Phys. Rev. D **74**, 126005 (2006).
[23] S. S. Gubser, Nucl. Phys. B **790**, 175 (2008).
[24] J. Casalderrey-Solana and D. Teaney, Phys. Rev. D **74**, 085012 (2006).
[25] J. Casalderrey-Solana and D. Teaney, JHEP **0704**, 039 (2007) .
[26] H. Liu, K. Rajagopal and U. A. Wiedemann, JHEP **0703**, 066 (2007) [arXiv:hep-ph/0612168].
[27] N. Armesto, J. D. Edelstein and J. Mas, JHEP **0609**, 039 (2006) [arXiv:hep-ph/0606245].
[28] P. C. Argyres, M. Edalati and J. F. Vazquez-Poritz, JHEP **0704**, 049 (2007) [arXiv:hep-th/0612157].
[29] J. J. Friess, S. S. Gubser, G. Michalogiorgakis and S. S. Pufu, Phys. Rev. D **75**, 106003 (2007) [arXiv:hep-th/0607022].
[30] S. S. Gubser and S. S. Pufu, Nucl. Phys. B **790**, 42 (2008) [arXiv:hep-th/0703090].
[31] A. Yarom, Phys. Rev. D **75**, 105023 (2007) [arXiv:hep-th/0703095].
[32] P. M. Chesler and L. G. Yaffe, Phys. Rev. D **78**, 045013 (2008) [arXiv:0712.0050 [hep-th]].
[33] Y. Hatta, E. Iancu and A. H. Mueller, JHEP **0801**, 026 (2008).
[34] Y. Hatta, E. Iancu and A. H. Mueller, JHEP **0801**, 063 (2008).
[35] J. L. Albacete, Y. V. Kovchegov and A. Taliotis, JHEP **0807**, 074 (2008) [arXiv:0806.1484 [hep-th]].
[36] E. Levin, J. Miller, B. Z. Kopeliovich and I. Scmidt, arXiv:0811.3586 [hep-ph].
[37] Y. Hatta, E. Iancu and A. H. Mueller, JHEP **0805**, 037 (2008).
[38] Y. Hatta and T. Matsuo, arXiv:0804.4733 [hep-th].
[39] D. M. Hofman and J. Maldacena, JHEP **0805**, 012 (2008).
[40] J. Noronha, G. Torrieri and M. Gyulassy, Phys. Rev. C **78**, 024903 (2008).
[41] W. A. Horowitz and M. Gyulassy, arXiv:0706.2336 [nucl-th].
[42] B. Betz, M. Gyulassy, J. Noronha and G. Torrieri, arXiv:0807.4526 [hep-ph].
[43] F. Dominguez, C. Marquet, A. H. Mueller, B. Wu and B. W. Xiao, Nucl. Phys. A **811**, 197 (2008).
[44] C. Marquet, arXiv:0810.2572 [hep-ph].
[45] A. H. Mueller, Phys. Lett. B **668**, 11 (2008).
[46] Y. Hatta, arXiv:0810.0889 [hep-ph].
[47] C. G. Callan and J. M. Maldacena, Nucl. Phys. B **513**, 198 (1998) [arXiv:hep-th/9708147].
[48] G. W. Gibbons, Nucl. Phys. B **514**, 603 (1998) [arXiv:hep-th/9709027].
[49] M. Chernicoff and A. Guijosa, JHEP **0806**, 005 (2008) [arXiv:0803.3070 [hep-th]].
[50] A. Mikhailov, arXiv:hep-th/0305196.
[51] B. W. Xiao, Phys. Lett. B **665**, 173 (2008).

Article [VIII]

Gravity dual of $\mathcal{N}=4$ SYM theory with fast moving sources

Guillaume Beuf*
Institut de Physique Théorique, CEA/Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette cedex, France
URA 2306, unité de recherche associée au CNRS

A family of wave solutions to the full Einstein equations in AdS_5 geometry is derived. These background solutions give by duality the response of $\mathcal{N}=4$ SYM at strong coupling to an arbitrary distribution of fast moving external sources for the energy-momentum tensor operator. We discuss the similarities of these solutions with the Color Glass Condensate effective theory for QCD at high energy.

PACS numbers: 11.25.Tq

I. INTRODUCTION

The AdS/CFT correspondence [1–3] and other gauge/gravity dualities have brought new insights into strongly coupled gauge theories. Since the data have provided evidences that the hot and dense matter produced in heavy ion collisions at RHIC should be strongly coupled [4], AdS/CFT has become an interesting tool in order to explore subjects related to RHIC physics. The quark-gluon plasma (QGP) presumably produced at RHIC is deconfined and at least approximately locally thermalized. In this regime, QCD acquires some similarities with $\mathcal{N}=4$ SYM at finite temperature, which can justify the use of AdS/CFT. In this context, the hydrodynamical behavior of the long wavelength modes of $\mathcal{N}=4$ SYM at finite temperature has been understood and related to black brane physics [5, 6]. This has allowed to calculate the shear viscosity [7] and other transport coefficients [8–10] of a $\mathcal{N}=4$ SYM plasma. Assuming the symmetries of the Bjorken flow, it has been shown that hydrodynamics is the only consistent behavior at late proper time for the strongly coupled plasma [11–13]. The picture of the plasma emerging from these studies is in qualitative agreement with the one extracted from the data.

Gluon saturation [14] dominates the dynamics of the nucleus before the collision, and determines the initial conditions for the medium produced. The correct framework allowing to address that phenomenon from QCD first principles is the Color Glass Condensate effective theory (CGC) (see [15, 16] for reviews), or equivalent formalisms, such as the one developed by Balitsky [17]. The coupling is weak at high enough energy, due to the properties of gluon saturation. Among other successes, the CGC provided a correct prediction for d-Au collisions at RHIC [18], where initial condition effects are essential.

One of the main theoretical problems about heavy ion collisions is to understand the thermalization process leading from the weakly coupled out-of-equilibrium Glasma [19], produced by the collision of two sheets of CGC, to the strongly coupled and thermalized QGP. Let us consider the possibility that thermalization is mainly a strong coupling phenomenon. Then, thermalization should be addressed by building the gravity dual of an expanding medium, starting from very short proper time. In that regime, the physics is determined by the properties of the nucleus before the collision. Hence, it would be useful to construct the gravity dual of a fast moving object mimicking the physics of the CGC.

The obvious problem is that, as a conformal theory, $\mathcal{N}=4$ SYM admits no states analogous to nucleus or hadrons. There are two main strategies allowing to avoid that difficulty. The first strategy, which is commonly used, is to modify the gravity background dual to $\mathcal{N}=4$ SYM, in order to obtain confinement in the IR. It is however difficult to maintain a gauge/gravity correspondence in that context. Less drastic modifications of the gravity setup such as the introduction of point-like sources in the bulk [20, 21] seem to provide models for a fast moving nucleus in the boundary theory. However, the modification of the boundary field theory corresponding to the addition of sources in the bulk is not well understood. The second possible strategy, developed in the present paper, is the following. We restrict ourselves to the original AdS/CFT correspondence [1–3], keeping consistently non-zero sources of $\mathcal{N}=4$ SYM, and we make use of the results of holographic renormalization [22, 23]. Suitably chosen distributions of sources generate $\mathcal{N}=4$ SYM fields whose energy-momentum tensor is a reasonable approximation to the one of a fast moving nucleus in QCD. Such setup is well defined both on the field theory side and on the gravity side of the correspondence, and has some similarities with the weakly coupled CGC.

In section II, we derive a family of background solutions of Einstein equations. In section III, the boundary field theory counterparts of these solutions are given, relying on the results of holographic renormalization. In section IV, we discuss the similarities and differences of our solutions with the CGC formalism, and suggest how to model a highly boosted nucleus at strong coupling.

*Electronic address: gbeuf@quark.phy.bnl.gov

II. A FAMILY OF EXACT SOLUTIONS OF EINSTEIN EQUATIONS

Let us look for gravity duals of $\mathcal{N}=4$ SYM with fast moving matter in the (+) direction on the light-cone. The corresponding metric writes as the AdS_5 metric plus an additional part to be found. In the high energy limit, we keep for that new part only the component which is enhanced twice by Lorentz factors with respect to the rest frame of the matter distribution. Hence, generalizing the shockwave solution proposed in [11], we consider the Ansatz[1] for the metric G_{IJ}, in light-cone coordinates,

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2}\Big[dz^2 - 2dx^+dx^- + d\mathbf{x}_\perp{}^2 + b(x^+,x^-,\mathbf{x}_\perp,z)dx^-{}^2\Big]\,, \tag{1}$$

where $\mathbf{x}_\perp$ is a vector of the 2-dimensional transverse plane. We do not modify other supergravity background fields, so that the cosmological constant should remain $\Lambda = -6/L^2$. Hence, one can write the Einstein equations as

$$\mathcal{R}_{IJ} = -\frac{4}{L^2}\, G_{IJ}\,. \tag{2}$$

The $(z,-)$, $(i,-)$ and $(+,-)$ components of the Einstein equations for our Ansatz (1) reduce respectively to

$$\partial_z\partial_+ b = 0\,, \quad \partial_i\partial_+ b = 0 \quad \text{and} \quad \partial_+^2 b = 0\,. \tag{3}$$

In the function $b(x^+,x^-,\mathbf{x}_\perp,z)$, the linear term in x^+ allowed by the equations (3) does not encode interesting physics of the boundary field theory. Hence, we will restrict ourselves, in the following, to functions $b(x^-,\mathbf{x}_\perp,z)$ independent of x^+.

Now, the non-vanishing Christoffel symbols for our Ansatz are

$$\begin{aligned}
\Gamma^z_{--} &= -\frac{1}{2}\,\partial_z b(x^-,\mathbf{x}_\perp,z) + \frac{1}{z}\,b(x^-,\mathbf{x}_\perp,z)\\
\Gamma^i_{--} &= -\frac{1}{2}\,\partial_i b(x^-,\mathbf{x}_\perp,z)\\
\Gamma^+_{-I} = \Gamma^+_{I-} &= -\frac{1}{2}\,\partial_I b(x^-,\mathbf{x}_\perp,z)\,,
\end{aligned} \tag{4}$$

in addition to the Christoffel symbols of pure AdS_5 geometry, which turn out to stay unmodified[2]

$$\begin{aligned}
\Gamma^z_{ij} &= \frac{\delta_{ij}}{z}\\
\Gamma^z_{+-} = \Gamma^z_{-+} &= \Gamma^I_{Iz} = \Gamma^I_{zI} = -\frac{1}{z}\,.
\end{aligned} \tag{5}$$

[1] We write with capital letters $I, J, ...$ 5-dimensional AdS_5-like indices, with Greek letters $\mu, \nu, ...$ the 4-dimensional Minkowski-like indices, and with small Latin letters $i, j, ...$ indices for the 2-dimensional transverse plane.

[2] There is no summation over repeated indices in formula (5).

Calculating the Ricci curvature $\mathcal{R}_{IJ}$, one finds that all the Einstein equations are trivially satisfied, except the one corresponding to the $(-,-)$ component, which gives

$$\partial_z^2 b(x^-,\mathbf{x}_\perp,z) - \frac{3}{z}\partial_z b(x^-,\mathbf{x}_\perp,z) + \Delta_\perp b(x^-,\mathbf{x}_\perp,z) = 0\,. \tag{6}$$

In many studies of gauge/gravity duality, one considers small perturbations on the top of a known background, in order to linearize the problem. It should be remarked that here, by contrast, the perturbation b can be large, as the exact Einstein equations turn out to be linear in b, thanks to the peculiar structure of the Ansatz (1). Performing a Fourier transform with respect to the transverse position $\mathbf{x}_\perp$, one gets

$$\partial_z^2 \tilde{b}(x^-,\mathbf{k}_\perp,z) - \frac{3}{z}\,\partial_z \tilde{b}(x^-,\mathbf{k}_\perp,z) - \mathbf{k}_\perp^2\;\tilde{b}(x^-,\mathbf{k}_\perp,z) = 0\,. \tag{7}$$

For $\mathbf{k}_\perp \neq 0$, the generic solutions of equation (7) write

$$\begin{aligned}
\tilde{b}(x^-,\mathbf{k}_\perp,z) \;=\; & \tilde{c}_1(x^-,\mathbf{k}_\perp)\;\frac{k_\perp^2 z^2}{2}\;K_2(k_\perp z)\\
& + \tilde{c}_2(x^-,\mathbf{k}_\perp)\;k_\perp^2 z^2\;I_2(k_\perp z)\,,
\end{aligned} \tag{8}$$

where I_2 and K_2 are the modified Bessel functions of first and second kind, $k_\perp = |\mathbf{k}_\perp|$, and $\tilde{c}_1$ and $\tilde{c}_2$ are two arbitrary functions. $z^2K_2(k_\perp z)$ decays exponentially to zero as $z \to \infty$ whereas $z^2I_2(k_\perp z)$ blows up exponentially. Our Poincaré coordinates system covers only half of the AdS_5 space. For that reason the points with $z \to \infty$ are in the interior of the manifold. Hence, only $z^2K_2(k_\perp z)$ is regular in the bulk. Since the function b disappears from the calculation of the square of the Riemann tensor and any other scalar quantities built from the Riemann curvature, one could think that our Ansatz never leads to curvature singularities. However, a similar family of solutions - up to dimension and signature - has been analyzed [24], and the singularity $z \to \infty$, if present, has been shown to be a *p. p. curvature singularity*, as defined in [25]. This remark should hold in our case, meaning that the $z^2I_2(k_\perp z)$ solutions lead to a naked curvature singularity at $z \to \infty$.

$z^2I_2(k_\perp z)$ might be acceptable only as the small z behavior of a solution with a particular additional object in the bulk, mapping to a modification of the IR behavior of the boundary field theory. In the present study, we will not discuss further that possibility, and keep only the regular modes with $z^2K_2(k_\perp z)$.

The solutions of equation (7) for the $\mathbf{k}_\perp = 0$ modes writes

$$\tilde{b}(x^-,\mathbf{k}_\perp = 0,z) = \tilde{d}_1(x^-) + z^4\;\tilde{d}_2(x^-)\,. \tag{9}$$

As for the generic case, we will discard the second term, which should lead to a naked curvature singularity at $z \to \infty$. One should notice that this singular mode is precisely the shockwave solution proposed in [11] as a model for a highly boosted nucleus, and used in [26, 27] in order to model nucleus-nucleus collisions or deep inelastic

scattering on a nucleus. However, one should realize that such a solution which is singular in the bulk does not map to a solution of pure $\mathcal{N}=4$ SYM in the vacuum.

As $\frac{k_\perp^2 z^2}{2}\ K_2(k_\perp z) \to 1$ for $z \to 0$, we merge the two cases, and write our solution for arbitrary $\mathbf{k}_\perp$ as

$$\tilde{b}(x^-, \mathbf{k}_\perp, z) = \tilde{c}_1(x^-, \mathbf{k}_\perp)\ \frac{k_\perp^2 z^2}{2}\ K_2(k_\perp z)\,, \qquad (10)$$

with $\tilde{c}_1(x^-, \mathbf{k}_\perp = 0) = \tilde{d}_1(x^-)$. We have a family of regular background solutions (1,10) of Einstein equations.

In that family, the only solutions which are homogeneous in the $\mathbf{x}_\perp$ transverse plane are of the type $b(x^-, \mathbf{x}_\perp, z) = b(x^-)$. In that case, performing the change of variable $x^+ \mapsto \hat{x}^+ = x^+ - \int^{x^-} du\, b(u)/2$, one obtains the undeformed AdS_5 space, with $\hat{x}^+$ playing the role of x^+. Hence, these homogeneous solutions seems not to encode any non-trivial information about $\mathcal{N}=4$ SYM. We will come back on that issue later on.

Let us now discuss the content of the solutions (1,10) in terms of the dual field theory.

III. DUAL FIELD THEORETICAL CONTENT FROM HOLOGRAPHIC RENORMALIZATION

The asymptotic behavior near the boundary of background metrics of the type

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2}\Big[dz^2 + g_{\mu\nu}(x^\rho, z)dx^\mu dx^\nu\Big]\,, \qquad (11)$$

has been analyzed in [22]. When the $z=0$ boundary is 4-dimensional, one finds the expansion

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x^\rho, z) \ &= \ g_{(0)\mu\nu}(x^\rho) + z^2\ g_{(2)\mu\nu}(x^\rho) + z^4\ g_{(4)\mu\nu}(x^\rho) \\ &+ z^4 \log(z^2)\ h_{(4)\mu\nu}(x^\rho) + \mathcal{O}\left(z^6 \log z\right), \end{aligned} \qquad (12)$$

where $g_{(2)\mu\nu}$ and $h_{(4)\mu\nu}$ are completely determined by $g_{(0)\mu\nu}$. The expectation value of the energy-momentum tensor $\langle T_{\mu\nu}\rangle$ of the dual conformal field theory living on the boundary is calculated according to the usual AdS/CFT prescription [2, 3] and with the appropriate holographic renormalization [22, 23] as

$$\langle T_{\mu\nu}\rangle = \frac{2}{\sqrt{-\det\ g_{(0)}}}\ \frac{\delta}{\delta g_{(0)}^{\mu\nu}}\left(S_{gr,reg}[g_{(0)}] - S_{gr,ct}[g_{(0)}]\right)\,, \qquad (13)$$

where $S_{gr,reg}$ is a regularized version of the on-shell gravitational action, and $S_{gr,ct}$ contains the necessary counterterms. Regularization and renormalization are required due to IR divergences near the boundary in the gravity theory which map to UV divergences in the dual field theory. The general result [22] of the calculation (13) is[3]

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu}\rangle = \frac{L^3}{4\pi G_N}\Bigg\{ &\frac{1}{8}\left[\mathrm{Tr}(g_{(2)}g_{(0)}^{-1}g_{(2)}) - (\mathrm{Tr}\ g_{(2)})^2\right] g_{(0)\mu\nu} \\ &+ g_{(4)\mu\nu} - \frac{1}{2}(g_{(2)}g_{(0)}^{-1}g_{(2)})_{\mu\nu} + \frac{1}{4}(\mathrm{Tr}\ g_{(2)})g_{(2)\mu\nu}\Bigg\} \end{aligned} \qquad (14)$$

up to renormalization-scheme dependent terms proportional to $h_{(4)\mu\nu}$.

If one imposes to have the Minkowski metric on the boundary $g_{(0)\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ once the functional derivation in equation (13) is done, one calculates $\langle T_{\mu\nu}\rangle$ in the vacuum. Hence, on the field theory side, $g_{(0)\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ corresponds to a distribution of sources of $T_{\mu\nu}$. The gravitational background solutions (1,10) are thus dual to the $\mathcal{N}=4$ SYM theory with non-vanishing external sources $J_{\mu\nu}$ of the energy-momentum tensor, given by

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu}(x^-, \mathbf{x}_\perp) &= g_{(0)\mu\nu}(x^-, \mathbf{x}_\perp, z=0) - \eta_{\mu\nu} \\ &= \delta_{\mu-}\delta_{\nu-}\ b(x^-, \mathbf{x}_\perp, z=0)\,. \end{aligned} \qquad (15)$$

That corresponds to a distribution of sources moving to the right at the speed of light, with arbitrary longitudinal and transverse profiles.

In the case of the solutions (1,10), the only non-vanishing component of $g_{(2)\mu\nu}$, $g_{(4)\mu\nu}$ and $h_{(4)\mu\nu}$ is the (-,-) one. Moreover one has $g_{(0)}^{--} = 0$. Therefore, all traces and other nonlinear terms in the metric coefficients present in (14) and in other formulae given in [22] vanish, which leads to

$$\langle T_{\mu\nu}\rangle = \delta_{\mu-}\delta_{\nu-}\ \frac{L^3}{4\pi G_N}\ g_{(4)--} \qquad (16)$$

$$h_{(4)--} = -\frac{1}{8}\ \Delta_\perp g_{(2)--} \qquad (17)$$

$$g_{(2)--} = \frac{1}{4}\ \Delta_\perp g_{(0)--}\,. \qquad (18)$$

Thanks to the expansion[4]

$$\begin{aligned} \frac{k_\perp^2 z^2}{2}\ K_2(k_\perp z) = 1 - \frac{k_\perp^2 z^2}{4} + \frac{k_\perp^4 z^4}{32}\Bigg[&-2\log\left(\frac{k_\perp z}{2}\right) \\ &+ \frac{3}{2} - 2\gamma_E\Bigg] + \mathcal{O}\left(z^6 \log z\right)\,, \end{aligned} \qquad (19)$$

one can identify the transverse Fourier transform of the coefficients of the expansion of the metric (1,10) near the

---

[3] The traces in formula (14) are taken with respect to the metric $g_{(0)\mu\nu}$.

[4] $\gamma_E \simeq 0.577$ is the Euler-Mascheroni constant.

boundary, as

$$g_{(0)--}(x^-,\mathbf{k}_\perp) = \tilde{c}_1(x^-,\mathbf{k}_\perp) \tag{20}$$

$$g_{(2)--}(x^-,\mathbf{k}_\perp) = -\frac{k_\perp^2}{4}\ \tilde{c}_1(x^-,\mathbf{k}_\perp) \tag{21}$$

$$g_{(4)--}(x^-,\mathbf{k}_\perp) + \log(z^2)\ h_{(4)--}(x^-,\mathbf{k}_\perp)$$
$$= \frac{k_\perp^4}{32}\left[-2\log\left(\frac{k_\perp z}{2}\right)+\frac{3}{2}-2\gamma_E\right]\tilde{c}_1(x^-,\mathbf{k}_\perp)\,. \tag{22}$$

From the expressions (20), (21) and (22), one checks that the relations (17) and (18) are satisfied, and thus the corresponding generic relations found in [22] are also satisfied, as they should. As z is dimensionful, the left hand side of (22) is a formal and ambiguous expression. One has to introduce an arbitrary momentum scale μ_R in order to write $\log(k_\perp z/2) = \log(k_\perp/\mu_R) + \log(\mu_R z/2)$ in the right hand side of (22). The ambiguity in the choice of μ_R reflects the ambiguity in the counterterms used in the formula (13), and thus the choice of the renormalization scale in the boundary field theory. Moreover, it is possible to split arbitrarily the constant terms in the brackets in equation (22) into a contribution to $g_{(4)--}$ and a contribution to $\log(z^2)\ h_{(4)--}$. This last property reflects the freedom in the choice of renormalization scheme in the boundary field theory. Choosing for simplicity to put as many terms as possible in $\log(z^2)\ h_{(4)--}$, one finds the Fourier transform of the only non vanishing component of $\langle T_{\mu\nu}\rangle$

$$\langle\tilde{T}_{--}\rangle(x^-,\mathbf{k}_\perp) = \frac{L^3}{4\pi G_N}\ \frac{k_\perp^4}{32}\ \log\left(\frac{\mu_R^2}{k_\perp^2}\right)\ \tilde{c}_1(x^-,\mathbf{k}_\perp)$$
$$= \frac{N_c^2 k_\perp^4}{64\pi^2}\log\left(\frac{\mu_R^2}{k_\perp^2}\right)\tilde{J}_{--}(x^-,\mathbf{k}_\perp) \tag{23}$$

using the AdS/CFT dictionary to express the 5-dimensional Newton constant as $G_N = \frac{\pi L^3}{2N_c^2}$. One should remark that $\langle\tilde{T}^\mu_\mu\rangle = 0$. Hence, the presence of the fast moving external sources does not bring conformal anomalies for $\mathcal{N}=4$ SYM.

Due to the explicit presence of sources on the gauge theory side, our construction can be understood as an operator deformation of the AdS/CFT correspondence, by the T_{--} operator of $\mathcal{N}=4$ SYM. Since the metric perturbation $b(x^-,\mathbf{x}_\perp,z)$ has a finite limit on the boundary, this deformation is an exactly marginal one. Due to its dimension 4, $T_{\mu\nu}$ is indeed a marginal operator of $\mathcal{N}=4$ SYM. Hence, in the ultraviolet on the gauge theory side, we do not have the pure $\mathcal{N}=4$ SYM theory but exactly marginal deformations of it.

Before closing that section, let us come back to the homogeneous solutions $b(x^-,\mathbf{x}_\perp,z) = b(x^-)$. From the general results of [22], one finds easily that these solutions correspond in the dual gauge theory to a distribution of sources $J_{--}(x^-)$ which do not induce any non-trivial $\langle T_{--}\rangle(x^-)$, confirming the triviality of these homogeneous solutions. Intuitively, one can understand that from the $\mathcal{N}=4$ SYM side as follows. After a very strong boost along x^+ of a generic field configuration, the dominant components of the $\mathcal{N}=4$ SYM field strength should be the F^a_{-i} ones, and the dominant component of the $\langle T_{\mu\nu}\rangle$ should be $\langle T_{--}\rangle \propto (F^a_{-i})^2$. In the case of a homogeneous distribution of sources $J_{--}(x^-)$, there is no preferred direction in the transverse plane, and thus F^a_{-i} has to vanish, and $\langle T_{--}\rangle$ as well. By contrast, if $J_{--}(x^-,\mathbf{x}_\perp)$ depend on $\mathbf{x}_\perp$, the transverse gradient of J_{--} gives a preferred direction in the transverse plane, allowing a non-vanishing $\langle T_{--}\rangle$.

IV. DISCUSSION: STRONGLY COUPLED ANALOG OF A COLOR GLASS CONDENSATE

Our background solutions (1,10) are dual to $\mathcal{N}=4$ SYM with rightmoving sources on the lightcone. The formula (23) gives the energy and momentum of the SYM fields induced by the sources, including the potential energy of the fields due to the presence of the sources. This picture is reminiscent of the CGC framework, where a highly boosted nucleus is described by fast moving color sources representing the long-lived partons and by the quasi-classical gluon field F^a_{i-} they induce. The only non-zero component of $\langle T_{\mu\nu}\rangle$ for this gluon field is also $\langle T_{--}\rangle$. An important difference between the two frameworks is that the CGC is naturally formulated in terms of colored fields whereas AdS/CFT gives access only to colorless objects, which complicates a detailed comparison between the two setups. Supplemented by a distribution of sources both peaked in the longitudinal direction and localized in a finite region of the transverse plane, the metric (1,10) give a dual model for a fast moving nucleus, which can be easily used to study high energy scattering at strong coupling, including effects of confinement on the geometry of the collision. Most observables usually considered are not sensitive to other, truly dynamical, effects of confinement, which happens only during hadronization, and which are not implemented in the standard AdS/CFT approach. In principle, one can push further the analogy with the CGC framework by doing the calculation of an observable for a given J_{--}, and average the result over J_{--} as done in the CGC, in order to take event-by-event fluctuations of the nucleus wave function into account.

In summary, we have derived a large family of wave solutions (1,10) of the full Einstein equations in AdS_5 geometry. Relying on the AdS/CFT correspondence and its holographic renormalization, we have shown that these gravity backgrounds are dual to $\mathcal{N}=4$ SYM with arbitrary distributions of rightmoving sources on the lightcone. This framework is a strongly coupled analog of the CGC, and provides a laboratory, suitable for the investigation of high energy scattering in $\mathcal{N}=4$ SYM and thermalization at strong coupling.

Note added: The paper [28] appeared on the arXiv a few months after the present manuscript. In [28], the authors discuss deep inelastic scattering on targets given holographically by various shockwave backgrounds, including the ones derived in the present study. The authors of [28] discard the K_2 solutions we are keeping (see Eq. (8)), and consider the I_2 solutions we are discarding. However, there is not necessary a contradiction between the two choices, but possibly just two different prescriptions related to two different types of holographic heavy ion collisions.

Indeed, the purpose of [28] is to find, using deep inelastic scattering, what kind of shockwave gives the content expected for a nucleus in a confined version of $\mathcal{N}=4$ SYM at strong coupling. It is shown in [28] that the I_2 solutions are suitable in that case, provided one modifies the background at large z in order to implement confinement. From the studies of high energy scattering within AdS/CFT, one expects the collision of two such strongly coupled $\mathcal{N}=4$ SYM nuclei to be quite different from real-world heavy ion collisions *e.g.* at RHIC, which show rather weak stopping properties.

By contrast, the collision of two K_2 shockwaves should, at very early proper time, mimic more closely weakly coupled QCD heavy ion collisions, with possibly a Glasma stage. Indeed, the presence of boundary sources allows to impose a high degree of transparency, and an approximate boost-invariance in the central region. However, these K_2 shockwaves presumably cannot be obtained from the ultrarelativistic limit of nuclear states of a confined strongly coupled gauge theory.

Moreover, the problem of positive energy condition violation found in [26, 27] for the collision of two z^4 shockwaves remains in the case of I_2 shockwaves, but should disappear in the case of K_2 shockwaves, according to the structure of Einstein equations.

In summary, the K_2 solutions maybe more suitable to build an holographic model for real-world QCD heavy ion collisions, although the I_2 solutions are more closely related to boosted nuclei in a strongly coupled confined gauge theory.

Acknowledgments

I acknowledge Iosif Bena, Edmond Iancu, Romuald Janik, Larry McLerran and Robi Peschanski for fruitful discussions and useful comments.

[1] J. M. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998) [Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113 (1999)].
[2] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, Phys. Lett. B **428**, 105 (1998).
[3] E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 253 (1998).
[4] E. V. Shuryak, Nucl. Phys. A **750**, 64 (2005).
[5] G. Policastro, D. T. Son and A. O. Starinets, JHEP **0209**, 043 (2002), JHEP **0212**, 054 (2002).
[6] S. Bhattacharyya, V. E. Hubeny, S. Minwalla and M. Rangamani, JHEP **0802**, 045 (2008).
[7] G. Policastro, D. T. Son and A. O. Starinets, Phys. Rev. Lett. **87**, 081601 (2001).
[8] M. P. Heller and R. A. Janik, Phys. Rev. D **76**, 025027 (2007).
[9] R. Baier, P. Romatschke, D. T. Son, A. O. Starinets and M. A. Stephanov, JHEP **0804**, 100 (2008).
[10] M. Natsuume and T. Okamura, Phys. Rev. D **77**, 066014 (2008) [Erratum-ibid. D **78**, 089902 (2008)].
[11] R. A. Janik and R. B. Peschanski, Phys. Rev. D **73**, 045013 (2006).
[12] M. P. Heller, P. Surowka, R. Loganayagam, M. Spalinski and S. E. Vazquez, Phys. Rev. Lett. **102**, 041601 (2009).
[13] S. Kinoshita, S. Mukohyama, S. Nakamura and K. y. Oda, Prog. Theor. Phys. **121**, 121 (2009).
[14] L. V. Gribov, E. M. Levin and M. G. Ryskin, Phys. Rept. **100**, 1 (1983).
[15] E. Iancu, A. Leonidov and L. McLerran, arXiv:hep-ph/0202270.
[16] E. Iancu and R. Venugopalan, arXiv:hep-ph/0303204.
[17] I. Balitsky, arXiv:hep-ph/0101042.
[18] D. Kharzeev, Y. V. Kovchegov and K. Tuchin, Phys. Rev. D **68**, 094013 (2003).
[19] T. Lappi and L. McLerran, Nucl. Phys. A **772**, 200 (2006).
[20] H. Nastase, arXiv:hep-th/0410124.
[21] S. S. Gubser, S. S. Pufu and A. Yarom, Phys. Rev. D **78**, 066014 (2008).
[22] S. de Haro, S. N. Solodukhin and K. Skenderis, Commun. Math. Phys. **217**, 595 (2001).
[23] M. Bianchi, D. Z. Freedman and K. Skenderis, Nucl. Phys. B **631**, 159 (2002).
[24] J. Podolsky, Class. Quant. Grav. **15**, 719 (1998).
[25] S. W. Hawking and J. F. R. Ellis, The Large Scale Structure of Space-Time (Cambridge: Cambridge University Press, 1973).
[26] D. Grumiller and P. Romatschke, JHEP **0808**, 027 (2008).
[27] J. L. Albacete, Y. V. Kovchegov and A. Taliotis, JHEP **0807**, 074 (2008), JHEP **0807**, 100 (2008).
[28] E. Avsar, E. Iancu, L. McLerran and D. N. Triantafyllopoulos, JHEP **0911**, 105 (2009).

Article [IX]

Preprint typeset in JHEP style - HYPER VERSION

Boost-invariant early time dynamics from AdS/CFT

Guillaume Beuf[a], **Michal P. Heller**[b], **Romuald A. Janik**[b] **and Robi Peschanski**[a] *

[a] Institut de Physique Théorique URA 2306, Unité de Recherche associée au CNRS, CEA-Saclay, F-91191 Gif/Yvette Cedex, France.

[b] M.Smoluchowski Institute of Physics, Jagellonian University, Reymonta 4, 30-059 Krakow, Poland.

Abstract: Boost-invariant dynamics of a strongly-coupled conformal plasma is studied in the regime of early proper-time using the AdS/CFT correspondence. It is shown, in contrast with the late-time expansion, that a scaling solution does not exist. The boundary dynamics in this regime depends on initial conditions encoded in the bulk behavior of a Fefferman-Graham metric coefficient at initial proper-time. The relation between the early-time expansion of the energy density and initial conditions in the bulk of AdS is provided. As a general result it is proven that a singularity of some metric coefficient in Fefferman-Graham frame exists at all times. Requiring that this singularity at $\tau = 0$ is a mere coordinate singularity without the curvature blow-up gives constraints on the possible boundary dynamics. Using a simple Pade resummation for solutions satisfying the regularity constraint, the features of a transition to local equilibrium, and thus to the hydrodynamical late-time regime, have been observed. The impact of this study on the problem of thermalization is discussed.

Keywords: Gauge-gravity correspondence, Heavy Ions.

*guillaume.beuf@cea.fr, michal.heller@uj.edu.pl, ufrjanik@th.if.uj.edu.pl, robi.peschanski@cea.fr

Contents

1. Introduction **1**

2. Boost-invariant dynamics and holography **4**
- 2.1 Energy-momentum tensor of boost-invariant flow 4
- 2.2 Holographic reconstruction of space-time 5

3. Late time dynamics **6**
- 3.1 Motivation 6
- 3.2 The asymptotic solution 7
- 3.3 Large proper-time expansion and hydrodynamics 8

4. Early time dynamics **10**
- 4.1 No scaling at early time 10
- 4.2 The Fefferman-Graham metric is singular at all times 12
- 4.3 Constraints at early time 14
- 4.4 Early time expansion of the energy density 16

5. Transition to the hydrodynamic regime **17**
- 5.1 Resummation scheme for the energy density 17
- 5.2 Qualitative features of the approach to local equilibrium 19

6. Summary **20**

1. Introduction

Recently, a new theoretical approach to heavy-ion reactions and the formation of quark-gluon plasma (QGP) in RHIC experiments using the AdS/CFT correspondence arose as a fruitful application of string theory to the real world. The AdS/CFT correspondence allows to describe many properties of a class of gauge theories at strong coupling in terms of a dual gravitational description. What makes it a unique tool is firstly that it works well in Minkowski signature allowing for a description of inherently time-dependent phenomena, in contrast to lattice QCD methods which are directly tied to Euclidean signature. Secondly, explicit analytical computations are often possible and one can get new insight into strongly coupled dynamics from the dual geometric perspective.

On the experimental side, the features of the distribution of particles observed in the final stage of the reaction point to the existence of a hydrodynamical regime of the QGP expansion [1, 2], in particular the observed elliptic flow denoting sizeable collective effects

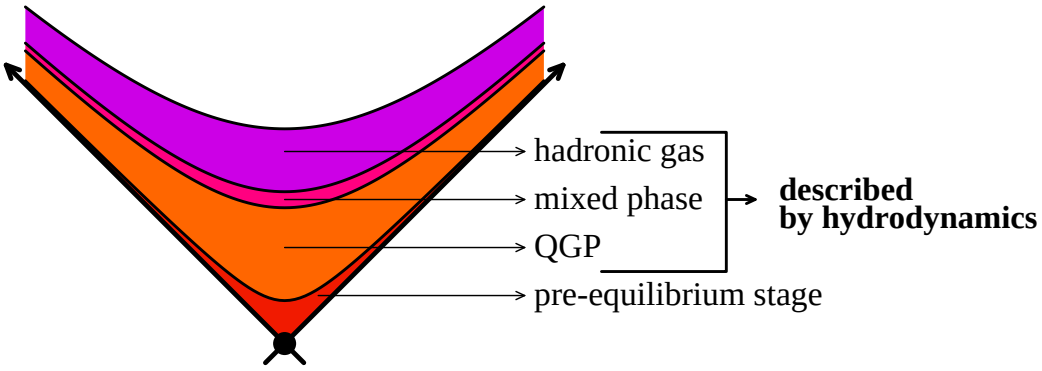

Figure 1: Description of QGP formation in heavy ion collisions. The kinematic landscape is defined by $\tau = \sqrt{(x^0)^2 - (x^3)^2}$; $y = \frac{1}{2} \log \frac{x^0+x^3}{x^0-x^3}$; $x_\perp = \{x^1, x^2\}$, where the coordinates along the light-cone are $x^0 \pm x^1$, the transverse ones are $\{x^1, x^2\}$ and τ is the proper time, y the "space-time rapidity".

[3]. The hydrodynamic regime has to last long enough and start soon enough after the collision in order to explain the observed collective effects. Moreover, the smallness of the viscosity which can be extracted from hydrodynamical simulations describing the data leads to an almost-perfect fluid behaviour of the QGP, and thus to a short mean-free path inside the fluid. Putting together these experimental inputs, and in order to go beyond a mererly phenomenological description, it appears to be theoretically necessary to investigate as much as possible the properties of a strongly-coupled Quantum-Chromodynamic plasma.

In the absence of nonperturbative methods applicable to real-time dynamics of strongly coupled Quantum Chromodynamic (QCD) plasma, one is led to consider similar problems from the point-of-view of the AdS/CFT correspondence, that is looking for the characteristics of plasma in a gauge theory for which the AdS/CFT correspondence takes its simplest form – the $\mathcal{N} = 4$ supersymmetric Yang-Mills theory [4] which possesses a known and tractable gravity dual.

Although the $\mathcal{N} = 4$ gauge theory is supersymmetric and conformal and thus quite different from QCD at zero temperature, both supersymmetry and scale-invariance are broken explicitly at finite temperature and we may expect qualitative similarities with QCD plasma for a range of temperatures above the QCD deconfinement phase transition[1].

Indeed, the gauge/gravity dual calculation [5] showing, in a static setting, that the viscosity over entropy ratio η/s is very small (equal to $1/4\pi$) and even suggesting a universal lower bound, is in qualitative agreement with hydrodynamic simulations of QCD plasma and was a poweful incentive to explore further the AdS/CFT duality approach.

In order to go beyond static calculations, one has to adapt the dual AdS/CFT approach to the relativistic kinematic framework of heavy-ion reactions, where two ultra-relativistic heavy nuclei collide and form an expanding medium, see Fig.1. It is convenient, initially,

[1]There exist more refined versions of the AdS/CFT correspondence which may have more features in common with QCD, however the gravity backgrounds are much more complicated and we will not consider them here.

to adopt the simplest setting in which the relevant physics is still present.

For this sake, one is guided by the seminal work of Bjorken [6], who made a simplifying assumption of boost-invariant dynamics for his hydrodynamic description of high-energy heavy-ion collisions. Hence, the different stages of the plasma formation, expansion and hadronization, see Fig.1, depend only on the proper-time τ and not on rapidity[2] y. This assumption is indeed phenomenologically valid for the central rapidity region of the collision at high energy.

For the application of the AdS/CFT correspondence to this setting, and in particular for finding the gravity dual [7], the above symmetry assumptions allow for a drastic simplification of an otherwise yet probably intractable problem, since the dual dynamics depends only on two variables, τ, proper-time and z, the bulk variable in the dual asymptotically AdS spacetime.

The two main physical questions[3] are to understand the behaviour of quark gluon plasma at late and early times. At late times, we would like to *derive* the appearance of hydrodynamic behaviour with all its characteristics, asymptotically perfect fluid flow, low viscosity, transport coefficients, etc. At early times, we would like to understand the rapid thermalization starting from the ultra-relativistic initial conditions.

In fact the study of the former problem has led to quite successful developments, showing that the hydrodynamic boost-invariant Bjorken flow is a consequence of late-time dynamics of gravity in the dual side of the AdS/CFT correspondence. Subsequently the way in which hydrodynamics arises from the AdS/CFT has been understood even without using any symmetry arguments [8] as a gradient expansion of Einstein's equations. However since our main interest in this paper is the radically different early time regime where such expansions are inapplicable, we will use the full system of Einstein's equations with the boost-invariant symmetry assumptions. Before that, we will first recall the analysis for late times, since the point of departure will be analogous for the early time problem, but with different developments and results.

The second problem, which forms the novel part of our investigations in the present study, is to go beyond hydrodynamics and investigate early-time dynamics. The only assumption we will make, apart from boost-invariance, is the existence of a strongly coupled pre-hydrodynamic stage[4] allowing for the use of the AdS/CFT correspondence in the same framework as for late times, and thus to look for a connection of the two regimes in a unified scheme. In particular, one is curious to understand the transition towards the hydrodynamic regime and thus to get some information about the puzzling problem of the apparently short [2] thermalization time.

Summarizing the contents of the paper, the next section recalls the basic AdS/CFT approach to boost-invariant dynamics. The main results of the late-time solution are

[2]For the Bjorken flow, spatial and momentum rapidity are equal.

[3]We do not address here another important problem which is hadronization, since it requires to go beyond our current understanding of the presently known Gauge/Gravity dualities.

[4]Physically, it may be that the initial stage of the collision has some weak-coupling properties, for instance in the Color Glass Condensate (CGC) setting [9], but we will not consider here this possibility (for a recent attempt to describe CGC initial conditions within the AdS/CFT see [10]).

given in section 3, with emphasis on those aspects which will be useful for the early-time regime. Section 4 is devoted to the theoretical analysis of the early-time boost-invariant dual dynamics, while section 5 deals with numerical solutions with the goal of studying the transition to hydrodynamics. Conclusions and outlook are given in the final section.

2. Boost-invariant dynamics and holography

2.1 Energy-momentum tensor of boost-invariant flow

Currently the best understanding of non-perturbative non-equillibrium 4-dimensional quantum field theories is provided by string theory methods. Holography translates gauge theory problems in four dimensions at large number of colors and strong ('t Hooft) coupling into higher-dimensional classical gravity. Einstein's equations involve then, in the simplest setting, functions of both gauge theory dimensions and of one more variable z parameterizing the radial direction in AdS. In a general setup, finding solutions of Einstein's equations must involve numerical analysis and is rather difficult. Moreover, singular components of the metric may and indeed do appear [7, 11, 12] which are not easy to implement numerically, unless their structure is known beforehand. It is thus important to focus on the simplest possible, yet phenomenologically interesting, gauge theory dynamical processes. As explained in the introduction, we will focus on the boost-invariant plasma expansion. This setup serves as a first approximation of dynamical plasma created at RHIC, as excited nuclear matter undergoes one-dimensional expansion and is both translationally and rotationally invariant in the plane perpendicular to the expansion axis (physical quantities do not depend on x^1, x^2). The crucial simplifying assumption is boost-invariance along the expansion axis, which can be most easily imposed when passing to proper-time (τ) and (spatial) rapidity (y) coordinates related to the usual lab-frame time (x^0) and position along the expansion axis (x^3) by

$$\begin{aligned} x^0 &= \tau \cosh y \\ x^3 &= \tau \sinh y \ . \end{aligned} \tag{2.1}$$

Under a boost along the x^3 direction proper-time does not change, whereas rapidity is shifted by a constant. Thus in this coordinate frame boost-invariance means that physical observables do not depend on rapidity.

A quantity of special interest is the expectation value of the energy-momentum tensor of the plasma. In the (τ, y, x^1, x^2) frame with all mentioned symmetries[5] imposed, the most general boost-invariant energy-momentum tensor takes the form

$$T_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\left\{\epsilon\left(\tau\right), \tau^2 p_{\parallel}\left(\tau\right), p_{\perp}\left(\tau\right), p_{\perp}\left(\tau\right)\right\} \ . \tag{2.2}$$

Imposing energy-momentum conservation $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ (in boost-invariant case there is only one independent equation) and tracelessness $T^\mu_\mu = 0$ leads to the energy momentum tensor fully specified in terms of a single function of one variable – the energy density $\epsilon\left(\tau\right)$, namely

[5] Together with parity invariance in rapidity, which ensures that there are no nondiagonal $T_{\tau y}$ terms in the energy-momentum tensor.

$$T_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\left\{\epsilon\left(\tau\right),\, -\tau^2(\epsilon\left(\tau\right)+\tau\epsilon'\left(\tau\right)),\, \epsilon\left(\tau\right)+\frac{1}{2}\tau\epsilon'\left(\tau\right),\, \epsilon\left(\tau\right)+\frac{1}{2}\tau\epsilon'\left(\tau\right)\right\}. \tag{2.3}$$

The function $\epsilon\left(\tau\right)$ may be arbitrary at this level and it is the gravitational dual which will single out the allowed ones. Note that $T_{\mu\nu}$ is submitted to an important positivity constraint, namely $T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0$, for any time-like vector t^μ implying [7]

$$-\frac{4\,\epsilon\left(\tau\right)}{\tau} \;\leq\; \epsilon'\left(\tau\right) \;\leq\; 0. \tag{2.4}$$

This requirement may perhaps be lifted in case of some highly quantum states [13] appearing at transient times, but we expect that it should hold for any more macroscopic configuration. We observe a temporary violation of this constraint for a specific initial condition (see section 5).

2.2 Holographic reconstruction of space-time

The AdS/CFT correspondence maps the expectation value of the energy-momentum tensor operator into the behavior of the 5-dimensional asymptotically AdS metric G_{AB}. This metric is a solution of Einstein's equations with negative cosmological constant $\Lambda = -6\,L^{-2}$ (where L is the AdS radius[6]), namely

$$R_{AB} - \frac{1}{2}R\cdot G_{AB} - 6\,G_{AB} = 0. \tag{2.5}$$

The general asymptotically AdS metric written in Fefferman - Graham coordinates [14] takes the form

$$\mathrm{d}s^2 = G_{AB}\mathrm{d}y^A\mathrm{d}y^B = \frac{g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu + \mathrm{d}z^2}{z^2} \tag{2.6}$$

where z is the AdS radial variable and $g_{\mu\nu}$ is a four-dimensional metric on constant z slices, which depends both on the field theory directions x^μ and z. The hypersurface at $z=0$ is a conformal boundary of AdS and is identified with the metric in which the CFT lives. In the considered field theory setup this is the 4-dimensional Minkowski metric $\eta_{\mu\nu}$. Einstein's equations obtained from (2.5)) (see further Eq. (4.10) for the full set of Einstein's equations expressed in Fefferman-Graham coordinates) can be solved pertubatively in the vicinity of the conformal theory. The four-dimensional part $g_{\mu\nu}$ of the AdS metric[7]

$$g_{\mu\nu} = g^{(0)}_{\mu\nu} + g^{(2)}_{\mu\nu}\,z^2 + g^{(4)}_{\mu\nu}\,z^4 + g^{(6)}_{\mu\nu}\,z^6 + + g^{(8)}_{\mu\nu}\,z^8 + \ldots \tag{2.7}$$

can be obtained order by order in z^2 from the equations of motion (2.5). The leading piece in (2.7) is the Minkowski metric $\eta_{\mu\nu}$, which in the proper $(\tau, y, \mathbf{x}_\perp)$ variables takes the form

[6] In the rest of the paper the AdS radius L will be set to 1, but can be trivially restored on dimensional grounds. Greek and latin indices denote respectively field theory and bulk AdS directions.

[7] All the formulas regarding holographic reconstruction of the bulk space time are provided for the case when the boundary is the Minkowski space.

$$g^{(0)}_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = -\mathrm{d}\tau^2 + \tau^2 \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}\mathbf{x}_\perp^2 \ . \tag{2.8}$$

The quadratic term $g^{(2)}_{\mu\nu}$ vanishes identically, and the first non-trivial term $g^{(4)}_{\mu\nu}$ turns out to be proportional to the expectation value of the energy-momentum tensor [15]

$$g^{(4)}_{\mu\nu} = \frac{2\pi^2}{N_c^2} \langle T_{\mu\nu} \rangle \, . \tag{2.9}$$

Higher order contributions ($g^{(2n)}_{\mu\nu}$ for $n > 2$) can be obtained from the Einstein's equations and are fully expressed in terms of $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ and its derivatives. At this level there are no constraints on the form of the energy-momentum tensor – any conserved and traceless one will do (apart from the positivity conditions (2.4)).

However it is to be expected [7] that generic energy-momentum tensor would lead to singularities in the bulk of AdS, which are beyond the scope of a perturbative solution in z^2. Therefore in order to have a control over the geometry in the region where potential singularities may develop, one needs to solve the Einstein's equations deeper in the bulk. Since the energy-momentum tensor for the boost-invariant flow takes a particularly simple diagonal form (2.2), in this case we are led to adopt the 5-dimensional Fefferman-Graham metric ansatz satisfying the symmetries of boundary dynamics

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{-e^{a(\tau,z)}\mathrm{d}\tau^2 + \tau^2 e^{b(\tau,z)}\mathrm{d}y^2 + e^{c(\tau,z)}\mathrm{d}\mathbf{x}_\perp^2 + \mathrm{d}z^2}{z^2}. \tag{2.10}$$

The full set of Einstein's equations corresponding to the parametrized metric (2.10) are given in (4.10). Solving the Einstein's equations for any value of τ and z is very difficult and must probably involve numerical procedures. However it is possible to gain nevertheless some analytical insight. There are two regimes where some simplifications may occur – these are for small or large values of τ. In both cases there is a small parameter (either τ or its inverse), which can be used to construct the geometry in perturbative manner in τ, but exactly in z. So we shall focus on late and early time dynamics.

3. Late time dynamics

3.1 Motivation

At sufficiently late times, the boost-invariant plasma is expected to be locally equilibrated and thus well-described by hydrodynamics. However, it is *a priori* not obvious how to prove it on the gravity side of the AdS/CFT. The solution was first shown in [7] and then further developed in [16, 11, 17, 12, 18, 19, 20, 21] (see [22] for a review). The following subsections review how to obtain the late-time boost-invariant dynamics perturbatively, since the methods developed for this approach will be crucial in the rest of the paper when considering the open problem of early time dynamics and the corresponding transition to local equilibrium.

3.2 The asymptotic solution

The goal of the whole approach both in the early and late times domain is to solve the Einstein's equations (4.10) perturbatively in proper time τ, but (at each order in τ) exactly in the radial AdS variable z. This can be achieved by resumming the power series in z^2 for the bulk metric (2.7). For arbitrary proper-time dependence of the energy density it is yet out of reach, but focusing on the large proper time regime and assuming that the energy density of the boost-invariant plasma exhibits a power-like tail

$$\epsilon(\tau) \sim \frac{\#}{\tau^s} + \ ... \tag{3.1}$$

for some positive power[8] of s this can be basically done. The crucial observation of Ref. [7] is the existence of a scaling variable $v = z\,\tau^{-s/4}$, which captures the large proper-time behavior on the gravity side (see section (4.1) for more details). Taking the $\tau \to \infty$ limit while keeping the scaling variable fixed reduces the Einstein's equations (4.10) for the functions $a(\tau, z)$, $b(\tau, z)$ and $c(\tau, z)$ to ordinary nonlinear differential equations for their scaling forms $a_0(v)$, $b_0(v)$ and $c_0(v)$, which can be solved exactly leading to

$$\begin{aligned} a_0(v) &= A(v) - 2m(v)\,, \\ b_0(v) &= A(v) + (2s-2)\,m(v)\,, \\ c_0(v) &= A(v) + (2-s)\,m(v)\,, \end{aligned} \tag{3.2}$$

where

$$\begin{aligned} A(v) &= \frac{1}{2}\left\{\log\left(1+\Delta(s)\ v^4\right) + \log\left(1-\Delta(s)\ v^4\right)\right\}, \\ m(v) &= \frac{1}{4\Delta(s)}\left\{\log\left(1+\Delta(s)\ v^4\right) - \log\left(1-\Delta(s)\ v^4\right)\right\} \end{aligned} \tag{3.3}$$

with

$$\Delta(s) = \sqrt{\frac{3s^2-8s+8}{24}}\ . \tag{3.4}$$

It turns out however, that the geometry is generically singular for all the values of s, apart from $s = 4/3$. This can be checked by evaluating the square of the Riemann tensor (*i.e.* Kretschmann scalar) in the scaling limit and requiring its regularity (the authors of Ref.[23] made also the observation that $s = 4/3$ is the only value for which the functions (3.2) are single-valued).

For $s = 4/3$ the energy-momentum tensor takes asymptotically the form

[8] The power s is constrained to take values in the range $0 \leq s < 4$ assuming positivity of the energy density (2.4) in any time-like reference frame. There are three particular phenomenologically interesting values of s within this range: $s = 4/3$, $s = 1$ or $s = 0$. The first one leads to the *perfect fluid* case where $p_\perp(\tau) = p_\parallel(\tau)$ and the second one to the *free streaming* scenario with $p_\parallel(\tau) = 0$. The third interesting regime discussed in the literature [23], is the limiting case $s = 0$ with $p_\perp(\tau) = -p_\parallel(\tau)$ which will be adressed in section 5.

$$T_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\left\{ \frac{\#}{\tau^{4/3}} + \ldots,\, \tau^2\, \frac{1}{3}\, \frac{\#}{\tau^{4/3}} + \ldots,\, \frac{1}{3}\, \frac{\#}{\tau^{4/3}} + \ldots,\, \frac{1}{3}\, \frac{\#}{\tau^{4/3}} + \ldots \right\}, \tag{3.5}$$

where # denotes some numerical constant. From this expression it is clear that $p_{\|}(\tau) = p_{\perp}(\tau)$ (asymptotically), the system is in local equilibrium and is described by the perfect fluid hydrodynamics. The gravity dual in this scaling limit is given then by

$$\mathrm{d}s^2_{\tau\to\infty} = -\frac{\left(1-z^4\cdot\tau^{-4/3}\right)^2}{z^2\left(1+z^4\cdot\tau^{-4/3}\right)}\mathrm{d}\tau^2 + \frac{1}{z^2}\tau^2\left(1+z^4\cdot\tau^{-4/3}\right)\mathrm{d}y^2 + \frac{1}{z^2}\left(1+z^4\cdot\tau^{-4/3}\right)\mathrm{d}\mathbf{x}_{\perp}^2 + \frac{1}{z^2}\mathrm{d}z^2 \tag{3.6}$$

and looks like a boosted and dilated black brane

$$\mathrm{d}s^2 = -\frac{\left(1-z^4\lambda^4\right)^2}{z^2\left(1+z^4\lambda^4\right)}u_\mu\, u_\nu\, \mathrm{d}x^\mu\, \mathrm{d}x^\nu + \frac{1}{z^2}\left(1+z^4\lambda^4\right)\left(\eta_{\mu\nu}+u_\mu u_\nu\right)\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu + \frac{1}{z^2}\mathrm{d}z^2 \tag{3.7}$$

with boost parameter $u^\mu = 1\cdot[\partial_\tau]^\mu$ and dilatation $\lambda \sim \tau^{-1/3}$. Recently this connection has been exploited and formulated as a *fluid/gravity duality* [8]. Note that (3.6) contains a $(\tau\tau)$ coefficient which goes to zero at $z\sim\tau^{1/3}$, giving a hint for a black brane horizon [24].

It is also clear that the metric (3.6) is not an exact solution of Einstein's equations – there are subleading effects not captured by the scaling variable limit. Those with power-like scaling correspond to dissipative corrections in hydrodynamics.

3.3 Large proper-time expansion and hydrodynamics

When evaluating $\mathcal{R}^2 \equiv \mathcal{R}_{ABCD}\mathcal{R}^{ABCD}$ in the scaling limit ($\tau\to\infty$ keeping $v = z\cdot\tau^{-1/3}$ fixed) on the asymptotic solution, the following pattern is encountered

$$\mathcal{R}^2 = (\text{nonsingular})\mathcal{R}^2_{(0)}(v) + \frac{1}{\tau^{4/3}}\cdot(\text{singular})\mathcal{R}^2_{(4/3)}(v) + \ldots \tag{3.8}$$

where $(\text{singular})\mathcal{R}^2_{(4/3)}(v)$ has a fourth-order pole at $v = 3^{1/4}$ and the dots "..." denote terms suppressed by inverse powers of τ higher than $4/3$. Any background with singularities not covered by the event horizon would correspond to unphysical configurations on the gauge theory side (see e.g. [25, 26]). Thus the condition of nonsingularity is the crucial requirement, which singles out the correct behavior of the geometry and thus of the energy-momentum tensor of the boundary plasma. It is obvious that the singularity at $\tau^{-4/3}$ in (3.8) can be cancelled only if there is an additional contribution to the metric warp factors which arises from a correction to the perfect fluid asymptotics

$$\varepsilon(\tau) = \frac{1}{\tau^{\frac{4}{3}}}\left(1+\frac{\#}{\tau^r}+\ldots\right) \tag{3.9}$$

Assuming now the expansion

$$a(\tau,z) = a_0\left(z\cdot\tau^{-1/3}\right) + \frac{1}{\tau^r}\,a_1\left(z\cdot\tau^{-1/3}\right) + \frac{1}{\tau^{4/3}}\,a_2\left(z\cdot\tau^{-1/3}\right) + \ldots \tag{3.10}$$

with analogous equations for the other warp factors b and c and solving Einstein's equations at orders τ^{-r} and $\tau^{-4/3}$ for $r \neq 2/3$ one ends up with a singular Kretschmann scalar $\mathcal{R}^2$ of the following form

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^2 = (\text{nonsingular})\mathcal{R}^2_{(0)}(v) + \frac{1}{\tau^r}\cdot(\text{nonsingular})\mathcal{R}^2_{(r)}(v) + \\ + \frac{1}{\tau^{4/3}}\cdot(\text{singular})\mathcal{R}^2_{(4/3)}(v) + \frac{1}{\tau^{2r}}\cdot(\text{singular})\mathcal{R}^2_{(2r)}(v)\end{aligned} \tag{3.11}$$

However for $r = 2/3$ the singular contribution at τ^{-2r} cancels the singularities at $\tau^{-4/3}$ (see [12] for details) and gives a regular Kretschmann scalar up to the terms of order $\tau^{-4/3}$ in the scaling limit. Physically, on the gauge theory side, this exactly corresponds to the first viscous corrections to the perfect fluid expansion. This argument repeated at any higher order fixes the large proper-time expansion of the bulk metric to take the form

$$\begin{aligned}a(\tau,z) &= a_0\left(z\,\tau^{-1/3}\right) + \frac{1}{\tau^{2/3}}\,a_1\left(z\,\tau^{-1/3}\right) + \frac{1}{\tau^{4/3}}\,a_2\left(z\,\tau^{-1/3}\right) + \ldots \\ b(\tau,z) &= b_0\left(z\,\tau^{-1/3}\right) + \frac{1}{\tau^{2/3}}\,b_1\left(z\,\tau^{-1/3}\right) + \frac{1}{\tau^{4/3}}\,b_2\left(z\,\tau^{-1/3}\right) + \ldots \\ c(\tau,z) &= c_0\left(z\,\tau^{-1/3}\right) + \frac{1}{\tau^{2/3}}\,c_1\left(z\,\tau^{-1/3}\right) + \frac{1}{\tau^{4/3}}\,c_2\left(z\,\tau^{-1/3}\right) + \ldots\end{aligned} \tag{3.12}$$

The functions $a_i(v)$, $b_i(v)$ and $c_i(v)$ can be obtained order by order solving Einstein's equations in the scaling variable. At each order $i > 0$ there is a single integration constant fixed neither by the equations of motion nor the asymptotic behavior of the metric, which is a combination of various transport coefficients of the plasma. Each constant[9] in the expansion of the energy density or equivalently the temperature ($\epsilon \sim T^4$)

$$T(\tau) = \frac{\Lambda}{\tau^{1/3}}\left\{1 - \frac{1}{\Lambda\,\tau^{2/3}}\cdot\frac{\eta_0}{\sqrt{2}\,3^{1/4}\pi} + \frac{1}{\Lambda^2\,\tau^{4/3}}\left(\frac{\lambda_1^{(0)}}{3\sqrt{3}\,\pi^2} - \frac{\eta_0\tau_\Pi^{(0)}}{3\sqrt{3}\,\pi^2}\right) + \ldots\right\} \tag{3.13}$$

is fixed uniquely by requiring the nonsingularity of the geometry at one order higher. In the above equation Λ denotes the overall energy scale defined by $T = \Lambda\cdot\tau^{-1/3} + \ldots$, η_0 comes from the shear viscosity, while $\lambda_1^{(0)}$ and $\tau_\Pi^{(0)}$ are related to second order transport coefficients λ_1 and relaxation time τ_Π (see [27]). The expansion in $\tau^{-2/3}$ can be easily understood using hydrodynamics (see e.g. [8] for a detailed discussion), which is an effective description of systems at local equilibrium described by four degrees of freedom: the four-velocity u^μ ($u_\mu\,u^\mu = -1$) and the temperature T. Those quantities vary over space-time, however the scale set by their variations is much bigger than the microscopic scale given by the temperature. Thus the small parameter in this case is $T^{-1}\nabla_\mu u^\nu$. In a boost-invariant setup the asymptotic scaling of the temperature obtained from the nonsingularity is $\tau^{-1/3}$, the covariant derivative of the velocity[10] scales as τ^{-1} which leads to the expansion parameter

[9] The constant η_0 in first order, $\frac{\lambda_1^{(0)}}{3\sqrt{3}\,\pi^2} - \frac{\eta_0\tau_\Pi^{(0)}}{3\sqrt{3}\,\pi^2}$ in the second order, ...

[10] In a boost-invariant setup the fluid velocity takes the form $u^\mu = 1\cdot[\partial_\tau]^\mu$, but the metric in τ - y coordinates has nonvanishing Christoffel symbols leading to $\nabla u = \tau^{-1}$.

$\tau^{-2/3}$ in exact agreement with the one obtained on the gravity side. For phenomenological reasons (from causality, see the discussion in *e.g.* [27]) it is interesting to focus on an energy density expanded up to the second order in $\tau^{-2/3}$ expansion, so that the geometry has to be solved up to the third order to fix all the constants of interest.

In [12] a surprising feature showed up: the pole contributions to the Kretschmann scalar at the third order cancelled, leaving a logarithmic singularity of the form $\log\left(3^{1/4}-v\right)$. This singularity was present also in higher order curvature invariants in Fefferman-Graham variables, such as $\mathcal{R}_{ABCD}\mathcal{R}^{CDEF}\mathcal{R}_{EF}{}^{AB}$, which led to the conjecture that the gravity dual to boost-invariant flow cannot be realized within the supergravity approximation [18, 19]. The resolution of this puzzle involves resummation of the series

$$\mathcal{R}^2=\mathcal{R}_0^2\left(v\right)+\frac{1}{\tau^{2/3}}\mathcal{R}_1^2\left(v\right)+\frac{1}{\tau^{4/3}}\mathcal{R}_2^2\left(v\right)+\frac{1}{\tau^2}\mathcal{R}_3^2\left(v\right)+\ldots \tag{3.14}$$

which turns out to be equivalent to the change of variables from Fefferman-Graham to Eddington-Finkelstein metric [20]. Subsequently it was shown, that the geometry dual to the boost-invariant flow in the large τ limit is well-defined at any order of $\tau^{-2/3}$ expansion [21] and the usual black brane singularity is covered by an event horizon [24, 28]. Thus the universal behavior of boost-invariant plasma at large proper-time (note that the energy density contains only one arbitrary constant, which sets the overall scale) possesses a regular bulk description, which could be constructed analytically in a perturbative manner. Moreover, as expected, it does not matter which coordinate frame in the bulk is used, so that in the rest of the paper all the calculations will be performed in Fefferman-Graham coordinates.

4. Early time dynamics

4.1 No scaling at early time

The second regime where analytic methods can be applied is the domain of early times. At first sight it seems that the early-time problem could be addressed by the same method which was so useful for late time, namely solving the boost-invariant Einstein's equations (4.10) without specifying *a priori* initial conditions. However after careful consideration a crucial difference turns out to occur: no scaling solution appears which would consist of a hierarchy of terms similar to (3.5) and independent of the initial conditions. In fact, on a more physical ground, the initial conditions should play a crucial role at early times. This would indeed agree with the physical intuition which suggests that this regime should not be universal, but rather depend on initial conditions. However, as discussed in the following, the solutions are submitted nevertheless to nontrivial constraints if they are considered in the strong coupling limit.

As will be shown in the rest of the paper the search for a scaling variable (as in Ref. [23]) is invalidated due to a subtlety. In order to see this one needs to recall the way how to identify the existence of a scaling variable. Consider the leading proper time dependence of the energy density in the regime of interest ($\tau\to\infty$ or $\tau\to 0$)

$$\varepsilon(\tau)\sim\frac{1}{\tau^s} \tag{4.1}$$

and then solve the Einstein's equations (4.10) *exactly* as a power series around the boundary

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + g^{(4)}_{\mu\nu}(\tau)\, z^4 + g^{(6)}_{\mu\nu}(\tau)\, z^6 + g^{(8)}_{\mu\nu}(\tau)\, z^8 + \dots \tag{4.2}$$

The coefficients of this power series are explicit s-dependent functions of proper time τ and typically contain a couple of terms. If the part of $g^{(n)}_{\mu\nu}(\tau)$ which dominates at $\tau \to \infty$ is selected, the above power series becomes a power series of a scaling variable $v = z/\tau^{\frac{s}{4}}$. If on the other hand the parts that dominate for $\tau \to 0$ are considered, it leads [23] to an expression of the form

$$\frac{z^4}{\tau^s} \cdot f\left(w \equiv \frac{z}{\tau}\right) \tag{4.3}$$

for the metric coefficients. One consequently finds a unique solution in w for each s with a complex branch cut singularity for $s > 0$. This leads to the only possible value $s = 0$ right at the margin of the allowed range, i.e.

$$\varepsilon(\tau) \sim const \qquad \text{for} \quad \tau \to 0 \tag{4.4}$$

out of the range of generic s [23].

However the situation when $s = 0$ is special. Indeed, going back to the derivation of the early time scaling variable $w = z/\tau$, it turns out that the terms in $g^{(n)}_{\mu\nu}(\tau)$ which lead to it are all multiplied by a factor of s. Hence for $s = 0$, these terms vanish and a completely different hierarchy of terms appear.

Indeed, if one performs for instance the power series expansion of $a(\tau, z)$ starting from $\epsilon(\tau) = 1/\tau^s$ then the answer for the first three orders is

$$\begin{aligned} &- z^4 \;\; \tau^{-s} + z^6 \;\left\{\frac{1}{6}\,\tau^{-s-2} s - \frac{1}{12}\,\tau^{-s-2} s^2\right\} + \\ &+ z^8 \;\left\{-\frac{1}{16}\,\tau^{-2\,s} s^2 - \frac{1}{6}\,\tau^{-2\,s} + 1/6\,\tau^{-2\,s} s + \frac{1}{96}\,\tau^{-s-4} s^2 - \frac{1}{384}\,\tau^{-s-4} s^4\right\} + \dots \;. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Consider now the term proportional to z^8 in (4.5). There are two structures $z^8/\tau^{(s+4)}$ and z^8/τ^{2s}. The first of these leads to the early-time scaling variable proposed in [23] since it dominates for nonzero s. However its coefficient is proportional to s so for $s = 0$ it is absent and the only contribution comes from the second term which is not contained in the scaling-variable analysis. The same applies obviously already to the term in $z^6/\tau^{(s+2)}$ as well as to all subsequent orders.

Analysing the power series solutions in more detail, one finds that for a generic early time expansion of the energy density[11]

$$\varepsilon(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{2n} \tau^{2n}, \tag{4.6}$$

the coefficients a_n of the power series expansion in z of the metric coefficients at $\tau = 0$

$$a(\tau = 0, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{4+2n} \tag{4.7}$$

[11] The restriction to even powers of τ is discussed in one of the following sections.

depends on all coefficients ε_{2n} in (4.6). Reformulating this observation, this means that each of the possible initial conditions (4.7) leads to a distinct proper-time evolution (4.6), where the coefficients of the two power series are linked through the Einstein's equations. The following mapping is therefore obtained

$$a(\tau=0,z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{4+2n} \qquad \Longrightarrow \qquad \varepsilon(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_{2n}\tau^{2n}. \tag{4.8}$$

On the other hand, certain nontrivial constraints limit the range of solutions. Among these, the nonsingularity condition on the metric-invariant properties of the geometry plays the crucial role.

The derivation of this result together with the constraints including the nonsingularity argument restricting the early time expansion in terms of even powers of the proper time of the energy density, is the main result of this paper and is presented in section (4.4).

The objective now is to analyze the qualitative properties of the evolution of the energy density starting from the initial conditions (4.7). But before this can be done, the space of allowed initial conditions has to be investigated in more detail, as these have to satisfy a nonlinear constraint equation which is a part of the Einstein's equations (4.10).

4.2 The Fefferman-Graham metric is singular at all times

This section focuses on the restrictions on the initial conditions coming from Einstein's equations, which can be written in an equivalent simplified form as

$$R_{AB}+4G_{AB}=0 \tag{4.9}$$

or explicitly in Fefferman-Graham coordinates as

$$\begin{aligned}
(\tau\tau)\ &: \ddot{b}+2\ddot{c}-\frac{\dot{a}}{2}(\dot{b}+2\dot{c})+\frac{1}{2}(\dot{b}^2+2\dot{c}^2)-\frac{1}{\tau}(\dot{a}-2\dot{b})=e^a\left\{a''-\frac{3a'}{z}+\left(\frac{a'}{2}-\frac{1}{z}\right)(a'+b'+2c')\right\},\\
(yy)\ &: \ddot{b}-\dot{a}\dot{b}+\frac{1}{\tau}(\dot{b}-2\dot{a})+\frac{1}{2}(\dot{a}+\dot{b}+2\dot{c})\left(\dot{b}+\frac{2}{\tau}\right)=e^a\left\{b''-\frac{3b'}{z}+\left(\frac{b'}{2}-\frac{1}{z}\right)(a'+b'+2c')\right\},\\
(\perp\perp)\ &: \ddot{c}-\dot{a}\dot{c}+\frac{\dot{c}}{2}\left(\dot{a}+\dot{b}+2\dot{c}+\frac{2}{\tau}\right)=e^a\left\{c''-\frac{3c'}{z}+\left(\frac{c'}{2}-\frac{1}{z}\right)(a'+b'+2c')\right\},\\
(\tau z)\ &: 2\dot{b}'+4\dot{c}'+b'\left(\dot{b}+\frac{2}{\tau}\right)+2\dot{c}c'-a'\left(\dot{b}+2\dot{c}+\frac{2}{\tau}\right)=0,\\
(zz)\ &: a''+b''+2c''-\frac{1}{z}(a'+b'+2c')+\frac{1}{2}(a'^2+b'^2+2c'^2)=0.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

In the above expressions the first parenthesis is for the corresponding metric component, the dot for the proper-time τ-derivative and the prime for the z-derivative.

Expanding the (zz) component of Einstein's equations as a power series in z, and keeping only the leading terms for $z\to 0$, one obtains the tracelessness condition $-\epsilon(\tau)+p_{\parallel}(\tau)+2p_{\perp}(\tau)=0$ of $\langle T_{\mu\nu}\rangle$. The (zz) equation thus encodes holographically the scale invariance of the boundary gauge theory. Moreover, that Einstein's equation does not

features any τ-derivative. Hence, at each proper time, if the z-dependence of two of the functions a, b and c are given, the third one is completely determined by the (zz) equation and the requirement of a z^4 behavior near the boundary.

However, for completeness, let us discuss also some of the other Einstein's equations. Expanding the $(z\tau)$ component of Einstein's equations as a power series in z, one finds that the leading terms near the boundary give the relation $\dot{p}_\parallel + 2\dot{p}_\perp + (\epsilon + p_\parallel)/\tau = 0$ which, assuming $\langle T^\mu_\mu \rangle = 0$, is equivalent to the energy conservation equation in the CFT. Hence, the $(z\tau)$ and (zz) components of Einstein's equations together encodes holographically both energy conservation and conformal invariance in the CFT.

One should remark that we have five equations (4.10) for only three unknown functions. There is indeed some redundancy in Einstein's equations (4.10). It is *e.g.* consistent to replace the first three equations $(\tau\tau)$, (yy) and $(\perp\perp)$ by the combination $-(\tau\tau) + (yy) + 2(\perp\perp) - e^a(zz)$, which writes

$$\dot{c}\left(\dot{c} + 2\dot{b} + \frac{4}{\tau}\right) = e^a \left\{ 2b'' + 4c'' + b'^2 + 3c'^2 + 2b'c' - \frac{6}{z}b' - \frac{12}{z}c' \right\}. \tag{4.11}$$

Hence, the system of Einstein's equations is only of order one in τ. The required initial conditions should thus be two of the three functions $a_0(z)$, $b_0(z)$ and $c_0(z)$, where $a_0 = a_0(z) = a(\tau = 0, z)$ and analogous expressions for the others, because we have already at $\tau = 0$ the constraint equation

$$a_0'' + b_0'' + 2c_0' + \frac{1}{2}(a_0')^2 + \frac{1}{2}(b_0')^2 + (c_0')^2 - \frac{1}{z}\left(a_0' + b_0' + 2c_0'\right) = 0, \tag{4.12}$$

We shall see in the next section that requiring a regular behavior of the solutions in the limit $\tau \to 0$ further reduces the freedom for the initial condition to only one arbitrary function of z.

The nonlinear character of equation (4.12) turns out to play a crucial role in the whole analysis. Naively, one would expect to be able to consider a small fluctuation over empty AdS_5 in the linearized approximation neglecting the quadratic terms in the above constraint. However it turns out, as will be shown below, that even if starting from *e.g.* an infinitesimal a, the nonlinear equation for c will always generate a singularity for some large but finite z! Thus linearized fluctuations cannot be used as initial conditions in the boost-invariant kinematics. Moreover, a singularity, presumably related to an horizon, has to be present from the outset already in the initial conditions. This point will be addressed later in the paper.

To simplify (4.12) it is useful to introduce the following notation

$$\begin{aligned} v(z^2) &= \frac{1}{4z}a_0'(z), \\ \varsigma(z^2) &= \frac{1}{4z}b_0'(z), \\ w(z^2) &= \frac{1}{4z}c_0'(z). \end{aligned} \tag{4.13}$$

If the constraint equation has a regular solution, the derivatives a_0', b_0' and c_0' are bounded in the bulk and v, ς and w vanish when $z \to \infty$. The constraint equation simplifies when

written in terms of v, ς and w

$$v' + \varsigma' + 2w' + v^2 + \varsigma^2 + 2w^2 = 0, \tag{4.14}$$

where the prime now means the z^2-derivative. Integrating the above equation assuming the regularity conditions from $z = 0$ to ∞ gives

$$\int_0^\infty (v' + \varsigma' + 2w')dz^2 + \int_0^\infty (v^2 + \varsigma^2 + 2w^2)dz^2 = 0. \tag{4.15}$$

The first integral vanishes due to the imposed boundary conditions leading to

$$\int_0^\infty (v^2 + \varsigma^2 + 2w^2)dz^2 = 0. \tag{4.16}$$

This equality however is satisfied only for $v = \varsigma = w = 0$, thus the only regular solution is trivial – the vacuum AdS_5. Therefore, *at any time* the metrics of interest must have a singularity at some value of z. In particular this will be the case even at $\tau = 0$, with the meaning that any nontrivial initial condition consistent with the Einstein's equations will lead to a metric singularity at some value of z. The nonsingularity constraint on the geometry requires that all the singularities apart from the one sitting at $z = \infty$ will only be of coordinate nature. This provides a strong selection mechanism for the allowed initial conditions.

4.3 Constraints at early time

This section analyzes the constraints on initial conditions imposed by the Einstein's equations together with the assumption of nonsingularity of the geometry at $\tau = 0$. The (τz) component equation (see (4.10)) takes the form

$$\partial_z a - \partial_z b = \tau \cdot (\ldots), \tag{4.17}$$

which means that at $\tau = 0$, $a(\tau, z)$ and $b(\tau, z)$ can differ only by a constant. Since both functions have to vanish at $z = 0$, this constant vanishes as well. Therefore

$$a(0, z) = b(0, z). \tag{4.18}$$

Incidentally the condition (4.18) ensures also that the geometry is nonsingular on the light-cone $\tau = 0$ for generic z.

In fact the constraint equation can be solved exactly leading to the space of solutions parametrized fully by the single function. The trick is to introduce the linear combinations

$$\begin{aligned} v_+ &= -w - v, \\ v_- &= w - v \end{aligned} \tag{4.19}$$

for which the equation (4.14) becomes algebraic for v_- (both v_- and v_+ are understood as functions of z^2). After trivial algebra one obtains

$$v_- = \sqrt{2v_+' - v_+^2}. \tag{4.20}$$

Therefore all solutions of the initial value nonlinear constraint equations are parametrized by an arbitrary function $v_+(z^2)$. The next step is to analyze what further conditions must be imposed on $v_+(z^2)$. First, since the the metric coefficient functions have to vanish as z^4 one gets

$$v_+(z^2) \sim \frac{2}{3}\varepsilon_0 z^6 \qquad \text{for} \quad z \sim 0. \tag{4.21}$$

Moreover, from the arguments in section 4.2 it follows that there is a singularity at some finite $z = z_0$. The behavior at this singularity is constrained by demanding that this would be just a coordinate singularity and not a curvature blow-up. Assuming a power-like blow-up of $v_+\left(z^2\right)$ at $z = z_0$, the regularity of the square of the Riemann tensor leads to the conclusion, that $v_+(z^2)$ has to have a first order pole

$$v_+(z^2) \sim \frac{1}{z_0^2 - z^2} \qquad \text{for} \quad z \sim z_0 \tag{4.22}$$

with residue 1.

The coordinate singularity in v_+ at $z = z_0$ translates directly into the behavior of the metric coefficients around z_0. This means that the proper time metric component has a second order zero at z_0 so that the metric at $\tau = 0$ looks like

$$ds^2 = -\frac{1}{z^2}\left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^2 \{d\tau^2 + \tau^2 dy^2\} + \ldots + \frac{1}{z^2}dz^2 \tag{4.23}$$

in the vicinity of $z = z_0$, reminiscent of the behavior of a horizon in Fefferman-Graham coordinates. Note, however, that at $\tau = 0$ the term in curly braces becomes dx^+dx^- in contrast to a 'Schwarzschild' horizon where the corresponding structure is of the form $-(1 - z/z_0)^2 dt^2 + \ldots$. Presumably the metric singularity could be avoided by using a different set of coordinates (e.g. Eddington-Finkelstein ones). Then it would be also possible to apply the framework of dynamical horizons to check and locate eventual trapped surfaces. However performing a change of variables from Fefferman-Graham to Eddington-Finkelstein ones is a formidable task, since contrary to late proper-time regimes, $\tau \sim 0$ Fefferman-Graham is not mapped in the bulk into $\tilde{\tau} \sim 0$ Eddington-Finkelstein. This means that the change of variables cannot be performed perturbatively and is beyond the scope of analytical methods presented here. It would be however interesting to analyze in detail the local structure of the geometry at $z = z_0$ including time-dependence. This problem is left for future work.

It is interesting for further discussion to present explicit solutions of the constraints. One of them arises from the choice

$$v_+ = a(\tan az^2 - \tanh az^2). \tag{4.24}$$

The initial metric profiles may be integrated explicitly to obtain

$$\begin{aligned} a_0(z) &= 2\log\cos az^2, \\ c_0(z) &= 2\log\cosh az^2. \end{aligned} \tag{4.25}$$

The above solution possesses a (coordinate – not leading to any curvature singularities) singularity at

$$z_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}. \tag{4.26}$$

More generally one can parametrize v_+ in the following manner

$$v_+\left(z^2\right) = \frac{2}{3}\epsilon_0 z_0^2 \cdot \frac{z^6}{z_0^2 - z^2} f\left(z^2\right), \tag{4.27}$$

where $f(0) = 1$, $f\left(z_0^2\right) = \frac{3}{2\epsilon_0 z_0^8}$ and otherwise is a regular function of z^2 variable for $z < \infty$. One has also to ascertain that v_- obtained from (4.20), does not become complex

Once the allowed initial conditions are under control one may proceed to find the solution of Einstein's equations starting with these initial data.

4.4 Early time expansion of the energy density

The Einstein's equations (4.9) can be solved for any energy density perturbatively in z^2. Starting with some arbitrary energy density ϵ, the first three nontrivial terms in the expansion of $a(\tau, z)$ warp factor take the form

$$\begin{aligned} a(\tau, z) = & -\epsilon(\tau) \cdot z^4 + \left\{ -\frac{\epsilon'(\tau)}{4\tau} - \frac{\epsilon''(\tau)}{12} \right\} \cdot z^6 + \left\{ \frac{1}{6}\epsilon(\tau)^2 + \frac{1}{6}\tau\epsilon'(\tau)\epsilon(\tau) + \frac{1}{16}\tau^2\epsilon'(\tau)^2 \right. \\ & \left. + \frac{\epsilon'(\tau)}{128\tau^3} - \frac{\epsilon''(\tau)}{128\tau^2} - \frac{\epsilon^{(3)}(\tau)}{64\tau} - \frac{1}{384}\epsilon^{(4)}(\tau) \right\} \cdot z^8 + \cdots \end{aligned} \tag{4.28}$$

This power series can be extended to an arbitrary order in z^2 by solving Einstein's equations and the only obstructions are of a purely computational nature. Generically terms in the expansion (4.28) contain inverse powers of proper time multiplying the energy density and its derivatives. Assuming the energy density can be expanded in a regular power series around $\tau = 0$, the singular inverse powers of proper time in (4.28) will be present unless all the odd terms vanish. This requirement constrains the energy density in the early times domain to be a power series in even powers of τ, namely

$$\epsilon(\tau) = \epsilon_0 + \epsilon_2\tau^2 + \epsilon_4\tau^4 + \dots \ . \tag{4.29}$$

On the other hand, taking τ to be zero in equation (4.28) gives the relation between the early times energy density and the profile of $a_0(z)$, which has been signaled in subsection (4.1). Basically expanding the initial profile of the metric in the radial AdS variable near the boundary and comparing with (4.28) at $\tau = 0$

$$a(0, z) = a_0(z) = -\epsilon_0 \cdot z^4 - \frac{2}{3}\epsilon_2 \cdot z^6 + \left(-\frac{\epsilon_4}{2} - \frac{\epsilon_0^2}{6} \right) \cdot z^8 + \dots \tag{4.30}$$

allows one to solve for all the ϵ_{2i} sitting in (4.29). This pattern continues to any order in z (and thus τ) expansion. Note also, that each parameter in the expansion of energy density around $\tau = 0$ is an independent dimensionful quantity and in order to fully specify

the initial conditions infinitely many such terms are needed. This is in stark contrast to the late time behavior, where only one dimensionful constant (Λ) appears. Physically, this is in agreement with the fact that in the thermally equilibrated final stages of Bjorken expansion all differences due to initial data should have been washed away by dissipative effects and the only parameter characterizing the flow is an overall energy scale (given e.g. as the energy density at a certain fixed proper time τ_0).

The strategy for finding the time evolution from given initial data is to use the Einstein's equations to generate the expansion of the metric warp-factors for sufficiently high order (the bigger, the better, but for technical reasons this has been achieved up to the order z^{84} or equivalently τ^{80} in most cases) and then for given regular (with finite curvature evaluated on initial data for $z < \infty$) initial profile generate the power series for the energy density at early times. Thus the AdS/CFT correspondence beautifully sets the allowed initial conditions for gauge theory dynamics using the gravitational description. However since the series (4.29) has generically a finite radius of convergence, some resummation method is needed in order to extend it to larger proper times.

5. Transition to the hydrodynamic regime

5.1 Resummation scheme for the energy density

It is desirable now to find a suitable numerical approach, relating the solutions of the Einstein's equations (4.10) to the physical quantities, energy density and pressures, as a function of τ.

Though early time dynamics of the field theory is dictated by the initial conditions, after certain time the system is expected to settle down to local equilibrium. For τ sufficiently large the plasma should exhibit the universal hydrodynamic behavior, where the only trace of the initial conditions is given by the overall scale Λ, see (3.13). In order to track the dynamics of the system with sufficient accuracy from $\tau = 0$ to $\tau \gg 1$, numerical methods are needed. In particular the early-times power series for the energy density has a finite radius of convergence and a resummation is needed in order to find its behavior for large τ.

We would like to address the following questions. Firstly, whether during the evolution from some (generic) initial data at $\tau = 0$ one can observe a passage to the asymptotic perfect fluid behaviour

$$\epsilon(\tau) \sim \frac{1}{\tau^{4/3}} + \dots \tag{5.1}$$

To be more general one may try to determine the asymptotic exponent s in

$$\epsilon(\tau) \sim \frac{1}{\tau^{s}} + \dots \ , \tag{5.2}$$

and determine whether it is significantly different (as is expected) from the free streaming value $s = 1$.

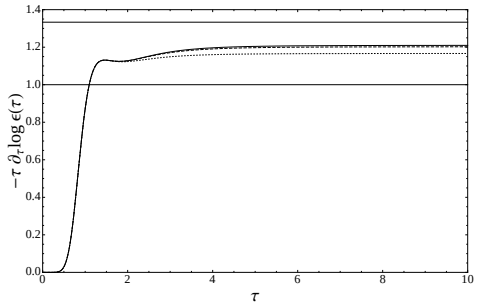

Figure 2: Approximate value of s obtained from the logarithmic derivative and Pade approximation for A) $N_{cut} = 32$ (dotted line), B) $N_{cut} = 40$ (dashed line) and C) $N_{cut} = 48$ (solid line) for initial profile $v_+^{(1)}\left(z^2\right)$. Two horizontal lines denote $s = 1$ (free streaming scenario) and $s = 4/3$ (perfect fluid case).

As explained above, it is quite difficult to answer this question as the energy density in the early time regime takes the form

$$\epsilon\left(\tau\right) = \epsilon_0 + \epsilon_2\tau^2 + \ldots + \epsilon_{2N_{cut}}\tau^{2N_{cut}} + \ldots \tag{5.3}$$

where N_{cut} is a natural number denoting the cut-off up to which the evaluation of the energy density from the initial profile in the bulk has been performed. In most cases $N_{cut} = 40$ and increasing this accuracy is difficult. Moreover the series has a finite range of convergence. In order to estimate the asymptotic exponent s appearing in (5.2) it is convenient to express it through a logarithmic derivative

$$s = -\lim_{\tau\to\infty}\tau\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\log\epsilon\left(\tau\right). \tag{5.4}$$

and perform a Pade approximation (of order (N_{cut}, N_{cut})) to the r.h.s. of (5.4) with $\varepsilon(\tau)$ substituted with our power series (5.3):

$$s_{\text{approx}} = \frac{s_U^{(0)} + s_U^{(2)}\tau^2 + \ldots + s_U^{(2N_{cut})}\tau^{2N_{cut}}}{s_D^{(0)} + s_D^{(2)}\tau^2 + \ldots + s_D^{(2N_{cut})}\tau^{2N_{cut}}}. \tag{5.5}$$

$s = 4/3$ corresponds then to the perfect fluid case and $s = 1$ to the free-streaming scenario. Of course it is not expected that (5.5) will give $s = 4/3$ exactly[12].

Let us consider the three following examples of the initial profile, satisfying the curvature nonsingularity constraint, the first one being (4.24), the second its deformed variant, and the third one from the family (4.27):

$$\begin{aligned} v_+^{(1)}\left(z^2\right) &= \tan\left(z^2\right) - \tanh\left(z^2\right), \\ v_+^{(2)} &= \tan\left(z^2\right) - \tanh\left(z^2 + \frac{z^8}{6}\right), \\ v_+^{(3)}\left(z^2\right) &= \frac{2}{3}\frac{z^6}{1-z^2}\left(1 + \frac{1}{2}z^2\right). \end{aligned} \tag{5.6}$$

[12]Such a Pade approximation has, by construction, a different subleading large τ behaviour from viscous hydrodynamics.

The obtained values of s for the first profile, for which we had a power series in τ up to order τ^{100}, are $s_{\text{approx}} = 1.1667$, 1.1923, 1.2025, 1.2025 and 1.2101 respectively for $N_{cut} = 32$, 36, 40, 44 and 48. The approximate value of s is closer to $s = 4/3$ than to $s = 1$ for largest N_{cut}. For the second and third profile the results are inconclusive, since the corresponding energy densities are provided with worse accuracy.

In the rest of the text, we shall keep the asymptotic perfect fluid value $s = 4/3$. Then, a suitable Pade resummation scheme, with the required asymptotia can be given by

$$\epsilon^3_{\text{approx}}(\tau) = \frac{\epsilon_U^{(0)} + \epsilon_U^{(2)}\tau^2 + \ldots + \epsilon_U^{(N_{cut}-2)}\tau^{N_{cut}-2}}{\epsilon_D^{(0)} + \epsilon_D^{(2)}\tau^2 + \ldots + \epsilon_D^{(N_{cut}-2)}\tau^{N_{cut}+2}}. \tag{5.7}$$

where both ϵ_D^{2i} and ϵ_U^{2i} are obtained by expanding (5.7) around $\tau = 0$ and comparing with (5.3). Such a resummation imposes the correct asymptotic behavior, but differs, by construction, in the subleading behavior with viscous hydrodynamics.

$$\epsilon_{\text{approx}}(\tau) = \frac{1}{\tau^{4/3}}\left\{\# + \frac{1}{\tau^2}\cdot\#\right\}, \tag{5.8}$$

(the first subleading piece scales as τ^{-2} whereas the correct scaling is $\tau^{-2/3}$). This difference is not substantial and can be cured by more refined resummation schemes[13].

Despite its simplicity, it turns out that the resummation (5.7) works pretty well (the results seems to converge well with increasing cut-off, see Figs.2 and 4 in extending the energy density beyond the convergence radius of the early-time power series (which is its main task) and in providing a qualitative picture of dynamics.

5.2 Qualitative features of the approach to local equilibrium

The method (5.7) can be used to study the approximate behavior of the energy density as a function of time for large enough times to see local equilibration. Fig.3 shows the plots of energy density as a function of proper time for the three profiles (5.6) obtained for the highest cut-offs. The results seems to converge well for the first profile, see Fig.4. Energy densities obtained for these profiles differ at the initial stages, whereas in the late-time regimes both seem to approach local equilibrium. A measure of the local equilibrium is the relative difference between the transverse and perpendicular pressures defined as

$$\Delta p(\tau) = 1 - \frac{p_{\parallel}(\tau)}{p_{\perp}(\tau)} \tag{5.9}$$

When this quantity is close to zero, it signals the isotropisation indicating local equilibrium, while a value of order one is an indication in favor of the free streaming scenario. Fig 5 shows the plot of the relative difference of pressures (5.9). It is interesting to note the rapid fall-off of the pressure difference on a scale $\tau = \mathcal{O}(1)$. This fall-off appears to be stable after different numerical checks. Interestingly enough, there is a bump which prevents the pressure to reach isotropy before $\tau = \mathcal{O}(5)$. However, the Pade approximants

[13] An other possible issue are roots of the denominator lying within the range $(0, \infty)$. If such feature is encountered, it can be interpreted as an artifact of approximation without real physical significance.

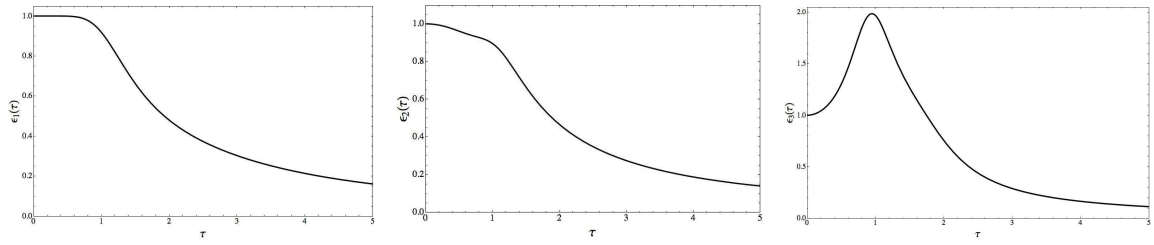

Figure 3: A) Energy density $\epsilon_1(\tau)$ as a function of proper-time τ obtained from Pade approximation for cut-off $N_{cut} = 46$ and initial profile $v_+^{(1)}\left(z^2\right)$ in the bulk; B) Energy density $\epsilon_2(\tau)$ for the second profile. C) Energy density $\epsilon_3(\tau)$ as a function of proper-time τ obtained from Pade approximation for cut-off $N_{cut} = 34$ and initial profile $v_+^{(3)}\left(z^2\right)$ in the bulk.

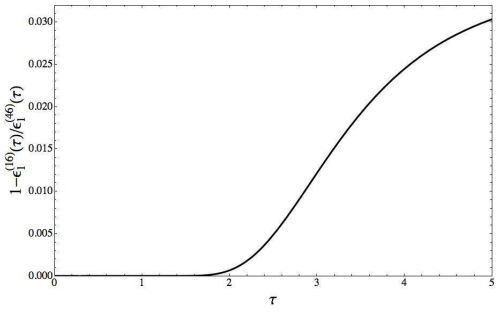

Figure 4: Relative difference between the energy densities for the first profile for cut-offs $N_{cut} = 16$ and $N_{cut} = 46$ does not exceed 10%.

for the pressure difference are less stable than for the energy density and the differences appear after the bump. The second profile which is a slight deformation of the first one does not seem to exhibit this bump. In any case, it would be physically interesting to check whether this phenomenon of rapid fall-off but incomplete isotropization is or not a characteristic feature of the strong coupling evolution. We intend to analyze this issue using numerical methods for solving Einstein's equations in future work.

6. Summary

This paper studies the early-times dynamics of boost-invariant plasma using analytical methods. The motivations for this work are both phenomenological and theoretical. On the one hand, the recent findings of the RHIC experiment suggested that locally equilibrated nuclear matter behaves as an almost perfect fluid, which presumably indicates a strongly coupled regime (at least at this stage of its evolution) of the underlying gauge field theory, *i.e.* QCD. Despite the fact that realistic dynamics of the QCD after the collision would require the understanding of rapidity dependence (*i.e.* deviations from boost-invariant dynamics, which is only approximately valid in the central rapidity region) and might be

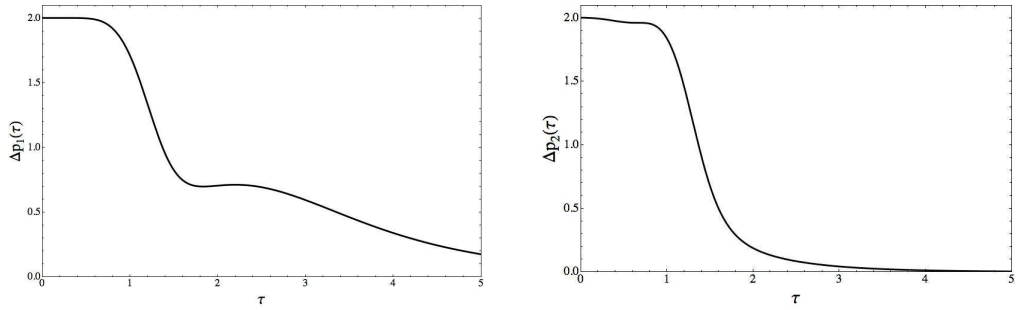

Figure 5: Relative difference in pressures for the first (left) and second (right) profiles – for $\tau \approx 1$ there is a rapid fall-off but (perhaps, see text) does not reach yet a complete izotropization for the first profile.

driven as well by the perturbative effects (as for the Color Glass Condensate [9] initial conditions), it is still interesting to consider the boost-invariant expansion of a conformal plasma at strong coupling as a useful toy-model for *e.g.* estimates of the thermalization time. On the other hand, theoretically, the boost-invariant plasma evolution is a workable example of a dynamical system at strong coupling, which is interesting on its own. The modern developments translates (using the AdS/CFT correspondence) the dynamics of the strongly coupled gauge theories into the evolution of higher dimensional space-time equipped with a nontrivial metric. Thus, as suggested previously by various authors (e.g. [30]) the thermalization of the excited gauge theory matter should be dual to black hole (or black brane) formation (see [31, 32] for concrete realizations of this observation), which is obtained in late time as the dual of the Bjorken hydrodynamical flow. This subject is very fresh and thus any work which may shed light on this fascinating process is valuable.

The main result of the studies presented here is that the boost-invariant dynamics of a strongly coupled conformal plasma is sensitive to the initial conditions. This contradicts the scaling hypothesis [23], which, analogous to the late-time case [7] would indicate some uniqueness of the early-times solution. In fact the scaling does not occur due to a subtlety – the *a priori* dominant scaling contributions vanish precisely in the limit $s \to 0$. (see subsection (4.1) for details). The correct physical picture leads to a link between the early-time expansion of the energy density and the initial profile of the bulk metric. We find a quite general result that at all times, including the initial one, a singularity of at least one metric coefficient should develop in the bulk. Hence, the requirement that this does not lead to real curvature singularities already at initial time is a basic constraint on the possible initial conditions. The analysis of the possible curvature singularities in the initial data at finite distance from the boundary fixed the early times power series for the energy density to contain only even powers of proper time. We have shown that solving the nonlinear constraint equation in the Fefferman - Graham coordinates leads to the conclusion that the initial data must contain a coordinate singularity in the bulk of AdS which may signal the presence of a *dynamical* horizon (we are making a distinction w.r.t. the event horizon which is a global notion) right from the start of the evolution.

This suggests that the process of thermalization in this boost-invariant setting does *not* amount to a formation of a black hole, as was suggested up till now, but rather amounts to a qualitative difference in the behaviour of the horizon. We plan to investigate these issues in more detail in future work using numerical methods.

Interesting further directions of study include numerical investigation of the bulk evolution dual to the boost-invariant flow. This can be achieved using the methods presented in [31] and may provide precise numerical results covering both early, intermediate and late time regimes (see [33] for an interesting study of boost invariant flow sourced by boundary metric perturbations). It is important to understand more qualitatively the relation between the initial conditions in the bulk and the shape of the energy density as function of proper time, which would give the more precise estimates on the thermalization time. Moreover the methods developed in this paper are well suited to reconsider the problem of plasma isotropisation posed in [25] using analytical methods (note that anisotropic energy-momentum tensor should reach the equilibrium exponentially fast, whereas hydrodynamic evolution leaves a power-like tail). Finally the most interesting, yet highly non-trivial, extensions of the AdS/CFT program for the dynamical evolution of a plasma are the studies of the initial conditions such as shock waves collision using the dual gravity picture (see for instance [34, 35] for some preliminary attempts). We hope that the general properties and their numerical implementation we found can serve as a testing ground for the investigation on the proper initial conditions and evolution of the plasma. The authors plan to address some of the mentioned issues in the nearest future.

Acknowledgments

The authors would like to thank Ofer Aharony and Paul Chesler for discussions. During the course of this work, MH has been supported by *Polish/French Research Programme Polonium*, *Polish Ministry of Science and Information Technologies* grant N N202 247135 (2008-2010), *Foundation for Polish Science* award START and *Helena Kogutowska Scientific Scholarship* by Jagiellonian University. MH and RJ would like to thank the Institute for Theortical Physics of Saclay for hospitality. MH and RJ were supported by Polish science funds during 2009-2011 as a research project (NN202 105136). The participation of RP and RJ in this investigation was partly supported by 6 Program of European Union "Marie Curie Transfer of Knowledge" Project: Correlations in Complex Systems "COCOS" MTKD-CT-2004-517186. R.P. wants to thank the Insitute of physics of the Jagiellonian university in Cracow for hospitality.

References

[1] E. V. Shuryak, "What RHIC experiments and theory tell us about properties of quark-gluon plasma?," Nucl. Phys. A **750**, 64 (2005).

[2] P. F. Kolb and U. W. Heinz, "Hydrodynamic description of ultrarelativistic heavy-ion collisions," [arXiv: nucl-th/0305084];
P. Huovinen and P. V. Ruuskanen, "Hydrodynamic models for heavy ion collisions," [arXiv: nucl-th/0605008].

[3] J. Y. Ollitrault, "Anisotropy As A Signature Of Transverse Collective Flow," Phys. Rev. D **46**, 229 (1992);
See also the recent reviews: J. Y. Ollitrault, "Relativistic hydrodynamics," Eur. J. Phys. **29**, 275 (2008);
T. Hirano, N. van der Kolk and A. Bilandzic, "Hydrodynamic and Flow".

[4] J. M. Maldacena, "The large N limit of superconformal field theories and supergravity," Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998) [Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113 (1999)];
S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, "Gauge theory correlators from non-critical string theory," Phys. Lett. B **428**, 105 (1998);
E. Witten, "Anti-de Sitter space and holography," Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 253 (1998).

[5] G. Policastro, D. T. Son and A. O. Starinets, "The shear viscosity of strongly coupled N = 4 supersymmetric Yang-Mills plasma," Phys. Rev. Lett. **87**, 081601 (2001);
P. Kovtun, D. T. Son and A. O. Starinets, "Viscosity in strongly interacting quantum field theories from black hole physics," Phys. Rev. Lett. **94**, 111601 (2005).

[6] J. D. Bjorken, "Highly Relativistic Nucleus-Nucleus Collisions: The Central Rapidity Region," Phys. Rev. D **27**, 140 (1983).

[7] R. A. Janik and R. B. Peschanski, "Asymptotic perfect fluid dynamics as a consequence of AdS/CFT," Phys. Rev. D **73**, 045013 (2006),
"Gauge / gravity duality and thermalization of a boost-invariant perfect fluid," Phys. Rev. D **74**, 046007 (2006).

[8] S. Bhattacharyya, V. E. Hubeny, S. Minwalla and M. Rangamani, "Nonlinear Fluid Dynamics from Gravity," JHEP **0802**, 045 (2008).

[9] For a review: E. Iancu and R. Venugopalan, "The color glass condensate and high energy scattering in QCD," arXiv:hep-ph/0303204.

[10] G. Beuf, "Gravity dual of N=4 SYM theory with fast moving sources," arXiv:0903.1047 [hep-th].

[11] R. A. Janik, "Viscous plasma evolution from gravity using AdS/CFT," Phys. Rev. Lett. **98**, 022302 (2007).

[12] M. P. Heller and R. A. Janik, "Viscous hydrodynamics relaxation time from AdS/CFT," Phys. Rev. D **76**, 025027 (2007).

[13] H. Epstein, V. Glaser and A. Jaffe, "Nonpositivity of energy density in Quantized field theories," Nuovo Cim. **36**, 1016 (1965), quoted in Ref.[34].

[14] C. Fefferman and C.R. Graham, "Conformal Invariants," in *Elie Cartan et les Mathématiques d'aujourd'hui*, Astérisque (1985) 95.

[15] S. de Haro, S. N. Solodukhin and K. Skenderis, "Holographic reconstruction of spacetime and renormalization in the AdS/CFT correspondence," Commun. Math. Phys. **217**, 595 (2001) [arXiv: hep-th/0002230];
K. Skenderis, "Lecture notes on holographic renormalization," Class. Quant. Grav. **19**, 5849 (2002) [arXiv: hep-th/0209067].

[16] S. Nakamura and S. J. Sin, "A holographic dual of hydrodynamics," JHEP **0609**, 020 (2006).

[17] D. Bak and R. A. Janik, "From static to evolving geometries: R-charged hydrodynamics from supergravity," Phys. Lett. B **645**, 303 (2007).

[18] P. Benincasa, A. Buchel, M. P. Heller and R. A. Janik, "On the supergravity description of boost invariant conformal plasma at strong coupling," Phys. Rev. D **77**, 046006 (2008).

[19] A. Buchel, "On SUGRA description of boost-invariant conformal plasma at strong coupling," AIP Conf. Proc. **1031**, 196 (2008) [arXiv:0803.3421 [hep-th]].

[20] M. P. Heller, P. Surowka, R. Loganayagam, M. Spalinski and S. E. Vazquez, "On a consistent AdS/CFT description of boost-invariant plasma," Phys. Rev. Lett. **102**, 041601 (2009), arXiv:0805.3774 [hep-th].

[21] S. Kinoshita, S. Mukohyama, S. Nakamura and K. y. Oda, "A Holographic Dual of Bjorken Flow," arXiv:0807.3797 [hep-th].

[22] M. P. Heller, R. A. Janik and R. Peschanski, "Hydrodynamic Flow of the Quark-Gluon Plasma and Gauge/Gravity Correspondence," Acta Phys. Polon. B **39**, 3183 (2008) [arXiv:0811.3113 [hep-th]].

[23] Y. V. Kovchegov and A. Taliotis, "Early time dynamics in heavy ion collisions from AdS/CFT correspondence," Phys. Rev. C **76**, 014905 (2007).

[24] P. Figueras, V. E. Hubeny, M. Rangamani and S. F. Ross, "Dynamical black holes and expanding plasmas," arXiv:0902.4696 [hep-th].

[25] R. A. Janik and P. Witaszczyk, "Towards the description of anisotropic plasma at strong coupling," JHEP **0809**, 026 (2008).

[26] A. Buchel, "Finite temperature resolution of the Klebanov-Tseytlin singularity," Nucl. Phys. B **600**, 219 (2001) [arXiv:hep-th/0011146].

[27] R. Baier, P. Romatschke, D. T. Son, A. O. Starinets and M. A. Stephanov, "Relativistic viscous hydrodynamics, conformal invariance, and holography," JHEP **0804**, 100 (2008).

[28] I. Booth, M. P. Heller and M. Spalinski, "Black brane entropy and hydrodynamics: the boost-invariant case," arXiv:0910.0748 [hep-th].

[29] I. Booth, "Black hole boundaries," Can. J. Phys. **83**, 1073 (2005) [arXiv:gr-qc/0508107].

[30] H. Nastase, "The RHIC fireball as a dual black hole," arXiv:hep-th/0501068.

[31] P. M. Chesler and L. G. Yaffe, "Horizon formation and far-from-equilibrium isotropization in supersymmetric Yang-Mills plasma," arXiv:0812.2053 [hep-th].

[32] S. Bhattacharyya and S. Minwalla, "Weak Field Black Hole Formation in Asymptotically AdS Spacetimes," JHEP **0909**, 034 (2009) [arXiv:0904.0464 [hep-th]].

[33] P. M. Chesler and L. G. Yaffe, "Boost invariant flow, black hole formation, and far-from-equilibrium dynamics in $\boldsymbol{\mathcal{N} = 4}$ supersymmetric Yang-Mills theory," arXiv:0906.4426 [hep-th].

[34] D. Grumiller and P. Romatschke, "On the collision of two shock waves in AdS5," JHEP **0808**, 027 (2008).

[35] J. L. Albacete, Y. V. Kovchegov and A. Taliotis, "Modeling Heavy Ion Collisions in AdS/CFT," JHEP **0807**, 100 (2008).