



UNIVERSITÉ PARIS 6 - PIERRE ET MARIE CURIE

et

INSTITUT DE PHYSIQUE THÉORIQUE - CEA/SACLAY

Thèse de doctorat

Spécialité

Physique Théorique

Sujet de la thèse :

Thermalisation dans les collisions d'ions lourds ultrarelativistes

présentée par

Clément GOMBEAUD

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Paris 6

Soutenue le 2 juillet 2010 devant le jury composé de :

Monsieur	Yuri DOKSHITZER	Examineur
Monsieur	Boris HIPPOLYTE	Examineur
Monsieur	Jean-Yves OLLITRAULT	Directeur de thèse
Monsieur	Carlos. A. SALGADO	Rapporteur
Monsieur	Urs. A. WIEDEMANN	Rapporteur



UNIVERSITÉ PARIS 6 - PIERRE ET MARIE CURIE

et

INSTITUT DE PHYSIQUE THÉORIQUE - CEA/SACLAY

Thèse de doctorat

Spécialité

Physique Théorique

Sujet de la thèse :

Thermalisation dans les collisions d'ions lourds ultrarelativistes

présentée par

Clément GOMBEAUD

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Paris 6

Soutenue le 2 juillet 2010 devant le jury composé de :

Monsieur	Yuri DOKSHITZER	Examineur
Monsieur	Boris HIPPOYTE	Examineur
Monsieur	Jean-Yves OLLITRAULT	Directeur de thèse
Monsieur	Carlos. A. SALGADO	Rapporteur
Monsieur	Urs. A. WIEDEMANN	Rapporteur

Etude de la thermalisation dans les collisions d'ions lourds ultrarelativistes

Résumé :

Lors des collisions d'ions lourds au Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) de Brookhaven, les partons composant tous les nucléons mis en jeu interagissent. L'étude de ces interactions est un domaine important de la physique des particules. Jusqu'à présent, on utilisait le plus souvent le modèle hydrodynamique des fluides parfaits (non visqueux) pour rendre compte de l'évolution du système créé dans ces collisions. Cependant ce modèle est incapable de reproduire l'ensemble des observations expérimentales. Afin de mieux comprendre l'évolution du système créé dans une collision d'ions lourds, j'ai réalisé une résolution numérique de l'équation de Boltzmann à $(2 + 1)$ dimensions afin de simuler, sur la base d'un modèle jouet, la dynamique d'un gaz de particules relativistes. Nous avons ainsi pu montrer que l'introduction de déviations à l'état d'équilibre thermique local permet de comprendre certaines des mesures expérimentales que les calculs d'hydrodynamique idéale ne sont pas à même d'expliquer.

En particulier, l'étude de la dépendance en centralité du flot elliptique nous a permis d'évaluer le degré de thermalisation de (le nombre de Knudsen correspondant à) la matière créée dans les collisions centrales, Au-Au à $\sqrt{s} = 200$ GeV, au RHIC. Nous avons alors pu montrer que la prise en compte des effets de thermalisation partielle permettait d'expliquer le "HBT Puzzle". Néanmoins, la thermalisation partielle n'est pas, à elle seule, capable de faire s'accorder prédictions théoriques et données expérimentales. D'autres effets physiques semblent avoir été sous-estimés tels que les fluctuations dans les conditions initiales dont on a montré qu'elles étaient un ingrédient clef dans l'étude du rapport $v_4/(v_2)^2$.

Mots clés : collisions d'ions lourds, équation de Boltzmann relativiste, simulations Monte-Carlo, effets collectifs, dissipation (viscosité), Hanbury-Brown et Twiss interférométrie, fluctuations.

Thermalization in ultrarelativistic heavy ion collisions

Abstract :

In heavy-ion collisions at the Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) of Brookhaven, the partons of the involved nuclei interact. The study of those interactions is an important field of research in particles physics. Until recently, the common behaviour was to consider that the fluid created in an heavy-ion collision at RHIC was well described by inviscid hydrodynamics. However, ideal hydrodynamics fails to reproduce some of the experimental results at RHIC. In order to improve our knowledge of the matter created in heavy-ion collisions, I built a numerical solution of the $(2 + 1)$ -dimensional relativistic Boltzmann equation based on Monte Carlo molecular dynamics. In this framework, we were able to study deviations to the local thermal equilibrium behaviour assumed in ideal hydrodynamics. This has allowed us to reproduce some of the experimental data not described, even qualitatively, by ideal hydrodynamics calculations. For the first time we were able to explain the centrality dependence of v_2 . This particular study has allowed us to extract the degree of thermalization, in terms of Knudsen number, of the matter created in central Au-Au collisions at the top RHIC energy. We were also able to show that, by taking into account the partial thermalization effects at RHIC, one is able to reduce quantitatively the difference between data and ideal hydro predictions known as “HBT puzzle”. However it has to be noted that deviations between data and theoretical predictions are not only due to partial thermalization effects. Other physical effects may not have been sufficiently considered. In particular, we have pointed out that fluctuations in initial conditions are a key ingredient in understanding experimental data for the ratio $v_4/(v_2)^2$.

Key words : heavy ion collisions, relativistic Boltzmann equation, Monte-Carlo simulations, collective effects, dissipation (viscosity), Hanbury-Brown and Twiss interferometry, fluctuations.

Articles de références

Ce rapport de thèse reprend des résultats publiés dans les articles suivants :

Publiés dans des revues à comité de lecture

1. *Effects of flow fluctuations and partial thermalization on v_4 .*
C. Gombeaud and J.-Y. Ollitrault, Physical Review C 81, 014901 (2010)
arXiv :0907.4664
2. *Does interferometry probe thermalization ?*
C. Gombeaud, T. Lappi and J.-Y. Ollitrault, Physical Review C 79, 054914 (2009)
arXiv :0901.4908.
3. *The centrality dependence of elliptic flow, the hydrodynamic limit, and the viscosity of hot QCD.*
H.-J. Drescher, A. Dumitru, C. Gombeaud and J.-Y. Ollitrault, Physical Review C 76, 024905 (2007)
arXiv :0704.3553.
4. *Elliptic flow in transport theory and hydrodynamics.*
C. Gombeaud and J.-Y. Ollitrault, Physical Review C 77, 054904 (2008)
arXiv :nucl-th/0702075.

Proceedings de conférences

1. *Effects of flow fluctuations and partial thermalization on v_4/v_2^2 .*
A paraître dans “the Proceedings of The International Conference on Strangeness in Quark Matter, Sept. 27-Oct. 2, 2009, Buzios, Brazil”,
C. Gombeaud and J. Y. Ollitrault, submitted to J. Phys. G : Nucl. Part. Phys.

arXiv :0912.3623 [nucl-th].

2. *Why is v_4/v_2^2 larger than predicted by hydrodynamics ?*

A paraître dans “the Proceedings of The 10th International Conference on Nucleus-Nucleus collisions, Aug. 16-21, 2009, Beijing, China.”

C. Gombeaud and J. Y. Ollitrault, Nucl. Phys. A **834** (2010) 295C
[arXiv :0910.0392 [nucl-th]].

3. *Effects of partial thermalization on HBT interferometry.*

A paraître dans “the Proceedings of The 21th International Conference on Ultrarelativistic Nucleus-Nucleus Collisions, March 30-April 4, 2009, Knoxville, TN, United States.”

C. Gombeaud, T. Lappi and J.-Y. Ollitrault, Nucl. Phys. A **830** (2009) 817C
[arXiv :0907.1392 [nucl-th]].

Remerciements

Mes premiers remerciements vont naturellement à Jean-Yves Ollitrault mon directeur de thèse, à la fois pour sa disponibilité, sa rigueur, et ses qualités d'enseignant, mais aussi pour m'avoir offert la possibilité de voyager, afin de présenter nos résultats et de rencontrer les membres de notre communauté. Ce fut un réel plaisir d'être initié à la recherche sous sa direction. Je remercie également les autres membres du groupe QCD et hautes énergies de l'IPhT avec lesquels j'ai interagi, en particulier Jean-Paul Blaizot, pour avoir accepté de m'enseigner des bases en groupe de renormalisation non perturbatif et en théorie des champs à température finie, Robi Peschanski, pour nos discussions passionnantes à propos de la correspondance AdS-CFT, ou des développements analytiques en hydrodynamique, et Tuomas Lappi qui, pendant son séjour à Saclay, a bien voulu me faire partager ses connaissances en matière de conditions initiales dans les modèles de saturation et en QCD de façon plus générale.

Je voudrais également remercier Henri Orland pour m'avoir accueilli à l'IPhT pendant mes 3 années de thèse qui n'auraient pu se passer dans de meilleures conditions. Merci également à Sylvie Zaffanella, Catherine Cataldi et Laure Sauboy pour leur disponibilité dans la gestion des petits soucis du quotidien ainsi que l'interface avec l'administration du CNRS. Merci aussi à l'équipe informatique, pour leur aide précieuse et pour avoir mis à ma disposition les ressources nécessaires à mes calculs numériques. Je remercie également l'ensemble des chercheurs de l'IPhT pour leur calme et leur patience surtout lorsque mes "bugs" informatiques se répercutaient sur l'ensemble du système du laboratoire.

Enfin ces 3 années de thèse n'auraient pas été aussi agréables sans l'ensemble des étudiants de l'IPhT, je les remercie tous : ceux qui sont partis ; Christian, Sylvain, Michaël, Constantin, Thomas, Adel, Guillaume, Alexei, Pierre ; ceux qui, comme moi, partent cette année ; Jean-Emile, Clément, Olivier, Laura ; et ceux qui restent : Jeanne, Hélène, Emeline, Bruno, Zongren, Igor, Nicolas, Roberto, Gaetan, Enrico, Sophie, Francesco et Gregory. Une mention spéciale pour les membres de "La Pièce 109", Jean-Marie et Jérôme sans qui ma thèse n'aurait été une si belle thèse. Ainsi qu'à Michaël, pour l'animation de nos débats qui m'ont manqués en 3ème année, la thèse de Bon aura marqué un tournant dans la mienne.

Enfin je veux remercier tout ceux qui m'ont aidé et entouré, au premier rang desquels Ahmed Tounsi pour m'avoir orienté vers ce domaine très riche qu'est la physique des ions lourds, et mes parents pour leur soutien sans faille tout au long de mes études. Merci aussi à Carole, Vincent, Laura et Charlotte qui m'auront supporté ces 2 dernières années au sein de la coloc 51.

Table des matières

A	Introduction aux collisions d'ions lourds ultrarelativistes	7
I	Quarks et Gluons, des briques fondamentales de la matière	9
II	Différents états de la matière nucléaire	13
II.1	Grandeurs thermodynamiques	13
II.2	Degrés de liberté du système, mise en évidence de la transition de phase	13
II.3	Potentiel interquark	14
II.4	Transition chirale et déconfinement	15
II.5	Diagramme de phase de la matière nucléaire	16
II.6	Ordre de la transition	17
III	Observables dans les collisions d'ions lourds	19
III.1	Motivation des collisions d'ions lourds et principales réalisations expérimentales	19
III.2	Observables globales	20
III.2.1	Géométrie des collisions non centrales	20
III.2.2	Mesure de la centralité d'une collision	21
III.2.3	Direction du paramètre d'impact	21
III.3	Observables "dures"	22
III.3.1	Le "jet-quenching"	22
III.3.2	Les photons directs	22
III.4	Observables électromagnétiques	22
III.4.1	Les photons thermiques	22
III.4.2	Spectre de masse des dileptons	23
III.5	Observables "soft"	23
III.5.1	Equilibre thermique et augmentation de l'étrangeté	23
III.5.2	Les spectres en p_t	24
III.5.3	Observables de flot	25
III.5.4	Femtoscopie	25
IV	Etude des coefficients de flot, les motivations de notre approche	27
IV.1	La physique des coefficients de flot	28
IV.1.1	Corrélations azimutales par rapport au plan de réaction	28
IV.1.2	Interprétation géométrique des coefficients de flot	29
IV.1.3	Physique des coefficients de flot	30

IV.1.4	Flot différentiel	31
IV.2	Résultats expérimentaux sur le flot elliptique	32
IV.3	Le modèle d'hydrodynamique idéale	32
IV.4	Aller au-delà du comportement de l'hydrodynamique idéale	33
IV.4.1	Hydrodynamique visqueuse	33
IV.4.2	Calculs de transport	34
IV.4.3	Approche envisagée dans ce travail	34
IV.5	Conclusion	34
B	Résolution numérique de l'équation de Boltzmann relativiste	41
V	Théories cinétiques classiques et relativistes	43
V.1	Image "classique" de particules non relativistes	43
V.2	Description du gaz, la fonction de distribution à une particule	44
V.3	Dynamique dans les théories cinétiques non relativistes	45
V.4	Equation de Boltzmann non relativiste	45
V.5	Généralisation au cas des particules relativistes	46
V.6	Physique de l'équation de Boltzmann	46
V.6.1	Solution de l'équation de Boltzmann et théorème H	46
V.6.2	Description d'une mixture à 2 espèces	47
V.7	Conclusion : Commentaires sur la validité de l'équation de Boltzmann	48
VI	Résolution numérique de l'équation de Boltzmann à $(2 + 1)$-dimensions	49
VI.1	Rappel des motivations	50
VI.2	Les paramètres du problème	50
VI.2.1	Enoncé du problème et système physique étudié	50
VI.2.2	Coefficient de dilution	51
VI.2.3	Le nombre de Knudsen	52
VI.3	Dynamique du système	52
VI.3.1	Propagation des particules	52
VI.3.2	Critère de collision	53
VI.3.3	Calcul des quadrivecteurs énergie-impulsion finaux	54
VI.4	Implémentation et structure du code	56
VI.5	Evaluation des erreurs	58
VI.6	Validation de la résolution numérique	59
VI.6.1	Test de la thermalisation d'un gaz en boîte	59
VI.6.2	Test du nombre de collisions simulées.	61
VII	Application à la physique des collisions d'ions lourds	63
VII.1	Modifications structurelles de l'algorithme	64
VII.1.1	Conditions initiales	64
VII.1.2	Modification de la structure du code	66
VII.2	Evaluation du degré de thermalisation du système	66

VII.3	Complexité numérique et régime hydrodynamique	67
VII.4	Limites d'application de notre approche	67
VII.4.1	Le problème de la dilution	68
VII.4.2	L'équation d'état du système	68
VII.4.3	Simulation à 2 dimensions	69
VII.5	Améliorations possibles de la résolution numérique	69
VII.5.1	Introduction de particules massives	69
VII.5.2	Extension à 3 + 1-dimensions	72
VII.6	Conclusion	73
 Article relié à la partie B		77
 C Thermalisation au RHIC		85
 VIII Modélisation des conditions initiales		87
VIII.1	Les modèles de conditions initiales	87
VIII.1.1	Le modèle de Glauber	88
VIII.1.2	Conditions initiales basées sur la théorie du condensat de verre de couleurs (CGC)	90
VIII.1.3	Conditions initiales du modèle de "Core-Corona"	91
VIII.2	Géométrie des collisions non centrales	92
VIII.2.1	Mesure de la centralité	92
VIII.2.2	Excentricité de la distribution initiale	93
 IX Effets de la thermalisation partielle sur le flot elliptique		97
IX.1	Flot elliptique dans la résolution numérique de l'équation de Boltzmann	98
IX.1.1	Rappels sur le flot elliptique	98
IX.1.2	Corrélations azimutales par rapport au plan de réaction	98
IX.1.3	Comportements limites du flot elliptique	99
IX.1.4	Etude de la convergence sur le régime hydrodynamique idéale	102
IX.2	Dépendance en centralité du flot elliptique	105
IX.2.1	Lien entre le nombre de Knudsen et des quantités expérimentalement accessibles	105
IX.2.2	Expliquer la dépendance en centralité du flot elliptique	106
IX.3	Limite de l'approche par le nombre de Knudsen "expérimental"	108
IX.3.1	Extraction du rapport η/s	108
IX.3.2	Commentaires sur notre approche	108
IX.4	Conclusion	109
 X Etude de la dépendance en centralité du coefficient de flot v_4		111
X.1	Première harmonique supérieure, le coefficient de flot v_4	112
X.1.1	Rappels sur le coefficient de flot v_4	112

X.1.2	Comportements limites de v_4	112
X.1.3	Mesure expérimentale du rapport $v_4/(v_2)^2$	114
X.2	Impact de la thermalisation partielle sur $v_4/(v_2)^2$	115
X.2.1	Etude qualitative de l'effet de la thermalisation partielle sur le rapport $v_4/(v_2)^2$	115
X.2.2	Dépendance avec l'impulsion transverse	115
X.2.3	Dépendance en centralité	116
X.3	Effets des fluctuations sur le rapport $v_4/(v_2)^2$	118
X.3.1	Fluctuation du flot par les différences d'analyse	118
X.3.2	Effet sur les coefficients de flot des fluctuations d'excentricité	119
X.4	Expliquer la dépendance en centralité du rapport $v_4/(v_2)^2$	120
X.4.1	Combinaisons des effets des fluctuations et de la thermalisation partielle	120
X.4.2	Modèle jouet des fluctuations gaussiennes 1-dimensionnelle pour le flot elliptique	120
X.4.3	Limites et discussion de nos résultats	121
X.5	Conclusion	123
XI	Corrélations quantiques	125
XI.1	Corrélations quantiques de particules identiques, les rayons HBT	126
XI.1.1	Principes des corrélations HBT	126
XI.1.2	Paramétrisation standard	127
XI.1.3	Paramétrisation dans la résolution numérique de l'équation de Boltzmann	128
XI.2	Etude des corrélations HBT pour les collisions centrales	129
XI.2.1	Dépendance des rayons avec l'impulsion transverse	129
XI.2.2	Dépendance avec le degré de thermalisation du système	131
XI.2.3	Effet de la thermalisation partielle sur le Puzzle HBT	132
XI.2.4	Limite de notre approche	133
XI.3	Etude de la dépendance azimutale des rayons HBT	134
XI.3.1	Dépendance azimutale des rayons HBT	135
XI.3.2	Dépendance des rayons azHBT avec le degré de thermalisation du système	135
XI.3.3	Evolution des rapports d'amplitude des oscillations et excentricité azHBT	137
XI.4	Conclusion	139
	Articles reliés à la partie C	145
	Conclusion	167
	Annexe	i
A	Equation de Boltzmann	iii
A.1	Dynamique de la fonction de distribution à une particule	iii

A.2	Généralisation au cas de particules relativistes	viii
A.3	Physique de l'équation de Boltzmann : Le coefficient de viscosité	x
B	Cinématique des collisions	xiii
B.1	Calcul du paramètre d'impact	xiii
B.2	Calcul des impulsions finales	xv
C	Test de la thermalisation	xix
C.1	Distribution de Maxwell-Boltzmann pour un gaz de particules de masse nulle .	xix
C.2	Courbe théorique pour le test de Kolmogorov	xx
D	Conditions initiales pour l'application aux collisions d'ions lourds	xxi
D.1	Distribution initiale de particules	xxi
D.2	Distribution en énergie	xxii
D.3	Tirage par la méthode d'acceptance-rejet	xxiv
E	Paramètres du modèle de Glauber	xxvii
F	Flot elliptique dans la résolution numérique de l'équation de Boltzmann	xxxix
F.1	Comportement dans la limite hydrodynamique	xxix
F.2	Calcul du nombre de collisions par particule et relation avec le nombre de Knudsen dans la limite du gaz faiblement interagissant	xxxii
F.3	Calcul du flot elliptique dans la limite du faible nombre d'interaction.	xxxv
G	Déviations au comportement hydrodynamique non visqueux, Modèle de Core-Corona versus Knudsen	xxxvii
G.1	Paramétrisation des déviations	xxxvii
G.2	Dépendance en centralité du flot elliptique dans le modèle de Core Corona . . .	xxxviii
G.3	Comparaison des 2 approches	xxxix
H	Mesure des coefficients de flot, importance des fluctuations et des effets de "non-flow"	xli
H.1	Les différentes techniques d'analyse pour la mesure de v_2 et v_4	xli
H.2	Applications aux données des collisions Au-Au au RHIC à $\sqrt{s} = 200\text{GeV}$. . .	xliv
H.3	Effets de "non-flow" dans les mesures de v_4 sur la dépendance en centralité de $v_4/(v_2)^2$	xlvi
H.4	Effets des fluctuations de flot sur le rapport $v_4\{EP\}/v_2\{EP\}^2$	xlvi
I	Corrélations quantiques et rayons HBT	xlix
I.1	Interférences quantiques et fonction de corrélation à 2 particules	xlix
I.2	Rayons HBT dans la résolution numérique de l'équation de Boltzmann à deux dimensions	l
I.3	Calcul des rayons HBT pour une collision non-centrale	lii
I.4	Evaluation des erreurs pour le calcul des rapports d'amplitude d'oscillations HBT	lv

Partie A

Introduction aux collisions d'ions lourds ultrarelativistes

Cette première partie est à vocation pédagogique. Elle a pour but d'introduire les concepts physiques nécessaires à la compréhension, par les non initiés, de la subtile physique du plasma de Quarks et de Gluons.

Je commencerai par introduire les briques élémentaires de la matière que sont les quarks et les gluons. Je présenterai alors la théorie de l'interaction forte (chromodynamique quantique [QCD]). Cette théorie quantique des champs régit les interactions entre quarks (qui se font par l'intermédiaire des gluons). Nous verrons qu'elle impose aux quarks d'être confinés^a sous forme de hadrons à basse énergie alors qu'elle prédit un comportement différent à haute température (et, ou densité). Cette différence de comportement nécessite l'existence d'une transition entre une phase confinée et une phase déconfinée.

La seconde partie sera dédiée à l'étude expérimentale du QGP. J'y présenterai les collisions d'ions lourds, avant d'introduire de façon succincte les différentes observables mesurables dans ces collisions. Je m'intéresserai de façon plus particulière aux observables dites "soft" car elles ont servi de base au travail présenté dans cette thèse.

^aAu sens où l'on ne peut observer de quark libre, ils sont toujours observés au moins par paires.

CHAPITRE I

Quarks et Gluons, des briques fondamentales de la matière

La question de l'existence de briques fondamentales constituant la matière s'est posée dès la Grèce antique. La théorie "atomiste", qui soutient que la matière est composée d'éléments insécables, ne prête aujourd'hui plus à controverse. Les atomes, tels que nous les définissons, ont été introduits au *XIX*^{ème} siècle, et leur nombre n'a cessé d'augmenter avec les progrès de la chimie. Mendeleïev classifia ainsi tous les éléments chimiques connus en 1869 en fonction de leurs propriétés chimiques.

Le premier modèle d'atome fut introduit par Thomson en 1897 après sa découverte de la première particule élémentaire : l'électron. Il considère alors l'atome comme une sphère pleine uniformément chargée positivement et fourrée d'électrons négatifs. Ce modèle, appelé "le pudding de Thomson" fut rapidement abandonné à la suite de la découverte du noyau atomique par Rutherford en 1911. Le nombre de particules élémentaires n'a, depuis, cessé de croître. Les quarks, d'abord prédits par Gell-Mann en 1964, ont été observés pour la première fois en 1969. Plus exactement, les expériences de diffusion profondément inélastique ont mis en évidence une sous-structure du proton alors considéré comme une particule élémentaire. Le modèle standard de la physique des particules compte 6 quarks (table I) qui sont considérés comme les briques élémentaires de la matière nucléaire.

u $m_u = 1.5 \text{ à } 3.3 \text{ MeV}$ $q_e = +2/3$	c $m_c = 1.27^{+0.07}_{-0.11} \text{ GeV}$ $q_e = +2/3$	t $m_t = 171.2 \pm 2.1 \text{ GeV}$ $q_e = +2/3$
d $m_d = 3.5 \text{ à } 6 \text{ MeV}$ $q_e = -1/3$	s $m_s = 104^{+26}_{-34} \text{ MeV}$ $q_e = -1/3$	b $m_b = 4.2^{+0.17}_{-0.07} \text{ GeV}$ $q_e = -1/3$

TAB. I.1 – Tableau présentant les 6 quarks, particules élémentaires de la matière nucléaire. Chaque colonne correspond à une génération, m_i indique la masse du quark (elle fait encore débat pour les quarks u et d) et q_e la charge électrique. Extrait de [1]

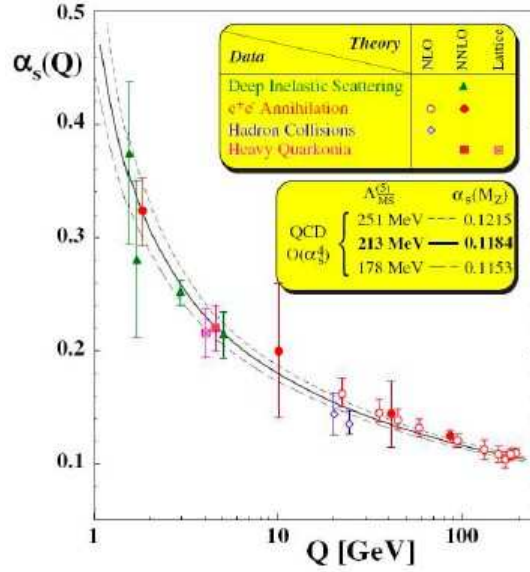


FIG. I.1 – Dépendance en énergie de la constante de couplage forte, figure extraite de [2]

Les quarks possèdent une particularité qui les distingue de toutes les autres particules élémentaires. Ils sont toujours observés en groupes. La théorie de l'interaction forte, appelée chromo-dynamique quantique (QCD) fut introduite en 1973. Elle explique ce comportement de la façon suivante. Les quarks interagissent entre eux par une interaction forte dont les médiateurs, appelés gluons, les forcent à s'apparier (du moins à température ambiante, nous verrons qu'à haute température le comportement est différent). En pratique, si on essaye d'écarter les deux quarks d'une paire l'un de l'autre, il se forme, entre eux, une "corde" de gluons qui tend à les rapprocher. L'écart grandissant, cette corde finit par se rompre en donnant naissance à une autre paire de quarks. Ce comportement peut être vu comme analogue à l'impossibilité d'observer un monopole magnétique. Si l'on coupe un aimant, on obtiendra deux aimants dipolaires plutôt que les deux pôles de l'aimant séparément.

La QCD est une théorie quantique des champs dans laquelle la force des interactions est déterminée par une quantité appelée constante de couplage (noté α_s) qui dépend de l'énergie (figure I). La dépendance est obtenue par un calcul de renormalisation perturbative au premier ordre :

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{1}{\beta_0 \ln(Q^2/\Lambda_{QCD}^2)} \quad (I.1)$$

où β_0 est une constante et Λ_{QCD} un paramètre ajusté sur les données expérimentales.

A l'inverse d'autres théories fondamentales comme l'électromagnétisme ou la gravitation, cette constante voit sa valeur évoluer comme l'inverse de l'énergie. Un quark (respectivement un gluon) sera donc d'autant plus fortement lié qu'il possède une faible énergie (ou qu'il se trouve éloigné de son partenaire d'interaction). Le couplage entre quarks devient donc faible à haute énergie (ou à très petite distance), on appelle cet effet "la liberté asymptotique".

Le but des collisions d'ions lourds ultrarelativistes apparaît alors clairement. En créant dans

un laboratoire un système de quarks et de gluons, à haute énergie dans un très petit volume, nous voulons étudier la matière nucléaire dans son régime asymptotiquement libre. On parle alors d'un système en phase plasma.

CHAPITRE II

Différents états de la matière nucléaire

Sommaire

II.1	Grandeurs thermodynamiques	13
II.2	Degrés de liberté du système, mise en évidence de la transition de phase	13
II.3	Potentiel interquark	14
II.4	Transition chirale et déconfinement	15
II.5	Diagramme de phase de la matière nucléaire	16
II.6	Ordre de la transition	17

Dans cette section, je présenterai les bases théoriques nécessaires pour décrire le changement d'état entre la matière hadronique (où les quarks sont confinés sous forme de hadrons) et le plasma (où ils sont considérés comme des particules libres).

II.1 Grandeurs thermodynamiques

Dans le cadre de l'interaction forte, la transition entre les phases confinées et déconfinées peut être décrite au moyen de 2 quantités thermodynamiques indépendantes :

- La température T , qui donne un ordre de grandeur de l'énergie des particules du système
- Le potentiel chimique baryonique μ_B qui caractérise la teneur en baryons de la matière créée.

Ces 2 quantités, si elles sont connues, permettent alors de déterminer toutes les informations thermodynamiques du système (densité d'entropie et d'énergie, pression, etc...).

II.2 Degrés de liberté du système, mise en évidence de la transition de phase

La chromodynamique quantique a considérablement modifié notre façon de penser la matière hadronique. Le fait que cette théorie de jauge soit asymptotiquement libre conduit à

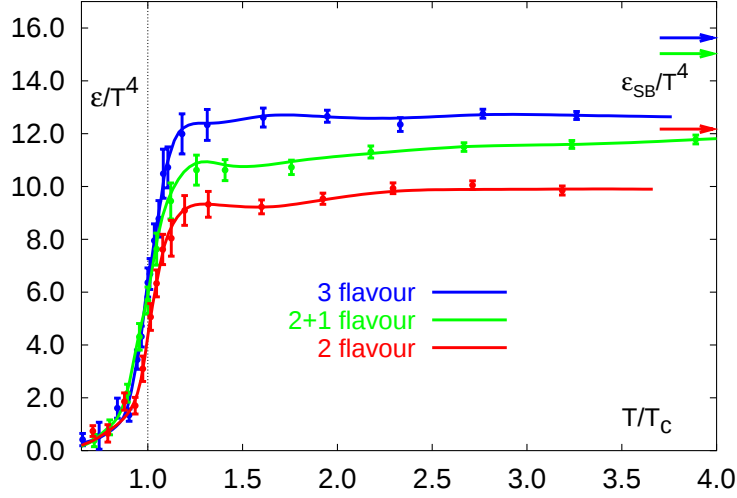


FIG. II.1 – Rapport de la densité d'énergie sur la température à la puissance 4 calculé sur le réseau pour différents nombres de quarks. ε_{SB} désigne la densité d'énergie de Stefan-Boltzmann. Figure extraite de [4].

postuler l'existence d'une transition entre différents états de la matière nucléaire. Ce postulat peut se faire sur la base d'un comptage des degrés de liberté disponibles dans le système. Par simplicité, on se placera à potentiel chimique baryonique nul ($\mu_B = 0$). Dans la phase basse température, le système est donc composé de paires de mésons-antimésons de spin nul. Un tel système décrit un gaz de pions soit 3 degrés de liberté ($\pi^\pm$ et π^0). À l'inverse, dans la phase haute température, le système est composé de quarks de spin 1/2 et de gluons de spin 1 libres. Dans le cas simple où l'on ne considère que les quarks légers (u , d) le système possède alors $[2(\text{savoir}) \times 2(\text{spin}) \times 3(\text{couleur})] \times 2(\text{matière} + \text{antimatière}) = 24$ degrés de liberté pour les quarks et $8(\text{couleur}) \times 2(\text{hélicité} = \text{spin}) = 16$ degrés de liberté pour les gluons. Au total la phase haute température possède donc 40 degrés de liberté.

Il est possible d'évaluer la température de cette transition en considérant la température maximale d'existence de la matière hadronique. Pomeranchuk [3] a mis en évidence que la fonction de partition grand canonique d'un gaz de hadron divergeait pour une température $T_c = 1/r_h \propto 200 \text{ MeV}$ où r_h est le rayon moyen des hadrons soit $r_h \simeq 1 \text{ fm}$.

Ce résultat a été partiellement confirmé par les calculs en QCD sur le réseau de la densité d'énergie et de la pression du système. Ces calculs montrent une évolution rapide des grandeurs thermodynamiques (pression et densité d'énergie) au voisinage de la température de transition T_c comme indiqué sur la figure II.1.

II.3 Potentiel interquark

Une paramétrisation possible du potentiel d'interaction inter-quark est celle de Lüscher [5] :

$$V(r, T) = -\frac{\alpha_s}{r} + \sigma(T)r. \quad (\text{II.1})$$

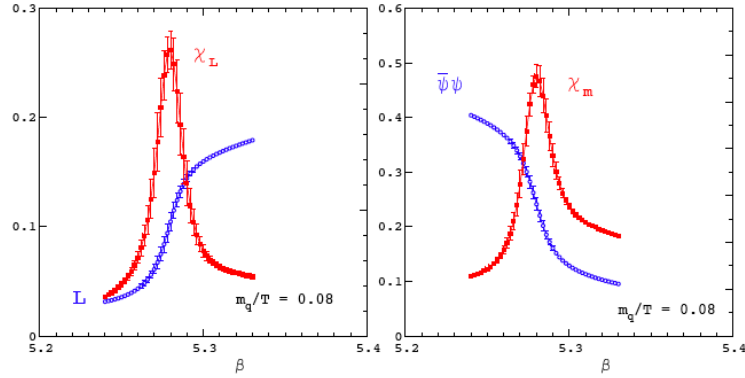


FIG. II.2 – Résultats de QCD sur le réseau montrant la boucle de Polyakov et le condensat chiral ainsi que leurs susceptibilités en fonction du couplage $\beta = 6/(4\pi\alpha_s)^2$. Figure extraite de [4].

Le premier terme est un terme de répulsion de Coulomb dû à l'interaction entre charges de couleur, alors que le second correspond au confinement ; $\sigma(T)$ dénote la tension de la “corde de gluon”. Cette dernière décroît avec la température [6]. Dans la phase déconfinée, les calculs sur le réseau mettent en évidence un écrantage de couleur. Le potentiel inter-quark prend alors la forme d'un potentiel de Yukawa :

$$V(r, T) = -\frac{\alpha_s}{r} e^{-m_D(T)r} \quad (\text{II.2})$$

où $m_D(T) = 4\pi\alpha_s T \sqrt{N_c/3 + N_f/6}$ (N_c nombre de couleurs, et N_f nombre de quarks différents considérés dans le modèle) est la masse de Debye thermique [7].

II.4 Transition chirale et déconfinement

Le lagrangien de la QCD, dans son secteur de masse nulle, possède une symétrie dite “chirale” entre les particules d'hélicité (projection du moment cinétique sur la direction de l'impulsion) droite et gauche. Cette symétrie est spontanément brisée à basse température par la présence d'un terme de masse dans le lagrangien, mais on s'attend à ce que, dans la phase de haute température, elle soit restaurée.

Le paramètre d'ordre de cette transition est le condensat chiral :

$$\langle \psi \bar{\psi} \rangle \begin{cases} > 0 & \text{pour } T < T_\chi \\ = 0 & \text{pour } T > T_\chi \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

où T_χ est la température de transition de phase chirale.

Rien n'indique que cette transition ait lieu à la même température que la transition de déconfinement (T_c). Celle-ci est calculée en chromodynamique quantique sur le réseau via la boucle de Polyakov définie par :

$$\langle |L| \rangle = \lim_{r \rightarrow \infty} \exp \left(-\frac{V(r, T)}{T} \right) \quad \begin{cases} = 0 & \text{pour } T < T_c \\ > 0 & \text{pour } T > T_c \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

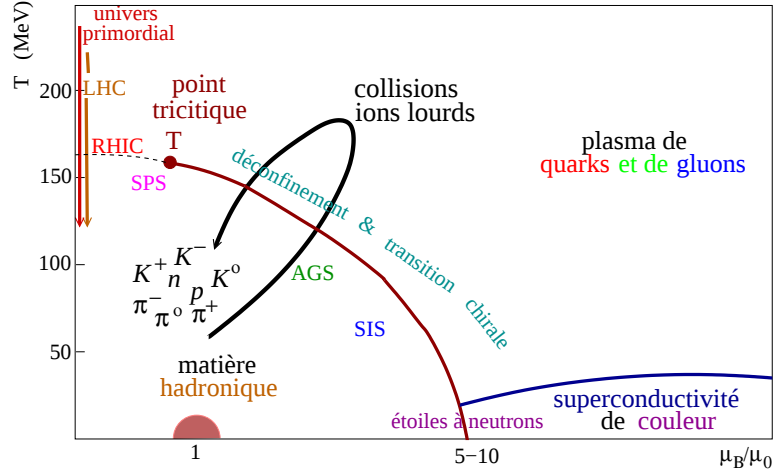


FIG. II.3 – Schéma du diagramme (température T , potentiel chimique baryonique μ_B) des différentes phases de la matière nucléaire d'après [4]

$V(r, T)$ dénote le potentiel de confinement ($V(r, T > T_c) = 0$). La figure II.2 montre la boucle de Polyakov et le condensat chiral ainsi que les susceptibilités correspondantes. Il est remarquable que ces 2 transitions se produisent approximativement à la même température.

II.5 Diagramme de phase de la matière nucléaire

Les grandeurs thermodynamiques T et μ_B étant indépendantes, on peut décrire les différents états de la matière nucléaire dans un diagramme (T, μ_B) appelé diagramme de phase.

La figure II.3 indique l'état de nos connaissances du diagramme de phase de la matière nucléaire. On y distingue la phase hadronique, à basse température et potentiel chimique ; la phase plasma à haute température, ainsi qu'une phase supplémentaire dites de supraconductivité de couleur. On postule l'existence de matière nucléaire sous cette forme dans certaines étoiles à neutrons [8], en effet dans ces structures stellaires compactes, la densité devient telle que les nucléons fusionnent, et perdent leur identité hadronique. Il se forme alors un plasma de quarks et de gluons ayant les propriétés de supraconductivité de couleur.

Dans la zone de bas potentiel chimique, une flèche indique la transition qui a eu lieu quelques millisecondes après le Big Bang. Les quarks et gluons colorés formés lors du BB subissent la transition de confinement lorsque la température tombe en dessous de $T \simeq 200 \text{ MeV}$. Cela se traduit par l'appariement des quarks sous forme de hadrons de charge de couleur nulle.

Les collisions d'ions lourds permettent d'explorer la partie du diagramme de phase à T et μ_B finis. Avec les expériences du Relativistic Heavy Ion Collider de Brookhaven, USA (RHIC), nous pensons aujourd'hui avoir créé la phase déconfinée, mais la transition en elle même est encore mal comprise.

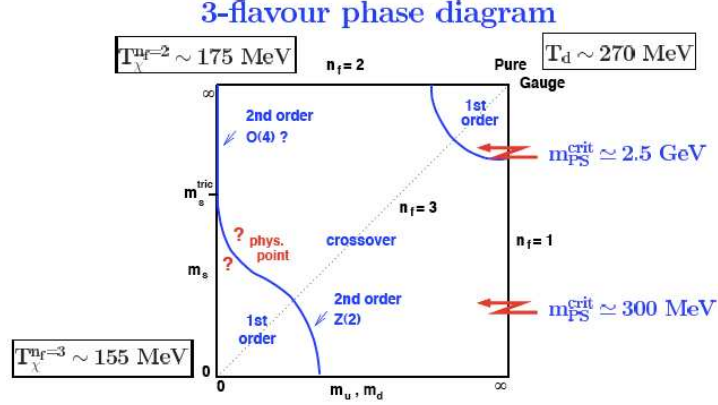


FIG. II.4 – Calculs en QCD sur le réseau de l’ordre de la transition pour une théorie à 3 saveurs, où les quarks u et d sont dégénérés. La masse m_s^{tric} désigne la masse du quark s au point tricritique et m_{PS}^{crit} celle du meson pseudo-scalaire au point critique de la transition chirale [4].

II.6 Ordre de la transition

Si la transition est mal connue, il existe des moyens théoriques de l’étudier dans des cas particuliers. Les calculs de QCD sur le réseau, faits à potentiel chimique nul, permettent d’obtenir certaines informations sur l’ordre de la transition. La figure II.4 donne l’état des lieux le plus abouti en ce domaine. Elle correspond aux calculs sur réseau pour $(2+1)$ quarks. Les axes représentent les masses du doublet de quark $\{u,d\}$ (avec $m_u = m_d$) et du quark s . On distingue 3 zones, en fonction des masses des quarks, avec des transitions du premier, du second ordre ou une transition continue dite “de crossover”. Pour les transitions du 2D ordre, la classe d’universalité supposée (ensemble de comportement des paramètres d’ordre au voisinage du point critique) est indiquée également.

Des calculs plus récents réalisés à potentiel chimique non nul ont montré l’existence d’un point critique (“end-point”) [9] autour de $T_E = 160 \pm 35 \text{ MeV}$, $\mu_E = 725 \pm 35 \text{ MeV}$ qui sépare une ligne de transition du premier ordre (à $\mu_B > \mu_E$, $T < T_E$) et une transition de crossover (à $\mu_B < \mu_E$) comme indiqué sur la figure II.3. L’extrapolation de ces résultats aux conditions obtenues dans les collisions d’ions lourds montrent qu’au RHIC ou dans un avenir proche au Large Hadron Collider du CERN (LHC), la transition doit se faire de façon continue.

CHAPITRE III

Observables dans les collisions d'ions lourds

Sommaire

III.1	Motivation des collisions d'ions lourds et principales réalisations expérimentales	19
III.2	Observables globales	20
III.2.1	Géométrie des collisions non centrales	20
III.2.2	Mesure de la centralité d'une collision	21
III.2.3	Direction du paramètre d'impact	21
III.3	Observables “dures”	22
III.3.1	Le “jet-quenching”	22
III.3.2	Les photons directs	22
III.4	Observables électromagnétiques	22
III.4.1	Les photons thermiques	22
III.4.2	Spectre de masse des dileptons	23
III.5	Observables “soft”	23
III.5.1	Equilibre thermique et augmentation de l'étrangeté	23
III.5.2	Les spectres en p_t	24
III.5.3	Observables de flot	25
III.5.4	Femtoscopie	25

III.1 Motivation des collisions d'ions lourds et principales réalisations expérimentales

Dans le chapitre précédent, j'ai expliqué comment la propriété de liberté asymptotique que possède la QCD impose l'existence d'une phase déconfinée, de la matière nucléaire, accessible expérimentalement à haute température et/ou densité. Le principe des collisions d'ions lourds est, en partant d'une valeur de potentiel chimique $\mu_B \simeq 1\text{GeV}$ et sous l'hypothèse que le système créé est à l'équilibre chimique et thermique, d'explorer des zones du diagramme de phase à (T, μ_B) non nuls.

En variant l'énergie et la taille des noyaux (en changeant d'espèce chimique), les zones du diagramme de phase accessibles changent : par exemple, plus on augmente l'énergie, plus les noyaux deviennent transparents, et moins la zone de rapidité centrale de la collision contient de baryons. On a donc accès à une zone de plus faible potentiel chimique. Après la collision, à la fois μ_B et T diminuent. Le potentiel chimique diminue car la collision crée un grand nombre de mésons. Il y a donc un effet de dilution. La température diminue car le système créé subit une détente isentropique dans le vide.

Alors que les premières collisions d'ions lourds réalisées au CERN (Centre Européen de Recherche Nucléaire) sur le SPS (Super Proton Synchrotron), utilisaient des noyaux d'oxygène à 200 GeV dans le référentiel du laboratoire (1986-1987), on pourra dans un avenir proche (novembre 2010) réaliser des collisions de noyaux de plomb (Pb) jusqu'à $\sqrt{s} = 5.5$ TeV par nucléon au LHC (Large Hadron Collider) du CERN. Entre ces deux extrêmes, 25 années d'évolution ont donné lieu à la découverte d'un grand nombre de résultats parfois surprenants.

Tous les projets n'ont pas pour vocation de chercher à réaliser des collisions à toujours plus haute énergie, ou en utilisant de toujours plus gros noyaux. Nous cherchons également à étudier le point critique de QCD^a. En particulier, les futures expériences de FAIR (Facility for Antiprotons and Ions Research, Darmstadt, Allemagne) ainsi que le futur programme du RHIC auront pour but de réaliser des collisions à différentes énergies afin de localiser expérimentalement le point critique.

La difficulté dans les collisions d'ions lourds consiste à trouver des observables indiquant, sans doute possible, que l'on a bien atteint la phase déconfinée. En effet, le système créé à l'instant de la collision n'est pas expérimentalement accessible, nous n'avons accès qu'aux produits de la collisions (l'ensemble des particules créées soit lors de la collision, soit par la désintégration de particules mères). Dans la section suivante, je présenterai les différentes observables auxquelles nous avons accès. Elles sont classées en 4 catégories : les observables globales, qui permettent de classer les collisions, les observables dures ("hard") dont la physique relève du domaine perturbatif (faiblement couplé) de QCD et les observables de basse énergie ("soft") qui se décomposent en 2 parties, les observables électromagnétiques résultant de la désintégration de particules, et les effets collectifs. Ces derniers jouant un rôle central dans le reste de ma thèse, ils feront l'objet d'une section spécifique.

III.2 Observables globales

III.2.1 Géométrie des collisions non centrales

L'une des caractéristiques principale des collisions d'ions lourds par rapport aux collisions nucléon-nucléon est l'existence d'une géométrie particulière pour les collisions non centrales.

La figure III.1 schématise une collision non centrale. Les noyaux P (projectile) et C (cible) subissent la contraction de Lorentz et ont, de ce fait, une forme allongée. Ils collisionnent avec une géométrie caractérisée, dans le plan transverse (plan x,y), par un vecteur $\mathbf{b}$ appelé paramètre d'impact. La direction de ce vecteur et la direction des faisceaux de particules ($\mathbf{z}$) définissent le

^aPoint critique dont l'existence a été postulée sur la base des résultats de QCD sur le réseau

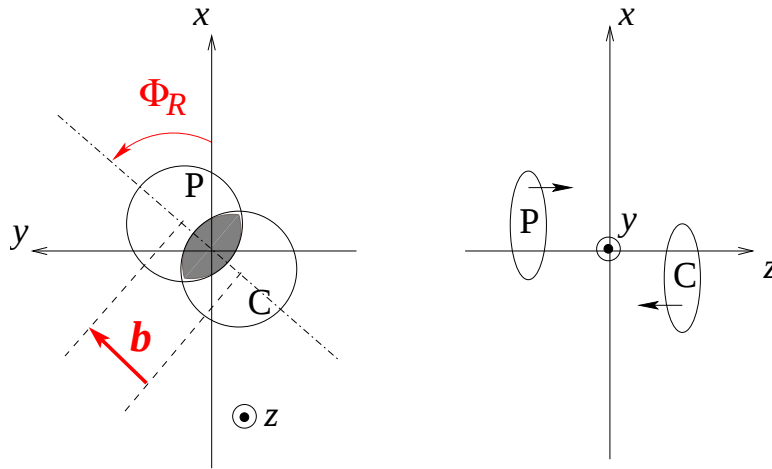


FIG. III.1 – Représentation schématique de la géométrie d’une collision non centrale.

plan de réaction sur lequel on reviendra plus tard.

Les observables diffèrent suivant qu’il s’agit d’une collision “centrale” (à paramètre d’impact nul) ou “périphérique” (norme du paramètre d’impact approche le rayon des noyaux).

Ainsi pour étudier ces collisions, il est nécessaire de classer les événements pour sélectionner ceux qui possèdent une géométrie similaire.

III.2.2 Mesure de la centralité d’une collision

La première étude possible consiste à classer les collisions en fonction de leur géométrie. On parle alors de détermination de la centralité des collisions. Expérimentalement, la centralité peut être évaluée de différentes façons :

- **Par la mesure de la multiplicité de la collision** : Plus les collisions sont centrales, plus le nombre de nucléons des noyaux qui interagissent est important. Cela se traduit par une augmentation du nombre de particules produites. Ainsi, plus une collision est centrale, plus sa multiplicité est grande.
- **Par la mesure des nucléons spectateurs** : Lors de la collision, seuls les nucléons des noyaux qui se trouvent géométriquement dans la zone de recouvrement interagissent. Les autres continuent leurs trajectoires avec le faisceau de particules. La présence de forts champs magnétiques entraîne la déviation des protons chargés, mais les neutrons peuvent être détectés dans un calorimètre hadronique appelé ZdC (Zero degree Calorimeter).
- **Par la mesure de l’énergie transverse totale** : $E_T = \sum E_i \sin \theta_i$ où la somme est faite sur les particules produites, et θ est l’angle d’émission par rapport à la direction des faisceaux. Comme pour la multiplicité, les collisions centrales, plus violentes, correspondent à une énergie transverse plus élevée.

III.2.3 Direction du paramètre d’impact

S’il est relativement aisé de déterminer la centralité d’une collision, il n’est pas possible de

déterminer Φ_R et donc le plan de réaction, or le flot étudie la distribution des particules produites par rapport à Φ_R dans le plan transverse. Elle met en évidence la présence d'effets collectifs. Cette indétermination interdit toute mesure directe des coefficients de flot. Nous verrons que l'évaluation de ces coefficients doit donc prendre en compte une correction pour la résolution de la direction de Φ_R .

III.3 Observables “dures”

On appelle observables dures (hard), les observables relatives à des processus de QCD perturbative. L'échelle caractéristique de tels processus est inférieure à Λ_{QCD}^{-1} . Leur étude apporte donc des informations cruciales sur les premiers instants de la collision.

III.3.1 Le “jet-quenching”

Les jets sont des ensembles de particules de très grande impulsion transverse (p_t : projection de l'impulsion des particules sur le plan transverse de la collision) créées lors des premiers instants de la collision par des processus de QCD perturbative. De telles particules, lorsqu'elles traversent le plasma, perdent une grande part de leur énergie sous forme de radiation. C'est cet effet que l'on appelle “jet quenching”. Expérimentalement, il se traduit par une diminution du nombre de particules de grand p_t . Cet effet est donc observé en comparant les spectres de particules à haut p_t dans les collisions d'ions lourds et dans les collisions proton-proton. Une autre méthode d'étude des jets consiste à travailler sur les corrélations γ -jet. Les processus de ce type sont rares mais la matière nucléaire étant transparente aux photons, ils peuvent attester de la création, dans une certaine direction, d'un jet d'énergie donnée. C'est un sujet très riche, et je renvoie le lecteur intéressé aux références [10, 11, 12, 13, 14].

III.3.2 Les photons directs

On parle de photons directs pour les photons de grand p_t ($p_t > 4\text{GeV}/c$) [15]. De tels photons sont issus de processus de QCD perturbative et ont été vus au RHIC. Identiques aux photons des corrélations γ -jet, le milieu leur est transparent. Ils peuvent donc servir de référence pour tester la compatibilité des mesures expérimentales avec les calculs de QCD perturbative [16].

III.4 Observables électromagnétiques

III.4.1 Les photons thermiques

Dans les tous premiers instants de la collision, des interactions quark-antiquark ont lieu. Bien que le rapport de branchements du processus $\{q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma\}$ soit faible (il relève de l'interaction électromagnétique dont l'intensité est faible), aux échelles d'énergie mises en jeu, de tels processus ne sont pas négligeables. Ils constituent une observable importante car leur faible section efficace d'interaction avec la matière nucléaire fait que celle-ci leur est transparente. Ils sont donc porteurs d'informations sur les premiers instants de la collision [17]. Malheureusement, leur mesure expérimentale s'avère complexe. En effet, pendant l'évolution, un grand nombre de

particules de faible temps de vie sont créées et se désintègrent, donnant ainsi naissance à un grand nombre de photons secondaires. Il devient alors très difficile de différencier les photons thermiques du bruit des photons de désintégration.

III.4.2 Spectre de masse des dileptons

Les mesons vecteurs (ρ , ω et ϕ) sont sensibles à la matière nucléaire environnante. Etant donné leur faible durée de vie, leur détection se fait au travers de leur désintégration en dileptons. Dans les collisions nucléon-noyau, le spectre de masse de dileptons reconstruit est bien expliqué par les calculs de désintégrations de mésons vecteurs. Il n'en est pas de même pour les collisions noyau-noyau dans lesquelles on observe un excès de dileptons de faible masse (augmentation d'un facteur $2.6 \pm 0.5(\text{stat}) \pm 0.6(\text{syst})$) [18, 19, 20, 21].

La restauration de la symétrie chirale pourrait expliquer cet effet. Elle se traduit à la fois par une diminution de la masse du ρ ainsi que par une augmentation de son temps de vie. La combinaison de ces 2 effets pourrait expliquer l'excès observé. Néanmoins, des processus de diffusion multiple seraient aussi à même de constituer une explication plausible à cet excès [22].

L'étude du spectre de dileptons révèle également la présence de 2 résonances de haute masse. Ce sont des signatures des quarkonia J/ψ (paire $c\bar{c}$) et Υ (paire $b\bar{b}$). L'étude de ces résonances est fondamentale, car leur masse étant grande, leur temps de vie est plus long que celui des résonances de basse masse, et elles sont donc très sensibles aux propriétés de la matière nucléaire formée dans la collision. Le phénomène physique est le suivant : le potentiel d'interaction de couleur est écranté en phase plasma [23], cet effet d'écran rend instable les états liés $q\bar{q}$ au-delà d'une certaine température qui dépend de la masse du quark en question. L'appariement de paires de quarks identiques en quarkonia n'est alors plus énergétiquement favorisé. On s'attend donc à une diminution de leur population.

Pour le quark c , cette température est légèrement supérieure à la température de transition vers la phase plasma. La suppression du J/ψ est donc une signature du passage par une phase déconfinée de la matière. Mais en pratique, les résultats du SPS et du RHIC ont montré une suppression plus importante dite "anormale", qui reste encore aujourd'hui inconnue. Nous n'en dirons pas plus dans cette thèse et renvoyons le lecteur aux références [24, 25, 26, 27, 28].

III.5 Observables "soft"

Cette dernière catégorie d'observables concerne l'essentiel des particules (les particules qui ont une énergie $E \simeq T$). Elles reflètent essentiellement la physique au moment de l'hadronisation, mais la phase chaude (des premiers instants) peut les influencer de façon indirecte.

III.5.1 Equilibre thermique et augmentation de l'étrangeté

Dans le diagramme de phase, le problème est de savoir quelle température et quel potentiel chimique reporter. Il faut en fait distinguer deux sortes d'équilibres : l'équilibre chimique qui se produit à une température $T_{\chi es}$ et fixe les abondances des particules, et donc les potentiels chimiques ($\mu_{\chi eq}$), et un équilibre thermique qui fixe la température, T_{fo} , du "freeze-out", instant du gel des interactions dans le système.

Dans les collisions d'ions lourds, les modèles thermiques [29] permettent d'expliquer l'essentiel des rapports d'abondances de particules. Ces modèles fournissent une température et un potentiel chimique d'équilibre ($T_{\chi eq}, \mu_{\chi eq}$). Ils tendent à montrer que l'équilibre chimique est atteint relativement tôt. La question qui se pose alors est de savoir si cet équilibre est atteint dans la phase déconfinée ou dans la phase hadronique.

Une possible réponse se trouve dans l'étude du nombre de particules étranges. Une augmentation de l'étrangeté a été observée dans les collisions d'ions lourds, par rapport aux collisions nucléon-nucléon ou nucléon-noyau. Cette augmentation (d'un facteur 2 pour les kaons, et augmentant avec le nombre de quarks (anti-)étranges) s'explique de la façon suivante.

Si l'on considère une matière hadronique composée de quarks (u, d) en phase déconfinée à une température supérieure à la masse du quark s , $m_s = 150\text{MeV}$ il devient possible de produire des paires $s\bar{s}$ par fusion de gluons [30, 31, 32].

La section efficace de production de particules étranges en phase hadronique est faible, par ailleurs le temps nécessaire pour atteindre l'équilibre chimique dans un gaz de hadrons est long devant la durée d'une collision ($\simeq 10\text{fm}/c$). D'un autre côté, si l'équilibre chimique est atteint dans la phase plasma, la production de quarks étranges est possible ($\mu_u = \mu_d = \mu_s$). Cette production est même favorisée lorsque l'énergie de Fermi devient supérieure à m_s . Il est alors énergétiquement plus favorable de produire des paires $s\bar{s}$ (l'étrangeté doit être conservée) que $u\bar{u}$ et $d\bar{d}$ [33]. On pense donc que les quarks étranges sont présents aux tous premiers instants de la collision, et que leur nombre est une signature du passage par une phase de plasma de quarks et de gluons [34].

III.5.2 Les spectres en p_t

Les modèles thermiques précédents n'étudient que l'équilibre chimique de la matière créée lors de la collision. L'équilibre thermique se produit avec le gel des interactions, à l'instant que l'on appelle "freeze-out", et au-delà duquel le système n'évolue plus. Les particules créées se propagent alors librement jusqu'à une possible détection.

La température T_{fo} correspondante est donnée par un ajustement des distributions de particules en p_t avec la paramétrisation [35] :

$$\frac{1}{p_t} \frac{dN}{dp_t} \propto e^{-m_t/T_{fo}} \quad (\text{III.1})$$

où $m_t = \sqrt{m^2 + p_t^2}$ est la masse transverse, et T_{fo} est appelé "inverse-slope parameter".

D'après ces modèles, l'équilibre chimique est réalisé avant l'équilibre thermique à $T_{\chi eq} = 165 \pm 5\text{MeV}$ [36] alors que $T_{fo} = 120 \pm 12\text{MeV}$ [37]. On distingue donc deux "freeze-out" : l'un chimique qui fixe les multiplicités des particules (et marque là, l'arrêt des processus durs), et l'autre thermique, qui fixe la distribution en énergie (arrêt des processus élastiques).

Il est nécessaire néanmoins, avant même de parler de thermodynamique et de diagramme de phase, de se poser la question de la thermalisation du système créé dans les collisions. Je reviendrai bien plus longuement sur ce problème dans les chapitres suivants, car il s'agit du thème directeur de ma thèse.

III.5.3 Observables de flot

Les observables de flot sont à l'origine d'un des principaux résultats du RHIC, et concernent les corrélations de la distribution de particules détectées par rapport au plan de réaction de la collision (Φ_R). Les interactions parton-parton dans la zone d'interaction ont lieu à une échelle caractéristique bien inférieure à la taille du noyau, et produisent une distribution isotrope de particules. Or, l'un des principaux résultats expérimentaux des collisions non centrales a été la mesure d'un plus grand nombre de particules dans le plan de la réaction qu'en dehors. C'est cet effet que l'on appelle flot. Physiquement cet effet s'interprète de la façon suivante, les collisions nucléon-nucléon créent, dans la zone d'interaction, des particules qui interagissent. La distribution initiale de ces particules étant anisotrope (elle a pour origine la distribution de nucléons participants), les interactions entre particules produites se traduisent alors par l'apparition d'un gradient de pression à l'origine du flot.

En pratique le flot est caractérisé par des coefficients (notés v_i , $i \in \mathbb{N}^*$) appelés coefficients de flot. Dans la section IV.1, je présenterai plus en détail la physique de ces coefficients, mais pour une étude détaillée, je renvoie le lecteur aux chapitres IX et X.

Le flot est donc une signature de l'existence d'effets collectifs (résultat d'interactions entre particules) dans la matière créée lors de la collision. De ce fait, l'observation du flot est une source d'information, majeure, dans l'étude de la thermalisation du système.

III.5.4 Femtoscopie

Les dernières observables que je présente dans cette section sont appelées les rayons HBT pour Hanbury-Brown et Twiss [38]. Hanbury-Brown et Twiss furent les premiers à utiliser une technique d'interférométrie en intensité pour étudier des étoiles en astrophysique. Le principe est le suivant :

Mathématiquement, on peut relier par transformée de Fourier la fonction de corrélation à 2 particules identiques à la fonction de densité de la source qui les a émises. Cela signifie que nous sommes capables, en étudiant les corrélations de particules identiques, d'accéder, d'une certaine manière, à la taille de la source émettrice^b. Dans les collisions d'ions lourds, sachant que la majorité des particules émises sont des pions, cette technique s'avère très utile pour étudier la distribution spatio-temporelle de particules au "freeze-out" [40]. Pour plus de détails, je reporte le lecteur au chapitre XI entièrement consacré à l'étude des rayons HBT.

^bOn accède aux dimensions caractéristiques des zones d'homogénéité [39] de la source.

CHAPITRE IV

Etude des coefficients de flot, les motivations de notre approche

Sommaire

IV.1	La physique des coefficients de flot	28
IV.1.1	Corrélations azimutales par rapport au plan de réaction	28
IV.1.2	Interprétation géométrique des coefficients de flot	29
IV.1.3	Physique des coefficients de flot	30
IV.1.4	Flot différentiel	31
IV.2	Résultats expérimentaux sur le flot elliptique	32
IV.3	Le modèle d'hydrodynamique idéale	32
IV.4	Aller au-delà du comportement de l'hydrodynamique idéale . . .	33
IV.4.1	Hydrodynamique visqueuse	33
IV.4.2	Calculs de transport	34
IV.4.3	Approche envisagée dans ce travail	34
IV.5	Conclusion	34

Maintenant que sont posées les bases de la physique des ions lourds, je vais m'intéresser aux motivations qui ont conduit à réaliser ce travail de thèse.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante : dans une première partie, je présenterai plus en détail la physique des coefficients de flot. Je présenterai alors les résultats expérimentaux du RHIC connus à l'époque, et le modèle phénoménologique alors usuel, l'hydrodynamique idéale. Nous verrons qu'il était nécessaire d'améliorer notre description de la physique des collisions d'ions lourds. Cette discussion me conduira à présenter les deux approches possibles, l'hydrodynamique visqueuse et les équations de transport.

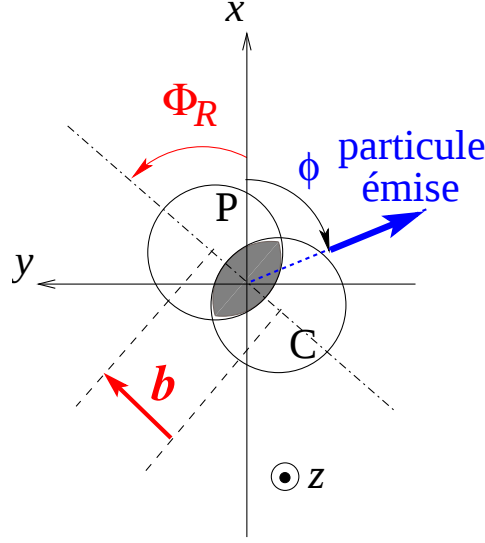


FIG. IV.1 – Géométrie d'une collision non centrale vue dans le plan transverse de la collision.

IV.1 La physique des coefficients de flot

IV.1.1 Corrélations azimutales par rapport au plan de réaction

Nous avons vu que la collision de deux ions lourds, lorsqu'elle est non centrale, est caractérisée par une certaine géométrie (figure IV.1). En particulier elle est définie, dans le plan transverse de la collision, par un paramètre d'impact $\mathbf{b}$ qui donne l'orientation du plan de réaction (Φ_R). Comme précédemment indiqué, ce dernier n'est pas accessible expérimentalement, ce qui constitue la principale difficulté dans l'étude du flot.

Considérons un certain type de particule, des pions puisqu'ils sont les particules les plus abondantes (mais le raisonnement est aussi vrai pour des kaons, protons, etc...). Chacune de ces particules est caractérisée par son énergie E , son impulsion transverse p_t , sa rapidité y et l'angle azimutal ϕ indiquant sa direction d'émission. En considérant un grand nombre de particules de ce type, et en moyennant sur un grand nombre d'événements, on peut définir une distribution différentielle de particules par rapport au plan de réaction :

$$\frac{d^3 N}{d^3 \mathbf{p}} = \frac{d^3 N}{p_t dp_t dy d(\phi - \Phi_R)} \quad (\text{IV.1})$$

Comme je l'ai indiqué dans le chapitre précédent, les effets collectifs font que, pour une collision non centrale, une telle distribution est anisotrope. On la caractérise donc et la développant en série de Fourier :

$$\frac{d^3 N}{p_t dp_t dy d(\phi - \Phi_R)} = \frac{1}{2\pi} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2v_n \cos(n(\phi - \Phi_R)) \right). \quad (\text{IV.2})$$

Comme la collision possède la symétrie $(\phi - \Phi_R) \rightarrow -(\phi - \Phi_R)$, tous les termes en $\sin(n(\phi - \Phi_R))$ sont nuls. De plus, si l'on s'intéresse au plan transverse de la collision (ce qui

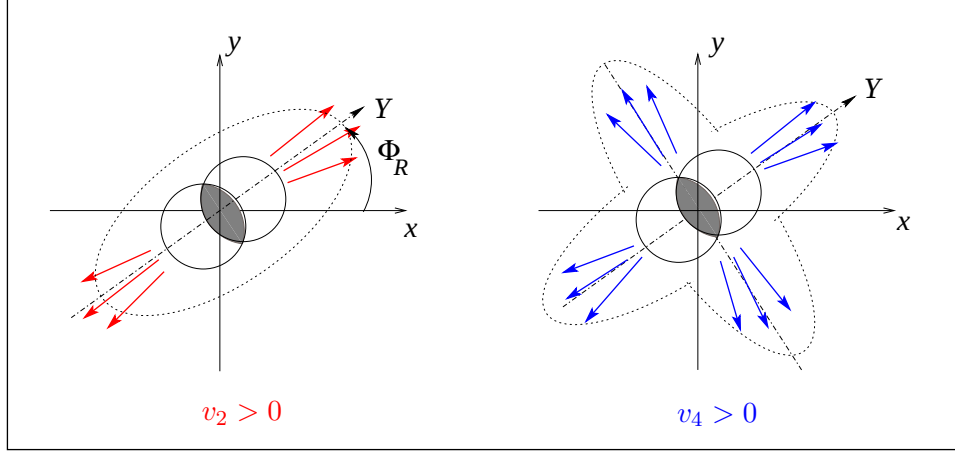


FIG. IV.2 – Interprétation géométrique des effets de flot. La figure montre la distribution $dN/dp_t d\phi$ avec un coefficient $v_2 > 0$ (à gauche), et avec $v_4 > 0$ (à droite) à une valeur donnée de la rapidité.

sera essentiellement le cas dans le reste de cette thèse) la fonction de distribution possède une autre symétrie utile pour simplifier l'équation (IV.2). Les deux noyaux qui collisionnent étant identiques, la collision, vue dans le référentiel du centre de masse, est symétrique en rapidité (voir figure III.1). Cette symétrie impose que les harmoniques impaires (resp. paires) soient des fonctions impaires (resp. paires) de y_{CdM} (y_{CdM} dénote la rapidité dans le référentiel du centre de masse de la collision). Comme les résultats dans le plan transverse sont obtenus en moyennant sur une petite fenêtre symétrique autour de $y_{CdM} = 0$, tous les coefficients de flot impairs doivent donc être nuls dans le plan transverse.

Pendant ma thèse, je me suis tout particulièrement intéressé aux 2 premiers coefficients de flot non nuls dans le plan transverse : v_2 , appelé “flot elliptique”, et v_4 .

IV.1.2 Interprétation géométrique des coefficients de flot

La figure IV.2 montre comment s'interprètent les coefficients v_2 et v_4 d'un point de vue géométrique. Le schéma indique les effets de flot pour une collision non centrale à une valeur donnée de la rapidité y_{CdM} quelconque.

- Le flot elliptique v_2 est non nul, il peut être soit positif, ce qui traduit que $\langle \cos(2(\phi - \Phi_R)) \rangle > 0$ c'est à dire qu'un plus grand nombre de particules sont détectées dans la direction du plan de réaction. On parle alors de “in-plane flow”. Soit $v_2 < 0$ qui correspond à l'effet inverse, plus de particules sont émises dans la direction orthogonale au plan de réaction. On parle alors de “out-of-plane flow”.
- Pour v_4 le principe est le même, il faut cette fois considérer le moment quadrupolaire de la distribution de particules.

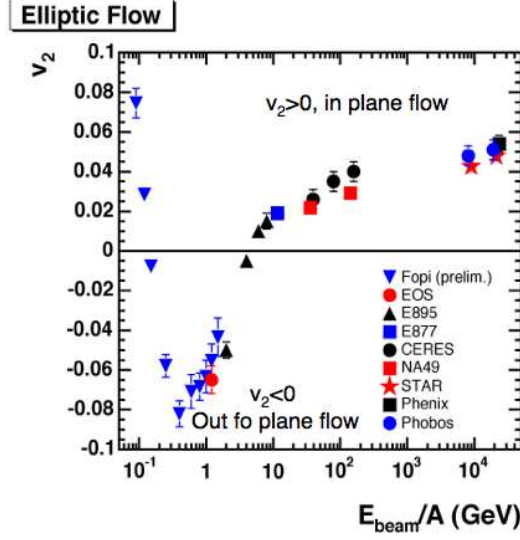


FIG. IV.3 – Résultats expérimentaux pour le flot elliptique en fonction de l'énergie de la collision $\sqrt{s}$ [41]. On distingue clairement les 2 différents régimes de flot “in(out) of plane”.

IV.1.3 Physique des coefficients de flot

Dans l'étude des coefficients de flot, il faut faire une différence entre les études dites intégrées, où l'on s'intéresse à une valeur des coefficients moyennée sur certaines quantités physiques (centralité, impulsions transverse des particules etc...), et les études différentielles.

a Dépendance de v_2 avec l'énergie de la collision

On considère ici des mesures du flot elliptique intégrées à la fois sur la centralité de la collision et sur l'impulsion transverse des particules. La figure IV.3 montre comment v_2^{int} dépend de l'énergie E_{lab} des collisions. on distingue 3 régimes :

- **Pour $E_{lab} < 100$ AMeV** ; les noyaux, après la collision, forment un système en rotation autour de la direction du paramètre d'impact. Les particules sont alors émises dans le plan de rotation, qui est le plan de réaction, à cause des effets de force centrifuge. Le flot elliptique est “in-plane” dans de telles collisions.
- **Pour $E_{lab} \propto 100$ AMeV [42]** ; une première transition vers $v_2^{int} < 0$ apparaît. Cet effet dit de “squeeze-out” [43] s'explique car à ces énergies, les noyaux commencent à devenir transparents l'un pour l'autre, néanmoins, la présence de fragments autour de la zone de collision gêne l'expansion du système. Cela se traduit pas un flot elliptique “out-of-plane”.
- **Pour $E_{lab} > 4$ AGeV** ; le problème change, et le flot redevient “in-plane” [44]. On peut comprendre cet effet en termes de temps caractéristiques. Dans ce cas, le temps caractéristique de développement des effets collectifs $\tau_c = R/c_s$ (R étant la taille caractéristique de la zone d'interaction et c_s la vitesse du son dans la matière créée par la collision) est bien supérieure au temps de passage des noyaux donné par $\tau_p = 2R_N/\gamma$ (R_N étant ici le rayon

des noyaux, et γ le facteur de Lorentz). Les collisions au SPS, au RHIC et maintenant au LHC se placent dans ce régime particulier.

b Dépendance en centralité du flot elliptique

Comme indiqué au chapitre précédent, le flot elliptique s'interprète comme la conséquence de l'anisotropie de la distribution initiale de particules. Il a donc une dépendance en centralité particulière. Une valeur nulle de v_2 est attendue à la fois pour les collisions centrales par symétrie, et dans le cas des collisions très périphériques où l'on attend peu d'interaction entre particules et donc peu d'effets collectifs. On s'attend donc à observer un v_2 croissant puis décroissant avec la centralité, et possédant un maximum pour les collisions semi-périphériques [45].

Le flot elliptique caractérise l'anisotropie de la distribution de particules détectées dans l'espace des impulsions (on a développé la distribution azimutale de particules, à p_t donné, en série de Fourier). On peut donc relier v_2 à l'excentricité de la distribution finale de particules dans l'espace des impulsions :

$$\epsilon_p = \frac{\langle p_y^2 \rangle - \langle p_x^2 \rangle}{\langle p_y^2 \rangle + \langle p_x^2 \rangle} = \frac{\langle p_t^2 v_2 \rangle}{\langle p_t^2 \rangle}. \quad (\text{IV.3})$$

Si l'on introduit l'excentricité de distribution initiale de matière dans la zone d'interaction :

$$\epsilon = \frac{\langle y^2 \rangle - \langle x^2 \rangle}{\langle y^2 \rangle + \langle x^2 \rangle} \quad (\text{IV.4})$$

où $\vec{x}$ est la direction du paramètre d'impact.

Alors pour un système localement thermalisé, où le libre parcours moyen des particules λ_{mfp} est petit devant la taille du système R (régime hydrodynamique). Le flot provient de l'anisotropie initiale, et l'on attend :

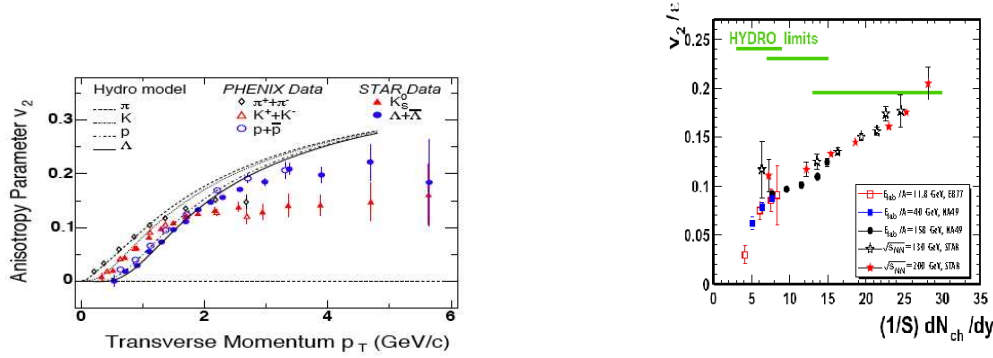
$$v_2 = \kappa \epsilon \quad (\text{IV.5})$$

où κ est une constante. Ce facteur d'échelle, ou "scaling" ($v_2 \propto \epsilon$) est général. Il trouve son origine dans l'interprétation géométrique du flot elliptique comme résultant de l'anisotropie initiale de matière. Il a été testé numériquement pour différentes équations d'état dans les calcul d'hydrodynamique idéale [46]. A noter également que la constante κ est en fait une fonction du degré de thermalisation du système, je reviendrai sur ce point au chapitre IX.

Une déviation de ce comportement type est alors à interpréter comme la signature d'une thermalisation partielle du système. Elle est facilement mise en évidence par une étude du rapport v_2/ϵ . Dans ce rapport, les effets géométriques s'annulent entre numérateur et dénominateur. Il contient donc toute l'information sur la thermalisation du système [46] (je reviendrai plus en détail sur cette étude au chapitre IX).

IV.1.4 Flot différentiel

L'étude du flot différentiel $v_2(p_t)$ apporte encore d'autres informations, en particulier, les calculs d'hydrodynamique font apparaître une forte dépendance dans l'équation d'état du système. Il est également très dépendant du degré de thermalisation comme nous le verrons par la suite.



(a) Flot elliptique différentiel mesuré au RHIC (b) Dépendance en centralité du flot elliptique intégré mesurée par les expériences STAR et PHENIX au RHIC [50]

FIG. IV.4 – Confrontation d’un modèle d’hydrodynamique idéale avec les résultats expérimentaux. A gauche, on voit que le modèle décrit qualitativement les données jusqu’à $p_t \simeq 2$ GeV/c, tandis qu’à droite, on n’observe un accord que pour les points correspondant aux collisions les plus centrales ($(1/S)(dN_{ch}/dy) \geq 25$).

IV.2 Résultats expérimentaux sur le flot elliptique

Le flot elliptique a été l’objet d’un des premiers résultats du RHIC [51]. Une comparaison du flot elliptique différentiel ($v_2(p_t)$) avec des calculs d’hydrodynamique idéale a montré (figure IV.4(a)) que la matière créée dans la collision avait qualitativement le comportement d’un fluide parfait (non visqueux). En pratique, les modèles d’hydrodynamique idéale sont qualitativement en accord avec les données jusqu’à $p_t \simeq 2$ GeV/c. Pour de plus grandes impulsions transverses, il est réaliste de considérer que le système ne peut être thermalisé en raison du faible nombre de particules présentes et du fait qu’elles proviennent de “jets” créés lors de processus durs. On ne s’attend alors pas à une description hydrodynamique du fluide.

D’un autre côté, la figure IV.4(b) montre une forte dépendance de v_2/ϵ en fonction de $(1/S)(dN_{ch}/dy)$. Cette dernière quantité donne une mesure de la centralité, celle-ci étant reliée à la multiplicité de particules chargées créées par la collision. Comme expliqué dans le paragraphe précédent, cette dépendance non triviale est une signature des effets de thermalisation partielle dans les collisions d’ions lourds.

IV.3 Le modèle d’hydrodynamique idéale

L’hypothèse de base de l’hydrodynamique idéale est que le système soit dans un état d’équilibre thermique local [52]. Cela impose que les quantités thermodynamiques varient suffisamment lentement pour qu’on puisse considérer qu’elles sont constantes sur un voisinage de chaque point. L’hydrodynamique idéale est de ce fait une théorie effective macroscopique. Cette hypothèse impose également que dans le référentiel du fluide, un élément de fluide n’ait que des propriétés isotropes et se traduit par l’existence de lois de conservations locales dans lesquelles tous les termes de flux sont nuls. En effet l’existence d’un flux à l’échelle d’un élément de fluide briserait

l'hypothèse d'isotropie en introduisant une direction privilégiée.

Les équations de l'hydrodynamique idéale sont donc obtenues en écrivant les lois de conservation locale des quantités thermodynamiques :

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad \partial_\mu J_B^\mu = \partial_\mu n_B u^\mu = 0 \quad (\text{IV.6})$$

où $T^{\mu\nu}$ désigne le tenseur énergie impulsion et J_B^μ le courant baryonique. A ces deux équations s'ajoute la propriété d'unitarité du champ de vitesse du fluide $u^\mu u_\mu = 1$. Dans le référentiel du fluide on doit donc résoudre un problème à 6 inconnues (ε , P , n , 3 coordonnées de $\mathbf{u}$) mais on n'a que 5 équations provenant de $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, et $\partial_\mu J_B^\mu = 0$. Pour fermer le système, on utilise une équation supplémentaire reliant la pression, la densité d'énergie et la densité de baryon qu'on appelle l'équation d'état (EoS).

En pratique, cela veut dire que l'on peut étudier un système "réaliste" pour la matière nucléaire en considérant l'équation d'état donnée par les calculs de QCD sur le réseau.

IV.4 Aller au-delà du comportement de l'hydrodynamique idéale

Nous avons vu dans la section IV.2 que bien qu'un accord qualitatif existe entre les calculs d'hydrodynamique idéale (avec une EoS inspirée des calculs sur réseau), ces modèles ne peuvent décrire l'ensemble des résultats expérimentaux observés. Cette constatation a été à l'origine de mon travail de thèse, et nous a poussés à vouloir évaluer l'impact des déviations de l'équilibre thermique local sur les observables "soft". Deux approches étaient alors envisageables, introduire des effets de viscosité dans l'hydrodynamique idéale, ou travailler sur la base d'une équation de transport.

IV.4.1 Hydrodynamique visqueuse

L'hydrodynamique est une théorie effective qui permet de décrire les propriétés macroscopiques d'un système. Elle n'est donc valable que si la longueur caractéristique des processus microscopiques (le libre parcours moyen λ_{mfp}) est petite devant la taille du système (R)^a. Dans ce régime, le système est considéré comme ayant atteint un équilibre thermique local. Le principe de l'hydrodynamique visqueuse consiste à modifier cette approche. Pour cela, on introduit une échelle caractéristique d'évolution des propriétés du fluide R . Il est alors possible de développer les équations de l'hydrodynamique idéale en gradients, en considérant $\partial^\mu \simeq R^{-1}$.

Un développement au premier ordre des équations de l'hydrodynamique idéale permet d'obtenir les équations de Navier-Stokes. Dans le cas des théories relativistes, la généralisation de l'équation de Navier-Stokes s'avère acausale^b, et ne peut donc être utilisée. On doit pousser à l'ordre suivant (2^d ordre) et dériver les équations d'Israël et Stewart^c[53, 54, 55, 56].

^aEn utilisant dès à présent le formalisme du nombre de Knudsen ($K = \lambda_{mfp}/R$) cela se traduit par la limite $K \rightarrow 0$

^bEn fait cette acausalité concerne la propagation de modes de grande impulsion. Ils correspondent donc à de petites longueurs d'ondes et ne peuvent être considérés comme physiques, l'hydrodynamique étant une théorie effective macroscopique. Cette acausalité n'est donc pas physiquement un problème.

^cA noter que plusieurs groupes ont aujourd'hui développé des calculs d'hydrodynamique visqueuse au second ordre, et que chaque groupe utilise une version différente des équations.

Néanmoins, seules de petites déviations de l'équilibre thermique local sont accessibles, puisque l'on travaille en se limitant au second ordre en dérivées. On doit en particulier s'assurer que les corrections visqueuse à la pression n'engendrent pas de trop grandes déviations qui seraient incompatibles avec le cadre même de l'hydrodynamique [57].

IV.4.2 Calculs de transport

Une autre approche est possible [58, 59, 60, 61] (celle que nous avons choisie). Elle revient à considérer la physique à l'échelle microscopique ce qui nous place dans le cadre des théories cinétiques. En particulier, nous avons choisi de travailler sur la base d'une équation de Boltzmann). Dans ce cadre, il est possible de s'intéresser à des systèmes possédant un libre parcours moyen (λ_{mfp}) quelconque. Une étude loin de l'équilibre est alors envisageable. Cette approche possède 3 facteurs limitants (détaillés dans la partie suivante) :

- Le terme de collision de l'équation de Boltzmann n'inclut que des processus $2 \rightarrow 2$ élastiques, ce qui revient à imposer au système d'être dilué^d, faute de quoi on perd le contrôle de la physique.
- Le principe de l'équation de Boltzmann étant de considérer des collisions de type sphères dures, l'équation d'état du système est fixée à celle d'un gaz parfait (dans le cas de particules de masse nulles : $\varepsilon = 3P$ où ε est la densité d'énergie et P la pression dans le système).
- La résolution numérique complète du problème est difficile car cela revient à résoudre un problème à 7 dimensions (3 d'espace, 3 d'impulsion et le temps).

IV.4.3 Approche envisagée dans ce travail

Nous avons vu dans les sections précédentes que l'hydrodynamique idéale, qui suppose le système en équilibre thermique local, est capable de reproduire qualitativement le flot elliptique différentiel ($v_2(p_t)$) sur l'intervalle $[0, 2]$ GeV. Par ailleurs, nous savons que ces modèles reproduisent également les spectres en impulsion transverse des particules.

Dans un premier temps, nous avons donc décidé de travailler sur la résolution numérique d'une équation de Boltzmann à seulement 2 dimensions spatiales afin d'étudier l'influence d'une thermalisation partielle sur les observables transverses.

Cette simplification nous a aussi permis de mettre en place une simulation numérique beaucoup plus légère numériquement.

IV.5 Conclusion

Dans ce dernier chapitre, nous avons vu que l'hydrodynamique idéale donnait un cadre qualitativement capable de décrire les observables “soft” dans les collisions d'ions lourds. Nous avons aussi vu que si certaines mesures étaient expliquées par de tels modèles, d'autres indiquaient clairement qu'il est nécessaire d'aller au-delà. Mon travail de thèse s'inscrit dans ce cadre. Le

^dCette hypothèse en particulier est limitante puisqu'on ne peut envisager que la matière à haute densité soit diluée.

reste de ce mémoire sera donc organisé de la façon suivante : dans une seconde partie, je détaillerai la résolution numérique de l'équation de Boltzmann que j'ai réalisée et qui a servi de cadre à mon travail. La partie 3 sera alors consacrée aux effets de la thermalisation partielle. Nous nous intéresserons en premier lieu à ses effets sur le flot elliptique, et en particulier l'explication de la dépendance non triviale en centralité. Nous nous intéresserons ensuite à l'harmonique supérieure v_4 , en particulier à sa dépendance en centralité, ce qui nous conduira à étudier l'impact des fluctuations des conditions initiales dans le chapitre X. Enfin, un dernier chapitre sera consacré à l'étude des corrélations de particules identiques. Nous verrons alors que la thermalisation partielle s'avère un ingrédient essentiel pour la résolution d'une incompatibilité entre résultats expérimentaux et prédictions d'hydrodynamique idéale que l'on appelle le "Puzzle HBT".

Bibliographie

- [1] C. Amster et al., Phys. Lett. B **667** (2008) 1
- [2] S. Bethke, J. Phys. G **33** (2000) R27
- [3] I. Ya. Pomeranchuk, Dokl. Akad. Nauk SSSR **78** (1951) 889.
- [4] F. Karsch, Lect. Notes. Phys, **583** (2002) 209
- [5] M. Lüscher, E. Laermann and A. Peikert Nucl. Phys. B **173** (1980) 365
- [6] O. Kaczmarek & al, Phys. Rev. D **62** (2000) 034021
- [7] A. K. Rebhan, Nucl. Phys. B **430** (1989) 319
- [8] B. C. Barrois, Nucl. Phys. B **129** (1977) 390 ; S. Frautschi, Proceedings of workshop on hadronic matter at extreme density, Erice 1978 ; B. C. Barrois, UMI 79-04847 ; D. Bailin et A. Love, Phys. Rept. **107** (1984) 325 ; M. G. Alford, K. Rajagopal and F. Wilczek, Phys. Lett. B **422** (1998) 247 [arXiv :hep-ph/9711395] ; R. Rapp, T. Schafer, E. V. Shuryak and M. Velkovsky, Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 53 [arXiv :hep-ph/9711396] ; M. G. Alford, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **51** (2001) 131 [arXiv :hep-ph/0102047].
- [9] Z. Fodor and S. D. Katz, arXiv :hep-lat/0111064.
- [10] R. Baier, Y. L. Dokshitzer, A. H. Mueller, S. Peigne and D. Schiff, Nucl. Phys. B **483** (1997) 291 [arXiv :hep-ph/9607355].
- [11] N. Armesto, M. Cacciari, T. Hirano, J. L. Nagle and C. A. Salgado, J. Phys. G **37** (2010) 025104 [arXiv :0907.0667 [hep-ph]].
- [12] U. A. Wiedemann, arXiv :0908.2306 [hep-ph].
- [13] C. Marquet and T. Renk, arXiv :0908.0880 [hep-ph].
- [14] D. d’Enterria, arXiv :0902.2011 [nucl-ex].
- [15] ALICE Collaboration, ALICE Physics Performance Report (Volume 2), CERN/LHCC 2005-030 (2005)
- [16] J. Frantz, [PHENIX Collaboration], J. Phys. G : Nucl. Part. Phys. **30** (2004) S1003–S1006
- [17] M. M. Aggarwal *et al.* [WA98 Collaboration], Phys. Rev. Lett. **85**, 3595 (2000) [arXiv :nucl-ex/0006008].
- [18] T. Ullrich *et al.* [CERES Collaboration], Nucl. Phys. A **610** (1996) 317C.
- [19] G. Agakishiev *et al.* [CERES Collaboration], Nucl. Phys. A **638** (1998) 467.
- [20] G. Agakishiev *et al.* [CERES Collaboration], Nucl. Phys. A **661** (1999) 673.

- [21] B. Lenkeit *et al.* [CERES-Collaboration], Nucl. Phys. A **661** (1999) 23 [arXiv :nucl-ex/9910015].
- [22] Cours du “Doctoral Training Program“ ECT* Trento Italy “Electromagnetic probes in heavy ion collisions, theory“ de Ralf Rapp 3-6 Juin 2007
- [23] O. Kaczmarek, F. Karsch, E. Laermann and M. Lutgemeier, Phys. Rev. D **62** (2000) 034021 [arXiv :hep-lat/9908010].
- [24] D. Kharzeev, E. Levin, M. Nardi and K. Tuchin, Phys. Rev. Lett. **102**, 152301 (2009) [arXiv :0808.2954 [hep-ph]].
- [25] M. Nardi and H. Satz, Phys. Lett. B **442**, 14 (1998) [arXiv :hep-ph/9805247].
- [26] S. Digal, S. Fortunato, P. Petreczky and H. Satz, Phys. Lett. B **549**, 101 (2002) [arXiv :hep-ph/0207264].
- [27] A. Adare *et al.* [PHENIX Collaboration], Phys. Rev. Lett. **98**, 232301 (2007) [arXiv :nucl-ex/0611020].
- [28] X. M. Xu, arXiv :0806.0143 [hep-ph].
- [29] P. Braun-Munzinger, I. Heppe and J. Stachel, Phys. Lett. B **465** (1999) 15 [arXiv :nucl-th/9903010].
- [30] J. Rafelski, Nucl. Phys. A **418** (1984) 215C.
- [31] P. Koch, B. Muller and J. Rafelski, Phys. Rept. **142** (1986) 167.
- [32] J. Rafelski, J. Letessier and A. Tounsi, Acta Phys. Polon. B **27** (1996) 1037 [arXiv :nucl-th/0209080].
- [33] J. Kapusta and A. Mekjian Phys. Rev. D **33** (1986) 1304
- [34] K. Redlich and A. Tounsi, arXiv :hep-ph/0105201.
- [35] A. Drees, Nucl. Phys. A **830** (2009) 435C [arXiv :0909.4976 [nucl-ex]].
- [36] P. Braun-Munzinger, J. Stachel, J. P. Wessels and N. Xu, Phys. Lett. B **365** (1996) 1 [arXiv :nucl-th/9508020].
- [37] H. Appelshäuser et al , [NA49 Collaboration], Nucl. Phys. A **638** (1998) 91.
- [38] R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss, Nature 177, 27 (1956).
- [39] S. V. Akkelin and Yu. M. Sinyukov, Phys. Lett. B **356** (1995) 525.
- [40] M. A. Lisa, S. Pratt, R. Soltz and U. Wiedemann, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. , 357 (2005), [arXiv :nucl-ex/0505014].
- [41] R. A. Lacey, Nucl. Phys. A **774** (2006) 199 [arXiv :nucl-ex/0510029].
- [42] A. Andronic *et al.* [FOPI Collaboration], Nucl. Phys. A **679** (2001) 765 [arXiv :nucl-ex/0008007].
- [43] H. H. Gutbrod, B. W. Kolb, H. R. Schmidt, A. M. Poskanzer, H. G. Ritter and K. H. Kampert, Phys. Lett. B **216** (1989) 267.
- [44] J. Y. Ollitrault Phys. Rev. D **46** (1992) 229.
- [45] J. Y. Ollitrault, NATO Sci. Ser. II **87** (2002) 237.

- [46] R. S. Bhalerao, J. P. Blaizot, N. Borghini and J. Y. Ollitrault, Phys. Lett. B **627** (2005) 49 [arXiv :nucl-th/0508009].
- [47] S. S. Adler *et al.* [PHENIX Collaboration], Phys. Rev. Lett. **91** (2003) 182301 [arXiv :nucl-ex/0305013].
- [48] C. Adler *et al.* [STAR Collaboration], Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 182301 [arXiv :nucl-ex/0107003].
- [49] J. Adams *et al.* [STAR Collaboration], Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 062301 [arXiv :nucl-ex/0310029].
- [50] J. Adams *et al.* [STAR Collaboration], Nucl. Phys. A **757** (2005) 102 [arXiv :nucl-ex/0501009].
- [51] M. Pexlox, Nature Published online 19 April 2005 “Early universe was a liquid“
- [52] J. Y. Ollitrault, Eur. J. Phys. **29** (2008) 275 [arXiv :0708.2433 [nucl-th]].
- [53] P. Romatschke and U. Romatschke, Phys. Rev. Lett. **99** (2007) 172301 [arXiv :0706.1522 [nucl-th]].
- [54] M. Luzum and P. Romatschke, Phys. Rev. C **78** (2008) 034915 [Erratum-ibid. C **79** (2009) 039903] [arXiv :0804.4015 [nucl-th]].
- [55] U. W. Heinz, Nucl. Phys. A **830** (2009) 287C [arXiv :0907.4256 [nucl-th]].
- [56] B. Betz, D. Henkel and D. H. Rischke, Prog. Part. Nucl. Phys. **62** (2009) 556 [arXiv :0812.1440 [nucl-th]].
- [57] H. Song and U. W. Heinz, arXiv :0909.1549 [nucl-th].
- [58] M. Bleicher and H. Stöcker, Phys. Lett. B **526** (2002) 309 [arXiv :hep-ph/0006147].
- [59] E. E. Zabrodin, C. Fuchs, L. V. Bravina and A. Faessler, Phys. Lett. B **508** (2001) 184 [arXiv :nucl-th/0104054].
- [60] Z. W. Lin and C. M. Ko, Phys. Rev. C **65** (2002) 034904 [arXiv :nucl-th/0108039].
- [61] M. Gyulassy and D. Molnar, Found. Phys. **31** (2001) 875.

Partie B

Résolution numérique de l'équation de Boltzmann relativiste

Cette partie est dédiée à la présentation de la boîte à outils utilisée pendant ma thèse ; à savoir les théories cinétiques, et en particulier l'équation de Boltzmann. Dans un premier chapitre, j'introduirai les concepts de base des théories cinétiques classiques, avant de dériver l'équation de Boltzmann. J'étendrai ensuite cette dérivation au cas relativiste. Le second chapitre traitera alors de la partie numérique de mon travail. Je rappellerai en premier lieu les motivations, avant de discuter l'implémentation du code et les tests de validation mis en place. Le code alors validé, sera dans une troisième partie modifié afin d'être appliqué aux collisions d'ions lourds. Je discuterai alors les modifications structurelles nécessaires, ainsi que les erreurs systématiques et les limites de cette approche, par les équations de transport, de la physique des collisions d'ions lourds. Enfin, dans une dernière partie, je discuterai les améliorations possibles sur lesquelles j'ai travaillé, en particulier : l'extension à des particules massives, et le passage à $(3+1)$ -dimensions.

CHAPITRE V

Théories cinétiques classiques et relativistes

Sommaire

V.1	Image “classique” de particules non relativistes	43
V.2	Description du gaz, la fonction de distribution à une particule . .	44
V.3	Dynamique dans les théories cinétiques non relativistes	45
V.4	Equation de Boltzmann non relativiste	45
V.5	Généralisation au cas des particules relativistes	46
V.6	Physique de l’équation de Boltzmann	46
V.6.1	Solution de l’équation de Boltzmann et théorème H	46
V.6.2	Description d’une mixture à 2 espèces	47
V.7	Conclusion : Commentaires sur la validité de l’équation de Boltzmann	48

Le problème que l’on cherche à résoudre ici peut être formulé de la façon suivante : *on considère un gaz de particules, est-il possible de décrire sa physique à l’échelle microscopique ?* La réponse à cette question est oui, sous certaines conditions que l’on va discuter maintenant. Ce chapitre (et l’annexe correspondante) reprennent les grandes lignes des calculs de la théorie cinétique des gaz. Pour aller au-delà, je renvoie aux références : [62, 63, 64] pour l’équation de Boltzmann classique, et [65] pour les théories cinétiques relativistes^a.

V.1 Image “classique” de particules non relativistes

L’avènement de la mécanique quantique nous a montré que les particules étaient à la fois des objets ponctuels correspondant à des états propres du Hamiltonien du système dans un espace de Hilbert, mais qu’elles pouvaient aussi être décrites comme des ondes caractérisées par une

^aIl pourra également être fructueux de consulter les travaux de [66] sur le lien entre théories cinétiques et hydrodynamique relativiste (des détails sur la méthode de résolution utilisée, “Grad moment method”, peuvent être trouvés dans [67], même si l’approche utilisée dans [66] ne reprend pas les travaux de Grad).

longueur d'onde appelée "longueur d'onde de "Broglie" :

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{\hbar}{\sqrt{2mk_B T}} \quad (\text{V.1})$$

avec h la constante de Planck, p l'impulsion de la particule, k_B la constante de Boltzmann et m sa masse.

Pour qu'une description classique des particules réelles soit possible, il faut considérer un système dans lequel les particules puissent être vues comme des paquets d'ondes localisés dont l'extension spatiale est petite devant la distance interparticulaire moyenne (déterminée par la densité du gaz). On pourra donc décrire un gaz comme un système de particules classiques à la condition que la longueur d'onde de "de Broglie" soit toujours petite devant la distance interparticulaire soit :

$$\frac{\hbar}{\sqrt{2mk_B T}} (N/V)^{1/3} \ll 1 \quad (\text{V.2})$$

où N est le nombre de particules du gaz contenues dans le volume V .

Sous cette condition (V.2), chaque particule peut être considérée comme "classique" et possède une position et une impulsion propre. Par ailleurs, les particules sont considérées indiscernables et peuvent interagir entre elles en réalisant des collisions avec une section efficace (probabilité d'interaction) σ .

Dans la suite de cette section, on fera les 3 hypothèses suivantes :

- On suppose la condition (V.2) toujours remplie.
- On considère un gaz composé d'une seule espèce de particules.
- On néglige la structure microscopique des parois de la boîte, en considérant que l'interaction particule-paroi est simplement une réflexion élastique.

V.2 Description du gaz, la fonction de distribution à une particule

L'étude des théories cinétiques ne consiste pas à suivre individuellement les trajectoires de toutes les particules (même si, nous le verrons, c'est en réalité la chose à faire numériquement). On s'intéresse, en pratique, à une quantité nommée fonction de distribution à une particule, notée $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ et définie de sorte que :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3r d^3v \quad (\text{V.3})$$

mesure le nombre de particules dont la position est incluse dans l'élément d^3r autour de $\mathbf{r}$ et ayant une vitesse comprise entre $\mathbf{v}$ et $\mathbf{v} + d^3v$. L'élément $d^3r d^3v$ définit un élément de volume dans un espace à 6-dimensions appelé "espace des phases", que je noterai " ϕ -space" dans la suite. Usuellement, on considère que la fonction f évolue peu entre 2 éléments d'espace des phases voisins, de sorte qu'en couvrant toute la surface du ϕ -space de tels éléments de volume, on peut écrire :

$$\sum f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3r d^3v = \int_V f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3r d^3v. \quad (\text{V.4})$$

La fonction de distribution à une particule est alors proprement définie et normalisée par la relation :

$$\int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3r d^3v = N \quad (\text{V.5})$$

où N correspond au nombre total de particules du système.

V.3 Dynamique dans les théories cinétiques non relativistes

Un des buts des théories cinétiques est de comprendre l'évolution de la fonction de distribution à une particule dans la limite $t \rightarrow \infty$. En effet dans cette limite des temps longs, f contient toutes les propriétés d'équilibre du système. Pour réussir à accéder à ces propriétés, il est nécessaire de comprendre la dynamique de f . Entre 2 instants t et $t + dt$, le système évolue et des particules changent d'élément d'espace des phases (elles se déplacent ou changent de vitesse). L'équation d'évolution de f est dérivée en Annexe A.1, elle s'écrit :

$$f(\mathbf{r} + \mathbf{v}\delta t, \mathbf{v} + \mathbf{F}/m\delta t, t + \delta t) = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \left(\frac{\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} \right)_{coll} \delta t \quad (\text{V.6})$$

où m la masse de la particule et $\mathbf{F}$ une force extérieure au système. Le terme de gauche dans (V.6) traduit l'évolution de f indépendamment de l'effet des collisions explicitement inclu dans le terme de droite.

Pour avancer encore dans l'étude de la dynamique moléculaire, il faut expliciter la forme du terme de collision ce qui n'est faisable que sous certaines conditions.

V.4 Equation de Boltzmann non relativiste

Une possibilité d'évaluation du terme de collision de l'équation (V.6) a été proposée par Ludwig von Boltzmann en 1872 en se basant sur 3 hypothèses :

- Le gaz est considéré suffisamment dilué pour que seules les collisions binaires contribuent à la dynamique.
- On néglige les effets de la force extérieure sur la section efficace de collision (σ).
- On néglige les corrélations entre les particules^b (hypothèse de chaos moléculaire).

Sous ces conditions, il est possible de dériver une forme explicite pour les termes de gain et de perte (pour le lecteur intéressé une dérivation complète se trouve en Annexe A). L'équation alors obtenue est l'équation de Boltzmann :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla_r + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}_1} \right) f_1 = \int d^3v_2 \int \sigma(\Omega) d\Omega |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1| (f'_1 f'_2 - f_1 f_2). \quad (\text{V.7})$$

^bCela revient à considérer que dans un élément de volume dr^3 , le nombre de paires de particules avec des vitesses respectivement incluses dans d^3v_1 et d^3v_2 autour de $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ est donné par :

$$[f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1, t) d^3r d^3v_1][f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_2, t) d^3r d^3v_2].$$

V.5 Généralisation au cas des particules relativistes

Dans la section précédente, j'ai dérivé l'équation de Boltzmann pour des particules classiques non relativistes. Cette équation n'est pas applicable en l'état aux collisions d'ions lourds, il faut en effet la modifier pour prendre en compte le fait que les particules initialement créées lors de la collision sont des partons déconfinés. On doit donc généraliser (V.7) au cas de particules relativistes.

Pour cela il faut tenir compte de la cinématique relativiste de la collision^c. On peut donc réécrire le terme de vitesse relative de l'équation de Boltzmann (en posant $c = 1$) :

$$v_{rel} = \left| \frac{\mathbf{p}_2}{p_2^0} - \frac{\mathbf{p}_1}{p_1^0} \right| = \frac{1}{p_1^0 p_2^0} \sqrt{(p_1^\mu p_2^\mu)^2 - m_1^2 m_2^2} \quad (\text{V.8})$$

$$= \sqrt{1 + (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2)(\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 - \frac{m_1^2 m_2^2}{p_1^0 p_2^0})} \quad (\text{V.9})$$

$$= \sqrt{(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)^2 - \mathbf{v}_1^2 \mathbf{v}_2^2 + (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2)^2} \quad (\text{V.10})$$

$$v_{rel} = \sqrt{(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)^2 - (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1)^2} \quad (\text{V.11})$$

Nous avons maintenant retrouvé l'expression du terme de vitesse relative de Möller. Il est alors possible d'écrire l'équation de Boltzmann relativiste, celle-ci est semblable à l'équation classique au terme de vitesse relative près.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla_r + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}_1} \right) f_1 = \int d^3 v_2 \int \sigma(\Omega) d\Omega \sqrt{(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)^2 - (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1)^2} (f'_1 f'_2 - f_1 f_2) \quad (\text{V.12})$$

En fait, la relativité n'entre dans cette équation que par le terme de vitesse relative v_{rel} et la relation entre vitesse et impulsion^d.

V.6 Physique de l'équation de Boltzmann

V.6.1 Solution de l'équation de Boltzmann et théorème H

Dans la limite des temps longs, le système atteint un état d'équilibre. La fonction de distribution à une particule f_0 d'un tel état est donc définie de la façon suivante :

$$0 = \int d^3 v_2 \int \sigma(\Omega) d\Omega v_{rel} [f_0(\mathbf{v}'_1) f_0(\mathbf{v}'_2) - f_0(\mathbf{v}_1) f_0(\mathbf{v}_2)] . \quad (\text{V.13})$$

^cEn utilisant la métrique $(+, -, -, -)$ et en posant $c = 1$, on obtient les identités suivantes pour les quadri-vecteurs :

$$\begin{aligned} p^\mu p_\mu &= (p^0)^2 - \mathbf{p}^2 \\ &= m^2 \\ \mathbf{v} &= \frac{\mathbf{p}}{p^0} \end{aligned}$$

^dPlus exactement, elle a aussi un effet implicite sur la forme de la section efficace différentielle. Un calcul détaillé se trouve en Annexe A.2

L'équation (V.13) traduit l'état d'équilibre comme la solution de l'équation de Boltzmann indépendante du temps et de la position dans l'espace. Résoudre cette équation revient à résoudre :

$$f_0(\mathbf{v}'_1)f_0(\mathbf{v}'_2) - f_0(\mathbf{v}_1)f_0(\mathbf{v}_2) = 0. \quad (\text{V.14})$$

Boltzmann a défini la fonctionnelle $H(t)$ par :

$$H(t) = \int d^3v f(\mathbf{v}, t) \log(f(\mathbf{v}, t)) \quad (\text{V.15})$$

La condition (V.14) est équivalente à $dH/dt = 0$.

On peut alors montrer que la dynamique d'un système décrit par l'équation de Boltzmann obéit au théorème H, qui s'énonce de la façon suivante :

Si f est solution de l'équation de Boltzmann alors :

$$\frac{dH(t)}{dt} \leq 0. \quad (\text{V.16})$$

Une preuve détaillée de ce théorème peut être trouvée dans [62] pour le cas non relativiste et [65] pour le cas relativiste. Ce théorème est de fait analogue au second principe de la thermodynamique. L'entropie de Boltzmann du théorème H est reliée à l'entropie usuelle par la relation :

$$S(t) = -k_B \int d^3r H(\vec{r}, t) \quad (\text{V.17})$$

Il montre que la physique de l'équation de Boltzmann n'est pas invariante par renversement du temps.

Un bon moyen de tester notre résolution numérique de l'équation de Boltzmann sera donc de vérifier que le système converge vers un état d'équilibre dans la limite des temps longs (voir VI.6).

V.6.2 Description d'une mixture à 2 espèces

Jusqu'à présent, je me suis limité au cas d'un système contenant une seule espèce de particules. Mais toute la dérivation précédente se généralise au cas d'une mixture.

Considérons une telle mixture composée de 2 espèces différentes (A et B). Résoudre la dynamique de ce système revient alors à chercher les fonctions de distribution à une particule $f_A(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ et $f_B(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ qui décrivent ces 2 espèces. On devra donc résoudre simultanément un système d'équations de Boltzmann :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla_r + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}_1} \right) f_A = J_{AA}(f) + J_{AB}(f) \quad (\text{V.18})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla_r + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}_1} \right) f_B = J_{BB}(f) + J_{BA}(f) \quad (\text{V.19})$$

avec J qui dénote l'intégrale de collision.

Cela conduit à considérer 3 types de collisions différentes $\{A - A\}, \{B - B\}$ et $\{A - B\}^e$. La fonctionnelle H est maintenant définie par :

$$H(t) = \sum_{i=A,B} H_i = \sum_i \int d^3v f_i \ln f_i \quad (\text{V.20})$$

Le théorème H est toujours vérifié, et dans la limite des temps longs, le système converge vers un état d'équilibre.

On observe en particulier dans le cas où une espèce est significativement plus lourde que l'autre que le système évolue de sorte que l'espèce légère, puis l'espèce lourde et enfin la mixture arrivent à un état d'équilibre.

V.7 Conclusion : Commentaires sur la validité de l'équation de Boltzmann

Pour conclure ce chapitre général sur l'équation de Boltzmann je voudrais en discuter les limites d'application. De par sa structure, l'équation de Boltzmann n'est pas invariante par renversement du temps (théorème H) ce qui n'est pas le cas de la dynamique moléculaire classique.

L'équation de Boltzmann n'est strictement valide que pour décrire un gaz dilué dans un état de chaos moléculaire. C'est cette hypothèse de chaos moléculaire qu'il faut discuter. En pratique, l'état de chaos moléculaire peut être abordé comme une approximation mathématique, plutôt que comme une réalisation physique.

Si l'on considère un état initial loin de l'équilibre, le théorème H nous dit que la dynamique du système le conduit vers un état d'équilibre. Les collisions qui ont alors lieu peuvent aussi bien placer le système dans un état de chaos moléculaire que l'en sortir. La fonction $H(t)$ correspondante sera alors globalement décroissante, mais localement composée de pics dus aux fluctuations (chaque état de chaos moléculaire doit correspondre à un maximum local de $H(t)$ [62]). L'équation de Boltzmann est incapable de décrire en détail la dynamique de ce système particulier. Néanmoins, elle décrit l'évolution globale (la décroissance). La solution de l'équation de Boltzmann sera alors une fonction décroissante ajustée sur tous les maximums de H marquant un état de chaos moléculaire.

On voit donc que l'équation de Boltzmann ne décrit pas exactement la dynamique du système, mais est valide d'un point de vue statistique (elle décrit un comportement moyen).

^ePlus généralement un système à N espèces sera décrit par un système de N équations et comportera C_N^2 termes de collision différents.

CHAPITRE VI

Résolution numérique de l'équation de Boltzmann à $(2 + 1)$ -dimensions

Sommaire

VI.1	Rappel des motivations	50
VI.2	Les paramètres du problème	50
VI.2.1	Enoncé du problème et système physique étudié	50
VI.2.2	Coefficient de dilution	51
VI.2.3	Le nombre de Knudsen	52
VI.3	Dynamique du système	52
VI.3.1	Propagation des particules	52
VI.3.2	Critère de collision	53
VI.3.3	Calcul des quadrivecteurs énergie-impulsion finaux	54
VI.4	Implémentation et structure du code	56
VI.5	Evaluation des erreurs	58
VI.6	Validation de la résolution numérique	59
VI.6.1	Test de la thermalisation d'un gaz en boîte	59
VI.6.2	Test du nombre de collisions simulées.	61

Dans le chapitre précédent, j'ai dérivé l'expression de l'équation de Boltzmann relativiste. Dans la suite, je vais développer la méthode que j'ai utilisée pour résoudre numériquement cette équation. Après une première section qui rappellera nos motivations et, en particulier, les raisons qui nous ont poussées à travailler à $(2 + 1)$ -dimensions, je présenterai le système ainsi que ses paramètres caractéristiques. La section 3 détaillera alors l'architecture (numérique) du code. Le traitement des collisions binaires élastiques fera l'objet d'une 4ème partie avant de finir par les tests réalisés pour s'assurer que la physique de l'équation de Boltzmann est bien rendue par la simulation.

VI.1 Rappel des motivations

Nous avons vu dans la partie d'introduction que les modèles hydrodynamiques étaient qualitativement capables de reproduire certaines des données du RHIC, en particulier les spectres en p_t et le flot elliptique différentiel $v_2(p_t)$. En revanche, on a également vu que l'hydrodynamique idéale était incapable de reproduire la dépendance en centralité du flot elliptique, et ne semblait être applicable au RHIC (être en accord avec les données) que dans le cas des collisions les plus centrales.

J'ai rapidement présenté les deux approches possibles pour améliorer l'accord entre modèles phénoménologiques et expériences que sont l'hydrodynamique visqueuse et les équations de transport, et discuté brièvement les avantages et inconvénients principaux de ces 2 approches.

Comme je l'ai indiqué, nous avons choisi une approche par les théories cinétiques. Il était donc nécessaire de réaliser une résolution numérique de l'équation de Boltzmann. Dans ce cadre, le facteur limitant principal était la complexité du problème (résolution numérique d'un problème à N corps). Puisque "l'accord" entre données expérimentales et calculs d'hydrodynamique idéale était observé dans l'étude des observables transverses de la collision, nous avons choisi de réaliser, en premier lieu, une résolution numérique de l'équation de Boltzmann à seulement 2 dimensions spatiales. Ainsi, nous voulions, dans un premier temps, nous restreindre à l'étude des observables transverses dans les collisions d'ions lourds. Naturellement, une étude purement bi-dimensionnelle ne peut rendre complètement compte de la physique d'un système à 3 dimensions spatiales. C'est pourquoi, dans la section VII.5.2 de cette partie, je présente une généralisation du premier code à $(3 + 1)$ -dimensions^a.

VI.2 Les paramètres du problème

VI.2.1 Enoncé du problème et système physique étudié

Le système physique que l'on veut étudier est celui indiqué sur la figure VI.1. Ce système correspond à un gaz de particules relativistes de masse nulle et de taille r enfermées dans une enceinte carrée de volume V .

On veut construire une résolution numérique de l'équation de Boltzmann **sans force extérieure** et s'assurer que la physique est bien sous contrôle. Le premier objectif est de vérifier qu'un tel système atteint un état d'équilibre dans la limite des temps longs (Théorème H). Ceci permettra de valider l'algorithme.

A noter que, comme l'on travaille sur un système à 2 dimensions spatiales, V à la dimension d'une aire ($[V] \simeq L^2$), que les particules sont des segments à cause des effets de la contraction de Lorentz (voir section VI.3.1) et que, la dynamique du système est contrôlée par une section efficace d'interaction qui a la dimension d'une longueur ($[\sigma] \simeq L$).

Le système possède 3 longueurs caractéristiques :

- **La taille caractéristique du système** : Notée R , elle est donnée par $R^2 = V$.
- **La distance moyenne entre particules** : Notée d , elle est donnée par $d = 1/\sqrt{n}$, n étant la densité du gaz.

^aCe travail étant encore en phase de test, il n'a à l'heure actuelle donné lieu à aucune étude physique.

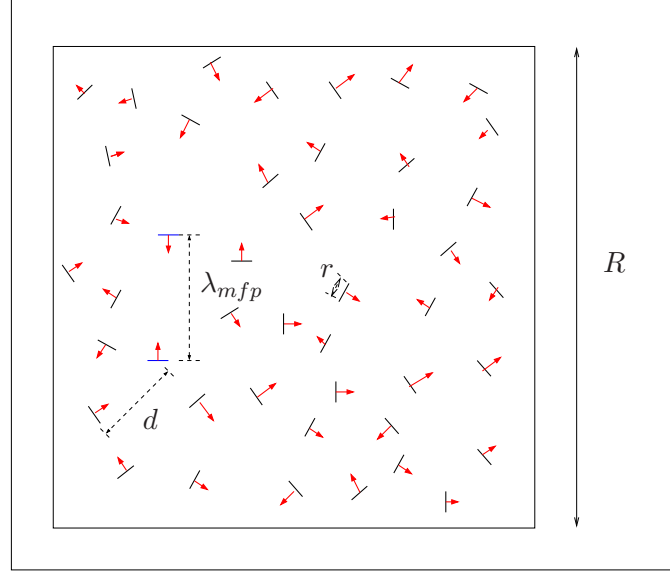


FIG. VI.1 – Représentation schématique du système que l'on considère (système bi-dimensionnel, de particules relativistes de masse nulle).

- **Le libre parcours moyen des particules** : Noté λ_{mfp} , il est donné par $\lambda_{mfp} = (\sigma n)^{-1}$. A partir de ces 3 longueurs caractéristiques, on peut définir 2 paramètres sans dimensions.

VI.2.2 Coefficient de dilution

Le premier paramètre sans dimension est le coefficient de dilution donné par :

$$D = \frac{d}{\lambda_{mfp}} = \sigma \sqrt{n} \quad (\text{VI.1})$$

Ce paramètre est fondamental. On a vu que l'équation de Boltzmann ne décrivait **que** la physique des **gaz dilués**. Si cette hypothèse de dilution n'est pas remplie, on sait qu'à la fois : l'hypothèse de chaos moléculaire n'est pas vérifiée (on doit donc prendre en compte des corrélations spatiales dans la distribution de particules) et que les processus de collisions à 2 corps ne dominant plus (il faut alors prendre en compte des processus d'ordre supérieurs : $\{2 \rightarrow 3\}$, $\{3 \rightarrow 2\}$, $\{3 \rightarrow 3\}$, etc...).

L'hypothèse de dilution se traduit en pratique de la façon suivante : *Dans un gaz dilué, une particule peut passer à côté de nombreuses autres avant de réaliser une collision.* Cette condition peut simplement s'écrire :

$$D \ll 1 \quad (\text{VI.2})$$

VI.2.3 Le nombre de Knudsen

Le second paramètre sans dimension est appelé nombre de Knudsen [68] noté :

$$K = \frac{\lambda_{mfp}}{R} = \frac{1}{\sigma n R}. \quad (\text{VI.3})$$

C'est le paramètre qui contrôle la dynamique du système. Il compte le nombre moyen de collisions subies par une particule qui traverse le système.

On a vu que l'intérêt d'utiliser une équation de transport était de pouvoir s'intéresser à des systèmes avec un libre parcours moyen arbitraire. De tels systèmes peuvent-être caractérisés par leur nombre de Knudsen avec 2 régimes limites notables :

- **Régime hydrodynamique idéal** : Dans le cas où $K \rightarrow 0$, le système atteint un équilibre thermique local, et ses propriétés deviennent similaires à celles d'un fluide non visqueux.
- **Régime de vol libre** : Dans le cas où $K \gg 1$, les particules se propagent sans interaction, leurs trajectoires correspondent alors à celles de particules libres.

VI.3 Dynamique du système

Lorsque, dans le cadre de la dynamique moléculaire deux particules se rencontrent, elles collisionnent. Pour traiter correctement les collisions, il est nécessaire de savoir à la fois à quelles conditions deux particules collisionnent, et dans ce cas, comment calculer les quadrivecteurs énergie impulsion finaux.

VI.3.1 Propagation des particules

L'équation de Boltzmann relativiste (V.12) ne diffère de la version classique que par le terme de vitesse relative dans l'intégrale de collision. Cette modification traduit un effet relativiste bien connu, la contraction de Lorentz (voir Annexe A.2).

La relativité prévoit qu'un objet se déplaçant à grande vitesse se contracte (dans la direction de son déplacement) suivant la loi $L_0 = L/\gamma$, où γ est le facteur de Lorentz^b.

Dans notre cas, puisque les particules sont de masse nulle, cela impose de considérer que leur extension spatiale dans la direction de propagation est nulle (on considère les particules comme des segments voir figure VI.1).

Dans le cas où une particule ne fait pas de collision, son évolution pendant un pas de temps donné est donc simplement un vol libre durant cet intervalle. La propagation est alors déterminée par :

$$\vec{X}_f = \vec{X}_i + \vec{\beta} dt \quad (\text{VI.5})$$

Avec $\vec{X}_{i,f}$ les positions initiales et finales des particules, et $\vec{\beta}$ la vitesse de la particule.

^bFacteur définit par :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{VI.4})$$

VI.3.2 Critère de collision

Pour déterminer si une collision est possible pour une paire de particules donnée, deux critères différents doivent être vérifiés. D’abord, il faut que cette collision soit géométriquement possible (que les trajectoires^c des particules se croisent). Ensuite, il faut que la “collision géométrique” ait lieu pendant le pas de temps considéré.

La figure VI.2 (haut) schématise les deux particules sur le point d’entrer en collision. La probabilité d’interaction est donnée par la section efficace qui est définie comme un scalaire de Lorentz (Annexe A.2). Sa valeur est donc indépendante du référentiel. Si on se place dans le référentiel de Lorentz (où les vitesses sont antiparallèles), la probabilité d’interaction est donnée par la distance de moindre approche des deux particules. Dans ce cas, utiliser une particule de taille $2r$ et une particule ponctuelle correspond à la même probabilité de collision que d’utiliser 2 particules de tailles r , et doit donc conduire à un résultat identique.

On comptera donc le même nombre d’interaction par unité de temps si l’on considère deux particules de taille r , ou une particule ponctuelle et une de taille $2r$. Seul les lieux géométriques (coordonnées spatio-temporelles) des collisions peuvent changer^d

Une simple transformation galiléenne de vitesse $-\vec{v}_1$ permet alors de passer dans le référentiel où la particule 1 est immobile (figure VI.2(haut)). Le problème se résume alors au calcul des coordonnées (temps et espace) de la collision géométrique de la particule 2 (ponctuelle). Les deux critères de collisions peuvent alors s’exprimer de la façon suivante :

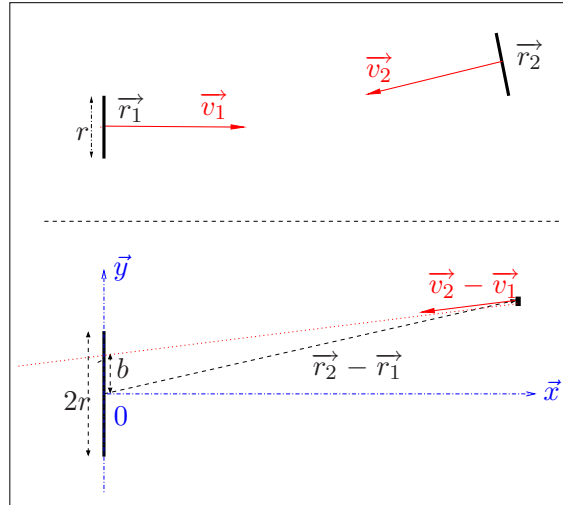


FIG. VI.2 – Schéma montrant le calcul géométrique du paramètre d’impact. En haut : Les particules dans le référentiel de la collision. En bas : Les particules dans le référentiel centré sur l’une d’entre elles, et sous l’hypothèse utilisée pour faire le calcul numérique.

^cLes particules se propagent en ligne droite.

^dL’erreur ainsi générée est du même ordre que l’erreur qui brise la causalité (transmission instantanée d’information sur une distance r à l’instant de la collision). Dans la suite, je justifierai que pour un système dilué, une telle erreur est négligeable.

a Critère de collision temporel

Numériquement, l'étude de la dynamique d'un système se fait en discrétisant la coordonnées temporelle en intervalles de temps de longueur dt ^e. Une collision n'est donc possible que si elle a lieu pendant un pas de temps donné. Si $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ désignent les positions des particules au début du pas de temps, la durée τ qui sépare le début du pas de temps de l'instant de la collision est donnée par (Annexe B.1) :

$$\tau = \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \vec{v}_1}{1 - \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1}. \quad (\text{VI.6})$$

Un premier critère de collision peut donc s'écrire :

$$\tau \leq dt \quad (\text{VI.7})$$

b Critère de collision géométrique

Le second critère est simplement schématisé sur la figure VI.2. Pour que la collision ait lieu, il faut que les particules entrent en contact. Ce second critère de collision peut donc s'écrire :

$$|b| \leq r \quad (\text{VI.8})$$

où b est le paramètre d'impact de la particule 2 sur la particule 1.

Le paramètre d'impact est donné par la distance entre les 2 particules à l'instant de la collision (calcul détaillé en annexe B.1) soit :

$$b = |\vec{r}_2(\tau) - \vec{r}_1|. \quad (\text{VI.9})$$

b peut également être exprimé algébriquement, par rapport à la direction $\vec{Oy}$ sur la figure VI.2, sous la forme (voir Annexe) :

$$b = \frac{\vec{e}_z \cdot (\vec{r} \wedge (\vec{v}_2 - \vec{v}_1))_{\text{f}}}{1 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}. \quad (\text{VI.10})$$

VI.3.3 Calcul des quadrivecteurs énergie-impulsion finaux

a Référentiel de la collision

Le point de départ du calcul des quadrivecteurs finaux consiste à identifier dans quel repère ce calcul est le plus simple à réaliser :

On part de l'invariant relativiste :

$$(\underline{P}_1 + \underline{P}_2 - \underline{P}'_1)^2 = 0 = (\underline{P}_1 + \underline{P}_2)^2 - 2\underline{P}'_1(\underline{P}_1 + \underline{P}_2) \quad (\text{VI.11})$$

^eJ'expliquerai dans la suite comment est fixée la valeur du pas de temps

^fIl existe une autre dérivation du paramètre d'impact (voir annexe B.1). b^2 y est donné en terme de produits pseudo-scalaires de quadrivecteurs. C'est donc un scalaire de Lorentz ce qui assure la covariance du calcul.

Résoudre VI.11 revient à chercher $|\vec{p}_1'|$ et $\theta = (\vec{p}_1', \vec{e}_x)$ où $\vec{e}_x$ est le vecteur directeur de l'axe des $\vec{x}$ dans un repère que l'on souhaite utiliser pour exprimer $\vec{p}_1'$ en coordonnées polaires.

L'introduction des variables de Mandelstam et quelques lignes de cinématique (détaillées en Annexe B.2) conduisent à :

$$[(s+t)\vec{p}_1 + t\vec{p}_2] \cdot \vec{u} = (s+t)p_1 + tp_2 \quad (\text{VI.12})$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (s+t)p_1 + tp_2 \quad (\text{VI.13})$$

où $\vec{u}$ est défini par $\vec{p}_1' = p_1' \vec{u}$. Cette expression définit le vecteur $\vec{v}$ que l'on choisit comme axe des $\vec{x}$ de notre repère de collision. Elle permet aussi de calculer la direction d'émission de la particule 1 après la collision.

b Calcul des impulsions finales

Pour aller plus loin, et expliciter $\vec{p}_1'$, on a besoin des valeurs de s et t (variables de Mandelstam) pour la collision.

$$s = (\underline{P}_1 + \underline{P}_2)^2 = p_1 p_2 (1 - \cos(\vec{p}_1, \vec{p}_2)) \quad (\text{VI.14})$$

$$t = (\underline{P}_1 - \underline{P}_1')^2 = p_1 p_1' (1 - \cos(\vec{p}_1, \vec{p}_1')) \quad (\text{VI.15})$$

Comme les variables de Mandelstam sont des scalaires de Lorentz, on calcule t dans le référentiel du centre de masse.

Pour cela, on choisit de fixer l'angle de diffusion dans ce référentiel suivant la formule :

$$\theta^* = \pi \frac{b-r}{r} \quad (\text{VI.16})$$

Avec b le paramètre d'impact calculé lors du test des critères de collision^g. Ce choix revient à procéder de façon similaire à un calcul de collision de sphères dures où la valeur du paramètre d'impact fixe la direction de la particule après la collision (on verra dans le paragraphe suivant qu'il y a sur ce point une difficulté à gérer qui justifie le signe dans l'équation (VI.16)). En particulier, il correspond au cas d'une section efficace différentielle isotrope dans le centre de masse^h.

Une fois θ^* fixé, on peut calculer les impulsions finales des particules. L'équation VI.13 nous donne l'angle de diffusion dans le repère de la collision :

$$\cos \theta = \frac{(s+t)p_1 + tp_2}{|\vec{v}|} \quad (\text{VI.17})$$

^gEn pratique on s'intéresse à la valeur algébrique de b , et on a vu que $|b|$ était un scalaire de Lorentz. La valeur de $|b|$ est donc indépendante du référentiel.

^hDans l'équation de Boltzmann, l'évolution ne dépend pas de la forme de la section efficace différentielle, on a par ailleurs testé que les résultats étaient identiques si l'on utilisait une autre section efficace comme $\theta^* = \pm\pi/2$ ou $\theta^* = \pm\arccos(b/r - 1)$.

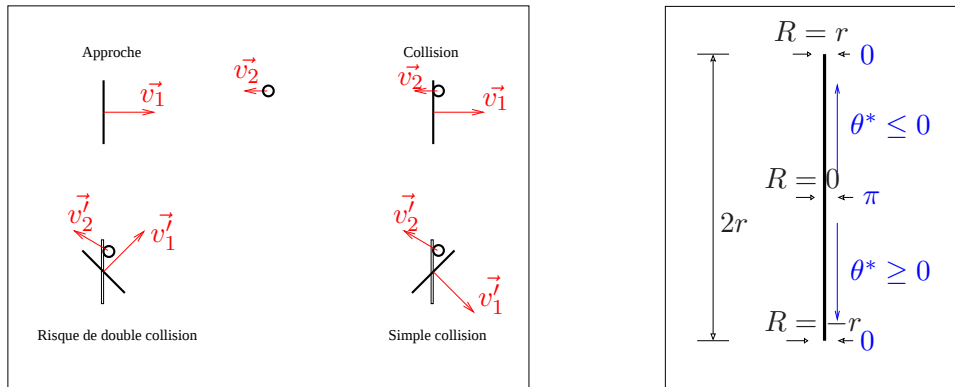
Et le calcul des variables de Mandelstam dans ce référentiel (leurs valeurs étant fixées par un calcul dans le centre de masse) permet d'exprimer p'_1 :

$$p'_1 = \frac{-t}{2[p_1 - (\vec{p}_1 \cdot \vec{u})]}. \quad (\text{VI.18})$$

Les autres coordonnées des quadrivecteurs finaux sont alors simplement données par les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion.

c Cas des doubles collisions

Pour définir proprement θ^* , il faut faire attention à certains cas non physiques. Si la valeur de l'angle est calculée à partir de la valeur du paramètre d'impact (mimétisme des collisions de sphères dures), son orientation doit être choisie avec attention pour éviter les doubles collisions (que 2 particules qui ont réalisé une collision puissent en réaliser une seconde juste après). La figure VI.3 expose schématiquement le problème, et comment on choisit l'orientation de θ^* pour le résoudre.



(a) les doubles collisions : On voit bien que lors de l'impact en fonction de la valeur de l'angle de diffusion θ , le problème des doubles collisions peut se poser.

(b) Angle de diffusion fonction du paramètre d'impact

FIG. VI.3 – Visualisation des cas pouvant donner lieu à des doubles collisions et comment les éviter.

VI.4 Implémentation et structure du code

On a vu que l'équation de Boltzmann ne cherchait pas à déterminer exactement l'évolution au cours du temps de chacune des particules du système. L'idée était de déterminer l'évolution de ce qu'on a appelé la fonction de distribution à une particule. Numériquement l'approche est différente.

Pour résoudre numériquement une équation de Boltzmann, l'idée est de se donner des conditions initiales et de suivre les trajectoires de chacune des particules au travers des collisions $2 \rightarrow 2$

qu'elle subie. Les conditions initiales sont obtenues par une méthode Monte-Carlo : on tire aléatoirement les caractéristiques (positions et impulsions) des particules sur une distribution qui dépend du problème que l'on cherche à étudier.

Les positions sont tirées dans une boîte carrée de côté L , et le temps est discrétisé en intervalle de longueur dt^i . A chaque pas de temps, il est nécessaire de déterminer quelles particules réalisent une collision. Cette étape demande de l'ordre de N^2 opérations (où N est le nombre de particules dans la simulation), ce qui rend l'algorithme très lent. Pour limiter le nombre d'opérations, on discrétise l'espace en N_{case}^2 cases carrées de côté L/N_{case}^j .

Le pas d'intégration en temps est choisi de sorte qu'une particule qui se trouve dans une case donnée ne puisse, en un pas de temps, faire de collision qu'avec une autre particule soit de la même case soit d'une case voisine. Les particules étant de masse nulle, leur vitesse vaut c . Puisque l'on travaille dans la convention $c = 1$, cela fixe le pas d'intégration en temps à :

$$dt = \frac{L}{2N_{case}} \quad (\text{VI.19})$$

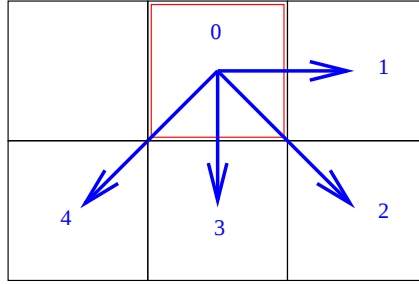


FIG. VI.4 – Représentation schématique du processus de passage en revue des 8 cases voisines pour le critère de collision. Seule la moitié des cases voisines est prise en compte pour éviter les doubles comptages.

L'évolution du système se fait en identifiant au début de chaque pas de temps quelles particules se trouvent dans quelle case. On scanne ensuite l'ensemble des paires de particules de chaque case, et avec un test de collision, on sélectionne les particules qui vont réaliser une collision pendant le pas de temps. Dans un second temps, on procède de même en scannant les cases voisines comme indiqué sur la figure VI.4. Les particules qui ne réaliseront pas de collision se propagent alors en ligne droite.

De cette façon, on a réduit considérablement le nombre d'opération nécessaires à chaque pas de temps. Il reste néanmoins à déterminer le paramètre N_{case} . Celui-ci est fixé en optimisant le temps de calcul.

Ce découpage de l'espace en cases est uniquement une simplification numérique. Le temps de calcul de la simulation est alors la somme de 2 composantes :

- Un terme correspondant au passage en revue des N_{case}^2 cases à chaque pas de temps.

Pour que l'évolution du système se fasse sur une durée macroscopique ($t \propto L$, L étant

ⁱOn verra comment fixer dt dans la suite.

^jOn verra que la valeur de N_{case} est fixée afin de minimiser à la fois les erreurs et le temps de calcul.

la dimension caractéristique macroscopique du problème), il est nécessaire de considérer N_{case} pas de temps. Le temps de calcul correspondant au “scan” des cases au cours du temps est donc proportionnel à N_{case}^3 .

- Un terme correspondant aux calculs des collisions. Pour chaque pas de temps, on passe en revue N_{case}^2 cases, et pour chacune d’elles, la probabilité d’interaction est proportionnelle au carré de la densité de particules ($\mathcal{P} \simeq (N/N_{case}^2)^2$). Le temps de calcul correspondant aux collisions est donc proportionnel à $(N/N_{case}^2)^2 N_{case}^3$.

Au final, le temps de calcul est donné par :

$$t_{calc} \propto N_{case} \left[\alpha N_{case}^2 + \beta \left(\frac{N}{N_{case}^2} \right)^2 N_{case}^2 \right] = \alpha N_{case}^3 + \beta \frac{N^2}{N_{case}} \quad (\text{VI.20})$$

Pour déterminer la valeur de N_{case} , on optimise la durée du calcul par rapport au nombre de cases :

$$\frac{\partial t_{calc}}{\partial N_{case}} = 3\alpha N_{case}^2 - \beta \frac{N^2}{N_{case}^2}. \quad (\text{VI.21})$$

Cela revient à considérer :

$$N_{case} \propto \sqrt{N}. \quad (\text{VI.22})$$

En pratique, on utilise $N_{case} = 1.4\sqrt{N}$, où le facteur 1.4 est ajusté numériquement.

VI.5 Evaluation des erreurs

Avant de passer à la validation du code de résolution numérique, il est nécessaire d’identifier les erreurs systématiques liées à la structure de l’algorithme. 3 points peuvent être à l’origine d’erreurs dans la résolution numérique :

- **Les collisions multiples** : Dans un pas de temps donné, une particule ne peut faire qu’une **unique** collision. Même si d’autres collisions étaient possibles, le code ne les prend pas en compte. Comme la probabilité de réaliser une collision pendant un pas de temps dt est donnée par :

$$P_c = \frac{N\sigma dt}{L^2} = \frac{dt}{\lambda_{mfp}} \simeq D \quad (\text{VI.23})$$

on évalue cette erreur comme proportionnelle à D .

- **Le scan des cases** : Lorsque l’on passe en revue les cases suivant le schéma présenté sur la figure VI.4, on introduit une direction privilégiée. En pratique cela peut introduire des erreurs liées, à l’ordre des collisions. Pour éviter de telles erreurs, ainsi que pour éviter de devoir prendre en compte l’ordre des collisions dans une case. Le nombre de cases est fixé de sorte qu’on ait en moyenne une particule par case ($N_{case} \propto \sqrt{N}$). On a donc $dt = 0.5L/N_{case} \simeq L/\sqrt{N} = d$. Dans le cas où $D \ll 1$ ($d \ll \lambda_{mfp}$)^k, ces erreurs sont négligeables, et l’on a vérifié que l’inversion des directions spatiales ne changeait rien aux résultats.

^kAvec λ_{mfp} fixé, puisqu’on évalue les erreurs systématiques pour une physique donnée.

- **Cinématique des collisions** Dans les collisions, on a choisi de procéder en utilisant des interactions instantanées. Ce choix entraîne l’existence d’un problème de causalité (transmission d’une information plus vite que c sur une distance r). Ici encore, la limite $D \rightarrow 0$ résout le problème car $D \propto \sigma/d \propto r/d$, avec d la distance inter-particulaire moyenne (voir équation (VI.1)). Une autre erreur est également “corrigée” dans cette limite : la non conservation du moment cinétique lors d’une collision (le couple liée à la variation de la direction de l’impulsion est nulle dans la limite $r \rightarrow 0$).

On a vu que les erreurs systématiques étaient proportionnelles à la valeur du coefficient de dilution du système. Ceci traduit dans l’approche numérique l’hypothèse d’application de l’équation de Boltzmann. Dans les calculs numériques, **la physique n’est donc sous contrôle que dans la limite où l’on s’intéresse à un système dilué.**

VI.6 Validation de la résolution numérique

VI.6.1 Test de la thermalisation d’un gaz en boîte

a Enoncé du problème

Le théorème H prévoit qu’un système, composé de particules de masse nulle, obéissant à l’équation de Boltzmann, converge aux temps longs vers une distribution d’équilibre donnée par :

$$\frac{dN}{dp_x dp_y} = A e^{-\frac{E}{T}} = A e^{-\beta E} \quad (\text{VI.24})$$

où E est l’énergie des particules.

Pour vérifier ce résultat on se donne une distribution homogène dans une boîte de côté L avec conditions aux limites périodiques. La distribution initiale d’impulsion est choisie isotrope et loin de l’équilibre (toutes les particules possèdent initialement la même énergie E_0).

Le paramètre T de l’équation (VI.24) est fixé grâce à la conservation de l’énergie totale. Un calcul simple donne pour une distribution d’énergie de Maxwell-Boltzmann $\langle E \rangle = 2NT$ alors que pour les conditions initiales choisies on a $\langle E \rangle = NE_0$. On obtient donc :

$$T = \frac{E_0}{2}. \quad (\text{VI.25})$$

Le temps caractéristique de thermalisation du système est donné par le temps moyen nécessaire à une particule pour réaliser une collision. Dans le système d’unité $c = 1$ ce temps est donné par le libre parcours moyen :

$$\tau = \frac{L^2}{\sigma N} \quad (\text{VI.26})$$

avec L la longueur d’un côté de la boîte, σ la section efficace d’interaction (proportionnelle à la taille d’une particule) et N le nombre de particules considérées.

Pour valider la résolution numérique de l’équation de Boltzmann, il faut que pour $t \gg \tau$ on observe le système dans un état d’équilibre.

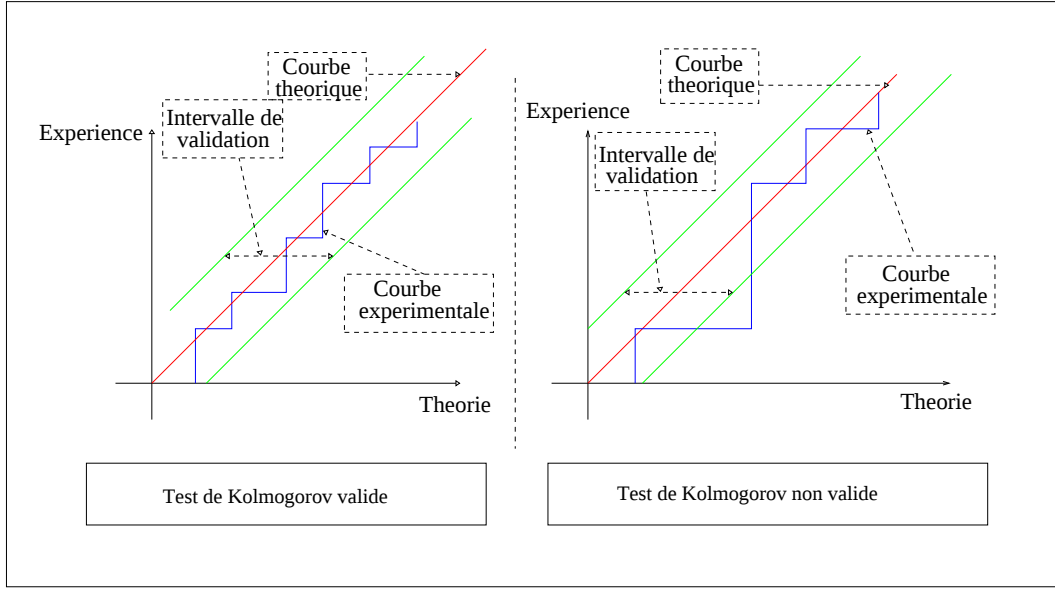


FIG. VI.5 – Présentation schématisée du test de Kolmogorov-Smirnov. Un test est considéré comme valide si la courbe correspondant au système ne s'éloigne jamais de la droite $y = x$ de plus d'une distance Δ correspondant aux fluctuations statistiques [69].

b Test de Kolmogorov

Pour vérifier à un instant donné que la distribution d'énergie du système est bien donnée par une distribution de Boltzmann, on réalise un test statistique dit de "Kolmogorov-Smirnov". Le principe de ce test est schématisé sur la figure VI.5.

Au départ, on choisit une observable ordonnée x distribuée avec une probabilité $\mathcal{P}(x)$. Le test de Kolmogorov revient à comparer la distribution intégrée de la quantité x prédite théoriquement et calculée numériquement (ou mesurée expérimentalement). Pour cela, on trace dans le plan (Q_{mesure}, Q_{tho}) ¹ la courbe correspondant au système, et l'on vérifie qu'elle ne s'écarte de la droite $y = x$ jamais de plus d'une valeur Δ correspondant à l'amplitude des fluctuations statistiques [69].

Dans notre cas, il s'agit d'un test sur la probabilité intégrée en énergie. L'idée est de comparer le nombre de particules d'énergie inférieure à une énergie donnée, comptées dans le système, avec le résultat analytique obtenu pour une distribution de Boltzmann (Annexe C.2) :

$$f_{tho}(E) = \beta^2 N [T^2 (e^{-\beta E} - 1) + (E e^{-\beta E}) T] \quad (\text{VI.28})$$

L'amplitude des fluctuations statistiques définit un intervalle de validation donné par $\Delta = 1,37\sqrt{N}$ [69].

¹On a défini :

$$Q_i(X) = \int_0^X \mathcal{P}_i(x) dx \quad (\text{VI.27})$$

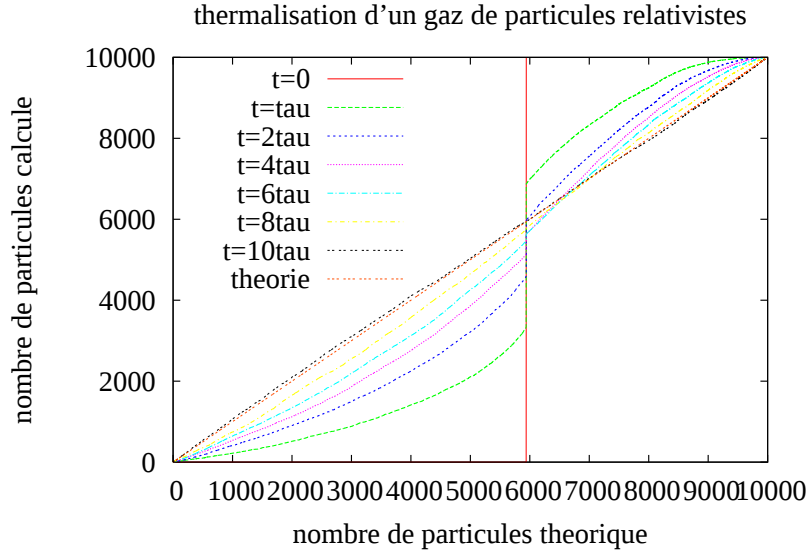


FIG. VI.6 – Résultat du test de Kolmogorov pour la simulation, les courbes sont indexées par la durée d'évolution comptée en unité de temps caractéristique de collision ($\tau = 1/\lambda_{mfp}$).

c Résultat du test de Kolmogorov

La figure VI.6 compile les résultats des tests de Kolmogorov obtenus à différents temps. On voit clairement la convergence vers la distribution d'équilibre pour $t > 10\tau$.

On peut donc considérer que notre résolution numérique de l'équation de Boltzmann est validée.

VI.6.2 Test du nombre de collisions simulées.

Un autre test possible consiste à vérifier que le nombre de collisions simulées pendant une durée t correspond bien à la prédiction théorique pour un gaz thermalisé.

Pour ce test, on considère un système similaire au précédent **mais avec une distribution d'énergie initiale thermalisée**.

Théoriquement, pour un système à l'équilibre, le nombre de collisions est donné par :

$$\frac{dN_{coll}^{theo}}{dSdt} = \sigma \int d^2\vec{p}_1 d^2\vec{p}_2 f_1 f_2 v_{rel}. \quad (VI.29)$$

Les particules étant de masses nulles, le terme de vitesse relative se simplifie (annexe A.2) on obtient :

$$v_{rel} = 1 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2. \quad (VI.30)$$

Comme la distribution de vitesse est isotrope, il n'y a pas d'orientation privilégiée pour les vitesses, la moyenne sur toutes les orientations possibles du terme de vitesse relative, dans l'équation (VI.29) vaut alors 1.

L'équation (VI.29) s'intègre alors en :

$$N_{coll}^{theo} = \frac{\sigma N^2 t}{2L^2}. \quad (VI.31)$$

Le tableau VI.6.2 compare les nombres de collisions théoriques et simulées dans le programme. Il permet également de tester les erreurs systématiques.

L	durée	N	r	D	N_{collMC}	$N_{colltheo}$	$\delta_{ncoll}/N_{colltheo}$
200	500	10000	0.08	0.08	95677	100000	0.04323
200	500	10000	0,12	0,12	141104	150000	0.059
200	500	10000	0,16	0,16	184972	200000	0.075
200	500	10000	0,2	0,2	227480	250000	0.09
L	durée	N	r	D	N_{collMC}	$N_{colltheo}$	δ_{ncoll}
200	500 (t_{min})	10000	0.08	0.08	95677	100000	4323
200	1000 (t_{int})	10000	0.08	0.08	191248	200000	8750
200	2000 (t_{max})	10000	0.08	0.08	382916	400000	17084

TAB. VI.1 – Table de données liées à l'étude du nombre de collisions calculées par la simulation

Une étude des 4 premières lignes du tableau permet de vérifier la dépendance linéaire dans le facteur de dilution D .

La seconde partie du tableau permet de vérifier que l'extrapolation à $D = 0$ est bien compatible avec les prédictions théoriques aux erreurs statistiques près. On commence par calculer le coefficient de correction des effets de dilution finie comme :

$$\Delta_D = \frac{N_{collMC}(t_{max}) - N_{collMC}(t_{min})}{t_{max} - t_{min}} = 1.04443. \quad (VI.32)$$

On considère alors la valeurs de N_{collMC} pour le temps intermédiaire, et on lui applique le facteur de correction. On obtient alors :

$$N_{collMC}^{corri}(t_{int}) = \Delta_D \times N_{collMC}(t_{int}) = 1,04443 * 191248 = 199745 \quad (VI.33)$$

Pour l'instant intermédiaire le nombre de collisions théorique est donné par $N_{collth}(t_{int}) = 200000$ ($\sqrt{N_{collth}(t_{int})} = 447.21$). On a donc bien retrouvé le nombre théorique de collisions aux erreurs statistiques près.

CHAPITRE VII

Application à la physique des collisions d'ions lourds

Sommaire

VII.1 Modifications structurelles de l'algorithme	64
VII.1.1 Conditions initiales	64
VII.1.2 Modification de la structure du code	66
VII.2 Evaluation du degré de themalisation du système	66
VII.3 Complexité numérique et régime hydrodynamique	67
VII.4 Limites d'application de notre approche	67
VII.4.1 Le problème de la dilution	68
VII.4.2 L'équation d'état du système	68
VII.4.3 Simulation à 2 dimensions	69
VII.5 Améliorations possibles de la résolution numérique	69
VII.5.1 Introduction de particules massives	69
VII.5.2 Extension à 3 + 1-dimensions	72
VII.6 Conclusion	73

Dans le chapitre précédent, j'ai explicité le principe de la résolution numérique de l'équation de Boltzmann à 2 dimensions spatiales que j'ai mise en place. Cette résolution numérique a été validée par le test de Kolmogorov, et l'on s'est assuré que les erreurs systématiques étaient bien comprises.

Je vais maintenant discuter les modifications à apporter à l'algorithme pour étudier la physique des collisions d'ions lourds. Ce chapitre se décompose en 3 parties : après avoir expliqué les changements structurels nécessaires de l'algorithme, je détaillerai les conditions initiales utilisées avant de discuter les limites d'application de l'algorithme. Pour finir je présenterai les différentes améliorations que j'ai envisagées, je montrerai alors des résultats préliminaires obtenus avec ces versions améliorées.

VII.1 Modifications structurelles de l'algorithme

Dans le but d'appliquer notre résolution numérique de l'équation de Boltzmann aux collisions d'ions lourds, il est nécessaire de modifier l'algorithme de résolution numérique présenté au chapitre précédent.

Dans une collision (non centrale), la distribution initiale de matière (dans le plan transverse) est anisotrope, et le système formé aux premiers instants subit une dilution isentropique jusqu'au "freeze-out".

Pour appliquer notre algorithme aux collisions d'ions lourds, nous devons donc définir des conditions initiales "réalistes" et modifier le code pour pouvoir traiter le cas d'un système en expansion.

VII.1.1 Conditions initiales

Les conditions initiales sont choisies afin de simuler la matière formée dans les premiers instants d'une collision d'ions lourds ultrarelativistes.

a Distribution de matière

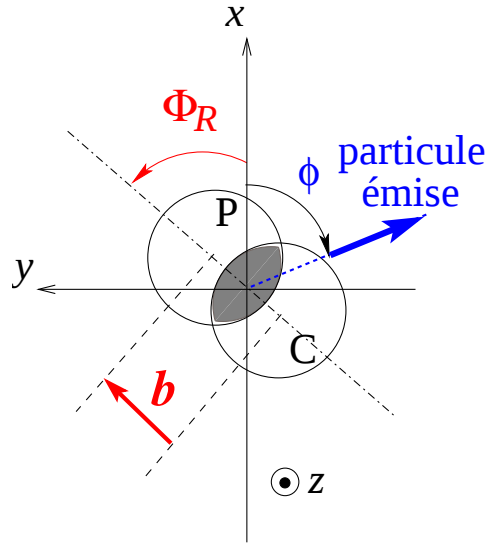


FIG. VII.1 – Représentation schématique de la géométrie d'une collision non centrale dans le plan transverse.

La géométrie (dans le plan transverse) d'une collision non centrale est schématisée sur la figure VII.1. La zone de superposition des noyaux, aussi appelée zone d'interaction, possède une forme "en amande". Pour rendre compte de ce type de distribution, on a adopté un profil de densité gaussien à 2 dimensions, les largeurs de la gaussienne σ_x et σ_y sont choisies différentes (pour les détails de l'implémentation numérique, voir Annexe D.1). Ce choix d'un profil gaussien est guidé par la simplicité de son implémentation numérique. Par ailleurs, l'idée est, en premier

lieu, de réaliser des études génériques, au sens où les résultats ne dépendent pas de la géométrie initiale. On a, en particulier, étudié les observables v_2/ϵ , et $v_4/(v_2)^2$ dans lesquelles la composante géométrique se simplifie entre numérateur et dénominateur (voir section IV.1.3(b)). Enfin, en ce qui concerne les rayons HBT, W. Broniowski et al [70], ont montré que l'utilisation de conditions initiales gaussiennes est un ingrédient fondamental de la résolution du puzzle HBT au RHIC.

L'utilisation de cette nouvelle distribution de matière impose de redéfinir les paramètres caractéristiques du système :

La taille caractéristique R est maintenant donnée par :

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\frac{1}{\sigma_x^2} + \frac{1}{\sigma_y^2}} \quad (\text{VII.1})$$

et son aire (initiale) par

$$S = 4\pi\sigma_x\sigma_y. \quad (\text{VII.2})$$

L'anisotropie de la distribution initiale peut être caractérisée par son excentricité, définie (car $\langle x \rangle = \langle y \rangle = 0$) telle que :

$$\epsilon = \frac{\langle y^2 \rangle - \langle x^2 \rangle}{\langle y^2 \rangle + \langle x^2 \rangle} = \frac{\sigma_y^2 - \sigma_x^2}{\sigma_y^2 + \sigma_x^2} \quad (\text{VII.3})$$

où $\langle \rangle$ dénotent une moyenne sur les particules.

A noter par ailleurs que l'on a choisi :

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{3}{2}. \quad (\text{VII.4})$$

De cette façon, on simule un système possédant une grande excentricité. Les coefficients de flot étant proportionnels à l'excentricité initiale, on limite ainsi l'effet des erreurs statistiques.

b Distribution d'énergie-impulsion

2 lois de probabilité pour la distribution d'énergie peuvent être utilisées (l'implémentation est également détaillée en annexe D.2), en fonction de ce que l'on veut étudier :

- **Distribution thermique** : Une distribution de Maxwell-Boltzmann dont la température est choisie proportionnelle à la racine carrée de la densité, ce qui correspond à l'équation d'état du corps noir à 2-dimensions [71]. Ce choix est dicté par un souci de cohérence avec les calculs d'hydrodynamique idéale avec lesquels nous avons comparé nos résultats [72]^a.
- **Distribution type "Color Glass"** : L'autre distribution d'énergie implémentée dans le code correspond à la distribution non intégrée de gluons dans le modèle du Color Glass Condensate (CGC) telle que dérivée dans [73, 74]. Dans ce cas, c'est l'échelle de saturation (échelle d'énergie à partir de laquelle les effets de la saturation se font sentir) qui joue le rôle d'une température effective^b.

^aLa comparaison impose l'emploi de conditions initiales identiques dans les deux codes.

^bEn pratique, comme cette distribution n'est pas continue (discontinuité en $p_t/\Lambda_s = 1, 5$), elle ne peut être utilisée pour travailler sur des observables différentielles $v_{2,4}(p_t)$. On ne l'a donc utilisée que dans l'étude des rayons HBT (voir XI).

Dans les deux cas, la distribution d'énergie est normalisée afin que l'énergie moyenne par particule corresponde au p_t moyen des pions dans les collisions Au-Au à l'énergie maximale du RHIC ($\sqrt{s} = 200$ GeV) soit $\sum_{i=1}^N E_i/N = 420$ MeV, où la somme est faite sur les particules.

La distribution d'impulsion, quant à elle, est choisie isotrope. En effet, les particules créées aux premiers instants de la collision le sont par des interactions partoniques. L'échelle caractéristique de tels processus est bien plus petite que R . Il ne doit donc pas y avoir de direction privilégiée dans le plan (x, y) .

VII.1.2 Modification de la structure du code

La résolution numérique de l'équation de Boltzmann présentée dans le chapitre précédent a été validée en étudiant la thermalisation d'un gaz relativiste dans une boîte avec conditions aux limites périodiques. La dynamique de la matière créée dans les collisions d'ions lourds est très différente. Le système créé aux premiers instants de la collision subit une expansion dans le vide. Pour poursuivre notre étude, il est donc nécessaire de rendre notre résolution numérique compatible avec un tel système sans toucher à l'algorithme de collision.

Le système est toujours contenu dans une boîte de côté L , sa taille initiale étant donnée par :

$$L = 5 \times 2 \times \max(\sigma_x, \sigma_y). \quad (\text{VII.5})$$

Le facteur 5 est choisi de sorte que la probabilité de tirer les coordonnées spatiales d'une particule en dehors de la boîte soit 10^{-7} . Néanmoins, si un tel cas se présente, on rejette les coordonnées et on réitère le tirage.

Cette boîte est toujours découpée en cases de taille L/N_{case} , et le temps discrétisé en intervalles $dt = L/(2 \times N_{case})$. De même la méthode utilisée pour scanner les cases, et les critères de collisions n'ont pas changé. La différence principale est que cette fois la boîte se dilate^c, L est donc une fonction du temps suivant la loi :

$$L(t) = L(0) + \frac{t}{dt} \frac{L(0)}{N_{case}} \quad (\text{VII.6})$$

avec $L(0)$ la taille initiale du système. Ce choix, pour le facteur de dilatation, revient à augmenter la taille de la boîte de $2 \times dt$ à chaque pas de temps (les particules sont de masse nulle, elles se propagent donc à une vitesse $c = 1$). On interdit ainsi aux particules de sortir de la boîte.

Un test supplémentaire comptant les particules dans la boîte assure qu'aucune particule n'est ainsi perdue.

VII.2 Evaluation du degré de thermalisation du système

La taille caractéristique du système étant maintenant donnée par R , la définition du nombre de Knudsen devient :

$$K = \frac{\lambda}{R}. \quad (\text{VII.7})$$

^cMais le nombre de cases N_{case} reste constant

K compte donc la taille caractéristique du système en unité de libre parcours moyen. On peut donc relier K au nombre moyen de collisions subies par une particule durant l'évolution :

$$N_{coll/part} \simeq \frac{1}{K} \quad (\text{VII.8})$$

K compte le degré de thermalisation du système, au sens où, indépendamment de la distribution initiale d'énergie^d, un système est considéré thermalisé si ses composantes interagissent suffisamment pour conduire (maintenir) le système vers (dans) un état d'équilibre thermique local ($K \rightarrow 0$ ou $N_{coll/part} \rightarrow \infty$). Le régime opposé étant le régime de vol libre (système non interagissant $K \rightarrow \infty$, $N_{coll/part} = 0$).

Il est important de noter que le libre parcours moyen λ_{mfp} est une quantité locale. Elle dépend en particulier des coordonnées d'espace-temps auxquelles elle est évaluée. De ce fait, elle augmente, et donc K également, avec l'évolution (l'expansion) du système.

VII.3 Complexité numérique et régime hydrodynamique

La remarque précédente sur K est également valable pour le paramètre de dilution D . Les nouvelles conditions initiales définies au paragraphe VII.1.1 imposent de redéfinir D comme :

$$D = \sigma\sqrt{n} = \sigma\sqrt{\frac{N}{4\pi\sigma_x\sigma_y}}. \quad (\text{VII.9})$$

Une étude dimensionnelle indique que K et D sont de bons paramètres de contrôle pour le problème.

Les équations VII.9 et VII.7 permettent d'écrire :

$$N \propto \frac{8\pi}{D^2 K^2}. \quad (\text{VII.10})$$

Résoudre l'équation de Boltzmann dans le régime hydrodynamique ($K \rightarrow 0$ et $D \rightarrow 0$) impose donc d'utiliser un grand nombre de particules dans la simulation Monte-Carlo. Comme le temps de calcul croît comme $N^{3/2}$, Il n'est pas possible de travailler avec des valeurs arbitrairement petites de K et D . Pour comparer une observable à l'hydrodynamique, on étudie donc sa dépendance en K et D , puis on extrapole les résultats dans la limite $D = K = 0$.

VII.4 Limites d'application de notre approche

Nous avons pu tester que la physique contenue dans l'équation de Boltzmann était bien rendue par notre résolution numérique sous réserve de prendre en compte l'erreur liée à la dilution. Avant d'aller plus loin dans le détail des études que j'ai réalisées, il est nécessaire de se poser une question : *Dans quelle mesure, l'équation de Boltzmann (et donc notre résolution numérique) décrit-elle la physique du milieu créé dans une collision d'ions lourds ?* Chercher la réponse à cette question nous pousse à identifier les limites de notre approche.

^dQui est choisie thermique afin de pouvoir comparer nos résultats avec les calculs d'hydrodynamique (on utilise les même conditions initiales) voir section b

VII.4.1 Le problème de la dilution

La première hypothèse de l'équation de Boltzmann est qu'elle ne décrit que des gaz dilués. Peut-on parler de gaz dilués pour décrire la matière formée dans les collisions d'ions lourds ? La réponse est probablement non. Dans [75, 76, 77], S. Gupta a cherché à évaluer la "liquidité" l ($l \propto 1/D$ avec D notre paramètre de dilution) de la matière créée dans une collision^e. En se basant sur des calculs de QCD sur le réseau (formule de Kubo pour la conductivité électrique dans le plasma), il trouve que les résultats expérimentaux correspondent à $l \simeq 0.8$, ce qui caractérise à un milieu non dilué ($l = 0.8 \Leftrightarrow D = 1.25$).

Dans la partie suivante, je présenterai l'étude que j'ai menée du flot elliptique. Nous verrons que nous avons évalué la section efficace d'interaction partonique à $\sigma \propto 1$ mb. Ce qui correspond à une valeur de $D = N_p \sigma / R^2 = 1$, où R correspond à la taille du système ($R \simeq 10$ fm), N_p dénote la multiplicité de particules créées ($N_p = 1000$ pour les collisions Au-Au au RHIC à $\sqrt{s} = 200$ GeV^f). Clairement, la dilution du système est un facteur limitant à notre approche. Il n'est par contre pas possible de considérer comme physiques les résultats du code pour $D \simeq 1$, puisque l'on a montré que le principe de causalité n'était pas vérifié pour des valeurs finies de D VI.5^g.

VII.4.2 L'équation d'état du système

Comme l'équation de Boltzmann ne décrit que les systèmes dilués, avec des interactions de type "sphères dures", elle ne s'applique donc qu'aux gaz parfaits. On a vu dans l'introduction, que la matière créée dans une collision d'ions lourds passait par différents états (phase partonique, puis hadronique avant le freeze-out thermique qui gel des interactions). Cette évolution complexe se traduit par une équation d'état non triviale. Des calculs de QCD sur le réseau ont permis de l'étudier dans la limite d'un système thermalisé [78, 79].

L'équation d'état d'un système qui obéit à l'équation de Boltzmann est celle d'un gaz parfait. Dans notre cas, les quasi-particules de la simulation étant de masse nulle et le système à 2 dimensions spatiales, l'équation d'état est donnée par :

$$\varepsilon = 2P \quad \text{ou} \quad c_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{VII.11})$$

avec ε la densité d'énergie, P la pression et c_s la vitesse du son.

L'équation d'état est une caractéristique fondamentale du milieu étudié. L'utilisation d'une équation d'état non réaliste est un facteur fortement limitant pour l'application des équations de transport aux collisions d'ions lourds.

^eLa liquidité correspond au libre parcours moyen en unité de distance inter-particulaire. S. Gupta a considéré que :

- $l \gg 1$ caractérise un gaz
- $l \simeq 1$ est caractéristique d'un liquide.

^f N_p correspond ici à la multiplicité de particules (chargées ou non) produites à rapidité centrale.

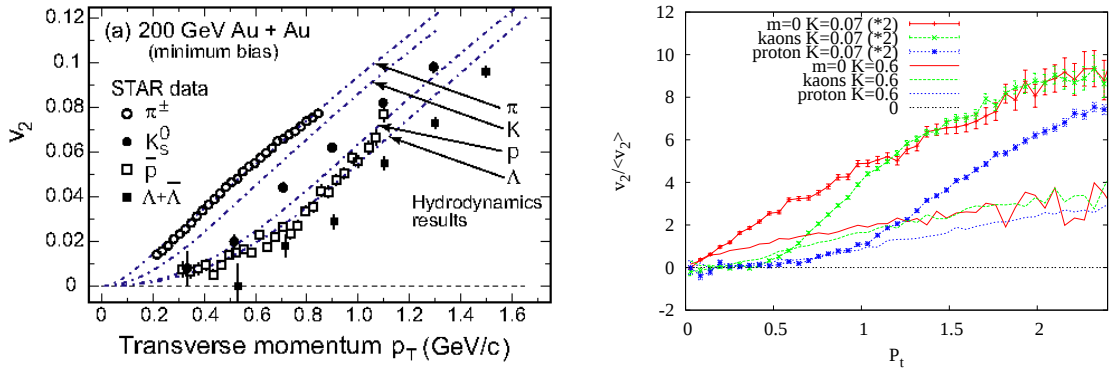
^gLe principe fondamental de la dynamique non plus (non conservation du moment cinétique) pour la gestion classique des collisions

VII.4.3 Simulation à 2 dimensions

Restreindre notre étude des collisions d'ions lourds au seul plan transverse est également une lourde approximation. Physiquement, la contraction de Lorentz des noyaux qui collisionnent donne naissance à un important flux de particules dans la direction longitudinale dans les premiers instants de la collision. Cela se traduit par un refroidissement (une dilution) du système, et modifie donc la dynamique.

Néanmoins, nous nous sommes en premier lieu intéressés au flot elliptique (puis à v_4) qui sont des observables purement transverses. Et une étude comparative, réalisée en hydrodynamique, a montré une évolution qualitativement similaire de v_2 en fonction du temps, pour des calculs à 2 ou 3-dimensions d'espace [80].

VII.5 Améliorations possibles de la résolution numérique



(a) Ordre en masse du flot elliptique différentiel observé par l'expérience STAR au RHIC [81]

(b) Ordre en masse pour le flot elliptique (divisé par $\langle v_2 \rangle$) obtenu dans la simulation de particules massives. 2 séries de simulations sont présentées, pour $K = 0.07$ et $K = 0.6$.

FIG. VII.2 – Ordre en masse du flot elliptique, obtenu dans la simulation ou mesuré expérimentalement

Dans la section précédente, j'ai détaillé les limites de notre approche. Je vais maintenant discuter deux améliorations ayant pour but de s'attaquer à chacun de ces problèmes. Ces travaux n'étant pas finalisés, les résultats sont **préliminaires**. Ils sont présentés ici, puisqu'ils n'ont pas encore leur place dans la discussion physique de la partie suivante.

VII.5.1 Introduction de particules massives

L'introduction de particules massives modifie le code de collision. La contraction de Lorentz donne une forme elliptique aux particules. Les calculs du paramètre d'impact b et de l'instant d'interaction sont modifiés. Mais la structure algorithmique reste la même.

Physiquement, l'introduction de masses dans l'algorithme doit se traduire de plusieurs façons.

Ordre en masse du flot elliptique différentiel Dans le cadre des calculs sur un système thermalisé (hydrodynamique idéale), on observe un “ordre en masse” pour le flot elliptique différentiel ($v_2(p_t)$). L’observation d’un tel ordre au RHIC VII.2(a) laisse penser que le système évolue de façon hydrodynamique. La figure VII.2(b) montre nos résultats pour différents degrés de thermalisation (différent K). Sur la figure, on a tracé $v_2(p_t)/\langle v_2 \rangle$, où la moyenne est réalisée sur l’impulsion transverse, car l’énergie moyenne du système étant dépendante de la masse des particules, on s’intéresse à l’évolution du flot elliptique (en unité de flot moyen) plutôt qu’à sa valeur. L’important est que l’on voit clairement qu’un ordre en masse est également présent dans les systèmes loin de l’équilibre.

Ordre en masse du flot elliptique intégré

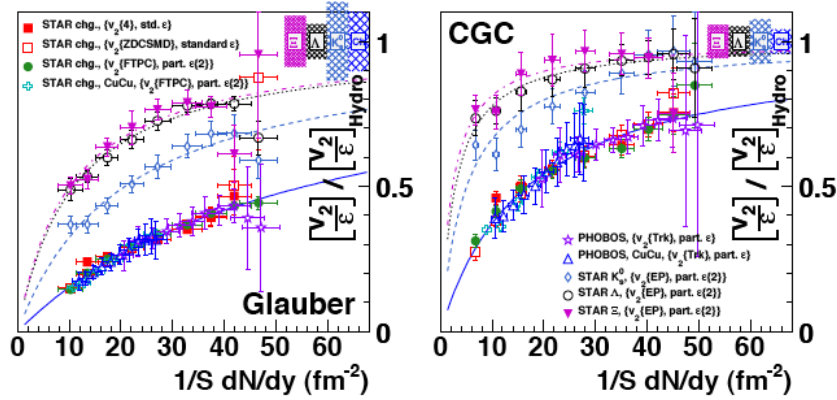


FIG. VII.3 – Ordre en masse de la dépendance en centralité du flot elliptique intégré observé par l’expérience STAR au RHIC [82]

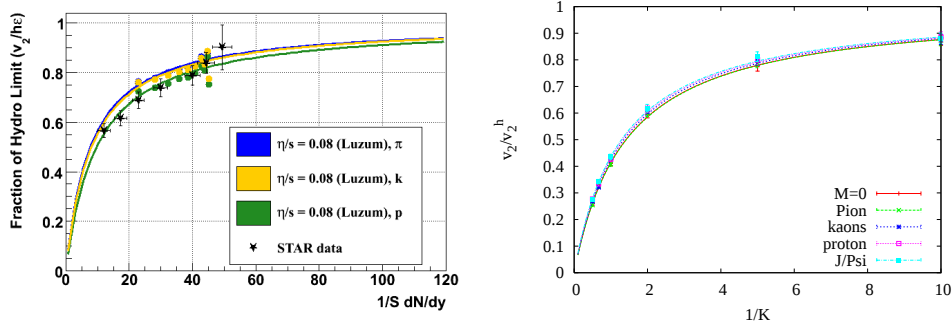
Un autre ordre en masse est expérimentalement observé. Je discuterai dans le chapitre IX la dépendance du flot elliptique avec le degré de thermalisation. Pour ce paragraphe, j’indique seulement que :

$$v_2 = \frac{v_2^h}{1 + K/K_0}, \quad (\text{VII.12})$$

où v_2^h et K_0 sont des paramètres ajustables, et que l’on peut relier le nombre de Knudsen à des quantités expérimentalement mesurables en utilisant :

$$\frac{1}{K} = \sigma \frac{c_s}{c} \frac{1}{S} \frac{dN}{dy}. \quad (\text{VII.13})$$

La combinaison de ces deux équations permet de relier le flot elliptique intégré à une mesure de la centralité de la collision. Expérimentalement, on observe un ordre en masse pour v_2/v_2^h en fonction de la centralité (figure VII.4). Dans le code de résolution numérique de l’équation de Boltzmann pour des particules massives, le même ordre en masse est observé (figure VII.4(b)). A l’inverse, les calculs d’hydrodynamique visqueuse font apparaître un ordre en masse inverse (les



(a) Ordre en masse de la dépendance du flot elliptique intégré obtenu dans le code d'hydro-elliptique intégré avec le nombre de knudsen dynamique visqueuse de [85] pour $\eta/s = 1/4\pi$, obtenu dans le code de transport pour les particules correspondantes à des ajustements sur des particules massives (après régression linéaire en les résultats de l'hydrodynamique visqueuse. $D = 0$).

FIG. VII.4 – Ordre en masse de la dépendance en centralité du flot elliptique intégré, obtenu dans les différents modèles théoriques (hydrodynamique visqueuse et transport).

particules les plus lourdes possèdent une flot elliptique qui converge moins vite que les particules légères sur sa valeur hydrodynamique idéale)^h font apparaître un ordre en masse inverse (plus les particules sont lourdes, plus le flot elliptique convergera lentement vers sa valeur dans la limite hydrodynamique (figure VII.4(a)) [82]. Nous n'avons pas, à l'heure actuelle, été capables de trouver une explication à cette différence de comportements.

Modification de l'équation d'état

Comme indiqué, l'utilisation d'une équation d'état de gaz parfait ($\epsilon = 2P$) n'est pas réaliste pour décrire la physique des collisions d'ions lourds. L'introduction de masses permet de rendre l'équation d'état du système plus "molle" (vitesse du son plus faible). La figure VII.5(a) montre la vitesse du son au carré (c_s^2) pour un système localement thermalisé en expansion isentropique et composé de deux espèces de particules de masses différentes ($m_1 = 139$ MeV soit des pions, et $m_2 = 938$ MeV soit des protons), x dénote la fraction de particules les plus massives. Sur la figure VII.5(b), je compare l'équation d'état du système de Boltzmann à 2 composantes (évoluant à 3 dimensions) avec celle utilisée par [84, 85] dans la phase haute température. L'impossibilité de traiter une transition de phase dans l'équation de Boltzmann interdit de comparer les résultats au-delà.

L'introduction de particules massives est donc une direction prometteuse dans l'étude des collisions d'ions lourds via l'équation de Boltzmann.

^hL'ajustement est réalisé en utilisant l'équation

$$\frac{v_2}{\epsilon} = \frac{\overset{\text{hydro}}{v_2}}{\epsilon} \frac{1}{1 + \frac{1}{0.7} \sigma \overset{\text{hydro}}{c_s} \frac{1}{S} \frac{dN}{dy}} \quad (\text{VII.14})$$

où les termes en rouge sont les paramètres de l'ajustement. L'origine de cette expression sera expliquée dans la section IX.2.2.

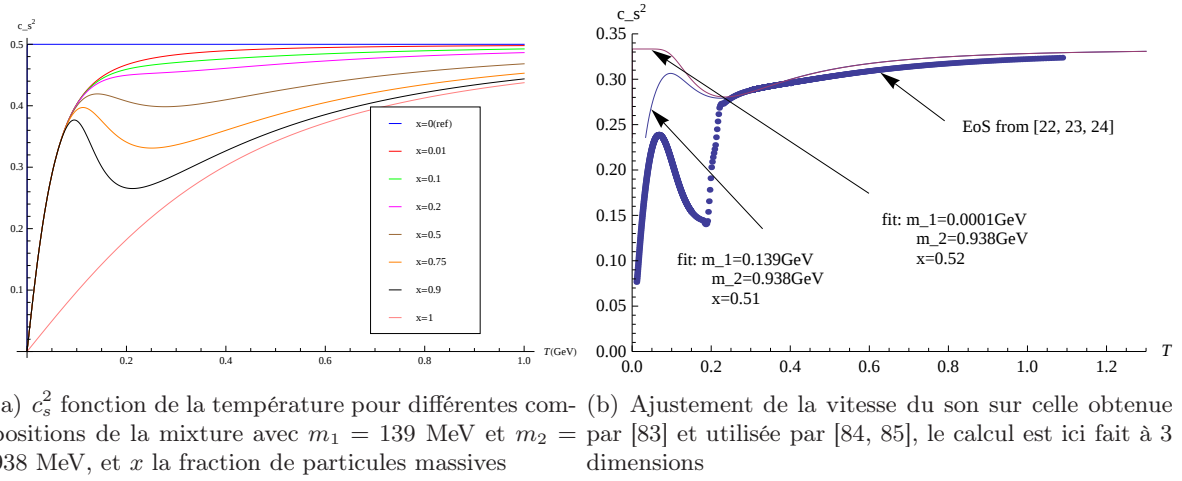


FIG. VII.5 – Effet de l'utilisation des particules massives sur la vitesse du son dans le système.

VII.5.2 Extension à 3 + 1-dimensions

Dès le début de ce projet, il a été question de réaliser une résolution complète de l'équation de Boltzmann à (3 + 1)-dimensions. Les principales différences avec le cas bi-dimensionnel sont d'ordre technique. Pour s'assurer de la dilution du système aux temps longs, on a préféré passer au système de coordonnées temps propre-rapidité défini par :

$$\tau = \sqrt{t^2 - z^2} \quad (\text{VII.15})$$

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t+z}{t-z} \right) \quad (\text{VII.16})$$

pour traiter la direction longitudinale. On travaille donc dans l'espace (τ, x_T, y) .

Par ailleurs, le passage en revue des cases afin de déterminer les collisions possibles s'est considérablement complexifié, on doit maintenant scanner 13 cases voisines (sur les 26 voisines).

Le code de collision a également été modifié, mais par simplicité, on a conservé le même principe, et les collisions sont traitées en coordonnées cartésiennes.

Pour l'instant ce code est en phase de test, la figure VII.6(a) montre le résultat du test de Kolmogorov, sur la distribution de particules intégrée en énergie, pour un système tri-dimensionnel, et VII.6(b) montre le test d'isotropisation des impulsionsⁱ.

Il reste également une difficulté à gérer. Pour traiter correctement la limite hydrodynamique, on a besoin d'un grand nombre de quasi-particules, et d'un maillage fin de l'espace. Cela se traduit par un algorithme gourmand en ressources numériques.

Pour résoudre partiellement ce problème, je travaille à la parallélisation de l'exécution. Cela permettrait, en utilisant un cluster de calcul de réduire quantitativement la durée d'une simulation, mais aussi d'améliorer la précision des résultats^j.

ⁱInitialement l'impulsion est isotrope dans le plan (x, y) et nulle dans la direction z .

^jOn utilisera alors un système très dilué, mais le calcul sera réalisé un faible nombre de fois par chaque processeur, le nombre de processeurs permettant d'obtenir assez de statistique pour une bonne précision des résultats.

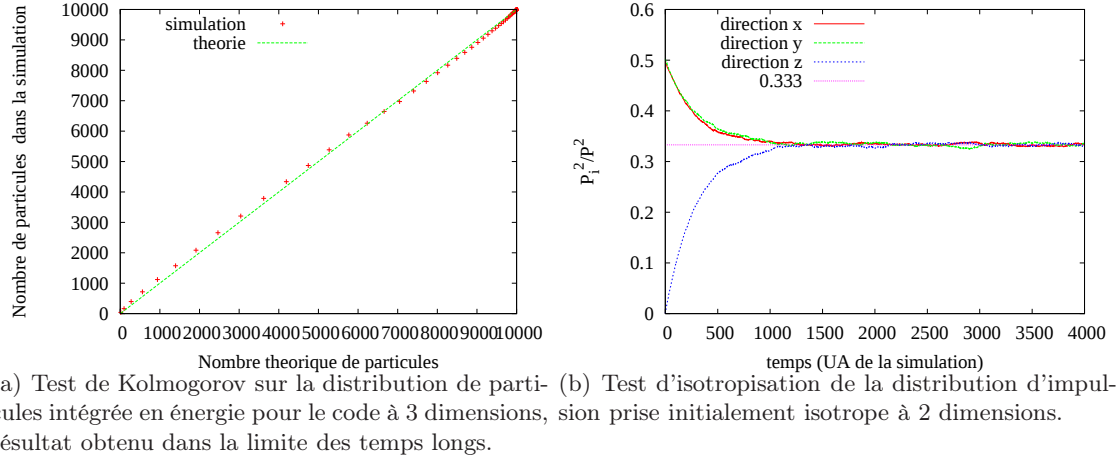


FIG. VII.6 – Tests de thermalisation pour la simulation à $(3 + 1)$ -dimensions

VII.6 Conclusion

Dans cette partie j'ai détaillé le principe de la résolution numérique de l'équation de Boltzmann relativiste que nous avons mis en place. J'ai en particulier vérifié que la physique de l'équation de Boltzmann était bien sous contrôle et identifié l'origine possible d'erreurs systématiques pour nos résultats. Au-delà même de ces erreurs, j'ai discuté les limites physiques de notre approche, en particulier les problèmes liés à l'utilisation d'une équation d'état de gaz parfait, ou de l'hypothèse de gaz dilué pour traiter d'un système dense.

Maintenant que j'ai présenté la partie numérique de mon travail, je vais pouvoir discuter les résultats physiques que nous avons obtenus. La 3ème partie de ce manuscrit leur est dédiée. Elle s'articule de la façon suivante : dans un premier chapitre, je détaille la modélisation possible des conditions initiales, en m'intéressant en particulier au problème des fluctuations d'excentricité. Une fois l'excentricité convenablement définie, j'expliquerai comment extraire de la dépendance en centralité du flot elliptique le degré de thermalisation (la valeur du nombre de Knudsen) correspondant à la matière créée au RHIC. Dans les chapitres IX et X, nous verrons que les effets de la thermalisation partielle ainsi mise en évidence jouent un rôle crucial dans la résolution de problème, d'accord, entre modèle théorique (hydrodynamique idéale) et expériences, tels que la dépendance en centralité de v_4 et le "puzzle HBT", dans l'étude des données du RHIC.

Bibliographie

- [62] K. Huang, “statistical mechanics“, John Wiley and Sons, Inc, chapitre 3 à 6.
- [63] R. C. Tolman, Principles of statistical mechanics, Oxford University Press, Partie 2, chapitres 10 à 12.
- [64] B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer, B. Roulet, Physique Statistique, éditions Hermann, chapitre 4 et compléments.
- [65] S. R. de Groot, W. A. van Leeuwen, Ch. G. van Weert, Relativistic kinetic theory “Principles an Applications“, North-Holland Publisching Company, chapitres 1, 2 et 7.
- [66] B. Betz, D. Henkel and D. H. Rischke, Prog. Part. Nucl. Phys. **62** (2009) 556 [arXiv :0812.1440 [nucl-th]].
- [67] S. Harris, An introduction to the theory of the Boltzmann equation, Holt, Rinehart and Wilson Inc, chapitres 3 à 7 et 10.
- [68] M. Knudsen, Kinetic Theory of Gases
- [69] B. L. van der Waerden, Statistique mathématique, ed Dunod, page 73 et table 5.
- [70] W. Broniowski, W. Florkowski, M. Chojnacki and A. Kisiel, Phys. Rev. C **80** (2009) 034902 [arXiv :0812.3393 [nucl-th]].
- [71] L. Landau, E. Lifchitz, Physique théorique Tome 2, “Théorie du Champ“
- [72] J. Y. Ollitrault, Phys. Rev. D **46** (1992) 229.
- [73] T. Lappi, Phys. Rev. C **67** (2003) 054903 [arXiv :hep-ph/0303076].
- [74] A. Krasnitz, Y. Nara and R. Venugopalan, Nucl. Phys. A **727** (2003) 427 [arXiv :hep-ph/0305112].
- [75] S. Gupta, Pramana **61**, 877 (2003) [arXiv :hep-ph/0303072].
- [76] S. Gupta, J. Phys. Conf. Ser. **50** (2006) 426 [arXiv :hep-ph/0505006].
- [77] S. Gupta, arXiv :hep-ph/0507210.
- [78] F. Karsch, Lect. Notes. Phys, **583** (2002) 209
- [79] O. Kaczmarek, F. Karsch, E. Laermann and M. Lutgemeier, Phys. Rev. D **62** (2000) 034021 [arXiv :hep-lat/9908010].
- [80] C. Gombeaud and J. Y. Ollitrault, Phys. Rev. C **77** (2008) 054904 [arXiv :nucl-th/0702075].
- [81] J. Adams *et al.* [STAR Collaboration], Nucl. Phys. A **757** (2005) 102 [arXiv :nucl-ex/0501009].

- [82] A. Tang, communication privée
- [83] M. Laine and Y. Schroder, Phys. Rev. D **73** (2006) 085009.
- [84] P. Romatschke and U. Romatschke, Phys. Rev. Lett. **99** (2007) 172301 [arXiv :0706.1522 [nucl-th]].
- [85] M. Luzum and P. Romatschke, Phys. Rev. C **78** (2008) 034915 [Erratum-ibid. C **79** (2009) 039903] [arXiv :0804.4015 [nucl-th]].

Article relié à la partie B

Covariant transport theory approach to elliptic flow in relativistic heavy ion collision

Clément Gombeaud and Jean-Yves Ollitrault

Service de Physique Théorique, CEA/DSM/SPHT, CNRS/MPPU/URA2306 CEA Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France

(Received 26 February 2007; revised manuscript received 13 March 2008; published 27 May 2008)

We present a new direct simulation Monte Carlo method for solving the relativistic Boltzmann equation. We solve numerically the two-dimensional Boltzmann equation using this new algorithm. We find that elliptic flow from this transport calculation smoothly converges toward the value from ideal hydrodynamics as the number of collisions per particle increases, as expected on general theoretical grounds but in contrast with previous transport calculations.

DOI: [10.1103/PhysRevC.77.054904](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.77.054904)

PACS number(s): 25.75.Ld, 24.10.Nz, 47.45.Ab, 47.75.+f

Ultrarelativistic nucleus-nucleus collisions at the Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) have been argued to create a “perfect liquid” with an extremely low viscosity [1]. The essential piece of evidence is the large magnitude of elliptic flow at RHIC [2], which is as large as predicted by ideal-fluid models (which assume zero viscosity). Elliptic flow is an azimuthal asymmetry in the momentum distribution of particles, projected onto the plane transverse to the beam direction (z axis): in a collision between two nuclei with nonzero impact parameter, more particles are emitted parallel to impact parameter (x axis) than perpendicular to it (y axis). This asymmetry results from the almond shape of the overlap region between the colliding nuclei, which is transformed into a momentum asymmetry by pressure gradients [3]: microscopically, elliptic flow results from the interactions between the produced particles and is therefore a key observable of the dense matter produced at RHIC.

In the microscopic language of particle physics, ideal fluid and low viscosity translate into small mean free path of a particle between two collisions or, equivalently, large rescattering cross sections between the “partons” created in a collision. The description of the system in terms of partons is itself questionable at the early, dense stage of the collision, but it is nevertheless a helpful, intuitive picture. The natural question that arises then is how large must the partonic cross section be to achieve ideal-fluid behavior, i.e., local thermal equilibrium? How many partonic collisions are needed?

In this article, we address this issue by solving numerically a relativistic Boltzmann equation and comparing the results with relativistic hydrodynamics. It is well known that the Boltzmann equation reduces to hydrodynamics when the mean free path is small (see Ref. [4] for a rigorous proof in the relativistic case). Numerically, however, it has been found [5] that hydrodynamics produces larger elliptic flow (by 30–40%) than the Boltzmann equation. In this article, we address this issue using a different method. A possible explanation for the discrepancy found in Ref. [5] is suggested at the end of this article.

The primary limitation of the Boltzmann equation is that it applies only to a dilute system, where the mean free path of a particle is much larger than the distance between particles, so one need consider only two-body collisions, many-body collisions occurring at a much lower rate. There is no reason to believe that the RHIC liquid is dilute: interactions are

nonperturbative, so both the mean free path and the distance between particles are of order $1/T$, where T is the temperature. Clearly, the Boltzmann equation cannot be used to directly simulate a heavy-ion collision; nevertheless, it has the potential of giving us a grasp on deviations to thermalization.

The relativistic formula for the collision rate between two beams of particle densities n_1 and n_2 , and arbitrary velocities $\mathbf{v}_1$ and $\mathbf{v}_2$ can be written as [6]:

$$\frac{dN_{\text{coll}}}{dt d^3\mathbf{x}} = \sigma n_1 n_2 \sqrt{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2 - |\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|^2/c^2}, \quad (1)$$

where σ is the scattering cross section. There are several methods for implementing this collision rate in Monte Carlo algorithms. The most widely used method [7,8] is the ZPC algorithm [9]: this algorithm treats particles as hard spheres, which collide when their distance in the center-of-mass frame is smaller than $r \equiv \sqrt{\sigma/\pi}$. An alternative method is the stochastic collision algorithm proposed by Xu and Greiner [10].

Here, we implement a new algorithm, where relativistic effects are incorporated in a physically transparent way. The second term under the square root in Eq. (1) is the relativistic correction. It is simply understood, in the case of colliding hard spheres, as a geometrical effect resulting from the Lorentz contraction of the spheres. We take this contraction into account, in the Monte Carlo simulation, by replacing spheres with oblate spheroids, whose polar axis is the direction of motion. As with the other algorithms, Lorentz covariance and locality are broken in the sense that collisions occur instantaneously at a finite distance. However, these violations are small if the system is dilute [8], which is required by the Boltzmann equation. The difference with the ZPC algorithm is that the collision time is determined directly in the laboratory frame, not in the center-of-mass frame.

For sake of simplicity, we consider a two-dimensional gas of massless particles in the transverse plane (x, y). We thus neglect an important feature of the dynamics of heavy-ion collisions, the fast longitudinal expansion. As will be shown below, this is not crucial for elliptic flow, which is essentially unaffected by the longitudinal expansion. Initial conditions for the N particles are generated randomly according to a Gaussian distribution in coordinate space, and an isotropic,

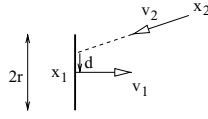


FIG. 1. Picture of a collision between a particle 1 of size $\sigma = 2r$ and a pointlike particle 2. The impact parameter d , as defined in Eq. (3), is negative.

thermal distribution in momentum space:

$$\frac{dN}{d^2\mathbf{x}d^2\mathbf{p}} = \frac{N}{4\pi^2 R_x R_y T^2} \exp \left[-\frac{x^2}{2R_x^2} - \frac{y^2}{2R_y^2} - \frac{p_t}{T(x, y)} \right], \quad (2)$$

with $R_y > R_x$ and $p_t = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$. The temperature $T(x, y)$ is determined as a function of the local particle density n according to $n \propto T^2$, the equation of state of a massless ideal gas in two dimensions.

Particles interact via $2 \rightarrow 2$ elastic collisions. We assume for simplicity that the total elastic cross section σ is independent of the center-of-mass energy s . This is implemented in a Monte Carlo calculation by treating each particle as a rod (due to Lorentz contraction) of length r perpendicular to the velocity. Equivalently, for each pair of colliding particles, one can assume that particle 1 has length $2r$ and particle 2 is pointlike (see Fig. 1). The impact parameter of the collision is

$$d = -\frac{\mathbf{e}_z \cdot [(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \times (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)/c]}{1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2/c^2}. \quad (3)$$

This quantity is Lorentz invariant. Our collision algorithm is deterministic: the scattering angle in the center-of-mass frame θ^* is determined as a function of d , as in classical mechanics. The results presented here are obtained with an isotropic differential cross section, i.e., $\theta^* = \pi(1 - d/r)$. This prescription ensures that particles move away from each other after the collision and do not collide again. The total cross section (which has the dimension of length in two dimensions) is $\sigma = 2r$.

We now define two dimensionless numbers relevant to this problem. The average particle density per unit surface n is¹

$$n = \frac{N}{4\pi R_x R_y}. \quad (4)$$

The typical distance between two particles is $n^{-1/2}$, whereas the mean free path of a particle between two collisions is $\lambda = 1/(\sigma n)$. The ratio of these two lengths is the dilution parameter D :

$$D \equiv \frac{n^{-1/2}}{\lambda} = \sigma n^{1/2}. \quad (5)$$

¹Note that the surface thus defined is a factor of 2 larger than in Ref. [11] and a factor of 4 larger than in Ref. [12]. This new prescription gives the correct result for a uniform density profile, as pointed out by A. Poskanzer (private communication). The average particle densities quoted in this article are thus lower by a factor of 2 than in Tables I and II of Ref. [11].

As explained above, applicability of Boltzmann theory requires $D \ll 1$. In addition, locality and covariance require that the interaction length be much smaller than the mean free path [8,9]. In two dimensions, the interaction length is σ , and $\sigma/\lambda = D^2$: locality and covariance are thus recovered in the limit $D \ll 1$.

The second dimensionless number is the Knudsen number Kn , which characterizes the degree of equilibration by comparing λ with the system size R . The latter quantity can be measured by any average of R_x and R_y . A natural choice for elliptic flow is [11]

$$R \equiv \left(\frac{1}{R_x^2} + \frac{1}{R_y^2} \right)^{-1/2}. \quad (6)$$

The Knudsen number is then defined as

$$\text{Kn} \equiv \frac{\lambda}{R} = \frac{1}{\sigma n R}. \quad (7)$$

Hydrodynamics is the limit $\text{Kn} \ll 1$, whereas the limit $\text{Kn} \gg 1$ corresponds to free-streaming particles. The values of D and Kn can be tuned by varying the cross section σ and the number of particles N .

Note that the mean free path is a local quantity that depends on space-time coordinates: in particular, it increases as the system expands. Strictly speaking, D and Kn defined by Eqs. (5) and (7) are initial values. Dimensional analysis suggests that they are the relevant control parameters for this problem.

Solving the Boltzmann equation in the hydrodynamic limit requires both $D \ll 1$ and $\text{Kn} \ll 1$. This in turn requires a huge number of particles N in the Monte-Carlo simulation: inverting the above equations, one obtains (assuming $R_x \simeq R_y$ for simplicity)

$$N \simeq \frac{8\pi}{D^2 \text{Kn}^2}. \quad (8)$$

Because the computing time scales grows with N like $N^{3/2}$, one cannot implement arbitrarily small values of D and Kn . Instead, we choose to study numerically the dependence of elliptic flow on D and Kn , and extrapolate to the hydro limit $D = \text{Kn} = 0$.

Figure 2 presents our results for the average elliptic flow $v_2 \equiv \langle \cos 2\phi \rangle = \langle (p_x^2 - p_y^2)/(p_x^2 + p_y^2) \rangle$. The aspect ratio of the initial distribution is $R_y = 1.5R_x$, and the Monte Carlo simulation has been pushed to very large times ($t = 100R$), so that all collisions are taken into account. Quite naturally, v_2 decreases monotonically to 0 as Kn increases toward the free-streaming limit $\text{Kn} \rightarrow +\infty$. For a given value of D , the variation with Kn is very well described by the simple formula proposed in Ref. [11]:

$$v_2 = \frac{v_2^h}{1 + \text{Kn}/\text{Kn}_0}, \quad (9)$$

where the parameters v_2^h and Kn_0 are fit to our Monte Carlo results. v_2^h is the limiting value of v_2 when $\text{Kn} \rightarrow 0$, expected to coincide with v_2 from hydrodynamics in the limit $D \rightarrow 0$. Surprisingly, the value of v_2^h depends very little on D : $v_2^h = 0.102 \pm 0.003$. This means that the hydrodynamic

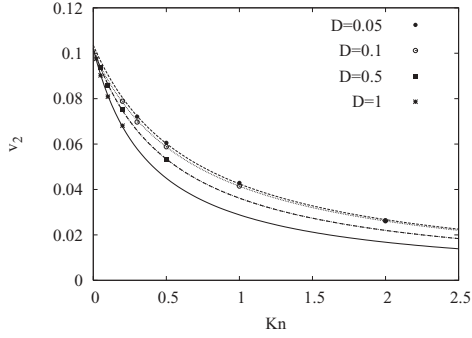


FIG. 2. Variation of the elliptic flow v_2 with the Knudsen number, Kn , for several values of the dilution parameter D . The statistical error on each point is $\delta v_2 = 7 \times 10^{-4}$. For each value of D , Monte Carlo results are fitted using Eq. (9).

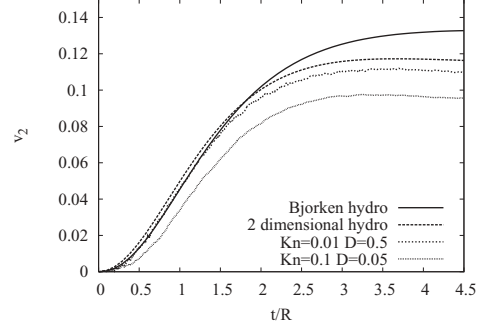


FIG. 3. Time dependence of the average elliptic flow v_2 from the transport model, from the corresponding two-dimensional hydro calculation, and from usual three-dimensional hydro with Bjorken longitudinal expansion.

limit is more general than the Boltzmann equation and applies even if the system is not dilute. Unlike v_2^h , the parameter Kn_0 strongly depends on D . We do not have a simple explanation for this dependence. However, only the limit $D \ll 1$ has a well-defined physical interpretation, as it corresponds to the Boltzmann equation. For larger values of D , locality and causality are broken, and the physical interpretation of the results is less clear. For $D \ll 1$, our fit gives $\text{Kn}_0 = 0.70 \pm 0.03$.

An independent hydro calculation with the same initial conditions was done using the same code as in Ref. [3]. For sake of consistency [5], the equation of state of the fluid is that of a two-dimensional ideal gas (i.e., the equation of state of a dilute gas, as modeled by the Boltzmann equation), whose velocity of sound is $c_s = c/\sqrt{2}$ [13]. The average v_2 at $t = 100R$ is $v_2^{\text{hydro}} = 0.101 \pm 0.003$ (the error bar in the hydro calculation is due to the fact that the calculation is pushed to very large times). This is compatible with the value v_2^h obtained from the Boltzmann calculation: Boltzmann transport theory and ideal hydrodynamics agree in the limit $\text{Kn} \rightarrow 0$, as expected.

The Knudsen number is closely related to the average number of collisions per particle $\bar{n}_{\text{coll}}$. From the definition, Eq. (7), one expects that the number of collisions per particle is $\sim 1/\text{Kn}$. The proportionality constant can be computed exactly for a Gaussian distribution in the limit $\text{Kn} \gg 1$ [14], which yields the relation

$$\bar{n}_{\text{coll}} \equiv \frac{2N_{\text{coll}}}{N} = \frac{4\sqrt{2}}{\pi^{3/2}\sqrt{1+\epsilon}} K\left(\frac{2\epsilon}{1+\epsilon}\right) \text{Kn}^{-1} \simeq \frac{1.6}{\text{Kn}}, \quad (10)$$

where the factor 2 means that each collision involves two particles, $\epsilon = (R_y^2 - R_x^2)/(R_y^2 + R_x^2)$ is the initial eccentricity, and $K(x)$ is the complete elliptic integral of the first kind. We used this formula to check numerically that our algorithm produces the right number of collisions for large Kn . In addition, our numerical results show that the product $\bar{n}_{\text{coll}}\text{Kn}$

is remarkably constant for all values of Kn , so that Eq. (10) is accurate to a few percent. Using Eq. (9), this shows that an average of 2.3 (resp. 9.1) collisions per particle are required to achieve 50% (resp. 80%) of the hydrodynamic “limit” on v_2 .

Figure 3 compares the time dependence of elliptic flow in hydro and in the transport model. The subtle point is that the convergence of $v_2(t)$ toward hydro as $\text{Kn} \rightarrow 0$ is not uniform: for a given value of Kn , deviations from hydro are large at early times and tend to decrease afterwards. More precisely, it can be shown, following the same methods as in Ref. [14], that the early-time behavior is $v_2 \propto t^3$ in the transport model and $v_2 \propto t^2$ in hydro. This is compensated by the late-time behavior: v_2 decreases slowly at large times in hydro (not seen in the figure), whereas v_2 from the transport model stays constant after the last collision has occurred.

Can our two-dimensional results be used in the context of heavy-ion collisions? The essential difference in three dimensions is the fast longitudinal expansion due to the strong Lorentz contraction of the colliding nuclei. Elliptic flow, however, is a purely transverse observable that is little affected by the longitudinal expansion: Fig. 3 displays a comparison between the average elliptic flow computed in two-dimensional hydro and in three-dimensional hydro with Bjorken longitudinal expansion (the initial time in this calculation is $\tau_0 = R/4$, corresponding to $\tau_0 \simeq 0.4$ fm/c in a semicentral Au-Au collision) [15]. Both yield similar results for the magnitude and the time-dependence of v_2 .

One can reasonably expect that deviations from hydro are similar in two dimensions and in three dimensions. The number of collisions per particle, $\bar{n}_{\text{coll}}$, is not the right quantity for carrying out the comparison (neither the transport opacity [8]): in three dimensions, $\bar{n}_{\text{coll}}$ is large at early times (with a fixed partonic cross section, $\bar{n}_{\text{coll}}$ diverges like $\ln \tau_0^{-1}$ as the initial time τ_0 goes to 0), but these collisions do not produce much elliptic flow (see Fig. 3). As argued in Ref. [11], the Knudsen number should be evaluated at the time when elliptic flow develops $t \sim R/c_s$, with $c_s \simeq 1/\sqrt{3}$ in the quark-gluon plasma phase. The mean free path is $\lambda = 1/\sigma n$ with

TABLE I. Expected values of v_2 for semicentral Au-Au collisions at RHIC. For each value of the cross section, we quote the value of the equivalent Debye-screened, leading-order quantum chromodynamics (QCD) cross section [5].

Isotropic σ [mb]	Debye-screened σ [mb]	Kn	v_2/v_2^{hydro}
3	7	0.72	0.49
8	19	0.27	0.72
20	47	0.11	0.87

$n = (1/t)(1/S)(dN/dy)$ and $S = 4\pi R_x R_y$, hence

$$\frac{1}{\text{Kn}} = \sigma \frac{1}{S} \frac{dN}{dy} \frac{c_s}{c}. \quad (11)$$

dN/dy is the total (charged+neutral) multiplicity. For a semicentral Au-Au collision at RHIC, $(1/S)(dN/dy) \simeq 0.8 \text{ mb}^{-1}$. With this definition of Kn, we expect that Eq. (9) should hold approximately in three dimensions, with $\text{Kn}_0 \sim 0.7$. Table I gathers numerical estimates obtained using the same values of σ as in Ref. [5]. For $\sigma = 20 \text{ mb}$, corresponding to a QCD cross section of 47 mb, the transport result should be only $\simeq 10$ –15% below hydro.

For this value of the cross section, Molnar and Huovinen find that v_2 from the transport calculation is lower by 30% than v_2 from hydro [5]. Furthermore, the dependence of their results on σ is at variance with our results. Using Eqs. (9) and (11), the deviations from ideal hydro should decrease as $1/\sigma$ as σ increases. This is very general: dissipative effects are expected to be linear in the viscosity η , which scales like $1/\sigma$. The discrepancy with hydro should be at least twice smaller with $\sigma = 47 \text{ mb}$ than with $\sigma = 20 \text{ mb}$, which is clearly not the case in Fig. 1 of Ref. [5]. In our opinion, this cannot be attributed to dissipative effects.

The origin of the problem may be the dilution condition $D \ll 1$, which is not satisfied in previous transport

calculations. The trick to reduce D in the ZPC cascade algorithm is the “parton subdivision technique”: one multiplies the number of particles N by a large number l , and one divides the partonic cross section σ by l so the Knudsen number Kn is unchanged. The distance between particles in three dimensions is $n^{-1/3}$, which replaces $n^{-1/2}$ in Eq. (5). Taking parton subdivision into account, one obtains $D = \sigma n^{2/3} l^{-1/3}$. The average particle density in a semicentral Au-Au collision at time $t = R/c_s$ is 2.5 fm^{-3} [11]. With $\sigma = 20 \text{ mb}$ and $l = 180$ [5], $D \simeq 0.65$, which is not very small compared to unity. The situation is worse at early times due to the longitudinal expansion: $D \simeq 1.1$ at $\tau_0 = 0.6 \text{ fm}/c$. For $\text{Kn} = 0.11$, carrying out the calculation with $D \simeq 1$ leads to overestimate the deviation from hydro by at least a factor of 2 (see Fig. 2). The reason why previous calculations were done with such large values of D is that small values are hard to achieve numerically: in three dimensions, Eq. (8) is replaced with $N \propto D^{-3} \text{Kn}^{-3}$, and the computing time grows like $N^{4/3} \propto D^{-4} \text{Kn}^{-4}$. This was our motivation for studying first the two-dimensional case.

In summary, we have implemented a new algorithm for solving the relativistic Boltzmann equation. We have studied the convergence of the relativistic Boltzmann equation to relativistic hydrodynamics. Because this requires both a dilute system ($D \ll 1$) and a small mean free path ($\text{Kn} \ll 1$), which is costly in terms of computer time, we have restricted our study to two dimensions. This preliminary study has only addressed the average value of the elliptic flow; differential results as a function of p_t , as well as results on v_4 , will be presented in a forthcoming publication. We have shown that the average elliptic flow computed in the transport algorithm converges smoothly toward the hydrodynamics value as the strength of final-state interactions increases. Isotropic partonic cross sections of 3 and 20 mb should produce, respectively, $\sim 50\%$ and $\sim 90\%$ of the hydro value for v_2 .

We thank Carsten Greiner, Denes Molnar, Aihong Tang, and Zhe Xu for useful comments on the manuscript.

-
- [1] M. J. Tannenbaum, Rep. Prog. Phys. **69**, 2005 (2006).
 - [2] K. H. Ackermann *et al.*, Phys. Rev. Lett. **86**, 402 (2001).
 - [3] J. Y. Ollitrault, Phys. Rev. D **46**, 229 (1992).
 - [4] C. Marle, Ann. Inst. Henri Poincaré Phys. Theor. **10**, 67 (1969).
 - [5] D. Molnar and P. Huovinen, Phys. Rev. Lett. **94**, 012302 (2005).
 - [6] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, 4th ed. (Pergamon Press, New York, 1975), p. 36.
 - [7] B. Zhang, C. M. Ko, B. A. Li, and Z. W. Lin, Phys. Rev. C **61**, 067901 (2000); Z. W. Lin, C. M. Ko, B. A. Li, B. Zhang, and S. Pal, *ibid.* **72**, 064901 (2005).
 - [8] D. Molnar and M. Gyulassy, Phys. Rev. C **62**, 054907 (2000); Nucl. Phys. **A697**, 495 (2002) [Erratum-*ibid.* **A703**, 893 (2002)].
 - [9] B. Zhang, Comput. Phys. Commun. **109**, 193 (1998); B. Zhang, M. Gyulassy, and Y. Pang, Phys. Rev. C **58**, 1175 (1998).
 - [10] Z. Xu and C. Greiner, Phys. Rev. C **71**, 064901 (2005).
 - [11] R. S. Bhalerao, J. P. Blaizot, N. Borghini, and J. Y. Ollitrault, Phys. Lett. **B627**, 49 (2005).
 - [12] S. A. Voloshin and A. M. Poskanzer, Phys. Lett. **B474**, 27 (2000).
 - [13] U. W. Heinz and S. M. H. Wong, Phys. Rev. C **66**, 014907 (2002).
 - [14] H. Heiselberg and A. M. Levy, Phys. Rev. C **59**, 2716 (1999).
 - [15] J. D. Bjorken, Phys. Rev. D **27**, 140 (1983).

Partie C

Thermalisation au RHIC

Dans cette partie, je détaillerai comment, l'application de notre résolution numérique de l'équation de Boltzmann aux collisions d'ions lourds a permis de mettre en évidence les effets d'une thermalisation partielle. J'expliciterai en particulier comment "quantifier" cette déviation en terme de nombre de Knudsen. Nous verrons également que si l'étude de la dépendance en centralité du flot elliptique permet d'évaluer l'écart à l'équilibre thermique local, ses effets sont visibles dans d'autres observables comme v_4 ou l'étude des rayons HBT. Cela me conduira à conclure que les effets de thermalisation partielle sont indispensables à la compréhension des résultats expérimentaux observés dans les collisions d'ions lourds.

Modélisation des conditions initiales

Sommaire

VIII.1 Les modèles de conditions initiales	87
VIII.1.1 Le modèle de Glauber	88
VIII.1.2 Conditions initiales basées sur la théorie du condensat de verre de couleurs (CGC)	90
VIII.1.3 Conditions initiales du modèle de “Core-Corona”	91
VIII.2 Géométrie des collisions non centrales	92
VIII.2.1 Mesure de la centralité	92
VIII.2.2 Excentricité de la distribution initiale	93

Afin d’évaluer les effets d’une déviation, à l’équilibre thermique local dans l’évolution de la matière créée dans une collision d’ions lourds, on doit utiliser une résolution numérique. J’ai discuté rapidement les deux modèles possibles que sont l’hydrodynamique des fluides relativistes (visqueux ou non) et les théories cinétiques. Ces deux familles de modèles sont basées sur la résolution d’équations aux dérivées partielles (hydrodynamique) ou intégrô-différentielles (transport). De telles équations sont très sensibles aux conditions initiales que l’on choisit d’utiliser. Dans ce chapitre, je détaillerai donc les 2 grands types de conditions initiales (Glauber et CGC). Je discuterai en particulier les effets sur la géométrie de la collision, et les différentes définitions possibles de la centralité. Nous verrons également que la structure microscopique des noyaux doit être prise en compte et génère des fluctuations de la géométrie des conditions initiales.

VIII.1 Les modèles de conditions initiales

La question qui se pose pour déterminer un modèle de conditions initiales pour les collisions d’ions lourds est de savoir quelle est la structure interne des noyaux juste avant la collision. Les deux principaux modèles que je vais détailler maintenant sont le modèle de Glauber [86], et les modèles de condensat de verre de couleurs [87, 88] (CGC pour “Color Glass Condensate”).

VIII.1.1 Le modèle de Glauber

a Limite optique

Le modèle de Glauber est fondé sur l'hypothèse que la structure des noyaux à haute énergie est similaire à celle observée à basse énergie. Dans un tel modèle, la distribution de matière dans un noyau est donnée par une distribution de Woods-Saxon :

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{1 + w(r/R)^2}{1 + \exp(\frac{r-R}{a})} \quad (\text{VIII.1})$$

où R la taille du noyau, a l'épaisseur de peau et w caractérise la déviation à la symétrie sphérique (la valeur des coefficients pour différentes espèces chimiques peut être trouvée en Annexe E) et ρ_0 est défini par :

$$\int d^3r \rho(r) = A \quad (\text{VIII.2})$$

A étant le nombre de masse du noyau considéré. A noter que cette distribution est inspirée du potentiel de Woods-Saxon, qui donne, en réalité, la distribution de charge dans le noyau. On considère ici la distribution de matière similaire à la distribution de charge (modèle à basse énergie).

On peut alors construire la fonction d'épaisseur d'un noyau :

$$T_A(\vec{x}_t) = \int dz_A \rho_A(\vec{x}_t, z_A) \quad (\text{VIII.3})$$

qui donne la probabilité de trouver un nucléon du noyau A aux coordonnées $\vec{x}_t$ du plan transverse au faisceau.

Dans la description d'une collision par le modèle de Glauber, on fait les hypothèses suivantes :

- On peut définir un paramètre d'impact $\mathbf{b}$ pour la collision
- Les nucléons se propagent en ligne droite au travers du noyau cible
- La probabilité d'interaction nucléon-nucléon est donnée par la section efficace inélastique totale (σ_{inel}).

On peut alors définir le nombre de nucléons réalisant au moins une collision (nombre de participants N_{part}) et le nombre de collisions binaires (N_{coll}) par :

$$\begin{aligned} N_{part}(b, x, y) = & T_A(x + \frac{b}{2}, y) \left[1 - \left(1 - \frac{\sigma_{inel} T_B(x - \frac{b}{2}, y)}{B} \right)^B \right] \\ & + T_B(x - \frac{b}{2}, y) \left[1 - \left(1 - \frac{\sigma_{inel} T_A(x + \frac{b}{2}, y)}{A} \right)^A \right] \end{aligned} \quad (\text{VIII.4a})$$

$$N_{coll} = \sigma_{inel} T_A(x + \frac{b}{2}, y) T_B(x - \frac{b}{2}, y) \quad (\text{VIII.4b})$$

où les indices A et B désignent les 2 noyaux, A et B leur nombres de masse respectifs et où le paramètre d'impact est défini tel que $\vec{b} = b\vec{e}_x$.

Dans le modèle de Glauber optique (tel que présenté ci-dessus), la distribution de matière est supposée continue dans les noyaux (on ne distingue pas les nucléons). De ce fait on ne tient pas compte de la structure microscopique interne des noyaux (la matière est supposée continûment distribuée). Il est possible d'améliorer cette approche optique du modèle de Glauber afin de prendre en compte la structure microscopique des noyaux (modèle de Glauber Monte Carlo (MCGlauber)).

b Modèle de Monte-Carlo Glauber

La version Monte Carlo du modèle de Glauber prend, quant à elle, la position des nucléons dans les noyaux en compte. On tire aléatoirement la position des nucléons suivant la distribution de Woods-Saxon (VIII.1) Ceux-ci sont considérés comme des disques. On considère que 2 nucléons réalisent une collision si leur distance de moindre approche dans le plan transverse à l'axe du faisceau est inférieure à une distance minimum $d \leq \sqrt{\sigma_{inel}/\pi}$. Dans un tel modèle, où l'on considère individuellement les nucléons, il est par ailleurs simple de définir les participants comme l'ensemble des nucléons réalisant au moins une collision binaire. L'intérêt de cette version du modèle de Glauber est qu'il est possible de déterminer les conditions initiales pour une collision particulière et, en moyennant sur plusieurs réalisations, d'avoir accès aux fluctuations des conditions initiales.

Pendant ma thèse, j'ai utilisé 2 codes de MCGlauber : le code de H.J.Drescher^a et le code de l'expérience PHOBOS [90] que j'ai modifié légèrement afin de prendre en compte le modèle de mixture à 2 composantes présenté dans la section suivante.

c Multiplicité de particules produites

Pour traiter des collisions d'ions lourds, on considère que la majorité des collisions nucléon-nucléon de l'état initial sont similaires à des collisions proton-proton "minimum bias" avec une petite perturbation pour prendre en compte des processus plus violents, mais bien plus rares.

La multiplicité de particules produites est donc paramétrée sur la base de la mixture à 2 composantes [91] :

$$\frac{dN}{d\eta} = n_{pp} \left[(1-x) \frac{N_{part}}{2} + x N_{coll} \right] \quad (\text{VIII.5})$$

où n_{pp} dénote la multiplicité de particules produites dans les collisions proton-proton, x un paramètre qui contrôle les effets "durs"^b.

La multiplicité est ajustée (pour la production de particules chargées) sur les données expérimentales. La meilleure description est obtenue, pour les données à rapidité centrale, pour $x = 0.13 \pm 0.01(stat) \pm 0.05(syst)$, indépendamment de l'énergie de la collision [93, 94] (entre $\sqrt{s_{NN}} = 19.6$ GeV et $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV).

^aqui n'est plus disponible, mais dont une version améliorée est proposée par Y.Nara [89] dans son code de conditions initiales fKLN.

^bLes processus durs sont distribués suivant le produit des fonctions d'épaisseur [92], et sont donc proportionnels à N_{coll} .

VIII.1.2 Conditions initiales basées sur la théorie du condensat de verre de couleurs (CGC)

a Modèle KLN (Kharzeev, Levin, Nardi) factorisé

Alors que le principe des conditions initiales de Glauber consiste à supposer que la distribution de matière dans les noyaux est similaire à haute et basse énergie, l'approche CGC (Condensat de verre de couleur) est différente.

Cette fois les nucléons sont considérés comme composés de quarks de valences, ainsi que de “wee-partons”. Ces “wee” peuvent être soit des paires de quarks de la “mer”, soit des gluons de petits x_B ^c. Dans le cas des modèles d'impulsion infinie^d, le nombre d'occupation maximal des gluons est d'ordre $1/\alpha_s$. Cette limite est atteinte pour des gluons d'impulsion transverse $k_t \leq Q_s$, où Q_s dénote une échelle d'énergie appelée échelle de saturation. A haute énergie, on peut ainsi considérer le noyau comme composé de gluons ayant une extension purement transverse (contraction des longueurs) et statique (dilatation du temps). C'est à cet état que fait référence le nom du modèle de condensat de verre de couleur.

Nous avons en particulier considéré des conditions initiales CGC dans l'approche KLN [91, 95, 96]. Dans cette approche, le nombre de gluons produits est donné par :

$$\frac{dN_g}{d^2r_t dy} = \frac{4N_c}{N_c^2 - 1} \int^{p_t^{max}} \frac{d^2p_t}{p_t^2} \int d^2k_t \alpha_s \phi_A(x_1, p_t^2) \phi_B(x_2, (p_t - k_t)^2), \quad (\text{VIII.6})$$

où ϕ dénote la fonction de distribution non intégrée de gluons. Cette fonction dépend du modèle considéré. Bien que d'autres paramétrisations soient possibles [97], nous avons choisi d'utiliser celle du modèle KLN^e :

$$\phi(x, k_t^2; \mathbf{r}_t) \simeq \frac{1}{\alpha_s(Q_s^2)} \frac{Q_s^2}{\max(Q_s^2, k_t^2)} (1-x)^4 \quad (\text{VIII.7})$$

où la dépendance en $\mathbf{r}_t$ est implicite dans Q_s qui est choisie proportionnelle au nombre de participants^f [96, 97, 98, 99] défini dans la section précédente. La normalisation globale du nombre de gluons est par ailleurs fixée pour reproduire la multiplicité de particules produites dans le plan transverse, pour les collisions les plus centrales.

Les conditions initiales de l'hydrodynamique nécessitent que soit spécifiée la densité d'énergie (ou d'entropie) dans le plan transverse à l'instant τ_0 où le système a atteint un état d'équilibre

^c x_B fait ici référence à la variable x de Bjorken qui indique la fraction de l'impulsion totale du nucléon portée par un parton donné.

^dOn néglige la masse des partons et leurs impulsions transverses dans les calculs de la probabilité d'interaction. Les noyaux sont donc considérés comme un ensemble de particules libres d'impulsion transverse négligeable.

^eLe facteur $(1-x)^4$ est ajouté à la main pour rendre compte des effets de grand x . C'est naturellement une prise en compte qualitative dans la mesure où l'on néglige la variation de ces effets avec Q_s .

^f N_{part} dépend de la structure des 2 noyaux dans le modèle KLN. Dans le cas du modèle de KLN factorisé, on ne prend en compte que la plus petite des échelles de saturation des noyaux [97] :

$$\frac{dN}{d^2r_t dy} \simeq \min(Q_{s,1}(y, \mathbf{r}_t), Q_{s,2}(y, \mathbf{r}_t)). \quad (\text{VIII.8})$$

Ce choix est inspiré par le cas de collisions asymétriques. Prenons le cas extrême où l'un des 2 noyaux possède $Q_s = 0$, dans ce cas aucun gluon ne pourra être produit.

thermique local. Néanmoins, l'équation (VIII.6) n'est valide qu'à l'instant $\tau_s = 1/Q_s$ où le système n'est à priori pas thermalisé. Usuellement, les études d'hydrodynamique supposent que le profil de densité n'évolue pas entre τ_s et τ_0 . Le profil issu des conditions initiales est donc simplement rééchantillonné pour prendre en compte l'expansion de Bjorken^g, soit $n(\tau_0) = \frac{\tau_s}{\tau_0} n(\tau_s)$ [100].

b Approche KLN Monte-Carlo

Néanmoins le modèle KLN ne prend pas en compte la structure microscopique des noyaux. Dans [101], les auteurs présentent une version modifiée appelée MC-KLN (Monte Carlo KLN). Pour cela, on se donne la position des nucléons dans les noyaux sur la base de la distribution de Woods-Saxon (VIII.1). On en déduit la densité locale de nucléons ($t_A(\vec{r}_t)$) en comptant les nucléons contenus dans un tube de rayon $r_{max} = \sqrt{S/\pi}$ ^h. On peut alors calculer une échelle de saturation locale fonction de $t_A(\vec{r}_t)$, et en appliquant le modèle de KLN définir localement la fonction de distribution de gluons non-intégrée (VIII.7). De cette façon, il est possible de définir, pour une collision particulière, la distribution de gluons produite dans le plan transverse. Comme pour le MCG, on a donc accès aux fluctuations des conditions initiales pour le modèle de conditions initiales CGC.

VIII.1.3 Conditions initiales du modèle de “Core-Corona”

Avant de clore ce chapitre consacré aux conditions initiales, Je voudrais présenter brièvement un modèle [102] appelé modèle de “Core-Corona”. Les conditions initiales de ce modèle sont fondées sur un code de Monte-Carlo Glauber dans lequel on va différencier deux familles de nucléons participants :

- **Nucléons du cœur** : Ce sont les nucléons participants qui réalisent strictement plus d'une collision binaire.
- **Nucléons de la couronne** : Ce sont les nucléons participants qui réalisent exactement une collision binaire.

L'idée est de considérer que seuls les nucléons du “Core” sont importants pour déterminer les conditions initiales de la dynamique collective du système, par suite modélisée par un calcul d'hydrodynamique non visqueuse. Les nucléons de la Corona participent effectivement à la multiplicité, mais simplement comme une superposition de collisions proton-proton indépendantes, dont on néglige les effets sur la dynamiqueⁱ.

On définit alors la fraction de nucléons du coeur comme :

$$f_{core} = \frac{N_{core}}{N_{part}}. \quad (\text{VIII.9})$$

La multiplicité de particules produites est alors donnée par :

$$M^i = N_{part} [f_{core} M_{core}^i + (1 - f_{core}) M_{corona}^i] \quad (\text{VIII.10})$$

^gL'évolution dans le plan transverse est supposée nulle. On ne considère qu'une expansion à 1-dimension.

^h S est un paramètre correspondant à la surface d'échantillonnage dans le plan transverse, en pratique on choisit $S = \sigma_{inel}$.

ⁱEn particulier, on néglige la ré-interaction possible des particules ainsi produites (particule émise vers le centre de la zone d'interaction) avec le fluide (comportement hydrodynamique) de la matière du cœur.

où i désigne l'espèce hadronique considérée, M_{corona} correspond à la moitié de la multiplicité mesurée dans les collisions proton-proton et M_{core} est déterminé en supposant que la multiplicité totale est indépendante de N_{part} ou N_{coll} par un ajustement sur la multiplicité mesurée expérimentalement pour les collisions centrales Au-Au au RHIC. Ce modèle prédit donc, dans le cas des collisions les plus centrales ($f_{core} \simeq 1$), que la multiplicité de particules produites par nucléon participant est identique pour les collisions Au-Au et Cu-Cu. En cela, il diffère des prédictions des modèles MCGlauber ($x = 0.13$), ainsi que des données expérimentales [103] qui montrent une multiplicité légèrement supérieure pour les collisions centrales Cu-Cu à N_{part} fixé.

VIII.2 Géométrie des collisions non centrales

VIII.2.1 Mesure de la centralité

L'intérêt de se donner un modèle "réaliste" pour les conditions initiales, est que l'on peut classer les différents événements en fonction de leur géométrie. Pour cela, il est nécessaire de définir les classes en centralité utilisées pour caractériser la géométrie des collisions.

Pour ce qui concerne les conditions initiales Monte-Carlo Glauber, la centralité peut être définie de différentes façons :

- **En comptant le nombre de participants** : Cette approche permet de classer les événements possédant une distribution de matière similaires.
- **En comptant le nombre de collisions binaires** : On sait que N_{coll} se comporte comme le produit des fonctions épaisseurs, cette classification permet d'identifier les événements possédant la même distribution de processus "durs".
- **En fonction de la multiplicité** : Cela permet de classer les événements en fonction du nombre de particules produites, dont on sait que la paramétrisation a été ajustée sur les données expérimentales (voir section VIII.1.1(c)).
- **En fonction du paramètre d'impact** : On a vu que le modèle de Glauber nécessitait la définition d'un paramètre d'impact $\mathbf{b}$ entre les 2 noyaux (assimilés alors à des disques). Cette classification identifie donc les collisions ayant une géométrie "standard" (on néglige la structure microscopique des noyaux) similaire.

Les classes en centralité, définies expérimentalement, correspondent à une fraction de la section efficace totale d'interaction déterminée à partir de la multiplicité de particules produites puisqu'il s'agit de la seule grandeur mesurable parmi les 4 présentées ci-dessus. Il est possible de "mimer" cette approche et définissant des "bins" composés d'un même nombre d'événement, le classement des événements en centralité étant réalisé en fonction de leur multiplicité.

Pour le modèle MC-KLN, la centralité est définie soit par le nombre de participants, soit par la multiplicité de gluons produits ; alors que pour le modèle de Core-Corona, la centralité peut être déterminée de la même façon que pour les conditions initiales MCGlauber.

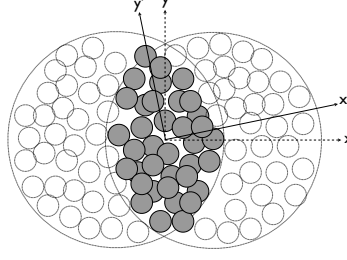


FIG. VIII.1 – Image schématique des 2 repères utilisés pour définir la zone d’interaction dans une collision d’ions lourds. L’axe $\vec{x}$ indique le plan de réaction alors que $\vec{x'}$ donne la direction du petit axe de l’ellipse dessinée par la position des nucléons participants.

VIII.2.2 Excentricité de la distribution initiale

On a vu que, pour un système localement thermalisé, le flot elliptique s’interprétait comme résultant de l’anisotropie de la distribution initiale de particules dans le plan transverse. Définir proprement l’excentricité de la distribution initiale est donc fondamental. La figure VIII.1 schématise une collision d’ions lourds vus dans le plan transverse.

La distribution des nucléons participants à une forme “en amande” que l’on peut caractériser par les variances $\sigma_i^2 = \langle i^2 \rangle - \langle i \rangle^2$.

L’anisotropie de la distribution spatiale des nucléons participants peut alors être caractérisée par son excentricité définie par :

$$\epsilon_{std} = \frac{\sigma_y^2 - \sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}. \quad (\text{VIII.11})$$

Cette excentricité standard correspond à l’excentricité définie dans le modèle de Glauber optique par la superposition des 2 disques représentant les noyaux qui réalisent la collision.

Néanmoins, le nombre fini de nucléons participants conduit à l’existence de fluctuations de la distribution spatiale de nucléons événement par événement. Pour un événement donné, la position géométrique des nucléons participants dessine également une ellipse qui diffère aussi bien en excentricité qu’en orientation de l’ellipse dessinée par la superposition des noyaux. Il est donc nécessaire de définir, événement par événement, une excentricité du plan de participants qui prend en compte ces fluctuations. Elle est définie par :

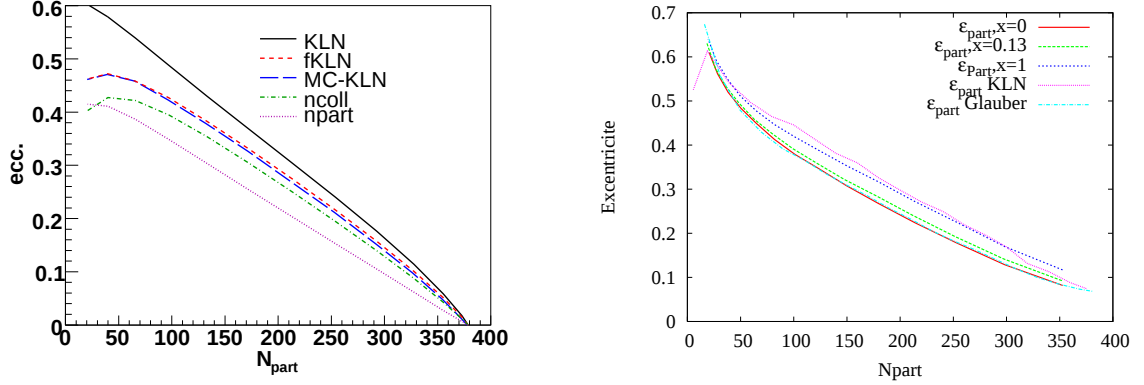
$$\epsilon_{part} = \frac{\sqrt{(\sigma_y^2 - \sigma_x^2)^2 + 4\sigma_{xy}^2}}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \quad (\text{VIII.12})$$

où $\sigma_i^2 = \langle i^2 \rangle - \langle i \rangle^2$ et $\sigma_{xy} = \langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle$. Les $\langle \rangle$ dénotent une moyenne pondérée par un poids^j :

$$w = (1 - x) + xN_{coll/part}. \quad (\text{VIII.13})$$

^jLa forme de w vient de la description de la multiplicité dans le cadre du modèle de mixture à 2 composantes. En particulier, en notant que $\sum_{part} N_{coll/part} = 2N_{coll}/N_{part}$, on retrouve l’équation (VIII.5).

où x dénote le poids donné aux processus “durs” dans la moyenne, 3 valeurs particulières sont à noter : $x = 0$ correspond au modèle usuel pour ϵ_{part} (moyenne sur la position des nucléons participants), $x = 1$ mesure l’excentricité de la distribution de collisions binaires (processus “durs”), et $x = 0.13$ qui correspond au meilleur ajustement de la multiplicité sur les données expérimentales.



(a) Figure extraite de [101], excentricité “standard” dans les collisions Au-Au pour différents modèles de saturation KLN, fKLN et MC-KLN¹, ou Glauber optique : npart et ncoll font référence à la définition de l’excentricité standard de la distribution de matière (N_{part} equation (VIII.4a)) ou de collisions binaires (N_{coll} equation (VIII.4b)).

(b) Excentricité dans les collisions Au-Au obtenue par notre version du MCG de PHOBOS, excentricité participant pour $x=0$, $x=0.13$ et $x=1$, ainsi que l’excentricité participant calculée par H.J.Drescher [101] pour les modèles MC-KLN et MCGlauber.

FIG. VIII.2 – Excentricité de la distribution initiale dans différents modèles, à droite issu du code de H. J. Drescher pour l’excentricité “standard” et à gauche du Monte Carlo Glauber de PHOBOS (excentricité participant).

La figure VIII.2 compare les excentricités obtenues dans les différents modèles. sur la figure VIII.2(a), il apparaît que les modèles de saturation prédisent une excentricité standard plus importante que le modèle de Glauber pour les participants (l’excentricité calculée est celle de la distribution de nucléons participants); mais que les résultats sont comparables avec le modèle de Glauber pour les collisions binaires. La figure VIII.2(b) compare les excentricités participants. Là encore, le modèle de Glauber $x = 1$ est comparable avec le modèle de saturation (MC-KLN). On notera aussi que les 2 codes numériques de MCGlauber (PHOBOS et Drescher) donnent des résultats similaires pour $x = 0$.

On voit également que pour les collisions les plus centrales (à grand N_{part}), l’excentricité standard est nulle^m alors que l’excentricité de la distribution de participants ne l’est pas. Cette différence traduit l’existence de fluctuations dans les conditions initiales. On sait que l’excentricité ϵ_{part} dépend de la structure microscopique dans les noyaux, à l’instant de la collision. Pour une certaine classe en centralité (par exemple pour un paramètre d’impact donné), différents événements correspondront à différentes distributions de nucléons et donc à différentes valeurs de ϵ_{part} . Nous verrons dans la suite que prendre en compte ces fluctuations est crucial si l’on

^mOn l’attend nulle par symétrie d’après l’équation (VIII.11).

veut comprendre les mesures expérimentales des coefficients de flot.

CHAPITRE IX

Effets de la thermalisation partielle sur le flot elliptique

Sommaire

IX.1	Flot elliptique dans la résolution numérique de l'équation de Boltzmann	98
IX.1.1	Rappels sur le flot elliptique	98
IX.1.2	Corrélations azimutales par rapport au plan de réaction	98
IX.1.3	Comportements limites du flot elliptique	99
IX.1.4	Etude de la convergence sur le régime hydrodynamique idéale	102
IX.2	Dépendance en centralité du flot elliptique	105
IX.2.1	Lien entre le nombre de Knudsen et des quantités expérimentalement accessibles	105
IX.2.2	Expliquer la dépendance en centralité du flot elliptique	106
IX.3	Limite de l'approche par le nombre de Knudsen "expérimental" .	108
IX.3.1	Extraction du rapport η/s	108
IX.3.2	Commentaires sur notre approche	108
IX.4	Conclusion	109

Après cette rapide présentation des différents modèles de conditions initiales pour les collisions d'ions lourds, je vais maintenant discuter des effets de la thermalisation partielle sur le flot elliptique. Après un bref rappel sur le flot elliptique, je présenterai l'étude du flot elliptique dans le code de transport. Nous verrons alors qu'il est possible de paramétrer simplement la dépendance de v_2 dans le degré de thermalisation du système mesuré par le nombre de Knudsen. Après avoir montré comment relier le nombre de Knudsen à des quantités expérimentalement mesurables, j'appliquerai cette paramétrisation pour expliquer la dépendance en centralité, non triviale, du flot elliptique. Nous verrons que cet ajustement sur les données expérimentales permet d'évaluer le rapport viscosité sur densité d'entropie de la matière créée au RHIC.

IX.1 Flot elliptique dans la résolution numérique de l'équation de Boltzmann

IX.1.1 Rappels sur le flot elliptique

Dans une expérience, on mesure l'énergie des particules émises, les observables sont donc l'énergie des particules ainsi que l'angle azimutal ϕ donnant leur direction d'émission (voir figure IX.1).

IX.1.2 Corrélations azimutales par rapport au plan de réaction

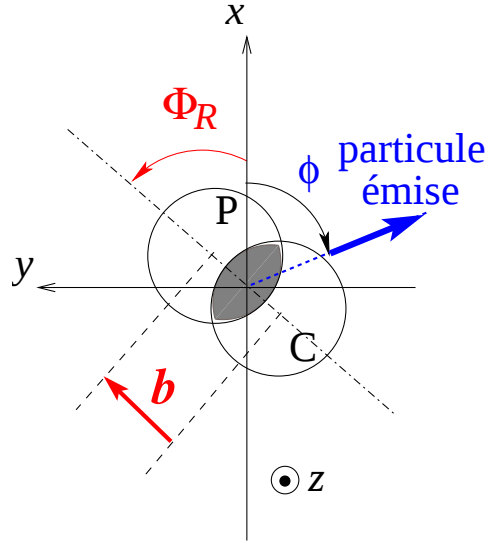


FIG. IX.1 – Géométrie d'une collision non centrale vue dans le plan transverse de la collision.

Alors que l'on considère la distribution initiale d'impulsion isotrope^a, elle ne le reste pas au cours du temps. En effet, la distribution de matière initiale est anisotrope pour les collisions non centrales. On s'attend donc à ce qu'une particule ayant une impulsion suivant $\vec{y}$ subisse plus de collisions qu'une particule ayant une impulsion suivant $\vec{x}$ (le nombre de collisions est proportionnel à la densité qui est plus grande sur l'axe $\vec{Oy}$). Cela tend à dépeupler la direction y au profit de x dans l'espace des impulsions. L'anisotropie de la distribution d'impulsion ainsi créée est une sonde précise des interactions entre particules dans le système. Elle peut être mesurée en étudiant les coefficients de Fourier de la distribution angulaire de particules. En particulier, le premier d'entre eux, non nul dans le plan transverse de la collision, le flot elliptique s'écrit :

$$v_2 = \langle \cos(2\tilde{\phi}) \rangle \quad (\text{IX.1})$$

^aLes processus donnant naissance aux particules ont lieu à une échelle petite devant la taille du système. Il ne doit donc pas y avoir de direction privilégiée dans la distribution d'impulsion initiale.

où, $\tilde{\phi} = \phi - \Phi_R$ est l'angle dessiné par la direction de l'impulsion des particules par rapport au paramètre d'impact de la collision et $\langle \rangle$ dénote la moyenne réalisée sur les particules.

IX.1.3 Comportements limites du flot elliptique

On définit le flot elliptique comme :

$$\frac{d^2 N}{p_t dp_t dy d(\phi - \Phi_R)} = \frac{1}{2\pi} (1 + 2v_2 \cos(2(\phi - \Phi_R)) + \dots). \quad (\text{IX.2})$$

Il est possible d'évaluer qualitativement le comportement de v_2 dans les régimes limites d'un régime localement thermalisé, ou d'un gaz interagissant très faiblement (première correction au comportement de vol libre).

a Régime localement thermalisé, comportement hydrodynamique non visqueux

Comportement avec l'impulsion transverse Dans le cadre d'une évolution hydrodynamique non visqueuse, la fonction de distribution de particule est donnée par la formule de Cooper-Frye pour le "freeze-out" :

$$E \frac{dN}{d^3 p} = A \int_{\Sigma} \exp\left(-\frac{p^\mu u_\mu}{T}\right) p^\mu d\sigma_\mu, \quad (\text{IX.3})$$

où A est une normalisation, Σ une hyper-surface de "freeze-out"^b et u_μ la quadri-vitesse du fluide en un point de Σ .

On peut alors utiliser la méthode du col pour évaluer l'intégrale sur l'espace-temps dans l'équation (IX.3)^c. L'énergie de la particule est minimale dans le référentiel du fluide lorsque la vitesse du fluide et celle de la particule sont parallèles, ce qui donne la valeur au col [105] (Annexe F.1).

Puisque l'on cherche à évaluer le flot elliptique dans un système bidimensionnel de particules de masses nulles, seule la dépendance azimutale nous intéresse et $p^0 = E = |\vec{p}|$. On considère donc :

$$\frac{dN}{d\phi} \propto \exp\left(-\frac{p}{T}(u^0(\phi) - u(\phi))\right). \quad (\text{IX.4})$$

On utilise alors le développement de $u^\mu(\phi)$ en série de Fourier, sachant que les termes impairs sont nuls par symétrie ($\phi \rightarrow \pi + \phi$) dans le plan transverse :

$$u(\phi) = U + 2V_2 \cos(2\phi) + \dots \quad (\text{IX.5})$$

$$\begin{aligned} u^0(\phi) &= U^0 + 2V_2^0 \cos(2\phi) + \dots \\ &= U^0 + 2V_2 V_f \cos(2\phi) + \dots \end{aligned} \quad (\text{IX.6})$$

^bDifférents choix sont possibles : Σ peut être définie comme une isotherme ; on parle alors de "freeze-out" isotherme, ou par une durée d'évolution fixée ; on parle alors de "freeze-out" isochrone.

^cLes résultats suivants seront donc vrais dans la limite de basse température soit aussi bien en hydrodynamique idéale pour un "freeze-out" isotherme à basse température ($T \simeq 100$ MeV) et pour un "freeze-out" isochrone dans la limite des temps longs.

où $V_f = u/u^0$.

En réinsérant l'expression de $u(\phi)$ et $u^0(\phi)$ dans l'équation (IX.4), on obtient (voir annexe F.1) :

$$v_2 \propto \frac{I_1(\frac{p}{T} 2V_2(1 - V_f))}{I_0(\frac{p}{T} 2V_2(1 - V_f))} \quad (\text{IX.7})$$

où $I_n(x)$ est la fonction de Bessel modifiée. On en déduit donc que $v_2(p) \simeq p$ à bas p , alors qu'à haut p , v_2 sature (v_2 ne peut jamais être supérieur à 1).

Comportement initial (à petit temps) de v_2 Pour simplifier le calcul, on considère que le profil de densité initial est gaussien et donné par :

$$S_t(x, y) = A \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma_x^2} - \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right). \quad (\text{IX.8})$$

Le fluide est initialement au repos, son mouvement est donc induit par l'existence d'un gradient de densité. Cela permet de considérer qu'initialement la vitesse du fluide u est normale aux lignes d'équi-densité caractérisées par :

$$a = \sqrt{\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}}. \quad (\text{IX.9})$$

Quelques lignes de calcul (voir annexe F.1) conduisent à :

$$\frac{dN}{d^2p} \propto \left\langle I_0\left(\frac{pu}{T}[1 + \epsilon \cos(2\phi)]\right) \right\rangle \quad (\text{IX.10})$$

où ϵ désigne l'excentricité de la distribution initiale, et $\langle \rangle$ désigne une moyenne sur la distribution de densité.

En identifiant le flot elliptique comme le terme proportionnel à la déformation, on obtient, dans la limite des petites déformations :

$$v_2 \propto \frac{1}{4} \frac{p^2 \langle u^2 \rangle}{T^2} \quad (\text{IX.11})$$

Les équations de l'hydrodynamique (de conservation locale des quantités thermodynamiques), couplées avec l'équation d'état du système conduisent à une accélération initiale finie (voir Annexe F.1).

En supposant que pour t petit, on peut considérer :

$$\frac{du}{dt} = \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=\tau_0}, \quad (\text{IX.12})$$

on a alors, initialement, une croissance linéaire en t pour la vitesse du fluide.

En insérant ce résultat dans l'équation (IX.11), on obtient, pour l'hydrodynamique non visqueuse, $v_2 \simeq t^2$ à petit t .

Par ailleurs, dans le cas d'un comportement hydrodynamique, les effets collectifs sont maximums, et v_2^{hydro} (à une impulsion fixée) correspond à une borne maximum on a donc :

$$\lim_{K \rightarrow 0} v_2(K) = v_2^{hydro}. \quad (\text{IX.13})$$

Flot elliptique dans la limite des petites déviations de l'équilibre thermique local

On sait que les effets collectifs sont les plus importants dans le cas d'un système en régime hydrodynamique. v_2^{hydro} joue donc le rôle d'une borne supérieure dans l'étude du flot elliptique pour des valeurs finies du nombre de Knudsen. On a donc :

$$\lim_{K \rightarrow 0} v_2(K) = v_2^{hydro}. \quad (\text{IX.14})$$

b Comportement de v_2 pour un système sans collisions

Variation avec le nombre de Knudsen Dans la limite d'un système faiblement interagissant, le plus simple moyen d'évaluer v_2 consiste à évaluer le terme de perte de l'équation de Boltzmann^d. Cela revient à considérer une particule initialement émise dans la direction ϕ . Si elle réalise une collision et est déviée, on aura perdu une particule dans la direction ϕ . Le système interagissant faiblement, une grande partie des particules s'échappent sans réaliser de collision. Le flot elliptique est alors donné par $\langle \cos(2\phi) \rangle \times P_{coll}$, où $\langle \rangle$ désigne une moyenne sur une collision et P_{coll} la probabilité de réaliser une collision (qui est petite).

Dans ce cas, v_2 , et plus généralement les v_n , apparaissent proportionnels au nombre de collisions subies par la particule, celui-ci étant proportionnel à K^{-1} (car K donne la taille du système en unité de libre parcours moyen)^e.

On a donc :

$$v_2(K) \propto \frac{1}{K} \Big|_{K \gg 1} \quad (\text{IX.15})$$

c Comportement de v_2 à petit temps pour des valeurs finies de K

Pour des valeurs finies du nombre de Knudsen, le flot elliptique est défini par :

$$v_2 = \langle \cos(2\phi_1) \rangle = \frac{\int \cos(2\phi_1) n_1(\vec{x}, t') n_2(\vec{x}, t') \sigma(1 - v_1 \cdot v_2) dt' d^3x d^3v_1 d^3v_2}{\mathcal{N}orm}, \quad (\text{IX.16})$$

où $\mathcal{N}orm$ désigne la normalisation définie par :

$$\mathcal{N}orm = \left\langle \int n_1(\vec{x}, t') dt' d^3x \right\rangle_{\vec{v}_1}. \quad (\text{IX.17})$$

^dLe terme de gain ne modifie pas l'asymétrie [106]

^ePreuve en Annexe F.2

Pendant l'intervalle de temps qui sépare le début de l'évolution des premières collisions, le système est en régime de vol libre. On peut donc utiliser le calcul de l'annexe F.3 et insérer dans l'équation précédente $n_i(\vec{x}) = n_i(\vec{x} - \vec{v}_i t)$ (pour t petit). Puisque l'on a considéré une distribution spatiale gaussienne de particules, on obtient :

$$v_2 = \frac{\int_{t'} \left\langle \frac{N^2}{4\sqrt{\pi}\sigma_x\sigma_y} e^{-\left[\frac{(\cos(\phi_1) - \cos(\phi_2))^2}{4\sigma_x^2} + \frac{(\sin(\phi_1) - \sin(\phi_2))^2}{4\sigma_y^2}\right] t'^2} \sigma(1 - v_1.v_2) \cos(2\phi_1) \right\rangle_{\vec{v}_1, \vec{v}_2}}{\mathcal{N}orm}. \quad (\text{IX.18})$$

Dans cette expression, ϕ_1 et ϕ_2 dénotent les directions azimutales initiales des 2 particules, $\sigma_{x,y}$ les largeurs caractéristiques de la distribution initiale de matière (supposée gaussienne). Aux petits temps, l'exponentielle donne un terme en t'^2 , on a donc $v_2(t) \simeq t^3$.

IX.1.4 Etude de la convergence sur le régime hydrodynamique idéale

a Evolution temporelle du flot elliptique

La première étude que nous avons réalisée a consisté à comparer le flot elliptique intégré obtenu dans le code de transport et dans un code indépendant d'hydrodynamique idéale [104]. Les résultats sont présentés sur la figure IX.2. On note que la convergence pour $K \rightarrow 0$ n'est pas uniforme. L'écart relatif au comportement hydrodynamique est plus important au début de l'évolution. Nous avons vu que $v_2(t) \simeq t^3$ dans le code de transport alors que $v_2(t) \simeq t^2$ dans l'hydrodynamique. Cet effet est compensé^f au temps long où v_2 semble constant dans le régime de Boltzmann (plus d'interaction) alors qu'il décroît en hydrodynamique. Noter que pour K suffisamment petit, v_2 doit décroître également dans le code de transport.

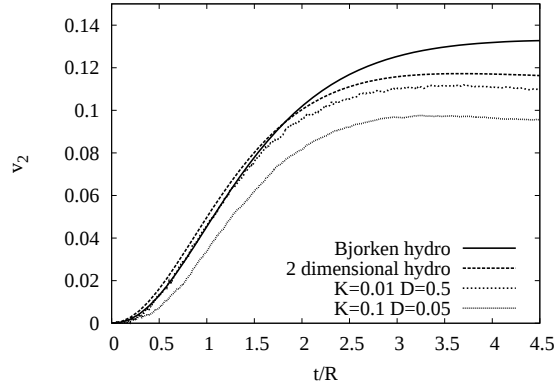


FIG. IX.2 – Dépendance de v_2 moyen dans la résolution de Boltzmann, et dans 2 calculs d'hydrodynamique idéale à 2 et 3 dimensions (avec expansion longitudinale de Bjorken)

La figure IX.2 montre également l'évolution de v_2 dans un calcul hydrodynamique à 3-dimensions. Les résultats d'hydrodynamique à 2 et 3 dimensions sont similaires. On peut donc

^fle $\langle v_2 \rangle|_{temps}$ doit être le même dans les deux codes dans la limite hydrodynamique.

raisonnablement considérer que même si l'expansion longitudinale initiale est négligée dans la résolution de Boltzmann (code à 2 dimensions d'espace), les déviations au régime hydro que l'on observe sont similaires à celles observées pour un système à 3-dimensions.

b Evolution du flot elliptique avec la vitesse du son du système

Dans le chapitre IV.3, j'ai présenté les calculs d'hydrodynamique idéale. Nous avons vu qu'il était nécessaire d'ajouter, aux équations locales d'évolution des quantités thermodynamiques, une équation supplémentaire pour fermer le système. Cette équation correspond à l'équation d'état du système (EoS). Celle-ci peut être spécifiée par la donnée de la vitesse du son dans le système :

$$c_s^2 = \left. \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} \right|_s. \quad (\text{IX.19})$$

Dans [107], R. Bhalerao et al ont étudié la dépendance du flot elliptique avec l'équation d'état du système. Ils ont en particulier remarqué (voir figure IX.3) que v_2 diminuait avec c_s^2 pour $c_s \geq 0.3$ alors que pour $c_s \leq 0.2$, le système entrait en régime non relativiste et vérifié que pour $c_s \leq 0.1$, v_2/ϵ devenait une courbe universelle.

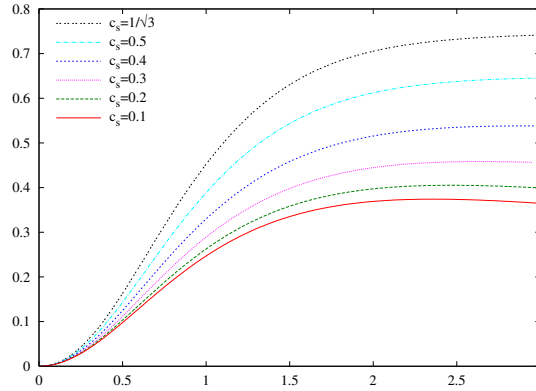


FIG. IX.3 – Dépendance de v_2 moyen dans le calcul hydrodynamique de [104] en fonction du temps. Les différentes courbes sont indexées par la vitesse du son dans le système. Figure extraite de [107].

A noter que dans cette étude, R. Bhalerao et al ont utilisé le calcul d'hydrodynamique idéale de [104] dans lequel la vitesse du son est supposée constante durant toute l'évolution. Dans le monde réel, c_s varie au cours du temps. En particulier, si le système entre dans un régime d'EoS molle (où la vitesse du son est faible), le flot elliptique pourrait être sensiblement réduit [108].

Je rappelle par ailleurs que dans le cadre de la résolution numérique de l'équation de Boltzmann, l'équation d'état du système est définie par la dynamique et correspond à celle d'un gaz parfait.

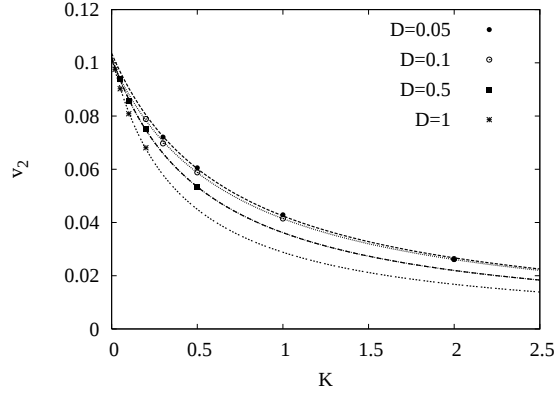


FIG. IX.4 – Dépendance de v_2 moyen calculée dans la résolution de Boltzmann en fonction du nombre de Knudsen (proportionnel au nombre de collisions par particule) pour différentes valeurs du coefficient de dilution. Les lignes correspondent à un ajustement, sur les résultats à D fixé, par la formule IX.20.

c Evolution du flot elliptique avec le degré de thermalisation du système

Dans la section précédente, j’ai décrit le comportement du flot elliptique v_2 dans les régimes limites (hydrodynamique et de vol libre). La figure IX.4 montre les résultats obtenus pour le v_2 , moyennés sur l’impulsion transverse, dans le code de transport pour différentes valeurs du nombre de Knudsen et de paramètre de dilution D .

Le régime hydrodynamique correspond à l’amplitude maximale des effets collectifs, le régime $K \rightarrow 0$ correspond donc à un maximum pour v_2 . Comme attendu, on voit sur la figure IX.4 que v_2 décroît quand K augmente. Il apparaît également que moins le système est dilué, plus le v_2 moyen observé est faible. Ce résultat était également attendu dans la mesure où l’on comprend les effets de flot comme résultant des interactions entre particules, et que l’on sait que, moins le système est dilué, plus on “manque” de collisions pendant l’évolution.

Pour une valeur fixée de D , l’évolution du flot elliptique moyen est très bien modélisée par une fonction simple possédant les deux régimes limites attendus [107] :

$$v_2 = \frac{v_2^h}{1 + K/K_0}. \quad (\text{IX.20})$$

Les lignes sur la figure IX.4 correspondent à un ajustement de cette fonction sur les résultats du code de transport à D fixé. v_2^h est la valeur limite du flot elliptique pour $K \rightarrow 0$, et doit donc correspondre à la limite hydrodynamique pour $D \rightarrow 0$. Il apparaît que $v_2^h = 0.102 \pm 0.003$ est indépendant de la valeur de D . Cet effet traduit le fait que la limite hydrodynamique est plus générale que l’équation de Boltzmann, et s’applique même dans le cas d’un gaz non dilué si le libre parcours moyen dans le système est assez petit pour que le système soit localement thermalisé. A l’inverse, le coefficient K_0 dépend de la valeur de D , une régression linéaire en D nous conduit à $K_0 = 0.7 \pm 0.03$ pour $D \rightarrow 0^g$.

^gA noter que K_0 “mesure” la transition entre les 2 comportements limites (vol libre et hydrodynamique) de

Un calcul indépendant en hydrodynamique idéale avec les mêmes conditions initiales (distribution gaussienne avec un rapport des largeurs $3/2$) conduit à $v_2^{hydro} = 0.101 \pm 0.003^h$. Ce résultat est compatible avec celui obtenu dans la résolution numérique de l'équation de Boltzmann. On a bien observé la convergence des résultats de transport sur le régime hydrodynamique non visqueux dans la limite de petits libres parcours moyens.

IX.2 Dépendance en centralité du flot elliptique

Maintenant que nous avons identifié comment le flot elliptique se comporte avec le degré de thermalisation, nous allons essayer d'évaluer si les déviations à l'équilibre thermique local peuvent expliquer la dépendance en centralité du flot elliptique. L'idée est de considérer que si, comme on l'a observé au RHIC (figure IV.4(a)) la matière créée dans les collisions centrales obéit à un comportement hydrodynamique, pour les collisions plus périphériques (N_{part} plus faible), la dynamique du système doit correspondre à celle d'un système possédant un degré de thermalisation fixé. Dans ce cadre, la résolution numérique de l'équation de Boltzmann, qui nous permet d'étudier des systèmes avec un degré de thermalisation arbitraire, devrait permettre de caractériser la dépendance en centralité du flot elliptique.

IX.2.1 Lien entre le nombre de Knudsen et des quantités expérimentalement accessibles

On détermine le degré de thermalisation d'un système en comparant son libre parcours moyen avec sa dimension caractéristique (ce qui revient à comptabiliser le nombre moyen de collisions par particule). Mais si cette quantité est initialement bien définie pour un système bi-dimensionnel, ne l'est pas à 3-dimensions. En effet, l'extension à trois dimensions spatiales implique de prendre en compte l'expansion de Bjorken initialeⁱ.

Le nombre moyen de collisions par particule (qui dépend de la densité de particules) diverge donc logarithmiquement à petits temps. Mais ces collisions ne contribuent que peu au développement du flot elliptique ($v_2 \simeq t^3$ pour t petit). Le nombre moyen de collisions susceptible de caractériser le mieux la dynamique collective du système est celui correspondant au temps caractéristique de développement des effets collectifs ($\tau = R/c_s$), où c_s désigne la vitesse du son dans le système [107].

Le libre parcours moyen d'un système est donné par $\lambda_{mfp} = 1/\sigma n$. On peut évaluer le libre

v_2 en terme de nombre de Knudsen. Physiquement, on attend que la transition ait lieu pour une valeur du libre parcours moyen de l'ordre de la taille du système ($K = \lambda_{mfp}/R \simeq 1$), ce qui est compatible avec la valeur calculée numériquement.

^hL'erreur dans le calcul d'hydrodynamique vient du fait que l'évolution est poussée aux temps longs.

ⁱInitialement, la contraction de Lorentz des noyaux entraîne une forte expansion longitudinale. Pendant cette période, l'expansion transverse est supposée nulle et l'on a :

$$n(t) \propto \frac{1}{t}. \quad (\text{IX.21})$$

parcours moyen à l'instant caractéristique de développement des effets collectifs (τ_f) :

$$\lambda_{mfp} = \frac{1}{\sigma \frac{1}{c\tau_f} \frac{1}{S} \frac{dN}{dy}} \quad (\text{IX.22})$$

où S est l'aire de la zone d'interaction des noyaux ($S = 4\pi\sigma_x\sigma_y$) et dN/dy est la multiplicité totale de particules produites. On pourra donc évaluer K comme :

$$\frac{1}{K} = \sigma \frac{c_s}{c} \frac{1}{S} \frac{dN}{dy}. \quad (\text{IX.23})$$

On observe donc, comme attendu, que plus la collision est centrale ($(1/S)(dN/dy)$ est grand), plus le nombre de Knudsen caractérisant le système sera petit, ce qui correspond à un système d'autant plus proche de l'équilibre thermique local qu'il est produit par une collision plus centrale.

IX.2.2 Expliquer la dépendance en centralité du flot elliptique

Puisque nous avons trouvé un moyen de “mesurer” K à une centralité fixée (S et dN/dy dépendent de la centralité) et que nous avons évalué comment v_2 dépendait de K , nous pouvons essayer d'expliquer la dépendance en centralité du flot elliptique.

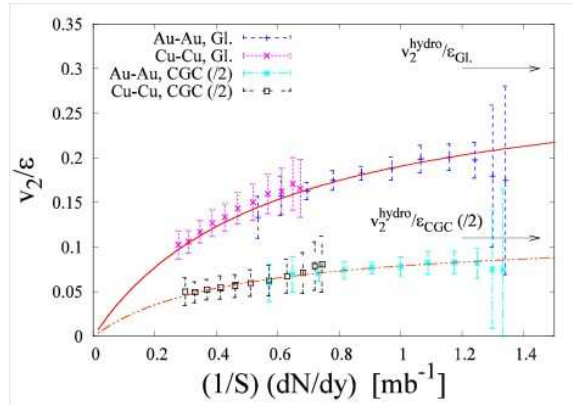


FIG. IX.5 – Dépendance en centralité du flot elliptique, les lignes correspondent à un ajustement sur les données de PHOBOS [109, 110] de la formule (IX.23). Pour les collisions Cu-Cu, on a divisé v_2 par 2 pour plus de visibilité. Les flèches indiquent la valeur de v_2 , dans le régime hydrodynamique, obtenu dans les ajustements.

La figure IX.5 représente v_2/ϵ (données de PHOBOS [109, 110] pour des collisions Au-Au et Cu-Cu à $\sqrt{s} = 200$ GeV) en fonction de la centralité mesurée en termes de la multiplicité de particules produites. J'ai expliqué, dans la section III.2.3, que l'on n'avait pas expérimentalement accès à la géométrie des conditions initiales. Les valeurs de ϵ et S sont donc obtenues à partir d'un modèle théorique pour les conditions initiales. Dans ce cas précis, nous avons utilisé les

2 types de conditions initiales Monte Carlo (MC-Glauber [de H.J.Drescher] (mixture $x=0,13$)^j et MC-KLN). De cette façon, nous avons pris en compte les fluctuations de géométrie dans les conditions initiales^k.

En utilisant la formule (IX.20), où K est relié à la centralité par l'équation (IX.23), nous pouvons interpréter la croissance du rapport v_2/ϵ avec la centralité des collisions comme résultant d'un écart à l'équilibre thermique local. Les lignes sur la figure IX.5 correspondent à un ajustement sur les données expérimentales de la formule :

$$\frac{v_2}{\epsilon} = \frac{v_2^{hydro}}{\epsilon} \frac{1}{1 + \frac{1}{0.7} \sigma c_s \frac{1}{S} \frac{dN}{dy}} \quad (\text{IX.25})$$

où les paramètres en rouge sont les paramètres d'ajustement. v_2^{hydro} correspond à la valeur asymptotique du flot elliptique. On sait, d'après [107], que pour des calculs hydrodynamique v_2/ϵ est proportionnel à c_s . L'ajustement basé sur le modèle CGC, prédit un v_2^{hydro}/ϵ inférieur à celui obtenu pour le modèle de Glauber^l. La limite hydro devant être indépendante de la géométrie initiale (IV.1.3(b)), cet effet traduit l'existence d'une vitesse du son plus faible pour le modèle CGC ($c_s^{CGC} = 0.73c_s^{Glauber}$) voir section IX.1.4(b).

Dans l'hypothèse, où l'équation d'état du système est celle d'un gaz parfait à 3-dimensions, on peut poser $c_s = 1/\sqrt{3}$ (pour les conditions initiales MCGlauber). On obtient alors des sections efficaces effectives d'interactions élastiques entre partons^m pour les 2 jeux de conditions initiales (Glauber ou de saturation) :

$$\sigma_{GLAUBER} = 4.3mb \quad (\text{IX.26a})$$

$$\sigma_{CGC} = 7.6mb^n \quad (\text{IX.26b})$$

Par ailleurs, l'ajustement sur les données expérimentales permet de calculer un nombre de Knudsen effectif pour la matière créée au RHIC. Ce K_{exp} dépend naturellement de la centralité. Pour les collisions Au-Au les plus centrales, on trouve $K_{exp} = 0.3$ pour les conditions initiales MCGlauber, $K_{exp} = 0.23$ pour les conditions initiales de saturation^o. Cette valeur n'étant pas petite devant 1, notre étude montre que les déviations à l'équilibre thermique local ne sont pas négligeables dans l'étude des observables "soft" au RHIC, même pour les collisions les plus centrales.

^jEn réalité H.J.Drescher a utilisé dans son code de MCGlauber une autre paramétrisation de la multiplicité :

$$\frac{dN}{dy} = \frac{1}{1 + \alpha} [\alpha N_{part} + (1 - \alpha) N_{coll}], \quad (\text{IX.24})$$

avec $\alpha = 0.8$. Cette paramétrisation est complètement équivalente à l'équation (VIII.5) avec $x = 0.13$ [111].

^kSi on n'avait pas considéré les structures microscopiques des noyaux, l'excentricité "standard" étant nulle pour les collisions centrales, v_2/ϵ aurait divergé à grande multiplicité [112]. Ceci explique la croissance linéaire de v_2/ϵ qui était observée dans les premiers graphiques de ce type.

^lOn a vu que $\epsilon_{part}^{CGC} > \epsilon_{part}^{GLAUBER}$.

^m σ est considérée comme constante, et l'on ne prend en compte que des interactions 2-2 élastiques dans la résolution de Boltzmann.

ⁿAprès avoir pris en compte la correction sur la vitesse du son qui a été indiquée par J. Nagle et al dans [118].

^oCompte tenu de l'erreur sur la section efficace, et de la différence de vitesse du son.

A noter également que dans [113], les auteurs ont expliqué la dépendance en centralité de $v_2/\epsilon f_{part}$ dans le cadre du modèle de cœur-couronne (i. e : calcul d'hydrodynamique idéale). Ce résultat est discuté en Annexe G.2.

IX.3 Limite de l'approche par le nombre de Knudsen “expérimental”

IX.3.1 Extraction du rapport η/s

La détermination des sections efficaces partoniques d'interactions telles que calculées dans la section précédente est sujette à de nombreuses erreurs que je discuterai dans le paragraphe suivant. Elle permet, moyennant certaines hypothèses, de déterminer un ordre de grandeur du rapport viscosité sur densité d'entropie de la matière nucléaire chaude. Il a été montré [114, 115] que pour un gaz de particules de masses nulles avec une section efficace différentielle isotrope (modèle qui correspond à un gaz de Boltzmann dans la limite ultrarelativiste) :

$$\eta = 1.264 \frac{T}{\sigma}. \quad (\text{IX.27})$$

Sachant que la densité d'entropie d'un gaz ultrarelativiste est donnée par $s = 4n$ [116], on obtient :

$$\frac{\eta}{s} = 0.316 \frac{T}{c\sigma n}. \quad (\text{IX.28})$$

Sachant d'après [107] que la densité de particules peut être estimée à l'instant où le flot se développe à $n = 3.9 \text{ fm}^{-3}$, et en considérant une température $T = 200 \text{ MeV}$, nous avons pu évaluer le rapport viscosité sur densité d'entropie pour les 2 modèles de conditions initiales^P :

$$\left. \frac{\eta}{s} \right|_{GLAUBER} = 0.19 \simeq 2.37 \frac{1}{4\pi} \quad (\text{IX.30a})$$

$$\left. \frac{\eta}{s} \right|_{CGC} = 0.152 \simeq 1.9 \frac{1}{4\pi}^{\text{q}} \quad (\text{IX.30b})$$

IX.3.2 Commentaires sur notre approche

La méthode que j'ai détaillée ci-dessus a été l'un des premiers moyens d'accéder à la mesure de la viscosité de la matière nucléaire à haute température. Elle a, par ailleurs, été largement discutée [118, 119, 120, 121, 122, 124]. Il est en particulier important d'en connaître les principales erreurs systématiques :

Les principales erreurs de cette approche sont les suivantes :

^PLa correspondance AdS/CFT prévoit (dans sa version planaire où l'invariance conforme est exacte) une limite inférieure pour le rapport viscosité sur densité d'entropie [117]

$$\left. \frac{\eta}{s} \right|_{AdS} = \frac{1}{4\pi} \quad (\text{IX.29})$$

^qComptes tenus de l'erreur que nous avons faite dans le calcul initial pour les conditions initiales CGC.

- **Dépendance du flot elliptique en K** : La dépendance $v_2(K)$ que l’on considère correspond à celle évaluée dans la résolution numérique de l’équation de Boltzmann bi-dimensionnelle. En particulier, rien n’indique que le coefficient K_0 soit identique dans le cas d’un système de particules massives, ou qu’il ne dépende pas du passage de 2 à 3-dimensions. Un groupe a refait ces calculs avec une simulation de transport à $(3 + 1)$ dimensions (AMPT), pour un système composé de particules de masses nulles, mais non dilué. Ils ont trouvé : $K_0 = 0.63 \pm 0.04$ [122, 123] ce qui est proche de notre résultat. Néanmoins, refaire ce calcul avec notre simulation à $3 + 1$ -dimensions, ou en considérant des particules massives, éclaircira certains points. Par ailleurs, d’autres formules possédant les bons comportements asymptotiques ont été employées (expansion de Padé [118]). Mais au final, l’ajustement des coefficients permet de retrouver (presque exactement) notre formulation.
- **L’équation d’état utilisée** : Dans le code de transport, l’équation d’état est nécessairement celle d’un gaz parfait. En pratique, on sait que la vitesse du son n’est pas constante au cours de l’évolution. Considérer que $c_s = 1/\sqrt{3}$ dans le calcul est une hypothèse. Dans la procédure d’ajustement de l’équation (IX.25), la variable est le produit σc_s . On voit clairement que la vitesse du son a un effet sur la mesure de la viscosité^r.
- **Formule reliant η et σ utilisée** : Pour le moment chacun a utilisé la formule dérivée par A.J.Kox et al [114] et utilisée par D.Teaney [115], mais cette formule n’est vraie que pour un gaz ultrarelativiste. Dans [114], A.J.Kox et al ont également dérivée une formule pour le cas des particules “peu relativistes” ($mc^2 \gg k_B T$) à savoir (en posant $k_B = c = 1$) :

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{mT}}{a^2} \times 0.3175^s. \quad (\text{IX.31})$$

En particulier, si on considère que les particules sont des pions, et toujours une température de $T = 200$ MeV ($m_\pi \simeq 0,75T$), on obtient :

$$\eta \propto 0.487 \frac{T}{\sigma}. \quad (\text{IX.32})$$

L’application de notre approche aux premiers résultats d’hydrodynamique visqueuse a fait apparaître un facteur 2 entre la viscosité paramétrée dans le calcul et l’analyse des résultats suivant notre approche [125]. Peut-être cet effet est-il dû à l’emploi de la formule (IX.27), dont la validité est discutable pour traiter de particules massives^t.

IX.4 Conclusion

Dans ce chapitre, j’ai présenté comment sur la base de notre résolution numérique de l’équation de Boltzmann nous avons pu évaluer la dépendance du flot elliptique dans le degré de

^rMême si l’on peut écrire η/s indépendamment de c_s [118], ceci n’est possible qu’en utilisant la forme (IX.28) pour l’équation (IX.27) qui n’est vraie que pour un gaz de Boltzmann ultrarelativiste.

^sOn retrouve bien $\eta \propto \sqrt{mT}/a^2$ comme dans le cas non relativiste de l’annexe A.3

^tLa référence [114] propose également une évaluation numérique de la viscosité pour les régime intermédiaire ($k_B T \simeq mc^2$).

thermalisation (nombre de Knudsen) du système. Comme il est possible de relier le nombre de Knudsen du système à des quantités mesurables expérimentalement, il nous a été possible d'expliquer la dépendance non triviale en centralité du flot elliptique comme une signature des effets d'une thermalisation partielle du système. J'ai en particulier présenté que cette approche a permis une des premières évaluations (sur la base de données expérimentales) de la viscosité de la matière créée au RHIC.

Nous avons également évalué le degré de thermalisation maximal atteint au RHIC en terme de nombre de Knudsen. Pour les collisions Au-Au les plus centrales, notre étude nous conduit à $K_{exp} = 0.3$, valeur non petite devant 1.

Pour le moment, je me suis concentré sur l'étude du flot elliptique, mais les effets de la thermalisation partielle doivent également être visibles dans l'étude d'autres observables. Maintenant que nous avons pu évaluer le degré de thermalisation du système, nous allons pouvoir vérifier que sa prise en compte améliore également la description d'autres observables de la physique des collisions d'ions lourds.

CHAPITRE X

Etude de la dépendance en centralité du coefficient de flot v_4

Sommaire

X.1	Première harmonique supérieure, le coefficient de flot v_4	112
X.1.1	Rappels sur le coefficient de flot v_4	112
X.1.2	Comportements limites de v_4	112
X.1.3	Mesure expérimentale du rapport $v_4/(v_2)^2$	114
X.2	Impact de la thermalisation partielle sur $v_4/(v_2)^2$	115
X.2.1	Etude qualitative de l'effet de la thermalisation partielle sur le rapport $v_4/(v_2)^2$	115
X.2.2	Dépendance avec l'impulsion transverse	115
X.2.3	Dépendance en centralité	116
X.3	Effets des fluctuations sur le rapport $v_4/(v_2)^2$	118
X.3.1	Fluctuation du flot par les différences d'analyse	118
X.3.2	Effet sur les coefficients de flot des fluctuations d'excentricité	119
X.4	Expliquer la dépendance en centralité du rapport $v_4/(v_2)^2$	120
X.4.1	Combinaisons des effets des fluctuations et de la thermalisation partielle	120
X.4.2	Modèle jouet des fluctuations gaussiennes 1-dimensionnelle pour le flot elliptique	120
X.4.3	Limites et discussion de nos résultats	121
X.5	Conclusion	123

Au chapitre précédent, j'ai discuté la dépendance du flot elliptique dans le degré de thermalisation du système. Nous avons vu qu'il était possible de la paramétrer, de façon simple, par une fonction possédant les bons comportements dans les limites hydrodynamique et de vol libre. Nous avons ainsi été capables d'évaluer le degré de thermalisation du système créé dans les collisions centrales Au-Au au RHIC ($K_{exp} = 0.3$ pour des conditions initiales basées sur le modèle de Glauber).

Dans ce chapitre, je vais m'intéresser à l'étude du coefficient de flot v_4 . Après un bref rappel, nous identifierons son comportement dans la limite hydrodynamique. Nous verrons alors

que les mesures expérimentales sont nettement supérieures à la prédiction de l'hydrodynamique idéale. L'introduction des effets de la thermalisation partielle n'étant pas, à elle seule, capable d'expliquer la dépendance en centralité observée. Nous verrons qu'il est nécessaire de prendre en compte les fluctuations dans les conditions initiales pour parvenir à expliquer les mesures expérimentales [126].

X.1 Première harmonique supérieure, le coefficient de flot v_4

X.1.1 Rappels sur le coefficient de flot v_4

Nous avons vu que les coefficients de flot étaient définis par :

$$\frac{d^2N}{p_t dp_t dy d(\phi - \Phi_R)} = \frac{1}{2\pi} (1 + 2v_2 \cos(2(\phi - \Phi_R)) + 2v_4 \cos(4(\phi - \Phi_R)) + \dots) \quad (\text{X.1})$$

où $v_{2,4}$ sont les coefficients de flot, Φ_R l'angle azimutal définissant la direction du plan de réaction (du paramètre d'impact de la collision).

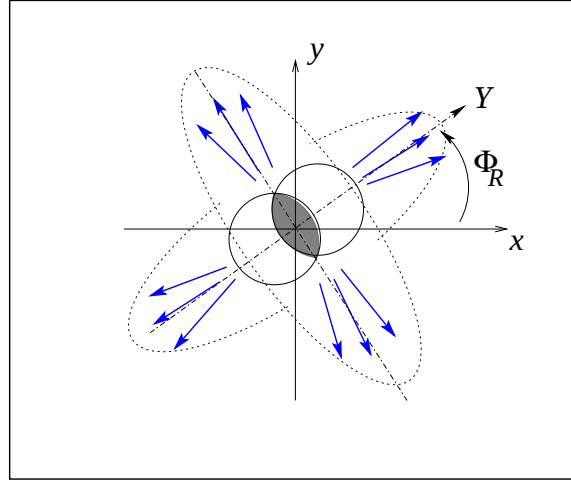


FIG. X.1 – interprétation géométrique d'un coefficient v_4 positif. Les flèches indiquent les directions privilégiées d'émission des particules.

Géométriquement, v_4 correspond au moment quadrupolaire de la distribution de particules dans l'espace des impulsions. La figure X.1 rappelle l'interprétation géométrique d'un coefficient v_4 positif.

X.1.2 Comportements limites de v_4

Comme pour le flot elliptique, il est possible d'identifier le comportement de v_4 dans le régime hydrodynamique ainsi que pour la première correction au régime de vol libre. L'essentiel des calculs a été traité en Annexe F, je me contenterai de rappeler les résultats dans cette section.

a Comportement dans le régime hydrodynamique

On se place dans le cas d'un système localement thermalisé (comportement hydrodynamique non visqueux). Comme dans la section IX.1.3(a), ce sont les particules d'impulsions transverses parallèles à la vitesse maximale du fluide ($u(\phi)$) qui contribuent le plus [105]. On a alors :

$$\frac{dN}{d\phi} \propto \exp\left(-\frac{p}{T}(u^0(\phi) - u(\phi))\right). \quad (\text{X.2})$$

Introduire le développement de $u(\phi)$ en série de Fourier ($u(\phi) = U(1 + 2V_2 \cos(2\phi) + 2V_4 \cos(4\phi) + \dots)$) dans l'équation précédente et développer l'exponentielle permet d'obtenir, en identifiant v_2 et v_4 comme les termes en $\cos(2\phi)$ et $\cos(4\phi)$ du développement, les expressions des coefficients de flot v_2 et v_4 de l'équation (X.1) :

$$\begin{aligned} v_2(p_t) &= \frac{V_2 U}{T}(p_t - m_t v) \\ v_4(p_t) &= \frac{1}{2}v_2(p_t)^2 + \frac{V_4 U}{T}(p_t - m_t v) \end{aligned} \quad (\text{X.3})$$

où $v = U/\sqrt{1+U^2}$.

Dans le régime hydrodynamique idéal, v_4 est donc composé de 2 termes, l'un est intrinsèque, proportionnel au terme en $\cos(4\phi)$ du développement de la vitesse du fluide, et est linéaire en p_t . L'autre est induit par v_2 (il vaut exactement $0.5(v_2)^2$) et est quadratique en p_t . Pour les particules de grande impulsion transverse, pour lesquelles la composante intrinsèque peut être négligée, on a la prédiction suivante^a :

$$v_4 = \frac{1}{2}(v_2)^2. \quad (\text{X.4})$$

b Comportement dans le régime de vol libre

Comme dans le cas du flot elliptique, on peut évaluer le comportement de v_4 pour un système faiblement interagissant en calculant le terme de perte de l'équation de Boltzmann (section IX.1.3 (b) et [106]).

Le coefficient v_4 est alors donné par $\langle \cos(4\phi) \rangle \times P_{coll}$, où $\langle \rangle$ désigne une moyenne sur une collision et P_{coll} la probabilité de réaliser une collision (qui est petite).

v_4 est donc proportionnel au nombre de collisions par particule. Dans la limite de faible densité^b, on a $v_2 \propto K^{-1}$ (voir Annexe F.2).

^aOn a fait plusieurs hypothèses pour dériver cette expression. On se place dans le régime de basse température, à grand p_t et pour de petites valeurs de v_2 .

^bLa limite de faible densité correspond à une limite de grand libre parcours moyen (λ_{mfp}) et donc à une limite de grand K .

c Définition de l'observable d'étude

L'étude des comportements limites de v_4 dans les régimes hydrodynamique et de vol libre nous conduit à définir une quantité dont l'étude sera plus simple à analyser. On s'intéressera en pratique au rapport [127] :

$$\frac{v_4}{(v_2)^2}. \quad (\text{X.5})$$

L'intérêt est que cette observable vaut exactement 1/2 dans le régime hydrodynamique, et que dans la limite de faibles densités (petites corrections au vol libre), on a $v_4/(v_2)^2 \propto K$. Puisque, dans ce régime, les v_n sont proportionnels à K^{-1} (pour $K \gg 1$, voir annexe F.3).

X.1.3 Mesure expérimentale du rapport $v_4/(v_2)^2$

Le rapport $v_4/(v_2)^2$ a été mesuré par les 2 principales expériences du RHIC (STAR et PHENIX). La figure X.2 montre différents résultats obtenus.

La figure X.2(a) montre l'évolution du rapport avec l'impulsion transverse pour des pions dans l'expérience PHENIX [128], les résultats sont moyennés entre 20 et 60% en centralité. La ligne indique un ajustement sur les données par la fonction :

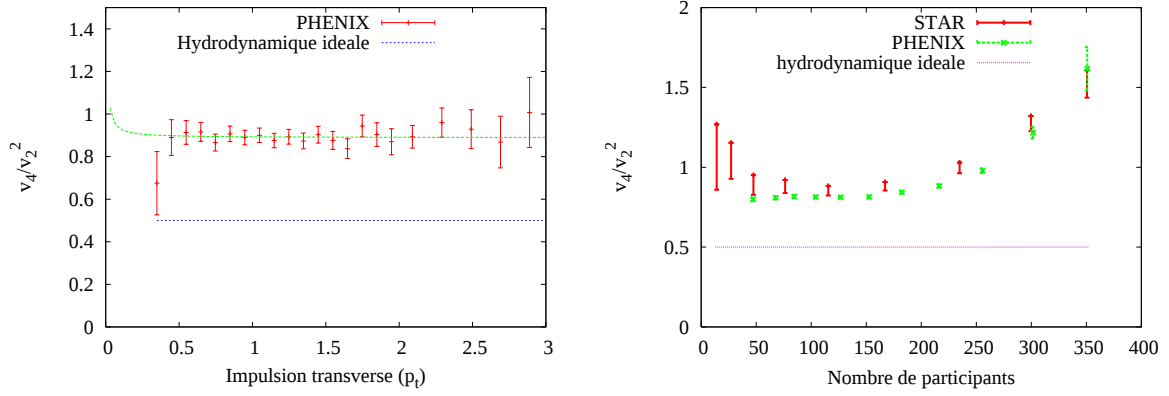
$$\frac{v_4}{(v_2)^2} = A + B \frac{\langle p_t \rangle}{p_t} \quad (\text{X.6})$$

où A et B sont des constantes sans dimension (l'ajustement conduit à $A = 0.89 \pm 0.02$ et $B = 0.01 \pm 0.04$). Cette fonction est choisie car elle reproduit le comportement hydrodynamique (i.e : v_4 est la somme de 2 composantes ; une composante intrinsèque linéaire en p_t et une composante induite par v_2 quadratique en p_t). Dans la limite de haut p_t , $v_4 = 0.89(v_2)^2 \neq 0.5(v_2)^2$. On observe une déviation au comportement hydrodynamique de l'ordre de 90%.

La figure X.2(b) montre la dépendance en centralité du rapport obtenu par les expériences STAR [129] (hadrons chargés avec $p_t \in [1, 2.7]$ GeV) et PHENIX [130] (hadrons chargés avec $p_t \in [1, 2.4]$ GeV/c). La légère différence entre les données de STAR et celles de PHENIX résulte d'une différence dans la procédure de mesure des coefficients de flot (voir annexe H.3) par l'approche du plan de l'événement^c. Sur la figure, les barres d'erreur indiquées pour PHENIX [130] correspondent aux erreurs statistiques, alors que les barres d'erreur des points de STAR correspondent à notre estimation des effets de "non-flow" (voir annexe H.3). Ici aussi, les données sont nettement supérieures à la prédiction hydrodynamique. On note par ailleurs une dépendance non-triviale des données avec la centralité de la collision.

Il est clair que les données sont en désaccord avec la prédiction de l'hydrodynamique idéale. Il apparaît aussi que la dépendance en centralité de l'écart entre l'hydrodynamique et les données expérimentales est non triviale. La question que l'on se pose alors est : *les déviations à l'état d'équilibre thermique local peuvent-elles expliquer cette différence ?*

^cLes mesures de STAR sont plus soumises aux effets des corrélations azimutales non liées au plan de réaction (effets de "non-flow").



(a) Dépendance en impulsion transverse du rapport $v_4/(v_2)^2$ mesuré par l'expérience PHENIX pour des hadrons chargés à haut p_t par les expériences STAR [129] et PHENIX [130] moyenné sur les collisions 20-60% plus centrales. (b) Dépendance en centralité du rapport $v_4/(v_2)^2$ mesuré par les expériences STAR [129] et PHENIX [130]. Le résultat pour l'hydrodynamique idéale correspond à la prédiction $v_4/(v_2)^2 = 0.5$.

FIG. X.2 – Résultats expérimentaux pour le rapport $v_4/(v_2)^2$ mesuré au RHIC. Le résultat pour l'hydrodynamique idéale correspond à la prédiction $v_4/(v_2)^2 = 0.5$.

X.2 Impact de la thermalisation partielle sur $v_4/(v_2)^2$

X.2.1 Etude qualitative de l'effet de la thermalisation partielle sur le rapport $v_4/(v_2)^2$

Dans les sections IX.1.3(b) et X.1, nous avons vu que dans la limite de faible densité, les coefficients de flot sont proportionnels au nombre moyen de collisions subies par une particule. On a donc à la fois :

$$\begin{aligned} v_2 &\propto K \\ v_4 &\propto K \end{aligned} \quad (\text{X.7})$$

On s'attend donc à observer un rapport $v_4/(v_2)^2 \simeq K$ c'est à dire d'autant plus grand que le système se trouve loin de l'équilibre thermique local.

X.2.2 Dépendance avec l'impulsion transverse

Afin d'identifier la dépendance du rapport $v_4/(v_2)^2$ dans le degré de thermalisation, on a étudié la dépendance en impulsion transverse de ce rapport dans le code de Boltzmann pour différentes valeurs de K . Les résultats se trouvent sur la figure X.3. A noter que la courbe notée "hydro" a été obtenue par un calcul d'hydrodynamique idéale indépendant [104]. Qualitativement, la dépendance en p_t évolue peu avec le degré de thermalisation, on a donc choisi de paramétrer cette dépendance en ajustant sur nos résultats la formule (X.6).

Dans la limite $K \rightarrow 0$, le code de transport donne $A = 0.524 \pm 0.008$, qui est proche de $1/2$. On retrouve bien la convergence du code de Boltzmann sur l'hydrodynamique idéale dans la limite $K \rightarrow 0$.

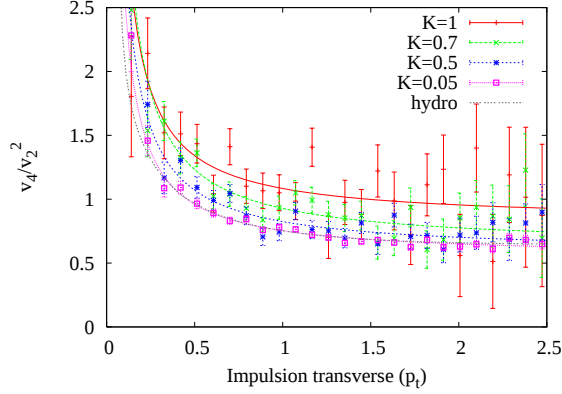


FIG. X.3 – Dépendance en impulsion transverse obtenue dans la résolution numérique de l'équation de Boltzmann pour 4 valeurs différentes du nombre de Knudsen (points). Les lignes correspondent à des ajustements de la formule X.6 sur les points. Le résultat hydrodynamique est obtenu par un calcul indépendant [104].

Le calcul hydrodynamique indépendant conduit à $v_4/(v_2)^2 = 0.557 + 0.479\langle p_t \rangle/p_t$, soit $A^{hydro} \geq 0.5$. Cette petite différence vient du fait que l'équation (X.4) n'est vraie que pour de petites valeurs de v_2 et v_4 . Or les calculs d'hydrodynamique idéale conduisent à $v_2(p_t = 2.5 \text{ GeV}/c) = 0.51$ (dans le cadre d'un calcul avec une EoS de gaz parfait, et pour les conditions initiales que l'on a choisies VII.1.1^d). De plus pour ces larges valeurs de p_t , la composante intrinsèque de v_4 est négligeable (linéaire en p_t quand la composante induite est quadratique). En la négligeant, on obtient alors (voir annexe F.1) :

$$\frac{v_4}{(v_2)^2}(p_t) = \frac{I_2(x)}{I_1^2(x)}. \quad (\text{X.8})$$

La valeur de x est donnée par $v_2(p_t = 2.5 \text{ GeV}/c) = I_1(x)/I_0(x) = 0.51$. Ce qui correspond à $x = 1.19$ d'où $v_4/(v_2)^2 = 0.552$ bien compatible avec le calcul d'hydrodynamique^e.

X.2.3 Dépendance en centralité

La figure X.4 montre l'évolution des coefficients de l'ajustement (A et B) en fonction de K . Il apparaît que la dépendance linéaire, attendue dans le régime dilué (K grand) décrit convenablement l'évolution même pour $K \simeq 1$ (les lignes sur la figure sont des ajustement affines sur les points). On peut ainsi paramétrer la dépendance en K du rapport à grand p_T (en négligeant la composante intrinsèque) par :

$$\frac{v_4}{(v_2)^2} = 0.5 + 0.18K \quad (\text{X.9})$$

^dOn a choisi ϵ grand de façon à limiter les effets des erreurs statistiques sur les coefficients de flot.

^eIl existe une petite différence (de l'ordre de quelques pourcents) entre le résultat de la résolution de Boltzmann dans la limite $K \rightarrow 0$ et les calcul d'hydrodynamique idéale que nous n'avons pas élucidée.

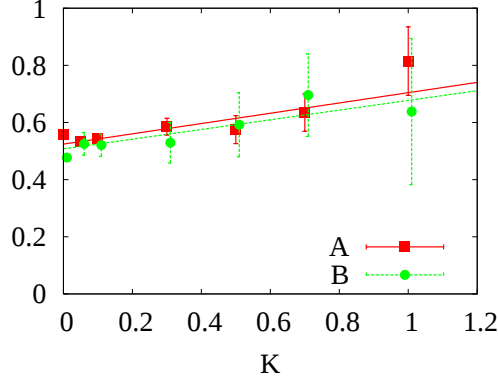


FIG. X.4 – Evolution des coefficients A et B de l'équation (X.6) en fonction du degré de thermalisation du système. Les droites correspondent à des ajustements affines, attendus dans le régime dilué (grand K).

Comme illustré sur la figure X.5, les effets d'une thermalisation partielle sont trop faibles pour expliquer la différence avec les données expérimentales (ils correspondent à une correction de l'ordre de 15 à 20%). On doit donc introduire une nouvelle physique pour expliquer les observations. Le but étant d'expliquer la dépendance non triviale en centralité (en particulier pour les collisions les plus centrales) d'une observable fortement liée à la géométrie de la collision, on va s'intéresser à l'effet des fluctuations des coefficients de flot^f.

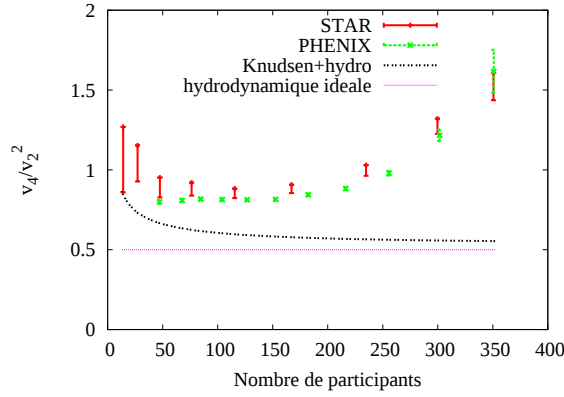


FIG. X.5 – Même figure que la figure X.2(b), où l'on a ajouté les effets de la thermalisation partielle sur le rapport $\frac{v_4}{(v_2)^2}$. Le nombre de Knudsen est relié à la centralité par la méthode présentée dans la section IX.2.2.

^fOn sait que ces effets dominent les mesures de flot pour les collisions centrales où le flot est attendu nul par symétrie.

X.3 Effets des fluctuations sur le rapport $v_4/(v_2)^2$

Dans la section précédente, j’ai évalué les effets de la thermalisation partielle sur la dépendance en centralité du rapport $v_4/(v_2)^2$. Dans cette section, je ferai l’hypothèse que le système est localement thermalisé et se comporte donc comme un fluide non-visqueux. Pour simplifier, je considérerai également que les coefficients de flot sont obtenus par une analyse des corrélations azimutales à 2, 3, ou 4 particules^g suivant :

$$v_2\{2\}^2 = \langle (v_2)^2 \rangle^2 \quad (\text{X.10})$$

$$v_2\{4\}^4 = 2\langle (v_2)^2 \rangle^2 - \langle (v_2)^4 \rangle \quad (\text{X.11})$$

$$v_4\{3\} = \langle v_4(v_2)^2 \rangle. \quad (\text{X.12})$$

Dans ce cadre, le rapport $v_4/(v_2)^2$ devient, en utilisant la prédiction hydrodynamique idéale $v_4 = 1/2(v_2)^2$:

$$\frac{v_4\{3\}}{v_2\{2\}^2} = \frac{\langle v_4(v_2)^2 \rangle}{\langle (v_2)^2 \rangle^2} = \frac{1}{2} \frac{\langle (v_2)^4 \rangle}{\langle (v_2)^2 \rangle^2}. \quad (\text{X.13})$$

La présence de fluctuations du flot elliptique conduit à $\langle (v_2)^4 \rangle \geq \langle (v_2)^2 \rangle^2$. Les fluctuations ont donc pour effet d’augmenter le rapport $v_4 = 1/2(v_2)^2$ dans le cadre de l’évolution hydrodynamique.

X.3.1 Fluctuation du flot par les différences d’analyse

Les différentes analyses des corrélations azimutales afin de calculer les coefficients de flot donnent des résultats différents (Annexe H.2). En supposant que ces différences sont le fait des fluctuations, il est possible d’en déterminer l’amplitude en comparant différentes méthodes d’analyses.

En particulier, les corrélations à 2 particules ($v_2\{2\}$) mesurent exactement $\langle (v_2)^2 \rangle$, alors que l’approche par les cumulants à 4-particules fait intervenir $\langle (v_2)^4 \rangle$ et $\langle (v_2)^2 \rangle$:

$$v_2\{4\}^4 = 2\langle (v_2)^2 \rangle^2 - \langle (v_2)^4 \rangle \quad (\text{X.14})$$

en utilisant $\langle (v_2)^2 \rangle$ de $v_2\{2\}$ et $\langle (v_2)^4 \rangle$ de $v_2\{4\}$, on peut inverser l’équation (X.13). On obtient alors :

$$\frac{v_4\{3\}}{v_2\{2\}^2} = \frac{1}{2} \frac{\langle (v_2)^4 \rangle}{\langle (v_2)^2 \rangle^2} = \frac{1}{2} \left(2 - \left(\frac{v_2\{4\}}{v_2\{2\}} \right)^4 \right). \quad (\text{X.15})$$

Les résultats sont présentés sur la figure X.6. L’accord avec les mesures est bien meilleur si l’on prend en compte les effets des fluctuations. Pour ces prédictions, nous avons utilisé les mesures $v_2\{2\}$ de [133], et des mesures récentes de $v_2\{LYZ\}$ [135, 134] (voir annexe H.1) au lieu de $v_2\{4\}$ puisqu’on attend une dépendance similaire dans les fluctuations de flot pour ces 2 analyses. Par ailleurs, nous avons testé numériquement que les résultats ne changeaient pas notablement si l’on prenait en compte les effets de “non-flow” dans $v_2\{2\}$ tels que présentés dans l’équation (H.10) de l’annexe H.1.

^gL’étude peut être également réalisée pour d’autres méthodes d’analyses. Elle est alors plus complexe, mais les résultats changent peu. Pour les détails, j’invite le lecteur à se reporter à l’Annexe H.4 ainsi qu’à [131, 132] et à l’annexe de [126].

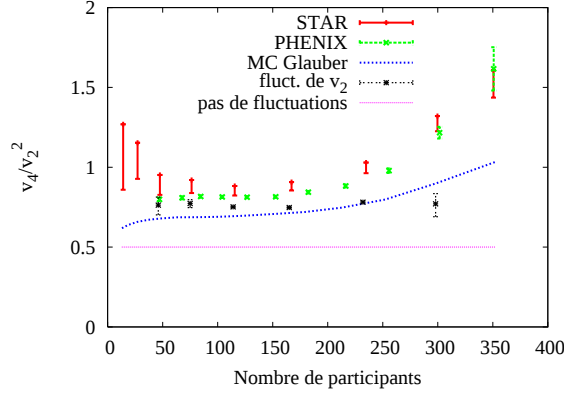


FIG. X.6 – Même figure que la figure X.3(b), mais cette fois, on ajoute à l’hydrodynamique idéale les effets de fluctuations obtenues par des calculs de MC Glauber ainsi que par l’étude de la différence entre $v_2\{2\}$ et $v_2\{4\}$. L’accord avec les données est nettement amélioré par la prise en compte des fluctuations d’excentricité initiale.

X.3.2 Effet sur les coefficients de flot des fluctuations d’excentricité

Néanmoins, aucune mesure de $v_2\{LYZ\}$ ni de $v_2\{4\}$ n’est disponible pour les collisions les plus centrales. Pour modéliser les fluctuations de flot dans chaque “bin” en centralité, nous allons utiliser la proportionnalité entre flot elliptique et excentricité de la distribution initiale^h.

On sait que la prise en compte des positions des nucléons participants pour chaque collision génère des fluctuations de la géométrie des conditions initiales. En admettant que $v_2 \propto \epsilon_{part}$, on obtient, pour une évolution hydrodynamique idéale :

$$\frac{v_4\{3\}}{v_2\{2\}^2} = \frac{1}{2} \frac{\langle (v_2)^4 \rangle}{\langle (v_2)^2 \rangle^2} = \frac{1}{2} \frac{\langle \epsilon_{part}^4 \rangle}{\langle \epsilon_{part}^2 \rangle^2}. \quad (\text{X.16})$$

En utilisant un générateur Monte-Carlo Glauber pour les conditions initiales (section VIII.1.1(b)) l’excentricité est donnée, pour chaque collision, par l’équation (VIII.12).

Les intervalles en centralité sont définis en fonction de la multiplicité (voir sections VIII.1.1(c) et VIII.2.1), ce qui reproduit le mieux l’approche expérimentale. Chaque “bin” contient 5% du nombre total d’évènements.

Nos résultats sont présentés sur la figure X.6. Pour les collisions semi-périphériques, le modèle de fluctuations d’excentricité est qualitativement en accord avec l’évaluation des fluctuations par la comparaison des différentes méthodes d’analyses de v_2 . Ceci confirme bien l’observation que la différence entre $v_2\{2\}$ et $v_2\{4\}$ est essentiellement le fait des fluctuations [132]. Pour les collisions centrales, par contre, les fluctuations augmentent le rapport $v_4/(v_2)^2$ d’un facteur 2ⁱ en revanche les données font apparaître un facteur 3 (figure X.6).

^hDans le cadre d’une évolution hydrodynamique idéale, on attend $v_2 = \kappa\epsilon$, où κ est une constante indépendante de la centralité. Cet effet traduit l’invariance d’échelle de l’hydrodynamique idéale [131].

ⁱLe modèle standard [136] utilisé pour paramétrer les fluctuations d’excentricité est basé sur une distribu-

X.4 Expliquer la dépendance en centralité du rapport $v_4/(v_2)^2$

X.4.1 Combinaisons des effets des fluctuations et de la thermalisation partielle

Il est possible de combiner les effets précédents. Pour cela, on va modifier la relation entre le rapport $v_4/(v_2)^2$ et le nombre de Knudsen pour prendre en compte l'effet des fluctuations. En restreignant les fluctuations de flot elliptique aux seules fluctuations de l'excentricité initiale, on obtient :

$$\frac{v_4\{3\}}{v_2\{2\}^2} = \left(\frac{1}{2} + 0.18K\right) \frac{\langle \epsilon_{part}^4 \rangle}{\langle \epsilon_{part}^2 \rangle^2}. \quad (\text{X.18})$$

Les valeurs de K sont ici aussi obtenues par l'étude de la dépendance en centralité du flot elliptique (section IX.2.2). Pour les collisions les plus centrales, $K_{exp} = 0.3$, et sa valeur augmente pour les collisions plus périphériques.

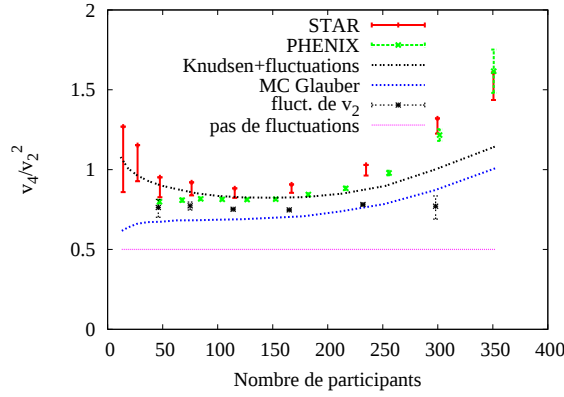


FIG. X.7 – Même figure que X.6, on compile cette fois effets des fluctuations et de la thermalisation partielle. On observe un accord qualitatif entre hydro+Knudsen+fluctuations et les données sauf pour les collisions les plus centrales

Le résultat est présenté sur la figure X.7. On voit que l'accord avec les données est sensiblement amélioré pour les collisions périphériques, mais pas pour les collisions centrales.

X.4.2 Modèle jouet des fluctuations gaussiennes 1-dimensionnelle pour le flot elliptique

Pour illustrer comment v_4 dépend de la statistique des fluctuations du flot elliptique, on considère le cas où le flot elliptique fluctue, à paramètre d'impact fixé, sur une distribution

gaussienne à 2-dimensions. Pour les collisions centrales, ce modèle prédit :

$$\frac{\langle \epsilon_{part}^4 \rangle}{\langle \epsilon_{part}^2 \rangle^2} = 2 \quad (\text{X.17})$$

ce qui est bien en accord avec nos résultats (Les calculs de MC Glauber donnent $\frac{\langle \epsilon_{part}^4 \rangle}{\langle \epsilon_{part}^2 \rangle^2} = 2.0644$).

gaussienne :

$$\frac{dN}{dv_2} = \frac{1}{\sigma_v \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{(v_2 - \kappa \epsilon_{std}(b))^2}{2\sigma_v^2} \right) \quad (\text{X.19})$$

où b désigne la norme du paramètre d'impact, ϵ_{std} est la définition standard de l'excentricité (obtenue dans un modèle optique), et où l'on a choisi $\sigma_v \propto N_{part}^{-1/2}$ [131].

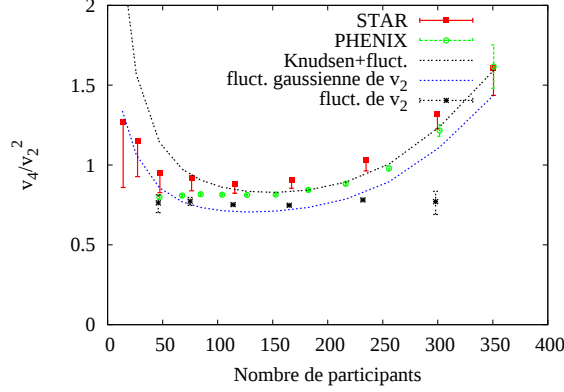


FIG. X.8 – Même figure que X.3(b), on a ajouté les résultats de notre modèle jouet pour les fluctuations de flot elliptique basé sur une distribution gaussienne à 1-dimension. Les effets de la thermalisation partielle sont ici aussi obtenus à partir de la dépendance en centralité du flot elliptique.

La normalisation globale est choisie pour reproduire la différence entre $v_2\{2\}$ et $v_2\{4\}$ pour les collisions semi-centrales. Le résultat est présenté sur la figure X.8. On est cette fois bien en accord avec les données puisqu'un tel modèle conduit pour les collisions centrales à :

$$\frac{\langle (v_2)^4 \rangle}{\langle (v_2)^2 \rangle^2} = 3. \quad (\text{X.20})$$

Néanmoins, nous n'avons aucune idée d'une physique capable, d'un point de vue microscopique, de générer de telles fluctuations (distribution gaussienne à 1-dimension).

X.4.3 Limites et discussion de nos résultats

a Limites de notre étude

Pour obtenir les résultats de la figure X.7, nous avons utilisé l'équation (X.9) qui est obtenue à partir de la résolution numérique de l'équation de Boltzmann. Comme pour l'étude de la dépendance en centralité du flot elliptique, ces résultats ne sont vrais que pour un système bi-dimensionnel dilué composé de particules de masse nulle et possédant l'équation d'état d'un gaz parfait. En particulier, le coefficient de l'équation (X.9) peut dépendre de la masse des particules et de l'équation d'état du système.

Par ailleurs, ce travail est essentiellement fondé sur la prédiction :

$$v_4 = \frac{1}{2}(v_2)^2 \quad (\text{X.21})$$

pour l'évolution hydrodynamique non visqueuse. Or cette prédiction n'est vraie qu'à basse température pour des coefficients v_2 et v_4 petits et pour des particules de grand p_t . De plus, elle revient à considérer que $v_4 \propto (v_2)^2$, et donc à négliger de possibles fluctuations de v_4 indépendantes des fluctuations de v_2 .

b Discussion du cas des collisions centrales

Nous n'avons pas été capables de comprendre physiquement la différence observée entre les données expérimentales et le modèle théorique pour les collisions les plus centrales. Différentes approches possibles peuvent être envisagées pour l'expliquer :

- **Effet de la composante intrinsèque de v_4** : dans [137], les auteurs proposent d'introduire une excentricité ϵ_4 correspondant au moment quadrupolaire de la distribution initiale de matière. Cela revient à prendre en compte la composante intrinsèque de v_4 ^j. On a vu que cette composante correspondait à une petite correction dans le cas des particules à haut p_t . Cet effet n'est donc pas susceptible d'expliquer le comportement observé pour les collisions centrales (figure X.7), les données correspondant à des particules de haut p_t (moyenne sur $p_t \in [1, 2.7]$ GeV/c pour STAR et sur $p_t \in [1, 2.4]$ GeV/c pour PHENIX).
- **Dépendance en centralité dans le modèle de “Core-Corona”** : Une autre possibilité consiste à regarder quels résultats sont obtenus dans le cadre du modèle de cœur-couronne. Dans ce modèle, la matière créée par les interactions de nucléons du cœur évolue collectivement suivant les lois de l'hydrodynamique non visqueuse (la matière de la couronne résulte d'une superposition de collisions proton-proton indépendantes). Dans ce cadre, le rapport $v_4/(v_2)^2$ peut être évalué comme :

$$\left. \frac{v_4}{(v_2)^2} \right|_{CoreCorona} = \frac{1}{2} \frac{\langle (\epsilon_{part}^{cur})^4 \rangle}{\langle (\epsilon_{part}^{cur})^2 \rangle^2}, \quad (X.22)$$

où ϵ_{part}^{cur} décrit l'excentricité du plan de participant calculée en ne considérant que les nucléons du cœur. Les simulations que nous avons réalisées à partir de notre code de Monte-Carlo Glauber nous ont conduit à :

$$\left. \frac{v_4}{(v_2)^2} \right|_{CoreCorona} = 0.924 \quad (X.23)$$

pour les collisions les plus centrales. Ce modèle n'est donc pas capable d'améliorer la description de la dépendance en centralité de $v_4/(v_2)^2$.

- **Effets de “non-flow”** : On ne peut a priori exclure que cette différence soit due aux effets de “non-flow”, même si l'on s'attendrait à ce qu'ils soient petits dans le cas des collisions les plus centrales ($\delta_{nf} \propto N_{part}^{-1}$). En considérant un δ_{nf} 4 fois supérieur^k, notre calcul

^jCela revient en pratique à introduire des fluctuations pour v_4 indépendantes des fluctuations de flot elliptique. A noter que le terme de $\cos(4\phi)$ du développement de la vitesse du fluide (à l'origine de la composante intrinsèque de v_4) peut avoir 2 origines, une part vient d'un terme en $\cos(2\phi)^2$, et une autre est propre et est proportionnelle à ϵ_4 .

^kUn facteur 4 est envisageable d'autant qu'on a fait l'hypothèse que la correction de “non-flow” évaluée à partir des données proton-proton était indépendante de l'impulsion transverse. On attend en réalité plus de “non-flow” à haut p_t .

s'accorde avec les données pour les collisions centrales. Mais l'on perd alors la description des collisions périphériques.

- **Autres sources de fluctuations du flot elliptique** : Nous pensons que cette différence provient du fait que les fluctuations du flot elliptique, dans les collisions centrales, ne sont pas uniquement dues à des fluctuations d'excentricité (ou de paramètre d'impact). Il est surprenant de voir que les mesures directes des fluctuations de flot elliptique réalisées par PHOBOS [138] ne s'étendent pas aux collisions les plus centrales. Une confirmation de l'existence de ces fluctuations (que $\langle (v_2)^4 \rangle / \langle (v_2)^2 \rangle^2 \simeq 3$) pourrait venir de l'analyse par la méthode des cumulants à 4-particules. Il n'existe pas de données publiées correspondant à $v_2\{4\}$ pour les collisions les plus centrales, probablement car $v_2\{4\}$ ne peut alors plus être défini par l'équation (X.14), le terme de droite devenant négatif si $\langle (v_2)^4 \rangle / \langle (v_2)^2 \rangle^2 > 2$.

X.5 Conclusion

Dans ce chapitre, j'ai étudié la dépendance en centralité du coefficient de flot v_4 . Nous avons vu qu'elle pouvait être expliquée par la combinaison de 2 effets : les fluctuations d'excentricité, qui expliquent l'essentiel de la différence entre les données expérimentales et la prédiction hydrodynamique ; et les effets de déviations à l'équilibre thermique local qui correspondent à une petite correction supplémentaire. Nous avons vu que leur combinaison permettait de reproduire les données pour les collisions semi-périphériques et périphériques. Néanmoins, nous n'avons pas été capables de comprendre l'amplitude du rapport $v_4/(v_2)^2$ observé expérimentalement pour les collisions les plus centrales. Nous pensons qu'elle sont dues à l'existence d'autres fluctuations du flot elliptique que celles issues des fluctuations de l'excentricité initiale¹. La publication de données pour $v_2\{4\}$ ainsi que pour des mesures directes de l'amplitude des fluctuations du flot elliptique dans les collisions centrales serait une source importante d'informations pour mieux comprendre les mécanismes à l'origine des fluctuations du flot elliptique.

Récemment, notre étude a été reprise par l'expérience PHENIX [139] et nos prédictions ont été comparées avec de nouvelles données. Selon eux, ces données excluent l'existence de contributions importante aux effets de "non-flow" qui dépendent de p_t (pour $p_t \leq 3$ GeV/c) pour les régions en centralité étudiées. On peut donc considérer que la valeur du rapport $v_4/(v_2)^2$ pour les collisions les plus centrales résulte, plus probablement, de l'existence de fluctuations des coefficients de flot, que d'une grande amplitude des effets de "non-flow" pour les intervalles en p_t et en centralité considérés.

¹Comme $v_4 \propto (v_2)^2$, on néglige les fluctuations de v_4 indépendantes des fluctuations de v_2 .

CHAPITRE XI

Corrélations quantiques

Sommaire

XI.1	Corrélations quantiques de particules identiques, les rayons HBT	126
XI.1.1	Principes des corrélations HBT	126
XI.1.2	Paramétrisation standard	127
XI.1.3	Paramétrisation dans la résolution numérique de l'équation de Boltzmann	128
XI.2	Etude des corrélations HBT pour les collisions centrales	129
XI.2.1	Dépendance des rayons avec l'impulsion transverse	129
XI.2.2	Dépendance avec le degré de thermalisation du système	131
XI.2.3	Effet de la thermalisation partielle sur le Puzzle HBT	132
XI.2.4	Limite de notre approche	133
XI.3	Etude de la dépendance azimutale des rayons HBT	134
XI.3.1	Dépendance azimutale des rayons HBT	135
XI.3.2	Dépendance des rayons azHBT avec le degré de thermalisation du système	135
XI.3.3	Evolution des rapports d'amplitude des oscillations et excentricité azHBT	137
XI.4	Conclusion	139

Dans ce dernier chapitre, je vais discuter comment les corrélations à 2 particules identiques permettent de caractériser la source qui les a émises. En particulier, j'introduirai la notion de rayons HBT pour caractériser la distribution spatio-temporelle de particules à l'instant du "freeze-out cinétique" (instant de la dernière interaction). Je discuterai la variation des rayons HBT avec l'impulsion transverse ainsi qu'avec le degré de thermalisation du système. Nous verrons que, si l'hydrodynamique idéale prédit un rapport $R_o/R_s \simeq 1.5^a$, la prise en compte de déviations à l'équilibre thermique local permet de trouver des valeurs de ce rapport bien plus proches de la valeur expérimentalement observée (compatible avec 1). Dans une dernière section, je discuterai alors le cas des collisions non-centrales, et en particulier la dépendance

^a R_o et R_s dénotent des rayons HBT qui seront introduits en détails plus loin.

azimutale des rayons. Nous verrons qu'il est possible, de relier ces rayons à l'excentricité initiale de la distribution de particules ce qui permettrait une "mesure" expérimentale de l'excentricité.

XI.1 Corrélations quantiques de particules identiques, les rayons HBT

L'origine de ces corrélations remonte aux années 50. L'acronyme HBT qui leur est associé vient du nom des 2 astrophysiciens, R. H. Brown et R. Q. Twiss, qui ont introduit cette technique d'interférométrie [140]. Depuis cette méthode a été étendue à la physique nucléaire, car elle possède l'intérêt de permettre un accès direct à la taille de la "fireball" créée lors de la collision [141].

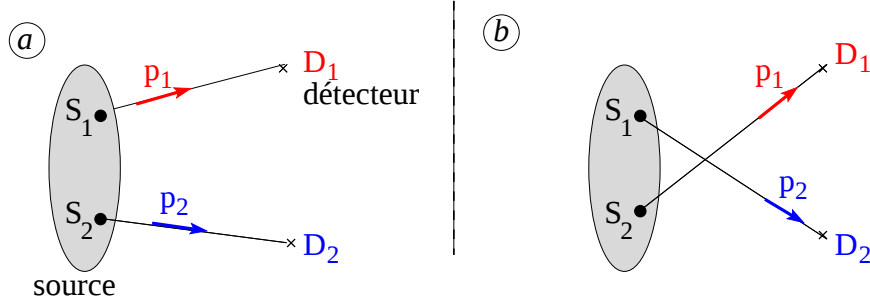


FIG. XI.1 – Emission de deux pions issus d'une source étendue (points S_1 et S_2) et détection aux points D_1 et D_2 .

Les corrélations HBT se basent sur la (anti-)symétrie de la fonction d'onde des particules détectées et sont des interférences quantiques.

XI.1.1 Principes des corrélations HBT

Pour comprendre le principe, on considère le cas simple d'une source étendue qui émet 2 pions identiques en 2 points notés S_1 et S_2 (figure XI.1). On considère que ces particules peuvent-être décrites par des ondes planes de vecteur d'onde $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$. Les 2 particules étant identiques, dans le système d'unité $\hbar = c = 1$, 2 fonctions d'ondes sont possibles pour le système :

- Première configuration, le pion issu de S_1 est détecté par le détecteur D_1 et celui issu de S_2 par le détecteur D_2 . La fonction d'onde de cette configuration est alors donnée par :

$$|\psi_a\rangle = e^{i\vec{p}_1 \cdot \vec{S}_1} e^{i\vec{p}_2 \cdot \vec{S}_2} e^{i\vec{p}_1 \cdot \vec{D}_1} e^{i\vec{p}_2 \cdot \vec{D}_2}. \quad (\text{XI.1})$$

- La seconde configuration possible voit le pion 1 (issu de S_1) détecté en D_2 et le pion 2 en D_1 . La fonction d'onde est alors donnée par :

$$|\psi_b\rangle = e^{i\vec{p}_1 \cdot \vec{S}_1} e^{i\vec{p}_2 \cdot \vec{S}_2} e^{i\vec{p}_1 \cdot \vec{D}_2} e^{i\vec{p}_2 \cdot \vec{D}_1}. \quad (\text{XI.2})$$

Les 2 pions étant identiques, la fonction d'onde du système doit être symétrique par permutation des particules. Elle est donc donnée par :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_a\rangle + |\psi_b\rangle). \quad (\text{XI.3})$$

La probabilité de détecter les 2 particules est alors donnée par :

$$|\psi(S_1, S_2)|^2 \propto 1 + \text{Re} \left(e^{i(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \cdot \vec{S}_1 \vec{S}_2} \right). \quad (\text{XI.4})$$

Elle contient un terme d'interférences et dépend de l'impulsion relative des particules ainsi que des positions d'où elles sont émises. Si l'on note ρ la densité de la source normalisée à l'unité, on peut moyenner l'expression précédente sur la position des sources avec un poids ρ pour chaque source. On obtient ainsi la fonction de corrélation à 2 particules (voir annexe I.1) :

$$\mathcal{C}_2 = \frac{f(\vec{p}_1, \vec{p}_2)}{f(\vec{p}_1)f(\vec{p}_2)} = 1 + \left| \int d^3\vec{x} \rho(\vec{x}) e^{i(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \cdot \vec{x}} \right|^2, \quad (\text{XI.5})$$

où $f(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ correspond à la fonction de distribution de 2 particules dans l'espace des impulsions.

La fonction de corrélation à 2 particules est donc directement reliée à la transformée de Fourier de la fonction densité de la source. L'effet des corrélations HBT est important pour $|\vec{p}_1 - \vec{p}_2|R \leq 1$ où R est la taille caractéristique de la source que l'on appelle communément le rayon HBT.

Pour appliquer la théorie des interférences HBT aux les collisions d'ions lourds, il faut identifier la "source" dans une telle collision. Les collisions d'ions lourds étant des processus dynamiques, le système est en expansion. On peut alors identifier la source avec la distribution de matière à l'instant du "freeze-out" cinétique des pions (i.e : à l'instant de la dernière interaction des particules). A noter que l'on mesure en général $R \simeq 4$ fm, soit $1/R \simeq 50$ MeV, à comparer à l'impulsion moyenne des pions ($\simeq 400$ MeV). Les corrélations HBT sont donc de courte portée dans l'espace des impulsions.

XI.1.2 Paramétrisation standard

Considérons toujours nos 2 pions d'impulsion $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$. On pose alors $\vec{q} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2$ et $\vec{K} = 1/2(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$. Pour étudier les rayons HBT, par convention on se place dans le référentiel comobile longitudinal (LCMS) de la paire de particules (référentiel où $\vec{K}$ est purement transverse). On définit alors 3 directions orthogonales (figure XI.2) :

- "long" suivant l'axe des faisceaux,
- "out" suivant la direction de $\vec{K}$,
- "side" suivant la dernière direction .

La paramétrisation standard des corrélations HBT consiste à ajuster sur la fonction de corrélations à 2 particules dans le repère (*out*, *side*, *long*) une distribution gaussienne en impulsion relative :

$$\mathcal{C}_2^{HBT} \propto \exp \left(-q_o^2 R_o^2 - q_s^2 R_s^2 - q_L^2 R_L^2 - q_o q_s R_{os} - q_o q_L R_{oL} - q_s q_L R_{sL} \right). \quad (\text{XI.6})$$

Il est alors facile de caractériser les régions d'homogénéité, à partir de la distribution spatio-temporelle de particules au “freeze-out”.

Les rayons HBT sont alors donnés par (Annexe I.2) :

$$\begin{aligned} R_o^2 &= \langle x_o^2 \rangle - \langle x_o \rangle^2 \\ R_s^2 &= \langle x_s^2 \rangle - \langle x_s \rangle^2 \\ R_{os} &= \langle x_o x_s \rangle - \langle x_o \rangle \langle x_s \rangle. \end{aligned} \tag{XI.10}$$

Nous avons vérifié numériquement que les sources étaient bien gaussiennes^c.

Les rayons, tels que définis par les équations (XI.11), sont des fonctions de ϕ et de p_t . Dans la section suivante, je discuterai l'étude des rayons HBT restreinte aux collisions purement centrales (avec $\sigma_x = \sigma_y$ dans les conditions initiales). La symétrie du système par rapport à la direction de $\vec{p}_t$ impose que $R_{os} = 0$, et l'invariance par rotation implique que R_o et R_s soient indépendants de ϕ .

XI.2 Etude des corrélations HBT pour les collisions centrales

Le but de l'étude des corrélations HBT dans les collisions centrales est de comprendre le puzzle HBT. Ce puzzle peut être énoncé de la façon suivante :

Les calculs d'hydrodynamique non visqueuse, qui sont qualitativement capable de reproduire le spectre des pions ainsi que le flot elliptique prédisent un rapport R_o/R_s 1.5 alors que les données expérimentales sont compatibles avec 1.

Dans la limite d'un système sans interactions, on doit observer $R_o = R_s$ par symétrie. On s'attend donc que le Puzzle HBT soit résolu pour une évolution sans interactions. La question est alors quantitative : pour quelles valeurs de K , et donc pour combien de collisions par particule, approche-t-on le régime hydrodynamique ? C'est pour répondre à cette question que l'on a besoin d'une résolution numérique de l'équation de Boltzmann.

XI.2.1 Dépendance des rayons avec l'impulsion transverse

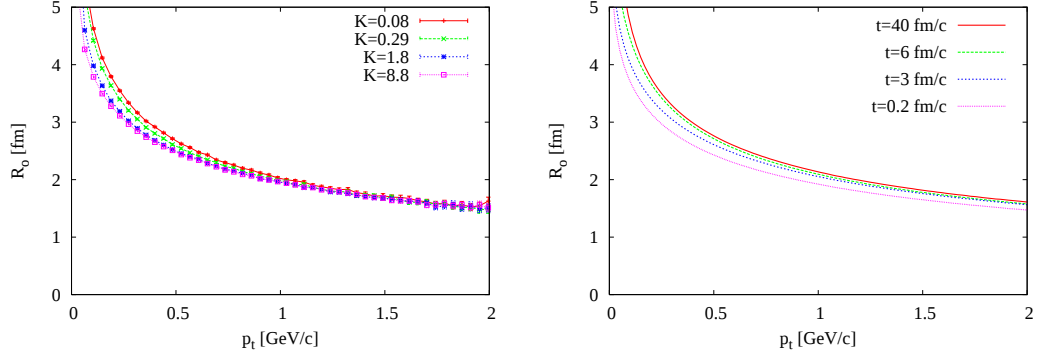
Comme je l'ai indiqué dans la section précédente, les rayons HBT caractérisent les régions d'homogénéité de la source (de la distribution de particules au “freeze-out”). Il est légitime de se demander comment ces rayons vont évoluer avec l'impulsion transverse des particules.

Si l'on considère la définition des régions d'homogénéité : *Zone de l'espace des phases correspondant à une émission de particules possédant la même impulsion (norme et direction)*. Alors, on peut évaluer la dimension caractéristique R comme la distance dont il faut se déplacer pour que la variation d'impulsion liée aux effets collectifs soit supérieure aux effets thermiques.

^cOn a vérifié que le rapport :

$$\frac{\langle x^4 \rangle}{\langle x^2 \rangle^2} \tag{XI.11}$$

était proche de 3 pour $x = x_o$ et $x = x_s$ (voir annexe I.2).



(a) Rayon HBT R_o fonction de l'impulsion transverse des particules dans la résolution numérique de l'équation de Boltzmann. Les courbes sont indexées par la valeur du nombre de Knudsen correspondante
(b) Rayon HBT R_o fonction de l'impulsion transverse des particules dans un calcul d'hydrodynamique non visqueux avec "freeze-out" isochrone. Les courbes sont indexées par la durée de l'évolution hydrodynamique.

FIG. XI.3 – Etude de la dépendance en impulsion transverse du rayon HBT R_o à la fois dans le code de transport et dans un calcul d'hydrodynamique non visqueuse.

a R_{long} et le "scaling" en masse transverse

Au RHIC, on étudie des collisions entre noyaux contractés de Lorentz d'un facteur 100. S'il ne se produisait aucune expansion longitudinale (dans la direction des faisceaux) on devrait observer $R_{long} \leq 1$ fm, ce qui n'est pas le cas expérimentalement.

On considère, en général, que le système subit initialement une expansion de Bjorken dans la direction longitudinale : $V_{coll,z} = z/t$ où $V_{coll,v}$ désigne la vitesse caractéristique des effets collectifs dans la direction longitudinale. Sous l'hypothèse que l'expansion de Bjorken se poursuit jusqu'au "freeze-out", R_{long} peut être évalué en comparant la vitesse thermique et la variation de vitesse collective dans la direction longitudinale par :

$$R_{long} \propto \frac{V_{therm}}{\partial V_{coll,z} / \partial z} \propto V_{therm} \langle t \rangle \quad (XI.12)$$

où $\langle t \rangle$ correspond à l'instant moyen d'émission des particules, et V_{therm} dénote la vitesse thermique.

Dans le cadre d'une évolution hydrodynamique, pour des particules massives : $V_{therm} \simeq \sqrt{T_{fo}/m_t}$ avec $m_t = \sqrt{p_t^2 + m^2}$. On attend donc que le rayon HBT longitudinal décroisse comme la racine carrée de l'impulsion transverse [141], c'est ce qu'on appelle le "scaling" en masse transverse.

L'observation expérimentale de ce "scaling" est en général considéré comme une signature de la thermalisation du système.

b Evolution dans le plan transverse

A l'inverse de celle de R_{long} , la dépendance en impulsion transverse des rayons R_o et R_s n'est pas donnée par une formule simple [144].

c Rayons HBT dans la résolution numérique de l'équation de Boltzmann

La figure XI.3(a) présente les résultats obtenus pour R_o dans la résolution numérique de l'équation de Boltzmann. La décroissance avec l'impulsion transverse est d'autant plus grande que l'évolution du système est proche du régime hydrodynamique non visqueux. Néanmoins, cette variation est de faible amplitude, et la décroissance en p_t est similaire pour les 2 régimes limites : hydrodynamique idéale et de vol libre.

Pour de grandes valeurs de K , les rayons reflètent la distribution initiale de particules. Que ce soit pour une distribution initiale thermique, ou de saturation, les particules de plus grandes impulsions sont produites au centre de la “fireball”, et on s'attend donc à observer des rayons plus petits à grand p_t .

Par ailleurs, diminuer K revient à augmenter le nombre moyen de collisions par particules jusqu'au “freeze-out”. On voit que la quantité pertinente est le nombre d'interactions. La figure XI.3(a) présente la dépendance en impulsion transverse de R_o obtenue par un calcul d'hydrodynamique non visqueuse [104] (avec “freeze-out” isochrone). L'hydrodynamique à $t = 0.2$ fm/c conduit aux mêmes rayons que la résolution numérique de Boltzmann pour K grand. R_o augmente donc avec le temps, évolution d'amplitude d'autant plus grande que le p_t est petit. A p_t fixé, la valeur de R_o converge vers une valeur limite donnée par le comportement hydrodynamique.

Alors que $\langle x_o \rangle$ croît linéairement avec t , sa dispersion décroît. Au temps long, les résultats hydrodynamique et de transport sont identiques (à 5% près). Ce surprenant résultat est de fait implicite dans l'étude des rayons HBT par des calculs hydrodynamiques [145]. En effet de tels calculs ne sont pas vrais au “freeze-out” (le libre parcours moyen des particules devient de l'ordre de la taille du système), alors que c'est à cet instant que l'on évalue les rayons HBT.

XI.2.2 Dépendance avec le degré de thermalisation du système

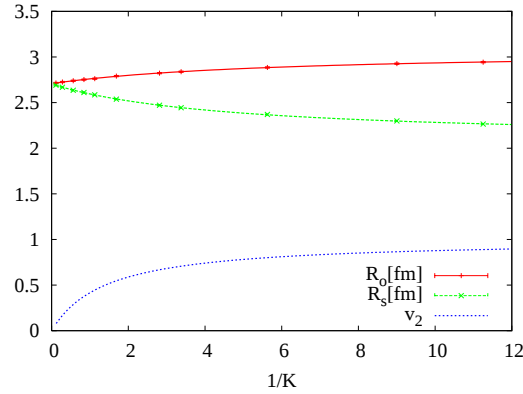


FIG. XI.4 – Evolution des rayons HBT R_o et R_s en fonction du nombre du nombre moyen de collisions par particule ($1/K$). Les résultats sont intégrés sur l'intervalle $p_t \in [0.25, 0.75]$ GeV/c. Les lignes correspondent à un ajustement sur les données par la formule (XI.13). La ligne indexée v_2 correspond au résultat de la section IX.1.4(c) et est indiquée à titre comparatif.

Ce que l'on appelle le Puzzle HBT peut être résumé de la façon suivante : *Les modèles hydrodynamiques, qui reproduisent qualitativement le flot elliptique et les spectres en p_t au RHIC prédisent un rapport $R_o/R_s \simeq 1.5$ alors que les données sont compatibles avec 1.*

On a vu dans la section précédente que R_o augmentait avec le degré de thermalisation. De la même façon, on observe que R_s diminue. Initialement (et donc également dans la limite de grand K), le système est invariant par rotation et l'on attend $R_o(p_t) = R_s(p_t)$. La figure XI.4 montre l'évolution des rayons R_o et R_s avec $1/K$. Comme présenté dans l'annexe G.1, on paramétrise cette dépendance par la formule :

$$R_i(K) = R_i^{fs} + \frac{R_i^{hydro} - R_i^{fs}}{1 + K/K_0} \quad (\text{XI.13})$$

où i désigne les directions “out” ou “side”, et R_i^{fs} dénote la valeur initiale correspondant au cas d'un système sans interaction ($K \rightarrow \infty$), R_i^{hydro} correspond à la valeur dans le régime hydrodynamique non visqueux ($K \rightarrow 0$), enfin K_0 correspond à la valeur de K à la transition entre un régime de vol libre et un régime hydro. Les quantités en rouge sont les paramètres d'ajustement du modèle.

Notre ajustement sur les résultats de la résolution numérique de l'équation de Boltzmann (lignes sur la figure XI.4) nous a conduit à $K_0 = 0.167 \pm 0.007$ pour R_o et $K_0 = 0.215 \pm 0.006$ pour R_s . A titre d'indication, pour le flot elliptique on a trouvé $K_0 = 0.7$. La convergence vers le régime hydrodynamique requiert donc de 3 à 4 fois plus de collisions par particule pour les rayons *HBT* que pour le flot elliptique.

L'ajustement conduit également à $R_o^{hydro} = 3.071 \pm 0.006$ et à $R_s^{hydro} = 2.088 \pm 0.006$, ce qui correspond bien à la prédiction hydrodynamique d'un rapport R_o/R_s 1.5.

A noter enfin que pour la valeur du nombre de Knudsen, évaluée à partir de la dépendance en centralité du flot elliptique, $K_{exp} = 0.3$, on observe un rapport $R_o/R_s \simeq 1.16$. Un résultat similaire a été obtenu par la simulation de transport AMPT [146] ($R_o/R_s = 1.2$). A l'inverse, ces 2 résultats diffèrent du résultat obtenu en utilisant le MPC^d, qui trouvent un rapport inférieur à 1 à grand p_t [148].

La figure XI.5 présente l'évolution du rapport R_o/R_s en fonction de l'impulsion transverse. On a fixé $K = K_{exp} = 0.3$, qui est la valeur obtenue par l'étude de la dépendance en centralité du flot elliptique. Il apparaît clairement, pour les 2 types de conditions initiales présentées dans la section VII.1.1 (thermal-Boltzmann et de saturation), que nos résultats sont plus proches des données expérimentales que les calculs d'hydrodynamique idéale qui conduisent à $R_o/R_s \simeq 1.5$ (valeur que l'on retrouve dans la limite $K \rightarrow 0$).

XI.2.3 Effet de la thermalisation partielle sur le Puzzle HBT

Dans la section précédente, j'ai montré comment l'on pouvait quantitativement améliorer l'accord du modèle théorique avec les résultats expérimentaux pour le rapport R_o/R_s en prenant en compte les effets de la thermalisation partielle.

^dMolnar Parton cascade, il s'agit d'une résolution numérique de l'équation de Boltzmann réalisée par Denes Molnar [147], et qui est sensément équivalente à notre approche.

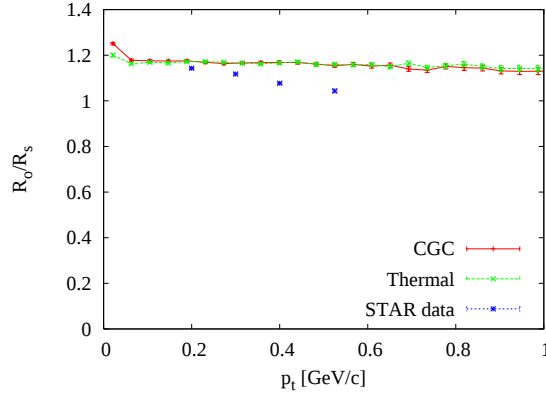


FIG. XI.5 – Evolution du rapport R_o/R_s en fonction de l'impulsion transverse. Les 2 courbes correspondes aux 2 différentes paramétrisations des conditions initiales. On a choisi $K = K_{exp} = 0.3$ pour les calculs de transport puisque c'est la valeur du nombre de Knudsen extraite de la dépendance en centralité de v_2 pour les collisions centrales. Les données expérimentales sont des données de STAR extraites de [142].

Il a été discuté récemment que l'on pouvait résoudre le puzzle HBT en hydrodynamique idéale en utilisant un “freeze-out” à haute température [149]. Ce résultat est en accord avec le nôtre, puisque l'on a vu que diminuer le nombre de collisions par particule est qualitativement comparable à décroître la durée de l'évolution hydrodynamique et donc à augmenter la température de “freeze-out” dans le cadre d'un “freeze-out” isotherme.

Des calculs en hydrodynamique visqueuse ont également été réalisés [150]. La présence d'une viscosité non nulle se traduit par une diminution du rapport R_o/R_s . Néanmoins, la valeur du rapport η/s permettant un ajustement sur les données est très différente de celle obtenue par l'étude du flot elliptique, ce qui tend à montrer que la correction visqueuse correspond seulement à une petite partie de l'explication du puzzle HBT. Enfin un dernier point doit être soulevé en ce qui concerne l'hydrodynamique visqueuse. La température de “freeze-out” en hydrodynamique visqueuse est supérieure à celle de l'hydrodynamique idéale, et est ajustée de façon à reproduire la multiplicité. Deux effets sont donc à l'œuvre dans l'étude du puzzle HBT : d'un côté les effets de viscosité, et de l'autre l'augmentation de la température de “freeze-out”.

XI.2.4 Limite de notre approche

J'ai indiqué que notre approche de transport donnait une explication plausible pour le puzzle HBT. Néanmoins, il ne permet pas de reproduire les rayons expérimentalement mesurés. La figure XI.6 montre la comparaison de nos résultats pour $R_o(p_t)$ avec les mesures expérimentales des expériences STAR [142], PHOBOS [151], et PHENIX [152].

Cette différence est due à un effet d'équation d'état. Le volume HBT (qui chez nous est donné par le produit $R_o R_s$) est globalement indépendant de K . Il semble que ce soit un résultat général pour les gaz parfaits [153] lié à la conservation de l'entropie. En QCD à haute température, j'ai indiqué (section II.2) que le nombre de degrés de liberté variait d'un ordre de grandeur à la

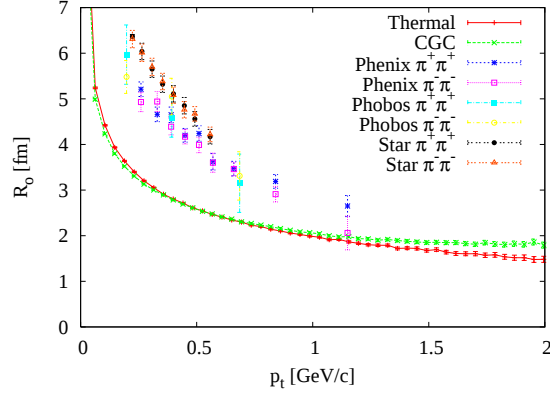


FIG. XI.6 – Comparaison entre données expérimentales et les résultats de transport pour les 2 conditions initiales possibles. Les résultats correspondent à $K = 0.3$, valeur obtenue pour les collisions centrales à partir de la dépendance en centralité de v_2 .

transition. Cela se traduit par une diminution d'un ordre de grandeur de la densité d'entropie au voisinage de T_c . Dans les collisions d'ions lourds, cet effet se traduit par une augmentation du volume d'un facteur 10 sans variation de la température. Cela explique pourquoi le volume *HBT* augmente à la transition. Les théories cinétiques étant incapables de modéliser une transition de phase, cet effet n'est pas accessible par les équations de transport. Une étude complète devra également prendre en compte l'expansion longitudinale, et ses effets sur R_l (en particulier vérifier si le "scaling" en masse transverse ($R_{long} \propto \sqrt{m_t}^{-1}$) est également présent pour un système non localement thermalisé).

XI.3 Etude de la dépendance azimutale des rayons HBT

Dans le cas des collisions non centrales, la zone d'interaction initiale est elliptique, et les rayons HBT vont être des fonctions de l'azimut ϕ mesuré à partir de la direction du paramètre d'impact. La figure XI.7 représente la zone d'interaction et définit les rayons pour de telles collisions.

La distribution initiale de matière est allongée suivant la direction $\vec{y}$. Ceci conduit à l'existence d'un maximum pour R_o en $\phi = \pi/2$ alors que le maximum pour R_s se trouve en $\phi = 0$. Le rayon R_{os} est cette fois non nul dans les cas où le grand axe de la région d'homogénéité diffère de la direction de l'impulsion des particules.

La dépendance azimutale des rayons HBT a été intensivement étudiée [154, 155, 156, 157, 158]. Dans une première section, je rappellerai comment les rayons dépendent de l'azimut, je discuterai ensuite leur dépendance dans le degré de thermalisation avant d'introduire des rapports d'amplitudes sans dimension qui n'ont pas encore été étudiés. Enfin, nous comparerons nos résultats avec les données expérimentales.

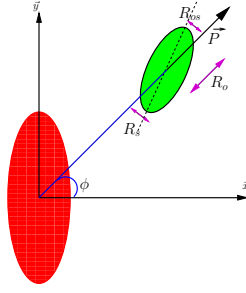


FIG. XI.7 – Illustration de la dépendance en azimut (ϕ) des rayons HBT

XI.3.1 Dépendance azimutale des rayons HBT

Dans le code de transport les rayons sont définis par les équations (XI.11). Ces équations font intervenir les valeurs moyennes sur les particules ($\langle \rangle$) qui maintenant dépendent de ϕ . Ces moyennes peuvent être évaluées par un découpage en ϕ . Dans chaque “bin” on a alors :

$$\langle x \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N(\phi)} \quad (\text{XI.14})$$

où N dépend également de ϕ à cause du flot elliptique.

La dépendance en ϕ étant légère, on obtient de bons résultats en ajustant sur le numérateur **et** le dénominateur de l’équation (XI.14) une série de Fourier.

Le système étant invariant par les symétries $\phi \rightarrow -\phi$ et $\phi \rightarrow \phi + \pi$, on peut restreindre le nombre de termes [159]. Comme l’expansion de Fourier converge rapidement, on n’a gardé que les termes d’ordre inférieur ou égal à $\cos(4\phi)$ et $\sin(4\phi)$ ^e.

La figure XI.8 montre la dépendance azimutale des rayons. R_o^2 et R_s^2 voient leur évolution clairement dominée par un terme en $\cos(2\phi)$ alors que l’évolution de R_{os} est dominée par un terme en $\sin(2\phi)$. Par ailleurs $\langle R_o^2 \rangle_\phi > \langle R_s^2 \rangle_\phi$ ce qui n’est pas surprenant puisqu’on a vu dans la section précédente que les interactions augmentaient R_o alors qu’elles diminuent R_s . Néanmoins, en $\phi = 0$, $R_s > R_o$ ce qui reflète la géométrie de la distribution initiale.

XI.3.2 Dépendance des rayons azHBT avec le degré de thermalisation du système

La figure XI.9 montre l’évolution des rayons évalués en $\phi = 0$ et $\phi = \pi/2$ en fonction de

^eOn a par ailleurs vérifié la convergence rapide en comparant cette évaluation des rayons avec une évaluation directe par un découpage en “bins” de l’azimut, et l’on n’a pas observé de différence significative.

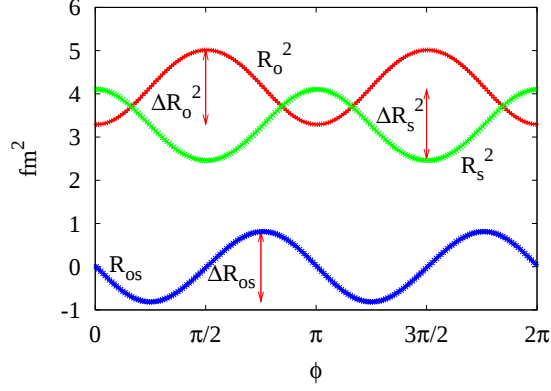


FIG. XI.8 – Dépendance azimutale des rayons HBT pour des conditions initiales thermalisée, et une profil de densité gaussien ($\sigma_x = 1.95$ fm et $\sigma_y = 2.6$ fm) qui correspond aux conditions initiales Au-Au au RHIC avec un paramètre d'impact $b = 7$ fm. L'intervalle en p_t est le même que pour la figure XI.4, et l'on a choisi $K = 0.4$.

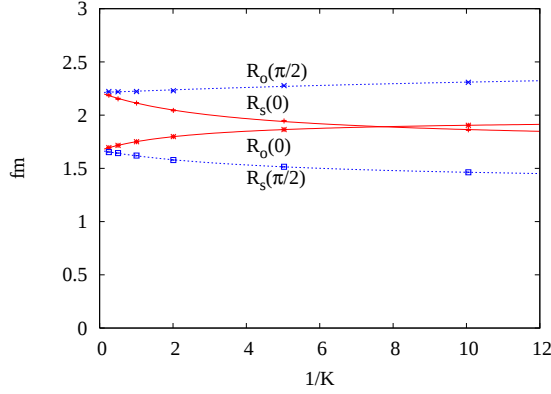


FIG. XI.9 – Rayons HBT dans le plan de réaction ($\phi = 0$) et en dehors ($\phi = \pi/2$) pour les mêmes conditions initiales que la figure XI.8. Les lignes correspondent à des ajustements par la formule (XI.13).

K. Comme attendu, dans le cadre du régime de vol libre on observe bien la symétrie $R_o(\phi = 0) = R_s(\phi = \pi/2)$. Comme observé dans le cadre des collisions centrales, plus le système est thermalisé, plus R_o augmente et R_s diminue. Si l'on regarde attentivement l'évolution des rayons sur la figure XI.9, on s'aperçoit que leurs variations sont différentes. Les lignes correspondent à des ajustements sur les données de la fonction (XI.13), fonction qui paramétrise les déviations à l'équilibre thermique local en termes de nombre de Knudsen. Pour chaque observable, la variation avec K est mesurée par le paramètre K_0 . K_0 est maximum pour $R_o(0)$ ($K_0 = 0.38 \pm 0.01$) et minimum pour $R_o(\pi/2)$ ($K_0 = 0.04 \pm 0.05$). Il est intermédiaire pour R_s avec $K_0[R_s(\phi = 0)] = 0.26 \pm 0.03 > K_0[R_s(\phi = \pi/2)] = 0.20 \pm 0.02$. Nous interprétons cet effet comme signalant un plus grand nombre de collisions dans le plan de réaction (suivant l'axe $\vec{x}$) qu'en dehors de

ce plan, ce qui est naturel attendu que le flot se développe préférentiellement dans le plan de réaction.

XI.3.3 Evolution des rapports d'amplitude des oscillations et excentricité azHBT

Comme nous l'avons vu, la dépendance azimutale des rayons HBT est caractérisée à la fois pas la valeur des rayons à azimut fixé, mais également par l'amplitude des oscillations (voir figure XI.8). Après avoir discuté l'impact de la thermalisation partielle sur les rayons, je vais maintenant m'intéresser à l'amplitude des oscillations. On définit 3 amplitudes d'oscillations :

$$\Delta R_o^2 = R_o^2(\pi/2) - R_o^2(0) \quad (\text{XI.15})$$

$$\Delta R_s^2 = R_s^2(0) - R_s^2(\pi/2)$$

$$\Delta R_{os} = R_{os}(3\pi/4) - R_{os}(\pi/4) \quad (\text{XI.16})$$

Dans le cadre du régime de vol libre, les rayons HBT reflètent la distribution initiale de matière. Dans ce cadre, les 3 amplitudes d'oscillation sont égales à $\langle y^2 - x^2 \rangle$, et donc leurs rapports valent 1. L'intérêt de considérer des rapports d'amplitudes d'oscillation est le suivant ; l'amplitude des oscillations est proportionnelle à l'excentricité de la distribution initiale de matière, mais considérer un rapport permet de simplifier l'excentricité entre numérateur et dénominateur. S'affranchir des effets de la géométrie initiale est d'autant plus important que l'excentricité initiale n'est pas accessible expérimentalement.

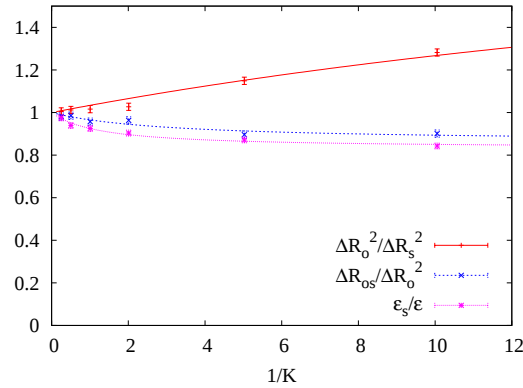


FIG. XI.10 – Rapport des amplitudes d'oscillations en fonction de K^{-1} pour les conditions initiales thermalisées. R_o^2 , R_s^2 et R_{os} sont intégrés sur $p_t \in [0.5, 0.75]$ GeV/c.

La figure XI.10 présente les résultats que nous avons obtenus. Il apparaît que l'effet des interactions revient à augmenter l'amplitude des oscillations dans la direction “out” par rapport à la direction “side”. Il est surprenant de constater que le comportement inverse est observé dans les calculs hydrodynamiques [156] ainsi que dans les paramétrisations d'état final comme le modèle de Blast wave [160]. Nous n'avons pas été capables de comprendre cette différence.

	données de STAR	nos résultats	
		$K = 0.32$	$K = 0.51$
$\Delta R_o^2/\Delta R_s^2$	1.45 ± 0.61	1.08 ± 0.02	1.05 ± 0.02
$\Delta R_{os}/\Delta R_o^2$	0.68 ± 0.42	0.97 ± 0.03	0.99 ± 0.03
ϵ_s	0.080 ± 0.026	0.205 ± 0.003	0.213 ± 0.005
	données de STAR	nos résultats	
		$K = 0.31$	$K = 0.49$
$\Delta R_o^2/\Delta R_s^2$	1.09 ± 0.46	1.14 ± 0.02	1.06 ± 0.02
$\Delta R_{os}/\Delta R_o^2$	0.65 ± 0.31	0.90 ± 0.04	0.92 ± 0.04
ϵ_s	0.086 ± 0.017	0.172 ± 0.005	0.174 ± 0.005

TAB. XI.1 – Comparaison entre les mesures expérimentales de STAR [142] et notre calcul. Haut : Intervalle en centralité 20-30% et $p_t \in [0.15, 0.25]$ GeV/c. Bas : intervalle en centralité 10-20% et $p_t \in [0.35, 0.45]$ GeV/c .

Nous avons également comparé l'excentricité HBT (dans la direction “side”) définie par :

$$\epsilon_s = \frac{R_s^2(0) - R_s^2(\pi/2)}{R_s^2(0) + R_s^2(\pi/2)} \quad (\text{XI.17})$$

à l'excentricité de la distribution initiale ϵ .

Dans le régime de vol libre, $\epsilon_s = \epsilon$ par symétrie, et il apparaît également que ce rapport est peu dépendant des interactions (de la valeur de K) voir figure XI.10. Il est donc potentiellement possible d'accéder à l'excentricité initiale par l'étude de la dépendance azimutale des rayons HBT.

Nous avons intégré nos résultats sur l'intervalle en impulsion transverse $0.25 < p_t < 0.75$ GeV/c. Nous avons, par ailleurs, également vérifié numériquement qu'ils ne dépendaient que peu de l'intervalle en p_t . Finalement, nous n'avons pas observé l'inversion des oscillations prédites à grand p_t par certains modèles hydrodynamiques [154, 156]. Cette inversion n'a pas non plus été observée par les calculs récents de [158].

La table XI.1 compare nos résultats avec les données expérimentales de STAR [142]^f. Pour chaque série de données expérimentales, nous avons utilisé des valeurs réalistes du nombre de Knudsen incluses dans l'intervalle obtenu par l'étude de la dépendance en centralité du flot elliptique.

Nos résultats pour $\Delta R_{os}/\Delta R_o^2$ et $\Delta R_o^2/\Delta R_s^2$ sont compatibles avec les données expérimentales, mais celles-ci ont d'importantes barres d'erreur. A l'inverse, notre calcul donne une valeur de ϵ_s deux fois plus grande que l'observation expérimentale. Nous pouvons interpréter cette différence également comme liée à l'équation d'état du système. Dans [158], les auteurs ont obtenu, par un calcul d'hydrodynamique avec une équation d'état inspirée par les calculs de QCD sur le réseau, une valeur de ϵ_s compatibles avec les données expérimentales.

^fPour obtenir la valeur de l'excentricité pour chaque classe en centralité nous avons utilisé [161].

XI.4 Conclusion

J'ai présenté dans ce chapitre une étude systématique de la dépendance des rayons HBT avec le degré de thermalisation du système. Nous avons en particulier observé que les observables HBT dépendaient peu du nombre de collisions par particule ($1/K$). On observe que leur variation avec K est plus rapide que celle observée pour le flot elliptique (ou respectivement la variation avec $1/K$ est plus lente que celle observée pour le flot elliptique). En conclusion, je voudrais rappeler 3 résultats remarquables que nous avons obtenus :

- La dépendance en p_t des rayons est essentiellement due à la distribution initiale d'énergie, les effets collectifs ne font qu'accentuer légèrement cette décroissance.
- Le rapport R_o/R_s est une fonction lentement croissante vers la limite hydrodynamique. Pour une valeur réaliste du nombre de Knudsen $K_{exp} = 0.3$, obtenue par l'étude de la dépendance en centralité du flot elliptique, ce rapport est inférieur à 1.2 et bien plus faible que celui obtenu par des calculs hydrodynamiques.
- Pour les collisions non centrales, la variations des rayons R_o^2 , R_s^2 et R_{os} avec l'azimut est similaire. Par ailleurs l'excentricité HBT dans la direction "side" est trouvée très proche de l'excentricité initiale.

Néanmoins, nous avons vu que notre modèle était incapable de reproduire l'amplitude des rayons HBT observés expérimentalement (ce qui est également le cas pour la valeur de ϵ_s). Nous avons interprété cet effet comme dû à la transition entre la phase plasma de quarks et de gluons et la phase hadronique. A la transition, la conservation de l'entropie impose une large augmentation du volume du système, qui se traduit par des rayons HBT plus larges et une plus faible excentricité.

Bibliographie

- [86] M. L. Miller, K. Reygers, S. J. Sanders and P. Steinberg, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **57** (2007) 205 [arXiv :nucl-ex/0701025].
- [87] L. D. McLerran and R. Venugopalan, *Phys. Rev. D* **49** (1994) 2233 [arXiv :hep-ph/9309289].
- [88] F. Gelis, E. Iancu, J. Jalilian-Marian and R. Venugopalan, arXiv :1002.0333 [hep-ph].
- [89] [http ://th.physik.uni-frankfurt.de/ ynara/fKLN/](http://th.physik.uni-frankfurt.de/~ynara/fKLN/).
- [90] [http ://projects.hepforge.org/tglaubermc/](http://projects.hepforge.org/tglaubermc/) B. Alver, M. Baker, C. Loizides and P. Steinberg, arXiv :0805.4411 [nucl-ex].
- [91] D. Kharzeev and M. Nardi, *Phys. Lett. B* **507** (2001) 121 [arXiv :nucl-th/0012025].
- [92] Owens JF. *Rev. Mod. Phys.* 59 :465 (1987).
- [93] B. B. Back *et al.* [PHOBOS Collaboration], *Phys. Rev. C* **70** (2004) 021902 [arXiv :nucl-ex/0405027].
- [94] B. B. Back *et al.* [PHOBOS Collaboration], *Phys. Rev. C* **65** (2002) 061901 [arXiv :nucl-ex/0201005].
- [95] D. Kharzeev, E. Levin and M. Nardi, *Nucl. Phys. A* **730** (2004) 448 [Erratum-ibid. A **743** (2004) 329] [arXiv :hep-ph/0212316].
- [96] D. Kharzeev, E. Levin and M. Nardi, *Nucl. Phys. A* **747** (2005) 609 [arXiv :hep-ph/0408050].
- [97] H. J. Drescher, A. Dumitru, A. Hayashigaki and Y. Nara, *Phys. Rev. C* **74** (2006) 044905 [arXiv :nucl-th/0605012].
- [98] T. Hirano, U. W. Heinz, D. Kharzeev, R. Lacey and Y. Nara, *Phys. Lett. B* **636** (2006) 299 [arXiv :nucl-th/0511046].
- [99] T. Hirano and Y. Nara, *Nucl. Phys. A* **743** (2004) 305 [arXiv :nucl-th/0404039].
- [100] A. Dumitru, E. Molnar and Y. Nara, *Phys. Rev. C* **76** (2007) 024910 [arXiv :0706.2203 [nucl-th]].
- [101] H. J. Drescher and Y. Nara, *Phys. Rev. C* **75** (2007) 034905 [arXiv :nucl-th/0611017].
- [102] J. Aichelin and K. Werner, *Phys. Rev. C* **79** (2009) 064907 [arXiv :0810.4465 [nucl-th]].
- [103] R. S. Hollis *et al.*, *Romanian Reports in Physics*, Vol. 58, No. 1, P. 37–41, 2006.
- [104] J. Y. Ollitrault *Phys. Rev. D* **46** (1992) 229.

- [105] N. Borghini and J. Y. Ollitrault, Phys. Lett. B **642** (2006) 227 [arXiv :nucl-th/0506045].
- [106] H. Heiselberg and A. M. Levy, Phys. Rev. C **59** (1999) 2716 [arXiv :nucl-th/9812034].
- [107] R. S. Bhalerao, J. P. Blaizot, N. Borghini and J. Y. Ollitrault, Phys. Lett. B **627** (2005) 49 [arXiv :nucl-th/0508009].
- [108] P. Huovinen, Nucl. Phys. A **761** (2005) 296 [arXiv :nucl-th/0505036].
- [109] B. B. Back *et al.* [PHOBOS Collaboration], “Centrality and pseudorapidity dependence of elliptic flow for charged Phys. Rev. C **72**, 051901 (2005) [arXiv :nucl-ex/0407012].
- [110] B. Alver *et al.* [PHOBOS Collaboration], “System size, energy, pseudorapidity, and centrality dependence of elliptic Phys. Rev. Lett. **98**, 242302 (2007) [arXiv :nucl-ex/0610037].
- [111] A. Dumitru and J. L. Nagle, communication privée.
- [112] S. A. Voloshin and A. M. Poskanzer, Phys. Lett. B **474**, 27 (2000) [arXiv :nucl-th/9906075].
- [113] J. Aichelin and K. Werner, arXiv :1001.1545 [nucl-th].
- [114] A. J. Kox, S. R. de Groot and w. A. van Leeuwen Physica. A **84**, 155 (1976).
- [115] D. Teaney, “Effect of shear viscosity on spectra, elliptic flow, and Hanbury Phys. Rev. C **68**, 034913 (2003) [arXiv :nucl-th/0301099].
- [116] J. Y. Ollitrault, Eur. J. Phys. **29** (2008) 275 [arXiv :0708.2433 [nucl-th]].
- [117] G. Policastro, D. T. Son and A. O. Starinets, Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 081601 [arXiv :hep-th/0104066].
- [118] J. L. Nagle, P. Steinberg and W. A. Zajc, arXiv :0908.3684 [nucl-th].
- [119] R. A. Lacey, A. Taranenko and R. Wei, arXiv :0905.4368 [nucl-ex].
- [120] J. Y. Ollitrault, A. M. Poskanzer and S. A. Voloshin, Nucl. Phys. A **830** (2009) 279C [arXiv :0906.3463 [nucl-ex]].
- [121] U. W. Heinz, J. S. Moreland and H. Song, Phys. Rev. C **80** (2009) 061901 [arXiv :0908.2617 [nucl-th]].
- [122] J. L. Liu, Q. C. Feng, Q. S. Wang, G. X. Tang, J. B. Zhang and L. Huo, Phys. Rev. C **79** (2009) 064905.
- [123] J. L. Liu, Q. C. Feng communication privée.
- [124] M. Sharma [STAR Collaboration], Nucl. Phys. A **830** (2009) 813C [arXiv :0907.4731 [nucl-ex]].
- [125] J. L. Nagle, communication privée.
- [126] C. Gombeaud and J. Y. Ollitrault, Phys. Rev. C **81** (2010) 014901 [arXiv :0907.4664 [nucl-th]].
- [127] N. Borghini, R. S. Bhalerao and J. Y. Ollitrault, J. Phys. G **30** (2004) S1213 [arXiv :nucl-th/0402053].
- [128] S. Huang [PHENIX Collaboration], J. Phys. G **35** (2008) 104105 [arXiv :0804.4864 [nucl-ex]].
- [129] Y. Bai, Thèse de Doctorat, Université d’Utrecht.

- [130] R. Lacey, communication privée.
- [131] R. S. Bhalerao and J. Y. Ollitrault, Phys. Lett. B **641** (2006) 260 [arXiv :nucl-th/0607009].
- [132] J. Y. Ollitrault, A. M. Poskanzer and S. A. Voloshin, Phys. Rev. C **80** (2009) 014904 [arXiv :0904.2315 [nucl-ex]].
- [133] J. Adams *et al.* [STAR Collaboration], Phys. Rev. C **72** (2005) 014904 [arXiv :nucl-ex/0409033].
- [134] R. S. Bhalerao, N. Borghini and J. Y. Ollitrault, Nucl. Phys. A **727** (2003) 373 [arXiv :nucl-th/0310016].
- [135] B. I. Abelev *et al.* [STAR Collaboration], Phys. Rev. C **77** (2008) 054901 [arXiv :0801.3466 [nucl-ex]].
- [136] S. A. Voloshin, A. M. Poskanzer, A. Tang and G. Wang, Phys. Lett. B **659** (2008) 537 [arXiv :0708.0800 [nucl-th]].
- [137] R. A. Lacey *et al.*, arXiv :1002.0649 [nucl-ex].
- [138] B. Alver *et al.* [PHOBOS Collaboration], arXiv :nucl-ex/0702036.
- [139] and A. Adare [The PHENIX Collaboration], arXiv :1003.5586 [nucl-ex].
- [140] R. H. Brown and R. Q. Twiss, Nature **177** (1956) 27.
- [141] M. A. Lisa, S. Pratt, R. Soltz and U. Wiedemann, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **55** (2005) 357 [arXiv :nucl-ex/0505014].
- [142] J. Adams *et al.* [STAR Collaboration], Phys. Rev. C **71** (2005) 044906 [arXiv :nucl-ex/0411036].
- [143] S. V. Akkelin and Yu. M. Sinyukov, Phys. Lett. B **356** (1995) 525.
- [144] M. A. Lisa and S. Pratt, arXiv :0811.1352 [nucl-ex].
- [145] P. F. Kolb and U. W. Heinz, arXiv :nucl-th/0305084.
- [146] Z. w. Lin, C. M. Ko and S. Pal, Phys. Rev. Lett. **89** (2002) 152301 [arXiv :nucl-th/0204054].
- [147] D. Molnar and M. Gyulassy, arXiv :nucl-th/0102031.
- [148] D. Molnar and M. Gyulassy, Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 052301 [arXiv :nucl-th/0211017].
- [149] W. Broniowski, M. Chojnacki, W. Florkowski and A. Kisiel, Phys. Rev. Lett. **101** (2008) 022301 [arXiv :0801.4361 [nucl-th]].
- [150] P. Romatschke and U. Romatschke, Phys. Rev. Lett. **99** (2007) 172301 [arXiv :0706.1522 [nucl-th]].
- [151] B. B. Back *et al.* [PHOBOS Collaboration], Phys. Rev. C **73** (2006) 031901 [arXiv :nucl-ex/0409001].
- [152] S. S. Adler *et al.* [PHENIX Collaboration], Phys. Rev. Lett. **93** (2004) 152302 [arXiv :nucl-ex/0401003].
- [153] S. V. Akkelin and Yu. M. Sinyukov, Phys. Rev. C **70** (2004) 064901.
- [154] U. W. Heinz and P. F. Kolb, Phys. Lett. B **542** (2002) 216 [arXiv :hep-ph/0206278].

Centrality dependence of elliptic flow, the hydrodynamic limit, and the viscosity of hot QCD

Hans-Joachim Drescher,¹ Adrian Dumitru,² Clément Gombeaud,³ and Jean-Yves Ollitrault³

¹*Frankfurt Institute for Advanced Studies (FIAS), Johann Wolfgang Goethe-Universität,
Max-von-Laue-Str. 1, D-60438 Frankfurt am Main, Germany*

²*Institut für Theoretische Physik, Johann Wolfgang Goethe-Universität, Max-von-Laue-Str. 1, D-60438 Frankfurt am Main, Germany*

³*Service de Physique Théorique, CEA/DSM/SPHT, CNRS/MPPU/URA2306 CEA Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France*

(Received 3 May 2007; published 15 August 2007)

We show that the centrality and system-size dependence of elliptic flow measured at the BNL Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) are fully described by a simple model based on eccentricity scaling and incomplete thermalization. We argue that the elliptic flow is at least 25% below the (ideal) “hydrodynamic limit,” even for the most central Au-Au collisions. This lack of perfect equilibration allows for estimates of the effective parton cross section in the quark-gluon plasma and of its viscosity to entropy density ratio. We also show how the initial conditions affect the transport coefficients and thermodynamic quantities extracted from the data, in particular, the viscosity and the speed of sound.

DOI: [10.1103/PhysRevC.76.024905](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.76.024905)

PACS number(s): 12.38.Mh, 24.85.+p, 25.75.Ld

When two ultrarelativistic nuclei collide at a nonzero impact parameter, their overlap area in the transverse plane has a short axis, parallel to the impact parameter, and a long axis perpendicular to it. This almond shape of the initial profile is converted by the pressure gradient into a momentum asymmetry, so that more particles are emitted along the short axis [1]. The magnitude of this effect is characterized by elliptic flow, defined as

$$v_2 \equiv \langle \cos 2(\varphi - \Phi_R) \rangle, \quad (1)$$

where φ is the azimuthal angle of an outgoing particle, Φ_R is the azimuthal angle of the impact parameter, and angular brackets denote an average over many particles and many events. The unexpected large magnitude of elliptic flow at the BNL Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) [2] has generated a lot of activity in recent years.

Elliptic flow results from the interactions between the produced particles and can be used to probe local thermodynamic equilibrium. If the produced matter equilibrates, it behaves as an ideal fluid. Hydrodynamics predicts that at a given energy, v_2 scales like the eccentricity ε of the almond [1,3]. It is independent of its transverse size R , as a consequence of the scale invariance of ideal-fluid dynamics. If, on the other hand, equilibration is incomplete, then eccentricity scaling is broken and v_2/ε also depends on the Knudsen number $K = \lambda/R$, where λ is the length scale over which a parton is deflected by a large angle.

Here, we show that the centrality dependence of v_2/ε , for both Au–Au and Cu–Cu collisions, can be described by the following simple formula [4]:

$$\frac{v_2}{\varepsilon} = \frac{v_2^{\text{hydro}}}{\varepsilon} \frac{1}{1 + K/K_0}. \quad (2)$$

v_2/ε is largest in the hydrodynamic limit $K \rightarrow 0$. The first-order corrections to this limit, corresponding to viscous effects, are linear in K . For a large mean-free path, far from the hydrodynamic limit, $v_2/\varepsilon \sim 1/K$ vanishes like the number of collisions per particle. One expects the transition between these

two regimes to occur when $\lambda \simeq R$ and, hence, that $K_0 \simeq 1$. A recent transport calculation [5] in two spatial dimensions indeed obtained $K_0 \simeq 0.7$.

Elliptic flow develops gradually during the early stages of the collision. Because of the strong longitudinal expansion, the thermodynamic properties of the medium depend on the time τ , of course. The average particle density, for instance, decreases like $1/\tau$ (if their number is approximately conserved, see recent discussion in [6]):

$$\rho(\tau) = \frac{1}{\tau S} \frac{dN}{dy}, \quad (3)$$

where dN/dy denotes the total (charged + neutral) multiplicity per unit rapidity, and S is the transverse overlap area between the two nuclei. The quantities that we shall extract from v_2 should be interpreted as averages over the transverse area S and over some time interval around R/c_s , which is the typical timescale for the buildup of v_2 in hydrodynamics [4]. c_s denotes the velocity of sound.

The Knudsen number K is defined by evaluating the mean-free path $\lambda = 1/\sigma\rho$ (σ is a partonic cross section) at $\tau = R/c_s$. Thus,

$$\frac{1}{K} = \frac{\sigma}{S} \frac{dN}{dy} c_s. \quad (4)$$

The purpose of this article is to show that the centrality and system-size dependence of the data for v_2 at RHIC is described very well by Eqs. (2) and (4). This provides three important pieces of information. First, such a fit allows us to “measure” the Knudsen number corresponding to a given centrality, which quantifies how close the dense matter produced in heavy-ion collisions at RHIC is to perfect fluidity. Second, the extrapolation to $K = 0$ allows us to read off the limiting value for $v_2^{\text{hydro}}/\varepsilon$ extracted from the data; this is useful for constraining the equation of state (EoS) of QCD via hydrodynamic simulations, and we shall also see that it exhibits a rather surprising dependence on the initial conditions. Finally, using Eq. (4), we can convert the Knudsen number into the typical partonic cross section σ (and

viscosity) in the quark-gluon plasma (QGP). Because only the combination $K_0 \sigma c_s$ actually appears in Eq. (2), uncertainties in K_0 or c_s then translate into corresponding uncertainties of σ . Unless mentioned otherwise, our standard choice is $c_s = 1/\sqrt{3} \simeq 0.58$ (ideal QGP) and $K_0 = 0.7$. Letting $K_0 = 1$ and $c_s^2 = 2/3$ ¹ instead reduces the estimated σ by a factor of two; on the other hand, taking $K_0 = 0.5$ and $c_s^2 = 1/6$ increases σ by the same factor.

For the elliptic flow, v_2 , we use PHOBOS data for Au-Au [7] and Cu-Cu [8] collisions. The same analysis could be carried out using data from PHENIX [9] or STAR [10]. The initial eccentricity ε and the transverse density $(1/S)(dN/dy)$ are evaluated using a model of the collision. Two such models are compared. The remaining parameters v_2^{hydro} and σ are fit to the data. The first step is to plot v_2/ε versus $(1/S)(dN/dy)$ [11]. Such plots have already been obtained at the CERN Super Proton Synchrotron (SPS) and RHIC [12], and they are puzzling: while v_2/ε increases with centrality, it shows no hint of the *saturation* predicted by Eq. (2) for $K/K_0 \lesssim 1$, suggesting that the system is far from equilibrium [4]. On the other hand, the value of v_2 for central Au-Au collisions at RHIC is about as high as predicted by hydrodynamics, which is widely considered as key evidence that a “perfect liquid” has been created at RHIC [13].

It has been understood only recently that the eccentricity of the overlap zone has so far been underestimated as the result of two effects. The first effect is fluctuations in initial conditions [14]: the timescale of the nucleus-nucleus collision at RHIC is so short that each nucleus remains in a frozen configuration, with its nucleons distributed according to the nuclear wave function. Fluctuations in the nucleon positions result in fluctuations of the overlap area. Their effect on elliptic flow was first pointed out in Ref. [15]. It was later realized by the PHOBOS Collaboration [8,16] that the orientation of the almond may also fluctuate, so that Φ_R in Eq. (1) is no longer the direction of impact parameter, but the minor axis of the ellipse defined by the positions of the nucleons. These fluctuations explain both the large magnitude of v_2 for small systems, such as Cu-Cu collisions, as well as the nonzero magnitude of v_2 in central collisions, where the eccentricity would otherwise vanish. They have to be taken into account to observe the expected saturation of v_2/ε at high density mentioned above.

The eccentricity is usually estimated from the distribution of participant nucleons in the transverse plane (Glauber model). More precisely, we assume here that the density distribution of the produced particles is given by a fixed 80:20% superposition of participant and binary-collision scaling, respectively [17]. For Au-Au collisions, this simple model reproduces the centrality dependence of the multiplicity reasonably well (we assume that charged particles are 2/3 of the total multiplicity and that $dN/d\eta \simeq 0.8dN/dy$ at midrapidity), while it underestimates it for central Cu-Cu collisions by about 10%.

At high energies a second effect that increases the eccentricity is perturbative gluon saturation, which determines the

$p_\perp$ -integrated multiplicity from weak-coupling QCD without additional models for soft particle production. High-density QCD [the “color-glass condensate” (CGC)] predicts a different distribution of produced gluons, $dN/d^2\mathbf{r}_\perp dy$, which gives a similar centrality dependence of the multiplicity [17] but a larger eccentricity [18,19]. When particle production is dominated by transverse momenta below the saturation scale of the denser nucleus, then $dN/d^2\mathbf{r}_\perp dy \sim \min(n_{\text{part}}^A(\mathbf{r}_\perp), n_{\text{part}}^B(\mathbf{r}_\perp))$ traces the participant density of the more dilute collision partner, rather than the average as in the Glauber model [19]. Precise figures depend on how the saturation scale is defined [20]. Naively, the larger initial eccentricity predicted by the gluon saturation approach is expected to require more dissipation to reproduce the same experimentally measured v_2 . Somewhat surprisingly, we find that this expectation is incorrect, which underscores the nontrivial role played by the initial conditions.

Both effects, fluctuations and gluon saturation, were recently combined by Drescher and Nara [21]. In their approach, the saturation momenta and the unintegrated gluon distribution functions of the colliding nuclei are determined for each configuration individually. The finite interaction range of the nucleons is also taken into account. Upon convolution of the projectile and target unintegrated gluon distribution functions and averaging over configurations, the model leads to a very good description of the multiplicity for both Au-Au and Cu-Cu collisions over the entire available range of centralities.

Having determined the density distributions of produced particles from either model as described above, we obtain the eccentricity via [15,22]

$$\varepsilon = \sqrt{\langle \varepsilon_{\text{part}}^2 \rangle}, \quad \varepsilon_{\text{part}} = \frac{\sqrt{(\sigma_y^2 - \sigma_x^2)^2 + 4\sigma_{xy}^2}}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}. \quad (5)$$

σ_x, σ_y are the respective root-mean-square widths of the density distributions, and $\sigma_{xy} = \overline{\bar{x}\bar{y}} - \bar{x}\bar{y}$ (a bar denotes a convolution with the density distribution for a given configuration while brackets stand for averages over configurations). The overlap area S is defined by $S \equiv 4\pi\sigma_x\sigma_y$ [5]. We find it more appropriate to define these moments via the number density distribution $dN/d^2\mathbf{r}_\perp dy$ rather than via the energy density distribution $dE_\perp/d^2\mathbf{r}_\perp dy$. The reason is twofold: first, v_2 is extracted experimentally from the azimuthal distribution of the particle number, not the transverse energy; second, our CGC approach describes the centrality dependence of the *measured* final-state multiplicity very well, which indicates that the ratio of final-state particles to initial-state gluons (including possible gluon multiplication processes [23]) is essentially constant.

Figures 1 and 2 display v_2/ε as a function of $(1/S)(dN/dy)$ for Au-Au and Cu-Cu collisions at various centralities, within the Glauber and CGC approaches, respectively. For both types of initial conditions, Cu-Cu and Au-Au collisions at the same $(1/S)(dN/dy)$ give the same v_2/ε within error bars. Eccentricity fluctuations are crucial for this agreement [8]. The figures also show that Eqs. (2) and (4) provide a good fit to the data, for both sets of initial conditions. On the other hand, the values of the fit parameters clearly depend on the initial conditions, which has important consequences for the physics.

¹ Such a “hard” EoS can arise from repulsive long-range interactions among the partons such as classical fields. We thank V. Koch for pointing this out to us.

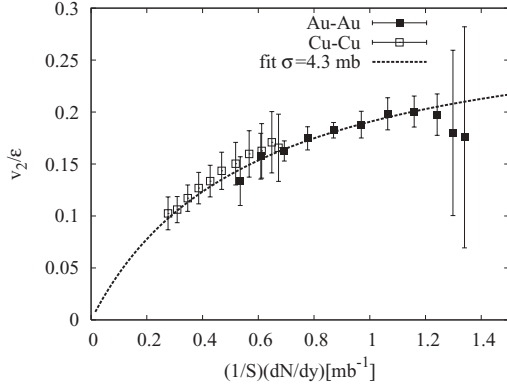


FIG. 1. Variation of the scaled elliptic flow with the density, assuming initial conditions from the Glauber model. The line is a two-parameter fit using Eqs. (2) and (4).

The first physical quantity extracted from the fit is the hydrodynamic limit, $v_2^{\text{hydro}}/\epsilon$, obtained by extrapolating to $(1/S)(dN/dy) \rightarrow \infty$. The values are $v_2^{\text{hydro}}/\epsilon = 0.30 \pm 0.02$ with the Glauber parameterization and $v_2^{\text{hydro}}/\epsilon = 0.22 \pm 0.01$ with the CGC initial conditions. Comparing these numbers to the experimental data points one observes that deviations from ideal hydrodynamics are as large as 30%, even for central Au-Au collisions. This is our first important result.

So far, a quantitative extraction of the QCD EoS from the RHIC data via hydrodynamic analysis was hampered by the fact that v_2/ϵ had not been factorized into the perfect-fluid part $v_2^{\text{hydro}}/\epsilon$ and the dissipative correction $1/(1 + K/K_0)$. For example, Huovinen found [24] that an EoS with a rapid crossover rather than a strong first-order phase transition, as favored by lattice QCD [25], overpredicted the flow data. This finding was rather puzzling, too, as it was widely believed that the RHIC data fully saturated the hydrodynamic limit.

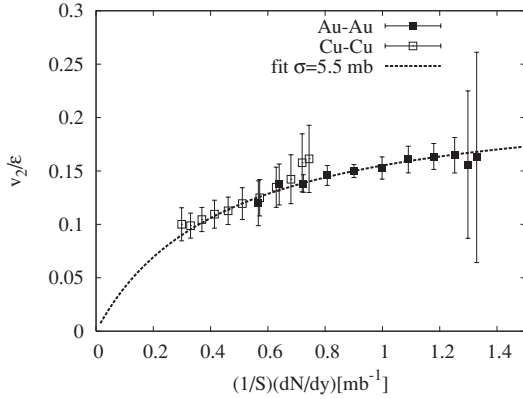


FIG. 2. Same as Fig. 1, but using CGC initial conditions.

Our results suggest that ideal hydrodynamics *should*, in fact, overpredict the measured flow; that is, one should not choose an EoS in perfect-fluid simulations that fits the data. Rather, the EoS could be extracted by comparing ideal hydrodynamics to $v_2^{\text{hydro}}/\epsilon$.

The next result is that CGC initial conditions, which predict a higher initial eccentricity, ϵ , naturally lead to a lower hydrodynamic limit, $v_2^{\text{hydro}}/\epsilon$. Now, close to the ideal-gas limit ($c_s = 1/\sqrt{3}$), $v_2^{\text{hydro}}/\epsilon$ scales approximately like the sound velocity c_s [4]. This means that CGC initial conditions imply an average speed of sound lower (softer equation of state) than that implied by Glauber initial conditions, by a factor of $0.22/0.3 \simeq 0.73$.

The second fit parameter is the partonic cross section σ . The larger σ , the faster the saturation of v_2/ϵ as a function of $(1/S)(dN/dy)$. For our standard values of K_0 and c_s we obtain $\sigma = 4.3 \pm 0.6$ mb for Glauber initial conditions and $\sigma = 5.5 \pm 0.5$ mb for CGC initial conditions. These values are significantly smaller than those found in previous transport calculations [26], but match the findings of Ref. [27].

CGC initial conditions imply a value of σ larger than that implied by Glauber initial conditions, that is, a *lower* viscosity. This can be easily understood. As already mentioned above, the CGC model predicts a larger eccentricity ϵ than the Glauber model for semi-central collisions of large nuclei (when there is a large asymmetry in the local saturation scales of the collision partners, along a path in impact-parameter direction away from the origin [19]). However, for very peripheral collisions or small nuclei, there is of course very little asymmetry in the saturation scales, and the eccentricity approaches the same value as that in the Glauber model. This has been checked numerically in Fig. 7 of Ref. [21] and can also be clearly seen by comparing our figures: while in Fig. 2 v_2/ϵ for semi-central Au – Au collisions is lower than v_2/ϵ in Fig. 1, there is no visible difference for peripheral Cu – Cu collisions. In all, with CGC initial conditions the scaled flow grows less rapidly with the transverse density, which is the reason for the larger elementary cross section.

The dependence of σ on the initial conditions is probably even stronger than the numerical values above suggest, for the following reason. As alluded to above, our fit to the data really determines the product $K_0\sigma c_s$, rather than σ alone. It appears reasonable to assume that K_0 does not depend on the initial conditions. However, for consistency, the speed of sound c_s entering the Knudsen number should match the one underlying the hydrodynamic limit $v_2^{\text{hydro}}/\epsilon$; hence, if CGC initial conditions require a smaller c_s by a factor 0.73, the elementary cross section obtained above should be rescaled accordingly. This leads to our final estimate $\sigma_{\text{CGC}} \simeq 7.6 \pm 0.7$ mb.

Our numerical results for σ should be taken as rough estimates rather than precise figures, because of the uncertainties related to the precise values of K_0 and c_s . It is, however, tempting to convert them into estimates of the shear viscosity η , which has been of great interest lately. A universal lower bound, $\eta/s \geq 1/4\pi$ (where s is the entropy density), has been conjectured using a correspondence with black-hole physics [28], and it has been argued that the viscosity of QCD might

be close to the lower bound. Extrapolations of perturbative estimates to temperatures $T \simeq 200$ MeV, on the other hand, suggest that the viscosity of QCD could be much larger [29]. On the microscopic side, η is related to the scattering cross section σ . Following Teaney [30], the relation for a classical gas of massless particles with isotropic differential cross sections (which applies, for example, to a Boltzmann-transport model) is $\eta = 1.264T/\sigma$ [31]. On the other hand, the entropy density of a classical ultrarelativistic gas is $s = 4n$, with n the particle density, so that

$$\frac{\eta}{s} = 0.316 \frac{T}{c\sigma n} = 0.316 \frac{\lambda T}{c}. \quad (6)$$

The relevant particle density in Au-Au collisions at RHIC, which is estimated at the time when v_2 develops [4], is 3.9 fm^{-3} for both Glauber and CGC initial conditions, and $T \simeq 200$ MeV. Our two estimates $\sigma = 4.3$ mb (Glauber initial conditions) and $\sigma = 7.6$ mb (CGC initial conditions) thus translate into $\lambda = 0.60$ fm, $\eta/s = 0.19$ and $\lambda = 0.34$ fm, $\eta/s = 0.11$, respectively. These values for η/s agree with those from Ref. [32] if the mean-free path is scaled to our result and also with estimates of η/s based on the observed energy loss and elliptic flow of heavy quarks [33], on transverse momentum correlations [34], or on bounds on entropy production [6]. Hence, for our best fit(s) η/s is slightly larger than the conjectured lower bound, but significantly smaller than extrapolations from perturbative estimates. On the other hand, our lower value is close to a recent lattice estimate [35] for SU(3) gluodynamics, which gives $\eta/s = 0.134 \pm 0.033$ at $T = 1.65T_c$.

A complementary approach to incorporate corrections from the ideal-fluid limit is viscous relativistic hydrodynamics. A formulation that is suitable for applications to high-energy heavy-ion collisions has been developed in recent years [36]. A first calculation of elliptic flow [37] shows that for Glauber initial conditions and $\eta/s = 0.16$, v_2 reaches about 70% of the ideal-fluid value for semi-central Au-Au collisions. It is interesting to note that our simple estimates are in good agreement with this finding. Using Eq. (6), $\eta/s = 0.16$ corresponds to $\sigma = 5.1$ mb, for which Eqs. (2) and (4) give $v_2/v_2^{\text{hydro}} = 0.68$. The comparison to experimental data in Ref. [37], however, appears to favor lower values of η/s because the EoS used there underpredicts the $v_2^{\text{hydro}}/\varepsilon \simeq 0.3$

required for Glauber initial conditions. Alternatively, simulations could be performed with CGC initial conditions that require only $v_2^{\text{hydro}}/\varepsilon \simeq 0.22$.

In summary, we have shown that the centrality and system-size dependence of the *measured* v_2 can be understood as follows: v_2 scales like the initial eccentricity ε (as predicted by hydrodynamics), multiplied by a correction factor due to off-equilibrium (i.e., viscous) effects. This correction involves the multiplicity density in the overlap area, $(1/S)(dN/dy)$. Two types of initial conditions have been compared: a Glauber-type model and a CGC approach. PHOBOS data can be described with both. In particular, there is good agreement between Cu-Cu and Au-Au data. The resulting estimates for thermodynamic quantities and transport coefficients, on the other hand, depend significantly on the initial conditions.

Color glass condensate-type initial conditions require *lower* viscosity and a *softer* equation of state (smaller speed of sound). The scaled flow extrapolated to vanishing mean-free path is lower than that for Glauber initial conditions by a factor of $\simeq 0.22/0.3 = 0.73$; the effective speed of sound should also be lower by about the same factor. Our estimates for the viscosity are $\eta/s \simeq 0.19$ for Glauber initial conditions and $\eta/s \simeq 0.11$ for CGC initial conditions, but these numbers should be taken only as rough estimates.

We have also shown that the data for the scaled flow indeed *saturate* at high densities to a hydrodynamic limit. In central Au-Au collisions at RHIC, v_2 reaches 70% (resp. 75%) of the hydrodynamic limit for Glauber (CGC) initial conditions. The corrections to ideal hydrodynamics are therefore significant, but reasonably small compared to unity, implying that (viscous) hydrodynamics should be a valid approach for understanding flow at RHIC. Also, the asymptotic limit of v_2/ε has been isolated and could now be used to test realistic equations of state from lattice QCD with hydrodynamic simulations of heavy-ion collisions.

ACKNOWLEDGMENTS

J. Y. O. thanks B. Alver, A. H. Mueller, and D. Schiff for helpful discussions. H. J. D. is supported through BMBF Grant 05 CU5RI1/3.

-
- [1] J. Y. Ollitrault, Phys. Rev. D **46**, 229 (1992).
 - [2] K. H. Ackermann *et al.*, Phys. Rev. Lett. **86**, 402 (2001).
 - [3] H. Sorge, Phys. Rev. Lett. **82**, 2048 (1999).
 - [4] R. S. Bhalerao, J. P. Blaizot, N. Borghini, and J. Y. Ollitrault, Phys. Lett. **B627**, 49 (2005).
 - [5] C. Gombeaud and J. Y. Ollitrault, arXiv:nucl-th/0702075.
 - [6] A. Dumitru, E. Molnar, and Y. Nara, arXiv:0706.2203.
 - [7] B. B. Back *et al.* (PHOBOS Collaboration), Phys. Rev. C **72**, 051901(R) (2005).
 - [8] B. Alver *et al.* (PHOBOS Collaboration), Phys. Rev. Lett. **98**, 242302 (2007).
 - [9] A. Adare *et al.* (PHENIX Collaboration), Phys. Rev. Lett. **98**, 162301 (2007).
 - [10] J. Adams *et al.* (STAR Collaboration), Phys. Rev. C **72**, 014904 (2005).
 - [11] S. A. Voloshin and A. M. Poskanzer, Phys. Lett. **B474**, 27 (2000).
 - [12] C. Alt *et al.* (NA49 Collaboration), Phys. Rev. C **68**, 034903 (2003); M. M. Aggarwal *et al.* (WA98 Collaboration), Nucl. Phys. **A762**, 129 (2005); S. A. Voloshin (STAR Collaboration), J. Phys. G **34**, 883 (2007).
 - [13] E. V. Shuryak, Nucl. Phys. **A750**, 64 (2005); M. J. Tannenbaum, Rep. Prog. Phys. **69**, 2005 (2006).
 - [14] O. Socolowski, F. Grassi, Y. Hama, and T. Kodama, Phys. Rev. Lett. **93**, 182301 (2004).
 - [15] M. Miller and R. Snellings, arXiv:nucl-ex/0312008.
 - [16] S. Manly *et al.* (PHOBOS Collaboration), Nucl. Phys. **A774**, 523 (2006).

- [17] D. Kharzeev and M. Nardi, Phys. Lett. **B507**, 121 (2001); D. Kharzeev and E. Levin, *ibid.* **B523**, 79 (2001).
- [18] T. Hirano, U. W. Heinz, D. Kharzeev, R. Lacey, and Y. Nara, Phys. Lett. **B636**, 299 (2006); T. Hirano, arXiv:0704.1699.
- [19] A. Adil, H. J. Drescher, A. Dumitru, A. Hayashigaki, and Y. Nara, Phys. Rev. C **74**, 044905 (2006).
- [20] T. Lappi and R. Venugopalan, Phys. Rev. C **74**, 054905 (2006).
- [21] H. J. Drescher and Y. Nara, Phys. Rev. C **75**, 034905 (2007).
- [22] R. S. Bhalerao and J. Y. Ollitrault, Phys. Lett. **B641**, 260 (2006).
- [23] R. Baier, A. H. Mueller, D. Schiff, and D. T. Son, Phys. Lett. **B539**, 46 (2002).
- [24] P. Huovinen, Nucl. Phys. **A761**, 296 (2005).
- [25] C. Bernard *et al.*, Phys. Rev. D **75**, 094505 (2007).
- [26] D. Molnar and M. Gyulassy, Nucl. Phys. **A697**, 495 (2002); **A703**, 893(E) (2002).
- [27] Z. Xu and C. Greiner, Nucl. Phys. **A774**, 787 (2006).
- [28] P. K. Kovtun, D. T. Son, and A. O. Starinets, Phys. Rev. Lett. **94**, 111601 (2005).
- [29] L. P. Csernai, J. I. Kapusta, and L. D. McLerran, Phys. Rev. Lett. **97**, 152303 (2006); S. C. Huot, S. Jeon, and G. D. Moore, *ibid.* **98**, 172303 (2007).
- [30] D. Teaney, Phys. Rev. C **68**, 034913 (2003).
- [31] A. J. Kox, S. R. de Groot, and W. A. van Leeuwen, Phys. A **84**, 155 (1976).
- [32] R. A. Lacey *et al.*, Phys. Rev. Lett. **98**, 092301 (2007).
- [33] A. Adare *et al.* (PHENIX Collaboration), Phys. Rev. Lett. **98**, 172301 (2007).
- [34] S. Gavin and M. Abdel-Aziz, Phys. Rev. Lett. **97**, 162302 (2006).
- [35] H. B. Meyer, arXiv:0704.1801.
- [36] A. Muronga, Phys. Rev. C **69**, 034903 (2004); U. W. Heinz, H. Song, and A. K. Chaudhuri, *ibid.* **73**, 034904 (2006); R. Baier, P. Romatschke, and U. A. Wiedemann, *ibid.* **73**, 064903 (2006).
- [37] P. Romatschke and U. Romatschke, arXiv:0706.1522.

Does interferometry probe thermalization?Clément Gombeaud,¹ Tuomas Lappi,^{1,2} and Jean-Yves Ollitrault¹¹*Institut de Physique Théorique, CEA/DSM/IPhT, CNRS/MPPU/URA2306 CEA Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France*²*Department of Physics P. O. Box 35, 40014 University of Jyväskylä, Finland*

(Received 9 February 2009; published 28 May 2009)

We carry out a systematic study of interferometry radii in ultrarelativistic heavy-ion collisions within a two-dimensional transport model. We compute the transverse radii R_o and R_s as a function of p_t for various values of the Knudsen number, which measures the degree of thermalization in the system. They converge to the hydrodynamical limit much more slowly (by a factor $\simeq 3$) than elliptic flow. This solves most of the HBT puzzle for central collisions: R_o/R_s is in the range 1.1–1.2 for realistic values of the Knudsen number, much closer to experimental data ($\simeq 1$) than the value 1.5 from hydrodynamical calculations. The p_t dependence of R_o and R_s , which is usually said to reflect collective flow, also has a very limited sensitivity to the degree of thermalization. We then study the azimuthal oscillations of R_o , R_s , and R_{os} for noncentral collisions. Their amplitudes depend little on the Knudsen number, and reflect the eccentricity of the overlap area between the two nuclei.

DOI: [10.1103/PhysRevC.79.054914](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.79.054914)

PACS number(s): 25.75.Gz

I. INTRODUCTION

Correlations of identical particles produced in ultrarelativistic heavy-ion collisions have the unique capability to access directly the size of the fireball [1]. More precisely, they measure the separation distribution of particles with a given momentum $\vec{p}$ (regions of homogeneity [2]) after the last interaction. These data, referred to as HBT [3], thus impose severe constraints on model calculations. In particular, blast-wave [4] and hydrodynamical models [5–9], which have been rather successful in reproducing transverse momentum spectra and elliptic flows of identified particles up to $p_t \simeq 2$ GeV/c, fail in reproducing HBT radii. More specifically, they generally overpredict the longitudinal size R_L , as well as the ratio R_o/R_s , where R_o and R_s are the transverse radii parallel and orthogonal to the transverse momentum, respectively. On the other hand, they correctly predict the decrease of radii with p_t , which is often claimed to be a signature of collective flow. Viscous hydrodynamics gives smaller values of R_o/R_s than ideal hydrodynamics [10,11]. Transport models also yield a smaller value, much closer to data, typically around 1.2 [12–14].

In this paper, we investigate systematically the sensitivity of HBT radii to the degree of thermalization in the system. We explain the difference between predictions from hydrodynamics (where local thermalization is assumed) and transport models (where the system is generally not locally equilibrated). We consider a simple model, where the system consists of massless particles undergoing $2 \rightarrow 2$ elastic collisions [15]. The mean free path of a particle between two collisions can be chosen arbitrarily by varying the cross section. The limit of zero mean free path is the “hydrodynamic limit”: the system is locally thermalized and its expansion follows the laws of ideal hydrodynamics. The limit of infinite mean free path corresponds to free-streaming particles: in this case, HBT radii reflect the initial distribution of particles. For finite values of the mean free path, the system is partially thermalized. In this paper, we study quantitatively how HBT observables vary between these two extremes. A further simplification

is that we consider only a two-dimensional system living in the transverse plane: the present study is therefore limited to the transverse radii R_o and R_s (and the cross term R_{os} for noncentral collisions), and longitudinal expansion is not taken into account.

We do not mean to provide a realistic model of heavy-ion collisions. The fact that we consider only $2 \rightarrow 2$ collisions implies, for sake of consistency, that the system is dilute (higher-order processes such as $3 \rightarrow 3$, are negligible), hence the equation of state is that of a perfect gas. This is the price to pay for a control handle on thermalization. In the real world, the equation of state of QCD is not that of a perfect gas: it has a very sharp structure around $T \sim 170$ MeV [16], which is expected to influence observables, including HBT radii. By comparing with experimental data from RHIC, we expect to fail whenever the equation of state is important. This will allow us to disentangle effects which can be attributed to the equation of state, from those which are due to thermalization and flow.

This article is organized as follows. In Sec. II, we present our model and explain how HBT radii are obtained. Section III discusses the p_t dependence of R_o and R_s and the value of R_o/R_s for central collisions. Results from transport theory and ideal hydrodynamics are compared. Section IV discusses the azimuthal oscillations of R_o , R_s , and R_{os} for noncentral collisions. Our conclusions are summarized in Sec. V.

II. MODEL

Nuclei colliding at RHIC are thin pancakes due to the strong Lorentz contraction along the collision axis. This large separation between the longitudinal and transverse scales implies that longitudinal and transverse dynamics are to a large extent decoupled. In this paper, we concentrate on the transverse expansion, which we model using a two-dimensional relativistic Boltzmann equation [15]. We first describe the initial conditions of the evolution. We briefly recall how the Boltzmann equation is solved. We then define

the Knudsen number, which measures how close the system is to local thermal equilibrium. We finally define HBT radii.

A. Initial conditions

The nucleus-nucleus collision creates particles. We assume for simplicity that the spatial distribution of these particles is initially a gaussian in the transverse plane:

$$n(x, y) = \frac{N}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2}}, \quad (1)$$

where N is the total number of particles, and σ_x and σ_y are the rms widths of the distributions in the x and y directions. The x axis denotes the direction of impact parameter, or reaction plane.

As for the initial momentum distribution, two different scenarios have been implemented and compared. The first scenario is the same as in [15]. In order to compare transport theory and hydrodynamics, we take the same initial conditions: The momentum distribution is locally thermal, and the temperature is related to the density according to the equation of state of a two-dimensional massless, ideal gas: $T \propto n^{1/2}$. Since our calculation is purely classical, we assume Maxwell-Boltzmann statistics for the sake of consistency:

$$\frac{dN}{d^2p d^2x} \propto \exp\left(-\frac{p}{T(x, y)}\right), \quad (2)$$

where $T(x, y)$ is the local temperature, given by

$$T(x, y) = T_0 \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma_x^2} - \frac{y^2}{4\sigma_y^2}\right). \quad (3)$$

The second set of initial conditions are taken from the color glass condensate (CGC) calculations [17,18], where the initial gluon spectrum is calculated by solving the classical Yang-Mills (CYM) equations with the initial conditions given by the MV model [19]. The result of the numerical computation can be parametrized [20] as

$$\frac{dN}{d^2p_t d^2x} = \begin{cases} a_1 [e^{\frac{p_t}{\Lambda_s}} - 1]^{-1} & (p_t/\Lambda_s) < 1.5 \\ a_2 \log(4\pi p_t/\Lambda_s) (p_t/\Lambda_s)^{-4} & (p_t/\Lambda_s) > 1.5 \end{cases} \quad (4)$$

with $a_1 = 0.137$, $a_2 = 0.0087$, and $b = 0.465$. The color charge density parameter Λ_s (proportional to the saturation scale Q_s [21]) plays the role of the temperature as the only transverse momentum scale in the system. The parametrization (4) was fit to a calculation for a nucleus of an infinite size on the transverse plane, but we generalize it by letting $\Lambda_s(x, y)$ have the same gaussian dependence on the transverse coordinate as the temperature in Eq. (3), with an absolute value adjusted to give the same value for $\langle p_t \rangle$.

Our two-dimensional kinetic theory approach does not contain longitudinal expansion, and therefore cannot address questions related to isotropization of the particle distribution. The CGC initial conditions naturally lead to a very anisotropic initial condition where, after $\tau \sim 1/Q_s$, $\langle p_z \rangle \ll \langle p_t \rangle$, whereas conventional three-dimensional hydrodynamics assumes isotropy in the local rest frame. In the two-

dimensional approach, $p_z = 0$ for all particles, and the energy per particle $\langle p_t \rangle$ is constant throughout the evolution; we adjust it to $\langle p_t \rangle = 420$ MeV, corresponding roughly to the value for pions at the top RHIC energy [22]. This fixes the value of T_0 for the thermal initial conditions (3) ($\langle p_t \rangle = \frac{4}{3}T_0$) and the value of Λ_s in Eq. (4) for the CGC initial conditions. In practice, this implies an unrealistically small value of the saturation scale Q_s . Conventional estimates of Q_s are larger, but significant longitudinal cooling is required in order to match observed p_t spectra. In our calculation, the conservation of $\langle p_t \rangle$ makes our initial $\langle p_t \rangle$ smaller than most estimates. However, our emphasis in this paper is on the influence of thermalization on the *transverse* HBT radii and the *transverse* momentum dependence. For this purpose the two initial conditions that we use represent the opposite ends of the range of physically reasonable p_t spectra: from fully thermalized to one with a perturbative power law behavior at large p_t that one would expect to observe in the absence of any final state interactions.

B. Expansion: Knudsen number

The results presented in this paper use the algorithm described in [15] to solve the two-dimensional relativistic Boltzmann equation. The Monte Carlo algorithm follows the trajectory of every particle throughout the expansion of the system, until they cease to interact. Particles interact through $2 \rightarrow 2$ elastic collisions. The cross section is assumed isotropic in the center-of-mass frame for simplicity.

The only remaining parameters in the simulation are the total number of particles, N , and the elastic cross section, σ . (Since we are working in two dimensions, σ has the dimension of a length.) The initial average particle density per unit surface is

$$\bar{n} = \frac{N}{4\pi\sigma_x\sigma_y}. \quad (5)$$

It is worth emphasizing that N is usually much larger in the Monte Carlo simulation than in an actual heavy-ion collision (“parton subdivision” technique). This can be understood in the following way. The physical length scale that should be independent of N is the mean free path λ . Its precise value depends on the initial velocity and position of the particle, but the order of magnitude is generally $\lambda = 1/\sigma\bar{n}$. λ must be compared to another length scale, the average interparticle distance $d = \bar{n}^{-1/2}$. Let us define the dilution parameter D as

$$D = \frac{d}{\lambda} = \sigma\bar{n}^{1/2} = \frac{1}{\lambda\bar{n}^{1/2}}. \quad (6)$$

Our description of the system in terms of elastic $2 \rightarrow 2$ collisions is consistent only in the limit when D is small and the contribution of many-body collisions is suppressed. This is a requirement of the Boltzmann equation [15]. To achieve this one must take the limit of large N and small σ keeping σN fixed. This ensures that our results are extrapolations to the limit $N \rightarrow \infty$ at fixed λ . Because in this limit σ approaches zero the interactions between the particles become truly pointlike, and problems with causality and Lorentz-invariance are avoided. For this reason, all the results presented in this paper are obtained by doing two simulations with the same

value of λ and different, small values of D ; the results are then extrapolated linearly to $D = 0$.

The standard dimensionless parameter to characterize the degree of thermalization is the Knudsen number K , defined as the ratio of the mean free path to the characteristic size of the system R . We define R as in [23]:

$$R = \left(\frac{1}{\sigma_x^2} + \frac{1}{\sigma_y^2} \right)^{-1/2}. \quad (7)$$

The Knudsen number K is then defined as

$$K \equiv \frac{\lambda}{R} = \frac{1}{\sigma n R}. \quad (8)$$

The inverse of the Knudsen number is proportional to the average number of collisions per particle, n_{coll} . The product $n_{\text{coll}} K$ remains very close to 1.6, for all values of K [15]. Hydrodynamics is the limit $K \rightarrow 0$, while $K \rightarrow +\infty$ correspond to free streaming particles. A fit to the centrality dependence of elliptic flow [24] suggests that $K \simeq 0.3$ for central Au-Au collisions at RHIC.

We choose to keep the scattering cross section σ constant as a function of time for the sake of simplicity, as for instance in the AMPT transport model [25]. Other transport calculations have been carried out [26] where the viscosity to entropy ratio η/s is kept constant, so that σ depends on temperature or time, typically like $t^{2/3}$. As we recall below, HBT radii give a measure of the system when the last scattering occurs, that is, much later than other observables such as elliptic flow. Therefore, results might differ significantly with a time-dependent cross section.

C. HBT radii

For a particle with momentum $\mathbf{p}_t$, we denote by (t, x, y) the space-time point where the last collision occurs. The “out” and “side” coordinates are then defined as the projections parallel and orthogonal to the particle momentum:

$$\begin{aligned} x_o &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} - vt = x \cos \phi + y \sin \phi - vt, \\ x_s &= \mathbf{x} \times \mathbf{v} = x \sin \phi - y \cos \phi, \end{aligned} \quad (9)$$

where $\mathbf{v} \equiv \mathbf{p}_t/p_t$ is the particle velocity ($v = 1$), and ϕ its azimuthal angle: $\mathbf{p}_t = (p_t \cos \phi, p_t \sin \phi)$. Both x_o and x_s are invariant under a translation along the trajectory after the last scattering: $(t, \vec{x}) \rightarrow (t + \tau, \vec{x} + \vec{v}\tau)$. In particular, they are invariant through a scattering at zero angle. HBT radii are obtained by averaging over many particles with the same momentum:

$$\begin{aligned} R_o^2 &= \langle x_o^2 \rangle - \langle x_o \rangle^2, \\ R_s^2 &= \langle x_s^2 \rangle - \langle x_s \rangle^2, \\ R_{os} &= \langle x_o x_s \rangle - \langle x_o \rangle \langle x_s \rangle. \end{aligned} \quad (10)$$

Radii defined in this way coincide with those obtained from the curvature of the correlation function at zero relative momentum, in the absence of final-state interactions [12]. Experimentally, radii are usually obtained from gaussian fits to the correlation function. This procedure gives different radii if the source is not gaussian [1]. In our case, we have checked

explicitly that sources are close to gaussian, but we have not investigated systematically effects of non-gaussianities. Strictly speaking, averages in Eq. (10) are for a given momentum. In practice, our results are obtained by taking bins of width 10 MeV/c in p_t , and averaging over the particles in the bin. We have checked that results do not vary significantly with a smaller bin size.

The radii defined by Eq. (10) are generally functions of p_t and ϕ . In Sec. III, we study central collisions, with $\sigma_x = \sigma_y$. Symmetry of the system with respect to the direction of $\mathbf{p}_t$ then implies $R_{os} = 0$. Rotational symmetry implies that R_o and R_s are independent of ϕ . The more general case when σ_x and σ_y differ is studied in Sec. IV.

III. CENTRAL COLLISIONS

In this section, we discuss how the p_t dependence of R_o evolves with the Knudsen number for a central collision. We then discuss the ratio R_o/R_s . Finally, we compare with experimental data. In order to mimic a central Au-Au collision at RHIC, we use the initial density profile Eq. (1) with $\sigma_x = \sigma_y = 3$ fm. This value corresponds to the rms width of the initial density profile in an optical Glauber calculation [27].

The decrease of HBT radii with the transverse momentum p_t , typically like $p_t^{-1/2}$, is often [1,28,29] presented as a signature of collective flow. Collective flow is associated with the hydrodynamic limit, i.e., the limit of small K . Figure 1 displays R_o versus p_t for thermal initial conditions, Eq. (2), and several values of the Knudsen number K . Generally, R_o increases as K decreases. However, this is a small effect. The decrease of R_o with p_t is more pronounced in the hydrodynamic limit (small K) but is also seen for free streaming particles (large K). For large K , HBT radii reflect the initial momentum distribution: both with thermal initial conditions conditions, Eq. (2), and with CGC initial conditions, Eq. (4), particles with higher p_t are more likely to be produced in dense regions, i.e., near the center of the

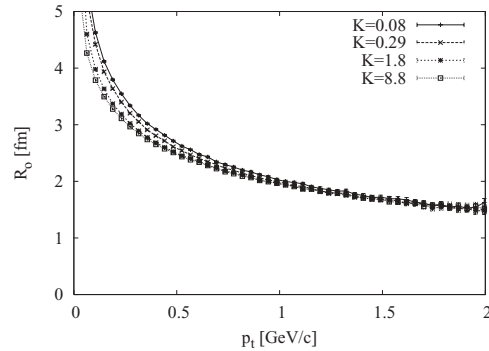


FIG. 1. HBT radius R_o versus transverse momentum p_t of particles in the transport calculation. The curves are labeled by the value of the Knudsen number K .

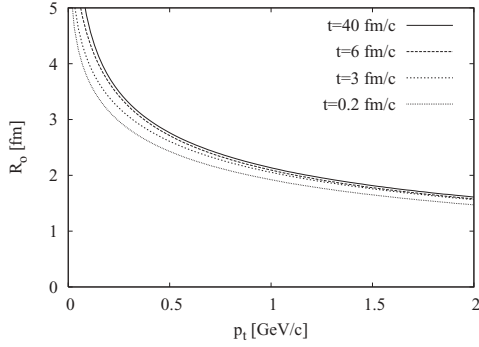


FIG. 2. HBT radius R_o versus transverse momentum p_t of particles in ideal hydrodynamics, at a given time t . The curves are labeled by the value of t .

fireball $x = y = 0$. For $p_t \gg \langle p_t \rangle$, Eqs. (2) and (3) yield $R_o(p_t) \simeq \sigma_x \sqrt{1.5 \langle p_t \rangle / p_t}$ for the initial distribution, while Eq. (4) gives $R_o(p_t) \simeq \sigma_x / \sqrt{2}$. In practice, after collisions have occurred, both sets of initial conditions yield similar radii, as we shall see explicitly later.

Decreasing the Knudsen number K amounts to increasing the number of collisions, hence the “freeze-out” time when the last collision occurs. To show this explicitly, Fig. 2 displays $R_o(p_t)$ in ideal hydrodynamics, assuming sudden freeze-out at time t . The equations of hydrodynamics are solved using a first-order Godunov scheme [30]. For the sake of consistency with the transport calculation, the equation of state of the fluid is that of a two-dimensional ideal gas, and there is no longitudinal expansion [15]. Hydrodynamics at $t = 0.2$ fm/c gives the same radii as the transport calculation for large K in Fig. 1, because we have chosen the same initial conditions for both calculations. As time evolves, R_o increases; the increase is more pronounced and occurs later at low p_t . At a given p_t , the value of R_o converges as t increases. This is by no means a trivial result: the location of the last interaction, $\langle x_o \rangle$ in Eq. (10), increases linearly with t . Only the dispersion R_o of this location converges. Hydrodynamics at large t is almost identical to transport at small K (the relative difference is less than 5%). This is also a nontrivial result, although it is implicit in all hydrodynamical studies of HBT observables [5]: HBT observables are defined at the last scattering, when the system is no longer in local equilibrium, and hydrodynamics is not valid.

Hydrodynamical calculations usually yield a value of R_o/R_s which is much too large, of the order of 1.5, while RHIC data are compatible with 1. While R_o increases with time in hydrodynamics, R_s decreases. Initially, $R_o(p_t) = R_s(p_t)$ by symmetry. In the transport calculation, the same behavior is observed as the number of collisions per particle $1/K$ increases, as shown in Fig. 3. However, this increase is quite slow. The same curve shows, for sake of illustration, the increase of the elliptic flow v_2 with $1/K$ for a noncentral collision [15]. Elliptic flow converges to the “hydrodynamic limit” much faster than HBT radii. In order to put this statement

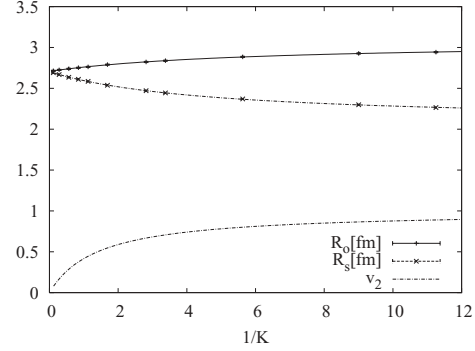


FIG. 3. R_o and R_s , averaged over the interval $0.25 < p_t < 0.75$ GeV/c, versus $1/K$, which scales like the number of collisions per particle. The lines are three-parameter fits with Eq. (11). The dotted curve shows, for sake of illustration, the variation of elliptic flow in a noncentral collision, scaled by the hydrodynamical limit (from [15]).

on a quantitative basis, we fit our numerical results for $R_o(K)$ with the following formula [15]:

$$R_o(K) = R_o^{f.s.} + \frac{R_o^{\text{hydro}} - R_o^{f.s.}}{1 + K/K_0}. \quad (11)$$

The fit parameters are the free-streaming ($K \rightarrow \infty$) limit $R_o^{f.s.}$, the hydrodynamic ($K \rightarrow 0$) limit R_o^{hydro} , and K_0 , the value of the Knudsen number for which $R_o(K)$ is half-way between free-streaming and hydro. A similar formula can be used for $R_s(K)$. It fits our numerical results perfectly (see Fig. 3). The value of K_0 is 0.167 ± 0.007 for R_o and 0.215 ± 0.006 for R_s , while it is 0.7 for v_2 [15]: convergence toward the hydrodynamic limit requires 3–4 times more collisions for HBT radii than for elliptic flow. The other fit parameters are $R_o^{\text{hydro}} = 3.071 \pm 0.006$ fm and $R_s^{\text{hydro}} = 2.088 \pm 0.006$ fm: we recover the HBT puzzle $R_o/R_s \simeq 1.5$ in the hydrodynamical limit.

We now discuss the value of R_o/R_s at RHIC. The centrality dependence of v_2 suggests that $K \simeq 0.3$ in central Au-Au collisions [24]. For this value, v_2 is already 70% of the hydrodynamic limit. On the other hand, $R_o/R_s \simeq 1.16$, which is significantly below the hydrodynamic limit of 1.5. A similar value ($R_o/R_s \simeq 1.2$) was found with the AMPT transport code [12]. A more detailed comparison is shown in Fig. 4, which displays R_o/R_s versus p_t for the two sets of initial conditions, Eqs. (2) and (4). K has been fixed to the value which is favored by v_2 data [24], i.e., $K = 0.3$ for central collisions. For both sets of initial conditions, R_o/R_s is essentially independent of p_t , while data show a slight decrease. In this respect, our results differ from the covariant MPC model (which is in principle equivalent to ours, with the longitudinal expansion taken into account), where R_o/R_s is found smaller than 1 at large p_t [13].

Our value of R_o/R_s for central collisions is in much better agreement with experimental data than models based on ideal

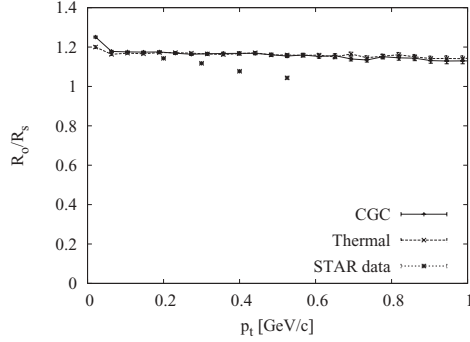


FIG. 4. R_o/R_s versus p_t for $K = 0.3$. Dashed line: thermal initial conditions, Eq. (2); full line: CGC initial conditions, Eq. (4). Error bars on the transport calculations are statistical only. Stars: data from the STAR Collaboration [31].

hydrodynamics, which give a value around 1.5. It has been recently argued that ideal hydrodynamics with an early freeze-out [32] also explains the HBT puzzle. Our results also show that increasing the Knudsen number amounts to decreasing the freeze-out time in ideal hydrodynamics. Viscous corrections to ideal hydrodynamics, which incorporate deviations to local equilibrium to first order in the Knudsen number K , also lead to a reduced R_o/R_s (together with a reduced longitudinal radius R_L , also closer to data). However, the value of η/s required to match [10] the data is much larger than that inferred from the study of elliptic flow [33], so that viscous corrections explain only a small part of the HBT puzzle [11]. However, viscous hydrodynamics itself breaks down at freeze-out, and may not be a reliable tool for estimating HBT radii. Our results suggest that deviations from equilibrium have larger effects on HBT radii than inferred from viscous hydrodynamics. We find that partial thermalization, which has been shown to explain the centrality dependence of v_2 , also solves most of the HBT puzzle for R_o/R_s .

While our transport calculation gives a plausible explanation for the small R_o/R_s , it completely misses the absolute value of HBT radii. This is shown in Fig. 5, which displays a comparison between $R_o(p_t)$ from our transport calculation with data from the STAR [31], PHOBOS [34], and PHENIX Collaborations [35]. Experimental values are much larger. This is due to the equation of state [7,36], which is that of an ideal gas in our calculation. Our HBT volume $R_o R_s$ is essentially independent of the number of collisions $1/K$. It has been argued that this is a general result for an ideal gas, due to entropy conservation [37]. The equation of state of QCD, on the other hand, has a sharp structure around $T_c \sim 170$ MeV: as the temperature decreases, the entropy density drops by an order of magnitude in a narrow interval around T_c . In a heavy-ion collision, the volume increases by a large factor with essentially no change in the temperature. This explains why HBT volumes increase at the transition. A complete study must also take into account the longitudinal expansion, and its effect on the longitudinal radius R_L .

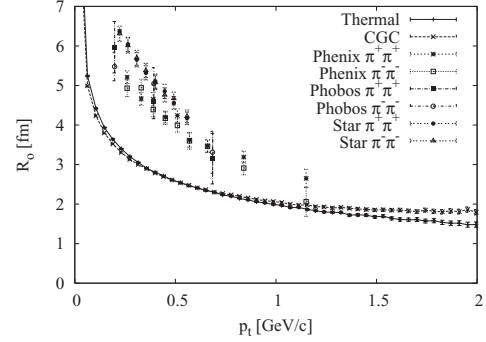


FIG. 5. HBT radius R_o versus transverse momentum p_t . Lines: our results for $K = 0.3$ and different initial conditions: thermal, Eq. (2), and CGC, Eq. (4). Symbols: experimental data from the STAR [31], PHOBOS [34], and PHENIX Collaborations [35].

IV. AZIMUTHALLY SENSITIVE HBT

For a noncentral collision, the interaction region is elliptic, and HBT radii depend on ϕ . Azimuthally-sensitive interferometry has been investigated theoretically within hydrodynamical models [38–42] and transport models [43]. We first briefly recall why and how radii depend on ϕ . We then study how the various radii depend on the Knudsen number. Finally, we introduce dimensionless ratios of oscillation amplitudes, which do not seem to have not been studied previously, and we compare our results with experimental data [31].

Figure 6 illustrates the ϕ dependence of transverse radii. The initial distribution of matter is elongated along the y axis, so that R_o has a maximum at $\phi = \pi/2$, while R_s has a maximum at $\phi = 0$. Finally, R_{os} differs from zero when the principal axes of the region of homogeneity are tilted relative to the direction of momentum.

Before we present our results, let us briefly explain how the ϕ dependence of the radii is evaluated in the Monte Carlo solution of the Boltzmann equation. The radii (10) involve average values, such as $\langle x_o \rangle$, which depend on ϕ . Such averages can be computed by binning in ϕ , and computing the average

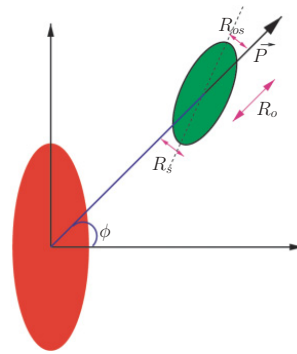


FIG. 6. (Color online) Illustration of ϕ dependent HBT radii.

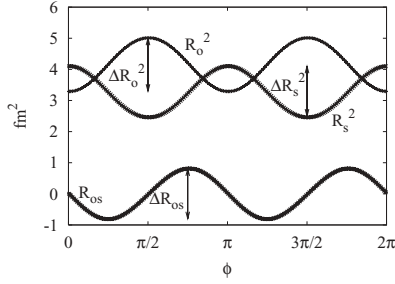


FIG. 7. Azimuthal dependence of HBT radii. Thermal initial conditions, with $\sigma_x = 1.95$ fm, $\sigma_y = 2.6$ fm, corresponding roughly to a Au-Au collision at RHIC with impact parameter $b = 7$ fm. The p_t interval is the same as in Fig. 3. The Knudsen number is $K = 0.4$.

in each bin:

$$\langle x_o \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N (x_o)_i}{N}, \quad (12)$$

where N is the number of particles in the bin, which depends on ϕ due to elliptic flow. Since the ϕ dependence is smooth, more accurate results are obtained by fitting both the numerator and the denominator of Eq. (12) by Fourier series, using the symmetries $\phi \rightarrow -\phi$ and $\phi \rightarrow \phi + \pi$ to restrain the number of terms [44]. Since the Fourier expansion converges rapidly, we keep terms only up to order $\cos 4\phi$ and $\sin 4\phi$.

Figure 7 displays the ϕ dependence of R_o^2 , R_s^2 , and R_{os} . The variation of R_o^2 and R_s^2 is clearly dominated by a $\cos 2\phi$ term, while the variation of R_{os} goes like $\sin 2\phi$. The mean value of R_o^2 is slightly higher than the mean value of R_s^2 , which is not surprising since final-state interactions increase R_o and decrease R_s . At $\phi = 0$, however, $R_o < R_s$, reflecting the initial eccentricity of the system.

Figure 8 displays radii in the reaction plane ($\phi = 0$) and out of the reaction plane ($\phi = \pi/2$) versus K . R_o increases and R_s decreases as the number of collisions $1/K$ increases, as already observed for central collisions (Fig. 3). Upon closer scrutiny, Fig. 8 reveals that the slope of the curves differ. This

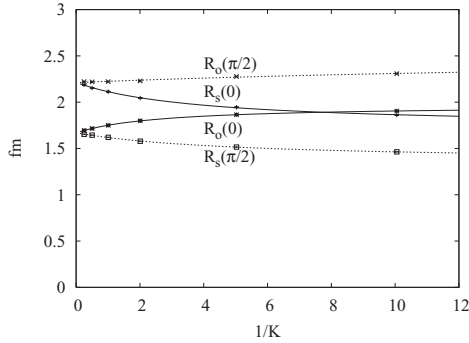


FIG. 8. In-plane ($\phi = 0$) and out-of-plane ($\phi = \pi/2$) radii versus K^{-1} for thermal initial conditions. Initial conditions and p_t interval as in Fig. 7. Lines are three-parameter fits using Eq. (11).

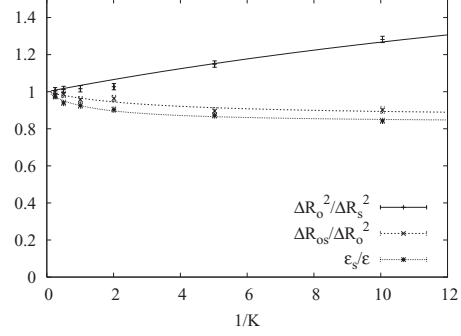


FIG. 9. Ratios of oscillation amplitudes versus K^{-1} for thermal initial conditions. R_o^2 , R_s^2 , and R_{os} are integrated over the p_t interval $0.5 < p_t < 0.75$ GeV/c. Lines are drawn to guide the eye.

is reflected by the value of the parameter fit K_0 in Eq. (11). K_0 is largest for $R_o(0)$ ($K_0 = 0.38 \pm 0.01$), smallest for $R_o(\pi/2)$ ($K_0 = 0.04 \pm 0.05$), and intermediate for $R_s(0)$ and $R_s(\pi/2)$ ($K_0 = 0.26 \pm 0.03$ and 0.20 ± 0.02 , respectively). Our interpretation is that thermalization is faster in plane than out of plane, which is natural since collective flow is preferentially in plane.

We now study quantitatively how oscillation amplitudes vary with K . There are three such amplitudes, as illustrated in Fig. 7:

$$\begin{aligned} \Delta R_o^2 &= R_o^2(\pi/2) - R_o^2(0), \\ \Delta R_s^2 &= R_s^2(0) - R_s^2(\pi/2), \\ \Delta R_{os} &= R_{os}(3\pi/4) - R_{os}(\pi/4). \end{aligned} \quad (13)$$

In Fig. 7, all three amplitudes are clearly comparable. If $K \gg 1$, particles escape freely after they have been produced. Setting $t = 0$ in Eq. (9) and using the fact that the initial distribution is centered at $x = y = 0$ and has $y \rightarrow -y$ symmetry, one easily shows that all three amplitudes are equal to $\langle y^2 - x^2 \rangle$. The results are integrated over the p_t range $0.25 < p_t < 0.75$ GeV/c, but our results depend weakly on p_t . In particular, we do not see the inversion of oscillations at large p_t reported in earlier hydrodynamical calculations [38,40]. This inversion was not observed in more recent calculations [42].

Oscillation amplitudes scale like the eccentricity of the overlap area between the two nuclei, which depends on centrality and is not known directly. This dependence can be avoided by considering *ratios* of oscillation amplitudes. Out of three amplitudes, one may construct two ratios, $\Delta R_{os} / \Delta R_o^2$ and $\Delta R_o^2 / \Delta R_s^2$. These ratios can be extracted directly from experimental data, and are equal to unity in the free-streaming limit (large K). They are plotted in Fig. 9 versus $1/K$. Final-state interactions increase the oscillations of R_o relative to R_s , much in the same way as they increase R_o relative to R_s for central collisions. The opposite behavior was found in hydro- [40] and blast-wave [4] calculations, and we do not understand the origin of this discrepancy.

For realistic values of K , both ratios deviate little from unity. It is also interesting to compare the eccentricity seen in

TABLE I. Comparison between results from the STAR Collaboration [31] and our calculations. Top: centrality interval 20–30% and $k_t \in [0.15, 0.25]$ GeV/c. Bottom: centrality interval 10–20% and $k_t \in [0.35, 0.45]$ GeV/c.

	STAR data	Our results	
		$K = 0.32$	$K = 0.51$
$\Delta R_o^2 / \Delta R_s^2$	1.45 ± 0.61	1.08 ± 0.02	1.05 ± 0.02
$\Delta R_{os} / \Delta R_o^2$	0.68 ± 0.42	0.97 ± 0.03	0.99 ± 0.03
ϵ_s	0.080 ± 0.026	0.205 ± 0.003	0.213 ± 0.005
	STAR data	Our results	
		$K = 0.31$	$K = 0.49$
$\Delta R_o^2 / \Delta R_s^2$	1.09 ± 0.46	1.14 ± 0.02	1.06 ± 0.02
$\Delta R_{os} / \Delta R_o^2$	0.65 ± 0.31	0.90 ± 0.04	0.92 ± 0.04
ϵ_s	0.086 ± 0.017	0.172 ± 0.005	0.174 ± 0.005

HBT radii, for instance in R_s :

$$\epsilon_s \equiv \frac{R_s^2(0) - R_s^2(\pi/2)}{R_s^2(0) + R_s^2(\pi/2)} \quad (14)$$

with the initial eccentricity

$$\epsilon = \frac{\sigma_y^2 - \sigma_x^2}{\sigma_y^2 + \sigma_x^2}. \quad (15)$$

In the limit $K \rightarrow \infty$, ϵ_s and ϵ are strictly equal for both sets of initial conditions. The ratio ϵ_s/ϵ is plotted in Fig. 9. It also remains close to unity. We conclude that none of the observables we can construct from oscillation amplitudes is an interesting probe of thermalization. For realistic values of K , the region of homogeneity essentially retains the shape of the initial distribution.

Although our model calculation is too crude to reproduce the magnitude of HBT radii, we expect that the above ratios are less model dependent; in particular, they all go to 1 in the absence of final-state interactions. A comparison with existing data is therefore instructive. Table I displays comparisons between our results and experimental data from the STAR Collaboration [31]. The correspondence between centrality and eccentricity was taken from [45]. For each set of data, the two values of the Knudsen number span the range inferred from the centrality dependence of v_2 [24]. Note that the p_t ranges differ for the two centrality intervals. This is the reason why our results are also slightly different, although the values of K are essentially the same. Our results for $\Delta R_o^2/\Delta R_s^2$ and $\Delta R_{os}/\Delta R_o^2$ are compatible with experimental data, but the latter have large error bars. On the other hand, the experimental value of ϵ_s is smaller by a factor 2 than our value. In our

calculations, ϵ_s remains very close to the initial eccentricity (see Fig. 9). Experimentally, however, the initial eccentricity seems to be washed out by the expansion. This is a spectacular effect, whose importance does not seem to have been fully appreciated so far. Hydrodynamical calculations have been reported [42] which are in fair agreement with the measured value of ϵ_s . These calculations use a soft equation of state: it is likely that the soft equation of state of QCD is responsible for the reduced eccentricity seen in data.

V. CONCLUSIONS

We have carried out a systematic study of how HBT observables evolve with the degree of thermalization in the system, characterized by the Knudsen number K . The number of collisions per particle scales like $1/K$, and local equilibrium corresponds to the limit $K \rightarrow 0$. Our results show that HBT observables depend very weakly on K :

- (i) A decrease of R_o with p_t is expected from initial conditions; collective flow only makes this decrease slightly stronger.
- (ii) The ratio R_o/R_s increases very slowly when one approaches the hydrodynamical limit. For the values of K found in Ref. [24], it is lower than 1.2, and much lower than predicted by hydrodynamics. Partial thermalization solves most of the HBT puzzle.
- (iii) For noncentral collisions, the variations of R_o^2 , R_s^2 and R_{os} with azimuth have almost equal amplitudes. The final eccentricity seen in the side radius R_s^2 is very close to the initial eccentricity.

Our results are in quantitative agreement with data for R_o/R_s , $\Delta R_{os}/\Delta R_o^2$, and $\Delta R_o^2/\Delta R_s^2$. On the other hand, our absolute values for R_o and R_s are much too small. Experimentally, it is also found that the final eccentricity is smaller than the initial eccentricity, almost by a factor 2. Both effects cannot be due to flow alone. On the other hand, they might be a signature of the softness of the QCD equation of state or, equivalently, of the transition from a quark-gluon plasma to a hadron gas. When the quark-gluon plasma transforms into hadrons, the volume of the system increases by a large factor: the source swells, which results in larger radii and a smaller eccentricity.

ACKNOWLEDGMENTS

C.G. and J.Y.O. thank M. Lopez Noriega, M. A. Lisa, S. Pratt, and Yu. Sinyukov for useful discussions. T.L. thanks W. Florkowski for discussions. T.L. is supported by the Academy of Finland, contract no. 126604.

- [1] M. A. Lisa, S. Pratt, R. Soltz, and U. Wiedemann, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. **55**, 357 (2005).
- [2] S. V. Akkelin and Y. M. Sinyukov, Phys. Lett. **B356**, 525 (1995).
- [3] R. H. Brown and R. Q. Twiss, Nature **177**, 27 (1956).

- [4] F. Retiere and M. A. Lisa, Phys. Rev. C **70**, 044907 (2004).
- [5] P. F. Kolb and U. W. Heinz, arXiv:nucl-th/0305084.
- [6] T. Hirano and K. Tsuda, Phys. Rev. C **66**, 054905 (2002).
- [7] D. Zschesche, H. Stöcker, W. Greiner, and S. Schramm, Phys. Rev. C **65**, 064902 (2002).

- [8] O. Socolowski, F. Grassi, Y. Hama, and T. Kodama, Phys. Rev. Lett. **93**, 182301 (2004).
- [9] P. Huovinen and P. V. Ruuskanen, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. **56**, 163 (2006).
- [10] P. Romatschke, Eur. Phys. J. C **52**, 203 (2007).
- [11] S. Pratt, arXiv:0811.3363 [nucl-th].
- [12] Z. W. Lin, C. M. Ko, and S. Pal, Phys. Rev. Lett. **89**, 152301 (2002).
- [13] D. Molnár and M. Gyulassy, Phys. Rev. Lett. **92**, 052301 (2004).
- [14] Q. Li, M. Bleicher, and H. Stöcker, Phys. Rev. C **73**, 064908 (2006).
- [15] C. Gombeaud and J.-Y. Ollitrault, Phys. Rev. C **77**, 054904 (2008).
- [16] F. Karsch and E. Laermann, arXiv:hep-lat/0305025.
- [17] A. Krasnitz, Y. Nara, and R. Venugopalan, Phys. Rev. Lett. **87**, 192302 (2001).
- [18] T. Lappi, Phys. Rev. C **67**, 054903 (2003).
- [19] L. D. McLerran and R. Venugopalan, Phys. Rev. D **49**, 2233 (1994).
- [20] A. Krasnitz, Y. Nara, and R. Venugopalan, Nucl. Phys. A **727**, 427 (2003).
- [21] T. Lappi, Eur. Phys. J. C **55**, 285 (2008).
- [22] S. S. Adler *et al.* (PHENIX Collaboration), Phys. Rev. C **69**, 034909 (2004).
- [23] R. S. Bhalerao, J.-P. Blaizot, N. Borghini, and J.-Y. Ollitrault, Phys. Lett. B **627**, 49 (2005).
- [24] H.-J. Drescher, A. Dumitru, C. Gombe, and J.-Y. Ollitrault, Phys. Rev. C **76**, 024905 (2007).
- [25] Z.-W. Lin, C. M. Ko, B.-A. Li, B. Zhang, and S. Pal, Phys. Rev. C **72**, 064901 (2005).
- [26] P. Huovinen and D. Molnar, Phys. Rev. C **79**, 014906 (2009).
- [27] M. L. Miller, K. Reygers, S. J. Sanders, and P. Steinberg, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. **57**, 205 (2007).
- [28] A. N. Makhlin and Y. M. Sinyukov, Z. Phys. C **39**, 69 (1988).
- [29] J. Y. Ollitrault, Cargese Summer School on QCD Perspectives on Hot and Dense Matter, Cargese, France, 6–18 August 2001, NATO Sci. Ser. II **87**, 237 (2002).
- [30] J.-Y. Ollitrault, Phys. Rev. D **46**, 229 (1992).
- [31] J. Adams *et al.* (STAR Collaboration), Phys. Rev. C **71**, 044906 (2005).
- [32] W. Broniowski, M. Chojnacki, W. Florkowski, and A. Kisiel, Phys. Rev. Lett. **101**, 022301 (2008).
- [33] P. Romatschke and U. Romatschke, Phys. Rev. Lett. **99**, 172301 (2007).
- [34] B. B. Back *et al.* (PHOBOS Collaboration), Phys. Rev. C **73**, 031901(R) (2006).
- [35] S. S. Adler *et al.* (PHENIX Collaboration), Phys. Rev. Lett. **93**, 152302 (2004).
- [36] S. Pratt and J. Vredevoogd, Phys. Rev. C **78**, 054906 (2008).
- [37] S. V. Akkelin and Y. M. Sinyukov, Phys. Rev. C **70**, 064901 (2004).
- [38] U. W. Heinz and P. F. Kolb, Phys. Lett. B **542**, 216 (2002).
- [39] B. Tomasik, AIP Conf. Proc. **828**, 464 (2006).
- [40] E. Frodermann, R. Chatterjee, and U. Heinz, J. Phys. G **34**, 2249 (2007).
- [41] M. Csanad, B. Tomasik, and T. Csorgo, Eur. Phys. J. A **37**, 111 (2008).
- [42] A. Kisiel, W. Broniowski, M. Chojnacki, and W. Florkowski, Phys. Rev. C **79**, 014902 (2009).
- [43] T. J. Humanic, Int. J. Mod. Phys. E **15**, 197 (2006).
- [44] U. Heinz, A. Hummel, M. A. Lisa, and U. A. Wiedemann, Phys. Rev. C **66**, 044903 (2002).
- [45] P. F. Kolb, U. W. Heinz, P. Huovinen, K. J. Eskola, and K. Tuominen, Nucl. Phys. A **696**, 197 (2001).

Effects of flow fluctuations and partial thermalization on v_4

Clément Gombeaud and Jean-Yves Ollitrault*

CNRS, URA2306, Institut de physique theorique de Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette, France

(Received 29 July 2009; revised manuscript received 21 October 2009; published 6 January 2010)

The second and fourth Fourier harmonics of the azimuthal distribution of particles, v_2 and v_4 , have been measured in Au + Au collisions at the Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC). The harmonic v_4 is mainly induced from v_2 as a higher-order effect. However, the ratio $v_4/(v_2)^2$ is significantly higher than predicted by hydrodynamics. Effects of partial thermalization are estimated on the basis of a transport calculation and are shown to increase $v_4/(v_2)^2$ by a small amount. We argue that the high value of $v_4/(v_2)^2$ seen experimentally is mostly caused by elliptic flow fluctuations. However, the standard model of eccentricity fluctuations is unable to explain the large magnitude of $v_4/(v_2)^2$ in central collisions.

DOI: 10.1103/PhysRevC.81.014901

PACS number(s): 25.75.Ld, 24.10.Nz

I. INTRODUCTION

The azimuthal distribution of particles emitted in ultrarelativistic nucleus-nucleus collisions at the Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) is a sensitive tool for understanding the bulk properties of the matter produced in these collisions (see Ref. [1] for a recent review). It is generally written as a Fourier series,

$$\frac{dN}{d\phi} \propto 1 + 2v_2 \cos 2\phi + 2v_4 \cos 4\phi + \dots, \quad (1)$$

where ϕ is the azimuthal angle with respect to the direction of flow. In this paper, we consider analyses done near the center-of-mass rapidity, so that odd harmonics vanish by symmetry. The large magnitude of elliptic flow v_2 suggests that the lump of matter formed in a Au-Au collision at the RHIC is close to local thermal equilibrium and expands as a relativistic fluid. Elliptic flow is large at high p_t (up to 0.25 for baryons), which suggested the idea to study the higher-order harmonic v_4 [2,3]. Several analyses of v_4 have been reported [4–7]. Experimental results give $v_4 \simeq (v_2)^2$, whereas the ideal-fluid picture generally predicts $v_4 = \frac{1}{2}(v_2)^2$ [8]. This discrepancy has not yet been explained. In this paper, we investigate the sensitivity of v_4 to two effects: viscous deviations from the ideal-fluid picture (Sec. III) and elliptic flow fluctuations (Sec. V).

II. IDEAL HYDRODYNAMICS

We first briefly recall the prediction of relativistic hydrodynamics. In this theory, the ϕ dependence of the particle distribution results from a similar ϕ dependence of the fluid four-velocity [8,9]:

$$u(\phi) = U(1 + 2V_2 \cos 2\phi + 2V_4 \cos 4\phi \dots), \quad (2)$$

where ϕ is the azimuthal angle of the fluid velocity with respect to the minor axis of the participant ellipse [10] (see Fig. 1). This is because the overlap area between the two colliding nuclei is elliptic, which results in anisotropic pressure gradients. For

a semicentral Au-Au collision at the RHIC, $V_2 \sim 4\%$, and one expects V_4 to be of much smaller magnitude, typically $V_4 \sim (V_2)^2$.

The fluid expands, becomes dilute, and eventually transforms into particles. As argued in Ref. [8], fast particles are produced where the fluid velocity is maximum and parallel to the particle momentum. The resulting momentum distribution is a boosted thermal distribution. Neglecting quantum statistics (this is justified in the transverse momentum range where v_4 is measured), the momentum distribution for a given particle of mass m is

$$\frac{dN}{p_t dp_t d\phi} \propto e^{-p \cdot u/T} = \exp\left(-\frac{m_t u_0(\phi) - p_t u(\phi)}{T}\right), \quad (3)$$

where $m_t = \sqrt{p_t^2 + m^2}$, $u_0(\phi) = \sqrt{1 + u(\phi)^2}$, and ϕ is the azimuthal angle of the particle. Inserting Eq. (2) into Eq. (3), expanding to leading order in V_2 , V_4 and identifying with Eq. (1), one obtains [8]

$$\begin{aligned} v_2(p_t) &= \frac{V_2 U}{T} (p_t - m_t v), \\ v_4(p_t) &= \frac{1}{2} v_2(p_t)^2 + \frac{V_4 U}{T} (p_t - m_t v), \end{aligned} \quad (4)$$

where $v \equiv U/\sqrt{1 + U^2}$. The higher harmonic v_4 is the sum of two contributions: an “intrinsic” v_4 proportional to the $\cos 4\phi$ term in the fluid velocity distribution, V_4 , and a contribution induced by elliptic flow itself, which turns out to be exactly $\frac{1}{2}(v_2)^2$. The latter contribution becomes dominant as p_t increases.

To confirm these qualitative results, we solve numerically the equations of ideal relativistic hydrodynamics. The fluid is initially at rest. We choose a Gaussian initial entropy density profile, with root-mean-square widths $\sigma_x = 2$ fm and $\sigma_y = 3$ fm. The equation of state is that of a two-dimensional ideal gas of massless particles, $s \propto T^2$, for reasons explained later. The normalization has been fixed in such a way that the average transverse momentum per particle is $\langle p_t \rangle = 0.42$ GeV/c, which is roughly the value for pions in a central Au-Au collision at the RHIC [12]. Figure 2 displays the variation of $v_4/(v_2)^2$ with the particle transverse momentum p_t . For massless particles, $m_t = p_t$ and Eq. (4) gives $v_4/(v_2)^2 =$

*jean-yves.ollitrault@cea.fr

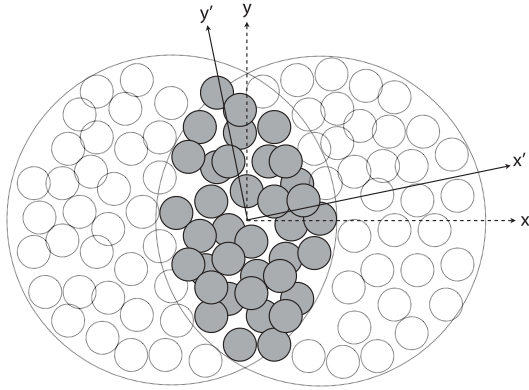


FIG. 1. Schematic of a nucleus-nucleus collision depicted in the transverse plane (from Ref. [11]). The principal axes (x' and y') of the area formed by the participants are tilted with respect to the reaction plane given by the axes (x and y) on the transverse plane.

$0.5 + (k/p_t)$, where k is independent of p_t . To check the validity of this formula, our numerical results are fitted over the interval $0.5 < p_t < 2.5$ GeV/c by the simple formula

$$\frac{v_4(p_t)}{v_2(p_t)^2} = A + B \frac{\langle p_t \rangle}{p_t}, \quad (5)$$

where we have introduced the average transverse momentum $\langle p_t \rangle$ in such a way that the coefficient B is dimensionless. We refer to A (respectively, B) as the induced (respectively, intrinsic) v_4 . We find $A = 0.557$ and $B = 0.479$. The value of A is close to the expected value 0.5. The small discrepancy is because Eqs. (4) are only valid for small values of v_2 and v_4 . This approximation breaks down at the upper end of our

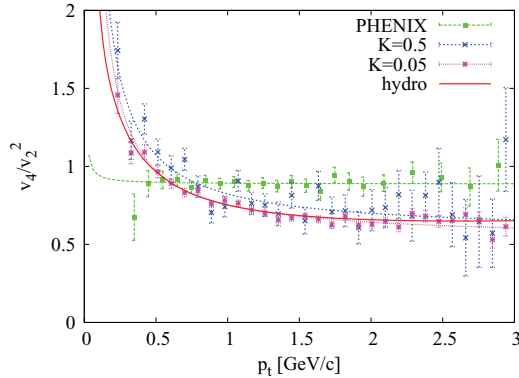


FIG. 2. (Color online) $v_4/(v_2)^2$ versus p_t in Boltzmann transport theory and ideal hydrodynamics (hydro) for massless particles. Lines are two-parameter fits using Eq. (5) over the interval $[0.5, 2.5]$ GeV/c. Curves are labeled with the value of the Knudsen number K . Error bars are statistical. Squares are results for charged pions from PHENIX [7], averaged over the centrality interval 20%–60%.

fitting interval, where $v_2(2.5 \text{ GeV}/c) = 0.51$. This large value is because the equation of state is that of an ideal gas. For large p_t , however, the intrinsic V_4 term in Eq. (4) can be neglected, because it is linear in p_t , whereas the other term is quadratic in p_t . Neglecting this term, the Fourier expansion in Eq. (1) can be done exactly. This yields

$$v_{2n}(p_t) = \frac{I_n(x)}{I_0(x)}, \quad (6)$$

where $x = 2V_2 U(p_t - m_t v)/T$, and $I_n(x)$ is the modified Bessel function. Inverting Eq. (6) with $n = 1$ and $v_2 = 0.51$, one obtains $x = 1.19$. Equation (6) with $n = 2$ then gives $v_4/(v_2)^2 = 0.552$, in better agreement with our numerical result.

We have systematically investigated the sensitivity of our hydrodynamical results to initial conditions. With a smaller initial eccentricity ($\sigma_x = 2$ fm and $\sigma_y = 2.5$ fm), the value of A is closer to 0.5, as expected from the preceding discussion. We have also repeated the calculation with a more realistic density profile corresponding to a Au-Au collision at the RHIC, obtained using an optical Glauber model calculation. We expected that B , which we understand as the “intrinsic” v_4 , would be sensitive to the change in initial conditions, but the changes in both A and B were insignificant.

Experimental results are also shown in Fig. 2. The value of v_4/v_2^2 is constant, even at relatively low p_t : a fit to these results using Eq. (5) gives $B = 0.01 \pm 0.04$, compatible with zero.¹ The other fit parameter is $A = 0.89 \pm 0.02$, significantly larger than the value 0.5 predicted by hydrodynamics. Some of the discrepancies between our model calculation and the data can be attributed to the equation of state, which is much softer in quantum chromodynamics near the transition region than in our hydrodynamical calculation. More specifically, the coefficient B representing the intrinsic v_4 may depend on the equation of state. It would be interesting to investigate whether the small value of B seen experimentally can be attributed to the softness of the equation of state. On the other hand, our argument leading to $A = \frac{1}{2}$ is quite general, so that the discrepancy with data cannot be attributed to the equation of state. In this paper, we investigate the possible origins of this discrepancy.

III. PARTIAL THERMALIZATION

It has been argued [14] that if interactions among the produced particles are not strong enough to produce local thermal equilibrium, so that the hydrodynamic description breaks down, the resulting value of $v_4/(v_2)^2$ is higher. This is confirmed by transport calculations within the AMPT model [15]. This naturally raises the question of how v_4 reaches the hydrodynamic limit [16]. We investigate this issue systematically by solving a relativistic Boltzmann equation numerically, where the mean free path λ of the particles can be tuned by varying the elastic scattering cross section σ .

¹Note, however, that STAR results for charged particles [13] clearly display an intrinsic v_4 component, although smaller than in our calculation.

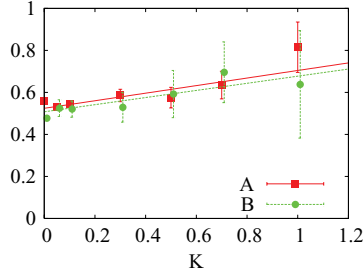


FIG. 3. (Color online) Variation of the dimensionless fit parameters A and B from Eq. (5) with the Knudsen number K . Error bars are statistical. Lines are linear fits. Points at $K = 0$ were obtained from an independent hydrodynamical calculation and are excluded from the fit.

The degree of thermalization is characterized by the Knudsen number

$$K = \frac{\lambda}{R}, \quad (7)$$

where R is a measure of the system size. We consider massless particles moving in the transverse plane (no longitudinal motion) [17]. In the limit $K \rightarrow 0$, this Boltzmann equation is expected to be equivalent to ideal hydrodynamics, with the equation of state of a two-dimensional ideal gas. For the sake of consistency with our hydrodynamical calculation, the initial phase-space distribution of particles is locally thermal: $dN/d^2x d^2p_T \propto \exp[-p_T/T(x, y)]$, where the temperature profile $T(x, y)$ is the same as in the hydrodynamical calculation. The Knudsen number is normalized as in Ref. [17]:

$$K = \frac{4\pi\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}}{N\sigma}, \quad (8)$$

where N is the total number of particles in the Monte Carlo simulation, and σ the scattering cross section, which has the dimension of a length in two dimensions. Figure 2 displays our results for two values of K . The results for $K = 0.05$ are almost identical to the results from ideal hydrodynamics, as expected. For $K = 0.5$, $v_4/(v_2)^2$ is higher, as anticipated in Ref. [14]. Although the fit formula (5) is inspired by hydrodynamics, the quality of the fit is equally good for the Boltzmann calculation. In particular, the ratio $v_4/(v_2)^2$ quickly saturates with increasing p_T , which means that the scaling $v_4 \propto (v_2)^2$ still holds if the system does not reach local thermal equilibrium, as already observed in previous transport calculations [18].

The sensitivity of v_4 to the Knudsen number K is shown more clearly in Fig. 3, which displays the variation of the fit parameters A and B with K . A linear extrapolation of our Boltzmann results to the limit $K = 0$ gives $A = 0.524 \pm 0.008$ and $B = 0.508 \pm 0.012$, in good agreement with our results from ideal hydrodynamics, $A = 0.557$ and $B = 0.479$.²

²There is a residual discrepancy of a few percent between Boltzmann and ideal hydrodynamics, which we do not understand.

These transport results may be sensitive to the choice of initial conditions. We have assumed a locally thermal momentum distribution. Now the prediction $v_4/(v_2)^2 = 0.5$ from hydrodynamics originates precisely from the assumption that momentum distributions are thermal in the rest frame of the fluid; see Eq. (3). Replacing the exponential in this equation with the more general function $f(p \cdot u)$ leads to $v_4/(v_2)^2 = f f'' / (2 f'^2)$. With a Levy distribution, $f(x) = [1 + (x/n/T)]^{-n}$, the value of $v_4/(v_2)^2$ is enhanced by a factor $(1 + n)/n$. Values of n inferred from p_T spectra of particles produced in p - p collisions are close to 10 [19], which yields a slight increase from the prediction of hydrodynamics.

Realistic values of the Knudsen number K , inferred from the centrality dependence of v_2 [20], are in the range 0.3–0.5 for semicentral collisions. For these values, Fig. 3 shows that $v_4/(v_2)^2$ is at most 0.6, still significantly below the experimental value, 0.9. We conclude that partial thermalization alone cannot explain experimental data.

IV. CENTRALITY DEPENDENCE OF $v_4/(v_2)^2$

RHIC experiments have analyzed in detail the centrality dependence of $v_4/(v_2)^2$. Preliminary results from STAR [21] and PHENIX [22] are presented in Fig. 4. The values of $v_4/(v_2)^2$ are higher than 0.8 for all centralities and increase up to 1.6 for central collisions. Both experiments show a similar centrality dependence of $v_4/(v_2)^2$. STAR obtains values slightly higher than PHENIX. This difference may be attributable to nonflow effects, which are smaller for PHENIX than for STAR because the reaction-plane detector is in a different rapidity window than the central arm detector [7].

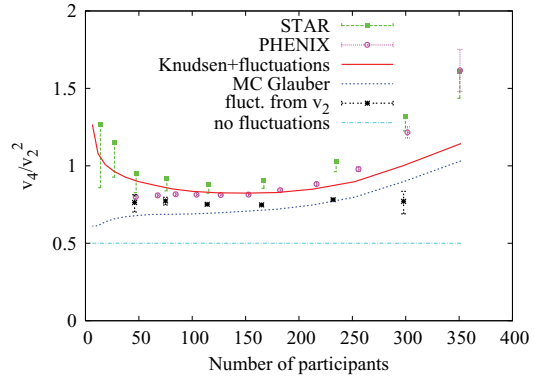


FIG. 4. (Color online) Results from STAR [21] and PHENIX [22] for charged hadrons produced in Au-Au collisions at 200 GeV per nucleon pair versus the number of participant nucleons. We averaged the ratios $v_4/(v_2)^2$ over the intervals $1.0 < p_T < 2.7$ GeV/c for STAR and $1.0 < p_T < 2.4$ GeV/c for PHENIX. Dash-dotted line: prediction from ideal hydrodynamics without flow fluctuations. Asterisks: with fluctuations inferred from the difference between $v_2\{2\}$ and $v_2\{LYZ\}$, Eq. (14). Dotted line: eccentricity fluctuations from a Monte Carlo (MC) Glauber, Eq. (15). Solid line: the same, with partial thermalization taken into account, Eq. (21).

Nonflow effects contribute both to v_2 and to v_4 . We now estimate the order of magnitude of the error in v_4 . For simplicity we consider the case where v_4 is analyzed from three-particle correlations. The corresponding estimate of v_4 , denoted $v_4\{3\}$ [23], is defined by

$$v_4\{3\} \equiv \frac{\langle \cos(4\phi_1 - 2\phi_2 - 2\phi_3) \rangle}{(v_2)^2}, \quad (9)$$

where ϕ_j are azimuthal angles of outgoing particles and angular brackets denote an average over triplets of particles belonging to the same event. In Eq. (9), v_2 must be obtained from another analysis. Nonflow effects arise when particles 1 and 2 come from the same source [4]. Assuming that the source flows with the same v_2 as the daughter particles, we obtain

$$\langle \cos(4\phi_1 - 2\phi_2 - 2\phi_3) \rangle = v_4(v_2)^2 + \delta_{\text{nf}}(v_2)^2, \quad (10)$$

where δ_{nf} is the nonflow correlation. The latter can be estimated [24] using the azimuthal correlation δ_{pp} measured in proton-proton collisions [25] and scaling it down by the number of participants: $\delta_{\text{nf}} = 2\delta_{pp}/N_{\text{part}}$. Dividing by $(v_2)^4$, we obtain the corresponding error in $v_4/(v_2)^2$:

$$\delta \left(\frac{v_4}{(v_2)^2} \right)_{\text{nf}} = \frac{2\delta_{pp}}{N_{\text{part}}(v_2)^2}. \quad (11)$$

In practice, the analysis is done using the event-plane method rather than three-particle correlations, but this changes the magnitude of nonflow effects only slightly [24]. The error (11) varies with centrality like $1/\chi^2$, where $\chi \sim v_2\sqrt{N}$ is the resolution parameter entering the flow analysis. The numerical value $\delta_{pp} = 0.0145$ was used in Ref. [24] to subtract nonflow effects from v_2 . It was obtained by integrating the azimuthal correlation in proton-proton collisions over p_t . The error bar in the STAR results in Fig. 4 was obtained using Eq. (11) with $\delta_{pp} = 0.0145$. The agreement with PHENIX is much improved. However, this may be a coincidence: in the case of v_4 , which is measured at relatively large p_t , nonflow effects are likely to be larger; on the contrary, nonflow contributions to v_2 tend to increase v_2 and decrease the ratio $v_4/(v_2)^2$, which goes in the opposite direction. Finally, we must keep in mind that, even with a rapidity gap as in the PHENIX analysis, there may be a residual nonflow error of a similar magnitude.

V. FLOW FLUCTUATIONS

The scaling $v_4 = 0.5(v_2)^2$ predicted by ideal hydrodynamics only holds for identified particles at a given transverse momentum p_t and rapidity y , for a given initial geometry. To increase the statistics, however, experimental results for v_2 and v_4 are averaged over some of these quantities *before* computing the ratio $v_4/(v_2)^2$. The averaging process increases the ratio. For instance, the results shown in Fig. 2 are averaged over a large centrality interval, 20%–60%. Even within a narrow centrality class, the initial geometry varies significantly owing to fluctuations in the initial state [26,27]. We now discuss the influence of these fluctuations on v_2 and v_4 . We assume for simplicity that v_2 and v_4 are analyzed using two-particle correlations and three-particle correlations, respectively. The

case where the analysis is done using the event-plane method is more complex and is discussed in Sec. VI. The estimate of v_2 from two-particle correlations is denoted $v_2\{2\}$ and defined by $v_2\{2\}^2 \equiv \langle \cos(2\phi_1 - 2\phi_2) \rangle$. If v_2 fluctuates within the sample of events, $\langle \cos(2\phi_1 - 2\phi_2) \rangle = \langle (v_2)^2 \rangle$. Similarly, if v_4 and v_2 fluctuate, $\langle \cos(4\phi_1 - 2\phi_2 - 2\phi_3) \rangle = \langle v_4(v_2)^2 \rangle$. We thus obtain

$$\frac{v_4\{3\}}{v_2\{2\}^2} = \frac{\langle v_4(v_2)^2 \rangle}{\langle (v_2)^2 \rangle^2} = \frac{1}{2} \frac{\langle (v_2)^4 \rangle}{\langle (v_2)^2 \rangle^2}, \quad (12)$$

where, in the last equality, we have assumed that the prediction of hydrodynamics $v_4 = (v_2)^2/2$ holds for a given value of v_2 . If v_2 fluctuates, $\langle (v_2)^4 \rangle > \langle (v_2)^2 \rangle^2$, which shows that elliptic flow fluctuations increase the observed $v_4/(v_2)^2$. We now estimate quantitatively the magnitude of these fluctuations.

A. Flow fluctuations from v_2 analyses

The magnitude of v_2 fluctuations can be inferred from the difference between estimates of v_2 , which is dominated by flow fluctuations except for very peripheral collisions [24]. The estimate from two-particle correlations, $v_2\{2\}$, gives directly $\langle (v_2)^2 \rangle$, whereas the estimate of v_2 from four-particle cumulants, denoted $v_2\{4\}$, involves $\langle (v_2)^4 \rangle$ [28]:

$$v_2\{4\}^4 \equiv 2\langle (v_2)^2 \rangle^2 - \langle (v_2)^4 \rangle. \quad (13)$$

Inverting this relation and inserting it into Eq. (12), one obtains an estimate of the effect of v_2 fluctuations on v_4 :

$$\frac{v_4\{3\}}{v_2\{2\}^2} = \frac{1}{2} \left[2 - \left(\frac{v_2\{4\}}{v_2\{2\}} \right)^4 \right]. \quad (14)$$

We use $v\{2\}$ from [29]; instead of $v_2\{4\}$, we use the more recent measurement $v_2\{\text{LYZ}\}$ with Lee-Yang zeros [30,31], which is expected to have a similar sensitivity to flow fluctuations. Data on $v_2\{\text{LYZ}\}$ are only available for semicentral collisions. The resulting prediction for $v_4/(v_2)^2$ is shown in Fig. 4. The agreement with data is much improved when fluctuations are taken into account. We have checked numerically that our results do not change significantly if nonflow effects are subtracted from $v_2\{2\}$ using the parametrization introduced in Ref. [24].

B. Flow fluctuations from eccentricity fluctuations

Because there are no data on $v_2\{\text{LYZ}\}$ for the most central and peripheral bins, we need a model of v_2 fluctuations to cover the whole centrality range. We use the standard model of eccentricity fluctuations [10,28]. The idea is that the overlap area between the colliding nuclei (see Fig. 1) is not smooth: positions of nucleons within the nucleus fluctuate from one event to another, even for a fixed impact parameter. Therefore, the participant eccentricity, ϵ_{pp} , which is the eccentricity of the ellipse defined by the positions of participant nucleons, also fluctuates. Assuming that v_2 in a given event scales like ϵ_{pp} , Eq. (12) gives

$$\frac{v_4\{3\}}{v_2\{2\}^2} = \frac{1}{2} \frac{\langle \epsilon_{pp}^4 \rangle}{\langle \epsilon_{pp}^2 \rangle^2}. \quad (15)$$

We estimate this quantity using the Monte Carlo Glauber model [32] provided by the PHOBOS collaboration [33]. In each event, the participant eccentricity is defined by

$$\epsilon_{pp} = \frac{\sqrt{(\sigma_y^2 - \sigma_x^2)^2 + 4\sigma_{xy}^2}}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}, \quad (16)$$

where $\sigma_x^2 = \{x^2\} - \{x\}^2$ and $\sigma_{xy} = \{xy\} - \{x\}\{y\}$, and $\{\dots\}$ denotes event-by-event averages over participant nucleons. Each participant is given a weight proportional to the number of particles it creates:

$$w = (1 - x) + x N_{\text{coll/part}}, \quad (17)$$

where $N_{\text{coll/part}}$ is the number of binary collisions of the nucleon. The sum of weights scales like the multiplicity:

$$\frac{dN_{\text{ch}}}{d\eta} = n_{pp} \left[(1 - x) \frac{N_{\text{part}}}{2} + x N_{\text{coll}} \right]. \quad (18)$$

where N_{part} and N_{coll} are the number of participants and the number of binary collisions in the considered event, respectively. We choose the value $x = 0.13$, which best describes the charged hadron multiplicity observed experimentally [33]. We define the centrality according to the multiplicity, Eq. (18). We evaluate eccentricity fluctuations in centrality classes containing 5% of the total number of events.

Our results are presented in Fig. 4. For peripheral and semicentral collisions, the estimates from eccentricity fluctuations are in good agreement with the earlier estimate from the difference between v_2 analyses, in line with the observation that this difference is mostly caused by eccentricity fluctuations [24]. For the most central bin, however, eccentricity fluctuations increase $v_4/(v_2)^2$ by only a factor of 2, whereas a factor of 3 would be needed to match the STAR and PHENIX data. This factor of 2 can be simply understood. For central collisions, eccentricity fluctuations are well described by a two-dimensional Gaussian distribution [34]:

$$\frac{dN}{d\epsilon_{pp}} = \frac{\epsilon_{pp}}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\epsilon_{pp}^2}{2\sigma^2}\right). \quad (19)$$

This implies that $\langle \epsilon_{pp}^4 \rangle / \langle \epsilon_{pp}^2 \rangle^2 = 2$.

We now combine the effects of flow fluctuations and partial thermalization, discussed in Sec. III. We take partial thermalization into account using the linear fit to coefficient A from Fig. 3:

$$\frac{v_4}{(v_2)^2} = \frac{1}{2} + 0.18K. \quad (20)$$

This modifies Eq. (15) into the following equation:

$$\frac{v_4\{3\}}{v_2\{2\}^2} = \left(\frac{1}{2} + 0.18K\right) \frac{\langle \epsilon_{pp}^4 \rangle}{\langle \epsilon_{pp}^2 \rangle^2}. \quad (21)$$

The value of K can be evaluated using the centrality dependence of elliptic flow. We borrow our estimates from Ref. [20]. That study has recently been corrected and refined [35], but the resulting estimates of K differ little from the original ones. Results are shown in Fig. 4. Partial thermalization is a small effect. The agreement with data is significantly improved for semicentral collisions but not for central collisions. For

peripheral collisions, our calculation overshoots the PHENIX data. Note that Eq. (20) was derived using the results of a Boltzmann transport calculation, which applies only to a dilute gas. With a realistic, soft equation of state, the coefficient preceding K could be different.

C. A toy model of Gaussian flow fluctuations

To illustrate the sensitivity of v_4 to the statistics of v_2 fluctuations, we finally consider a toy model where the distribution of v_2 at fixed impact parameter b is Gaussian:

$$\frac{dN}{dv_2} = \frac{1}{\sigma_v \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{[v_2 - \kappa \epsilon_{\text{RP}}(b)]^2}{2\sigma_v^2}\right), \quad (22)$$

where ϵ_{RP} is the reaction-plane eccentricity obtained using an optical Glauber model (smooth initial density profile), and κ a proportionality constant. We assume that σ_v scales like $N_{\text{part}}^{-1/2}$ [36], as generally expected for initial state fluctuations, and we adjust the proportionality constant so as to match the difference between $v_2\{2\}$ and $v_2\{4\}$ for midcentral collisions. The result is displayed in Fig. 5. We have checked that a similar result is obtained if we use the eccentricity from the Color-Glass condensate [37] instead of the Glauber eccentricity. For semicentral and peripheral collisions, this model is reasonably close to the standard model of eccentricity fluctuations. For central collisions, however, the results are very different, because one-dimensional Gaussian fluctuations satisfy $\langle (v_2)^4 \rangle / \langle (v_2)^2 \rangle^2 = 3$ for central collisions, instead of 2 for eccentricity fluctuations, which are two-dimensional. The toy model is in very good agreement with the data once partial thermalization is taken into account using Eq. (21). However, it lacks theoretical foundations: we do not know of any microscopic picture that would produce such Gaussian fluctuations.

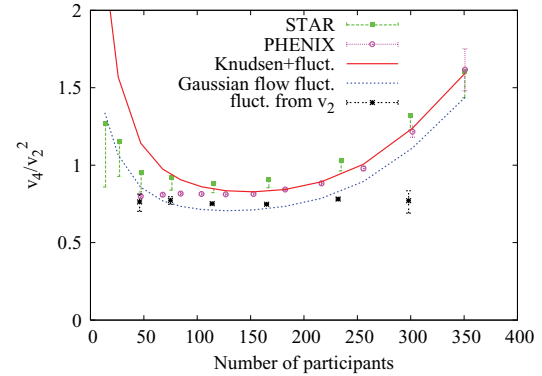


FIG. 5. (Color online) Results using a toy model of Gaussian v_2 fluctuations. STAR and PHENIX data as in Fig. 4. Dashed line: ideal hydrodynamics + Gaussian flow fluctuations. Solid line: Gaussian flow fluctuations and partial thermalization.

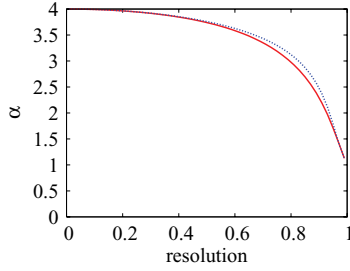


FIG. 6. (Color online) Effect of fluctuations on $v_4\{\text{EP}\}/v_2\{\text{EP}\}^2$. The parameter α , defined in Eq. (24), is plotted versus the resolution of the event plane for elliptic flow. The solid curve is the usual case, where the event plane consists of two subevents; the dotted curve is the case where the event plane consists of only one subevent [11].

VI. FLUCTUATIONS AND FLOW METHODS

In practice, v_2 and v_4 are analyzed using the event-plane method [38,39]. The corresponding estimates are denoted $v_2\{\text{EP}\}$ and $v_4\{\text{EP}\}$. In this section, we argue that flow fluctuations have almost the same effect on $v_4\{\text{EP}\}$ as on $v_4\{3\}$. We limit our study to small fluctuations for simplicity, in the same spirit as in Ref. [24]. We write $v_2 = \langle v_2 \rangle + \delta v$, with $\langle \delta v \rangle = 0$ and $\langle \delta v^2 \rangle = \sigma_v^2$, where σ_v characterizes the magnitude of flow fluctuations. Expanding Eq. (12) to leading order in σ_v , we obtain

$$\frac{v_4\{3\}}{v_2\{2\}^2} = \frac{1}{2} \left(1 + 4 \frac{\sigma_v^2}{\langle v_2 \rangle^2} \right). \quad (23)$$

Similarly, one can write

$$\frac{v_4\{\text{EP}\}}{v_2\{\text{EP}\}^2} = \frac{1}{2} \left(1 + \alpha \frac{\sigma_v^2}{\langle v_2 \rangle^2} \right), \quad (24)$$

where α depends on the reaction-plane resolution. A similar parametrization has been introduced for the fluctuations of $v_2\{\text{EP}\}$ [11]. The expression of α is derived in the Appendix using the same methods as in Ref. [24]. Figure 6 displays the variation of α with the event-plane resolution for elliptic flow. One sees that $\alpha < 4$, which means that the effect of fluctuations is always smaller for $v_4\{\text{EP}\}$ than for $v_4\{3\}$; this is confirmed by the experimental observation $v_4\{3\} > v_4\{\text{EP}\}$ [4]. The resolution is 1 when the reaction plane is reconstructed exactly. In this limit, $v_2\{\text{EP}\} = \langle v_2 \rangle$ and $v_4\{\text{EP}\} = \frac{1}{2} \langle v_2 \rangle^2$, which implies $\alpha = 1$. In practice, however, the maximum resolution for midcentral collisions is 0.84 for STAR [29] and 0.74 for PHENIX [7]. In the case of PHENIX, α is larger than 3.2 for all centralities, which means that the effect of fluctuations is decreased by at most 20% compared to our estimates in the previous section.

VII. DISCUSSION

We have shown that experimental data on v_4 are rather well explained by combining the prediction $v_4 = \frac{1}{2} \langle v_2 \rangle^2$ from

ideal hydrodynamics with elliptic flow fluctuations. If this scenario is correct, then $v_4/\langle v_2 \rangle^2$ should be independent of particle species and rapidity for fixed p_t and centrality. This is confirmed by preliminary results from PHENIX, which give the same value for pions, kaons, and protons [7]. Ideal hydrodynamics, which fails to describe $v_2(p_t)$ for $p_t > 1.5$ GeV/c, seems to describe v_4/v_2^2 well, at least up to $p_t \sim 3$ GeV/c.

Note that our scenario does not support the picture of hadron formation through quark coalescence at large p_t [40]. We find values of v_4/v_2^2 below 1 as a result of the hydrodynamic expansion, which is believed to take place in the quark phase. But coalescence requires that $v_4/\langle v_2 \rangle^2$ for the underlying quark distribution is much higher, around 2 [41].

The centrality dependence of v_4 offers a sensitive probe of the mechanism underlying flow fluctuations. Eccentricity fluctuations have been shown to explain v_2 data in Au-Au and Cu-Cu collisions quantitatively. We find that they also explain most of the results on v_4 for peripheral and semicentral collisions. However, they are unable to explain the steep rise in $v_4/\langle v_2 \rangle^2$ for the most central bins, which is clearly seen by both STAR and PHENIX. Data suggest that $\langle v_2 \rangle^4 / \langle v_2 \rangle^2 \simeq 3$ for the most central bin, whereas eccentricity fluctuations give 2. Impact parameter fluctuations increase v_4/v_2^2 by only a few percent. We cannot exclude *a priori* that the large experimental value is caused by large errors in the extraction of v_4 : if we multiply the nonflow error estimated in Sec. IV by a factor of 4, the data agree with our calculation for central collisions; however, the agreement is spoiled for peripheral collisions. It therefore seems unlikely that the discrepancy is caused solely by nonflow effects. These results suggest that initial state fluctuations do not reduce to eccentricity fluctuations, as recently shown by a study of transverse momentum fluctuations [42]. Interestingly, the direct measurement of v_2 fluctuations attempted by PHOBOS [43], which agrees with the prediction from eccentricity fluctuations, does not extend to the most central bin.

An independent confirmation that $\langle v_2 \rangle^4 / \langle v_2 \rangle^2 \simeq 3$ for central collisions could be obtained from the four-particle cumulant analysis. Interestingly, there is no published value of $v_2\{4\}$ for the most central bin: the reason is probably that $v_2\{4\}$ cannot be defined using Eq. (13), because the right-hand side is negative. This indicates that $\langle v_2 \rangle^4 / \langle v_2 \rangle^2 > 2$. It would be interesting to repeat the cumulant analysis for central collisions and to scale the right-hand side of Eq. (14) by $v_2\{2\}^4$. The ratio should be around -1 if $\langle v_2 \rangle^4 / \langle v_2 \rangle^2 \simeq 3$. This would provide invaluable information on the mechanism driving elliptic flow fluctuations.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank Y. Bai, S. Huang, and R. Lacey for sending us preliminary data from STAR and PHENIX, and C. Loizides for permission to use a figure from Ref. [11]. We thank F. Gelis, T. Lappi, M. Luzum, J. L. Nagle, H. Pereira da Costa, R. Snellings, and A. Tang for useful discussions. We are grateful to J.-P. Blaizot and A. M. Poskanzer for useful comments on the manuscript. This work was funded by the

Agence Nationale de la Recherche under Grant No. ANR-08-BLAN-0093-01.

APPENDIX: EFFECT OF FLUCTUATIONS ON THE EVENT-PLANE v_4

In this Appendix, we derive the expression of α in Eq. (24). This parameter measures the effect of fluctuations on $v_4/(v_2)^2$ when flow is analyzed using the event-plane method. The event-plane v_4 is defined by

$$v_4\{\text{EP}\} \equiv \frac{\langle \cos 4(\phi - \Psi_R) \rangle}{R_4}, \quad (\text{A1})$$

where ϕ is the azimuthal angle of the particle, Ψ_R is the angle of the event plane, and R_4 is the event-plane resolution in the fourth harmonic. Using Eq. (A1), the relative variation of $v_4/(v_2)^2$ owing to eccentricity fluctuations can be decomposed as the sum of three contributions:

$$\frac{\delta[v_4/(v_2)^2]}{[v_4/(v_2)^2]} = \frac{\delta\langle \cos 4(\phi - \Psi_R) \rangle}{\langle \cos 4(\phi - \Psi_R) \rangle} - \frac{\delta R_4}{R_4} - 2 \frac{\delta v_2}{v_2}. \quad (\text{A2})$$

The first term on the right-hand side is the contribution of fluctuations to the correlation with the event plane, the second term is the contribution of fluctuations to the resolution, and the last term is the contribution of fluctuations to $v_2\{\text{EP}\}$. The definition of α , Eq. (24), can be rewritten as

$$\frac{\delta[v_4/(v_2)^2]}{[v_4/(v_2)^2]} = \frac{\sigma_v^2}{(v_2)^2} \alpha. \quad (\text{A3})$$

The three terms in Eq. (A2) give additive contributions to α , which we evaluate in turn.

We start with the correlation with the event plane. The event-plane Ψ_R is determined from elliptic flow [38]. Even flow harmonics v_{2n} are analyzed by correlating particles with this event plane: $\langle \cos 2n(\phi - \Psi_R) \rangle = v_{2n} \mathcal{R}_{2n}(\chi)$, where the resolution $\mathcal{R}_{2n}$ is given by [39]

$$\mathcal{R}_{2n}(\chi) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\chi^2/2} \chi \left[I_{(n-1)/2} \left(\frac{\chi^2}{2} \right) + I_{(n+1)/2} \left(\frac{\chi^2}{2} \right) \right], \quad (\text{A4})$$

where χ is the resolution parameter, which is estimated using the correlation between two subevents. For $n = 2$, this equation reduces to

$$\mathcal{R}_4(\chi) = \frac{e^{-\chi^2} - 1 + \chi^2}{\chi^2}. \quad (\text{A5})$$

These relations are derived neglecting flow fluctuations. If v_2 fluctuates, the resolution parameter χ scales like v_2 , $\chi = r v_2$. Assuming, in addition, that v_4 scales like $(v_2)^2$, the relative change caused by fluctuations is, to leading order in σ_v ,

$$\begin{aligned} \frac{\delta\langle \cos 4(\phi - \Psi_R) \rangle}{\langle \cos 4(\phi - \Psi_R) \rangle} &= \frac{\sigma_v^2}{2} \frac{\frac{d^2}{(dv_2)^2} [(v_2)^2 \mathcal{R}_4(r v_2)]}{(v_2)^2 \mathcal{R}_4(r v_2)} \\ &= \frac{\sigma_v^2}{2(v_2)^2} \frac{\frac{d^2}{d\chi^2} [\chi^2 \mathcal{R}_4(\chi)]}{\mathcal{R}_4(\chi)}, \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

where the right-hand side is evaluated for $\chi \equiv r \langle v_2 \rangle$, the average resolution parameter. Using Eq. (A5), one obtains

$$\frac{1}{\mathcal{R}_4(\chi)} \frac{d^2}{d\chi^2} [\chi^2 \mathcal{R}_4(\chi)] = \frac{2\chi^2(e^{\chi^2} + 2\chi^2 - 1)}{1 + e^{\chi^2}(\chi^2 - 1)}. \quad (\text{A7})$$

Inserting into Eqs. (A6) and (A2), and identifying with Eq. (A3), we obtain the contribution to α from the correlation with the event plane:

$$\alpha_{\text{ep}} = \frac{\chi^2(e^{\chi^2} + 2\chi^2 - 1)}{1 + e^{\chi^2}(\chi^2 - 1)}. \quad (\text{A8})$$

We now evaluate the second term in Eq. (A2), namely, the shift in the resolution from fluctuations. The resolution is defined as $R_4 \equiv \mathcal{R}_4(\chi^{\text{exp}})$, where χ^{exp} is determined from the correlation between subevents. Flow fluctuations shift the estimated resolution. Writing $\chi^{\text{exp}} = \chi + \delta\chi$, one obtains, to leading order in $\delta\chi$,

$$\frac{\delta R_4}{R_4} = \frac{\chi \mathcal{R}'_4(\chi)}{\mathcal{R}_4(\chi)} \frac{\delta\chi}{\chi}. \quad (\text{A9})$$

Equation (A5) gives

$$\frac{\chi \mathcal{R}'_4(\chi)}{\mathcal{R}_4(\chi)} = \frac{2(e^{\chi^2} - \chi^2 - 1)}{1 + e^{\chi^2}(\chi^2 - 1)}. \quad (\text{A10})$$

The shift in the resolution to fluctuations is given by Eq. (A7) of Ref. [24],

$$\frac{\delta\chi}{\chi} = \frac{\sigma_v^2}{2(v_2)^2} \left(1 - 2\chi_s^2 + \frac{4i_1^2}{i_0^2 - i_1^2} \right), \quad (\text{A11})$$

where $i_{0,1}$ is a shorthand notation for $I_{0,1}(\chi_s^2/2)$, and χ_s denotes the resolution parameter of a subevent: $\chi_s = \chi/\sqrt{2}$ in the usual case when the event plane consists of two subevents [38], and $\chi_s = \chi$ if the event plane has only one subevent [11]. Inserting Eqs. (A10) and (A11) into Eqs. (A9) and (A2), and identifying with Eq. (A3), we obtain the contribution to α from the resolution:

$$\alpha_{\text{res}} = \frac{e^{\chi^2} - \chi^2 - 1}{1 + e^{\chi^2}(\chi^2 - 1)} \left(1 - 2\chi_s^2 + \frac{4i_1^2}{i_0^2 - i_1^2} \right). \quad (\text{A12})$$

Finally, the third term in Eq. (A2) is

$$2 \frac{\delta v_2}{v_2} = \frac{\sigma_v^2}{(v_2)^2} (\alpha_{v_2} - 1), \quad (\text{A13})$$

where α_{v_2} is given by Eq. (23) of Ref. [24]:

$$\alpha_{v_2} = 2 - \frac{I_0 - I_1}{I_0 + I_1} \left(2\chi^2 - 2\chi_s^2 + \frac{4i_1^2}{i_0^2 - i_1^2} \right), \quad (\text{A14})$$

where $I_{0,1}$ is a shorthand notation for $I_{0,1}(\chi^2/2)$.

The final result is obtained by summing the three contributions from Eqs. (A8), (A12), and (A14):

$$\alpha = \alpha_{\text{ep}} - \alpha_{\text{res}} - (\alpha_{v_2} - 1). \quad (\text{A15})$$

The limit of low resolution $\chi \rightarrow 0$ (respectively, high resolution $\chi \rightarrow \infty$) is $\alpha_{\text{ep}} = 6$ (respectively, 1), $\alpha_{\text{res}} = 1$ (respectively, 0), $\alpha_{v_2} = 2$ (respectively, 1), $\alpha = 4$ (respectively, 1).

- [1] S. A. Voloshin, A. M. Poskanzer, and R. Snellings, arXiv:0809.2949 [nucl-ex].
- [2] P. F. Kolb, J. Sollfrank, and U. W. Heinz, Phys. Lett. **B459**, 667 (1999).
- [3] P. F. Kolb, Phys. Rev. C **68**, 031902(R) (2003).
- [4] J. Adams *et al.* (STAR Collaboration), Phys. Rev. Lett. **92**, 062301 (2004).
- [5] H. Masui (PHENIX Collaboration), Nucl. Phys. **A774**, 511 (2006).
- [6] B. I. Abelev *et al.* (STAR Collaboration), Phys. Rev. C **75**, 054906 (2007).
- [7] S. Huang (PHENIX Collaboration), J. Phys. G **35**, 104105 (2008).
- [8] N. Borghini and J. Y. Ollitrault, Phys. Lett. **B642**, 227 (2006).
- [9] S. A. Voloshin, Phys. Rev. C **55**, R1630 (1997).
- [10] S. Manly *et al.* (PHOBOS Collaboration), Nucl. Phys. **A774**, 523 (2006); B. Alver *et al.* (PHOBOS Collaboration), Phys. Rev. Lett. **98**, 242302 (2007).
- [11] B. Alver *et al.*, Phys. Rev. C **77**, 014906 (2008).
- [12] B. I. Abelev *et al.* (STAR Collaboration), Phys. Rev. C **79**, 034909 (2009).
- [13] Y. Bai (STAR Collaboration), J. Phys. G **34**, S903 (2007).
- [14] R. S. Bhalerao, J. P. Blaizot, N. Borghini, and J. Y. Ollitrault, Phys. Lett. **B627**, 49 (2005).
- [15] L.-W. Chen, C. M. Ko, and Z.-W. Lin, Phys. Rev. C **69**, 031901(R) (2004).
- [16] R. A. Lacey, A. Taranenko, and R. Wei, arXiv:0905.4368 [nucl-ex].
- [17] C. Gombeaud and J. Y. Ollitrault, Phys. Rev. C **77**, 054904 (2008).
- [18] T. Z. Yan *et al.*, Phys. Lett. **B638**, 50 (2006).
- [19] J. Adams *et al.* (STAR Collaboration), Phys. Lett. **B637**, 161 (2006).
- [20] H. J. Drescher, A. Dumitru, C. Gombeaud, and J. Y. Ollitrault, Phys. Rev. C **76**, 024905 (2007).
- [21] Y. Bai, Ph.D. thesis, University of Utrecht.
- [22] R. Lacey (private communication).
- [23] N. Borghini, P. M. Dinh, and J. Y. Ollitrault, Phys. Rev. C **64**, 054901 (2001).
- [24] J. Y. Ollitrault, A. M. Poskanzer, and S. A. Voloshin, Phys. Rev. C **80**, 014904 (2009).
- [25] J. Adams *et al.* (STAR Collaboration), Phys. Rev. Lett. **93**, 252301 (2004).
- [26] C. E. Aguiar, Y. Hama, T. Kodama, and T. Osada, Nucl. Phys. **A698**, 639 (2002).
- [27] W. Broniowski, P. Bozek, and M. Rybczynski, Phys. Rev. C **76**, 054905 (2007).
- [28] M. Miller and R. Snellings, arXiv:nucl-ex/0312008.
- [29] J. Adams *et al.* (STAR Collaboration), Phys. Rev. C **72**, 014904 (2005).
- [30] B. I. Abelev *et al.* (STAR Collaboration), Phys. Rev. C **77**, 054901 (2008).
- [31] R. S. Bhalerao, N. Borghini, and J. Y. Ollitrault, Nucl. Phys. **A727**, 373 (2003).
- [32] M. L. Miller, K. Reygers, S. J. Sanders, and P. Steinberg, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. **57**, 205 (2007).
- [33] B. Alver, M. Baker, C. Loizides, and P. Steinberg, arXiv:0805.4411 [nucl-ex].
- [34] S. A. Voloshin, A. M. Poskanzer, A. Tang, and G. Wang, Phys. Lett. **B659**, 537 (2008).
- [35] J. L. Nagle, P. Steinberg, and W. A. Zajc, arXiv:0908.3684 [nucl-th].
- [36] R. S. Bhalerao and J. Y. Ollitrault, Phys. Lett. **B641**, 260 (2006).
- [37] T. Lappi and R. Venugopalan, Phys. Rev. C **74**, 054905 (2006).
- [38] A. M. Poskanzer and S. A. Voloshin, Phys. Rev. C **58**, 1671 (1998).
- [39] J. Y. Ollitrault, arXiv:nucl-ex/9711003.
- [40] D. Molnar and S. A. Voloshin, Phys. Rev. Lett. **91**, 092301 (2003).
- [41] P. F. Kolb, L. W. Chen, V. Greco, and C. M. Ko, Phys. Rev. C **69**, 051901(R) (2004).
- [42] W. Broniowski, M. Chojnacki, and L. Obara, arXiv:0907.3216 [nucl-th].
- [43] B. Alver *et al.* (PHOBOS Collaboration), Int. J. Mod. Phys. E **16**, 3331 (2007).

Articles reliés à la partie C

Conclusion

La physique des collisions d'ions lourds est un sujet de recherche passionnant. Les trois années qu'ont duré ma thèse sous la direction de Jean-Yves Ollitrault ont été captivantes. Comme je l'ai discuté dans cette thèse, l'une des questions majeures de ce domaine concerne le problème de la thermalisation de la matière créée lors de telles collisions. Jusqu'en 2005, on considérait que le système atteignait rapidement un état d'équilibre thermique local. Bien que le processus de thermalisation, en lui même, soit incompris. Il est aujourd'hui communément admis que le système créé dans une collision d'ions lourds n'est pas exactement localement thermalisé. L'ensemble des prédictions théoriques pour le rapport viscosité sur densité d'entropie du fluide tendent à indiquer que :

$$\frac{\eta}{s} \leq \frac{5}{4\pi}.$$

Ce qui fait du "QGP" le fluide le plus parfait jamais créé.

J'ai montré à quel point il était important de prendre convenablement en compte les effets des déviations à l'équilibre thermique local. Nous avons en particulier vu qu'ils étaient un ingrédient fondamental dans la description de certaines observations réalisées au RHIC. Néanmoins, l'étude du rapport $v_4/(v_2)^2$ a montré à quel point il était important de connaître le détail des conditions initiales (effets des fluctuations de l'excentricité initiale par exemple).

Il existe aujourd'hui plusieurs modèles de conditions initiales pour les collisions d'ions lourds. Et si, dans cette thèse, on s'est principalement orienté vers des conditions initiales de type Glauber, pour la physique des ions lourds au LHC, il semble plus raisonnable, de considérer des conditions initiales de saturation. A l'heure actuelle, il n'existe aucune intégration numérique des équations du condensat de verre de couleur, et donc aucun générateur de conditions initiales CGC. Néanmoins, une version simplifiée des conditions initiales de saturation existe. C'est le modèle du Glasma.

Ce modèle prédit initialement une pression longitudinale négative. Ce qui correspond à un système initialement loin de l'équilibre, et rend l'application de l'hydrodynamique visqueuse incertaine pour décrire les premiers instants de l'évolution du système. Par ailleurs, la densité d'énergie initiale au LHC sera supérieure à celle du système créé au RHIC. Les modèles de QCD sur le réseau (qui se basent sur l'hypothèse d'un système à l'équilibre) prédisent, pour ces échelles d'énergie, que l'équation d'état du système est proche de celle d'un gaz parfait. On s'attend également à ce que les effets collectifs se développent essentiellement en phase partonique (pour $T > T_c$ et donc $c_s \simeq c_s^{gaz-parfait}$). Dans ces conditions, la description de l'évolution du système basée sur les équations de transport s'avère d'autant plus prometteuse,

même si l'augmentation de la densité initiale est également synonyme d'un système plus dense et donc plus loin de l'hypothèse de gaz dilué.

Annexes

ANNEXE A

Equation de Boltzmann

Sommaire

A.1	Dynamique de la fonction de distribution à une particule	iii
A.2	Généralisation au cas de particules relativistes	viii
A.3	Physique de l'équation de Boltzmann : Le coefficient de viscosité	x

Cette annexe contient les détails de la dérivation de l'équation de Boltzmann. Dans une première section, je détaille la dynamique de la fonction de distribution à une particule pour un système non relativiste. Dans une seconde section, je généraliserai l'équation de Boltzmann classique au cas relativiste, nous verrons en particulier que le terme de vitesse relative dans l'équation de Boltzmann relativiste peut être vu comme une conséquence de la contraction de Lorentz. Une dernière section introduit la notion de viscosité dans la physique de l'équation de Boltzmann.

A.1 Dynamique de la fonction de distribution à une particule

Nous avons vu que la fonction de distribution à une particule était définie par :

$$\int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3r d^3v = N \quad (\text{A.1})$$

où N correspond au nombre total de particules du système. Comprendre la dynamique de f revient donc à s'intéresser à la dynamique des particules dans le système. Par simplicité, je m'intéresserai en premier lieu au cas d'un gaz sans collision ($\sigma = 0$).

Dynamique d'un gaz sans collision

Dans le cas où les particules ne subissent pas de choc, une particule qui se trouve aux coordonnées $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ à l'instant t se trouvera en $(\mathbf{r} + \mathbf{v}dt, \mathbf{v} + \mathbf{F}/m\delta t)$ à l'instant $t + \delta t$. Avec m la masse de la particule et $\mathbf{F}$ une force extérieure au système. Dès lors, toutes les particules qui se

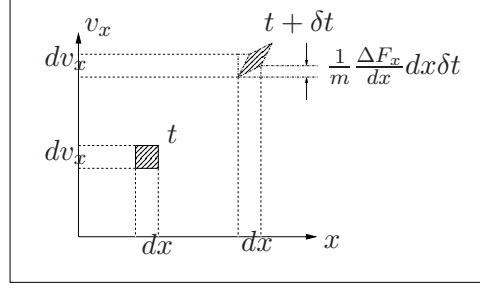


FIG. A.1 – Illustration de la transformation d'un élément d'espace des phases pendant un pas de temps δt .

trouvent à l'instant t en $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ se retrouveront à l'instant $t + \delta t$ en $f(\mathbf{r} + \mathbf{v}\delta t, \mathbf{v} + \mathbf{F}/m\delta t, t + \delta t)$. On a donc la relation :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3r d^3v = f(\mathbf{r} + \mathbf{v}\delta t, \mathbf{v} + \mathbf{F}/m\delta t, t + \delta t) d^3r' d^3v'. \quad (\text{A.2})$$

En admettant que la force extérieure ne dépende que de la position $\mathbf{r}$ des particules, il est facile de montrer que l'élément de volume est un invariant de la dynamique (qu'il se transforme en conservant son volume) comme illustré par la figure A.1.

Le cas le plus simple revient à considérer le cas 1-dimensionnel. L'élément d'espace des phases à l'instant t est un carré, à l'instant $t + \delta t$, il s'est transformé en un parallélogramme dont on peut vérifier que son aire est égale à celle du carré initial.

L'équation (A.2) peut donc se réécrire sous la forme :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f(\mathbf{r} + \mathbf{v}\delta t, \mathbf{v} + \mathbf{F}/m\delta t, t + \delta t). \quad (\text{A.3})$$

Dynamique du gaz non relativiste avec collisions

Maintenant, ajoutons les collisions (on considère désormais $\sigma > 0$). Considérons par ailleurs que les éléments d'espace des phases sont assez petits pour qu'une particule, si elle subit une collision, soit éjectée de son élément initial vers un autre. Alors la relation donnant la dynamique de la fonction de distribution à une particule est modifiée, on lui ajoute un terme qui correspond à l'effet des collisions. Dans ce cas l'équation (A.3) devient :

$$f(\mathbf{r} + \mathbf{v}\delta t, \mathbf{v} + \mathbf{F}/m\delta t, t + \delta t) = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \left(\frac{\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} \right)_{coll} \delta t. \quad (\text{A.4})$$

Si l'on prend maintenant la limite $\delta t \rightarrow 0$, on obtient l'équation du mouvement de la fonction de distribution à une particule :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_r + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_v \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll}. \quad (\text{A.5})$$

On considère un élément d'espace des phases A contenant N particules. Pendant l'évolution entre t et $t + \delta t$, cet élément d'espace des phases va perdre des particules (éjectées par collisions

vers un autre élément du ϕ -space), mais également en gagner (résultat de collisions dans d'autres régions du ϕ -space). Dans la limite $\delta t \rightarrow 0$, le nombre de particules dans A est égal à N . On peut donc écrire :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} = (\bar{R} - R)dt \quad (\text{A.6})$$

avec R et $\bar{R}$ définis de la façon suivante :

- $Rdt d^3r d^3v$ est le nombre de collisions qui ont lieu pendant l'intervalle δt et ayant une particule de l'état initial dans l'élément $d^3r d^3v$ autour du point $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$.
- $\bar{R}dt d^3r d^3v$ est le nombre de collisions qui ont lieu pendant l'intervalle δt et ayant une particule de l'état final dans l'élément $d^3r d^3v$ autour du point $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$.

Pour avancer encore dans l'étude de la dynamique moléculaire, il faut expliciter la forme des coefficients R et $\bar{R}$ ce qui n'est faisable que sous certaines conditions.

Afin de dériver l'équation de Boltzmann, je commencerai par des rappels simples sur la mécanique des collisions binaires élastiques, avant de dériver les expressions des termes de perte (R) et de gain ($\bar{R}$) de l'équation (A.6).

Rappels de mécanique des collisions binaires élastiques non relativistes

On considère maintenant un système de 2 particules ponctuelles de vitesse $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ évoluant dans le vide. On va s'intéresser à la dynamique d'une collision entre ces 2 particules. La conservation de l'impulsion et de l'énergie lors de la collision conduit à :

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2 \quad (\text{A.7})$$

$$|\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{v}_2|^2 = |\mathbf{v}'_1|^2 + |\mathbf{v}'_2|^2 \quad (\text{A.8})$$

où $\mathbf{v}'_1$ et $\mathbf{v}'_2$ sont les vitesses des particules après la collision.

Il est alors utile de changer de variables et de poser :

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \quad (\text{A.10})$$

les lois de conservation (A.7) peuvent alors être réécrites :

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}' \quad (\text{A.11a})$$

$$|\mathbf{u}| = |\mathbf{u}'|. \quad (\text{A.11b})$$

On peut schématiser la cinématique de la collision comme indiqué sur la figure A.2, où (θ, ϕ) sont les angles de diffusions des particules produites dans la collision. Considérons maintenant une collision avec les mêmes (θ, ϕ) , mais des vitesses initiales légèrement différentes $(\mathbf{V} + d\mathbf{V}, \mathbf{u} + d\mathbf{u})$. On obtient donc un état final $(\mathbf{V}' + d\mathbf{V}', \mathbf{u}' + d\mathbf{u}')$. De l'équation (A.11a) on déduit que $d\mathbf{V} = d\mathbf{V}'$, et θ étant fixé, on déduit de la figure A.2 que $|d\mathbf{u}| = |d\mathbf{u}'|$. On obtient donc la relation $d^3V d^3u = d^3V' d^3u'$ que l'on peut réécrire :

$$d^3v_1 d^3v_2 = d^3v'_1 d^3v'_2. \quad (\text{A.12})$$

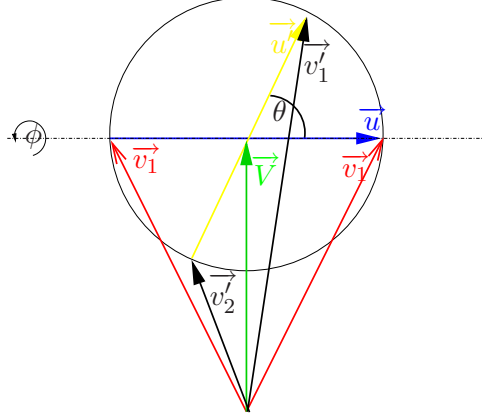


FIG. A.2 – Schéma d'une collision élastique à 2 particules vue en terme des variables $(\mathbf{V}, \mathbf{u})$.

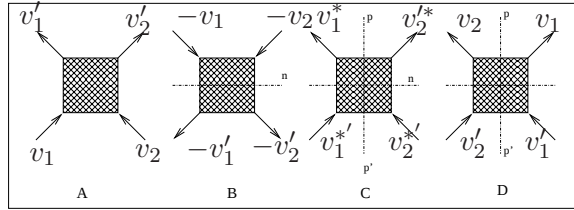


FIG. A.3 – Schéma des différentes transformations nécessaires pour inverser états initiaux et finaux dans une collision à 2 corps.

Après les lois de conservation, il est également important de s'intéresser aux symétries auxquelles obéissent les collisions binaires. Ces symétries se traduisent mathématiquement sous la forme de d'identités auxquelles la section efficace d'interaction obéit. Pour simplifier, on notera $\sigma(v_1, v_2 | v'_1, v'_2)$ la section efficace d'interaction entre 2 particules de vitesses initiales $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ et finales $\mathbf{v}'_1$ et $\mathbf{v}'_2$ respectivement.

Invariance par renversement du temps

$$\sigma(v_1, v_2 | v'_1, v'_2) = \sigma(-v'_1, -v'_2 | -v_1, -v_2) \quad (\text{A.13})$$

L'idée est que le renversement du temps revient à faire retracer par les particules leurs trajectoires en sens inverse.

Invariance par rotation dans l'espace

$$\sigma(v_1, v_2 | v'_1, v'_2) = \sigma(v_1^*, v_2^* | v'^*_1, v'^*_2) \quad (\text{A.14})$$

Ici, $\mathbf{v}'$ représente l'image de $\mathbf{v}$ par une isométrie.

La figure A.3 montre comment la collision inverse (les états finaux et initiaux sont inversés) à une collision donnée peut être obtenue par composition de l'inversement du temps et d'iso-

métries. On obtient donc une condition supplémentaire sur la section efficace d'interaction :

$$\sigma(v_1, v_2 | v'_1, v'_2) = \sigma(v'_1, v'_2 | v_1, v_2) \quad (\text{A.15})$$

Evaluation du terme de perte

Pour évaluer le terme de perte R , on considère un élément de volume d^3r autour d'un point $\mathbf{r}$. Cet élément de volume contient une particule test appartenant à $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1, t)$, ainsi que des particules de vitesses $\mathbf{v}_2$ quelconques. Du point de vue de la particule test, l'ensemble des autres particules de l'élément de volume est perçu comme un faisceau de partenaires possibles pour une collision binaire. L'intensité de ce faisceau est donnée par :

$$I = [f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_2, t) d^3v_2] |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|. \quad (\text{A.16})$$

Etant donné l'hypothèse de chaos moléculaire, le nombre de collisions $\{v_1, v_2\} \rightarrow \{v'_1, v'_2\}$ pendant l'intervalle dt est donné par :

$$I\sigma(\Omega)d\Omega dt = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_2, t) d^3v_2 |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1| \sigma(\Omega) d\Omega dt \quad (\text{A.17})$$

où $\sigma(\Omega)$, appelé section efficace différentielle dans le centre de masse, donne la probabilité que les particules produites par la collision soient émises dans l'angle solide $d\Omega^a$.

Le taux de perte R est alors obtenu en intégrant le nombre de collisions sur $\mathbf{v}_2$ (afin de passer en revue toutes les combinaisons de vitesses incidentes possibles) ainsi que l'angle solide d'émission des particules finales (afin de prendre en compte tous les états finaux possibles). Enfin, on multiplie par la densité de probabilité de présence d'une particule test. On obtient alors :

$$R = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1, t) \int d^3v_2 \int \sigma(\Omega) d\Omega |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1| f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_2, t) \quad (\text{A.18})$$

Evaluation du terme de gain

Une approche similaire nous permet de calculer le coefficient de gain $\bar{R}$. Cette fois on cherche à compter le nombre de collisions du type $\{v'_1, v'_2\} \rightarrow \{v_1, v_2\}$ avec $\mathbf{v}_1$ fixé (le terme de gain sous-entend qu'on obtient dans l'état final une particule de vitesse $\mathbf{v}_1$). En se plaçant toujours dans un élément de volume d^3r autour de $\mathbf{r}$, on se donne cette fois une particule test de vitesse $\mathbf{v}'_1$ quelconque, et un faisceau de partenaires de vitesse $\mathbf{v}'_2$. L'intensité du faisceau est donnée par :

$$I' = [f(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_2, t) d^3v'_2] |\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}'_1|. \quad (\text{A.19})$$

On en déduit le nombre de collisions correspondantes pendant dt :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_2, t) d^3v'_2 |\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}'_1| \sigma'(\Omega) d\Omega dt \quad (\text{A.20})$$

^aOn notera ici, que la section efficace σ présentée dans les sections précédentes est donnée par :

$$\sigma = \int \sigma(\Omega) d\Omega$$

Le gain est alors donné par l'expression :

$$\bar{R}d^3v_1 = \int d^3v'_2 \int \sigma'(\Omega)d\Omega |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1| [f(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_1, t)d^3v'_1] f(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_2, t) \quad (\text{A.21})$$

On voit alors qu'entre les expressions de R et $\bar{R}$ les quantités $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}'_1$ et $\mathbf{v}'_2$ jouent des rôles symétriques.

L'équation de Boltzmann non relativiste

Nous avons maintenant tous les outils nécessaires pour dériver l'équation de Boltzmann. Nous savons que $\sigma'(\Omega) = \sigma(\Omega)$ d'après l'équation (A.15), et les lois de conservation dans les collisions binaires (équations (A.11b) et (A.11a)) permettent d'écrire $\bar{R}$ sous la forme :

$$\bar{R} = \int d^3v_2 \int \sigma(\Omega)d\Omega |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1| f(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_1, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_2, t)^b \quad (\text{A.22})$$

On peut maintenant combiner les résultats obtenus pour R et $\bar{R}$ et réécrire le terme de collision sous la forme :

$$\left(\frac{\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1, t)}{\partial t} \right)_{coll} = \bar{R} - R = \int d^3v_2 \int \sigma(\Omega)d\Omega |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1| (f'_1 f'_2 - f_1 f_2) \quad (\text{A.23})$$

où l'on a noté : $f_i = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i, t)$ et $\sigma(\Omega)$ la section efficace différentielle du processus $\{v_1, v_2\} \rightarrow \{v'_1, v'_2\}$.

En remplaçant le terme de collisions de l'équation du mouvement par son expression (eq (A.23)), on obtient l'équation de Boltzmann pour des particules classiques :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla_r + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}_1} \right) f_1 = \int d^3v_2 \int \sigma(\Omega)d\Omega |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1| (f'_1 f'_2 - f_1 f_2) \quad (\text{A.24})$$

A.2 Généralisation au cas de particules relativistes

Dans la section V.5, j'ai dérivé l'équation de Boltzmann relativiste en généralisant la forme du terme de vitesse relative de l'équation classique, sans discuter la transformation de la section efficace. J'ai également présenté dans la section VI.3.1 que la modification du terme de collisions pour le cas relativiste traduisait l'effet de la contraction de Lorentz. Je vais maintenant détailler cette assertion.

Dans le cas non relativiste, le terme de collision de l'équation de Boltzmann compte le nombre d'interactions dans un élément de volume (que ce soit l'élément considéré pour évaluer R ou un autre élément pour évaluer $\bar{R}$) pendant un intervalle δt . Ce nombre est donné par :

$$\frac{\delta N_{interaction}}{\delta V \delta t} = \sigma n_1 n_2 |\vec{v}_2 * \vec{v}_1| \quad (\text{A.25})$$

expression qui fait intervenir les densités de particules, et la section efficace d'interaction.

^bOn notera que $\mathbf{v}_1$ est fixé alors que $\mathbf{v}'_1$ et $\mathbf{v}'_2$ dépendent de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, et Ω .

Transformation des densités

Le principe de relativité ($c = 1$ = constante) se traduit par une contraction des longueurs appelée contraction de Lorentz $L = L_0/\gamma$ (un effet corollaire est la dilatation du temps $t = t_0\gamma$). Si l'on définit une densité $n = N/V = N/\delta_x\delta_y\delta_z$ dans le laboratoire, sa valeur sera différente dans un autre référentiel. Dans un référentiel se déplaçant avec une vitesse $\vec{v} = v\vec{e}_z$, n deviendra :

$$n' = \frac{N}{\delta_x\delta_y\delta_z/\gamma} = n\sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (\text{A.26})$$

Seule la densité quadri-dimensionnelle d'événements $\delta N/\delta V\delta t$ est invariante dans le cas des théories relativistes.

Définition de la section efficace

Pour que la section efficace d'interaction de 2 particules soit une constante (un scalaire de Lorentz), on la définit par convention comme la section efficace d'interaction dans le référentiel où l'une des 2 particules est au repos. Naturellement, il faut tenir compte de la transformation des vitesses due à cette convention. On définit la vitesse d'approche des 2 particules (vitesse différente du terme de vitesse relative dans l'équation de Boltzmann) comme la vitesse d'une des particules dans le référentiel où l'autre est au repos. Pour déterminer cette vitesse d'approche on considère 2 particules de vitesses v et w avec v suivant la direction z . Les transformations de Lorentz [162] nous donnent, dans le référentiel où la particule 1 (vitesse v) est au repos :

$$w'_z = \frac{w_z - v}{1 - \frac{v.w_z}{c^2}} \quad (\text{A.27})$$

$$w'_i = \frac{w_i}{\gamma(1 - \frac{v.w_z}{c^2})} \quad (\text{A.28})$$

où l'indice i dénote les directions x ou y . Puisque $\vec{v} = v\vec{e}_z$ et $w_x^2 + w_y^2 = (\vec{w} \times \vec{v})^2/\vec{v}^2$, on peut réécrire la vitesse d'approche :

$$|\vec{w}'| = \frac{\sqrt{(\vec{w} - \vec{v})^2 - \frac{(\vec{w} \times \vec{v})^2}{c^2}}}{1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{c^2}} \quad (\text{A.29})$$

Expression du flux de particules incidentes sur une particule test

Le nombre de collisions ayant lieu dans un élément de volume pendant une unité de temps est une densité quadri-dimensionnelle, c'est donc un invariant relativiste. On peut donc évaluer cette quantité indépendamment du référentiel :

$$\frac{N_{interaction}}{\delta V\delta t} = \frac{N_{interaction}^{(1)}}{\delta V^{(1)}\delta t^{(1)}} = \sigma n_1^{(1)} n_2^{(1)} v_2^{(1)} \quad (\text{A.30})$$

où les indices 1 et 2 identifient les 2 particules, et on a noté $q^{(i)}$ la quantité q mesurée dans le référentiel de la particule i (sans indice indique le référentiel du laboratoire).

En utilisant l'équation (A.26) pour réexprimer $n_2^{(1)}$ et (A.29) pour $v_2^{(1)}$, on obtient :

$$\frac{N_{interaction}}{\delta V \delta t} = \sigma n_1 n_2 \sqrt{(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)^2 - \frac{(\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1)^2}{c^2}} \quad (\text{A.31})$$

On a donc généralisé l'équation (A.25) au cas de particules relativistes.

Par ailleurs, dans le cas particulier de particules de masse nulle ($|\vec{v}| = c$), il est possible de réexprimer le terme de vitesse d'approche (en posant $c = 1$) :

$$\begin{aligned} v_{rel} &= \sqrt{(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)^2 - (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1)^2} \\ &= \sqrt{(\mathbf{v}_2^2 + \mathbf{v}_1^2 - 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) - \mathbf{v}_1^2 \mathbf{v}_2^2 (1 - \cos^2)} \\ &= \sqrt{2 - 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - 1 + \mathbf{v}_1^2 \mathbf{v}_2^2 \cos^2} \\ &= \sqrt{(1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2} \\ &= 1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

A.3 Physique de l'équation de Boltzmann : Le coefficient de viscosité

Avant de clore ce chapitre sur la théorie de transport en général, J je voudrais présenter le calcul du coefficient de viscosité^c. Je traiterai le cas non relativiste, en partant de la définition expérimentale du coefficient de viscosité^d.

Définition expérimentale du coefficient de viscosité dans le cas d'un gaz non relativiste

On considère un gaz parfait dilué avec une densité et une température constantes et une vitesse moyenne donnée par :

$$u_x = A = By \quad (\text{A.33})$$

$$u_y = u_z = 0 \quad (\text{A.34})$$

avec A et B des coefficients constants. Ce gaz peut alors être vu comme composé de couches d'épaisseurs dy glissant les unes sur les autres comme indiqué sur la figure A.4.

On se place dans le plan dessiné en pointillé sur la figure A.4. On appelle alors F la force de frottement exercée sur la couche supérieure du fluide par unité de surface. On définit expérimentalement le coefficient de viscosité (μ) par :

$$F = -\mu \frac{\partial u_x}{\partial y}. \quad (\text{A.35})$$

^cPuisque l'évaluation de la viscosité de la matière formée dans les collisions d'ions lourds est un des principaux résultats récents[163, 164, 165]

^dpar simplicité, pour un calcul détaillé de la solution de l'équation de Boltzmann dans l'approximation de premier ordre voir [166] pages 103-116.

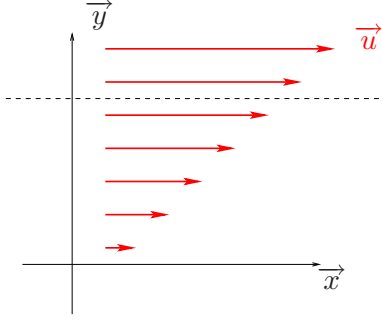


FIG. A.4 – Flot horizontal d'un gaz idéal dilué dont la vitesse moyenne croît linéairement avec l'altitude.

Si on se place maintenant dans le cadre des théories cinétiques. On sait qu'il existe un transfert d'impulsion entre les couches supérieures et inférieures au plan de référence défini ci-dessus. Comme on considère un gaz parfait à l'équilibre, le flux est le même dans les 2 directions et est donné par : $n\sqrt{k_B T/m}$ où n est la densité du gaz, k_B la constante de Boltzmann, T la température et m la masse des particules. Par contre, la vitesse moyenne des particules de la couche supérieure étant plus grande, il n'en est pas de même pour le flux d'impulsion suivant la direction x . Comme les particules traversant le plan (de dessus) proviennent d'une zone d'épaisseur λ_{mfp} (libre parcours moyen des particules), elles possèdent un excès d'impulsion donné par $\lambda_{mfp}\partial u_x/\partial y$ par rapport à la couche du dessous.

Le flux total transporté au travers du plan est donc donné par :

$$\Phi = \lambda_{mfp} m n \sqrt{\frac{k_B T}{m}} \frac{\partial u_x}{\partial y}. \quad (\text{A.36})$$

Sachant que $\lambda_{mfp} = 1/\sigma^{tot} n \propto 1/(na)$ avec a le rayon des particules du gaz, on obtient donc :

$$\mu \simeq \frac{\sqrt{m k_B T}}{a^2} \propto n \frac{\lambda_{mfp}}{\lambda_{dB}} \quad (\text{A.37})$$

où λ_{dB} dénote la longueur d'onde de de Broglie des particules à la température T .

Le coefficient de viscosité est donc défini par le rapport des deux longueurs caractéristiques microscopiques du problème (le libre parcours moyen, et la longueur d'onde de "de Broglie"). **Il est important de noter que, dans le cas où λ devient de l'ordre de grandeur de la taille du système, la notion de coefficient de viscosité n'est plus proprement définie.**

ANNEXE B

Cinématique des collisions

Sommaire

B.1	Calcul du paramètre d'impact	xiii
B.2	Calcul des impulsions finales	xv

Dans ce chapitre, je vais présenter le calcul de l'état final d'une collision à 2 particules relativistes de masse nulle. Après avoir discuté le calcul du paramètre d'impact, et explicité celui-ci comme un scalaire de Lorentz ce qui assure de la covariance du calcul. Je dériverai l'expression des impulsions de l'état final de la collision telles que calculées dans la résolution numérique de l'équation de Boltzmann.

B.1 Calcul du paramètre d'impact

Le paramètre d'impact est utilisé pour déterminer s'il y a collision comme on l'a vu dans la section VI.3.2(b). Nous pouvons le déterminer de 2 façons différentes :

- calcul quadratique permettant de vérifier explicitement sa covariance.
- calcul algébrique purement géométrique qui donne l'expression de l'équation (VI.9).

Calcul quadratique

La figure B.1 sert de base au calcul, elle représente un système de 2 particules vu depuis le référentiel centré sur la particule 1 obtenu depuis le référentiel de collision par une transformation galiléenne de vitesse $-\vec{v}_1$. Le paramètre d'impact est la distance séparant les particules 1 et 2 une fois que la particule 2 se trouve sur la droite (D) passant par $\vec{x}_1$ et perpendiculaire à $\vec{v}_1$.

Commençons par déterminer l'instant où la particule 2 se trouve sur $\mathcal{D}$.

$$(\vec{x}_2(t) - \vec{x}_1) \cdot \vec{v}_1 = 0 \quad (\text{B.1})$$

Sachant :

$$\vec{x}_2(t) = (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)t + \vec{x}_2(0) \quad (\text{B.2})$$

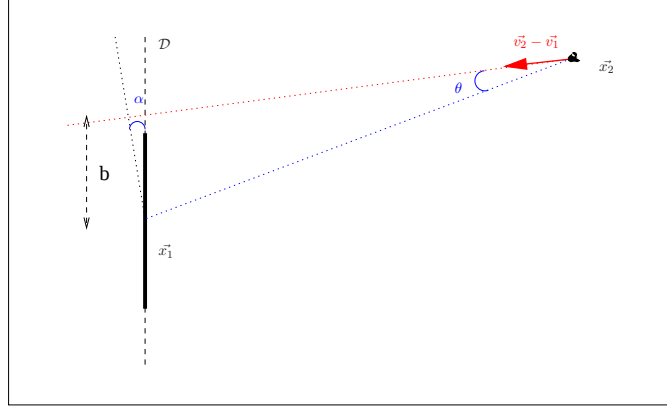


FIG. B.1 – Schéma relatif au calcul du paramètre d'impact

En insérant cette équation dans (B.1) on obtient :

$$t = - \frac{(\vec{x}_2(0) - \vec{x}_1) \cdot \vec{v}_1}{(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot \vec{v}_1} \quad (\text{B.3})$$

Calculons maintenant le paramètre d'impact qui correspond à la distance entre les 2 particules à l'instant défini par l'équation (B.3)

En réinsérant l'expression de t dans l'équation (B.2) on a :

$$\vec{x}_2(t) = (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \times \frac{(\vec{x}_2(0) - \vec{x}_1) \cdot \vec{v}_1}{(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot \vec{v}_1} + \vec{x}_2(0) \quad (\text{B.4})$$

En posant :

$$b = |\vec{x}_2(t) - \vec{x}_1| = |(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)t + (\vec{x}_2(0) - \vec{x}_1)| \quad (\text{B.5})$$

On a alors :

$$b = |(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \times \frac{(\vec{x}_2(0) - \vec{x}_1) \cdot \vec{v}_1}{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1} + (\vec{x}_2(0) - \vec{x}_1)| \quad (\text{B.6})$$

En posant

$$\vec{r} = (\vec{x}_2(t) - \vec{x}_1) \quad (\text{B.7})$$

$$b^2 = (\vec{r})^2 + \frac{2}{1 - \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1} [(\vec{r} \cdot \vec{v}_1)^2 + (\vec{r} \cdot \vec{v}_2)(\vec{r} \cdot \vec{v}_1 - (\vec{r} \cdot \vec{v}_1)^2)] \quad (\text{B.8})$$

Soit :

$$b^2 = (\vec{r})^2 + \frac{2}{1 - \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1} [(\vec{r} \cdot \vec{v}_2)(\vec{r} \cdot \vec{v}_1)] \quad (\text{B.9})$$

qui peut aussi s'écrire :

$$b^2 = -\underline{X}^2 + 2 \times \frac{(\underline{X} \cdot \underline{P}_1)(\underline{X} \cdot \underline{P}_2)}{\underline{P}_1 \cdot \underline{P}_2} \quad (\text{B.10})$$

En utilisant la convention

$$\underline{X}_1 = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vec{x}_1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

et

$$\underline{X}_2 = \begin{pmatrix} t_2 \\ \vec{x}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

On a donc dans le cas où $t_1 = t_2$

$$\underline{X} = \underline{X}_1 - \underline{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} \quad (\text{B.13})$$

pour les quadrivecteurs.

De cette façon, on a exprimé b à l'aide d'un produit pseudo-scalaire de quadrivecteurs, ce qui nous assure la covariance du calcul.

Calcul algébrique

Ce calcul donne le paramètre d'impact tel qu'il a été utilisé dans l'algorithme. En effet, on a eu besoin de la valeur algébrique du paramètre d'impact suivant la droite (D) pour des raisons qui seront expliquées dans la section VI.3.3(c).

$$|\vec{r} \wedge (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)| = |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| r \sin \tau \quad (\text{B.14})$$

où $\tau = (\vec{r}, \vec{v}_2 - \vec{v}_1)$

D'autre part :

$$r \sin \tau = b \cos \alpha \quad (\text{B.15})$$

où α est défini comme sur la figure et est donné par :

$$\cos \alpha = \frac{\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{|\vec{v}_1| |\vec{v}_2 - \vec{v}_1|} \quad (\text{B.16})$$

Alors on obtient une nouvelle écriture du paramètre d'impact :

$$b = \frac{\vec{e}_z \cdot (\vec{r} \wedge (\vec{v}_2 - \vec{v}_1))}{1 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2} \quad (\text{B.17})$$

Un calcul direct permet de vérifier que l'équation (B.17) élevée au carré redonne (B.9).

B.2 Calcul des impulsions finales

Le calcul des impulsions finales se fait en 2 étapes. Tout d'abord, on doit identifier le repère dans lequel ce calcul sera le plus simple. Une fois ce repère déterminé, un peu de cinématique nous permet de déterminer une des 2 impulsions finales et la conservation de l'énergie-impulsion donne l'autre.

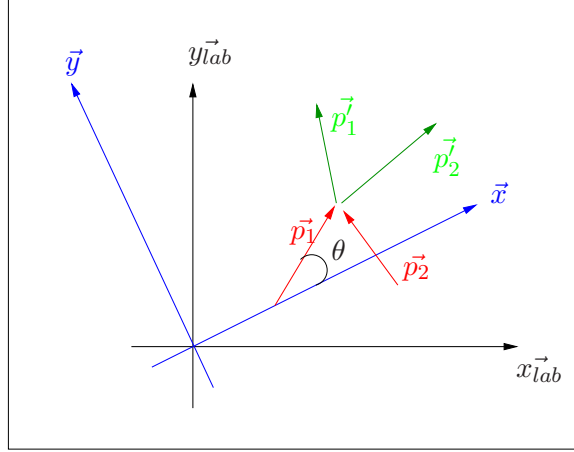


FIG. B.2 – Schéma indiquant le repère utilisé pour calculer les impulsion finales.

Repère de la collision

Tout d'abord on veut construire le repère (Ox, Oy) dans lequel on va faire le calcul (voir figure B.2) afin de déterminer $|\vec{p}_1'|$ et $\theta = (\vec{p}_1', \vec{e}_x)$ où $\vec{e}_x$ est le vecteur directeur de l'axe des $\vec{x}$ dans un repère que l'on souhaite utiliser pour exprimer $\vec{p}_1'$ en coordonnées polaires.

On part de l'invariant relativiste :

$$(\underline{P}_1 + \underline{P}_2 - \underline{P}_1')^2 = 0 = (\underline{P}_1 + \underline{P}_2)^2 - 2\underline{P}_1'(\underline{P}_1 + \underline{P}_2) \quad (\text{B.18})$$

En posant :

$$\vec{p}_1' = p_1' \vec{u} \quad (\text{B.19})$$

Et en utilisant

$$s = 2\underline{P}_1'(\underline{P}_1 + \underline{P}_2) \quad (\text{B.20})$$

et

$$t = -2\underline{P}_1 \cdot \underline{P}_1' \quad (\text{B.21})$$

Alors le développement de (B.20) donne, en y insérant (B.21) et (B.19) puis en séparant les termes vectoriels des termes scalaires :

$$[(s+t)\vec{p}_1' + t\vec{p}_2'] \cdot \vec{u} = (s+t)p_1 + tp_2 \quad (\text{B.22})$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (s+t)p_1 + tp_2 \quad (\text{B.23})$$

Cette expression définit le vecteur $\vec{v}$ que l'on choisit comme axe des $\vec{x}$ de notre repère de collision. De cette façon l'équation (B.23) nous donne $\cos\theta$.

Néanmoins, pour le moment, on ne sait pas calculer θ car on ne connaît pas s et t (les variables de Mandelstam).

Variables de Mandelstam

Les variables de Mandelstam sont définies par :

$$s = (\underline{P}_1 + \underline{P}_2)^2 \quad (\text{B.24})$$

$$t = (\underline{P}_1 - \underline{P}'_1)^2 \quad (\text{B.25})$$

Il est donc nécessaire de connaître l'angle de diffusion pour définir t .

Sachant que les variables de Mandelstam sont des scalaires de Lorentz, on calcule t dans le référentiel du centre de masse.

Pour cela, on choisit de fixer l'angle de diffusion dans ce référentiel suivant la formule (comme annoncé dans la section VI.3.3) :

$$\theta^* = \pi \frac{b + r}{r} \quad (\text{B.26})$$

avec b : Paramètre d'impact.

Cette formule est choisie pour une bonne raison : elle correspond au cas d'une section efficace différentielle isotrope, et permet de gérer astucieusement le cas des doubles collisions expliqué dans la section VI.3.3(c).

Maintenant, une fois que l'on a convenablement défini toutes les quantités de l'équation (B.23), on peut s'intéresser au calcul des impulsions finales.

Calcul des quadrivecteurs

Cette partie présente le calcul réalisé par l'algorithme de collision.

Au départ on connaît les coordonnées cartésiennes des impulsions initiales. On fait un changement de repères pour les avoir dans le repère de collision (défini par l'équation (B.23)), ce qui correspond à une rotation (d'axe z) du plan d'un angle β tel que :

$$\beta = (\vec{e}_x, \vec{v}) \quad (\text{B.27})$$

où $\vec{e}_x$ est le vecteur directeur dans le repère initial et $\vec{v}$ est défini par l'équation (B.23).

Dans ce repère, on calcule :

$$\cos \theta = \frac{(s + t)p_1 + tp_2}{|\vec{v}|} \quad (\text{B.28})$$

On en déduit le vecteur directeur de $\vec{p}'_1$ en utilisant :

$$t = -s \left(1 - \frac{\cos(\theta^*)}{2} \right) \quad (\text{B.29})$$

Et

$$s + t = s \cos^2 \left(\frac{\theta^*}{2} \right) \quad (\text{B.30})$$

En notant :

$$\cos \theta = \frac{w}{|\vec{v}|} \quad (\text{B.31})$$

Comme

$$v^2 = w^2 - st(s+t) \quad (\text{B.32})$$

On obtient donc la seconde composante de $\vec{u}$ en utilisant $\cos^2 + \sin^2 = 1$ avec les équations (B.31) et (B.32).

Ceci nous donne :

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{-st(s+t)}}{v} \quad (\text{B.33})$$

On peut maintenant calculer p'_1 à partir de la définition de t :

$$p'_1 = \frac{-t}{2[p_1 - (\vec{p}_1 \cdot \vec{u})]} \quad (\text{B.34})$$

Les autres coordonnées des quadrivecteurs finaux sont alors simplement données par les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion.

ANNEXE C

Test de la thermalisation

Sommaire

C.1	Distribution de Maxwell-Boltzmann pour un gaz de particules de masse nulle	xix
C.2	Courbe théorique pour le test de Kolmogorov	xx

Afin de tester la résolution numérique de l'équation de Boltzmann, nous l'avons appliquée au cas d'un système dans une boîte avec conditions aux limites périodiques, et nous avons vérifié que le système convergeait bien, aux temps longs, vers un état d'équilibre tel que prévu par le théorème H. Dans cette annexe, je dérive tout d'abord l'énergie moyenne correspondant à cet état d'équilibre afin d'en déterminer la température. Dans une seconde section, je calcule la distribution intégrée en énergie des particules afin de connaître la prédiction théorique à utiliser dans le test de Kolmogorov (voir section VI.6.1).

C.1 Distribution de Maxwell-Boltzmann pour un gaz de particules de masse nulle

On part de la distribution d'impulsion donnée par la loi de Maxwell-Boltzmann :

On rappelle que l'on a choisi le système d'unité $k=c=1$

$$\frac{d^2 N}{dp^2} = A e^{-\frac{p}{T}} \quad (\text{C.1})$$

que l'on écrit aussi en passant en coordonnées polaires et en intégrant sur l'angle :

$$\frac{dN}{dp} = 2\pi p A e^{-\frac{p}{T}} \quad (\text{C.2})$$

On intègre pour obtenir :

$$\int \frac{dN}{dp} dp = N = -2\pi A \frac{\partial}{\partial \beta} \int_0^\infty e^{-\beta p} dp \quad (\text{C.3})$$

On en déduit que :

$$A = \frac{N}{2\pi T^2} \quad (\text{C.4})$$

On peut ainsi calculer l'énergie moyenne comme :

$$\langle E \rangle = \int 2\pi p^2 A e^{-\frac{p^2}{T}}. \quad (\text{C.5})$$

Ce que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\langle E \rangle = N\beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \int_0^\infty e^{-\beta p} dp = 2NT \quad (\text{C.6})$$

On a donc :

$$\langle E \rangle = 2NT \quad (\text{C.7})$$

C.2 Courbe théorique pour le test de Kolmogorov

Pour réaliser le test de Kolmogorov, il est nécessaire de connaître une fonction de référence à laquelle comparer nos données de simulation. Cette fonction théorique est choisie comme suit :

On considère la probabilité $\mathcal{P}(E)$ d'avoir une particule d'énergie inférieure à E :

Le théorème H nous indique qu'aux temps longs la distribution doit suivre une loi de Maxwell-Boltzmann (puisque la distribution initiale est homogène spatialement) soit :

$$\frac{dN}{dE} = N E \beta^2 e^{-\beta E} \quad (\text{C.8})$$

On doit donc calculer :

$$\int_0^E \frac{dN}{d\epsilon} d\epsilon = \int_0^E N \epsilon \beta^2 e^{-\beta \epsilon} \quad (\text{C.9})$$

Ce qui donne :

$$= \beta^2 N \left(-\frac{\partial}{\partial \beta} \int_0^E e^{-\beta \epsilon} d\epsilon \right) \quad (\text{C.10})$$

soit :

$$\beta^2 N [T^2 (e^{-\beta E} - 1) + (E e^{-\beta E}) T] = f_{\text{théo}}(E) \quad (\text{C.11})$$

Qui est le résultat indiqué dans la section VI.6.1(b).

Conditions initiales pour l'application aux collisions d'ions lourds

Sommaire

D.1	Distribution initiale de particules	xxi
D.2	Distribution en énergie	xxii
D.3	Tirage par la méthode d'acceptance-rejet	xxiv

D.1 Distribution initiale de particules

Afin de pouvoir comparer nos résultats aux données expérimentales, on utilise une distribution gaussienne qui reproduit la distribution “en amande” observée dans le plan transverse des collisions d’ions lourds. Pour cela, on procède comme suit :

Pour obtenir une distribution de particules gaussienne, on utilise pour déterminer les positions :

$$x = \sigma_x \sqrt{-2 \ln(r_1)} \cos(2\pi r_2) \quad (\text{D.1})$$

et

$$y = \sigma_y \sqrt{-2 \ln(r_1)} \sin(2\pi r_2) \quad (\text{D.2})$$

où r_1 et r_2 sont des variables aléatoires comprises entre 0 et 1.

Le but de cette partie est de montrer que cette méthode de tirage donne bien une distribution gaussienne. Pour cela, on commence par voir que :

$$e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2}} = r_1 \quad (\text{D.3})$$

en utilisant (D.1) et (D.2).

Ensuite, en posant :

$$x = \sigma_x r \cos \theta \quad (\text{D.4})$$

et

$$y = \sigma_y r \sin \theta \quad (\text{D.5})$$

où l'on a $\theta = 2\pi r_2$ et $r = \sqrt{-2 \ln(r_1)}$

alors on a :

$$dxdy = \sigma_x \sigma_y \frac{dr_1}{r_1} 2\pi dr_2 \quad (\text{D.6})$$

En réinsérant les définitions de r_1 et r_2 on obtient :

$$\frac{r_1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} dxdy = dr_1 dr_2 \quad (\text{D.7})$$

Sachant que l'on doit avoir

$$\int \frac{d^2 N}{dr_1 dr_2} = N \quad (\text{D.8})$$

alors l'équation (D.7) se réécrit :

$$\frac{dN}{dxdy} = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2}} \quad (\text{D.9})$$

Ce qui correspond bien à une distribution gaussienne.

D.2 Distribution en énergie

Comme indiqué dans la section VII.1.1, 2 différentes distributions initiales d'énergie peuvent être utilisées dans la simulation, avec à chaque fois une distribution isotrope des impulsions :

Distribution d'énergie thermalisée localement

Afin de pouvoir comparer nos résultats avec des calculs d'hydrodynamique idéale, il faut s'assurer que nous utilisons bien les mêmes conditions initiales à savoir :

- L'équation d'état d'un corps noir à 2 dimensions
- Distribution d'énergie de la forme $e^{-\frac{p}{T}}$.

Le nombre de particules est donné par :

$$N = \int e^{-\frac{p}{T}} 2\pi p dp = 2\pi T^2 \quad (\text{D.10})$$

L'énergie est donnée par :

$$E = \int p e^{-\frac{p}{T}} 2\pi p dp = 2\pi T^3 \quad (\text{D.11})$$

Le fait d'utiliser une distribution de particules gaussienne impose que la densité de particules soit :

$$N = \int n dxdy = \int 2\pi T_0^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2}} dxdy \quad (\text{D.12})$$

et la densité d'énergie :

$$E = \int \epsilon dx dy = \int 4\pi T_0^3 e^{-\frac{3x^2}{4\sigma_x^2} - \frac{3y^2}{4\sigma_y^2}} dx dy \quad (D.13)$$

En prenant comme distribution en température une distribution gaussienne et en comparant les équations (D.10) et (D.12) d'un côté et (D.11) et (D.13) de l'autre, on trouve la valeur de T_0 à utiliser dans le calcul de la distribution d'impulsion.

On obtient donc

$$\frac{E}{N} = \frac{4}{3}T_0 = 2 \quad (D.14)$$

soit

$$T_0 = \frac{3}{2}. \quad (D.15)$$

Distribution d'énergie CGC

La seconde version de la distribution initiale d'énergie est donnée par la théorie du condensat de verre de couleur (CGC). Dans ce modèle, le spectre des gluons est calculé en résolvant les équations Yang-Mills Classiques pour les conditions initiales données par le modèle MV [167]

Dans la référence [168, 169], les auteurs ont paramétrisé la solution obtenue numériquement comme :

$$\frac{dN}{d^2p_t d^2x} = \begin{cases} a_1 [e^{\frac{p_t}{b\Lambda_s}} - 1]^{-1} & (p_t/\Lambda_s) < 1.5 \\ a_2 \log(4\pi p_t/\Lambda_s) (p_t/\Lambda_s)^{-4} & (p_t/\Lambda_s) > 1.5 \end{cases} \quad (D.16)$$

avec $a_1 = 0.137$, $a_2 = 0.0087$ et $b = 0.465$ sur les données de diffusion profondément inélastique.

Dans l'équation (D.16), le paramètre Λ_s qui mesure la densité de charge de couleur joue le rôle d'une température puisque c'est la seule échelle caractéristique d'énergie. On considère donc :

$$\Lambda_s(x, y) = \Lambda_0 e^{-\frac{x^2}{4\sigma_x^2} - \frac{y^2}{4\sigma_y^2}} \quad (D.17)$$

On a donc un nombre de particules et une énergie donnés par :

$$N = \int \frac{dN}{d^2p_t d^2x} 2\pi p_t dp = 2\pi \Lambda_s^2 \quad (D.18)$$

$$E = \int \frac{dN}{d^2p_t d^2x} 2\pi p_t^2 dp = 2\pi \Lambda_s^3 \quad (D.19)$$

Reste à déterminer la valeur de Λ_0 pour que l'énergie moyenne par particule reste égale au p_t moyen des pions, soit 420 MeV. Pour cela, on commence par normaliser $dN/d^2p_t d^2x$ à 1. On en déduit l'énergie moyenne pour la distribution CGC :

$$\langle E_{CGC} \rangle = \frac{\int p_t \frac{dN}{d^2p_t d^2x}}{\int \frac{dN}{d^2p_t d^2x}}. \quad (D.20)$$

On peut alors évaluer Λ_0 par le calcul de l'énergie moyenne comme :

$$\frac{E}{N} = \frac{\int 2\pi \Lambda_0^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2}} dx dy}{\int 4\pi \Lambda_0^3 e^{-\frac{3x^2}{4\sigma_x^2} - \frac{3y^2}{4\sigma_y^2}} dx dy} = \langle E_{CGC} \rangle. \quad (D.21)$$

D.3 Tirage par la méthode d'acceptance-rejet

Une fois que l'on a convenablement normalisé les distributions d'énergie que l'on veut utiliser, il est nécessaire de tirer par Monte Carlo, les énergies des particules sur ces distributions. Pour cela, nous avons choisi d'utiliser la méthode d'acceptance-rejet [170]. Dans la suite de cette section, je détaillerai le calcul pour un système de particules massives avec une distribution thermique. Le cas des particules de masse nulle étant alors simplement obtenu en posant $m = 0$ dans les équations.

Principe de l'acceptance-rejet

On considère f la distribution que l'on souhaite simuler, et g une distribution que l'on sait simuler^a.

On suppose de plus que $\forall x, g(x) \geq f(x)$, et que l'aire de g est minimale.

La méthode d'acceptance-rejet consiste alors à :

- Tirer x_1 et x_2 entre 0 et 1
- Calculer x comme :

$$\frac{\int_x^\infty g(x)}{\int_0^\infty g(x)} = x_1 \quad (\text{D.23})$$

- Accepter x si :

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq x_2 \quad (\text{D.24})$$

Calcul de la distribution g pour une distribution de Boltzmann

Le problème que l'on se pose est le suivant : *On veut déterminer une distribution que l'on sait simuler, qui soit toujours supérieure à la distribution de Boltzmann, et qui possède l'aire la plus faible.*

La distribution que l'on souhaite simulée, normalisée à 1 est donnée par :

$$f(x) = \frac{dN}{dx} = \frac{x}{1+m} \exp(-x-m) \quad (\text{D.25})$$

où l'on a posé $x = E/T$ et $m = M/T$ avec E l'énergie et M la masse des particules.

Pour déterminer la fonction g , on va calculer les coefficients a, b de l'équation :

$$g(x) = a \exp(-bx) \quad (\text{D.26})$$

^aPour laquelle on sait inverser l'équation :

$$\int_{-\infty}^x g(x') dx' = A \quad (\text{D.22})$$

où A est une constante.

de sorte que $f(x) = x \exp(-x) \leq g(x)$ et que les courbes f et g soient tangentes en 1 point. On obtient ainsi 2 conditions :

$$\frac{x}{1+m} \exp(-x-m) = a \exp(-bx) \quad (\text{D.27})$$

$$\frac{1-x}{1+m} \exp(-x-m) = -ab \exp(-bx) \quad (\text{D.28})$$

On obtient alors :

$$b(x) = 1 - \frac{1}{x} \quad (\text{D.29})$$

$$a(x) = \frac{x}{1+m} \exp(m-1). \quad (\text{D.30})$$

Pour fixer $a(x)$ et $b(x)$, on utilise alors la dernière condition, l'aire de g est minimale. Cela revient à déterminer x_m tel que :

$$\mathcal{A}(x)|_{x=x_m} = \min_x \left(\int_m^\infty g(y) \right). \quad (\text{D.31})$$

On obtient alors

$$x_m = \frac{(2+m) + \sqrt{4+m^2}}{2}. \quad (\text{D.32})$$

Application du tirage par acceptance-rejet

On peut alors appliquer l'acceptance rejet, on se donne $x_{1,2}$ dans l'intervalle $[0, 1]$, et l'on calcule x tel que :

$$x_1 = \frac{\int_x^\infty a \exp(-bx)}{\int_m^\infty a \exp(-bx)} \quad (\text{D.33})$$

soit $x = m - b^{-1} \log(x_1)$.

On accepte alors x à la condition que :

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq x_2. \quad (\text{D.34})$$

Au final, le test d'acceptance-rejet est implémenté dans le code sous la forme :

On accepte x à la condition que :

$$\frac{m - b^{-1} \log(x_1)}{m+1} \frac{1}{a} \exp(bm + b^{-1}(1-b) \log(x_1)) \geq x_2. \quad (\text{D.35})$$

ANNEXE E

Paramètres du modèle de Glauber

Les paramètres ci-dessous sont tirés du code de PHOBOS pour une distribution de Woods-Saxon [171] :

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{1 + w(r/R)^2}{1 + \exp(\frac{r-R}{a})} \quad (\text{E.1})$$

Noyau	R [fm]	a [fm]	w [fm]
² H	0.01	0.5882	0
¹⁶ O	2.608	0.513	-0.51
²⁸ Si	3.34	0.580	-0.233
³² S	2.54	2.191	0.16
⁴⁰ Ca	3.766	0.586	-0.161
⁵⁸ Ni	4.309	0.517	-0.1308
⁶² Cu	4.2	0.596	0
¹⁸⁶ W	6.58	0.480	0
¹⁹⁷ Au	6.38	0.535	0
²⁰⁷ Pb	6.62	0.546	0
²³⁸ U	6.81	0.6	0

TAB. E.1 – Paramètres de la distribution de charge dans les noyaux [172].

A noter que les valeurs indiquées pour l'élément ²⁰⁷ Pb sont également utilisées pour ²⁰⁸Pb, noyaux pour lequel les valeurs de paramètres de Fermi ne sont pas disponibles. Il a été noté que les coefficients de Bessel-Fourier des deux noyaux étaient identiques [172].

Flot elliptique dans la résolution numérique de l'équation de Boltzmann

Sommaire

F.1	Comportement dans la limite hydrodynamique	xxix
F.2	Calcul du nombre de collisions par particule et relation avec le nombre de Knudsen dans la limite du gaz faiblement interagissantxxxii	
F.3	Calcul du flot elliptique dans la limite du faible nombre d'inter- action.	xxxv

Dans cette annexe, je détaille les calculs présentés dans le chapitre IX de ma thèse. L'essentiel des calculs de cette Annexe sont basés sur les travaux de [173], que l'on a modifié pour prendre en compte les effets relativistes dans l'équation de Boltzmann. Dans un premier temps, je m'intéresserai à la limite hydrodynamique de l'équation de Boltzmann, avant de considérer le régime K fini. En particulier, je montrerai comment on peut relier le nombre de Knudsen au nombre moyen de collisions par particule.

F.1 Comportement dans la limite hydrodynamique

coefficients de flot et fonctions de Bessel

Dans le régime hydrodynamique la distribution de particules au “freeze-out” est donnée par :

$$E \frac{dN}{d^3p} = A \int_{\Sigma} \exp\left(-\frac{p^\mu u_\mu}{T}\right) p^\mu d\sigma_\mu, \quad (\text{F.1})$$

où A est une normalisation, Σ une hyper-surface de “freeze-out”^a et u_μ la quadri-vitesse du fluide en un point de Σ .

^aDifférents choix sont possibles, σ peut être définie comme une isotherme, on parle alors de “freeze-out” isotherme, ou à un instant fixé “freeze-out” isochrone.

On peut utiliser la méthode du col pour évaluer l'intégrale sur l'espace-temps dans l'équation (F.1). L'énergie de la particule dans le référentiel du fluide est minimale lorsque la vitesse du fluide et la vitesse de la particule sont parallèles, ce qui donne la valeur de la fonction au col.

La plus grande contribution vient des particules dont l'impulsion transverse est parallèle à la vitesse maximale du fluide soit $\vec{p} \cdot \vec{u} = pu(\phi)$.

Si on développe $u(\phi)$ en série de Fourier jusqu'aux termes en $\cos(4\phi)$, on obtient :

$$u(\phi) = U + 2V_2 \cos(2\phi) + 2V_4 \cos(4\phi) + \dots \quad (\text{F.2})$$

$$\begin{aligned} u^0(\phi) &= U^0 + 2V_2^0 \cos(2\phi) + 2V_4^0 \cos(4\phi) \dots \\ &= U^0 + 2V_2 V_f \cos(2\phi) + 2V_4 V_f \cos(4\phi) \dots \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

où l'on a utilisé le fait que la vitesse du fluide est donnée par : $V_f = u/u^0$.

Sachant que les coefficients de flot sont définis par :

$$\frac{dN}{d\phi} \propto 1 + 2v_2 \cos(2\phi) + 2v_4 \cos(4\phi) + \dots, \quad (\text{F.4})$$

soit $v_n = \langle \cos(n\phi) \rangle$.

En utilisant la définition des fonctions de Bessel modifiées :

$$I_n(x) = \int \cos(n\theta) \exp(-x \cos(\theta)) \frac{d\theta}{2\pi}, \quad (\text{F.5})$$

on peut écrire :

$$\begin{aligned} v_2 &= \langle \cos(2\phi) \rangle \\ &= \frac{\int \cos(2\phi) \frac{dN}{d\phi}}{\int \frac{dN}{d\phi}} \\ &= \frac{I_1(x)}{I_0(x)} \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

où $x = \frac{p}{T}(2V_2(1 - V_f))$.

De la même façon, si l'on néglige le terme en $V_{n,n \geq 4}$ dans l'équation F.4^b (on considère que seule la contribution dominante au terme v_{2n} est donnée par $(v_2)^n$), alors on peut généraliser la relation précédente :

$$v_{2n} = \frac{I_n(x)}{I_0(x)}. \quad (\text{F.7})$$

On note enfin que ces équations sont générales au sens où elles ne dépendent pas des détails de la surface de "freeze-out". Néanmoins la dérivation nécessite qu'on se place dans le régime de basse température. A plus haute température, le comportement des coefficients de flot devient plus complexe, et plus sensible aux détails de l'évolution.

La figure F.1 montre les données du code de transport après régression linéaire pour $K \rightarrow 0$ et $D \rightarrow 0$. La ligne correspond à un ajustement de la formule (F.7) sur les points.

^bCette hypothèse est réaliste pour les particules possédant une grande impulsion transverse.

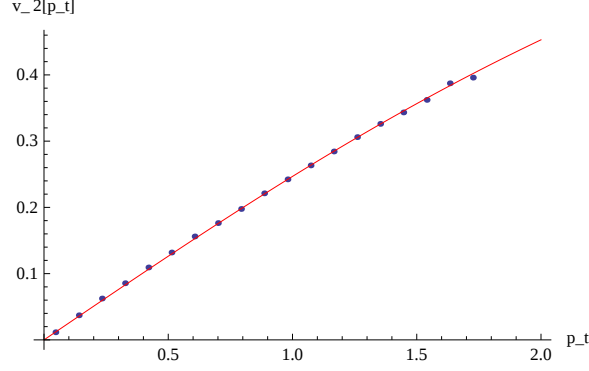


FIG. F.1 – Ajustement du rapport de fonction de Bessel sur les résultats du code de transport dans la limite du régime hydrodynamique non visqueux.

Comportement à petit temps

Pour déterminer l'évolution à petit temps, on considère que la vitesse du fluide est normale aux lignes d'équi-densité des conditions initiales (choisies gaussiennes). Les lignes d'équi-densité sont définies par :

$$a^2 = \frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}. \quad (\text{F.8})$$

Le vecteur tangent au point (x, y) à l'ellipse est donné par :

$$\vec{T} = \frac{(-\sigma_x^2 \sin \phi', \sigma_y^2 \cos \phi')}{\sqrt{\sigma_x^4 \cos^2 \phi' + \sigma_y^4 \sin^2 \phi'}}. \quad (\text{F.9})$$

Le vecteur normal étant orthogonal au vecteur tangent, on a :

$$\vec{N} = \frac{(\sigma_y^2 \cos \phi', \sigma_x^2 \sin \phi')}{\sqrt{\sigma_x^4 \cos^2 \phi' + \sigma_y^4 \sin^2 \phi'}}. \quad (\text{F.10})$$

Le champ de vitesse $\vec{u}$ est donc donné par :

$$\vec{u} = u(a)\vec{N} = u(a) \frac{(\sigma_y^2 \cos \phi', \sigma_x^2 \sin \phi')}{\sqrt{\sigma_x^4 \cos^2 \phi' + \sigma_y^4 \sin^2 \phi'}}. \quad (\text{F.11})$$

On a donc :

$$\frac{dN}{d^2p} \simeq \int_a S(a) \int_{\phi'} \exp\left(-\frac{\vec{u} \cdot \vec{p}}{T}\right) \quad (\text{F.12})$$

où $S(a)$ dénote la distribution gaussienne de matière.

Si on pose que les particules sont émises dans la direction azimutale ϕ , on a pour de petites déformations^c :

$$\vec{u} \cdot \vec{p} \simeq (1 + \epsilon \cos(2\phi)) \cos \phi' \quad (\text{F.13})$$

^cLes petites déformations entraînent :

où $\epsilon = (\sigma_y^2 - \sigma_x^2)/(\sigma_y^2 + \sigma_x^2)$.

Ce qui revient à :

$$\frac{dN}{d^2p} \propto \left\langle I_0\left(\frac{pu}{T}[1 + \epsilon \cos(2\phi)]\right) \right\rangle, \quad (\text{F.14})$$

Dans la limite des petites déformations, le flot elliptique étant le terme proportionnel à $\cos(2\phi)$, on a :

$$v_2 \propto \frac{1}{4} \frac{p^2 \langle u^2 \rangle}{T^2} \quad (\text{F.15})$$

Vitesse initiale en hydrodynamique idéale

Initialement (en $t = \tau_0$), la vitesse du fluide est nulle, c'est le gradient de pression qui génère le flot. Les équations de l'hydrodynamique prédisent que :

$$(\epsilon + P) \frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla P \quad (\text{F.16})$$

L'équation d'état du système étant celle d'un gaz parfait à 2 dimensions ($\epsilon = 2P$), on a :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=\tau_0^+} = -\frac{1}{3} \nabla \ln(P). \quad (\text{F.17})$$

Cette relation s'intègre en :

$$u(t)|_{t=\tau_0^+} = u_{t=\tau_0} - \frac{1}{3} \nabla \ln(P) t \quad (\text{F.18})$$

et est donc linéaire en t .

F.2 Calcul du nombre de collisions par particule et relation avec le nombre de Knudsen dans la limite du gaz faiblement interagissant

Dans le cadre de l'équation de Boltzmann, on sait que le nombre de collisions se produisant au voisinage d'un point $\mathbf{x}$ de l'espace des phases pendant un intervalle dt est donné par :

$$\frac{dN_c}{dx^2 dt} = n_1 n_2 \sigma (1 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \quad (\text{F.19})$$

avec, dans le cas de particules relativistes de masses nulles

$$v_{relative} = 1 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \quad (\text{F.20})$$

et, puisque l'on se trouve dans un régime de vol libre

$$n_1(\vec{x}, t) = n_i(\vec{x} - \vec{v}_1 t) \quad (\text{F.21})$$

-
- $\cos(\phi' - \phi) \propto 1$ car on considère des particules rapides, dont la direction est proche de celle du fluide.
 - $\sigma_y^2 \simeq \sigma_x^2 (1 + 2\epsilon)$.

densité des particules 1 (de même pour n_2). Et comme on a $\sigma = 2r$ (on travaille à 2 dimensions d'espace), on peut écrire :

$$\frac{dN_c}{dt} = \left\langle \left[\int d^2x n_i(\vec{x} - \vec{v}_1 t) n_i(\vec{x} - \vec{v}_2 t) \right] v_{relative} \right\rangle_{\vec{v}_1, \vec{v}_2} \quad (\text{F.22})$$

On voit apparaître un produit de convolution

$$C(\vec{X}) = \int d\vec{x}^2 n_i(\vec{x}) n_i(\vec{x} + \vec{X}) \quad (\text{F.23})$$

ce qui nous conduit, en utilisant la distribution gaussienne $n_i(\vec{x})$

$$C(X, Y) = \frac{N^2}{4\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{X^2}{4\sigma_x^2} - \frac{Y^2}{4\sigma_y^2}} \quad (\text{F.24})$$

à

$$\frac{dN_c}{dt} = r < [C((\vec{v}_1 - \vec{v}_2)t)(v_{relative})] >_{\vec{v}_1, \vec{v}_2} \quad (\text{F.25})$$

On intègre alors sur t pour obtenir le nombre total de collisions :

$$\int_0^\infty \frac{dN_c}{dt} dt = \frac{N^2}{4\sqrt{\pi}\sigma_x\sigma_y} \sqrt{\frac{1}{\frac{A_x^2}{\sigma_x^2} + \frac{A_y^2}{\sigma_y^2}}} \quad (\text{F.26})$$

Avec :

$$A_x = (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)|_x = \cos \phi_1 - \cos \phi_2 \quad (\text{F.27})$$

et

$$A_y = (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)|_y = \sin \phi_1 - \sin \phi_2 \quad (\text{F.28})$$

En coordonnées polaires avec $c=1$.

En utilisant le changement de variables :

$$\alpha = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \quad \text{où} \quad \alpha \in [-\pi, \pi] \quad (\text{F.29})$$

et

$$\beta = \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \quad \text{où} \quad \beta \in [-\pi/2, \pi/2] \quad (\text{F.30})$$

Analogie avec les angles θ et ϕ en coordonnées sphériques

On a donc :

$$A_x = -2 \sin \alpha \sin \beta \quad (\text{F.31})$$

$$A_y = 2 \cos \alpha \sin \beta. \quad (\text{F.32})$$

Le nombre de collisions est donc donné par :

$$N_c = \frac{Nr^2}{4\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\beta}{\pi} \frac{1}{\sqrt{A_x(\alpha, \beta)^2 \sigma_y^2 + A_y(\alpha, \beta)^2 \sigma_x^2}} (1 - \cos(2\beta)) \quad (\text{F.33})$$

soit

$$N_c = \frac{Nr^2}{4\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\beta}{\pi} \frac{1 - \cos(2\beta)}{|\sin(\beta)|} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\sigma_y^2 \sin^2(\alpha) + \sigma_x^2 \cos^2(\alpha)}} \quad (\text{F.34})$$

ce qui donne lorsqu'on réinsère et qu'on linéarise pour pouvoir intégrer :

$$N_c = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + (\sigma_x^2 - \sigma_y^2) \cos 2\alpha}} \quad (\text{F.35})$$

On obtient ainsi une intégrale de fonction elliptique, qui ne possède donc pas de solutions algébriques mais qui peut se calculer numériquement.

En utilisant les paramètres

$$\epsilon = \frac{\sigma_y^2 - \sigma_x^2}{\sigma_y^2 + \sigma_x^2} \quad (\text{F.36a})$$

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\frac{1}{\sigma_x^2} + \frac{1}{\sigma_y^2}} \quad (\text{F.36b})$$

on a les relations :

$$\sigma_x^2 = \frac{2R^2}{1 + \epsilon} \quad (\text{F.37})$$

$$\sigma_y^2 = \frac{2R^2}{1 - \epsilon} \quad (\text{F.38})$$

on arrive alors à :

$$N_c = \frac{rN^2}{R\sqrt{2}\pi^{5/2}} \sqrt{1 - \epsilon^2} \int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{1 - \epsilon \cos t}} \quad (\text{F.39})$$

En définissant $N_{c/p}$ nombre de collisions par particule par :

$$N_{c/p} = \frac{2N_c}{N} \quad (\text{F.40})$$

En utilisant le paramètre de Knudsen, on peut arriver à une relation théorique entre $N_{c/p}$ et K

alors on a :

$$KN_{c/p} = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{5/2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon}} K_\alpha \left(\frac{2\epsilon}{1 + \epsilon} 8\pi \right) \quad (\text{F.41})$$

où la fonction K_α est une fonction elliptique calculable numériquement

Ce qui revient à, si on résoud numériquement :

$$KN_{c/p} = \sqrt{\frac{8}{\pi}}. \quad (\text{F.42})$$

On a testé numériquement que l'algorithme de résolution numérique donnait bien le bon nombre de collisions par particules pour K grand. Par ailleurs, on a également observé que le produit $KN_{c/p}$ était remarquablement constant quelques soient les valeurs de K considérées.

F.3 Calcul du flot elliptique dans la limite du faible nombre d'interaction.

Le calcul développé ci-après est valable aussi bien pour un système faiblement interagissant que pour un système caractérisé par un nombre de Knudsen quelconque dans la limite des temps courts.

Dans de tels système, les coefficients de flot peuvent-être calculés en considérant le terme de perte de l'équation de Boltzmann, le principe étant de regarder avec quelle probabilité une particule avec une impulsion initiale dans la direction ϕ peut être déviée par une collision.

Dans le cas d'un système réel, seule la déviation due à la dernière collision subie par la particule serait importante. Dans ce cas, le domaine d'application de ce calcul est jusqu'à la première collision. Mais si le système étant faiblement interagissant, la probabilité de réaliser plus d'une collision est considérée comme négligeable, et l'on peut utiliser ce calcul pour évaluer les coefficients de flot.

Le flot elliptique^d est donné par :

$$v_2 = \langle \cos(2\phi_1) \rangle = \frac{\int_{\vec{x}, t'} \cos(2\phi_1) \frac{dN}{dx^2 dt'}}{\int_{\vec{x}, t'} \frac{dN}{dx^2 dt'}} \quad (\text{F.43})$$

comme dans la section précédente, on peut se ramener à :

$$v_2 = \frac{1}{\mathcal{N}orm} \int_t r \langle [\cos(2\phi_1) C((\vec{v}_1 - \vec{v}_2)t') (1 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)] \rangle_{\vec{v}_1, \vec{v}_2} \quad (\text{F.44})$$

où $\mathcal{N}orm$ désigne la constante de normalisation et :

$$C((\vec{v}_1 - \vec{v}_2)t) = \frac{N^2}{4\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-t'^2 \left(\frac{[\vec{v}_1 - \vec{v}_2]_x^2}{4\sigma_x^2} + \frac{[\vec{v}_1 - \vec{v}_2]_y^2}{4\sigma_y^2} \right)}. \quad (\text{F.45})$$

La seule dépendance en temps est incluse dans l'exponentielle. Pour un système faiblement interagissant, le flot elliptique total est donc obtenu en intégrant l'équation précédente sur la durée de l'évolution. Alors que, pour un système quelconque, comme on s'intéresse au flot initial (t petit, domaine de validité du calcul), on peut développer l'exponentielle au premier ordre (terme en t'^2), et intégrer sur le temps entre 0 et t , t étant petit. On obtient donc que $v_2 \simeq t^3$ à t petit.

^dOn peut également calculer v_4 de la même façon, en posant $v_4 = \langle \cos(\phi_1) \rangle$.

Dévation au comportement hydrodynamique non visqueux, Modèle de Core-Corona versus Knudsen

Sommaire

G.1	Paramétrisation des déviations	xxxvii
G.2	Dépendance en centralité du flot elliptique dans le modèle de Core Corona	xxxviii
G.3	Comparaison des 2 approches	xxxix

G.1 Paramétrisation des déviations

Paramétrisation de Knudsen

Dans la section IX.1.4(c), j'ai expliqué comment il est possible de paramétrer les déviations au régime hydrodynamique non visqueux en terme de nombre de Knudsen. L'idée est la suivante :

On considère une observable O fonction de la centralité et de la taille du système. Pour un système sans effets collectifs, on mesure $O = O_1$. On cherche alors à paramétrer les déviations au comportement idéal de la façon suivante :

$$O = O_h + \frac{O_h - O_1}{1 + \alpha K} \quad (\text{G.1})$$

où O_h correspond au résultat hydrodynamique idéal, K est le nombre de Knudsen. Dans le cas de v_2 , $O_1 = 0$, et la déviation est donc évaluée par un ajustement sur les données d'une fonction à 2 paramètres.

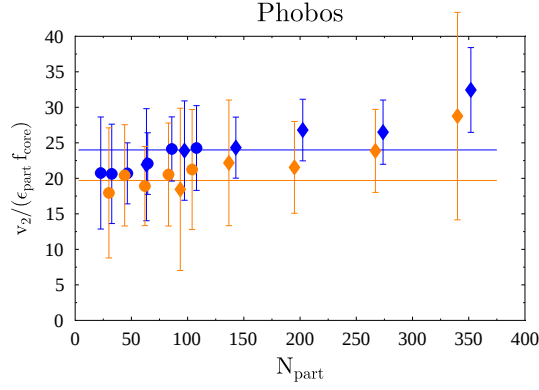


FIG. G.1 – Dépendance en centralité du flot elliptique dans le modèle de “Core-Corona”. Figure extraite de [175].

Paramétrisation du modèle de Cœur-Couronne

Dans le modèle “Core-Corona”, la paramétrisation est différente. On fait l’hypothèse que l’évolution est convenablement décrite par l’hydrodynamique non visqueuse. Mais on considère que seule une fraction de système (identifiée comme le Cœur) possède une dynamique non triviale. La fraction correspondant à la Couronne évolue comme des particules en vol libre.

Ce modèle ne possède donc qu’un paramètre, f_{core} , qui correspond à la fraction de particule du Cœur. Les déviations au régime hydrodynamique sont donc évaluées de la façon suivante :

$$O = O_h f_{core} + (1 - f_{core}) O_1. \quad (G.2)$$

On n’a ici besoin d’ajuster qu’un seul paramètre.

G.2 Dépendance en centralité du flot elliptique dans le modèle de Core Corona

Dans le modèle de “Core-Corona”, la dépendance en centralité du flot elliptique est pensée comme une décroissance de la fraction de particule du Cœur, puisque le flot elliptique est nul pour un système sans interactions ($O_1 = 0$). On peut ajuster sur les données expérimentales $v_2/(\epsilon f_{core})$ dans la limite où $f_{core} = 1$, ce qui fixe la normalisation totale. La figure G.1 montre $v_2/(\epsilon f_{core})$ en fonction du nombre de participant. Aux erreurs statistiques près, l’observable est indépendante de N_{part} ce qui correspond bien à une évolution hydrodynamique non visqueuse.

Néanmoins, on peut faire 3 critiques principales à cette approche :

- **Définition de f_{core}** : La distinction entre nucléons participant du corps et de la couronne est fixée arbitrairement en fonction du nombre de collisions binaires réalisées par le nucléon.
- **Evolution de la couronne** : On considère que les particules produites dans la couronne ne ré-interagissent pas avec le corps pendant l’évolution.

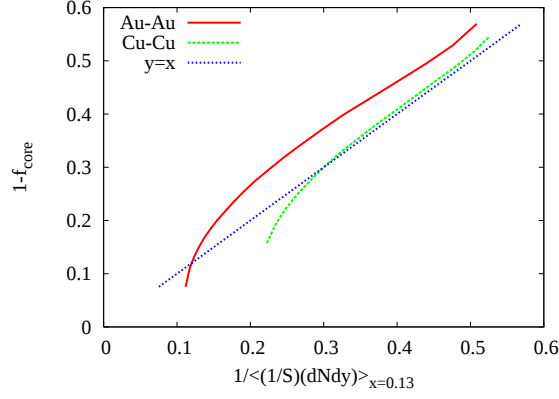


FIG. G.2 – Comparaison des 2 approches pour les collisions Cu-Cu et Au-Au à $\sqrt{s} = 200\text{GeV}$. La droite $y = x$ est là pour guider les yeux.

- **Evolution non visqueuse** : Le modèle de Cœur-Couronne suppose une dynamique non visqueuse pour le système. Néanmoins, un faisceau d'indice converge vers l'existence d'une viscosité pour le milieu créé dans les collisions d'ions lourds pour lequel il apparaît difficile d'envisager :

$$\frac{\eta}{s} << \frac{1}{4\pi} \quad (\text{G.3})$$

- **Cas des collisions très périphériques** : Penser que pour $N_{part} \leq 40$ l'évolution du système peut être partiellement modélisée par de l'hydrodynamique idéale est discutable étant donné la faible multiplicité produite.

G.3 Comparaison des 2 approches

Une question importante à se poser est de savoir à quel point ces 2 approches diffèrent. On compare donc les paramétrisations des déviations à l'hydrodynamique ce qui revient à comparer la fraction de nucléons de la couronne $f_{corona} = 1 - f_{core}$ au nombre de Knudsen $K \propto \langle (1/S)(dNdy) \rangle^{-1}$ (figure G.2). Pour les collisions semi-périphériques, les 2 modèles semblent équivalents pour les collisions Cu-Cu mais pas pour Au-Au. À multiplicité fixée, cela voudrait dire que la déviation due aux effets de viscosité devrait être plus importante pour les collisions Au-Au que pour les collisions Cu-Cu. La différence est de l'ordre d'un facteur 2 pour les collisions centrales Cu-Cu. Ce résultat apparaît incompatible avec la dépendance en centralité de v_2/ϵ_{part} dans laquelle on voit que la déviation à la limite hydro est similaire^a pour Au-Au et Cu-Cu à multiplicité fixée.

^aMême si les données pour les collisions Cu-Cu sont légèrement au dessus des données Au-Au.

ANNEXE H

Mesure des coefficients de flot, importance des fluctuations et des effets de “non-flow”

Sommaire

H.1	Les différentes techniques d’analyse pour la mesure de v_2 et v_4 . .	xli
H.2	Applications aux données des collisions Au-Au au RHIC à $\sqrt{s} = 200\text{GeV}$	xliv
H.3	Effets de “non-flow” dans les mesures de v_4 sur la dépendance en centralité de $v_4/(v_2)^2$.	xlvi
H.4	Effets des fluctuations de flot sur le rapport $v_4\{EP\}/v_2\{EP\}^2$. . .	xlvi

Comme on l’a vu pour l’excentricité initiale, il n’est pas possible de mesurer directement l’anisotropie de la distribution azimutale des particules produites dans une collision d’ions lourds. Différentes méthodes d’analyse des données sont possibles pour en extraire la valeur des coefficients de flot.

Dans cette annexe, je présenterai les techniques d’analyse usuelles, je discuterai en particulier l’impact des effets des fluctuations des conditions initiales ainsi que des corrélations non dues aux effets collectifs que l’on appelle “effet de non-flow”.

H.1 Les différentes techniques d’analyse pour la mesure de v_2 et v_4

La plus simple des techniques d’analyse permettant d’obtenir le flot elliptique consiste à mesurer les corrélations azimutales de particules. Différentes approches sont possibles (les $\langle \rangle$ dénotent une moyenne prise sur les particules et ϕ_i la direction azimutale de la particule i dans le laboratoire).

Mesure de v_2 par les corrélations de particules

Il est possible d'analyser le flot elliptique par des corrélations à 2 et 4 particules ou par l'approche des zéros de Lee-Yang :

- Les cumulants à 2 particules sont définis comme [178] :

$$v_2\{2\} = \sqrt{\langle \cos(\phi_1 - \phi_2) \rangle}. \quad (\text{H.1})$$

- Les cumulants à 4 particules [179] sont définis par :

$$v_2\{4\} = (2\langle \cos(\phi_1 - \phi_2) \rangle^2 - \langle \cos(\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4) \rangle)^{1/4} \quad (\text{H.2})$$

- L'approche des zéros de Lee-Yang [180], $v_2\{LYZ\}$ correspond également à une corrélations de particules.

Mesure de v_4 par les corrélations de particules

La plus simple méthode pour extraire v_4 consiste à analyser les corrélations à 3 particules :

$$v_4\{3\} = \frac{\langle \cos(4\phi_1 - 2\phi_2 - 2\phi_3) \rangle}{(v_2)^2} = \frac{\langle \cos(4\phi_1 - 2\phi_2 - 2\phi_3) \rangle}{\langle \cos(\phi_1 - \phi_2) \rangle}. \quad (\text{H.3})$$

Pour extraire v_4 , il est alors nécessaire de connaître v_2 par une autre analyse.

Approches des coefficients de flot par les corrélations au plan de l'événement

Une autre méthode consiste à corréliser chaque particule avec la direction azimutale du plan de l'événement défini par les autres particules. Pour un ensemble de particules donné, la direction azimutale du plan de l'événement est définie à partir du flot anisotrope observé. Elle est calculée indépendamment pour chacun des coefficients de Fourier. Le vecteur de flot de l'événement correspondant $\vec{q}_n$ est alors défini par :

$$q_{n,x} = \frac{|\vec{Q}_n|}{\sqrt{N}} \cos(n\Psi_{R,n}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j \cos(n\phi_j) \quad (\text{H.4})$$

$$q_{n,y} = \frac{|\vec{Q}_n|}{\sqrt{N}} \sin(n\Psi_{R,n}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j \sin(n\phi_j)^a, \quad (\text{H.5})$$

où la somme est réalisée sur les N particules définissant le plan de l'événement, et ϕ_j correspond à l'angle azimutal de la particule j dans le laboratoire et n réfère à l'harmonique de la série de Fourier considérée. On a alors :

$$\Psi_{R,n} = \arctan\left(\frac{q_{y,n}}{q_{x,n}}\right), \quad (\text{H.6})$$

et on définit $v_n = \langle \cos(n(\phi_i - \Psi_{R,n})) \rangle / R_n$, où R_n est la correction due à la résolution du plan de l'événement et ϕ_i l'angle azimutal d'une particule n'apparaît pas dans les équations (H.5) pour éviter les auto-corrélations.

La résolution du plan de l'événement est déterminée par la corrélation des plans de l'événement de 2 sous-événements indépendants A et B ^b. On a alors, si les 2 sous-événements sont de même multiplicité :

$$R_n = \sqrt{\langle \cos(n(\Psi_{R,n}^A - \Psi_{R,n}^B)) \rangle} \quad (\text{H.7})$$

Les coefficients de flot “event-plane”^c sont donc définis par :

$$v_2\{EP\} = \frac{\langle \cos(2(\phi - \Psi_{R,2})) \rangle}{R_2} \quad (\text{H.8})$$

$$v_4\{EP\} = \frac{\langle \cos(4(\phi - \Psi_{R,4})) \rangle}{R_4}. \quad (\text{H.9})$$

Effets de “non-flow”

On appelle effets de “non-flow” les corrélations de particules indépendantes de la direction du plan de réaction^d.

Les corrélations à 2 particules sont la somme d’une contribution due au flot et d’une contribution de “non-flow” :

$$\langle \cos(\phi_1 - \phi_2) \rangle = \langle v_2 \rangle^2 + \delta \quad (\text{H.10})$$

où δ désigne le “non-flow”. Le coefficient δ est fondé sur la mesure des corrélations à 2 particules dans les collisions proton-proton “minimum bias”. Dans ces collisions, la multiplicité de particules est trop faible pour que des effets collectifs se développent^e. Dans le cas des collisions noyau-noyau, on considère que les effets de “non-flow” sont proportionnels à $2/N_{part}$, ce facteur prend en compte qu’une collision proton-proton est une collision à deux participants, mais que l’effet des corrélations de “non-flow” est dilué par la présence d’un plus grand nombre de participants^f.

A l’inverse, les cumulants à 4 particules sont indépendants des effets de “non-flow” :

$$v_2\{4\} = \langle v_2 \rangle. \quad (\text{H.11})$$

En ce qui concerne les mesure de flot liées au plan de l’événement, on peut montrer [177] que :

- Si la résolution est faible, $v_2\{EP\}$ coïncide avec $v_2\{2\}$.
- Si la résolution est bonne, $v_2\{EP\}$ est la moyenne de $v_2\{2\}$ et $v_2\{4\}$.

A noter que la mesure de $v_2\{EP\}$ de PHENIX est sans doute moins biaisée par les effets de “non-flow” que la mesure de STAR car on attend moins de corrélations entre particules séparées par un large intervalle en pseudo-rapacité.

^bLes 2 expériences STAR et PHENIX utilisent des découpages différents : STAR coupe l’événement en 2 sous-événements de même multiplicité à rapidité centrale, quand PHENIX définit les sous-événements comme séparés par un large intervalle en rapidité.

^cA noter que pour déterminer les coefficients de flot, on corrèle la direction azimutale d’une particule i avec la direction azimutale du plan de l’événement déterminée par les autres particules (on évite ainsi des corrélations non physiques).

^dOn désigne ainsi les corrélations azimutales non dues aux effets collectifs.

^eLes corrélations à 2 particules n’ont ici qu’une composante non liée à la direction d’un plan de réaction.

^fA noter que l’on aurait également pu considérer que ces effets sont inversement proportionnels à la multiplicité. Mais comme celle-ci dépend de l’acceptance des détecteurs, un paramètre supplémentaire est, dans ce cas, nécessaire.

Effets des fluctuations

On sait que le flot elliptique résulte de l'anisotropie de la distribution initiale de matière, dont on a vu qu'elle pouvait fluctuer d'un événement à l'autre. Il existe plusieurs sources de fluctuations : les fluctuations de paramètre d'impact dans une classe d'événements, et/ou les fluctuations des positions des nucléons participants. Ce sont ces fluctuations qui rendent le flot v_2 plus grand dans le plan des participants que dans le plan de réaction

L'amplitude de ces fluctuations est définie par :

$$\sigma_v^2 = \langle (v_2)^2 \rangle - \langle v_2 \rangle^2. \quad (\text{H.12})$$

Dans le cas des corrélations à 2 particules nous avons donc :

$$v_2\{2\} = \langle (v_2)^2 \rangle = \langle v_2 \rangle^2 + \sigma_v^2 \quad (\text{H.13})$$

alors que l'approche par les cumulants d'ordre 4 donne :

$$v_2\{4\} = \left(2\langle (v_2)^2 \rangle^2 - \langle (v_2)^4 \rangle \right)^{1/2} = \langle v_2 \rangle^2 - \sigma_v^2. \quad (\text{H.14})$$

Dans le cadre d'une méthode d'analyse quelconque de v_2 , on peut calculer l'impact des fluctuations sur la valeur mesurée par

$$\langle f(v_2) \rangle = f(\langle v_2 \rangle) + \frac{\sigma_v^2}{2} f''(\langle v_2 \rangle). \quad (\text{H.15})$$

En ce qui concerne les mesures de flot liées au plan de l'événement, on peut paramétrer l'impact des fluctuations via un paramètre α , fonction de la résolution du plan de l'événement (voir [184] et la suite de cette annexe).

H.2 Applications aux données des collisions Au-Au au RHIC à $\sqrt{s} = 200\text{GeV}$

Pour le moment nous avons utilisé des équations génériques à la fois pour les fluctuations, et pour les effets de “non-flow”. Pour appliquer ces équations aux données expérimentales, nous allons faire les hypothèses suivantes :

- Evolution hydrodynamique idéale (le système est considéré localement thermalisé) on a donc $v_2 \propto \epsilon$.
- Les fluctuations ont pour unique origine les fluctuations de l'excentricité dans le plan de participants ϵ_{part} . On peut obtenir celles-ci à partir d'un générateur de conditions initiales Monte Carlo, ou faire l'hypothèse que la statistique des fluctuations est convenablement décrite par une gaussienne à 2 dimensions [185, 177] (modèle standard des fluctuations d'excentricité).
- Les effets de “non-flow” sont reliés aux corrélations azimutales dans les collisions proton-proton, compte tenu du nombre de participants de la collision (N_{part}). A partir des données

de collisions proton-proton (figure 1 de [186]), on calcule [177] $\delta_{pp} = 0.0145$. On en déduit alors :

$$\delta = \delta_{pp} 2/N_{part} \quad (\text{H.16})$$

puisque chaque paire de participants est assimilable à une collision proton-proton. L’hypothèse (2) sur les fluctuations se traduit par :

$$\frac{\sigma_\epsilon}{\epsilon} = \frac{\sigma_v}{v_2} \quad (\text{H.17})$$

La prise en compte des effets de fluctuations et de “non-flow” se traduit donc comme :

$$v_2\{2\}^2 = \langle v_2 \rangle^2 + \delta + \sigma_v^2 \quad (\text{H.18})$$

$$v_2\{4\}^2 = \langle v_2 \rangle^2 - \sigma_v^2. \quad (\text{H.19})$$

On peut donc relier le flot elliptique v_2 physique aux mesures expérimentales comme :

$$\langle v_2 \rangle = \sqrt{\frac{v_2\{2\}^2 - \delta}{1 + \frac{\sigma_\epsilon}{\epsilon}}} \quad (\text{H.20})$$

$$= \frac{v_2\{4\}}{1 - \frac{\sigma_\epsilon}{\epsilon}} \quad (\text{H.21})$$

Une compilation de mesures par différentes méthodes d’analyse est présentée sur la figure H.1 à droite avant corrections des effets de fluctuations et de “non-flow”^g, et à gauche, après correction. On voit clairement que la prise en compte de ces effets (la notation PP réfère au plan de participants) permet de faire correspondre entre eux les résultats obtenus par les différentes méthodes d’analyse.

H.3 Effets de “non-flow” dans les mesures de v_4 sur la dépendance en centralité de $v_4/(v_2)^2$.

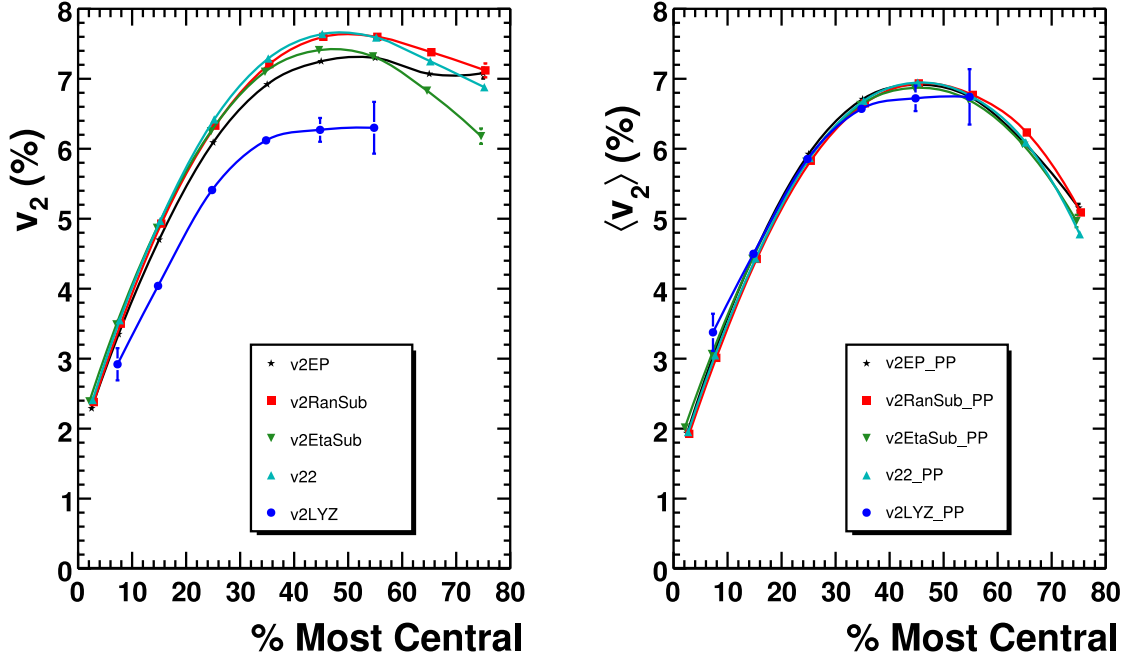
Nous avons vu dans la section X.1.3 que, si les calculs hydrodynamiques prédisent un rapport $v_4/(v_2)^2 = 0.5$ pour les particules à haut p_t , expérimentalement on observe un rapport $\simeq 0.8-1.6$ fonction de la centralité. En particulier on observe que les données de STAR sont légèrement au dessus de celles de PHENIX. Il est possible d’évaluer l’erreur due au “non-flow” dans la mesure de v_4 , dans l’hypothèse où les coefficients de flot sont calculés via les corrélations azimutales de particules :

$$v_2\{2\} = \sqrt{\langle \cos(\phi_1 - \phi_2) \rangle} = \sqrt{\langle (v_2)^2 \rangle} \quad (\text{H.22})$$

$$v_4\{3\} = \frac{\langle \cos(4\phi_1 - 2\phi_2 - 2\phi_3) \rangle}{(v_2)^2}. \quad (\text{H.23})$$

Dans l’expression de $v_4\{3\}$, v_2 doit être obtenu par une autre méthode d’analyse. Les effets de “non-flow” sur la mesure de $v_4\{3\}$ sont dus à des corrélations entre 2 des 3 particules.

^gPour les détails des paramétrisations de ces effets voir [177].



(a) Flot elliptique obtenu expérimentalement par différentes méthodes d'analyse. $v_{2,RanSub}$ et $v_{2,EtaSub}$ correspondent à des mesures de v_2 par la méthode du plan pour tenir compte des effets des fluctuations et du "non-de l'événement, celui-ci étant défini de différentes façons. (b) Mêmes données que sur la figure de gauche, mais on a cette fois corrigé les différentes méthodes d'analyse "non-flow". A noter que $v_{2,EtaSub}$ étant moins sensible aux effets de "non-flow", les auteurs ont utilisé un δ_{nf} 2 fois plus petit.

FIG. H.1 – Comparaison des différentes méthodes d'analyse de v_2 avec ou sans prise en compte des fluctuations et effets de "non-flow". Figure extraite de [177].

En négligeant les effets de "non-flow" sur la mesure de v_2 , on peut évaluer l'erreur liée à ces corrélations sur la mesure de v_4 :

$$\langle \cos(4\phi_1 - 2\phi_2 - 2\phi_3) \rangle = v_4(v_2)^2 + \delta_{nf}(v_2)^2 \quad (\text{H.24})$$

où δ_{nf} désigne les corrélations de "non-flow". En suivant la même procédure que dans la section H.1, on obtient :

$$\delta \left[\frac{v_4}{(v_2)^2} \right]_{nf} = \frac{2\delta_{pp}}{N_{part}((v_2)^2)}. \quad (\text{H.25})$$

En pratique, les mesures des coefficients de flot sont réalisées par la méthode du plan de l'événement. L'évaluation des effets de "non-flow" dans cette approche dépend de la résolution du plan de l'événement, qui est également une fonction de la centralité [177]. Néanmoins l'amplitude des effets est du même ordre.

H.4 Effets des fluctuations de flot sur le rapport $v_4\{EP\}/v_2\{EP\}^2$

En pratique, expérimentalement, v_2 et v_4 sont analysés par la méthode du plan de l'événement H.1, et l'on note les coefficients obtenus $v_4\{EP\}$ et $v_2\{EP\}$. Dans le cadre d'un modèle de petites fluctuations, on note $v_2 = \langle v_2 \rangle + \delta_v$ avec $\langle \delta_v \rangle = 0$ et $\langle \delta_v^2 \rangle = \sigma_v^2$. On obtient donc au premier ordre en σ_v^2 :

$$\frac{v_4\{3\}}{v_2\{2\}^2} \frac{\langle (v_2)^4 \rangle}{\langle (v_2)^2 \rangle^2} = \frac{1}{2} \left(1 + 4 \frac{\sigma_v^2}{\langle v_2 \rangle^2} \right) \quad (\text{H.26})$$

et de la même façon :

$$\frac{v_4\{EP\}}{v_2\{EP\}^2} = \frac{1}{2} \left(1 + \alpha \frac{\sigma_v^2}{\langle v_2 \rangle^2} \right), \quad (\text{H.27})$$

où α dépend de la résolution du plan de l'événement.

La figure H.2 montre l'évolution de α avec la résolution. On voit que $\alpha \leq 4$. L'analyse du plan de l'événement est donc moins sujette aux fluctuations que l'analyse des corrélations azimutales de particules. C'est d'ailleurs ce qui est expérimentalement observé puisque $v_4\{3\} > v_4\{EP\}$ dans [187].

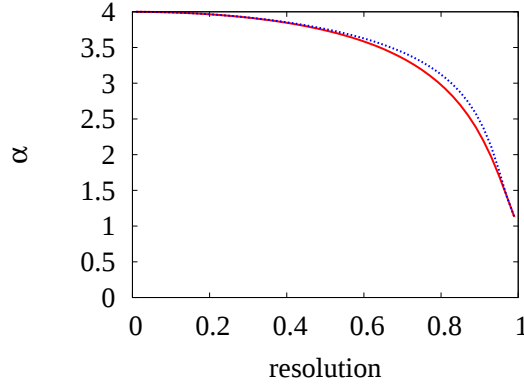


FIG. H.2 – Evolution du paramètre α de l'équation H.27 en fonction de la résolution du plan de l'événement. La courbe en pointillés correspond au cas où le direction est déterminée par 1 sous-événement, et la courbe pleine par 2 sous-événements. Figure extraite de [188].

En pratique, la résolution est de 0.84 pour STAR [189] et de 0.74 pour PHENIX [190]. Par ailleurs, quelque soit la centralité, dans l'expérience PHENIX, $\alpha \geq 3.2$; L'amplitude des fluctuations est donc au moins 80% de l'amplitude observée pour l'analyse par les corrélations azimutales de particules.

Corrélations quantiques et rayons HBT

Sommaire

I.1	Interférences quantiques et fonction de corrélation à 2 particules	xlix
I.2	Rayons HBT dans la résolution numérique de l'équation de Boltzmann à deux dimensions	1
I.3	Calcul des rayons HBT pour une collision non-centrale	lii
I.4	Evaluation des erreurs pour le calcul des rapports d'amplitude d'oscillations HBT	lv

I.1 Interférences quantiques et fonction de corrélation à 2 particules

Dans cette section, on considère une source étendue, statique, qui émet 2 pions en S_1 et S_2 qui seront détectés en D_1 et D_2 .

Le principe des interférences quantiques est illustré sur la figure :

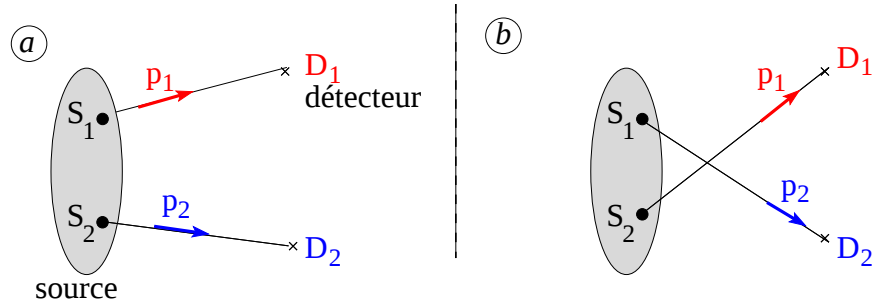


FIG. I.1 – Emission de deux pions issus d'une source étendue (points S_1 et S_2) et détection aux points D_1 et D_2 .

Comme expliqué dans la section XI.1.1, les interférences proviennent de la symétrie de la

fonction d'onde totale. Dans le cas qui nous intéresse, les particules sont des pions identiques (que l'on admettra convenablement décrit par des ondes planes). On note a et b les 2 états finaux possibles, les fonctions d'onde correspondantes sont données par :

$$|\psi_a\rangle = e^{i\vec{p}_1 \cdot \vec{S}_1 \vec{D}_1} e^{i\vec{p}_2 \cdot \vec{S}_2 \vec{D}_2} \quad (\text{I.1})$$

$$|\psi_b\rangle = e^{i\vec{p}_1 \cdot \vec{S}_1 \vec{D}_2} e^{i\vec{p}_2 \cdot \vec{S}_2 \vec{D}_1}. \quad (\text{I.2})$$

La fonction d'onde totale devant être invariante par l'échange des particules, on a :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_a\rangle + |\psi_b\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\Phi(1 + e^{i(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \cdot \vec{S}_1 \vec{S}_2})}. \quad (\text{I.3})$$

La probabilité de détection des 2 particules (émises en $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$) est alors donnée par :

$$\langle\psi|\psi\rangle = \frac{1}{2} \left(1 + \text{Re}[\exp(i(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \cdot \vec{S}_1 \vec{S}_2)] \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \text{Re} \left(1 + e^{-i(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \cdot \vec{x}_1} e^{i(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \cdot \vec{x}_2} \right) \right) \quad (\text{I.4})$$

où $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ dénotent les positions des sources S_1 et S_2 .

On définit la fonction de corrélation à 2 particules comme le rapport des spectres à 2 particules inclusives et 1 particule inclusive mesurés :

$$\mathcal{C}_{a,b} = \frac{\frac{dN_{a,b}}{d^3p_a d^3p_b}}{\frac{dN_a}{d^3p_a} \frac{dN_b}{d^3p_b}}. \quad (\text{I.5})$$

Théoriquement, on peut relier la fonction de corrélation à 2 particules à la fonction de densité de la source qui les a émises en convoluant cette dernière avec la densité de probabilité de détecter les particules [192]. On obtient, en notant $\rho(\vec{x})$ la densité de la source au point $\vec{x}$:

$$\mathcal{C}_{1,2} = \frac{\int d^3x_1 d^3x_2 \rho(\vec{x}_1) \rho(\vec{x}_2) \langle\psi|\psi\rangle}{\int d^3x_1 \rho(\vec{x}_1) \int d^3x_2 \rho(\vec{x}_2)} \quad (\text{I.6})$$

ici encore $\vec{x}_i$ désigne la position de S_i , et $\langle\psi|\psi\rangle$ est donné par (I.4).

On obtient donc :

$$\mathcal{C}_{1,2} = 1 + \left| \int d^3x \rho(\vec{x}) e^{i(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \cdot \vec{x}} \right|^2. \quad (\text{I.7})$$

La fonction de corrélation à 2 particules est donc directement reliée à la transformée de Fourier de la source au point $\vec{q} = (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)$.

1.2 Rayons HBT dans la résolution numérique de l'équation de Boltzmann à deux dimensions

Le point de départ est l'équation :

$$\mathcal{C}_{1,2} = 1 + \left| \int d^3x \rho(\vec{x}) e^{i(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \cdot \vec{x}} \right|^2. \quad (\text{I.8})$$

Numériquement, la transformée de Fourier est réalisée de façon discrète :

$$TF = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}}. \quad (\text{I.9})$$

Pour l'étude des rayons HBT, on se place dans le référentiel co-mobile longitudinal (voir figure I.2) des particules au “freeze-out” (référentiel où $p_{1z} + p_{2z} = 0$). La direction $\vec{x}$ est donc parallèle à l'impulsion $\vec{K} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ (usuellement appelée *out*), $\vec{z}$ est la direction des faisceaux (appelée *long*) et $\vec{y}$ leur est orthogonal (appelée *side*). A noter que dans la résolution numérique de l'équation de Boltzmann, on est à rapidité nulle, et les particules se déplacent dans le plan transverse de la collision (plan $(\vec{x}, \vec{y})$). On a donc :

$$\vec{q} \cdot \vec{x} = q_x(x - vt) + q_y y \quad (\text{I.10})$$

où $\vec{v} = \vec{K}/K^0$ et $v = |\vec{v}|$.

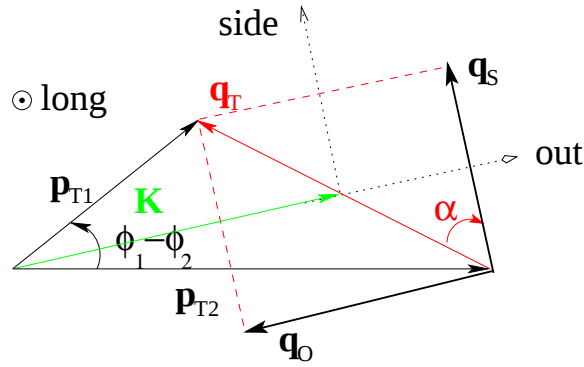


FIG. I.2 – Géométrie dans le plan transverse : définition des directions *side*, *out* et *long*.

La fonction de corrélation est proportionnelle à $|TF|^2$, et les rayons HBT sont définis en ajustant un profil gaussien sur la fonction de corrélation. Numériquement, on obtient (pour des collisions centrales) :

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} \right|^2 \simeq \exp \left(-\frac{q_o^2 R_o^2}{4} - \frac{q_s^2 R_s^2}{4} - \frac{q_L^2 R_L^2}{4} \right) \quad (\text{I.11})$$

Définis ainsi, les rayons HBT ne caractérisent pas la dimension de la source, mais les régions d'homogénéité [193] (i.e : régions de l'espace des phases correspondant aux particules émises avec une impulsion et une direction données).

Dans la résolution numérique de l'équation de Boltzmann, on suit au cours du temps les positions et impulsions des particules. On a donc accès à la distribution spatio-temporelle de particules au “freeze-out”. On peut donc définir les régions d'homogénéité d'émission de particules. En admettant que ces régions aient un profil gaussien, les rayons sont donnés par :

$$\begin{aligned} R_o^2 &= 2(\langle (x - vt)^2 \rangle - \langle (x - vt) \rangle^2) \\ R_s^2 &= 2(\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2) \end{aligned} \quad (\text{I.12})$$

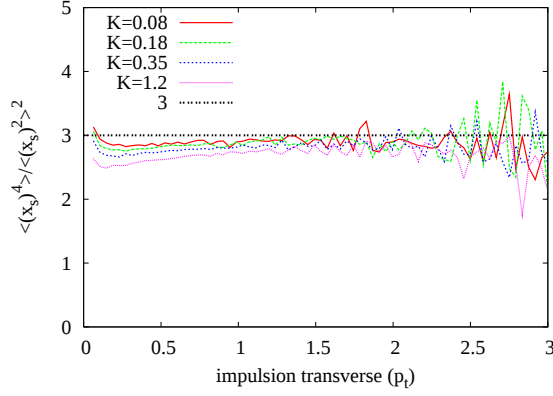


FIG. I.3 – Test des déviations à la distribution gaussienne des particules définissant une région d’homogénéité pour différentes valeurs de K . La ligne 3 correspond à la distribution gaussienne exacte.

où les $\langle \rangle$ dénotent une moyenne prise sur la distribution spatio-temporelle de particules au “freeze-out”.

Puisque, usuellement, une distribution normale est définie par :

$$\mathcal{N} \propto e^{-\frac{(x-\langle x \rangle)^2}{2\sigma_x^2}} \quad (\text{I.13})$$

où $\sigma_x = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$.

Nous avons vérifié numériquement la validité de l’hypothèse gaussienne faite pour les régions d’homogénéité. Pour cela nous avons étudié le rapport :

$$\frac{\langle x^4 \rangle}{\langle x^2 \rangle^2} \quad (\text{I.14})$$

qui doit être exactement 3 pour une distribution gaussienne. Les résultats pour l’étude de x_s sont indiqués sur la figure I.3. On voit que la source est essentiellement gaussienne indépendamment de la valeur de p_t .

I.3 Calcul des rayons HBT pour une collision non-centrale

Il est possible d’accéder de 2 façons différentes à la valeur des rayons HBT pour les collisions non centrales. On peut découper le plan transverse en “bins” d’azimut donné, et calculer les rayons dans chacun de ces “bins”. Cette approche semble la plus simple mais possède le défaut d’être gourmande en terme de statistique. On peut également déterminer les coefficients du développement en série de Fourier de la distribution spatio-temporelle de points au “freeze-out”, et les utiliser pour déterminer les rayons.

Dans cette section, je détaille le calcul des rayons HBT par la décomposition de Fourier, et je compare les résultats obtenus par les 2 méthodes.

Symétrie de le distribution de particules au “freeze-out”

Le point de départ du calcul des rayons HBT par décomposition de Fourier est la distribution spatio-temporelle de particules au “freeze-out” dans le repère LCMS (*out, side*). On considère de façon générale qu’une quantité possède la décomposition suivante :

$$\mathcal{S}(\phi) = \mathcal{S}_0 + \sum_{i=1}^N (2\mathcal{S}_{c,n} \cos(n\phi) + 2\mathcal{S}_{s,n} \sin(n\phi)). \quad (\text{I.15})$$

Néanmoins, on peut considérer les symétries du système au “freeze-out” pour limiter le nombre de termes à calculer. Le tableau suivant résume ces invariances^a :

Observable	Symétries	
	$\phi \rightarrow -\phi$	$\phi \rightarrow \phi + \pi$
$N(\phi)$	1	1
x_o	1	1
x_s	(-1)	1
x_o^2	1	1
x_s^2	1	1
x_{os}	(-1)	1

TAB. I.1 – Tableau indiquant le facteur lié à la symétrie pour les 6 quantités auxquelles on s’intéresse pour caractériser la distribution de particules au “freeze-out”.

Par ailleurs, comme pour les calculs de flot elliptique, la collision étant symétrique dans le centre de masse en rapidité, les harmoniques impaires sont nulles car on travaille à $y_{CDM} = 0$ (voir section IV.1). On peut donc restreindre les développements de Fourier à :

$$\begin{aligned}
N(\phi) &\propto v_0 + \sum_{n \geq 1} 2v_n \cos(2n\phi) \\
x_o(\phi) &\propto c_{o,0} + \sum_{n \geq 1} 2c_{o,n} \cos(2n\phi) \\
x_s(\phi) &\propto \sum_{n \geq 1} 2c_{s,n} \sin(2n\phi) \\
x_o^2(\phi) &\propto c_{o2,0} + \sum_{n \geq 1} 2c_{o2,n} \cos(2n\phi) \\
x_s^2(\phi) &\propto c_{s2,0} + \sum_{n \geq 1} 2c_{s2,n} \cos(2n\phi) \\
x_{os}(\phi) &\propto \sum_{n \geq 1} 2c_{os,n} \sin(2n\phi).
\end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

^aLa parité indique si ce sont les termes en sin ou en cos qui contribuent au développement, alors que la symétrie $\phi \rightarrow \phi - \pi$ indique si se sont les harmoniques paires (symétrie) ou impaires (anti-symétrie) qui contribuent.

Calcul des rayons par décomposition de Fourier

Une fois que l'on a identifié les termes à calculer, on obtient les coefficients de Fourier suivant :

$$\begin{aligned}
 v_n &= \langle \cos(2n\phi) \rangle \\
 c_{o,n} &= \langle x_o \cos(2n\phi) \rangle \\
 c_{s,n} &= \langle x_s \sin(2n\phi) \rangle \\
 c_{o2,n} &= \langle x_o^2 \cos(2n\phi) \rangle \\
 c_{s2,n} &= \langle x_s^2 \cos(2n\phi) \rangle \\
 c_{os,n} &= \langle x_o x_s \sin(2n\phi) \rangle
 \end{aligned} \tag{I.17}$$

(I.18)

On obtient alors l'information sur la distribution de particules au “freeze-out” par :

$$\begin{aligned}
 N(\phi) &= v_0 + \sum_{n \geq 1} 2v_n \cos(2n\phi) \\
 x_o(\phi) &= c_{o,0} + \sum_{n \geq 1} 2c_{o,n} \cos(2n\phi) \\
 x_s(\phi) &= \sum_{n \geq 1} 2c_{s,n} \sin(2n\phi) \\
 x_o^2(\phi) &= c_{o2,0} + \sum_{n \geq 1} 2c_{o2,n} \cos(2n\phi) \\
 x_s^2(\phi) &= c_{s2,0} + \sum_{n \geq 1} 2c_{s2,n} \cos(2n\phi) \\
 x_{os}(\phi) &= \sum_{n \geq 1} 2c_{os,n} \sin(2n\phi).
 \end{aligned} \tag{I.19}$$

A noter que jusqu'à présent, les coefficients sont tous des fonctions de l'impulsion transverse. dans la suite, nous allons calculer les rayons HBT sur la base d'une moyenne pondérée en l'impulsion transverse. Ce calcul se fait en 2 temps. On commence par calculer les rayons HBT en fonction de ϕ et p_t :

$$\begin{aligned}
 R_o(\phi, p_t) &= \frac{x_o^2(\phi, p_t)}{N(\phi, p_t)} - \left(\frac{x_o(\phi, p_t)}{N(\phi, p_t)} \right)^2 \\
 R_s(\phi, p_t) &= \frac{x_s^2(\phi, p_t)}{N(\phi, p_t)} - \left(\frac{x_s(\phi, p_t)}{N(\phi, p_t)} \right)^2 \\
 R_{os}(\phi, p_t) &= \frac{x_{os}^2(\phi, p_t)}{N(\phi, p_t)} - \left(\frac{x_o(\phi, p_t)}{N(\phi, p_t)} \frac{x_s(\phi, p_t)}{N(\phi, p_t)} \right).
 \end{aligned} \tag{I.20}$$

Reste maintenant à calculer la distribution azimutale de particules intégrée en impulsion

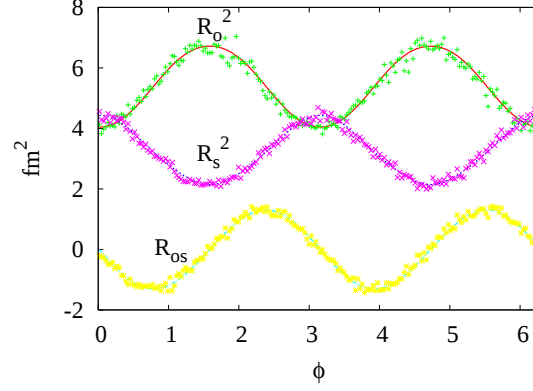


FIG. I.4 – Comparaison des 2 méthodes de calcul des rayons HBT pour les collisions non-centrales. Les lignes correspondent aux calculs par décomposition de Fourier, et les points au calculs par découpage en azimuth. Les barres d’erreur ont volontairement été omises pour plus de visibilité. Le calcul est réalisé pour $K = 0.08$.

transverse. Elle est donnée par :

$$n_{pt}(\phi) = \sum_{p_t} v_0(p_t) + \sum_{n \geq 1} 2 \sum_{p_t} v_n(p_t) \cos(2n\phi). \quad (\text{I.21})$$

On obtient alors la dépendance azimutale des rayons HBT comme :

$$R_i(\phi) = \frac{\sum_{p_t} R_i(\phi, p_t) N(\phi, p_t)}{n_{pt}(\phi)}. \quad (\text{I.22})$$

La figure I.4 compare le calcul de la dépendance azimutale des rayons HBT par décomposition de Fourier et par un calcul direct dans chaque “bin” d’azimut fixé. Il apparait que le calcul converge rapidement, et donc dans la suite, on ne considèrera que l’expansion de Fourier jusqu’aux termes en $\cos(4\phi)$ et $\sin(4\phi)$ respectivement.

I.4 Evaluation des erreurs pour le calcul des rapports d’amplitude d’oscillations HBT

Dans cette section, on considère que les rayons HBT sont calculés par décomposition de Fourier. Dans ce cas, on a :

$$x_{o,s}^2 \propto a + b \cos(2\phi). \quad (\text{I.23})$$

L’amplitude d’oscillation des rayons “out” (“side”) est donnée par :

$$\Delta R_o^2 = 4 \langle x_o^2 \cos(2\phi) \rangle. \quad (\text{I.24})$$

L’erreur sur l’amplitude d’oscillation est donc donnée par :

$$(\delta \Delta R_{o,s}^2)^2 = 4 \frac{1}{N} \left(\langle (x_o^2 \cos(2\phi))^2 \rangle - \langle x_o^2 \cos(2\phi) \rangle^2 \right) \quad (\text{I.25})$$

On suppose ici que x_o^2 et $\cos(2\phi)$ sont indépendant. On obtient donc :

$$\delta\Delta R_{o,s}^2 = \sqrt{\frac{3}{2N}} \langle x_{o,s}^2 \rangle \quad (\text{I.26})$$

où l'on a utilisé que $\langle \cos^2 \rangle = 1/2$ et que les distributions spatio-temporelles au “freeze-out” sont gaussiennes, on a donc $\langle x^4 \rangle = 3\langle x^2 \rangle$.

Pour simplifier dans la suite les expressions, on considère que :

$$2\langle x_{o,s}^2 \rangle \simeq R_{o,s}^2(0) + R_{o,s}^2(\pi/2), \quad (\text{I.27})$$

ce qui permet d'écrire que :

$$\delta\Delta R_{o,s}^2 \propto 2\sqrt{\frac{3}{2N}} (R_{o,s}^2(0) + R_{o,s}^2(\pi/2)). \quad (\text{I.28})$$

On fait alors apparaître que :

$$\frac{\delta\Delta R_{o,s}^2}{\Delta R_{o,s}^2} = 2\sqrt{\frac{3}{2N}} \frac{1}{\epsilon_{o,s}^2}. \quad (\text{I.29})$$

On peut alors évaluer l'erreur statistique sur les rapports d'amplitudes d'oscillations suivant la formule :

$$\left(\delta \frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \left(\left(\frac{\delta a}{a} - \frac{\delta b}{b}\right)^2\right) \quad (\text{I.30})$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta \frac{\Delta R_o^2}{\Delta R_s^2}}{\frac{\Delta R_o^2}{\Delta R_s^2}}\right)^2 &= \frac{6}{N} \frac{1}{\epsilon_o^2} + \frac{6}{N} \frac{1}{\epsilon_s^2} - \frac{4}{N} \frac{1}{\epsilon_s} \frac{1}{\epsilon_o} \\ &= \frac{8}{N} \frac{1}{\epsilon^2} \end{aligned} \quad (\text{I.31})$$

en considérant $\epsilon_o \simeq \epsilon_s \simeq \epsilon$, où ϵ dénote l'excentricité standard de la distribution initiale de matière.

De façon similaire, on obtient :

$$\left(\frac{\delta \frac{\Delta R_{os}}{\Delta R_o^2}}{\frac{\Delta R_{os}}{\Delta R_o^2}}\right)^2 = \left(\frac{\delta \Delta R_{os}}{\Delta R_{os}}\right)^2 + \left(\frac{\delta \Delta R_o^2}{\Delta R_o^2}\right)^2 - 2 \frac{\delta \Delta R_o^2 \delta \Delta R_{os}}{\Delta R_o^2 \Delta R_{os}} \quad (\text{I.32})$$

En notant que $\delta \Delta R_o^2 \propto \cos(2\phi)$ et $\delta \Delta R_{os} \propto \sin(2\phi)$ alors le terme de produit croisé correspond à un terme en $\sin(4\phi)$, et est donc d'ordre supérieur dans la développement, on va donc le négliger. Par ailleurs, on sait que $\langle (x_o x_s \sin(2\phi))^2 \rangle \propto R_o^2 R_s^2 / 2$, on obtient donc :

$$\left(\frac{\delta \frac{\Delta R_{os}}{\Delta R_o^2}}{\frac{\Delta R_{os}}{\Delta R_o^2}}\right)^2 = \frac{2}{N} \frac{1}{\epsilon_o \epsilon_s} + \frac{6}{N} \frac{1}{\epsilon_o^2}. \quad (\text{I.33})$$

Enfin, on considère :

$$\delta \frac{\epsilon_s}{\epsilon} = \frac{\delta \Delta R_s^2}{R_s^2(0) - R_s^2(\pi/2)} - \frac{\delta (R_s^2(0) - R_s^2(\pi/2))}{(R_s^2(0) - R_s^2(\pi/2))^2} \quad (\text{I.34})$$

où l'on va négliger le second terme devant le premier pour obtenir :

$$\delta \frac{\epsilon_s}{\epsilon} = \sqrt{\frac{6}{N}} \frac{1}{\epsilon}. \quad (\text{I.35})$$

