

UNIVERSITÉ PARIS-DIDEROT

(Paris 7)

Spécialité : **Astrophysique**

Mémoire d'habilitation à diriger des recherches

présenté par

Patrick Valageas

*Formation des structures de grande échelle en
Cosmologie : dynamique gravitationnelle*

Présenté le 3 décembre 2010 à Saclay, devant le jury composé de :

Jean-Michel Alimi	LUTH (Paris 7)	Président
Alain Blanchard	LATT (Toulouse 3)	Rapporteur
Stéphane Colombi	IAP (Paris 6)	
Michael Joyce	LPNHE (Paris 6)	Rapporteur
Marguerite Pierre	CEA/SAp (Paris 7)	Rapporteur
Joseph Silk	University of Oxford	

Avant-Propos

Thématiques de recherche

Mon domaine de recherche est **l'étude théorique de la formation des grandes structures de l'Univers** : galaxies, amas de galaxies, "cosmic web" (réseau formé par les filaments qui lient les amas de galaxies et délimitent de grands vides), et de la dynamique gravitationnelle qui en est l'origine.

Mes travaux se regroupent ainsi en deux voies parallèles :

- **étude de l'évolution des objets astrophysiques** (galaxies,...) engendrés au cours du temps par ce processus hiérarchique d'effondrement gravitationnel, et des conséquences en cosmologie observationnelle. Un sujet connexe est l'étude des **effets de lentille gravitationnelle** dûs aux structures à grande échelle du champ de densité cosmologique.
- **étude de la dynamique gravitationnelle** elle-même, en tant que système avec interactions à longue portée hors d'équilibre. Ceci présente un intérêt plus général et se rapproche de thématiques d'hydrodynamique et de physique statistique.

Dans ces deux domaines, mon travail consiste à développer des outils analytiques :

- **modèles phénoménologiques**, qui visent à fournir une description réaliste du système, permettant d'évaluer et de comprendre les processus "astrophysiques" induits (distribution des galaxies,...). Ceci permet par exemple de contraindre les scénarios cosmologiques.
- **méthodes systématiques** pour calculer les propriétés statistiques de la dynamique. Cela peut consister en des développements perturbatifs, des méthodes d'approximation non-perturbatives, ou la résolution exacte de systèmes simplifiés.

Cette thématique assez large me donne l'occasion d'aborder des points assez variés, depuis la réionisation de l'Univers par les premières étoiles jusqu'à l'étude de la dynamique de Burgers, qui intervient aussi en turbulence hydrodynamique. Je profite ainsi de l'interdisciplinarité de l'IPhT pour explorer des approches venant de plusieurs domaines connexes (théorie des champs, physique statistique, turbulence), que j'applique au contexte cosmologique ou réciproquement.

Une description synthétique de mes travaux de recherche sur ces divers sujets (et quelques questions annexes) est donnée en annexe B, page 93. Une liste complète de mes articles, cités dans ce bref résumé, est donnée en annexe C, page 100.

Structure du mémoire

Dans ce mémoire, je me suis concentré sur l'étude de la dynamique gravitationnelle elle-même, c'est-à-dire **la formation des structures du champ de densité par gravité Newtonienne**¹ à partir de petites fluctuations initiales. Bien que j'aborde aussi certains aspects de cosmologie observationnelle, tels que la fonction de masse des halos virialisés, je laisse donc de côté les études liées à des aspects plus astrophysiques, tels que la formation des galaxies, la réionisation de l'Univers par les premières étoiles, ainsi que les effets de lentille gravitationnelle. Par ailleurs, je néglige l'effet des baryons sur la dynamique (ce qui est une bonne approximation aux échelles de l'ordre de la taille des galaxies et au-delà, [74]) pour ne considérer que la matière noire sans collision, dans le cadre de scénarios CDM standards [126]. Par conséquent, la seule force à l'oeuvre est la gravité Newtonienne. La difficulté du problème vient alors de la non-linéarité des équations du mouvement et du fait que l'on s'intéresse aux propriétés statistiques du système, pour des conditions initiales aléatoires généralement supposées Gaussiennes.

¹Le cadre rigoureux est bien sûr fourni par la relativité générale d'Einstein, mais aux échelles étudiées dans ce mémoire, sous l'horizon, on montre que l'on retrouve la dynamique Newtonienne, dans un Univers dont l'expansion générale est décrite par les équations d'Einstein.

L'objectif de ce mémoire est donc d'illustrer comment cette thématique bien précise peut être abordée sous plusieurs angles complémentaires, qui permettent d'obtenir des résultats qualitatifs et quantitatifs dans divers régimes.

Ce mémoire est organisé comme suit :

- Chapitre 1 : Dans une brève introduction, je rappelle les équations du mouvement qui décrivent le système étudié dans ce mémoire, ainsi que le contexte plus général.
- Chapitre 2 : La première ligne d'attaque du problème consiste à développer des approches perturbatives, tirant parti du fait que les fluctuations de densité sont très faibles dans le passé reculé ou aux très grandes échelles (régime quasi-linéaire). Je présente dans ce chapitre plusieurs développements perturbatifs possibles (associés à des resommations partielles différentes), qui permettent de décrire le régime faiblement non-linéaire, principalement à travers les fonctions de corrélation de bas ordre du champ de densité.
- Chapitre 3 : Une seconde approche, qui vise aussi à tirer parti de simplifications possibles du problème, consiste à étudier des quantités à symétrie sphérique dans un régime d'événements rares. Il s'agit principalement de la distribution de probabilité de la densité dans un volume sphérique quelconque. Je décris dans ce chapitre comment une méthode de point col, non-perturbative (par comparaison avec les techniques du chapitre précédent), permet d'obtenir des résultats asymptotiques pour les queues de distribution de cette fonction de probabilité, pour des conditions initiales Gaussiennes et non-Gaussiennes.
- Chapitre 4 : Les deux approches précédentes ne fournissent que des résultats partiels, qui ne s'appliquent que dans certains régimes et ne sont pas toujours très bien contrôlés. Un angle d'attaque radicalement différent consiste à obtenir des résultats plus complets pour des dynamiques simplifiées. Dans un objectif d'abord qualitatif, il s'agit donc d'étudier des systèmes plus simples, permettant d'obtenir des résultats exacts, mais suffisamment proches pour éclairer la dynamique gravitationnelle. Je présente dans ce chapitre quelques résultats obtenus pour le modèle d'adhésion (dynamique de Burgers), qui permettent notamment de préciser certains résultats obtenus par les méthodes perturbatives du chapitre 2.
- Chapitre 5 : Enfin, dans un objectif plus appliqué, une dernière méthode consiste à développer des modèles phénoménologiques. Ici, il ne s'agit donc plus d'obtenir des résultats exacts, à l'aide de développements systématiques ou de méthodes non-perturbatives, tirés directement des équations du mouvement. Il faut plutôt construire quelques approximations, en court-circuitant au besoin certains aspects du problème, permettant de décrire des quantités directement observées sur le ciel. Je présente dans ce chapitre un modèle permettant de décrire la fonction de masse et la fonction de corrélation des halos de matière noire massifs, correspondant aux amas de galaxies.
- Chapitre 6 : Je conclus brièvement dans ce chapitre sur les complémentarités de ces diverses lignes d'attaque du problème.

La liste des articles repris dans ces divers chapitres est donnée page 92.

Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement mes différents collaborateurs, y compris sur les travaux de recherche qui ne sont pas présentés dans ce mémoire. Je souhaite plus particulièrement remercier Richard Schaeffer, qui m'a guidé durant ma thèse et mes premières années de recherche, et Francis Bernardeau, avec qui j'ai aussi eu la chance de pouvoir travailler à l'IPhT. Je reste également reconnaissant à Joe Silk pour m'avoir accueilli en Postdoc à Berkeley puis pour quelques collaborations ultérieures, et à Dipak Munshi pour sa gentillesse et son enthousiasme tout au long d'une collaboration de longue durée. Enfin, je remercie mes collègues de l'IPhT, dont le caractère multi-disciplinaire m'a été régulièrement très utile. Je suis en particulier reconnaissant à Olivier Golinelli et Kirone Mallick qui, bien que travaillant dans des domaines différents, ont patiemment répondu au cours de ces années à mes questions sur divers sujets de physique ou d'informatique. Je remercie également mon collègue de bureau, Stéphane Lavignac, qui parvient à me supporter au prix de quelques remparts de papier.

Enfin, je suis reconnaissant aux membres du jury pour avoir accepté d'en faire partie et d'y consacrer un peu de leur temps.

Table des matières

Avant-Propos	i
1 Introduction	1
2 Méthodes perturbatives	9
2.1 Introduction	9
2.2 Théorie des perturbations ordinaire	10
2.3 Reformulation sous forme d'intégrale de chemin	12
2.4 Développement en puissances du terme d'interaction cubique	14
2.5 Développements de grand N	16
2.5.1 Méthode du col directe	17
2.5.2 Action effective 2PI	21
2.6 Résultats des méthodes de grand N	22
2.6.1 Méthode du col directe	22
2.6.2 Action effective 2PI	25
2.7 Resommations dans la limite de grand k	28
2.7.1 Formalisme Eulérien	28
2.7.2 Formalisme Lagrangien	31
2.8 Conclusion	35
3 Méthodes non-perturbatives	36
3.1 Introduction	36
3.2 Méthode du col sphérique dans la limite quasi-linéaire	37
3.3 Méthode du col sphérique pour des conditions initiales non Gaussiennes	42
3.3.1 Un modèle CDM isocourbe	42
3.3.2 Modèle d'inflation standard	46
3.4 Conclusion	48
4 Résolution exacte de dynamiques simplifiées	50
4.1 Introduction	50
4.2 Définition du modèle d'adhésion	52
4.2.1 Equations du mouvement	52
4.2.2 Solution de Hopf-Cole et interprétation géométrique	54
4.3 Vitesse initiale Brownienne	56
4.3.1 Méthode de calcul	56
4.3.2 Propriétés du champ de densité	58
4.3.3 Distribution des chocs	59
4.4 Fonctions de réponse	60
4.4.1 Réponse Eulérienne	61
4.4.2 Réponse Lagrangienne	63
4.5 Conclusion	66
5 Approches phénoménologiques	68
5.1 Introduction	68
5.2 Fonction de masse des amas de galaxies massifs	69
5.3 Fonction de corrélation (biais) des halos	71
5.4 Conditions initiales non-Gaussiennes	73
5.4.1 Fonction de masse des amas de galaxies	74

5.4.2	Fonction de corrélation (biais) des halos	76
5.5	Conclusion	80
6	Conclusion	81
	Bibliographie	84
	Liste des publications reprises dans ce mémoire	92
A	Exposé synthétique des travaux de recherche	93
A.1	Cosmologie observationnelle	93
A.2	Dynamique gravitationnelle et formation des grandes structures de l'Univers	95
B	Perspectives scientifiques	98
C	Liste complète des publications	100

Chapitre 1

Introduction

D’après les scénarios cosmologiques standards, les structures de grande échelle observées dans l’Univers actuel (par exemple, les amas de galaxies et leur distribution spatiale, les filaments qui les connectent et les grandes régions sous-denses que ces derniers délimitent) se sont formées par amplification de petites fluctuations primordiales, sous l’effet de l’instabilité gravitationnelle [126, 151, 53]. Ainsi, à partir de l’observation de l’Univers récent, à des redshifts $z < 5$, par le biais des catalogues de galaxies [168, 37], des effets de lentilles gravitationnelles qui déforment l’image des galaxies lointaines [100, 116], de la mesure des oscillations acoustiques baryoniques [58, 59], on peut obtenir des contraintes sur les paramètres cosmologiques et sur les propriétés de ces fluctuations de densité primordiales. Ceci nécessite des prédictions théoriques précises sur l’évolution des grandes structures, afin de pouvoir comparer les modèles cosmologiques aux observations.

Aux très grandes échelles, ou aux grands redshifts, les fluctuations de densité étant de faible amplitude, il est possible de se contenter de la théorie linéaire, tandis qu’aux petites échelles fortement non-linéaires on utilise généralement des simulations numériques [39, 159, 171, 81, 173, 4]. Cependant, afin de faciliter la comparaison avec les observations, il est souvent utile de développer des modèles phénoménologiques, tels que le modèle de halos [43], qui permettent de balayer plus rapidement une grande gamme de scénarios cosmologiques. Par ailleurs, plusieurs techniques observationnelles, telles que la mesure des oscillations acoustiques baryoniques [58, 59] ou l’étude des effets de lentilles gravitationnelles [100, 116], sont sensibles au régime faiblement non-linéaire. Dans ce domaine, des approches systématiques perturbatives sont possibles et se révèlent plus efficaces que les simulations numériques [48]. En effet, les fits tirés de ces dernières ne permettent pas de décrire avec une très bonne précision les détails fins du spectre de puissance du champ de densité, et notamment l’évolution des oscillations avec les paramètres cosmologiques, tandis que les approches analytiques systématiques s’adaptent sans problème à des conditions initiales et des paramètres cosmologiques variés. Enfin, d’un point de vue qualitatif, des approches analytiques, même appliquées à des systèmes simplifiés, peuvent offrir une compréhension plus profonde des processus mis en jeu par la dynamique gravitationnelle, que ne le ferait une simple lecture des résultats numériques. Le sujet de ce mémoire est donc l’étude de diverses méthodes analytiques permettant de prédire les propriétés du champ de densité engendré par ce processus d’instabilité gravitationnelle, et des objets astrophysiques associés, tels que les amas de galaxies, à partir des petites fluctuations initiales prédites dans les scénarios usuels de l’Univers primordial (modèles d’inflation).

Rappelons tout d’abord que dans le scénario de matière noire froide habituel (CDM pour “cold dark matter”) [127], à peu près 83% du contenu de l’Univers (en terme de masse) correspond à une composante de matière noire froide, tandis que la matière baryonique ordinaire ne forme que les 17% restant. Par ailleurs, il existe en plus une composante d’énergie noire, qui forme environ 72% du contenu énergétique de l’Univers, tandis que les deux composantes de matière précédentes n’en forment que les 28% restant [93]. Ici, on a considéré que cette “énergie noire” correspondait par exemple à “l’énergie du vide” (du fait de fluctuations quantiques), où à un champ scalaire de quintessence inconnu, mais les mesures incriminées pourraient aussi bien être expliquées par l’introduction d’une simple constante cosmologique dans les équations d’Einstein.

La matière noire froide a une dispersion de vitesse négligeable (d’où l’adjectif “froide”), afin de ne pas empêcher la formation des galaxies par effondrement gravitationnel des régions surdenses, et des interactions non-gravitationnelles très faibles (d’où l’adjectif “noire”), afin d’expliquer le fait que sa présence n’ait été détectée que par ses effets gravitationnels (elle n’a pas encore été “vue” par le biais de processus radiatifs, collisionnels ou d’annihilation). Par conséquent, elle est bien décrite comme un fluide sans pression, couplé à sa propre gravité (dans ce mémoire nous nous restreignons à l’Univers “récent”, après la fin de l’ère dominée par la radiation, c’est-à-dire environ 5×10^4 ans après le “Big Bang”, et aux échelles plus petites que l’horizon, où l’approximation Newtonienne est valable). Ici, le terme “fluide” signifie simplement que, la masse des particules étant très petite, et la dispersion de vitesse négligeable, dans le cadre d’une approximation continue on peut décrire (au moins

dans ses premières époques) le système par un champ de densité $\rho(\mathbf{x}, t)$ et un champ de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. La croissance des fluctuations de densité (et de vitesse) est alors décrite par les équations hydrodynamiques, c'est-à-dire l'équation d'Euler sans pression (eq.(1.2) ci-dessous) et l'équation de continuité, couplées à l'équation de Poisson, qui donne la force d'auto-gravité du système, dans un univers en expansion [126]. A l'aide de changements de coordonnées et d'une redéfinition du champ de vitesse, qui élimine le flot de Hubble associé à l'expansion uniforme de l'Univers (et absorbe aussi l'effet de la constante cosmologique, ou d'une "énergie noire" uniforme), on obtient ainsi les équations [126, 19]

$$\frac{\partial \delta}{\partial \tau} + \nabla \cdot [(1 + \delta)\mathbf{v}] = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + \mathcal{H}\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla\phi, \quad (1.2)$$

$$\Delta\phi = \frac{3}{2}\Omega_m\mathcal{H}^2\delta, \quad (1.3)$$

où $\tau = \int dt/a$ est le temps conforme (et a le facteur d'échelle), $\mathcal{H} = d \ln a / d\tau$ le taux d'expansion conforme, et Ω_m le paramètre de densité de matière cosmologique. On a également introduit le contraste de densité de matière $\delta(\mathbf{x}, \tau)$ et la vitesse particulière $\mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau)$ (i.e. la vitesse du fluide soustraite de la vitesse d'expansion de Hubble). Les coordonnées spatiales $\mathbf{x}$ sont les coordonnées comobiles, c'est-à-dire que des galaxies suivant exactement le flot de Hubble seraient caractérisées par des valeurs de $\mathbf{x}$ constantes, et des coordonnées spatiales "physiques" données par $\mathbf{r} = a\mathbf{x}$, où $a(\tau)$ est à nouveau le facteur d'échelle. Ce sont ces changements de variables qui permettent presque d'éliminer la trace de l'expansion de Hubble sur les équations (1.1)-(1.3), à l'exception d'un terme de friction effectif $\mathcal{H}\mathbf{v}$ dans l'équation d'Euler (et d'un facteur dépendant du temps dans l'équation de Poisson).

A petite échelle, ou aux temps longs, cette approche n'est plus valable par suite des croisements des particules ("shell-crossing", rappelons qu'il s'agit d'une dynamique sans collisions), qui rendent le champ de vitesse multi-valué. Il faut alors travailler avec la fonction de distribution dans l'espace des phases, $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$. Si l'on définit encore un champ de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ à partir du premier moment de $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ on obtiendrait un terme de source supplémentaire dans (1.2) et une production de vorticité. Il est possible de travailler avec la fonction de distribution $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, qui obéit alors à l'équation de Vlasov qui remplace les équations de continuité et d'Euler (1.1)-(1.2). En particulier, on peut développer des approches perturbatives systématiques [175, 178], du type de celles présentée dans le chapitre 2 pour les équations hydrodynamiques (1.1)-(1.3), ou étudier la hiérarchie BBGKY¹ des fonctions de corrélation que l'on déduit de l'équation de Vlasov [126, 66, 78]. Cependant, il n'a pas encore été possible d'obtenir des résultats théoriques solides (qui aillent au-delà de l'approche perturbative pour décrire le régime fortement non-linéaire) dans ce cadre, et nous nous restreignons principalement dans ce mémoire    l'approche hydrodynamique, c'est-à-dire aux équations du mouvement (1.1)-(1.3).

Il faut pourtant noter que pour des spectres de puissance CDM, qui présentent des fluctuations d'amplitude croissante aux petites échelles, il y a toujours eu de tels croisements de trajectoires à des échelles suffisamment petites. Néanmoins, on suppose en pratique que les propriétés du système aux grandes échelles (i.e. jusqu'au régime faiblement non-linéaire) peuvent être décrites à partir des équations hydrodynamiques (1.1)-(1.3). Ceci peut être justifié par des arguments d'échelle (basés sur la conservation de l'impulsion), qui suggèrent que ces effets non-perturbatifs engendrent une contribution au spectre de puissance de la forme $P(k) \propto k^4$ en $k \rightarrow 0$, qui est donc négligeable pour des spectres de puissance de type CDM [125]. Les simulations numériques montrent également que l'approximation hydrodynamique est adéquate dans le régime faiblement non-linéaire, cependant, il n'y a pas de critère précis sur le régime de validité de (1.1)-(1.3).

Puisque la vorticité décroît dans le régime linéaire [126], du fait que le terme de source dans l'éq.(1.2) dérive d'un potentiel (ici le potentiel gravitationnel ϕ), on peut considérer que le champ de vitesse initial est potentiel. Pour la même raison, il reste potentiel dans le régime non-linéaire dans le cadre de l'approximation "hydrodynamique" (1.1)-(1.3). Dans ce cadre, le champ de vitesse est donc complètement défini par sa divergence, $\theta = -\nabla \cdot \mathbf{v}$. En pratique, il est commode de travailler en espace de Fourier, que nous normalisons dans ce mémoire selon

$$\delta(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \tilde{\delta}(\mathbf{k}), \quad \tilde{\delta}(\mathbf{k}) = \int \frac{d\mathbf{x}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \delta(\mathbf{x}). \quad (1.4)$$

En substituant l'équation de Poisson (1.3) dans l'équation d'Euler (1.2) on obtient alors le système [71] :

$$\frac{\partial \tilde{\delta}(\mathbf{k}, \tau)}{\partial \tau} - \tilde{\theta}(\mathbf{k}, \tau) = \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) \alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \tilde{\theta}(\mathbf{k}_1, \tau) \tilde{\delta}(\mathbf{k}_2, \tau), \quad (1.5)$$

¹BBGKY correspond aux initiales de Bogolyubov, Born, Green, Kirkwood et Yvon. Cette méthode consiste à écrire une série (infinie) d'équations reliant la fonction à n corps à la fonction à $n + 1$ corps. Dans le cas où les termes d'ordre élevé sont de plus en plus petits (par exemple si la densité de particules est faible, dans les applications en physique statistique ou en physique des plasmas), il est légitime de tronquer cette hiérarchie à un ordre fini (en négligeant donc les corrélations d'ordre supérieur).

$$\frac{\partial \tilde{\theta}(\mathbf{k}, \tau)}{\partial \tau} + \mathcal{H} \tilde{\theta}(\mathbf{k}, \tau) - \frac{3}{2} \Omega_m \mathcal{H}^2 \tilde{\delta}(\mathbf{k}, \tau) = \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) \beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \tilde{\theta}(\mathbf{k}_1, \tau) \tilde{\theta}(\mathbf{k}_2, \tau), \quad (1.6)$$

où δ_D est la distribution de Dirac et les couplages α et β sont donnés par

$$\alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{k}_1}{k_1^2}, \quad \beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|^2 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)}{2k_1^2 k_2^2}. \quad (1.7)$$

Ce mémoire est donc centré sur l'étude des équations du mouvement (1.5)-(1.6), pour des conditions initiales aléatoires. En effet, dans le scénario cosmologique standard, les fluctuations de densité actuelles sont supposées provenir de l'amplification de fluctuations quantiques très petites, engendrées durant une phase d'inflation dans l'Univers primordial (10^{-36} secondes après le Big Bang). De plus, ces fluctuations initiales Gaussiennes ont presque exactement un spectre de puissance de Harrison-Zeldovich, ce qui correspond à $P_{L0}(k) \propto k^n$ avec $n = 1$ dans l'éq.(1.10) ci-dessous (les observations donnent $n \simeq 0.96$ [93]). Le cas $n = 1$ est aussi appelé "invariant d'échelle", car il donne un spectre de puissance du potentiel gravitationnel de la forme $P_\phi(k) \propto k^{n-4} = k^{-3}$, de sorte que tous les nombres d'onde contribuent avec le même poids, et la fonction de corrélation est formellement invariante d'échelle, $C_{\phi_0}(\mathbf{x}) \propto \int dk k^2 P_\phi(k) W(kx)$ est indépendant de x (où $W(kx)$ est une fonction fenêtre à l'échelle x). Dans un scénario d'inflation standard, en roulement lent, cette propriété vient de ce que la seule échelle pertinente est l'échelle de Hubble, qui reste à peu près constante durant cette période (cela peut aussi se comprendre en notant que durant une phase d'expansion exponentielle il n'y a pas de véritable origine des temps, c'est-à-dire que l'espace-temps de de Sitter est invariant par translation du temps, si bien que les longueurs d'ondes engendrées à des instants différents partagent les mêmes propriétés). Puisque ces fluctuations sont restées très petites jusqu'à des époques récentes (on observe des fluctuations de l'ordre de 10^{-5} sur les cartes du fond diffus cosmologique, CMB pour "cosmic microwave background"), elles ont évolué suivant la théorie linéaire jusqu'à l'époque dominée par la matière ($z \sim 3100$) et au régime décrit par la gravité Newtonienne (échelles beaucoup plus petites que l'horizon). Par conséquent, ces fluctuations sont restées Gaussiennes et les différents nombres d'onde ont évolué séparément (les équations linéarisées sont diagonales en espace de Fourier). Cependant, le spectre de puissance primordial, avec $n \simeq 1$, a été modifié entre-temps, durant l'époque dominée par la radiation. En effet, durant cette période, les fluctuations de densité aux échelles plus grandes que l'horizon continuent à croître (plus précisément, par causalité les fluctuations du potentiel gravitationnel ne peuvent que rester constantes), tandis qu'elles oscillent aux petites échelles, à cause de la pression engendrée par le couplage avec la composante radiative de l'Univers (les photons). Ceci implique que les fluctuations $\tilde{\delta}(\mathbf{k})$ sont multipliées par une fonction de transfert $T(k)$ qui décroît comme k^{-2} aux grands nombres d'onde. Par suite, le spectre de densité "initial" $P_{\delta_0}(k)$ utilisé pour étudier la formation des grandes structures est le spectre primordial, avec $n \simeq 1$, multiplié par $T(k)^2$. Ceci donne un spectre de puissance du champ de densité de matière noire qui n'est plus une loi de puissance, mais présente une faible courbure, avec une pente locale n qui évolue depuis 1 à petit k (où $T(k) \simeq 1$) jusqu'à -3 à grand k . Ainsi, aujourd'hui à $z = 0$ nous avons $n \simeq -2$ aux échelles galactiques et $n \simeq -1$ quelque peu au-delà de l'échelle des amas de galaxies [126, 19]. Le comportement $P_{\delta_0}(k) \sim k^n$ avec $n \simeq 1$ en $k \rightarrow 0$ implique que les fluctuations de masse δM croissent moins vite avec l'échelle que pour le cas d'une distribution Poissonienne (i.e. complètement décorrélée) où l'on a $\langle (\delta M)^2 \rangle \sim R^3$. Il s'agit donc en ce sens d'un système "super-homogène" [68] (plus homogène qu'une distribution Poissonienne), où l'intégrale sur l'espace de la fonction de corrélation à deux points est nulle. Par conséquent, l'implémentation des conditions initiales dans une simulation numérique peut nécessiter des méthodes de discrétisation complexes si l'on souhaite reproduire simultanément en espace réel et en espace de Fourier la fonction de corrélation aux très grandes échelles [85, 86, 80].

En pratique, plutôt que de définir ces conditions "initiales" par la donnée des champs de densité et de vitesse à un instant très reculé dans le passé, on les définit au travers du mode linéaire croissant. En effet, en linéarisant les équations (1.5)-(1.6), c'est-à-dire en mettant les termes quadratiques de droite à zéro, on obtient deux modes linéaires, croissant et décroissant, où les dépendances spatiales et temporelles se factorisent [126]. En notant $D_+(\tau)$ le taux de croissance linéaire, le contraste de densité associé au mode linéaire croissant s'écrit

$$\delta_L(\mathbf{x}, \tau) = D_+(\tau) \delta_{L0}(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \tilde{\delta}_L(\mathbf{k}, \tau) = D_+(\tau) \tilde{\delta}_{L0}(\mathbf{k}), \quad (1.8)$$

où $D_+(\tau)$ est la solution croissante de

$$\frac{d^2 D_+}{d\tau^2} + \mathcal{H} \frac{dD_+}{d\tau} = \frac{3}{2} \Omega_m \mathcal{H}^2 D_+, \quad (1.9)$$

normalisé par exemple par $D_+ = 1$ aujourd'hui. Le mode croissant du champ de vitesse est simplement $\theta(\mathbf{x}, \tau) = (dD_+/d\tau) \delta_{L0}(\mathbf{x})$. Le mode linéaire décroissant correspond à remplacer D_+ par la solution décroissante D_- de (1.9). De même que l'on a négligé la composante rotationnelle décroissante du champ de vitesse, on peut négliger

la composante linéaire décroissante et définir les conditions initiales par le mode croissant (1.8) (cela revient à prendre les conditions initiales à un instant $t_{\text{init}} \rightarrow 0$), donc par la donnée du seul champ de densité linéaire $\delta_{L0}(\mathbf{x})$.

On suppose généralement des conditions initiales aléatoires Gaussiennes, homogènes et isotropes, ce qui est en bon accord avec les observations (notamment du CMB, [93]) et les prédictions des modèles d'inflation les plus simples de l'Univers primordial. Dans ce cas, les conditions initiales sont complètement définies par le spectre de puissance (i.e. la transformée de Fourier de la fonction de corrélation à deux points)

$$\langle \tilde{\delta}_{L0}(\mathbf{k}_1) \tilde{\delta}_{L0}(\mathbf{k}_2) \rangle = P_{L0}(k_1) \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2). \quad (1.10)$$

Les équations du mouvement, (1.1)-(1.3) ou (1.5)-(1.6), étant déterministes, la stochasticité provient donc uniquement des conditions initiales aléatoires (1.10). Dans le contexte hydrodynamique cela correspondrait au problème de la “turbulence décroissante” (“decaying turbulence”). En particulier, comme dans cette autre problématique, et contrairement aux nombreuses études de systèmes gravitationnels isolés, tels que les systèmes planétaires ou les disques de galaxies, il ne s’agit pas de trouver des solutions particulières des équations du mouvement mais d’obtenir les *propriétés statistiques* du système. Ainsi, on s’intéresse aux fonctions de corrélation du champ de densité (au spectre et au bispectre en espace de Fourier) ou aux distributions de probabilité de la densité moyennée à diverses échelles. Par ailleurs, pour des spectres de puissance de type CDM, ou en loi de puissance, $P_{L0}(k) \propto k^n$ avec $-3 < n < 1$, le système gravitationnel ainsi défini présente une évolution hiérarchique. Plus précisément, dans le cas de conditions initiales en loi de puissance, la gravité étant elle-même une force à longue portée en loi de puissance qui ne sélectionne aucune échelle, nous avons les lois d’échelle [126] :

$$-3 < n < 1 : \quad \delta_{L0}(\lambda \mathbf{x}) \stackrel{\text{loi}}{=} \lambda^{-(n+3)/2} \delta_{L0}(\mathbf{x}) \quad \text{pour tout } \lambda > 0, \quad \text{d'où } \delta(\mathbf{x}, D_+) \stackrel{\text{loi}}{=} \delta(D_+^{-2/(n+3)} \mathbf{x}, 1), \quad (1.11)$$

où “ $\stackrel{\text{loi}}{=}$ ” signifie que les deux membres de l’égalité ont les mêmes propriétés statistiques. Ici, nous avons considéré le cas d’un univers à la densité critique, $\Omega_m = 1$. Cela signifie que la dynamique est auto-similaire : un changement d’échelle des temps (ou plus précisément du taux de croissance $D_+(\tau)$, utilisé comme nouvelle coordonnée temporelle) est statistiquement équivalent à un changement d’échelle des distances :

$$\lambda > 0 : \quad D_+ \rightarrow \lambda D_+, \quad \mathbf{x} \rightarrow \lambda^{2/(n+3)} \mathbf{x}. \quad (1.12)$$

Ces lois d’échelles ont été vérifiées sur les simulations numériques pour $-3 < n < 1$ [126, 39, 124]. Ainsi, le système présente une évolution hiérarchique : des échelles de plus en plus grandes atteignent le régime non-linéaire, et des structures de plus en plus massives se forment, par fusion des structures antérieures plus petites. Plus précisément, la seule échelle caractéristique est l’échelle $L(\tau)$ qui marque la séparation entre le régime linéaire et le régime non-linéaire,

$$-3 < n < 1 : \quad L(\tau) \propto D_+^{2/(n+3)}. \quad (1.13)$$

Elle donne aussi la taille et la masse typiques des structures les plus grosses formées à une époque donnée (les amas de galaxie aujourd’hui). Pour des spectres de puissance linéaire de type CDM, qui ne sont pas des lois de puissance exactes mais où la pente locale n varie lentement et de manière monotone de -3 à 1 , des petites aux grandes échelles, les lois d’échelles (1.11)-(1.13) ne sont plus exactes, mais l’évolution du système reste qualitativement la même, avec ce caractère hiérarchique de formation de structures de plus en plus grandes. En fait, ces lois (1.11)-(1.13), considérées sur des intervalles d’échelle finis, ou en faisant varier la pente effective n avec l’échelle étudiée, permettent encore de décrire les propriétés du système avec une précision de l’ordre de 20% [79, 124].

Le sujet de ce mémoire est donc l’étude des propriétés statistiques des solutions des éqs.(1.5)-(1.6) (ou plus généralement de l’équation de Vlasov associée si l’on prend en compte les croisements de trajectoires) pour des conditions initiales aléatoires du type CDM, généralement Gaussiennes. En termes généraux, il s’agit donc d’étudier les propriétés statistiques d’une dynamique non-linéaire hors équilibre.

Une méthode très souvent utilisée pour étudier la formation des grandes structures est le recours aux simulations numériques. Un des avantages de celles-ci est qu’elles permettent de suivre simultanément la matière noire et le gaz et de tenir compte des différences de comportement entre ces deux composantes. Cependant, l’étude de la dynamique de la matière noire seule est déjà un problème complexe, et la construction des simulations numériques est un domaine de recherche en soi, que ce soit pour la mise en place des conditions initiales, [85, 86, 80, 142], le développement des algorithmes permettant de suivre l’évolution du système [30, 44, 95, 38, 169, 3, 162, 163] ou l’analyse des champs de densité ainsi obtenus [40, 41, 165, 161, 42, 133]. Nous n’aborderons pas ce sujet dans ce mémoire (se reporter aux références ci-dessus), mais avant de décrire les travaux théoriques, basés sur des méthodes analytiques, développés au cours de mes recherches, il est utile d’illustrer sur quelques images de simulations numériques à quoi ressemble le système dont il est question !

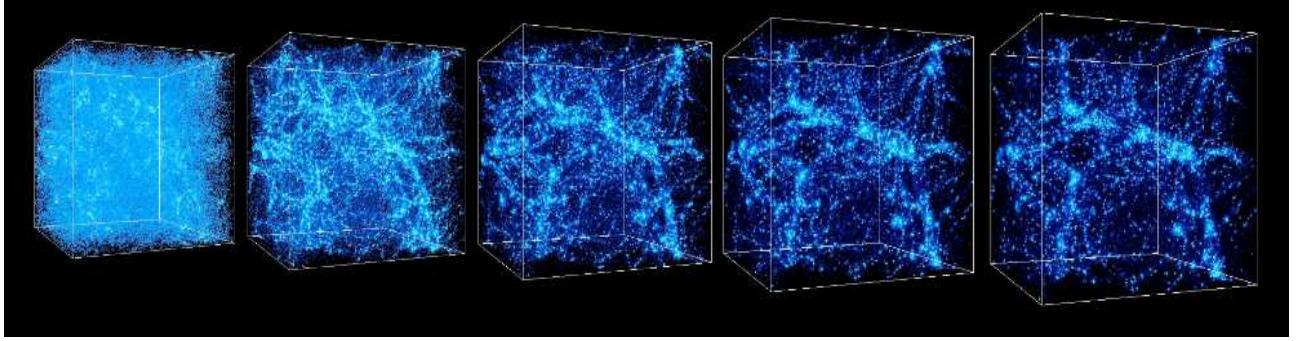


FIG. 1.1 – La formation des grandes structures de l’Univers par amplification gravitationnelle au cours du temps (de gauche à droite), obtenue dans une simulation numérique. Chaque point représente $\sim 10^9 h^{-1} M_\odot$ de matière noire, dans une boîte de taille $\sim 100 h^{-1}$ Mpc.

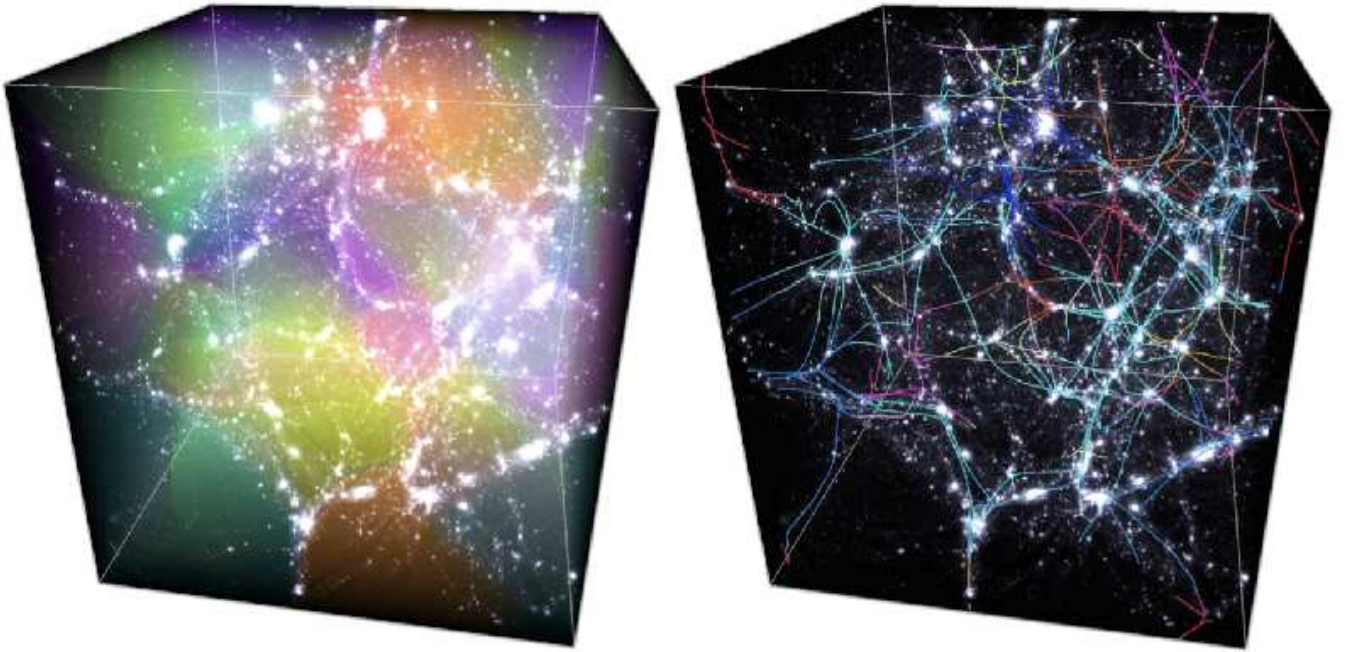


FIG. 1.2 – (Tiré de [133]). *Panneau de gauche* : la partition en grands vides du champ de densité 3D dans une boîte de $50 h^{-1}$ Mpc de côté. *Panneau de droite* : le “squelette” associé, qui permet de reconstruire les filaments connectant les différents amas du champ de densité.

La figure 1.1 montre ainsi comment les petites fluctuations de densité initiales sont amplifiées au cours du temps (de gauche à droite), du fait de l’instabilité gravitationnelle. Partant d’un système presque homogène on voit peu à peu la matière se regrouper sous forme de filaments et d’amas, de plus en plus massifs et étendus avec

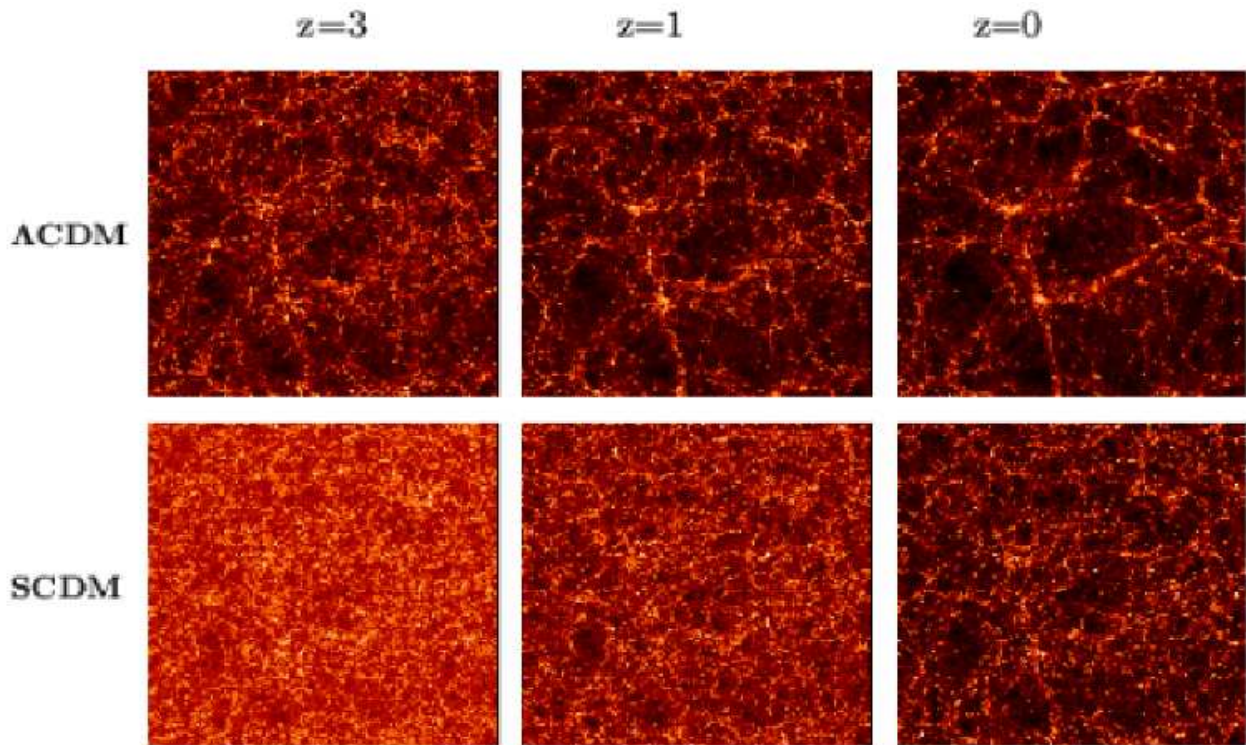


FIG. 1.3 – (Consortium Virgo, [83]). L'évolution du champ de densité en fonction du redshift dans une simulation numérique, pour deux scénarios cosmologiques : un univers Λ CDM (rangée du haut) et un univers à la densité critique (rangée du bas). Les figures sont des coupes planaires de faible épaisseur (1/10 du côté) dans une boîte 3D de taille $239.5h^{-1}$ Mpc. Les points représentent chacun $\sim 10^{11}h^{-1}M_{\odot}$ de matière noire.

le temps, qui délimitent de grandes régions presque vides. On forme ainsi le “cosmic web” (ou toile d'araignée cosmique), caractéristique du champ de densité cosmologique.

Une méthode permettant d'identifier ces structures dans le champ de densité calculé par les simulations numériques consiste à relier les pics de densité en suivant le champ de gradient. Ceci définit le “squelette” de la distribution de matière [133, 161]. Une seconde définition est fournie par les bords des grands vides (construits à partir des bassins d'attraction de l'anti-gradient du champ de densité). Une telle construction est représentée sur la figure 1.2. Un intérêt de ces approches topologiques est que ces propriétés géométriques, obtenues à partir du champ de densité lissé sur une échelle faiblement faiblement non-linéaire, dépendent directement des propriétés des conditions initiales (ces caractéristiques morphologiques globales sont robustes et ne sont pas détruites par la redistribution de matière très complexe qui a lieu aux plus petites échelles fortement non-linéaires). Ceci permet donc d'obtenir des contraintes sur les conditions initiales [160].

Pour des conditions initiales données, la formation des grandes structures dépend aussi des paramètres cosmologiques. En particulier, le taux de croissance linéaire $D_+(t)$, introduit en (1.9), qui se comporte comme $D_+ \propto a(t) \propto (1+z)^{-1}$ dans un univers à la densité critique, $\Omega_m(z) = 1$, sature dans un univers ouvert ou avec une constante cosmologique, où $\Omega_m \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow \infty$. On voit directement sur l'éq.(1.9) que “ $D_+ = \text{constante}$ ” est en effet solution pour $\Omega_m = 0$, ce qui traduit simplement le fait que l'instabilité gravitationnelle est d'autant plus forte que la quantité de matière concernée est importante. La figure 1.3 montre ainsi pour deux scénarios cosmologiques l'évolution temporelle (en fonction du redshift) du champ de densité, ou plus précisément de coupes planaires de faible épaisseur dans des boîtes de simulation 3D [83]. On vérifie bien que l'évolution est beaucoup plus lente pour le cas Λ CDM (constante cosmologique) que pour le cas SCDM (univers Einstein-de Sitter : densité critique).

Enfin, on peut comparer les champs de densité obtenus par de telles simulations numériques avec les cartes de galaxies observées sur le ciel. Une comparaison visuelle est représentée sur la figure 1.4, entre des simulations et trois catalogues de galaxies de profondeur variée. Ici, les distributions simulées sont obtenues à partir de simulations numériques du champ de densité de matière noire, auquel on adjoint des modèles semi-analytiques de formation de galaxies. On associe ainsi aux halos de matière noire des galaxies de caractéristiques variées (luminosité, masse, métallicité, etc...) en couplant l'évolution du champ de matière noire avec des prescriptions analytiques pour le refroidissement du gaz, la formation des étoiles, ... [164]. On vérifie que les structures de

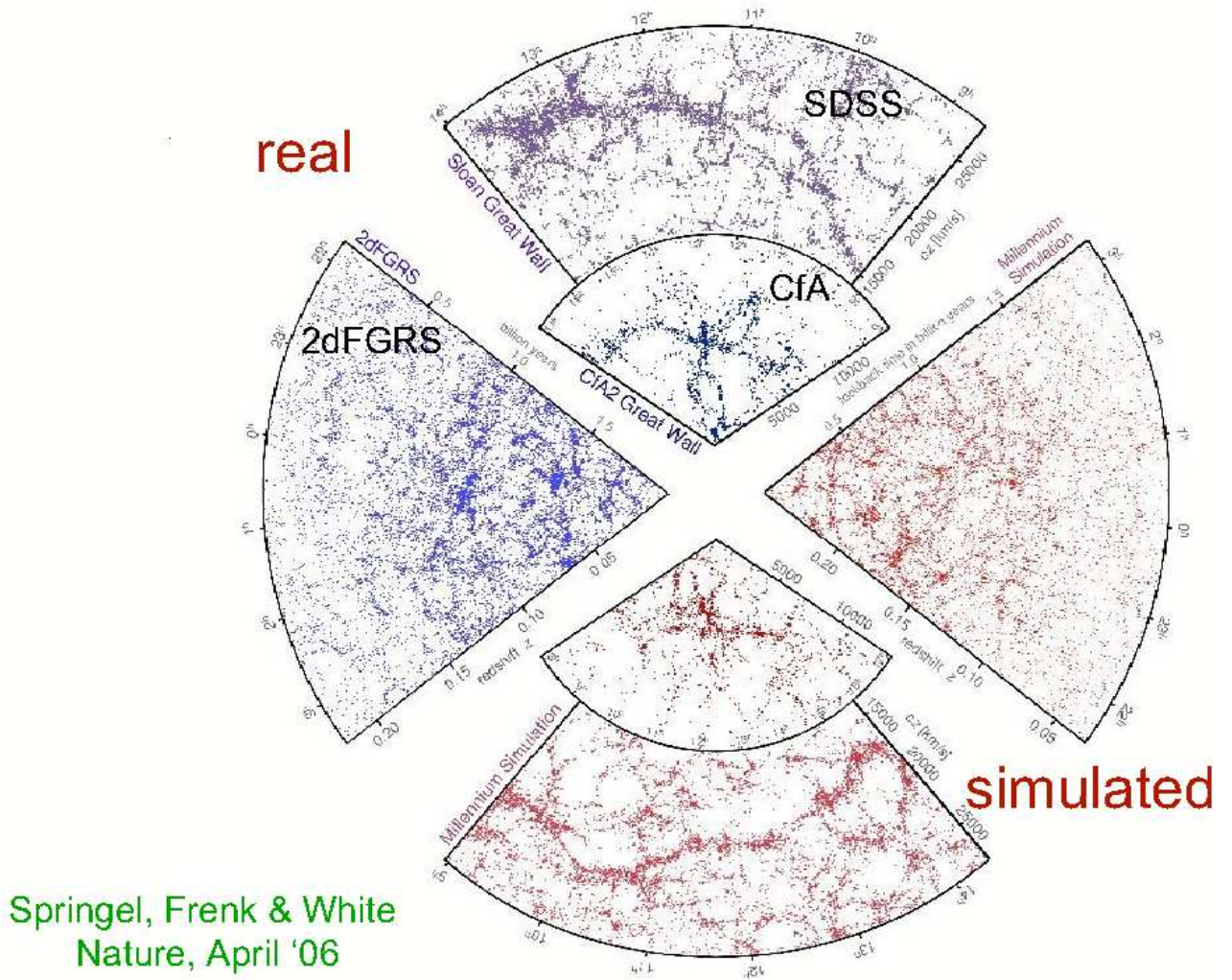


FIG. 1.4 – (Tiré de [164]). Les distributions de galaxies obtenues par des observations (trois secteurs en haut et à gauche) et par des modèles semi-analytiques basés sur des simulations du champ de matière noire (en bas et à droite).

grande échelle sont bien similaires. Naturellement, en pratique on ne se contente pas de simples inspections visuelles mais on développe des analyses quantitatives détaillées, par exemple sur la fonction de luminosité et la fonction de corrélation des galaxies.

Pour clôturer cette introduction, bien que ce mémoire se concentre sur les aspects théoriques de la dynamique gravitationnelle, il est intéressant d'illustrer à quoi peuvent ressembler les observations à partir desquelles on peut contraindre les propriétés du champ de densité, et plus généralement de l'Univers proche dans son ensemble. La figure 1.5 montre ainsi une vue d'une région du ciel en bande X obtenue par le satellite XMM (X-ray Multi-Mirror). On observe des amas de galaxies contenant du gaz chaud (~ 1 keV) rayonnant en X, dont nous dirons quelques mots dans le chapitre 5, mais aussi des quasars et des étoiles. Une combinaison des cartes optique et rayon-X est présentée sur la figure 1.6, où l'on voit bien un amas de galaxies au centre de l'image, avec des iso-contours X presque circulaires.

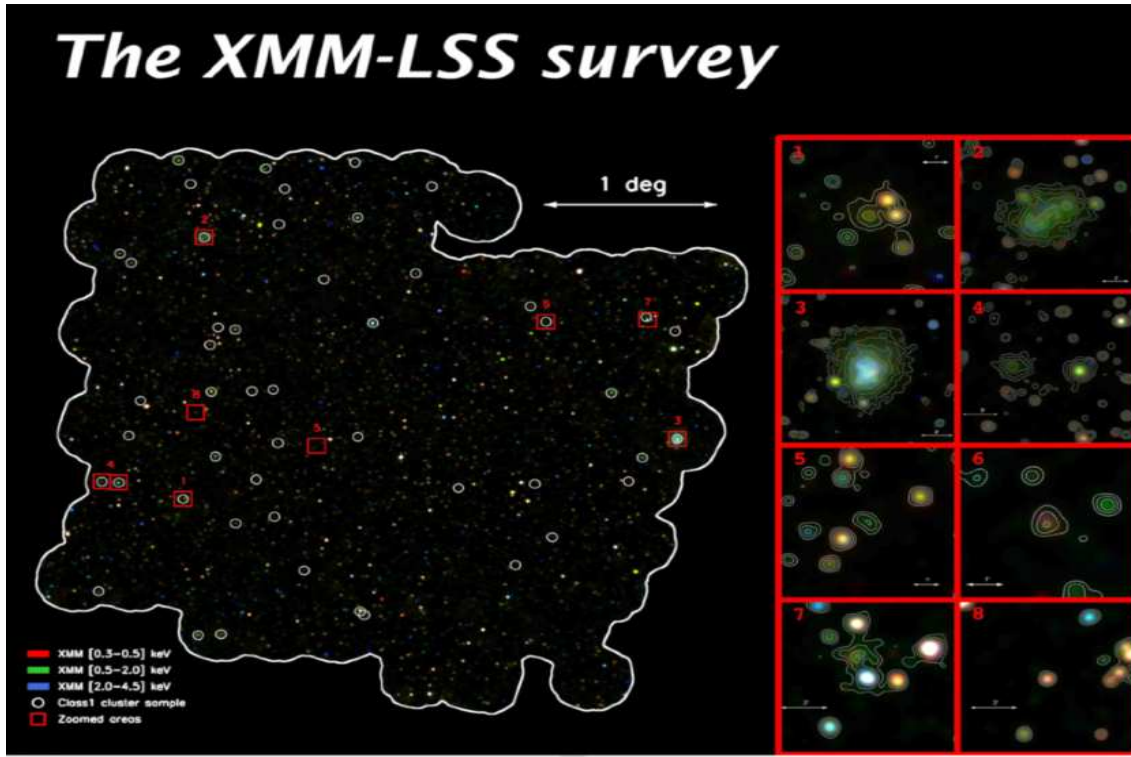


FIG. 1.5 – (Crédits : F. Pacaud, M. Pierre, XMM-LSS consortium et ESA). Vue du ciel en rayons X (0.3 – 4.5 keV), obtenue en combinant 99 champs du catalogue XMM. La carte couvre 11 deg^2 , avec ~ 7000 sources, dont 97% sont des noyaux actifs de galaxies (AGN) et 3% des amas de galaxies (cercles blancs).

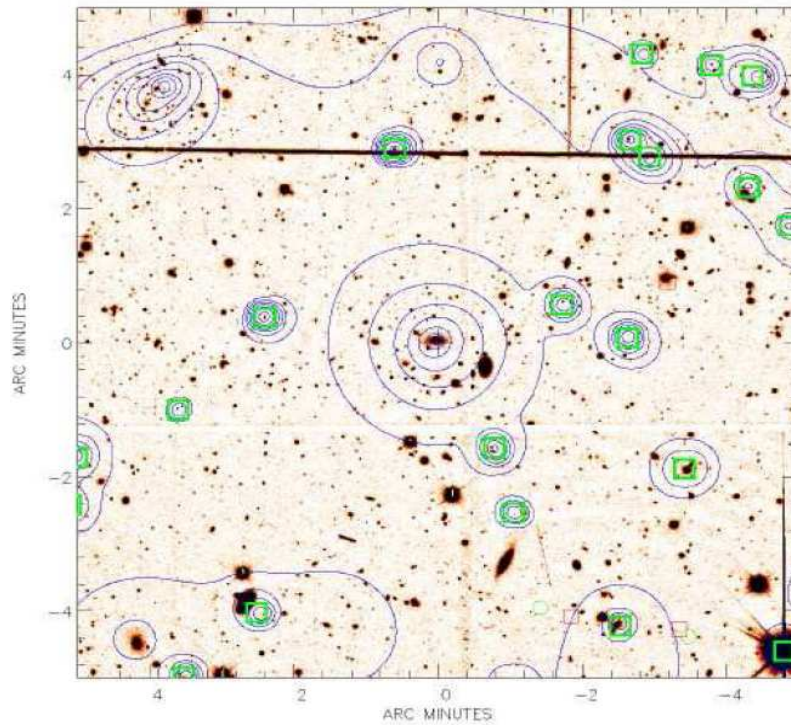


FIG. 1.6 – (Tiré de [136]). Combinaison d'une image optique (CFHTLS) avec les iso-contours en flux X (lignes bleues) sur la bande [0.5 – 2] keV (XMM). L'image est centrée sur un amas proche ($z \simeq 0.33$), un amas plus lointain ($z \simeq 0.84$) est visible en haut à gauche.

Chapitre 2

Méthodes perturbatives

Publications associées

Large-N expansions applied to gravitational clustering, Valageas P., *Astron. Astrophys.*, 465, 725 (2007)

Using the Zeldovich dynamics to test expansion schemes, Valageas P., *Astron. Astrophys.*, 476, 31-58 (2007)

Expansion schemes for gravitational clustering : computing two-point and three-point functions, Valageas P., *Astron. Astrophys.*, 484, 79-101 (2008)

Propagators in Lagrangian space, Bernardeau F., Valageas P., *Phys. Rev. D*, 78, 083503 (2008)

2.1 Introduction

Une première ligne d’approche du problème posé par la prédiction des propriétés des grandes structures, en fonction des conditions initiales et des paramètres cosmologiques, consiste à développer des méthodes systématiques pour résoudre les équations du mouvement (1.5)-(1.6), associées aux conditions initiales Gaussiennes (1.10). Comme ces équations sont non-linéaires, on ne connaît pas la solution explicite exacte¹ et on résout donc généralement ce problème par des développements perturbatifs, que l’on tronque à un certain ordre. Nous rassemblons dans ce chapitre certains de nos travaux associés à de telles approches perturbatives (qui peuvent inclure des resommations partielles infinies).

En effet, plusieurs techniques observationnelles visant à contraindre les scénarios cosmologiques (telles que les oscillations baryoniques acoustiques [58, 59] ou les effets de lentille gravitationnelle [100, 116]) sont principalement sensibles aux échelles faiblement non-linéaires (i.e. nombres d’onde $k \sim 0.1h \text{ Mpc}^{-1}$ à $z < 1$), qui sont accessibles à des traitements perturbatifs. Il y a donc eu récemment un regain d’intérêt dans la construction de telles méthodes analytiques, c’est-à-dire dans la recherche de schémas de resommation alternatifs, plus efficaces que la théorie des perturbations traditionnelle, qui pourraient fournir des prédictions plus robustes sur une gamme d’échelles un peu plus étendue. Crocce & Scoccimarro [47, 46] ont ainsi récemment montré comment une resommation partielle de la série diagrammatique associée à la fonction de réponse (ou “propagateur”) permet de retrouver dans une limite de grand k la décroissance Gaussienne attendue (que l’on sait être exacte dans le cas de la dynamique de Zeldovich [47, 182]. Ceci permet ensuite d’obtenir une meilleure précision, à la fois pour la fonction de réponse et la fonction de corrélation (c’est-à-dire le spectre de puissance), que par la théorie des perturbations usuelle [48]. Reprenant une approche plus ancienne, que j’avais développée dans le cadre de l’équation de Vlasov [178], j’ai montré comment définir un formalisme d’intégrale de chemin pour décrire la dynamique, ce qui permet ensuite d’y appliquer les outils usuels de la théorie des champs. En particulier, j’ai étudié deux “méthodes de grand N ” dans ce contexte, pour la dynamique gravitationnelle [181, 183], mais aussi pour la dynamique plus simple de Zeldovich, où l’on peut obtenir de nombreux résultats exacts [182], ce qui permet de comparer et de mieux comprendre diverses approches. Depuis, plusieurs méthodes alternatives ont été proposées, par exemple en analysant la dépendance du système sur un cutoff de grand- k [101], en introduisant une approximation de “couplage de modes” [166], ou en fermant la hiérarchie BBGKY obtenue pour les fonctions de corrélation à partir des équations hydrodynamiques (1.5)-(1.6) [137]. Toutes ces méthodes peuvent s’interpréter comme diverses resommations partielles de la série perturbative ordinaire. Par conséquent, elles

¹On peut obtenir des solutions exactes, en particulier en symétrie sphérique, des équations du mouvement, mais ici la question est d’obtenir les *propriétés statistiques*, par exemple le spectre de puissance, du système.

coincident toutes entre elles et avec la théorie des perturbations usuelle jusqu'à l'ordre auquel chaque méthode a été poussée (la différence entre les divers schémas venant de ce que la troncation se fait sur des quantités différentes). Une comparaison numérique de quelques unes de ces méthodes est présentée en [34]. Dans une optique plus théorique, dans un travail avec F. Bernardeau [20] nous avons examiné l'extension de la resommation dans la limite de grand- k introduite en [47, 46] au cadre Lagrangien, afin de mieux comprendre la signification du comportement des fonctions de réponse obtenues par ces approches. Par ailleurs, le formalisme Lagrangien est une alternative intéressante pour étudier l'évolution du champ de densité, et des schémas de resommations ont aussi été proposés dans ce cadre [104].

Plan de ce chapitre :

- Paragraphe 2.2 : Nous rappelons la théorie des perturbations standard, qui consiste à écrire dans une première étape la solution des équations du mouvement sous la forme d'une série en puissances du contraste de densité linéaire δ_L (dont l'amplitude tend vers 0 dans le passé lointain ou aux grandes échelles). Dans une deuxième étape, on obtient les propriétés statistiques, comme le spectre de puissance, en prenant la moyenne Gaussienne de ce développement, tronqué à un ordre fini, en appliquant le théorème de Wick. Cette méthode est aussi valable pour des conditions initiales non-Gaussiennes, pourvu que l'on puisse calculer les moments de tous ordres de δ_L .

- Paragraphes 2.3 et 2.4 : Nous expliquons comment le système défini par les équations du mouvement (1.5)-(1.6) et la moyenne sur les conditions initiales Gaussiennes (1.10) peut s'écrire sous la forme d'une intégrale de chemin, avec une action cubique. Nous montrons ensuite qu'en développant en puissance du terme d'interaction nous retrouvons la théorie des perturbations standard.

- Paragraphes 2.5 et 2.6 : Nous décrivons brièvement l'application de deux méthodes de grand N à ce formalisme fonctionnel. Le but étant de construire des schémas perturbatifs alternatifs, il faut développer sur d'autres paramètres que le champ linéaire δ_L ou le vertex d'interaction cubique. Une possibilité est ainsi de généraliser le système à un problème à N champs et de chercher un développement en puissances de $1/N$. Nous présentons deux schémas de ce type, en décrivant leur interprétation diagrammatique et les résultats obtenus pour les fonctions de réponse et de corrélation.

- Paragraphe 2.7 : Une autre approche, plus "diagrammatique", consiste à essayer de resommer certains sous-ensembles des diagrammes de la théorie des perturbations ordinaire. Ainsi, [47, 46] on montré comment dans une certaine limite de grands nombres d'onde on pouvait resommer certains diagrammes perturbatifs ordinaires (supposés dominer dans cette limite). Nous expliquons comment cette resommation consiste en fait à supposer une grande séparation d'échelles et à approximer les équations du mouvement par des équations linéaires à coefficients aléatoires. Nous appliquons ensuite cette approche au formalisme Lagrangien, ce qui fait ressortir la signification physique du comportement de la fonction de réponse.

Enfin, nous concluons brièvement ce chapitre au paragraphe 2.8.

2.2 Théorie des perturbations ordinaire

Dans le cadre de la théorie des perturbations standard [66, 71, 19] on cherche la solution des équations du mouvement (1.5)-(1.6) sous la forme de développements perturbatifs en puissance de δ_{L0} ,

$$\tilde{\delta}(\mathbf{k}, \tau) = \sum_{p=1}^{\infty} D_+^p \int d\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_p \delta_D(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_p - \mathbf{k}) F_p(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_p) \tilde{\delta}_{L0}(\mathbf{k}_1) \dots \tilde{\delta}_{L0}(\mathbf{k}_p), \quad (2.1)$$

$$\tilde{\theta}(\mathbf{k}, \tau) = \mathcal{H}f \sum_{p=1}^{\infty} D_+^p \int d\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_p \delta_D(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_p - \mathbf{k}) E_p(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_p) \tilde{\delta}_{L0}(\mathbf{k}_1) \dots \tilde{\delta}_{L0}(\mathbf{k}_p). \quad (2.2)$$

Ici $D_+(\tau)$ est le taux de croissance linéaire défini en (1.9) et on a introduit la fonction $f(\tau) = d \ln D_+ / d \ln a = (d \ln D_+ / d \tau) / \mathcal{H}$. De plus, on a utilisé l'approximation usuelle $\Omega_m / f^2 \simeq 1$, où à chaque ordre p des développements (2.1)-(2.2) la dépendance temporelle se factorise sous la forme d'un facteur D_+^p [32]. Il convient de noter que dans le cadre de cette approximation, qui permet d'obtenir une précision de l'ordre de 1% [19], on retrouve les lois d'échelle (1.11)-(1.13) pour des spectres de puissance initiaux en loi de puissance. Ainsi, la dynamique est à nouveau auto-similaire, et la dépendance sur les paramètres cosmologiques n'apparaît qu'au travers de la relation $t \leftrightarrow D_+$ (ou $z \leftrightarrow D_+$).

En substituant ces expressions dans (1.5)-(1.6) on obtient des équations de récurrence pour les noyaux F_p et E_p (et $F_1 = E_1 = 1$), ce qui permet de calculer $\tilde{\delta}$ et $\tilde{\theta}$ jusqu'à l'ordre voulu [71, 19].

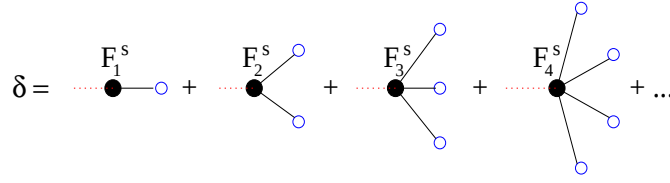


FIG. 2.1 – Les diagrammes associés au développement perturbatif standard (2.1) du contraste de densité $\tilde{\delta}(\mathbf{k}, \tau)$ en puissance du mode linéaire $\tilde{\delta}_{L0}$. Les cercles pleins en noir sont les vertex symétriques F_p^s , attachés à p modes linéaires $\tilde{\delta}_{L0}$ représentés par les cercles bleus. Les pattes gauches en pointillés sont attachées au vecteur d'onde $\mathbf{k}$ du contraste de densité non-linéaire $\tilde{\delta}(\mathbf{k}, \tau)$.

Le développement diagrammatique associé à (2.1) est représenté sur la figure 2.1, où l'on a introduit les noyaux symétrisés $F_p^s(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_p) = (\frac{1}{p!}) \sum_{\text{perm.}} F_p(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_p)$. Les diagrammes sont très simples à dessiner mais la complexité est cachée dans les vertex F_p^s . Noter que l'on doit caculer un nouveau vertex à chaque ordre du développement.

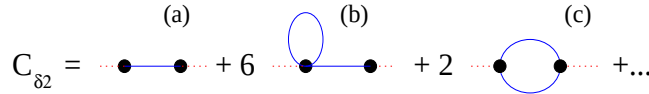


FIG. 2.2 – Les diagrammes associés au développement standard (2.3) en puissances de P_{L0} , jusqu'à l'ordre 1-boucle (i.e. P_{L0}^2 pour C_2^δ). Les disques noirs sont les vertex F_p^s et les lignes bleues sont le spectre de puissance linéaire P_{L0} .

A partir de la solution (2.1) des équations du mouvement, on obtient les propriétés statistiques en prenant la moyenne Gaussienne sur les facteurs $\tilde{\delta}_{L0}$ à l'aide du théorème de Wick. Ceci fournit une expression des fonctions de corrélation à p points, C_p^δ , sous la forme de développements en puissance du spectre de puissance linéaire P_{L0} . Par exemple, la fonction de corrélation à deux points du champ de densité s'écrit (jusqu'à l'ordre δ_{L0}^4 , donc à l'ordre P_{L0}^2)

$$C_2^\delta = \langle \delta \delta \rangle_c = \langle \delta^{(1)} \delta^{(1)} \rangle + \langle \delta^{(3)} \delta^{(1)} \rangle + \langle \delta^{(1)} \delta^{(3)} \rangle + \langle \delta^{(2)} \delta^{(2)} \rangle + \dots, \quad (2.3)$$

où $\delta^{(p)} \propto F_p^s \delta_{L0}^p$ est le terme d'ordre p du développement (2.1). En termes diagrammatiques, cela donne la figure 2.2, obtenue en recollant deux paires de la série de la figure 2.1 (on joint les cercles bleus associés à $\tilde{\delta}_{L0}$ par paires, ce qui laisse place à une ligne bleue correspondant à la fonction de corrélation linéaire, i.e. à P_{L0} en espace de Fourier). Explicitement, on obtient les résultats bien connus [71, 19]

$$P(k) = P^{\text{tree}}(k) + P^{\text{1loop}}(k) + \dots, \quad (2.4)$$

avec

$$P^{\text{tree}} = P^{(a)} = D_+^2 P_{L0}(k), \quad P^{\text{1loop}} = P^{(b)} + P^{(c)}, \quad (2.5)$$

et

$$P^{(b)}(k) = 6D_+^4 P_{L0}(k) \int d\mathbf{k}' P_L(k') F_3^s(\mathbf{k}', -\mathbf{k}', \mathbf{k}), \quad (2.6)$$

$$P^{(c)}(k) = 2D_+^4 \int d\mathbf{k}' P_L(k') P_L(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|) F_2^s(\mathbf{k}', \mathbf{k} - \mathbf{k}')^2, \quad (2.7)$$

où $P^{(a)}$, $P^{(b)}$ et $P^{(c)}$ correspondent aux trois diagrammes de la figure 2.2.

On obtient de la même façon la fonction de corrélation à trois points (le bispectre en espace de Fourier), qui s'écrit à l'ordre P_{L0}^3 [152]

$$C_3^\delta = \langle \delta^{(2)} \delta^{(1)} \delta^{(1)} \rangle + 2 \text{ perm.} + \langle \delta^{(4)} \delta^{(1)} \delta^{(1)} \rangle + 2 \text{ perm.} + \langle \delta^{(3)} \delta^{(2)} \delta^{(1)} \rangle + 5 \text{ perm.} + \langle \delta^{(2)} \delta^{(2)} \delta^{(2)} \rangle + \dots, \quad (2.8)$$

où “ p perm.” dénote p termes obtenus par permutations du terme précédent. Ces différents termes correspondent aux diagrammes représentés sur la figure 2.3. On procède de même pour les fonctions de corrélation de tous ordres.

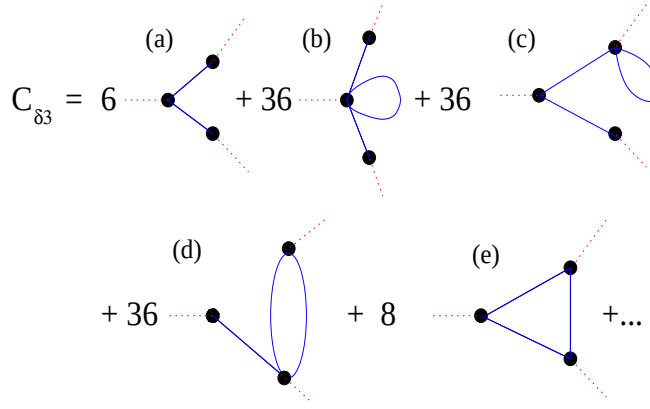


FIG. 2.3 – Les diagrammes du développement perturbatif standard de la fonction à trois points jusqu'à l'ordre P^3_{L0} .

2.3 Reformulation sous forme d'intégrale de chemin

Afin de construire des méthodes perturbatives alternatives, il est utile de reformuler le problème sous forme d'intégrale de chemin [181]. Cela permet d'adapter à la dynamique cosmologique gravitationnelle les outils généraux de théorie des champs. Pour simplifier les écritures, il est commode de rassembler les deux champs $\tilde{\delta}(\mathbf{k}, \tau)$ et $\tilde{\theta}(\mathbf{k}, \tau)$ dans un vecteur à deux composantes [47],

$$\psi(\mathbf{k}, \eta) = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{k}, \eta) \\ \psi_2(\mathbf{k}, \eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\delta}(\mathbf{k}, \eta) \\ \tilde{\theta}(\mathbf{k}, \eta)/\mathcal{H}f \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad \eta = \ln D_+(\tau) \quad \text{et} \quad D_+(z=0) = 1, \quad (2.9)$$

où l'on a introduit la nouvelle coordonnée temporelle η et $f = d \ln D_+ / d \ln a$ comme dans (2.2). Les équations du mouvement (1.5)-(1.6) s'écrivent alors de manière concise [181]

$$\mathcal{O}(x, x') \cdot \psi(x') = K_s(x; x_1, x_2) \cdot \psi(x_1) \psi(x_2), \quad \text{avec} \quad x = (\mathbf{k}, \eta, i), \quad (2.10)$$

où $i = 1, 2$, est l'indice des vecteurs à deux composantes ψ , et on intègre sur les coordonnées répétées (ici x' , x_1 et x_2). L'opérateur $\mathcal{O}$ s'écrit

$$\mathcal{O}(x, x') = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta} & -1 \\ -\frac{3\Omega_m}{2f^2} & \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{3\Omega_m}{2f^2} - 1 \end{pmatrix} \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_D(\eta - \eta'), \quad (2.11)$$

et le vertex symétrique, $K_s(x; x_1, x_2) = K_s(x; x_2, x_1)$, est donné par

$$K_s(x; x_1, x_2) = \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) \delta_D(\eta_1 - \eta) \delta_D(\eta_2 - \eta) \gamma_{i; i_1, i_2}^s(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2), \quad (2.12)$$

avec

$$\gamma_{1;1,2}^s(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{k}_2}{2k_2^2}, \quad \gamma_{1;2,1}^s(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{k}_1}{2k_1^2}, \quad \gamma_{2;2,2}^s(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|^2 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)}{2k_1^2 k_2^2}, \quad (2.13)$$

et zéro sinon [47, 181]. Noter que si l'on fait l'approximation $\Omega_m/f^2 \simeq 1$ il n'y a plus de dépendance temporelle explicite dans l'équation du mouvement (2.10), ce qui est aussi lié à la factorisation en D_+^p des termes d'ordre p des développements perturbatifs (2.1)-(2.2).

Pour obtenir une formulation en intégrale de chemin de problèmes déterministes du type (2.10), où la stochasticité provient uniquement du caractère aléatoire des conditions initiales (il n'y a pas de terme de bruit comme dans une équation de Langevin), on inclut explicitement les conditions initiales en écrivant (2.10) sous la forme [131]

$$\mathcal{O} \cdot \psi = K_s \cdot \psi \psi + \mu_I \quad \text{et} \quad \mu_I(x) = \delta_D(\eta - \eta_I) e^{\eta_I} \tilde{\delta}_{L0}(\mathbf{k}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \psi = 0 \quad \text{pour} \quad \eta < \eta_I. \quad (2.14)$$

Ainsi, la source μ_I (qui joue formellement le rôle d'un bruit externe) fournit simplement les conditions initiales au temps η_I , obtenues à partir du mode linéaire croissant (1.8), et on prendra in fine la limite $\eta_I \rightarrow -\infty$.

Les propriétés statistiques du système peuvent s'obtenir à partir de la fonctionnelle génératrice

$$Z[j] = \langle e^{j \cdot \psi} \rangle = \int \mathcal{D}\mu_I e^{j \cdot \psi[\mu_I] - \frac{1}{2} \mu_I \cdot \Delta_I^{-1} \cdot \mu_I}, \quad (2.15)$$

où on a pris la moyenne, $\langle \cdot \rangle$, sur les conditions initiales Gaussiennes, c'est-à-dire que le champ μ_I défini en (2.14) est Gaussien, de moyenne et variance

$$\langle \mu_I \rangle = 0, \quad \Delta_I(x_1, x_2) = \langle \mu_I(x_1) \mu_I(x_2) \rangle = \delta_D(\eta_1 - \eta_I) \delta_D(\eta_2 - \eta_I) e^{2\eta_I} \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) P_{L0}(k_1). \quad (2.16)$$

En effet, en développant $Z[j]$ en puissances du champ test $j(x)$ on obtient toutes les fonctions de corrélation du champ ψ , donc des champs de densité et de vitesse. La fonctionnelle $\psi[\mu_I]$ dans l'argument de l'exponentielle (2.15) est la solution de l'équation du mouvement (2.14) associée à la source μ_I , ce que l'on peut expliciter en écrivant (2.15) comme

$$Z[j] = \int \mathcal{D}\mu_I \mathcal{D}\psi |\det M| \delta_D(\mu_I - \mathcal{O} \cdot \psi + K_s \cdot \psi \psi) e^{j \cdot \psi - \frac{1}{2} \mu_I \cdot \Delta_I^{-1} \cdot \mu_I}, \quad (2.17)$$

où le Jacobien $|\det M|$ est défini par la dérivée fonctionnelle $M = \mathcal{D}\mu_I / \mathcal{D}\psi$. Du fait de la causalité² ce dernier n'est qu'une constante de normalisation [181]. En introduisant un champ auxiliaire $\lambda(x)$ pour écrire la fonctionnelle de Dirac sous la forme d'une exponentielle, puis en intégrant sur le champ Gaussien μ_I , nous obtenons

$$Z[j] = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\lambda e^{j \cdot \psi + \lambda \cdot (-\mathcal{O} \cdot \psi + K_s \cdot \psi \psi) + \frac{1}{2} \lambda \cdot \Delta_I \cdot \lambda}. \quad (2.18)$$

Ainsi, les propriétés statistiques du système sont décrites par l'action $\mathcal{S}[\psi, \lambda]$ définie par

$$\mathcal{S}[\psi, \lambda] = \lambda \cdot (\mathcal{O} \cdot \psi - K_s \cdot \psi \psi) - \frac{1}{2} \lambda \cdot \Delta_I \cdot \lambda. \quad (2.19)$$

Le calcul des propriétés statistiques du système est donc ramené à l'évaluation de l'intégrale de chemin (2.18). Il faut noter que nous avons déjà pris la moyenne sur les conditions initiales (Gaussiennes) en intégrant sur μ_I . Ainsi, l'action $\mathcal{S}[\psi, \lambda]$ décrit tout à la fois les équations du mouvement (1.5)-(1.6) et la moyenne sur les conditions initiales (1.10). Par conséquent, en partant de (2.18) nous travaillons directement avec les fonctions de corrélation C_p , au lieu d'estimer d'abord les solutions particulières ψ pour chaque condition initiale μ_I et de moyenner ensuite sur μ_I , comme nous le faisons dans le paragraphe 2.2 dans le cadre de la théorie des perturbations standard.

En contrepartie, nous avons dû introduire un champ auxiliaire λ , qui n'apparaissait pas dans l'approche perturbative standard. Ce champ a néanmoins une interprétation physique (indirecte), en ce qu'il permet d'engendrer les "fonctions de réponse" du système. En effet, ajouter un "bruit" ζ au terme de droite de l'équation du mouvement (2.14) revient à changer μ_I en $\mu_I + \zeta$, et l'action $\mathcal{S}$ en $\mathcal{S} - \lambda \cdot \zeta$. Par conséquent, les dérivées fonctionnelles par rapport à ζ sont équivalentes à des insertions du champ λ . Définissant donc la fonction de réponse du système, $R(x_1, x_2)$, par la dérivée fonctionnelle par rapport à ζ en $\zeta = 0$,

$$R(x_1, x_2) = \left\langle \frac{\mathcal{D}\psi(x_1)}{\mathcal{D}\zeta(x_2)} \right\rangle_{\zeta=0}, \quad (2.20)$$

nous obtenons

$$R(x_1, x_2) = \langle \psi(x_1) \lambda(x_2) \rangle, \quad \text{et} \quad \langle \lambda \rangle = 0, \quad \langle \lambda \lambda \rangle = 0. \quad (2.21)$$

Ainsi, $R(x_1, x_2)$ mesure la "réponse linéaire"³ du système à une perturbation externe ζ . Du fait de la causalité, $R(x_1, x_2)$ contient un facteur de Heaviside $\theta(\eta_1 - \eta_2)$. De plus, comme l'opérateur $\mathcal{O}$ contient une dérivée du premier ordre par rapport au temps η on voit à partir de l'équation du mouvement (2.10) que la réponse R vérifie la condition initiale, en $\eta_1 = \eta_2$,

$$\eta_1 \rightarrow \eta_2^+ : R(x_1, x_2) \rightarrow \delta_D(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta_{i_1, i_2} \quad (2.22)$$

²En développant $\det(M)$ sur ψ on obtient des facteurs de Heaviside, $\theta(\eta_i - \eta_j)$ (traduisant le fait que ψ ne dépend que de l'état du système aux temps antérieurs), qui ne peuvent être simultanément tous non-nuls.

³Ici, "linéaire" réfère au fait que la fonction de réponse R définie par (2.20) décrit la réponse du système à l'ordre linéaire sur la perturbation externe ζ , $\delta\psi(x_1) = \int R(x_1, x_2) \zeta(x_2) dx_2$. Dans toute la suite, nous entendrons par "réponse linéaire", notée R_L , l'approximation de la fonction R dans le régime linéaire (i.e. où l'on a linéarisé les équations du mouvement), et par "réponse non-linéaire", notée R , la fonction de réponse R exacte, ou son approximation obtenue par une théorie des perturbations poussée à un ordre quelconque.

A l'aide d'intégrations par parties sur (2.18), on montre [181] que cette fonction de réponse est aussi liée à la corrélation croisée entre le champ (non-linéaire) ψ et la condition initiale μ_I ,

$$\langle \psi \mu_I \rangle = \langle \psi (\mathcal{O} \cdot \psi - K_s \cdot \psi \psi) \rangle = \langle \psi (\Delta_I \cdot \lambda) \rangle = R \cdot \Delta_I \quad (2.23)$$

Naturellement, en cosmologie (contrairement aux systèmes physiques usuels étudiés en laboratoire, tels des écoulements hydrodynamiques, des chaînes de ressorts et pendules, ou des milieux solides) il n'est pas possible de perturber le système à volonté, de manière contrôlée, pour mesurer sa fonction de réponse et par ce biais remonter à certaines de ses propriétés ! Par conséquent, la fonction de réponse n'est pas une observable pertinente (hormis dans des simulations numériques [46]). Dans ce contexte, ce n'est qu'un intermédiaire de calcul, mais aussi une quantité d'intérêt théorique, qui traduit certaines propriétés du système. En particulier, le contenu physique de diverses méthodes d'approximation peut apparaître plus clairement à travers leurs implications pour $R(x_1, x_2)$.

Dans le régime linéaire, qui correspond à mettre le terme de droite dans (2.10) à zéro, c'est-à-dire $K_s = 0$, les fonctions à deux points s'écrivent [47, 181]

$$C_L(x_1, x_2) = \langle \psi_L(x_1) \psi_L(x_2) \rangle = e^{\eta_1 + \eta_2} P_{L0}(k_1) \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

$$R_L(x_1, x_2) = \theta(\eta_1 - \eta_2) \delta_D(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \left\{ \frac{e^{\eta_1 - \eta_2}}{5} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \frac{e^{-3(\eta_1 - \eta_2)/2}}{5} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \right\}. \quad (2.25)$$

On retrouve bien dans (2.25) le facteur de Heaviside associé à la causalité. Le premier terme dans l'accolade correspond au mode linéaire croissant tandis que le second terme correspond au mode linéaire décroissant (c'est-à-dire aux deux solutions de l'éq.(1.9) dans le cadre de l'approximation $\Omega_m/f^2 \simeq 1$). Dans toute la suite, on note C_L et R_L les fonctions de corrélation et de réponse linéaires (2.24)-(2.25), à deux points, obtenues par linéarisation des équations du mouvement.

2.4 Développement en puissances du terme d'interaction cubique

La réécriture de la dynamique gravitationnelle cosmologique sous la forme de l'intégrale de chemin (2.18) ne permet bien sûr pas de résoudre exactement le problème, étant donné que l'on ne sait généralement pas calculer de telles intégrales non-Gaussiennes (du fait du terme cubique $\lambda \cdot K_s \cdot \psi \psi$ de l'action (2.19)). L'intérêt de l'expression (2.18) est donc de servir de point de départ à des méthodes d'approximation alternatives à l'approche perturbative standard du paragraphe 2.2, qui n'auraient pas nécessairement de formulation simple en terme des équations du mouvement (1.5)-(1.6). On peut ainsi espérer que le fait d'avoir déjà pris la moyenne sur les conditions initiales, et de travailler directement sur les fonctions de corrélation et de réponse, puisse apporter une meilleure efficacité ou une vision différente du problème.

Néanmoins, avant d'étudier de nouvelles approches, il est intéressant de vérifier explicitement comment les résultats de la théorie des perturbation standard peuvent se retrouver à partir de l'intégrale de chemin (2.18). A partir des éqs.(1.5)-(1.6) il est facile de voir que la théorie des perturbations standard, en puissances du champ de densité linéaire δ_{L0} , peut aussi s'interpréter comme une théorie des perturbations en puissance des noyaux d'interaction $\alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ et $\beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ définis en (1.7). Cela correspond donc à une solution de l'équation du mouvement (2.10) sous la forme d'une série perturbative en puissances du noyau K_s . Plus précisément, le terme $\delta^{(p)} \propto F_p^s \delta_{L0}^p$ de la théorie des perturbations ordinaire, représentée sur la figure 2.1, est aussi d'ordre $\delta^{(p)} \propto K_s^{p-1}$. Par conséquent, le développement en puissances de P_{L0} obtenu dans l'approche standard du paragraphe 2.2 pour les fonctions de corrélation (ou pour le spectre de puissance et les statistiques d'ordre supérieur en espace de Fourier) coïncide avec un développement de ces mêmes quantités en puissances de K_s . Un tel développement s'obtient directement à partir de l'intégrale de chemin (2.18) en développant l'exponentielle en puissances du terme cubique $(\lambda \cdot K_s \cdot \psi \psi)$.

Nous obtenons ainsi pour la fonction de corrélation à deux points

$$\begin{aligned} C_2(x_1, x_2) &= \langle \psi(x_1) \psi(x_2) \rangle = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\lambda \psi(x_1) \psi(x_2) e^{-\mathcal{S}[\psi, \lambda]} \\ &= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\lambda \psi(x_1) \psi(x_2) \left(1 + \lambda K_s \psi^2 + \frac{(\lambda K_s \psi^2)^2}{2} + \dots \right) e^{-\mathcal{S}_0} \\ &= \langle \psi(x_1) \psi(x_2) \left(1 + \lambda K_s \psi^2 + \frac{(\lambda K_s \psi^2)^2}{2} + \dots \right) \rangle_0, \end{aligned} \quad (2.26)$$

où $\mathcal{S}_0 = \lambda \cdot \mathcal{O} \cdot \psi - \frac{1}{2} \lambda \cdot \Delta_I \cdot \lambda$ est la partie quadratique de l'action $\mathcal{S}[\psi, \lambda]$ et $\langle \dots \rangle_0$ est la moyenne définie par cette action Gaussienne $\mathcal{S}_0$. On peut alors utiliser le théorème de Wick pour calculer ces moyennes Gaussiennes $\langle \dots \rangle_0$.

De plus, comme l'action S_0 correspond à $K_s = 0$, elle correspond en fait au régime linéaire usuel ainsi qu'on l'a vu en (2.24)-(2.25), et nous avons donc (ainsi qu'on pourrait aisément le vérifier à partir de l'expression de S_0)

$$\langle \psi \rangle_0 = \langle \lambda \rangle_0 = 0, \quad \langle \psi(x_1)\psi(x_2) \rangle_0 = C_L(x_1, x_2), \quad \langle \psi(x_1)\lambda(x_2) \rangle_0 = R_L(x_1, x_2), \quad \langle \lambda(x_1)\lambda(x_2) \rangle_0 = 0. \quad (2.27)$$

$$C_L(x_1, x_2) = x_1 \text{---} x_2, \quad R_L(x_1, x_2) = x_1 \text{---} \leftarrow x_2$$

FIG. 2.4 – Les symboles utilisés pour les fonctions à deux points, $C_L = \langle \psi\psi \rangle_0$ et $R_L = \langle \psi\lambda \rangle_0$ (la troisième possibilité est identiquement nulle, $\langle \lambda\lambda \rangle_0 = 0$).

En terme de diagrammes, nous représentons ces propagateurs linéaires comme sur la figure 2.4. Nous avons ajouté une flèche pour le propagateur $R_L = \langle \psi(x_1)\lambda(x_2) \rangle_0$ pour marquer la flèche du temps associée à la causalité ($\eta_1 > \eta_2$), qui est exprimée par le facteur de Heaviside dans l'éq.(2.25). Ainsi, la réponse R_L “cours” du “champ de réponse” λ vers le champ physique ψ (puisque $R_L(x_1, x_2) = \langle \psi(x_1)\lambda(x_2) \rangle_0$). Comme chaque vertex K_s est associé à un champ λ et deux champs ψ , à travers la combinaison $(\lambda K_s \psi \psi)$ de l'action (2.19) (voir aussi le développement (2.26)), chaque vertex K_s , représenté par un disque noir sur la figure (2.5) et les suivantes, doit être connecté à une ligne sortante (i.e. une réponse R_L) et deux lignes entrantes (en lisant la corrélation symétrique C_L avec deux lignes sortantes, c'est-à-dire avec une flèche pointant vers l'extérieur à chaque extrémité).

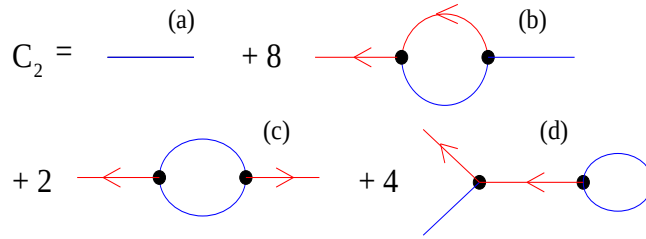


FIG. 2.5 – Les diagrammes associés au développement (2.26) en puissances de K_s pour la fonction de corrélation à deux points C_2 . Les disques noirs sont le vertex à trois pattes K_s , les lignes sont les propagateurs linéaires C_L et R_L de la figure 2.4. Seuls les diagrammes pertinents à l'ordre d'une boucle, éqs.(2.28)-(2.29), sont dessinés.

Le développement (2.26) de la fonction de corrélation à deux points s'écrit donc de manière explicite, jusqu'à l'ordre d'une boucle,

$$C_2 = C_2^{\text{tree}} + C_2^{\text{1loop}} + \dots, \quad \text{avec} \quad C_2^{\text{tree}} = C_L \quad \text{et} \quad (2.28)$$

$$C_2^{\text{1loop}} = \frac{1}{2} \langle \psi(x_1)\psi(x_2)(\lambda K_s \psi \psi)^2 \rangle_0 = 8R_L(K_s R_L C_L K_s)C_L + 2R_L(K_s C_L C_L K_s)R_L + 4R_L C_L K_s (R_L K_s C_L). \quad (2.29)$$

Les diagrammes associés aux termes (2.28)-(2.29) sont représentés sur la figure 2.5. Nous n'avons pas inclus cinq termes supplémentaires qui s'annulent car ils contiennent un facteur $\langle \lambda\lambda \rangle_0$ ou une boucle fermée sur une suite de réponses R_L (qui s'annule du fait des facteurs de Heaviside). De plus, le diagramme (d) de la figure 2.5 est nul, car le vertex K_s de droite étant attaché à une boucle fermée sur C_L il est de la forme $K_s(0; \mathbf{q}, -\mathbf{q})$, qui est nul d'après les expressions (2.13) des noyaux $\gamma_{i; i_1, i_2}^s$. On peut alors vérifier que le diagramme (b) redonne le diagramme (b) de la figure 2.2 et de l'éq.(2.6), tandis que le diagramme (c) redonne le diagramme (c) de la figure 2.2 et de l'éq.(2.7). Comme prévu, nous retrouvons ainsi le développement perturbatif standard. Cependant, ces deux développements équivalents ont des structures différentes. Ainsi, le développement de la figure 2.5, dérivé de l'intégrale de chemin (2.18), ne contient que le vertex à trois pattes K_s , mais deux propagateurs C_L et R_L (avec quatre indices), tandis que le développement standard de la figure 2.2 contient de nouveaux vertex F_p^s , avec un nombre croissant de pattes, lorsque l'on augmente l'ordre de tronquation, mais une seule fonction à deux point, le spectre de puissance linéaire P_{L0} .

Les fonctions de corrélation d'ordre supérieur s'obtiennent comme dans l'éq.(2.26) en développant sur K_s . Cela donne ainsi pour la fonction à trois points :

$$C_3 = \langle \psi(x_1)\psi(x_2)\psi(x_3) \left(\lambda K_s \psi^2 + \frac{(\lambda K_s \psi^2)^3}{6} + \dots \right) \rangle_0, \quad (2.30)$$

et nous obtenons jusqu'à l'ordre d'une boucle

$$C_3^{\text{tree}} = R_L K_s C_L C_L + 5 \text{ perm.}, \quad (2.31)$$

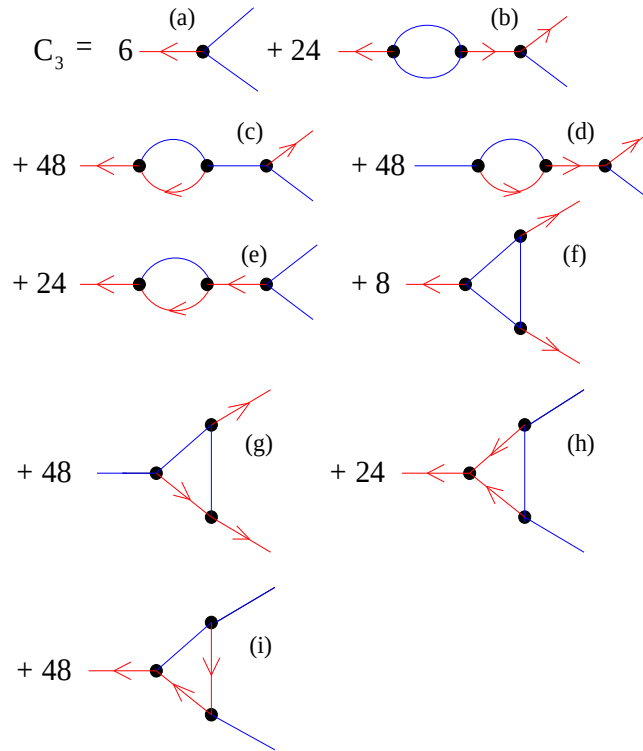


FIG. 2.6 – Les diagrammes du développement (2.30) pour la fonction de corrélation à trois points C_3 , jusqu'à l'ordre d'une boucle (i.e. P_{L0}^3 pour C_3), c'est-à-dire correspondant aux éqs.(2.31)-(2.32).

et

$$\begin{aligned}
 C_3^{\text{1loop}} = & (24 + 48 + 48)(K_s^2 R_L^2 C_L^2) K_s R_L C_L + 24(K_s^2 R_L^3 C_L) K_s C_L^2 + 8R_L^3 (K_s^3 C_L^3) \\
 & + 48R_L^2 C_L (K_s^3 R_L C_L^2) + (24 + 48)R_L C_L^2 (K_s^3 R_L^2 C_L).
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Les diagrammes associés aux éqs.(2.31)-(2.32) sont représentés sur la figure 2.6. On peut noter que les quatre premiers diagrammes à une boucle, (b), (c), (d), et (e), sont “1-particule réductibles” : ils peuvent être séparés en deux parties en coupant la fonction à deux points qui lie la “bulle” au vertex K_s de droite. La comparaison avec la figure 2.5 montre qu'ils correspondent aux corrections perturbatives des fonctions à deux points. Ainsi, les trois premiers diagrammes à une boucle peuvent être obtenus à partir du diagramme en arbre (a) en insérant les corrections (b) et (c) de la figure 2.5 dans les lignes de corrélation C_L , tandis que le quatrième peut s'obtenir en insérant la correction de la réponse R_L . Les quatre derniers diagrammes (f), (g), (h), et (i), de la figure 2.6, correspondent aux corrections perturbatives du vertex K_s lui-même.

A nouveau, on peut vérifier explicitement que les éqs.(2.31)-(2.32) redonnent les résultats (2.8) de la théorie des perturbations standard. Cependant, comme la structure de ces deux développements n'est pas la même nous n'avons pas une correspondance une à une, de diagramme à diagramme. Plus précisément, la correspondance “figure 2.6 → figure 2.3” s'écrit “(a) → (a)”, “(b) + (g) → (d)”, “(c) + (d) + (e) + (h) + (i) → (b) + (c)” et “(f) → (e)”.

2.5 Développements de grand N

Le principal intérêt de la reformulation (2.18) est de permettre la construction de développements perturbatifs différents de celui obtenu par la théorie des perturbations standard. Comme on a vu que le développement en puissances du “vertex d'interaction” K_s (ce qui correspond au développement en diagrammes de Feynman en théorie des champs) redonne simplement les résultats bien connus de la théorie des perturbations usuelle, il faut donc chercher à développer sur d'autres paramètres. Une des possibilités est de généraliser le système à N champs ψ_i et d'étudier un développement en puissances de $1/N$, en tirant parti du fait que l'intégrale de chemin se simplifie dans la limite $N \rightarrow \infty$ (car il faut bien sûr que le point autour duquel on développe soit lui-même calculable!). On tronque ensuite cette série à un ordre fini et on substitue $N = 1$ (tout comme on avait tronqué la série en puissances de K_s).

Comme nous l'avons mentionné plus haut, dans le cadre général de l'approche fonctionnelle (2.18), une différence essentielle avec l'approche perturbative standard est que cette procédure ne comporte qu'une seule étape. En effet, on applique ce développement directement aux équations d'évolution satisfaites par les fonctions de corrélation, et non aux champs individuels eux-mêmes. En ce sens, cette approche est similaire à la méthode BBGKY usuelle, où l'on tronque la hiérarchie d'équations satisfaites par les fonctions de corrélation à un certain ordre [126], la différence étant que la troncation associée aux "méthodes de grand N " est différente et conduit à des fonctions de corrélation non nulles à tous les ordres, même lorsque l'on s'arrête à un ordre fini en $1/N$. En terme de l'approche perturbative standard, on obtient en fait une resommation partielle des diagrammes perturbatifs, de sorte que ces deux approches coïncident jusqu'à l'ordre de troncation choisi, et que la méthode de grand N contient en plus une infinité partielle de diagrammes d'ordre plus élevé.

Comme expliqué en [178] sur le cas de l'équation de Vlasov, où les mêmes méthodes s'appliquent, plutôt que d'introduire $(N - 1)$ champs supplémentaires il est plus simple d'introduire directement un facteur multiplicatif N dans l'argument de l'exponentielle (2.18), c'est-à-dire de considérer la fonctionnelle génératrice $Z_N[j, h]$ définie par

$$Z_N[j, h] = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\lambda e^{N[j \cdot \psi + h \cdot \lambda - \mathcal{S}[\psi, \lambda]]}, \quad (2.33)$$

où on a rajouté un terme de source h , permettant d'engendrer les fonctions de réponse par différentiation sur h . En particulier, l'intégrale de chemin Z_N ainsi définie assure que les divergences infrarouges qui peuvent apparaître dans des diagrammes isolés se compensent à chaque ordre en $1/N$ [178]. Comme dans le cas de la théorie des perturbations standard, ceci vient de l'invariance Galiléenne des équations du mouvement. De manière générale, il est clair sur l'expression (2.33) que les symétries du système (par ex., l'invariance par translation) sont automatiquement conservées à tout ordre. Ces méthodes ont été appliquées à de nombreux domaines de la physique théorique, tels que la théorie quantique des champs [199, 16], la physique statistique (par ex., l'étude de la croissance d'interfaces décrites par l'équation de Kardar-Parisi-Zhang [56]) et la turbulence [114]. À l'ordre le plus bas (une boucle) elles sont reliées aux "approximations de couplage de modes" utilisées pour étudier les systèmes vitreux [29] et à "l'approximation d'interaction directe (DIA)" introduite en turbulence par Kraichnan [94]. Il est donc naturel d'étudier leur application à la dynamique gravitationnelle en cosmologie, qui est décrite par les équations du mouvement (1.1)-(1.3) qui sont très similaires aux équations de Navier-Stokes de l'hydrodynamique. En particulier, la non-linéarité provient des mêmes termes advectifs (i.e. de transport), $\nabla \cdot (\delta \mathbf{v})$ et $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$. Dans certains cas [16], tandis que les développements perturbatifs les plus simples font apparaître des termes séculiers (qui croissent comme des puissances du temps), certaines de ces "méthodes de grand N " parviennent à éviter ce problème et à capturer des phénomènes de relaxation. Cependant, l'efficacité de ces techniques dépend du problème étudié. Nous considérons dans ce mémoire deux méthodes possibles qui rentrent dans cette catégorie des développements de grand N , obtenues à partir de l'expression (2.33).

2.5.1 Méthode du col direct

Une première approche [199, 178] pour obtenir un développement en $1/N$ est d'utiliser une méthode du col, où l'on développe l'exponentielle (2.33) autour de son maximum. Comme pour le développement sur K_s au paragraphe 2.4, on se ramène ainsi au calcul d'une série (infinie) d'intégrales Gaussiennes, que l'on tronque ensuite à un certain ordre. Dans le contexte de la théorie quantique des champs, cela correspond à un développement semi-classique (ou en boucles) avec $\hbar = 1/N$.

Fonctions à deux points (propagateurs)

Cette méthode fait intervenir des propagateurs auxiliaires, C_0 and R_0 , associés au point col autour duquel on développe⁴, qui obéissent aux équations [178]

$$\mathcal{O}(x, z).C_0(z, y) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{O}(x, z).R_0(z, y) = \delta_D(x - y), \quad (2.34)$$

tandis que les propagateurs non-linéaires recherchés sont donnés par

$$\mathcal{O}(x, z).C(z, y) = \Sigma(x, z).C(z, y) + \Pi(x, z).R^T(z, y) \quad \text{et} \quad \mathcal{O}(x, z).R(z, y) = \delta_D(x - y) + \Sigma(x, z).R(z, y) \quad (2.35)$$

(où par simplicité nous écrivons $C(x_1, x_2)$ pour la fonction de corrélation à deux point C_2). Ces équations (2.34)-(2.35) sont exactes et les termes de "self-energy" Σ et Π dans les éqs.(2.35) sont donnés par une série

⁴Plus précisément, C_0 et R_0 sont donnés par la dérivée seconde de l'action au point col. Ils mesurent ainsi dans une approximation Gaussienne la variance des fluctuations autour de la valeur moyenne du champ ψ . Les termes correctifs Σ et Π correspondent à l'écart entre cette approximation d'ordre zéro Gaussienne et la distribution de probabilité non-linéaire exacte, qui est non Gaussienne, et sont obtenus par un développement perturbatif.

infinie de diagrammes, correspondant au développement en $1/N$ autour du point col (s'ils sont nuls on obtient à l'ordre zéro les valeurs de col, $C = C_0$ et $R = R_0$). En pratique, on tronque ce développement diagrammatique à un ordre fini, ce qui définit l'ordre de l'approximation.

Dans le cas des éqs.(1.1)-(1.3) du cadre hydrodynamique, c'est-à-dire de l'action (2.19), les solutions de (2.34) sont en fait les propagateurs linéaires⁵, comme on peut le voir directement sur l'équation du mouvement (2.10),

$$C_0 = C_L, \quad R_0 = R_L. \quad (2.36)$$

A l'ordre d'une boucle (le premier ordre au-delà du régime linéaire (2.36)) les termes de “self-energy” s'écrivent alors (en utilisant l'identité (2.36))

$$\Sigma(x, y) = 4K_s(x; x_1, x_2)K_s(z; y, z_2)R_L(x_1, z)C_L(x_2, z_2) \quad (2.37)$$

$$\Pi(x, y) = 2K_s(x; x_1, x_2)K_s(y; y_1, y_2)C_L(x_1, y_1)C_L(x_2, y_2). \quad (2.38)$$

De manière générale, Σ et Π sont donnés par des séries infinies en puissance des propagateurs linéaires C_L et R_L .



FIG. 2.7 – Les diagrammes à l'ordre d'une boucle des termes de “self-energy” Σ et Π associés à la méthode du col directe, éqs.(2.37)-(2.38).

Utilisant les mêmes notations que sur les figures 2.4-2.6 du paragraphe 2.4, les expressions (2.37)-(2.38) de Σ et Π à l'ordre d'une boucle correspondent aux deux diagrammes de la figure 2.7.

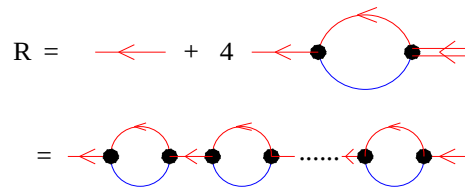


FIG. 2.8 – Les diagrammes resommés à l'ordre d'une boucle, pour la réponse R dans le cadre de la “méthode du col directe”. La première égalité correspond à la première expression implicite de l'éq.(2.39), où l'on note par une ligne double la réponse non-linéaire R (tandis que les lignes simples correspondent aux propagateurs linéaires, C_L et R_L , comme dans les figures précédentes 2.4 à 2.7). La deuxième égalité montre la série infinie de “diagrammes bulles” resommés par cette méthode. Elle s'obtient simplement en résolvant itérativement l'équation précédente, en remplaçant à chaque étape la ligne double par l'expression obtenue pour R à l'étape antérieure.

La deuxième équation (2.35) peut s'intégrer en

$$R = R_L + R_L.\Sigma.R = R_L + R_L.\Sigma.R_L + R_L.\Sigma.R_L.\Sigma.R_L + \dots, \quad (2.39)$$

où dans la dernière expression nous avons écrit la solution sous la forme d'une série en puissances de Σ . En substituant l'expression (2.37) de Σ à l'ordre d'une boucle, c'est-à-dire le premier diagramme de la figure (2.7), nous voyons donc qu'à cet ordre nous avons resommé la série infinie de “diagrammes bulles” représentés sur la figure 2.8.

En pratique, nous ne calculons pas la réponse R à partir du développement explicite (2.39), mais en résolvant numériquement la deuxième équation différentielle (2.35), qui est une équation différentielle du premier ordre en temps sur η_1 , partant de la condition initiale (2.22) en $\eta_1 = \eta_2$ et après avoir calculé Σ , qui ne dépend que des propagateurs linéaires C_L et R_L . Ainsi, en écrivant la réponse R comme solution de l'équation différentielle (2.35), nous resomons automatiquement toute une série de diagrammes (définie par l'ordre auquel Σ a été calculé) sans avoir à calculer explicitement chaque diagramme individuel (tout comme on peut calculer numériquement

⁵Ce n'est pas le cas dans le cadre de l'équation de Vlasov [178], où $C_0 \neq C_L$ car un terme supplémentaire apparaît alors dans les éqs.(2.34). La simplification du cas hydrodynamique vient de ce que l'on a alors la propriété non-linéaire exacte $\langle \psi \rangle = 0$, tandis que dans le cadre de l'équation de Vlasov $\langle f(\mathbf{x}, \mathbf{p}; t) \rangle \neq 0$.

la fonction exponentielle, $y(x) = e^x$, en résolvant numériquement l'équation $y' = y$ plutôt qu'en sommant $y(x) = \sum x^n/n!$.

Remarquons ici que, dans le cadre des méthodes de grand N , l'ordre “à p boucles” du développement perturbatif réfère à l'ordre de tronquation de la série infinie de diagrammes obtenue pour les “self-energies” Σ et Π , et non pas à l'ordre de tronquation des fonctions de corrélation et de réponse. En effet, comme nous venons de le voir à l'ordre d'une boucle, un ordre fini en terme de Σ et Π conduit automatiquement à une resommation partielle infinie de termes de tous ordres pour R et C . Cependant, ces resommations ne sont complètes que jusqu'au même ordre que pour les “self-energies” (i.e. il manque certains des diagrammes d'ordre supérieur).

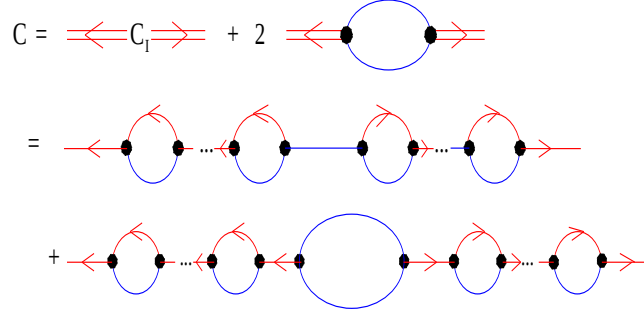


FIG. 2.9 – Les diagrammes obtenus à l'ordre d'une boucle pour la fonction de corrélation C dans le cadre de la “méthode du col direct”. La première égalité correspond à l'éq.(2.40), où l'on note par des lignes doubles la réponse non-linéaire R . La deuxième égalité montre les deux séries de diagrammes bulles resommés à cet ordre, obtenues en remplaçant R par son expression en fonction de C_L et R_L , représentée sur la figure 2.8.

Ensuite, la solution de la première éq.(2.35) peut s'écrire [178, 181]

$$C = R \times C_L(\eta_I) \times R^T + R.\Pi.R^T, \quad (2.40)$$

où le premier produit ne contient aucune intégration sur le temps et nous prenons la limite $\eta_I \rightarrow -\infty$. De plus, il convient de noter que dans le régime linéaire nous avons

$$C_L = R_L \times C_L(\eta_I) \times R_L^T. \quad (2.41)$$

A partir des éqs.(2.39)-(2.41) et de la figure 2.8, nous voyons qu'à “l'ordre d'une boucle” (pour Σ et Π) l'expression (2.40) a resommé les deux séries de “diagrammes bulles” représentées sur la figure 2.9. Nous pouvons vérifier que nous retrouvons en particulier les diagrammes obtenus à l'ordre d'une boucle sur la figure 2.5 dans le cadre du développement perturbatif en puissances du vertex d'interaction cubique K_s (qui est équivalent à la théorie des perturbations standard). En supplément, l'intégration des équations différentielles linéaires (2.35) nous a permis de resommer un infini (partielle) de diagrammes d'ordres supérieurs.

Ainsi, nous retrouvons le fait que les développements de grand N et la théorie des perturbations standard coïncident jusqu'à l'ordre de tronquation et ne diffèrent que par des termes d'ordre supérieur. Cette propriété est essentielle, puisque nous visons à décrire le régime faiblement non-linéaire, en ce qu'elle nous assure que les termes perturbatifs d'ordre le plus bas sont exactement pris en compte. L'espoir associé à de telles méthodes est donc d'allier l'exactitude de la théorie des perturbations standard, qui décrit les premiers termes correctifs au régime linéaire, à un comportement qualitatif (et si possible quantitatif) régularisé dans le régime non-linéaire, en espérant par exemple que les resommations incluses dans ces approches évitent l'apparition de termes séculiers. Ceci pourrait alors améliorer la convergence du développement perturbatif et agrandir son domaine de validité.

Fonctions à trois points

Le développement de grand N décrit dans le paragraphe précédent n'est pas limité au calcul des fonctions de corrélation à deux points, et s'applique aussi aux fonctions de corrélation et de réponse d'ordre supérieur. En particulier, dans le cadre général du formalisme d'intégrale de chemin la fonction de corrélation à trois points peut s'écrire sous la forme [199]

$$\mathcal{C}_3(x_1, x_2, x_3) = -\mathcal{C}(x_1, x'_1)\mathcal{C}(x_2, x'_2)\mathcal{C}(x_3, x'_3)\Gamma_3(x'_1, x'_2, x'_3), \quad (2.42)$$

où Γ_3 est le “vertex à trois points habillé” (i.e. le vertex d'interaction K_s auquel on a rajouté les corrections adéquates associées aux non-linéarités du système). Ici nous avons traité sur un même pied les champs ψ et λ ,

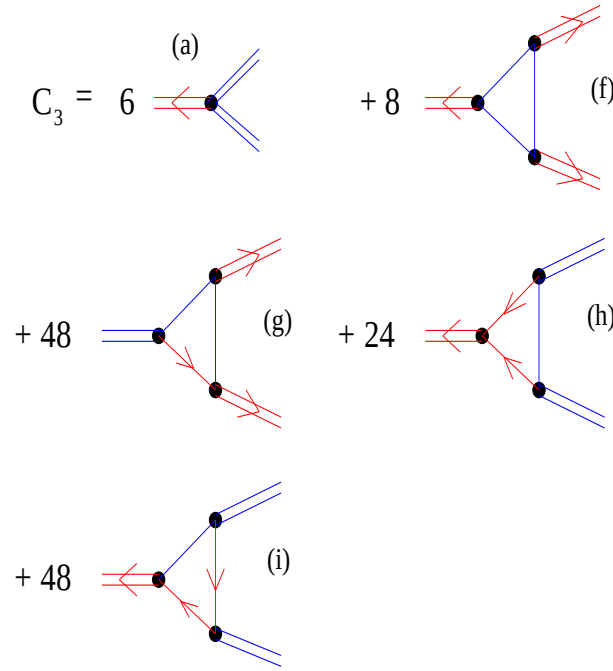


FIG. 2.10 – Les diagrammes obtenus à l'ordre d'une boucle pour la fonction de corrélation à trois points C_3 dans le cadre de la méthode du col directe, correspondant à l'expression (2.44).

de sorte que $\mathcal{C}$ correspond aux trois possibilités $\langle \psi\psi \rangle = C$, $\langle \psi\lambda \rangle = R$ et $\langle \lambda\lambda \rangle = 0$, et de même pour $\mathcal{C}_3$. Comme les termes de “self-energy” Σ et Π , le vertex Γ_3 peut s'obtenir à partir d'une série diagrammatique que l'on tronque à l'ordre souhaité en $1/N$.

A l'ordre d'une boucle nous avons

$$\Gamma_3 = -6K_s - 6^3 K_s \mathcal{C}_0 K_s \mathcal{C}_0 K_s \mathcal{C}_0 + .. \quad (2.43)$$

où $\mathcal{C}_0$ représente les propagateurs auxiliaires C_0 et R_0 introduits en (2.34), qui se trouvent être identiques aux propagateurs linéaires C_L et R_L . Après substitution dans (2.42) nous obtenons

$$\mathcal{C}_3 = 6CCC.K_s + 216CCC.(K_s C_L K_s C_L K_s C_L) + .. \quad (2.44)$$

qui est représenté sur la figure 2.10. Noter que le diagramme (a), qui correspond au premier terme dans l'éq.(2.44), n'est pas identique au diagramme (a) de la figure 2.6 du développement sur K_s (lui-même identique au diagramme (a) de la figure 2.3 du développement perturbatif standard). En effet, du fait des lignes doubles, c'est-à-dire de l'insertion des propagateurs non-linéaires C et R sur les trois pattes externes, il contient trois

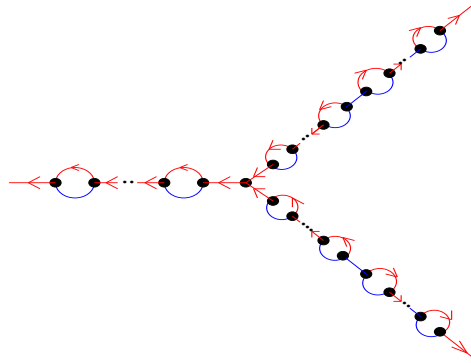


FIG. 2.11 – Une série infinie de diagrammes resommés par le diagramme (a) de la figure 2.10. Elle est obtenue en insérant les expressions des propagateurs non-linéaires R et C représentés sur les figures 2.8 et 2.9 (en prenant en compte le dernier diagramme de la figure 2.9 on obtient deux séries supplémentaires).

séries infinies de diagrammes en termes des propagateurs linéaires C_L et R_L , telle que celle représentée sur la figure 2.11, qui sont obtenues en substituant les expressions données sur les figures 2.8 et 2.9. En particulier, ce diagramme (a) contient les cinq premiers diagrammes de la figure 2.6. De la même façon, les quatre derniers diagrammes de la figure 2.10 contiennent aussi les quatres derniers diagrammes de la figure 2.6. On vérifie donc à nouveau que cette méthode du col directe redonne les diagrammes du développement perturbatif standard (mais organisés de manière différente) jusqu'à l'ordre de troncation, auxquels sont ajoutés une série infinie (incomplète) de diagrammes d'ordres supérieurs.

Les fonctions de corrélation d'ordre supérieur, à p points, s'obtiennent de la même manière. Il convient de noter que, contrairement à l'approximation usuelle basée sur la troncation de la hiérarchie BBGKY (qui relie la fonction de corrélation C_p à la fonction d'ordre suivant C_{p+1} , et que l'on ferme généralement en prenant $C_{p+1} = 0$ à un certain ordre), dans ce développement de grand N toutes les fonctions de corrélation C_p sont non-nulles même après troncation à un ordre fini en $1/N$ pour les termes de “self-energy” Σ et Π et les vertex propres Γ_p .

2.5.2 Action effective 2PI

Une approche alternative à la méthode du col directe présentée dans les paragraphes précédents est fournie par la méthode de “l'action effective 2-particules irréductible” (2PI) [178, 181]. Elle consiste à introduire en premier lieu la double transformée de Legendre $\Gamma_N[\psi, C]$ de la fonctionnelle $W_N = \ln Z_N$, où Z_N est à nouveau la fonctionnelle (2.33), et à calculer ensuite Γ_N sous la forme d'un développement en puissances de $1/N$. C'est pour cette raison que nous avons appelé la méthode précédente “méthode du col *directe*”, car le développement en $1/N$ s'appliquait directement à la fonctionnelle génératrice des fonctions de corrélation, W , tandis que dans cette deuxième méthode il s'applique à sa transformée de Legendre Γ . Comme la transformation de Legendre est une opération non-linéaire ces deux développements ne sont pas identiques, et fournissent donc des résultats différents selon que l'on tronque à un ordre fini sur W ou sur Γ . Il convient de noter qu'à l'ordre d'une boucle étudié ici, cette approche coïncide avec les méthodes “de couplage de modes” utilisées par exemple en hydrodynamique ou en physique statistique [29]. Plus récemment, en transposant ces dernières approches au cas de la dynamique gravitationnelle en cosmologie, Taruya et al. [166, 167] ont ainsi retrouvé les équations présentées ci-dessous, puis étudié en détail l'application de cette méthode au calcul du spectre de puissance dans le régime associé aux oscillations acoustiques baryoniques (en introduisant quelques approximations supplémentaires pour faciliter les calculs numériques).

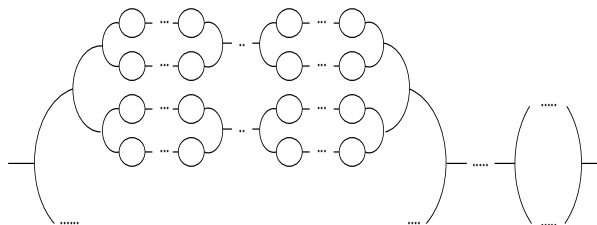


FIG. 2.12 – Une série de diagrammes inclus dans les fonctions à deux points données par la méthode de l'action effective 2PI, à l'ordre d'une boucle, qui n'étaient pas pris en compte par la méthode du col directe au même ordre.

Cette méthode “2PI” mène en fait aux mêmes équations exactes (2.35) (qui peuvent en fait être vues comme des définitions des termes correctifs Σ et Π par rapport au régime linéaire), mais avec une expression différente des termes de “self-energy” Σ et Π . En fait, au lieu de s'écrire sous la forme d'un développement diagrammatique en puissances des propagateurs linéaires C_L et R_L , Σ et Π sont maintenant donnés sous la forme d'un développement diagrammatique en puissances des propagateurs non-linéaires C et R . A l'ordre d'une boucle on obtient la même structure que les eqs.(2.37)-(2.38), où l'on remplace simplement C_L et R_L par C et R :

$$\Sigma(x, y) = 4K_s(x; x_1, x_2)K_s(z; y, z_2)R(x_1, z)C(x_2, z_2) \quad (2.45)$$

$$\Pi(x, y) = 2K_s(x; x_1, x_2)K_s(y; y_1, y_2)C(x_1, y_1)C(x_2, y_2). \quad (2.46)$$

En termes diagrammatiques, cela signifie que Σ et Π sont donnés par les diagrammes de la figure 2.7 mais où les lignes simples sont remplacées par des lignes doubles. Comme nous avons encore les équations de Schwinger-Dyson (2.35), les propagateurs non-linéaires, R et C , sont à nouveau donnés par les expressions (2.39) et (2.40), donc par les premières égalités des figures 2.8 et 2.9, mais où dans les bulles les lignes simples sont remplacées par

des lignes doubles. Ré-exprimé en termes des propagateurs linéaires R_L et C_L , cela signifie que les expressions obtenues pour R et C contiennent tous les diagrammes obtenus par la méthode du col directe plus une infinité de diagrammes supplémentaires associés à la “renormalisation” des termes Σ et Π , tel que celui représenté sur la figure 2.12. A nouveau, ces diagrammes peuvent être obtenus en résolvant par itération les premières égalités des figures 2.8 et 2.9, en notant que du fait que les lignes internes aux bulles sont doubles on engendre des diagrammes avec des séries de bulles à l’intérieur des bulles obtenues au niveau antérieur, telles des poupées russes. Néanmoins, ces diagrammes étant engendrés par les équations intégral-différentielles (2.35) ils ont une structure bien précise, où l’on reconnaît le motif de “bulle”. En particulier, ils ne contiennent pas (à cet ordre) des diagrammes du type de la figure 2.19 ci-dessous, où des arches peuvent se croiser. En tronquant les expressions de Σ et Π à des ordres de plus en plus élevés on inclut des structures de plus en plus compliquées, mais qui sont toujours des resommations partielles.

Comme les diagrammes ainsi obtenus contiennent ceux de la méthode du col directe, il est clair que cette méthode est en accord avec cette dernière, donc avec le développement sur K_s et la théorie des perturbations standard, jusqu’à l’ordre de troncation, et les différences ne proviennent que de l’inclusion partielle de termes d’ordres supérieurs. Ceci est valable quel que soit l’ordre de troncation.

En pratique, comme pour la méthode du col directe, nous ne calculons pas les expressions de R et C à partir de leur développement diagrammatique mais en résolvant les éqs.(2.35). Cependant, tandis que dans le cas précédent, nous pouvions procéder numériquement en deux étapes, en calculant tout d’abord Σ et Π grâce aux expressions (2.37)-(2.38), qui ne dépendent que des propagateurs linéaires R_L et C_L , puis en résolvant les équations linéaires (2.35) sur R et C , nous devons maintenant mener de front le calcul des propagateurs non-linéaires R et C et des termes de “self-energy” Σ et Π . En effet, ces derniers dépendent maintenant de R et C . Ce calcul est possible d’un seul jet grâce à la causalité du système (les facteurs de Heaviside apparaissant dans R et Σ) qui permet de résoudre ces équations en avançant pas à pas en temps (car les termes de self-energy à un instant donné ne dépendent que des valeurs de R et C aux temps antérieurs). Néanmoins, ce calcul reste beaucoup plus lourd à mettre en oeuvre que dans le cas de la méthode du col directe.

Naturellement, cette méthode permet aussi de calculer les fonctions de corrélation d’ordre plus élevé. Par exemple, la fonction à trois points est à nouveau donnée par l’expression (2.42), mais où le vertex habillé Γ_3 a une expression différente, en termes des propagateurs non-linéaires R et C au lieu de R_L et C_L . A l’ordre d’une boucle il est simplement donné par l’expression (2.43) où $\mathcal{C}_0$ est remplacé par $\mathcal{C}$. En termes diagrammatiques cela signifie que nous retrouvons les cinq diagrammes de la figure 2.10, mais où les lignes internes de la boucle triangulaire sont doublées. Ainsi, en plus des resommations effectuées par la méthode du col directe, telles que celles représentées par le diagramme de la figure 2.11, nous tenons compte des diagrammes obtenus en insérant dans les trois branches de ce dernier des diagrammes du type de la figure 2.12.

2.6 Résultats des méthodes de grand N

2.6.1 Méthode du col directe

Nous décrivons maintenant quelques propriétés des fonctions à deux points obtenues dans le cadre de la méthode du col directe présentée dans le paragraphe 2.5.1.

Fonction de réponse

Un calcul explicite montre que les éqs.(2.35) de Schwinger-Dyson sont de la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_1}{\partial \eta_1}(\eta_1, \eta_2) - R_2(\eta_1, \eta_2) &= \int_{\eta_2}^{\eta_1} d\eta \left\{ \left(e^{2\eta_1} \Sigma_{0;11}^+ + e^{-\eta_1/2+5\eta/2} \Sigma_{0;22}^+ \right) R_1(\eta, \eta_2) \right. \\ &\quad \left. + \left(e^{2\eta_1} \Sigma_{0;12}^+ - e^{-\eta_1/2+5\eta/2} \Sigma_{0;12}^+ \right) R_2(\eta, \eta_2) \right\}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

où R_1 et R_2 sont les deux composantes de la première ou deuxième colonne de la matrice R et les termes $\Sigma_{0;ij}^+(k)$ sont des constantes par rapport au temps, données par des intégrales sur le spectre de puissance linéaire $P_{L0}(k)$ (et on obtient une équation similaire pour R_2). Les facteurs exponentiels dans l’intégrale proviennent de ceux qui apparaissent dans les propagateurs linéaires, voir les éqs.(2.24) et (2.25). Calculant tout d’abord les facteurs $\Sigma_{0;ij}^+(k)$, on peut ensuite calculer la réponse R en intégrant⁶ l’éq.(2.47) sur η_1 et en partant de la condition initiale (2.22).

⁶En fait, tirant parti de la dépendance très simple en η_1 du terme de droite de (2.47), on peut éliminer les intégrales temporelles et se ramener à des équations différentielles (du troisième ordre) en dérivant deux fois par rapport à η_1 .

Il convient de noter que chaque mode de vecteur d'onde k évolue séparément dans l'éq.(2.47), si bien que nous n'avons pas écrit explicitement la dépendance en k . Cela vient de l'homogénéité statistique du système, qui implique que les fonctions à deux points contiennent un préfacteur de Dirac :

$$C(x_1, x_2) = \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) C_{i_1, i_2}(k_1; \eta_1, \eta_2), \quad R(x_1, x_2) = \delta_D(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \theta(\eta_1 - \eta_2) R_{i_1, i_2}(k_1; \eta_1, \eta_2), \quad (2.48)$$

où nous avons aussi utilisé l'isotropie statistique (il ne subsiste qu'une dépendance sur $k_1 = |\mathbf{k}_1|$) et la causalité (facteur de Heaviside pour R). Les termes de “self-energy” Σ et Π se comportent comme R et C respectivement. Par suite des facteurs de Dirac, les éqs.(2.35) de Schwinger-Dyson couplent uniquement $C(k)$ et $R(k)$ avec $\Sigma(k)$ et $\Pi(k)$. Dans le cadre de la méthode du col directe le couplage de modes entre différents vecteurs d'onde n'est donc pas “dynamique”, mais apparaît seulement à travers le calcul des coefficients $\Sigma_{0, ij}^+(k)$ (et $\Pi_{0, ij}^+(k)$), par le biais des éqs.(2.37)-(2.38). C'est naturellement une grande simplification par rapport à la méthode de l'action effective 2PI du paragraphe 2.5.2, où les termes de “self-energy” dépendent des propagateurs non-linéaires et le couplage de modes est en quelque sorte réactualisé à chaque pas temporel.

Comme nous l'avons déjà expliqué, le régime linéaire correspond à $K_s = 0$, donc à $\Sigma = \Pi = 0$, c'est-à-dire à mettre à zéro le terme de droite dans l'éq.(2.47). La théorie des perturbations standard (ou de manière équivalente le développement sur K_s) consiste à substituer la réponse linéaire R_L dans le terme de droite, de sorte que l'on obtient directement une équation différentielle (i.e. sans terme de mémoire intégral). Cela va clairement induire des termes séculiers, en $e^{2\eta_1} R_L$ notamment, dans la solution R calculée à cet ordre, et nous retrouvons donc le fait que dans le cadre de la théorie des perturbations standard nous engendrons des puissances croissantes du temps, en D_+^p comme dans l'éq.(2.1).

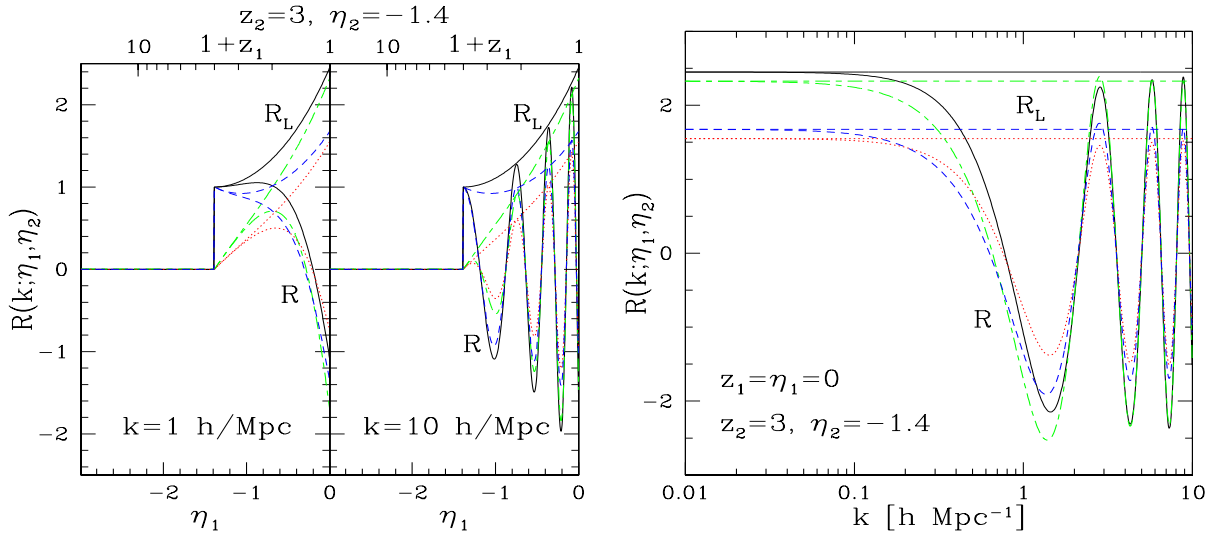


FIG. 2.13 – Les composantes de la fonction de réponse non-linéaire $R(k; \eta_1, \eta_2)$ en fonction du temps η_1 (figure de gauche) et du nombre d'onde k (figure de droite). Les courbes sans oscillations (avec croissance exponentielle dans les panneaux de gauche, horizontales dans le panneau de droite) sont les composantes de la réponse linéaire R_L de l'éq.(2.25).

Les resommations effectuées par la méthode du col directe, qui reviennent à cet ordre à faire intervenir la réponse non-linéaire R dans le terme de droite de (2.47), et donc à passer d'une équation différentielle explicite à une équation intégral-différentielle, c'est-à-dire à prendre en compte une certaine rétro-action, régularisent ces termes séculiers. En particulier, une analyse détaillée montre que dans la limite des grands vecteurs d'onde on obtient

$$k \rightarrow \infty : R_{i,j}(k; D_1, D_2) \sim R_{L,i,j}(k; D_1, D_2) \cos[k\sigma_v(D_1 - D_2)], \quad (2.49)$$

où nous avons simplement noté $D = D_+ = e^\eta$ le facteur de croissance linéaire, et nous avons introduit la variance de la vitesse linéaire

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{3} \langle \mathbf{s}_{L0}^2 \rangle = \frac{4\pi}{3} \int dk P_{L0}(k). \quad (2.50)$$

Ici nous avons noté $\mathbf{s}_L$ le champ de déplacement donné par la théorie linéaire, qui est aussi égal à la vitesse particulière linéaire $\mathbf{v}_L$ à un facteur $dD/d\tau$ près. Ainsi, à cet ordre la réponse non-linéaire est simplement égale dans la limite de grand k à la réponse linéaire multipliée par un facteur en cosinus. En développant ce dernier en puissances de P_{L0} (donc de σ_v^2) nous retrouvons le premier terme séculier en $(D_1 - D_2)^2$ de la théorie des

perturbations standard, plus une infinité incomplète de termes d'ordres supérieurs, dont la resommation a permis de régulariser ce terme séculier. Donc la méthode du col directe (à cet ordre) ne reproduit pas la décroissance Gaussienne attendue à grand k , mais seulement une régularisation des termes séculiers et une décroissance effective lorsque l'on intègre sur R du fait des oscillations de fréquence croissante dans le régime non-linéaire.

Nous comparons sur la figure 2.13 les différentes composantes, $R_{ij}(k; \eta_1, \eta_2)$, de la fonction de réponse non-linéaire obtenues en intégrant numériquement l'éq.(2.47) (et son analogue pour R_2), avec leurs correspondantes linéaires, $R_{L;i,j}$. Nous représentons la dépendance sur le temps η_1 (panneaux de gauche) et sur le nombre d'onde k (panneau de droite). Comme on le voit sur l'éq.(2.25) et sur la figure, la réponse linéaire présente une croissance exponentielle avec η_1 et est indépendante de k . En accord avec l'éq.(2.49), nous vérifions que la réponse non-linéaire présente une croissance bornée par la réponse linéaire (au lieu d'une croissance plus forte due à des termes séculiers comme dans l'approche standard) avec des oscillations dont la fréquence temporelle sur D_1 croît avec k (comparer les deux panneaux de gauche). En terme de la dépendance sur k (panneau de droite), nous vérifions que les réponses non-linéaires rejoignent les réponses linéaires en $k \rightarrow 0$ (i.e. aux grandes échelles quasi-linéaires) et restent bornées en $k \rightarrow \infty$ (i.e. aux petites échelles très non-linéaires) avec des oscillations dont l'amplitude à grand k est donnée par $R_{L;i,j}$, en accord avec l'éq.(2.49).

Fonction de corrélation (spectre de puissance)

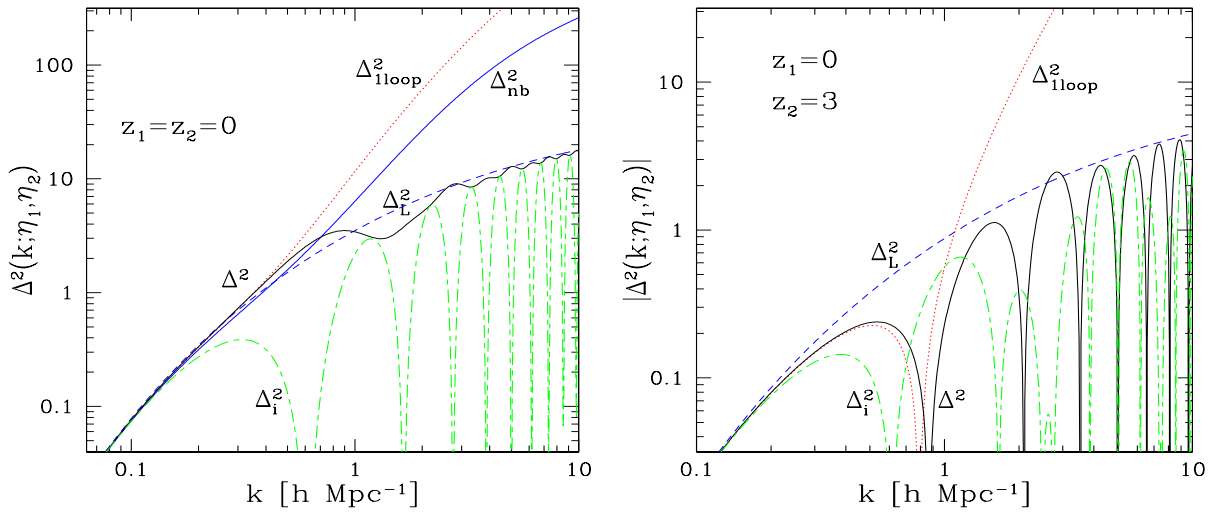


FIG. 2.14 – Le spectre de puissance logarithmique, $\Delta^2(k)$ de l'éq.(2.51), aux redshifts $z_1 = z_2 = 0$ (i.e. à temps égaux, figure de gauche) et aux redshifts $z_1 = 0$ et $z_2 = 3$ (i.e. pour deux temps différents, figure de droite). Sont représentés le spectre linéaire, Δ_L^2 (tirets bleus), le résultat à une boucle de la théorie des perturbations standard, Δ_{1loop}^2 (pointillés rouges), le spectre non-linéaire à une boucle de la méthode du col directe (2.40), Δ^2 (ligne continue noire), la contribution associée au premier terme de l'éq.(2.40), Δ_i^2 (point-tiret vert), et le résultat de simulations numériques [159], Δ_{nb}^2 (ligne continue bleue).

Pour calculer la fonction de corrélation non-linéaire nous n'avons pas besoin de résoudre la première équation de Schwinger-Dyson (2.35) par une intégration pas-à-pas en temps. En effet, il nous suffit de calculer l'expression explicite (2.40), qui nous donne directement C en tous temps une fois que nous connaissons Π et R . Plutôt que $C(k; \eta_1, \eta_2)$ nous représentons sur la figure 2.14 le spectre de puissance par intervalle de nombre d'onde logarithmique,

$$\Delta^2(k; \eta_1, \eta_2) = 4\pi k^3 C_{11}(k; \eta_1, \eta_2). \quad (2.51)$$

Noter que pour des temps égaux, $\eta_1 = \eta_2$, C_{11} est le spectre de puissance du champ de densité usuel, $C_{11}(k; \eta, \eta) = P(k, \eta)$. Les autres composantes $C_{i,j}$ donnent les corrélations croisées entre le contraste de densité, δ , et la divergence du champ de vitesse, θ , selon la définition (2.9). Par définition du spectre de puissance ce dernier est nécessairement positif. Il est facile de vérifier à partir de la solution (2.40) et de l'expression (2.38) que les composantes diagonales à temps égaux de la corrélation non-linéaire données par la méthode du col directe, $C_{i,i}(k; \eta, \eta)$, satisfont bien cette propriété exacte. Par contre, les corrélations à temps différents ne sont pas nécessairement positives.

Nous comparons sur la figure 2.14 la prédiction à l'ordre d'une boucle de la méthode du col directe avec la théorie des perturbations standard et le résultat de simulations numériques [159]. Aux grandes échelles, $k \rightarrow 0$, nous vérifions que ces deux méthodes perturbatives se rejoignent, et finissent par tendre vers le spectre linéaire. Aux petites échelles, $k \rightarrow \infty$, la théorie des perturbations standard présente une croissance très forte, associée aux termes séculiers (en loi de puissance) du développement (2.1), tandis que la méthode du col présente une croissance modérée, qui se trouve être du même ordre que le spectre linéaire. Ceci provient bien sûr du comportement de la fonction de réponse R analysé précédemment, où nous avons vu que les termes séculier standards sont resommés sous la forme d'un cosinus, voir l'éq.(2.49) et la figure 2.13. Les oscillations dues à ce facteur trigonométrique apparaissent clairement dans la contribution du premier terme de l'éq.(2.40), notée Δ_i^2 sur la figure 2.14. Cette contribution correspond au simple transport des fluctuations initiales par la réponse non-linéaire R . La deuxième contribution de l'éq.(2.40) fait intervenir la production de puissance due au couplage de modes, à travers le terme de “self-energy” Π , et domine dans le régime faiblement non-linéaire. Dans le régime fortement non-linéaire, aucune de ces méthodes (théorie standard et méthode du col directe) ne parvient à reproduire les résultats des simulations numériques. Ceci n'est pas très surprenant étant donné que ce sont deux méthodes perturbatives qui peuvent au mieux décrire le régime faiblement non-linéaire (d'autant qu'à petite échelle il faudrait prendre en compte le caractère multi-flots de la dynamique, et donc aller au-delà du cadre hydrodynamique).

2.6.2 Action effective 2PI

Nous décrivons maintenant quelques propriétés des fonctions à deux points obtenues dans le cadre de la méthode de l'action effective 2PI présentée dans le paragraphe 2.5.2. Rappelons à nouveau que cette approche coïncide à l'ordre d'une boucle avec la méthode de couplage de modes, appliquée récemment sous le nom de “closure theory” avec quelques approximations supplémentaires par [166, 167].

Fonction de réponse

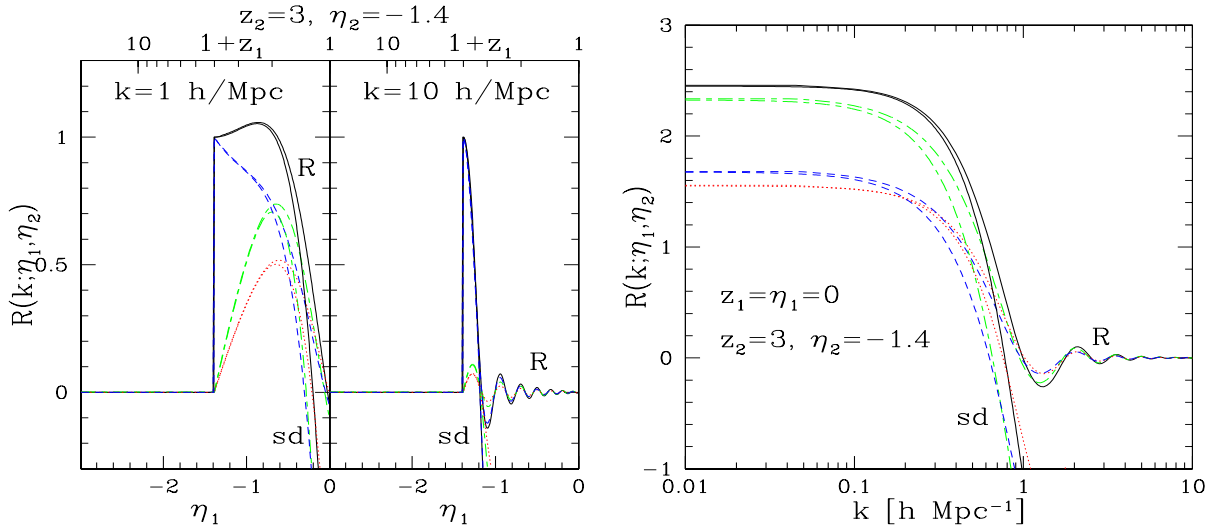


FIG. 2.15 – Les composantes de la réponse non-linéaire $R(k; \eta_1, \eta_2)$ en fonction du temps η_1 (panneaux de gauche) et du nombre d'onde k (panneau de droite), obtenues par la méthode de l'action effective 2PI à l'ordre d'une boucle. Pour comparaison nous montrons aussi la première demi-oscillation des fonctions de réponse obtenues par la méthode du col directe, représentées sur la figure 2.13, notées ici “sd”. Les fonctions de réponse obtenues par la méthode de l'action effective 2PI tendent vers zéro dans le régime fortement non-linéaire, aux grands temps à k fixé, avec un temps caractéristique de décroissance qui augmente avec k , ou aux grands k à un temps donné.

Nous montrons sur la figure 2.15 les dépendances en η_1 et k des fonctions de réponse obtenues par la méthode de l'action effective 2PI à l'ordre d'une boucle, c'est-à-dire en résolvant numériquement les équations de Schwinger-Dyson (2.35) avec les expressions (2.45)-(2.46) des termes de “self-energy”. Pour comparaison nous traçons aussi la première demi-oscillation des fonctions de réponse obtenues par la méthode du col directe, représentées sur la figure 2.13 dans la paragraphe 2.6.1. Comme attendu, du fait que toutes ces approches

coincident jusqu'à l'ordre de troncature et ne diffèrent que par des termes d'ordres supérieurs en puissances de P_{L0} , nous vérifions que les fonctions de réponse obtenues par ces deux développements en $1/N$ se rejoignent dans le régime quasi-linéaire, $k \rightarrow 0$. Cependant, nous voyons que les termes séculiers du développement perturbatif standard n'ont pas été seulement régularisés sous la forme d'une fonction oscillante, comme c'était le cas en (2.49) avec la méthode précédente, mais ont été resommés sous la forme d'une fonction d'amplitude décroissante. La méthode de l'action effective 2PI permet donc de retrouver, à cet ordre d'une boucle, la perte de mémoire effective (i.e. la relaxation à zéro) de la fonction de réponse dans la régime fortement non-linéaire, aux temps longs. Cependant, contrairement à l'atténuation Gaussienne attendue, il ne s'agit que d'une décroissance en loi de puissance inverse, avec une persistance des oscillations déjà rencontrées dans la méthode du col directe.

Ce "damping" est le résultat du caractère non-linéaire des éqs.(2.35). Il peut être compris analytiquement à partir du modèle simplifié suivant. Considérons l'équation

$$\frac{\partial R}{\partial \eta_1} = -k^2 \sigma_v^2 \int_{\eta_2}^{\eta_1} d\eta e^{\eta_1 + \eta} R(\eta_1, \eta) R(\eta, \eta_2), \quad (2.52)$$

pour une réponse à une composante et pour un seul mode k , $R(\eta_1, \eta_2)$. C'est une forme simplifiée du système (2.35)-(2.45), où nous aurions utilisé la corrélation linéaire C_L dans la "self-energy" Σ , pour ne garder que la non-linéarité sur R . Le facteur $-k^2 \sigma_v^2$ représente l'amplitude de la "self-energy" Σ au vecteur d'onde k étudié (on peut montrer que $\Sigma_0 \sim -k^2 \sigma_v^2$ à grand k , où σ_v était défini en (2.50), ce qui était à l'origine du comportement (2.49)). Le terme exponentiel $e^{\eta_1 + \eta}$ traduit la dépendance temporelle de la corrélation linéaire C_L substituée dans Σ .

Le régime linéaire R_L correspond comme d'habitude à mettre le terme de "self-energy" à zéro, c'est-à-dire ici $\sigma_v = 0$, ce qui fournit la solution

$$\text{régime linéaire :} \quad \eta_1 \geq \eta_2 : \quad R_L(\eta_1, \eta_2) = 1, \quad (2.53)$$

en utilisant la condition initiale $R(\eta, \eta) = 1$ à temps égaux.

La théorie des perturbations standard correspond à résoudre l'éq.(2.52) sous la forme d'une série en puissances de σ_v . Ceci donne pour le premier terme au-delà du régime linéaire (il suffit de substituer R_L dans le terme de droite)

$$\text{théorie des perturbations standard :} \quad R(\eta_1, \eta_2) = 1 - \frac{k^2 \sigma_v^2}{2} (e^{\eta_1} - e^{\eta_2})^2 = 1 - \frac{k^2 \sigma_v^2}{2} (D_1 - D_2)^2, \quad (2.54)$$

où nous avons repris le taux de croissance linéaire, $D = e^\eta$, comme coordonnée temporelle. Nous retrouvons les termes séculiers usuels, c'est-à-dire l'apparition de puissances de D de plus en plus élevées.

La méthode du col directe consiste à remplacer $R(\eta_1, \eta)$ par $R_L(\eta_1, \eta)$ dans le terme de droite de (2.52), c'est-à-dire à utiliser les propagateurs linéaires dans les termes de "self-energy" de manière à se ramener à une équation de Schwinger-Dyson (2.35) linéaire sur R . La solution est alors (obtenue en dérivant (2.52) une fois sur η_1 pour se ramener à une équation différentielle)

$$\text{méthode du col directe :} \quad R(\eta_1, \eta_2) = \cos[k\sigma_v(D_1 - D_2)]. \quad (2.55)$$

En développant le cosinus sur σ_v nous retrouvons bien sûr le premier terme du développement standard (2.54). Par ailleurs, nous retrouvons le facteur trigonométrique (oscillant et borné) obtenu en (2.49) pour le système gravitationnel complet, qui se substitue aux termes séculiers de l'approche standard.

Enfin, dans le cadre de la méthode de l'action effective 2PI nous devons résoudre l'équation non-linéaire (2.52). Faisant le changement de variable $\eta \rightarrow D$, et utilisant une transformée de Laplace, nous obtenons la solution

$$\text{action effective 2PI :} \quad R(\eta_1, \eta_2) = \frac{J_1[2k\sigma_v(D_1 - D_2)]}{k\sigma_v(D_1 - D_2)}, \quad (2.56)$$

où J_1 est la fonction de Bessel du premier type. En développant sur σ_v nous retrouvons à nouveau l'éq.(2.54). Cependant, la non-linéarité de l'éq.(2.52) nous donne maintenant une fonction de réponse dont l'amplitude décroît aux temps longs, en $D_1^{-3/2}$, avec un temps caractéristique qui diminue aux grands nombres d'onde comme $1/k$. Nous retrouvons ici le comportement observé sur la figure 2.15 dans le cas de la dynamique gravitationnelle elle-même. En fait, le modèle (2.56) peut être utilisé pour décrire avec une bonne approximation, y compris au niveau quantitatif, les fonctions de réponse présentées sur la figure 2.15 (c'est aussi une des approximations utilisées en [166, 167] pour faciliter les calculs numériques).

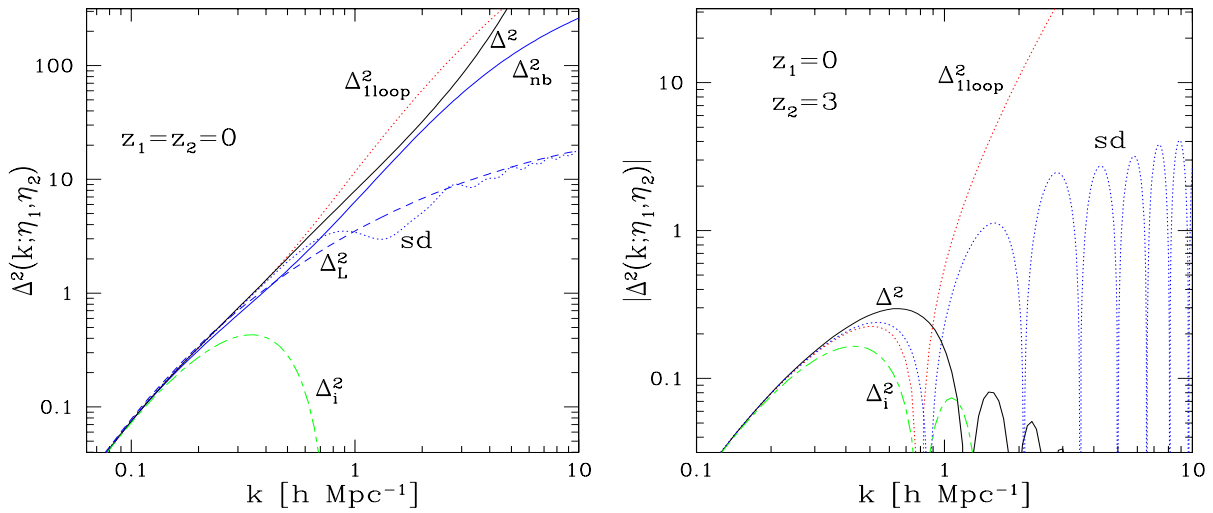


FIG. 2.16 – Le spectre de puissance logarithmique, $\Delta^2(k)$, aux redshifts $z_1 = z_2 = 0$ (panneau de gauche), et $z_1 = 0$ et $z_2 = 3$ (panneau de droite). Sont représentés le spectre linéaire, Δ_L^2 (tirets bleus), le résultat à une boucle de la théorie des perturbations standard, $\Delta_{1\text{loop}}^2$ (pointillés rouges), le spectre à une boucle de la méthode du col directe, “sd” (pointillés bleus), le spectre à une boucle de la méthode de l’action effective 2PI, Δ^2 (ligne continue noire), la contribution du premier terme de l’éq.(2.40), Δ_i^2 (point-tiret vert), et le résultat de simulations numériques [159], Δ_{nb}^2 (ligne continue bleue).

Fonction de corrélation (spectre de puissance)

Comme dans la figure 2.14, nous représentons sur la figure 2.16 le spectre de puissance logarithmique (2.51) pour des temps égaux ($z_1 = z_2 = 0$ dans le panneau de gauche, ce qui correspond au spectre de puissance traditionnel) et différents ($z_1 = 0$ et $z_2 = 3$ dans le panneau de droite). Par comparaison nous montrons aussi les résultats du développement perturbatif standard ($\Delta_{1\text{loop}}^2$) et de la méthode du col directe (“sd”). A nouveau, nous vérifions que toutes ces approches se rejoignent dans le régime quasi-linéaire, aux grandes échelles ($k \rightarrow 0$). Dans le régime non-linéaire, du fait de la décroissance des fonctions de réponse, voir (2.56) et la figure 2.15, la contribution due au premier terme de (2.40) devient négligeable comme attendu et l’essentiel de la puissance est associé au second terme décrivant les couplages de modes. A partir de l’éq.(2.40) et de l’expression (2.46) on peut montrer à nouveau que le spectre de puissance à temps égaux est positif. Cette propriété exacte est donc bien conservée par la méthode de l’action effective 2PI, comme on peut le vérifier sur le panneau de gauche de la figure 2.16.

La différence la plus marquante entre ce développement en $1/N$ et le développement perturbatif standard se voit sur le panneau de droite, à temps différents. En effet, comme attendu la corrélation obtenue par la première approche décroît aux petites échelles, de sorte que l’on a une perte de mémoire apparante, tandis que la corrélation obtenue par la seconde approche, faisant intervenir un développement en puissances de D et P_{L0} , “explose” au contraire à petite échelle. Bien qu’intéressant d’un point de vue théorique, car mettant en évidence ce processus de perte de mémoire apparante, sur lequel nous reviendrons dans le paragraphe 2.7, la fonction de corrélation à temps différents n’est pas la quantité pertinente du point de vue observationnel, où l’on mesure essentiellement le spectre de puissance sur une carte du champ de densité à un temps fixé.

Il convient de noter qu’à temps égaux il n’y a plus trace de ce “damping”, comme on peut le vérifier sur le panneau de gauche. Néanmoins, dans ce cas aussi la méthode de l’action effective 2PI semble donner les résultats les plus proches de ceux obtenus par les simulations numériques. Malheureusement, cette méthode est beaucoup plus lourde à mettre en oeuvre d’un point de vue numérique, et il n’est pas certain qu’en terme d’efficacité elle soit supérieure aux deux autres approches. Cependant, il convient de noter qu’en introduisant quelques approximations supplémentaires pour simplifier les calculs numériques, on peut obtenir une meilleure précision aux échelles pertinentes pour la mesure des oscillations acoustiques baryoniques ($k \sim 0.2 h \text{ Mpc}^{-1}$ à $z = 0$) que ne le permet la théorie des perturbations standard [166, 167]. Ces résultats indiquent que de telles approches, basées sur des resommations partielles de la théorie des perturbations usuelle, offrent une voie prometteuse pour prédire les propriétés du champ de densité aux échelles faiblement non-linéaires et ainsi permettre de contraindre les scénarios cosmologiques par comparaison avec les observations.

2.7 Resommations dans la limite de grand k

Nous avons décrit dans les paragraphes précédents quatre développements perturbatifs possibles, parmi d'autres, permettant d'étudier les propriétés statistiques du système dans le régime faiblement non-linéaire (la théorie des perturbations standard, le développement équivalent sur le vertex d'interaction K_s , la méthode du col directe, et la méthode de l'action effective 2PI). Il s'agissait de construire des méthodes systématiques, où l'on écrit la solution du problème sous la forme d'un développement perturbatif, l'ordre de l'approximation étant défini par le niveau de tronquation de ce développement. Dans ce cadre, les diverses approches possibles consistent à perturber sur des paramètres différents (P_{L0} , K_s où $1/N$) ou à développer des quantités différentes (W_N ou Γ_N). Elles peuvent aussi se réinterpréter comme des réorganisations de la série perturbative standard, avec par exemple des resommations infinies partielles. Dans tous ces cas, il n'y a pas de paramètres libres ni d'interpolations à effectuer, et une meilleure précision s'obtient (dans les cas favorables) en calculant des termes d'ordre de plus en plus élevés.

Une approche d'esprit légèrement différent consiste à essayer d'identifier dans le développement perturbatif standard les diagrammes qui dominent dans le régime fortement non-linéaire, $k \rightarrow \infty$, et à les resommer en tirant parti des simplifications associées à cette limite. En interpolant ensuite entre le régime quasi-linéaire, décrit par les premiers termes du développement perturbatif standard, et cette limite de petite échelle, on peut espérer obtenir une approximation efficace dont le domaine de validité est plus large que celui des méthodes perturbatives usuelles. Du fait de l'interpolation on perd une partie du caractère systématique, mais comme on s'intéresse au régime faiblement non-linéaire la dépendance sur les détails de la procédure d'interpolation est assez faible. De plus, on peut en principe améliorer de manière systématique les prédictions en raccordant dans le régime quasi-linéaire avec le résultat perturbatif standard poussé à un ordre de plus en plus élevé.

C'est l'approche développée par Croce & Scoccimarro (nommée "RPT") [47, 46]. Elle permet d'obtenir la décroissance Gaussienne attendue à grand k et aux temps longs de la fonction de réponse, et d'améliorer ensuite la prédiction du spectre de puissance $P(k)$.

Revisitant cette approche, nous avons montré que la limite de grand k sur laquelle elle repose consiste en fait à approximer l'équation du mouvement (2.10) (c'est-à-dire le système (1.5)-(1.6)) par une équation *linéaire* à coefficient aléatoire. Le caractère linéaire sous-jacent permet alors d'obtenir une solution explicite puis de prendre la moyenne sur les conditions initiales Gaussiennes. L'avantage de cette formulation, qui évite de passer par le calcul des diagrammes de tous ordres, est qu'elle fait apparaître clairement les hypothèses physiques sous-jacentes ainsi que le processus physique à l'origine de cette décroissance de la fonction de réponse [182]. Nous avons ainsi pu montrer que ce "damping" n'est pas dû à une réelle perte de mémoire du système au sens d'une relaxation dans le champ de densité lui-même, mais simplement au mouvement d'ensemble de ses structures par les modes de grandes longueur d'onde du champ de vitesse ("sweeping effect").

La reformulation de cette limite de grand k sous la forme d'une équation du mouvement simplifiée nous a permis de l'appliquer au formalisme Lagrangien, où la dynamique est décrite en terme des trajectoires des particules. Nous avons alors montré qu'il n'y a plus de décroissance des fonctions de réponse (dans cette approximation), ce qui s'explique par le fait que dans le cadre Lagrangien on a déjà soustrait le mouvement d'ensemble des particules (les quantités pertinentes ne font intervenir que les déplacements relatifs, qui seuls influent sur les structures du champ de densité).

Nous décrivons brièvement ces résultats dans les paragraphes suivants.

2.7.1 Formalisme Eulérien

L'équation du mouvement (2.10) peut se résoudre sous la forme d'une série en puissances du mode linéaire croissant ψ_L (ou de manière équivalente en puissances du vertex K_s) :

$$\psi = \psi_L + \tilde{K}_s \psi_L^2 + 2\tilde{K}_s^2 \psi_L^3 + 5\tilde{K}_s^3 \psi_L^4 + \dots, \quad (2.57)$$

où nous avons introduit le vertex intégral $\tilde{K}_s$ défini par

$$\tilde{K}_s = R_L \cdot K_s \quad \text{soit} \quad \mathcal{O} \cdot \tilde{K}_s = K_s. \quad (2.58)$$

Les premiers termes de ce développement sont représentés par les diagrammes de la figure 2.17 [47]. Ce développement est équivalent au développement perturbatif standard de la figure 2.1, où l'on aurait explicité les vertex F_p^s en terme du vertex cubique élémentaire $\tilde{K}_s$ (noter que le quatrième diagramme de la figure 2.1 correspond aux deux derniers diagrammes de la figure 2.17).

Dans la limite de grand k pour $\psi(\mathbf{k})$, on suppose que tous les nombres d'onde w_i des champs linéaires ψ_L sont beaucoup plus petits que k , sauf pour un de ces champs (à cause de la conservation de l'impulsion, associée au facteur de Dirac $\delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k})$ du vertex K_s dû à l'invariance par translation). Cela suppose que la puissance est engendrée sur un intervalle limité de nombres d'ondes, $w < \Lambda$, de sorte que pour $k \gg \Lambda$ la série (2.57)

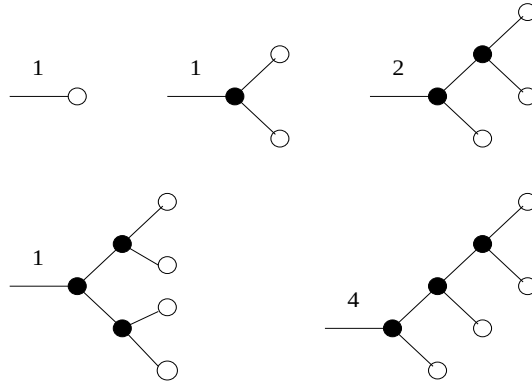


FIG. 2.17 – Le développement du champ non-linéaire ψ en puissances du mode linéaire croissant ψ_L , à partir de l'éq.(2.57), jusqu'à l'ordre ψ_L^4 . Les disques noirs sont le vertex intégral $\tilde{K}_s$, et les cercles blancs le mode linéaire croissant ψ_L . Les nombres sont les facteurs multiplicatifs de chaque diagramme.

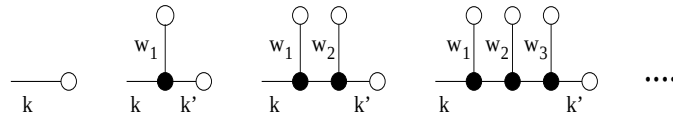


FIG. 2.18 – Les diagrammes supposés dominer dans la limite de grand k pour $\psi(\mathbf{k})$. Tous les nombres d'onde intermédiaires des champs $\psi_L(\mathbf{w}_i)$ sont beaucoup plus petits, $w_i \ll k$, de sorte que $\mathbf{k}' \simeq \mathbf{k}$ tout au long de la ligne horizontale (“ligne principale”).

est dominée par les contributions avec un nombre minimal de modes hors du domaine $[0, \Lambda]$, c'est-à-dire avec un seul champ $\psi_L(\mathbf{w})$ avec $\mathbf{w} \simeq \mathbf{k}$ et tous les autres dans cet interval $0 < w < \Lambda$. Ceci repose donc sur une hypothèse de séparation d'échelles. On suppose de plus que la série est dominée par les diagrammes du type de ceux représentés sur la figure 2.18, où tous les champs de faible nombre d'onde w_i sont directement connectés à la “ligne principale” qui relie l'unique champ de grand w à la racine (l'extrémité gauche du diagramme) [47]. Il s'agit là plutôt d'une simplification du problème, permettant de mener les calculs, que d'une limite bien contrôlée. On peut alors remarquer [182] que cette série de diagrammes est en fait engendrée par l'équation du mouvement plus simple

$$\hat{\psi}(x) = \psi_L(x) + 2\tilde{K}_s(x; x_1, x_2) \cdot \psi_L^<(x_1) \hat{\psi}(x_2), \quad (2.59)$$

où $\psi_L^<(x_1)$ est le mode linéaire croissant restreint aux petits nombres d'onde, $w_1 < \Lambda$ (le facteur 2 vient de ce que l'on peut associer $\psi_L^<$ à chacun des deux champs $\psi(x_1)$ et $\psi(x_2)$ dans l'équation du mouvement (2.10)), et nous avons noté avec un chapeau, $\hat{\psi}$, le champ non-linéaire obtenu dans cette approximation. En effet, en résolvant comme d'habitude l'équation (2.59) sous la forme d'une série en puissances de ψ_L , où de $\tilde{K}_s$ (i.e. de manière itérative), il est facile de vérifier que nous engendrons les diagrammes de la figure 2.18. Il est important de noter que $\psi_L(x)$ et $\psi_L^<(x_1)$ sont des champs Gaussiens indépendants (car $w_1 \neq k$) et que l'équation du mouvement (2.59) est maintenant une équation *linéaire* sur $\hat{\psi}$.

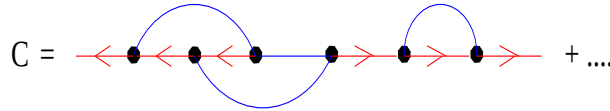


FIG. 2.19 – Un diagramme contenu dans la resommation associée à la figure 2.18 pour la fonction de corrélation à deux points, qui n'est pas inclus par les resommations de grand N à l'ordre d'une boucle.

En prenant ensuite la limite $k/w \gg 1$ des vertex γ^s définis en (2.13), et en remplaçant les facteurs de Dirac $\delta_D(\mathbf{w} + \mathbf{k}' - \mathbf{k})$ par $\delta_D(\mathbf{k}' - \mathbf{k})$ dans les vertex $\tilde{K}_s$ le long de la ligne principale (i.e. on néglige les variations du vecteur d'onde le long de la ligne principale par les branches adjacentes $\mathbf{w}_i$, du fait que $w_i \ll k$), l'équation (2.59) conduit à

$$\hat{\delta}(\mathbf{k}, \eta) = e^\eta \delta_{L0}(\mathbf{k}) + \hat{\alpha}(\mathbf{k}) e^\eta \int_{\eta_l}^\eta d\eta' \hat{\delta}(\mathbf{k}, \eta') \quad \text{avec} \quad \hat{\alpha}(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{w} \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}}{w^2} \delta_{L0}(\mathbf{w}). \quad (2.60)$$

Ici nous avons considéré le cas où les conditions initiales sont prises à l’instant fini η_I . Outre le fait que l’éq.(2.60) est linéaire sur $\hat{\delta}$, la grande simplification par rapport à l’éq.(2.10) est que chaque mode $\mathbf{k}$ évolue indépendamment des autres et le couplage de modes est représenté par la simple variable aléatoire Gaussienne $\hat{\alpha}$. L’éq.(2.60) se résoud en

$$\hat{\delta}(\mathbf{k}, \eta) = D \delta_{L0}(\mathbf{k}) e^{\hat{\alpha}(D-D_I)}. \quad (2.61)$$

Définissant la fonction de réponse par rapport aux conditions initiales,

$$R_I(\mathbf{k}, \eta; \mathbf{k}') = \left\langle \frac{\mathcal{D}\hat{\delta}(\mathbf{k}, \eta)}{\mathcal{D}\delta_{LI}(\mathbf{k}')} \right\rangle = \frac{1}{D_I} \left\langle \frac{\mathcal{D}\hat{\delta}(\mathbf{k}, \eta)}{\mathcal{D}\delta_{L0}(\mathbf{k}')} \right\rangle, \quad (2.62)$$

la moyenne Gaussienne est immédiate et donne :

$$R_I(\mathbf{k}, \eta; \mathbf{k}') = \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \frac{D}{D_I} e^{-(D-D_I)^2 k^2 \sigma_v^2 / 2}, \quad (2.63)$$

où σ_v est la variance de la vitesse linéaire définie en (2.50) (et nous avons étendu la borne supérieure Λ de l’intégrale sur w à $+\infty$). Nous retrouvons donc le fait que dans cette approximation la fonction de réponse est égale à la réponse linéaire (le facteur D/D_I) multipliée par une décroissance Gaussienne en nombre d’onde k et en temps D , ce qui avait été obtenu par Crocce & Scoccimarro [47] en resommant directement les diagrammes de la figure 2.18. En comparant avec les méthodes de grand N décrites dans le paragraphe 2.6, nous voyons que ces dernières capturent à un certain degré le même phénomène, mais avec une fonction de coupure plus douce, qui est du type trigonométrique (2.49) pour la méthode du col directe, ou en loi de puissance inverse, telle une fonction de Bessel (2.56), pour la méthode de l’action effective 2PI. Dans tous les cas, aux grands nombres d’onde le taux de décroissance de la fonction de réponse non-linéaire fait intervenir la combinaison $k\sigma_v(D_1 - D_2)$. Le fait que nous obtenons des fonctions de coupure différentes pour ces diverses méthodes vient de ce que l’on resomme des classes de diagrammes différentes. Ainsi, dans le cadre de la resommation étudiée ici (“RPT”), la fonction de corrélation obtenue en joignant deux développements du type de la figure 2.18, où l’on regroupe ensuite les modes linéaires croissants ψ_L par paires pour prendre la moyenne Gaussienne par le théorème de Wick, contient des diagrammes du type de la figure 2.19, où l’on utilise les mêmes notations que sur la figure 2.9. Ces derniers ne sont pas inclus dans les resommations de grand N , à l’ordre d’une boucle, car ils font intervenir des croisements d’arches, au lieu des “bulles” caractéristiques de la méthode du col directe et de l’action effective 2PI à cet ordre.

Il est intéressant de noter que dans ce cadre nous pouvons aussi calculer la fonction de corrélation associée avec la solution (2.61), ce qui donne le spectre de puissance logarithmique

$$\hat{\Delta}^2(k; D_1, D_2) = \Delta_L^2(k; D_1, D_2) e^{-(D_1 - D_2)^2 k^2 \sigma_v^2 / 2}. \quad (2.64)$$

Nous obtenons à nouveau la prédiction du régime linéaire, Δ_L^2 , multipliée par le même facteur Gaussien décroissant aux grands k et pour de grandes différences de temps, $|D_1 - D_2|$. Le fait que cette atténuation de la fonction de corrélation n’intervient que pour des temps différents est également en bon accord avec les résultats obtenus par les développements en $1/N$, comme le montre la comparaison des panneaux gauche et droit sur les figures 2.14 et 2.16.

En pratique, afin de calculer le spectre de puissance dans le régime faiblement non-linéaire on n’utilise pas la limite de grand k de l’éq.(2.63) telle quelle, mais on fait une interpolation entre ce régime de grand k et les premiers termes du développement perturbatif standard obtenus dans la limite quasi-linéaire $k \rightarrow 0$ (par exemple en utilisant le développement sur K_s décrit dans le paragraphe 2.4). On substitue ensuite cette fonction de réponse améliorée dans l’expression (2.40), en utilisant pour le terme de “self-energy” Π l’expression (2.38), qui s’écrit en fonction du spectre de puissance linéaire (en incluant éventuellement des termes d’ordre supérieur pour améliorer les prédictions). La comparaison avec les simulations numériques montre que l’on reproduit bien la fonction de réponse non-linéaire [46], mais que l’accord peut être encore amélioré en remplaçant la variance linéaire σ_v par la variance non-linéaire, calculée en utilisant un fit basé sur le modèle des halos [48]. On obtient alors un bon accord pour le spectre de puissance dans le régime faiblement non-linéaire, jusqu’à $k \sim 0.2 h \text{ Mpc}^{-1}$ à $z = 0$, ce qui permet d’étudier les oscillations baryoniques acoustiques. Il est intéressant de noter que cette prédiction est significativement plus précise que celle obtenue par le développement perturbatif standard tronqué au même ordre [48].

Un avantage de la formulation (2.59)-(2.62) est de clarifier le sens physique de cette approximation. Nous avons déjà vu qu’elle est basée sur une hypothèse de séparation d’échelles. Plus précisément, du fait que la resommation ne fait intervenir que la variance de la vitesse linéaire σ_v , définie par (2.50), cela signifie que l’on considère des nombres d’onde k très supérieurs au nombre d’onde typique, k_v , qui domine l’intégrale (2.50). On voit sur cette équation que k_v est le nombre d’onde où la pente du spectre de puissance linéaire,

$n(k) = d \ln P_{L0}(k) / d \ln k$, est égale à -1 , $n(k_v) = -1$, soit typiquement $k_v \sim 0.01 h^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ pour un spectre CDM. Comme k_v est constant (en coordonnées comobiles) et que le régime faiblement non-linéaire se déplace vers des k plus élevés lorsque z augmente (rappelons le caractère hiérarchique de la dynamique, mis en évidence sur les éqs.(1.12)-(1.13)), on comprend ainsi le fait vérifié sur les simulations que cette approximation est meilleure à grand redshift.

Enfin, l'éq.(2.60) fait clairement apparaître que cette approximation néglige en fait les couplages de modes aux grands k , qui déterminent les structures du champ de densité aux petites échelles (et ne sont réintroduits que par le terme de “self-energy” Π dans l'éq.(2.40) pour calculer la fonction de corrélation et le spectre de puissance). Elle ne garde trace que du déplacement d'ensemble de ces structures, par le champ de vitesse de grande échelle (qui est supposé encore décrit par le régime linéaire). C'est pourquoi la série diagrammatique de la figure 2.18 a pu être resommée sous la forme d'un facteur multiplicatif $e^{-(D_1-D_2)^2 k^2 \sigma_v^2 / 2}$ qui ne fait intervenir que la variance σ_v . En fait, prenant la transformée de Fourier inverse de l'éq.(2.61) nous obtenons en espace réel (en prenant $D_I = 0$)

$$\hat{\delta}(\mathbf{x}, D) = \delta_L(\mathbf{x} - \mathbf{s}_L(\mathbf{q} = 0, D), D), \quad (2.65)$$

où $\mathbf{s}_L(\mathbf{q}, D) = D \mathbf{s}_{L0}(\mathbf{q})$ est le champ de déplacement linéaire. En d'autres termes, le champ $\hat{\delta}(\mathbf{x}, D)$ est simplement le champ de densité linéaire habituel, mais translaté de la quantité $\mathbf{s}_L(\mathbf{q} = 0, D)$, qui est le déplacement linéaire de la particule initialement située à l'origine⁷. L'éq.(2.65) montre ainsi que la resommation de la figure 2.18, dans cette limite de grand k , correspond simplement à un déplacement uniforme des structures du champ de densité. Le terme de décroissance Gaussienne dans les éqs.(2.63) et (2.64) traduit donc une perte de mémoire apparante, due au déplacement d'ensemble aléatoire des structures entre deux instants différents (“sweeping effect”), sans que ces structures aient disparu pour autant. Ceci explique aussi pourquoi le terme de “damping” disparaît (i.e. devient égal à l'unité) dans l'expression (2.64) de la corrélation du champ de densité pour deux temps égaux.

Ce phénomène de transport par les modes de grande longueur d'onde du champ de vitesse est bien sûr un effet réel, et la comparaison avec les simulations numériques montre que c'est même l'effet dominant pour ce qui concerne la fonction de réponse. L'intérêt de la resommation associée à la figure 2.18 est d'explicitier ce phénomène en termes diagrammatiques, et de montrer comment il apparaît dans le développement perturbatif standard. Comme on l'a noté précédemment, cette bonne modélisation de la fonction de réponse permet ensuite d'améliorer le calcul du spectre de puissance non-linéaire lui-même, par le biais d'expressions telles que (2.40) qui font intervenir cette fonction de réponse.

Cependant, du point de vue du champ de densité, la resommation de la figure 2.18 n'a apporté aucune information sur l'évolution des grandes structures (i.e. la déformation des objets due aux déplacements relatifs des particules). De plus, il apparaît qu'une bonne partie du travail à effectuer à travers de telles resommations, pour ce qui concerne la fonction de réponse, va essentiellement consister à reproduire au mieux ce “sweeping effect”⁸. L'idée qui vient alors naturellement à l'esprit pour court-circuiter cet aspect inintéressant de la dynamique est de passer dans un formalisme Lagrangien, où le mode de translation uniforme est éliminé dès le départ des équations du mouvement, qui se concentrent donc sur les déplacements relatifs. Nous décrivons donc dans le paragraphe suivant comment la resommation de la figure 2.18 peut s'effectuer dans ce cadre Lagrangien (où elle ne prend plus la même signification).

2.7.2 Formalisme Lagrangien

Dans le cadre d'une approche Lagrangienne on s'intéresse aux trajectoires des particules, $\mathbf{x}(\mathbf{q}, \tau)$, où l'on note par $\mathbf{q}$ la position comobile initiale (coordonnée Lagrangienne) de la particule située à la position $\mathbf{x}$ à l'instant τ [115, 32, 31]. L'équation du mouvement s'écrit maintenant

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}(\mathbf{q})}{\partial \tau^2} + \mathcal{H} \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{q})}{\partial \tau} = -\nabla_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{q}) \quad \text{avec} \quad \Delta_{\mathbf{x}} \phi = \frac{3}{2} \Omega_m \mathcal{H}^2 \delta(\mathbf{q}). \quad (2.66)$$

C'est l'analogue des équations d'Euler et de Poisson (1.2)-(1.3) du cadre Eulérien. Il faut noter que dans l'équation de Poisson le Laplacien est pris comme d'habitude par rapport aux coordonnées $\mathbf{x}$. Prenant la divergence de la première éq.(2.66) par rapport à $\mathbf{x}$ et notant par un prime la dérivée partielle par rapport à la

⁷Le fait que l'origine, $\mathbf{q} = 0$, apparaisse sélectionnée vient de ce que l'approximation $\delta_D(\mathbf{w} + \mathbf{k}' - \mathbf{k}) \simeq \delta_D(\mathbf{k}' - \mathbf{k})$ sur les vertex de la ligne principale des diagrammes de la figure 2.18 a explicitement brisé l'invariance par translation des équations. Elle est ultérieurement restaurée en traitant $\mathbf{s}_L(\mathbf{q} = 0, D)$ comme une variable aléatoire Gaussienne indépendante du champ δ_L , c'est-à-dire que $\hat{\alpha}$ et $\delta_{L0}(\mathbf{k})$ sont traités comme des quantités indépendantes dans l'éq.(2.61).

⁸Les expressions (2.61) et (2.65) ne donnant pas sa forme complète, car même aux grandes échelles le champ de vitesse n'est pas exactement linéaire. Une partie des diagrammes va donc consister à calculer les corrections non-linéaires à ce déplacement d'ensemble.

coordonnée temporelle η nous obtenons après multiplication par le Jacobien J :

$$J(\mathbf{q}) \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left[\mathbf{x}''(\mathbf{q}) + \left(\frac{3\Omega_m}{2f^2} - 1 \right) \mathbf{x}'(\mathbf{q}) \right] = \frac{3\Omega_m}{2f^2} (J(\mathbf{q}) - 1), \quad (2.67)$$

avec

$$J(\mathbf{q}) = \left| \det \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} \right) \right| \quad \text{donc} \quad 1 + \delta(\mathbf{q}) = \frac{1}{J(\mathbf{q})}. \quad (2.68)$$

Nous devons également prendre en compte la partie rotationnelle de l'équation du mouvement (2.66). Cependant, comme nous l'avons rappelé dans le chapitre 1, la partie rotationnelle du champ de vitesse Eulérien, $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, décroît dans le régime linéaire et un champ de vitesse initial potentiel le reste ensuite à tous les ordres de la théorie des perturbations (mais une vorticité non-nulle sera engendrée lors des croisements de trajectoires [132]). Dans un cadre perturbatif on peut donc se restreindre à des champs de vitesse potentiels, de sorte que la contrainte sur les modes de déplacements rotationnels se simplifie en

$$\nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{x}'(\mathbf{q}) = 0, \quad \text{soit} \quad \frac{\partial \mathbf{x}'_i(\mathbf{q})}{\partial x_j} = \frac{\partial \mathbf{x}'_j(\mathbf{q})}{\partial x_i}. \quad (2.69)$$

Dans les deux  qs. (2.67) et (2.69) on peut éliminer les dérivées spatiales par rapport à $\mathbf{x}$ au profit de dérivées par rapport à $\mathbf{q}$ en utilisant la relation

$$\left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{x}} \right) = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} \right)^{-1} = \left(\text{com} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} \right) \right)^T / \det \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} \right), \quad (2.70)$$

où $\text{com}(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}})$ est la comatrice de $(\partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{q})$. Pour ce faire, on abandonne la valeur absolue dans le Jacobien (2.68), qui n'intervient que lors des croisements de trajectoires, ce qui est au-delà du régime perturbatif que l'on étudie ici. On obtient ainsi des équations cubiques sur le champ de déplacement $\mathbf{x}(\mathbf{q})$ (en 3D), contrairement aux équations quadratiques obtenues dans le cadre Eulérien, (1.5)-(1.6). Cependant, il est possible de simplifier encore l'éq.(2.69) pour se ramener à une équation quadratique (en toute dimension) mais l'équation (2.67) reste d'ordre d sur $\mathbf{x}(\mathbf{q})$ en dimension d [20].

Ces équations du mouvement (2.67) et (2.69) sont clairement invariantes par rapport aux translations uniformes du système, y compris les translations uniformes dépendant du temps, car tous les termes ne dépendent que de dérivées spatiales, $\partial x_i / \partial q_j$, c'est-à-dire des mouvements relatifs des particules. Ainsi, en prenant la divergence et le rotationnel de l'éq.(2.66) nous avons éliminé le degré de liberté inintéressant associé au transport uniforme du système. Dans ce cadre, nous ne sommes donc plus sensible au "sweeping effect" rencontré dans le paragraphe précédent. C'est un des avantages du formalisme Lagrangien, où nous sommes plus directement sensibles à l'évolution des structures du champ de densité.

Il est utile d'introduire la divergence du champ de déplacement, $-\kappa$, définie (en 3D) par

$$\kappa(\mathbf{q}) = -\nabla_{\mathbf{q}} \cdot [\mathbf{x}(\mathbf{q}) - \mathbf{q}] = 3 - \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial q_i}. \quad (2.71)$$

A l'ordre linéaire κ_L n'est rien d'autre que le contraste de densité linéaire δ_L , et nous pouvons donc définir comme d'habitude les conditions initiales par le mode linéaire (croissant)

$$\kappa_L(\mathbf{q}, \eta) = e^\eta \kappa_{L0}(\mathbf{q}) \quad \text{et} \quad \delta_L(\mathbf{q}, \eta) = e^\eta \kappa_{L0}(\mathbf{q}). \quad (2.72)$$

L' q.(2.67) s'écrit alors en espace de Fourier [20]

$$\begin{aligned} \kappa'' + \frac{1}{2} \kappa' - \frac{3}{2} \kappa &= \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) \left\{ \frac{k_1^2 k_2^2 - (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} \kappa_1 (\kappa_2'' + \frac{1}{2} \kappa_2' - \frac{3}{4} \kappa_2) - \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)}{k_1^2 k_2^2} [\mathbf{k}_2 \cdot (\mathbf{k}_1 \times \vec{\omega}_1)] \right. \\ &\times (\kappa_2'' + \frac{1}{2} \kappa_2' - \frac{3}{2} \kappa_2) - \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)}{k_1^2 k_2^2} \kappa_1 [\mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{k}_2 \times (\vec{\omega}_2'' + \frac{1}{2} \vec{\omega}_2'))] \left. \right\} - \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}) \\ &\times \left\{ \frac{\det(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)^2}{2k_1^2 k_2^2 k_3^2} \kappa_1 \kappa_2 (\kappa_3'' + \frac{1}{2} \kappa_3' - \frac{1}{2} \kappa_3) + \frac{\det(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)}{k_1^2 k_2^2 k_3^2} [(\mathbf{k}_2 \times \mathbf{k}_3) \cdot (\mathbf{k}_1 \times \vec{\omega}_1)] \kappa_2 (\kappa_3'' + \frac{1}{2} \kappa_3' - \frac{3}{4} \kappa_3) \right. \\ &\left. + \frac{\det(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)}{2k_1^2 k_2^2 k_3^2} \kappa_1 \kappa_2 [(\mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_2) \cdot (\mathbf{k}_3 \times (\vec{\omega}_3'' + \frac{1}{2} \vec{\omega}_3'))] \right\} + \dots \end{aligned} \quad (2.73)$$

où les points représentent des termes d'ordre ω^2 et ω^3 . Ici, les pseudo-vecteurs $\vec{\omega}_i = \vec{\omega}(\mathbf{k}_i)$ décrivent les degrés de liberté rotationnels du champ de déplacement (et $\mathbf{k} \times \vec{\omega} = 0$), tandis que κ dont nous avons donné la définition en

(2.71) décrit le degré de liberté irrotationnel. La composante rotationnelle $\vec{\omega}$ obéit à l'équation du mouvement, tirée de (2.69),

$$\frac{(\mathbf{k} \times \vec{\omega}') \times \mathbf{k}}{k^2} = \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) \frac{\mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_2}{k_1^2 k_2^2} \{ (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \kappa_1 \kappa_2' + \kappa_1 [\mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{k}_2 \times \vec{\omega}_2')] + [\mathbf{k}_2 \cdot (\mathbf{k}_1 \times \vec{\omega}_1)] \kappa_2' \} + \dots \quad (2.74)$$

où les points représentent des termes d'ordre ω^2 .

Comme dans le cadre Eulérien, où la resommation de la figure 2.18, dans une limite de grand k , correspondait à la linéarisation (2.59), ou (2.60), de l'équation du mouvement, dans le cadre Lagrangien une resommation analogue correspond à linéariser sur κ et $\vec{\omega}$ les éqs.(2.73)-(2.74). En pratique, cela revient à substituer des champs linéaires κ_L et $\vec{\omega}_L$ dans tous les produits de droite en gardant à chaque fois un seul champ non-linéaire κ ou $\vec{\omega}$. C'est-à-dire que l'on suppose à nouveau une séparation d'échelles, de sorte que les intégrales sont dominées par les contributions où un maximum de champs κ_i et $\vec{\omega}_i$ ont des nombres d'onde w_i beaucoup plus petits que k . Cela serait justifié par exemple pour un spectre de puissance initial piqué sur un intervalle de longueurs d'onde fini, $w < \Lambda$, en s'intéressant aux champs non-linéaires de mode $k \gg \Lambda$. Les éqs.(2.73) et (2.74) deviennent alors, pour un mode $\mathbf{k}$ donné,

$$\begin{aligned} \kappa'' + \frac{1}{2}\kappa' - \frac{3}{2}\kappa &= e^\eta(\tau_{22} + \tau_{33})(\kappa'' + \frac{1}{2}\kappa') - e^\eta\tau_{13}(\omega_2'' + \frac{1}{2}\omega_2') + e^\eta\tau_{12}(\omega_3'' + \frac{1}{2}\omega_3') \\ &\quad - e^{2\eta}(\tau_{22}\tau_{33} - \tau_{23}^2)(\kappa'' + \frac{1}{2}\kappa' + \frac{3}{2}\kappa) - e^{2\eta}(\tau_{12}\tau_{23} - \tau_{22}\tau_{13})(\omega_2'' + \frac{1}{2}\omega_2' + \frac{3}{2}\omega_2) \\ &\quad + e^{2\eta}(\tau_{13}\tau_{23} - \tau_{33}\tau_{12})(\omega_3'' + \frac{1}{2}\omega_3' + \frac{3}{2}\omega_3), \end{aligned} \quad (2.75)$$

et

$$\omega_2' = e^\eta\tau_{13}(\kappa' - \kappa) + e^\eta\tau_{33}(\omega_2' - \omega_2) - e^\eta\tau_{23}(\omega_3' - \omega_3), \quad (2.76)$$

$$\omega_3' = -e^\eta\tau_{12}(\kappa' - \kappa) - e^\eta\tau_{23}(\omega_2' - \omega_2) + e^\eta\tau_{22}(\omega_3' - \omega_3), \quad (2.77)$$

où ω_2 et ω_3 sont les deux composantes de $\vec{\omega}$ dans le plan orthogonal à $\mathbf{k}$. Ici nous avons utilisé le fait que dans le régime linéaire $\vec{\omega}_L = 0$ (car le champ de vitesse initial est potentiel) et nous avons introduit les paramètres τ_{ij} , définis par

$$\tau_{ij} = \int d\mathbf{w} \kappa_{L0}(\mathbf{w}) \frac{w_i w_j}{w^2}, \quad (2.78)$$

qui jouent le même rôle que le coefficient $\hat{\alpha}$ dans l'éq.(2.60) du cadre Eulérien. Le mode linéaire, $(\kappa_L, 0, 0)$, est solution des éqs.(2.75)-(2.77) où les termes de droite sont mis à zéro. On peut à nouveau résoudre ces équations sous la forme d'un développement perturbatif en puissance du mode linéaire κ_{L0} , cependant il n'est pas possible de resommer explicitement ce développement pour obtenir une solution analytique telle que (2.62). Néanmoins, le grand avantage de la formulation de cette limite de grand k sous la forme des équations différentielles (2.75)-(2.77) est que nous pouvons resommer numériquement la série diagrammatique sous-jacente en résolvant tout simplement ces équations différentielles à l'aide de codes standards (pour reprendre l'analogie déjà mentionnée dans le cadre des méthodes de grand N , cela revient à remarquer que le développement $\sum x^n/n!$ correspond à la solution de l'équation différentielle $y'(x) = y(x)$, de sorte qu'il suffit de résoudre numériquement cette dernière équation par un algorithme Runge-Kutta standard pour resommer la série).

Plus précisément, en définissant les variables factorisées,

$$\kappa(\mathbf{k}, \eta) = e^\eta \kappa_{L0}(\mathbf{k}) \hat{\kappa}(\eta), \quad \omega_i(\mathbf{k}, \eta) = e^\eta \kappa_{L0}(\mathbf{k}) \hat{\omega}_i(\eta), \quad (2.79)$$

nous obtenons en substituant dans (2.75)-(2.77) des équations différentielles pour ces quantités $\hat{\kappa}$ et $\hat{\omega}_i$, avec comme conditions initiales $\hat{\kappa} \rightarrow 1$ et $\hat{\omega}_i \rightarrow 0$ en $\eta \rightarrow -\infty$. La fonction de réponse (par rapport aux conditions initiales) est alors donnée par

$$\langle \frac{\mathcal{D}\kappa(\mathbf{k}, \eta)}{\mathcal{D}\kappa_{L0}(\mathbf{k}')} \rangle = \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}') R(k, \eta), \quad \text{d'où} \quad R(k, \eta) = e^\eta \hat{R}(\eta) \quad \text{avec} \quad \hat{R}(\eta) = \langle \hat{\kappa}(\eta) \rangle. \quad (2.80)$$

La moyenne par rapport aux conditions initiales Gaussiennes dans la dernière expression (2.80) se ramène maintenant à une moyenne sur le petit nombre de paramètres Gaussiens τ_{ij} de (2.78), tout comme dans le cadre Eulérien la moyenne (2.62) se ramenait à une moyenne sur le seul paramètre Gaussien $\hat{\alpha}$. En d'autres termes, la fonction de réponse s'écrit :

$$\hat{R}(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{ij} d\tau_{ij} \mathcal{P}(\tau_{ij}) \hat{\kappa}(\eta; \tau_{ij}), \quad (2.81)$$

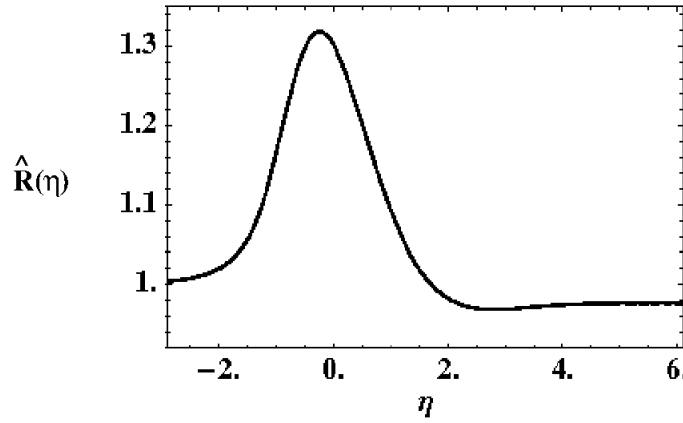


FIG. 2.20 – La réponse non-linéaire $\hat{R}(\eta)$ en fonction du temps η pour un nombre d'onde k tel que $\sigma_0^2 = 5/2$.

où l'on moyenne sur la distribution de probabilité Gaussienne $\mathcal{P}(\tau_{ij})$ des paramètres τ_{ij} la solution $\hat{\kappa}(\eta; \tau_{ij})$, tirée des éqs.(2.75)-(2.77) au temps η pour ces valeurs des paramètres τ_{ij} . Numériquement, il suffit donc de résoudre les équations différentielles (2.75)-(2.77) sur une grille des paramètres τ_{ij} , puis ensuite de pondérer avec le poids Gaussien adéquat. Ce faisant, nous avons en fait effectué implicitement la resommation dans le cadre Lagrangien des diagrammes analogues de ceux de la figure 2.18.

Ainsi, comme dans le cadre Eulérien, les grandes simplifications associées à cette approximation sont que chaque mode $\mathbf{k}$ évolue indépendamment, et ce à travers une équation différentielle linéaire avec un petit nombre de coefficients aléatoires qui représentent l'action du couplage aux autres modes. On a ainsi deux simplifications, i) découplage effectif entre modes, car l'effet des autres modes $\mathbf{w}$ sur un mode $\mathbf{k}$ est donné par leur valeur linéaire (i.e. on néglige toute rétro-action), ii) réduction de la moyenne sur un champ $\delta_{L0}(\mathbf{k})$ (avec donc un nombre infini de degrés de liberté, ce qui conduit à des intégrales de chemin comme dans (2.15)) à une moyenne sur un petit nombre de paramètres Gaussiens (qui se calcule par une intégrale ordinaire de faible dimensionnalité, voir l'expression (2.81)).

Une analyse des éqs.(2.75)-(2.77) montre qu'aux temps longs $\hat{R}(\eta)$ tend vers une constante, c'est-à-dire que $R(k, \eta)$ suit la croissance en e^η de la réponse linéaire au lieu de présenter une coupure Gaussienne comme dans le cas Eulérien (2.63). Ceci est confirmé par un calcul numérique de la moyenne (2.81), obtenu à partir des équations différentielles (2.75)-(2.77) et représenté sur la figure 2.20. On peut voir sur la définition (2.78) que la variance des paramètres τ_{ij} ne dépend que de la quantité σ_0^2 définie par

$$\sigma_0^2 = \frac{4\pi}{3} \int dk k^2 P_{L0}(k) = \langle \delta_{L0}(0)^2 \rangle, \quad (2.82)$$

où nous avons noté dans la deuxième égalité que σ_0^2 est aussi la variance du contraste de densité linéaire $\delta_{L0}(\mathbf{x})$ en un point $\mathbf{x}$ quelconque. La forme des équations différentielles (2.75)-(2.77) montre que la solution est invariante sous la transformation $\{\tau_{ij} \rightarrow \lambda \tau_{ij}, \eta \rightarrow \eta - \ln \lambda\}$, ce qui signifie que la réponse normalisée $\hat{R}$ ne dépend que de la combinaison $D\sigma_0$, tout comme le facteur multiplicatif Gaussien de la réponse Eulérienne (2.63) ne dépendait que de la combinaison $Dk\sigma_v$.

Le comportement observé sur la figure 2.20 montre ainsi que les fonctions de réponse Eulérienne et Lagrangienne présentent des propriétés très différentes. En particulier, comme on pouvait s'y attendre du fait que dans le cadre Lagrangien nous ne sommes plus sensibles au “sweeping effect”, associé au transport quasi-uniforme du champ de densité par les grandes longueurs d'onde du champ de vitesse linéaire, la réponse Lagrangienne ne montre pas de décroissance Gaussienne rapide. En accord avec cette signification physique, c'est-à-dire le fait que les équations du mouvement obtenues dans le cadre Lagrangien décrivent directement les mouvements relatifs des particules, donc les déformations du champ de densité, nous vérifions sur (2.82) que la quantité qui apparaît dans les calculs n'est plus la variance de la vitesse linéaire en un point, σ_v^2 , mais la variance de la densité linéaire en un point, σ_0^2 .

Ici, il faut noter que l'hypothèse de séparation d'échelles, qui est sous-jacente aux resommations effectuées dans ces limites de grand k , n'est plus valable pour un spectre CDM pour ce cadre Lagrangien. Dans le formalisme Eulérien nous avons vu qu'elle était (marginale) valable pour un spectre CDM, car l'échelle k_v qui domine l'intégrale (2.50) est finie, typiquement $k_v \sim 0.01h \text{ Mpc}^{-1}$, et de plus k_v est inférieur aux nombres d'ondes typique de la transition vers le régime non-linéaire ($\sim 1h \text{ Mpc}^{-1}$ à $z = 0$, et plus à grand redshift). Par contre, dans le cadre Lagrangien, l'échelle k_δ qui domine l'intégrale (2.82), où la pente du spectre de puissance linéaire est égale à -3 , est beaucoup plus petite que les échelles d'intérêt cosmologique pour la formation des grandes

structures. Donc on ne peut pas supposer que le nombre d’onde étudié k , faiblement non-linéaire, est très supérieur à k_δ . Par conséquent, la forme de la fonction de réponse Lagrangienne présentée sur la figure 2.20 n’est pas valable dans le cas d’un spectre CDM (elle le serait pour un spectre de puissance linéaire piqué à faible k). Cependant, le fait essentiel que la fonction de réponse Lagrangienne ne présente pas la décroissance rapide de la réponse Eulérienne et est plus directement sensible aux propriétés du champ de densité reste valable dans le cas général. Nous verrons dans le paragraphe 4.4, sur le cas explicite de la dynamique de Burgers, que les fonctions de réponse non-linéaires exactes obtenues pour ce système proche du cas gravitationnel vérifient bien ces propriétés.

2.8 Conclusion

Nous avons donc décrit dans ce chapitre plusieurs méthodes systématiques permettant d’obtenir l’expression des fonctions de corrélation de bas ordre sous la forme de séries perturbatives. Elles peuvent se comprendre comme des resommations partielles des diagrammes associés à la théorie des perturbations ordinaire, et coïncident donc toutes jusqu’à l’ordre de troncation choisi, ne différant que par le sous-ensemble des diagrammes d’ordres supérieurs qui est resommé. Il convient de noter que ces techniques, ici les deux méthodes de grand N dérivées de la formulation du problème en terme d’intégrale de chemin, ne font intervenir aucun paramètre libre. Une variante consiste à interpoler entre les termes perturbatifs usuels de la fonction de réponse et son comportement obtenu dans une limite de grand k à l’aide d’une resommation bien particulière, puis à utiliser cet fonction intermédiaire pour calculer le spectre de puissance. Cette approche offre également une méthode systématique en ce que la jonction avec le régime quasi-linéaire peut se faire en prenant en compte des termes d’ordre de plus en plus élevé.

Nous avons comparé la construction de ces développements alternatifs avec la théorie des perturbations ordinaire, et nous avons expliqué l’origine du comportement des fonctions de réponse et de corrélation obtenues dans ce cadre. En particulier, les fonctions de réponse obtenues dans un formalisme Eulérien sont dominées par un “sweeping effect”, associé au transport quasi-uniforme des structures du champ de densité par les modes de grande longueur d’onde du champ de vitesse. Le formalisme Lagrangien permet de court-circuiter cet obstacle, en éliminant ce degré de liberté sans importance pour ne décrire que les déplacements relatifs des particules. Cependant, cela signifie aussi que l’on est directement “au contact” avec toute la complexité du système, et il est difficile d’obtenir des résultats bien contrôlés (par exemple il n’est plus possible d’utiliser une limite de séparation d’échelles pour le cas réaliste d’un spectre CDM).

Ces méthodes, ou des schémas apparentés, ont déjà permis d’améliorer les prédictions de la théorie des perturbations usuelle dans le régime faiblement non-linéaire, notamment dans le but d’utiliser la mesure des oscillations baryoniques acoustiques sur le spectre de puissance pour contraindre les scénarios cosmologiques [48, 167, 137]. Cependant, on peut penser qu’il reste encore des progrès à réaliser dans cette direction, et qu’il est encore possible d’améliorer les schémas disponibles ou peut-être d’introduire de nouvelles méthodes du même type plus efficaces. En effet, il s’agit d’une ligne d’approche très récente, qui n’a peut-être pas encore été complètement explorée, et semble prometteuse pour décrire le régime faiblement non-linéaire du champ de densité.

Chapitre 3

Méthodes non-perturbatives

Publications associées

Dynamics of gravitational clustering II. Steepest-descent method for the quasi-linear regime, Valageas P., *Astron. Astrophys.*, 382, 412-430 (2002)

Dynamics of gravitational clustering III. The quasi-linear regime for some non-Gaussian initial conditions, Valageas P., *Astron. Astrophys.*, 382, 431-449 (2002)

Dynamics of gravitational clustering IV. The probability distribution of rare events, Valageas P., *Astron. Astrophys.*, 382, 450-476 (2002)

3.1 Introduction

Nous avons présenté dans le chapitre précédent quelques méthodes perturbatives, visant à décrire la formation des structures de grande échelle par instabilité gravitationnelle dans le régime faiblement non-linéaire. En effet, ces diverses approches peuvent se rassembler sous la catégorie des méthodes de resommations (partielles) du développement perturbatif standard, si bien que l'on reproduit les termes standards jusqu'à un ordre de plus en plus élevé en augmentant de manière systématique l'ordre de la méthode étudiée (tout en y ajoutant une série partielle de termes d'ordres supérieurs). Ces approches visent essentiellement à calculer les fonctions de corrélation (ou de réponse) de bas ordre, principalement le spectre de puissance et le bispectre (i.e. la transformée de Fourier de la fonction de corrélation à trois points) du champ de densité.

Nous abordons dans ce nouveau chapitre une seconde approche, c'est-à-dire la classe des méthodes non-perturbatives. Plus précisément, nous décrivons plusieurs applications d'une même technique, basée sur l'identification d'un point col sphérique permettant d'estimer une intégrale de chemin idoine dans certains régimes asymptotiques (i.e. l'analogue d'une méthode d'instantons en théorie des champs). Comme pour la méthode du col directe présentée dans la paragraphe 2.5.1 dans le cadre des développements en $1/N$, ce point col pourrait servir de base à un développement perturbatif, en développant autour de ce point. En pratique nous n'irons pas jusque là, car le but de cette approche est différent. Il ne s'agit plus de calculer, avec une précision croissante, les fonctions de corrélation de bas ordre, mais au contraire de calculer à l'ordre dominant les fonctions de corrélation de tous ordres, et en fait la fonction de distribution de probabilité du contraste de densité elle-même, $\mathcal{P}(\delta_r)$. De plus, cette approche est non-perturbative, au sens où elle peut aller au-delà des méthodes perturbatives présentées dans le chapitre 2. En effet, ce point col sphérique n'est pas toujours accessible par ces développements perturbatifs (pour une analogie simple, un développement asymptotique d'une fonction $y(x)$ à l'origine, i.e. un développement de rayon de convergence nulle, ne permet généralement pas d'estimer $y(x)$ à grande distance de l'origine). De plus, dans certains cas il serait possible de tenir compte des croisements de trajectoires (i.e. d'aller au-delà de l'approximation hydrodynamique). En pratique, nous nous bornerons à identifier les seuils où les trajectoires commencent à se croiser, ce qui délimite la validité de ces résultats et ne pourrait pas être obtenu par les méthodes perturbatives du chapitre 2.

Ici, il convient de noter que l'étude de la dynamique gravitationnelle dans le cas simplificateur de la symétrie sphérique est une piste traditionnelle en cosmologie. Outre le fait que cela permet de retrouver de manière heuristique les équations de Friedmann décrivant l'expansion d'un univers homogène [126], cela permet d'avoir une idée de l'évolution des surdensités ou sous-densités rares, qui dans cette limite d'événements rares sont à peu près à symétrie sphérique et isolés, comme nous le verrons dans la suite. Ainsi, l'effondrement ou l'expansion de profils de densité en loi de puissance, qui donne lieu à des solutions auto-similaires, a été étudié en [62, 63],

à l'aide d'approximations adiabatiques pour les particules situées au centre des halos. Ceci a ensuite été repris en [24, 25], sans utiliser cette approximation adiabatique et en tenant compte des croisements de trajectoires, ce qui permet d'étudier la formation de caustiques (pics de densité infinie apparaissant aux rayons d'extension maximale, où des particules voient leur vitesse s'annuler pour retomber dans le puit de potentiel gravitationnel). On peut aussi généraliser au cas de la dynamique collisionnelle d'un gaz adiabatique (où il ne se forme plus de caustique, mais un choc séparant les couches internes et externes [25]). Une "approximation fluide" permet également de traiter de manière analogue le gaz et la matière noire (en négligeant donc les caustiques) et d'étudier leur différence de comportement [170, 35].

Plan de ce chapitre :

- Paragraphe 3.2 : Nous décrivons l'utilisation de cette méthode du col pour obtenir la distribution de probabilité du contraste de densité dans des cellules sphériques, dans la limite quasi-linéaire (i.e. aux grandes échelles ou à grand redshift). Nous discutons également le seuil de sur-densité au-delà duquel les croisements de trajectoires ne peuvent plus être négligés, ce qui sera utile dans le chapitre 5 où nous considérons la fonction de masse des halos virialisés.

- Paragraphes 3.3.1 et 3.3.2 : Nous montrons sur deux exemples comment cette méthode peut s'appliquer aux cas de conditions initiales non-Gaussiennes. Nous considérons tout d'abord un modèle isocourbe, où les conditions initiales sont fortement non-Gaussiennes (elles peuvent s'écrire sous la forme du carré d'un champ Gaussien), puis un modèle d'inflation ordinaire, où les non-Gaussianités apparaissent comme un petit terme correctif à l'ordre zéro Gaussien (ce qui permet de développer autour du cas Gaussien).

Enfin, nous concluons brièvement ce chapitre au paragraphe 3.4.

3.2 Méthode du col sphérique dans la limite quasi-linéaire

Nous nous intéressons ici à la distribution de probabilité, $\mathcal{P}(\delta_r)$, du contraste de densité non-linéaire, δ_r , dans une sphère de rayon r . Plus particulièrement, nous étudions son comportement dans la limite quasi-linéaire, $\sigma_r \rightarrow 0$, où $\sigma_r^2 = \langle \delta_{Lr}^2 \rangle$ est la variance du contraste linéaire δ_{Lr} . Ceci correspond donc à la limite des grandes échelles, ou du passé lointain, à contraste non-linéaire δ_r fixé. Pour ce faire, il est commode d'introduire la fonction génératrice des cumulants $\varphi(y)$, définie par

$$e^{-\varphi(y)/\sigma_r^2} = \langle e^{-y\delta_r/\sigma_r^2} \rangle = \int_{-1}^{\infty} d\delta_r e^{-y\delta_r/\sigma_r^2} \mathcal{P}(\delta_r). \quad (3.1)$$

On peut alors remonter à la distribution de probabilité $\mathcal{P}(\delta_r)$ par une transformée de Laplace inverse,

$$\mathcal{P}(\delta_r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{2\pi i \sigma_r^2} e^{[y\delta_r - \varphi(y)]/\sigma_r^2}. \quad (3.2)$$

Nous avons introduit la variance σ_r^2 dans la définition (3.1) afin que $\varphi(y)$ ait une limite finie dans la limite quasi-linéaire, pour des conditions initiales Gaussiennes [19]. Le développement à l'origine de $\varphi(y)$ engendre les cumulants $\langle \delta_r^p \rangle_c$ du contraste de densité,

$$\varphi(y) = - \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(-y)^p}{p!} \frac{\langle \delta_r^p \rangle_c}{\sigma_r^{2(p-1)}}. \quad (3.3)$$

Revenant à la définition (3.1), la moyenne sur les conditions initiales Gaussiennes peut aussi s'écrire comme l'intégrale de chemin

$$e^{-\varphi(y)/\sigma_r^2} = (\det C_L^{-1})^{1/2} \int \mathcal{D}\delta_L e^{-\mathcal{S}[\delta_L]/\sigma_r^2}, \quad (3.4)$$

où C_L^{-1} est l'inverse (au sens des opérateurs) de la fonction de corrélation à deux points, C_L , du contraste de densité linéaire,

$$C_L(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \langle \delta_L(\mathbf{x}_1) \delta_L(\mathbf{x}_2) \rangle = 4\pi \int dk k^2 P_L(k) \frac{\sin(k|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|)}{k|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|}, \quad (3.5)$$

où $P_L(k, z) = D_+^2 P_{L0}(k)$ est le spectre de puissance linéaire au redshift étudié, et l'action $\mathcal{S}[\delta_L(\mathbf{x})]$ s'écrit

$$\mathcal{S}[\delta_L] = y \delta_r [\delta_L] + \frac{\sigma_r^2}{2} \delta_L \cdot C_L^{-1} \cdot \delta_L \quad (3.6)$$

C'est l'analogue de l'expression (2.15) introduite dans le paragraphe 2.3, où nous avons reformulé les équations du mouvement sous la forme d'une intégrale de chemin. Comme d'habitude, le terme $\delta_L.C_L^{-1}.\delta_L$ désigne l'intégrale $\int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \delta_L(\mathbf{x}_1) C_L^{-1}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \delta_L(\mathbf{x}_2)$. Le terme $\delta_r[\delta_L]$ désigne la fonctionnelle non-linéaire qui affecte à la condition initiale définie par le champ de densité linéaire $\delta_L(\mathbf{q})$ le contraste de densité non-linéaire δ_r dans la sphère de rayon r . Naturellement, toute la difficulté du problème est contenue dans cette fonctionnelle $\delta_r[\delta_L]$, qui est le résultat de la dynamique gravitationnelle et dont nous ne connaissons pas l'expression explicite (cela supposerait la résolution de la dynamique pour des conditions initiales quelconques). Dans le paragraphe 2.3 nous avons résolu ce problème en faisant le changement de variable $\mu_I \rightarrow \psi$ (c'est-à-dire $\delta_L \rightarrow \delta$), de sorte que le terme $\delta_r[\delta_L]$ devient une fonctionnelle triviale du champ d'intégration non-linéaire δ , et l'écriture du terme $\delta_L.C_L^{-1}.\delta_L$ en fonction du champ non-linéaire δ fait intervenir explicitement les équations du mouvement. De la sorte, nous obtenions une forme explicite pour l'action $\mathcal{S}$ finale, voir (2.19).

Ici notre approche sera différente : nous conservons l'action $\mathcal{S}$ sous la forme symbolique (3.6) et nous cherchons à tirer parti du fait que pour certaines conditions initiales spécifiques nous connaissons exactement la solution des équations du mouvement, et donc $\mathcal{S}[\delta_L]$. C'est en particulier le cas pour des conditions initiales à symétrie sphérique. Nous pourrions utiliser cette propriété si l'intégrale de chemin (3.4) est dominée par le point col où l'exponentielle est maximale (i.e. le minimum de l'action $\mathcal{S}$). Ceci suppose évidemment que l'action vérifie la symétrie sphérique : c'est pourquoi nous avons défini δ_r comme le contraste de densité non-linéaire global à l'intérieur d'une sphère de rayon r , que nous pouvons choisir centrée sur l'origine par homogénéité statistique du système. La deuxième condition est que l'intégrale de chemin (3.4) soit fortement piquée autour de ce maximum, de sorte qu'à l'ordre dominant elle soit gouvernée par la valeur de l'action en ce point.

Comme l'action $\mathcal{S}$ ne dépend pas de la normalisation du spectre de puissance linéaire (il y a compensation des facteurs σ_r^2 et C_L^{-1}), il est clair sur l'expression (3.4) que cette deuxième condition est vérifiée dans la limite quasi-linéaire $\sigma_r \rightarrow 0$, où l'intégrale de chemin est dominée par la valeur du minimum¹ de l'action $\mathcal{S}$, c'est-à-dire

$$\sigma_r \rightarrow 0 : \quad \varphi(y) \rightarrow \min_{\delta_L(\mathbf{q})} \mathcal{S}[\delta_L]. \quad (3.7)$$

Du fait de la symétrie sphérique on peut calculer exactement le point col (3.7) (car par symétrie, un minimum de l'action $\mathcal{S}$ par rapport aux configurations initiales sphériques est aussi un point col par rapport aux fluctuations non-sphériques, et pour de petits contrastes on peut vérifier qu'il s'agit aussi d'un minimum), ce qui donne (en accord avec une approche basée sur le développement perturbatif standard [18])

$$\delta_{Lq'} = \delta_{Lq} \frac{\sigma_{q,q'}^2}{\sigma_q^2}, \quad (3.8)$$

où nous avons noté $\sigma_{q,q'}^2$ la corrélation croisée du contraste de densité linéaire aux rayons q et q' ,

$$\sigma_{q_1,q_2}^2 = \langle \delta_{Lq_1} \delta_{Lq_2} \rangle = 4\pi \int dk k^2 P_L(k) \tilde{W}(kq_1) \tilde{W}(kq_2) \quad \text{et} \quad \sigma_q^2 = \sigma_{q,q}^2, \quad (3.9)$$

où nous avons introduit la fonction de fenêtre sphérique sur la sphère V de rayon q ,

$$\tilde{W}(kq) = \int_V \frac{d\mathbf{q}}{V} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}} = 3 \frac{\sin(kq) - kq \cos(kq)}{(kq)^3}. \quad (3.10)$$

Ici et dans la suite, nous notons r et $\mathbf{x}$ les rayons et coordonnées non-linéaires en espace Eulérien, et q et $\mathbf{q}$ les rayons et coordonnées en espace Lagrangien, c'est-à-dire vis-à-vis du champ de densité linéaire $\delta_L(\mathbf{q})$. L'expression (3.8) fournit donc le profil radial du point col de l'action $\mathcal{S}[\delta_L(\mathbf{q})]$, en fonction du rayon Lagrangien q' , tandis que le rayon q détermine la région d'où provient la matière qui se retrouve à l'instant considéré dans la sphère de rayon r . Ainsi, par conservation de la masse, le profil non-linéaire $\delta_{r'}$ (i.e. mesuré dans le champ de densité non-linéaire) s'obtient en fonction du profil linéaire $\delta_{Lq'}$ au travers des deux relations

$$q'^3 = (1 + \delta_{r'}) r'^3 \quad \text{et} \quad \delta_{r'} = \mathcal{F}(\delta_{Lq'}), \quad (3.11)$$

où la fonction $\delta_{r'} = \mathcal{F}(\delta_{Lq'})$ décrit la correspondance “contraste linéaire $\rightarrow$ contraste non-linéaire” associée à la dynamique sphérique. Dans le cas d'un univers à la densité critique, $\mathcal{F}(\delta_{Lq'})$ s'exprime explicitement en terme de cycloïdes [126]. Pour des cosmologies plus générales (par exemple avec une composante d'énergie noire d'équation d'état variable) elle s'obtient en résolvant numériquement l'équation différentielle ordinaire associée à l'effondrement sphérique à masse constante (avant croisements de trajectoires) :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{4\pi\mathcal{G}}{3} r [\rho_m + (1 + 3w)\bar{\rho}_{de}] \quad \text{avec} \quad \rho_m = \frac{3M}{4\pi r^3}, \quad (3.12)$$

¹En fait, dans certains cas il ne s'agit que d'un minimum local, ou même d'un maximum, suivant la pente n du spectre de puissance linéaire, mais le point col (3.8) gouverne encore cette limite d'événements rares [176].

où $\bar{\rho}_{\text{de}}(t)$ est la densité moyenne de la composante d'énergie noire à l'instant t (supposée uniforme et de paramètre d'équation d'état w) et ρ_m est la densité moyennée sur la sphère de rayon $r(t)$ (et non pas la densité de matière moyenne de l'Univers). La normalisation δ_{Lq} du col (3.8) est donc donnée par la condition $\delta_r = \mathcal{F}(\delta_{Lq})$, et le rayon q par $q^3 = (1 + \delta_r)r^3$.

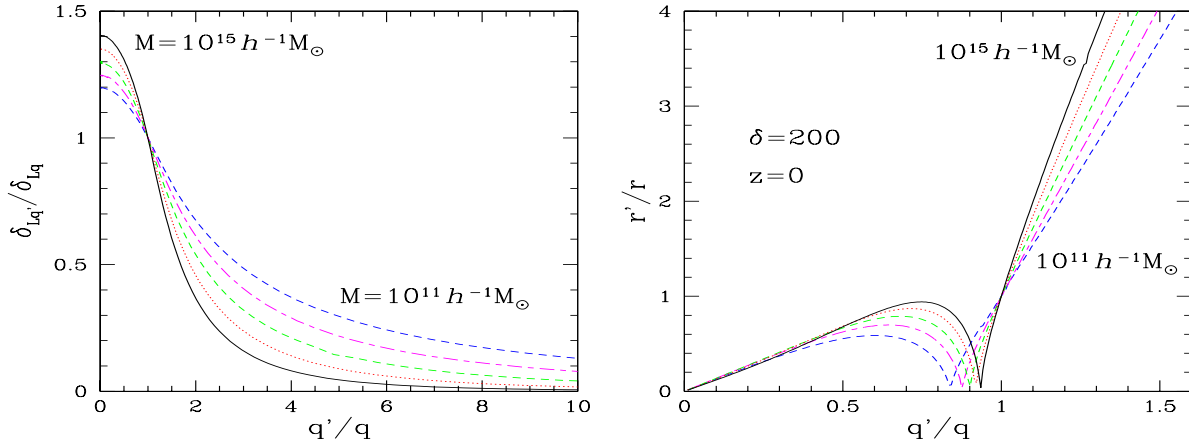


FIG. 3.1 – Le profil radial du contraste de densité linéaire $\delta_{Lq'}$ (panneau de gauche) et l'application Lagrangienne, $q' \mapsto r'$ (panneau de droite), au point col sphérique (3.8). Sont représentées les courbes obtenues pour diverses masses (définies par le rayon Lagrangien q) dans une cosmologie Λ CDM, $M = 10^{11}, 10^{12}, 10^{13}, 10^{14}$ et $10^{15} h^{-1} M_\odot$.

Nous pouvons noter que le profil (3.8) est aussi le profil conditionnel moyen du contraste linéaire $\delta_{Lq'}$, sous la contrainte qu'il soit égal à δ_{Lq} à un rayon q donné [18]. La raison pour laquelle la dynamique non-linéaire redonne ce résultat est que le contraste non-linéaire δ_r ne dépend que du contraste linéaire δ_{Lq} au rayon Lagrangien q , à travers l'application $\delta_r = \mathcal{F}(\delta_{Lq})$, tant qu'il n'y a pas eu de transfert de masse (i.e. de croisement de trajectoires) à travers le rayon q . C'est aussi cette propriété (théorème de Gauss) qui permet de ramener le calcul de $\mathcal{F}(\delta_{Lq})$ à la résolution de la simple équation différentielle (3.12).

Le profil (3.8) dépend de la forme du spectre de puissance linéaire, donc de la masse pour un spectre courbe du type CDM, mais pas du redshift. Nous présentons ainsi sur le panneau de gauche de la figure 3.1 le profil linéaire obtenu dans un tel cas pour plusieurs masses M . Pour un spectre linéaire en loi de puissance, $P_L(k) \propto k^n$, l'éq.(3.8) conduit à $\delta_{Lq'} \propto q'^{-(n+3)}$ à grande distance. Donc, pour un spectre CDM où la pente n locale augmente aux grandes échelles (grandes masses), le profil linéaire décroît plus vite à grande distance pour des masses plus élevées, comme nous le vérifions sur la figure 3.1.

Nous montrons sur le panneau de droite de la figure 3.1 l'application Lagrangienne, $q' \mapsto r'$, qui donne la position r' à l'instant considéré de la particule de rayon Lagrangien (linéaire comobile) q' . Elle est calculée en négligeant les croisements de trajectoires, c'est-à-dire à masse constante à l'intérieur de chaque coquille (i.e. à partir de l'éq.(3.12)). Nous représentons ici les courbes obtenues pour plusieurs masses pour un contraste de densité non-linéaire égal à 200 au redshift $z = 0$. Le rebond observé sur la figure signifie que les coquilles internes ($q'/q < 0.94$) sont déjà passées une fois par le centre du halo (et donc leur dynamique n'est plus exactement décrite par la simple fonction $\mathcal{F}$ calculée à partir de (3.12)). Cependant, ces croisements de coquille n'ont pas encore atteint le rayon r , de sorte que le point col (3.8) est encore valable. A très grande distance, où les contrastes de densité tendent vers zéro, nous retrouvons $r' \sim q'$.

A partir de cette application Lagrangienne, $q' \mapsto r'$, nous pouvons estimer le contraste de densité non-linéaire δ_+ atteint à l'instant où des coquilles internes traversent pour la première fois le rayon r (c'est-à-dire la coquille q). Cela signifie que pour des contrastes de densité positifs plus petits que δ_+ le point col donné par les éqs.(3.8) et (3.11) est exact². En d'autres termes, les résultats obtenus à partir du col (3.8) restent valables si l'on décrit le système à l'aide de l'équation de Vlasov pour la distribution dans l'espace des phases $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \tau)$, sans utiliser l'approximation hydrodynamique (1.1)-(1.3). En effet, nous n'avons pas utilisé cette dernière pour définir la dynamique sphérique à partir de l'équation du mouvement (3.12). Nous montrons sur la figure 3.2 la dépendance en redshift de ce seuil δ_+ , pour diverses masses (cette faible dépendance vient de ce que la fonction $\mathcal{F}$ dépend des paramètres cosmologiques, comme $\Omega_m(z)$, qui varient avec z pour la cosmologie Λ CDM étudiée ici).

Ce résultat nous montre que pour les amas de galaxies massifs à $z = 0$, qui ont une masse de l'ordre de

²En fait, à cause des croisements qui ont déjà eu lieu dans les couches internes on sous-estime légèrement δ_+ .

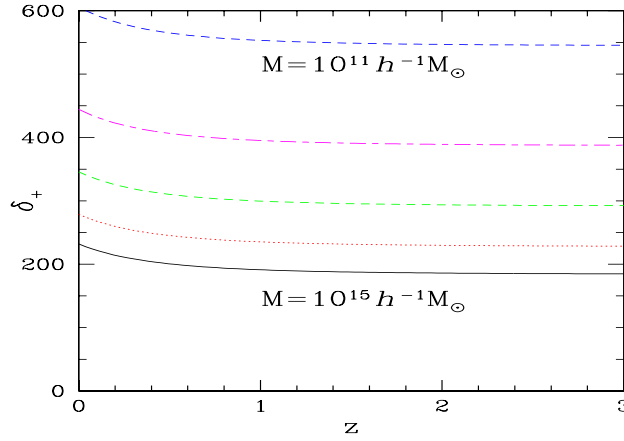


FIG. 3.2 – Le contraste de densité non-linéaire, δ_+ , au-delà duquel les croisements de coquilles doivent être pris en compte, pour les mêmes masses que sur la figure 3.1 dans une cosmologie Λ CDM. La dépendance avec le redshift est due à la légère dépendance de la dynamique gravitationnelle sphérique sur $\Omega_m(z)$ et $\Omega_\Lambda(z)$.

$10^{15} h^{-1} M_\odot$, le contraste $\delta = 200$ devrait marquer la séparation entre les coquilles externes, encore en mode d'accrétion radiale, et les coquilles internes qui, ayant déjà subi des croisements de coquilles et étant passés près du centre, présentent une dispersion de vitesse transverse significative (du fait de l'instabilité des orbites radiales). Ceci est en bon accord avec les simulations numériques (par ex. le panneau du bas de la figure 3 de [49]), pour ce qui concerne les halos rares et très massifs. Par contre, les halos de petite masse ne montrent pas un mode d'accrétion radial aussi clair à grande distance, avec une dispersion de vitesse significative à tous rayons (par ex. le panneau du haut de la figure 3 de [49]). Dans le langage de l'intégrale de chemin (3.4) cela signifie que cette dernière n'est plus dominée par le point col (3.8). En effet, pour ces petits halos fréquents, nous ne sommes plus dans le régime des événements rares et de la limite quasi-linéaire $\sigma_r^2 \rightarrow 0$, de sorte que l'intégrale de chemin n'est plus piquée autour de son minimum (3.8) et qu'il faut donc intégrer sur toutes les conditions initiales typiques, en incluant de grandes déviations par rapport à la symétrie sphérique.

Nous pouvons naturellement faire la même étude du côté des sous-densités, c'est-à-dire déterminer le seuil $\delta_- < 0$ à partir duquel les croisements de coquilles apparaissent et modifient le point col (3.8). On trouve notamment que pour des spectres linéaires de pente $n < -1$ il n'y a en fait jamais de croisement de coquilles le long du profil (3.8), qui reste donc valable jusqu'en $\delta_r \rightarrow -1$ [177].

Après cette digression, revenons au régime quasi-linéaire et à la distribution de probabilité $\mathcal{P}(\delta_r)$. A partir du profil (3.8) et des relations (3.11) on peut montrer que le minimum (3.7) s'écrit sous la forme

$$\varphi(y) = \min_{\mathcal{G}} \left[y\mathcal{G} + \frac{\tau^2(\mathcal{G})}{2} \right], \quad (3.13)$$

qui est aussi (à un signe près) la transformée de Legendre de la fonction $\tau^2(\mathcal{G})/2$. La fonction $\tau(\mathcal{G})$ est définie de manière paramétrique, en faisant varier δ_{Lq} , par le système

$$\mathcal{G} = \delta_r = \mathcal{F}(\delta_{Lq}) \quad \text{et} \quad \tau = -\delta_{Lq} \frac{\sigma_r}{\sigma_q}. \quad (3.14)$$

Une deuxième méthode du col sur y appliquée à la transformée de Laplace inverse (3.2) donne alors

$$\sigma_r \rightarrow 0 : \quad \mathcal{P}(\delta_r) \sim e^{-\tau^2/(2\sigma_r^2)} = e^{-\delta_{Lq}^2/(2\sigma_q^2)}. \quad (3.15)$$

Ainsi, comme on pouvait s'y attendre, dans cette limite quasi-linéaire, qui est aussi une limite d'événement rare, car tout contraste de densité non-nul devient un événement extrême dans la limite $\sigma_r \rightarrow 0$, la distribution de probabilité est gouvernée à l'ordre dominant par le poids Gaussien de la fluctuation linéaire δ_{Lq} qui est associée au contraste non-linéaire δ_r par la dynamique gravitationnelle sphérique.

L'intérêt de la dérivation plus précise du col (3.8) est qu'elle nous a permis de vérifier explicitement le domaine de densités sur lequel le comportement asymptotique (3.15) est valable (figure 3.2). De plus, à partir de l'expression (3.13) nous obtenons la fonction génératrice $\varphi(y)$, et donc les cumulants de tous ordres, $\langle \delta_r^p \rangle_c$, à travers le développement en série (3.3), dans cette limite quasi-linéaire. Par exemple, pour un univers à la densité critique (mais cela reste une très bonne approximation pour des cosmologies réalistes) on retrouve pour

le cumulants d'ordre trois le résultat que l'on pourrait aussi obtenir à partir de la théorie des perturbations du paragraphe 2.2 [89]

$$\sigma_r \rightarrow 0 : S_3 = \frac{\langle \delta_r^3 \rangle}{\langle \delta_r^2 \rangle^2} = \frac{34}{7} - (n + 3), \quad (3.16)$$

dans le cas d'un spectre de puissance linéaire en loi de puissance, d'exposant n .

Il convient de noter que la fonction génératrice (3.13), et la valeur des cumulants tels que (3.16), dans cette limite quasi-linéaire, peuvent aussi s'obtenir à partir de l'approche perturbative traditionnelle. En effet, en tirant parti de la symétrie sphérique on peut calculer à l'ordre dominant tous ces cumulants et leur fonction génératrice à partir de l'équation du mouvement (2.66), dans un cadre Lagrangien, puis on obtient les éqs.(3.13)-(3.16) en ajoutant une prescription pour passer au cadre Eulérien (c'est-à-dire pour inclure la dépendance sur la forme du spectre de puissance associée au "lissage" du champ de densité à l'échelle non-nulle r) [17, 19]. Dans le cadre de la méthode du col présentée ici, basée sur l'expression (3.4), l'influence de la forme du spectre de puissance sur les cumulants apparaît naturellement au travers du profil du point col (3.8). Par ailleurs, cette approche montre que les comportements asymptotiques (3.13) et (3.15) restent valables au-delà du rayon de convergence de la série (3.3), qui est en fait nul pour $n < 0$ [176] (en effet, on a $\mathcal{P}(\delta_r) \sim e^{-\delta_r^{(n+3)/3}}$, ce qui implique que dans ce cadre la transformée de Laplace (3.1) a une coupure sur l'axe réel négatif).

En principe cette méthode du col pourrait encore s'appliquer après les croisements de coquilles (pourvu que l'on reste dans une limite d'événements rares). Il suffirait pour cela d'utiliser la vraie fonctionnelle $\delta_r[\delta_L(\mathbf{q})]$, c'est-à-dire de tenir compte des croisements de coquilles dans le calcul du point col. Cela pourrait se faire dans le cas des sous-densités, où les croisements de coquilles ont un effet limité. Par contre, dans le cas des sur-densités, $\delta_r \gg 200$, cela ne serait plus suffisant du fait de l'instabilité très forte des orbites radiales [139, 123, 130]. Plus précisément, on peut montrer que dans un halo où les particules suivent des trajectoires presque parfaitement radiales, c'est-à-dire avec un moment angulaire μ petit, les perturbations non-sphériques sont fortement instables avec un taux de croissance de l'ordre de

$$\omega \sim \Omega_0 \sqrt{\frac{L_0}{\mu}} \quad \text{pour} \quad \mu \ll L_0, \quad (3.17)$$

où Ω_0 est la fréquence orbitale typique des particules et L_0 le moment angulaire typique qu'aurait une orbite circulaire [177]. Ce résultat est très général, en ce qu'il ne dépend pas de la forme du profil de densité ρ_0 ou de la distribution dans l'espace des phases f_0 du halo. La divergence pour $\mu \rightarrow 0$ du taux de croissance (3.17) signifie qu'il suffit d'un temps fini, d'ordre $\sim 1/\Omega_0$, pour croître de $\mu = 0^+$ à $\mu \sim L_0$. Par conséquent, la fonctionnelle $\delta_r[\delta_L(\mathbf{q})]$ n'est pas continue autour de configurations sphériques de fortes surdensités. En effet, dès que le champ de densité linéaire présente une déviation infinitésimale à la symétrie sphérique, il développe une dispersion de vitesse transverse finie (processus de "virialisation") qui fournit un support supplémentaire contre l'attraction gravitationnelle du centre du halo et modifie significativement le contraste de densité non-linéaire. Il n'est donc pas possible d'estimer dans ce régime l'intégrale de chemin (3.4) à partir de sa restriction aux conditions initiales sphériques.

Il est néanmoins intéressant de noter que cette méthode du col sphérique peut aussi être appliquée au modèle d'adhésion [76], où les particules suivent la dynamique de Zeldovich [198] entre les collisions mais s'agglutinent lors des chocs au lieu de se croiser et de continuer leur vol libre. Cette dynamique plus simple permet de reproduire aux grandes échelles les structures formées par la dynamique gravitationnelle, tels les grands vides et les filaments qui les délimitent. De plus, dans le cas à une dimension avec des spectres de puissance linéaires de pente $n = -2$ et $n = 0$, où l'on peut calculer exactement la distribution de probabilité $\mathcal{P}(\delta_r)$ par d'autres techniques, on peut vérifier que le comportement asymptotique (3.15) coïncide avec ces résultats exacts. Dans le cas $n = 0$, le point col développe même des chocs (i.e. des trajectoires se rejoignent) mais il est encore possible de calculer le point col et d'obtenir le comportement asymptotique de la distribution de probabilité. Nous aborderons quelques aspects de ce modèle d'adhésion au chapitre 4.

Dans le régime quasi-linéaire, $\sigma_r \rightarrow 0$, il est possible de faire mieux que le simple comportement asymptotique (3.15) en calculant numériquement la distribution de probabilité $\mathcal{P}(\delta_r)$ à l'aide de la transformée de Laplace inverse (3.2), en substituant la fonction génératrice $\varphi(y)$ obtenue en (3.13). En particulier, du fait que cette dernière vérifie automatiquement le développement à l'origine $\varphi(y) = y^2/2 + \dots$ (parce que $\mathcal{F}(\delta_L) = \delta_L + \dots$ autour de l'origine), la distribution de probabilité ainsi calculée satisfait automatiquement aux contraintes exactes $\langle 1 \rangle = 1$ (i.e. la distribution est bien normalisée à l'unité) et $\langle \delta_r \rangle = 0$.

Nous comparons ainsi sur la figure 3.3 la distribution de probabilité obtenue par l'intégration de (3.2) avec des simulations numériques. Nous voyons ainsi que nous obtenons un très bon accord, même pour une valeur relativement élevée de la variance du contraste de densité linéaire, $\sigma_r = 0.74$. De plus, l'intégration de (3.2) à partir de la fonction génératrice (3.13) permet de bien reproduire le déplacement vers les sous-densités du pic de la distribution de probabilité.

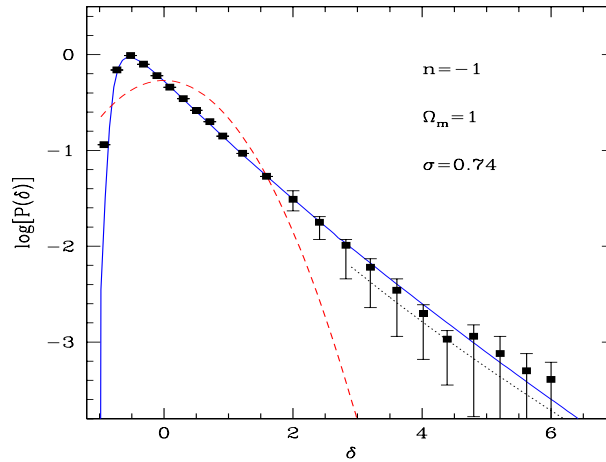


FIG. 3.3 – La distribution de probabilité du contraste de densité non-linéaire, $\mathcal{P}(\delta_R)$, pour un spectre en loi de puissance, $n = -1$, dans un univers à la densité critique (à $z = 0$). La ligne continue bleue est l'intégrale (3.2), les pointillés noirs en $\delta_r > 3$ sont le comportement asymptotique (3.15), les tirets rouges montrent la Gaussienne de même variance. Les points sont le résultat de simulations numériques [17].

A partir de la dynamique sphérique on peut aussi directement construire un modèle pour la distribution de probabilité $\mathcal{P}(\delta_r)$ [174, 141], par exemple en identifiant la fraction de masse dans des sphères de rayon R de contraste supérieur à δ avec la fraction de masse initialement située dans des sphères de contraste linéaire supérieur à δ_L pour la même masse M :

$$\int_{\delta}^{\infty} d\delta' (1 + \delta') \mathcal{P}(\delta') = \int_{\delta_L}^{\infty} d\delta'_L \mathcal{P}_L(\delta'_L). \quad (3.18)$$

Ceci vérifie bien le comportement asymptotique (3.15), mais la distribution de probabilité n'est plus normalisée à l'unité contrairement à la formulation précédente (3.2), ce qui induit un moins bon accord avec les résultats de simulations numériques.

3.3 Méthode du col sphérique pour des conditions initiales non Gaussiennes

La méthode du col sphérique décrite dans le paragraphe précédent peut aussi s'appliquer au cas de conditions initiales non-Gaussiennes. Nous présentons dans les deux paragraphes suivants deux telles applications, tout d'abord pour un modèle isocourbe, significativement différent du cas Gaussien associé aux scénarios les plus simples de l'inflation, puis pour un modèle quasi-Gaussien, où il s'agit de prendre en compte les petites déviations non-Gaussiennes engendrées par les modèles usuels d'inflation en roulement lent ("slow roll").

3.3.1 Un modèle CDM isocourbe

Nous considérons dans ce paragraphe un modèle isocourbe spécifique, présenté dans [128]. Précisons que ce modèle est exclu par les données actuelles et tel quel ne représente pas un scénario réaliste. Cependant, il offre un modèle de conditions initiales significativement différentes du cas Gaussien tout en restant raisonnable, et notre but ici est simplement de l'utiliser comme illustration de l'application de la méthode du col du paragraphe précédent au cas de conditions initiales plus complexes.

Il s'agit d'un scénario inflationnaire qui implique trois champs scalaires (au lieu d'un unique champ, l'inflaton, dans les modèles les plus simples qui conduisent à des conditions initiales quasi-Gaussiennes) et produit des fluctuations primordiales isocourbes. A la fin de l'inflation, il en résulte une distribution de matière noire initiale de la forme

$$\rho_i(\mathbf{x}) \propto \phi_i(\mathbf{x})^2, \quad \text{avec} \quad \langle \phi_i \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \phi_i(\mathbf{k}_1) \phi_i(\mathbf{k}_2) \rangle = P_{\phi_i}(k_1) \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2), \quad (3.19)$$

où $\phi_i(\mathbf{x})$ est un champ aléatoire Gaussien centré de spectre de puissance P_{ϕ_i} . Aux échelles d'intérêt pour la formation des grandes structures nous avons

$$P_{\phi_i}(k) \propto k^{n_{\phi}}, \quad \text{avec} \quad n_{\phi} \simeq -2.4 \quad (3.20)$$

tandis que sous une longueur de cohérence x_c (i.e. pour $k \gg 1/x_c$) le spectre de puissance décroît comme $P_{\phi_i}(k) \propto k^s$ avec $s < -3$ ($\langle \phi_i^2 \rangle$ est donc bien défini). Dans le cas du modèle étudié dans [128] nous avons $x_c \simeq 10$ pc. Dans le régime linéaire, sous l’horizon, les fluctuations de densité de la matière noire croissent comme d’habitude selon $\delta_L(\mathbf{x}, t) \propto D_+(t)$ (en ne gardant que le mode linéaire croissant), et nous pouvons donc écrire

$$\delta_L(\mathbf{x}, t) = D_+(t) (\phi_i(\mathbf{x})^2 - 1), \quad (3.21)$$

où nous avons normalisé $\phi_i(\mathbf{x})$ par $\langle \phi_i(\mathbf{x})^2 \rangle = 1$ et le taux de croissance linéaire par $D_+(t_i) = 1$. Comme nous sommes principalement intéressés par les propriétés statistiques du champ de densité à un instant donné t , il est commode de renormaliser le champ ϕ_i en introduisant le champ $\phi(\mathbf{x})$ défini par $\phi(\mathbf{x}) \equiv D_+(t)^{1/2} \phi_i(\mathbf{x})$, de sorte que l’éq.(3.21) s’écrit

$$\delta_L(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x})^2 - \langle \phi^2 \rangle, \quad \text{avec} \quad \langle \phi \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \phi(\mathbf{k}_1) \phi(\mathbf{k}_2) \rangle = P_\phi(k_1) \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2), \quad (3.22)$$

au redshift z étudié. Le spectre de puissance $P_\phi(k)$ est encore de la forme (3.20). En espace réel, la fonction de corrélation C_ϕ du champ ϕ et la variance $\sigma_\phi^2(r)$ à l’échelle r sont données par

$$C_\phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \langle \phi(\mathbf{x}_1) \phi(\mathbf{x}_2) \rangle \quad \text{et} \quad \sigma_\phi^2(r) = \int_V \frac{d\mathbf{x}_1}{V} \frac{d\mathbf{x}_2}{V} C_\phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2). \quad (3.23)$$

En particulier, la moyenne $\langle \phi^2 \rangle$ s’écrit aussi $C_\phi(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, qui est indépendant de $\mathbf{x}$ du fait de l’homogénéité statistique du système. Utilisant la relation (3.22), la fonction de corrélation C_L du contraste de densité linéaire δ_L , et sa variance $\sigma^2(r)$ dans une sphère de rayon r , s’écrivent

$$C_L(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \langle \delta_L(\mathbf{x}_1) \delta_L(\mathbf{x}_2) \rangle = 2C_\phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)^2, \quad \sigma^2(r) = \langle \delta_{L,r}^2 \rangle = 2 \int_V \frac{d\mathbf{x}_1}{V} \frac{d\mathbf{x}_2}{V} C_\phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)^2. \quad (3.24)$$

Les éqs.(3.23) et (3.24) montrent que pour $-3 < n_\phi < -3/2$ nous avons $\sigma^2(r) \propto \sigma_\phi^4(r)$, et la pente n du spectre de puissance linéaire $P_L(k)$ du contraste de densité est reliée à n_ϕ par $n = 3 + 2n_\phi$. Ceci implique $n_\phi \simeq -2.4$, comme en (3.20), afin de reproduire les observations dans leurs grandes lignes [129]. Notons cependant que ce modèle n’est pas un scénario réaliste et est exclu par les observations plus récentes. Ici, il s’agit donc plutôt d’un exemple commode pour illustrer l’application de la méthode du col du paragraphe précédent à un cas de conditions initiales plus complexes.

Pour évaluer la distribution de probabilité du contraste de densité, δ_r , sur des sphères de rayon r , nous définissons de manière analogue à (3.1) la fonction génératrice des moments $\psi(y)$. Cependant, la moyenne Gaussienne sur le champ $\delta_L(\mathbf{q})$ de l’éq.(3.4) doit maintenant être remplacée par la moyenne Gaussienne sur le champ $\phi(\mathbf{q})$:

$$\psi(y) = \langle e^{-y\delta_r} \rangle = (\det C_\phi^{-1})^{1/2} \int \mathcal{D}\phi e^{-y\delta_r[\phi] - \frac{1}{2}\phi \cdot C_\phi^{-1} \cdot \phi}. \quad (3.25)$$

Contrairement au cas Gaussien du paragraphe 3.2, nous travaillons ici avec la fonction génératrice $\psi(y)$ plutôt qu’avec son logarithme $\varphi(y)$, et nous n’introduisons pas de “re-scaling” en terme de $\sigma^2(r)$ car les conditions initiales étant non-Gaussiennes les cumulants ne vérifient plus le comportement asymptotique $\langle \delta_r^p \rangle_c \sim \sigma^{2(p-1)}(r)$ aux grandes échelles. Pour se rapprocher des expressions rencontrées dans le cas Gaussien, il est commode d’introduire le champ de densité linéaire $\delta_L(\mathbf{q})$ dans l’expression (3.25) par le biais d’un facteur de Dirac (en omettant les constantes de normalisation sans importance)

$$\psi(y) = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\delta_L \delta_D[\langle \phi^2 \rangle + \delta_L(\mathbf{q}) - \phi(\mathbf{q})^2] e^{-y\delta_r[\delta_L] - \frac{1}{2}\phi \cdot C_\phi^{-1} \cdot \phi}, \quad (3.26)$$

qui s’écrit aussi en introduisant un champ auxiliaire $\lambda(\mathbf{q})$,

$$\psi(y) = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\delta_L \mathcal{D}\lambda e^{-y\delta_r[\delta_L] + i\lambda \cdot (\langle \phi^2 \rangle + \delta_L) - \frac{1}{2}\phi \cdot (C_\phi^{-1} + 2i\Lambda) \cdot \phi}, \quad (3.27)$$

où nous avons défini la matrice $\Lambda(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$ par

$$\Lambda(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \lambda(\mathbf{q}_1) \delta_D(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2). \quad (3.28)$$

L’intégration Gaussienne sur le champ $\phi(\mathbf{q})$ est alors immédiate, et en utilisant la relation $\ln(\det M) = \text{Tr}(\ln M)$, pour toute matrice M , nous obtenons

$$\psi(y) = \int \mathcal{D}\delta_L \mathcal{D}\lambda e^{-y\delta_r + i\lambda \cdot (\langle \phi^2 \rangle + \delta_L) - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln(1 + 2i\Lambda C_\phi)}. \quad (3.29)$$

Nous nous sommes ainsi ramenés à une expression du même type que l'éq.(3.4) rencontrée dans le cas Gaussien, mais où le poids Gaussien $\frac{1}{2}\delta_L.C_L^{-1}.\delta_L$ a été remplacé par une expression plus compliquée, impliquant une intégration sur le champ auxiliaire λ , du fait de la non-Gaussianité des conditions initiales.

De ce fait, la fonction génératrice $\psi_L(y)$ associée au champ de densité linéaire lui-même n'est plus une simple Gaussienne. Cependant, dans ce cas l'intégration sur δ_L donne un simple facteur de Dirac sur le champ λ , que l'on peut alors intégrer, et l'on obtient l'expression explicite

$$\psi_L(y) = \langle e^{-y\delta_{Lr}} \rangle = e^{y(\phi^2) - \frac{1}{2}\text{Tr} \ln(1+2i\Lambda_y C_\phi)} \quad \text{avec} \quad \Lambda_y(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -i y \frac{\theta(x_1 < r)}{V} \delta_D(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2), \quad (3.30)$$

où $\theta(x_1 < r)$ est la fenêtre unité de la sphère de rayon r . En développant le logarithme sur Λ_y , donc sur y , nous obtenons l'expression des moments et des cumulants $\langle \delta_{Lr}^p \rangle_c$, qui restent non nuls pour $p \geq 3$.

Cependant, l'expression (3.30) n'est pas très commode pour calculer les moments d'ordre élevé ni la distribution de probabilité $\mathcal{P}(\delta_{Lr})$. D'autre part, les intégrations utilisées pour dériver (3.30) ne sont plus possibles dans le cas du champ de densité non-linéaire. Une alternative est alors d'estimer l'intégrale de chemin (3.29) par une méthode du col, dans un régime d'événements rares. Il faut maintenant considérer les variations de l'action par rapport aux deux champs δ_L et λ , et l'on obtient pour ce dernier un profil au col de la forme $\lambda(\mathbf{q}') \propto \theta(q' < q)$, où q est le rayon Lagrangien associé au rayon Eulérien r , comme dans le cas Gaussien à travers (3.11). Une difficulté supplémentaire par rapport au cas Gaussien est qu'il ne suffit plus en fait de considérer un seul point col, mais qu'il faut intégrer sur un ensemble continu de points de ce type, et en introduisant une approximation de type champ moyen à l'intérieur de la sphère de rayon q on obtient l'intégrale ordinaire bidimensionnelle

$$\psi(y) \simeq \int \frac{d\delta_{Lq} d\lambda}{2\pi} e^{-y\delta_r + i\lambda\delta_{Lq} + i\lambda\sigma_\phi^2(q) - \frac{1}{2}\ln(1+2i\lambda\sigma_\phi^2(q))}, \quad (3.31)$$

Le contraste de densité non-linéaire δ_r est à nouveau relié au contraste linéaire δ_{Lq} par la dynamique sphérique, à travers les relations (3.11).

Pour ce qui concerne le champ de densité linéaire, où $\delta_r = \delta_{Lq}$ et $r = q$, l'intégration de (3.31) conduit à l'approximation

$$\ln[\psi_L(y)] \simeq y \sigma_\phi^2(q) - \frac{1}{2} \ln(1 + 2y \sigma_\phi^2(q)), \quad (3.32)$$

ce qui vérifie la propriété $\langle \delta_{Lq} \rangle = 0$ et donne pour les cumulants d'ordre supérieur

$$q \geq 2 : \langle \delta_{Lq}^p \rangle_c \simeq 2^{p-1} (p-1)! \sigma_\phi^{2p}(q). \quad (3.33)$$

Une comparaison avec des simulations numériques (dans le cas $n_\phi = -2.4$) montre que l'approximation (3.33) est précise à 10% pour la variance ($p = 2$) et à 2% pour la skewness et la kurtosis ($p = 3, 4$).

Revenant à l'expression (3.31), l'intégration sur λ donne

$$\psi(y) \simeq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\delta_{Lq}}{\sqrt{2\pi}\sigma_\phi^2(q)} \theta\left(1 + \frac{\delta_{Lq}}{\sigma_\phi^2(q)} > 0\right) e^{-y\delta_r - \frac{1}{2}[1+\delta_{Lq}/\sigma_\phi^2(q)]} \left[1 + \frac{\delta_{Lq}}{\sigma_\phi^2(q)}\right]^{-1/2}, \quad (3.34)$$

où le facteur θ est une fonction Heaviside avec des notations évidentes. On en déduit après une transformée de Laplace inverse la distribution de probabilité

$$\delta_{Lq} > \sigma_\phi^2(q) : \mathcal{P}(\delta_r) \simeq \frac{1}{\mathcal{F}'(\delta_{Lq})\sqrt{2\pi}\sigma_\phi^2(q)} \left[1 + \frac{\delta_{Lq}}{\sigma_\phi^2(q)}\right]^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}[1+\delta_{Lq}/\sigma_\phi^2(q)]}, \quad (3.35)$$

et $\mathcal{P}(\delta_r) = 0$ pour $\mathcal{F}^{-1}(\delta_r) = \delta_{Lq} < \sigma_\phi^2(q)$. On obtient la distribution de probabilité du contraste de densité linéaire, $\mathcal{P}_L(\delta_{Lq})$, en prenant $\delta_r = \mathcal{F}(\delta_{Lq}) = \delta_{Lq}$ et $r = q$.

On peut noter que dans le cas Gaussien la distribution de probabilité $\mathcal{P}_L(\delta_{Lq})$ s'exprime de manière commode en fonction de la variable réduite $\nu = \delta_{Lq}/\sigma(q)$, qui élimine toute dépendance temporelle et spatiale explicite. Dans le cadre de l'approximation (3.35) nous obtenons maintenant

$$\mathcal{P}_L(\delta_{Lq}) d\delta_{Lq} = \mathcal{P}_L(\nu) d\nu, \quad \text{avec} \quad \nu = \frac{\delta_{Lq}}{\sqrt{2\pi}\sigma_\phi^2(q)}, \quad (3.36)$$

et

$$\mathcal{P}_L(\nu) = \frac{\theta(1 + \sqrt{2}\nu > 0)}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{2}\nu}} e^{-\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2}\nu)}. \quad (3.37)$$

Comme dans le cas Gaussien, les queues de distribution du contraste de densité non-linéaire sont bien décrites par un modèle sphérique très simple, où suivant l'esprit de Press & Schechter [140] on considère que les fluctuations de densité sont données par l'évolution par le biais de la dynamique sphériques du champ de densité linéaire. La méthode du col sphérique, développée dans ce chapitre, permet en fait de formaliser davantage cette intuition et de préciser son domaine de validité, par exemple en calculant le seuil δ_+ de la figure 3.2. Rappelons brièvement ici comment est construit ce modèle sphérique. Il est basé sur l'approximation

$$\int_{\delta_r}^{\infty} d\delta (1 + \delta) \mathcal{P}(\delta) \simeq \int_{\delta_{Lq}}^{\infty} d\delta_L \mathcal{P}_L(\delta_L), \quad (3.38)$$

qui signifie que la fraction de matière située dans des sphères de rayon r ayant un contraste de densité non-linéaire plus grand que δ_r est approximativement égale à la fraction de matière qui était initialement incluse dans des sphères de rayon q avec un contraste de densité linéaire plus grand que δ_{Lq} . A nouveau les variables linéaires q et δ_{Lq} sont reliées aux variables non-linéaires r et δ_r par la relation (3.11) de la dynamique sphérique. Ceci est similaire à l'approximation de Press & Schechter [140] pour la fonction de masse des halos, sans la multiplication par un facteur 2 final. Substituant la loi d'échelle (3.36) nous obtenons la relation générale

$$\mathcal{P}_s(\delta_r) = \frac{1}{1 + \delta_r} \frac{d\nu}{d\delta_r} \mathcal{P}_L(\nu), \quad (3.39)$$

où l'indice "s" réfère au modèle "sphérique". En utilisant l'expression (3.37) cela conduit à la distribution de probabilité du contraste de densité non-linéaire

$$\mathcal{P}_s(\delta_r) = \frac{1}{(1 + \delta_r) |\mathcal{G}'(\tau)| \sqrt{2\pi} \sigma_\phi^2(q)} \left[1 + \frac{\delta_{Lq}}{\sigma_\phi^2(q)} \right]^{-1/2} e^{-\frac{1}{2} [1 + \delta_{Lq}/\sigma_\phi^2(q)]}, \quad (3.40)$$

où nous avons introduit la fonction $\mathcal{G}(\tau)$, définie de manière paramétrique comme dans le cas Gaussien par le système (3.14). Nous vérifions que nous retrouvons l'expression (3.35), mais avec un préfacteur différent. En effet, ni le calcul mené par la méthode du col sphérique pour obtenir (3.35) (sauf si l'on inclut des termes sous-dominants liés aux fluctuations autour du point col), ni le modèle sphérique (3.40), ne prédisent exactement les facteurs multiplicatifs sous-dominants, de sorte qu'il n'est pas surprenant de trouver des différences à ce niveau. Un avantage de la méthode du point col, outre le fait qu'elle permet d'évaluer la distribution de probabilité linéaire elle-même, et donc la distribution $\mathcal{P}(\nu)$ qui sert de base au modèle sphérique simple (3.38), est qu'elle assure automatiquement une distribution de probabilité qui est correctement normalisée à l'unité, c'est-à-dire qui satisfait aux deux contraintes $\langle 1 \rangle = 1$ et $\langle \delta_r \rangle = 0$. Par contre, le modèle sphérique (3.38) assure par construction que $\langle (1 + \delta_r) \rangle = 1$, à partir de l'égalité (3.38), mais la distribution $\mathcal{P}_s(\delta_r)$ n'est généralement pas normalisée à l'unité (i.e. $\langle 1 \rangle \neq 1$). Ceci vient de ce que toutes les régions de l'espace ne peuvent pas simultanément obéir à une dynamique sphérique (il n'y aurait pas conservation du volume total). Bien sûr, dans la limite quasi-linéaire, $\sigma^2(r) \rightarrow 0$, la normalisation converge vers l'unité, car on retrouve la distribution linéaire.

Nous représentons sur la figure 3.4 les résultats obtenus pour $n_\phi = -2.4$ et $\sigma(r) = 0.74$. Nous vérifions que notre approximation (3.37), tirée de (3.35), pour la distribution de probabilité du contraste de densité linéaire, $\mathcal{P}_L(\delta_{Lr})$, est en bon accord avec son estimation par les simulations numériques pour $\delta_{Lr} \geq 0$. En particulier, aux grandes surdensités nous obtenons une simple décroissance exponentielle, voir l'éq.(3.37), au lieu d'une coupure Gaussienne, comme l'on pouvait s'y attendre à partir de la relation (3.19) qui donne la densité de matière primordiale comme le carré d'une variable Gaussienne. L'approximation (3.37) ne parvient pas à décrire la distribution de probabilité du contraste linéaire du coté des sous-densités (pour cette valeur déjà élevée de $\sigma(r) = 0.74$), du fait de l'approximation de champ moyen sur la sphère de rayon q qui a été utilisée pour obtenir (3.31). En fait, comme on le voit sur les éqs.(3.34) et (3.35), dans le cadre de cette approximation nous obtenons une valeur minimale pour le contraste de densité linéaire, $\delta_{Lq} \geq -\sigma_\phi^2(r)$, qui est différente du seuil exact que l'on peut directement lire sur l'éq.(3.22), $\delta_{Lq} \geq -\langle \phi^2 \rangle$. On peut noter que cette limite inférieure exacte, qui ne scale pas comme $\sigma_\phi^2(r)$, signifie que la loi d'échelle (3.36) n'est qu'approximative et ne peut pas décrire la coupure aux faibles densité de la distribution de probabilité. Par contre, nous pouvons voir que du coté des sur-densités le scaling en terme de la variable ν est en bon accord avec les simulations. De plus, il s'agit du domaine le plus intéressant d'un point de vue pratique, car à partir de la distribution linéaire $\mathcal{P}_L(\delta_{Lq})$ on peut estimer la fonction de masse des halos en utilisant l'approximation de Press-Schechter [140] (ce qui donne des résultat en bon accord avec les simulations [147]).

La comparaison des courbes obtenues à partir de la méthode du col, (3.35), et du modèle sphérique simple, (3.40), montre qu'à cette échelle l'influence du préfacteur multiplicatif commence à devenir importante. Néanmoins, dans les deux cas nous retrouvons le creux en $\delta_r \sim \sigma(r)$ et l'amplification aux fortes densités, $\delta_r \gg \sigma(r)$, caractéristiques de l'évolution non-linéaire du champ de densité et que nous pouvions déjà observer

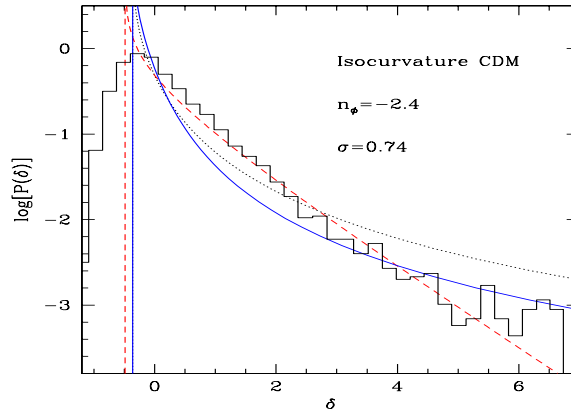


FIG. 3.4 – Les distributions de probabilité $\mathcal{P}_L(\delta_{Lr})$, du contraste de densité linéaire, éq.(3.37) (ligne rouge pointillé-tiret), et $\mathcal{P}(\delta_r)$, du contraste de densité non-linéaire, éq.(3.35) (pointillés noirs) et éq.(3.40) (ligne bleue continue), à $z = 0$. Les paramètres du spectre linéaire pour ce scénario CDM isocourbe sont $n_\phi = -2.4$ et $\sigma(r) = 0.74$ (ce qui correspond à $\sigma_\phi = 0.70$). L'histogramme montre le résultat de simulations numériques [147] pour la distribution linéaire $\mathcal{P}_L(\delta_{Lr})$.

sur la figure 3.3 du cas Gaussien. Les deux figures 3.3 et 3.4 étant obtenues pour la même valeur de la variance du contraste de densité linéaire, $\sigma(r) = 0.74$ (mais avec des spectres de puissance de formes différentes), elles permettent de bien voir l'influence des conditions initiales sur la distribution du champ de densité. La différence est en fait plus marquée pour la distribution du contraste de densité linéaire, $\mathcal{P}_L(\delta_{Lr})$, qui reflète directement ces conditions initiales. En effet, comme il est bien connu, l'évolution non-linéaire du champ de densité sous l'effet de l'attraction gravitationnelle engendre ses propres non-Gaussianités, comme on le voit explicitement sur la figure 3.3, qui finissent par dominer sur les non-Gaussianités primordiales (sauf à examiner les queues de la distribution de probabilité). Dans tous les cas, la distribution non-linéaire $\mathcal{P}(\delta_r)$ présente un pic qui se déplace progressivement vers des sous-densités de plus en plus grandes et une queue de distribution étendue aux grandes densités. Cela traduit le fait général que dans le régime fortement non-linéaire la majorité du volume est formée de régions sous-denses tandis que la majorité de la masse se retrouve concentrée dans des halos surdenses (ce sont bien sûr deux aspects parallèles du même processus, engendré par l'instabilité gravitationnelle).

3.3.2 Modèle d'inflation standard

Dans les scénarios d'inflation standard les fluctuations de densité primordiales sont presque Gaussiennes, mais elles présentent néanmoins quelques déviations du fait de la non-linéarité de la dynamique. De plus, ces déviations peuvent être significativement plus grandes, tout en restant modestes, dans plusieurs scénarios alternatifs. Pour décrire ces situations il est fréquent de considérer le cas simplifié d'un potentiel gravitationnel primordial $\Phi(\mathbf{x})$ qui se décompose sous la forme

$$\Phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) + \epsilon (\phi(\mathbf{x})^2 - \langle \phi^2 \rangle) \quad (3.41)$$

où $\phi(\mathbf{x})$ est un champ Gaussien centré. On retrouve des conditions initiales Gaussiennes pour $\epsilon = 0$. Dans les études récentes, le paramètre ϵ est noté f_{NL} , et les observations donnent les contraintes $-9 < f_{\text{NL}} < 111$ à partir du CMB [93] et $-29 < f_{\text{NL}} < 70$ à partir des structures de grande échelle [158]. Nous reviendrons sur ce modèle dans le paragraphe 5.4, du point de vue de la fonction de masse des halos virialisés, et de leur fonction de corrélation, en utilisant les notations actuelles. Par simplicité, nous gardons dans ce paragraphe la notation des articles associés à l'étude de la distribution du contraste de densité.

En utilisant l'équation de Poisson, qui relie le champ de densité au Laplacien du potentiel gravitationnel, nous pouvons écrire le champ de densité linéaire sous la forme

$$\delta_L(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{x}' \mathcal{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') [\phi(\mathbf{x}') + \epsilon (\phi(\mathbf{x}')^2 - \langle \phi^2 \rangle)], \quad (3.42)$$

où le noyau de convolution $\mathcal{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ est donné par

$$\mathcal{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{2}{3} \Omega_m^{-1} H_0^{-2} D_+(t) \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} k^2 T(k). \quad (3.43)$$

Ici $D_+(t)$ est le mode linéaire croissant, à la date étudiée, et $T(k)$ est la fonction de transfert associée au cas de fluctuations adiabatiques CDM. Comme dans le paragraphe précédent, afin de calculer la distribution de probabilité $\mathcal{P}(\delta_r)$ nous introduisons d'abord sa transformée de Laplace $\psi(y)$ (i.e. la fonction génératrice des moments), ce qui donne à nouveau l'éq.(3.25), mais avec bien sûr une fonctionnelle $\delta_r[\phi]$ différente. Comme dans l'éq.(3.26) nous explicitons cette dernière à l'aide d'un facteur de Dirac, que nous écrivons sous une forme exponentielle en introduisant un champ auxiliaire $\lambda(\mathbf{q})$. Cela conduit à l'expression

$$\psi(y) = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\delta_L \mathcal{D}\lambda e^{-y\delta_r[\delta_L] + i\lambda \cdot (\delta_L - \mathcal{W} \cdot [\phi + \epsilon(\phi^2 - \langle \phi^2 \rangle]) - \frac{1}{2}\phi \cdot C_\phi^{-1} \cdot \phi}, \quad (3.44)$$

où C_ϕ est à nouveau l'inverse de la fonction de corrélation du champ Gaussien ϕ . Contrairement au cas étudié dans le paragraphe précédent, les conditions initiales s'écrivant sous la forme (3.41) avec un petit paramètre ϵ , nous pouvons chercher un développement en puissances de ϵ de la fonction génératrice $\psi(y)$ et de la distribution de probabilité $\mathcal{P}(\delta_r)$. Pour cela, il nous suffit de développer l'exponentielle dans l'expression (3.44) sur ϵ , ce qui nous ramène à des intégrales de chemin Gaussiennes que nous pouvons calculer explicitement. Ainsi, en s'arrêtant au terme d'ordre un en ϵ , puis en intégrant sur les champs ϕ et λ , nous obtenons l'expression

$$\psi(y) = \int \mathcal{D}\delta_L e^{-y\delta_r[\delta_L] - \frac{1}{2}\delta_L \cdot C_{(0)L}^{-1} \cdot \delta_L} \left[1 + \epsilon (C_\phi^{-1} \cdot \mathcal{W}^{-1} \cdot \delta_L) \cdot (\mathcal{W}^{-1} \cdot \delta_L)^2 \right], \quad (3.45)$$

où nous avons introduit la fonction de corrélation $C_{(0)L}$ du champ de densité linéaire pour $\epsilon = 0$, ainsi que le vecteur $(\mathcal{W}^{-1} \cdot \delta_L)^2$, définis par

$$C_{(0)L} = \mathcal{W} \cdot C_\phi \cdot \mathcal{W} \quad \text{et} \quad (\mathcal{W}^{-1} \cdot \delta_L)^2(\mathbf{q}) = \left(\int d\mathbf{q}' \mathcal{W}^{-1}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') \delta_L(\mathbf{q}') \right)^2. \quad (3.46)$$

Nous retrouvons donc l'expression (3.4) obtenue dans le cas Gaussien, multipliée par un facteur cubique en δ_L . Par conséquent, nous pouvons appliquer de manière identique la méthode du col sphérique présentée dans le paragraphe 3.2, qui donne lieu au même point col (3.8), représenté sur la figure 3.1. En particulier, en rescalant comme en (3.1) la fonction génératrice $\psi(y)$ par la variance $\sigma_{(0)}^2(r)$ du contraste de densité linéaire à l'échelle r pour $\epsilon = 0$,

$$\bar{\psi}(y) = \psi\left(y/\sigma_{(0)}^2(r)\right), \quad \text{avec} \quad \sigma_0^2(r) = \langle \delta_{L,r}^2 \rangle_{(0)} = \int_V \frac{d\mathbf{x}_1}{V} \frac{d\mathbf{x}_2}{V} C_{(0)L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \quad (3.47)$$

nous obtenons

$$\bar{\psi}(y) = e^{-\varphi_{(0)}(y)/\sigma_{(0)}^2(r)} \left[1 - \tilde{\epsilon}(q) \frac{\tau^3}{\sigma_{(0)}^3(r)} \right]. \quad (3.48)$$

Ici nous avons défini la quantité sans dimension $\tilde{\epsilon}$ par

$$\tilde{\epsilon}(q) = \frac{\epsilon}{\sigma_{(0)}^3(q)} \left(\mathcal{W} \cdot \frac{\theta(q_1 < q)}{4\pi q^3/3} \right) \cdot \left(C_\phi \cdot \mathcal{W} \cdot \frac{\theta(q_2 < q)}{4\pi q^3/3} \right)^2, \quad (3.49)$$

et la fonction $\varphi_{(0)}(y)$ est la fonction génératrice des cumulants obtenue dans le cas Gaussien, et donnée par l'éq.(3.13). De même, la variable τ est celle rencontrée dans le cas Gaussien sur le système (3.14). La quantité $\tilde{\epsilon}(q)$ mesure l'amplitude de la déviation du champ de densité linéaire par rapport au cas Gaussien, en fonction de l'échelle q (mais indépendamment du redshift). En particulier, à l'ordre linéaire en ϵ les moments de bas ordre du contraste de densité linéaire sont

$$\langle \delta_{Lr}^2 \rangle = \sigma_{(0)}^2(r), \quad \langle \delta_{Lr}^3 \rangle = 6\tilde{\epsilon}\sigma_{(0)}^3(r), \quad \text{donc} \quad S_{L3} = \frac{\langle \delta_{Lr}^3 \rangle}{\langle \delta_{Lr}^2 \rangle^2} = \frac{6\tilde{\epsilon}}{\sigma_{(0)}(r)}, \quad (3.50)$$

tandis que pour le contraste de densité non-linéaire nous obtenons dans la limite quasi-linéaire :

$$\sigma_{(0)}(r) \rightarrow 0 : \quad \langle \delta_r^2 \rangle = \sigma_{(0)}^2(r), \quad \langle \delta_r^3 \rangle = S_{(0)3}\sigma_{(0)}^4(r) + 6\tilde{\epsilon}\sigma_{(0)}^3(r), \quad \text{donc} \quad S_3 = \frac{\langle \delta_r^3 \rangle}{\langle \delta_r^2 \rangle^2} = S_{(0)3} + \frac{6\tilde{\epsilon}}{\sigma_{(0)}(r)}, \quad (3.51)$$

où $S_{(0)3}$ est le coefficient de skewness obtenu dans le cas Gaussien, donné par l'éq.(3.16) pour un spectre linéaire en loi de puissance. Nous vérifions ainsi que l'effet des non-Gaussianités primordiales est plus marqué dans le regime quasi-linéaire, c'est-à-dire aux grandes échelles ou à grand redshift, car les non-linéarités de la dynamique gravitationnelle induisent une contribution non-Gaussienne (terme $S_{(0)3}$ dans le paramètre de skewness S_3) qui dilue la contribution primordiale associée au terme en $\tilde{\epsilon}$. Nous avons déjà pu observer ce phénomène sur la figure 3.4 du modèle isocourbe.

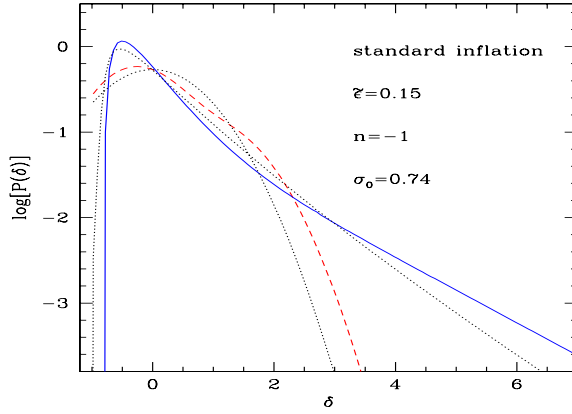


FIG. 3.5 – Les distributions de probabilité du contraste de densité pour des conditions initiales légèrement non-Gaussiennes, $\tilde{\epsilon} = 0.15$, avec $n = -1$ et $\sigma_{(0)} = 0.74$, à $z = 0$. Sont représentées la distribution non-linéaire, $\mathcal{P}(\delta_r)$ de l'éq.(3.52) (ligne continue bleue), la distribution linéaire, $\mathcal{P}_L(\delta_{Lr})$ de l'éq.(3.53) (tirets rouges), et les distributions équivalentes obtenues dans le cas Gaussien, $\tilde{\epsilon} = 0$ (pointillés noirs).

Par transformée de Laplace inverse, nous obtenons à partir de l'éq.(3.48) la distribution de probabilité du contraste de densité non-linéaire :

$$\mathcal{P}(\delta_r) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dy}{2\pi i \sigma_{(0)}^2(r)} e^{[y\delta_r - \varphi_{(0)}(y)]/\sigma_{(0)}^2(r)} \left[1 - \tilde{\epsilon} \frac{\tau^3}{\sigma_{(0)}^3(r)} \right] \quad (3.52)$$

ainsi que la distribution de probabilité du contraste de densité linéaire :

$$\mathcal{P}_L(\delta_{Lr}) = \frac{e^{-\delta_{Lr}^2/(2\sigma_{(0)}^2(r))}}{\sqrt{2\pi}\sigma_{(0)}(r)} \left[1 + \tilde{\epsilon} 2^{-3/2} H_3 \left(\frac{\delta_{Lr}}{\sqrt{2}\sigma_{(0)}(r)} \right) \right], \quad \text{avec} \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x, \quad (3.53)$$

où l'intégration sur y a fait apparaître le polynôme d'Hermite d'ordre 3.

Nous comparons ainsi sur la figure 3.5 les distributions de probabilités, $\mathcal{P}_L(\delta_{Lr})$ et $\mathcal{P}(\delta_r)$, obtenues pour des conditions initiales légèrement non-Gaussiennes, $\tilde{\epsilon} = 0.15$, avec celles obtenues pour $\epsilon = 0$ (i.e. le cas du paragraphe 3.2). Comme il est bien connu, nous vérifions que pour $\tilde{\epsilon} > 0$, qui conduit à une skewness positive pour le contraste de densité linéaire (3.50), les queues de distribution aux grandes surdensités sont amplifiées par rapport au cas Gaussien. Comme nous l'avons déjà noté, la différence entre les deux cas est un peu plus sensible sur la distribution du contraste de densité linéaire, sauf si l'on étudie les événements très rares (très fortes surdensités et sous-densités) où l'on retrouve une très forte sensibilité aux conditions initiales. De manière générale, en comparant $\mathcal{P}_L(\delta_{Lr})$ et $\mathcal{P}(\delta_r)$ on retrouve les effets caractéristiques de la dynamique gravitationnelle : décalage vers les sous-densités du pic de la distribution et amplification de la queue de distribution aux grandes densités, avec le développement d'un régime intermédiaire en loi de puissance, entre la sous-densité typique à l'échelle r (moyenne volumique, associée à la majorité des cellules de taille r), $\delta_{\text{vide}} < 0$, et la surdensité typique (moyenne massique, associée à la majorité des particules), $\delta_{\text{halo}} > 0$.

3.4 Conclusion

Nous avons donc présenté dans ce chapitre comment obtenir des résultats exacts sur le champ de densité formé par la dynamique gravitationnelle à l'aide d'une approche non-perturbative. Cette méthode est basée sur l'identification d'une solution particulière des équations du mouvement (la solution de la dynamique sphérique) qui domine le comportement asymptotique des distributions de probabilité dans un régime d'événements rares. De la sorte, on évite (à l'ordre dominant) les complications associées à la moyenne sur les conditions initiales $\delta_L(\mathbf{q})$ (le calcul de l'intégrale de chemin est remplacé par la valeur de l'intégrand en un point). Dans certains cas de conditions initiales non-Gaussiennes, comme celui du modèle isocourbe du paragraphe 3.3.1, il faut intégrer sur tout un ensemble de points cols, mais la simplification essentielle reste la même.

Cette approche est non-perturbative, par comparaison aux méthodes présentées dans le chapitre 2, sous deux aspects. Tout d'abord, bien que l'on parte du calcul de la fonction génératrice des cumulants, qui peut aussi se faire par une approche perturbative dans cette limite quasi-linéaire, on peut aller au-delà du rayon de

convergence de cette série génératrice. Ensuite, si l'on est capable de suivre la dynamique de la solution du col après les croisements de trajectoires, on peut aller au-delà de l'approche hydrodynamique. Ici, nous nous sommes contentés d'utiliser l'expression explicite de ce point col pour calculer le seuil en deçà duquel la formulation hydrodynamique est exacte, c'est-à-dire coïncide avec le résultat obtenu en partant de l'équation de Vlasov décrivant l'évolution de la distribution dans l'espace des phases $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \tau)$. Par ailleurs, nous avons expliqué pourquoi cette approche ne permet pas de décrire le régime des fortes surdensités, $\delta \gg 200$, correspondant aux régions virialisées, à cause de la très forte instabilité des orbites radiales dans ce cas, qui fait qu'il n'est jamais possible de négliger l'influence dramatique des déviations à la symétrie sphérique (ce problème n'apparaît pas dans la limite opposée des très fortes sous-densités).

Par construction, cette méthode, basée sur une limite d'événements rares, ne permet que de décrire le régime quasi-linéaire, ou la queue de distribution de $\mathcal{P}(\delta_r)$ en $\delta_r \rightarrow -1$. Cependant, dans ce registre limité elle peut s'appliquer à des conditions initiales très diverses, pas nécessairement Gaussiennes, comme nous l'avons illustré sur deux exemples. Par ailleurs, nous verrons au chapitre 5 que cette méthode peut s'avérer utile pour construire des modèles phénoménologiques pour la fonction de masse et la corrélation des halos de matière noire. En effet, elle donne les comportements attendus dans la limite des objets très massifs, qui sont aussi des objets rares (par ex. les amas de galaxies de 1 keV ou plus à $z = 0$).

Chapitre 4

Résolution exacte de dynamiques simplifiées

Publications associées

Statistical properties of the Burgers equation with Brownian initial velocity, Valageas P., J. Stat. Phys., 134, 589-640 (2009)

Eulerian and Lagrangian propagators for the adhesion model (Burgers dynamics), Bernardeau F., Valageas P., Phys. Rev. D, 81, 043516 (2010)

4.1 Introduction

Nous avons vu dans les chapitres précédents diverses méthodes permettant d'obtenir les propriétés statistiques du champ de densité créé par la dynamique gravitationnelle dans un univers en expansion, à partir de petites fluctuations primordiales. Ces approches consistent à résoudre les équations du mouvement dans certains régimes asymptotiques, en particulier les limites de grande échelle ou d'événements rares, où l'on peut mener des calculs explicites. On peut ainsi aborder le régime faiblement non-linéaire à l'aide de développements perturbatifs, ou estimer l'ordre dominant des queues de distribution des fluctuations de densité extrêmes, ce qui permet aussi d'obtenir la fonction de masse et la fonction de corrélation des halos très massifs comme nous le verrons au chapitre 5.

Cependant, ces méthodes sont par construction d'application limitée et ne permettent pas de comprendre la dynamique d'ensemble du système dans le régime fortement non-linéaire ni d'avoir une description complète de ses propriétés statistiques. Par exemple, nous avons vu dans le paragraphe 2.7 que les fonctions de réponse semblent présenter des propriétés très différentes selon que l'on se place d'un point de vue Eulérien ou Lagrangien. Cependant, les développements perturbatifs qui ont mené à ces résultats n'étant pas très bien contrôlés (spécialement dans le cas Lagrangien où l'hypothèse de séparation d'échelles n'est pas vraiment justifiée pour un spectre de puissance de type CDM), il serait souhaitable d'obtenir des résultats plus solides afin de confirmer l'interprétation physique développée dans le paragraphe 2.7 et éventuellement de pouvoir la préciser.

Comme il semble difficile d'obtenir une maîtrise suffisamment complète et rigoureuse de la dynamique gravitationnelle, depuis le régime linéaire jusqu'au régime fortement non-linéaire, une alternative consiste à essayer d'obtenir des résultats exacts pour des dynamiques plus simples. En un sens, le modèle le plus simple serait tout simplement celui de la dynamique gravitationnelle avec symétrie sphérique, en incluant éventuellement les écarts à la symétrie dus à la discrétisation par un nombre fini de particules [63, 25, 35, 170, 87]. Cependant, cela correspond à la formation d'un seul objet, halo ou vide central, ce qui peut s'avérer utile pour la compréhension d'objets isolés, comme nous l'avons vu dans le chapitre 3 en développant une approximation de point col. Ici, nous souhaitons garder le caractère aléatoire des conditions initiales, ainsi que les symétries du système (homogénéité et isotropie), afin de rester très proche du problème de la formation des grandes structures.

Une autre possibilité pour réduire la dimension du problème est de s'intéresser par exemple au cas unidimensionnel, sans expansion d'ensemble, sur un intervalle de taille finie ou infinie. On peut alors faire des études assez précises sur la relaxation du système vers l'équilibre thermodynamique, aussi bien par des méthodes analytiques que numériques [180, 179, 88]. Cependant, ce régime ne correspond pas à la dynamique hiérarchique pertinente en cosmologie. Par contre, pour des conditions initiales aléatoires bien contrôlées et avant relaxation (où l'effet de taille finie du système devient important) on retrouve cette évolution hiérarchique, que ce soit avec

une expansion d'ensemble ou non, avec formation d'amas de plus en plus grands [109, 69, 108]. Cependant, ces études n'ont pas encore permis d'obtenir des résultats analytiques précis dans ce régime non-linéaire.

Une piste alternative consiste à étudier des dynamiques plus simples que la gravité, permettant d'obtenir des résultats plus complets tout en gardant le caractère stochastique et homogène des conditions initiales. La dynamique simplifiée qui vérifie ces contraintes et qui est traditionnellement utilisée correspond à l'approximation de Zeldovich [198], où l'on considère simplement que les particules suivent le champ de déplacement fournit par la théorie linéaire. On peut voir que dans le formalisme Eulérien cela correspond simplement à supprimer l'équation de Poisson et à remplacer dans l'équation d'Euler le potentiel gravitationnel par le potentiel de vitesse linéaire. Cela signifie que les équations du mouvement sont très proches de celles de la dynamique gravitationnelle, et en particulier les termes non-linéaires (dûs au transport par le champ de vitesse) sont identiques. Par conséquent, les approches perturbatives développées dans le chapitre 2 peuvent s'appliquer de la même manière à cette dynamique plus simple [182]. Ceci illustre un deuxième intérêt de tels systèmes simplifiés : outre une compréhension plus sûre de certains phénomènes ils peuvent aussi servir à tester les méthodes d'approximation développées pour la dynamique gravitationnelle.

Cependant, un inconvénient sérieux de la dynamique de Zeldovich est que, les particules suivant simplement le champ de déplacement linéaire, en quelque sorte en vol libre, après croisement des trajectoires les particules continuent sur leur lancée et s'échappent à l'infini. Ainsi, on ne forme pas de structures fortement non-linéaires et la puissance aux petites longueurs d'ondes dans le régime non-linéaire est éliminée par ce vol libre (qui agit comme une diffusion effective du fait que les vitesses initiales sont aléatoires). Par ailleurs, d'un point de vue Lagrangien la dynamique est triviale, et la fonction de réponse Lagrangienne étudiée dans le paragraphe 2.7.2 reste strictement égale à l'identité.

Afin d'aller au-delà, il faut donc étudier une dynamique qui reste non-triviale même de ce point de vue Lagrangien. Le système le plus simple est le “modèle d'adhésion” introduit par Gurbatov et al. [76]. Cela consiste à modifier la dynamique de Zeldovich en ajoutant un terme diffusif dans l'équation d'Euler, avec un coefficient de viscosité ν tendant vers zéro. De la sorte, l'effet de ce terme ne se fait sentir qu'au niveau des singularités du champ de vitesse, c'est-à-dire au niveau des croisements de trajectoires. Alors, les particules ne peuvent plus se croiser et lorsqu'elles se rencontrent elles se collent pour évoluer ensuite ensemble, tout en conservant l'impulsion totale. On évite ainsi la formation d'un champ de vitesse multi-flots, c'est-à-dire que l'approche hydrodynamique reste valable à tout instant mais avec la formation de chocs, associés à des discontinuités du champ de vitesse. Par ailleurs, “l'adhésion” des particules mime de manière simplifiée leur piégeage dans les puits de potentiel gravitationnel dans le cas de la dynamique gravitationnelle. Dans ce système simplifié les halos virialisés ont donc une taille nulle (dans la limite inviscide $\nu \rightarrow 0$), ce qui signifie que l'on ne peut pas espérer décrire l'intérieur des structures virialisées. Par contre, partant des mêmes conditions initiales, les simulations numériques montrent que cette dynamique reproduit assez fidèlement le réseau de filaments obtenu dans le cas gravitationnel [197, 92] et permet donc de décrire le “cosmic web” formé par les grandes structures. Cependant, dans ce mémoire nous considérons plutôt ce modèle d'adhésion comme un outil théorique, permettant de comprendre les propriétés générales de ce type de dynamique, plutôt que comme un outil pratique permettant de localiser le réseau de filaments et de vides formé par les structures de grande échelle.

Ce processus d'adhésion rend la dynamique non-triviale, y compris d'un point de vue Lagrangien. Néanmoins, il est bien connu que l'on peut intégrer explicitement l'équation du mouvement pour le champ de vitesse, ce qui permet déjà d'obtenir certaines propriétés du système. Cependant, prendre ensuite la moyenne sur les conditions initiales Gaussiennes reste en général un problème compliqué, et peu de résultats rigoureux sont connus au-delà du cas à une dimension. L'étude du cas unidimensionnel, où des résultats assez complets peuvent être obtenus (spécialement pour des spectres de puissance linéaires de pente $n = -2$ et $n = 0$), fournit alors une opportunité assez rare d'étudier en détail certains processus qui sont communs au cas gravitationnel, tout en gardant une maîtrise complète, du régime linéaire au régime fortement non-linéaire.

Nous présentons donc dans ce chapitre quelques résultats qui ont été obtenus pour ce “modèle d'adhésion” à une dimension, et qui ont notamment permis d'éclairer le comportement des fonctions de réponse Eulérienne et Lagrangienne étudiées dans le chapitre 2 par des méthodes perturbatives.

Plan de ce chapitre :

- Paragraphe 4.2 : Nous rappelons tout d'abord la définition du modèle d'adhésion, et son lien avec l'équation de Burgers. Nous décrivons ensuite la solution de Hopf-Cole de cette dernière, ainsi que son interprétation géométrique en termes de paraboles de premier contact.

- Paragraphe 4.3 : Nous expliquons comment il est possible d'obtenir une expression explicite exacte des propriétés statistiques du système dans le cas particulier d'un spectre initial de pente $n = -2$ à une dimension (la vitesse initiale décrit alors un mouvement Brownien en fonction de la position). Nous décrivons alors les propriétés du champ de densité et de la fonction de masse des chocs (l'analogue des halos virialisés) obtenus dans

ce cas précis, en faisant le lien avec des modèles phénoménologiques utilisés en cosmologie pour la dynamique gravitationnelle elle-même.

- Paragraphe 4.4 : Nous présentons le calcul des fonctions de réponse, définies dans le chapitre 2 pour le cas gravitationnel, pour cette dynamique simplifiée à une dimension. Ces résultats exacts nous permettent de confirmer et de mieux comprendre les résultats qui avaient été obtenus par des approches perturbatives dans le chapitre 2.

Enfin, nous concluons brièvement ce chapitre au paragraphe 4.5.

4.2 Définition du modèle d'adhésion

4.2.1 Equations du mouvement

Nous rappelons tout d'abord dans ce paragraphe comment le modèle d'adhésion se relie à la dynamique gravitationnelle, par le biais de l'approximation de Zeldovich [76, 75, 65, 21]. Dans le régime linéaire, c'est-à-dire quand on linéarise les équations du mouvement (1.1)-(1.3) en négligeant les termes quadratiques, on trouve que le mode linéaire croissant vérifie la relation

$$\theta_L = f\mathcal{H}\delta_L, \quad \text{donc} \quad \phi_L = \frac{3\Omega_m\mathcal{H}}{2f}\psi_L, \quad (4.1)$$

où à nouveau $f(\tau)$ est définie à partir du taux de croissance linéaire $D_+(\tau)$ par $f = d \ln D_+ / d \ln a$, et nous avons introduit le potentiel de vitesse ψ défini par $\mathbf{v} = -\nabla\psi$. Si nous étendons la relation (4.1) au régime non-linéaire, c'est-à-dire que nous remplaçons l'équation de Poisson (1.3) par la deuxième relation (4.1), nous obtenons pour l'équation d'Euler la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\Omega_m}{f}\right) \mathcal{H} \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = 0, \quad (4.2)$$

qui montre explicitement que dans cette approximation le champ de vitesse évolue indépendamment du champ de densité. Ainsi qu'il est bien connu [76], l'approximation (4.2) est en fait identique à l'approximation de Zeldovich [198]. En effet, un changement de variable pour le champ de vitesse conduit à :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial D_+} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{v} = \left(\frac{dD_+}{d\tau}\right) \mathbf{u}, \quad (4.3)$$

qui est aussi l'équation du mouvement de particules libres, $d\mathbf{u}/dD_+ = 0$. Par conséquent, les trajectoires sont données par l'expression

$$\mathbf{x} = \mathbf{q} + D_+(\tau) \mathbf{u}_{L0}(\mathbf{q}), \quad \mathbf{v} = \frac{dD_+}{d\tau} \mathbf{u}_{L0}(\mathbf{q}), \quad (4.4)$$

où $\mathbf{q}$ est la coordonnée Lagrangienne et $\mathbf{s} = D_+ \mathbf{u}_{L0}$ est le champ de déplacement, qui suit donc exactement la prédiction linéaire. L'éq.(4.4) est la définition usuelle de l'approximation de Zeldovich, c'est-à-dire le fait de prendre $\mathbf{s} = \mathbf{s}_L$. Cela permet aussi d'obtenir un système bien défini après croisement des trajectoires (là où l'équation hydrodynamique (4.2) cesse d'avoir un sens), les particules continuant sur leur lancée suivant (4.4).

Afin d'empêcher les particules de s'échapper jusqu'à l'infini, après croisement des trajectoires, et de mimer leur piégeage dans les puits du potentiel gravitationnel, il a été proposé d'introduire une viscosité infinitésimale, $\nu \Delta \mathbf{u}$, dans le membre de droite de l'équation du mouvement (4.3), qui devient alors l'équation de Burgers [33], bien étudiée en mécanique des fluides. Ceci définit le modèle d'adhésion proposé par [76] pour étudier la formation des grandes structures.

Les simulations numériques [197, 92, 193] ont montré que cette dynamique simplifiée est capable de reproduire "la toile d'araignée cosmique" observée dans le cas de la dynamique gravitationnelle. Partant de conditions initiales identiques (comme indiqué sur (4.1) les deux systèmes sont identiques au niveau de l'ordre linéaire croissant), on retrouve la forme et la position des filaments, mais ces derniers sont maintenant infiniment minces, tandis que les halos de matière sont réduits à des points massifs (i.e. des pics de Dirac dans le champ de densité). Comme nous l'avons mentionné précédemment, l'avantage de la dynamique de Burgers est qu'elle reste non-triviale d'un point de vue Lagrangien, et permet ainsi la formation d'objets bien identifiés, comme dans le cas gravitationnel. La contrepartie est qu'il est plus difficile d'obtenir des résultats exacts, et nous allons donc dans la suite considérer le cas unidimensionnel, qui permet des études plus poussées. En effectuant le changement de notation $D_+ \rightarrow t$ par soucis de simplicité, nous nous intéressons donc à l'équation de Burgers à une dimension pour le champ de vitesse $u(x, t)$, dans la limite de viscosité nulle,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad \nu \rightarrow 0^+, \quad (4.5)$$

tandis que le champ de densité obéit à l'équation de continuité habituelle¹ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0, \quad \text{avec} \quad \rho(x, 0) = \rho_0. \quad (4.6)$$

Ainsi, les conditions initiales sont fixées au temps $t = 0$ (qui correspond à $D_+ = 0$), avec une densité uniforme ρ_0 (qui correspond à la densité moyenne comobile). En introduisant à nouveau la divergence et le potentiel du champ de vitesse par

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \theta = -\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad (4.7)$$

les conditions initiales sont définies par la divergence initiale, $-\theta_0$, que nous prenons Gaussienne, homogène et isotrope, comme dans le cadre cosmologique. Nous considérons plus particulièrement des spectres de puissance initiaux en loi de puissance :

$$P_{\theta_0}(k) = \frac{\mathcal{D}}{2\pi} k^{n+2} \quad \text{avec} \quad -3 < n < 1, \quad (4.8)$$

où $\mathcal{D}$ est un simple coefficient de normalisation. Comme le montre une analyse plus générale [185], l'exposant n introduit en (4.8) correspond aussi à celui qui est traditionnellement utilisé en cosmologie, où il est défini en 3D à partir du champ de densité linéaire comme $P_{\delta_L}^{d=3}(k) \propto k^n$, ainsi que nous l'avons rappelé dans le chapitre 1. Plus précisément, en dimension d quelconque on doit définir le spectre initial (4.8) comme $P_{\theta_0}(k) \propto k^{n+3-d}$ afin de garder cette correspondance.

Puisque dans le cas du scénario cosmologique standard, avec un spectre de puissance de type CDM, la pente locale n passe lentement de 1 aux très grandes échelles à -3 aux petites échelles (et $n \simeq -2$ à l'échelle des galaxies actuelles), l'intervalle (4.8) couvre tous les cas d'intérêt cosmologique.

Cet intervalle peut en fait se diviser en deux parties. Premièrement, pour $-1 < n < 1$, ce qui correspond à une puissance importante à grand k (nous appellerons donc cette catégorie la “classe UV”), le champ de vitesse initial est homogène. Cependant, il est singulier, c'est par exemple un bruit blanc pour $n = 0$, mais cette divergence est régularisée par la viscosité infinitésimale dès que $t > 0$ [33]. Il convient de noter qu'il s'agit d'un effet non-perturbatif, et que la dynamique de Zeldovich, qui ne possède pas cette régularisation, n'est pas définie dans ce cas (la variance de la vitesse initiale en un point diverge).

Deuxièmement, pour $-3 < n < -1$, où la puissance se trouve à petit k (“classe IR”), le champ de vitesse initial n'est plus homogène et ne présente plus que des incréments homogènes (ainsi, la divergence, $-\theta_0$, et le champ de densité linéaire, δ_L , sont encore statistiquement invariants par translation). La variance de la vitesse initiale en un point diverge donc maintenant à cause de la contribution des grandes longueurs d'onde. Pour régulariser le système, on peut soit ajouter une coupure infrarouge dans le spectre de puissance initial (4.8), soit choisir un point de référence tel que l'origine, en imposant $u_0(0) = 0$. Dans ce dernier cas, pour $n = -2$ le champ de vitesse $u_0(x)$ est un mouvement Brownien bilatéral partant de l'origine, avec donc une vitesse initiale qui croît typiquement comme $\sqrt{|x|}$ loin du point de référence.

Normalisant le potentiel de vitesse initial par $\psi_0(0) = 0$, et la vitesse initiale par $u_0(0) = 0$ si $-3 < n < -1$, les conditions initiales définies par le spectre en loi de puissance (4.8) satisfont aux lois d'échelle

$$\lambda > 0 : \theta_0(\lambda x) \stackrel{\text{loi}}{=} \lambda^{-(n+3)/2} \theta_0(x), \quad u_0(\lambda x) \stackrel{\text{loi}}{=} \lambda^{-(n+1)/2} u_0(x), \quad \psi_0(\lambda x) \stackrel{\text{loi}}{=} \lambda^{(1-n)/2} \psi_0(x), \quad (4.9)$$

où $\stackrel{\text{loi}}{=}$ signifie que les deux termes ont les mêmes propriétés statistiques. Comme dans le cadre cosmologique, les conditions initiales peuvent aussi s'exprimer en terme du contraste de densité linéaire $\delta_L(x, t)$. En effet, en linéarisant les équations du mouvement (4.5)-(4.6) nous obtenons pour $\nu = 0$ la solution

$$\theta_L(x, t) = \theta_0(x), \quad \delta_L(x, t) = t \theta_0(x). \quad (4.10)$$

Comme expliqué plus haut, cela coïncide aussi avec le mode linéaire croissant de la dynamique gravitationnelle (rappelons que dans ce cas il faut prendre la correspondance $t \rightarrow D_+$). Par conséquent, nous pouvons aussi bien définir les conditions initiales par le champ de contraste de densité linéaire, $\delta_L(x, t)$, qui est Gaussien, homogène et isotrope, de spectre de puissance

$$-3 < n < 1 : \quad P_{\delta_L}(k, t) = t^2 P_{\theta_0}(k) = \frac{\mathcal{D} t^2}{2\pi} k^{n+2}. \quad (4.11)$$

¹En dimension 2 ou plus, la description du champ de densité est plus complexe. On peut bien sûr utiliser l'équation de continuité habituelle, mais on perd le caractère intégrable de la dynamique (i.e. il faut résoudre numériquement l'équation de continuité). Par contre, en utilisant une équation de continuité modifiée, il est possible de définir un modèle géométrique où la distribution de matière à chaque instant s'obtient à l'aide de constructions géométriques (ou de transformées de Legendre) sans avoir besoin de résoudre explicitement la dynamique aux temps antérieurs [75, 150, 22]. A une dimension ces deux modèles coïncident et la construction de la figure 4.2 donne bien la relation $q \leftrightarrow x$, donc la distribution spatiale des particules.

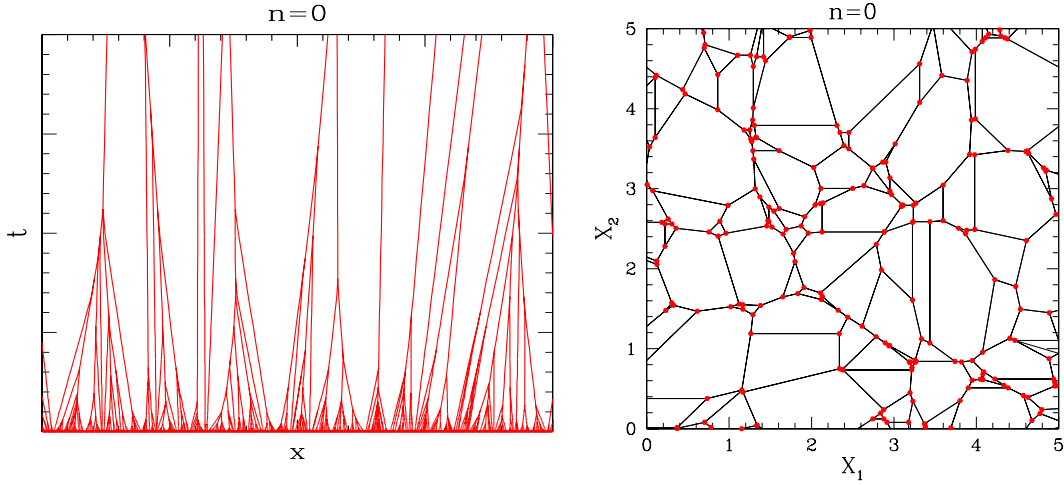


FIG. 4.1 – *Panneau de gauche* : les trajectoires des particules obtenues pour une réalisation des conditions initiales $n = 0$ (vitesse initiale de bruit blanc) à 1D. Les particules s’agglutinent lors des collisions, pour former des amas de plus en plus massifs, et se propagent en ligne droite entre deux collisions. *Panneau de droite* : la tessellation de type Voronoi obtenue pour une réalisation des conditions initiales $n = 0$ à 2D, à un instant donné. Les lignes droites noires représentent les lignes de choc, qui entourent de grandes vides blancs (où la densité est nulle). Toute la masse se retrouve dans des objets ponctuels (points rouges) situés aux intersections des lignes de choc.

Nous clôt ce paragraphe, nous illustrons la dynamique de Burgers sur la figure 4.1 pour deux cas simples. Le panneau de gauche montre dans le cas à une dimension les trajectoires obtenues pour une réalisation du cas $n = 0$ (vitesse initiale de bruit blanc). En accord avec (4.5), les particules se déplacent à vitesse constante, sur des lignes droites, entre les collisions, et elles s’agglutinent lors des chocs pour former des amas ponctuels de plus en plus massifs (avec une masse typique qui croît comme $t^{2/3}$ d’après la loi (4.18) ci-dessous). Le panneau de droite montre dans le cas à deux dimensions l’état du système à un instant donné, pour une réalisation du cas $n = 0$. Les particules se retrouvent à nouveau dans des objets ponctuels isolés, qui se situent ici à l’intersection des lignes de choc qui délimitent les bords de grands vides (où la densité est nulle). Ceci forme une tessellation similaire aux diagrammes de Voronoi, où les lignes de choc correspondent aux filaments produits par la dynamique gravitationnelle cosmologique (mais dans le cas présent, où le spectre de puissance initial est une loi de puissance, avec $n = 0$, sans coupure UV, les filaments ont une masse nulle, ce qui ne serait plus le cas pour des conditions initiales plus régulières à petite échelle). La taille typique des vides et des “filaments” croît comme $t^{2/3}$ d’après la loi (4.18) ci-dessous, tandis que la masse typique des objets massifs ponctuels croît comme $t^{4/3}$.

4.2.2 Solution de Hopf-Cole et interprétation géométrique

Le terme diffusif du membre de droite de l’équation de Burgers (4.5) empêche les particules de se croiser et la formation de plusieurs flots en un seul point de l’espace, donc contrairement au cas de la dynamique de Zeldovich l’équation de type hydrodynamique (4.5) reste toujours valable. Il est bien connu que l’on peut en fait intégrer exactement l’équation de Burgers (4.5) [82, 36], en faisant le changement de variable $\psi(x, t) = 2\nu \ln \Xi(x, t)$ qui transforme l’équation non-linéaire (4.5) en l’équation de la chaleur, qui est linéaire. On obtient ainsi la solution explicite de Hopf-Cole :

$$\psi(x, t) = 2\nu \ln \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{\sqrt{4\pi\nu t}} \exp \left[\frac{\psi_0(q)}{2\nu} - \frac{(x - q)^2}{4\nu t} \right]. \quad (4.12)$$

Dans la limite inviscide, $\nu \rightarrow 0^+$, l’intégrale est dominée par le maximum de l’exponentielle, et une méthode du col donne :

$$\nu \rightarrow 0^+ : \quad \psi(x, t) = \max_q \left[\psi_0(q) - \frac{(x - q)^2}{2t} \right], \quad u(x, t) = u_0(q) = \frac{x - q(x, t)}{t}, \quad (4.13)$$

où nous avons introduit la coordonnée Lagrangienne $q(x, t)$, définie comme le point où le maximum dans la première expression (4.13) est atteint [33, 14]. C’est aussi la coordonnée Lagrangienne au sens usuel (i.e. la position initiale en $t = 0$) de la particule qui se retrouve au point x à l’instant t .

Les positions Eulériennes x où il existe deux solutions dégénérées, $q_- < q_+$, au problème de maximisation (4.13) (c'est-à-dire que la même valeur maximale de l'argument de l'exponentielle de l'éq.(4.12) est atteinte aux deux points q_- et q_+), correspondent à des chocs. En ces points x , la vitesse est discontinue (en passant de $x - 0$ à $x + 0$ on passe du point q_- à q_+ dans la deuxième expression (4.13)) et la densité est infinie, car toute la matière initialement située dans l'intervalle $[q_-, q_+]$ se retrouve en x .

Dans le cas unidimensionnel, l'équation de continuité (4.6) peut aussi s'intégrer en utilisant la conservation de la matière :

$$\rho(x, t)dx = \rho_0 dq, \quad \text{donc} \quad \rho(x, t) = \rho_0 \frac{\partial q}{\partial x} = \rho_0 \left[1 - t \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \rho_0 \left[1 + t \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right], \quad \delta(x, t) = t \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (4.14)$$

Ici nous avons utilisé l'éq.(4.13) et le fait que les particules ne se croisent pas, si bien que $x(q)$ et $q(x)$ sont des fonctions monotones croissantes et qu'il n'est pas nécessaire de garder la valeur absolue pour le Jacobien $J = |\partial q / \partial x|$. On peut vérifier que l'expression (4.14) reste valable au niveau des chocs, qui correspondent à des discontinuités pour $u(x)$ et des pics de Dirac pour la densité $\rho(x)$. En comparant la dernière expression (4.14) avec l'équation de Poisson du cas de la dynamique gravitationnelle, on voit que le potentiel de vitesse, ψ , est égal au potentiel gravitationnel, ϕ (à une normalisation près). C'est-à-dire que la deuxième relation (4.1), qui était à la base de l'approximation de Zeldovich, est en fait exacte. On retrouve ainsi le fait bien connu que l'approximation de Zeldovich est exacte dans le cas unidimensionnel avant croisement des trajectoires (voir aussi la discussion [193]).

Nous pouvons dès maintenant rappeler que pour la "classe UV", $-1 < n < 1$, les chocs sont isolés et en nombre fini par unité de longueur (voir le panneau de gauche de la figure 4.1 pour le cas $n = 0$), tandis que pour la "classe IR" les chocs sont denses (il y a donc un nombre infini de pics de Dirac par unité de longueur, c'est-à-dire que la fonction de masse des chocs diverge aux petites masses). Ces propriétés ont été rigoureusement prouvées pour les cas $n = -2$ (vitesse initiale Brownienne, [157]) et $n = 0$ (vitesse initiale de bruit blanc [8, 64]). Pour des valeurs génériques de n elles ne sont supportées que par des arguments phénoménologiques et par les simulations numériques [154].

Pour les conditions initiales (4.8), la solution explicite (4.13) et les lois d'échelle (4.9) montrent que les champs Eulériens non-linéaires vérifient les lois d'échelle [77, 193, 185]

$$\psi(x, t) \stackrel{\text{loi}}{=} t^{(1-n)/(n+3)} \psi \left(t^{-2/(n+3)} x, 1 \right), \quad u(x, t) \stackrel{\text{loi}}{=} t^{-(n+1)/(n+3)} u \left(t^{-2/(n+3)} x, 1 \right), \quad (4.15)$$

$$q(x, t) \stackrel{\text{loi}}{=} t^{2/(n+3)} q \left(t^{-2/(n+3)} x, 1 \right), \quad \delta(x, t) \stackrel{\text{loi}}{=} \delta \left(t^{-2/(n+3)} x, 1 \right). \quad (4.16)$$

Cela signifie que la dynamique est auto-similaire : une dilatation des temps est statistiquement équivalente à une dilatation des distances :

$$\lambda > 0 : \quad t \rightarrow \lambda t, \quad x \rightarrow \lambda^{2/(n+3)} x. \quad (4.17)$$

Ainsi, comme dans le scénario cosmologique standard [126], le système présente une évolution hiérarchique, avec des échelles de plus en plus grandes qui rentrent successivement dans le régime non-linéaire. On forme ainsi des objets (ici des masses ponctuelles) de plus en plus massifs. Plus précisément, puisque dans la limite inviscide il n'y a pas d'échelle préférée par les spectres de puissance initiaux en loi de puissance (4.8), la seule échelle caractéristique à un instant donné t est "l'échelle intégrale de la turbulence" $L(t)$, engendrée par la dynamique de Burgers et qui croît avec le temps comme

$$L(t) \propto t^{2/(n+3)}. \quad (4.18)$$

Cette longueur donne la distance typique entre chocs, et elle marque la transition entre les grandes échelles, qui sont encore dans le régime quasi-linéaire et où le spectre de puissance du champ de densité suit sa forme initiale (4.8), et les petites échelles, qui ont atteint le régime non-linéaire et sont dominées par la formation des chocs, qui induisent un comportement universel de bruit blanc pour le spectre de puissance (i.e. $P_\delta(k, t)$ a une limite finie en $k \gg 1/L(t)$) [65, 172, 186]. Comme nous l'avons indiqué plus haut, on vérifie sur les éqs.(4.15)-(4.18) que l'indice n introduit en (4.8) a été défini de manière à correspondre avec sa définition usuelle en cosmologie pour le cas tri-dimensionnel. Plus précisément, la définition (4.8) a été choisie de sorte que les lois d'échelle (4.15)-(4.18) coïncident avec celles obtenues en (1.11)-(1.13) pour la dynamique gravitationnelle cosmologique, ce qui assure que l'on retrouve les mêmes propriétés de grande échelle en fonction de n . Afin de tirer profit de ces lois d'échelle il est commode d'introduire les variables réduites, sans dimension,

$$Q = \frac{q}{L(t)}, \quad X = \frac{x}{L(t)}, \quad U = \frac{tu}{L(t)}, \quad M = \frac{m}{\rho_0 L(t)}, \quad \text{avec} \quad L(t) = (2Dt^2)^{1/(n+3)}, \quad (4.19)$$

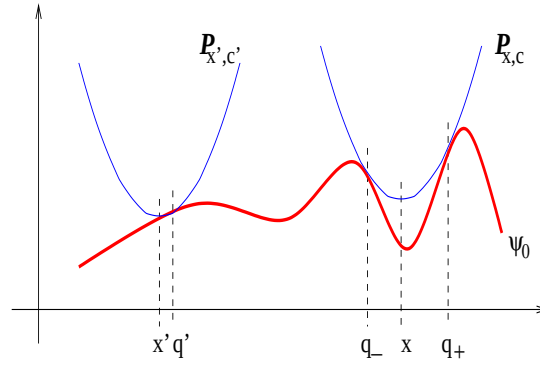


FIG. 4.2 – La construction géométrique de la solution de Hopf-Cole (4.13), en terme de paraboles de premier contact. Le point x' est régulier tandis qu'il y a un choc au point x .

où nous avons choisi la normalisation de la longueur caractéristique $L(t)$, et la constante $\mathcal{D}$ est définie en (4.8). Alors, les distributions de probabilité écrites en fonction de ces variables ne dépendent plus du temps, et l'échelle $X = 1$ est la longueur caractéristique du système. Aux grandes échelles quasi-linéaires, $X \gg 1$, les fluctuations de densité sont faibles et les distributions fortement piquées autour de leur valeur moyenne, avec des queues de distribution qui sont directement liées aux conditions initiales. Aux petites échelles, $X \ll 1$, les fluctuations de densité sont importantes et les distributions de probabilité se comportent comme des lois de puissance sur de grands intervalles [186, 185, 187]. On peut noter que la loi d'échelle (4.17) reste valable en dimension d quelconque, si les conditions initiales sont définies par le spectre de puissance linéaire $P_{\delta_L}(k, t) \propto t^2 k^{n+3-d}$. Pour les mêmes conditions initiales, la dynamique gravitationnelle cosmologique développe la même évolution auto-similaire, comme nous l'avons rappelé dans le chapitre 1 [126].

La solution (4.13) a une interprétation géométrique bien connue en terme de paraboles [33, 14]. En effet, considérons la famille de paraboles montantes $\mathcal{P}_{x,c}(q)$, centrées au point x et de hauteur c , avec un rayon de courbure t :

$$\mathcal{P}_{x,c}(q) = \frac{(q-x)^2}{2t} + c, \quad (4.20)$$

et descendons verticalement $\mathcal{P}_{x,c}(q)$ depuis $c = +\infty$, quand la parabole est partout au-dessus du potentiel initial $\psi_0(q)$ (ceci est possible pour les conditions initiales (4.8), puisque nous avons alors $|\psi_0(q)| \sim q^{(1-n)/2}$, qui croît moins vite que q^2 à grande distance), jusqu'à ce qu'elle touche la courbe $\psi_0(q)$. Alors, l'abscisse q de ce point de premier contact est la coordonnée Lagrangienne $q(x, t)$ introduite en (4.13). Si le premier contact se fait simultanément en deux points, $q_- < q_+$, il y a un choc à la position Eulérienne x et toute la matière initialement située dans l'intervalle $[q_-, q_+]$ se retrouve en x . On peut construire de cette manière l'application Lagrangien inverse, $x \mapsto q(x, t)$. Comme $q(x)$ est monotone croissante, on peut ensuite obtenir sans ambiguïté l'application l'inverse, $q \mapsto x(q, t)$, qui donne la trajectoire des particules (application Lagrangienne directe, il suffit de tourner de 90 degrés la figure $q(x)$). Une illustration de cette construction géométrique est représentée sur la figure 4.2, où nous voyons un point régulier x' à gauche et un point choc x à droite.

4.3 Vitesse initiale Brownienne

4.3.1 Méthode de calcul

Une condition initiale particulièrement intéressante est le cas $n = -2$, où la vitesse initiale $u_0(x)$ est un mouvement Brownien bilatéral, partant de l'origine. En effet, dans ce cas on peut obtenir une description analytique complète des propriétés du système, à partir de la construction géométrique de la figure (4.2) et grâce au caractère Markovien du mouvement Brownien. En effet, pour $n = -2$ nous pouvons écrire les conditions initiales en terme d'un bruit blanc $\xi(q)$ sous la forme :

$$u_0(q) = - \int_0^q dq' \xi(q'), \quad \psi_0(q) = \int_0^q dq' \int_0^{q'} dq'' \xi(q''), \quad \text{avec} \quad \langle \xi(q) \rangle = 0, \quad \langle \xi(q) \xi(q') \rangle = \mathcal{D} \delta_D(q - q'), \quad (4.21)$$

c'est-à-dire que $u_0(q)$ est un mouvement Brownien bilatéral partant de l'origine ($u_0(0) = 0$). Comme expliqué dans le paragraphe 4.2.1, pour ces conditions initiales qui tombent dans la "classe IR", afin de bien définir le système il faut soit rajouter une coupure aux grandes longueurs d'onde (par exemple en définissant le système

sur une taille finie, ou en considérant un système périodique), soit choisir un point de référence (ici l'origine) à partir duquel on fait partir la vitesse initiale $u_0(q)$, dont l'amplitude typique croît ensuite indéfiniment comme $q^{-(n+1)/2}$. Ici nous avons donc choisi la deuxième alternative. La grande simplification, qui vient de ce que la corrélation de $\xi(q)$ est un Dirac, est que le processus $q \mapsto \{\psi_0(q), u_0(q)\}$ est Markovien. C'est-à-dire que, ayant construit les courbes $\psi_0(q)$ et $u_0(q)$ jusqu'en un point $q_1 \geq 0$ en partant de l'origine, les propriétés statistiques de $\psi_0(q)$ et $u_0(q)$ à droite de ce point ne dépendent que des deux valeurs $\psi_0(q_1)$ et $u_0(q_1)$, et sont indépendantes de la forme de $\psi_0(q)$ et $u_0(q)$ à gauche de q_1 .

La construction géométrique (4.20) nous montre alors qu'une quantité essentielle est la distribution de probabilité conditionnelle $K_{x,c}(q_1, \psi_1, u_1; q_2, \psi_2, u_2)$ que le processus de Markov, $q \mapsto \{\psi_0(q), u_0(q)\}$, partant de $\{\psi_1, u_1\}$ en $q_1 \geq 0$, arrive en $\{\psi_2, u_2\}$ en $q_2 \geq q_1$, tout en étant resté sous la parabole $\mathcal{P}_{x,c}(q)$ sur tout l'intervalle $q_1 \leq q \leq q_2$. Du fait des propriétés du mouvement Brownien $u_0(q)$, et en utilisant $d\psi_0/dq = -u_0$, ce noyau obéit à l'équation d'advection-diffusion

$$\left[\frac{\partial}{\partial q_2} - u_2 \frac{\partial}{\partial \psi_2} \right] K_{x,c}(q_1, \psi_1, u_1; q_2, \psi_2, u_2) = \frac{\mathcal{D}}{2} \frac{\partial^2}{\partial u_2^2} K_{x,c}(q_1, \psi_1, u_1; q_2, \psi_2, u_2) \quad (4.22)$$

sur le domaine $q_1 \leq q \leq q_2$ et $\psi \leq \mathcal{P}_{x,c}(q)$, avec la condition initiale en $q_2 = q_1$:

$$K_{x,c}(q_1, \psi_1, u_1; q_1, \psi_2, u_2) = \delta_D(\psi_2 - \psi_1) \delta_D(u_2 - u_1), \quad (4.23)$$

et la condition au bord :

$$K_{x,c}(q_1, \psi_1, u_1; q_2, \psi_2, u_2) = 0 \quad \text{en} \quad \psi_2 = \mathcal{P}_{x,c}(q_2) \quad \text{pour} \quad u_2 \leq \frac{d\mathcal{P}_{x,c}}{dq}(q_2). \quad (4.24)$$

L'éq.(4.24) exprime le fait que les courbes $\psi_0(q)$ qui sont passées au-dessus de la parabole $\mathcal{P}_{x,c}(q)$ sont perdues (par définition elles ne contribuent plus à $K_{x,c}$) et ne reviennent pas dans le jeu en repassant sous la parabole. A l'aide de changements de variables et d'une transformée de Laplace on peut résoudre cette équation différentielle et obtenir une expression explicite en terme de fonctions d'Airy (la difficulté vient de la condition au bord (4.24)). On peut ensuite exprimer toutes les propriétés statistiques du système en terme de ce noyau $K_{x,c}$, et donc obtenir des résultats exacts.

Illustrons la technique mise en oeuvre dans [187] sur le cas du calcul de la distribution de probabilité $p_x(q)$ de la coordonnée Lagrangienne q associée à la position x à l'instant t . La construction géométrique (4.20) nous conduit à considérer la distribution de probabilité conjointe, $p_x(0 \leq q' \leq q, c)dc$, que le premier point de contact du potentiel $\psi_0(q')$ avec la famille de paraboles (4.20) apparaît à une abscisse q' dans l'intervalle $[0, q]$, avec une hauteur de parabole entre $c - dc$ et c . En intégrant ensuite sur c nous obtiendrons la distribution cumulative $p_x(0 \leq q' \leq q)$. Il nous suffit alors de noter que, pour tout $q \geq 0$, nous pouvons écrire cette distribution de probabilité sous la forme

$$\begin{aligned} p_x(0 \leq q' \leq q, c)dc &= \lim_{q_{\pm} \rightarrow \pm\infty} \int d\psi_- du_- d\psi du d\psi_+ du_+ K_{x,c}(0, 0, 0; q_-, \psi_-, u_-) \\ &\quad \times [K_{x,c}(0, 0, 0; q, \psi, u) - K_{x,c-dc}(0, 0, 0; q, \psi, u)] K_{x,c}(q, \psi, u; q_+, \psi_+, u_+), \end{aligned} \quad (4.25)$$

où nous avons utilisé la caractéristique Markovien du processus $q \mapsto \{\psi_0, u_0\}$. Ainsi, nous avons pu factoriser en (4.25) la probabilité $p_x(0 \leq q' \leq q, c)dc$ en trois termes, qui correspondent aux probabilités que i) $\psi_0(q')$ reste sous $\mathcal{P}_{x,c}$ pour $q' < 0$, ii) $\psi_0(q')$ reste sous $\mathcal{P}_{x,c}$ mais passe au-dessus de $\mathcal{P}_{x,c-dc}$ sur l'intervalle $0 \leq q' \leq q$, en atteignant les valeurs quelconques $\{\psi, u\}$ en q , sur lesquelles nous intégrons, et iii) $\psi_0(q')$ reste sous $\mathcal{P}_{x,c}$ pour $q' > q$. Dans les calculs il est commode de considérer le système sur un intervalle $[q_-, q_+]$ fini, avec les valeurs aux bords quelconques $\psi_{\pm}$ et $u_{\pm}$, puis de prendre dans une deuxième étape les limites $q_{\pm} \rightarrow \pm\infty$, comme indiqué sur l'éq.(4.25).

Le point clef de cette procédure est bien sûr la factorisation explicitée sur l'éq.(4.25). De même, pour la distribution de probabilité à deux points, $p_{x_1, x_2}(q_1, q_2)$, des coordonnées Lagrangiennes q_1 et q_2 des particules situées en x_1 et x_2 , on doit considérer les processus $\{\psi_0(q), u_0(q)\}$ relativement aux deux paraboles $\mathcal{P}_{x_1, c_1}$ et $\mathcal{P}_{x_2, c_2}$. On peut à nouveau "couper" l'axe des q en un petit nombre d'intervalles (dont les bords correspondent à l'origine, $q = 0$, aux positions Lagrangiennes q_1 et q_2 , et au point q_* où les deux paraboles se croisent), chacun décrit à l'aide d'un noyau $K_{x,c}$ approprié, et la connection entre ces différents intervalles se faisant uniquement par la donnée des valeurs de ψ_0 et u_0 à leurs frontières. On se ramène ainsi à une expression faisant intervenir le produit d'un petit nombre de facteurs $K_{x,c}$, que l'on peut calculer explicitement.

La même méthode s'applique aussi au cas (plus simple de ce point de vue) $n = 0$ où la vitesse est un bruit blanc. Dans ce cas, c'est le potentiel $\psi_0(q)$ lui-même qui est un mouvement Brownien, et le processus $q \mapsto \psi_0(q)$ est Markovien. Au lieu du noyau $K_{x,c}(q_1, \psi_1, u_1; q_2, \psi_2, u_2)$ il suffit donc de considérer le noyau

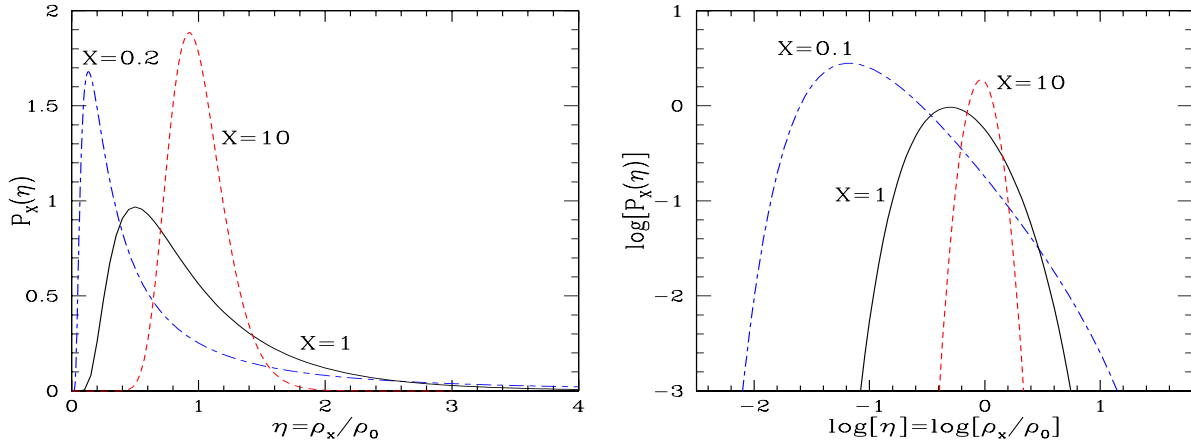


FIG. 4.3 – *Panneau de gauche* : la distribution de probabilité $\mathcal{P}_X(\eta)$, éq.(4.26), de la surdensité sur un intervalle de longueur X , pour trois valeurs de la longueur réduite $X = x/(2Dt^2)$. Une plus petite valeur de X correspond à une plus petite longueur ou un temps plus long, donc à un régime plus fortement non-linéaire. *Panneau de droite* : la distribution de probabilité $\mathcal{P}_X(\eta)$ sur une échelle logarithmique.

$K_{x,c}(q_1, \psi_1; q_2, \psi_2)$, et on peut à nouveau factoriser les diverses distributions de probabilité en produits d'un petit nombre de facteurs $K_{x,c}$ [64, 186].

Pour des exposants n génériques, $-3 < n < 1$, cette factorisation n'est plus possible, car les propriétés du potentiel ψ_0 à droite d'un point q ne dépendent plus d'un nombre fini de variables (par exemple sa valeur en q et ses p premières dérivées en ce point) mais de la forme complète de ψ_0 à gauche de ce point. On peut bien sûr exprimer cette dépendance, et les probabilités recherchées, sous la forme d'intégrales de chemin, qui font apparaître explicitement les dépendances sur la courbe $\psi_0(q)$ complète, mais on obtient des expressions complexes que l'on ne sait plus calculer explicitement.

4.3.2 Propriétés du champ de densité

Nous nous bornerons dans ce paragraphe et le suivant à décrire les propriétés du système qui sont intéressantes du point de vue de la comparaison avec la dynamique gravitationnelle en cosmologie. A l'aide de factorisations du type de l'éq.(4.25), on peut montrer que dans la limite où nous nous plaçons loin du point de référence $x = 0$ (de sorte que nous retrouvons l'invariance par translation) les distributions de probabilité conjointes des densités mesurées dans des intervalles disjoints se factorisent (c'est-à-dire qu'elles sont indépendantes) [23, 187]. De plus, la distribution de probabilité de la surdensité η dans un intervalle de longueur X s'écrit

$$\eta = \frac{m}{\rho_0 x}, \quad \eta \geq 0 : \quad \mathcal{P}_X(\eta) = \sqrt{\frac{X}{\pi}} \eta^{-3/2} e^{-X(\sqrt{\eta}-1/\sqrt{\eta})^2} = \sqrt{\frac{X}{\pi}} e^{2X} \eta^{-3/2} e^{-X(\eta+1/\eta)}. \quad (4.26)$$

Aux grandes échelles, $X \rightarrow \infty$, nous retrouvons donc la distribution Gaussienne dictée par les conditions initiales, tandis qu'aux petites échelles, $X \rightarrow 0$, nous obtenons un comportement en loi de puissance, $\eta^{-3/2}$, sur un intervalle $[\eta_-, \eta_+]$ de plus en plus étendu, avec $\eta_- \sim x/(2Dt^2)$ et $\eta_+ \sim (2Dt^2)/x$. Nous illustrons cette évolution sur la figure 4.3 avec trois valeurs de X . Nous obtenons ainsi un comportement qui est similaire à celui observé en cosmologie sur les simulations numériques de la formation des grandes structures par instabilité gravitationnelle [9, 40, 189].

A partir de la distribution de probabilité nous obtenons pour les moments et les cumulants de la densité à l'échelle X :

$$n \geq 1 : \quad \langle \eta^n \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1+k)!}{k!(n-1-k)!(4X)^k}, \quad \text{et pour } n \geq 2 : \quad \langle \eta^n \rangle_c = \frac{(2n-3)!!}{(2X)^{n-1}}, \quad (4.27)$$

ce qui conduit à la hiérarchie

$$S_n = \frac{\langle \eta^n \rangle_c}{\langle \eta^2 \rangle_c^{n-1}} = (2n-3)!! \quad \text{et} \quad \varphi(y) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} S_n \frac{y^n}{n!} = \sqrt{1+2y} - 1 - y. \quad (4.28)$$

Ainsi, les coefficients S_n sont indépendants du temps et de l'échelle, tout comme la fonction génératrice $\varphi(y)$, définie de manière analogue à (3.3). On peut noter que dans le contexte cosmologique, associé à la dynamique

gravitationnelle 3D dans un univers en expansion, dans le cas d'un spectre de puissance linéaire en loi de puissance ces coefficients S_n , et la fonction génératrice $\varphi(y)$, ont une limite finie aux grandes échelles dans le régime quasi-linéaire [19, 17, 176], que nous avons calculée dans le paragraphe 3.2 sur l'éq.(3.13). Par ailleurs, après une transition brutale aux échelles faiblement non-linéaires, ces coefficients S_n montrent une faible dépendance résiduelle en fonction de l'échelle dans le régime fortement non-linéaire [40]. Il a donc été proposé d'utiliser l'approximation de coefficients S_n constants pour décrire le régime fortement non-linéaire [126]. On peut même noter que la forme (4.28) de la fonction génératrice des cumulants est une de celles qui ont été étudiées dans ce contexte [9]. Cet ansatz phénoménologique est connu sous le nom de “stable clustering model”, car il a été obtenu en supposant qu'aux petites échelles, après effondrement gravitationnel des surdensités et relaxation vers un équilibre du viriel local, les objets ainsi formés se découplent de l'expansion d'ensemble de l'univers et gardent une taille physique constante (tout comme le système solaire ne suit plus le flot de Hubble) [51].

Dans le cas présent de la dynamique de Burgers, les objets sont en fait des points massifs (pics de Dirac) de taille nulle. A partir d'une analyse multifractale [186], il est alors facile de voir de manière générique que l'existence de ces chocs conduit à des rapports S_n finis à petite échelle, de sorte que la hiérarchie (4.28) est universelle, pour des spectres de puissance quelconques et en dimension arbitraire. Bien sûr, la forme de $\varphi(y)$ dans cette limite de petite échelle (i.e. la valeur des coefficients S_n) dépend des conditions initiales. Une particularité des conditions initiales Browniennes à une dimension, $n = -2$, est que les rapports S_n sont en fait constants sur toutes les échelles, donc du régime quasi-linéaire au régime fortement non-linéaire.

Cela implique donc que le résultat (4.28) doit coïncider avec la limite quasi-linéaire (3.13) obtenue dans le paragraphe 3.2 par une méthode du col. On peut vérifier explicitement que c'est bien le cas. En effet, dans le cadre de la dynamique de Burgers 1D, où les particules suivent leur champ de déplacement linéaire avant collisions, on obtient pour la fonction $\mathcal{F}(\delta_L)$ qui donne le contraste de densité non-linéaire en fonction du contraste de densité linéaire :

$$\delta_x = \mathcal{F}(\delta_{Lq}) = \frac{1}{1 - \delta_{Lq}} - 1, \quad \text{donc} \quad \tau(\mathcal{G}) = \mathcal{G}^{-1/2} - \mathcal{G}^{1/2}, \quad (4.29)$$

où la fonction $\tau(\mathcal{G})$ est définie par le système paramétrique (3.14). En résolvant la transformée de Legendre (3.13) on obtient alors l'expression (4.28) de $\varphi(y)$. Il faut cependant noter que le fait que les coefficients S_n , et $\varphi(y)$, ne dépendent pas de l'échelle, est une propriété non-triviale qui ne pourrait pas être obtenue par une approche perturbative. Il se trouve que les effets non-linéaires associés à la formation des chocs “conspirent” pour donner des rapports S_n constants, mais il ne s'agit que d'une coïncidence, et pour des conditions initiales différentes du cas $n = -2$ ces coefficients ne sont plus constants et ont des limites différentes à grande et petite échelles.

En ce qui concerne le spectre de puissance du champ de densité non-linéaire $\delta(x, t)$ non lissé, il reste exactement égal au spectre linéaire :

$$P_\delta(k, t) = \frac{\mathcal{D}t^2}{2\pi} \quad \text{donc} \quad C_2(x_1, x_2) = \langle \delta(x_1)\delta(x_2) \rangle = \mathcal{D}t^2 \delta_D(x_1 - x_2), \quad (4.30)$$

tout comme les coefficients S_n étaient constants. A nouveau, le fait que $P_\delta(k, t)$ ait une limite finie à grand k , tel un spectre de bruit blanc, est un comportement universel dû à la formation des chocs, donc de pics de Dirac dans le champ de densité, qui reste valable pour des spectres linéaires $P_{\delta_L}(k, t)$ quelconques. Pour le cas de vitesse initiale Brownienne, $n = -2$, il se trouve que le spectre linéaire est aussi une constante, mais il n'était pas évident a priori que la limite de grand k soit égale à la même valeur et que $P_\delta(k, t)$ ne varie pas dans le régime intermédiaire faiblement non-linéaire. Ainsi, les simulations numériques montrent que cette coïncidence ne se généralise pas aux cas de dimension plus élevée.

Il faut néanmoins noter que les non-linéarités transforment réellement les propriétés du champ de densité, comme nous l'avons vu sur la figure 4.3. En effet, bien que le spectre de puissance reste égal à l'expression (4.30) le champ de densité n'est pas un bruit blanc Gaussien ordinaire. Comme indiqué par les cumulants (4.27), les fonctions de corrélation d'ordre supérieur sont non-nulles :

$$C_n(x_1, \dots, x_n) = (2n - 3)!! (\mathcal{D}t^2)^{n-1} \delta_D(x_2 - x_1) \delta_D(x_3 - x_1) \dots \delta_D(x_n - x_1). \quad (4.31)$$

Les facteurs de Dirac traduisent le fait, mentionné plus haut, que les champs de densité dans des intervalles disjoints sont indépendants pour ces conditions initiales, $n = -2$.

4.3.3 Distribution des chocs

On peut aussi calculer la fonction de masse des chocs, qui prend l'expression très simple [23, 187] :

$$N(M) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} M^{-3/2} e^{-M}. \quad (4.32)$$

On peut vérifier que la coupure exponentielle aux grandes masses pourrait aussi être obtenue à partir de la méthode du col présentée dans le paragraphe 3.2 et utilisée dans le chapitre 5 pour estimer les fonctions de masse des halos virialisés formés par la dynamique gravitationnelle en cosmologie.

En fait, il se trouve que le résultat exact (4.32) coïncide avec la prédiction de l'approximation de Press-Schechter couramment utilisée en cosmologie [140]. Dans le cas présent, cette approche heuristique considère que la fraction de matière, $F(> m)$, qui se retrouve dans des objets non-linéaires (ici les chocs infiniment minces, puisque nous considérons la dynamique de Burgers dans la limite inviscide, $\nu \rightarrow 0$) de masse plus grande que m , avec $m = \rho_0 q$, est donnée par la probabilité que, choisissant un point Lagrangien q_c au hasard, les particules initialement situées en $q_c - q/2$ et $q_c + q/2$ viennent juste de se rejoindre à l'instant t étudié. (Dans le contexte cosmologique 3D, on considère la probabilité qu'une sphère de masse m centrée sur q_c vient juste de s'effondrer en un point). En terme des variables réduites cela s'écrit :

$$F^{\text{PS}}(\geq M) = \mathcal{P}_Q^L(X_L \leq 0) \text{ avec } M = Q, \text{ et } \mathcal{P}_Q^L(X_L) = \frac{e^{-(X_L - Q)^2/Q}}{\sqrt{\pi Q}}, \quad (4.33)$$

où $\mathcal{P}_Q^L(X_L)$ est la distribution de probabilité linéaire qu'un intervalle de longueur Lagrangienne Q ait une longueur X en espace Eulérien, suivant le champ de déplacement linéaire (i.e. où les particules suivent leur vitesse initiale sans tenir compte des chocs). Cela donne :

$$F^{\text{PS}}(\geq M) = \int_{\sqrt{M}}^{\infty} dy \frac{e^{-y^2}}{\sqrt{\pi}}. \quad (4.34)$$

Comme d'habitude, l'éq.(4.34) implique $F^{\text{PS}}(\geq 0) = 1/2$, c'est-à-dire que la moitié seulement de la masse se retrouverait dans des objets effondrés. Il est habituel de multiplier alors le résultat (4.34) par un facteur 2, quel que peu ad-hoc [140], et en dérivant par rapport à M , la prescription habituelle de Press-Schechter donne donc

$$2F^{\text{PS}}(\geq M) = \int_M^{\infty} dM M N^{\text{PS}}(M), \text{ d'où } N^{\text{PS}}(M) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} M^{-3/2} e^{-M}. \quad (4.35)$$

Ainsi, dans le cas de la dynamique de Burgers 1D avec une vitesse initiale Brownienne, l'ansatz de Press-Schechter coïncide avec la fonction de masse exacte (4.32). L'accord des exposants caractéristiques de la fonction de masse aux grandes et petites masses avait aussi été noté dans des études numériques pour des indices spectraux n génériques [193] (mais la forme exacte de la fonction de masse est généralement légèrement différente de la prédiction de Press-Schechter). Cette coïncidence est quelque peu surprenante, au vu des nombreux effets qui auraient pu conduire à un échec de l'ansatz de Press-Schechter, particulièrement pour la queue de distribution en loi de puissance aux petites masses. On peut ainsi penser au "cloud-in-cloud problem", qui consiste à noter que, même si les particules $q_c \pm q/2$ ne se sont pas encore rencontrées en extrapolant leur vitesse linéaire, il se pourrait que sur une échelle $\ell > q$ plus grande, les particules $q_c \pm \ell/2$ aient initialement des vitesses beaucoup plus grandes et ont donc déjà formé un choc massif qui contient l'échelle plus petite q . En fait, des études numériques montrent qu'en dimension supérieure la pente à petite masse des fonctions de masses engendrées par la dynamique de Burgers ne coïncide pas avec la prédiction de Press-Schechter.

Enfin, notons que dans le cas de la vitesse initiale Brownienne, tout comme le champ de densité sur des intervalles disjoints est décorrélié, la fonction de masse conjointe des chocs se factorise, $n(m_1, x_1; m_2, x_2) = n(m_1)n(m_2)$. Ainsi, les chocs ne sont pas corrélés et forment un processus de Poisson [23]. Bien sûr, cela n'est plus le cas pour des conditions initiales génériques.

4.4 Fonctions de réponse

Un intérêt de la dynamique de Burgers, outre le fait qu'elle fournit une illustration simple d'un système dont la dynamique et les propriétés statistiques sont proches de celles associées à la dynamique gravitationnelle en cosmologie, est qu'elle permet de calculer explicitement certaines quantités qu'il est difficile de contrôler analytiquement dans le cas gravitationnel. Un bon exemple est celui des fonctions de réponse, dont nous avons vu dans le chapitre 2 qu'elles apparaissent naturellement dans le cadre des approches perturbatives. En particulier, nous avons indiqué dans le paragraphe 2.7 les grandes différences de comportement de ces fonctions de réponse selon que l'on se place dans un cadre Eulérien ou Lagrangien, et nous avons donné des éléments d'explication de ce phénomène. Nous allons voir dans ce paragraphe que l'étude de la dynamique de Burgers nous permet d'explicitier plus en détail ces comportements, en obtenant des résultats exacts et en précisant le lien entre ces fonctions de réponse et des quantités plus usuelles, telles que la distribution de probabilité de la vitesse et la fonction de masse des chocs.

4.4.1 Réponse Eulérienne

Nous considérons tout d'abord dans ce paragraphe le “propagateur Eulérien” du potentiel de vitesse, $R^\psi(x, t; q_0)$, défini comme la dérivée fonctionnelle de $\psi(x, t)$ par rapport au potentiel initial $\psi_0(q_0)$ au point q_0 :

$$R^\psi(x, t; q_0) = \left\langle \frac{\mathcal{D}\psi(x, t)}{\mathcal{D}\psi_0(q_0)} \right\rangle. \quad (4.36)$$

Ainsi, comme dans le paragraphe 2.7, nous nous restreignons dans cette étude aux fonctions de réponse $R^\psi(x_1, t_1; x_2, t_2)$ par rapport aux conditions initiales, c'est-à-dire à $t_2 = 0$. Cette fonction de réponse (ou propagateur) peut aussi être vue comme une fonction de mémoire, avec une dépendance temporelle qui donnerait une estimation de l'échelle de temps sur laquelle les fluctuations initiales, de longueur d'onde donnée, semblent s'effacer. En utilisant la solution explicite de Hopf-Cole (4.12) pour prendre la dérivée fonctionnelle, puis en prenant la limite inviscide $\nu \rightarrow 0$, nous obtenons :

$$R^\psi(x, t; q_0) = \langle \delta_D[q(x, t) - q_0] \rangle = p_x(q_0, t). \quad (4.37)$$

Ici, $q(x, t)$ est à nouveau la coordonnée Lagrangienne introduite en (4.13) et $p_x(q, t)$ sa distribution de probabilité. Comme les chocs forment un ensemble de mesure nulle, nous pouvons utiliser l'éq.(4.13) pour écrire :

$$R^\psi(x, t; q_0) = \frac{1}{t} p_x(u, t), \quad \text{avec} \quad u = \frac{x - q_0}{t}, \quad (4.38)$$

où $p_x(u, t)$ est la distribution de probabilité à un point de la vitesse Eulérienne. En espace de Fourier, pour des conditions initiales homogènes, on définit le propagateur par

$$\left\langle \frac{\mathcal{D}\tilde{\psi}(k, t)}{\mathcal{D}\tilde{\psi}_0(k_0)} \right\rangle = \delta_D(k - k_0) \tilde{R}^\psi(k, t), \quad \text{donc} \quad \tilde{R}^\psi(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} R^\psi(x, t; 0). \quad (4.39)$$

Pour faire le lien avec le contexte cosmologique, où l'on est principalement intéressé par les propriétés du champ de densité, nous pouvons définir comme en (2.62) le propagateur du champ de densité R^δ par :

$$R^\delta(x, t; q_0) = \left\langle \frac{\mathcal{D}\delta(x, t)}{\mathcal{D}\delta_{L0}(q_0)} \right\rangle, \quad (4.40)$$

où $\delta(x, t) = (\rho(x, t) - \rho_0)/\rho_0$ est à nouveau le contraste de densité. A partir des éqs.(4.10) et (4.14), nous obtenons alors en espace de Fourier :

$$\tilde{\delta}_{L0}(k) = -k^2 \tilde{\psi}_0(k) \quad \text{et} \quad \tilde{\delta}(k, t) = -t k^2 \tilde{\psi}(k, t), \quad \text{donc} \quad \tilde{R}^\delta(k, t) = t \tilde{R}^\psi(k, t) \quad \text{et} \quad R^\delta(x, t; q_0) = t R^\psi(x, t; q_0). \quad (4.41)$$

Par conséquent, les expressions (4.38) et (4.41) montrent explicitement que les fonctions de réponse Eulériennes, ou propagateurs, sont déterminées par la distribution de probabilité à un point de la vitesse. Ceci est cohérent avec le fait que dans le cas de la dynamique gravitationnelle, les diverses approches perturbatives présentées dans le chapitre 2 prédisent une décroissance temporelle (Gaussienne, en loi de puissance, ou de simples oscillations) sur une échelle de temps fixée par la variance (linéaire) de la vitesse (2.50); et ces méthodes donneraient les mêmes résultats pour la dynamique de Burgers étudiée ici. Le résultat exact (4.38) montre en fait que le propagateur Eulérien dépend de la distribution de probabilité non-linéaire (i.e. exacte) de la vitesse, ce qui signifie qu'en appliquant les approches perturbative du chapitre 2 à des ordres de plus en plus élevés on verrait apparaître des corrections dues à la différence entre les distributions de probabilité linéaire et non-linéaire de la vitesse.

Cependant, ce résultat (4.38) montre aussi que de tels calculs sont peu susceptibles de fournir des informations pertinentes sur les structures du champ de densité. En effet, la distribution à un point de la vitesse n'apporte guère de renseignements sur les propriétés du champ de densité dans le régime non-linéaire. Plus généralement, la relation (4.38) indique une très forte sensibilité au “sweeping effect” discuté dans le chapitre 2, qui est commun à la dynamique gravitationnelle et à la dynamique de Burgers, associé aux modes de grande longueur d'onde du champ de vitesse. Ceci fournit une forte motivation pour étudier les fonctions de réponse dans un cadre Lagrangien, où l'on s'affranchit de cet obstacle.

Pour des conditions initiales de type CDM à grand z , ou de la “classe IR” avec une coupure à petit k , le champ de vitesse est dominé par les modes de grande longueur d'onde qui sont encore dans le régime linéaire (et l'hypothèse de séparation d'échelles utilisée dans le paragraphe 2.7.1 pour obtenir une resommation de la série perturbative dans une limite de grand k est justifiée). Il est alors intéressant de considérer les prédictions

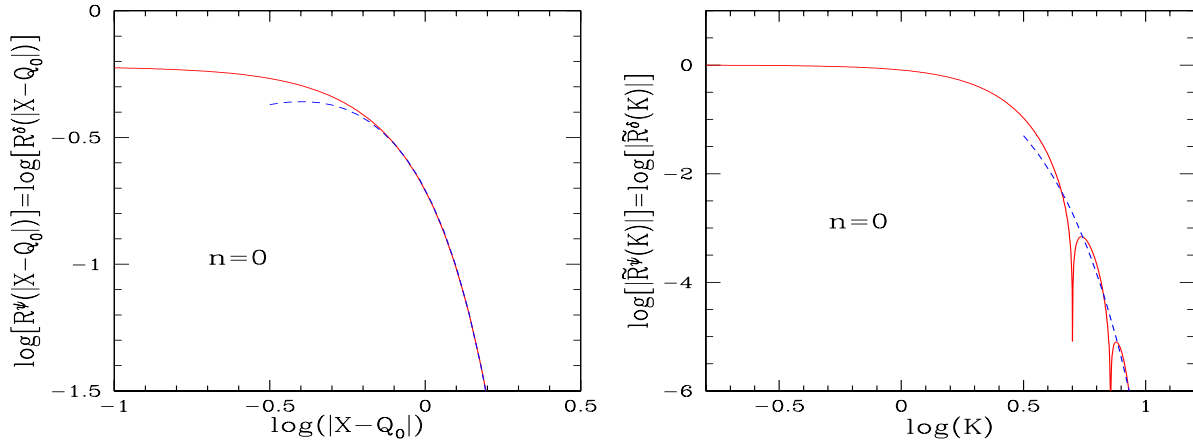


FIG. 4.4 – *Panneau de gauche* : le propagateur Eulérien, $R^\psi(X - Q_0) = R^\delta(X - Q_0)$ en terme des variables réduites, obtenu pour $n = 0$ (vitesse initiale de bruit blanc). Il est aussi égal à la distribution de probabilité de la vitesse, $\mathcal{P}(U)$ avec $U = X - Q_0$. Les tirets bleus sont le comportement asymptotique (4.45). *Panneau de droite* : le propagateur Eulérien, $\tilde{R}^\psi(K) = \tilde{R}^\delta(K)$, en espace de Fourier, pour $n = 0$. Les tirets bleus sont le comportement asymptotique (4.46) (en prenant le cosinus égal à l'unité).

obtenues pour les propagateurs en utilisant la distribution de probabilité linéaire de la vitesse dans l'expression (4.38). On obtient ainsi en espace réel :

$$R_L^\psi(x, t; q_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t \sigma_{u_0}}} e^{-(x-q_0)^2/(2t^2 \sigma_{u_0}^2)}, \quad R_L^\delta(x, t; q_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t \sigma_{u_0}}} e^{-(x-q_0)^2/(2t^2 \sigma_{u_0}^2)} \quad \text{avec} \quad \sigma_{u_0}^2 = \langle u_0^2 \rangle. \quad (4.42)$$

Bien sûr, dans la limite $t \rightarrow 0$ on retrouve $R^\psi(x, 0; q_0) = \delta_D(x - q_0)$ et $R^\delta(x, 0; q_0) = 0$. En espace de Fourier cela donne :

$$\tilde{R}_L^\psi(k, t) = e^{-t^2 k^2 \sigma_{u_0}^2 / 2}, \quad \tilde{R}_L^\delta(k, t) = t e^{-t^2 k^2 \sigma_{u_0}^2 / 2}. \quad (4.43)$$

Dans le cas de la dynamique de Zeldovich, où les particules suivent exactement le champ de déplacement linéaire, les expressions (4.43) seraient exactes. Ici, du fait des chocs elles ne sont valables que dans le cadre de l'approximation linéaire pour la distribution de vitesse, mais elles mettent bien en évidence la décroissance Gaussienne, $e^{-t^2 k^2}$, caractéristique du transport des structures par les modes de grande longueur d'onde du champ de vitesse, que nous avons déjà rencontrée dans le cadre gravitationnel dans le paragraphe 2.7.1.

Pour des conditions initiales de la “classe IR”, où la variance linéaire $\sigma_{u_0}^2$ diverge du fait de la contribution des grandes longueurs d'onde (si on ne rajoute pas de coupure IR au spectre de puissance), les propagateurs Eulériens sont donc nuls dès que $t > 0$: les structures ont été déplacées infiniment loin par ces modes de grande longueur d'onde. Pour les conditions initiales en loi de puissance (4.8) les fonctions de réponse Eulériennes n'ont donc véritablement de sens (i.e. de limite pertinente lorsque l'on repousse les coupures IR et UV) que pour la “classe UV”. Cependant, dans ce cas la variance linéaire $\sigma_{u_0}^2$ diverge du fait de la contribution des petites longueurs d'onde. Cela signifie qu'il n'existe pas de régime quasi-linéaire (quelle que soit l'échelle de longueur considérée) et que les chocs gouvernent toujours la dynamique. Dans ce cas, la forme Gaussienne obtenue en (4.42)-(4.43) peut être modifiée par les effets non-linéaires associés à la formation des chocs, qui régularisent la distribution de probabilité de la vitesse. Dans le cas d'une vitesse initiale de bruit blanc, $n = 0$, on connaît l'expression exacte de la distribution de probabilité de la vitesse, donc des propagateurs Eulériens. Ecrivant les fonctions de réponse en termes des variables réduites X et K ,

$$R^\delta(x, t; q_0) = \frac{t}{L(t)} R^\delta(X - Q_0), \quad \tilde{R}^\delta(k, t) = t \tilde{R}^\delta(K), \quad \text{avec} \quad K = L(t) k = (2Dt^2)^{1/3} k, \quad (4.44)$$

où l'on a explicité le fait que la réponse $R^\delta(x, t; q_0)$ ne dépend que de $|x - q_0|$ et du temps, puisque le système est statistiquement homogène et isotrope, on obtient en particulier les comportements asymptotiques

$$n = 0, \quad |X| \gg 1 : \quad R^\delta(X) \sim \frac{2|X|}{\text{Ai}'(-\omega_1)} e^{-\omega_1 |X| - |X|^3/3}, \quad (4.45)$$

et

$$n = 0, \quad K \gg 1 : \quad \tilde{R}^\delta(K) \sim \frac{4\sqrt{\pi}}{\text{Ai}'(-\omega_1)} K^{1/4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{3} K^{3/2} - \frac{\omega_1}{\sqrt{2}} \sqrt{K}} \cos \left[\frac{\sqrt{2}}{3} K^{3/2} - \frac{\omega_1}{\sqrt{2}} \sqrt{K} + \frac{\pi}{8} \right]. \quad (4.46)$$

Ici, $-\omega_1$ est le premier zéro de la fonction d'Airy ($\omega_1 \simeq 2.338$). Nous comparons les comportements asymptotiques (4.45)-(4.46) avec l'expression complète du propagateur sur la figure 4.4. L'expression (4.46) montre en particulier que les effets non-linéaires ont modifié la coupure Gaussienne, attendue dans les cas de conditions initiales ayant moins de puissance aux petites échelles, pour donner une décroissance un peu plus lente en $e^{-K^{3/2}}$.

Pour des valeurs génériques de n , il est difficile d'obtenir la forme exacte de la distribution de probabilité de la vitesse, donc les propagateurs Eulériens. Néanmoins, pour cette classe de conditions initiales, $-1 < n < 1$, on a les comportements asymptotiques des queues de distribution :

$$-1 < n < 1, \quad |u| \rightarrow \infty : \quad p(u) \sim e^{-t^{n+1}|u|^{n+3}}, \quad \text{donc, pour } |x - q_0| \rightarrow \infty : \quad R^\delta(x, t; q_0) \sim e^{-|x - q_0|^{n+3}/t^2}, \quad (4.47)$$

où nous n'avons pas inclus les facteurs numériques dans les exponentielles. Ces comportements sont liés aux distributions d'événements rares, évoqués dans le chapitre 3 [185]. On peut noter que la coupure aux grandes distances dépend ici de n , contrairement à la coupure Gaussienne (4.42) associée aux conditions initiales ayant peu de puissance à grand k .

4.4.2 Réponse Lagrangienne

Nous avons donc vu dans le paragraphe précédent que les fonctions de réponse Eulériennes obtenues pour la dynamique de Burgers 1D ne dépendent que de la distribution de probabilité de la vitesse, et sont donc très sensibles au “sweeping effect” associé au déplacement des structures par les modes de grande longueur d'onde du champ de vitesse. Cela confirme donc les observations que nous avons pu faire à partir d'approches perturbatives dans le cas de la dynamique gravitationnelle, dans le chapitre 2.

Nous allons maintenant voir ce qu'il en est pour les fonctions de réponse Lagrangiennes. Comme dans le paragraphe 2.7.2, nous considérons donc le propagateur Lagrangien, $R^\kappa(q, t; q_0)$, associé à la quantité Lagrangienne $\kappa(q, t)$, définie comme en (2.71) par :

$$\kappa(q, t) = -\frac{\partial}{\partial q}[x(q, t) - q] = 1 - \frac{\partial x}{\partial q}, \quad \text{d'où } \kappa \leq 1, \quad (4.48)$$

où $x(q, t)$ est la trajectoire de la particule q . La borne supérieure, $\kappa \leq 1$, vient de ce que les particules ne se croisent pas, ce qui implique que $x(q)$ est une fonction monotone croissante. Ainsi, $-\kappa$ est la divergence du champ de déplacement, $x(q, t) - q$. Elle décrit donc l'expansion relative d'éléments de masse infinitésimaux, et grâce à l'éq.(4.14) elle est reliée à la densité par

$$\rho(x, t) = \frac{\rho_0}{1 - \kappa(q, t)}, \quad \text{donc } \kappa(q, t) = 1 - \frac{\rho_0}{\rho(q, t)}, \quad \text{où } \rho(q, t) \equiv \rho(x(q, t), t). \quad (4.49)$$

Comme on le voit clairement sur les expressions (4.48)-(4.49), la quantité κ n'est pas affectée par des translations uniformes du système, et ne souffre donc pas du “sweeping effect” qui domine le comportement des propagateurs Eulériens.

Dans le régime linéaire, où les particules suivent le champ de déplacement linéaire, $x_L = q + tu_0(q)$, nous avons simplement

$$\kappa_L(q, t) = t \kappa_{L0}(q) \quad \text{avec} \quad \kappa_{L0}(q) = -\frac{du_0}{dq} = \frac{d^2\psi_0}{dq^2} = \delta_{L0}(q), \quad (4.50)$$

de manière analogue au cas 3D de l'éq.(2.72). Définissant comme en (2.80) et en (4.36) les propagateurs Lagrangiens en espace réel, $R^\kappa(q, t; q_0)$ et $R^{\kappa, \psi}(q, t; q_0)$, par

$$R^\kappa(q, t; q_0) = \left\langle \frac{\mathcal{D}\kappa(q, t)}{\mathcal{D}\kappa_{L0}(q_0)} \right\rangle, \quad R^{\kappa, \psi}(q, t; q_0) = \left\langle \frac{\mathcal{D}\kappa(q, t)}{\mathcal{D}\psi_0(q_0)} \right\rangle, \quad (4.51)$$

qui sont donc reliés par :

$$\tilde{R}^{\kappa, \psi} = -k^2 \tilde{R}^\kappa, \quad R^{\kappa, \psi} = \frac{\partial^2 R^\kappa}{\partial q^2} = \frac{\partial^2 R^\kappa}{\partial q_0^2}, \quad (4.52)$$

nous avons dans le régime linéaire (en espaces réel et de Fourier)

$$R_L^\kappa = t \delta_D(q - q_0), \quad \tilde{R}_L^\kappa = t, \quad \text{et} \quad R_L^{\kappa, \psi} = t \delta_D''(q - q_0), \quad \tilde{R}_L^{\kappa, \psi} = -t k^2. \quad (4.53)$$

A nouveau, ces expressions seraient exactes pour la dynamique de Zeldovich. Dans le cas présent, elles donnent seulement le comportement asymptotique des propagateurs dans le régime quasi-linéaire ($t \rightarrow 0$ ou $k \rightarrow 0$), pour toute la gamme $-3 < n < 1$, comme nous le vérifierons ci-dessous.

Pour calculer les propagateurs Lagrangiens au-delà de l'approximation linéaire, nous exprimons d'abord $\kappa(q)$ en terme des chocs formés à l'instant t , en utilisant le fait que toute la matière est contenue dans ces chocs pour les conditions initiales (4.8) [154]. Pour une réalisation donnée, notons alors x_i la position Eulérienne du choc numéro i , qui contient les particules venant de l'intervalle Lagrangien $[q_i, q_{i+1}[$, avec $x_i < x_{i+1}$ et $q_i < q_{i+1}$. Donc, pour $q_i < q < q_{i+1}$ nous avons $x(q) = x_i$, d'où $\kappa(q) = 1$, tandis que le saut de x_{i-1} à x_i au point q_i donne une contribution $-(x_i - x_{i-1})\delta_D(q - q_i)$ (voir la deuxième expression sur la définition (4.48)). Par conséquent, nous pouvons écrire $\kappa(q)$ sous la forme :

$$\kappa(q) = 1 - \sum_{i=-\infty}^{\infty} (x_i - x_{i-1}) \delta_D(q - q_i). \quad (4.54)$$

Pour prendre la deuxième dérivée fonctionnelle (4.51), il nous suffit alors d'évaluer la variation des positions x_i et q_i à l'ordre linéaire sur une perturbation $\delta\psi_0(q_0)$ du potentiel de vitesse initial. Cela s'obtient facilement à partir de la construction géométrique (4.20), en calculant le déplacement des points de premier contact, ce qui conduit à l'expression :

$$R^{\kappa,\psi}(q, t; q') = t \left\langle \sum_i \delta_D(q - q_i) \frac{\delta_D(q - q' + \Delta_i q) + \delta_D(q - q' - \Delta_i q) - 2\delta_D(q - q')}{\Delta_i q} \right\rangle, \quad (4.55)$$

où nous avons noté $\Delta_i q = q_{i+1} - q_i$ la distance entre deux points de contact successifs. Cette expression traduit le fait qu'au premier ordre en $\delta\psi_0$ seule la perturbation au niveau des différents points de premier contact avec la famille de paraboles (4.20) contribue, voir aussi la figure 4.2.

Remarquons alors que, la densité initiale ρ_0 étant uniforme, la masse m d'un choc est reliée à sa taille Lagrangienne par $m = \rho_0 q$. Définissant la fonction de masse des chocs à l'instant t , $n(m, t)dm$, comme le nombre moyen de chocs, de masse dans l'intervalle $[m, m + dm]$, par unité de longueur Eulérienne ou Lagrangienne (ces deux fonctions sont égales), la moyenne (4.55) s'écrit aussi :

$$R^{\kappa,\psi}(q, t; q_0) = t \int_0^\infty dm n(m, t) \frac{\delta_D(q - q_0 + m/\rho_0) + \delta_D(q - q_0 - m/\rho_0) - 2\delta_D(q - q_0)}{m/\rho_0}. \quad (4.56)$$

Le propagateur $R^{\kappa,\psi}(q, t; q_0)$ est singulier en $q = q_0$ mais pour des séparations non-nulles il se simplifie en

$$q \neq q_0 : R^{\kappa,\psi}(q, t; q_0) = t\rho_0 \frac{n(\rho_0|q - q_0|, t)}{|q - q_0|}. \quad (4.57)$$

Nous pouvons vérifier que l'expression (4.56) ne dépend que de la distance $|q - q_0|$ et du temps t , et est invariante par transformation Galiléenne. Comme prévu, le propagateur Lagrangien $R^{\kappa,\psi}$ est une sonde directe du champ de densité, puisqu'il s'exprime en fonction de la fonction de masse des chocs. Bien sûr, il ne suffit pas à lui seul à caractériser complètement le champ de densité (ce qui nécessiterait par exemple toutes les fonctions de corrélation à n points) mais cela représente déjà une amélioration significative par rapport au propagateur Eulérien étudié dans le paragraphe 4.4.1.

En espace de Fourier nous obtenons l'expression :

$$\tilde{R}^{\kappa,\psi}(k, t) = 2t \int_0^\infty dm n(m, t) \frac{\cos(km/\rho_0) - 1}{m/\rho_0}. \quad (4.58)$$

Dans le régime quasi-linéaire, où la masse typique des chocs tend vers zéro tandis que la fonction de masse reste normalisée à l'unité, $\int dm (m/\rho_0) n(m, t) = 1$, les expressions (4.56) et (4.58) convergent bien vers (4.53), pour $t \rightarrow 0$ ou $k \rightarrow 0$. Il faut noter que $R^{\kappa,\psi}$ et $\tilde{R}^{\kappa,\psi}$ sont bien définis sur toute la gamme de conditions initiales, $-3 < n < 1$. Ainsi, contrairement au cas des propagateurs Eulériens du paragraphe 4.4.1, il n'y a pas de différence qualitative entre les classes "UV" et "IR" (mais dans le cas de la "classe IR" sans coupure il faut d'abord prendre la limite de grande distance par rapport au point de référence pour éliminer les effets de bord).

Le propagateur Lagrangien R^κ s'obtient alors à l'aide des relations (4.52), ce qui donne

$$R^\kappa(q, t; q_0) = t \int_{\rho_0|q - q_0|}^\infty dm n(m, t) \left(1 - \frac{|q - q_0|}{m/\rho_0} \right), \quad \tilde{R}^\kappa(k, t) = 2t \int_0^\infty dm n(m, t) \frac{1 - \cos(km/\rho_0)}{k^2 m/\rho_0}. \quad (4.59)$$

On sait par ailleurs [113, 149, 185] que les fonctions de masse présentent aux grandes masses le comportement asymptotique :

$$-3 < n < 1, \quad m \gg \rho_0 L(t) : \quad n(m, t) \sim e^{-m^{n+3}/t^2}, \quad (4.60)$$

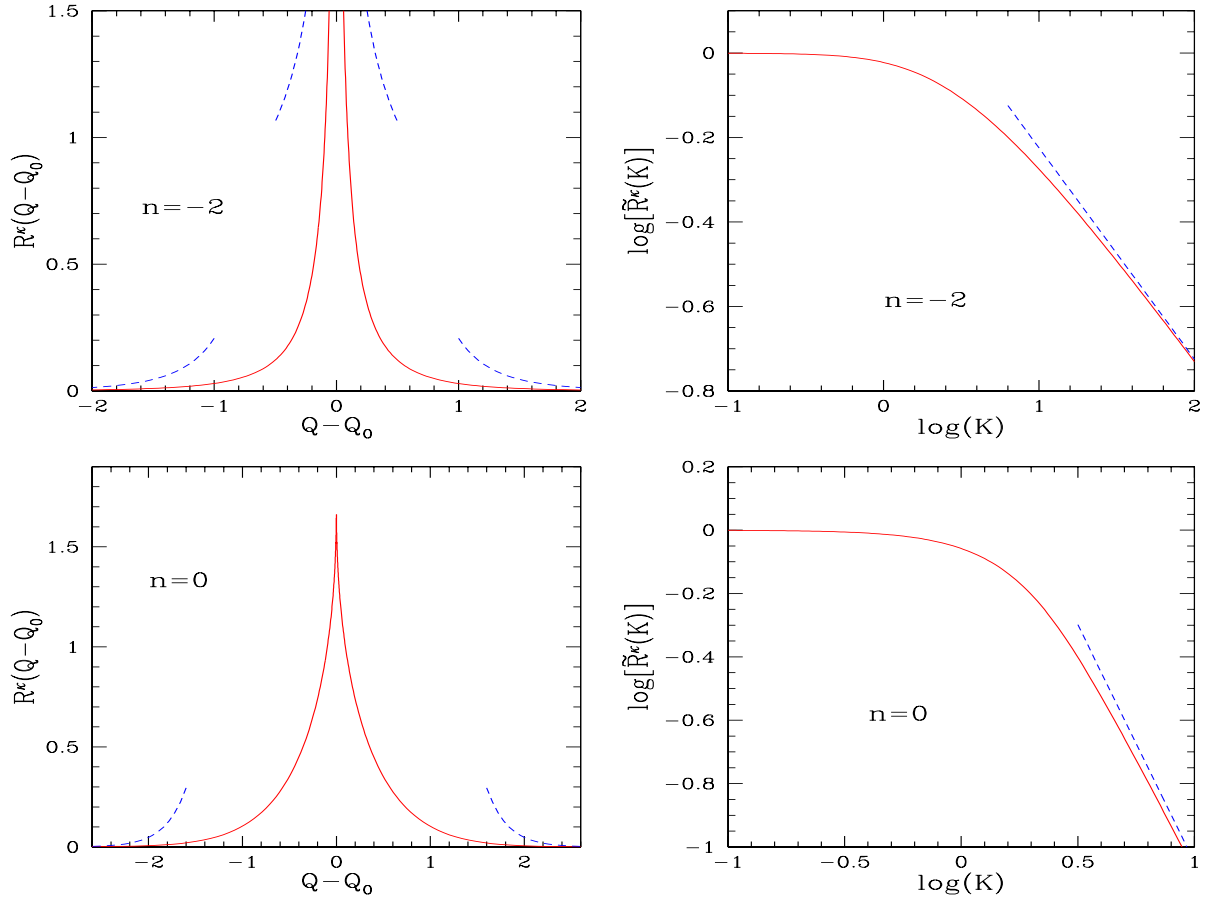


FIG. 4.5 – *Panneaux de gauche* : les propagateurs Lagrangiens $R^\kappa(Q - Q_0)$ obtenus pour $n = -2$ (en haut) et $n = 0$ (en bas) à partir de (4.59), en terme des variables réduites Q et Q_0 . *Panneaux de droite* : les propagateurs Lagrangiens $\tilde{R}^\kappa(K)$ en espace de Fourier, pour $n = -2$ (en haut) et $n = 0$ (en bas). Les tirets bleus sont les comportements asymptotiques (4.65) et (4.66).

tandis qu'aux petites masses les simulations numériques et des arguments heuristiques [154, 193] suggèrent le comportement en loi de puissance :

$$-3 < n < 1, \quad m \ll \rho_0 L(t) : \quad n(m, t) \sim t^{-1} m^{(n-1)/2}, \quad (4.61)$$

qui n'a été prouvé que pour le cas Brownien, $n = -2$ [157, 23, 187], et le cas de bruit blanc, $n = 0$ [8, 64]. Cela conduit au comportement à grande distance des propagateurs :

$$\frac{|q - q_0|}{L(t)} \gg 1 : \quad R^{\kappa, \psi}(q, t; q_0) \sim R^\kappa(q, t; q_0) \sim e^{-|q - q_0|^{n+3}/t^2}, \quad (4.62)$$

qui suit celui des propagateurs Eulériens (4.47) pour $-1 < n < 1$. Cela vient de ce qu'ils sont tous deux gouvernés par les mêmes événements rares, associés à des fluctuations extrêmes du champ de vitesse initial [185]. Aux petites échelles, c'est-à-dire aux grands nombres d'onde, nous obtenons les comportements en loi de puissance indépendants du temps,

$$k \gg L(t)^{-1} : \quad \tilde{R}^{\kappa, \psi}(k, t) \sim k^{(1-n)/2}, \quad \tilde{R}^\kappa(k, t) \sim k^{-(n+3)/2}. \quad (4.63)$$

En particulier, le propagateur $\tilde{R}^\kappa(k, t)$ décroît comme une loi de puissance à grand k , avec un préfacteur indépendant du temps.

Ainsi, nous ne retrouvons pas le comportement quantitatif obtenu par une approche perturbative dans le paragraphe 2.7.2 pour la dynamique gravitationnelle, qui donnait une asymptote constante à grand k . Cela n'est pas surprenant, car nous avons expliqué que la séparation d'échelles sur laquelle reposait cette approximation n'était pas valable pour des spectres de puissance linéaires en loi de puissance. De plus, cette approche perturbative ne pouvait pas tenir compte des croisements de trajectoires, tandis que les résultats exacts (4.59)

prennent en compte la formation des chocs. Néanmoins, ces résultats confirment au niveau qualitatif que les propagateurs Lagrangiens dépendent de manière beaucoup plus directe des structures du champ de densité que les propagateurs Eulériens, et présentent une décroissance beaucoup plus lente dans le régime non-linéaire (en loi de puissance au lieu d’une coupure de type exponentiel), du fait qu’ils ne sont pas sensibles au “sweeping effect”.

Dans les cas $n = -2$ et $n = 0$ où l’on connaît l’expression exacte de la fonction de masse des chocs, on peut donc calculer explicitement les propagateurs Lagrangiens. En termes des coordonnées réduites Q et K ,

$$R^\kappa(q, t; q_0) = \frac{t}{L(t)} R^\kappa(Q - Q_0), \quad \tilde{R}^\kappa(k, t) = t \tilde{R}^\kappa(K), \quad (4.64)$$

on obtient en particulier les comportements asymptotiques pour $n = -2$:

$$n = -2, \quad Q \ll 1 : R^\kappa(Q) \sim \frac{4}{3\sqrt{\pi Q}}, \quad Q \gg 1 : R^\kappa(Q) \sim \frac{Q^{-5/2}}{\sqrt{\pi}} e^{-Q}, \quad K \gg 1 : \tilde{R}^\kappa(K) \sim \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{K}}, \quad (4.65)$$

et pour $n = 0$:

$$n = 0, \quad R^\kappa(0) \simeq 1.674, \quad Q \gg 1 : R^\kappa(Q) \sim 32\sqrt{\pi} Q^{-5/2} e^{-\omega_1 Q - Q^3/12}, \quad K \gg 1 : \tilde{R}^\kappa(K) \sim 2\sqrt{\frac{2}{K^3}}. \quad (4.66)$$

Les propagateurs Lagrangiens $R^\kappa(Q - Q_0)$ et $\tilde{R}^\kappa(K)$ obtenus pour $n = -2$ et $n = 0$ sont représentés sur la figure 4.5, où nous voyons bien le comportement (4.63) en loi de puissance à grand k , lié au au comportement de la fonction de masse des chocs aux petites masses. Ceci vient de ce que la fonction de masse décrit aussi la partition de l’espace Lagrangien en sous-ensembles qui donneront les objets non-linéaires à l’instant t . Dans le cas de la dynamique de Burgers 1D, la réponse est concentrée au niveau des bornes Lagrangiennes q_i des chocs, comme on le voit sur l’expression (4.55), car les chocs sont infiniment minces (toutes les particules initialement situées à l’intérieur de $]q_i, q_{i+1}[$ se retrouvent “enfouies” à la même position x_i au milieu des “particules de bord” q_i et q_{i+1}) et avant les collisions les particules sont en vol libre (suivant la dynamique de Zeldovich). Par conséquent, de petites perturbations localisées à l’intérieur de l’intervalle $[q_i, q_{i+1}]$ n’ont pas d’effet sur l’objet final, dont la masse et la position sont déterminées par les extrémités Lagrangiennes q_i et q_{i+1} et par l’impulsion initiale globale de cet intervalle $[q_i, q_{i+1}]$.

Dans le cas gravitationnel 3D, les halos virialisés ont une taille non-nulle, et les effets de marée font qu’une perturbation en un point q_0 exerce une distortion du système sur une région de taille finie autour d’un point q éloigné. Cependant, il est clair que la réponse en q à une perturbation en q_0 devrait encore fortement varier selon que ces deux points font partie ou non du même halo. Ainsi, on peut s’attendre à ce que dans le cas de la dynamique gravitationnelle les propagateurs Lagrangiens soient encore fortement sensibles aux propriétés des fonctions de masse des halos virialisés, même s’il n’existe plus de relation explicite aussi simple que (4.59). De manière plus générale, et en accord avec les résultats obtenus dans le chapitre 2, contrairement à leurs analogues Eulériennes les fonctions de réponse Lagrangiennes devraient être des sondes assez sensibles des propriétés du champ de densité.

4.5 Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre comment la résolution exacte de systèmes simplifiés peut permettre de mieux comprendre les propriétés de la dynamique gravitationnelle en cosmologie. Ici, nous nous sommes restreints au cas du modèle d’adhésion à une dimension, qui a l’avantage d’être accessible à des traitements analytiques explicites tout en présentant une dynamique non-triviale avec formation de chocs, qui est donc hors d’atteinte des méthodes perturbatives.

Le cas d’une vitesse initiale Brownienne ($n = -2$) à une dimension permet d’obtenir une analyse explicite complète du système, et montre de grandes similarités avec les champs de densité construits par la dynamique gravitationnelle 3D. Par exemple, tandis que dans la limite linéaire on retrouve la distribution de probabilité Gaussienne dictée par les conditions initiales, et même le comportement quasi-linéaire obtenu par la méthode du col sphérique dans le chapitre 3, aux petites échelles non-linéaires la distribution de probabilité du contraste de densité développe un régime intermédiaire en loi de puissance, entre un pic sous-dense (correspondant à l’essentiel du volume vu à cette échelle) et une coupure à une surdensité croissante (correspondant à l’essentiel de la masse vue à cette échelle).

De plus, il se trouve que ce système fournit une réalisation exacte de deux modèles phénoménologiques qui avaient été introduits auparavant dans le contexte cosmologique : le “stable-clustering ansatz”, décrivant la faible dépendance avec l’échelle des cumulants du contraste de densité dans le régime fortement non-linéaire

[51, 126, 9, 10], et la prescription de Press-Schechter, donnant la fonction de masse des objets non-linéaires [140]. Bien que pour des conditions initiales génériques, ou en dimension plus élevée, ces modèles ne coïncident plus avec la solution exacte du système, cela explique en partie le fait qu'ils puissent fournir de bonnes approximations des structures de grande échelle formées par la gravité (au moins au niveau qualitatif). On s'attend de plus à ce que le "stable-clustering ansatz" soit toujours vérifié dans ce modèle d'adhésion, pour des conditions initiales génériques et en dimension quelconque, du fait de la formation de masses ponctuelles à l'intersection des lignes de choc. De ce point de vue, la situation est bien sûr beaucoup plus compliquée dans le cas de la dynamique gravitationnelle 3D, où les halos virialisés ont une extension finie et présentent des sous-structures significatives, de sorte qu'il n'a pas encore été possible d'obtenir des comportements universels de ce type sur une base solide.

D'autre part, l'analyse du modèle d'adhésion nous a permis de mieux comprendre le comportement des fonctions de réponse. En effet, dans le cas unidimensionnel on montre que la fonction de réponse Eulérienne s'exprime en terme de la distribution de probabilité de la vitesse en un point, tandis que la fonction de réponse Lagrangienne s'exprime en terme de la fonction de masse des chocs. Ceci confirme les résultats obtenus par les approches perturbatives du chapitre 2. Ainsi, les réponses Eulériennes sont dominées par le transport des structures du champ de densité par les modes de grande longueur d'onde du champ de vitesse, ce qui induit une perte de mémoire apparante du fait de ce déplacement d'ensemble aléatoire. Par contre, les réponses Lagrangiennes ne sont pas sensibles à cet effet et sont beaucoup plus directement liées aux propriétés des structures du champ de densité, ce qui se traduit aussi par une décroissance beaucoup plus lente à grand k (en loi de puissance au lieu d'une coupure exponentielle).

Nous n'avons pas abordé ici d'autres usages possibles de l'étude de dynamiques simplifiées de ce type : i) comme test de méthodes d'approximation générales [182], ii) comme modèle approximatif pour obtenir la forme du "cosmic web" [197, 92] et les propriétés attendues des observations, par exemple de la forêt Lyman- α , afin d'optimiser les stratégies observationnelles [134], iii) ou pour reconstruire les conditions initiales à partir du champ de densité observé [112].

Une question ouverte est de savoir si ces dynamiques plus simples pourraient aussi servir de base pour construire des approches systématiques efficaces au problème gravitationnel lui-même. Par exemple, on pourrait considérer la dynamique gravitationnelle comme une perturbation par rapport à un tel système de référence, et l'approcher à partir de ce point de départ par itérations successives ou développements perturbatifs.

Chapitre 5

Approches phénoménologiques

Publications associées

Mass functions and bias of dark matter halos, Valageas P., *Astron. Astrophys.* 508, 93-106 (2009)

Mass function and bias of dark matter halos for non-Gaussian initial conditions, Valageas P., *Astron. Astrophys.* 514, A46 (2010)

5.1 Introduction

Nous abordons dans ce dernier chapitre des approches plus phénoménologiques, où il ne s’agit plus de résoudre les équations du mouvement, que ce soit pour la dynamique gravitationnelle exacte dans un univers en expansion, ou pour des dynamiques plus simples permettant de comprendre les processus en jeu. Il s’agit ici d’obtenir une description, si possible suffisamment précise et robuste, de quantités directement liées aux observations qu’il est difficile de calculer de manière systématique à partir des équations du mouvement. Un exemple type est fourni par la fonction de masse des amas de galaxies (i.e. le nombre moyen d’amas de masse donnée par unité de volume), qui est un outil traditionnel de la cosmologie observationnelle, utilisé pour contraindre les paramètres cosmologiques [60, 119, 11, 120, 27, 145]. En effet, l’objet “amas” lui-même n’apparaît pas de manière simple dans les équations du mouvement (contrairement aux fonctions de corrélation ou de réponse du champ de densité), d’autant plus que la formation des galaxies qui composent ces amas (ou l’émission de rayons X si l’on observe ces objets sur une carte du ciel en bande X) est aussi déterminée par l’action de processus non-gravitationnels, tels que le refroidissement et le chauffage du gaz (par interaction avec le rayonnement ambiant, par exemple du CMB, avec l’énergie dégagée par les supernovae et les disques d’accrétion entourant les trous noirs galactiques), que nous n’avons pas pris en compte.

La modélisation de tous ces processus est en pratique une tâche très difficile, car elle implique une gamme d’échelles très étendue, et les simulations numériques commencent seulement depuis quelques années à pouvoir descendre jusqu’à des échelles de l’ordre du kiloparsec (le rayon de la Voie Lactée est d’environ 15 kpc) à l’intérieur de volumes cosmologiques (la centaine de Mégaparsecs). Même ainsi, les simulations numériques reposent sur des recettes phénoménologiques pour décrire la formation des étoiles, puis leur rétro-action sur la galaxie et le milieu intergalactique (par le biais des vents stellaires, des explosions de supernovae), ou le rayonnement de haute énergie dégagé par les disques d’accrétions centraux.

Pour obtenir une estimation simple et rapide à calculer, permettant de comparer les observations à toute une gamme de scénarios cosmologiques (afin par exemple de contraindre les paramètres cosmologiques, ou de vérifier le processus de formation des grandes structures par instabilité gravitationnelle), on identifie généralement les amas de galaxies, qui sont les objets non-linéaires les plus massifs de l’univers, avec les halos de matière noire ayant atteint un contraste de densité de l’ordre de 200. La raison en est qu’il s’agit du seuil caractéristique associé à la virialisation de ces structures, c’est-à-dire que ce “rayon du viriel” sépare bien les couches externes, qui suivent encore un mode d’accrétion radial, des couches internes qui ont pu relaxer vers un “équilibre du viriel” où la dispersion de vitesse transverse (et le moment angulaire) permet d’équilibrer l’attraction gravitationnelle et de stabiliser la structure. Comme nous l’avons vu dans le paragraphe 3.2, ceci est surtout justifié pour les amas les plus massifs (événements rares). D’autre part, pour ces derniers la dynamique est bien dominée par la gravité (la physique baryonique, faisant intervenir des effets de pression, de refroidissement et de chauffage, étant surtout importante aux échelles galactiques), de sorte que leur masse (et leur position) peut être prédite avec une assez bonne précision à partir de la dynamique gravitationnelle seule. Ceci est confirmé observationnellement par le fait que pour les amas très chauds et massifs ($T > 1$ keV) on retrouve assez bien la relation “température-

luminosité X ” prédite par ces modèles simplifiés. En fait, un meilleur accord est obtenu pour la relation entre la température du gaz et la masse de gaz chaud, qui suit la relation d’échelle attendue à l’équilibre du viriel ($T \propto M/R \propto R^2$ à l’intérieur d’un rayon de contraste de densité fixé) [194]. En supposant un rapport de masse gaz/matière noire fixé, on peut alors comparer la fonction de masse des amas mesurée sur les catalogues X avec les prédictions théoriques pour contraindre la cosmologie [195, 118]. Plus traditionnellement, on utilise une relation luminosité-température calibrée sur les observations [105, 121, 135] et les simulations numériques pour obtenir la fonction de luminosité des amas à partir de la fonction de masse des halos de matière noire et pouvoir ainsi comparer la théorie avec les observations [191, 98]. Par ailleurs, la relation précise entre la masse de matière noire du halo et les propriétés plus directement observables telles que la température du gaz, la luminosité X , mais aussi des phénomènes plus spécifiques tels que l’existence de coeurs froids ou une relaxation incomplète, peuvent s’estimer à l’aide de simulations numériques [91]. Il est intéressant de noter qu’en utilisant les effets de lentille gravitationnelle produits par les amas massifs, ce qui fournit directement leur masse totale, on obtient aussi une fonction de masse d’amas qui permet de contraindre les paramètres cosmologiques [15]. De plus, en combinant avec la luminosité X de ces mêmes amas on peut estimer la relation masse-luminosité X .

Etant des objets rares, l’abondance de ces halos massifs est très sensible aux paramètres cosmologiques et aux propriétés des fluctuations de densité primordiales [60, 27, 148]. Nous avons déjà noté ce phénomène dans le chapitre 3, où nous avons remarqué que les non-linéarités de la dynamiques gravitationnelle diluent les déviations possibles à la Gaussianité des fluctuations primordiales lorsque l’on regarde la distribution de probabilité $\mathcal{P}(\delta_r)$, sauf dans les queues de distribution extrêmes où l’on retrouve une dépendance directe sur les conditions initiales. La fonction de masse des halos de galaxies, et plus particulièrement sa coupure aux grandes masses, est donc un outil très utilisé pour contraindre les modèles cosmologiques. Une seconde propriété de ces objets qui peut servir à ces fins est leur fonction de corrélation. En effet, comme on peut s’y attendre à partir de la définition des amas comme fluctuations rares du champ de densité de matière noire, les amas de galaxies (et les galaxies elles-mêmes) n’obéissent pas à une distribution Poissonienne mais présentent des corrélations importantes aux grandes échelles [107, 122]. En particulier, leur fonction de corrélation à deux points suit à peu près la fonction de corrélation du champ de densité de matière noire sous-jacent, à un facteur multiplicatif près appelé le biais, qui croît pour les objets les plus massifs et les plus rares. De plus, il a été récemment montré que la mesure de ce biais à très grande échelle pouvait fournir de fortes contraintes (compétitives avec le CMB) sur les non-Gaussianités primordiales éventuelles [50]. En pratique, au lieu de la fonction de corrélation spatiale à 3D on peut aussi observer la fonction de corrélation angulaire 2D sur le ciel, mais cela reste une tâche difficile [70].

Nous décrivons dans les paragraphes suivants comment on peut construire un modèle simple pour la multiplicité et la distribution de ces amas massifs, en utilisant en particulier la méthode du col présentée dans le chapitre 3.

Plan de ce chapitre :

- Paragraphe 5.2 : Nous décrivons tout d’abord un modèle simple pour la fonction de masse des halos virialisés, en notant que la forme asymptotique aux grandes masses peut être obtenue à partir de la méthode du col présentée au chapitre 3.
- Paragraphe 5.3 : Nous montrons comment une petite modification du modèle traditionnel utilisé pour décrire la fonction de corrélation des amas, en tenant compte du mouvement relatif de ces derniers, permet d’améliorer l’accord avec les simulations numériques.
- Paragraphe 5.4 : Nous présentons l’application de ces modèles au cas de conditions initiales non-Gaussiennes, plus précisément des non-Gaussianités de type local.

Enfin, nous concluons brièvement ce chapitre au paragraphe 5.5

5.2 Fonction de masse des amas de galaxies massifs

Nous avons vu dans le paragraphe 3.2 que dans la limite quasi-linéaire, $\sigma_r \rightarrow 0$, la distribution de probabilité du contraste de densité $\mathcal{P}(\delta_r)$ dans des sphères de rayon r obéit au comportement asymptotique (3.15), où δ_{Lq} est le contraste de densité linéaire associé à δ_r par la dynamique sphérique et q le rayon Lagrangien. Ce dernier est donc lié à la masse M qui se retrouve dans la sphère r par

$$M = \frac{4\pi}{3} (1 + \delta_r) \rho_0 r^3 = \frac{4\pi}{3} \rho_0 q^3, \quad (5.1)$$

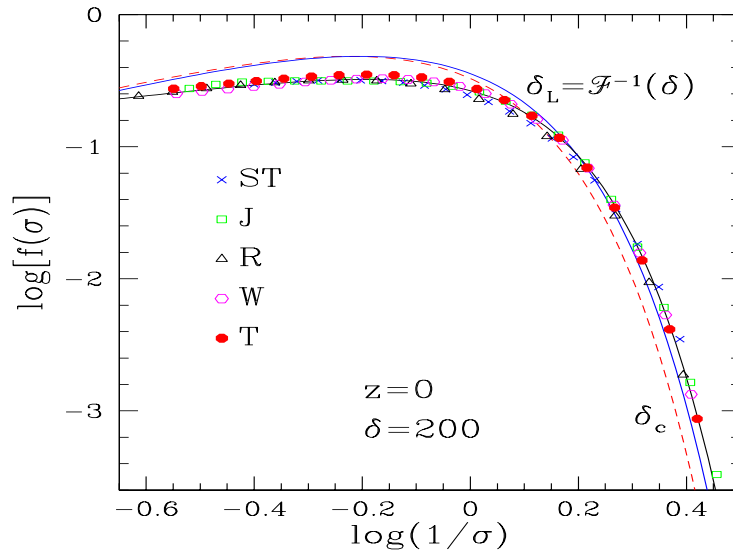


FIG. 5.1 – La fonction de masse des halos de matière noire définis par le contraste de densité non-linéaire $\delta = 200$, au redshift $z = 0$. Sont représentées la fonction de Press-Schechter traditionnelle, éq.(5.3) avec le seuil $\delta_L \simeq 1.6754$ (tirets rouges, label “ δ_c ”), la même forme (5.3) mais avec le seuil $\delta_L = \mathcal{F}^{-1}(\delta) \simeq 1.59$ (ligne continue bleue), et le fit (5.4) (ligne continue noire). Les points correspondent aux divers fits de simulations numériques proposés dans la littérature [156, 84, 144, 196, 171].

où ρ_0 est la densité moyenne de l’univers. La queue de distribution (3.15) détermine donc aussi la coupure à grande masse de la fonction de multiplicité, $n(M)dM$, des halos de masse M définis par ce même seuil de densité δ_r , car la limite $M \rightarrow \infty$ correspond à la limite quasi-linéaire $r \rightarrow \infty$. En effet, le passage de la distribution de probabilité $\mathcal{P}(\delta_r)$ à la fonction de masse $n(M)$ peut introduire des préfacteurs géométriques en loi de puissance, puisque les halos ne sont pas exactement centrés sur les cellules d’une grille fixe [26], mais la coupure exponentielle reste inchangée, ce qui donne

$$M \rightarrow \infty : \quad \ln[n(M)] \sim -\frac{\delta_L^2}{2\sigma_q^2}, \quad \text{avec} \quad \delta_L = \mathcal{F}^{-1}(\delta), \quad (5.2)$$

où le rayon Lagrangien est défini par (5.1) et δ est le contraste de densité non-linéaire choisi pour définir les halos. D’après les résultats du paragraphe 3.2 le comportement (5.2) est valable pour toutes les fonctions de masses définies par des seuils δ en-dessous de la limite δ_+ où les croisements de trajectoires commencent à modifier la fonction $\mathcal{F}(\delta_L)$. La figure 3.2 nous montre ainsi que la queue de distribution (5.2) est valable jusqu’au seuil fréquemment utilisé $\delta = 200$ que nous garderons dans la suite (bien qu’à $z = 0$ aux très grandes masses, $M > 10^{15} h^{-1} M_\odot$, on puisse avoir une légère correction).

Une approximation très simple qui satisfait la coupure (5.2) consiste à suivre la prescription de Press-Schechter [140], mais en utilisant le contraste linéaire véritable, $\delta_L = \mathcal{F}^{-1}(\delta)$, associé au contraste non-linéaire δ choisi, plutôt que le contraste linéaire traditionnel ($\delta_c = \mathcal{F}^{-1}(\infty) \simeq 1.686$ dans un univers à la densité critique) associé à l’effondrement complet en un point. Ceci correspond à la fonction de masse

$$n(M) dM = \frac{\rho_0}{M} f(\nu) \left| \frac{d\nu}{\nu} \right|, \quad \text{avec} \quad f(\nu) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \nu e^{-\nu^2/2} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\delta_L}{\sigma_q}. \quad (5.3)$$

Cependant, pour reproduire avec une bonne précision la fonction de multiplicité mesurée dans les simulations numériques dans le régime des petites masses, qui n’est pas contraint par (5.2), la prescription (5.3) n’est pas suffisante et il faut utiliser un fit, tel que [184]

$$f(\nu) = 0.5 \left[(0.6\nu)^{2.5} + (0.62\nu)^{0.5} \right] e^{-\nu^2/2}, \quad \text{pour} \quad \delta = 200 \quad \text{et} \quad \delta_L = \mathcal{F}^{-1}(200) \simeq 1.59, \quad (5.4)$$

qui satisfait bien à la contrainte (5.2). Il convient de noter qu’aucun modèle ne donne vraiment de prédiction satisfaisante pour la queue de distribution aux petites masses, qui est donc généralement ajustée sur les simulations numériques [156, 84, 144, 196, 171]. Néanmoins, une étude théorique assez générale [28] montre que la pente à petite masse donnée par la prescription de Press-Schechter ne dépend en fait que de l’hypothèse que les

processus de fragmentation sont négligeables et que l’amplitude du contraste linéaire contrôle bien la formation des objets non-linéaires. Si ce n’est pas le cas, la pente à faible masse devrait être plus faible (c’est-à-dire que l’on dénombre moins d’objets). Par exemple, une étude Lagrangienne visant à prendre en compte l’anisotropie du tenseur de déformation suggère que les effets de cisaillement (effets de marée) induisent naturellement une pente plus faible que celle de la prescription de Press-Schechter [6]. Cependant, il est encore difficile d’obtenir des conclusions fermes sur ce régime de petits objets à partir des simulations numériques.

La figure 5.1 compare ce fit (5.4) avec la prescription (5.3), utilisant la même valeur du seuil $\delta_L \simeq 1.59$ ou la valeur traditionnelle $\delta_L = \mathcal{F}(\infty) \simeq 1.6754$ (pour ces valeurs des paramètres cosmologiques, $\Omega_m = 0.27$ et $\Omega_\Lambda = 0.73$). Le point intéressant sur cette figure est que l’utilisation du contraste linéaire correct, $\delta_L \simeq 1.59$, est suffisant pour améliorer significativement le comportement de la fonction de masse de Press-Schechter (5.3) aux grandes masses. On peut noter que cette amélioration avait déjà été remarquée [6, 7], mais à partir d’une modification de la prescription de Press-Schechter basée sur une approche Lagrangienne. Par ailleurs, la formule (5.4) permet clairement de reproduire les simulations numériques. L’avantage ici est que, contrairement aux fits fréquemment utilisés dans la littérature, la normalisation de l’argument de la coupure exponentielle n’est pas un paramètre libre fitté sur les simulations, ce qui évite d’introduire des dégénérescences inutiles entre paramètres libres et devrait améliorer la robustesse de la fonction de masse ainsi obtenue (et par exemple sa validité aux masses plus grandes que celles atteintes par les simulations).

On peut noter que cette explication de la queue de distribution (5.2) est en bon accord avec les simulations numériques [146] qui mesurent le contraste de densité linéaire δ_L des régions Lagrangiennes qui ont formé des halos à $z = 0$ (tout simplement en marquant les particules concernées et en remontant la simulation dans le temps). Leurs résultats montrent que la distribution des contrastes linéaires δ_L ainsi mesurés, en fonction de la masse M , a une borne inférieure à peu près constante, $\delta_L^- \sim 1.6$, et une borne supérieure δ_L^+ qui croît pour les petites masses. Dans le contexte de l’approche développée dans le paragraphe 3.2, et de l’intégrale de chemin (3.4), cela traduit le fait que la manière la plus probable de construire un halo massif de contraste non-linéaire δ est de partir initialement d’une région Lagrangienne de contraste linéaire $\delta_L = \mathcal{F}^{-1}(\delta)$ qui suit le profil du col (3.8), et que cette distribution de probabilité est de plus en plus piquée autour de cette configuration pour des plus petites valeurs de σ (donc des masses plus grandes). Pour des masses plus petites, il faut prendre en compte une gamme plus étendue de configurations initiales, y compris fortement non-sphériques. Comme ces dernières sont généralement moins efficaces pour concentrer la matière dans une petite région il faut alors partir d’un plus grand contraste δ_L pour atteindre le même seuil δ dans le rayon final r , ce qui explique pourquoi la distribution sur δ_L observée pour de petites masses n’est pas symétrique et s’étend surtout en augmentant son extension supérieure δ_L^+ .

Comme pour la distribution de probabilité $\mathcal{P}(\delta_r)$, il est intéressant de noter que l’on peut utiliser la même méthode pour obtenir le comportement aux grandes masses de la fonction de masse des chocs créés dans le modèle d’adhésion discuté au chapitre 4. Dans le cas à une dimension, pour les spectres de puissance de pente $n = -2$ et $n = 0$, où l’on connaît exactement l’expression complète de la fonction de masse, on peut vérifier que l’asymptote (5.2) obtenue par la méthode du col coïncide avec ces résultats exacts. Pour des valeurs de n quelconques, on ne connaît pas la normalisation mais seulement l’exposant sur M de l’argument de la coupure exponentielle, et l’on peut vérifier à nouveau qu’il coïncide avec (5.2).

5.3 Fonction de corrélation (biais) des halos

En plus de leur fonction de masse, une propriété caractéristique des halos virialisés est leur fonction de corrélation à deux points, qui est une mesure simple de leur distribution spatiale permettant de contraindre les scénarios cosmologiques. Aux grandes échelles, elle est en première approximation proportionnelle à la fonction de corrélation du champ de densité de matière noire lui-même, à un facteur multiplicatif b^2 près, appelé le biais de la population d’objets considérés. Nous revisitons dans ce paragraphe l’approche traditionnelle de Kaiser [90] en montrant qu’en tenant compte de certains détails (i.e. le mouvement relatif des halos) il est possible de réconcilier les prédictions théoriques avec les simulations numériques sans avoir besoin d’introduire des paramètres libres.

La fonction de corrélation $\xi_{M_1, M_2}(x_{12})$ des halos de masses M_1 et M_2 à la distance x_{12} est définie comme d’habitude par l’excès relatif de paires à cette longueur de séparation :

$$n_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2}(M_1, M_2) dM_1 dM_2 d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 = \bar{n}(M_1) \bar{n}(M_2) (1 + \xi_{M_1, M_2}(x_{12})) dM_1 dM_2 d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2. \quad (5.5)$$

Dans l’esprit des résultats du chapitre 3, où nous avons vu que les objets très massifs proviennent de fluctuations de densité positives dans le champ linéaire $\delta_L(\mathbf{q})$, et suivant l’approche de Kaiser [90], nous pouvons estimer

$\xi_{M_1, M_2}(x_{12})$ à partir des propriétés du champ de densité linéaire selon [184]

$$1 + \xi_{M_1, M_2}(x_{12}) \sim (1 + \delta_M(x_{12})) \frac{\mathcal{P}_L(\delta_{L1}, \delta_{L2})}{\mathcal{P}_L(\delta_{L1})\mathcal{P}_L(\delta_{L2})}, \quad (5.6)$$

où la masse de chaque halo est donnée par $M_i = 4\pi\rho_0 q_i^3/3$ et $\delta_{Li} = \mathcal{F}^{-1}(\delta_i)$, en généralisant au cas où l'on corrèle deux populations définies par des critères de densité δ_i différents. L'expression (5.6) décrit deux effets. Tout d'abord, le rapport des probabilités $\mathcal{P}_L$ décrit la corrélation entre les distributions de probabilité primordiales sur les deux régions Lagrangiennes de masse M_1 et M_2 , c'est-à-dire les deux sphères de rayons q_1 et q_2 de centres $\mathbf{s}_1$ et $\mathbf{s}_2$. En effet, si nous avons une forte surdensité initiale à la position $\mathbf{s}_1$ la probabilité d'avoir une deuxième surdensité en une position proche $\mathbf{s}_2$ est amplifiée, du fait des modes de grande longueur d'onde du champ de densité [90] (et donc $\mathcal{P}_L(\delta_{L1}, \delta_{L2}) > \mathcal{P}_L(\delta_{L1})\mathcal{P}_L(\delta_{L2})$). Deuxièmement, le facteur $(1 + \delta_M(x_{12}))$ modèle les effets dûs au passage de l'espace Lagrangien (le champ de densité linéaire initial) à l'espace Eulérien (le champ de densité non-linéaire actuel). Ceci reflète le fait que l'attraction gravitationnelle exercée par un halo massif tire vers lui la matière environnante avec une force qui dépend de la distance, si bien que le Jacobien $|\partial\mathbf{q}/\partial\mathbf{x}| = (1 + \delta)$ de la transformation des coordonnées Lagrangiennes $\mathbf{q}$ aux coordonnées Eulériennes $\mathbf{x}$ est différent de l'unité. En un sens, il s'agit d'un effet de marée, car un déplacement de la matière qui préserverait localement les volumes (i.e. à la séparation x_{12}) ne modifierait pas le nombre de paires de longueur donnée. Ainsi donc, le rapport dans l'éq.(5.6) mesure les corrélations dans le champ linéaire "initial" tandis que le préfacteur prend en compte le fait que des paires de séparation initiale $\mathbf{s}_{12}$ se retrouvent in fine à une séparation $\mathbf{x}_{12}$ différente.

En définissant le biais des halos par le rapport

$$b_{M_1, M_2}^2(r) = \frac{\xi_{M_1, M_2}(r)}{\xi(r)}, \quad (5.7)$$

où $r = x_{12}$ et $\xi(r)$ est la fonction de corrélation non-linéaire de la matière, nous obtenons à partir de (5.6), pour des halos de même masse M à grande distance r [184] :

$$b_M^2(r) = \frac{1}{\sigma_{0,0}^2(r)} \left[-1 + \left(1 + \delta_L \frac{\sigma_{q,0}^2(s)}{\sigma_q^2} \right) \frac{\sigma_q^2}{\sqrt{\sigma_q^4 - \sigma_{q,q}^4(s)}} \exp \left(\frac{\delta_L^2 \sigma_{q,q}^2(s) - \delta_L^2 \sigma_{q,q}^4(s)/\sigma_q^2}{\sigma_q^4 - \sigma_{q,q}^4(s)} \right) \right]. \quad (5.8)$$

Ici nous avons introduit la corrélation croisée du champ de densité lissé sur les sphères de rayons q_1 et q_2 centrées sur les positions $\mathbf{s}_1$ et $\mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}$:

$$\sigma_{q_1, q_2}^2(s) = \langle \delta_{Lq_1}(\mathbf{s}_1) \delta_{Lq_2}(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}) \rangle = 4\pi \int dk k^2 P_L(k) \tilde{W}(kq_1) \tilde{W}(kq_2) \frac{\sin(ks)}{ks}, \quad (5.9)$$

où $P_L(k)$ est comme d'habitude le spectre de puissance du champ de densité linéaire et $\tilde{W}(kq)$ la transformée de Fourier de la fenêtre de rayon q , définie en (3.10). La principale différence entre l'expression (5.9) et la plupart des modèles traditionnels est que nous distinguons entre la séparation Lagrangienne (linéaire) s et la séparation Eulérienne (non-linéaire) r des deux halos. A l'ordre le plus bas nous considérons chaque halo comme une particule test qui tombe dans le puit de potentiel de l'autre halo, qui suit le profil (3.8) obtenu dans le paragraphe 3.2 (i.e. nous négligeons toute rétro-action, et nous considérons que chacun des halos reste sphérique et obéit aux propriétés obtenues dans le paragraphe 3.2). Ceci donne pour la séparation Lagrangienne s l'expression

$$s = r \left(1 + \frac{\delta_L}{3} \frac{\sigma_{q_1, r}^2}{\sigma_{q_1}^2} + \frac{\delta_L}{3} \frac{\sigma_{q_2, r}^2}{\sigma_{q_2}^2} \right), \quad (5.10)$$

où nous avons pris en compte les mouvements des deux halos, à l'ordre le plus bas. Ceci détermine complètement le biais des halos massifs avec l'éq.(5.8), sans aucun paramètre libre.

Nous comparons sur la figure 5.2 le biais obtenu par l'approche (5.8) avec divers fits de simulations numériques et des modèles usuels. Nous pouvons voir sur le panneau de gauche que notre modèle suit la même tendance que le modèle de Mo & White [111], pour ce qui concerne la dépendance en fonction de la masse à $z = 0$. En effet, ces deux approches suivent l'esprit de Kaiser [90], en ce que l'on identifie les halos virialisés à des surdensités du champ de densité linéaire). Il faut noter que, comme pour les autres approches analytiques [90, 111, 155], les éq.(5.8)-(5.10) ne s'appliquent que pour des objets très massifs et rares. En particulier, les petits halos typiques ne peuvent plus être considérés comme des objets isolés quasi-sphériques, et il faut tenir compte des collisions/fusions entre halos. Aux grandes masses nous obtenons un meilleur accord avec les simulations numériques que le modèle de Mo & White [111], sans devoir pour autant introduire de paramètres libres supplémentaires à fitter sur ces simulations comme dans d'autres approches [155].

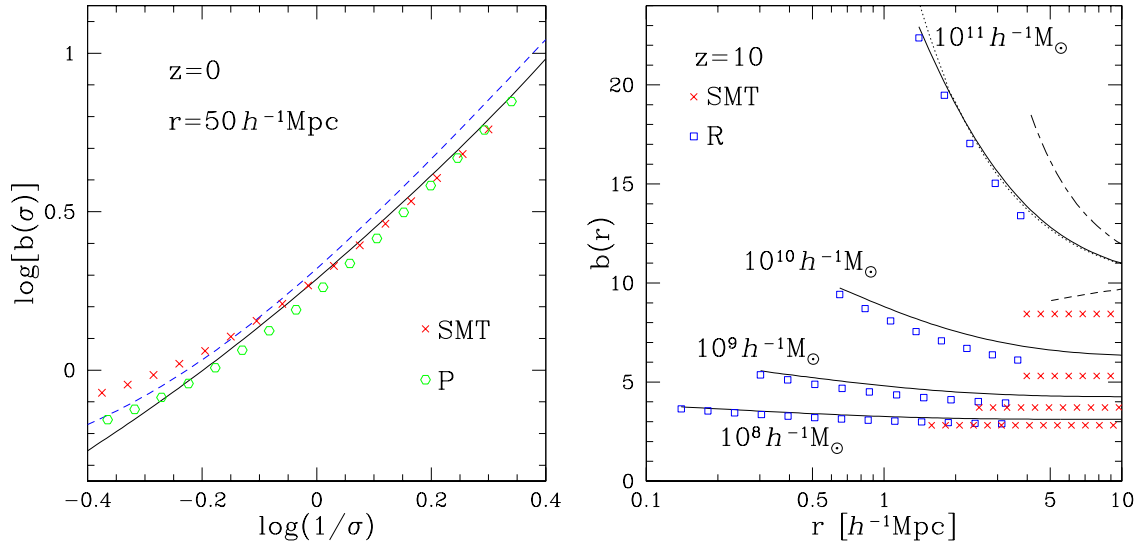


FIG. 5.2 – *Panneau de gauche* : le biais $b(\sigma)$ des halos définis par un contraste de densité $\delta = 200$, en fonction de $\sigma(M)$ au redshift $z = 0$ et à la distance $r = 50 h^{-1} \text{Mpc}$. Sont représentés le résultat (5.8)-(5.10) (ligne continue noire) et le modèle de Mo & White [111] (tirets bleus). Les points sont des fits de simulations numériques [155, 138]. *Panneau de droite* : le biais $b(r)$ en fonction de la distance r au redshift $z = 10$ pour diverses masses. La ligne continue noire est à nouveau la prédiction (5.8)-(5.10). Pour $M = 10^{11} h^{-1} M_\odot$ les tirets noirs inférieurs correspondent au biais linéarisé et les points-tirets supérieurs à l'approximation $s = r$. Les carrés bleus sont les résultats de simulations numériques [143], et les croix rouges les résultats numériques à $z = 0$ [155].

Le panneau de droite de la figure 5.2 montre qu'à grand redshift nous obtenons une forte dépendance du biais sur la distance r , en particulier pour des masses modestes, qui est en bon accord avec les simulations numériques (à $z = 0$ nous obtenons comme d'habitude une très faible dépendance sur r). Ceci provient du terme exponentiel dans l'éq.(5.8), comme le montre la comparaison avec la courbe (tirets noirs inférieurs) obtenue en ne gardant que les termes linéaires en σ^2 dans le crochet (5.8). Cela signifie que dans ce régime la fonction de corrélation des halos ne peut pas être décrite comme proportionnelle à la corrélation du champ de matière noire, avec un facteur de biais multiplicatif à peu près constant. Par ailleurs, la comparaison avec la courbe (points-tirets noirs supérieurs) obtenue en utilisant l'approximation $s = r$ au lieu de (5.10) montre que la correction associée au passage des espaces Lagrangien à Eulérien ne peut pas être négligée dans ce régime (le biais étant très élevé). Dans un modèle de biais local [67, 110], ces effets seraient interprétés comme signalant l'importance de paramètres de biais b_i d'ordres supérieurs dans un développement du type $\delta_{\text{halo}}(M) = \sum_i b_i(M) \delta_R^i$. Il est intéressant de noter que les fits proposés dans la littérature pour décrire le biais à bas redshift ne conviennent plus à grand z [143]. Ceci a parfois été interprété comme une violation de l'universalité (exprimée par exemple au travers de variables réduites telles que $\nu = \delta_L/\sigma(M)$) par les halos massifs à grand redshift [143]. Le bon accord obtenu par l'éq.(5.8) montre qu'il n'en est rien, et que le comportement du biais à grand et à petit z peut toujours se comprendre à partir de l'image usuelle de la formation des halos massifs à partir de fluctuations extrêmes du champ de densité primordial. Ainsi, l'avantage de modèles simples tels que (5.8), où l'on évite d'introduire des paramètres libres pour améliorer l'accord avec les simulations numériques dans un certain régime, est de fournir en contrepartie des prédictions plus robustes.

5.4 Conditions initiales non-Gaussiennes

Comme dans le chapitre 3, l'approche développée dans les deux paragraphes précédents peut être étendue au cas de conditions initiales non-Gaussiennes. Ici nous allons nous restreindre au cas de non-Gaussianités de type local, c'est-à-dire où le potentiel de Bardeen Φ est de la forme :

$$\text{non-Gaussianités de type local : } \Phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) + f_{\text{NL}} (\phi(\mathbf{x})^2 - \langle \phi^2 \rangle), \quad (5.11)$$

où ϕ est un champ Gaussien. Comme aux échelles plus petites que le rayon de Hubble Φ est égal à l'opposé du potentiel gravitationnel il s'agit du même modèle (3.41) que celui étudié dans le paragraphe 3.3.2, mais avec des notations quelque peu différentes, le paramètre f_{NL} jouant le rôle du ϵ de l'éq.(3.41). Les modèles d'inflation

les plus simples donneraient $f_{\text{NL}} \sim 10^{-2}$, mais cela serait masqué par les non-linéarités de la dynamique (des équations d'Einstein [12]) et des processus physiques qui conduisent aux quantités observées (les perturbations à la recombinaison qui affectent le CMB [153]), qui par eux-mêmes donnent un f_{NL} effectif d'ordre unité. Des valeurs plus grandes du paramètre f_{NL} peuvent être obtenues par exemple dans le cadre de scénarios d'inflation à plusieurs champs [13, 99] ou avec des interactions non-linéaires [61]. Les limites observationnelles actuelles sont $-9 < f_{\text{NL}} < 111$ à partir du CMB [93] et $-29 < f_{\text{NL}} < 70$ à partir des structures de grande échelle [158]. Ainsi, les contraintes que l'on peut obtenir sur f_{NL} , et plus généralement sur les non-Gaussianités primordiales éventuelles, nous fournissent des informations importantes sur la physique de l'univers primordial et l'origine des fluctuations de densité initiales qui ont conduit à la formation des grandes structures (galaxies, filaments, vides,...) que l'on observe dans l'univers actuel.

5.4.1 Fonction de masse des amas de galaxies

Comme dans le paragraphe 5.2 nous pouvons calculer la coupure aux grandes masses de la fonction de masse des halos de matière noire, définis par un contraste de densité non-linéaire $\delta = 200$, à partir de la queue de distribution de la probabilité $\mathcal{P}(\delta_r)$ dans la limite quasi-linéaire. Pour ce faire, il nous suffit d'utiliser la méthode du col sphérique développée dans le chapitre 3. Cependant, comme nous sommes intéressés par la limite des halos très massifs nous allons "améliorer" le traitement présenté dans le paragraphe 3.3.2 en tenant compte de l'effet des non-Gaussianités primordiales sur la forme du point col sphérique (alors que dans le paragraphe 3.3.2, en développant l'intégrale de chemin (3.45) sur ϵ nous n'avions gardé que les termes primordiaux Gaussiens dans l'exponentielle, de sorte que nous développons autour du point col du cas Gaussien).

Puisque nous ne nous intéressons qu'à la queue de distribution de $\mathcal{P}(\delta_r)$, c'est-à-dire à l'analogie du comportement asymptotique (3.15) du cas Gaussien, il ne nous est pas nécessaire d'obtenir la fonction génératrice des moments $\psi(y)$ de l'éq.(3.44); il nous suffit d'obtenir les propriétés du point col. Pour nous rapprocher des expressions obtenues dans le cas Gaussien, c'est-à-dire pour faire apparaître le champ de densité linéaire, il est commode d'utiliser l'équation de Poisson pour réécrire (5.11) en termes du champ δ_L . En introduisant le champ Gaussien $\chi(\mathbf{x}, z)$ défini par

$$\tilde{\chi}(\mathbf{k}, z) = \alpha(k, z) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}), \quad \text{avec} \quad \alpha(k, z) = \frac{2c^2 k^2 T(k) D_+(z)}{3\Omega_m H_0^2}, \quad (5.12)$$

où $T(k)$ est la fonction de transfert et $D_+(z)$ le taux de croissance linéaire, nous obtenons en espace de Fourier au redshift z [188]

$$\tilde{\delta}_L(\mathbf{k}) = \tilde{\chi}(\mathbf{k}) + \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) \tilde{f}_{\text{NL}}^\delta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \tilde{\chi}(\mathbf{k}_1) \tilde{\chi}(\mathbf{k}_2), \quad (5.13)$$

avec

$$\tilde{f}_{\text{NL}}^\delta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = f_{\text{NL}} \frac{\alpha(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)}{\alpha(k_1) \alpha(k_2)}. \quad (5.14)$$

Ainsi, dans le cas Gaussien, $f_{\text{NL}} = 0$, χ est simplement le contraste de densité linéaire. Comme dans le paragraphe 3.2, et plus précisément l'éq.(3.15), les coupures à grande masse de la fonction de masse $n(M)$ et à grande densité de la distribution de probabilité $\mathcal{P}(\delta)$ sont fixées à l'ordre dominant par le poids Gaussien du champ χ :

$$\text{limite d'événements rares : } \mathcal{P}(\delta) \sim \max_{\{\chi[\mathbf{q}] | \delta_r[\chi] = \delta\}} e^{-\frac{1}{2} \chi \cdot C_\chi^{-1} \cdot \chi}, \quad (5.15)$$

où C_χ est la fonction de corrélation du champ χ . Le point col sphérique est donc obtenu comme le minimum du poids quadratique $(\chi \cdot C_\chi^{-1} \cdot \chi)$ sous la contrainte $\delta_r[\chi] = \delta$, c'est-à-dire tel que le contraste de densité non-linéaire dans le rayon r soit égal à δ . Ce minimum peut être calculé en introduisant un multiplicateur de Lagrange pour tenir compte de la contrainte, et en écrivant la solution sous la forme d'un développement en puissances de f_{NL} (pour résoudre le système d'équations non-linéaires qui en résulte). On obtient ainsi, en terme du contraste de densité linéaire δ_L , le profil radial

$$\delta_{Lq'} = \frac{\delta_L}{\sigma_q^2} \sigma_{q,q'}^2 + \frac{\delta_L^2}{\sigma_q^4} \left[f_{q';qq} + 2f_{q;qq'} - 3 \frac{\sigma_{q,q'}^2}{\sigma_q^2} f_{q;qq} \right] + \dots, \quad (5.16)$$

en s'arrêtant au terme linéaire en f_{NL} . Ici $\delta_L = \mathcal{F}^{-1}(\delta)$ est le contraste de densité linéaire associé au contraste non-linéaire δ par la dynamique sphérique et les facteurs $f_{q;q_1 q_2}$ sont des termes linéaires sur f_{NL} :

$$f_{q;q_1 q_2} = 8\pi^2 \int_0^\infty dk_1 k_1^2 P_\chi(k_1) \tilde{W}(k_1 q_1) \int_0^\infty dk_2 k_2^2 P_\chi(k_2) \tilde{W}(k_2 q_2) \int_{-1}^1 d\mu \tilde{W}(kq) \tilde{f}_{\text{NL}}^\delta(k_1, k_2, \mu), \quad (5.17)$$

où $\mu = (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)/(k_1 k_2)$ et $k = |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|$. A l'ordre zéro en f_{NL} nous retrouvons bien en (5.16) le profil du col sphérique obtenu en (3.8) dans le cas Gaussien.

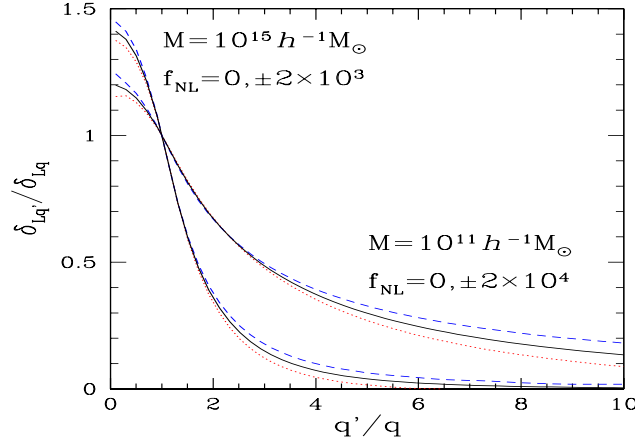


FIG. 5.3 – Le profil radial (5.16) du contraste de densité linéaire du point col sphérique dans une cosmologie Λ CDM. Sont représentés les cas $f_{\text{NL}} = 0$ (cas Gaussien, ligne continue noire), $f_{\text{NL}} > 0$ (tirets bleus, au-dessus du résultat Gaussien) et $f_{\text{NL}} < 0$ (pointillés rouges, au-dessous du résultat Gaussien).

Nous représentons sur la figure 5.3 le profil de densité linéaire (5.16) pour des valeurs très grandes (non réalistes) de f_{NL} , dans une cosmologie Λ CDM. Nous voyons ainsi que pour des valeurs réalistes de f_{NL} (i.e. $|f_{\text{NL}}| < 100$) le profil reste très près de celui obtenu dans le cas Gaussien ($f_{\text{NL}} = 0$). Par conséquent, le seuil δ_+ de la figure 3.2 où il devient impératif de prendre en compte les croisements de trajectoires n'est quasiment pas modifié. Il est donc à nouveau possible d'utiliser le comportement asymptotique (5.15), où la relation $\delta = \mathcal{F}(\delta_L)$ est donnée par la dynamique sphérique, jusqu'à des contrastes non-linéaires de 200. On peut noter sur la figure 5.3 que pour obtenir une déviation du même ordre par rapport au cas Gaussien nous avons besoin d'une plus grande valeur de f_{NL} lorsque nous considérons de petites masses, c'est-à-dire de petites échelles. Cela peut se comprendre à partir de l'expression (5.14), qui se comporte comme $\tilde{f}_{\text{NL}}^\delta \sim f_{\text{NL}}/\alpha(k) \propto f_{\text{NL}}/(k^2 T(k))$ qui croît comme k^{-2} aux très grandes échelles. Cela vient simplement de ce que le modèle local (5.11) donne un coefficient f_{NL} indépendant de l'échelle en terme du potentiel gravitationnel, $-\Phi$, ce qui implique un coefficient avec une dépendance en k^{-2} en terme du champ de densité à cause de l'équation de Poisson, voir l'éq.(5.13).

A partir du profil (5.16) du point col nous pouvons calculer le comportement asymptotique (5.15), ce qui donne

$$\mathcal{P}(\delta) \sim e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma_q^2} + \frac{\delta^3}{\sigma_q^3} f_{q;qq}} = e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma_q^2} \left(1 - \frac{\delta}{3} S_3\right)}, \quad \text{avec} \quad S_3 = \left[\frac{\langle \delta_{Lq}^3 \rangle}{\langle \delta_{Lq}^2 \rangle^2} \right]^{(1)} = 6 \frac{f_{q;qq}}{\sigma_q^4}, \quad (5.18)$$

où nous avons noté S_3 le paramètre de skewness du contraste de densité linéaire, dû aux non-Gaussianités primordiales, en ne gardant que le terme linéaire en f_{NL} .

Comme pour le résultat Gaussien (5.2), nous pouvons en déduire la coupure aux grandes masses de la fonction de masse $n(M)$, ce qui donne par rapport au cas Gaussien la déviation :

$$f_{\text{NL}} \neq 0 : \quad \frac{n(M, f_{\text{NL}})}{n(M, 0)} \sim e^{S_3 \delta_L^3 / (6\sigma_q^2)} \quad \text{pour} \quad M \rightarrow \infty. \quad (5.19)$$

Le résultat (5.19) est équivalent à l'approche de Matarrese et al. (2000) [103], qui utilise aussi une approximation du col pour calculer la fonction de masse pour des conditions initiales non-Gaussiennes. Notre méthode, qui est aussi un peu plus simple, présente l'avantage de donner simultanément le profil de densité (5.16) du point col, ce qui nous a permis de vérifier sur la figure 5.3 que la modification de profil par rapport au cas Gaussien étant très faible il est encore possible d'utiliser (5.19) pour des objets définis par des contrastes de densité allant jusqu'à $\delta = 200$. De plus, la simplicité de cette approche permet une extension directe aux distributions à deux points ou à des non-Gaussianités primordiales plus complexes, qui peuvent impliquer plusieurs champs ou des termes d'ordres supérieurs au terme quadratique de la décomposition (5.11).

Puisque les queues de distribution à faible masse des fonctions de masse obtenues par des méthodes analytiques, telles que la prescription de Press-Schechter [140], ne parviennent pas à reproduire les simulations numériques, il est parfois proposé de garder le rapport (5.19) (ou des rapports analogues obtenus par d'autres approches) et de multiplier le fit des simulations numériques du cas Gaussien ($f_{\text{NL}} = 0$) par ce facteur [72, 73, 192].

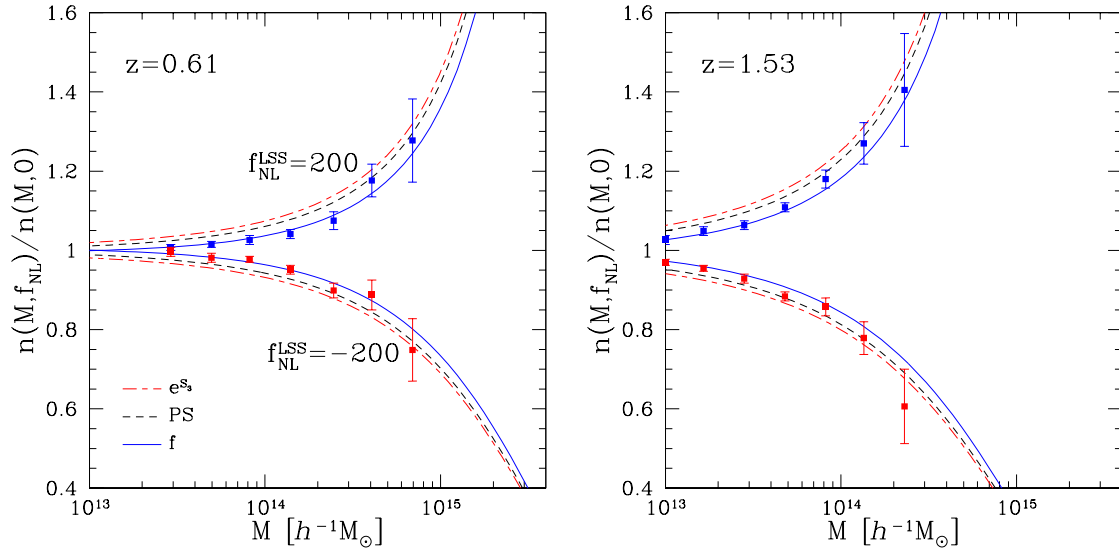


FIG. 5.4 – Le rapport $n(M, f_{\text{NL}})/n(M, 0)$, des fonctions de masse obtenues pour $f_{\text{NL}}^{\text{LSS}} = \pm 200$ (ce qui correspond dans nos notations à $f_{\text{NL}} = \pm 151$) rapportées à la fonction de masse du cas Gaussien. Sont représentés le simple facteur multiplicatif (5.19) (point-tiret rouge), le résultat (5.20) (tirets noirs), ce qui correspond aussi au résultat de Matarrese et al. (2000) [103] mais en utilisant $\delta_L = 1.59$ au lieu de 1.6754 comme expliqué dans le paragraphe 5.2, et le résultat (5.20) couplé avec (5.4) (ligne continue bleue). Les points sont le résultat de simulations numériques [73].

Cependant, cette façon de faire viole clairement la normalisation à l'unité de la fonction de masse. Une autre manière de procéder qui respecte automatiquement cette normalisation, tout en redonnant le comportement (5.19) aux grandes masses, est d'utiliser la même fonction réduite $f(\nu)$ que dans le cas Gaussien, par exemple le fit (5.4), qui vérifie le comportement en $f(\nu) \sim e^{-\nu^2/2}$ aux grandes valeurs de ν , mais en modifiant la variable réduite, $\nu \mapsto \mu$,

$$f_{\text{NL}} \neq 0 : \quad n(M, f_{\text{NL}})dM = \frac{\rho_0}{M} f(\mu) \frac{d\mu}{\mu} \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{\delta_L}{\sigma(M)} \sqrt{1 - \frac{\delta_L}{3} S_3(M)}. \quad (5.20)$$

Nous pouvons vérifier sur la figure 5.4 que le résultat (5.20) est en bon accord avec les simulations numériques. En particulier, on peut noter que l'utilisation de la transformation (5.20) semble légèrement plus précise que le simple rapport (5.19), surtout pour les petites masses. Cela n'est pas surprenant puisque cette procédure assure que la fonction de masse reste bien normalisée à l'unité, et reproduit donc le croisement des fonctions de masse obtenues dans les cas $f_{\text{NL}} \neq 0$ et $f_{\text{NL}} = 0$ (tandis que la prescription (5.19) implique que la fonction de masse du cas non-Gaussien reste partout supérieure ou inférieure à la fonction de masse du cas Gaussien, suivant le signe de f_{NL}).

5.4.2 Fonction de corrélation (biais) des halos

Comme dans le cas Gaussien étudié au paragraphe 5.3, nous pouvons estimer la fonction de corrélation des halos de matière noire à partir de l'approximation (5.6). Le rapport des probabilités relatives au champ de densité linéaire, $\mathcal{P}_L(\delta_{L1}, \delta_{L2})/(\mathcal{P}_L(\delta_{L1})\mathcal{P}_L(\delta_{L2}))$, s'obtient en estimant la probabilité conjointe dans les deux sphères de rayons Lagrangiens q_1 et q_2 selon [188]

$$\mathcal{P}_L(\delta_{L1}, \delta_{L2}) \sim \max_{\{\chi[\mathbf{q}] | \delta_{Lq1} = \delta_{L1}, \delta_{Lq2} = \delta_{L2}\}} e^{-\frac{1}{2} \chi \cdot C_{\chi}^{-1} \cdot \chi}, \quad (5.21)$$

qui généralise le comportement asymptotique (5.15). Le maximum est à nouveau calculé en introduisant deux multiplicateurs de Lagrange, pour tenir compte des contraintes $\delta_{Lq1} = \delta_{L1}$ et $\delta_{Lq2} = \delta_{L2}$, et en cherchant la solution sous la forme d'un développement en puissances de f_{NL} . Nous tenons à nouveau compte des effets associés au passage de l'espace Lagrangien à l'espace Eulérien à travers le préfacteur $(1 + \delta_M(x))$ et en distinguant la distance linéaire s de la distance non-linéaire x . En particulier, la relation (5.10) devient

$$s = x \left(1 + \frac{\delta_{LM1}(x)}{3} + \frac{\delta_{LM2}(x)}{3} \right), \quad (5.22)$$

où $\delta_{LM_1}(x)$ est le profil de densité obtenu en (5.16). Nous obtenons ainsi une expression non-linéaire sur le spectre de puissance $P_\chi(k)$, comportant un terme exponentiel comme en (5.8). Comme nous l'avons vu sur la figure 5.2, dans certains régimes, et notamment à grand redshift, l'argument de ce terme exponentiel est trop grand pour que l'on puisse développer au premier ordre sur $P_\chi(k)$, et il est alors important de garder l'expression non-linéaire complète. Cependant, pour des redshifts modérés et des distances suffisamment grandes, où les fonctions de corrélation des halos et du champ de densité de matière noire sont faibles, nous pouvons développer tous les termes à l'ordre linéaire en $P_\chi(k)$, ce qui donne [188]

$$\begin{aligned} \xi_M(x) \simeq & \frac{\delta_L}{\sigma_q^2} \sigma_{q,0}^2(s) + \frac{\delta_L^2}{\sigma_q^4} \left[f_{0;qq}(s) + 2f_{q;0q}(s) - 3\frac{f_{q;qq}}{\sigma_q^2} \sigma_{q,0}^2(s) \right] \\ & + \frac{\delta_L^2}{\sigma_q^4} \sigma_{q,q}^2(s) + 2\frac{\delta_L^3}{\sigma_q^6} \left[f_{2;11}(s) + 2f_{1;12}(s) - 3\frac{f_{1;11}}{\sigma_q^2} \sigma_{q,q}^2(s) \right]. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Nous en déduisons ensuite le biais $b_M^2(x)$ à partir du rapport (5.7). Ici, les facteurs du type $f_{2;11}(s)$ généralisent les expressions (5.17) aux cas de deux sphères, “1” et “2”, séparées par la distance s . Ils sont linéaires sur f_{NL} et quadratiques sur le spectre de puissance linéaire $P_\chi(k)$.

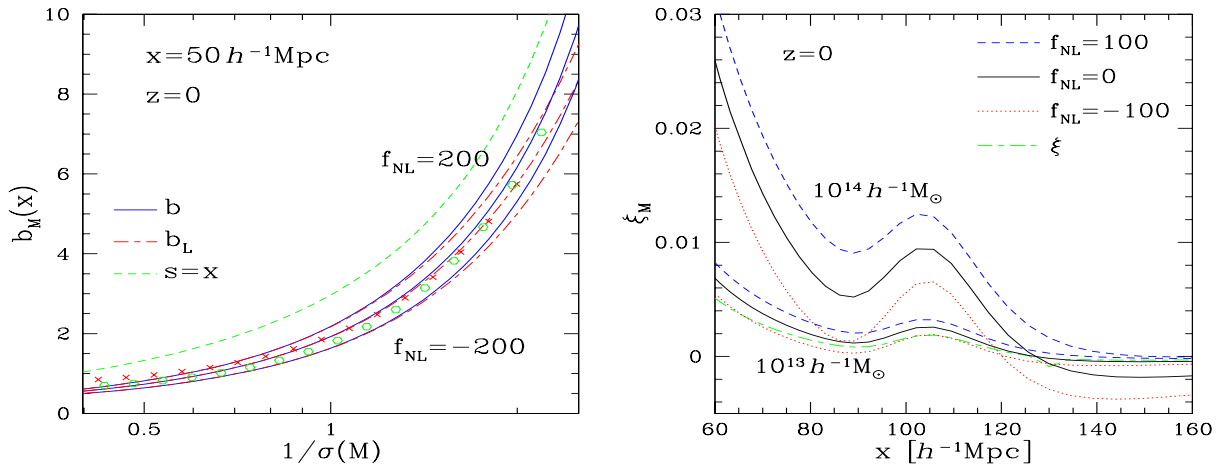


FIG. 5.5 – *Panneau de gauche* : le biais des halos virialisés $b_M(x)$, en fonction de $\sigma(M)$ (donc de la masse) au redshift $z = 0$ et à la distance $x = 50h^{-1}\text{Mpc}$. Les lignes continues bleues sont le résultat non-linéaire (i.e. gardant les termes exponentiels) pour $f_{NL} = \pm 200$ et $f_{NL} = 0$ (i.e. cas Gaussien case, ligne intermédiaire). Les points-tirets rouges “ b_L ” correspondent à la linéarisation sur $P_\chi(k)$ de l’éq.(5.23) tandis que les tirets verts montrent le résultat obtenu dans le cas Gaussien en prenant $s = x$. Les points sont le résultat de simulations numériques pour le cas Gaussien [155, 138]. *Panneau de droite* : les fonctions de corrélation du champ de densité de matière noire (ξ) et des halos virialisés, pour les cas $f_{NL} = 0$ et $f_{NL} = \pm 100$. Sont représentés au redshift $z = 0$ les résultats obtenus pour deux masses de halo, $M = 10^{13}$ et $10^{14}h^{-1}M_\odot$.

Nous comparons sur le panneau de gauche de la figure 5.5 le biais obtenu par cette procédure avec le calcul obtenu dans le cas Gaussien. Comme l’on pouvait s’y attendre, la différence est plus prononcée pour des biais élevés, qui correspondent à des halos rares et plus fortement corrélés. Nous voyons par ailleurs que l’approximation (5.23), où nous avons linéarisé la fonction de corrélation des halos en terme du spectre linéaire $P_\chi(k)$, est valable à $z = 0$ jusqu’en $b \sim 6$, et sous-estime le biais pour des halos plus massifs. La comparaison avec le résultat obtenu en prenant $s = x$ au lieu de la relation (5.22) surestime systématiquement le biais des halos, ce qui montre qu’il est important de tenir compte du mouvement des halos, qui en moyenne se rapprochent (à ces échelles).

À très grande distance, $x > 100h^{-1}\text{Mpc}$, les fonctions de corrélation de la matière noire et des halos virialisés présentent des pics légèrement décalés associés à l’oscillation acoustique baryonique. En effet, ces deux fonctions de corrélation ne sont pas exactement proportionnelles : comme on le voit sur l’expression (5.23) la fonction de corrélation des halos fait par exemple intervenir un lissage à l’échelle q du rayon de ces objets (car les modes de longueur d’onde $\lambda \ll q$ ne contribuent pas). Pour la même raison, ces deux fonctions de corrélation ne changent pas de signe exactement à la même distance. Cela signifie qu’aux très grandes échelles il n’est plus vraiment pertinent de considérer le biais $b(x)$, mais qu’il vaut mieux travailler directement avec les fonctions de corrélation respectives.

Les résultats présentés sur le panneau de droite de la figure 5.5 montrent comment les non-Gaussianités primordiales affectent l'oscillation baryonique de la fonction de corrélation des halos virialisés, autour de $100h^{-1}\text{Mpc}$. En accord avec d'autres travaux [54], nous voyons que par rapport au champ de densité de matière noire l'oscillation baryonique est fortement amplifiée sur la fonction de corrélation des halos très massifs (qui ont un grand biais). Cette amplification reste valable dans le cas de non-Gaussianités primordiales importantes ($f_{\text{NL}} = \pm 100$). De plus, la position du pic reste quasiment inchangée, ce qui montre que sa mesure fournit une contrainte robuste sur les paramètres cosmologiques, indépendamment du biais de la population de halos observée et de non-Gaussianités primordiales éventuelles. Par contre, la distance à laquelle la fonction de corrélation s'annule apparaît très sensible à la présence de non-Gaussianités primordiales. Cependant, il n'est pas certain que les barres d'erreur théoriques et observationnelles soient suffisamment petites pour utiliser cet effet afin de contraindre la valeur de f_{NL} de manière compétitive.

En pratique, la plupart des travaux récents concernant la mesure des non-Gaussianités primordiales à partir du biais des halos massifs utilisent le spectre de puissance $P_M(k)$, c'est-à-dire la transformée de Fourier de la fonction de corrélation $\xi_M(x)$. A partir de l'expression (5.23) nous obtenons donc

$$P_M(k) \simeq \frac{\delta_L}{\sigma_q^2} P_L(k) \tilde{W}(kq) + \frac{\delta_L^2}{\sigma_q^4} \left[\tilde{f}_{0;qq}(k) + 2\tilde{f}_{q;0q}(k) - 3\frac{f_{q;qq}}{\sigma_q^2} P_L(k) \tilde{W}(kq) \right] + \frac{\delta_L^2}{\sigma_q^4} P_L(k) \tilde{W}(kq)^2 + 2\frac{\delta_L^3}{\sigma_q^6} \left[\tilde{f}_{2;11}(k) + 2\tilde{f}_{1;12}(k) - 3\frac{f_{1;11}}{\sigma_q^2} P_L(k) \tilde{W}(kq)^2 \right], \quad (5.24)$$

où les quantités $\tilde{f}$ sont les transformées de Fourier des facteurs f de l'expression (5.23). Pour des valeurs très négatives de f_{NL} l'expression (5.24) peut devenir négative (cela vient de ce que nous n'avons gardé que les termes d'ordre zéro et unité en f_{NL}). Afin de garder un spectre de puissance positif (ce qui est impliqué par la définition même des spectres de puissance), on peut remplacer le biais $b_M(k, f_{\text{NL}})$ prédit par l'éq.(5.24) par la transformation

$$b_M^2(k, f_{\text{NL}}) \rightarrow b_M^2(k, 0) \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{b_M^2(k, f_{\text{NL}})}{b_M^2(k, 0)} - 1 \right) \right]^2. \quad (5.25)$$

Cependant, cette modification ad-hoc ne doit pas être prise au pied de la lettre et signale principalement que les termes d'ordre supérieur en f_{NL} commencent à jouer un rôle.

Aux grandes échelles, et dans la limite des événements rares, on peut tirer de l'expression (5.24) le comportement asymptotique [188]

$$\sigma_q \rightarrow 0, \quad k \rightarrow 0: \quad b_M(k) \sim \frac{\delta_L}{\sigma_q^2} - 3\frac{\delta_L^2}{\sigma_q^6} f_{1;11} + f_{\text{NL}} \frac{2\delta_L^2}{\sigma_q^2 \alpha(k)}. \quad (5.26)$$

Ainsi, nous retrouvons le comportement asymptotique en k^{-2} caractéristique des non-Gaussianités primordiales de type local (5.11), qui avait été remarqué dans des travaux récents [50] et a déjà permis d'obtenir des contraintes compétitives sur f_{NL} [158]. Comme nous l'avions noté à propos de la fonction de masse des halos, ce comportement en k^{-2} qui amplifie les déviations par rapport au cas Gaussien lorsque l'on considère de plus grandes échelles vient de ce que le modèle local (5.11) définit un paramètre f_{NL} indépendant de l'échelle pour ce qui concerne le potentiel gravitationnel, $-\Phi$, de sorte qu'en termes du champ de densité on obtient une dépendance en k^{-2} du fait de l'équation de Poisson, voir les eqs.(5.13)-(5.14).

Les deux termes $\tilde{f}_{2;11}(k)$ et $2\tilde{f}_{1;12}(k)$ du deuxième crochet de l'éq.(5.24), qui conduisent au dernier terme de (5.26), avaient déjà été obtenus par Matarrese & Verde [102], en identifiant également les halos massifs avec des fluctuations rares du champ de densité linéaire. La présence d'un troisième terme, directement proportionnel à $P_L(k)$, avait déjà été remarquée dans d'autres travaux [158, 1] et se révèle indispensable pour obtenir un bon accord avec les simulations numériques [55]. Il correspond au deuxième terme de (5.26), qui donne simplement un décalage constant du biais par rapport au cas Gaussien.

Ici, il convient de noter que dans le cadre de ce formalisme le spectre de puissance des halos dans le cas Gaussien suit le spectre de puissance du champ de matière noire aux grandes échelles, $P_M(k) \sim b_M^2 P(k)$ avec $b_m \sim \delta_L/\sigma_q^2$, pour $k \rightarrow 0$. Ceci vient notamment de ce que l'on n'a gardé que les termes linéaires sur la fonction de corrélation du champ de densité en (5.23) (en prenant les termes en f nuls pour $f_{\text{NL}} = 0$), et ce comportement est donc commun à la plupart des approches [158, 1, 55, 184]. Cependant, on peut noter que si l'on tient compte des termes non-linéaires il n'est plus aussi évident que l'intégrale de la fonction de corrélation soit nulle, c'est-à-dire que $P_M(0) = 0$. Ainsi, une étude générale [57] montre que pour des modèles de biais stochastiques (i.e. la procédure de sélection des sites où se forment les objets est probabiliste) on obtient $P_M(0) > 0$, ce qui implique que le spectre de puissance des objets astrophysiques ne peut pas suivre en $k \rightarrow 0$ le comportement $P(k) \sim k^n$ avec $n \simeq 1$ du spectre de puissance CDM de la matière noire. Ceci modifierait également la forme du spectre de puissance des objets dans le cas de conditions initiales non-Gaussiennes. Ici, nous ne considérerons pas de

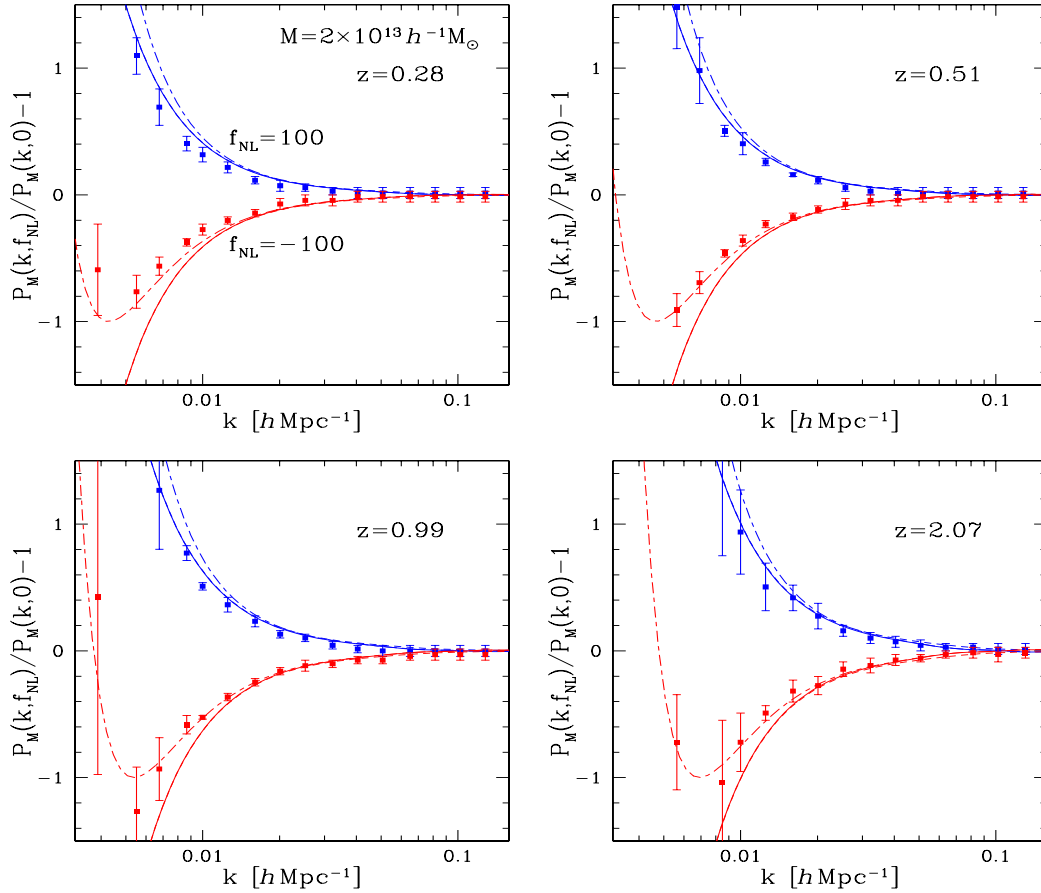


FIG. 5.6 – La correction relative du spectre de puissance des halos virialisés due aux non-Gaussianités primordiales. Sont représentés les rapports $P_M(k, f_{\text{NL}})/P_M(k, 0) - 1$ obtenus pour $f_{\text{NL}} = 100$ (courbes bleues supérieures) et $f_{\text{NL}} = -100$ (courbes rouges inférieures) à partir de l'éq.(5.24) (lignes continues) et en utilisant la correction (5.25) (points-tirets qui sont toujours au-dessus de -1). Les points avec barres d'erreur sont le résultat de simulations numériques [55].

tels modèles de biais stochastique (qui pourrait apparaître dans la relation entre les halos de matière noire et les objets astrophysiques eux-mêmes, tels que les galaxies) et nous gardons donc l'expression (5.24).

La figure 5.6 montre la déviation relative, $P_M(k, f_{\text{NL}})/P_M(k, 0) - 1$, du spectre de puissance de la distribution des halos virialisés obtenue pour $f_{\text{NL}} = \pm 100$ par rapport au cas Gaussien. Tandis que dans le cas Gaussien le biais est à peu près constant aux grandes échelles [111, 110], dans le cas de non-Gaussianités primordiales du type local (5.11) le biais croît comme k^{-2} , ainsi que nous venons de l'expliquer à partir de (5.26). Ceci se traduit par la croissance en k^{-2} de la déviation relative par rapport au cas Gaussien que l'on voit nettement sur la figure 5.6 (cela se traduit aussi en espace réel par une déviation $b_M(x, f_{\text{NL}})/b_M(x, 0) - 1$ qui croît comme x^2 à grande distance, entre 30 et $100h^{-1}\text{Mpc}$ [188]). Nous voyons que nous obtenons un bon accord avec les simulations numériques. Aux très grandes échelles, où l'expression (5.25) conduirait à un spectre négatif, la prescription (5.25) donne un accord étonnamment bon avec les simulations numériques (étant donné que l'on pourrait s'attendre dans ce régime à ce que d'autres termes d'ordre f_{NL}^2 et au-delà jouent un rôle).

Comme pour la fonction de masse des halos, un intérêt de l'approche développée ici est qu'elle parvient à un bon accord avec les simulations numériques sans avoir besoin d'introduire des paramètres libres fittés sur ces mêmes simulations, comme il est nécessaire pour d'autres formulations [73, 55]. Ceci montre que les propriétés des halos massifs peuvent bien se comprendre, y compris au niveau quantitatif, dans le cadre du scénario standard de formation de ces objets à partir de l'effondrement de fluctuations de densité primordiales, et que dans la limite des événements rares on retrouve bien les comportements asymptotiques prédits par la théorie.

5.5 Conclusion

Nous avons donc vu dans ce chapitre comment des modèles phénoménologiques très simples permettent de décrire la fonction de masse et la fonction de corrélation des halos virialisés, ce qui permet ensuite d'utiliser l'observation de la fonction de masse des amas de galaxies pour contraindre la cosmologie. Notons cependant que cette dernière étape nécessite généralement des ingrédients supplémentaires non-triviaux [91, 118], pour passer de la masse de matière noire à la température du gaz ou la luminosité X si on observe ces amas en bande X. Les effets de lentilles gravitationnelles permettent en principe d'éviter ces problèmes en observant directement la masse totale des objets (afin d'améliorer les calibrations masse-luminosité), mais ils se heurtent à d'autres sources d'erreur (en particulier ils sont sensibles à toute la masse le long de la ligne de visée, et donc pas seulement au puit de potentiel associé à l'amas étudié).

Nous nous sommes concentrés ici sur la première étape, c'est-à-dire la fonction de masse et le biais des halos de matière noire, sans entrer dans les complications astrophysiques. Nous avons vu que la prise en compte de résultats systématiques (obtenus par la méthode du col présentée au chapitre 3.1) et d'effets supplémentaires (le rapprochement des halos suite à leur attraction mutuelle) permet d'améliorer la précision des modèles phénoménologiques ou leur robustesse, en évitant d'introduire des paramètres de fit non-nécessaires. En particulier, cela permet d'utiliser la même approche pour décrire la corrélation des halos massifs, aussi bien à bas redshift (où elle suit à peu près la corrélation du champ de densité de matière noire, et un biais linéaire est une bonne approximation), qu'à haut redshift (où les effets non-linéaires sont importants), ainsi que pour des conditions initiales non-Gaussiennes. Dans ce dernier cas, l'avantage de modèles de ce type, assez proches de résultats systématiques, est de fournir automatiquement tous les termes qui apparaissent dans l'expression du biais des halos et de fournir des résultats bien définis à la fois en espace réel et en espace de Fourier (ce qui n'est pas le cas de toutes les approches, qui induisent parfois des quantités divergentes lorsqu'on veut repasser à la fonction de corrélation en espace réel à partir du spectre de puissance).

La simplicité de ces approches permet aussi leur extension à des situations plus compliquées, par exemple au cas de conditions initiales non-Gaussiennes où la non-Gaussianité ne proviendrait plus seulement d'un terme quadratique sur un champ Gaussien (on peut envisager des contributions sur plusieurs champs, avec des termes d'ordre supérieur). On peut ainsi estimer de manière rapide et commode les conséquences de scénarios non-standards sur de telles observables (au moins à l'ordre dominant). De manière analogue, on peut mettre en évidence l'influence d'une composante d'énergie noire sur la fonction de masse des halos virialisés, au travers de son effet sur le seuil δ_L et sur le processus de virialisation [45].

Chapitre 6

Conclusion

Nous avons présenté dans ce mémoire plusieurs approches analytiques visant à décrire la formation des structures de grande échelle, à partir de petites fluctuations primordiales qui sont amplifiées par instabilité gravitationnelle dans un univers en expansion. Nous n'avons pas abordé ici les problématiques astrophysiques associées au lien entre ces structures du champ de densité de matière noire et les objets lumineux réellement observés sur le ciel, tels que les galaxies ou les amas de galaxies. Ce sont bien sûr des aspects cruciaux qui font l'objet de nombreuses études, notamment à l'aide de simulations numériques [2, 74, 52] ou de modèles semi-analytiques [117, 96, 97] construits à partir de telles simulations (par exemple en utilisant le champ de densité ainsi obtenu puis en y rajoutant “à la main” diverses populations de galaxies). Néanmoins, l'analyse des structures du champ de densité, par exemple les halos de matière noire virialisés, permet déjà d'obtenir des approximations utiles pour les propriétés des objets de grande échelle (amas de galaxies, grand vides, filaments [5, 190]), et donc de contraindre les scénarios cosmologiques en comparant ces prédictions avec les observations.

Nous nous sommes donc plutôt concentrés sur la dynamique gravitationnelle elle-même, pour le champ de densité de matière noire froide non-collisionnelle. Ceci constitue un problème bien posé, défini par les équations du mouvement (1.1)-(1.3) (ou par le système Vlasov-Poisson si l'on veut prendre en compte les croisements de trajectoires) et par la donnée des conditions initiales. Cependant, même ce système, uniquement soumis à la gravité Newtonienne, développe une dynamique hiérarchique non-triviale, qui est très mal maîtrisée dans le régime fortement non-linéaire. La compréhension détaillée de ce système, et l'obtention de prédictions quantitatives, restent donc des problèmes largement ouverts.

Nous avons donc présenté plusieurs lignes d'attaque complémentaires, qui permettent d'obtenir des résultats partiels dans différents régimes :

- Nous avons tout d'abord vu comment des approches perturbatives, basées sur la description hydrodynamique du système, permettent de décrire le système aux échelles faiblement non-linéaires. Ces diverses méthodes correspondent à des resommations différentes de la série perturbative ordinaire, qui coïncident jusqu'à l'ordre de troncation choisi et ne diffèrent que par la classe partielle de diagrammes d'ordres supérieurs resommés. Elles peuvent aussi inclure une interpolation aux plus petites échelles vers une limite de très petite échelle. Ces techniques permettent d'obtenir des prédictions quantitatives systématiques, qui sont compétitives avec les simulations numériques dans ce régime. En effet, elles sont capables de suivre les détails fins des fonctions de corrélation de bas ordre (tels que les oscillations acoustiques baryoniques du spectre de puissance du champ de densité, ou le bispectre à l'ordre suivant), et ce pour des paramètres cosmologiques quelconques et une large gamme de conditions initiales. Par ailleurs, en introduisant de nouvelles quantités qui n'apparaissent pas dans le traitement perturbatif traditionnel, telles que les fonctions de réponse, elles permettent une compréhension plus fine de la dynamique. En particulier, nous avons souligné l'impact du transport quasi-uniforme des structures du champ de densité par les modes de grande longueur d'onde sur les fonctions de réponse (et les fonctions de corrélation à temps différents) obtenues dans un formalisme Eulérien. Un formalisme Lagrangien permet de s'affranchir de ces effets et de s'attaquer directement à l'évolution des structures du champ de densité (à travers les déplacements relatifs des particules), mais est aussi de ce fait-même plus difficile à analyser.

- Nous avons ensuite montré comment une approche non-perturbative, basée sur une méthode du col autour d'une solution exacte des équations du mouvement (associée à une configuration sphérique, sélectionnée par certaines limites parmi l'ensemble des conditions initiales) permet d'obtenir des informations complémentaires. En effet, au lieu de fournir des approximations d'ordre croissant pour les fonctions de corrélation de bas ordre, elle donne le comportement asymptotique de la distribution de probabilité complète du contraste de densité sur des volumes sphériques de grande taille (limite quasi-linéaire). Elle s'applique aussi dans la limite orthogonale

des sous-densités extrêmes sur une échelle finie quelconque (ces deux limites différentes étant toutes deux des limites d'événements rares). Par ailleurs, cette méthode permet d'aller au-delà des traitements perturbatifs, et par exemple de calculer le seuil à partir duquel les croisements de trajectoires commencent à jouer un rôle (et où l'approche hydrodynamique doit être abandonnée pour travailler avec la fonction de distribution dans l'espace des phases, $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$).

- Ensuite, nous avons vu comment l'étude d'une dynamique plus simple, où l'on peut obtenir des résultats exacts, permet de mieux comprendre certains processus communs avec le cas de la dynamique gravitationnelle. Un exemple non-trivial est fourni par le "modèle d'adhésion" [76], c'est-à-dire la dynamique de Burgers. Nous avons en particulier montré comment l'on peut obtenir les propriétés statistiques exactes du système pour le cas $n = -2$ (vitesse initiale Brownienne) à 1D (c'est aussi possible pour le cas $n = 0$ à 1D, où la vitesse initiale est un bruit blanc). On obtient alors un système qui présente de nombreuses similitudes avec les structures formées par la dynamique gravitationnelle. Ainsi, la distribution de probabilité du contraste de densité présente les mêmes comportements que dans le cas gravitationnel 3D, du régime linéaire au régime fortement non-linéaire. De même, la fonction de masse des chocs (les objets non-linéaires créés par cette dynamique) est similaire à la fonction de masse des halos virialisés du contexte cosmologique. En fait, il se trouve que ce système fournit une réalisation dynamique exacte¹ de deux ansatz introduits auparavant dans le contexte cosmologique ! Ainsi, le "stable-clustering ansatz" [51, 126], pour le champ de densité lissé sur une échelle quelconque, et la prescription de Press & Schechter [140] pour la fonction de masse des chocs (i.e. les pics de densité), sont tous les deux exacts pour ce système. Par ailleurs, nous avons montré, pour des conditions initiales génériques, comment les fonctions de réponse de ce système sont liées soit à la distribution de probabilité à un point de la vitesse (formalisme Eulérien), soit à la fonction de masse des chocs (formalisme Lagrangien). Ceci confirme les résultats obtenus par les approches perturbatives, et explique de manière très claire les différences de comportement de ces fonctions de réponse, qui sont donc sensibles à des aspects très différents de la dynamique.

- Enfin, nous avons montré comment l'on peut décrire les régimes hors d'atteinte de ces diverses techniques systématiques par des modèles phénoménologiques. En s'inspirant des résultats partiels obtenus par les méthodes systématiques précédentes, et en tenant compte des divers processus en jeu, on peut ainsi obtenir des modèles simples mais robustes, qui parviennent à un bon accord avec les simulations numériques sans nécessité d'introduire de trop nombreux paramètres libres. Ceci fournit des prédictions quantitatives (à 10% près) qui permettent une comparaison rapide et efficace de divers scénarios cosmologiques avec les observations. En particulier, ces modèles peuvent aussi s'appliquer aux cas de conditions initiales plus compliquées, avec des non-Gaussianités primordiales.

Il est assez clair après ce survol de quelques approches de la dynamique gravitationnelle en cosmologie que de nombreuses questions sur les propriétés du système, principalement dans le régime fortement non-linéaire, restent ouvertes. Nous pouvons évoquer quelques pistes possibles, dans la suite des travaux présentés dans ce mémoire :

- Les approches perturbatives, visant à décrire le régime faiblement non-linéaire, n'ont pas forcément livré toutes leurs potentialités. En effet, il se pourrait que d'autres schémas de resommation se révèlent plus efficaces, ou offrent une meilleure compréhension du système. En particulier, bien que le cadre Lagrangien ait déjà été abordé [104], il reste bien moins exploré que le cadre Eulérien, et il serait intéressant de développer plusieurs schémas de resommation dans ce formalisme. De plus, nous avons vu que le cadre Lagrangien est plus directement sensible aux structures du champ de densité, qui sont les quantités les plus pertinentes du point de vue cosmologique (bien que les champs de vitesse eux-aussi présentent un intérêt observationnel). Par ailleurs, il serait intéressant de développer les liens possibles entre ces approches systématiques et des modèles plus phénoménologiques, tels que les modèles de halos [106, 43]. Enfin, l'utilisation des résultats obtenus par ces méthodes pour contraindre les scénarios cosmologiques devrait continuer à donner lieu à de nombreuses études.

- L'étude de systèmes plus simples constitue un autre champ d'investigation qui pourrait encore s'avérer fructueux. Par exemple, on pourrait envisager d'autres systèmes que le modèle d'adhésion (et la dynamique de Zeldovich) abordé dans ce mémoire, ou considérer des géométries différentes. Une autre possibilité serait d'utiliser de tels systèmes dans une optique quantitative même, c'est-à-dire développer des théories de perturbation qui visent à approcher de manière systématique la dynamique gravitationnelle 3D à partir de ces solutions. Il s'agit d'une piste qui n'a quasiment pas été explorée (bien que la théorie des perturbations Lagrangienne puisse se voir en un certain sens comme une théorie des perturbations autour de l'approximation de Zeldovich).

¹En fait, l'auteur ne connaît pas d'autre système dynamique (où l'évolution de la distribution de matière provient d'équations du mouvement usuelles, et non pas d'un modèle de répartition de la masse statique, par exemple par marches de Lévy, dont les paramètres varient éventuellement au cours du temps de manière phénoménologique) qui réalise exactement ces deux ansatz.

- Les modèles phénoménologiques eux-mêmes peuvent bien sûr être constamment améliorés, en tenant compte de détails plus fins ou en les associant avec les méthodes perturbatives systématiques (par exemple en construisant ainsi une interpolation des échelles quasi-linéaires aux échelles fortement non-linéaires). Une autre ligne d'étude consiste naturellement à explorer davantage les résultats que l'on peut en tirer. Par exemple, au-delà de la fonction de masse et de la fonction de corrélation à deux points étudiées dans ce mémoire, on pourrait calculer les fonctions de corrélation d'ordre plus élevé, et notamment le bispectre.

De manière plus générale, suivant le fil conducteur de ce mémoire, il s'agit de comprendre la dynamique non-linéaire hors-équilibre associée à la gravité Newtonienne dans un univers en expansion. Ce problème se place donc dans une thématique plus large, associée aux systèmes non-linéaires hors-équilibre, avec des interactions à longue portée. Cela permet de faire le lien avec des problématiques de physique statistique (par exemple, les systèmes avec interactions à longue portée) ou d'hydrodynamique (la turbulence). Il est alors possible d'utiliser dans un de ces contextes des techniques développées dans un autre domaine (comme nous l'avons montré dans quelques paragraphes de ce mémoire) et de parvenir ainsi à une meilleure compréhension du système étudié. Comme dans le contexte de la turbulence hydrodynamique, on aimerait alors mieux saisir les processus de relaxation éventuellement à l'oeuvre, et comprendre s'il existe des propriétés universelles (par exemple des exposants caractéristiques de la dynamique, indépendamment des détails des conditions initiales). On s'éloigne alors quelque peu des préoccupations cosmologiques elles-mêmes, mais on intègre ainsi une thématique plus large qui est aussi un champ de recherche très actif et qui offre des questions particulièrement intéressantes.

Bibliographie

- [1] N. Afshordi and A. J. Tolley. Primordial non-gaussianity, statistics of collapsed objects, and the integrated sachs-wolfe effect. *Phys. Rev. D*, 78 :123507, 2008.
- [2] O. Agertz, R. Teyssier, and B. Moore. Disc formation and the origin of clumpy galaxies at high redshift. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 397 :L64–L68, 2009.
- [3] C. Alard and S. Colombi. A cloudy vlasov solution. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 359 :123–163, 2005.
- [4] J.-M. Alimi, A. Fuzfa, and V. Boucher et al. Imprints of dark energy on cosmic structure formation - i. realistic quintessence models and the non-linear matter power spectrum. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 401 :775–790, 2010.
- [5] P. A. Araya-Melo, R. van de Weygaert, and B. J. T. Jones. Cosmology and cluster halo scaling relations. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 400 :1317–1336, 2009.
- [6] E. Audit, R. Teyssier, and J.-M. Alimi. Non-linear dynamics and mass function of cosmic structures. i. analytical results. *Astron. Astrophys.*, 325 :439–449, 1997.
- [7] E. Audit, R. Teyssier, and J.-M. Alimi. Non-linear dynamics and mass function of cosmic structures. ii. numerical results. *Astron. Astrophys.*, 333 :779–789, 1998.
- [8] M. Avellaneda and Weinan E. Statistical properties of shocks in burgers turbulence. *Commun. Math. Phys.*, 172 :13–38, 1995.
- [9] R. Balian and R. Schaeffer. Scale-invariant matter distribution in the universe. i - counts in cells. *Astron. Astrophys.*, 220 :1–29, 1989.
- [10] R. Balian and R. Schaeffer. Scale-invariant matter distribution in the universe. ii - bifractal behaviour. *Astron. Astrophys.*, 226 :373–414, 1989.
- [11] J. G. Bartlett and J. Silk. Galaxy clusters and the cohe result. *Astrophys. J.*, 407 :L45–L48, 1993.
- [12] N. Bartolo, E. Komatsu, S. Matarrese, and A. Riotto. Non-gaussianity from inflation : theory and observations. *Phys. Rep.*, 402 :103–266, 2004.
- [13] N. Bartolo, S. Matarrese, and A. Riotto. Non-gaussianity from inflation. *Phys. Rev. D*, 65 :103505, 2002.
- [14] J. Bec and K. Khanin. Burgers turbulence. *Phys. Rep.*, 447 :1–66, 2007.
- [15] J. Berge, F. Pacaud, and A. Refregier et al. Combined analysis of weak lensing and x-ray blind surveys. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 385 :695–707, 2008.
- [16] J. Berges. Controlled nonperturbative dynamics of quantum fields out of equilibrium. *Nucl. Phys. A*, 699 :847–886, 2002.
- [17] F. Bernardeau. The effects of smoothing on the statistical properties of large-scale cosmic fields. *Astron. Astrophys.*, 291 :697–712, 1994.
- [18] F. Bernardeau. The nonlinear evolution of rare events. *Astrophys. J.*, 427 :51–71, 1994.
- [19] F. Bernardeau, S. Colombi, E. Gaztañaga, and R. Scoccimarro. Large-scale structure of the universe and cosmological perturbation theory. *Phys. Rep.*, 367 :1–248, 2002.
- [20] F. Bernardeau and P. Valageas. Propagators in lagrangian space. *Phys. Rev. D*, 78 :083503, 2008.
- [21] F. Bernardeau and P. Valageas. Eulerian and lagrangian propagators for the adhesion model (burgers dynamics). *Phys. Rev. D*, 81 :043516, 2010.
- [22] F. Bernardeau and P. Valageas. Merging and fragmentation in the burgers dynamics. *Phys. Rev. E*, 2010.
- [23] J. Bertoin. The inviscid burgers equation with brownian initial velocity. *Commun. Math. Phys.*, 193 :397–406, 1998.
- [24] E. Bertschinger. The self-similar evolution of holes in an einstein-de sitter universe. *Astrophys. J. Supp.*, 58 :1–37, 1985.

- [25] E. Bertschinger. Self-similar secondary infall and accretion in an einstein-de sitter universe. *Astrophys. J. Supp.*, 58 :39–65, 1985.
- [26] J. E. Betancort-Rijo and A. D. Montero-Dorta. Understanding the cosmic mass function high-mass behavior. *Astrophys. J. Lett.*, 650 :95–98, 2006.
- [27] A. Blanchard and J. G. Bartlett. What does cluster redshift evolution reveal? *Astron. Astrophys.*, 332 :L49–L52, 1998.
- [28] A. Blanchard, D. Valls-Gabaud, and G. A. Mamon. The origin of the galaxy luminosity function and the thermal evolution of the intergalactic medium. *Astron. Astrophys.*, 264 :365–378, 1992.
- [29] J.-P. Bouchaud, L. Cugliandolo, J. Kurchan, and M. Mezard. Mode coupling approximations, glass theory and disordered systems. *Physica A*, 226 :243–273, 1996.
- [30] F. R. Bouchet, J.-C. Adam, and R. Pellat. On the way of understanding particle-in-cell simulations of gravitational clustering. *Astron. Astrophys.*, 144 :413–426, 1985.
- [31] F. R. Bouchet, S. Colombi, E. Hivon, and R. Juszkiewicz. Perturbative lagrangian approach to gravitational instability. *Astron. Astrophys.*, 296 :575–608, 1995.
- [32] F. R. Bouchet, R. Juszkiewicz, S. Colombi, and R. Pellat. Weakly nonlinear gravitational instability for arbitrary omega. *Astrophys. J. Lett.*, 394 :5–8, 1992.
- [33] J. M. Burgers. *The nonlinear diffusion equation*. D. Reidel, Dordrecht, 1974.
- [34] J. Carlson, M. White, and N. Padmanabhan. A critical look at cosmological perturbation theory techniques. *Phys. Rev. D*, 80 :043531, 2009.
- [35] J.-P. Chieze, R. Teyssier, and J.-M. Alimi. Gas and dark matter spherical dynamics. *Astrophys. J.*, 484 :40–52, 1997.
- [36] J. D. Cole. On a quasi-linear parabolic equation occuring in aerodynamics. *Quart. Appl. Math.*, 9 :225–236, 1951.
- [37] S. Cole, W. J. Percival, and J. A. Peacock et al. The 2df galaxy redshift survey : power-spectrum analysis of the final data set and cosmological implications. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 362 :505–534, 2005.
- [38] S. Colombi. Dynamics of the large-scale structure of the universe : /n-body techniques. *New Astron. Rev.*, 45 :373–377, 2001.
- [39] S. Colombi, F. R. Bouchet, and L. Hernquist. Self-similarity and scaling behavior of scale-free gravitational clustering. *Astrophys. J.*, 465 :14–33, 1996.
- [40] S. Colombi, F. R. Bouchet, and R. Schaeffer. Large scale structure statistics : Finite volume effects. *Astron. Astrophys.*, 281 :301–313, 1994.
- [41] S. Colombi, F. R. Bouchet, and R. Schaeffer. A count probability cookbook : Spurious effects and the scaling model. *Astrophys. J. Supp.*, 96 :401–428, 1995.
- [42] S. Colombi, A. Jaffe, D. Novikov, and C. Pichon. Accurate estimators of power spectra in n-body simulations. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 393 :511–526, 2009.
- [43] A. Cooray and R. Sheth. Halo models of large scale structure. *Phys. Rep.*, 372 :1–129, 2002.
- [44] H. M. P. Couchman. Mesh-refined p3m - a fast adaptive n-body algorithm. *Astrophys. J. Lett.*, 368 :23–26, 1991.
- [45] J. Courtin, Y. Rasera, and J.-M. Alimi et al. Imprints of dark energy on cosmic structure formation : Ii) non-universality of the halo mass function. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 2010.
- [46] M. Crocce and R. Scoccimarro. Memory of initial conditions in gravitational clustering. *Phys. Rev. D*, 73 :063520, 2006.
- [47] M. Crocce and R. Scoccimarro. Renormalized cosmological perturbation theory. *Phys. Rev. D*, 73 :063519, 2006.
- [48] M. Crocce and R. Scoccimarro. Nonlinear evolution of baryon acoustic oscillations. *Phys. Rev. D*, 77 :023533, 2008.
- [49] A. J. Cuesta, F. Prada, A. Klypin, and M. Moles. The virialized mass of dark matter haloes. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 389 :385–397, 2008.
- [50] N. Dalal, O. Dore, D. Huterer, and A. Shirokov. Imprints of primordial non-gaussianities on large-scale structure : Scale-dependent bias and abundance of virialized objects. *Phys. Rev. D*, 77 :123514, 2008.
- [51] M. Davis and P. J. E. Peebles. On the integration of the bbgky equations for the development of strongly nonlinear clustering in an expanding universe. *Astrophys. J. Supp. S.*, 34 :425–450, 1977.

- [52] A. Dekel, Y. Birnboim, and G. Engel et al. Cold streams in early massive hot haloes as the main mode of galaxy formation. *Nature*, 457 :451–454, 2009.
- [53] A. Dekel and J. Silk. The origin of dwarf galaxies, cold dark matter, and biased galaxy formation. *Astrophys. J.*, 303 :39–55, 1986.
- [54] V. Desjacques. Baryon acoustic signature in the clustering of density maxima. *Phys. Rev. D*, 78 :103503, 2008.
- [55] V. Desjacques, U. Seljak, and I. T. Iliev. Scale-dependent bias induced by local non-gaussianity : a comparison to n-body simulations. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 396 :85–96, 2009.
- [56] J. P. Doherty, M. A. Moore, J. Kim, and A. J. Bray. Generalizations of the kardar-parisi-zhang equation. *Phys. Rev. Lett.*, 72 :2041–2044, 1994.
- [57] R. Durrer, A. Gabrielli, M. Joyce, and F. Sylos Labini. Bias and the power spectrum beyond the turnover. *Astrophys. J. Lett.*, 585 :1–4, 2003.
- [58] D. J. Eisenstein, W. Hu, and M. Tegmark. Cosmic complementarity : H 0 and omega m from combining cosmic microwave background experiments and redshift surveys. *Astrophys. J. Lett.*, 504 :57–60, 1998.
- [59] D. J. Eisenstein et al. Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of sdss luminous red galaxies. *Astrophys. J.*, 633 :560–574, 2005.
- [60] A. E. Evrard. Biased cold dark matter theory - trouble from rich clusters? *Astrophys. J. Lett.*, 341 :71–74, 1989.
- [61] T. Falk, R. Rangarajan, and M. Srednicki. The angular dependence of the three-point correlation function of the cosmic microwave background radiation as predicted by inflationary cosmologies. *Astrophys. J. Lett.*, 403 :1–3, 1993.
- [62] J. A. Fillmore and P. Goldreich. Self-similar gravitational collapse in an expanding universe. *Astrophys. J.*, 281 :1–8, 1984.
- [63] J. A. Fillmore and P. Goldreich. Self-similar spherical voids in an expanding universe. *Astrophys. J.*, 281 :9–12, 1984.
- [64] L. Frachebourg and Ph. A. Martin. Exact statistical properties of the burgers equation. *J. Fluid Mech.*, 417 :323–349, 2000.
- [65] U. Frisch and J. Bec. *Burgulence, Les Houches 2000 : New trends in turbulence*. M. Lesieur, A. Yaglom & F. David, Springer EDP-Sciences, 2001.
- [66] J. N. Fry. Galaxy n-point correlation functions - theoretical amplitudes for arbitrary n. *Astrophys. J. Lett.*, 277 :5–8, 1984.
- [67] J. N. Fry and E. Gaztanaga. Biasing and hierarchical statistics in large-scale structure. *Astrophys. J.*, 413 :447–452, 1993.
- [68] A. Gabrielli, M. Joyce, and F. Sylos Labini. Glass-like universe : Real-space correlation properties of standard cosmological models. *Phys. Rev. D*, 65 :083523, 2002.
- [69] A. Gabrielli, M. Joyce, and F. Sicard. One-dimensional gravity in infinite point distributions. *Phys. Rev. E*, 80 :041108, 2009.
- [70] P. Gandhi, O. Garcet, and L. Disseau et al. The xmm large scale structure survey : properties and two-point angular correlations of point-like sources. *Astron. Astrophys.*, 457 :393–404, 2006.
- [71] M. H. Goroff, B. Grinstein, S.-J. Rey, and M. B. Wise. Coupling of modes of cosmological mass density fluctuations. *Astrophys. J.*, 311 :6–14, 1986.
- [72] M. Grossi, K. Dolag, E. Branchini, S. Matarrese, and L. Moscardini. Evolution of massive haloes in non-gaussian scenarios. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 382 :1261–1267, 2007.
- [73] M. Grossi, L. Verde, and C. Carbone et al. Large-scale non-gaussian mass function and halo bias : tests on n-body simulations. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 398 :321–332, 2009.
- [74] T. Guillet, R. Teyssier, and S. Colombi. The effect of baryons on the variance and the skewness of the mass distribution in the universe at small scales. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 405 :525–534, 2010.
- [75] S. Gurbatov, A. Malakhov, and A. Saichev. *Nonlinear random waves and turbulence in nondispersive media : waves, rays and particles*. Manchester University Press, 1991.
- [76] S. N. Gurbatov, A. I. Saichev, and S. F. Shandarin. The large-scale structure of the universe in the frame of the model equation of non-linear diffusion. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 236 :385–402, 1989.
- [77] S. N. Gurbatov, S. I. Simdyankin, E. Aurell, U. Frisch, and G. Toth. On the decay of burgers turbulence. *J. Fluid Mech.*, 344 :339–374, 1997.

- [78] A. J. S. Hamilton. On hierarchical solutions to the bbgky hierarchy. *Astrophys. J.*, 332 :67–74, 1988.
- [79] A. J. S. Hamilton, P. Kumar, E. Lu, and A. Matthews. Reconstructing the primordial spectrum of fluctuations of the universe from the observed nonlinear clustering of galaxies. *Astrophys. J. Lett.*, 374 :1–4, 1991.
- [80] S. H. Hansen, O. Agertz, and M. Joyce et al. An alternative to grids and glasses : Quaquaversal pre-initial conditions for n-body simulations. *Astrophys. J.*, 656 :631–635, 2007.
- [81] K. Heitmann, D. Higdon, and M. White et al. The coyote universe. ii. cosmological models and precision emulation of the nonlinear matter power spectrum. *Astrophys. J.*, 705 :156–174, 2009.
- [82] E. Hopf. The partial differential equation $u_t + uu_x = u_{xx}$. *Commun. Pure Appl. Math.*, 3 :201–230, 1950.
- [83] A. Jenkins, C. S. Frenk, and F. R. Pearce et al. Evolution of structure in cold dark matter universes. *Astrophys. J.*, 499 :20–40, 1998.
- [84] A. Jenkins, C. S. Frenk, and S. D. M. White et al. The mass function of dark matter haloes. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 321 :372–384, 2001.
- [85] M. Joyce, D. Levesque, and B. Marcos. A method of generating initial conditions for cosmological n-body simulations. *Phys. Rev. D*, 72 :103509, 2005.
- [86] M. Joyce and B. Marcos. Quantification of discreteness effects in cosmological n-body simulations : Initial conditions. *Phys. Rev. D*, 75 :063516, 2007.
- [87] M. Joyce, B. Marcos, and F. Sylos Labini. Energy ejection in the collapse of a cold spherical self-gravitating cloud. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 397 :775–792, 2009.
- [88] M. Joyce and T. Worrakitpoonpon. Relaxation to thermal equilibrium in the self-gravitating sheet model. 2010.
- [89] R. Juszkiewicz, F. R. Bouchet, and S. Colombi. Skewness induced by gravity. *Astrophys. J. Lett.*, 412 :9–12, 1993.
- [90] N. Kaiser. On the spatial correlations of abell clusters. *Astrophys. J. Lett.*, 284 :9–12, 1984.
- [91] S. T. Kay, A. C. da Silva, and N. Aghanim et al. The evolution of clusters in the clef cosmological simulation : X-ray structural and scaling properties. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 377 :317–334, 2007.
- [92] L. Kofman, D. Pogosyan, and S. Shandarin. Structure of the universe in the two-dimensional model of adhesion. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 242 :200–208, 1990.
- [93] E. Komatsu, J. Dunkley, and M. R. Nolte et al. Five-year wilkinson microwave anisotropy probe observations : Cosmological interpretation. *Astrophys. J. Suppl.*, 180 :330–376, 2009.
- [94] R. Kraichnan. Dynamics of nonlinear stochastic systems. *J. Math. Phys.*, 2 :124–148, 1961.
- [95] A. V. Kravtsov, A. A. Klypin, and A. M. Khokhlov. Adaptive refinement tree : A new high-resolution n-body code for cosmological simulations. *Astrophys. J. Supp.*, 111 :73–94, 1997.
- [96] C. G. Lacey, C. M. Baugh, and C. S. Frenk et al. Galaxy evolution in the infrared : comparison of a hierarchical galaxy formation model with spitzer data. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 385 :1155–1178, 2008.
- [97] G. De Lucia and J. Blaizot. The hierarchical formation of the brightest cluster galaxies. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 375 :2–14, 2007.
- [98] D. H. Lumb, J. G. Bartlett, and A. K. Romer et al. The xmm-newton omega project. i. the x-ray luminosity-temperature relation at $z \leq 0.4$. *Astron. Astrophys.*, 420 :853–872, 2004.
- [99] D. H. Lyth, C. Ungarelli, and D. Wands. Primordial density perturbation in the curvaton scenario. *Phys. Rev. D*, 67 :023503, 2003.
- [100] R. Massey, J. Rhodes, and A. Leauthaud et al. Cosmos : Three-dimensional weak lensing and the growth of structure. *Astrophys. J. Supp.*, 172 :239–253, 2007.
- [101] S. Matarrese and M. Pietroni. Resumming cosmic perturbations. *JCAP*, 6 :26, 2007.
- [102] S. Matarrese and L. Verde. The effect of primordial non-gaussianity on halo bias. *Astrophys. J. Lett.*, 677 :77–80, 2008.
- [103] S. Matarrese, L. Verde, and R. Jimenez. The abundance of high-redshift objects as a probe of non-gaussian initial conditions. *Astrophys. J.*, 541 :10–24, 2000.
- [104] T. Matsubara. Resumming cosmological perturbations via the lagrangian picture : One-loop results in real space and in redshift space. *Phys. Rev. D*, 77 :063530, 2008.
- [105] B. J. Maughan, L. R. Jones, and M. Pierre et al. Testing the galaxy cluster mass-observable relations at $z = 1$ with xmm-newton and chandra observations of xlsxj022403.9-041328. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 387 :998–1006, 2008.

- [106] J. McClelland and J.. Silk. The correlation function for density perturbations in an expanding universe. ii - nonlinear theory. *Astrophys. J.*, 217 :331–352, 1977.
- [107] H. J. McCracken, O. Ilbert, and Y. Mellier et al. Clustering properties of a type-selected volume-limited sample of galaxies in the cfhtls. *Astron. Astrophys.*, 479 :321–334, 2008.
- [108] B. N. Miller and J.-L. Rouet. Cosmology in one dimension :fractal geometry, power spectra and correlation. 2010.
- [109] B. N. Miller, J.-L. Rouet, and E. Le Guirriec. Fractal geometry in an expanding, one-dimensional, newtonian universe. *Phys. Rev. E*, 76 :036705, 2007.
- [110] H. J. Mo, Y. P. Jing, and S. D. M. White. High-order correlations of peaks and haloes : a step towards understanding galaxy biasing. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 284 :189–201, 1997.
- [111] H. J. Mo and S. D. M. White. An analytic model for the spatial clustering of dark matter haloes. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 282 :347–361, 1996.
- [112] R. Mohayaee, H. Mathis, S. Colombi, and J. Silk. Reconstruction of primordial density fields. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 365 :939–959, 2006.
- [113] G. M. Molchan. Burgers equation with self-similar gaussian initial data : tail probabilities. *J. Stat. Phys.*, 88 :1139–1150, 1997.
- [114] C.-Y. Mou and P. B. Weichman. Spherical model for turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 70 :1101–1104, 1993.
- [115] F. Moutarde, J.-M. Alimi, and F. R. Bouchet et al. Precollapse scale invariance in gravitational instability. *Astrophys. J.*, 382 :377–381, 1991.
- [116] D. Munshi, P. Valageas, L. van Waerbeke, and A. Heavens. Cosmology with weak lensing surveys. *Phys. Rep.*, 462 :67–121, 2008.
- [117] J. F. Navarro, A. Ludlow, and V. Springel et al. The diversity and similarity of simulated cold dark matter haloes. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 402 :21–34, 2010.
- [118] S. E. Nuza and A. Blanchard. The baryon mass function for galaxy clusters. *Astron. Astrophys.*, 452 :47–50, 2006.
- [119] J. Oukbir and A. Blanchard. X-ray clusters in open universes. *Astron. Astrophys.*, 262 :L21–L24, 1992.
- [120] J. Oukbir and A. Blanchard. X-ray clusters : towards a new determination of the density parameter of the universe. *Astron. Astrophys.*, 317 :1–13, 1997.
- [121] F. Pacaud, M. Pierre, and C. Adami et al. The xmm-lss survey : the class 1 cluster sample over the initial 5 deg² and its cosmological modelling. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 382 :1289–1308, 2007.
- [122] N. D. Padilla, C. M. Baugh, and V. R. Eke et al. The 2df galaxy redshift survey : the clustering of galaxy groups. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 352 :211–225, 2004.
- [123] P. L. Palmer and J. Papaloizou. Instability in spherical stellar systems. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 224 :1043–1053, 1987.
- [124] J. A. Peacock and S. J. Dodds. Non-linear evolution of cosmological power spectra. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 280 :L19–L26, 1996.
- [125] P. J. E. Peebles. The effect of a lumpy matter distribution on the growth of irregularities in an expanding universe. *Astron. Astrophys.*, 32 :391–397, 1974.
- [126] P. J. E. Peebles. *The large scale structure of the universe*. Princeton university press, Princeton, 1980.
- [127] P. J. E. Peebles. Large-scale background temperature and mass fluctuations due to scale-invariant primeval perturbations. *Astrophys. J. Lett.*, 263 :1–5, 1982.
- [128] P. J. E. Peebles. An isocurvature cold dark matter cosmogony. i. a worked example of evolution through inflation. *Astrophys. J.*, 510 :523–530, 1999.
- [129] P. J. E. Peebles. An isocurvature cold dark matter cosmogony. ii. observational tests. *Astrophys. J.*, 510 :531–540, 1999.
- [130] J. Perez, J.-M. Alimi, J.-J. Aly, and H. Scholl. Stability of spherical stellar systems - ii. numerical results. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 280 :700–710, 1996.
- [131] R. Phythian. The functional formalism of classical statistical dynamics. *J. Phys. A*, 10 :777–789, 1977.
- [132] C. Pichon and F. Bernardeau. Vorticity generation in large-scale structure caustics. *Astron. Astrophys.*, 343 :663–681, 1999.
- [133] C. Pichon, C. Gay, and D. Pogosyan et al. *The Skeleton : Connecting Large Scale Structures to Galaxy Formation*. Proceedings of the "Invisible Universe 2009" conference, 2009.

- [134] M. Pierre. Probes for the large-scale structure. *Astron. Astrophys.*, 229 :7–16, 1990.
- [135] M. Pierre, F. Pacaud, and P.-A. Duc et al. The xmm large-scale structure survey : a well-controlled x-ray cluster sample over the d1 cfhtls area. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 372 :591–608, 2006.
- [136] M. Pierre, I. Valtchanov, and B. Altieri et al. The xmm-lss survey. survey design and first results. *JCAP*, 9 :11, 2004.
- [137] M. Pietroni. Flowing with time : a new approach to non-linear cosmological perturbations. *JCAP*, 10 :36, 2008.
- [138] A. Pillepich, C. Porciani, and O. Hahn. Halo mass function and scale-dependent bias from n-body simulations with non-gaussian initial conditions. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 402 :191–206, 2010.
- [139] V. L. Polyachenko. Theory and applications of radial orbit instability in collisionless gravitational systems. *JETP*, 5 :755–763, 1992.
- [140] W. Press and P. Schechter. Formation of galaxies and clusters of galaxies by self-similar gravitational condensation. *Astrophys. J.*, 187 :425–438, 1974.
- [141] Z. A. M. Protogeros and R. J. Scherrer. Local lagrangian approximations for the evolution of the density distribution function in large-scale structure. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 284 :425–438, 1997.
- [142] S. Prunet, C. Pichon, and D. Aubert et al. Initial conditions for large cosmological simulations. *Astrophys. J. Supp.*, 178 :179–188, 2008.
- [143] D. Reed, R. Bower, C. S. Frenk, A. Jenkins, and T. Theuns. The clustering of the first galaxy haloes. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 394 :624–632, 2009.
- [144] D. Reed, J. Gardner, and T. Quinn et al. Evolution of the mass function of dark matter haloes. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 346 :565–572, 2003.
- [145] A. Refregier, I. Valtchanov, and M. Pierre. Cosmology with galaxy clusters in the xmm large-scale structure survey. *Astron. Astrophys.*, 390 :1–12, 2002.
- [146] B. E. Robertson, A. V. Kravtsov, J. Tinker, and A. R. Zentner. Collapse barriers and halo abundance : Testing the excursion set ansatz. *Astrophys. J.*, 696 :636–652, 2009.
- [147] J. Robinson and J. E. Baker. Evolution of the cluster abundance in non-gaussian models. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 311 :781–792, 2000.
- [148] J. Robinson, E. Gawiser, and J. Silk. Constraining primordial non-gaussianity with the abundance of high-redshift clusters. *Astrophys. J.*, 532 :1–16, 2000.
- [149] R. Ryan. The statistics of burgers turbulence initialized with fractional brownian noise data. *Commun. Math. Phys.*, 191 :71–86, 1998.
- [150] A. I. Saichev and W. A. Woyczynski. Density fields in burgers and kdv-burgers turbulence. *SIAM J. Appl. Math.*, 56 (4) :1–31, 1996.
- [151] R. Schaeffer and J. Silk. Biased galaxy formation in a universe dominated by cold dark matter. *Astrophys. J.*, 292 :319–329, 1985.
- [152] R. Scoccimarro, S. Colombi, and J. N. Fry et al. Nonlinear evolution of the bispectrum of cosmological perturbations. *Astrophys. J.*, 496 :586–604, 1998.
- [153] L. Senatore, S. Tassev, and M. Zaldarriaga. Non-gaussianities from perturbing recombination. *JCAP*, 9 :38, 2009.
- [154] Z.-S. She, E. Aurell, and U. Frisch. The inviscid burgers equation with initial data of brownian type. *Commun. Math. Phys.*, 148 :623–641, 1992.
- [155] R. K. Sheth, H. J. Mo, and G. Tormen. Ellipsoidal collapse and an improved model for the number and spatial distribution of dark matter haloes. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 323 :1–12, 2001.
- [156] R. K. Sheth and G. Tormen. Large-scale bias and the peak background split. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 308 :119–126, 1999.
- [157] Ya. G. Sinai. Statistics of shocks in solutions of inviscid burgers equation. *Commun. Math. Phys.*, 148 :601–621, 1992.
- [158] A. Slosar, C. Hirata, U. Seljak, S. Ho, and N. Padmanabhan. Constraints on local primordial non-gaussianity from large scale structure. *JCAP*, 8 :31, 2008.
- [159] R. E. Smith, J. A. Peacock, and A. Jenkins et al. Stable clustering, the halo model and non-linear cosmological power spectra. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 341 :1311–1332, 2003.
- [160] T. Sousbie, C. Pichon, H. Courtois, S. Colombi, and D. Novikov. The three-dimensional skeleton of the sdss. *Astrophys. J.*, 672 :L1–L4, 2008.

- [161] T. Sousbie, C. Pichon, and S. Colombi et al. The 3d skeleton : tracing the filamentary structure of the universe. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 383 :1655–1670, 2008.
- [162] V. Springel. The cosmological simulation code gadget-2. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 364 :1105–1134, 2005.
- [163] V. Springel. E pur si muove : Galilean-invariant cosmological hydrodynamical simulations on a moving mesh. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 401 :791–851, 2010.
- [164] V. Springel, C. S. Frenk, and S. D. M. White. The large-scale structure of the universe. *Nature*, 440 :1137–1144, 2006.
- [165] I. Szapudi and S. Colombi. Cosmic error and statistics of large-scale structure. *Astrophys. J.*, 470 :131–148, 1996.
- [166] A. Taruya and T. Hiramatsu. A closure theory for nonlinear evolution of cosmological power spectra. *Astrophys. J.*, 674 :617–635, 2008.
- [167] A. Taruya, T. Nishimichi, S. Saito, and T. Hiramatsu. Nonlinear evolution of baryon acoustic oscillations from improved perturbation theory in real and redshift spaces. *Phys. Rev. D*, 80 :123503, 2009.
- [168] M. Tegmark, D. Eisenstein, and M. Strauss et al. Cosmological constraints from the sdss luminous red galaxies. *Phys. Rev. D*, 74 :123507, 2006.
- [169] R. Teyssier. Cosmological hydrodynamics with adaptive mesh refinement. a new high resolution code called ramses. *Astron. Astrophys.*, 385 :337–364, 2002.
- [170] R. Teyssier, J.-P. Chieze, and J.-M. Alimi. Self-similar spherical collapse revisited : A comparison between gas and dark matter dynamics. *Astrophys. J.*, 480 :36–42, 1997.
- [171] J. Tinker, A. V. Kravtsov, and A. Klypin et al. Toward a halo mass function for precision cosmology : The limits of universality. *Astrophys. J.*, 688 :709–728, 2008.
- [172] R. Tribe and O. Zaboronski. On the large time asymptotics of decaying burgers turbulence. *Commun. Math. Phys.*, 212 :415–436, 2000.
- [173] D. Tweed, J. Devriendt, J. Blaizot, S. Colombi, and A. Slyz. Building merger trees from cosmological n-body simulations. towards improving galaxy formation models using subhaloes. *Astron. Astrophys.*, 506 :647–660, 2009.
- [174] P. Valageas. Structure formation : a spherical model for the evolution of the density distribution. *Astron. Astroph.*, 337 :655–670, 1998.
- [175] P. Valageas. Dynamics of gravitational clustering. i. steepest-descent method for the quasi-linear regime. *Astron. Astroph.*, 379 :8–20, 2001.
- [176] P. Valageas. Dynamics of gravitational clustering. ii. steepest-descent method for the quasi-linear regime. *Astron. Astroph.*, 382 :412–430, 2002.
- [177] P. Valageas. Dynamics of gravitational clustering. iv. the probability distribution of rare events. *Astron. Astroph.*, 382 :450–476, 2002.
- [178] P. Valageas. A new approach to gravitational clustering : A path-integral formalism and large-n expansions. *Astron. Astroph.*, 421 :23–40, 2004.
- [179] P. Valageas. Relaxation of a one-dimensional gravitational system. *Phys. Rev. E*, 74 :016606, 2006.
- [180] P. Valageas. Thermodynamics and dynamics of a 1-d gravitational system. *Astron. Astroph.*, 450 :445–459, 2006.
- [181] P. Valageas. Large-n expansions applied to gravitational clustering. *Astron. Astroph.*, 465 :725–747, 2007.
- [182] P. Valageas. Using the zeldovich dynamics to test expansion schemes. *Astron. and Astroph.*, 476 :31–58, 2007.
- [183] P. Valageas. Expansion schemes for gravitational clustering : computing two-point and three-point functions. *Astron. Astroph.*, 484 :79–101, 2008.
- [184] P. Valageas. Mass functions and bias of dark matter halos. *Astron. Astrophys.*, 508 :93–106, 2009.
- [185] P. Valageas. Quasi-linear regime and rare-event tails of decaying burgers turbulence. *Phys. Rev. E*, 80 :016305, 2009.
- [186] P. Valageas. Some statistical properties of the burgers equation with white-noise initial velocity. *J. Stat. Phys.*, 137 :729–764, 2009.
- [187] P. Valageas. Statistical properties of the burgers equation with brownian initial velocity. *J. Stat. Phys.*, 134 :589, 2009.

- [188] P. Valageas. Mass function and bias of dark matter halos for non-gaussian initial conditions. *Astron. Astrophys.*, 514 :A46, 2010.
- [189] P. Valageas and D. Munshi. Evolution of the cosmological density distribution function : a new analytical model. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 354 :1146–1158, 2004.
- [190] R. van de Weygaert and E. Platen. Cosmic voids : structure, dynamics and galaxies. *Mod. Phys. Lett. A*, pages –, 2009.
- [191] S. C. Vauclair, A. Blanchard, and R. Sadat et al. The xmm-omega project. ii. cosmological implications from the high redshift $l - t$ relation of x-ray clusters. *Astron. Astrophys.*, 412 :L37–L41, 2003.
- [192] M. Lo Verde, A. Miller, S. Shandera, and L. Verde. Effects of scale-dependent non-gaussianity on cosmological structures. *JCAP*, 4 :14, 2008.
- [193] M. Vergassola, B. Dubrulle, U. Frisch, and A. Noullez. Burgers’equation, devil’s staircases and the mass distribution for large-scale structures. *Astron. Astrophys.*, 289 :325–356, 1994.
- [194] A. Vikhlinin, W. Forman, and C. Jones. Outer regions of the cluster gaseous atmospheres. *Astrophys. J.*, 525 :47–57, 1999.
- [195] A. Vikhlinin, A. Voevodkin, and C. R. Mullis et al. Cosmological constraints from the evolution of the cluster baryon mass function at $z \approx 0.5$. *Astrophys. J.*, 590 :15–25, 2003.
- [196] M. S. Warren, K. Abazajian, D. E. Holz, and L. Teodoro. Precision determination of the mass function of dark matter halos. *Astrophys. J.*, 646 :881–885, 2006.
- [197] D. H. Weinberg and J. E. Gunn. Large-scale structure and the adhesion approximation. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 247 :260–286, 1990.
- [198] Y. B. Zeldovich. Gravitational instability : An approximate theory for large density perturbations. *Astron. Astrophys.*, 5 :84–89, 1970.
- [199] J. Zinn-Justin. *Quantum field theory and critical phenomena*. Clarendon Press, Oxford, 1989.

Liste des publications reprises dans ce mémoire

Dynamics of gravitational clustering II. Steepest-descent method for the quasi-linear regime, Valageas P., Astron. Astrophys., 382, 412-430 (2002)

Dynamics of gravitational clustering III. The quasi-linear regime for some non-Gaussian initial conditions, Valageas P., Astron. Astrophys., 382, 431-449 (2002)

Dynamics of gravitational clustering IV. The probability distribution of rare events, Valageas P., Astron. Astrophys., 382, 450-476 (2002)

Large-N expansions applied to gravitational clustering, Valageas P., Astron. Astrophys., 465, 725 (2007)

Using the Zeldovich dynamics to test expansion schemes, Valageas P., Astron. Astrophys., 476, 31-58 (2007)

Expansion schemes for gravitational clustering : computing two-point and three-point functions, Valageas P., Astron. Astrophys., 484, 79-101 (2008)

Propagators in Lagrangian space, Bernardeau F., Valageas P., Phys. Rev. D, 78, 083503 (2008)

Statistical properties of the Burgers equation with Brownian initial velocity, Valageas P., J. Stat. Phys., 134, 589-640 (2009)

Mass functions and bias of dark matter halos, Valageas P., Astron. Astrophys. 508, 93-106 (2009)

Mass function and bias of dark matter halos for non-Gaussian initial conditions, Valageas P., Astron. Astrophys. 514, A46 (2010)

Eulerian and Lagrangian propagators for the adhesion model (Burgers dynamics), Bernardeau F., Valageas P., Phys. Rev. D, 81, 043516 (2010)

Annexe A

Exposé synthétique des travaux de recherche

Je donne dans les paragraphes suivants une description rapide de mes travaux de recherche. Les chiffres entre crochets renvoient aux articles donnés dans la liste des publications ci-jointe, en annexe D page 100.

A.1 Cosmologie observationnelle

Un modèle pour la formation des grandes structures de l’Univers

Au cours de ma thèse au SPhT, sous la direction de R. Schaeffer, nous avons développé un modèle analytique pour la formation des structures à grande échelle de l’Univers [3,4]. On peut ainsi décrire de manière cohérente, avec un petit nombre de paramètres, des objets d’apparence très différente sur une gamme de densité qui couvre cinq ordres de grandeur : amas de galaxies, galaxies, absorbants Lyman- α , grandes régions vides entre les filaments où se concentrent les galaxies, ..., de même que leur évolution au cours du temps [5]. Au cours de mon séjour post-doctoral à Berkeley, puis à mon retour à Saclay, j’ai poursuivi le développement de ce modèle.

Populations d’objets astrophysiques observés dans l’Univers à bas redshift

Absorbants Lyman- α Nous avons ainsi construit un modèle [6] pour les absorbants Lyman- α (nuages de gaz observés par le biais des raies d’absorption qu’ils produisent sur le spectre des quasars lointains dont ils croisent la ligne de visée) qui traite ces divers objets (avec une densité de surface d’hydrogène allant de 10^{12} à 10^{22} cm^{-2}) d’une manière unifiée. On retrouve en particulier la distribution en densité et en redshift observée dans les données, ainsi que leur corrélation spatiale.

Galaxies et amas de galaxies Nous tournant ensuite vers les objets massifs très lumineux, nous avons obtenu la distribution et l’évolution en redshift des amas et des groupes de galaxies [13]. On obtient à nouveau un bon accord avec les distributions de luminosité et les relations température-luminosité observées, ce qui requiert notamment la prise en compte du chauffage par les chocs. Par ailleurs, nous avons calculé dans ce même article la distribution des galaxies et des quasars, ce qui nous a permis par exemple d’évaluer les contributions spécifiques de ces différents objets au rayonnement X. Un avantage significatif de notre modèle est qu’il permet de décrire simultanément et de manière cohérente plusieurs catégories d’objets, alors que les modèles classiques (l’approche de Press-Schechter 1974) ne peuvent prendre en compte qu’une seule classe d’objets, définis par un critère de densité unique.

Distribution spatiale Nous avons étudié la distribution spatiale (à travers la fonction de corrélation à deux points) de ces divers objets ainsi que l’évolution temporelle des fractions de masse qui leur sont associées [15]. En particulier, on retrouve le fait que les nuages Lyman- α sont sous-corrélés et les galaxies brillantes sur-corrélées, par rapport au champ de densité continu de la matière noire. Nos résultats sont en bon accord avec les observations et confirment à nouveau le scénario cosmologique standard, basé sur de la matière noire froide (i.e. avec une dispersion de vitesse négligeable), qui forme des structures de plus en plus grandes au cours du temps sous l’action de l’instabilité gravitationnelle.

Réchauffage et réionisation de l’Univers à bas redshift Développant encore davantage notre modèle, nous avons pu suivre de manière cohérente l’évolution de l’univers depuis une époque où il avait $1/1000$ e de son âge actuel jusqu’à aujourd’hui, en tenant compte des divers objets qui se forment et de leurs interactions. Cela

nous a permis de décrire le réchauffage et la réionisation de l'Univers par les premières galaxies et les premiers quasars [7]. Le rayonnement ainsi dégagé réchauffe peu à peu le milieu intergalactique tout en créant un flux ultraviolet diffus, ce qui conduit à une réionisation du gaz à $z \sim 7$. Nous avons également étudié l'impact de ces processus sur les observations du fond diffus cosmologique (CMB) [16]. En effet, la diffusion par effet Thomson des photons du CMB sur les électrons chauds des bulles de gaz ionisées et des galaxies induit des anisotropies secondaires. Nous avons calculé ces divers effets et montré par exemple qu'il est difficile de distinguer un scénario dominé par les étoiles d'un scénario dominé par les quasars, car le signal n'est pas gouverné par la taille des bulles mais plutôt par leur corrélation à grande échelle, qui provient des corrélations du champ de densité de la matière noire sous-jacent.

Puzzles du scénario cosmologique standard

Bien que le scénario hiérarchique standard de formation des grandes structures soit en bon accord avec de très nombreuses données (fond diffus cosmologique, catalogues de galaxies, spectre d'absorption des quasars lointains,...), quelques problèmes persistent, comme le décalage entre les propriétés mesurées des amas de galaxies et les lois d'échelle attendues dans les modèles simples ou la faible quantité de baryons observée dans l'Univers proche.

Génération d'entropie Une raison possible de la déviation de la relation température-luminosité X des petits amas par rapport aux lois d'échelle attendues est que le milieu intergalactique est réchauffé par les supernovae ou les quasars. Ceci accroît l'entropie du gaz et empêche en partie sa contraction adiabatique ultérieure dans le puit de potentiel des amas, ce qui diminue leur luminosité et pourrait alors expliquer les observations. Nous avons réalisé une des premières études détaillées de ce point [9], et montré que l'énergie dégagée par les supernovae est insuffisante, tandis que les quasars peuvent facilement jouer ce rôle. Par ailleurs, nous avons souligné le fait que les observations d'amas de galaxies (qui requièrent ce réchauffage) et de galaxies (qui n'autorisent pas de réchauffage trop élevé) contraignent fortement ces scénarios.

Milieu intergalactique "tiède" Une explication de la masse manquante de baryons à bas redshift, qui avait été avancée assez récemment à partir de résultats de simulations numériques, est qu'il existe une composante "tiède" ($\sim 10^5 K$) du milieu intergalactique, qui est de ce fait difficile à observer (car ionisée mais diffuse et ne rayonnant guère). Nous avons alors obtenu de manière théorique le diagramme des phases "densité-température" des baryons [23] et montré que ces résultats numériques peuvent se comprendre par des arguments physiques simples et découlent directement du scénario hiérarchique standard. Ainsi, le milieu intergalactique apparaît formé de deux phases, a) une composante froide photo-ionisée et b) cette composante tiède, chauffée par les chocs induits par l'effondrement gravitationnel des grandes structures.

Entropie des petits amas de galaxies Nous avons ensuite suggéré que les deux problèmes précédents pourraient en fait être liés [24], car le milieu intra-amas pourrait être nourri par ce gaz "tiède". En particulier, nous avons montré que la quantité disponible est suffisante pour expliquer l'entropie observée des petits amas et leur écart aux lois d'échelle. L'avantage de ce mécanisme est qu'il est une conséquence directe du scénario standard de formation des grandes structures, et ne nécessite pas de faire intervenir des sources de chauffage telles que les quasars.

Effets de lentille gravitationnelle

Le modèle utilisé dans les paragraphes précédents pour obtenir les propriétés de divers objets astrophysiques est basé sur une modélisation du champ de densité de matière noire. Quelques temps après mon retour à Saclay, je me suis tourné vers le domaine des effets de lentille gravitationnelle faibles, qui sont précisément produits par les fluctuations de densité aux échelles cosmologiques, et constituait donc une extension naturelle de mes sujets de recherche.

En effet, les images de sources lumineuses lointaines, telles les galaxies de grand redshift, sont déformées et amplifiées (ou atténuées), sous l'effet des fluctuations de densité le long de la ligne de visée, qui dévient la trajectoire des rayons lumineux. Cet effet de "lentille gravitationnelle", dans ce régime de faibles distortions, permet donc par une étude statistique sur un grand nombre de galaxies de mesurer les propriétés du potentiel gravitationnel et du champ de densité à grande échelle. Il offre également une voie prometteuse pour contraindre la géométrie et la dynamique de l'Univers, notamment sa phase d'expansion accélérée récente associée à une éventuelle énergie noire. D'un autre côté, lorsqu'il s'agit d'utiliser des sources lumineuses lointaines (supernovae, ...) comme "chandelles standards" pour estimer les paramètres cosmologiques de l'univers, ces distortions sont une source d'erreur supplémentaire.

Je me suis tout d'abord intéressé à l'**amplification/atténuation des supernovae lointaines** par cet effet [11], en montrant comment on pouvait relier quantitativement ce dernier aux propriétés statistiques du champ

de densité sous-jacent. Cela m’a permis d’exprimer la distribution de probabilité de cette distortion en terme de la distribution de probabilité de la densité aux échelles non-linéaires (de l’ordre de la taille des galaxies). On retrouve ainsi par une méthode analytique le comportement mesuré dans des simulations numériques. D’autre part, on montre que bien que cela induise une atténuation systématique l’effet est trop petit pour affecter la mesure des paramètres cosmologiques par le biais de la relation distance-luminosité des supernovae.

Utilisant la même approche, j’ai ensuite étudié **la distribution de probabilité de l’amplification et du cisaillement des images de galaxies lointaines**. Il est ainsi possible de construire un modèle [12,14,25,26] qui est asymptotiquement exact aux grandes échelles (lorsque l’on moyenne les images de galaxies sur une grande surface du ciel, typiquement sur une ouverture angulaire de plus de 10 arcmin, pour obtenir le cisaillement gravitationnel dû aux grandes longueurs d’onde du potentiel gravitationnel) et réaliste aux petites échelles (< 10 arcmin, où l’on est sensible au régime non-linéaire de la formation des structures). En particulier, on peut vérifier qu’il est en bon accord avec les résultats de simulations numériques. De plus, cette approche, qui est basée sur les fonctions de corrélation à N points du champ de densité, montre quantitativement comment le cisaillement gravitationnel dépend du détail des propriétés statistiques de ces dernières. Ceci pourrait permettre de distinguer de manière fine entre plusieurs modèles phénoménologiques des grandes structures de l’univers, qui sont identiques au niveau des fonctions à un point et ne diffèrent que par leur structure à N points (ex., probabilité conjointe dans N cellules) [28]. Plus généralement, ces travaux montrent comment il serait possible de remonter à la distribution de probabilité du champ de densité sous-jacent à partir des observations des effets de lentille gravitationnelle.

Par ailleurs, nous avons étudié de nouveaux **estimateurs** des cumulants de bas ordre, destinés à la détection des non-Gaussiannités induites par les non-linéarités de la dynamique gravitationnelle, qui présentent un meilleur rapport signal sur bruit que les estimateurs usuels [30]. De telles mesures pourraient servir à confirmer le scénario standard de formation des structures à grande échelle de l’Univers par amplification gravitationnelle de petites fluctuations initiales Gaussiennes. Nous avons également estimé le gain d’information qui peut être obtenu en corrélant des données associées à des échelles angulaires ou des redshifts différents [31,32].

J’ai enfin collaboré à un article de **revue** détaillé [38] traitant des effets de lentille gravitationnelle dans le contexte cosmologique, des points de vue théorique et expérimental, ainsi qu’à une revue d’introduction [33].

A.2 Dynamique gravitationnelle et formation des grandes structures de l’Univers

Un second aspect de mes travaux consiste à développer des approches analytiques pour étudier le processus même de formation des grandes structures de l’Univers par instabilité gravitationnelle. Plutôt que de considérer des objets astrophysiques bien précis, il s’agit donc d’étudier la dynamique hors d’équilibre engendrée par la gravité. Ceci se rapproche de sujets d’hydrodynamique ou de physique statistique.

Modèles phénoménologiques

Replaçant le modèle étudié durant ma thèse dans un **cadre multifractal** plus général, j’ai tout d’abord montré qu’il représente la description la plus simple qui soit compatible avec les données et qui prenne en compte les sous-structures présentes dans les plus gros objets [8]. Nous avons également comparé en détail ses prédictions avec les simulations numériques [5] et obtenu un accord raisonnable, y compris pour des quantités que ne peuvent décrire des approches analytiques alternatives (une particularité de ce modèle est qu’il permet de définir les objets par un seuil de densité quelconque, et non pas unique, ce qui autorise l’étude de structures de plusieurs types). Nous avons également pu affiner par la suite ce modèle [29] grâce à des résultats théoriques que j’avais obtenus entre temps.

Développements perturbatifs

Les modèles phénoménologiques visent principalement à fournir une description réaliste du système, afin de pouvoir en estimer les conséquences “astrophysiques” (par ex. distribution des galaxies, processus de réionisation, etc.). Cependant, pour calibrer de tels modèles, ou pour comprendre la dynamique à l’oeuvre, il faut résoudre les équations du mouvement. Cela se fait souvent à l’aide de simulations numériques, mais il est aussi nécessaire de développer des approches analytiques. Ces dernières permettent de mieux comprendre le système étudié et aussi d’obtenir plus rapidement des estimations quantitatives en fonction des divers paramètres cosmologiques (constante de Hubble, densité de matière noire, etc.).

La dynamique étant non-linéaire et hors d’équilibre il s’agit en fait d’un problème assez difficile, et les techniques utilisées jusqu’à présent sont assez peu nombreuses. L’approche traditionnelle consiste à se placer dans un cadre hydrodynamique et à chercher un développement perturbatif de la solution des équations du mouvement. En effet, dans le scénario cosmologique standard, basé sur de la matière noire froide, qui a donc

par définition une dispersion de vitesse négligeable, on peut aux grandes échelles faire une approximation à un seul flot (i.e. une seule vitesse en chaque point d'espace) ce qui conduit aux équations de l'hydrodynamique habituelle (plus interaction gravitationnelle et expansion cosmologique). D'autre part, comme les fluctuations de densité décroissent aux grandes échelles ou dans le passé, on peut faire un développement perturbatif autour de la solution homogène (qui suit le flot de Hubble moyen) en puissances de l'amplitude des fluctuations initiales.

Dans cette approche, j'ai montré que dans le cadre des scénarios hiérarchiques standards les termes de la **série perturbative** divergent toujours au-delà d'un certain ordre, et que ces divergences ne peuvent pas être éliminées par resommation [21]. Néanmoins, les termes finis restent valables car on peut les retrouver par une méthode non-perturbative [18].

Pour aller au-delà de l'approximation hydrodynamique, qui cesse de s'appliquer dès que des particules se croisent (dynamique multi-flots), il faut écrire les équations du mouvement en terme de la **distribution dans l'espace des phases**, $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$. J'ai donc étendu l'approche perturbative à ce système d'équations (Vlasov-Poisson) et montré que l'on retrouve à tous les ordres les résultats obtenus par l'approximation hydrodynamique [17]. Ceci indique que le régime fortement non-linéaire ne peut être étudié que par des méthodes non-perturbatives.

Méthode non-perturbative

Afin d'aller au-delà de ces développements perturbatifs, m'inspirant de méthodes de théorie des champs (instantons) j'ai développé une approche non-perturbative pour obtenir la distribution de probabilité de la densité moyennée sur un rayon quelconque. Cette **méthode du col** consiste en quelque sorte à développer autour d'une solution exacte non-triviale de la dynamique (à symétrie sphérique), qui dépend du problème posé, plutôt qu'autour de la solution homogène. Dans le régime quasi-linéaire cela permet de justifier et de corriger les résultats obtenus par la théorie des perturbations usuelle [18]. Cette méthode s'applique aussi au cas de conditions initiales non-Gaussiennes [19] et aux queues de distribution (événements rares) dans le régime non-linéaire [20]. Elle permet également d'évaluer l'erreur introduite dans les simulations numériques lors de la définition des conditions initiales, et ainsi d'obtenir un critère quantitatif pour vérifier que la simulation a été démarrée suffisamment tôt dans le passé [22].

Plus récemment, j'ai repris cette approche pour revisiter la modélisation traditionnelle de la fonction de masse et de la fonction de corrélation des amas de galaxies [45]. En particulier, j'ai montré comment la prise en compte explicite du mouvement des halos permet d'améliorer la formule usuelle et de reproduire les résultats de simulations numériques sans avoir à rajouter un paramètre libre ad-hoc. J'ai ensuite généralisé cette étude au cas de **conditions initiales non-Gaussiennes** [46], qui est un sujet très actuel. En effet, la mesure de la corrélation des amas aux très grandes distances s'est récemment révélée être un outil compétitif pour détecter d'éventuelles non-Gaussiannités primordiales, ce qui contraindrait fortement les modèles d'inflation (physique de l'Univers primordial).

Approches fonctionnelles

La méthode du col précédente présente cependant de sérieuses limitations (par ex. elle ne peut décrire que des événements rares). Afin de disposer d'autres outils analytiques j'ai donc réexprimé les équations du mouvement sous la forme d'intégrales de chemin, que ce soit dans leur formulation non-collisionnelle exacte (équation de Vlasov) [27] ou dans leur formulation hydrodynamique (approximation à un seul flot) [36]. Ceci permet alors d'utiliser les outils standards de la théorie des champs, tels que les développements de grand N (où l'on généralise le système au cas de champs à N composantes). Ces méthodes peuvent aussi s'interpréter comme des **resommations infinies partielles** du développement perturbatif standard.

Dans le cadre non-collisionnel [27], j'ai tout d'abord obtenu l'action $S[f]$ qui donne le poids statistique associé à chaque fonction de distribution dans l'espace des phases $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$. Cette action contient à la fois la moyenne sur les conditions initiales Gaussiennes et la dynamique de Vlasov-Poisson (i.e. gravité sans collisions). J'ai alors montré en détail comment un développement en $1/N$ retrouve dans le régime quasi-linéaire les résultats obtenus par la théorie des perturbations standard appliquée aux équations du mouvement hydrodynamiques. Ce travail ouvre la voie à une étude du régime fortement non-linéaire, qui est hors d'atteinte de l'approche hydrodynamique.

Néanmoins, la modélisation hydrodynamique reste très utile pour décrire les grandes échelles et le régime faiblement non-linéaire. D'un point de vue observationnel, c'est le régime sondé par l'étude de la fonction de corrélation entre amas de galaxies, les effets de lentille gravitationnelle faibles et la mesure des oscillations baryoniques dans le spectre de puissance du champ de densité aux grandes longueurs d'onde. Dans ce cadre, j'ai calculé les prédictions de deux telles méthodes de théorie des champs, à l'ordre d'une boucle, pour une cosmologie Λ CDM standard [36]. On obtient alors des **fonctions de réponse** qui montrent des oscillations rapides ou qui décroissent dans le régime non-linéaire, tandis que les fonctions de corrélation gardent une croissance modérée. Ceci représente une amélioration par rapport à la théorie des perturbations standard (où

les quantités statistiques “explosent” de plus en plus rapidement lorsque l’on inclut des termes d’ordre plus élevés). Ceci suggère que de telles approches pourraient s’avérer utiles pour modéliser la distribution de matière dans le régime non-linéaire. Il s’agit d’un objectif important car il est nécessaire d’obtenir une précision théorique meilleure que 10% pour le spectre de puissance du champ de densité dans le régime faiblement non-linéaire pour en déduire des contraintes utiles sur les paramètres cosmologiques, par comparaison avec les observations de lentilles gravitationnelles ou d’oscillations baryoniques. J’ai également étudié en détail ces approches dans le cadre d’une dynamique simplifiée, qui est exactement soluble [37]. Cela permet de comparer l’efficacité des ces diverses méthodes d’approximation et d’obtenir leurs propriétés aux grands ordres.

J’ai ensuite décrit comment utiliser ces méthodes pour obtenir les fonctions de corrélation d’ordre plus élevé, et plus particulièrement d’ordre trois, qui est très utile pour lever les dégénérescences sur les paramètres cosmologiques [39]. Enfin, nous avons étendu ces approches au formalisme Lagrangien (où l’on suit les trajectoires des particules) [35], et montré que les fonctions de réponse ne présentent pas la décorrélation exponentielle obtenue dans un cadre Eulérien. Cela confirme l’idée que cette dernière est due aux mouvements d’ensemble du système (modes de grande longueur d’onde) mais ne traduit pas une véritable perte de mémoire des structures du champ de densité.

Etude de dynamiques proches

L’étude de la formation des grandes structures en cosmologie m’a amené à m’intéresser à des dynamiques similaires, qui ont un intérêt plus général : un système gravitationnel à une dimension et la dynamique de Burgers.

Systèmes à longue portée

Inspiré par le problème de la formation des grandes structures en cosmologie, je me suis intéressé aux propriétés d’un système gravitationnel à une dimension, entre deux parois réfléchissantes. Ce problème est similaire au modèle HMF (interaction en cosinus sur un cercle) utilisé en mécanique statistique pour l’étude des systèmes avec interactions à longue portée. Ainsi, une analyse thermodynamique [34] montre que ce système gravitationnel à 1D présente lui aussi une transition de phase du second ordre, depuis un équilibre homogène à haute température vers une phase inhomogène à basse température (avec deux pics de densité, aux bords du système). Il existe de plus une infinité d’équilibres instables, apparaissant graduellement lorsque l’on diminue la température, qui traduisent l’invariance d’échelle de la gravité. Dans un second travail [35] j’ai étudié par des approches analytiques et numériques la **relaxation vers l’équilibre** de ce système. A basse température ceci procède généralement en deux temps, avec une phase de “relaxation violente” suivie d’une phase collisionnelle très lente, où le système passe par une série d’états quasi-stationnaires. En particulier, nous avons montré que le temps de relaxation croît comme $Ne^{1/T}$ à basse température (où N est le nombre de particules), en accord avec les simulations numériques.

Dynamique de Burgers

Une dynamique simplifiée qui permet de décrire la formation des structures à grande échelle est fournie par l’équation de Burgers. Cette dernière apparaît en fait dans de très nombreuses applications physiques, et fut historiquement introduite pour étudier la **turbulence** hydrodynamique. Il s’agit de plus d’un système intégrable, ce qui permet de comprendre de manière fine ses propriétés. Cependant, calculer l’évolution temporelle de ses propriétés statistiques, pour des conditions initiales stochastiques, reste généralement un problème difficile. J’ai donc étudié le cas unidimensionnel de vitesse initiale Brownienne [41], dominé par les grandes longueurs d’onde, puis le cas de vitesse initiale de bruit blanc, dominé par les petites longueurs d’onde [43], où j’ai pu obtenir de nombreux **résultats explicites** pour les champs de vitesse et de densité. Ces deux configurations sont des analogues directs du cas cosmologique (où les fluctuations initiales forment un mouvement Brownien fractionnaire) et des cas classiques dans le contexte hydrodynamique. La méthode développée à cette occasion m’a aussi permis d’obtenir de nouveaux résultats pour un processus classique d’aggrégation ballistique unidimensionnel, avec des particules de vitesse initiale Brownienne [42].

Ensuite, appliquant à l’équation de Burgers la méthode non-perturbative que j’avais développée pour la dynamique gravitationnelle, j’ai pu obtenir les queues de distributions de vitesse et de densité (événements rares) pour le cas général de conditions initiales Gaussiennes en dimension quelconque [44].

Enfin, nous avons pu calculer les fonctions de réponse exactes obtenues à une dimension [47], ce qui permet de mieux comprendre leurs relations avec les structures du champ de densité sous-jacent.

Annexe B

Perspectives scientifiques

De nombreuses questions sur les propriétés des grandes structures de l'Univers formées par la dynamique gravitationnelle restent ouvertes, principalement dans le régime fortement non-linéaire. Voici quelques pistes possibles, dans la suite des travaux présentés dans le mémoire d'habilitation, que je souhaite explorer plus en détail dans les prochaines années.

Approches perturbatives

- Les approches perturbatives, visant à décrire le régime faiblement non-linéaire, n'ont pas forcément livré toutes leurs potentialités. En effet, il se pourrait que d'autres schémas de resommation se révèlent plus efficaces, ou offrent une meilleure compréhension du système. En particulier, bien que le cadre Lagrangien ait déjà été abordé, il reste bien moins exploré que le cadre Eulérien, et il serait intéressant de développer plusieurs schémas de resommation dans ce formalisme. De plus, le cadre Lagrangien est plus directement sensible aux structures du champ de densité, qui sont les quantités les plus pertinentes du point de vue cosmologique (bien que les champs de vitesse eux-aussi présentent un intérêt observationnel). Par conséquent, il pourrait conduire à des resommations perturbatives plus efficaces que celles obtenues dans le cadre Eulérien. Il s'agit d'une thématique très actuelle, car les observations des effets de lentille gravitationnelle ou des oscillations acoustiques baryoniques par les prochaines missions (Euclid, BOSS, LSST) permettront de mesurer le spectre de puissance du champ de densité à une précision de l'ordre de 1%, tandis que les fits obtenus à partir des simulations numériques ont actuellement une précision de 5 – 10%. Un avantage de ces méthodes perturbatives systématiques est qu'elles permettent d'obtenir des résultats rapides et précis dans le régime faiblement non-linéaire, pour des valeurs quelconques des paramètres cosmologiques et une large gamme de conditions initiales.

- Il serait aussi intéressant de développer les liens possibles entre ces approches systématiques et des modèles plus phénoménologiques, tels que les modèles de halos. Cela pourrait permettre de mieux comprendre la transition vers le régime fortement non-linéaire et étendre davantage le régime de validité de ces méthodes. Par ailleurs, en faisant la jonction entre ces approches perturbatives et les modèles plus phénoménologiques on pourrait rendre ces derniers plus fiables, en réduisant le nombre de paramètres libres du fait des contraintes associées à une bonne correspondance dans le régime faiblement non-linéaire. Ceci serait très utile d'un point de vue pratique, car l'on doit souvent utiliser ces modèles plus phénoménologiques dans des situations où ils n'ont pas forcément été testés en détail (par exemple pour d'autres valeurs des paramètres cosmologiques).

- Enfin, l'utilisation des résultats obtenus par ces méthodes pour contraindre les scénarios cosmologiques devrait continuer à donner lieu à de nombreuses études, par exemple afin de comprendre en détail quelles propriétés des conditions initiales sont réellement testées par telle ou telle observation. Par ailleurs, ces approches ont commencé à être utilisées pour estimer l'impact de faibles non-Gaussianités primordiales, ou d'une composante importante de neutrinos massifs, sur le spectre de puissance du champ de densité. Cependant, il reste encore beaucoup à faire pour améliorer les techniques actuelles et obtenir des méthodes précises et rapides. Dans le même ordre d'idée, il serait aussi intéressant de considérer les effets associés à des modifications de la gravité à grande échelle (introduites par exemple pour expliquer l'accélération récente de l'expansion de l'Univers).

Dynamiques simplifiées

- L'étude de systèmes plus simples constitue un autre champ d'investigation qui pourrait encore s'avérer

fructueux. Par exemple, on pourrait envisager d'autres systèmes que le modèle d'adhésion (et la dynamique de Zeldovich) abordé dans ce mémoire, ou considérer des géométries différentes. En particulier, j'envisage de reprendre les études que j'avais commencé il y a quelques années sur le cas des systèmes gravitationnels unidimensionnels. Je m'étais alors intéressé à la relaxation vers l'équilibre thermodynamique, dans le contexte de la physique statistique des systèmes avec interactions à longue portée, mais je souhaiterais maintenant étudier le régime plus directement relié à la cosmologie, où le système présente une évolution hiérarchique. Cela devrait impliquer simultanément des approches numériques et analytiques.

- Une autre piste de recherche serait d'utiliser de tels systèmes dans une optique quantitative même, c'est-à-dire développer des théories de perturbation qui visent à approcher de manière systématique la dynamique gravitationnelle 3D à partir de ces solutions. Il s'agit d'une voie qui n'a quasiment pas été explorée (bien que la théorie des perturbations Lagrangienne puisse se voir en un certain sens comme une théorie des perturbations autour de l'approximation de Zeldovich). Je pense que c'est un angle d'attaque prometteur, que je souhaite explorer dans les années qui viennent.

Modèles phénoménologiques

Les modèles phénoménologiques eux-mêmes peuvent bien sûr être constamment améliorés, en tenant compte de détails plus fins ou en les associant avec les méthodes perturbatives systématiques (par exemple en construisant ainsi une interpolation des échelles quasi-linéaires aux échelles fortement non-linéaires). Une autre ligne d'étude consiste naturellement à explorer davantage les résultats que l'on peut en tirer. Par exemple, au-delà de la fonction de masse et de la fonction de corrélation à deux points étudiées dans ce mémoire, on pourrait calculer les fonctions de corrélation d'ordre plus élevé, et notamment le bispectre. C'est une thématique très actuelle, car l'étude de la fonction de corrélation à trois points (le bispectre en espace de Fourier) est un bon outil pour sonder les propriétés des conditions initiales, et plus précisément leur écart possible à la non-Gaussianité. En terme du paramètre f_{NL} , les observations actuelles donnent déjà $-30 < f_{\text{NL}} < 100$ et devraient bientôt descendre jusqu'à $|f_{\text{NL}}| \sim 1 - 10$, ce qui permettrait d'exclure, ou de confirmer, certains modèles d'inflation de l'Univers primordial.

Cadre plus général, interdisciplinaire

De manière plus générale, suivant le fil conducteur du mémoire, il s'agit de comprendre la dynamique non-linéaire hors-équilibre associée à la gravité Newtonienne dans un univers en expansion. Ce problème se place donc dans une thématique plus large, associée aux systèmes non-linéaires hors-équilibre, avec des interactions à longue portée. Cela permet de faire le lien avec des problématiques de physique statistique (par exemple, les systèmes avec interactions à longue portée) ou d'hydrodynamique (la turbulence). Il est alors possible d'utiliser dans un de ces contextes des techniques développées dans un autre domaine (comme nous l'avons montré dans quelques paragraphes du mémoire) et de parvenir ainsi à une meilleure compréhension du système étudié. Comme dans le contexte de la turbulence hydrodynamique, on aimerait alors mieux saisir les processus de relaxation éventuellement à l'oeuvre, et comprendre s'il existe des propriétés universelles (par exemple des exposants caractéristiques de la dynamique, indépendamment des détails des conditions initiales). On s'éloigne alors quelque peu des préoccupations cosmologiques elles-mêmes, mais on intègre ainsi une thématique plus large qui est aussi un champ de recherche très actif et qui offre des questions particulièrement intéressantes. Je souhaite explorer davantage cette connection, que j'ai déjà mise à profit dans mes travaux, par exemple sur la reformulation du problème dans un langage d'intégrales de chemin, ou sur l'équation de Burgers. En particulier, je pense que le croisement avec la recherche en turbulence ou en physique statistique (systèmes avec interactions à longue portée) peut encore apporter de nouvelles avancées.

Annexe C

Liste complète des publications

Il s'agit de la liste complète de mes articles publiés dans des revues avec comité de lecture. Les chiffres entre crochets correspondent aux citations dans l'annexe B précédente.

- [1] **Global Evolution of Solid Matter in Turbulent Protoplanetary Disks. I. Aerodynamics of Solid Particles**, Stepinski T.F., Valageas P., Astron. Astrophys., 309, 301-312 (1996)
- [2] **Global Evolution of Solid Matter in Turbulent Protoplanetary Disks. II. Development of Icy Planetesimals**, Stepinski T.F., Valageas P., Astron. Astrophys., 319, 1007-1019 (1997)
- [3] **The multiplicity function of galaxies, clusters and voids**, Valageas P., Schaeffer R., Astron. Astrophys., 328, 435-470 (1997)
- [4] **Structure formation : a spherical model for the evolution of the density distribution**, Valageas P., Astron. Astrophys., 337, 655-670 (1998)
- [5] **The mass and luminosity functions of galaxies and their evolution**, Valageas P., Schaeffer R., Astron. Astrophys., 345, 329-362 (1999)
- [6] **The redshift evolution of Lyman- α absorbers**, Valageas P., Schaeffer R., Silk J., Astron. Astrophys., 345, 691-711 (1999)
- [7] **The reheating and reionization history of the universe**, Valageas P., Silk J., Astron. Astrophys., 347, 1-20 (1999)
- [8] **Non-linear gravitational clustering : smooth halos, substructures and scaling exponents**, Valageas P., Astron. Astrophys., 347, 757-768 (1999)
- [9] **The entropy history of the universe**, Valageas P., Silk J., Astron. Astrophys., 350, 725-742 (1999)
- [10] **Scaling laws in gravitational clustering for counts-in-cells and mass functions**, Valageas P., Lacey C., Schaeffer R., Mon. Not. R. Astron. Soc., 311, 234-250 (2000)
- [11] **Weak gravitational lensing effects on the determination of Ω_m and Ω_Λ from SNeIa**, Valageas P., Astron. Astrophys., 354, 767-786 (2000)
- [12] **Statistical properties of the convergence due to weak gravitational lensing by non-linear structures**, Valageas P., Astron. Astrophys., 356, 771-787 (2000)
- [13] **Multiplicity functions and X-ray emission of clusters and groups versus galaxies and quasars**, Valageas P., Schaeffer R., Astron. Astrophys., 359, 821-842 (2000)
- [14] **Construction of the one-point PDF of the local aperture mass in weak lensing maps**, Bernardeau F., Valageas P., Astron. Astrophys., 364, 1-16 (2000)
- [15] **The redshift evolution of bias and baryonic matter distribution**, Valageas P., Silk J., Schaeffer R., Astron. Astrophys., 366, 363-375 (2001)
- [16] **Secondary CMB anisotropies from the kinetic SZ effect**, Valageas P., Balbi A., Silk J., Astron. Astrophys., 367, 1-17 (2001)
- [17] **Dynamics of gravitational clustering I. Building perturbative expansions**, Valageas P., Astron. Astrophys., 379, 8-20 (2001)
- [18] **Dynamics of gravitational clustering II. Steepest-descent method for the quasi-linear regime**, Valageas P., Astron. Astrophys., 382, 412-430 (2002)
- [19] **Dynamics of gravitational clustering III. The quasi-linear regime for some non-Gaussian initial conditions**, Valageas P., Astron. Astrophys., 382, 431-449 (2002)
- [20] **Dynamics of gravitational clustering IV. The probability distribution of rare events**, Valageas P., Astron. Astrophys., 382, 450-476 (2002)
- [21] **Dynamics of gravitational clustering V. Subleading corrections in the quasi-linear regime**,

- Valageas P., *Astron. Astrophys.*, 382, 477-487 (2002)
- [22] **Transients from Zeldovich initial conditions**, Valageas P., *Astron. Astrophys.*, 385, 761-767 (2002)
 - [23] **The phase-diagram of cosmological baryons**, Valageas P., Schaeffer R., Silk J., *Astron. Astrophys.*, 388, 741-757 (2002)
 - [24] **The phase-diagram of the intergalactic medium and the entropy floor of groups and clusters : are clusters born warm ?**, Valageas P., Schaeffer R., Silk J., *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 344, 53-59 (2003)
 - [25] **Analytical Predictions for Statistics of Cosmic Shear : Tests Against Simulations**, Valageas P., Barber A.J., Munshi D., *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 347, 654-666 (2004)
 - [26] **From linear to non-linear scales : analytical and numerical predictions for the weak lensing convergence**, Barber A.J., Munshi D., Valageas P., *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 347, 667-684 (2004)
 - [27] **A new approach to gravitational clustering : A path-integral formalism and large- N expansions**, Valageas P., *Astron. Astrophys.*, 421, 23-40 (2004)
 - [28] **Weak lensing shear and aperture mass from linear to non-linear scales**, Munshi D., Valageas P., Barber A.J., *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 350, 77-94 (2004)
 - [29] **Evolution of the cosmological density distribution function : new analytical model**, Valageas P., Munshi D., *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 354, 1146-1158 (2004)
 - [30] **On the estimation of gravity-induced non-Gaussianities from weak lensing surveys**, Valageas P., Munshi D., Barber A.J., *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 356, 386-400 (2005)
 - [31] **On cross-correlating weak lensing surveys**, Munshi D., Valageas P., *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 356, 439-455 (2005)
 - [32] **Covariance of weak lensing observables**, Munshi D., Valageas P., *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 360, 1401-1412 (2005)
 - [33] **Cosmology with Weak Lensing Surveys**, Munshi D., Valageas P., *Phil. Trans. R. Soc. A, Phys. Sci. Eng. (UK)*, 363, 2665-2673 (2005)
 - [34] **Thermodynamics and dynamics of a 1-D gravitational system**, Valageas P., *Astron. Astrophys.*, 450, 445-459 (2006)
 - [35] **Relaxation of a one-dimensional gravitational system**, Valageas P., *Phys. Rev. E*, 74, 016606 (2006)
 - [36] **Large- N expansions applied to gravitational clustering**, Valageas P., *Astron. Astrophys.*, 465, 725 (2007)
 - [37] **Using the Zeldovich dynamics to test expansion schemes**, Valageas P., *Astron. Astrophys.*, 476, 31-58 (2007)
 - [38] **Cosmology with Weak Lensing Surveys**, Munshi D., Valageas P., Van Waerbeke L., Heavens A., *Phys. Rep.*, 462, 67-121 (2008)
 - [39] **Expansion schemes for gravitational clustering : computing two-point and three-point functions**, Valageas P., *Astron. Astrophys.*, 484, 79-101 (2008)
 - [40] **Propagators in Lagrangian space**, Bernardeau F., Valageas P., *Phys. Rev. D*, 78, 083503 (2008)
 - [41] **Statistical properties of the Burgers equation with Brownian initial velocity**, Valageas P., *J. Stat. Phys.*, 134, 589-640 (2009)
 - [42] **Ballistic aggregation for one-sided Brownian initial velocity**, Valageas P., *Physica A*, 388, 1031-1045 (2009)
 - [43] **Some statistical properties of the Burgers equation with white-noise initial velocity**, Valageas P., *J. Stat. Phys.*, 137, 729-764 (2009)
 - [44] **Quasi-linear regime and rare-event tails of decaying Burgers turbulence**, Valageas P., *Phys. Rev. E*, 80, 016305 (2009)
 - [45] **Mass functions and bias of dark matter halos**, Valageas P., *Astron. Astrophys.*, 508, 93-106 (2009)
 - [46] **Mass function and bias of dark matter halos for non-Gaussian initial conditions**, Valageas P., *Astron. Astrophys. Preprint : arXiv :0906.1042*
 - [47] **Eulerian and Lagrangian propagators for the adhesion model (Burgers dynamics)**, Bernardeau F., Valageas P., *Phys. Rev. D*, 81, 043516 (2010)
 - [48] **Merging and fragmentation in the Burgers dynamics**, Bernardeau F., Valageas P., *Phys. Rev. E (sous presse)*, Preprint : arXiv :0912.3603

Articles soumis pas encore publiés.

- [49] **Secondary non-Gaussianity and Cross-Correlation Analysis**, Munshi D., Valageas P., Cooray A., Heavens A., Preprint : arXiv :0907.3229