

THESE DE DOCTORAT de L'UNIVERSITE PARIS 6

Spécialité:

PHYSIQUE THEORIQUE

présentée

par M. **Bertrand EYNARD**

pour obtenir le grade de DOCTEUR de l'UNIVERSITE PARIS 6

GRAVITATION QUANTIQUE BIDIMENSIONNELLE ET MATRICES ALEATOIRES

soutenue le 17 fevrier 1995

devant le jury composé de:

M ALVAREZ-GAUME Luis, rapporteur

M MARINARI Enzo, rapporteur

M BREZIN Edouard

M KAZAKOV Volodia

M PICHARD Jean-Louis

M WINDEY Paul

M ZINN-JUSTIN Jean, directeur

Remerciements

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à tous ceux qui m'ont permis de mener à son terme ce travail de thèse.

Tout d'abord l'école normale supérieure qui m'a formé et financé lors des deux premières années de thèse, puis le CEA pendant un peu plus d'un an et le laboratoire de physique théorique du centre d'études de Saclay qui m'a accueilli dans un cadre agréable et stimulant pendant trois ans et demi.

Je remercie aussi les membres du jury, en particulier les rapporteurs L. Alvarez–Gaume et E. Marinari pour avoir accepté de lire ma thèse et s'être montrés très disponibles, E. Brezin avec qui j'ai eu de nombreuses discussions et échanges d'idées, ainsi que V. Kazakov dont j'ai suivi les cours à l'école normale, J.L. Pichard pour d'intéressantes discussions et P. Windey pour m'avoir enseigné les bases de la théorie des champs et de la théorie des cordes en DEA et pour ses conseils au moment de la soutenance.

Je remercie également mon directeur de thèse Jean Zinn–Justin qui m'a beaucoup dirigé au début de ma thèse en me proposant des problèmes à ma portée et en me donnant des conseils chaque fois que j'étais à court d'idées.

Je veux aussi remercier tous les chercheurs, thésards et post–doc du SPhT avec qui j'ai eu des discussions enrichissantes sur le plan scientifique, en particulier I.K. Kostov, C. Kristjansen, S. Higuchi, F. David, R. Peschanski, P. Di Francesco, J.B. Zuber, ainsi que tous les autres que je ne cite pas, en particulier les thésards pour l'ambiance des repas à la cantine du CEA et ceux qui ont supporté mon silence et ma discrétion lorsque j'ai partagé leur bureau c'est à dire R. Peschanski, E. Amic et M. Bergère.

Enfin je dois exprimer ma reconnaissance à mes amis pour leur conseils et leur soutien moral durant la période difficile de la rédaction de la thèse.

Introduction

Quel peut être le rapport entre les matrices aléatoires et la gravitation ?

C'est à cette question que je vais tenter de répondre dans cette thèse et en particulier dans le premier chapitre qui est une longue introduction. J'y rappellerai que les matrices aléatoires sont très universelles en physique, elles apparaissent dès que l'on veut décrire un système couplant plusieurs degrés de libertés et que l'on a du désordre ou de l'indéterminisme, elles sont actuellement très utilisées pour modéliser le transport dans les systèmes mésoscopiques et pour comprendre le chaos quantique. Mais les matrices aléatoires ont également été développées dans un domaine plus surprenant, celui sur lequel j'ai travaillé: les surfaces aléatoires. A l'origine c'est en physique des particules (en QCD) que l'on a pour la première fois remarqué que les matrices pouvaient décrire des surfaces. Ce lien a ensuite été adapté en sens inverse et a fourni un outil de calcul très puissant pour obtenir des résultats exacts concernant les surfaces aléatoires et les théories des champs bidimensionnelles comme la très difficile théorie des cordes ou l'éternel problème de la quantification de la gravitation. Le premier chapitre servira à rappeler ou à introduire les concepts de toutes ces théories. J'ai voulu le rédiger de façon assez élémentaire et pédagogique pour être lu par un non-spécialiste de la théorie des cordes. Je n'y développe donc aucun calcul mais seulement des arguments simples permettant de comprendre où sont les points techniques importants et définissant les variables et les observables que l'on souhaite calculer grâce aux matrices aléatoires.

Dans le second chapitre j'expliquerai le lien entre les matrices et les surfaces. Ce lien est de nature mathématique et formelle, il repose sur une technique très connue en physique des particules et en théorie des champs: le développement diagrammatique. Là aussi j'ai tenté de présenter ce chapitre d'une façon aussi élémentaire que possible, j'y énoncerai les règles de Feynman, je développerai un exemple, et j'introduirai les difficultés cachées dans ce formalisme trop beau et trop simple. A la fin je montrerai le premier résultat quantitatif que l'on peut déduire de ce formalisme: le théorème de factorisation.

Le troisième chapitre est un chapitre purement technique, que l'on peut éviter en première lecture à condition de ne pas lire les parties les plus calculatoires et les plus techniques. J'y présenterai les trois principales méthodes de résolution qui ont été développées par les théoriciens des cordes. Il existe d'autres méthodes que je signalerai mais je n'ai véritablement utilisé que ces trois. Cette partie bien que technique n'utilise pas de mathématiques très compliquées (équations du second degré et un peu d'analyse complexe) et les calculs y sont simplifiés par l'existence de représentations intuitives comme l'analogie avec un gaz unidimensionnel ou l'interprétation géométrique.

Dans le quatrième chapitre j'achèverai d'expliquer le lien surfaces-matrices. En effet le second chapitre ne traite que des surfaces discrétisées alors que l'on s'intéresse surtout à des surfaces continues ce qui implique d'effectuer certaines limites dans les modèles de matrices. Je montrerai sur un exemple (utilisant les techniques du chapitre III) l'efficacité des modèles de matrices, et je décrirai le lien avec les théories des cordes. En particulier j'introduirai le chapitre suivant en montrant que dans les problèmes spécifiques à la théorie des cordes et à la gravitation, c'est à dire dès que l'on s'intéresse à la topologie des surfaces, des problèmes non triviaux apparaissent.

Le cinquième chapitre est consacré à l'un des problèmes rencontrés dans les modèles de ma-

trices, il s'agit de comprendre si le lien entre matrices et surfaces est seulement formel ou si il a un sens au delà de la théorie des perturbations qui lui a donné naissance, en pratique il s'agit de resommer une série divergente. Je présenterai donc le travail que j'ai effectué concernant le critère de sommabilité de Borel. Ce chapitre est divisé en une partie introductive et une partie calculatoire. La seconde présente ma contribution au sujet et est assez technique, elle utilise très fortement le chapitre III.

Dans le sixième chapitre je développerai un modèle de matrices particulier, le modèle $O(n)$. Dans une première partie introductive je présenterai ce modèle ainsi que les motivations qui ont pu conduire à son étude, puis j'expliquerai les méthodes que j'ai développées pendant ma thèse pour le résoudre. Cette deuxième partie sera donc très technique, je tâcherai de reprendre les mêmes notations que dans le chapitre III mais d'un point de vue logique, ce chapitre peut être considéré comme indépendant. Je prierai le lecteur d'excuser la présentation un peu trop ardue de la fin car j'y exposerai des résultats récents qui n'ont pas encore complètement aboutit ou qui sont encore en cours de recherche.

Bonne lecture et bon courage ...

Contents

I	Les matrices aléatoires en physique	1
I.1	Les matrices aléatoires en physique statistique	1
I.2	Les matrices aléatoires en QCD	5
I.3	Les surfaces aléatoires	6
I.4	La théorie des cordes	8
I.4.1	Les modèles duaux	8
I.4.2	Cordes et Théorie Quantique des Champs	9
I.5	La gravitation quantique	15
I.5.1	La Gravitation Quantique Bidimensionnelle	17
I.5.2	Lien avec la théorie des cordes	19
I.6	Théories conformes	20
I.6.1	Anomalie conforme et charge centrale	20
I.6.2	Théories conformes	21
I.6.3	Exposants critiques	23
II	Modèles de matrices et Surfaces discrétisées	25
II.1	Intégrales de matrices	25
II.2	Développement perturbatif	26
II.2.1	Règles de Feynman	27
II.2.2	Exemple	29
II.2.3	Dualité: Diagrammes $\longleftrightarrow$ Surfaces	31
II.3	Développement topologique en $1/N^2$	33
II.4	Surfaces ouvertes: interprétation de $\langle \text{tr } M^n \rangle$	34
II.4.1	Surfaces à plusieurs bords:	35
II.5	Théorème de factorisation	35

III Techniques mathématiques pour la résolution du modèle à une matrice	37
III.1 Présentation du modèle	37
III.1.1 Loi induite pour les valeurs propres	38
III.1.2 Observables	38
III.1.3 Méthodes de résolution	39
III.2 Méthode du col et gaz de Coulomb	40
III.2.1 Méthode du col naïve	40
III.2.2 Méthode du col pour les valeurs propres	40
III.2.3 Résolution des équations d'équilibre $F_i = 0$	41
III.2.4 Densité $\rho(\lambda)$ et points critiques	44
III.2.5 Exemple: potentiel quartique	46
III.3 Méthode des polynômes orthogonaux et gaz de fermions libres	48
III.3.1 Gaz de fermions libres	48
III.3.2 Calcul des polynômes orthogonaux	49
III.3.3 Limite classique $N \rightarrow \infty$	52
III.3.4 Application: calcul de l'énergie libre	54
III.3.5 Points critiques	55
III.3.6 Double limite d'échelle	56
III.3.7 Exemple: potentiel quartique	59
III.4 Méthode des boucles	62
III.4.1 Equation des boucles	62
III.4.2 Solution de l'équation des boucles dans la limite N grand	63
III.4.3 Equation des boucles à N quelconque: fonctions de boucles	64
III.4.4 La fonction à deux boucles $\omega(z, z')$	66
III.4.5 Développement topologique de $\omega(z)$	68
IV Surfaces continues	72
IV.1 Intégrales de surfaces régularisées et modèles de matrices	72
IV.2 Limite continue et points critiques	73
IV.3 Surfaces de topologie fixée	74
IV.4 Exemples: surfaces sphériques	75
IV.5 Double limite d'échelle	77

IV.6	Equation des cordes	79
IV.6.1	Modèle à une matrice	79
IV.6.2	Autres modèles de matrices	80
IV.6.3	Limite classique $\tau \rightarrow \infty$	80
V	Instabilités, comportement aux grands ordres et instantons	82
V.1	Séries asymptotiques	82
V.2	Sommation de Borel	83
V.3	Interprétation: instantons	84
V.3.1	Instantons en mécanique quantique	84
V.3.2	Instantons et modèles de matrices	85
V.4	Calcul de l'action de l'instanton par la méthode du col	87
V.5	Calcul par les équations de cordes	88
VI	Modèle $O(n)$	92
VI.1	Introduction	92
VI.2	Modèle d'Ising sur surface aléatoire	93
VI.3	Généralisation au modèle $O(n)$	96
VI.3.1	Gaz de boucles sur réseau aléatoire	96
VI.3.2	Dépendance en n	98
VI.3.3	Valeurs propres	100
VI.4	Méthode du col	100
VI.4.1	Résolution de l'équation du col	102
VI.4.2	Cas rationnel $\theta = \frac{p}{q}\pi$	103
VI.4.3	La fonction élémentaire $W(z)$	103
VI.5	Points critiques	106
VI.5.1	Calcul de l'exposant μ	110
VI.5.2	Voisinage du point critique $a \rightarrow 0$	112
VI.6	Méthode des boucles	113
VI.6.1	Invariance par reparamétrisation	113
VI.6.2	Limite classique $N \rightarrow \infty$	114
VI.6.3	Développement en $1/N$	115
VI.7	Cas $n = \pm 2$	118

VI.7.1	Cas $n = -2$	118
VI.7.2	Cas $n = 2$	121
VII	Articles	124
VII.1	The $O(n)$ model on a random surface: critical points and large order behaviour . .	125
VII.2	Large order behaviour of 2D gravity coupled to $D < 1$ matter	155
VII.3	Large random matrices: eigenvalue distribution (non publié)	167
VIII	Conclusions	187

Chapter I

Les matrices aléatoires en physique

Les matrices aléatoires ont une longue et fructueuse histoire en physique. Elles se trouvent au confluent des grands problèmes actuels de la physique théorique: la quantification de la gravitation, le désordre le chaos et la turbulence, les effets quantiques cohérents dans la matière condensée, les limites de la physique des particules. On les rencontre dans des domaines aussi variés que la théorie des cordes, les surfaces aléatoires, la gravitation quantique, le chaos quantique, les systèmes désordonnés, les systèmes mésoscopiques, la physique des particules, la turbulence, les mathématiques... Je vais essayer de donner un aperçu de ces domaines, et montrer comment s'introduisent les matrices aléatoires, et à quelles questions on s'intéresse.

I.1 Les matrices aléatoires en physique statistique

Physique nucléaire

Les matrices aléatoires ont d'abord été introduites en physique nucléaire par Wigner [2] pour expliquer la répartition complexe des niveaux d'énergie nucléaires des noyaux lourds. En effet on sonde la structure des noyaux en les bombardant par un faisceau de neutrons et en étudiant comment le faisceau est diffusé. La mesure de la section efficace de diffusion des neutrons en fonction de leur énergie présente des pics dus aux résonances des neutrons avec les niveaux d'énergie propre des noyaux. Le Hamiltonien du noyau d'un atome lourd est extrêmement compliqué, même en faisant de nombreuses approximations il est impossible de l'écrire explicitement. On peut tout au plus espérer calculer son fondamental et les niveaux de basse énergie alors que la diffusion des neutrons permet d'observer des niveaux de très grand nombre quantique $n \sim 10^6$ qu'il est impossible de calculer exactement. On ne peut même pas mesurer la valeur de n . On peut seulement étudier la répartition statistique de ces niveaux, observer leur distance moyenne, le nombre de niveaux par intervalle d'énergie (la densité $\rho(E)$), les corrélations entre niveaux... La statistique se fait en moyennant sur des intervalles du spectre.

On observe alors que les niveaux sont très corrélés, ils n'ont pas du tout une statistique Poissonienne de niveaux indépendants et ont une loi de répartition très universelle, c'est à dire qui ne dépend ni du type de noyau observé ni de la région du spectre.

Wigner dans les années 50 [2] a proposé de modéliser le Hamiltonien d'un système complexe par une matrice de grande taille ($N \times N$), dont les coefficients sont aléatoires, indépendants et munis d'une loi de probabilité gaussienne. Il a trouvé entre autre la loi de répartition des niveaux d'énergie. Dans la limite $N \rightarrow \infty$, le spectre devient quasicontinu sur un intervalle $[a, b]$ et la densité de niveaux a la forme d'un "demi-cercle":

$$\rho(E) = \frac{4}{\pi(b-a)} \sin \varphi \quad \text{où} \quad E = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \varphi$$

C'est la célèbre loi de Wigner du "demi-cercle".

Depuis, les propriétés statistiques des spectres de matrices aléatoires ont été très étudiées [1, 3, 4, 5] et l'on dispose de nombreux résultats dans le cas de la loi de probabilité gaussienne (il reste beaucoup à faire dans le cas général). En fonction de la symétrie du phénomène physique que l'on veut décrire on distingue habituellement trois ensembles de matrices aléatoires:

- l'ensemble gaussien orthogonal (GOE). Il s'agit du cas où le problème est invariant par renversement du temps, le hamiltonien est alors une matrice réelle symétrique. On choisit donc une loi de probabilité invariante par les changements de bases qui conservent cette propriété, c'est à dire invariante par le groupe orthogonal.
- l'ensemble gaussien unitaire (GUE). Dans ce cas le hamiltonien est une matrice hermitienne quelconque, et le groupe de symétrie est le groupe unitaire.
- l'ensemble gaussien symplectique (GSE). Ici on considère que le hamiltonien contient des interactions spin-orbite et l'on choisit les éléments de matrices comme des quaternions afin de tenir compte des degrés de liberté de spin. Le groupe d'invariance associé est le groupe symplectique.

On trouvera une excellente et classique description de ces ensembles dans [4].

Physique mésoscopique

Cette idée de description statistique des niveaux d'énergie se généralise à tous les systèmes physiques qui sont représentés par une matrice, soit trop complexe pour calculer son spectre, soit aléatoire de façon intrinsèque comme c'est le cas pour des systèmes désordonnés. Dans les systèmes désordonnés on ne s'intéresse pas aux valeurs propres du Hamiltonien mais l'on veut calculer des coefficients de transport comme la conductance électrique, la conductance thermique,... Les matrices que l'on considère alors sont des matrices de transfert, des matrices de diffusion (matrice S), des matrices de transmissions [6] dont le caractère aléatoire de ces matrices provient du désordre dû à la présence d'impuretés. La taille N de la matrice est donnée par le nombre de modes de propagation des électrons et celui ci est quantifié par la section finie du conducteur: $N \sim A/l^2$ (A =section du conducteur, l =distance interatomique) donc $N \gg 1$.

On se ramène alors formellement au problème général de l'étude des matrices aléatoires de grande taille.

Ce domaine est actuellement très actif avec l'étude des conducteurs mésoscopiques [7, 8, 13]: ceux ci sont des particules métalliques de très petites dimensions ($L < 1\mu m$) et à très basse température ($T < 1$ K) de sorte que des effets d'interférences quantiques y sont observables.

Ces systèmes sont très sensibles au désordre (position et nombre d'impuretés) et la conductance varie énormément d'un échantillon à l'autre. En revanche la variance de la conductance (calculée

en moyennant sur plusieurs échantillons) est remarquablement universelle. En particulier elle est beaucoup plus petite que celle que l'on calculerait par le théorème de la limite centrale en supposant que les valeurs propres de la matrice de transmission soient des variables aléatoires indépendantes. Cette propriété d'universalité est bien expliquée par les théories de matrices aléatoires [9].

Chaos quantique

Un autre domaine d'application des matrices aléatoires est le chaos quantique, c'est à dire l'étude au niveau quantique d'un système dont on sait qu'il est classiquement chaotique. Il existe en effet des Hamiltoniens très simples, à un faible nombre de degrés de liberté qui ont un comportement chaotique, par exemple des problèmes à trois corps en interaction non linéaire. Dans un tel système, les fonctions d'onde quantiques qui habituellement se localisent autour des trajectoires classiques doivent être très délocalisées puisque les trajectoires classiques sont ici ergodiques. Ceci implique que les fonctions propres de niveaux différents devraient avoir un très fort recouvrement et suggère que les énergies propres associées doivent être très corrélées, dépendre fortement des conditions aux limites et des perturbations. On devine donc que les énergies propres vont avoir une répartition complexe, impossible à calculer exactement et que l'on pourra seulement décrire statistiquement en moyennant sur différentes régions du spectre. On s'attend alors à trouver une loi statistique très corrélée, différente d'une loi Poissonienne et le modèle le plus simple est de supposer qu'elle provient d'un hamiltonien aléatoire. Le fait que les niveaux d'énergie obéissent aux lois de Wigner–Dyson des matrices aléatoires (GOE, GUE ou GSE) est même considéré comme la signature expérimentale du chaos quantique [13, 11].

Universalité des modèles de matrices aléatoires

Toute cette théorie des matrices aléatoires repose essentiellement sur une propriété miraculeuse qui est l'universalité des lois statistiques de Wigner–Dyson. En effet la plupart des systèmes précédents peuvent être décrits par l'une des trois lois GOE, GUE ou GSE suivant leur symétrie et indépendamment de leur structure microscopique spécifique. Ceci conduit les physiciens à conjecturer qu'il existe une sorte de théorème central limite qui conduit tout système de matrices aléatoires de grande taille vers une loi limite gaussienne orthogonale, unitaire ou symplectique. Mais la démonstration de ce futur théorème résiste depuis longtemps.

Récemment Brézin et Zee [10] ont proposé une nouvelle approche basée sur les techniques diagrammatiques que je présenterai au chapitre suivant. Ils ont ainsi pu démontrer et retrouver ces propriétés d'universalité pour un ensemble de matrices hermitiennes muni d'une loi de probabilité non gaussienne de la forme:

$$\mathcal{P}(M) = e^{-N \operatorname{tr} V(M)}$$

Dans le régime où la distance entre niveaux d'énergie est petite ($\sim 1/N$) ils retrouvent l'universalité connue des fonctions de corrélations (elles ne dépendent pas du potentiel V). Cette universalité peut se comprendre heuristiquement en observant qu'à des niveaux d'énergie proches correspond une évolution du système pendant un temps long, l'ergodicité peut alors mélanger les états de telle sorte que ceux ci deviennent très corrélés et oublient les détails microscopiques du modèle.

Brézin et Zee ont également fait remarquer que les fonctions de corrélations des niveaux d'énergies présentent des propriétés universelles dans le régime opposé, lorsque les niveaux sont très éloignés dans le spectre. Pour observer cette universalité il faut d'abord lisser ces fonctions en moyennant les fluctuations de période $1/N$.

Une partie de mes travaux de recherche a porté sur ce domaine. J'ai démontré des conjectures utilisés par [10] et généralisé leurs observations à d'autres types de lois de probabilité, et à d'autres fonctions de corrélations. Les résultats n'ont pas encore été publiés mais je joint les projets d'articles en annexe à ma thèse.

I.2 Les matrices aléatoires en QCD

Les matrices aléatoires ne sont pas utilisées seulement en physique statistique, elles interviennent également en théorie des champs. D'ailleurs les techniques du développement diagrammatique topologique utilisé pour modéliser les surfaces aléatoires de la section suivante ont été introduites initialement en physique des particules pour la théorie des interactions fortes c'est à dire la Chromodynamique Quantique.

Cette théorie stipule que les hadrons ne sont pas des particules élémentaires mais sont constitués de quarks. Ceux ci possèdent une masse, une charge électrique, une charge de saveur, et aussi une charge appelée "couleur" qui est un objet de dimension 3. Les quarks interagissent via des champs de jauge (les gluons), qui sont des matrices 3×3 et qui traduisent l'échange des couleurs. Toute la théorie de la Chromodynamique Quantique est en fait une théorie de jauge qui traduit l'invariance du modèle sous l'action du groupe $SU(3)$. De plus il est habituel de simplifier les calculs en se plaçant en temps imaginaire ($t \rightarrow i\beta$), ceci permet d'identifier formellement une théorie quantique des champs à un modèle statistique de champs aléatoires en température β . La chromodynamique quantique n'est donc rien d'autre qu'un modèle de matrices aléatoires, mais ici ce ne sont pas des matrices de grande taille, ce sont seulement des matrices 3×3 .

Bien que QCD possède un formalisme assez simple les calculs y sont très difficiles et l'on ne sait faire que des approximations. La principale approche est basée sur le développement perturbatif en puissances de la constante de couplage, mais ce développement n'est possible qu'aux petites échelles de distance ($< 1\text{fm}$) en raison de la propriété de liberté asymptotique qui exprime que les quarks interagissent faiblement à courte distance. A l'échelle des hadrons ($> 1\text{fm}$) l'interaction est très grande et le développement perturbatif n'est plus valide. Par exemple il ne permet pas de comprendre pourquoi les quarks ne peuvent exister que confinés en paquets dont la charge de couleur totale est nulle.

Pour tenter d'atteindre le domaine de couplage fort et expliquer le confinement, 't Hooft [14] a suggéré une autre approche: celle ci consiste à étudier la limite où le nombre de couleurs n'est plus $N = 3$ mais $N \rightarrow \infty$ puis à développer en puissances de $1/N$ afin d'avoir des prédictions pour $N = 3$.

Dans cette limite N grand, la QCD se ramène à un modèle de matrices aléatoires de grandes tailles. 't Hooft a alors observé que le développement diagrammatique d'un modèle de matrices est un développement topologique: la puissance de $1/N$ associée à chaque diagramme ne dépend que de la topologie du diagramme. En particulier lorsque $N \rightarrow \infty$, seuls subsistent les diagrammes de topologie minimale c'est à dire les diagrammes planaires.

Cette propriété des modèles de matrices a permis de trouver des prédictions non perturbatives en QCD mais surtout elle a conduit en 85 à la naissance d'un nouvel outil mathématique pour attaquer les problèmes de surfaces aléatoires, de gravitation quantique et de théorie des cordes que je vais décrire par la suite [41, 42]. Actuellement, après s'être penchée sur ces nouveaux domaines la communauté des théoriciens des matrices aléatoires s'intéresse de nouveau à QCD. En effet les modèles de matrices montrent qu'il existe un lien entre QCD et une théorie de cordes. De nombreux travaux sont encore menés dans le domaine de la QCD en dimension 2 induite par des modèles de matrices [15, 16, 17].

I.3 Les surfaces aléatoires

Dans les années 85 le développement en $1/N$ des modèles de matrices introduit par 't Hooft en QCD a donc trouvé un domaine d'application assez surprenant: les surfaces aléatoires ainsi que les théories des champs qui s'expriment à l'aide de sommations sur des surfaces c'est à dire la théorie des cordes et la gravitation quantique bidimensionnelle.

Les surfaces aléatoires des physiciens statisticiens sont des membranes (par exemple les parois cellulaires), les films minces du type bulles de savon, les interfaces entre deux liquides ou deux phases et en général tout milieu bidimensionnel qui peut fluctuer [18, 19]. Dans ces systèmes le caractère bidimensionnel n'est pas le seul facteur important: le solvant, l'environnement (accrochage de la surface par des impuretés) jouent un très grand rôle. Les phénomènes auxquels on s'intéresse sont les changements d'états, le diagramme de phases, les points critiques [20, 21]. Par exemple suivant la prépondérance des effets de tension superficielle, d'entropie, d'élasticité, ou du rôle du solvant, les surfaces peuvent exister sous différentes formes: planes, froissées, connexes en forme d'éponge ou disconnectées en émulsion de bulles... Ces phases sont séparées par des transitions du deuxième ordre, avec des exposants critiques universels [22] qui peuvent se calculer à l'aide des modèles de matrices [19].

Le lien entre matrices et surfaces n'est pas évident à priori car le problème de départ ne contient aucune matrice, je l'expliquerai dans les chapitres suivants mais l'idée générale se résume à ceci:

Pour régulariser la mesure de probabilité de l'ensemble des surfaces aléatoires (qui est de dimension infinie) on commence par considérer des surfaces discrétisées constituées en collant aléatoirement de petits polygones bords à bords et à la fin on passera à la limite continue où les polygones sont infiniment petits et infiniment nombreux. De telles surfaces polygonales sont des diagrammes formés de sommets et d'arêtes et toute l'astuce consiste à observer [41] que ces diagrammes sont identiques à ceux que l'on obtient en développant perturbativement la fonction de partition d'un modèle de matrices aléatoires.

La relation entre modèles de matrices et modèles de surfaces est donc formelle et purement mathématique mais donne un moyen de faire des calculs très explicites dans l'étude des surfaces aléatoires.

En fait les modèles de matrices ne prennent en compte que les effets de la géométrie intrinsèque, ils ne peuvent pas représenter vraiment des surfaces physiques plongées dans un solvant et interagissant avec le milieu extérieur, ils ne sont bien adaptés qu'à des surfaces plus abstraites comme celles de la théorie des cordes ou de la gravitation quantique.

I.4 La théorie des cordes

La théorie des cordes a été introduite en plusieurs étapes en physique des particules. A l'origine sous la forme des modèles duaux elle était censée donner la théorie des interactions fortes mais a été abandonnée au profit de QCD, puis elle est réapparue comme le meilleur candidat pour réaliser l'unification des interactions fondamentales à très haute énergie (pour un exposé détaillé et complet sur la théorie des cordes, voir [24, 25]). Cette théorie se formule en termes de surfaces aléatoires mais dans ce cas il n'y a pas de solvant ni d'impuretés, c'est pourquoi les modèles de matrices fournissent un excellent outil et ont permis de réaliser de grands progrès. Hélas les modèles de matrices sont limités, ils ne permettent pas d'étudier les cas physiques où la surface se trouve dans l'espace temps de dimension 4.

I.4.1 Les modèles duaux

Dans les années 60 on a commencé à découvrir des particules hadroniques de plus en plus nombreuses avec des spins et des masses élevées, il paraissait impossible que ces particules soient toutes élémentaires et ne connaissant pas les quarks ni la chromodynamique quantique on a du inventer une théorie mathématique consistante: les modèles duaux.

Pour tenter de relier les sections efficaces de diffusions des réactions entre hadrons, on a proposé de calculer la matrice S à partir de propriétés fondamentales telles que la causalité, la localité, et des symétries de dualité:

l'hypothèse de dualité exige que l'amplitude de réaction ne dépende pas du canal choisi (s ou t) (fig.I.1): à l'ordre en arbre, l'amplitude de diffusion est dominée par les propagateurs d'états intermédiaires virtuels choisis parmi les très nombreux hadrons connus. En imposant que les sommes sur les états intermédiaires directs (s) et transverses (t) soient égales, on déduit des relations qui permettent de comprendre la structure de ces états et de voir que les hadrons ne sont pas élémentaires [26]. Cette symétrie de dualité qui était motivée au départ par des observations à basse énergie fournissait un calcul très explicite de toutes les amplitudes de diffusion, et permettait d'éliminer les problèmes de divergences à haute énergie dont souffraient les modèles antérieurs. Compte tenu des observations possibles à l'époque et en l'absence d'une autre théorie, cette hypothèse semblait assez raisonnable et a suscité de très nombreux travaux [26], elle a en particulier donné naissance à la

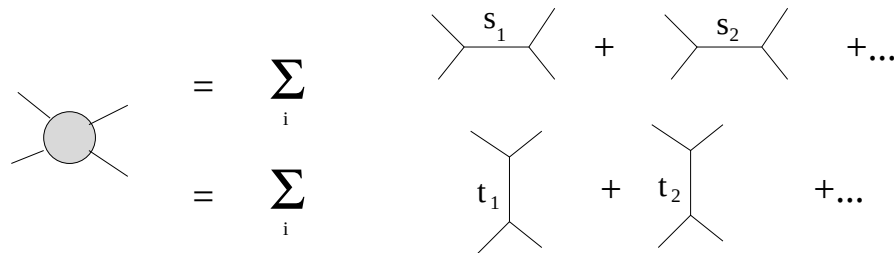


Figure I.1: Dualité $s \leftrightarrow t$: à l'ordre en arbre l'amplitude de diffusion est une somme sur tous les états intermédiaires hadroniques possibles. La dualité implique que cette somme est la même pour les canaux s et t .

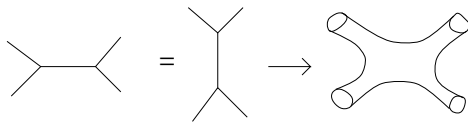


Figure I.2: Interprétation des théories duales en théories des cordes

théorie des cordes actuelles [27]. En effet la structure des interactions fortes apparaissait bien plus riche que de simples vertex et propagateurs de hadrons, elle pouvait être convenablement représentée par des vertex épaissis en forme de surfaces (fig.I.2). Dans cette interprétation les hadrons sont les modes propres de vibration d'une corde qui en se déplaçant dans l'espace engendre une surface.

QCD et la fin des modèles duaux

Cette vision des interactions fortes s'est effondrée avec la découverte des quarks et de la Chromodynamique Quantique en 74. On sait depuis que les hadrons sont composées de quarks et que le mécanisme fondamental des interactions fortes est l'échange de gluons qui sont les bosons vecteurs de la symétrie de jauge locale non abélienne $SU(3)$. Les modèles duaux étaient incompatibles avec QCD, par exemple ils prévoyaient un comportement exponentiellement décroissant des amplitudes de diffusion à haute énergie, alors que QCD indique une décroissance seulement algébrique.

Toutefois, les modèles duaux continuent de jouer un rôle. Ils sont encore utilisés comme approximation de QCD à basse énergie et on continue de croire qu'il existe un lien entre QCD et une théorie des cordes [14, 17]. D'autre part les modèles duaux ont donné naissance à la théorie des cordes actuelle.

I.4.2 Cordes et Théorie Quantique des Champs

Après l'arrivée de QCD la théorie des cordes n'est pas morte, elle est réapparue dans un autre contexte, celui de la théorie quantique des champs. En effet les modes de vibrations de la corde n'avaient pas les bonnes propriétés pour représenter les hadrons, mais l'on s'est rendu compte qu'ils pouvaient décrire les particules les plus fondamentales réalisant ainsi l'unification de toutes les interactions y compris la gravitation [28].

Problème des particules ponctuelles

La théorie des champs souffre d'un grave problème: les divergences ultraviolettes. Quelle que soit la façon de mener des calculs en TQC, on retrouve toujours des intégrales divergentes en raison du comportement singulier à petite distance. Ceci est dû au fait que l'on exige que les interactions soient locales (il ne peut pas y avoir d'action à distance) et que les particules élémentaires soient ponctuelles. Typiquement, la localité induit des interactions en $1/r$ entre particules et l'interaction de deux particules ponctuelles diverge lorsqu'elles sont en contact. La première de ces exigences, la localité, paraît très raisonnable, elle traduit la causalité mais la seconde celle des particules ponctuelles, n'est justifiée que par notre ignorance de leurs tailles réelles.

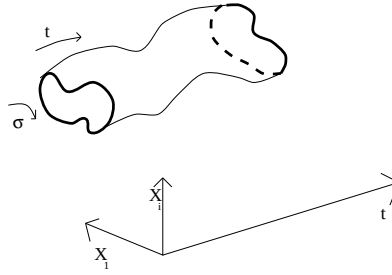


Figure I.3: Une corde se propageant au cours du temps engendre une surface

En fait, le seul moyen d'effectuer des calculs en TQC est de violer cette dernière hypothèse: on impose un cut-off arbitraire ϵ c'est à dire une distance minimale au dessous de laquelle on ne peut pas aller, en d'autre termes une taille minimale des particules ou une distance minimale entre particules. On étudie alors les propriétés de la TQC à des distances très supérieures à ϵ . Dans les théories renormalisables, les mesures à grande échelle ne dépendent pas de la physique aux petites échelles et l'on peut faire des prédictions indépendantes du cut-off grâce au groupe de renormalisation [64, 15]. Cette méthode est assez efficace, elle permet d'ignorer ce qui se passe aux très petites échelles ($< \epsilon$) et elle a donné des résultats remarquables mais elle laisse une question sans réponse: quel est le mécanisme fondamental de l'interaction au niveau microscopique, que sont les particules élémentaires ?

On s'attend, pour des raisons de symétries et d'esthétisme essentiellement, à ce que cette physique des petites échelles soit plus fondamentale, plus symétrique et que les interactions y soient unifiées. Les théories de Grande Unification prédisent que l'échelle d'unification entre les interactions faibles et fortes doit être de l'ordre de $\epsilon \sim 10^{-29} cm$ qui n'est pas si éloignée de l'échelle de Planck $10^{-32} cm$. Autrement dit la théorie microscopique doit aussi tenir compte des effets gravitationnels quantiques.

Une solution au problème des divergences UV, peut être de supposer qu'à cette échelle, en raison d'effets gravitationnels quantiques, l'espace-temps n'est plus Euclidien mais est par exemple discrétisé ou alors non commutatif, autrement dit qu'il a un caractère quantique et qu'il existe des distances minimales entre les points. Toute une branche très active de la physique théorique et des mathématiques est consacrée à l'étude de ces géométries non commutatives, mais je n'en parlerai pas ici. Si l'on ne s'occupe pas de la gravitation, le moyen de résoudre les problèmes de divergences ultraviolettes est simplement d'éliminer les particules ponctuelles.

Particules étendues

Les particules doivent donc être des objets étendus de dimension > 0 . L'idée la plus simple est évidemment de considérer des particules de dimension 1, c'est à dire des cordes. Au cours du temps, une corde en se déplaçant engendre une surface dans l'espace-temps, d'où le lien avec les théories de surfaces aléatoires (fig.I.3) .

Une corde est caractérisée par ses coordonnées:

$$X_i(\sigma, t) \quad i = \{1, 2, 3\} \quad \sigma \in [0, 2\pi]$$

σ est l'abscisse curviligne le long de la corde, que l'on suppose fermée : $X_i(2\pi, t) = X_i(0, t)$. En effet, ce doit être une boucle de petit rayon ϵ , pour que dans la limite macroscopique elle ait l'air d'une particule ponctuelle. On peut également écrire les coordonnées d'une façon covariante relativiste :

$$X_\mu(\sigma, \tau) \quad \mu = \{0, 1, 2, 3\} \quad X^0 = ct$$

où cette fois on a choisi une paramétrisation quelconque (σ, τ) de la surface engendrée par la corde dans l'espace temps de dimension 4. Par exemple τ peut être pris comme le temps propre d'un point de la corde. Une condition pour que la théorie soit covariante est que les équations du mouvement et les quantités observables ne dépendent pas de la paramétrisation choisie mais seulement des propriétés intrinsèques de la surface.

Pour construire une théorie quantique des cordes, il faut se donner l'action S de chaque mouvement possible de la corde. L'amplitude de probabilité pour que la corde passe d'un état initial $X_i(\sigma, t_0)$ à un état final $X_i(\sigma, t_1)$ est obtenue en sommant les amplitudes de probabilité ($e^{-iS/\hbar}$) de tous les mouvements possibles de la corde entre ces deux états, c'est à dire toutes les surfaces possibles de bords fixés.

$$Z = \sum_{\text{surfaces}} e^{-iS/\hbar} \quad (\text{I.1})$$

Ceci montre qu'en théorie des cordes on a besoin de calculer des sommations sur un ensemble de surfaces. La plus grande partie du travail va consister à définir la mesure de sommation, qui n'est pas simplement $D[X_\mu(\sigma, \tau)]$. Dans un premier temps, voyons quelle est l'action S du mouvement d'une corde.

Action de Nambu–Goto

Considérons d'abord le cas d'une particule libre ponctuelle. Son mouvement classique (d'action minimale) est une ligne droite, c'est à dire un mouvement rectiligne uniforme et son action relativiste est donnée par la longueur de sa trajectoire (mesurée avec la métrique Minkowskienne de l'espace-temps $G_{\mu\nu}$ de signature $(+ - - -)$):

$$S_0[X] = -mc^2 \int_{t_0}^{t_1} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -mc^2 \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau = -mc \int d\tau \sqrt{\frac{dX^\mu}{d\tau} G_{\mu\nu} \frac{dX^\nu}{d\tau}}$$

Par analogie, on peut supposer que l'action d'une corde libre est donnée par l'aire de sa trajectoire dans l'espace-temps, le mouvement classique correspond alors à une surface d'aire minimale. L'action introduite par y. Nambu et T. Goto [30] est ainsi:

$$S_1[X] = -\mu c \int \int d\sigma d\tau \sqrt{-\det g}$$

où μ est la masse linéique de la corde $m = 2\pi\epsilon\mu$ et $g_{\alpha\beta}$ est la métrique bidimensionnelle induite sur la surface (α et β désignent les directions σ ou τ):

$$g_{\alpha\beta} = G_{\mu\nu} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu$$



Figure I.4: Interaction d'une corde

On peut immédiatement faire plusieurs remarques concernant les différences entre la théorie des cordes et la TQC des particules ponctuelles: même une théorie des cordes libre contient des interactions, le nombre de particules n'est pas fixé. On peut partir d'un état initial à une particule et arriver à un état final à deux particules (fig.I.4).

D'autre part, comme on a imposé que les cordes soient des boucles, les coordonnées X^μ sont 2π périodique en σ ce qui entraîne une quantification des modes de la corde, caractérisée par un nombre quantique. On peut alors utiliser ce nombre quantique pour distinguer plusieurs sortes de particules. La théorie des cordes peut donc contenir en un seul et même concept toutes les particules élémentaires électrons, quarks, photons, gluons, ... les différentes sortes de particules étant seulement les différents modes de vibrations transverses de la corde.

Cette théorie des cordes était au départ très alléchante puisqu'elle permettait d'unifier les interactions d'une façon unique et universelle, il était même possible d'y inclure la gravitation car on observait dans le spectre des vibrations un mode de spin 2 et de masse nulle qui pourrait être le graviton.

En fait elle s'est révélée beaucoup moins universelle qu'elle n'en avait l'air. En effet la quantification d'une telle théorie ne se fait pas sans mal, et surtout pas en n'importe quelle dimension. On va voir la raison de cette obstruction à partir d'une autre formulation de la théorie des cordes.

Action de Polyakov

L'action de Nambu–Goto est très difficile à manier car elle contient une racine carrée, c'est ce qui a conduit Polyakov à introduire une autre action pour les cordes [31]. Celle ci donne la même limite classique, possède les mêmes propriétés de symétrie (invariance par changement des coordonnées de la surface) mais a l'avantage d'être quadratique dans les coordonnées X^μ . L'idée de Polyakov était de faire varier non seulement les coordonnées X^μ , mais aussi la métrique bidimensionnelle de la surface $g_{\alpha\beta}$:

$$S_P[X, g] = -\mu c \int \int d\sigma d\tau \sqrt{-\det g} \frac{1}{2} \left(G_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \right)$$

Cette action est compatible dans la limite classique avec celle de Nambu–Goto. En effet, si l'on extrémise S_P par rapport à $g_{\alpha\beta}$ ($\partial S_P / \partial g_{\alpha\beta} = 0$) on montre que $g_{\alpha\beta}$ est bien la métrique induite à une transformation conforme près:

$$g_{\alpha\beta} = \text{cte } G_{\mu\nu} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu$$

La constante de proportionnalité dépend du point (σ, τ) de la surface et reste indéterminée à cause d'une symétrie supplémentaire de cette action: l'invariance de Weyl.

Invariance de Weyl et anomalie conforme

S_p est invariante par la symétrie locale $g_{\alpha\beta} \rightarrow e^\varphi g_{\alpha\beta}$.

Cette symétrie de Weyl ou symétrie conforme est accidentelle, elle ne découle pas d'un principe fondamental et est spécifique au cas des métriques bidimensionnelles. C'est une symétrie de l'action donc une symétrie classique, et elle est brisée par la quantification c'est à dire qu'elle possède une anomalie.

Celle ci vient du fait que lorsque l'on somme sur toutes les surfaces (I.1) la mesure de sommation ne possède pas cette symétrie. Or cette symétrie est indispensable pour l'unitarité de la théorie.

En effet, à cause de la métrique Minkowskienne on s'attend à voir apparaître des états vectoriels dont les fonctions d'ondes sont normalisées de façon covariante par $\langle \psi_\mu | \psi_\nu \rangle = G_{\mu\nu}$ qui peut être négatif, or seuls les états de normes positives peuvent avoir une interprétation en termes de particules. Il faut donc que l'opérateur d'évolution ne puisse pas relier des états de norme positive à des états de norme négative, il doit être diagonal par blocs, autrement dit il doit avoir une certaine symétrie. On comprend ainsi pourquoi il faut un maximum de symétries, et en particulier la symétrie de Weyl.

Dans certaines conditions, la symétrie de Weyl peut être rétablie au niveau quantique. En effet, la mesure de sommation sur toutes les métriques $g_{\alpha\beta}$ possibles de la surface donne une anomalie, mais la mesure de sommation sur toutes les coordonnées X^μ donne la même anomalie à un facteur $-1/26$ près, et ceci pour chaque coordonnée μ . Dans un espace temps de dimension D , l'anomalie est donc multipliée par un facteur $(1 - D/26)$ qui s'annule en dimension 26. La théorie des cordes ne peut exister que dans un espace-temps de dimension 26 !

Cela fait 22 dimensions de trop par rapport à ce que nous pouvons observer, c'est le principal échec de la théorie des cordes. De nombreuses tentatives ont été menées pour tenter de réduire cette dimension critique, par exemple Ramond Neveu Schwartz [29] ont eu l'idée d'introduire des coordonnées X^μ fermioniques, et une symétrie supplémentaire, la Supersymétrie, ils sont ainsi arrivés à $D = 10$. Il reste encore 6 dimensions de trop. Ensuite, on a eu l'idée de "compactifier" ces 6 dimensions non physiques, c'est à dire que chacune des 6 dimensions supplémentaires ne prend pas ses valeurs dans R tout entier, mais dans un cercle de petit diamètre. Si ce diamètre est assez petit, il n'est pas observable à notre échelle, et tout se passe comme si l'on n'avait que 4 dimensions. A la place de cercles on peut prendre n'importe quelle variété compacte de dimension 6, rajouter des fermions, et inventer autant de théories des cordes qu'on le souhaite.

La théorie des cordes a donc perdu toute son universalité et en l'absence d'expérimentation, il est difficile de trancher en faveur d'une théorie plutôt qu'une autre. De plus toute observation expérimentale de la physique à l'échelle des cordes (10^{-15} fm) semble irréalisable, il faudrait construire des accélérateurs atteignant une énergie de l'ordre de 10^{17} Gev alors que l'on atteint péniblement 2.10^2 Gev dans les accélérateurs actuels.

Cordes et matrices

Les théoriciens des cordes ont bien sûr continué de chercher des restrictions mathématiques pour isoler une théorie plus naturelle que les autres, mais les calculs sont très difficiles. En 1985, inspirée

par le développement diagrammatique de QCD avec un grand nombre de couleurs [14, 51] a inspiré une nouvelle approche pour les problèmes de sommation sur les surfaces, le développement diagrammatique des modèles de matrices aléatoires [41, 42] que je traiterai en détails à partir du chapitre suivant.

Les modèles de matrices fournissent une régularisation de la somme sur les surfaces, et celle ci est suffisamment simple et maniable pour que l'on puisse effectuer des calculs exacts et analytiques. Cet outil mathématique puissant a permis de mieux comprendre comment intégrer sur les surfaces et a donné lieu à de grands progrès en théorie des cordes non critiques ($D \neq D_{\text{crit}}$), mais les modèles de matrices présentent un inconvénient majeur, comme on le verra ils sont limités à $D \leq 1$. On ne sait pas faire grand chose pour $D > 1$, on ne sait même pas quelle est la nature de la singularité $D = 1$.

Malgré cet obstacle, la théorie des cordes n'est pas abandonnée, elle est le seul candidat sérieux pour comprendre la physique à petite échelle, l'unification des interactions fondamentales, la gravitation quantique, et l'on pense qu'elle doit avoir des liens avec QCD. De plus il est très instructif sur le plan mathématique de posséder une théorie achevée de la sommation des surfaces. Il est bien sûr impossible de construire un accélérateur assez puissant pour observer la matière à l'échelle des cordes, mais l'on peut espérer confirmer ou infirmer certaines théories par des observations indirectes. Par exemple la théorie des cordes peut permettre (ce n'est pas encore fait) de calculer les masses des particules, les angles de Cabibo, et d'autres quantités observées expérimentalement, et dont l'origine ne peut se trouver que dans l'unification des 4 forces fondamentales, y compris la gravitation.

I.5 La gravitation quantique

La gravitation quantique et la Théorie des cordes présentent beaucoup de similitudes, en effet la théorie des cordes peut contenir la gravitation et elles possèdent toutes deux le même formalisme en terme de sommation sur des surfaces. Cependant leurs objectifs ne sont pas tout à fait identiques.

Le but de la Théorie des cordes est de réaliser l'unification des interactions fondamentales et de comprendre la nature des particules élémentaires à très petite échelle. A priori on ne s'intéresse qu'aux interactions nucléaire forte, faible et électromagnétique, la gravitation n'y est pas incluse au départ mais elle y apparaît d'elle même, presque par hasard.

Inversement on peut se poser la question de vouloir décrire la gravitation comme une théorie quantique de champs sans se préoccuper des autres interactions. La gravitation est la force la plus facilement observable à grande échelle (astronomique), elle a été la première connue, elle est à l'origine des lois de Newton de la mécanique classique, elle est aussi au centre de la théorie de la relativité générale d'Einstein, mais comment se comporte la gravitation à petite échelle ?

La matière aux petites échelles obéit aux lois de la mécanique quantique, elle a un comportement aléatoire traduit par le principe d'incertitude: il ne peut pas exister de phénomène déterministe à ces échelles, donc la gravitation doit aussi être quantifiée. Cette idée s'est imposée dès l'apparition des premières théories quantiques des champs mais sa mise en œuvre s'est révélée très difficile au point que la théorie de la gravitation quantique reste encore à inventer.

En effet les techniques qui ont permis de quantifier l'électromagnétisme et les autres forces fondamentales ne peuvent pas s'appliquer pour la gravitation, celle ci est non-renormalisable. De plus on ne peut pas s'aider de résultats expérimentaux ou d'intuition tant les échelles qui entrent en jeu sont inaccessibles à l'homme. A l'échelle atomique la force de gravitation est 10^{-22} fois plus faible que la force électrique (dans un atome d'hydrogène) et de façon générale dans les noyaux, dans les nucléons, la force gravitationnelle est toujours très faible devant les autres. On s'attend cependant à ce qu'à des échelles vraiment très petites elle joue un rôle important. En effet elle est toujours attractive et elle tend à réduire la taille de toute particule massive, elle doit entrer en conflit avec le principe d'incertitude qui impose qu'une particule ne peut pas être localisée.

L'échelle de Planck

Le calcul de la masse de Planck est assez instructif, il indique à quelle échelle le principe d'incertitude, la relativité et la gravitation classique entrent en conflit donc à quelle échelle la gravitation quantique se manifeste.

Tout d'abord il est impossible de localiser une particule de masse m à mieux que sa longueur d'onde de Compton:

$$l = \frac{\hbar}{mc}$$

En effet si l'on tente de localiser une particule à mieux que l , à cause du principe d'incertitude $\Delta x \Delta p \geq \hbar$ son impulsion sera supérieure à mc et son énergie supérieure à $2mc^2$. Dans ce cas il peut se former une paire particule-antiparticule qui va délocaliser la particule initiale.

La gravitation quant à elle tend à localiser les particules. La vitesse de libération nécessaire pour

s'échapper d'une particule sphérique de rayon r est donnée par

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{Gm}{r}$$

où $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ S.I. est la constante gravitationnelle. Lorsque cette vitesse devient supérieure à celle de la lumière ($Gm/r \geq c^2/2$), la particule ne peut plus échanger d'information avec l'extérieur. Cette condition définit un rayon gravitationnel de la particule ou rayon du trou noir $r = Gm/c^2$ (un calcul relativiste change le résultat par un facteur 2). Sa signification est qu'une particule de masse m concentrée dans un rayon inférieur à $r = Gm/c^2$ ne peut que s'effondrer sur elle même, elle ne peut qu'être localisée.

En égalant r et l on trouve une masse appelée masse de Planck:

$$m_p = \sqrt{\frac{hc}{G}}$$

elle est d'ordre 10^{19} Gev et correspond à une longueur de Planck $r = l = 10^{-34}$ m. C'est la distance à laquelle le principe d'incertitude entre en conflit avec la relativité générale, c'est la distance au dessous de laquelle les lois de la physique actuelle ne sont plus valables. Cette distance est extrêmement faible, actuellement on sait réaliser des observations jusqu'à une fraction de la taille des nucléons, c'est à dire 10^{-15} m, ou en échelle d'énergie quelque centaines de Gev, il reste donc plus de 15 ordres de grandeurs à franchir, ce ne sera pas fait demain.

La gravitation quantique

Même si l'on ne peut pas faire d'expérimentation, la compréhension de la gravitation quantique reste un problème très important sur le plan théorique et même philosophique, c'est la clé du "big-bang" et de l'origine de l'univers.

On a donc tenté de quantifier la gravitation par les mêmes méthodes que celles qui ont donné l'électrodynamique quantique puis la théorie des interactions faibles et fortes. La méthode la plus simple semble être celle de Feynman des intégrales de chemins: l'amplitude de probabilité d'aller d'un état initial à un état final est la somme des amplitudes de probabilité de toutes les évolutions possibles entre les deux états. Il faut donc identifier les états possibles d'un champ gravitationnel et l'amplitude de probabilité d'un tel champ donnée par son action S .

La nature du champ gravitationnel a été identifiée par Einstein: elle est purement géométrique. Selon le principe d'équivalence la force de gravitation n'est rien d'autre qu'une force d'inertie. L'univers n'est en effet pas R^4 , mais un espace courbe. Dans un tel espace, un objet soumis à aucune force (en fait en chute libre) ne suit pas une trajectoire rectiligne uniforme, ce qui n'a pas de sens dans un espace courbe, mais une géodésique. La déviation entre cette trajectoire géodésique et une droite est ressentie comme une force de gravitation. Le champ gravitationnel est donc l'expression de la courbure de l'espace-temps, c'est la métrique $g_{\mu\nu}$.

En fait, pour spécifier un champ gravitationnel, il ne suffit pas de préciser la métrique, il faut aussi décrire tout l'espace temps: il faut se donner une variété $\mathcal{E}$ de dimension 4, un système de coordonnées x^α sur cette variété, et une métrique Lorentzienne $g_{\alpha\beta}$. Ceci est dû au fait que la variété n'a pas toujours la topologie de R^4 muni de ses coordonnées canoniques.

L'action du champ gravitationnel a aussi été donnée par Einstein, c'est la courbure totale de l'espace temps:

$$S = \frac{-c^3}{16\pi G} \int_{\mathcal{E}} d^4X \sqrt{-\det g_{\mu\nu}} R$$

R étant la courbure scalaire de la métrique $g_{\mu\nu}$.

Pour calculer l'amplitude de probabilité de passer d'un état du champ gravitationnel à un instant initial vers un état final, il faut sommer $e^{-iS/\hbar}$ pour toutes les variétés de dimension 4 lorentziennes, avec toutes les métriques possibles, et vérifiant les conditions aux limites des états initiaux et finaux:

$$Z = \sum_{\mathcal{E}} e^{-iS(\mathcal{E})/\hbar} \quad (\text{I.2})$$

Afin de réaliser cette somme, il faudrait commencer par identifier et classer toutes ces variétés. Pour connaître toutes les variétés possibles, on peut partir d'une variété donnée et la déformer continument. Hélas ceci ne suffit pas, on ne peut pas obtenir toutes les variétés de cette façon, de même que l'on ne peut pas déformer continument une sphère en un tore. Il faut aussi sommer sur toutes les topologies, c'est à dire les classes d'équivalence modulo les déformations continues. On sait à peu près sommer sur toutes les variétés d'une topologie donnée, mais l'on ne sait absolument pas sommer sur toutes les topologies dès que l'on est en dimension $d > 2$.

Pour tenter de comprendre l'importance de la topologie dans cette sommation, on peut étudier un modèle plus simple que la gravitation quantique: la Gravitation Quantique Bidimensionnelle.

I.5.1 La Gravitation Quantique Bidimensionnelle

On suppose que l'espace temps est de dimension 2, dans ce cas on connaît toutes les topologies, et en plus l'action d'Einstein à deux dimensions est invariante par les déformations continues, elle ne dépend que de la topologie. On peut ainsi se concentrer entièrement sur l'effet de la topologie. On verra par la suite que la topologie joue un rôle essentiel, ce sont les variétés de grande topologie qui contribuent le plus dans la somme.

Résumons la situation: la quantification de la gravitation en 4 dimensions est un problème important mais trop difficile, on passe donc à 2 dimensions. On s'est bien sûr éloigné du problème de départ, il se pourrait que le cas de $d = 2$ ne ressemble absolument pas à $d = 4$ car la dimension 2 possède de nombreuses propriétés exceptionnelles. On a cependant d'autres motivations pour passer en deux dimension: c'est aussi la théorie des cordes, la théorie des surfaces et puis l'on peut se ramener aux modèles de matrices qui autorisent des calculs exacts.

On va faire une autre simplification en plus du passage en dimension 2, on passe en Euclidien c'est à dire en temps imaginaire $t \rightarrow it$. Ceci a pour effet de rendre la métrique Euclidienne de signature $(++)$ et de rendre réelles les amplitudes de probabilité.

On posera également $\hbar = 1$, $c = 1$.

Action d'Einstein en dimension 2

Récapitulons le modèle: on voudrait calculer la somme

$$Z = \sum_{\text{surfaces}} e^{-S} \quad \text{avec} \quad S = \iint dx^2 \sqrt{\det g} (\Lambda + G R)$$

où chaque surface est donnée par: sa topologie, un système de coordonnées x^α et une métrique $g_{\alpha\beta}$. R est la courbure scalaire de la métrique, $\sqrt{\det g} dx^2$ est l'élément d'aire, Λ est la constante cosmologique, G la constante gravitationnelle ($G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ S.I.).

La constante cosmologique n'existait pas au départ dans l'action d'Einstein. En fait, dans l'univers actuel Λ semble être nulle ou du moins $\Lambda < 10^{-70}$ S.I. . Il faut cependant l'inclure dans la théorie quantique car la constante cosmologique nue à l'échelle microscopique n'est pas nécessairement nulle, elle va apparaître naturellement comme contre-terme lors de la renormalisation.

On peut réécrire l'action S en observant que:

$$\iint dx^2 \sqrt{\det g} = \text{aire}$$

c'est à dire que la constante cosmologique est couplée à la taille (l'aire en dimension 2) de l'univers, elle mesure la densité d'énergie du vide.

L'autre terme, celui d'Einstein est la courbure totale:

$$\iint dx^2 \sqrt{\det g} R = 4\pi\chi = \text{courbure totale}$$

χ est la caractéristique d'Euler Poincaré de la surface, et a la propriété d'être un invariant topologique. La topologie d'une surface est donnée par son genre h , c'est à dire le nombre de trous. Par exemple une sphère n'a pas de trous $h = 0$, un tore possède un trou $h = 1$... Le théorème d'Euler établit que:

$$\chi = 2 - 2h$$

Finalement l'action d'Einstein en dimension 2 se réduit à

$$S = \Lambda \text{ aire} + 4\pi G \chi$$

Gravitation en présence de matière

Jusqu'ici on a discuté de la gravitation seule. On peut également considérer le couplage entre gravitation et matière. Par exemple l'action de Klein-Gordon pour un champ scalaire libre sans masse X est:

$$S_{\text{mat}} = \iint dx^2 \sqrt{\det g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X \partial_\beta X$$

Si l'on considère D champs scalaires sans masse $X_i(x)$ avec $i = 1 \dots D$, l'action de l'ensemble (gravitation + matière) s'écrit:

$$S = 4\pi G \chi + \Lambda \text{ aire} + \iint dx^2 \sqrt{\det g} \sum_{i=1}^D g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X_i \partial_\beta X_i$$

Les amplitudes de probabilité quantiques, sont alors données par une intégrale fonctionnelle où l'on intègre à la fois sur le champ gravitationnel et sur les champs de matières:

$$Z = \sum_{\text{surfaces}} \int D(X_i) e^{-S}$$

On reconnaît l'action de Polyakov de la théorie des cordes avec en plus un terme topologique $4\pi G\chi$ et un terme de constante cosmologique qui brise l'invariance de Weyl.

I.5.2 Lien avec la théorie des cordes

On comprend qu'il doit exister un formalisme commun qui permet de traiter aussi bien le cas de la gravitation quantique bidimensionnelle que la théorie des cordes. Dans les deux cas on doit calculer une somme sur un ensemble de surfaces:

- pour la théorie des cordes la surface est la trajectoire dans l'espace-temps d'une particule dont les coordonnées sont les D champs $X_i(x)$.
- pour la gravitation bidimensionnelle la surface est l'espace temps et les X_i sont des champs de matière sur cette surface.

Les deux points de vue sont duaux l'un de l'autre. Remarquons, que l'on peut considérer d'autres types de champs de matière: par exemple des fermions ou de la matière discrète (des champs qui ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs) comme le modèle d'Ising. En termes de théorie des cordes, cela signifie que la corde se déplace dans un espace qui n'est pas R^D mais par exemple un espace discret ou un espace Grassmannien.

On avait déjà vu que pour rétablir l'invariance de Weyl au niveau quantique, il était nécessaire de considérer que la corde se déplaçait dans un espace-temps assez exotique. La seule condition était que seules 4 des dimensions soient réelles et correspondent au 4 dimensions physiques observables, et que les autres soient compactifiées dans un petit espace de taille ϵ , et annulent l'anomalie conforme.

I.6 Théories conformes

En théorie des cordes comme en gravitation quantique bidimensionnelle, on doit calculer une somme sur des surfaces et sur des champs de matière X_μ ($\mu = 1 \dots D$):

$$Z = \sum_{\text{topologies}} \int D[g_{\alpha\beta}] D[X_\mu] e^{-S} \quad (\text{I.3})$$

avec l'action:

$$S = \iint dx^2 \sqrt{\det g} \left[\Lambda + GR + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X_\mu \partial_\beta X^\mu \right]$$

Celle ci est invariante par tous les changements de coordonnées de la surface et possède en plus la symétrie de Weyl (excepté le terme de constante cosmologique):

$$g_{\alpha\beta} \rightarrow e^{\varphi(x)} g_{\alpha\beta}$$

Comme on l'a déjà évoqué avec la théorie des cordes, les mesures de sommations $D[g_{\alpha\beta}]$ et $D[X_\mu]$ brisent la symétrie de Weyl ce qui conduit à une anomalie.

Pour calculer Z on peut utiliser l'invariance par changement de coordonnées. On choisit des coordonnées particulières où la métrique est proportionnelle à l'identité (autrement dit on fixe la jauge, on choisit la jauge conforme):

$$g_{\alpha\beta} = e^{\varphi(x)} \delta_{\alpha\beta}. \quad (\text{I.4})$$

Il reste ensuite à intégrer sur le champ de Liouville $\varphi(x)$. L'action S ne dépend pas de φ (excepté par le terme de constante cosmologique) et toute la dépendance en φ est contenue dans la mesure.

Afin de bien cerner le mécanisme de brisure de la symétrie de Weyl, il est utile de connaître précisément le groupe des transformations conformes (celles qui conservent la forme (I.4) de la métrique) et ses représentations. Les théories des champs invariantes conformes constituent une branche très importante de la physique statistique, elles ont été développées pour l'étude des phénomènes critiques bidimensionnels car au voisinage d'une transition de phase du second ordre, les fluctuations sont invariantes d'échelle et possèdent la symétrie conforme [35, 36, 37]. On va voir que le calcul de l'intégrale (I.3) est caractérisé par un nombre appelé charge centrale qui classe les représentations du groupe conforme [39]. En particulier certaines théories des cordes dont la charge centrale est celle d'un des modèles dits minimaux peuvent être entièrement résolues [38].

I.6.1 Anomalie conforme et charge centrale

Chaque champ de matière X_μ , qu'il soit bosonique, fermionique, discret ou prenne ses valeurs dans n'importe quel espace, contribue de la même façon à l'anomalie conforme, avec un facteur dépendant de la dimension du champ. Cette observation permet de mesurer l'anomalie en unité de l'anomalie d'un champ scalaire, c'est ce que l'on appelle la charge centrale: elle vaut par définition $c = 1$ pour un champ scalaire bosonique, on trouve qu'elle vaut $c = 1/2$ pour un champ fermionique et prend

des valeurs rationnelles voire réelles pour des champs plus exotiques. Dans la formulation initiale de la théorie des cordes, les champs scalaires X^μ représentaient les coordonnées de la surface dans l'espace-temps de dimension D , et l'on avait $c = D$, c'est pourquoi la charge centrale de l'ensemble des champs de matière (pas nécessairement scalaires) est aussi appelée dimension de l'espace de plongement (on pourra donc considérer des espaces de dimensions non entières).

Théorie des cordes et dimension critique

Pour pouvoir interpréter les cordes comme des particules il faut annuler l'anomalie conforme, ce qui implique que la charge centrale totale de l'ensemble des champs en présence soit nulle, sans oublier le champ gravitationnel.

Le champ gravitationnel $g_{\alpha\beta}$ est un champ de jauge (pour le groupe des reparamétrisations de la surface) et l'on peut fixer la jauge en introduisant des fantômes de Faddeev Popov. Ceux ci sont des fermions mais avec une statistique bosonique, c'est pourquoi ils vont contribuer avec un signe négatif et l'on peut montrer que leur charge centrale totale vaut -26 . La charge centrale de l'ensemble matière + champ gravitationnel est donc:

$$c = D - 26$$

Ce qui signifie que la théorie des cordes ne peut être formulée qu'en dimension $D_{\text{crit}} = 26$.

Dans le cas où l'on rajoute des fermions, on peut imposer une symétrie supplémentaire: la supersymétrie entre bosons et fermions (il faut autant de fermions que de bosons). On peut également fixer la jauge vis à vis de cette symétrie, ce qui introduit d'autres fantômes de Faddeev Popov, dont la charge centrale est $c = +11$. La dimension critique D est alors telle que:

$$D + \frac{1}{2}D - 26 + 11 = 0$$

C'est à dire $D_{\text{crit}} = 10$.

En pratique les théoriciens des cordes préfèrent les supercordes car 10 est plus proche de la dimension physique $D = 4$ que 26 mais les modèles de matrices sont plus faciles à manipuler dans le cas bosonique, c'est à dire sans supersymétrie. C'est dorénavant dans cette hypothèse que je me situerai. Par ailleurs, les modèles de matrices ne permettent de traiter que les cas où la charge centrale de la matière est inférieure ou égale à 1, ce qui signifie que je considérerai seulement à partir d'ici les cordes "non critiques", c'est à dire $D \neq D_{\text{crit}}$.

I.6.2 Théories conformes

Transformations conformes

L'action de la théorie des cordes est invariante par les changements de coordonnées conformes, c'est à dire ceux qui changent la métrique par un facteur scalaire. En dimension 2 les transformations conformes sont les fonctions analytiques de la variable complexe $z = x_1 + ix_2$:

$$z \rightarrow z(1 + \epsilon f(z)) \quad \text{avec} \quad f \text{ analytique: } f(z) = \sum_n f_n z^n \quad (\text{I.5})$$

Les générateurs du groupe conforme sont donc les $l_n = z^{n+1} \frac{\partial}{\partial z}$. Ils forment une algèbre de Lie avec les relations de commutations:

$$[l_n, l_m] = (m - n)l_{n+m} \quad (\text{I.6})$$

l_0 est l'opérateur des dilatations, l_{-1} celui des translations et l_1 celui des transformations projectives spéciales $z \rightarrow 1/(z - z_0)$. Ces trois opérateurs forment la sous algèbre des transformations homographiques $z \rightarrow (az + b)/(cz + d)$, isomorphe à $SU(2)$.

Lorsque l'on considère une théorie des cordes invariante conforme c'est à dire sans anomalie, la fonction de partition Z doit être invariante par les opérateurs l_n :

$$l_n.Z = 0$$

Algèbre de Virasoro

En fait comme la mesure d'intégration de (I.3) n'est pas invariante conforme, il faut fixer une convention pour indiquer si l'on applique l'opérateur l_n avant ou après l'intégration. Ce phénomène est habituel en théorie quantique des champs et l'on choisit en général une convention d'ordre normal pour écrire un produit d'opérateurs qui ne commutent pas. On définit donc des opérateurs $L_n = :l_n:$ qui n'agissent que sur l'action S à l'intérieur de l'intégrale (I.3). Il faut pour cela ajouter aux l_n des termes qui en agissant sur S produisent le jacobien du changement de variable (I.5), ces termes supplémentaires sont proportionnels à la charge centrale c puisqu'ils traduisent l'anomalie conforme de la mesure d'intégration. Lorsque l'on effectue plusieurs changement de variables successifs, il faut aussi effectuer le changement de variable sur le jacobien, ceci traduit le fait que $:l_n l_m: \neq :l_n: :l_m:$. Tout ceci modifie les relations de commutations naïves (I.6) et donne une algèbre de Virasoro:

$$[L_n, L_m] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{m+n} \text{Id} \quad (\text{I.7})$$

On a simplement ajouté à l'algèbre classique (I.6) un opérateur proportionnel à l'identité qui commute avec tous les L_n , c'est ce que l'on appelle une extension centrale, d'où le nom de charge centrale.

Les relations de commutations (I.7) ont pour conséquence qu'aucune observable A ne peut plus être invariante simultanément sous l'action des L_n et L_{-n} , on peut tout au plus imposer $L_n.A = 0$ pour $n > 0$.

Représentations de l'algèbre de Virasoro

Pour construire une représentation de cette algèbre, la méthode habituelle consiste à étudier l'espace engendré à partir d'un état $|0\rangle$ par tous les $L_{-n_1} L_{-n_2} \dots L_{-n_k} |0\rangle$. On peut partir en particulier d'un état primaire $|0\rangle$ de dimension h , c'est à dire vecteur propre de l'opérateur de dilatation:

$$L_0 |0\rangle = h |0\rangle \quad \text{et} \quad L_n |0\rangle = 0 \quad \text{pour } n > 0$$

En général les $|n_1, n_2, \dots, n_k\rangle = L_{-n_1} L_{-n_2} \dots L_{-n_k} |0\rangle$ forment une base et engendrent une représentation irréductible de dimension infinie de l'algèbre de Virasoro.

Mais pour certaines valeurs particulières de h , ces vecteurs ne sont pas tous indépendants et forment une représentation réductible. Par exemple si l'on suppose qu'une combinaison linéaire du type $(L_{-1}^2 + \text{cte } L_{-2})|0\rangle$ s'annule, les relations de commutations impliquent que

$$h = \frac{1}{16} \left(4 + 1 - c \pm \sqrt{(c-25)(c-1)} \right)$$

De façon générale on peut démontrer [39] que les dimensions des champs primaires qui engendrent des représentations réductibles sont de la forme

$$h_{r,s} = \frac{1}{48} \left(12(r-s)^2 + (1-c)(r^2 + s^2 - 2) + (r^2 - s^2) \sqrt{(25-c)(1-c)} \right) \quad \text{avec } r \text{ et } s \text{ entiers.}$$

Dans ce cas l'existence de relations linéaires entre les états de base permet de calculer explicitement certaines observables du modèle c'est à dire des fonctions de corrélations ou des valeurs moyennes issues de la fonction de partition Z .

Modèles minimaux

En particulier les modèles qui ne font intervenir qu'un nombre fini de représentations toutes réductibles (c'est à dire un nombre fini de valeurs de h) sont entièrement solubles car ils donnent des relations fermées et finies pour toutes les observables, par exemple ils permettent d'établir des équations différentielles pour les fonctions de corrélations et pour la fonction de partition (l'équation des cordes). Ce sont les modèles minimaux [38], ils ont une charge centrale de la forme

$$c = 1 - 6 \frac{(p-q)^2}{pq} \quad \text{avec } p \text{ et } q \text{ premiers entre eux} \quad (\text{I.8})$$

et les poids conformes $h_{r,s}$ sont ceux de la table de Kac:

$$h_{r,s} = \frac{(rq - sp)^2 - (p-q)^2}{4pq} \quad \text{avec } 0 < r < p \quad \text{et} \quad 0 < s < q \quad (\text{I.9})$$

Ces modèles sont les seuls que l'on sache entièrement résoudre et l'on va voir que ce sont précisément ceux qui sont obtenus par les matrices aléatoires.

Remarque: parmi les modèles minimaux, les modèles tels que $|p-q| = 1$ sont les seuls modèles unitaires, c'est à dire ceux qui ne contiennent que des poids $h_{r,s}$ positifs.

I.6.3 Exposants critiques

Afin de comparer les méthodes de matrices aléatoires aux méthodes de théories conformes, on va définir des quantités calculables dans les deux approches: des exposants critiques. Les principales observables globales de la sommation sur les surfaces sont l'aire $\mathcal{A}$ couplée à la constante cosmologique et la topologie (le genre h) couplée à la constante gravitationnelle. On va donc étudier le comportement de la fonction de partition en fonction de $\mathcal{A}$ et h et en particulier le comportement à $\mathcal{A}$ grand.

La susceptibilité de corde γ_{str}

On définit la susceptibilité de la corde à partir du comportement de la fonction de partition (I.3) à aire et à genre fixés:

$$Z_h(\mathcal{A}) = \int \mathcal{D}[g_{\alpha\beta}] \mathcal{D}[X_\mu] \delta(\mathcal{A} - \int dx^2 \sqrt{\det g}) e^{-S} \underset{\mathcal{A} \rightarrow \infty}{\sim} \mathcal{A}^{\gamma_h - 3}$$

ou ce qui revient au même par transformée de Laplace, à partir du comportement de Z lorsque la constante cosmologique Λ est petite:

$$Z_h(\Lambda) \sim \Lambda^{2-\gamma_h}$$

On peut montrer (en effectuant une dilatation de la forme $g_{\alpha\beta} \rightarrow e^\varphi g_{\alpha\beta}$ que γ_h est linéaire en h et vaut:

$$\gamma_h = 2 - (2 - \gamma_{\text{str}})(1 - h) \quad (\text{I.10})$$

On verra que cette propriété joue un rôle essentiel pour la relation entre modèles de matrices et intégrales de surfaces.

Pour $h = 0$ les méthodes des théories conformes donnent également l'exposant γ_{str} :

$$\gamma_{\text{str}} = \frac{1}{12} \left(c - 1 - \sqrt{(25 - c)(1 - c)} \right) \quad (\text{I.11})$$

en particulier pour les théories minimales (p, q) on a

$$\gamma_{\text{str}} = -2 \frac{|p - q|}{p + q - |p - q|} \quad (\text{I.12})$$

On va voir que les modèles de matrices ne redonnent pas ce résultat mais $\gamma = -2/(p + q - 1)$ qui ne coïncide que pour les modèles unitaires $|p - q| = 1$. Ceci est dû au fait que dans les modèles de matrices Λ n'est pas la constante cosmologique de poids $h_{1,1} = 0$, elle n'est pas couplée à l'aire mais à l'opérateur le plus relevant, c'est à dire celui de poids minimal $h_{\text{min}} = (1 - (p - q)^2)/4pq$.

Autres opérateurs

On peut également étudier le comportement de valeurs moyennes d'autres opérateurs $\mathcal{O}_{r,s}$ en fonction de l'aire et voir comment leur dimension est "habillée" par la gravitation c'est à dire par la sommation sur les métriques:

$$\langle \mathcal{O}_{r,s} \rangle(\mathcal{A}) = \frac{1}{Z(\mathcal{A})} \int \mathcal{D}[g_{\alpha\beta}] \mathcal{D}[X_\mu] \delta(\mathcal{A} - \int dx^2 \sqrt{\det g}) \mathcal{O}_{r,s} e^{-S} \sim \mathcal{A}^{1-\Delta_{r,s}}$$

L'exposant $\Delta_{r,s}$ peut être calculé en fonction de la dimension $h_{r,s}$ de l'opérateur $\mathcal{O}_{r,s}$ et vaut:

$$1 - \Delta_{r,s} = \frac{p + q - |qr - ps|}{p + q - |p - q|}$$

$\Delta_{r,s}$ peut également être calculé par les modèles de matrices, il donne la dimension du paramètre $\Lambda_{r,s}$ couplé à l'opérateur $\mathcal{O}_{r,s}$ en unité de la constante cosmologique: $\Lambda_{r,s} \sim \Lambda^{1-\Delta_{r,s}}$.

Chapter II

Modèles de matrices et Surfaces discrétisées

II.1 Intégrales de matrices

Les matrices aléatoires sont étudiées à la fois en physique statistique, comme je l'ai déjà mentionné, et pour leur interprétation en termes de surfaces aléatoires, et donc de cordes ou de gravitation quantique.

De façon générale, on considère un ensemble de matrices hermitiennes M_i^j de taille $N \times N$ avec N grand, muni d'une loi de probabilité:

$$\mathcal{P}(M) = \frac{1}{Z} e^{-N\mathcal{V}(M)}$$

où le facteur de normalisation Z est la fonction de partition

$$Z = \int dM e^{-N\mathcal{V}(M)}$$

Celle ci contient toute l'information du modèle et c'est elle que l'on cherchera à calculer à partir d'ici.

On suppose que le potentiel $\mathcal{V}(M)$ est invariant par les transformations unitaires $M \rightarrow U^\dagger M U$ avec $U^\dagger U = 1$, et l'on s'intéresse particulièrement au cas où $\mathcal{V}$ a la forme:

$$\mathcal{V}(M) = \text{tr } V(M)$$

On souhaite donc calculer la fonction de partition suivante.

$$Z = \int dM e^{-N \text{tr } V(M)}$$

Pour cela on va appliquer une méthode diagrammatique comme en physique des particules où l'on sait rarement calculer exactement les intégrales fonctionnelles, excepté dans le cas de particules libres sans interactions car on a alors affaire à des intégrales gaussiennes. Dans les autres cas on

calcule la fonction de partition en perturbant l'intégrale gaussienne par une interaction supposée petite et on la développe en puissances de la constante de couplage. La méthode de Feynman permet de symboliser chaque terme de ce développement par un diagramme formé de lignes représentant la propagation des particules libres et de vertex représentant les interactions.

On peut effectuer un développement perturbatif analogue pour la fonction de partition des matrices aléatoires. On va voir que la nature matricielle des champs qui se propagent se traduit par des lignes et des vertex orientés ce qui implique que les diagrammes de Feynman peuvent être tracés sur des surfaces. Cette propriété des intégrales de matrices va permettre d'identifier formellement la fonction de partition Z à une somme statistique sur des surfaces, et réalise le lien entre matrices et surfaces aléatoires.

II.2 Développement perturbatif

On aimerait donc calculer perturbativement l'intégrale de matrices

$$\tilde{Z} = \int dM e^{-N \operatorname{tr} V(M)} \quad (\text{II.1})$$

$$\text{avec } V(M) = V_0 + \frac{g}{2} M^2 + \frac{g_3}{3} M^3 + \dots + \frac{g_k}{k} M^k = V_0 + \frac{g}{2} M^2 - \delta V \quad (\text{II.2})$$

Le principe du développement perturbatif est de considérer que la partie quadratique de V au voisinage de son minimum donne l'effet dominant et l'on traite les termes non quadratiques comme perturbations de l'intégrale gaussienne en développant en série $\exp(N \operatorname{tr} \delta V)$:

$$\tilde{Z} = e^{-N^2 V_0} \int dM e^{-\frac{1}{2} N g \operatorname{tr} M^2} (1 + N \operatorname{tr} \delta V(M) + \frac{N^2}{2} \operatorname{tr}^2 \delta V(M) + \dots) \quad (\text{II.3})$$

Autrement dit:

$$\tilde{Z} = \tilde{Z}_0 \left\langle e^{N \operatorname{tr} \delta V(M)} \right\rangle_0 = 1 + N \langle \operatorname{tr} \delta V \rangle_0 + \frac{N^2}{2} \langle (\operatorname{tr} \delta V)^2 \rangle_0 + \dots \quad (\text{II.4})$$

où l'indice 0 signifie que l'on prend la moyenne par rapport à l'intégrale gaussienne. Le théorème de Wick indique que la valeur moyenne d'un produit de variables gaussiennes est la somme sur tous les appariements possibles du produit des valeurs moyennes des paires. Par exemple si x, y, z, t sont des variables gaussiennes, on a:

$$\langle xyzt \rangle_0 = \langle xy \rangle_0 \langle zt \rangle_0 + \langle xz \rangle_0 \langle yt \rangle_0 + \langle xt \rangle_0 \langle yz \rangle_0$$

Ceci peut se représenter diagrammatiquement en reliant chaque paire par une ligne appelée propagateur. Chaque terme du développement (II.4) va pouvoir être dessiné comme un diagramme dont les sommets (appelés vertex) représentent toutes les variables issues d'un même terme de δV , et sont reliés par des propagateurs. Les règles de Feynman expliquent comment tracer de tels diagrammes et quelle est leur valeur.

II.2.1 Règles de Feynman

Propagateur

Le propagateur représente la valeur moyenne d'un produit de deux variables gaussiennes, il est donné par l'inverse de la partie quadratique ($Ng \text{ tr } M^2/2$):

$$\begin{array}{c} j \\ \text{---} \rightleftarrows \text{---} k \\ i \end{array} = \langle M_i^j M_k^l \rangle_0 = \frac{1}{Ng} \delta_l^i \delta_j^k \quad (\text{II.5})$$

Chaque propagateur relie deux couples d'indices $(i, j) \rightarrow (k, l)$, de façon ordonnée $l \rightarrow i, j \rightarrow k$ (on suit les indices des fonctions δ de bas en haut). Cette structure matricielle des indices, permet de représenter les propagateurs par des doubles lignes orientées (II.5) .

Vertex

Chaque terme $(N(g_k/k) \text{ tr } M^k)$ issu de $(N \text{ tr } \delta V)$ (cf eq.II.2) va être représenté par un diagramme à k lignes externes puisqu'il contient k matrices M susceptibles d'être appariées par des propagateurs. Là aussi, la structure des indices fait que l'on peut dessiner un tel vertex avec des doubles lignes orientées.

Par exemple, le terme cubique du potentiel

$$N \frac{g_3}{3} \text{ tr } M^3 = N \frac{g_3}{3} \sum_{i,j,k,l,m,n} M_i^j M_k^l M_m^n \delta_j^k \delta_l^m \delta_n^i$$

sera représenté par:

$$\begin{array}{c} i \quad j \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ m \quad l \quad k \end{array} = N \frac{g_3}{3} \delta_j^k \delta_l^m \delta_n^i \quad (\text{II.6})$$

et plus généralement le terme de degré k du potentiel donne:

$$\begin{array}{c} j_2 \quad i_1 \quad j_3 \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ i_2 \quad i_1 \quad i_k \end{array} = N \frac{g_k}{k} \delta_{j_1}^{i_2} \delta_{j_2}^{i_3} \dots \delta_{j_{k-1}}^{i_k} \delta_{j_k}^{i_1} \quad (\text{II.7})$$

Diagrammes avec indices

On a maintenant tous les outils pour calculer le développement perturbatif (II.4) :

$$\tilde{Z} = \sum_{\{n_k\}} \left\langle \prod_k \frac{1}{n_k!} \left(-N \frac{g_k}{k} \text{ tr } M^k \right)^{n_k} \right\rangle_0 \quad (\text{II.8})$$

Chaque terme de la forme

$$\left\langle \prod_k \frac{1}{n_k!} \left(-N \frac{g_k}{k} \text{tr } M^k \right)^{n_k} \right\rangle_0 \quad (\text{II.9})$$

se développe à l'aide du théorème de Wick comme une somme sur tous les diagrammes formés de n_k vertex à k pattes, reliés par des propagateurs. La valeur de chaque diagramme est:

$$\frac{1}{\Omega} \left(\frac{1}{gN} \right)^{n_v} \prod_k (-N g_k)^{n_k} \sum_{\text{indices}} \prod (\delta_{\text{indices}}^{\text{indices}}) \quad (\text{II.10})$$

où :

- Ω est le facteur de symétrie du diagramme, c'est un facteur combinatoire relié au nombre de permutations des vertex laissant le diagramme total inchangé, il contient entre autres les facteurs $(n_k!)k^{n_k}$.
- n_k est le nombre de vertex à k branches entrant dans la constitution du diagramme.
- $n_v = \sum_k n_k$ est le nombre total de vertex.
- n_p est le nombre total de propagateurs. On a $2n_p = \sum_k k n_k$.
- le produit des fonctions δ traduit la façon dont les doubles lignes se recollent. La structure du propagateur et des vertex (II.5,II.7) assurent que les indices restent constants le long des simples lignes.

Sommation sur les indices: contribution d'une boucle

Il est possible de réaliser explicitement la sommation sur tous les indices dans (II.10) . En effet, les indices n'apparaissent que dans des fonctions δ , et restent constants le long de chaque simple ligne. Chaque ligne fermée où se propage un indice i va contribuer avec un facteur $\delta_i^i = 1$, la somme sur toutes les valeurs de i va donc donner un facteur N pour chaque ligne fermée (fig.II.1) .

Ainsi, (II.10) vaut:

$$\frac{1}{\Omega} \left(\frac{1}{gN} \right)^{n_v} \prod_k (-N g_k)^{n_k} N^l \quad (\text{II.11})$$

où l est le nombre de boucles (c'est à dire lignes fermées) du diagramme.

Diagrammes sans indices

Finalement, on peut représenter le développement (II.4) comme une somme sur des diagrammes fermés, sans indices. Résumons les règles de Feynman permettant de calculer $\tilde{Z}$. Il faut:

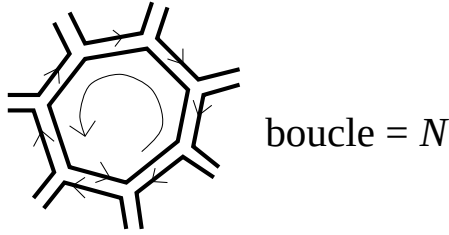


Figure II.1: Contribution d'une ligne fermée

- écrire tous les diagrammes possibles constitués de doubles lignes orientées, joignant des vertex par des propagateurs.
- associer à chaque propagateur (double ligne) un facteur $1/(Ng)$
- associer à chaque vertex ayant k pattes externes un facteur $(-Ng_k)$
- associer à chaque ligne fermée un facteur N
- diviser le résultat ainsi obtenu par le facteur de symétrie Ω du graphe. Celui ci permet de compter en une seule fois tous les diagrammes qui se déduisent les uns des autres par permutation des vertex et des indices.
- sommer sur tous les diagrammes possibles.

Un diagramme contenant n_k vertex à k pattes, n_p propagateurs, l boucles, et ayant un facteur de symétrie Ω contribue à la fonction de partition $\tilde{Z}$ avec le poids:

$$\frac{1}{\Omega} N^{n_k - n_p + l} g^{-n_p} \prod_k (-g_k)^{n_k} \quad (\text{II.12})$$

Il n'existe pas de règle vraiment simple pour calculer le facteur de symétrie Ω , mais de toute façon, sa valeur exacte ne jouera pas de rôle par la suite, seules importeront les caractéristiques géométriques et topologiques des diagrammes. Voyons sur un exemple comment s'appliquent ces règles de Feynman.

II.2.2 Exemple

Calcul de $\tilde{Z} = \int dM e^{-N \text{tr}(\frac{g}{2} M^2 + \frac{g_4}{4} M^4)}$ à l'ordre 1 en puissances de g_4 .

On a à cet ordre:

$$\tilde{Z} = 1 - N \frac{g_4}{4} \left\langle \text{tr} M^4 \right\rangle_0 + O(g_4^2) = 1 - N \frac{g_4}{4} \sum_{ijkl} \left\langle M_i^j M_j^k M_k^l M_l^i \right\rangle_0 + O(g_4^2) \quad (\text{II.13})$$

La valeur moyenne gaussienne du produit des 4 matrices se calcule par le théorème de Wick: il faut appairer deux à deux les matrices:

$$\left\langle M_i^j M_j^k M_k^l M_l^i \right\rangle_0 = \left\langle M_i^j M_j^k \right\rangle_0 \left\langle M_k^l M_l^i \right\rangle_0 + \left\langle M_i^j M_l^i \right\rangle_0 \left\langle M_j^k M_k^l \right\rangle_0 + \left\langle M_i^j M_k^l \right\rangle_0 \left\langle M_j^k M_l^i \right\rangle_0$$

Cette égalité se représente diagrammatiquement (remarquons que les deux premiers termes sont identiques à une permutation près des indices):

$$\langle M_i^j M_j^k M_k^l M_l^i \rangle_0 = 2 \text{ (diagram 1) } + \text{ (diagram 2) }$$

ce qui donne, en remplaçant le propagateur par sa valeur (II.5) :

$$= 2 \frac{1}{(Ng)^2} \delta_i^k \delta_j^j \delta_k^i \delta_l^l + \frac{1}{(Ng)^2} \delta_i^l \delta_j^k \delta_j^i \delta_k^l$$

Ce qui conduit à:

$$\tilde{Z} = 1 - N \frac{g_4}{4} \frac{1}{(Ng)^2} \sum_{ijkl} \left(2 \delta_i^k \delta_j^j \delta_k^i \delta_l^l + \delta_i^l \delta_j^k \delta_j^i \delta_k^l \right) + \dots$$

La sommation sur les indices peut s'effectuer grâce aux fonctions δ :

$$\tilde{Z} = 1 - \frac{g_4}{4} \frac{1}{(Ng)^2} (2N^3 + N) + O(g_4^2)$$

Cette égalité est l'expression numérique du développement diagrammatique suivant:

$$\tilde{Z} = 1 - N \frac{g_4}{4} \frac{1}{N^2 g^2} \left(2 \text{ (diagram 1) } + \text{ (diagram 2) } \right)$$

On aurait bien sur pu trouver directement ce résultat à l'aide des règles de Feynman énoncées plus haut. A titre d'exemple, voici l'application de ces règles pour le calcul de $\tilde{Z}$ à l'ordre suivant:

$$\begin{aligned} \tilde{Z} = & 1 - N \frac{g_4}{4} \frac{1}{N^2 g^2} \left(2 \text{ (diagram 1) } + \text{ (diagram 2) } \right) \\ & + \frac{1}{2!} N^2 \left(\frac{g_4}{4} \right)^2 \frac{1}{N^4 g^4} \left(\begin{array}{ccc} 4 \text{ (diagram 3) } & + 32 \text{ (diagram 4) } & + 4 \text{ (diagram 5) } \\ + 16 \text{ (diagram 6) } & + 32 \text{ (diagram 7) } & + 4 \text{ (diagram 8) } \\ + 4 \text{ (diagram 9) } & + 8 \text{ (diagram 10) } & + \text{ (diagram 11) } \end{array} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

Ce qui donne numériquement:

$$\begin{aligned} \tilde{Z} = & 1 - g_4 \frac{1}{g^2} \left(\frac{1}{2} N^2 + \frac{1}{4} \right) \\ & + g_4^2 \frac{1}{g^4} \left(\frac{1}{8} N^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + N^2 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} N^4 + \frac{1}{8} N^2 + \frac{1}{32} \right) \\ & + O(g_4^3) \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

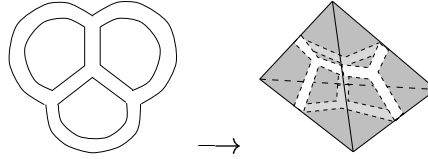
II.2.3 Dualité: Diagrammes $\longleftrightarrow$ Surfaces

Les diagrammes, qui apparaissent dans le développement perturbatif des intégrales de matrices, ont une interprétation géométrique en termes de surfaces polygonales. En effet, propagateurs et vertex sont orientés, ce qui signifie qu'ils possèdent une face supérieure et une face inférieure distinctes, et qu'ils peuvent être dessinés sur un morceau de surface. Comme on peut coller k propagateurs autour d'un vertex à k pattes, ce dernier doit être représenté sur un polygone à k cotés. Par exemple:



Ensuite, lorsque l'on développe $\tilde{Z}$ perturbativement, on forme, selon les règles de Feynman, des diagrammes en assemblant des vertex et des propagateurs, ce qui est équivalent à coller des pièces polygonales pour former une surface.

Par exemple, le diagramme suivant, formé de quatre vertex à trois pattes, devient un tétraèdre formé de quatre triangles:

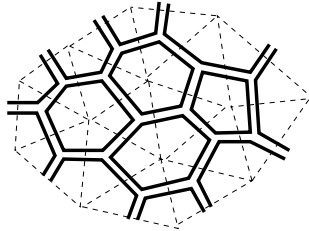


Mathématiquement, l'équivalence entre diagrammes et surfaces polygonales s'exprime par la relation de dualité. Chaque vertex à k pattes est dual d'un polygone à k cotés, et chaque diagramme de Feynman est dual d'une surface polygonale.

Finalement, le calcul perturbatif de (II.4) revient à calculer une somme sur des surfaces constituées de polygones. On a un dictionnaire exprimant la bijection entre diagrammes et surfaces:

diagramme	$\leftrightarrow$ surface polygonale
vertex à k pattes	$\leftrightarrow$ polygone à k cotés
propagateur	$\leftrightarrow$ arête
ligne fermée	$\leftrightarrow$ sommet
n_v (nbre de vertex)	$\leftrightarrow$ nbre de faces
n_p (nbre de propagateurs)	$\leftrightarrow$ nbre d'arêtes
l (nbre de boucles)	$\leftrightarrow$ nbre de sommets
Ω facteur de symétrie	$\leftrightarrow$ # groupe des automorphismes de la surface

Dans cette dualité, chaque sommet de vertex devient le centre d'un polygone, chaque propagateur est orthogonal à une arête, chaque boucle entoure un sommet de la surface:



On aimerait maintenant pouvoir écrire:

$$\tilde{Z} = \sum_{\text{surfaces}} \frac{1}{\Omega} N^{n_k - n_p + l} g^{-n_p} \prod_k (-g_k)^{n_k} \quad (\text{II.16})$$

mais comme on va le voir, la dualité entre diagrammes et surfaces n'a de sens que pour les diagrammes connexes, or en général le développement de $\tilde{Z}$ fait intervenir des diagrammes non connexes (cf (II.14) qui contient 3 diagrammes non connexes à l'ordre g_4^2).

Diagrammes connexes

En effet pour des diagrammes non connexes, les vertex ne sont pas tous reliés entre eux, et les polygones ne peuvent pas se recoller bords à bords. Il est donc nécessaire de se débarrasser des diagrammes non connexes, ce qui est possible en introduisant une nouvelle fonction de partition: $Z = \ln \tilde{Z}$.

Z peut se développer diagrammatiquement comme $\tilde{Z}$, les règles de Feynman sont identiques, excepté que Z ne contient que des diagrammes connexes.

$$Z = \ln \tilde{Z} = \sum_{\text{diagrammes connexes}} \frac{1}{\Omega} N^{n_k - n_p + l} g^{-n_p} \prod_k (-g_k)^{n_k} \quad (\text{II.17})$$

La dualité permet alors d'écrire l'équation (II.16) pour Z :

$$Z = \ln \tilde{Z} = \sum_{\text{surfaces}} \frac{1}{\Omega} N^{n_k - n_p + l} g^{-n_p} \prod_k (-g_k)^{n_k} \quad (\text{II.18})$$

Interprétation géométrique

Z possède une interprétation simple: c'est la fonction de partition d'un ensemble de surfaces polygonales aléatoires tirées avec un poids de Boltzmann (II.12).

- Chaque g_k joue le rôle d'une fugacité pour les polygones à k cotés.
- g joue le rôle d'une énergie de liaison entre les polygones.
- N est couplé au nombre $\chi = n_v - n_p + l$, dont on va voir la signification topologique dans le paragraphe suivant.

Cette interprétation souffre hélas d'un problème: la fugacité des polygones n'est pas g_k mais $(-g_k)$, ce qui signifie que certaines surfaces (celles qui ont un nombre impair de polygones) ont un poids négatif, ce qui ne convient pas si l'on veut l'interpréter comme un poids de Boltzmann. La seule façon de rétablir cette interprétation statistique est de supposer que les g_k sont négatifs. Hélas, si tous les g_k (ou au moins celui de plus haut degré) sont négatifs, le potentiel $V(M)$ (II.2) n'est pas borné inférieurement, et l'intégrale (II.1) diverge. Il faudra prolonger analytiquement $\tilde{Z}(g_k)$ en contournant l'origine par le plan complexe, pour passer de $g_k > 0$ à $g_k < 0$.

Limite continue

Il est possible de prolonger cette interprétation statistique (modulo les problèmes de convergence), des surfaces polygonales, aux surfaces continues. En effet, les g_k , et g contrôlent la proportion des différents constituants de la surface. En ajustant ces paramètres, on peut changer la prépondérance de différents types de surfaces, par exemple favoriser les triangles par rapport aux carrés, ou favoriser les petites plutôt que les grandes surfaces. On peut en particulier, par un choix précis des g_k , favoriser les surfaces ayant un très grand nombre de polygones, si ceux ci sont de petite taille, on passe à la limite des surfaces continues. Comme on vient de l'évoquer, ce passage à la limite continue n'est pas sans problèmes car le choix des g_k correspond à une intégrale (II.1) divergente. Avant d'aborder le cas des surfaces continues plus en détail dans le chapitre suivant, on va finir d'explorer les surfaces polygonales.

II.3 Développement topologique en $1/N^2$

Le développement perturbatif précédent est un développement en puissances des coefficients g_k du potentiel, on peut le réinterpréter comme un développement en puissances de $1/N$.

En effet, chaque terme du développement (II.18) porte une puissance de N , avec l'exposant N^χ , où

$$\chi = n_v - n_p + l \quad (\text{II.19})$$

n_v étant le nombre total de faces, n_p le nombre d'arêtes, et l le nombre de sommets de la surface considérée.

χ est appelée la caractéristique d'Euler Poincaré de la surface, et a la propriété d'être un invariant topologique, ce qui signifie que toutes les surfaces ayant la même topologie ont la même valeur de χ . On peut démontrer que pour une surface fermée:

$$\chi = 2 - 2h \quad (\text{II.20})$$

où h est le genre de la surface, c'est à dire son nombre de trous: une sphère est une surface sans trou $h = 0$, un tore possède un trou $h = 1$, ...etc.

χ est aussi définie pour les diagrammes. La valeur de χ indique sur quelle surface il faudrait tracer le diagramme pour ne pas avoir de lignes qui se croisent. Par exemple, seuls les diagrammes pour lesquels $\chi = 2$ peuvent être dessinés sur un plan. Un diagramme ayant une caractéristique $\chi = 2 - 2h$, ne peut être dessiné sans auto-intersection que sur une surface à au moins h trous (cf exemple (II.14)).

Le développement perturbatif de Z , vu comme un développement en puissances de N est ainsi appelé développement topologique:

$$Z = \sum_{h=0}^{\infty} N^{2-2h} Z_{[h]} = N^2 \text{ (sphère) } + N^0 \text{ (tore) } + N^{-2} \text{ (genre 2) } + \dots \quad (\text{II.21})$$

$Z_{[h]}$ étant la fonction de partition partielle incluant seulement les surfaces polygonales de genre h .

Limite sphérique

Remarquons que la limite N grand, consiste à privilégier le terme $h = 0$, c'est à dire les surfaces sans trous. La limite $N \rightarrow \infty$ est donc appelée la limite sphérique ou limite planaire:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} Z = Z_{[0]} \quad (\text{II.22})$$

De façon générale, le développement de Z au voisinage de $N = \infty$ donne accès aux fonctions de partitions $Z_{[h]}$ de genre fixé.

II.4 Surfaces ouvertes: interprétation de $\langle \text{tr } M^n \rangle$

Jusqu'ici, on n'a considéré que des diagrammes fermés, correspondants à des surfaces fermées, c'est à dire sans bords. On peut aussi s'intéresser au cas des surfaces ouvertes. La quantité

$$T_n = \langle \text{tr } M^n \rangle = \frac{1}{Z} \int dM (\text{tr } M^n) e^{-N \text{tr } V(M)} \quad (\text{II.23})$$

représente la fonction génératrice des surfaces ouvertes avec un bord de longueur n :

$$\frac{1}{n} T_n = \sum_{\text{Surfaces de bord } n} \frac{1}{\Omega} N^\chi g^{-n_p} \prod_k (-g_k)^{n_k} \quad (\text{II.24})$$

En effet chaque diagramme contribuant au calcul perturbatif de l'intégrale de matrice (II.23) contient au moins un vertex à n pattes, c'est à dire un polygone à n cotés. Le reste du diagramme est alors une surface à laquelle on a enlevé un polygone à n cotés, c'est donc une surface avec un bord de longueur n .

Développement topologique

La caractéristique d'Euler χ d'une surface avec un bord apparaissant dans (II.24) est $\chi = 2 - 2h - 1$. En effet, si l'on referme la surface en lui ajoutant un polygone, on obtient une surface fermée de genre h et de caractéristique: $2 - 2h = (n_v + 1) - n_p + l = \chi + 1$

T_n admet donc aussi un développement topologique en puissances de $1/N^2$:

$$T_n = \sum_h N^{2-2h-1} t_{[h]n} = N \text{ (disque) } + N^{-1} \text{ (anneau) } + N^{-3} \text{ (deux anneaux) } + \dots \quad (\text{II.25})$$

$t_{[h]n}$ étant la fonction de partition des surfaces de genre h , ayant un bord de longueur n .

Remarque: on a la relation:

$$t_n = \frac{1}{N} T_n = \frac{n}{N^2} \frac{\partial Z}{\partial g_n} \quad (\text{II.26})$$

et la limite sphérique $N \rightarrow \infty$ montre que t_n reste fini lorsque $N \rightarrow \infty$, cette remarque sera utile dans le chapitre suivant.

La résolvante

On considère souvent la résolvante

$$\omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t_n}{z^{n+1}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \frac{\text{tr } M^n}{z^{n+1}} \right\rangle = \frac{1}{N} \left\langle \text{tr} \frac{1}{z - M} \right\rangle \quad (\text{II.27})$$

Elle joue le rôle d'une fonction de partition grand canonique, où la taille des bords n'est pas fixée. z est le paramètre conjugué à la longueur du bord. Cette interprétation sera très importante pour l'interprétation géométrique de la méthode des boucles développée dans le chapitre suivant.

II.4.1 Surfaces à plusieurs bords:

De même la valeur moyenne

$$T_{l_1, l_2} = \left\langle \text{tr } M^{l_1} \text{tr } M^{l_2} \right\rangle_c = \left\langle \text{tr } M^{l_1} \text{tr } M^{l_2} \right\rangle - \left\langle \text{tr } M^{l_1} \right\rangle \left\langle \text{tr } M^{l_2} \right\rangle \quad (\text{II.28})$$

est la fonction génératrice des surfaces à deux bords de longueurs l_1 et l_2 . Le fait de prendre la partie connexe empêche d'avoir des diagrammes disconnectés ayant l'un un bord l_1 , l'autre un bord l_2 .

Plus généralement, la fonction génératrice des surfaces ayant m bords de longueurs $l_1, \dots, l_m$, est donnée par:

$$T_{l_1, l_2, \dots, l_m} = \left\langle \text{tr } M^{l_1} \dots \text{tr } M^{l_m} \right\rangle_c$$

Comme pour les surfaces à un seul bord, $T_{l_1, \dots, l_m}$ admet un développement topologique en puissances de $1/N^2$. Chaque surface de genre h à m bords contribue avec une puissance N^χ où $\chi = 2 - 2h - m$.

$$\frac{1}{m! l_1 \dots l_m} T_{l_1, \dots, l_m} = \sum_{\text{Surfaces de bords } l_1, \dots, l_m} \frac{1}{\Omega} N^\chi g^{-n_p} \prod_k (-g_k)^{n_k} \quad (\text{II.29})$$

Remarque: la quantité qui reste finie à la limite $N \rightarrow \infty$ est $t_{l_1, \dots, l_m} = N^{m-2} T_{l_1, \dots, l_m}$

II.5 Théorème de factorisation

La méthode diagrammatique apporte peu de résultats quantitatifs, elle est surtout utilisée pour modéliser formellement des surfaces aléatoires. Toutefois, elle permet de démontrer le théorème

suivant:

Dans la limite N grand on a:

$$\left\langle \text{tr } M^{l_1} \text{ tr } M^{l_2} \right\rangle \sim \left\langle \text{tr } M^{l_1} \right\rangle \left\langle \text{tr } M^{l_2} \right\rangle \quad (\text{II.30})$$

En effet ceci revient à montrer que

$$\frac{T_{l_1, l_2}}{T_{l_1} T_{l_2}} = \frac{\left\langle \text{tr } M^{l_1} \text{ tr } M^{l_2} \right\rangle - \left\langle \text{tr } M^{l_1} \right\rangle \left\langle \text{tr } M^{l_2} \right\rangle}{\left\langle \text{tr } M^{l_1} \right\rangle \left\langle \text{tr } M^{l_2} \right\rangle} = O(1/N^2) \quad (\text{II.31})$$

Or on a vu que chacun de ces termes admet un développement topologique en puissances de $1/N^2$. A l'ordre dominant $N \rightarrow \infty$, seules les surfaces sphériques ($h = 0$) contribuent. Il suffit donc de comparer la caractéristique χ d'une surface sphérique à deux bords intervenant dans T_{l_1, l_2} , avec celle d'une surface avec un bord. A l'ordre dominant $T_{l_1, l_2} \sim N^{2-2} = N^0$, et $T_{l_1} \sim N^{2-1} = N^1$, ce qui donne $T_{l_1, l_2}/(T_{l_1} T_{l_2}) \sim 1/N^2$, et démontre le théorème de découplage des traces.

De façon générale, à l'ordre dominant, la moyenne d'un produit de traces est le produit des valeurs moyennes des traces.

Chapter III

Techniques mathématiques pour la résolution du modèle à une matrice

III.1 Présentation du modèle

On a vu qu'une intégrale de surfaces comme on souhaiterait en calculer en théorie des cordes ou en gravitation quantique peut être obtenue à partir d'une intégrale de matrices. Par ailleurs, les matrices aléatoires interviennent en physique statistique, et il est utile de savoir calculer des valeurs moyennes et des corrélations.

Nous supposons à partir d'ici, que nous avons un ensemble de matrices hermitiennes M de taille $N \times N$, muni d'une loi de probabilité $\mathcal{P}(M)$, invariante par le groupe unitaire $SU(N)$. La quantité que l'on calcule toujours en physique statistique, est la fonction de partition (celle ci permet en effet de retrouver toutes les autres fonctions de corrélations):

$$Z = \int dM \mathcal{P}(M) \quad (\text{III.1})$$

où dM est la mesure invariante sous $SU(N)$:

$$dM = \prod_i dM_{i,i} \prod_{i < j} d\text{Re} M_{i,j} d\text{Im} M_{i,j}. \quad (\text{III.2})$$

Remarquons que l'on a N^2 variables, et donc, si l'on ne veut pas obtenir un résultat trivial, il faut que $\mathcal{P}$ soit du même ordre que la mesure, c'est à dire d'ordre e^{N^2} . Le choix le plus simple est le suivant:

$$\mathcal{P}(M) = e^{-N \text{tr} V(M)} \quad (\text{III.3})$$

où V est un polynôme. Par exemple si V est de degré 2 on a un modèle gaussien et l'on retrouve la statistique de Wigner–Dyson [2, 1].

Ce choix n'est pas le plus général possible compatible avec l'invariance $SU(N)$, on pourrait ajouter

dans l'exponentielle des produits de traces, mais il a l'avantage d'être le plus facile à résoudre et il couvre quand même une vaste gamme de modèles permettant de tester les propriétés d'universalité. Ce modèle peut être généralisé à des $\mathcal{P}$ plus compliqués, notamment en intégrant sur plusieurs matrices, c'est ce que je ferai dans la partie VI concernant le modèle $O(n)$.

III.1.1 Loi induite pour les valeurs propres

On peut intégrer partiellement la fonction de partition (III.1) de façon à déduire la loi de probabilité induite pour les valeurs propres de M [51, 52]. On effectue le changement de variable

$$M = U^\dagger \Lambda U \quad \text{avec} \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \quad \text{et} \quad U^\dagger U = 1$$

il apparaît un jacobien $\prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2$. On intègre ensuite sur U en utilisant l'invariance unitaire, et l'on trouve la loi de probabilité conjointe des valeurs propres de M :

$$R_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \text{cte} \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \prod_i e^{-NV(\lambda_i)} \quad (\text{III.4})$$

Elle correspond à un poids de Boltzmann $e^{-N\mathcal{E}}$ avec l'énergie $\mathcal{E} = \sum_i V(\lambda_i) - \frac{2}{N} \sum_{i < j} \ln |\lambda_i - \lambda_j|$. C'est l'énergie d'un gaz de N particules se repoussant deux à deux avec une force Coulombienne bidimensionnelle en $1/r$, et placées dans un puits de potentiel commun $V(\lambda)$. La force ressentie par la particule λ_i , est:

$$F_i = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \lambda_i} = -V'(\lambda_i) + \frac{2}{N} \sum_{j \neq i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \quad (\text{III.5})$$

Remarquons que la seule interaction entre les valeurs propres provient du Jacobien, et non du potentiel.

III.1.2 Observables

Les quantités que l'on souhaite calculer sont les fonctions de corrélations des valeurs propres, de la forme:

$$\rho_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{1}{N^n} \left\langle \prod_{i=1}^n \text{tr} \delta(\lambda_i - M) \right\rangle$$

et en particulier la densité de valeurs propres $\rho(\lambda) = \rho_1(\lambda)$.

On souhaite souvent calculer aussi des valeurs moyennes, de la forme:

$$t_k = \frac{1}{N} \left\langle \text{tr} M^k \right\rangle = \frac{1}{N} \frac{1}{Z} \int dM \text{tr} M^k \mathcal{P}(M) \quad (\text{III.6})$$

qui sont les moments de ρ : $t_k = \int_a^b d\lambda \rho(\lambda) \lambda^k$.

On peut regrouper tous ces t_k en une seule fonction $\omega(z)$ la résolvante qui va jouer un rôle essentiel:

$$\omega(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t_k}{z^{k+1}} = \frac{1}{N} \left\langle \text{tr} \frac{1}{z - M} \right\rangle \quad (\text{III.7})$$

ω est une fonction analytique de la variable complexe z , sauf lorsque z est valeur propre de M . Les propriétés d'analyticité de ω renseignent sur la distribution des valeurs propres de M . En effet dans la limite N grand, les valeurs propres occupent un intervalle $[a, b]$ avec une densité continue $\rho(\lambda)$ et la résolvante devient:

$$\omega(z) = \int_a^b d\lambda \rho(\lambda) \frac{1}{z - \lambda} \quad (\text{III.8})$$

Elle possède une discontinuité le long du segment $[a, b]$ support de la distribution ρ et vérifie:

$$\omega(\lambda + i0) - \omega(\lambda - i0) = -2i\pi\rho(\lambda) \quad \lambda \in [a, b] \quad (\text{III.9})$$

La densité $\rho(\lambda)$ peut donc être obtenue comme la discontinuité de la résolvante $\omega(z)$ le long de sa coupure.

III.1.3 Méthodes de résolution

A partir de ces définitions, nous allons voir comment calculer $\omega(z)$ et $\rho(\lambda)$, en tenant compte de la forme particulière (III.3) de la loi $\mathcal{P}(M)$. Je vais exposer les principales méthodes de calcul développées depuis l'origine des modèles de matrices [4, 50], surtout pour introduire mes notations.

- **La méthode du col**

Elle consiste à observer que lorsque N est grand, presque toute l'intégrale (III.1) est concentrée dans les régions où l'intégrand est maximal. Elle revient à trouver l'état d'équilibre d'un gaz de Coulomb plongé dans le puits de potentiel $V(\lambda)$.

- **La méthode des polynômes orthogonaux**

Elle est basée sur des techniques mathématiques, mais s'interprète en termes d'un gaz de fermions libres dans un puits de potentiel. On y retrouve un formalisme d'opérateurs qui commutent dans la limite N grand. $1/N$ joue le rôle de $\hbar$ en mécanique quantique. La limite classique redonne la méthode du col.

- **La méthode des boucles**

Celle ci vient de l'application des modèles de matrices aux surfaces aléatoires, elle décrit la façon de recoller des surfaces avec bords (les boucles). Cette méthode a l'avantage d'être presque toujours applicable (pour n'importe quelle loi $\mathcal{P}(M)$), mais conduit souvent à des équations algébriques de degré élevé. Dans le cas (III.3) on obtient une équation de degré 2 pour la résolvante $\omega(z)$.

- **Le groupe de renormalisation**

Cette méthode que je ne développerai pas dans la suite a été suggérée récemment par [60], et affinée par [61]. Le principe est de voir comment se comporte Z lorsque l'on change N en $N + 1$, on peut ainsi déduire des renseignements sur la limite N grand. Cette méthode pourrait peut être donner des résultats approchés dans des cas que l'on n'a pas encore pu résoudre, notamment pour la gravitation quantique avec une charge centrale $c > 1$.

III.2 Méthode du col et gaz de Coulomb

On souhaite calculer la fonction de partition (III.1) :

$$Z = \int dM e^{-N \operatorname{tr} V(M)} \quad (\text{III.10})$$

III.2.1 Méthode du col naïve

La méthode du col habituelle, consisterait à penser que dans la limite N grand, seul l'intégrand maximum, c'est à dire le minimum de V contribue. On aurait alors:

$$Z \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} e^{-N \operatorname{tr} V(M_0)} \quad \text{avec} \quad V'(M_0) = 0 \quad (\text{III.11})$$

Ceci est faux pour plusieurs raisons: d'abord, l'équation $V'(M) = 0$ ne fournit pas en général un unique minimum M_0 , mais un ensemble continu obtenu par transformations unitaires, or la méthode du col ne s'applique que dans le cas d'un minimum isolé. Ce problème est général lorsqu'il existe une symétrie continue, et peut aisément être résolu par l'introduction de coordonnées collectives, ou en fixant la jauge. Mais dans ce cas il existe une autre raison qui interdit l'application directe de la méthode du col. En effet l'intégrand $\exp(-N \operatorname{tr} V(M))$ est d'ordre $\exp(N^2)$ car une trace est une somme de N termes, et la mesure dM est aussi du même ordre car c'est un produit de N^2 termes. Il ne suffit pas de rendre $\exp(-N \operatorname{tr} V(M))$ maximal, il faut tenir compte aussi de la mesure. Ces deux problèmes peuvent être surmontés en fixant la jauge vis à vis de la symétrie $SU(N)$. En effet, en choisissant la jauge diagonale, on se ramène aux valeurs propres, on n'a plus que N variables au lieu de N^2 , et l'on se débarrasse de la symétrie unitaire, ce qui permet d'avoir un minimum isolé.

III.2.2 Méthode du col pour les valeurs propres

La fonction de partition induite pour les valeurs propres après intégration sur le groupe unitaire devient (III.4) :

$$Z = \text{cte} \int d\lambda_1 \dots d\lambda_N \Delta^2(\lambda_i) e^{-N \sum_i V(\lambda_i)} \quad (\text{III.12})$$

où le jacobien du changement de variable est le carré du déterminant de Vandermonde:

$$\Delta(\lambda_i) = \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j) \quad (\text{III.13})$$

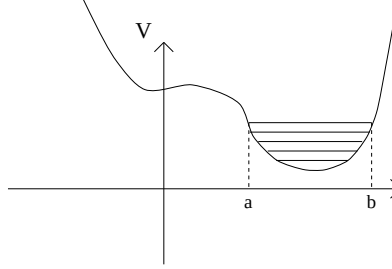
Z se présente formellement comme la fonction de partition statistique d'un gaz de coulomb [52] de N particules avec un poids de Boltzmann $\exp(-N\mathcal{E})$:

$$Z = \text{cte} \int d\lambda_1 \dots d\lambda_N e^{-N\mathcal{E}} \quad \text{avec} \quad \mathcal{E} = \sum_{i=1}^N V(\lambda_i) - \frac{2}{N} \sum_{i < j} \ln |\lambda_i - \lambda_j| \quad (\text{III.14})$$

Les valeurs propres λ_i sont les coordonnées dans un espace à une dimension, de N particules placées dans un potentiel extérieur $V(\lambda)$, et interagissant entre elles par un potentiel répulsif à deux corps $-\frac{2}{N} \ln |\lambda_i - \lambda_j|$. La force à laquelle est soumise la particule λ_i est donc :

$$F_i = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \lambda_i} = -V'(\lambda_i) + \frac{2}{N} \sum_{j \neq i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \quad (\text{III.15})$$

La méthode du col exprime que dans la limite N grand, seules les configurations rendant l'intégrant de (III.14) maximal contribuent notablement à la fonction de partition. Ces configurations sont celles qui minimisent l'énergie, elles correspondent à l'état d'équilibre du gaz $F_i = 0$. Cet équilibre résulte de la compétition entre la force extérieure $-V'(\lambda_i)$ qui tendrait à confiner toutes les valeurs propres au fond du puits de potentiel V , et la force répulsive à longue portée entre qui les empêche de se concentrer en un seul point. Comme la force répulsive est d'ordre $1/N$, on s'attend à ce que la distance entre particules voisines soit d'ordre $1/N$, les N particules vont alors occuper une région finie $\lambda_i \in [a, b]$ autour du fond du puits de potentiel et dans la limite N grand l'état d'équilibre du gaz pourra être décrit par une densité continue de valeurs propres $\rho(\lambda)$ [51]:



III.2.3 Résolution des équations d'équilibre $F_i = 0$

On va maintenant résoudre le système de N équations $F_i = 0$. Dans un premier temps, on ne va considérer que des situations “simples” où le potentiel V possède un unique puits assez profond. Si par exemple V possède deux puits, les particules vont occuper deux segments $[a, b] \cup [c, d]$. Il peut aussi arriver que la force de confinement $-V'$ ne soit pas assez forte pour empêcher le gaz d'exploser sous l'effet des répulsions. Dans ce cas a ou b est infini, et l'on ne peut plus vraiment considérer que les particules forment un gaz de densité continue. Restons en pour l'instant à la situation simple.

Dans la limite N grand, où le gaz de valeurs propres est décrit par une densité continue $\rho(\lambda)$, les équations d'équilibre (III.15) $F_i = 0$ peuvent se réécrire sous la forme continue:

$$0 = -V'(\lambda) + 2 \text{PP} \int_a^b \frac{1}{\lambda - \mu} \rho(\mu) d\mu \quad \text{pour tout } \lambda \in [a, b] \quad (\text{III.16})$$

où $\text{PP} \int$ est la partie principale de l'intégrale, en effet la somme $\sum_j$ dans (III.15) devient une intégrale $\int \rho(\mu) d\mu$ et comme on avait $i \neq j$, on ne doit considérer que la partie principale. Nous allons maintenant voir comment résoudre une telle équation, c'est à dire trouver explicitement la densité d'équilibre $\rho(\lambda)$. Remarquons que l'on avait au départ un système de N équations à N inconnues (III.15) et que l'on a maintenant une équation intégrale à résoudre avec une fonction

inconnue $\rho(\lambda)$. Cette dernière est cependant plus simple car elle est linéaire, elle se résout par une transformation de Hilbert en introduisant la fonction:

$$\omega(z) = \int_a^b \frac{1}{z - \lambda} \rho(\lambda) d\lambda \quad (\text{III.17})$$

qui n'est autre que la résolvante (III.7) $\omega(z) = \frac{1}{N} \langle \text{tr } 1/(z - M) \rangle$. Celle ci est analytique dans le plan complexe coupé le long du segment $[a, b]$. Suivant que l'on s'approche de la coupure $[a, b]$ par le demi plan $\text{Im } z > 0$ ou $\text{Im } z < 0$, elle prend deux valeurs $\omega(z + i0)$ et $\omega(z - i0)$ obtenues en décomposant l'intégrale (III.17) en sa partie principale, et une partie singulière au voisinage du pôle:

$$\omega(z \pm i0) = \text{PP} \int_a^b \frac{1}{z - \mu} \rho(\mu) d\mu \mp i\pi \rho(z) \quad (\text{III.18})$$

L'équation d'équilibre (III.16) devient alors une équation de discontinuité:

$$V'(\lambda) = \omega(\lambda + i0) + \omega(\lambda - i0) \quad \text{avec} \quad \lambda \in [a, b] \quad (\text{III.19})$$

C'est une équation linéaire en ω . Pour la résoudre il suffit d'en trouver une solution particulière, ce qui est facile car $\omega = V'/2$ est solution et d'ajouter la solution générale de l'équation homogène, ce qui donne:

$$\omega(z) = \frac{1}{2} \left(V'(z) - M(z) \sqrt{(z - a)(z - b)} \right) \quad (\text{III.20})$$

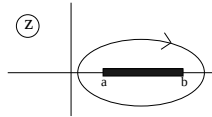
où $M(z)$ est une fonction analytique dans le plan complexe tout entier et doit être fixée par des conditions aux limites. En effet par définition (III.17) $\omega(z)$ doit se comporter à l'infini en $1/z$ ce qui suffit à déterminer $M(z)$ ainsi que les valeurs de a et b . Par exemple dans le cas où V est un polynôme, on a nécessairement:

$$M(z) = \text{Pol} \frac{V'(z)}{\sqrt{(z - a)(z - b)}} \quad (\text{III.21})$$

Et d'une façon générale on peut exprimer la solution sous forme d'une intégrale de contour:

$$\omega(z) = \frac{1}{4i\pi} \oint \frac{V'(u)}{z - u} \sqrt{\frac{(z - a)(z - b)}{(u - a)(u - b)}} du \quad (\text{III.22})$$

où le chemin d'intégration entoure la coupure $[a, b]$ dans le sens antitrigonométrique:



La condition aux limites $\omega(z) \sim 1/z$ implique deux équations

$$\frac{1}{2i\pi} \oint V'(u) \frac{1}{\sqrt{(u - a)(u - b)}} du = 0 \quad (\text{III.23})$$

$$\frac{1}{2i\pi} \oint u V'(u) \frac{1}{\sqrt{(u-a)(u-b)}} du = 2 \quad (\text{III.24})$$

qui déterminent implicitement a et b .

Cas du double puits

Dans le cas où le potentiel V possède deux puits, les valeurs propres peuvent se répartir sur deux segments $[a, b] \cup [c, d]$, la résolvante a alors deux coupures dans le plan complexe, et prends la forme:

$$\omega(z) = \frac{1}{2} \left(V'(z) - M(z) \sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)} \right) \quad (\text{III.25})$$

Où cette fois

$$M(z) = \text{Pol} \frac{V'(z)}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}} \quad (\text{III.26})$$

ω peut de nouveau s'écrire comme une intégrale de contour

$$\omega(z) = \frac{1}{4i\pi} \oint \frac{V'(u)}{z-u} \sqrt{\frac{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}{(u-a)(u-b)(u-c)(u-d)}} du \quad (\text{III.27})$$

avec trois équations implicites:

$$\frac{1}{2i\pi} \oint V'(u) \frac{1}{\sqrt{(u-a)(u-b)(u-c)(u-d)}} du = 0 \quad (\text{III.28})$$

$$\frac{1}{2i\pi} \oint u V'(u) \frac{1}{\sqrt{(u-a)(u-b)(u-c)(u-d)}} du = 0 \quad (\text{III.29})$$

$$\frac{1}{2i\pi} \oint u^2 V'(u) \frac{1}{\sqrt{(u-a)(u-b)(u-c)(u-d)}} du = 2 \quad (\text{III.30})$$

Ces trois équations ne suffisent pas à déterminer les quatre inconnues a, b, c, d , il faut une condition supplémentaire.

Tout se passe comme dans un mélange binaire en thermodynamique: les valeurs propres se répartissent dans deux phases $\lambda \in [a, b]$ et $\lambda \in [c, d]$ avec des concentrations x dans la première phase et $1-x$ dans la seconde, c'est à dire:

$$x = \int_a^b \rho(\lambda) d\lambda \quad 1-x = \int_c^d \rho(\lambda) d\lambda$$

L'équation supplémentaire est l'équation d'équilibre des phases exprimant que les potentiels chimiques des deux phases sont égaux. Pour cela, il faudrait calculer l'énergie libre $f(x)$ en fonction de x , et écrire $f'(x) = 0$.

III.2.4 Densité $\rho(\lambda)$ et points critiques

Une fois que l'on connaît la résolvante $\omega(z)$, on trouve la densité $\rho(\lambda)$ par la relation (III.18) :

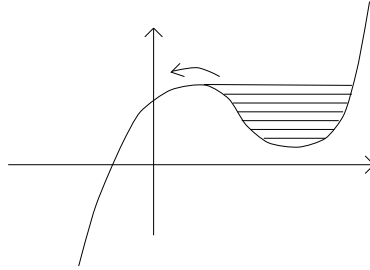
$$\rho(\lambda) = \frac{-1}{2i\pi} (\omega(\lambda + i0) - \omega(\lambda - i0)) = \frac{-1}{\pi} \text{Im } \omega(\lambda + i0) \quad (\text{III.31})$$

C'est à dire dans le cas du simple puits avec (III.20) :

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi} M(\lambda) \sqrt{(\lambda - a)(b - \lambda)} \quad (\text{III.32})$$

Dans le cas où V est quadratique, c'est à dire si la loi $\mathcal{P}(M)$ est gaussienne, M est une constante et (III.32) n'est autre que la loi du demi-cercle de Wigner. Pour un potentiel V plus général, la densité de valeurs propres $\rho(\lambda)$ présente une propriété universelle: elle se comporte en racine carrée aux extrémités du spectre.

Il arrive que cette règle soit violée lorsque M s'annule en a ou b , c'est un cas exceptionnel qui ne se produit que pour des potentiels V très particuliers. La condition $M(a) = 0$ (resp. $M(b) = 0$) est la condition pour que l'on soit à un point critique. La représentation intuitive des points critiques en termes du gaz de valeurs propres correspond au cas où les valeurs propres commencent à atteindre le sommet d'une barrière de potentiel séparant deux puits et s'écoulent de l'autre côté.



Il existe toute une hiérarchie de points critiques suivant le degré d'annulation de la fonction $M(z)$ au voisinage de a ou b . Si $M(z) \sim (z - a)^m$ on est à un point critique d'ordre m et la densité se comporte en $\rho(\lambda) \sim (z - a)^{m+1/2}$.

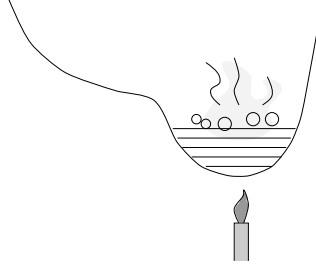
Remarques:

- il existe aussi des points critiques mixtes, où M s'annule en a et en b à des ordres m_a et m_b . Le plus simple de ceux ci est le cas du potentiel pair pour lequel on a $a = -b$ et $m_a = m_b = m$.
- Toutes ces transitions du second ordre ont lieux dans des cas qui ne sont pas physiques: on suppose que les valeurs propres peuvent s'écouler vers un autre puits de potentiel plus profond ce qui signifie que l'on n'était pas dans l'état fondamental. Ces situations arrivent typiquement lorsque le potentiel n'est pas borné inférieurement et le modèle ne peut être défini que par prolongement analytique.

La température T

Pour étudier les points critiques, il est commode d'introduire une température T , en remplaçant le potentiel V par V/T . Lorsque T est petit, la force de confinement (III.15) due au potentiel $V(\lambda)/T$

domine par rapport à la répulsion entre valeurs propres, celles ci se concentrent au fond du puits, et lorsque T augmente, le gaz se dilate.



Il existe des relations remarquables permettant de calculer les variations des quantités thermodynamiques par rapport à la température:

$$\frac{\partial T \omega(z)}{\partial T} = \frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \quad (\text{III.33})$$

$$\frac{\partial a}{\partial T} = \frac{4}{(b-a)M(a)} \quad , \quad \frac{\partial b}{\partial T} = \frac{4}{(a-b)M(b)} \quad (\text{III.34})$$

L'énergie libre par particule f définie par $Z = e^{-N^2 f}$ est reliée à a et b par:

$$u(T) = \frac{\partial^2}{\partial T^2} (T^2 f) = -2 \ln |a-b| \quad (\text{III.35})$$

Exposants critiques

Les relations précédentes permettent d'étudier le comportement des quantités thermodynamiques au voisinage d'un point critique $T \rightarrow T_c$ d'ordre m et de calculer ses exposants critiques.

On a déjà vu que l'exposant μ défini par le comportement aux bords de la densité $\rho(\lambda) \sim (\lambda - a)^\mu$ vaut $\mu = m + 1/2$. On voudrait aussi calculer l'exposant de susceptibilité de corde γ défini par le comportement singulier de l'énergie libre:

$$f_{\text{sing}} \sim (T_c - T)^{2-\gamma}$$

Pour cela, il est utile d'étudier la variation de a en fonction de T , en introduisant un autre exposant critique:

$$a - a_c \sim (T_c - T)^{-\alpha}$$

La relation (III.35) permet de voir que $\alpha = \gamma$ et que a se comporte au voisinage du point critique comme la partie singulière de la chaleur spécifique $u(T)$:

$$a \sim a_c - \frac{1}{2}(a_c - b_c)(u(T) - u(T_c))$$

Pour calculer α , remarquons que à $T = T_c$, la fonction $M(z)$ vaut au voisinage de a :

$$M(z) \sim \text{cte } (z - a_c)^m$$

et à $T \neq T_c$ la relation (III.33) permet d'écrire:

$$M(z)\sqrt{z-a} = \text{cte } (z-a_c)^{m+1/2} - 2 \frac{T-T_c}{a_c-b_c} \frac{1}{\sqrt{z-a_c}} + \dots \quad (\text{III.36})$$

En divisant cette équation par $\sqrt{z-a}$, et en tenant compte du fait que M est un polynôme, on trouve qu'au voisinage de $z=a$, la fonction $M(z)$ est universelle, elle ne dépend que de l'ordre m du point critique, mais pas de la forme précise du potentiel V :

$$M(z) = \text{cte Pol } (z-a_c)^m \left(1 - \frac{a-a_c}{z-a_c}\right)^{-1/2} = \text{cte } \sum_{k=0}^m \frac{2k!}{4^k k!^2} (a-a_c)^k (z-a_c)^{m-k} \quad (\text{III.37})$$

et à l'ordre $(z-a)^{-1/2}$ l'équation (III.36) implique que

$$\text{cte } (a-a_c)^{m+1} \frac{2m+2!}{4^{m+1}(m+1)!^2} = 2 \frac{T-T_c}{a_c-b_c}$$

ce qui donne

$$\alpha = \gamma = \frac{-1}{m+1}$$

Ces exposants critiques $\mu = m+1/2$ et $\gamma = -1/(m+1)$ sont en accord avec ceux de la série minimale des théories conforme (p, q) telles que:

$$\mu = \frac{p}{q} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{-2}{p+q-1}$$

pour $q=2$ et $p=2m+1$.

III.2.5 Exemple: potentiel quartique

Considérons l'exemple du potentiel quartique (fig.III.1): $V(M) = \frac{1}{T} \left(\frac{1}{12} M^4 - M^2 \right)$.
On cherche $\omega(z)$ sous la forme (III.20), en exploitant la parité du potentiel:

$$\omega(z) = \frac{1}{2T} \left(\frac{1}{3} z^3 - 2z - \frac{1}{3} (z^2 + c) \sqrt{z^2 - a^2} \right) \quad (\text{III.38})$$

et l'on détermine c et a , par la condition aux limites $\omega(z) \sim 1/z$:

$$c = a^2/2 - 6, \quad 6T = a^4/8 + ca^2/2$$

ce qui donne:

$$a^2 = 4(1 + \sqrt{T+1}) \quad (\text{III.39})$$

La densité de valeurs propres est alors:

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{6\pi T} (\lambda^2 + c) \sqrt{a^2 - \lambda^2}$$

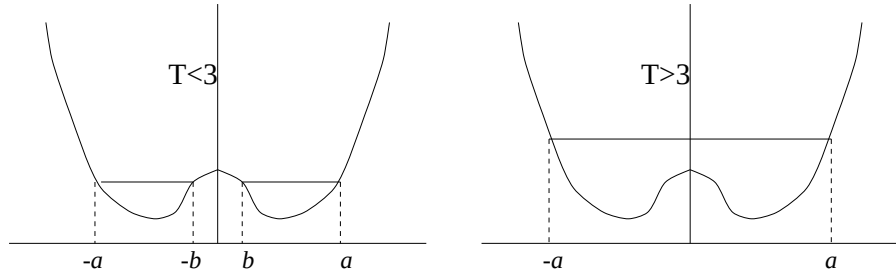


Figure III.1: Exemple du potentiel quartique

qui n'a de sens que si elle est positive, ce qui implique $T > 3$.

En effet, le potentiel quartique que l'on a considéré, présente un double puits de potentiel et à basse température les valeurs propres se répartissent dans deux intervalles $[-a, -b] \cup [b, a]$. Dans le cas $T < 3$, il faut chercher $\omega(z)$ de la forme:

$$\omega(z) = \frac{1}{2T} \left(\frac{1}{3}z^3 - 2z - \frac{1}{3}z\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)} \right) \quad (\text{III.40})$$

La condition aux limites $\omega(z) \sim_{z \rightarrow \infty} 1/z$ donne a et b :

$$a^2 = 6(1 + \sqrt{T/3}) \quad , \quad b^2 = 6(1 - \sqrt{T/3})$$

Ce système présente une transition de phase du premier ordre à $T = 3$ (on peut vérifier avec (III.35) que les quantités thermodynamiques sont discontinues).

Pour la limite continue des surfaces aléatoires, on s'intéresse aux transitions du second ordre. Dans cet exemple le point critique se trouve à $T = -1$, ce qui se voit formellement dans l'expression (III.39) de a^2 .

III.3 Méthode des polynômes orthogonaux et gaz de fermions libres

La méthode du col donne le comportement de l'intégrale de matrices (III.12) dans la limite $N \rightarrow \infty$. Elle est assez intuitive grâce à l'analogie avec le gaz de Coulomb, mais elle n'est pas adaptée au développement aux ordres suivants en $1/N$. On va voir qu'il existe une méthode exacte [53] pour tout N (du moins lorsque le potentiel V est un polynôme), et qu'elle peut encore se comprendre par analogie avec un gaz de particules. Elle ne suppose pas que l'on soit dans la limite N grand, et donc on ne se place pas nécessairement dans la limite classique où les particules sont à l'équilibre $F_i = 0$. Au contraire, on prend en compte toutes les configurations dans (III.12), c'est à dire que l'on prend en compte des effets quantiques. On trouve alors que le système se comporte comme un gaz de fermions dans son état fondamental, et que la répulsion entre valeurs propres peut se voir comme une limite classique du principe de Pauli.

III.3.1 Gaz de fermions libres

Considérons N fermions à une dimension, d'abscisses λ_i , dans un état dont la fonction d'onde complètement antisymétrique est:

$$\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \quad (III.41)$$

Lorsque l'on veut évaluer la valeur moyenne d'un opérateur dans l'état Ψ , par exemple un opérateur à une particule du type $A(\lambda) = \sum_i A(\lambda_i)/N$, on doit calculer l'intégrale suivante:

$$\langle A(\lambda) \rangle = \langle \Psi | A | \Psi \rangle = \frac{1}{Z} \int \Psi \left(\frac{1}{N} \sum_i A(\lambda_i) \right) \Psi^* d\lambda_1 \dots d\lambda_N$$

avec la normalisation $Z = \int \Psi \Psi^* d\lambda_1 \dots d\lambda_N$.

Considérons en particulier le cas où l'état Ψ est donnée par:

$$\Psi(\lambda) = \Delta(\lambda) \prod_i e^{-NV(\lambda_i)/2} \quad (III.42)$$

Z est alors identique à la fonction de partition du modèle de matrices (III.12), et $\langle A(\lambda) \rangle = \int d\lambda A(\lambda) \rho(\lambda) = 1/N \langle \text{tr } A(M) \rangle$.

Ainsi le calcul de valeurs moyennes de la matrice aléatoire M est équivalent à celui de valeurs moyennes d'opérateurs d'un système de N fermions dans l'état Ψ . Il reste maintenant à identifier un système le plus simple possible de N fermions, dont l'état fondamental est précisément (III.42). Ceci est possible grâce au déterminant de Vandermonde:

$$\Delta(\lambda) = \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j) = \det_{\substack{0 \leq j \leq N-1 \\ 1 \leq i \leq N}} (\lambda_i)^j$$

qui peut se voir comme un déterminant de Slater $\Psi(\lambda) = \det \psi_j(\lambda_i)$ constitué des fonctions d'ondes à une particule $\psi_j(\lambda) = \lambda^j e^{-NV(\lambda)/2}$.

Il est préférable de choisir une base de fonctions orthonormées en effectuant des combinaisons linéaires, ce qui ne change pas le déterminant. On considère donc la famille de polynômes P_n (de terme dominant λ^n) vérifiant la relation d'orthogonalité:

$$\int P_n(\lambda) P_m(\lambda) e^{-NV(\lambda)} d\lambda = h_n \delta_{nm} \quad (\text{III.43})$$

et l'on définit les fonctions d'ondes à une particule:

$$\psi_n(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{h_n}} P_n(\lambda) e^{-NV(\lambda)/2} \quad (\text{III.44})$$

qui forment une famille orthonormée:

$$\int \psi_n(\lambda) \psi_m(\lambda) d\lambda = \delta_{nm} \quad (\text{III.45})$$

la fonction d'onde (III.42) est bien le déterminant de Slatter:

$$\Psi = \left(\prod_{n=0}^{N-1} \sqrt{h_n} \right) \det \psi_n(\lambda_i) \quad (\text{III.46})$$

elle décrit une mer de Fermi de N particules occupant les N premiers états ψ_n de niveaux $0 \leq n \leq N-1$. L'état Ψ est donc l'état fondamental d'un système de N fermions libres, c'est à dire qui n'interagissent pas les uns avec les autres, excepté par le principe de Pauli.

La fonction de partition Z est alors simplement

$$Z = N! \prod_{n=0}^{N-1} h_n \quad (\text{III.47})$$

Il reste maintenant à calculer les h_n , par des méthodes de récurrences. Ceci revient à établir des relations entre les P_n , et l'on va voir que ces relations sont équivalentes au formalisme des opérateurs de la mécanique quantique.

III.3.2 Calcul des polynômes orthogonaux

Afin de trouver des relations de récurrence ou des équations différentielles entre les P_n , on va calculer λP_n , et P'_n .

λP_n est un polynôme de coefficient dominant λ^{n+1} , il peut se décomposer sur la base des P_k avec $k \leq n+1$:

$$\lambda P_n(\lambda) = P_{n+1}(\lambda) + \sum_{k \leq n} c_{n,k} P_k(\lambda)$$

De même

$$P'_n(\lambda) = n P_{n-1}(\lambda) + \sum_{k \leq n-2} d_{n,k} P_k(\lambda)$$

On peut traduire ces relations pour les fonctions d'ondes ψ_n . Pour cela, il est commode d'adopter les notations opératoriels de la mécanique quantique. Les fonctions d'ondes ψ_n forment une base $|n\rangle$ de l'espace de Hilbert des états, et l'on étudie l'action des opérateurs $\hat{\lambda}$ (multiplication par λ) et $\hat{P} = \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial \lambda}$ (dérivation) dans cette base:

$$\hat{\lambda}|n\rangle = \alpha_n|n+1\rangle + \sum_{k=0}^n \gamma_{n,k}|n-k\rangle \quad \text{où} \quad \alpha_n = \sqrt{\frac{h_{n+1}}{h_n}} \quad (\text{III.48})$$

$$\left(\hat{P} + \frac{1}{2}V'(\hat{\lambda})\right)|n\rangle = \frac{1}{\alpha_{n-1}} \frac{n}{N}|n-1\rangle + \sum_{k=2}^n \zeta_{n,k}|n-k\rangle \quad (\text{III.49})$$

La relation d'orthogonalité (III.45), permet de montrer que $\hat{\lambda}$ est hermitique, et $\hat{P}$ est antihermitique, ce qui implique que dans (III.48), les coefficients $\gamma_{n,k}$ sont tous nuls sauf $\gamma_{n,n} = \beta_n$ et $\gamma_{n,n-1} = \alpha_{n-1}$, donc:

$$\hat{\lambda}|n\rangle = \alpha_n|n+1\rangle + \beta_n|n\rangle + \alpha_{n-1}|n-1\rangle \quad (\text{III.50})$$

Il est utile à partir d'ici d'introduire l'opérateur de niveau $\hat{n}$ et l'opérateur "d'anihilation" (saut d'un niveau) $\hat{x}$ définis par:

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle \quad (\text{III.51})$$

$$\hat{x}|n\rangle = |n-1\rangle, \quad \langle n|\hat{x} = \langle n+1|, \quad \hat{x}^\dagger = \frac{1}{\hat{x}} \quad (\text{III.52})$$

Les coefficients α_n sont alors des fonctions de l'opérateur $\hat{n}$ et seront notés $\hat{\alpha} = \alpha(\hat{n})$. On peut ainsi écrire les relations (III.50, III.49) sous forme opératorielle:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\hat{x}}\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\alpha}\hat{x} \quad (\text{III.53})$$

$$\hat{P} + \frac{1}{2}V'(\hat{\lambda}) = \frac{1}{\hat{\alpha}}\hat{x}\frac{\hat{n}}{N} + \sum_{k \geq 2} \hat{\zeta}_k \hat{x}^k \quad (\text{III.54})$$

Afin d'exploiter cette dernière équation, il est utile de développer tous ces opérateurs en puissances de $\hat{x}$ et $1/\hat{x}$. On notera par exemple $\hat{P}_k$ le coefficient de $\hat{x}^k$, et on notera $\hat{P}_\pm$ la partie de $\hat{P}$ ne contenant que des puissances positives (resp. négatives) de $\hat{x}$. Ainsi le fait que $\hat{P}$ est antihermitique s'écrit:

$$\hat{P}_0 = 0 \quad \text{et} \quad \hat{P}_- = -\hat{P}_+^\dagger$$

L'équation (III.54) implique que:

$$\hat{P}_- = -\frac{1}{2}V'(\hat{\lambda})_-$$

ce qui entraîne aussitôt

$$\hat{P}_+ = \frac{1}{2}V'(\hat{\lambda})_+$$

et donc

$$\hat{P} = \frac{1}{2} \left(V'(\hat{\lambda})_+ - V'(\hat{\lambda})_- \right)$$

De plus dans (III.54) , le coefficient de $\hat{x}^1$ est :

$$V'(\hat{\lambda})_1 = \frac{1}{\hat{\alpha}} \hat{x} \frac{\hat{n}}{N}$$

et le coefficient de $\hat{x}^0$ est :

$$V'(\hat{\lambda})_0 = 0$$

Ces deux dernières équations permettent de déterminer $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$. Si on les réécrit sur la base des $|n\rangle$, elles donnent des équations de récurrence pour α_n et β_n . Connaissant les coefficients α_n et β_n , on aura une équation donnant ψ_{n+1} en fonction de ψ_n et ψ_{n-1} :

$$\alpha_n \psi_{n+1}(\lambda) = (\lambda - \beta_n) \psi_n(\lambda) - \alpha_{n-1} \psi_{n-1}(\lambda)$$

et l'on peut en principe déterminer tous les ψ_n par récurrence. La connaissance des α_n permet également de calculer les coefficients h_n (eq.III.48) qui donnent la normalisation des polynômes orthogonaux, et qui interviennent dans la fonction de partition (III.47) .

Résumé des équations des polynômes orthogonaux

L'opérateur $\hat{\lambda}$ s'écrit:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\hat{x}} \hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\alpha} \hat{x} \quad (III.55)$$

Les opérateurs $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ sont déterminés par les deux équations:

$$V'(\hat{\lambda})_0 = 0 \quad (III.56)$$

$$V'(\hat{\lambda})_1 = \frac{1}{\hat{\alpha}} \hat{x} \frac{\hat{n}}{N} \quad (III.57)$$

L'opérateur $\hat{P}$ vaut alors:

$$\hat{P} = \frac{1}{2} \left(V'(\hat{\lambda})_+ - V'(\hat{\lambda})_- \right) \quad (III.58)$$

On a de plus les relations de commutations:

$$[\hat{P}, \hat{\lambda}] = \frac{1}{N} \quad \text{et} \quad [\hat{x}, \hat{n}] = \hat{x} \quad (III.59)$$

Un exemple sera développé dans la partie plus loin. Pour l'instant, on a obtenu des équations exactes, on va voir comment elles se simplifient dans certaines limites.

III.3.3 Limite classique $N \rightarrow \infty$

Dans les problèmes de physiques utilisant des matrices aléatoires on s'intéresse le plus souvent aux matrices de grande taille $N \rightarrow \infty$. Dans le formalisme des polynômes orthogonaux ceci est équivalent à la limite classique de la mécanique quantique car N joue le rôle de $1/\hbar$. En effet dans la limite classique le commutateur

$$[\hat{P}, \hat{\lambda}] = \frac{1}{N}$$

s'annule et tous les opérateurs deviennent des nombres. De plus, dans la plupart des calculs de fonctions de corrélations de valeur propres ou d'observables intéressantes, seule intervient la valeur $n = N$. De façon plus générale, comme en physique des solides seul le voisinage de la surface de Fermi $n \sim N$ joue un rôle important. On pourra donc le plus souvent remplacer n par N , et ainsi, on notera $\alpha = \alpha_N$. On peut maintenant appliquer les approximations habituelles de la mécanique quantique. Par exemple les fonctions d'ondes seront données par une approximation du type WKB. On va également vérifier que dans la limite N grand, on retrouve bien les résultats de la méthode du col.

Equations classiques

En remplaçant simplement les opérateurs par des nombres et en posant $n = N$ les équations du paragraphe précédent deviennent les équations classiques:

$$\lambda(x) = \alpha(x + 1/x) + \beta \quad (\text{III.60})$$

$$V'_0(\lambda(x)) = 0 \quad (\text{III.61})$$

$$V'_1(\lambda(x)) = \frac{x}{\alpha} \quad (\text{III.62})$$

$$P(x) = \frac{1}{2} (V'(\lambda(x))_+ - V'(\lambda(x))_-) \quad (\text{III.63})$$

$$P(x) = -P(1/x) \quad (\text{III.64})$$

Les équations (III.61,III.62) permettent de calculer α et β (qui sont maintenant des nombres ne dépendant plus de n) en fonction du potentiel V . En inversant l'équation (III.60) on définit une fonction $x(\lambda)$ et en la reportant dans (III.63) on obtient une fonction $P(\lambda)$ dont on va tout de suite voir la signification.

Calcul de la résolvante $\omega(z)$

Il est possible de montrer que dans cette limite $N \rightarrow \infty$, la résolvante $\omega(z)$ définie par (III.7) est reliée à P par:

$$\omega(z) = P(z) + \frac{1}{2}V'(z) \quad (\text{III.65})$$

On va voir comment retrouver l'expression (III.20) de la méthode du col.

La propriété d'antihermiticité (III.64) permet d'écrire:

$$P = \sum_{k>0} p_k (x^k - 1/x^k)$$

qui se factorise en $(x - 1/x)$ et un polynôme en $(x + 1/x)$, c'est à dire en $\lambda(x)$ que l'on écrit sous la forme:

$$P = \frac{-1}{2} \alpha (x - 1/x) M(\lambda) \quad (\text{III.66})$$

Il suffit alors de poser

$$a = \beta + 2\alpha \quad \text{et} \quad b = \beta - 2\alpha \quad (\text{III.67})$$

pour retrouver l'expression (III.20) de la méthode du col:

$$\omega(\lambda) = \frac{1}{2} \left(V'(\lambda) - M(\lambda) \sqrt{(\lambda - a)(\lambda - b)} \right) \quad (\text{III.68})$$

Remarquons que ceci donne un sens physique intuitif à l'opérateur P ainsi qu'à α et β : P est la densité de valeurs propres (cf.III.32):

$$P(\lambda) = -i\pi\rho(\lambda) \quad (\text{III.69})$$

et α et β sont reliés au support de la densité:

$$\alpha = \frac{a-b}{4} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{a+b}{2}$$

Fonctions d'ondes semi-classiques

Dans la limite semi-classique $N \rightarrow \infty$ et $|n - N| \ll N$, les fonctions d'ondes sont données par l'approximation WKB:

$$\psi_n(\lambda) \sim e^{-iN\pi \int_a^\lambda \rho(\lambda') d\lambda'} \quad (\text{III.70})$$

qui provient simplement de (III.69) et de la définition de $\hat{P}$:

$$\frac{1}{N} \frac{d}{d\lambda} \psi_n(\lambda) = \hat{P} \psi_n(\lambda) \quad (\text{III.71})$$

On peut raffiner cette approximation à l'ordre suivant en N :

$$\psi_n(\lambda) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{dx}{d\lambda}} x^{N-n} e^{-iN\pi \int_a^\lambda \rho(\lambda') d\lambda'} \quad (\text{III.72})$$

qui se démontre en utilisant la méthode des boucles (part.III.4). On peut cependant comprendre l'origine du terme x^{N-n} : il provient de $|n\rangle = x^{N-n}|N\rangle$.

En fait, l'expression (III.72) n'est pas exacte. Il faut distinguer trois situations suivantes que $\lambda < a$, $\lambda > b$ ou $\lambda \in [a, b]$. Ce phénomène est général dans les approximations semi-classiques de fonctions d'ondes: la vraie fonction d'onde est une combinaison linéaire de deux fonctions de la forme (III.72) (définies par les deux déterminations de la fonction $x(\lambda)$). Les coefficients de cette combinaison linéaire font intervenir des déphasages dus à la réflexion en a et en b , et doivent être choisis pour que la fonction d'onde soit exponentiellement décroissante à l'infini.

Finalement, la limite semi-classique de ψ_n est donnée par les règles suivantes:

- Lorsque $\lambda \notin [a, b]$, $\psi_n(\lambda)$ est donnée par (III.72) en prenant seulement la détermination de $x(\lambda)$ qui tend vers 0 lorsque $\lambda \rightarrow \infty$.
- Lorsque $\lambda \in [a, b]$, x et $1/x$ sont complexes conjugués. On pose $x = e^{i\varphi}$, on a alors:

$$\lambda = \beta + 2\alpha \cos \varphi = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \varphi \quad , \quad \frac{d\lambda}{dx} = 2i\alpha e^{-i\varphi} \sin \varphi$$

On définit aussi la fonction $\zeta(\lambda) = -\pi \int_a^\lambda d\lambda' \rho(\lambda')$.

On a alors

$$\psi_n(\lambda) \sim \text{Re} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{dx}{d\lambda}} x^{N-n} e^{iN\zeta(\lambda)} \quad (\text{III.73})$$

qui peut encore s'écrire

$$\psi_n(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{1}{-2\alpha \sin \varphi}} \cos (N\zeta(\lambda) + (N-n)\varphi + \varphi/2 - \pi/4) \quad (\text{III.74})$$

Cette expression asymptotique pour les polynômes orthogonaux dans la limite $N \gg 1$ et $N-n = O(1)$ a été postulée et utilisée par [10] pour calculer des fonctions de corrélation. Elle peut être démontrée de façon systématique par la méthode des boucles (cf article 3).

- Au voisinage de a et b , la méthode des polynômes orthogonaux reste bien sûr exacte, mais l'approximation semi-classique n'est plus valable puisque $dx/d\lambda$ diverge.

III.3.4 Application: calcul de l'énergie libre

L'énergie libre par particule est $f = -\frac{1}{N^2} \ln Z$, c'est à dire d'après (III.47) en omettant le $N!$:

$$f = -\frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \ln h_n = \text{cte} - \frac{2}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} (N-1-n) \ln \alpha_n$$

Comme pour la méthode du col, il est commode d'introduire une température T en changeant le potentiel V en V/T :

$$Z = \int dM e^{-\frac{N}{T} \text{tr} V(M)}$$

Les équations (III.61,III.62) déterminant α_n et β_n en fonction de n et T deviennent:

$$V'_0 = 0 \quad \text{et} \quad \hat{\alpha} V'(\hat{\lambda})_1 = \hat{x} \frac{\hat{n}}{N} T \quad (\text{III.75})$$

ce qui montre que $\alpha_n(T)$ et $\beta_n(T)$ dépendent de n et T seulement par la variable $t = Tn/N$.

Dans la limite N grand, l'énergie libre s'écrit en remplaçant la somme sur n par une intégrale sur t :

$$Tf(T) = \text{cte} - 2 \int_0^T dt (1 - t/T) \ln \alpha(t)$$

(la cte ne dépend que de N et pas de T). Il est alors facile d'obtenir l'équation différentielle pour la chaleur spécifique:

$$u(T) = \frac{d^2}{dT^2} (T^2 f(T)) = -2 \ln \alpha(T) \quad (\text{III.76})$$

On comprend donc pourquoi il est si important de calculer $\alpha_N(T)$. Par la suite, on va utiliser cette équation pour étudier les points critiques et transitions du second ordre, c'est à dire les singularités de l'énergie libre.

Remarquons aussi que dans la limite classique on a $\alpha = (b - a)/4$ et l'on retrouve l'expression (III.35) de la méthode du col.

III.3.5 Points critiques

On s'intéresse aux points critiques dans la limite classique $N \rightarrow \infty$. D'après (III.76) il suffit d'étudier les singularités de la fonction $\alpha(T)$.

En général, les équations classiques (III.75) se réduisent à une équation algébrique pour α , de la forme:

$$F(\alpha(T)) = T \quad (\text{III.77})$$

Un point critique est obtenu chaque fois cette équation n'est pas inversible analytiquement c'est à dire:

$$F'(\alpha_c) = 0 \quad , \quad T_c = F(\alpha_c) \quad (\text{III.78})$$

On obtient des points multicritiques en annulant les dérivées successives de F de telle façon que:

$$F(\alpha) - F(\alpha_c) \sim (\alpha - \alpha_c)^{m+1} \quad (\text{III.79})$$

On a alors:

$$\alpha \sim \alpha_c + (T - T_c)^{1/(m+1)} \quad (\text{III.80})$$

Le comportement singulier de l'énergie libre est donc une loi de puissance $f(T) \sim f(T_c) + (T - T_c)^{2-\gamma}$ avec un exposant critique γ_{str} (la susceptibilité de corde) qui vaut $\gamma_{\text{str}} = -1/(m+1)$, conformément à ce qui avait été trouvé par la méthode du col.

III.3.6 Double limite d'échelle

Lorsque l'on est près d'un point critique, la limite classique n'est plus justifiée, les fluctuations quantiques deviennent grandes et il faut en tenir compte. Mathématiquement ceci signifie que les limites $N \rightarrow \infty$ et $T \rightarrow T_c$ ne commutent pas.

Au paragraphe précédent, on a vu que dans la limite classique (où $N \rightarrow \infty$ avant $T \rightarrow T_c$), la chaleur spécifique $u(T) = -2 \ln \alpha$ obéit à une équation algébrique (III.77) qui près du point critique ($u = u_c + U$, c'est à dire $\alpha = \alpha_c(1 - U/2)$) se réduit à:

$$T - T_c \sim \text{cte } U^{m+1}$$

Inversement, on peut s'intéresser au cas où T est très proche de T_c avant de passer à la limite $N \rightarrow \infty$. Il faut alors garder les équations quantiques complètes (III.55 ... III.58) pour déterminer $u(T)$. Ce sont des équations de récurrence pour $\alpha_n(T)$, que l'on peut écrire comme une équation différentielle pour $\alpha(t)$. Il suffit de développer en série de Taylor par exemple

$$\alpha_{n+1}(T) = \alpha(t + \frac{T}{N}) = \alpha(t) + \frac{T}{N} \alpha'(t) + \frac{T^2}{2N^2} \alpha''(t) + \dots$$

Dans la limite classique $N \rightarrow \infty$, on avait négligé les termes dérivatifs, mais au voisinage du point critique ceux ci peuvent diverger au point de compenser la puissance de N , par exemple $\alpha''(T)/N^2$ se comporte en $(T - T_c)^{-\gamma-2}/N^2$. Ceci suggère qu'il faut s'approcher du point critique avec une loi d'échelle $(T_c - T)N^\delta = \text{cte}$.

La chaleur spécifique $u(T)$ n'est plus déterminée par une équation algébrique, mais par une équation différentielle (appelée équation des cordes), obtenue en gardant les termes dérivatifs dominants dans le développement de Taylor des équations quantiques.

Finalement on définit la double limite d'échelle ainsi:

$$\left\{ \begin{array}{lll} N & \rightarrow & \infty \\ T & \rightarrow & T_c \\ \tau = (1 - T/T_c)N^\delta & \sim & O(1) \end{array} \right. \quad (\text{III.81})$$

on posera $u(T) = -N^{2\delta-2}(U_c + U(\tau))$, c'est à dire $\alpha = \alpha_c \left(1 + \frac{N^{2\delta-2}}{2} U(\tau)\right)$. Ce choix est tel que $U(\tau)$ soit la dérivée seconde de $\ln Z$ par rapport à τ

$$Z = e^{-N^2 f(T)} \longrightarrow \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \tau^2} = -N^{2-2\delta} u(\tau) = U_c + U(\tau)$$

On aura également besoin de développer l'opérateur $\hat{x} = e^{-\partial/\partial n}$:

$$\hat{x} = e^{Kd} = 1 + Kd + \frac{1}{2} K^2 d^2 + \dots \quad \text{où} \quad K = N^{\delta-1} \quad \text{et} \quad d = \frac{d}{d\tau}$$

L'équation différentielle pour $U(\tau)$ est obtenue en développant les équations (III.55, III.56, III.57) en puissances de K , et en ne gardant que l'ordre dominant.

On va voir maintenant une méthode plus rapide et plus efficace.

Méthode des relations de commutation

Au lieu d'écrire toutes les équations (III.55, III.56, III.57) qui font intervenir le potentiel V , il est plus facile de développer seulement les opérateurs $\hat{\lambda}$ et $\hat{P}$ en puissances de K et de s'assurer qu'ils satisfont la relation de commutation [55, 54]

$$[\hat{P}, \hat{\lambda}] = 1/N$$

En substituant dans (III.55) les développements de $\hat{x}$, α et β

$$\hat{x} = e^{Kd} \quad , \quad \alpha = \alpha_c + \alpha_c \frac{K^2}{2} U + O(K^2) \quad , \quad \beta = \beta_c + \alpha_c K^2 U + O(K^2)$$

on trouve que le premier terme non trivial dans le développement de $\hat{\lambda}$ est d'ordre K^2

$$\hat{\lambda} = (2\alpha_c + \beta_c) + \alpha_c K^2 Q + O(K^2)$$

et c'est un opérateur différentiel de degré 2:

$$Q = d^2 + 2U \tag{III.82}$$

Remarque: on a supposé, comme on l'avait fait pour la méthode du col, que le comportement critique se situe au voisinage d'une seule des extrémités du segment $[a, b]$ (ici b car $2\alpha + \beta = b$), ce qui justifie que $\beta - \beta_c \sim 2(\alpha - \alpha_c)$. Dans le cas où la densité est critique à la fois en a et en b (comme c'est le cas pour un potentiel pair), $\beta - \beta_c$ s'annule à l'ordre K^2 , et l'opérateur Q n'est que $d^2 + U$.

Quant à l'opérateur $\hat{P}$, on peut montrer que pour un point critique d'ordre m , il doit être développé à l'ordre K^{2m+1} :

$$\hat{P} = \text{cte } K^{2m+1} P + O(K^{2m+3})$$

En effet, on a vu avec la méthode du col qu'au voisinage d'un point critique, la densité se comporte en $\rho(\lambda) \sim (b - \lambda)^{m+1/2}$, ce qui signifie $P \sim K^{2m+1} Q^{m+1/2}$.

P est alors un opérateur différentiel antihermitique de degré $2m + 1$ que l'on écrit:

$$P = d^{2m+1} + \sum_{k=0}^{2m} V_k d^k \tag{III.83}$$

La relation de commutation $[\hat{P}, \hat{\lambda}] = 1/N$ suffit maintenant à résoudre le problème:

$$\frac{1}{N} = K^{2m+3} \text{cte } [P, Q] \tag{III.84}$$

Tout d'abord on voit qu'il faut choisir $K = N^{-1/(2m+3)}$, c'est à dire que l'exposant δ vaut $\frac{2m+2}{2m+3}$, et la double limite d'échelle correspond à

$$\tau = (1 - T/T_c) N^{\frac{2m+2}{2m+3}}$$

Ensuite (III.84) permet également de calculer les $V_k(\tau)$, ou plutôt leurs dérivées, ce qui introduit des constantes d'intégration t_k pour chaque V_k :

$$\begin{aligned} V_{2m}(\tau) &= \text{cte} = t_{2m} \\ V_{2m-1}(\tau) &= (2m+1)U(\tau) + t_{2m-1} \\ V_{2m-2}(\tau) &= \frac{(2m+1)(2m-1)}{2}U'(\tau) + (p-1)t_1U(\tau) + t_{2m-2} \\ \text{etc} &\quad \dots \end{aligned}$$

L'apparition de ces constantes indéterminées n'est pas très surprenante, car jusqu'ici, on n'a pas utilisé le potentiel V . Les t_k ne sont rien d'autre qu'une reparamétrisation des coefficients g_K de V , mieux adaptée au voisinage des points critiques.

Au lieu de chercher les V_k à la main un par un, on peut trouver explicitement l'opérateur P , en le décomposant sur la base des

$$P_k = Q_+^{k/2} = d^k + kUd^{k-2} + \dots$$

On calcule formellement l'opérateur pseudo-différentiel $Q^{k/2}$ tel que $(Q^{k/2})^2 = Q^k$, et l'on garde la partie différentielle contenant seulement des puissances positives de d . Par exemple:

$$P_0 = 1 \quad , \quad P_1 = d \quad , \quad P_2 = Q \quad , \quad P_3 = d^3 + \frac{3}{2}(Ud + dU)$$

$$P_4 = Q^2 = d^4 + 2(Ud^2 + d^2U) + 4U^2 \quad , \quad P_5 = d^5 + \frac{5}{2}(Ud^3 + d^3U) + \frac{15}{4}(U^2d + dU^2) - \frac{5}{8}(U''d + dU'')$$

En remarquant que $[Q^{k/2}, Q] = 0 = [Q_+^{k/2}, Q] + [Q_-^{k/2}, Q]$ et que le premier terme ne peut contenir que des puissances ≥ 0 de d et le second que des puissances ≤ 0 , on voit que le commutateur $[P_k, Q]$ est un opérateur différentiel de degré 0, c'est à dire une fonction:

$$[P_{2k+1}, Q] = R'_{k+1}(U) \quad \text{et} \quad [P_{2k}, Q] = 0$$

Les $R_k(U)$ sont les polynômes différentiels de Gelfand-Dikii [56], par exemple:

$$R_1(U) = 2U \quad , \quad R_2(U) = \frac{1}{2}U'' + 3U^2 \quad , \quad R_3(U) = \frac{1}{8}U^{(4)} + \frac{5}{2}UU'' + \frac{5}{4}U'^2 + 5U^3$$

Ils obéissent à une relation de récurrence:

$$R'_{k+1} = 2U R'_k + R_k U' + \frac{1}{4}R_k'''$$

La solution générale des équations de commutation (III.84) est alors donnée par:

$$P = \sum_{k=0}^{2m+1} t_k P_k$$

$$\sum_{k=1}^m t_{2k-1} R_k(U) = \text{cte } \tau \quad \text{et} \quad t_k = \text{cte}$$

Comme on veut que P se comporte en $(\lambda - b)^{m+1/2}$, seul le terme t_{2m+1} doit être non nul, finalement l'équation des cordes pour U est:

$$R_{m+1}(U) = \text{cte } \tau$$

Limite classique de l'équation des cordes

La limite classique consiste à prendre $N \rightarrow \infty$ avant $T \rightarrow T_c$, c'est à dire $\tau \rightarrow \infty$. Dans cette limite $U(\tau)$ se comporte en $U \sim \tau^{-\gamma}$, et γ étant négatif, on voit que l'on peut négliger dans le polynôme $R_{m+1}(U)$ tous les termes dérivatifs, et ne garder que le terme dominant:

$$R_{m+1}(U) \sim \frac{2m+2!}{(m+1)!^2} 2^{-m} U^{m+1}.$$

L'équation des cordes donne alors:

$$U^{m+1} \sim \tau$$

c'est à dire $\gamma = \frac{-1}{m+1}$, on retrouve les résultats de la méthode classique.

Remarquons que l'exposant γ est relié à δ . En effet, l'énergie libre $\ln Z$ se comporte en $\ln Z \sim \tau^{2-\gamma}$ puisque $U \sim (\ln Z)''$, et l'on sait par le développement topologique que dans la limite $N \rightarrow \infty$, on a $\ln Z \sim N^2$. On en déduit $(2 - \gamma)\delta = 2$. Cette relation est bien vérifiée pour

$$\gamma = \frac{-1}{m+1} \quad \text{et} \quad \delta = \frac{2m+2}{2m+3} = \frac{2}{2-\gamma}$$

III.3.7 Exemple: potentiel quartique

Considérons le potentiel pair $V(M) = \frac{1}{T} \left(\frac{1}{12} M^4 - M^2 \right)$. Il a la forme d'un double puits (fig.III.1). Sa dérivée est:

$$V'(\lambda) = \frac{1}{T} \left(\frac{1}{3} \lambda^3 - 2\lambda \right)$$

Par parité, on s'attend à ce que $\beta_n = 0$, et l'on cherche l'opérateur $\hat{\lambda}$ sous la forme:

$$\hat{\lambda} = \hat{\alpha} \hat{x} + \frac{1}{\hat{x}} \hat{\alpha}$$

Le coefficient de $\hat{x}^1$ dans $V'(\hat{\lambda})$ est alors:

$$\frac{1}{3} \left(\hat{\alpha} \hat{x} \hat{\alpha}^2 + \hat{\alpha}^3 \hat{x} + \frac{1}{\hat{x}} \hat{\alpha}^2 \hat{x} \hat{\alpha} \hat{x} \right) - 2\hat{\alpha} \hat{x} = \frac{1}{\hat{\alpha}} \hat{x} \frac{\hat{n}}{N} T \quad (\text{III.85})$$

L'équation (III.57) satisfaite par α_n est donc:

$$\frac{1}{3} (\alpha_{n-2}^2 + \alpha_{n-1}^2 + \alpha_n^2) \alpha_{n-1}^2 - 2\alpha_{n-1}^2 = t = \frac{n}{N} T \quad (\text{III.86})$$

Ou encore:

$$\frac{1}{3} \left(\alpha^2 \left(t - \frac{T}{N} \right) + \alpha^2(t) + \alpha^2 \left(t + \frac{T}{N} \right) \right) \alpha^2(t) - 2\alpha^2(t) = t + \frac{T}{N} \quad (\text{III.87})$$

Limite classique

Dans la limite classique N grand, (III.87) se réduit à: $\alpha^4(t) - 2\alpha^2(t) = t$
dont la solution est : $\alpha^2(T) = 1 + \sqrt{1+T}$

L'opérateur $\hat{P}$ est alors dans cette limite:

$$P(x) = -\frac{1}{2T}\alpha(x - 1/x) \left(\frac{\alpha^2}{3}(x^2 + 1/x^2 + 4) - 2 \right)$$

qui, compte tenu de $\lambda = \alpha(x - 1/x)$ peut s'écrire:

$$P(\lambda) = -\frac{1}{6T}(\lambda^2 + 2\alpha^2 - 6)\sqrt{(\lambda^2 - 4\alpha^2)}$$

Comme $\omega(z) = V'(z)/2 + P$, on retrouve la résolvante (III.38) obtenue par la méthode du col, avec $a = 2\alpha$. On avait vu par la méthode du col que ce potentiel présentait une transition de phase du premier ordre à $T = 3$. Le résultat que l'on trouve par la limite classique des polynômes orthogonaux est seulement celui de la phase $T > 3$. Pour $T < 3$, la méthode des polynômes orthogonaux reste exacte, mais la limite classique $N \rightarrow \infty$ ne peut pas se faire aussi simplement, on n'a pas le droit de remplacer tous les opérateurs par des nombres.

A partir de là et de (III.76) on peut calculer l'énergie libre par particule $f(T)$ en fonction de la température:

$$f(T) = -\frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{1+T}) - \frac{1}{3T^2}(1+T)^{3/2} + \frac{1}{2T}\sqrt{1+T} - \frac{3}{8} + \frac{\text{cte}}{T} + \frac{\text{cte}}{T^2}$$

Celle ci possède un pôle à $T = 0$, est analytique pour $T > -1$, et a une singularité en $T = -1$. Bien que Z soit divergente pour $T < 0$, on peut la prolonger analytiquement jusqu'à $T = -1$, et c'est là que se trouve le point critique correspondant à la transition du deuxième ordre. Cette situation est générale, le point critique est obtenu pour des potentiels non bornés inférieurement.

La fonction $F(\alpha)$ de l'équation (III.77) est ici

$$F(\alpha) = \alpha^4 - 2\alpha^2 = T$$

Le point critique correspond à $F'(\alpha) = 0$, c'est à dire: $4\alpha^3 - 4\alpha = 0$
donc $\alpha_c^2 = 1$, et $T_c = -1$, ou $\alpha_c = 0$ et $T_c = 0$. Le point critique $T_c = 0$ n'est pas intéressant, car l'énergie libre possède juste un pôle en $T = 0$. Le point critique $T_c = -1$ est du deuxième ordre, car l'énergie libre possède une singularité en $f \sim (T - T_c)^{5/2}$, c'est à dire un exposant $\gamma = -1/2$.

Double limite d'échelle

l'équation classique pour $\alpha(T)$ est:

$$T = F(\alpha) = \alpha^4 - 2\alpha^2$$

Elle provient en fait de l'équation de récurrence (III.87) pour α_n

$$\alpha^2(T) \left[\frac{1}{3}(\alpha^2(T - \frac{T}{N}) + \alpha^2(T) + \alpha^2(T + \frac{T}{N})) - 2 \right] = T + \frac{T}{N} \quad (\text{III.88})$$

Aux premiers ordres en $1/N$, cette équation se réécrit:

$$F(\alpha) + \frac{1}{3}\alpha^2 \frac{T^2}{N^2} \frac{d^2}{dT^2}(\alpha^2) = T \quad (\text{III.89})$$

La limite classique habituelle consiste à ne garder que le terme dominant: $F(\alpha) = T$. Toutefois, lorsque T est proche de T_c , $\alpha(T)$ possède une singularité en $(T - T_c)^{1/2}$, et la dérivée seconde diverge au point de compenser le $1/N^2$. On peut trouver un régime où tous les termes de (III.89) sont du même ordre. En effet, posons $T = T_c(1 - N^{-\delta}\tau)$, et $\alpha(T) = \alpha_c(1 + \frac{1}{2}N^{-\eta}U(\tau))$, l'équation (III.89) devient:

$$F(\alpha_c) + \frac{1}{2}F'(\alpha_c)\alpha_c N^{-\eta}U + \frac{1}{8}F''(\alpha_c)\alpha_c^2 N^{-2\eta}U^2 + \frac{1}{3}\alpha_c^2 \alpha_c^2 N^{2\delta-\eta-2} \frac{d^2 U}{d\tau^2} = T_c - T_c N^{-\delta}\tau$$

Le point critique étant donné par $F(\alpha_c) = T_c$ et $F'(\alpha_c) = 0$, il ne reste que:

$$\frac{1}{8}F''(\alpha_c)\alpha_c^2 N^{-2\eta}U^2 + \frac{1}{3}\alpha_c^4 N^{2\delta-\eta-2} \frac{d^2 U}{d\tau^2} = -T_c N^{-\delta}\tau \quad (\text{III.90})$$

Pour avoir une limite non triviale, il faut choisir les exposants:

$$\delta = 2\eta = 2 + \eta - 2\delta$$

c'est à dire $\eta = 2/5$ et $\delta = 4/5$. La double limite d'échelle est donc définie par:

$$N \rightarrow \infty \quad , \quad T \rightarrow T_c \quad \text{et} \quad N^{4/5}(1 - T/T_c) = \tau$$

La fonction $\alpha(\tau)$ vaut dans cette limite

$$\alpha(T) = \alpha_c(1 + \frac{1}{2}N^{-2/5}U(\tau))$$

et $U(\tau)$ satisfait l'équation des cordes:

$$\frac{1}{4}U'' + \frac{3}{4}U^2 = \frac{3}{4}\tau$$

Le membre de gauche est le polynôme de Gelfand-Dikii $R_2(U/2)$ (rappelons que pour un potentiel pair, il faut remplacer U par $U/2$). Cette équation fait partie de la classe des équations de Painlevé, et possède de nombreuses propriétés mathématiques.

Méthode des relations de commutations

Pour trouver le point critique $m = 1$, on peut chercher les opérateurs Q et P de la forme:

$$Q = d^2 + U \quad \text{et} \quad P = d^3 + Vd + W$$

L'équation de commutation $[P, Q] = \text{cte}$ donne:

$$V = \frac{3}{2}U + t_1 \quad , \quad W = \frac{3}{4}U' + t_0 \quad , \quad P = d^3 + \frac{3}{4}(dU + Ud) + t_1 d + t_0 = Q_+^{3/2} + t_1 Q_+^{1/2} + t_0$$

et l'équation des cordes:

$$\frac{1}{4}U'' + \frac{3}{4}U^2 + t_1 U = \text{cte } \tau$$

Cette équation est identique à l'équation de Painlevé obtenue plus haut par la méthode directe.

III.4 Méthode des boucles

La méthode des boucles, comme celle des polynômes orthogonaux autorise des calculs exacts. Elle s'apparente aux équations de Schwinger Dyson de la théorie des champs, aussi appelées équations du mouvement. Elle est basée sur la propriété qu'une intégrale doit être invariante par changement de variable. On obtient alors des équations reliant entre elles des valeurs moyennes de fonctions de la matrice M . Ces équations peuvent en général se résoudre par récurrence, ce qui permet finalement de calculer toutes les valeurs moyennes souhaitées.

Ces équations admettent une interprétation géométrique: grossièrement elles indiquent comment recoller des surfaces discrétisées avec bords.

III.4.1 Equation des boucles

Invariance par changement de variable

On considère la fonction de partition d'un modèle de matrices:

$$Z = \int dM e^{-N \operatorname{tr} V(M)} \quad \text{avec} \quad V(M) = \sum_{k=1}^d \frac{g_k}{k} M^k \quad (\text{III.91})$$

et l'on effectue le changement de variables $M \rightarrow M + \epsilon M^n$. On obtient à l'ordre 1 en ϵ :

$$Z = \int dM \left(1 + \epsilon \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{tr} M^k \operatorname{tr} M^{n-k-1} \right) e^{-N \operatorname{tr} V(M) + \epsilon M^n V'(M)} \quad (\text{III.92})$$

ce qui implique:

$$\left\langle \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{tr} M^k \operatorname{tr} M^{n-k-1} - N \operatorname{tr} M^n V'(M) \right\rangle = 0 \quad (\text{III.93})$$

Cette équation est appelée équation des boucles.

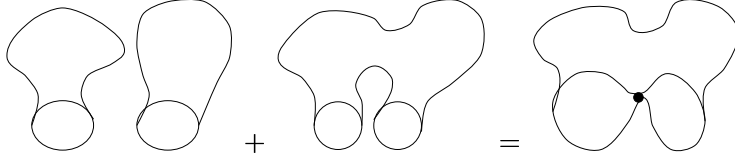
Interprétation géométrique

On a vu dans le chapitre précédent que $t_n = \frac{1}{N} \langle \operatorname{tr} M^n \rangle$ dénombre les surfaces ouvertes dont le bord est de longueur n . L'équation des boucles s'écrit aussi:

$$\sum_{k=0}^n t_k t_{n-k} + \frac{1}{N^2} t_{k,n-k} = \sum_{k=1}^d g_k t_{n+k} \quad (\text{III.94})$$

Le membre de droite compte des surfaces de bord $n+k$, auxquelles on a rajouté un vertex g_k , c'est à dire que l'on a cousu sur le bord un polygone à k cotés, diminuant ainsi de k la longueur du bord. Le bord n'est alors plus connexe, et l'on forme ainsi des surfaces à plusieurs bords. Le membre

de gauche, compte en effet les surfaces à au moins deux bords n_1 et n_2 tels que $n_1 + n_2 = n$. De telles surfaces sont soit connexes (une surface à deux bords), soit disconnectées (deux surfaces à un bord). L'équation des boucles s'écrit symboliquement:



$$(III.95)$$

Limite continue

L'équation des boucles est le plus souvent utilisée dans sa limite continue. On considère que les surfaces sont formées d'un grand nombre de polygones de côté ϵ très petit. La longueur du bord est alors: $l = n\epsilon$. Dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$, l'équation des boucles devient:

$$\int_0^l dl' \left(T(l-l')T(l') + \frac{1}{N^2} T(l', l-l') \right) = V' \left(e^{\epsilon \frac{\partial}{\partial l}} \right) T(l) \quad (III.96)$$

Le membre de droite est un opérateur différentiel, l'opérateur de pincement du bord, et son effet est de scinder le bord en deux, le membre de gauche compte les surfaces à deux bords.

Remarque: l'équation des boucles peut aussi s'écrire comme une équation différentielle pour l'énergie libre F définie par $Z = e^{N^2 F}$:

$$\sum_{k=0}^n k(n-k) \left(\frac{\partial F}{\partial g_k} \frac{\partial F}{\partial g_{n-k}} + \frac{1}{N^2} \frac{\partial^2 F}{\partial g_k \partial g_{n-k}} \right) = - \sum_k (n+k) g_k \frac{\partial F}{\partial g_{n+k}} \quad (III.97)$$

III.4.2 Solution de l'équation des boucles dans la limite N grand

Dans la limite $N \rightarrow \infty$, grâce au théorème de factorisation (II.5) l'équation des boucles se simplifie et donne:

$$\sum_{k=0}^{n-1} t_k t_{n-1-k} = \sum_{k=1}^d g_k t_{n-1+k} \quad (III.98)$$

C'est une équation fermée pour les t_n . Elle permet en principe de calculer tous les t_n par récurrence en connaissant seulement $t_1, t_2, \dots, t_{d-2}$. Il faudrait ensuite utiliser des conditions aux limites pour fixer les $d-2$ premiers termes de cette suite. La bonne méthode pour réaliser ces opérations est de réécrire l'équation des boucles en fonction de la résolvante $\omega(z) = \frac{1}{N} \sum_n \frac{t_n}{z^{n+1}}$.

On multiplie les deux membres de (III.98) par $1/z^{n+1}$, et l'on somme sur $n \in [0, \infty[$, il vient alors:

$$\omega^2(z) = (V'(z)\omega(z))_- = V'(z)\omega(z) - P(z). \quad (III.99)$$

On ne garde que les termes ayant une puissance négative de z dans le produit $V'(z)\omega(z)$. $P(z)$ est un polynôme en z de degré $\deg P = \deg V - 2$ qui élimine les puissances positives de z :

$$P(z) = \text{Pol } V'(z)\omega(z) = \sum_{n=0}^{d-2} \sum_{k=n+2}^d t_n g_k z^{k-n-2}. \quad (\text{III.100})$$

C'est lui qui contient les $d - 2$ constantes indéterminées $t_1, \dots, t_{d-2}$. On calcule alors $\omega(z)$ en résolvant simplement une équation du second degré:

$$\omega(z) = \frac{1}{2} \left(V'(z) - \sqrt{V'^2(z) - 4P(z)} \right) \quad (\text{III.101})$$

Pour déterminer $P(z)$, il faut imposer des conditions sur $\omega(z)$, comme par exemple sa structure analytique, c'est à dire le nombre de coupures dans le plan complexe.

On a vu avec la méthode du col, que les coupures de la résolvante sont les supports de la densité de valeurs propres $\rho(\lambda)$. Celles ci se concentrent au fond des puits du potentiel $V(z)$. Si V possède un seul puits, alors $\omega(z)$ n'a qu'une seule coupure $[a, b]$ sur l'axe réel. Si par contre on avait choisi un double puits de potentiel, il faudrait supposer que $\omega(z)$ possède deux coupures $[a, b] \cup [c, d]$ sur l'axe réel, et ainsi de suite.

Cas du simple puits

$\omega(z)$ doit posséder une seule coupure $[a, b]$, ce qui implique que

$$V'^2(z) - 4P(z) = (z - a)(z - b)M^2(z) \quad (\text{III.102})$$

où $M(z)$ est un polynôme de degré $d - 2$. En effet, la résolvante est alors

$$\omega(z) = \frac{1}{2} \left(V'(z) - M(z) \sqrt{(z - a)(z - b)} \right) \quad (\text{III.103})$$

Il reste donc à calculer a, b et $M(z)$. L'équation (III.102) est un système de $2d - 1$ équations avec $(d - 1) + (d - 1) + 2$ inconnues: les coefficients de P , les coefficients de M et a et b . On a en plus une équation de normalisation $\omega(z) \sim_{z \rightarrow \infty} 1/z$. Tout ceci permet de calculer $M(z)$, $P(z)$, et surtout $[a, b]$, les bords de la coupure.

On retrouve entièrement la solution de la méthode du col.

III.4.3 Equation des boucles à N quelconque: fonctions de boucles

Reprenons l'équation des boucles (III.94):

$$\sum_{k=0}^n t_k t_{n-k} + \frac{1}{N^2} t_{k,n-k} = \sum_{k=1}^d g_k t_{n+k} \quad (\text{III.104})$$

On aimerait la résoudre un peu comme dans le cas N grand, en introduisant la résolvante. Dans la limite $N \rightarrow \infty$, le théorème de factorisation (part.II.5) permettait de négliger le terme $t_{k,n-k}$ faisant intervenir les surfaces à plusieurs bords. Afin d'en tenir compte, on va définir les fonctions de corrélation de boucles.

Fonctions de boucles

On introduit:

$$\omega(z_1, z_2) = \left\langle \text{tr} \frac{1}{z_1 - M} \text{tr} \frac{1}{z_2 - M} \right\rangle_c \quad (\text{III.105})$$

et plus généralement:

$$\omega(z_1, \dots, z_m) = N^{m-2} \left\langle \text{tr} \frac{1}{z_1 - M} \dots \text{tr} \frac{1}{z_m - M} \right\rangle_c \quad (\text{III.106})$$

Le développement en série en $z_1, \dots, z_n$ donne les valeurs moyennes de produits de m traces $\langle \text{tr} M^{n_1} \dots \text{tr} M^{n_m} \rangle$:

$$\omega(z_1, \dots, z_m) = \sum_{n_1, \dots, n_m} N^{m-2} \left\langle \text{tr} \frac{M^{n_1}}{z_1^{n_1+1}} \dots \text{tr} \frac{M^{n_m}}{z_m^{n_m+1}} \right\rangle_c \quad (\text{III.107})$$

La fonction de corrélation de m boucles joue donc le rôle d'une fonction de partition grand canonique engendrant des surfaces avec m bords, dont les longueurs ne sont pas fixées, mais sont conjuguées à des potentiels chimiques $\ln z_i$. Ceci explique le nom fonction à m boucles.

Insertion de boucles

Les fonctions de boucles peuvent s'obtenir par récurrence, en faisant agir l'opérateur d'insertion de boucles sur la fonction de partition Z :

$$Z = e^{N^2 F} = \int dM e^{-N \text{tr} V(M)} \quad \text{avec} \quad V(M) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k}{k} M^k \quad (\text{III.108})$$

On définit l'opérateur d'insertion de boucles:

$$\frac{\partial}{\partial V(z)} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{z^{k+1}} \frac{\partial}{\partial g_k} \quad (\text{III.109})$$

En l'appliquant à Z , on reconnaît:

$$\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial V(z)} = N^2 \omega(z) \quad (\text{III.110})$$

et plus généralement:

$$\omega(z_1, \dots, z_m) = \frac{\partial}{\partial V(z_1)} \cdots \frac{\partial}{\partial V(z_m)} F \quad (\text{III.111})$$

On peut en particulier déterminer les fonctions de boucles par récurrence:

$$\omega(z_1, \dots, z_m, z_{m+1}) = \frac{\partial}{\partial V(z_{m+1})} \omega(z_1, \dots, z_m) \quad (\text{III.112})$$

Equation des boucles

Finalement, on peut réécrire l'équation des boucles (III.94) à l'aide de la fonction de deux boucles:

$$\omega^2(z) + \frac{1}{N^2} \omega(z, z) = V'(z) \omega(z) - P(z) \quad \text{avec} \quad \omega(z, z) = \frac{\partial \omega(z)}{\partial V(z)} \quad (\text{III.113})$$

En la traitant ordre par ordre en $1/N^2$, on peut calculer la résolvante $\omega(z)$ à tous les ordres, du moins en principe. Par exemple, pour déterminer la résolvante $\omega(z)$ à l'ordre $1/N^2$, il suffit de la connaître à l'ordre N^0 (III.101), et de connaître la fonction à deux boucles $\omega(z, z)$ à l'ordre N^0 . On va donc étudier cette fonction $\omega(z, z')$.

III.4.4 La fonction à deux boucles $\omega(z, z')$

Cette fonction joue un rôle très important. En effet, elle intervient dans l'équation des boucles (III.113), mais elle possède d'autres propriétés remarquables:

- elle est universelle, dans la limite $N \rightarrow \infty$ elle ne dépend pas du potentiel V .
- elle représente les surfaces à deux bords, c'est à dire des cylindres. Pour la théorie des cordes cette fonction est le propagateur de la corde.
- d'autre part, c'est la dérivée fonctionnelle de $\omega(z)$ par rapport à V

$$\omega(z, z') = \frac{\partial \omega(z)}{\partial V(z')} \quad (\text{III.114})$$

elle permet donc de voir comment varie la résolvante $\omega(z)$ lorsque l'on varie le potentiel $V(z)$:

$$\delta \omega(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint dz' \omega(z, z') \delta V(z') \quad (\text{III.115})$$

(c'est ainsi que j'ai obtenu les relations (III.35) et (III.72))

Calcul de $\omega(z, z')$ dans la limite $N \rightarrow \infty$

On peut calculer $\omega(z, z')$ à l'ordre dominant en $1/N$, c'est à dire dans la limite sphérique. Il y a plusieurs méthodes pour cela.

- L'une d'elle consiste à appliquer $\frac{\partial}{\partial V(z')}$ à l'expression (III.101) de $\omega(z)$, ceci implique de connaître

aussi les dérivées de a et b par rapport à V .

- Une autre méthode est celle des polynômes orthogonaux [57], elle donnerait:

$$\omega(z, z') = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z'} \ln \left(\frac{x(z) - x(z')}{z - z'} \right) \quad (\text{III.116})$$

où la fonction $x(z)$ a été définie par (III.60) .

- La méthode la plus simple est d'appliquer l'opérateur d'insertion de boucles à l'équation du col (III.19) satisfaite par $\omega(z)$. On obtient alors:

$$\omega(z + i0, z') + \omega(z - i0, z') = \frac{-1}{(z - z')^2} \quad (\text{III.117})$$

avec les conditions aux limites suivantes:

1. $\omega(z, z')$ est analytique dans les deux variables dans les plans complexes coupés le long de $[a, b]$
2. $\omega(z, z') \sim_{z \rightarrow \infty} \text{cte} / z^2$
3. au bords de la coupure $\omega(z, z') \sim 1 / \sqrt{(z - a)(z - b)}$.
4. $\omega(z, z') = \omega(z', z)$
5. de plus on sait que $\omega(z)$ ne dépend que de la dérivée du potentiel $V'(z')$ donc on peut intégrer (III.115) par partie, ce qui signifie que $\omega(z, z')$ est une dérivée totale par rapport à z' .

Pour résoudre l'équation linéaire (III.117), on commence par chercher une solution particulière:

$$\frac{1}{2} \frac{-1}{(z - z')^2} \quad (\text{III.118})$$

et l'on ajoute la solution générale de l'équation homogène, qui est:

$$\frac{f(z)}{\sqrt{(z - a)(z - b)}} \quad (\text{III.119})$$

où $f(z)$ est une fonction régulière en z , c'est à dire qui n'a pas de coupure. Les condition aux limites n°1 et n°2 impliquent que $f(z)$ est une fraction rationnelle et la n°3 que f n'a pas de pôles en a et b .

Etant donné que la solution particulière (III.118) possède un pôle double en $z = z'$, $f(z)$ doit avoir un tel double pôle. La condition n°2 implique alors que le numérateur de f est un polynôme de degré 1. On peut donc écrire:

$$\omega(z, z') = \frac{1}{2} \frac{-1}{(z - z')^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{(z - a)(z - b)}} \frac{1}{\sqrt{(z' - a)(z' - b)}} (pz z' - q(z + z') + r) \right) \quad (\text{III.120})$$

où les coefficients p, q, r sont encore à déterminer. $\omega(z, z')$ est régulière en $z = z'$, ce qui impose $p = 1$, $q = (a + b)/2$, et $r = ab$. On obtient finalement:

$$\omega(z, z') = \frac{-1}{4} \frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z'-a)(z'-b)}} \left(1 - \left(\frac{\sqrt{(z-a)(z-b)} - \sqrt{(z'-a)(z'-b)}}{z - z'} \right)^2 \right) \quad (\text{III.121})$$

On peut l'écrire comme une dérivée totale:

$$\omega(z, z') = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \left(\frac{\sqrt{(z-a)(z-b)} - \sqrt{(z'-a)(z'-b)}}{z - z'} \right) \quad (\text{III.122})$$

et encore:

$$\omega(z, z') = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z'} \frac{\partial}{\partial z} \ln \left(1 - \left(\frac{\sqrt{(z-a)(z-b)} - \sqrt{(z'-a)(z'-b)}}{z - z'} \right)^2 \right) \quad (\text{III.123})$$

On constate donc que la fonction de corrélation à deux boucles $\omega(z, z')$ est universelle, elle dépend des bords de la coupure a et b , mais sa forme ne dépend pas du potentiel V . C'est une indication que la statistique des valeurs propres des matrices aléatoires est très universelle et ne dépend pas des spécificités du modèle considéré.

Remarque 1: on peut en particulier calculer $\omega(z, z')$ lorsque $z = z'$:

$$\omega(z, z) = \frac{1}{16} \frac{(a-b)^2}{(z-a)^2(z-b)^2} \quad (\text{III.124})$$

Remarque 2: rappelons que tous ces calculs ont été menés dans la limite $N \rightarrow \infty$. On n'a calculé que le premier terme du développement de $\omega(z, z')$ en puissances de $1/N^2$.

III.4.5 Développement topologique de $\omega(z)$

On a maintenant les outils pour calculer le développement topologique de la résolvante $\omega(z)$ ordre par ordre en $1/N^2$:

$$\omega(z) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{N^{2h}} \omega_{[h]}(z) \quad (\text{III.125})$$

A l'ordre N^0 on a obtenu

$$\omega_{[0]}(z) = \frac{1}{2} \left(V'(z) - M(z) \sqrt{(z-a)(z-b)} \right) \quad (\text{III.126})$$

Calculons l'ordre $\omega_{[1]}$, c'est à dire la fonction génératrice des surfaces de genre 1 avec un bord.

Calcul de $\omega_{[1]}(z)$ à l'ordre du tore

L'équation (III.113) à l'ordre 1 s'écrit:

$$\left(2\omega_{[0]}(z) - V'(z)\right) \omega_{[1]}(z) = P_{[1]}(z) - \omega_{[0]}(z, z) \quad (\text{III.127})$$

le polynôme $P_{[1]}(z)$ étant choisi tel que $\omega_{[1]}(z) \sim_{z \rightarrow \infty} \text{cte}/z^2$, et $\omega_{[0]}(z, z)$ est donnée par (III.124). On trouve donc $\omega_{[1]}(z)$:

$$\omega_{[1]}(z) = \frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \frac{\omega_{[0]}(z, z) - P_{[1]}(z)}{M(z)} \quad (\text{III.128})$$

Cette solution n'est pas très explicite et peut se simplifier. En effet, la fraction rationnelle du membre de droite peut être déterminée par ses conditions aux limites. Son dénominateur ne peut contenir que des pôles en a et b . Il contient d'ailleurs nécessairement des pôles doubles car $\omega_{[0]}(z, z)$ en contient (III.124). Le numérateur a un degré fixé par la condition $z \rightarrow \infty$. On a donc:

$$\frac{\omega_{[0]}(z, z) - P_{[1]}(z)}{M(z)} = \frac{1}{16} \frac{Q(z)}{(z-a)^2(z-b)^2} \quad \text{et} \quad \deg Q = 3 \quad (\text{III.129})$$

Cette équation permet de calculer $P_{[1]}$ et Q en fonction de M . On obtient:

$$Q(z) = \frac{1}{a-b} \left(\frac{z-b}{M_0} - \frac{z-a}{J_0} \right) \left((a-b)^2 - (z-a)(z-b) \right) \\ - (z-a)(z-b) \left(\frac{M_1}{M_0^2}(z-b) + \frac{J_1}{J_0^2}(z-a) \right) \quad (\text{III.130})$$

où l'on a introduit les coefficients: $M_0 = M(a)$, $M_1 = M'(a)$, $J_0 = M(b)$, $J_1 = M'(b)$. Plus généralement, on définit les M_k et les J_k comme les dérivées $k^{\text{ièmes}}$ de $M(z)$ en a et b :

$$M(z) = \sum_{k=0}^{d-2} M_k (z-a)^k = \sum_{k=0}^{d-2} J_k (z-b)^k \quad (\text{III.131})$$

Finalement, on a calculé la résolvante torique $\omega_{[1]}(z)$. Elle ne dépend que de 4 paramètres M_0 , J_0 , M_1 , J_1 et pas de tous les coefficients g_k du potentiel. Cette fonction présente donc des caractéristiques universelles.

Ceci est général, les $\omega_{[h]}(z)$ ne dépendent que d'un petit nombre de paramètres M_k et J_k . On pourrait aussi développer l'énergie libre $F = \sum_h N^{-2h} F_{[h]}$. On peut retrouver $F_{[h]}$ en intégrant $\frac{\partial F}{\partial V(z)} = \omega(z)$. On trouve ainsi:

$$F_{[1]} = \frac{1}{12} \ln((b-a)^4 M_0 J_0)$$

Calcul de $\omega_{[h]}(z)$ aux ordres suivants en $1/N$

Il est possible d'itérer ordre par ordre l'équation des boucles (III.113) et de trouver tous les ordres du développement topologique (III.125) de $\omega(z)$. A l'ordre h on a:

$$\sum_{k=0}^h \omega_{[k]}(z) \omega_{[h-k]}(z) + \omega_{[h-1]}(z, z) = V'(z) \omega_{[h]}(z) + P_{[h]}(z) \quad (\text{III.132})$$

C'est à dire:

$$\omega_{[h]}(z) \left(V'(z) - 2\omega_{[0]}(z) \right) = \sum_{k=1}^{h-1} \omega_{[k]}(z) \omega_{[h-k]}(z) + \omega_{[h-1]}(z, z) - P_{[h]}(z) \quad (\text{III.133})$$

Ainsi, pour connaître $\omega(z)$ à l'ordre h , il faut connaître tous les ordres de 0 à $h-1$, et aussi connaître la fonction à deux boucles $\omega(z, z)$ à l'ordre $h-1$. Cette dernière peut se déduire de la fonction $\omega_{[h-1]}(z)$ par l'opérateur d'insertion de boucles (III.114). Par exemple, pour calculer $\omega_{[1]}(z, z)$, d'après (III.130), il est nécessaire de calculer des quantités de la forme:

$$\frac{\partial M_k}{\partial V(z)} \quad , \quad \frac{\partial J_k}{\partial V(z)} \quad , \quad \frac{\partial a}{\partial V(z)} \quad , \quad \frac{\partial b}{\partial V(z)}$$

Moments M_k , J_k , et bords de la coupure $[a, b]$

La dépendance de a, b et $M(z)$ dans le potentiel V , est contenue de façon implicite dans les équations (III.102). Il existe une façon plus astucieuse de reformuler ces équations. En effet, la méthode du col (part.III.2) avait donné (III.23, III.24) :

$$\frac{1}{2i\pi} \oint V'(u) \frac{1}{\sqrt{(u-a)(u-b)}} du = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2i\pi} \oint u V'(u) \frac{1}{\sqrt{(u-a)(u-b)}} du = 2$$

Il suffit alors d'appliquer l'opérateur d'insertion de boucles (III.109) pour trouver:

$$\frac{\partial a}{\partial V(z)} = -\frac{1}{M_0} \frac{1}{z-a} \frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial b}{\partial V(z)} = -\frac{1}{J_0} \frac{1}{z-b} \frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \quad (\text{III.134})$$

et, compte tenu de:

$$M_k = -\frac{1}{2i\pi} \oint \frac{V'(u)}{(u-a)^{k+1}} \frac{1}{\sqrt{(u-a)(u-b)}} \quad (\text{III.135})$$

$$J_k = -\frac{1}{2i\pi} \oint \frac{V'(u)}{(u-b)^{k+1}} \frac{1}{\sqrt{(u-a)(u-b)}} \quad (\text{III.136})$$

on trouve:

$$\frac{\partial M_k}{\partial V(z)} = \frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \left(\frac{k+3/2}{z-a} \left(\frac{1}{(z-a)^{k+1}} - \frac{M_{k+1}}{M_0} \right) \right) \quad (\text{III.137})$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2(z-b)} \sum_{l=0}^k (b-a)^{l-k-1} \left(\frac{M_l}{J_0} - \frac{z-b}{(z-a)^{l+1}} \right) \\
\frac{\partial J_k}{\partial V(z)} &= \frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \left(\frac{k+3/2}{z-b} \left(\frac{1}{(z-b)^{k+1}} - \frac{J_{k+1}}{J_0} \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{2(z-a)} \sum_{l=0}^k (a-b)^{l-k-1} \left(\frac{J_l}{M_0} - \frac{z-a}{(z-b)^{l+1}} \right) \right)
\end{aligned} \tag{III.138}$$

On peut alors à partir de ces résultats itérer l'équation (III.133) . Ce travail a été réalisé en détails par les auteurs de [59] et [58]. Ils ont montré comment développer en puissances de $1/N^2$ les fonctions de boucles, et ont établi le lien avec la double limite d'échelle.

J'indiquerai dans le chapitre VI comment adapter ces méthodes au cas du modèle $O(n)$.

Chapter IV

Surfaces continues

La gravitation quantique bidimensionnelle et la théorie des cordes sont représentées par une sommation sur des surfaces de la forme (I.3):

$$Z = \sum_{\text{surfaces } S} dS e^{-\mathcal{E}(S)} \quad (\text{IV.1})$$

où $\mathcal{E}$ est l'action d'Einstein–Polyakov $\mathcal{E} = 4\pi G\chi + \Lambda \text{ aire} + \text{matière}$.

Comme pour les intégrales de chemins en mécanique quantique, le problème est de définir la mesure de sommation dS sur les surfaces. Il faut d'abord la régulariser, c'est à dire se ramener à une intégrale en dimension finie, puis passer à la limite continue en renormalisant les paramètres G et Λ .

Le développement diagrammatique du chapitre II donne une régularisation de l'intégrale (IV.1) mais on va voir que pour passer à la limite continue, il faut distinguer deux cas suivant que l'on veut sommer seulement sur des surfaces de topologie donnée ou non. Dans ce dernier cas, on va être confronté à un problème d'instabilité qui fait que ces modèles ne sont pas bien définis.

IV.1 Intégrales de surfaces régularisées et modèles de matrices

Un moyen de régulariser les surfaces, est de considérer des surfaces “fil de fer” constituées en collant bords à bords des polygones de côté ϵ , ce qui peut se faire grâce au développement perturbatif d'une intégrale de matrices:

$$\tilde{Z} = \int dM e^{-N \text{tr} V(M)} \quad \text{avec} \quad V(M) = \frac{g}{2} M^2 - \sum_k \frac{g_k}{k} M^k \quad (\text{IV.2})$$

peut s'écrire comme la fonction de partition d'un ensemble de surfaces discrétisées:

$$Z = \ln \tilde{Z} = \sum_{\text{surfaces}} \frac{1}{\Omega} N^\chi g^{-n_a} \prod_k g_k^{n_k} \quad (\text{IV.3})$$

où n_a = est le nombre d'arêtes et n_k = le nombre de polygones à k cotés (on a $2n_a = \sum k n_k$).
On peut identifier Z avec l'intégrale de surface (IV.1) discrétisée avec l'action:

$$\mathcal{E} = -\chi \ln N - \sum_k n_k \left(\ln g_k - \frac{k}{2} \ln g \right)$$

celle ci se ramène à l'action d'Einstein à condition de poser: $\ln N = -4\pi G$ et $\Lambda_k \epsilon^2 = \ln g_k - \frac{k}{2} \ln g$.
On a introduit une constante cosmologique Λ_k couplée à chacune des aires partielles comptant uniquement les polygones à k cotés. Quant au facteur de symétrie Ω , il doit être absorbé dans la mesure de sommation $d\mathcal{S}$.

Maintenant que l'on a trouvé une régularisation de l'intégrale de surface (IV.1), il faut revenir à la limite continue en faisant tendre la taille des polygones ϵ vers 0.

Remarque: on a régularisé une intégrale de dimension infinie en une intégrale de matrices de dimension finie N^2 , on peut donc aussi interpréter N comme un cut-off, qu'il faudra faire tendre vers l'infini pour passer à la limite continue.

IV.2 Limite continue et points critiques

On souhaite passer à la limite des surfaces continues en faisant tendre le cut-off ϵ vers 0. Afin que cette limite ne soit pas triviale, il faut que les surfaces qui dominent dans la somme (IV.3) aient des propriétés compatibles avec celles de bonnes surfaces macroscopiques continues. En particulier l'aire $\mathcal{A} = n_t \epsilon^2$ doit être finie, donc le nombre total de polygones de la surface moyenne $\langle n_t \rangle = \sum_k \langle n_k \rangle$ doit diverger en $1/\epsilon^2$. D'après l'expression (IV.3) de Z , on a:

$$\langle n_k \rangle = g_k \frac{\partial \ln Z}{\partial g_k}$$

Si l'on veut que $\langle n_k \rangle \rightarrow \infty$, il faut ajuster g_k à une valeur critique $g_k = g_{kc}$, où la fonction de partition Z est singulière:

$$Z = Z_{\text{reg}} + Z_{\text{sing}} \quad \text{avec} \quad Z_{\text{sing}} \sim (g_k - g_{kc})^{-\alpha}$$

On aura alors $\langle n_k \rangle \sim \alpha / (g_{kc} - g_k)$, et il faut définir une constante cosmologique renormalisée Λ_{kR} telle que:

$$g_k = g_{kc} - \Lambda_{kR} \epsilon^2$$

On comprend ainsi la signification physique de la constante cosmologique $\Lambda_{kR} = 1/L_0^2$, elle donne l'échelle macroscopique des surfaces: l'aire moyenne est d'ordre $\mathcal{A} \sim \alpha L_0^2$.

On peut également calculer l'entropie des surfaces continues, en observant que le passage à la limite continue signifie donc que la fonction de partition (IV.3) doit être dominée par les diagrammes ayant un très grand nombre de polygones, on ne s'intéresse alors plus qu'au comportement aux grands ordres $n_k \rightarrow \infty$ de la série de perturbations:

$$Z \sim (g_{kc} - g_k)^{-\alpha} \sim \sum_{n_k} (g_k / g_{kc})^{n_k} n_k^{\alpha-1}$$

autrement dit le nombre de surfaces ayant n_k k -gones se comporte en $n_k^{\alpha-1}$, c'est à dire que le nombre de surfaces d'aire $\mathcal{A}$ (l'entropie) se comporte en $\mathcal{A}^{\alpha-1}$.

Remarque 1: On va voir dans le paragraphe suivant que tout ce raisonnement est faux car il n'existe pas d'exposant α tel que $Z \sim (g - g_c)^{-\alpha}$. On peut toutefois passer à la limite continue à condition de se placer dans la limite $N \rightarrow \infty$, ordre par ordre en $1/N^2$.

Remarque 2: Points multicritiques

Jusqu'ici on a supposé pour simplifier qu'une seule des constantes de couplages g_k était critique. Dans ce cas, une seule des valeurs moyennes $\langle n_k \rangle$ diverge, et une seule catégorie de polygones domine dans la limite continue.

Mais on peut aussi se placer à un point multicritique, où plusieurs constantes de couplages sont ajustées simultanément à leurs valeurs critiques: les surfaces continues ainsi obtenues auront une structure interne non triviale permettant de modéliser la gravitation en présence d'un certain type de matière.

IV.3 Surfaces de topologie fixée

On peut appliquer la procédure de passage à la limite continue du paragraphe précédent en restreignant la somme (IV.1) à des surfaces de topologie fixée, ceci grâce au développement topologique de (IV.3) :

$$Z = \sum_{h=0}^{\infty} N^{2-2h} Z_{[h]}$$

$Z_{[h]}$ étant la somme sur les surfaces de genre h .

Pour passer à la limite continue, il faut identifier un point critique g_c , où $Z_{[h]}$ diverge en $(g - g_c)^{-\alpha_h}$. Les calculs de modèles de matrices montrent que l'exposant α_h n'est pas le même pour tous les genres, il dépend de h :

$$\alpha_h = \alpha_0 + \alpha' h$$

Plus h est grand, plus α_h est grand, et donc plus $Z_{[h]}$ diverge. Cela signifie qu'il n'existe pas d'exposant α global pour la fonction $Z = \sum_h Z_{[h]}$ et que l'on ne peut définir une limite continue par la procédure décrite dans la section précédente que ordre par ordre en puissances de $1/N^2$.

Une des raisons pour lesquelles la limite continue ne peut pas s'appliquer directement à Z , est que l'intégrale matricielle (IV.2) est divergente: le potentiel $V(M)$ n'est pas positif. Il est possible de calculer Z pour des $g_k < 0$, et ensuite de prolonger analytiquement Z en contournant dans le plan complexe la singularité à $g_k = 0$, mais il y a plusieurs façons de contourner cette singularité, et Z est mal définie.

On verra plus loin que l'on peut quand même définir une limite continue pour Z , à condition de faire tendre simultanément $g \rightarrow g_c$ et $N \rightarrow \infty$, de façon à compenser la divergence de $Z_{[h]}$ par le facteur N^{2-2h} .

Pour résumer, voici comment l'on procède pour passer à la limite continue: On calcule l'intégrale de matrice $\tilde{Z}$ (IV.2), dans un domaine des g_k où elle est convergente. On développe ensuite $Z = \ln \tilde{Z}$

en puissances de $1/N$:

$$Z = \sum_h N^{2-2h} Z_{[h]}$$

et ordre par ordre en $1/N^2$, on prolonge analytiquement $Z_{[h]}$ dans le plan complexe, en cherchant une singularité:

$$Z_{[h]} = Z_{[h]\text{reg}} + Z_{[h]\text{sing}} \quad \text{avec} \quad Z_{[h]\text{sing}} \sim (g_{kc} - g_k)^{-\alpha_h}$$

La partie régulière $Z_{[h]\text{reg}}$ est mal définie, mais la partie singulière $Z_{[h]\text{sing}}$ est bien définie pour chaque h . On considère alors que l'intégrale de surfaces est donnée par la limite continue de $Z_{[h]\text{sing}}$ (la partie régulière qui est analytique contribue peu aux grandes valeurs de n_k):

$$\int_{\text{surfaces de genre } h} dS e^{-\mathcal{E}(\mathcal{S})} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Z_{[\epsilon]\text{sing}}$$

Il n'existe pas de démonstration rigoureuse et générale du fait que cette méthode permette effectivement de calculer une intégrale de surfaces en dehors du fait que pour un certain nombre de cas, les méthodes continues en théorie des cordes redonnent les mêmes résultats (les mêmes exposants critiques).

On va maintenant voir sur un exemple simple comment ceci fonctionne. Pour cela, on utilisera des résultats du chapitre III sur les techniques mathématiques de calcul des intégrales de matrices.

IV.4 Exemples: surfaces sphériques

On se place dans la limite $N \rightarrow \infty$ qui permet de se restreindre aux surfaces sphériques de genre $h = 0$:

$$Z_{[0]} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \ln \tilde{Z}$$

Pour simplifier on supposera que l'on ne fait varier qu'un seul des g_k . La partie singulière de $Z_{[0]}$ se comporte en loi de puissance:

$$Z_{[0]}(g_k) \sim (g_{kc} - g_k)^{2-\gamma}$$

avec un exposant γ appelé susceptibilité de corde. Lorsque l'on développe Z en puissances de g_k , aux grands ordres la série est dominée par la singularité:

$$Z_{[0]} \sim \sum_{n_k} n_k^{\gamma-3} (g_k/g_{kc})^{n_k}$$

Le coefficient de $g_k^{n_k}$ compte le nombre de surfaces ayant n_k polygones. On en déduit que la fonction de partition des surfaces d'aire $\mathcal{A}$ fixée se comporte en:

$$Z \sim \mathcal{A}^{\gamma-3}$$

On va maintenant voir comment les techniques matricielles peuvent s'appliquer à un exemple concret:

Exemple: surfaces ouvertes

Considérons l'ensemble des surfaces discrétisées formées en collant des carrés de côté ϵ , elles sont engendrées par une intégrale de matrice $Z = \ln \tilde{Z}$ avec un potentiel quartique:

$$\tilde{Z} = \int dM e^{-N \text{tr} V(M)} \quad \text{avec} \quad V(M) = \frac{1}{2}M^2 - \frac{g}{4}M^4$$

chaque surface de genre h formée de n carrés, c'est à dire d'aire $n\epsilon^2$, contribue à Z avec un poids $\frac{1}{N}N^{2-2h}g^n$. L'aire moyenne est donc:

$$\mathcal{A} = \epsilon^2 \langle n \rangle = \epsilon^2 g \frac{\partial}{\partial g} \ln Z$$

Pour pouvoir passer à la limite continue $\epsilon \rightarrow 0$, il faut que le résultat reste fini, et donc que la dérivée de $\ln Z$ diverge en $1/\epsilon^2$. On a vu que Z possède des singularités en loi de puissance $Z \sim (g - g_c)^{2-\gamma}$, ce qui signifie $\ln Z \sim (2 - \gamma) \ln (g - g_c)$ et donc

$$\mathcal{A} \sim (2 - \gamma) \frac{\epsilon^2}{g/g_c - 1}$$

On est donc amené à définir une constante cosmologique renormalisée Λ par $g/g_c - 1 = \Lambda \epsilon^2$. $L_0 = 1/\sqrt{\Lambda}$ définit alors la taille caractéristique de la surface, l'aire moyenne est d'ordre $\mathcal{A} \sim L_0^2$.

Considérons maintenant l'ensemble des surfaces ouvertes de périmètre $L = 2l\epsilon$, dont la fonction génératrice est:

$$t_{2l} = \frac{1}{N} \left\langle \text{tr} M^{2l} \right\rangle$$

Leur aire moyenne est

$$\mathcal{A}(L) = \epsilon^2 g \frac{\partial}{\partial g} \ln t_{2l}$$

Dans la limite sphérique $N \rightarrow \infty$, la méthode du col (part.III.2) permet de calculer la résolvante $\omega(z) = \sum_l t_{2l}/z^{2l+1}$, et donne une expression exacte des t_{2l} . A partir de là on peut passer à la limite continue $\epsilon \rightarrow 0$, en renormalisant le paramètre g (la constante cosmologique), et en déduire l'équation d'état macroscopique reliant l'aire $\mathcal{A}(L)$ d'une surface à son périmètre L .

L'équation (III.20) de la méthode du col donne la résolvante sous la forme:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t_l}{z^{l+1}} = \omega(z) = \frac{1}{2} \left(V'(z) - M(z) \sqrt{z^2 - a^2} \right)$$

ici, on a $V'(z) = z - gz^3$, et $M(z)$ est un polynôme de degré 2 de la forme $M(z) = -g(z^2 + c)$. Les paramètres c et a sont déterminés par la condition $\omega(z) \sim 1/z$ quand $z \rightarrow \infty$, ce qui implique:

$$c = a^2/2 - 1/g \quad \text{et} \quad a^2 = \frac{2}{3g} \left(1 - \sqrt{1 - 12g} \right)$$

On peut alors développer ω en puissances de $1/z$, ce qui donne les t_l :

$$t_{2l} = \frac{2l!}{l!l+2!} \left(\frac{a^2}{4} \right)^{l+1} \left[1 + (l+1)\sqrt{1 - 12g} \right]$$

L'aire moyenne des surfaces de périmètre $L = 2l\epsilon$ est alors:

$$\mathcal{A}(L) = \epsilon^2 g \frac{\partial}{\partial g} \ln t_{2l} = \frac{1}{2} \epsilon^2 l(l+1) \frac{1 - \sqrt{1 - 12g}}{1 + (l+1)\sqrt{1 - 12g}}$$

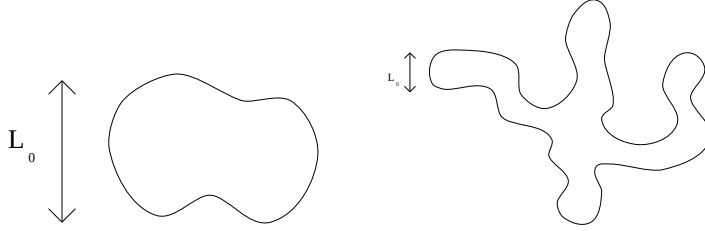
On aimerait maintenant passer à la limite continue $\epsilon \rightarrow 0$, tout en gardant L et $\mathcal{A}$ finis. Ceci implique de choisir un point critique $g \rightarrow g_c = 1/12$, avec la loi d'échelle $g - g_c \sim \epsilon^2$. On définit donc une constante cosmologique renormalisée $\Lambda = 1/L_0^2$ par:

$$g = \frac{1}{12}(1 - \Lambda\epsilon^2)$$

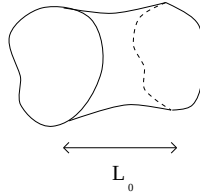
On trouve alors:

$$\mathcal{A}(L) = \frac{1}{8} \frac{L^2}{1 + \frac{L}{2L_0}}$$

Tant que $L \ll L_0$, la surface ressemble à un disque lisse dont l'aire dépend quadratiquement du périmètre: $\mathcal{A} \sim L^2$. En revanche si $L \gg L_0$ l'aire se comporte linéairement dans le périmètre: $\mathcal{A} \sim LL_0$, c'est à dire que l'on a une surface avec un bord très complexe. Tout se passe comme si la surface était constituée de bandes de largeur L_0 .



Cette description est confirmée en calculant l'aire d'une surface cylindrique à deux bords de longueurs L et L' : $\mathcal{A} \sim L_0(L + L')$, ce qui correspond à un cylindre de hauteur L_0 .



IV.5 Double limite d'échelle

On vient de voir, que l'interprétation de l'intégrale de matrices $\tilde{Z}$ comme intégrale de surfaces ne peut se faire qu'ordre par ordre en $1/N^2$, c'est à dire à genre fixé. Or on s'est intéressé à la gravitation quantique bidimensionnelle dans le but de comprendre le rôle joué par la topologie dans la sommation sur les surfaces, et en théorie des cordes les surfaces de genre non nul sont essentielles puisqu'elles représentent les vertex d'interactions des cordes. Il apparaît donc très important de pouvoir sommer sur des surfaces de tous les genres.

On va voir que ceci est possible dans une double limite continue où les deux cut-offs ϵ (cut-off microscopique) et $1/N$ (cut-off sur le nombre de degrés de liberté) tendent vers 0 simultanément avec une loi d'échelle $N^\delta \epsilon^2 = O(1)$. En pratique, il s'agit de compenser la divergence des surfaces de grande topologie $(g - g_c)^{-\alpha_h}$ par le facteur N^{2-2h} .

La fonction de partition régularisée contenant toutes les topologies est:

$$Z_{\text{sing}} = \sum_{h=0}^{\infty} N^{2-2h} Z_{[h],\text{sing}} = \sum_{h=0}^{\infty} N^{2-2h} (g_c - g)^{-\alpha_h} \zeta_{[h]}$$

On observe que le point critique g_c est commun à tous les $Z_{[h]}$ (la limite continue $\epsilon \rightarrow 0$ ne dépend en effet que de l'aspect local de la surface et pas de sa topologie) et les exposants α_h dépendent linéairement de h selon $\alpha_h = (\gamma - 2)(1 - h)$. Ces propriétés font que la fonction de partition Z_{sing} ne dépend en réalité que de la variable $\kappa = N(g_c - g)^{1-\gamma/2}$

$$Z_{\text{sing}} = \sum_{h=0}^{\infty} \kappa^{2-2h} \zeta_{[h]}$$

Il est donc possible de faire tendre à la fois $N \rightarrow \infty$ et $g \rightarrow g_c$ tout en gardant la contribution de tous les genres h , il suffit de choisir κ fixé d'ordre 1. Pour passer à la limite continue il faut que l'aire

$$\mathcal{A} \sim \epsilon^2 g \frac{\partial}{\partial g} \ln Z_{\text{sing}} = \epsilon^2 g_c \frac{\partial \kappa}{\partial g} \frac{\partial \ln Z_{\text{sing}}(\kappa)}{\partial \kappa}$$

reste finie, ce qui implique $\epsilon^2 N^{1/(1-\gamma/2)} = O(1)$. Ceci définit ce que l'on appelle la double limite d'échelle.

Finalement, on a ramené le calcul de l'intégrale de surfaces (IV.1) à l'étude d'une fonction $Z(\kappa) = \sum_h \kappa^{2-2h} \zeta_{[h]}$ (κ est relié à la constante gravitationnelle renormalisée).

En pratique, on préfère travailler avec la variable $\tau = \kappa^{1/(1-\gamma/2)} = (1 - g/g_c) N^{1/(1-\gamma/2)}$ et étudier la dérivée seconde de Z :

$$U(\tau) = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} Z$$

La méthode des polynômes orthogonaux (part.III.3) pour le calcul des intégrales de matrices permet de trouver une équation différentielle non linéaire dite équation des cordes satisfaite par $U(\tau)$.

Par exemple, pour la gravité pure on calcule une intégrale sur des surfaces sans matière, u satisfait une équation de Painlevé:

$$\frac{1}{2} U'' + 3U^2 = \tau$$

Si l'on s'intéresse à la gravitation en présence de matière, on doit calculer une intégrale sur des surfaces ayant une structure interne, et l'on trouve d'autres équations de cordes, dépendant de la charge centrale de la matière. Les théories conformes permettent de classer les différents types de matières (les modèles minimaux) en fonction de deux entiers p et q premiers entre eux, la charge centrale étant $c = 1 - 6 \frac{(p-q)^2}{pq}$ (la gravité pure est le modèle $(3, 2)$).

On va maintenant voir une méthode pour obtenir ces équations de cordes.

IV.6 Equation des cordes

Il existe deux façons équivalentes de formuler la mécanique quantique et la théorie des champs: d'une part la méthode des intégrales de chemins, que l'on a traduit en intégrales de surfaces pour la théorie des cordes et d'autre part la méthode opératorielle.

Toutes les observables peuvent être représentées par des opérateurs dont le spectre donne l'ensemble des valeurs physiquement mesurables. Dans la limite classique, tous ces opérateurs commutent, ils sont simultanément diagonalisables, ils peuvent donc être remplacés par des nombres et redeviennent les observables classiques comme les coordonnées et les vitesses. Dans le cas quantique, ces opérateurs ne commutent pas, et les variables canoniquement conjuguées (par exemple les coordonnées q et les impulsions p) satisfont une relation canonique:

$$[p, q] = i\hbar$$

De la même façon il existe un tel formalisme opératoire en théorie des cordes et celui ci peut être construit explicitement à partir des modèles de matrices.

IV.6.1 Modèle à une matrice

J'ai déjà exposé en détail ce formalisme dans la partie III.3.6 concernant la résolution du modèle à une matrice par la méthode des polynômes orthogonaux. Rappelons que cette méthode transforme le calcul d'une intégrale de matrices en un problème de mécanique quantique à une dimension et fait naturellement appel à des opérateurs qui sont les suivants:

-l'opérateur $\hat{\lambda}$ qui multiplie la fonction d'onde $\psi(\lambda)$ par λ (λ est une valeur propre de la matrice)

-l'opérateur $\hat{P} = \frac{1}{N} \partial / \partial \lambda$ qui dérive par rapport à la valeur propre λ .

Ils satisfont la relation de commutation canonique $[\hat{P}, \hat{\lambda}] = 1/N$.

Dans la limite continue (double limite d'échelle $g \rightarrow g_c$ et $N \rightarrow \infty$) ces opérateurs deviennent essentiellement des opérateurs différentiels:

$$\hat{\lambda} \rightarrow a_c + K^2 Q + O(K^4) \quad \text{où} \quad Q = d^2 + 2U(\tau)$$

$$\text{et} \quad \hat{P} \rightarrow K^{2m+1} P + O(K^{p+2}) \quad \text{où} \quad P = d^{2m+1} + pUd^{2m-1} + \sum_{k=0}^{2m-2} V_k(\tau) d^k$$

τ est la limite continue de l'opérateur $\hat{n}$ comptant les niveaux d'énergie du système (c'est à dire le degré des polynômes orthogonaux), renormalisé par un facteur N^δ :

$$\frac{n}{N} = 1 - N^{-\delta} \tau$$

$d = d/d\tau = \frac{1}{K} d/dn$ est la limite continue de l'opérateur de changement de niveau conjugué à $\hat{n}$ et K est le facteur d'échelle $K = N^{\delta-1}$.

La relation de commutation canonique $[\hat{P}, \hat{\lambda}] = 1/N$ montre que l'exposant δ vaut $(2m+2)/(2m+3)$, elle permet également de calculer tous les coefficients inconnus $V_k(\tau)$ de l'opérateur P et donne une équation différentielle pour la fonction $U(\tau)$:

$$P = (Q^{m+1/2})_+ \quad \text{et} \quad R_{m+1}(U) = \tau$$

où R_{m+1} est le polynôme différentiel de Gelfand-Dikii que j'ai défini dans la partie III.3.

On peut donc obtenir suivant la valeur de m une famille de fonctions $U(\tau)$. le nombre m représente le degré de criticité du potentiel, c'est à dire combien de constantes de couplages sont devenues critiques. Les points multicritiques des modèles de matrices modélisent des surfaces continues constituées de plusieurs sortes de polygones, elles comportent donc de la matière, et m est relié à la charge centrale de cette matière:

$$m = \frac{1}{12}(7 - c + \sqrt{(1 - c)(25 - c)}) \quad \text{c'est à dire} \quad c = 1 - 3(2m - 1)^2/(2m + 1)$$

Le modèle à une matrice ne permet d'atteindre qu'un gamme assez limitée de valeur de c , notamment on a toujours $c \leq 0$.

IV.6.2 Autres modèles de matrices

Il existe d'autres modèles, faisant intervenir plusieurs matrices couplées, dont les points critiques sont classés par deux entiers p et q et qui modélisent une théorie des cordes de charge centrale $c = 1 - 6(p - q)^2/pq$. Ces modèles sont beaucoup plus généraux puisqu'ils permettent d'atteindre tous les c rationnels < 1 . De plus, ces modèles peuvent également être résolus par la méthode des polynômes orthogonaux, et peuvent être formulés dans la double limite d'échelle à l'aide de deux opérateurs différentiels P et Q canoniquement conjugués ($[P, Q] = 1$) de degrés p et q :

$$P = d^p + pUd^{p-2} + \sum_{k=3}^p V_k d^{p-k}$$

$$Q = d^q + qUd^{q-2} + \sum_{k=3}^q U_k d^{q-k}$$

La relation de commutation $[P, Q] = 1$ permet de calculer tous les U_k et V_k , et d'obtenir une équation différentielle pour $U(\tau)$.

exemple

Le modèle d'Ising (3, 4) est décrit par:

$$P = d^3 + 3Ud + \frac{3}{2}U' \quad , \quad Q = d^4 + 4Ud^2 + 4U'd + 2U^2 + \frac{5}{3}U''$$

et l'équation des cordes est

$$\frac{1}{6}U^{(4)} + \frac{3}{2}U'^2 + 3UU'' + 4U^3 = \tau$$

IV.6.3 Limite classique $\tau \rightarrow \infty$

La limite classique ou limite sphérique $N \rightarrow \infty$ est équivalente à $\tau \rightarrow \infty$ car $\tau = N^{1/(1-\gamma/2)}(1 - g/g_c)$. Comme en mécanique quantique, la limite classique est obtenue en remplaçant les commutateurs par des crochets de Poisson:

$$\{P, Q\} = \frac{\partial P}{\partial d} \frac{\partial Q}{\partial \tau} - \frac{\partial P}{\partial \tau} \frac{\partial Q}{\partial d} = 1$$

On peut encore simplifier cette équation en remarquant que pour $\tau \rightarrow \infty$ les fonctions U , U_k et V_k se comportent en lois de puissances et à l'ordre dominant on a $U_k \sim U^k$ et $V_k \sim V^k$. $P(d, \tau)$ et $Q(d, \tau)$ peuvent donc être remplacés par des polynômes homogène en $U^{p/2}$ (resp. $U^{q/2}$) et en d^{-2} , on posera:

$$P = U^{p/2} P(\delta) = (-U)^{p/2} (\delta^p - p\delta^{p-2} + \dots)$$

$$Q = U^{q/2} Q(\delta) = (-U)^{q/2} (\delta^q - q\delta^{q-2} + \dots)$$

avec $\delta = (-U)^{-1/2}d$. Le crochet de Poisson devient simplement:

$$1 = \{P, Q\} = U^p U^{(p+q-3)/2} (pP(\delta)Q'(\delta) - qQ(\delta)P'(\delta))$$

On en déduit le scaling de $U \sim \tau^{-\gamma}$ avec l'exposant $\gamma = -2/(p+q-1)$, et l'équation polynômiale:

$$pP(\delta)Q'(\delta) - qQ(\delta)P'(\delta) = 1$$

Cas unitaire $p = q \pm 1$

Dans ce cas, on peut trouver explicitement les polynômes P et Q , ce sont des polynômes de Tchebychef:

$$P(\delta = 2 \cos \varphi) = 2 \cos p\varphi \quad \text{et} \quad Q(2 \cos \varphi) = 2 \cos q\varphi \quad (\text{IV.4})$$

Il suffit de vérifier qu'ils ont le bon crochet de Poisson.

Cas pseudo-unitaire $p = (2m+1)q \pm 1$

Il y a un autre cas où l'on sait exprimer les polynômes P et Q , c'est le cas pseudo-unitaire $p = (2m+1)q \pm 1$. Dans ce cas, Q est un polynôme de Tchebychef:

$$Q(2 \cos \varphi) = 2 \cos q\varphi$$

$$P(2 \cos \varphi) = \sum_{k=0}^m \binom{p/q}{k} 2 \cos (p - 2kq)\varphi \quad (\text{IV.5})$$

Cas $q = 2$

Le cas $q = 2$ est le cas du modèle à une matrice. On a alors $Q = d^2 + 2U$ même sans passer à la limite classique $\tau \rightarrow \infty$, et donc $Q(\delta) = \delta^2 - 2$ qui est bien le deuxième polynôme de Tchebychef. On a vu que l'opérateur P de degré $p = 2m+1$ est donné par $(Q^{p/2})_+$ et dans la limite classique il devient:

$$P(\delta) = \frac{2m+1!}{(-2)^m m!} \sum_{k=0}^m \frac{k!}{(m-k)!(2k+1)!} (-2)^k \delta^{2k+1} \quad (\text{IV.6})$$

Tous ces résultats vont être utilisés dans le chapitre suivant.

Chapter V

Instabilités, comportement aux grands ordres et instantons

On aimerait maintenant étudier la fonction de partition $Z(\kappa)$. Celle ci a été définie par une série de puissances de κ (le développement topologique):

$$Z = \sum_{h=0}^{\infty} \kappa^{2-2h} \zeta_{[h]} \quad (\text{V.1})$$

On va voir que cette série est divergente, car aux grands ordres [66], le terme général se comporte en $\zeta_{[h]} \sim (2h)!$. Ceci est lié au fait que le nombre de surfaces de grand genre h augmente comme $(2h)!$.

Cependant, on peut aussi calculer $Z(\kappa)$ d'une façon non perturbative comme la double limite d'échelle (d.l.e) d'une intégrale de matrices:

$$Z(\kappa) = \lim_{\text{d.l.e}} \ln \tilde{Z} \Big|_{\kappa = N(g-g_c)^{1-\gamma/2}}$$

Il doit donc être possible de resommer la série asymptotique (V.1) . Ceci peut se faire par la méthode de Borel, et donne lieu à une interprétation intuitive liée à l'effet tunnel en mécanique quantique, et aux instantons qui sont les modes evanescents permettant l'effet tunnel [63, 64, 68].

V.1 Séries asymptotiques

Une fonction $f(x)$ qui n'est pas analytique en $x = 0$, mais est analytique dans un secteur $|\text{Arg}(x)| \leq \alpha$ peut avoir un développement asymptotique dans ce secteur:

$$f(x) \sim \sum_n x^n A_n \quad (\text{V.2})$$

à condition qu'à tout ordre N , il existe une majoration uniforme:

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^N x^n A_n \right| \leq C_N |x|^{N+1}$$

Cette inégalité exprime que le développement limité (V.2) est une bonne approximation de f au voisinage de l'origine, mais il n'y a pas égalité et ce développement ne définit pas une unique fonction f . En effet, on peut ajouter à f n'importe quelle fonction $\epsilon(x)$ bornée par $|\epsilon(x)| \leq \min_n C_n |x|^{n+1}$. Par exemple, il suffit de penser à la fonction $\epsilon(x) = e^{-1/x}$. Elle admet pour $\operatorname{Re} x > 0$ le développement en série de Taylor $\epsilon(x) = 0$.

Toutefois, sous certaines hypothèses, et si l'on veut que le secteur dans lequel f est analytique soit maximal, on peut définir une unique fonction f . En particulier, si le terme général A_n se comporte en $A_n \sim (\beta n)!$ alors dans un secteur angulaire $|\operatorname{Arg}(x)| \leq \alpha$ tel que $\alpha > \beta\pi/2$, la série asymptotique définit une fonction unique. La méthode de sommation de Borel permet de reconstruire cette fonction.

V.2 Sommation de Borel

On voudrait retrouver la fonction $f(x)$ à partir de son développement asymptotique (V.2) $f(x) = \sum_n x^n A_n$. On suppose de plus qu'il existe un nombre β tel que la transformée de Borel de f , définie par

$$g(x) = \sum_n B_n x^n = \sum_n \frac{A_n}{(\beta n)!} x^n \quad \text{avec} \quad B_n = A_n / (\beta n)!$$

ait un rayon de convergence fini. C'est par exemple le cas si le terme général de la série se comporte aux grands ordres en:

$$A_n \sim r^{-n} (\beta n)!$$

Le rayon de convergence de $g(x)$ est alors $|r|$, et dans le cas le plus courant cela signifie que $g(x)$ possède un pôle ou une singularité essentielle en $x = r$.

Voyons comment remonter de la connaissance de g à celle de f :

$$f(x) = \sum_n A_n x^n = \sum_n (\beta n)! B_n x^n = \sum_n \int_0^\infty dt t^{\beta n} e^{-t} B_n x^n$$

et donc:

$$f(x) = \int_0^\infty dt e^{-t} g(xt^\beta) \tag{V.3}$$

Pour que cette intégrale soit bien définie, il suffit que la demi droite $[0, x)$ ne contienne aucune singularité de g . En particulier, si l'on s'intéresse à x réel positif, il suffit que g n'ait pas de singularité sur l'axe réel positif. Le critère de sommabilité de Borel, est alors:

$$r \notin [0, \infty[$$

Ceci se comprend intuitivement à partir du comportement aux grands ordres de $A_n \sim r^{-n} (\beta n)!$: si r est négatif ou complexe on va avoir une série alternée ou oscillante et l'on conçoit qu'il soit possible de la resommer, en revanche si r est positif tous les termes de la série sont positifs et la somme diverge nécessairement.

Lorsque r est réel positif, on peut quand même tenter de calculer $f(x)$, à l'aide de (V.3), en déformant le chemin d'intégration dans le plan complexe, de façon à éviter la singularité en $xt^\beta = r$. On peut définir ainsi deux fonctions suivant que l'on contourne la singularité par le haut ou par le bas. Leur différence est:

$$\epsilon(x) = f_+(x) - f_-(x) = 2i\pi \operatorname{cte} \frac{1}{\beta r} \left(\frac{r}{x}\right)^{1/\beta} e^{-(r/x)^{1/\beta}} \quad \text{où} \quad \operatorname{cte} = \operatorname{Res}_{s=r} (g(s))$$

Elle est d'ordre exponentiel $e^{-(r/x)^{1/\beta}}$.

Résumons: Pour savoir si une série asymptotique peut être resommée par la méthode de Borel, il faut chercher les pôles et singularités de sa transformée de Borel. Si il existe une singularité sur l'axe réel positif, alors la série n'est pas Borel-sommable. Les ambiguïtés de la resommation, c'est à dire les différences entre fonctions ayant le même développement asymptotique, sont des effets non perturbatifs, d'ordre exponentiel.

Remarquons encore que la méthode de Borel permet inversement de calculer les coefficients A_n à partir de la fonction $\epsilon(x)$:

$$A_n = \frac{1}{2i\pi} \int_0^\infty dx \frac{\epsilon(x)}{x^{n+1}}$$

V.3 Interprétation: instantons

V.3.1 Instantons en mécanique quantique

La mécanique quantique peut être formulée en termes d'intégrales de chemins:

$$Z = \sum_{\text{trajectoires}} e^{-iS/\hbar}$$

Dans la limite classique $\hbar \rightarrow 0$, la trajectoire qui contribue le plus est donnée par la méthode du col, c'est celle qui rend l'action extrémale (principe de moindre action de la mécanique classique).

$$Z \underset{\hbar \rightarrow 0}{\sim} e^{-iS_0/\hbar} \quad \text{où} \quad S_0 = \min S$$

On peut raffiner cette approximation classique en tenant compte des fluctuations autour de S_0 , c'est la limite semiclassique du type WKB:

$$Z \sim \frac{1}{\sqrt{S_0''}} e^{-iS_0/\hbar}$$

Cette approximation est exacte pour une action est quadratique, mais sinon on peut développer perturbativement Z en puissances de $\hbar$, en développant S en série autour de S_0 : $Z \sim \Delta_0 e^{-iS_0/\hbar}$ où Δ_0 est une série en $\hbar$.

Ce faisant on n'a tenu compte que du voisinage de S_0 , or il peut exister d'autres extréma locaux de l'action, pour lesquels on aurait pu effectuer les mêmes développements:

$$Z \sim \Delta_0 e^{-iS_0/\hbar} + \Delta_1 e^{-iS_1/\hbar} + \dots$$

et donc:

$$\ln Z \sim \frac{-iS_0}{\hbar} + \ln \Delta_0 + \ln \left(1 + e^{-i(S_1 - S_0)/\hbar} \right) + \dots$$

$$\ln Z \sim \frac{-iS_0}{\hbar} + \ln \Delta_0 + e^{-i(S_1 - S_0)/\hbar} + \dots$$

On observe que l'effet des autres extréma de l'action est exponentiel, et ne peut pas se développer en puissances de $\hbar$, c'est un effet non perturbatif.

L'interprétation de ces termes exponentiels est l'effet tunnel: on considère en effet que $S_1 - S_0$ est l'action d'une particule (appelée instanton) qui va de l'état fondamental S_0 à l'état S_1 , elle doit pour cela franchir une barrière de potentiel (puisque S_0 et S_1 sont deux minimas), et son action est imaginaire. Cette particule capable de franchir des barrières de potentiel décrit donc un effet tunnel, qui est exponentiellement petit.

Tout ceci fait le lien avec la méthode de sommation de Borel décrite au paragraphe précédent: $\ln Z$ est une série asymptotique, elle n'est pas entièrement décrite par son développement perturbatif. Les ambiguïtés de resommation sont des termes exponentiellement petits liés à un effet tunnel.

V.3.2 Instantons et modèles de matrices

On peut appliquer les mêmes considérations pour les modèles de matrices [67], où le rôle de $\hbar$ est tenu par $1/N^2$.

$$\tilde{Z} = e^Z = \int dM e^{-N \operatorname{tr} V(M)}$$

En intégrant sur les composantes angulaires de M , on peut réécrire $\tilde{Z}$ comme la fonction de partition du gaz coulombien de valeurs propres (cf part.III.2):

$$\tilde{Z} = \int \prod_{i=1}^N d\lambda_i e^{-N^2 \mathcal{E}(\Lambda)} \quad \text{avec} \quad \mathcal{E} = \frac{1}{N} \sum_i V(\lambda_i) - \frac{2}{N^2} \sum_{i < j} \ln |\lambda_i - \lambda_j| \quad (\text{V.4})$$

A l'ordre dominant, la méthode du col donne $Z \sim -N^2 \mathcal{E}_0$ où le col $\mathcal{E}_0$, est obtenu en considérant que toutes les valeurs propres λ_i sont dans leur position d'équilibre, $F_i = -\partial \mathcal{E} / \partial \lambda_i = 0$, et avec une énergie minimale. Les valeurs propres forment alors un cristal au fond du puits de potentiel V , la distance entre deux valeurs propres successive est d'ordre $1/N$.

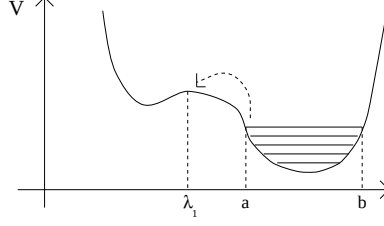
On peut essayer de raffiner l'approximation de la méthode du col en développant perturbativement Z en puissances de $1/N$ au voisinage de $\mathcal{E}_0$, c'est le développement topologique:

$$Z \sim \sum_h N^{2-2h} Z_{[h]}$$

Mais ce calcul perturbatif ne tient pas compte des autres cols et des instantons traduisant l'effet tunnel entre les différents cols.

Par exemple, on peut trouver un autre col d'énergie $\mathcal{E}_1$ en déplaçant seulement une valeur propre

et au lieu de la mettre avec les autres au fond du puits de potentiel, on la place dans un état d'équilibre instable au sommet d'une barrière de potentiel:



La différence d'énergie $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0$ est alors d'ordre $1/N$ et la contribution de l'instanton est d'ordre e^{-N} :

$$Z \sim \sum_h N^{2-2h} Z_{[h]} + e^{-N\mathcal{I}} + \dots$$

Dans la double limite d'échelle, Z ne dépend que de la variable $\kappa = N(g_c - g)^{1-\gamma/2}$ et l'on peut écrire:

$$Z \sim \sum_h \kappa^{2-2h} \zeta_h + e^{-\kappa} + \dots$$

Tout ceci explique que la série topologique est une série asymptotique, et qu'il existe des ambiguïtés non perturbatives données par les instantons. Pour savoir si cette série asymptotique est Borel-sommable, il faut calculer $\mathcal{I}$ l'action de l'instanton:

- si $\mathcal{I}$ est complexe ou négative, alors la série de perturbation $Z = \sum \kappa^{2-2h} \zeta_h$ peut être resommée sans ambiguïtés, et elle est équivalente à celle donnée par les modèles de matrices.
- si $\mathcal{I}$ est réelle positive, la série n'est pas Borel sommable, ce qui signifie que l'on ne connaît pas le lien exact entre intégrale de surfaces et intégrale de matrices autrement que ordre par ordre en perturbations.

Action de l'instanton

Au voisinage d'un point critique correspondant à la limite continue d'une théorie des cordes (p, q) , l'action de l'instanton se comporte en $(g - g_c)^{1-\gamma/2}$. Il est possible de l'écrire sous une forme universelle en remarquant que la chaleur spécifique $U(g) = \partial^2 / \partial g^2 (g^2 Z)$ se comporte en $(g - g_c)^{-\gamma}$:

$$\frac{\partial}{\partial g} g \mathcal{I} = -r \sqrt{U(g)} \quad (\text{V.5})$$

le coefficient r ne dépend alors que de p et q et pas des détails du modèle: il ne dépend pas de la valeur de g_c ni du potentiel V utilisé pour atteindre le point critique.

Les deux principales méthodes de calcul de r sont les suivantes:

- l'une est issue de la méthode du col, elle ne s'applique donc que pour le modèle à une matrice $q = 2$, et aussi pour le modèle $O(n)$. Il s'agit de trouver quels sont les cols secondaires de la méthode du col, c'est à dire trouver comment déplacer une seule valeur propre du puits de potentiel jusqu'au sommet d'une barrière de potentiel.

- l'autre méthode, est basée sur le fait que la dérivée seconde de l'énergie libre $U(g)$ satisfait dans la double limite d'échelle une équation différentielle, celle ci contient des informations non perturbatives et doit permettre en particulier de calculer r . Cette méthode ne s'applique pas au modèle $O(n)$ qui n'a pas de formalisme opératoire.

V.4 Calcul de l'action de l'instanton par la méthode du col

Je vais traiter ici le cas du modèle à une matrice, le cas du modèle $O(n)$ a constitué une part importante de mon travail de thèse et est décrit dans [75] et dans VII.1.

modèle à une matrice

Je supposerai que l'on a introduit une température T en changeant le potentiel V en V/T et je vais rappeler les principaux résultats de la partie III.2 qui avaient permis de trouver le col dominant $\mathcal{E}_0$. La fonction de partition (V.4) est celle d'un gaz formé par les N valeurs propres de M placées dans un puits de potentiel V/T , et se repoussant deux à deux avec une force coulombienne en $1/N(\lambda_i - \lambda_j)$. La force subie par la valeur propre λ_i est:

$$F_i = -N \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \lambda_i} = -V'(\lambda_i)/T + \frac{2}{N^2} \sum_{j \neq i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \quad (\text{V.6})$$

Le col $\mathcal{E}_0$ est un état d'équilibre $F_i = 0$ et dans la limite N grand il décrit une densité continue de valeurs propres $\rho(\lambda)$ avec un support fini $[a, b]$ dans le puits de potentiel. Pour calculer ρ , on a introduit la résolvante

$$\omega(z) = \frac{1}{N} \sum_i \frac{1}{z - \lambda_i} = \int_a^b \rho(\lambda) \frac{1}{z - \lambda} d\lambda$$

c'est une fonction analytique dans le plan complexe coupé le long de $[a, b]$ et qui vérifie l'équation du col $F_i = 0$:

$$0 = V'(\lambda)/T - \omega(\lambda - i0) - \omega(\lambda + i0) \quad \text{pour tout } \lambda \in [a, b]$$

La solution de cette équation est de la forme (III.20) :

$$\omega(z) = \frac{1}{2T} \left(V'(z) - M(z) \sqrt{(z-a)(z-b)} \right) \quad (\text{V.7})$$

où M est une fonction régulière sur $[a, b]$. On obtient ainsi le col $\mathcal{E}_0$ qui a l'énergie minimale.

L'instanton qui va contribuer le plus est obtenu comme un autre état d'équilibre ($F_i = 0$) dont l'énergie $\mathcal{E}_1$ est la plus proche possible de $\mathcal{E}_0$. Un tel col est obtenu en ne déplaçant qu'une seule valeur propre par rapport à l'état fondamental. Supposons que l'on déplace la valeur propre λ_1 qui se trouvait à l'extrémité a du support de ρ . Comme les autres valeurs propres ont très peu bougé, la résolvante $\omega(z)$ n'a pas changé, et l'équation du col $F_1 = 0$ s'écrit:

$$0 = -V'(\lambda_1) + 2\omega(\lambda_1) \quad \text{c'est à dire avec (V.7): } M(\lambda_1) = 0$$

L'action de l'instanton est alors:

$$\frac{1}{N}\mathcal{I} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0 = \int_a^{\lambda_1} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \lambda} d\lambda = \frac{1}{N} \int_a^{\lambda_1} (2\omega(\lambda) - V'(\lambda)/T) d\lambda$$

On peut remarquer en utilisant (III.33) qu'il est plus facile de calculer la dérivée de $\mathcal{I}$ par rapport à la température T :

$$\frac{\partial T\mathcal{I}}{\partial T} = 2 \int_a^{\lambda_1} \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda - a)(\lambda - b)}} \quad \text{où } \lambda_1 \text{ est tel que } M(\lambda_1) = 0 \quad (\text{V.8})$$

Lorsque l'on se trouve très proche d'un point critique $T \rightarrow T_c$ les valeurs propres dans l'état fondamental $\mathcal{E}_0$ sont sur le point de franchir une barrière de potentiel donc λ_1 est très proche de a . Il suffit alors de connaître $M(\lambda)$ seulement au voisinage de a , or on a vu dans la partie III.2 que la fonction $M(z)$ près du point critique $a(T) \rightarrow a_c$ et pour z proche de a prend une forme universelle:

$$M(z) = \text{cte Pol} \left[(z - a_c)^m \left(1 - \frac{a - a_c}{z - a_c} \right)^{-1/2} \right]$$

On pose $\lambda_1 = a_c + (a - a_c)(1 - x)$ et x est déterminé par l'équation polynomiale $M(\lambda_1) = 0$ qui peut s'écrire

$$0 = \sum_{k=0}^m \binom{m+1/2}{k} (-x)^{m-k}$$

Pour écrire l'action de l'instanton (V.8) sous la forme (V.5) il faut utiliser (III.35) : $U(T) \sim U_c + 2\frac{a-a_c}{b_c-a_c}$ et $\sqrt{(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - b)} \sim \sqrt{b_c - a_c} \sqrt{a - a_c} \sqrt{x}$ ce qui donne $x = r^2/8$, et r est obtenu par une équation polynomiale universelle (qui ne dépend que du degré m du point critique):

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{k!}{2^k (m-k)! (2k+1)!} r^{2k} = 0 \quad (\text{V.9})$$

On peut aussi écrire $r = 2\sqrt{2} \sin \varphi$ et

$$\sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{k} \sin(2m-2k+1)\varphi = 0$$

Par exemple pour $m = 1$ on trouve $r = 2\sqrt{3}$ ce qui montre que le modèle $(3, 2)$ est instable, il n'est pas Borel-sommable car r est réel positif.

Pour le modèle $(5, 2)$ correspondant à $m = 2$ on ne trouve que des valeurs de r complexes: $r^2 = 10 \pm 2i\sqrt{5}$.

De façon générale [65] pour $m = 2k+1$ impair l'équation (V.9) admet toujours une solution r réelle positive et les modèles $(4k+3, 2)$ sont instables, et pour m pair les modèles $(4k+5, 2)$ sont stables.

V.5 Calcul par les équations de cordes

L'autre méthode de calcul de r utilise le fait que la dérivée seconde de la fonction de partition

$$U(\tau) = \frac{\partial^2 Z}{\partial \tau^2} \quad \text{avec} \quad \tau = N^{1/(1-\gamma/2)}(g - g_c)$$

satisfait une équation différentielle non linéaire qui contient des informations non perturbatives [66, 65].

En effet, si deux fonctions U_+ et U_- obtenues par la méthode de Borel ont le même développement perturbatif, elles satisfont toutes deux l'équation des cordes. Leur différence $\epsilon(\tau) = U_+(\tau) - U_-(\tau)$ qui est exponentiellement petite dans la limite τ grand

$$\epsilon(\tau) \sim \exp \left(-r \int^\tau \sqrt{U(t)} dt \right)$$

satisfait alors l'équation différentielle linéarisée et implique une équation algébrique pour r .

Pour déterminer cette équation algébrique, il est utile de revenir à la façon dont sont obtenues les équations de cordes:

Pour un point critique de type (p, q) , on a deux opérateurs différentiels P et Q de degrés p et q

$$P = d^p - \frac{p}{2}(U d^{p-2} + d^{p-2}U) + \frac{1}{2}(U_k d^{p-2k} + d^{p-2k}U_k) + \dots$$

$$Q = d^q - \frac{q}{2}(U d^{q-2} + d^{q-2}D) + \frac{1}{2}(V_k d^{q-2k} + d^{q-2k}V_k) + \dots$$

qui satisfont la relation de commutation canonique:

$$[P, Q] = 1$$

Cette relation de commutation entraîne des équations différentielles entre les $U_k(\tau)$ et les $V_k(\tau)$ et en particulier donne l'équation des cordes pour $U(\tau)$.

L'équation pour $\epsilon(\tau)$ est obtenue en écrivant que U est $U + \epsilon$ sont toutes deux solutions. On cherche donc des opérateurs $P + \Delta P$ et $Q + \Delta Q$:

$$\begin{aligned} P + \Delta P &= d^p - \frac{p}{2} \left((u + \epsilon) d^{p-2} + d^{p-2}(U + \epsilon) \right) + \dots \\ \text{et} \quad Q + \Delta Q &= d^q - \frac{q}{2} \left((U + \epsilon) d^{q-2} + d^{q-2}(U + \epsilon) \right) + \dots \end{aligned}$$

tels que $[P + \Delta P, Q + \Delta Q] = 1$.

Au premier ordre on a donc:

$$[P, \Delta Q] + [\Delta P, Q] = 0$$

C'est cette relation de commutation linéarisée qui permet de déterminer ϵ . Elle se simplifie dans la limite classique $\tau \rightarrow \infty$ en remplaçant les commutateurs par des crochets de Poisson. En effet dans cette limite les U_k et les V_k sont d'ordre U^k et P et Q deviennent des polynômes dans la variable réduite $\delta = d/\sqrt{U}$:

$$P(U, d) \sim U^{p/2} P(\delta) \quad , \quad Q(U, d) \sim U^{q/2} Q(\delta)$$

(Remarquons que cette propriété d'homogénéité $d \sim \sqrt{U}$ permet de comprendre pourquoi $\epsilon' \sim -r\sqrt{U}\epsilon$). Compte tenu des propriétés d'hermiticité et d'homogénéité de P et Q , on cherche ΔP et ΔQ de la forme:

$$\Delta P = \epsilon R(d) + R(d)\epsilon \sim U^{p/2} (\epsilon R(\delta) + R(\delta)\epsilon)$$

$$\Delta Q = \epsilon S(d) + S(d)\epsilon \sim U^{q/2} (\epsilon S(\delta) + S(\delta)\epsilon)$$

On peut alors calculer le commutateur $[P + \Delta P, Q + \Delta Q] - [P, Q]$ en remarquant qu'à l'ordre dominant δ et U commutent ($[\delta, U] \sim U'/\sqrt{U} \sim \tau^{-1-\gamma/2} \rightarrow 0$) et le commutateur de ϵ et de δ vaut $[\delta, \epsilon] = r\epsilon$ d'où pour toute fonction $f(\delta)$: $f(\delta)\epsilon = \epsilon f(\delta - r)$. Calculons alors le commutateur $[P, \Delta Q]$:

$$\begin{aligned} [P, \Delta Q] &= U^{p+q/2} [P(\delta), \epsilon S(\delta) + S(\delta)\epsilon] = U^{p+q/2} (P\epsilon S + PS\epsilon - \epsilon SP - S\epsilon P) \\ &= U^{p+q/2} \epsilon (P(\delta - r)S(\delta) + P(\delta - r)S(\delta - r) - P(\delta)S(\delta) - P(\delta)S(\delta - r)) \end{aligned}$$

Finalement l'équation $[P, \Delta Q] + [\Delta P, Q] = 0$ devient:

$$(P(\delta - r) - P(\delta))(S(\delta - r) + S(\delta)) + (Q(\delta - r) - Q(\delta))(R(\delta - r) + R(\delta)) = 0$$

étant donné que P et Q sont des polynômes de degrés p et q , et que R et S sont au plus de degrés $p - 2$ et $q - 2$, cette identité implique que $P(\delta - r) - P(\delta)$ et $Q(\delta - r) - Q(\delta)$ ont au moins une racine commune δ_0 . On obtient donc un système de deux équations à deux inconnues:

$$P(\delta_0 - r) = P(\delta_0) \quad \text{et} \quad Q(\delta_0 - r) = Q(\delta_0) \quad (\text{V.10})$$

Ce système suffit à déterminer r à condition de connaître les polynômes P et Q .

Cas des modèles unitaires $p = q + 1$

Dans ce cas, on sait que P et Q sont des polynômes de Tchebychef (cf eq.IV.4):

$$P(\delta) = 2 \cos p\varphi \quad \text{et} \quad Q(\delta) = 2 \cos q\varphi \quad \text{avec} \quad \delta = 2 \cos \varphi$$

en posant $\delta_0 = 2 \cos \varphi_0$ et $\delta_0 - r = 2 \cos \varphi_1$. On obtient $\cos p\varphi_1 = \cos p\varphi_0$ et $\cos q\varphi_1 = \cos q\varphi_0$ ce qui implique $\varphi_0 - \varphi_1 = 2n\pi/p$ et $\varphi_0 + \varphi_1 = 2m\pi/q$ et donc:

$$r = 4 \sin(n\pi/p) \sin(m\pi/q)$$

ceci montre que les modèles unitaires sont tous instables. Ce résultat n'est pas très surprenant car on veut que dans le développement topologique, toutes les surfaces aient un poids positif. Or aux grands ordres $\zeta_h \sim r^h(2h!)$ ce qui suggère que r doit être positif.

Cas pseudo-unitaires $p = (2m + 1)q \pm 1$

Dans ce cas, Q est encore un polynôme de Tchebychef:

$$Q(\delta) = 2 \cos q\varphi$$

ce qui implique que r peut encore s'écrire sous la forme $r = 4 \sin(n\pi/q) \sin \varphi$ mais cette fois, φ est calculé avec l'expression (IV.5) :

$$f(\varphi) = \sum_{k=0}^m \binom{p/q}{k} \sin(p - 2kq)\varphi = 0$$

Pour savoir si le modèle est stable ou non, il suffit de voir si cette équation $f(\varphi) = 0$ admet une solution $\sin \varphi$ réelle positive. Or f vérifie une équation différentielle (qui provient du crochet de Poisson $\{P, Q\} = 1$):

$$pf(\varphi)(\cos q\varphi)' - qf'(\varphi)\cos q\varphi = \text{cte} \cos \varphi$$

ce qui implique lorsque $q \geq 3$ que $f(\pi/2q)$ et $f(3\pi/2q)$ sont de signes opposés et donc que f s'annule pour une valeur réelle de φ . Dans ce cas il existe toujours une valeur de r réelle positive et le modèle est nécessairement instable.

Cas $q = 2$ et $p = 2m + 1$

Dans ce cas on a $Q = \delta^2 - 2$ et P est donné par (IV.6):

$$P(\delta) = \frac{2m+1!}{(-2)^m m!} \sum_{k=0}^m \frac{k!}{(m-k)!(2k+1)!} (-2)^k \delta^{2k+1}$$

L'équation déterminant l'action de l'instanton r se réduit alors à $P(r/2) = 0$ (qui est identique à l'équation donnée par la méthode du col). Celle ci admet toujours une solution réelle positive lorsque m est impair. On en déduit que les modèles $(4k+3, 2)$ sont instables alors que les modèles $(4k+1, 2)$ sont stables [65].

Autres cas

Pour les modèles (p, q) qui n'entrent pas dans l'une des classes précédentes on ne connaît pas l'expression générale des polynômes P et Q et il faut procéder au cas par cas puis résoudre le système d'équations (V.10). Par exemple considérons le modèle $(7, 4)$:

$$P(\delta) = \delta^7 - 7\delta^5 + 14\delta^3 - 7\delta \pm 7\sqrt{2/3}(\delta^3 - 3\delta) - 7\delta$$

$$Q(\delta) = \delta^4 - 4\delta^2 + 2 \pm 4\sqrt{2/3}$$

L'équation pour r s'écrit alors en posant $r^2 = 4(2 - x)$:

$$8x^3 - 20x^2 + 6 = \pm 7\sqrt{2/3}(2x - 1)$$

et possède une solution $r > 0$

Chapter VI

Modèle $O(n)$

VI.1 Introduction

Modèle $O(n)$ sur réseau régulier

Le modèle $O(n)$ est une généralisation du modèle d'Ising, il a été très étudié et constitue un cas d'école en mécanique statistique [71], il se définit ainsi:

chaque site i du réseau porte un "spin" $\vec{S}_i$ qui est un vecteur de dimension n et de norme $|\vec{S}_i|^2 = n$, les spins voisins interagissent avec une énergie $\mathcal{E} = -\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$ qui ne dépend que de l'angle entre les deux vecteurs, donc qui est invariante par le groupe de rotations $O(n)$.

La fonction de partition de ce modèle s'écrit

$$Z_{O(n)}(\beta) = \sum_{\{\vec{S}_i\}} \prod_{\langle ij \rangle} e^{\beta \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j} \quad (\text{VI.1})$$

En fait dans toute la suite ce n'est pas ce modèle que je vais considérer mais le suivant:

$$Z(\beta) = \sum_{\{\vec{S}_i\}} \prod_{\langle ij \rangle} (1 + \beta \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j) \quad (\text{VI.2})$$

Pour le modèle d'Ising ($n = 1$) (VI.1) et (VI.2) sont équivalentes ($Z_{O(1)}(\beta) = \text{cte } Z(\tanh \beta)$) à condition de changer β en $\tanh \beta$. En effet le produit $S_i \cdot S_j$ ne peut prendre que les valeurs ± 1 et donc $e^{\beta S_i \cdot S_j} = \cosh \beta (1 + \tanh \beta S_i \cdot S_j)$.

Pour le modèle $O(n)$ général on peut effectuer une transformation analogue de la fonction de partition (VI.1) en développant l'exponentielle sur les invariants du groupe $O(n)$, la fonction de partition (VI.2) est obtenue en ne gardant que les invariants quadratiques. Cette approximation n'est toutefois pas cruciale car on peut montrer que lorsque $|n| \leq 2$ (VI.1) et (VI.2) conduisent à la même limite continue, c'est à dire que ces deux modèles appartiennent à la même classe d'universalité, ils ont les mêmes comportements critiques et exposants critiques.

Les méthodes diagrammatiques et d'autres méthodes de physique statistique comme le groupe de renormalisation ainsi que des simulations numériques permettent de trouver les comportements

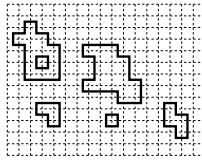
critiques du modèle $O(n)$ [72]. Celui ci possède en effet des transitions de phases du second ordre analogues à la transition de Curie du modèle d'Ising et les exposants critiques peuvent être calculés par des méthodes de théories conformes. Il existe aussi une transition particulière lorsque $n \rightarrow 2$, c'est la transition de Kosterlitz–Thoules [79]. En effet il est facile de définir la fonction de partition du modèle $O(n)$ pour des valeurs non entières de n , on s'aperçoit alors que le modèle (VI.2) ne possède des points critiques que pour $-2 \leq n \leq 2$.

Développements diagrammatiques

Le développement à haute température en puissances de β peut se représenter diagrammatiquement comme une somme sur des liens $\langle ij \rangle$ du réseau.

$$\ln Z = \beta^4 \square + \beta^6 \square + \beta^8 (\square + \square + \square + \square) + \dots$$

On peut également effectuer un développement de basse température en puissances de $e^{-\beta}$, il s'agit de perturber la configuration d'énergie minimale où tous les spins sont alignés suivant une direction $\vec{S}_0$. Ce développement peut se représenter diagrammatiquement comme une somme sur des boucles entourant les zones du réseau où les spins ne sont pas alignés avec l'état fondamental. Ces boucles sont tracées sur le réseau dual du réseau initial:



Le développement de basse température du modèle $O(n)$ peut alors être réinterprété comme la fonction de partition d'un modèle statistique d'un gaz de boucles sur un réseau.

Je vais maintenant présenter la généralisation du modèle $O(n)$ au cas d'un réseau non régulier et aléatoire, sous la forme d'un modèle de matrices. Tous les résultats du réseau régulier se généralisent et l'on va voir comment les points critiques sont affectés par les fluctuations du réseau (c'est à dire en terme de gravitation quantique par les fluctuations du champ gravitationnel) et ce que représente la transition $n = 2$. Commençons par le cas du modèle d'Ising.

VI.2 Modèle d'Ising sur surface aléatoire

Le modèle d'Ising sur surface triangulée aléatoire peut être représenté par un modèle à deux matrices [70], dont la fonction de partition est:

$$Z = \int dM_+ dM_- e^{-N \text{tr} (V_+(M_+) + V_-(M_-) - cM_+M_-)} \quad \text{avec} \quad V_{\pm}(M) = \frac{1}{2}M^2 - \frac{g_{\pm}}{3}M^3 \quad (\text{VI.3})$$

En effet, le développement perturbatif de cette intégrale en puissances des $g_{\pm}$ (cf chapitre II) peut s'interpréter comme une somme sur des diagrammes déterminés par les règles de Feynman suivantes:

Règles de Feynman

Le propagateur est l'inverse de la partie gaussienne de l'action ($\frac{1}{2}M_+^2 + \frac{1}{2}M_-^2 - cM_+M_-$). On a donc trois type de propagateurs:

$$\begin{array}{c} j \\ \text{---} \rightarrow \\ i \\ \text{---} \leftarrow \end{array} \begin{array}{c} k \\ \text{---} \\ l \end{array} = \langle M_{+i}^j M_{+k}^l \rangle_0 = \frac{1}{N} \frac{1}{1-c^2} \delta_i^l \delta_k^j$$

$$\begin{array}{c} j \\ \text{---} \rightarrow \\ i \end{array} \begin{array}{c} k \\ \leftarrow \text{---} \\ l \end{array} = \langle M_{-i}^j M_{-k}^l \rangle_0 = \frac{1}{N} \frac{1}{1 - c^2} \delta_i^l \delta_k^j$$

$$j \quad \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} \quad \begin{array}{c} k \\ l \end{array} = \langle M_{+i}^j M_{-k}^l \rangle_0 = \frac{1}{N} \frac{c}{1 - c^2} \delta_i^l \delta_k^j$$

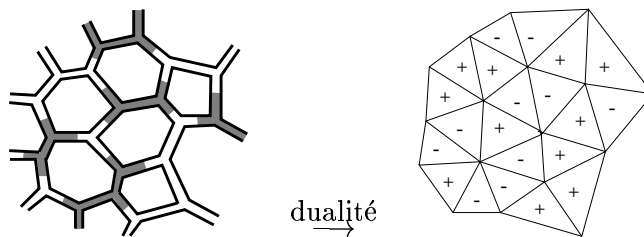
et on a deux types de vertex à trois pattes, ceux de la matrice M_+ et ceux de M_- :

$$\begin{array}{c} i \quad j \\ \diagup \quad \diagdown \\ n \quad m \quad l \quad k \end{array} = Ng_+ \delta_i^n \delta_k^j \delta_m^l, \quad \begin{array}{c} i \quad j \\ \diagup \quad \diagdown \\ n \quad m \quad l \quad k \end{array} = Ng_- \delta_i^n \delta_k^j \delta_m^l$$

Finalement, les diagrammes de Feynman obtenus en développant (VI.3) peuvent s'interpréter comme des surfaces triangulées composées de deux sortes de triangles portant un signe $+$ ou $-$, le poids de chaque diagramme étant:

$$\frac{1}{\Omega} N^\chi g_+^{n_+} g_-^{n_-} (1 - c^2)^{-n_a} c^{n_+ - n_-}$$

où Ω est le facteur de symétrie du diagramme, χ sa caractéristique d'Euler-Poincaré, $n_{\pm}$ le nombre de triangles de signe $\pm$, n_a est le nombre total d'arêtes ($2n_a = 3n_+ + 3n_-$), n_{+-} le nombre d'arêtes séparant deux triangles de signes différents:



Ce poids peut être réécrit comme celui d'un modèle d'Ising sur une surface aléatoire, pour lequel on aurait:

$$Z = \sum_{\text{surfaces}} e^{-4\pi G\chi - \Lambda \text{ aire}} \sum_{\{\sigma\}=\pm} \prod_{\langle i,j \rangle} e^{J\sigma_i\sigma_j} \prod_i e^{-h\sigma_i}$$

à condition d'identifier:

- la constante gravitationnelle G couplée à la courbure totale χ de la surface:

$$e^{-4\pi G} = N$$

- la constante cosmologique Λ couplée à l'aire ($n_+ + n_-$) de la surface:

$$e^{-2\Lambda} = g_+ g_- \sqrt{c} (1 - c^2)^{-3}$$

- le champ magnétique h couplé à l'aimantation totale $n_+ - n_-$:

$$e^{2h} = \frac{g_-}{g_+}$$

- l'énergie d'interaction magnétique entre spins, J couplée aux paires de spins voisins

$$\sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j = n_{++} + n_{--} - n_{+-} = n_a - 2n_{+-}:$$

$$e^{-2J} = c$$

Points critiques

Il existe des méthodes et des solutions exactes analogues à celles du chapitre III pour calculer l'intégrale (VI.3). La méthode du col ne peut pas s'appliquer, mais la méthode des polynômes orthogonaux se généralise sans peine et la méthode des boucles reste applicable, si ce n'est qu'elle conduit à des équations algébriques de degré 3 au lieu de 2. La méthode des polynômes orthogonaux permet d'étudier les points critiques de ce modèle. Comme on s'y attend le modèle d'Ising possède deux sortes de transitions de phase:

L'une est celle qui permet de passer à la limite continue, $\Lambda \rightarrow \Lambda_c$, cette transition est identique à celle de la gravité pure du modèle à une matrice, elle est décrite par le modèle minimal (3,2) des théories conformes. L'autre est la transition de Curie ferromagnétique du modèle d'Ising sur réseau régulier $J \rightarrow J_c$. On peut donc trouver un point doublement critique correspondant à la transition de Curie du modèle d'Ising sur une surface aléatoire continue, celui ci est décrit par le modèle minimal (3,4) des théories conformes.

Le modèle d'Ising sur surface aléatoire est donc assez bien connu [70]. Toutefois il n'est pas soluble par la méthode du col et certains résultats du modèle à une matrice possèdent une interprétation beaucoup plus simple ou ne peuvent être obtenus que dans le cadre de la méthode du col, c'est le cas du calcul des instantons ou du développement en $1/N$.

Changement de variable

Heureusement dans le cas particulier (VI.3) du modèle d'Ising, avec potentiel cubique et sans champ magnétique ($g_+ = g_-$), il est possible par un changement de variables astucieux de se ramener à un cas où la méthode du col est applicable. L'interprétation de ce changement de variable est l'analogue de la dualité entre les développements haute et basse température du modèle d'Ising sur réseau régulier. Il s'agit donc de trouver un modèle de matrices qui représente le développement de basse température du modèle d'Ising, ce qui est réalisé par le changement de variable suivant:

$$M_+ = B + A \quad , \quad M_- = B - A$$

La fonction de partition (VI.3) devient:

$$Z_{\text{Ising}} = \int dB dA e^{-N \operatorname{tr} \left(\frac{2g}{3} B^3 + (1-c)B^2 + (2gB + 1 + c)A^2 \right)} \quad (\text{VI.4})$$

Posons encore $S = 2gB + 1 + c$, il vient

$$Z_{\text{Ising}} = \int dS dA e^{-N \operatorname{tr} (U(S) + SA^2)} \quad (\text{VI.5})$$

où $U(S)$ est le potentiel

$$U(S) = \frac{1}{12g^2} \left[S^3 - 6cS^2 + 3(c+1)(3c-1)S - 2(c+1)^2(2c-1) \right] \quad (\text{VI.6})$$

L'intérêt de ce changement de variable est qu'il est maintenant facile d'intégrer sur la matrice A puisque celle ci n'apparaît plus que de façon quadratique. Il reste alors une intégrale à une seule matrice S . Cette intégrale ne ressemble pas à celle du modèle à une matrice habituel, mais peut être étudiée par la méthode du col ou la méthode des boucles.

Plutôt que résoudre le modèle d'Ising, on va résoudre un modèle beaucoup plus général: le modèle $O(n)$ [72].

VI.3 Généralisation au modèle $O(n)$

On vient de voir que le modèle d'Ising peut s'écrire comme une intégrale à deux matrices où l'une des deux est gaussienne. Les méthodes de calcul d'une telle intégrale, ne dépendent en fait pas du potentiel $U(S)$ et peuvent se généraliser au cas où l'on a n matrices gaussiennes. On considèrera donc une intégrale de matrice plus générale que (VI.5), avec $n+1$ matrices et un potentiel polynomial quelconque:

$$Z = \int dM dA_1 \dots dA_n e^{-N \operatorname{tr} (V(M) + M(A_1^2 + \dots + A_n^2))} \quad (\text{VI.7})$$

Cette intégrale présente une symétrie $O(n)$ évidente: l'intégrand ne dépend en effet que de la norme du vecteur $\vec{A} = (A_1, \dots, A_n)$:

$$Z = \int dM d\vec{A} e^{-N \operatorname{tr} (V(M) + M(|\vec{A}|^2))} \quad (\text{VI.8})$$

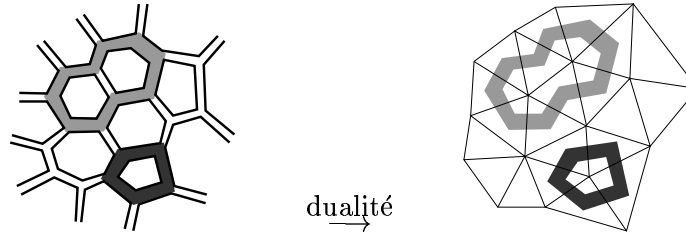
VI.3.1 Gaz de boucles sur réseau aléatoire

On peut développer diagrammatiquement l'intégrale (VI.7) comme pour le modèle à une matrice et l'interpréter comme une somme sur des surfaces aléatoires discrétisées. Cherchons donc les règles de Feynman. Pour cela, il faut effectuer une translation $M \rightarrow M + m_0/2$ de façon à annuler le

terme linéaire en M dans le potentiel (le développement perturbatif consiste en effet à développer autour d'un extrémum quadratique). Il apparaîtra donc un propagateur pour les matrices A_p . Voici les règles de Feynman:

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} j \\ \text{---} \rightarrow \\ i \\ \text{---} \leftarrow \end{array} \begin{array}{c} k \\ \text{---} \rightarrow \\ l \\ \text{---} \leftarrow \end{array} = \langle M_i^j M_k^l \rangle_0 = \frac{1}{N} \delta_i^l \delta_k^j \\
 & \begin{array}{c} j \\ \text{---} \rightarrow \\ i \\ \text{---} \leftarrow \end{array} \text{---} \begin{array}{c} k \\ \text{---} \rightarrow \\ l \\ \text{---} \leftarrow \end{array} = \langle A_{pi}^j A_{ql}^l \rangle_0 = \frac{m_0}{N} \delta_{pq} \delta_i^l \delta_k^j \\
 & \begin{array}{c} i \\ \downarrow \\ \text{---} \\ \uparrow \\ p \end{array} \begin{array}{c} j \\ \downarrow \\ \text{---} \\ \uparrow \\ m \end{array} \begin{array}{c} k \\ \downarrow \\ \text{---} \\ \uparrow \\ q \end{array} \begin{array}{c} l \\ \downarrow \\ \text{---} \\ \uparrow \\ i \end{array} = N \delta_{pq} \delta_i^n \delta_k^j \delta_m^l \\
 & \begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \\ \text{---} \leftarrow \\ \text{---} \rightarrow \\ \text{---} \leftarrow \end{array} = N g_3 \qquad \begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \\ \text{---} \leftarrow \\ \text{---} \rightarrow \\ \text{---} \leftarrow \end{array} = N g_4 \qquad \text{etc...}
 \end{aligned}$$

En assemblant ces vertex et propagateurs on construit des surfaces sur lesquelles sont tracées des boucles fermées sans intersections et de n couleurs possibles:



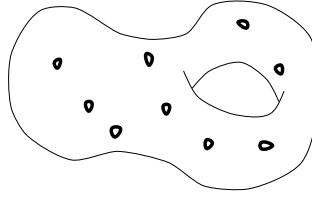
Le poids de chaque surface discrétisée est le même que celui du modèle à une matrice $\frac{1}{\Omega} N^\chi \prod_k g_k^{n_k} m_0^L$ avec en plus le terme m_0^L où L est la somme des longueurs de toutes les boucles. Remarquons que l'on pourrait effectuer la sommation sur les n couleurs possibles en ajoutant un facteur n^{n_l} où n_l est le nombre de boucles tracées sur la surface. Ceci suggère comme on va le voir plus loin, que l'on peut tracer des boucles d'une seule couleur, n étant un paramètre (qui n'a pas besoin d'être entier) couplé au nombre de boucles, c'est la fugacité des boucles.

Limite continue

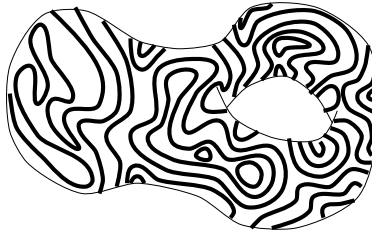
Comme pour le modèle à une matrice, le passage à la limite continue exige que l'on soit près d'un point critique et que $N \rightarrow \infty$. En particulier si l'on veut garder des contributions de surfaces de toutes topologies il faudra utiliser une double limite d'échelle.

Il va exister plusieurs types de limites continues associées à plusieurs types de points critiques [73, 75]:

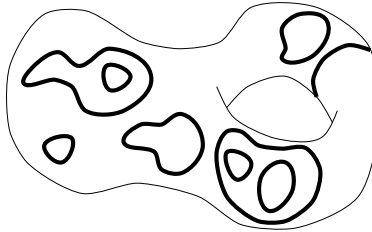
- les points critiques du type gravité pure décrits par les modèles minimaux $(p, 2)$. Dans ce cas seul le nombre de polygones diverge, les boucles restent de longueur finie, c'est à dire microscopique. A la limite continue les surfaces que l'on obtient ainsi ne diffèrent pas vraiment de celles du modèle à une matrice:



- le point critique du type ferromagnétique comme dans le modèle d'Ising. On verra que ce point critique est décrit par le modèle minimal $(q - l, q)$ où l et q sont reliés à n par $0 < l < q$ et $n = 2 \cos(\pi l/q)$. Dans ce cas seule la longueur des boucles diverge, le nombre de polygones reste fini et à la limite continue les boucles remplissent la surface de façon dense:



- le cas le plus intéressant est obtenu comme l'interpolation des deux précédents, à la limite continue il donne des surfaces possédant à la fois un nombre macroscopique de polygones et des boucles de longueur macroscopique:



Ces points critiques correspondent aux modèles minimaux (p, q) avec $n = -2 \cos(\pi p/q)$ (on a donc $p = (2m + 1)q \pm l$).

On constate donc comme prévu que les points critiques du modèle $O(n)$ sont obtenus pour des valeurs de n comprises entre -2 et 2 , on a en effet évoqué la possibilité que n ne soit pas un entier, voyons quelle est la dépendance en n de la fonction de partition.

VI.3.2 Dépendance en n

Il est facile d'isoler la dépendance en n dans (VI.7) , on a:

$$Z = \int dM I(M)^n e^{-N \text{tr} V(M)} \quad \text{avec} \quad I(M) = \int dA e^{-N \text{tr} M A^2} \quad (\text{VI.9})$$

Avec cette écriture Z est analytique en n et il n'est plus nécessaire que n soit un entier. Le cas le plus intéressant (qui donne des points critiques permettant de passer à la limite des surfaces continues) correspond à $-2 \leq n \leq 2$. On pose alors:

$$n = -2 \cos \theta \quad (\text{VI.10})$$

Il sera utile dans un premier temps de ne pas préciser la détermination de θ , on la choisira d'une façon plus pratique lors de l'étude des points critiques. On pose cependant

$$n = 2 \cos \nu \pi \quad \text{avec} \quad 0 \leq \nu \leq 1$$

et l'on suppose θ de la forme $(2m + 1 \pm \nu)\pi$. m est un entier pour l'instant quelconque, mais que l'on va relier au degré du potentiel critique.

On s'attachera particulièrement au cas où θ est un angle rationnel:

$$\theta = \frac{p}{q}\pi$$

La notation (p, q) correspond alors à la classification des points critiques des modèles minimaux des théories conformes. On posera également dans ce cas $\nu = l/q$ avec $0 < l < q$.

exemples:

- Le modèle à une matrice habituel correspond à $n = 0$, c'est à dire $l = 1$ et $q = 2$.
- Le modèle d'Ising correspond à $n = 1$ c'est à dire $l = 1$ et $q = 3$.
- Les cas $n = 2$ correspond à la théorie des cordes en dimension $c = 1$, il décrit la transition de Kosterlitz–Thouless.

Intégration sur la partie gaussienne $I(M)$

Il faut maintenant calculer l'intégrale gaussienne dans (VI.9) :

$$I(M) = \int dA e^{-N \operatorname{tr} M A^2}$$

Elle est invariante par les transformations unitaires $M \rightarrow U M U^\dagger$, ce qui signifie qu'elle ne dépend que des valeurs propres de M . On peut ainsi se placer dans le cas où M est diagonale: $M = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$.

$$\begin{aligned} I(M) &= \int \prod_i dA_{ii} \prod_{i < j} d \operatorname{Re} A_{ij} d \operatorname{Im} A_{ij} e^{-N \sum_{i,j} \lambda_i |A_{ij}|^2} \\ I(M) &= \int \prod_i dA_{ii} \prod_{i < j} d \operatorname{Re} A_{ij} d \operatorname{Im} A_{ij} e^{-N \sum_i \lambda_i A_{ii}^2} e^{-N \sum_{i < j} (\lambda_i + \lambda_j) |A_{ij}|^2} \\ I(M) &= \left(\pi^{N^2} \prod_i \frac{1}{\lambda_i} \prod_{i < j} \frac{1}{(\lambda_i + \lambda_j)^2} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\text{donc} \quad I(M) = \pi^{N^2/2} 2^N \prod_{i,j} \left(\frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} \right)^{1/2} \quad (\text{VI.11})$$

Lorsque M n'est pas diagonale, ce résultat peut être présenté d'une façon plus intrinsèque en utilisant des notations tensorielles:

$$I(M) = \pi^{N^2/2} 2^N (\det(1 \otimes M + M \otimes 1))^{-1/2} \quad (\text{VI.12})$$

Finalement la fonction de partition (VI.9) du modèle $O(n)$ s'écrit comme une intégrale à une seule matrice M :

$$Z = \int dM e^{-N \operatorname{tr} V(M)} (\det(1 \otimes M + M \otimes 1))^{-n/2} \quad (\text{VI.13})$$

On va maintenant tenter d'appliquer les méthodes du chapitre III de résolution des modèles de matrices. La première chose à faire est de se ramener à une intégrale sur les valeurs propres de M seulement, ce qui est possible puisque l'intégrand de (VI.13) est invariant par les transformations unitaires.

VI.3.3 Valeurs propres

Comme d'habitude, on passe aux variables diagonales et unitaires dans (VI.13) par la transformation

$$M = U \Lambda U^\dagger \quad \text{où} \quad \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \quad \text{et} \quad U U^\dagger = 1$$

Z se réécrit alors à l'aide de (VI.11) :

$$Z = \left(\int dU \right) \int \prod_i d\lambda_i e^{-N V(\lambda_i)} \prod_{i,j} (\lambda_i + \lambda_j)^{-n/2} \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \quad (\text{VI.14})$$

Le dernier terme est le jacobien du changement de variables et l'intégrale sur U est un facteur constant indépendant du potentiel V . L'intégrand représente alors la loi de probabilité conjointe que $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ soient les N valeurs propres de M :

$$R_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \frac{1}{Z} \prod_i e^{-N V(\lambda_i)} \prod_{i,j} (\lambda_i + \lambda_j)^{-n/2} \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \quad (\text{VI.15})$$

Contrairement aux modèles vus précédemment, le couplage entre les valeurs propres ne dépend pas que de leur différence $(\lambda_i - \lambda_j)$. Ceci empêche l'application de la méthode des polynômes orthogonaux. En revanche l'intégrand est positif et donc rien ne s'oppose à l'application de la méthode du col.

VI.4 Méthode du col

La méthode du col permet de calculer la fonction de partition (VI.14) dans la limite $N \rightarrow \infty$ en supposant que seule contribue la configuration rendant l'intégrand extrémal. On peut en avoir une

vision intuitive en considérant que (VI.14) représente un modèle de physique statistique d'un gaz de N particules à une dimension dont la probabilité est un poids de Boltzmann

$$R_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = e^{-N\mathcal{E}(\lambda_i)}$$

avec l'énergie

$$\mathcal{E} = \sum_i V(\lambda_i) - \frac{1}{N} \sum_{i \neq j} \ln |\lambda_i - \lambda_j| + \frac{n}{2N} \sum_{i,j} \ln (\lambda_i + \lambda_j)$$

Les N particules sont plongées dans un potentiel extérieur $V(\lambda)$, elles se repoussent deux à deux avec une force en $1/(\lambda_i - \lambda_j)$, et subissent également une force à deux corps $n/2(\lambda_i + \lambda_j)$. On peut imaginer cette dernière comme une force qui attire (ou repousse suivant le signe de n) les particules vers leurs images dans un miroir situé à l'origine.

La force totale ressentie par la particule λ_i est:

$$F_i = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \lambda_i} = -V'(\lambda_i) + \frac{2}{N} \sum_{j \neq i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} - \frac{n}{N} \sum_j \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} \quad (\text{VI.16})$$

La méthode du col consiste à dire que la configuration la plus probable est la configuration d'équilibre $F_i = 0$.

Limite de la distribution continue

Dans la limite $N \rightarrow \infty$, les N particules forment un gaz avec une densité continue $\rho(\lambda)$:

$$N\rho(\lambda)d\lambda = \text{nbre de particules dans l'intervalle } [\lambda, \lambda + d\lambda]$$

La somme $\sum_j$ peut alors être remplacée par une intégrale $N \int \rho(l)d\lambda$ et la somme sur $j \neq i$ par la partie principale d'une intégrale. L'équation d'équilibre du gaz $F_i = 0$ s'écrit alors:

$$V'(\lambda) = 2 \text{PP} \int_a^b \rho(\mu)d\mu \frac{1}{\lambda - \mu} - n \int_a^b \rho(\mu)d\mu \frac{1}{\lambda + \mu} \quad (\text{VI.17})$$

La résolvante $\omega(z)$

Comme pour le modèle à une matrice cette équation se simplifie si l'on introduit la résolvante:

$$\omega(z) = \frac{1}{N} \left\langle \text{tr} \frac{1}{z - M} \right\rangle = \frac{1}{N} \left\langle \sum_i \frac{1}{z - \lambda_i} \right\rangle \stackrel{N \rightarrow \infty}{=} \int_a^b \rho(\mu)d\mu \frac{1}{z - \mu} \quad (\text{VI.18})$$

C'est une fonction analytique sauf lorsque $z \in [a, b]$, elle possède une coupure le long de ce segment et suivant que l'on s'approche de $[a, b]$ par le demi plan complexe supérieur ou inférieur elle vaut:

$$\omega(\lambda \pm i0) = \mp i\pi\rho(\lambda) + \text{PP} \int_a^b \rho(\mu)d\mu \frac{1}{\lambda - \mu} \quad (\text{VI.19})$$

L'équation du col (VI.17) peut alors s'écrire:

$$\left\{ \begin{array}{l} V'(\lambda) = \omega(\lambda + i0) + \omega(\lambda - i0) + n\omega(-\lambda) \quad \text{pour } \lambda \in [a, b] \\ \text{avec la condition aux limites } \omega(z) \sim 1/z \quad \text{quand } z \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (\text{VI.20})$$

C'est l'équation fondamentale qui permet de résoudre le modèle $O(n)$.

Remarquons que cette équation est linéaire en ω et en V .

VI.4.1 Résolution de l'équation du col

Pour résoudre une équation linéaire avec second membre, il suffit de trouver une solution particulière, et d'ajouter la solution générale de l'équation homogène:

$$\omega(z) = \omega_r(z) - \omega_s(z)$$

Où ω_r est la solution particulière polynomiale:

$$\omega_r(\lambda) = \frac{2V'(\lambda) - nV'(-\lambda)}{4 - n^2} \quad (\text{VI.21})$$

Cette fonction ne possède pas de coupure le long de $[a, b]$, c'est pourquoi on l'appellera partie régulière de $\omega(z)$. La partie singulière $\omega_s(z)$ satisfait l'équation homogène:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_s(\lambda + i0) + \omega_s(\lambda - i0) + n\omega_s(-\lambda) = 0 \\ \text{avec la condition aux limites } \omega_s(z) = \omega_r(z) - 1/z + O(1/z^2) \end{array} \right. \quad (\text{VI.22})$$

Changement de fonction $\omega \rightarrow \omega_{\pm}$

Pour résoudre l'équation homogène, il est commode de supposer que $n = 2 \cos \nu\pi$, et d'introduire des fonctions ω_{s+} et ω_{s-} définies par:

$$\omega_{s\pm}(z) = \frac{e^{\pm i\nu\pi/2} \omega(z) + e^{\mp i\nu\pi/2} \omega(-z)}{2 \sin \nu\pi} \quad (\text{VI.23})$$

On a inversement

$$\omega_s(z) = -i \left(e^{i\nu\pi/2} \omega_{s+}(z) - e^{-i\nu\pi/2} \omega_{s-}(z) \right) \quad \text{et} \quad \omega_{s-}(z) = \omega_{s+}(-z) \quad (\text{VI.24})$$

On définira de même des fonctions $\omega_{\pm}$ et $\omega_{r\pm}$ obtenues en effectuant cette même rotation sur les fonctions $\omega(z)$ et $\omega_r(z)$. En fait on appliquera cette transformation pour toutes les fonctions satisfaisant une équation de la forme (VI.22) .

Réécriture de l'équation du col pour les $\omega_{s\pm}$

L'équation homogène (VI.22) devient:

$$\begin{cases} \omega_{s+}(\lambda - i0) &= -e^{i\nu\pi} \omega_{s-}(\lambda + i0) \\ \omega_{s-}(\lambda - i0) &= -e^{-i\nu\pi} \omega_{s+}(\lambda + i0) \end{cases} \quad (\text{VI.25})$$

Il y a plusieurs façons de résoudre ce système.

On peut par exemple observer que la fonction $R(z) = \omega_{s+}(z)\omega_{s-}(z)$ est paire et ne possède pas de coupure le long de $[a, b]$ puisque $R(\lambda + i0) = R(\lambda - i0)$. De plus elle se comporte à l'infini comme $\omega_{r+}(z)\omega_{r-}(z)$ ce qui implique que $R(z)$ est un polynôme dont le degré est double de celui de V' .

VI.4.2 Cas rationnel $\theta = \frac{p}{q}\pi$

Dans le cas d'un angle $\theta = (p/q)\pi$ rationnel, on peut trouver une autre fonction qui n'a pas de coupure: considérons

$$S(z) = \frac{1}{2} [(\omega_{s+}(z))^q + (-1)^p (\omega_{s-}(z))^q]$$

On a $S(\lambda - i0) = S(\lambda + i0)$ donc $S(z)$ est une fonction entière et grâce à la condition aux limites c'est un polynôme dont le degré est q fois celui de V' . Il reste alors à résoudre une équation du second degré pour exprimer $\omega_{s\pm}$ en fonction des polynômes R et S :

$$\begin{aligned} \omega_{s+}(z) &= \left(S(z) + \sqrt{S^2 - (-1)^p R^q} \right)^{1/q} \\ \omega_{s-}(z) &= (-1)^p \left(S(z) - \sqrt{S^2 - (-1)^p R^q} \right)^{1/q} \end{aligned}$$

Il faut ensuite utiliser les conditions aux limites pour déterminer les coefficients des polynômes R et S . Par exemple si l'on cherche une résolvante $\omega(z)$ qui n'ait qu'une seule coupure $[a, b]$ dans le plan complexe il faut imposer que le discriminant $S^2 - (-1)^p R^q$ n'ait que a et b comme racines simples, les autres doivent être des racines doubles. On obtient ainsi autant d'équations que d'inconnues et l'on peut en principe calculer explicitement $\omega(z)$ en fonction du potentiel $V(z)$.

Hélas, excepté pour les plus bas degrés et pour q petit, ce calcul est très fastidieux. Il existe heureusement une façon beaucoup plus agréable de procéder. On va chercher une solution "élémentaire" $W(z)$ de l'équation (VI.22) et exprimer $\omega_s(z)$ linéairement en fonction de W .

VI.4.3 La fonction élémentaire $W(z)$

Considérons une fonction $W(z)$ obéissant à l'équation homogène

$$W(\lambda + i0) + W(\lambda - i0) + nW(-\lambda) = 0. \quad (\text{VI.26})$$

On peut définir (cf (VI.24)) les fonctions $W_{\pm}(z)$ qui satisfont

$$\begin{aligned} W_+(\lambda - i0) &= -e^{i\nu\pi} W_-(\lambda + i0) \\ W_-(\lambda - i0) &= -e^{-i\nu\pi} W_+(\lambda + i0) \end{aligned} \quad (\text{VI.27})$$

Les fonctions $f_{\pm}(z) = \omega_{s\pm}(z)/W_{\pm}(z)$ satisfont alors:

$$\begin{aligned} f_+(\lambda - i0) &= f_-(\lambda + i0) \\ f_-(\lambda - i0) &= f_+(\lambda + i0) \end{aligned} \quad \text{et} \quad f_-(z) = f_+(-z)$$

On s'est en fait ramené au cas $\theta = 0$. La fonction $f_+ + f_-$ est régulière dans tout le plan complexe, et la fonction $f_+ - f_-$ change de signe chaque fois que l'on franchi la coupure. La solution est donc de la forme:

$$f_+(z) = A(z^2) + z\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}B(z^2)$$

où A et B sont des fonctions entières n'ayant pas de coupure le long de $[a, b]$. La fonction $\omega_{s+}(z)$ s'écrit donc

$$\omega_{s+}(z) = W_+(z) \left(A(z^2) + z\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}B(z^2) \right) \quad (\text{VI.28})$$

Il suffit maintenant de choisir une fonction $W(z)$ assez simple pour que le calcul de A et B soit facile. La fonction que l'on va considérer est définie de la façon suivante:

1. $W(z)$ est solution de l'équation homogène (VI.26) ,
2. $W(z)$ se comporte en $((z - a)(z - b))^{-1/2}$ au voisinage de a et b ,
3. $W(z)$ se comporte en $2 \cos(\nu\pi/2)(1/z)$ lorsque $z \rightarrow \infty$, de sorte que $W_{\pm}(z) \sim \pm i/z$.
4. $W(z)$ est analytique partout ailleurs.

Tout ceci détermine une unique fonction $W(z)$. Etudions certaines de ses propriétés: La fonction $R(z) = W_+(z)W_-(z)$ n'a pas de coupure, elle est paire, elle se comporte en $1/z^2$ à l'infini, et ne peut avoir que des pôles simples en $a, b, -a, -b$. Elle vaut nécessairement

$$W_+(z)W_-(z) = \frac{z^2 - e^2}{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)} \quad (\text{VI.29})$$

On supposera désormais que $+e$ est la racine de W_+ et $-e$ celle de W_- .

Exemples

- dans le cas $n = 0$ c'est à dire $q = 2$, on trouve que:

$$W(z) = \frac{1}{\sqrt{2(z - a)(z - b)}} \quad \text{et} \quad e = i\sqrt{ab}$$

- Dans le cas $n = 1$ c'est à dire $q = 3$, on trouve

$$W_+(z) = \frac{i}{\sqrt{z}} \left[z(z^2 - e^2) - \frac{2e\sqrt{e}}{e^2 - a^2b^2/e^2} \left(\sqrt{z} - \frac{z}{e}\sqrt{e} \right) \right]^{1/3}$$

$$e^2 = \epsilon ab \quad , \quad \epsilon^4 - 6\epsilon^2 + 4\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\epsilon - 3 = 0$$

(J'ai noté $\sqrt{z}$ à la place de $\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}$ pour alléger l'écriture).

- Dans les cas où θ est rationnel, $W(z)$ est une fonction algébrique de degré $1/q$. Dans le cas général, on peut exprimer W_+ à l'aide d'intégrales elliptiques:

$$\ln \left(\frac{\sqrt{z} W_+(z)}{\sqrt{z^2 - e^2}} \right) = \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{x}} \left(\frac{e\sqrt{e}}{x^2 - e^2} + \alpha \right) \quad (\text{VI.30})$$

où α et e sont déterminés par des conditions aux limites:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} \left(\frac{e\sqrt{e}}{x^2 - e^2} + \alpha \right) = \frac{i\pi}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}} \left(\frac{e\sqrt{e}}{x^2 - e^2} + \alpha \right) = \frac{i\nu\pi}{2}$$

ω_s en fonction de W

On a donc défini une fonction $W(z)$ qui ne dépend que de a et b , et pas du potentiel $V(z)$. On peut à partir de là trouver une expression de $\omega_s(z)$. On sait que ω_s peut se mettre sous la forme (VI.28)

$$\omega_{s+}(z) = W_+(z) \left(A(z^2) + z\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)} B(z^2) \right)$$

où A et B sont des fonctions régulières, c'est à dire sans coupure le long de $[a, b]$. Par contre ce ne sont pas nécessairement des fonctions entières, elles peuvent avoir un pôle en $z = e$ puisque $W_+(e) = 0$. De plus comme $W_+(z)$ diverge en $z = a$ ou $z = b$ et comme ω_{s+} n'a pas de raison de diverger il faut que A s'annule en a^2 et b^2 . On va donc redéfinir les fonctions A et B de la façon suivante:

$$\omega_{s+}(z) = W_+(z) \sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)} \frac{1}{z^2 - e^2} \left(A(z^2) \sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)} + zB(z^2) \right)$$

où cette fois, les fonctions A et B sont entières, et compte tenu de la condition aux limites $\omega_s \sim \omega_r$ quand $z \rightarrow \infty$, ce sont nécessairement des polynômes. On peut encore remarquer que $\omega_{s+}(z)$ ne doit pas diverger en $z = -e$, donc le numérateur doit s'annuler. L'écriture la plus commode de la solution est en fin de compte:

$$\omega_{s+}(z) = W_+(z) \sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)} \left(\mathcal{A}(z^2) g_+(z) + z\mathcal{B}(z^2) \right) \quad (\text{VI.31})$$

$$\text{avec} \quad g_{\pm}(z) = \frac{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)} \pm (z/e)\sqrt{(e^2 - a^2)(e^2 - b^2)}}{z^2 - e^2} \quad (\text{VI.32})$$

Pour calculer les polynômes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ il faut utiliser la condition aux limites $\omega_s(z) \sim \omega_r(z) - \frac{1}{z}$. Partant de

$$\mathcal{A}(z^2) = \frac{1}{2} (W_-(z) \omega_{s+}(z) + W_+(z) \omega_{s-}(z))$$

On obtient:

$$\mathcal{A}(z^2) = \frac{1}{2} \text{Pol} (W_-(z) \omega_{r+}(z) + W_+(z) \omega_{r-}(z)) \quad (\text{VI.33})$$

De même $\mathcal{B}$ est donné par:

$$z\mathcal{B}(z^2) = \frac{1}{2} \text{Pol} (W_-(z) g_-(z) \omega_{r+}(z) - W_+(z) g_+(z) \omega_{r-}(z)) \quad (\text{VI.34})$$

Les parties polynomiales peuvent être exprimées à l'aide d'intégrales de contour et finalement on trouve:

$$\omega_+(z) = \frac{1}{2 \sin \nu \pi} \sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)} W_+(z) \frac{1}{2i\pi} \oint d\zeta V'(\zeta) W_+(\zeta) e^{-i\nu\pi/2} \frac{zg_+(\zeta) - \zeta g_+(z)}{z^2 - \zeta^2} \quad (\text{VI.35})$$

Le contour d'intégration entoure la coupure $[a, b]$ dans le sens indirect. Cette expression est à rapprocher de celle obtenue pour le modèle à une matrice (III.22). On a donc exprimé $\omega(z)$ en fonction du potentiel $V(z)$.

a et b en fonction de V

Tout le calcul précédent se passait à a et b fixés. En fait a et b dépendent aussi du potentiel $V(z)$. Cette dépendance peut être explicitée en imposant que la solution (VI.35) soit compatible avec la condition aux limites $\omega(z) \sim 1/z$ quand $z \rightarrow \infty$. On en déduit deux équations:

$$\frac{1}{2i\pi} \oint d\zeta V'(\zeta) g_+(\zeta) W_+(\zeta) e^{-i\nu\pi/2} = 0 \quad (\text{VI.36})$$

$$\frac{1}{2i\pi} \oint d\zeta \zeta V'(\zeta) W_+(\zeta) e^{-i\nu\pi/2} = -2 \sin \nu \pi / 2 \quad (\text{VI.37})$$

Ces deux équations déterminent de façon implicite les bords de la coupure.

Conclusion: on a complètement généralisé la solution par la méthode du col du modèle à une matrice de la partie III.2. On peut donc comme pour le modèle à une matrice étudier les points critiques et par exemple calculer des instantons.

VI.5 Points critiques

En général la résolvante $\omega(z)$ se comporte au voisinage du bord de la coupure comme:

$$\omega(z) \sim \omega(a) + (z - a)^{1/2}$$

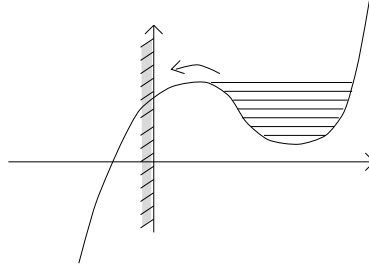
Pour certains potentiels exceptionnels la singularité n'est plus une racine carrée mais une loi de puissance avec un exposant μ . C'est ainsi que l'on peut définir les points critiques. La façon intuitive de visualiser ces points critiques en terme d'un gaz de particules est assez semblable au cas du modèle à une matrice, cependant il convient de distinguer deux types de points critiques:

- Les points critiques habituels:

Ceux ci correspondent au cas où les valeurs propres commencent à déborder du puits de potentiel et il n'existe plus de position d'équilibre stable du gaz. Cela se traduit dans l'expression

(VI.31) en écrivant que a^2 est une racine multiple de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. On conçoit alors que l'exposant μ sera toujours de la forme $\mu = m + 1/2$. Ces points critiques ne diffèrent en rien de ceux du modèle à une matrice habituel.

En termes de surfaces aléatoires ces points critiques décrivent la gravité pure.

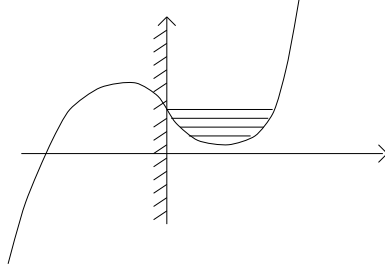


- Les points critiques $a = 0$

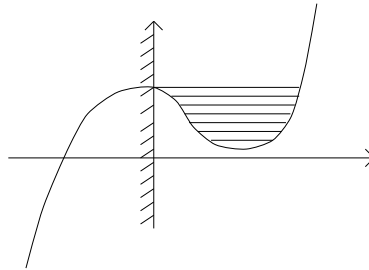
Lorsque $a \rightarrow 0$ la force d'interaction entre les particules et leur image miroir diverge ce qui affecte fortement la forme de la distribution $\rho(\lambda)$ au voisinage de 0. Ces points critiques n'existent pas dans le modèle à une matrice et ils peuvent donner des exposants μ plus compliqués. On montrera que les seules valeurs de μ possibles sont reliées à n par $n = -2 \cos \mu\pi$.

Mathématiquement l'existence de tels points critiques se voit dans l'expression (VI.31), le comportement singulier vient cette fois du terme $W_+(z)$ et non des polynômes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, c'est pourquoi ce point critique n'est relié qu'à la position de a par rapport à zéro et pas au potentiel $V(z)$.

En termes de surfaces aléatoires ces points critiques décrivent la transition ferromagnétique et la phase où les boucles couvrent la surface de façon dense.



- Des points critiques d'ordre supérieurs sont obtenus en panachant les deux cas précédents: on doit avoir simultanément $a \rightarrow 0$ et $V \rightarrow V_c$. Ce sont ces points critiques qui décrivent des surfaces continues avec des boucles macroscopiques. Dans toute la suite on se placera dans ce cas.



Exposants critiques μ, γ_{str} :

A partir d'ici, pour étudier les points critiques il est utile d'introduire une température T en remplaçant le potentiel $V(z)$ par $V(z)/T$. On va chercher le comportement critique du modèle de matrice en fonction de T lorsque $T \rightarrow T_c$. Les exposants critiques auxquels on s'intéresse sont les suivants:

- l'exposant μ calculé comme la singularité de la densité de valeurs propres au bord de la coupure à $T = T_c$:

$$\text{Im } \omega(z) \sim z^\mu$$

- la susceptibilité de corde γ calculée à partir de la dérivée seconde de l'énergie libre :

$$F \sim F_c + (1 - T/T_c)^{2-\gamma}$$

- pour calculer γ il est en fait plus commode de calculer l'énergie libre F en fonction de a , on a donc besoin de l'exposant α donné par:

$$1 - T/T_c \sim a^{2\alpha}$$

On peut calculer explicitement ces exposants critiques par la méthode du col, c'est ce que je ferai en détails dans le paragraphe suivant mais pour l'instant voici une idée de la méthode et les résultats: il faut commencer par calculer la résolvante $\omega_c(z)$ au point critique $T = T_c$ en imposant $a = 0$, ce qui donne l'exposant μ , puis faire varier T au voisinage de T_c en calculant la variation de la résolvante

$$\omega(z) = \omega_c(z) + \delta\omega(z), \quad (\text{VI.38})$$

ce qui donne l'exposant α . Pour cela on peut remarquer que :

$$2 \cos(\nu\pi/2) \frac{\partial (T\omega(z))}{\partial T} = W(z) \quad (\text{VI.39})$$

(cette relation se démontre en vérifiant que le membre de gauche satisfait l'équation linéaire et les conditions aux limites qui définissent W). La variation (VI.38) devient pour $z = a$:

$$0 = \text{Im } \omega(a) \sim a^\mu + \delta T a^{\nu-1}$$

On en déduit que l'exposant α vaut $(\mu + 1 - \nu)/2$.

Ensuite pour calculer γ on utilise l'identité qui relie la dérivée troisième de l'énergie libre par rapport à la température aux bords de la coupure (cette identité généralise (III.35) , je ne la démontrerai pas ici car le calcul est long et peu utile):

$$(T^2 F)''' = (1 - n/2) \frac{1}{b^2 - a^2} \left(\frac{a^{2'}}{a^2} (e^2 - a^2) - \frac{b^{2'}}{b^2} (e^2 - b^2) \right) \quad (\text{VI.40})$$

Dans la limite $T \rightarrow T_c$ on a $b \rightarrow \text{cte}$, $a \rightarrow 0$ et $e \sim a^\nu$, il reste à l'ordre dominant:

$$(T^2 F)''' \sim a^{2\nu-2} a^{2'}$$

c'est à dire:

$$(T^2 F)'' \sim a^{2\nu}$$

d'où l'on déduit: $\gamma_{\text{str}} = -\nu/\alpha = -2\nu/(\mu + 1 - \nu)$.

Cas rationnel: modèle $O(n)$ et modèles minimaux

Considérons le cas où $\mu = p/q$ est rationnel, on verra plus loin que p et q ne sont pas quelconques, ils sont reliés à ν par $p = (2m+1)q \pm l$ où l'on a posé $\nu = l/q$ avec $0 < l < q$.

La susceptibilité de corde vaut alors:

$$\gamma_{\text{str}} = \frac{-2l}{p+q-l}$$

Cette expression ressemble à la susceptibilité de corde (I.12) du modèle minimal (p, q) des théories conformes $\gamma = -2|p-q|/(p+q-|p-q|)$ au moins dans le cas $m=0$. Ceci suggère que le modèle $O(n)$ est décrit par un modèle minimal (p, q) avec $n = -2 \cos(\pi p/q)$ mais il ne contient qu'un sous ensemble des opérateurs du modèle (p, q) .

En effet dans le modèle (p, q) on calcule γ_{str} en étudiant la singularité de la fonction de partition en fonction de la constante cosmologique, celle ci étant couplée à l'aire de la surface c'est à dire à l'opérateur identité de dimension $h_{1,1} = 0$. Mais pour les modèles de matrices habituels on sait que la constante cosmologique n'est pas couplée à l'aire mais à l'opérateur le plus relevant du modèle (p, q) , celui de dimension minimale $h_{\text{min}} = (1 - (p-q)^2)/4pq$ et l'on trouve une susceptibilité de corde $\gamma_{\text{str}} = -2/(p+q-1)$. Dans le modèle $O(n)$ la constante cosmologique T qui donne $\gamma_{\text{str}} = -2l/(p+q-l)$ est couplée à l'opérateur $(2m+1, 1)$ du modèle (p, q) et n'est ni l'identité ni l'opérateur le plus relevant. On peut en déduire que les opérateurs du modèle (p, q) ne sont pas tous présents dans le modèle $O(n)$ et que l'opérateur le plus relevant du modèle $O(n)$ est seulement l'opérateur $(2m+1, 1)$.

Il n'y a que dans le cas des modèles unitaires $p = q \pm 1$ que les trois définitions de γ_{str} coïncident, tous les opérateurs sont alors présents.

On peut remarquer que dans les modèles que j'appellerai "pseudo-unitaires" $p = (2m+1)q \pm 1$, on a $l=1$ et γ_{str} est identique pour le modèle $O(n)$ et pour les modèles de matrices habituels. Mais dans ce cas dès que $m > 0$ le modèle $O(n)$ ne contient quand même pas tous les opérateurs.

On va maintenant voir le calcul de l'exposant μ dont j'ai déjà indiqué la solution $\mu = 2m+1 \pm \nu$, et on va également calculer les coefficients des lois de puissances et les potentiels critiques. Pour cela il faut avant toutes choses savoir comment se comporte la fonction $W(z)$ lorsque $a \rightarrow 0$.

Calcul de $W_+(z)$ quand $a = 0$

Dans la limite $a \rightarrow 0$ la fonction élémentaire $W(z)$ se simplifie considérablement, elle s'exprime de façon trigonométrique avec la paramétrisation $z = b/\sin \psi$:

$$W_{\pm}(z) = \frac{\pm i}{z \sqrt{1 - \frac{b^2}{z^2}}} \left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{z^2}} \pm i \frac{b}{z} \right)^{\nu-1} = \frac{\pm i}{b} \tan \psi e^{\pm i(\nu-1)\psi} \quad (\text{VI.41})$$

Le comportement singulier de $W(z)$ lorsque $z \rightarrow 0$ est donné par:

$$\text{Im } W(z + i0) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{-\sin \nu \pi}{b} \left(\frac{2b}{z} \right)^{1-\nu} \quad (\text{VI.42})$$

On aura également besoin de la fonction $W(z)$ dans le régime $a \ll b$ et $z \sim a$ ($z = a \cos \varphi$):

$$W_+(z) \sim -2 \left(\frac{a}{4b} \right)^\nu \frac{1}{\sqrt{a^2 - z^2}} \left(\sqrt{1 - \frac{z^2}{a^2}} + i \frac{z}{a} \right)^\nu = -2 \left(\frac{a}{4b} \right)^\nu \frac{1}{a \sin \varphi} e^{-i\nu(\varphi - \pi/2)} \quad (\text{VI.43})$$

La relation $W_+ W_- = (z^2 - e^2)/(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)$ permet alors de trouver e (au signe près):

$$e = \pm 2ib \left(\frac{a}{4b} \right)^\nu$$

VI.5.1 Calcul de l'exposant μ

En reportant (VI.42) dans (VI.31) on trouve le comportement singulier de $\omega_s(z)$ lorsque $z \rightarrow 0$:

$$\text{Im } \omega_s(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} z \left[\sin \nu \pi \mathcal{A}(z^2) \left(\frac{2b}{z} \right)^\nu - 2b \cos \nu \pi \mathcal{B}(z^2) \left(\frac{2b}{z} \right)^{-\nu} \right]$$

Suivant le degré d'annulation de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ en zéro $\omega_s(z)$ possède un comportement singulier en z^μ avec:

$$\mu = 2m + 1 \pm \nu \quad (\text{VI.44})$$

Remarques:

- Il existe deux familles de points critiques suivant que $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ s'annule le plus en $z = 0$.
- l'exposant critique μ n'est pas quelconque, il est relié à n par

$$n = -2 \cos \theta = -2 \cos \mu \pi$$

Jusqu'ici on avait défini l'angle $\theta = (2m + 1 \pm \nu)\pi$ avec m arbitraire. Dorénavant on fixera m comme étant le degré d'annulation minimal de $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ de façon à avoir $\theta = \mu \pi$.

Potentiels critiques

On peut trouver explicitement les potentiels $V(z)$ de degrés minimaux donnant des points critiques:

- Cas $\mu = 2m + 1 - \nu$:

Il faut que $\mathcal{A}(z^2)$ s'annule au moins à l'ordre $2m$ et $\mathcal{B}$ aussi. Le choix minimal correspond à $\mathcal{A} \propto z^{2m}$ et $\mathcal{B} = 0$, c'est à dire à l'aide de (VI.31) :

$$\omega_{s+} = \frac{1}{T_c} \frac{1}{-2i \sin \nu \pi} z^{2m+1} e^{i\nu \psi} \quad (\text{VI.45})$$

en prenant la partie polynomiale on en déduit $\omega_r(z)$ puis le potentiel critique minimal:

$$V'_c = \frac{1}{T_c} \text{Pol} \left(z^{2m+1} 2 \sin \nu (\pi/2 - \psi) \right) \quad \text{avec} \quad T_c = -\frac{1}{2 \sin \nu \pi} (2b)^{2m+2} C_{2m+2}(\nu) \quad (\text{VI.46})$$

où $C_k(\nu)$ est le coefficient de $(2b/z)^k$ dans le développement en série de $2 \cos \nu(\pi/2 + \psi)$. C_k est relié à la fonction Beta d'Euler et s'exprime à l'aide de fonctions Γ :

$$C_k(\nu) = -\nu \frac{\sin \nu \pi}{2\pi} \frac{\Gamma(\frac{k+\nu}{2}) \Gamma(\frac{k-\nu}{2})}{\Gamma(k+1)} \quad (\text{VI.47})$$

On peut l'écrire de façon plus explicite:

$$\begin{aligned} C_k(\nu) &= (-1)^k \nu \cos(k-\nu)\pi/2 \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k-1} \left(\frac{k+\nu-2j}{2} \right) \\ C_0 &= 2 \cos \nu\pi/2, \quad C_1 = -\nu \sin \nu\pi/2 \end{aligned}$$

On en déduit le potentiel critique minimal:

$$V'_c(z) = \frac{\sin \nu \pi}{b} \sum_{k=0}^{2m+1} (-1)^k \tan(k-\nu)\pi/2 \frac{C_k(\nu)}{C_{2m+2}(\nu)} \left(\frac{z}{2b} \right)^{2m+1-k} \quad (\text{VI.48})$$

qui sous forme plus développée s'écrit:

$$\begin{aligned} bV'_c(z) &= -\sin \nu \pi \sum_{k=0}^m \frac{2}{\nu} \frac{2m+2!}{2m-2k+1!} \frac{\prod_{j=1}^{m-k} ((j-1/2)^2 - \nu^2/4)}{\prod_{j=1}^m (j^2 - \nu^2/4)} \left(\frac{z}{2b} \right)^{2k} \\ &\quad - \sin \nu \pi \sum_{k=0}^m \tan \nu\pi/2 \frac{2m+2!}{2m-2k!} \prod_{j=m-k}^m \frac{1}{j^2 - \nu^2/4} \left(\frac{z}{2b} \right)^{2k+1} \end{aligned}$$

Son coefficient dominant est positif et vaut:

$$\frac{2 \cos \nu\pi/2}{b} \left(\frac{z}{2b} \right)^{2m+1} \frac{2m+2!}{(\nu^2/4) \prod_{j=1}^m (j^2 - \nu^2/4)}$$

• Cas $\mu = 2m+1+\nu$:

De même, la deuxième famille de points critiques $\mu = 2m+1+\nu$ est obtenue par $\mathcal{A} = 0$ et $\mathcal{B} \propto z^{2m}$, ce qui donne:

$$V'_c = \frac{-1}{T_c} \text{Pol} \left(z^{2m+2} 2 \sin(\nu-1)(\pi/2 - \psi) \right) \quad \text{avec} \quad T_c = \frac{-1}{2 \sin \nu \pi} (2b)^{2m+3} C_{2m+3}(\nu-1) \quad (\text{VI.49})$$

c'est à dire:

$$\begin{aligned} 2bV'_c(z) &= - \sum_{k=0}^{m+1} \frac{2}{\nu} \left(\frac{z}{2b} \right)^{2m+2-2k} \frac{k-1/2-\nu/2}{m+1-\nu/2} \frac{2m+3!}{2k!} \frac{\prod_{j=1}^{k-1} ((j-1/2)^2 - \nu^2/4)}{\prod_{j=1}^m (j^2 - \nu^2/4)} \\ &\quad - \sum_{k=0}^m \left(\frac{z}{2b} \right)^{2m+1-2k} \tan \nu\pi/2 \frac{k-\nu/2}{m+1-\nu/2} \frac{2m+3!}{2k+1!} \prod_{j=k}^m \frac{1}{j^2 - \nu^2/4} \end{aligned} \quad (\text{VI.50})$$

Le coefficient dominant est positif et vaut:

$$\frac{4}{\nu(1-\nu)b} \sin \nu \pi \left(\frac{z}{2b} \right)^{2m+2} \frac{2m+3!}{m+1-\nu/2} \prod_{j=1}^m \frac{1}{j^2 - \nu^2/4}$$

VI.5.2 Voisinage du point critique $a \rightarrow 0$

Près du point critique $T \rightarrow T_c$ les propriétés critiques sont entièrement contrôlées par le comportement de $\omega(z)$ au voisinage du bord de la coupure $z \rightarrow a$. Dans ce régime on a donc $z \sim a \ll b$. La valeur de b ne joue aucun rôle, la seule échelle est donnée par a . La résolvante peut alors s'écrire dans ce régime comme une fonction d'échelle universelle (elle ne dépend que du point critique et pas du potentiel $V(z)$ qui a permis de l'atteindre) ne dépendant que de z/a :

$$\omega(z) \sim \frac{1}{b} \left(\frac{a}{4b} \right)^\mu \omega_{sc}(z/a)$$

Le comportement à z grand, c'est à dire a petit est donné par la limite critique $\omega(z) \sim z^\mu$. La fonction ω_{sc} peut être calculée exactement en fonction de μ . En effet elle satisfait une équation du type (VI.20), elle a une coupure sur $[1, \infty]$ et elle se comporte à l'infini comme

$$\omega_{sc}(z/a) \underset{z/a \rightarrow \infty}{\sim} (z/a)^\mu + O((z/a)^{\nu-1}) \quad (\text{VI.51})$$

Cette dernière condition aux limites vient de

$$T\omega(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} T_c \omega_c(z) + (T - T_c) \frac{\partial T \omega}{\partial T} \quad (\text{VI.52})$$

et du fait que $\partial T \omega / \partial T$ est proportionnel à la fonction $W(z)$ (cf. VI.39) qui se comporte en $z^{\nu-1}$ près du point critique (VI.42). On peut par exemple chercher ω_{sc} sous la forme (VI.31) et calculer les polynômes A et B à l'aide de la condition (VI.51) mais leurs expressions sont assez compliquées. Il existe une expression générale de ω_{sc} pour $\mu = 2m + 1 + \epsilon\nu$ sous forme intégrale:

$$\omega_{sc}(z/a) = \text{cte } (-z/a)^\mu \left[B + \int_{-\infty}^{\chi} d\alpha \frac{\sinh \epsilon\nu\alpha}{(\cosh \alpha)^{\mu+1}} \right]$$

avec la paramétrisation $z = -a \cosh \chi$, et $B = 2^{\mu-1} B(\frac{\mu-1-\nu}{2}, \frac{\mu-1+\nu}{2})$. Si l'on effectue l'intégration, on trouve:

$$\omega_{sc}(z/a) = \text{cte } (-1)^m \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{1}{\mu - k} (2z/a)^k \cosh(\mu - k)\chi$$

ω_{sc} se comporte lorsque $z \rightarrow \infty$ comme:

$$\omega_{sc}(z/a) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \text{cte} \left[B(-z/a)^\mu - \epsilon \frac{1}{\mu + 1 - \nu} (-2z/a)^{\nu-1} \right]$$

En comparant ce résultat avec (VI.52), on obtient:

$$T - T_c = \epsilon \frac{1}{2 \sin \nu\pi/2} \frac{1}{\mu + 1 - \nu} \frac{2^{\mu-1}}{B} \left(\frac{a}{4b} \right)^{\mu+1-\nu}$$

c'est à dire que l'exposant α défini par $1 - T/T_c \sim a^{2\alpha}$ vaut $2\alpha = \mu + 1 - \nu$.

On confirme ainsi tous les résultats annoncés plus haut et l'on s'aperçoit que la solution du modèle $O(n)$ est très similaire à celle du modèle à une matrice de la partie III.2. On va maintenant voir la généralisation de la partie III.4.

VI.6 Méthode des boucles

Le modèle $O(n)$ peut également être traité par la méthode des équations de boucles. Celles ci comme dans les autres modèles de matrices se traduisent en une équation algébrique (de degré q) pour la résolvante ω mais dans le cas du modèle $O(n)$ cette équation est exactement soluble quel que soit son degré. La méthode des boucles redonne les résultats de la méthode du col dans la limite N grand et elle permet de développer aux ordres suivants en $1/N$.

VI.6.1 Invariance par reparamétrisation

Comme d'habitude les équations de boucles reflètent l'invariance de la fonction de partition par changement de variable:

$$Z = \int dM d\vec{A} e^{-N \operatorname{tr} V(M) + M|\vec{A}|^2}$$

- Le changement $M \rightarrow M + \epsilon M^n$:

$$Z = \int dM d\vec{A} \left(1 + \epsilon \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{tr} M^k \operatorname{tr} M^{n-k-1} \right) e^{-N \operatorname{tr} (V(M) + M\vec{A}^2 + \epsilon M^n V'(M) + \epsilon M^n \vec{A}^2)}$$

donne la première série d'équations:

$$\frac{1}{N^2} \left\langle \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{tr} M^k \operatorname{tr} M^{n-k-1} \right\rangle = \frac{1}{N} \left\langle \operatorname{tr} M^n V'(M) + M^n \vec{A}^2 \right\rangle$$

Si l'on divise cette équation par z^{n+1} et que l'on somme sur n , il vient:

$$\frac{1}{N^2} \left\langle \operatorname{tr} \frac{1}{z-M} \operatorname{tr} \frac{1}{z-M} \right\rangle = \frac{1}{N} \left\langle \operatorname{tr} \frac{V'(M)}{z-M} + \frac{1}{z-M} \vec{A}^2 \right\rangle$$

- L'autre changement de variable $A \rightarrow A + \epsilon M^n A M^m$ (où A désigne l'une des n composantes du vecteur $\vec{A}$) donne:

$$Z = \int dM d\vec{A} (1 + \epsilon \operatorname{tr} M^n \operatorname{tr} M^m) e^{-N \operatorname{tr} (V(M) + M\vec{A}^2 + \epsilon (M^{n+1} A M^m A + A M^n A M^{m+1}))}$$

c'est à dire

$$\frac{1}{N^2} \left\langle \operatorname{tr} M^n \operatorname{tr} M^m \right\rangle = \frac{1}{N} \left\langle \operatorname{tr} M^{n+1} A M^m A + A M^n A M^{m+1} \right\rangle$$

et donc en divisant par $z^{n+1} \tilde{z}^{m+1}$, en sommant sur toutes les valeurs de n et m , et également en répétant la même équation pour chacune des n composantes de $\vec{A}$ on obtient

$$\frac{n}{N^2} \left\langle \operatorname{tr} \frac{1}{z-M} \operatorname{tr} \frac{1}{\tilde{z}-M} \right\rangle = \frac{1}{N} \left\langle \operatorname{tr} \frac{1}{z-M} M \vec{A} \frac{1}{\tilde{z}-M} \vec{A} + \frac{1}{z-M} \vec{A} \frac{1}{\tilde{z}-M} M \vec{A} \right\rangle$$

En choisissant $\tilde{z} = -z$ on peut se débarrasser du terme contenant des commutateurs de M et $\vec{A}$:

$$\frac{n}{N^2} \left\langle \operatorname{tr} \frac{1}{z-M} \operatorname{tr} \frac{1}{-z-M} \right\rangle = -\frac{1}{N} \left\langle \operatorname{tr} \frac{1}{z-M} \vec{A}^2 + \frac{1}{-z-M} \vec{A}^2 \right\rangle$$

Il est alors commode d'introduire les fonctions:

$$\omega(z) = \frac{1}{N} \left\langle \text{tr} \frac{1}{z-M} \right\rangle, \quad \chi(z) = \frac{1}{nN} \left\langle \text{tr} \frac{1}{z-M} \vec{A}^2 \right\rangle, \quad \omega(z, \tilde{z}) = \left\langle \text{tr} \frac{1}{z-M} \text{tr} \frac{1}{\tilde{z}-M} \right\rangle_{\text{conn}}$$

et les équations des boucles se réécrivent finalement:

$$\begin{cases} \omega(z)^2 + \frac{1}{N^2} \omega(z, z) = V'(z) \omega(z) - P(z) + n \chi(z) \\ \omega(z) \omega(-z) + \frac{1}{N^2} \omega(z, -z) = -\chi(z) - \chi(-z) \end{cases} \quad (\text{VI.53})$$

Comme pour le modèle à une matrice, $P(z) = \text{Pol } V' \omega$ est un polynôme inconnu de degré $\deg V' - 1$. On peut aisément éliminer la fonction $\chi(z)$:

$$\begin{aligned} \omega(z)^2 + \omega(-z)^2 + n \omega(z) \omega(-z) + \frac{1}{N^2} (\omega(z, z) + \omega(-z, -z) + n \omega(z, -z)) = \\ \omega(z) V'(z) + \omega(-z) V'(-z) - P(z) - P(-z) \end{aligned} \quad (\text{VI.54})$$

Equation des boucles en termes des $\omega_{\pm}$

Tout comme pour la méthode du col les équations de boucles prennent une forme plus simple si l'on change de fonctions $\omega \rightarrow \omega_{\pm}$. Il faut d'abord définir l'équivalent de (VI.23) pour les fonctions à deux variables:

$$\omega(z, \tilde{z}) = -e^{i\nu\pi} \omega_{++}(z, \tilde{z}) + \omega_{+-}(z, \tilde{z}) + \omega_{-+}(z, \tilde{z}) - e^{-i\nu\pi} \omega_{--}(z, \tilde{z}) \quad \text{et} \quad \omega_{\pm\pm}(z, \tilde{z}) = \omega_{++}(\pm z, \pm \tilde{z})$$

Avec ces notations (VI.54) prend une forme plus agréable:

$$\omega_+(z) \omega_-(z) + \frac{1}{N^2} \omega_{+-}(z, z) = \omega_+(z) \omega_{r-}(z) + \omega_-(z) \omega_{r+}(z) - P_{+-}(z) \quad (\text{VI.55})$$

où $P_{+-}(z)$ est un polynôme en z choisi de telle façon que le membre de droite de l'équation tende vers 0 à l'infini.

En utilisant $\omega = \omega_r - \omega_s$ on a aussi:

$$\omega_{s+}(z) \omega_{s-}(z) + \frac{1}{N^2} \omega_{+-}(z, z) = \omega_{r+}(z) \omega_{r-}(z) - P_{+-}(z) \quad (\text{VI.56})$$

le membre de droite est cette fois un polynôme.

Jusqu'ici cette équation des boucles est exacte pour tout N . Dans la limite N grand elle se simplifie et la solution n'est autre que celle que l'on a trouvée par la méthode du col.

VI.6.2 Limite classique $N \rightarrow \infty$

Dans cette limite l'équation (VI.54) devient une équation fermée pour la résolvante $\omega(z)$:

$$\omega(z)^2 + \omega(-z)^2 + n \omega(z) \omega(-z) = \omega(z) V'(z) + \omega(-z) V'(-z) - P(z) - P(-z)$$

de même (VI.55,VI.56) se réécrivent:

$$\omega_+(z)\omega_-(z) = \omega_+(z)\omega_{r-}(z) + \omega_-(z)\omega_{r+}(z) - P_{+-}(z)$$

$$\omega_{s+}(z)\omega_{s-}(z) = \omega_{r+}(z)\omega_{r-}(z) - P_{+-}(z)$$

Ces équations sont toutes satisfaites par la solution (VI.31) de la méthode du col:

$$\omega_{s+}(z) = W_+(z)\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)} \left(\mathcal{A}(z^2) g_+(z) + z\mathcal{B}(z^2) \right)$$

en identifiant les polynômes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ avec

$$(z^2 - a^2b^2/e^2)\mathcal{A}^2 - 2z^2\sqrt{e}/e\mathcal{A}\mathcal{B} - z^2\mathcal{B}^2 = \omega_{r+}(z)\omega_{r-}(z) - P_{+-}(z)$$

On va maintenant chercher les ordres suivants dans le développement en $1/N$

VI.6.3 Développement en $1/N$

L'équation des boucles permet de calculer par récurrence tous les ordres en $1/N$. On développera la résolvante $\omega(z)$ en:

$$\omega(z) = \sum_{h=0}^{\infty} N^{-2h} \omega_{[h]}(z)$$

La méthode du col a déjà permis de calculer $\omega_{[0]}$. A l'ordre 1 l'équation des boucles s'écrit:

$$\omega_{[0]++}(z, z) = \omega_{[0]s+}(z)\omega_{[1]-}(z) + \omega_{[0]s-}(z)\omega_{[1]+}(z) - P_{[1]++}(z) \quad (\text{VI.57})$$

C'est une équation linéaire pour $\omega_{[1]}$, pour la résoudre il suffit de connaître la fonction $\omega_{[0]}(z, z)$.

La fonction à deux boucles $\omega(z, \tilde{z})$

Comme pour le modèle à une matrice la fonction à deux boucles $\omega(z, \tilde{z})$ joue un rôle très important: elle s'interprète géométriquement comme la fonction de partition des surfaces à deux bords (les cylindres), elle possède la propriété remarquable d'être universelle (dans la limite $N \rightarrow \infty$ elle ne dépend pas du potentiel $V(z)$) et elle représente la dérivée fonctionnelle de la résolvante $\omega(z)$ par rapport au potentiel:

$$\omega(z, \tilde{z}) = \frac{\partial \omega(\tilde{z})}{\partial V(z)}$$

Pour la calculer il suffit de remarquer qu'elle obéit à une équation linéaire qui est la dérivée de l'équation du col (VI.20) et que les conditions aux limites la déterminent entièrement:

$$\omega_{++}(z, \tilde{z}) = \frac{-1}{4 - n^2} \left[\frac{1}{(z + \tilde{z})^2} + W_+(z)W_+(\tilde{z}) \left(1 + \alpha \frac{f_+(z) - f_+(\tilde{z})}{z^2 - \tilde{z}^2} - \frac{f_+(z) - f_+(\tilde{z})}{z^2 - \tilde{z}^2} F(z, \tilde{z}) \right) \right] \quad (\text{VI.58})$$

où l'on a introduit les fonctions:

$$f_+(z) = \frac{z\sqrt{z} + e\sqrt{e}}{z^2 - e^2} \quad \text{et} \quad F(z, \tilde{z}) = \frac{z\sqrt{z} - \tilde{z}\sqrt{\tilde{z}}}{z^2 - \tilde{z}^2} \quad \left(\text{avec } \sqrt{z} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)} \right)$$

et où le coefficient α qui a déjà été introduit en (VI.30) peut aussi être défini par

$$W_+(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{i}{z} \left(1 - \frac{\alpha}{z} + \dots \right)$$

On peut également écrire la fonction à deux boucles comme une dérivée totale:

$$\omega_{++}(z, \tilde{z}) = \frac{1}{4-n^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[\frac{-1}{z+\tilde{z}} + W_+(z)W_+(\tilde{z})\sqrt{\tilde{z}} \frac{f_+(z) - f_+(\tilde{z})}{z^2 - \tilde{z}^2} \right]$$

En particulier on peut calculer $\omega_{+-}(z, z)$

$$\omega_{+-}(z, z) = \frac{-1}{4-n^2} \left[\frac{1}{2} \frac{\alpha^2 - e^2}{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)} - \frac{z^2}{4} \frac{(a^2 - b^2)^2}{(z^2 - a^2)^2(z^2 - b^2)^2} \right]$$

On a donc en principe tout ce qu'il faut pour calculer $\omega_{[1]}(z)$, il reste à inverser l'équation linéaire.

La résolvante $\omega_{[1]}(z)$ à l'ordre torique

On peut deviner que $\omega_{[1]+}(z)$ a la forme

$$\omega_{[1]+}(z) = \frac{1}{2} \frac{-1}{4-n^2} W_+(z) \frac{1}{((z^2 - a^2)(z^2 - b^2))^{3/2}} (U(z^2)g_+(z) + zV(z^2))$$

où U et V sont des polynômes de degré 2 en z^2 . Il faut de plus supposer des relations entre ces deux polynômes pour que $\omega_{[1]}(z)$ n'ait pas de pôles en $z = -a$ et $z = -b$. Les coefficients des polynômes U et V peuvent alors être calculés en injectant cet ansatz dans l'équation des boucles (VI.57), le résultat fera intervenir les valeurs des polynômes $\mathcal{A}(z^2)$ et $\mathcal{B}(z^2)$ en $z^2 = a^2$ et $z^2 = b^2$ ainsi que leurs dérivées premières au voisinage de a^2 et b^2 , exactement comme dans le cas du modèle à une matrice (III.130).

Cette méthode de calcul n'est cependant pas la bonne, elle est extrêmement fastidieuse et donne le résultat sous une forme trop complexe, il faut l'exprimer d'une manière plus astucieuse, c'est à dire qu'il faut trouver la structure générale des fonctions $\omega_{[h]}$.

Développement dans les moments M_k et J_k

Dans le cas à une matrice, cette structure a été trouvée et explicitée par les auteurs de [58, 59]. Ils définissent des moments M_k et J_k qui dépendent linéairement du potentiel V (à a et b fixés):

$$M_k = -\frac{1}{2i\pi} \oint dz \frac{V'(z)}{(z-a)^{k+1}} \frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \quad , \quad J_k = -\frac{1}{2i\pi} \oint dz \frac{V'(z)}{(z-b)^{k+1}} \frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}$$

et des fonctions $\Phi_{(a)k}(z)$ et $\Phi_{(b)k}(z)$:

$$\Phi_{(a)k}(z) = \frac{1}{(z-a)^k} \frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \quad , \quad \Phi_{(b)k}(z) = \frac{1}{(z-b)^k} \frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}$$

enfin ils introduisent des fonctions de base Ψ_k et χ_k qui sont des combinaisons linéaires des Φ_k sur lesquelles le noyau linéaire de l'équation des boucles agit d'une façon particulièrement simple:

$$2\omega_s(z)\Psi_k(z) = \frac{1}{(z-a)^k} + \text{Pol}(z) \quad , \quad 2\omega_s(z)\chi_k(z) = \frac{1}{(z-b)^k} + \text{Pol}(z)$$

A l'aide de ces fonctions l'équation des boucles devient très facile à inverser et les $\omega_{[h]}$ s'expriment plus simplement dans cette base, de plus les moments M_k et J_k jouent un rôle très important lorsque l'on s'intéresse aux points critiques ce qui montre l'importance de trouver une telle paramétrisation pour le modèle $O(n)$. A titre indicatif je peux donner des résultats récents concernant les moments M_1 et J_1 ainsi que les fonctions Φ_1 .

Dans le modèle à une matrice on a la relation suivante:

$$\frac{\partial a}{\partial V(z)} = \frac{1}{M_1} \Phi_{(a)1}(z) \quad \text{et} \quad \frac{\partial b}{\partial V(z)} = \frac{1}{J_1} \Phi_{(b)1}(z)$$

On sait aussi exprimer les moments en fonction du polynôme $M(z)$ tel que $\omega_s(z) = -\frac{1}{2}M(z)\sqrt{(z-a)(z-b)}$ par:

$$M_1 = M(a) \quad , \quad J_1 = M(b) \quad , \quad M_2 = M'(a) \quad , \quad J_2 = M'(b) \dots$$

Pour le modèle $O(n)$ on peut trouver des relations analogues:

$$\frac{\partial a^2}{\partial V(z)} = \frac{1}{M_1} 2a^2 \frac{\partial W}{\partial a^2} \quad \text{avec} \quad M_1 = \frac{1}{2i\pi} \oint z V'(z) \frac{\partial W(z)}{\partial a^2} dz$$

On peut également comme dans le modèle à une matrice relier le moment M_1 aux polynômes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ qui généralisent le polynôme M (cf (VI.31)) par:

$$M_1 = \frac{1}{2i\pi} \oint z dz V'(z) \frac{\partial W}{\partial a^2} = (4 - n^2) \left(\frac{1}{2}(1 - \rho)\mathcal{A}(a^2) - \lambda_a a^2 \mathcal{B}(a^2) \right)$$

$$\text{où} \quad \rho = \frac{a^2}{e^2} \frac{\partial e^2}{\partial a^2} \quad \text{et} \quad a^2 \lambda_a = \frac{1}{2} \frac{e}{\sqrt{e}} \rho (a^2 - e^2).$$

Toutes ces relations suggèrent que l'on a identifié la première fonction de base $\Phi_{(a)1} = \partial W / \partial a^2$ et le premier moment $M_1 = \frac{1}{2i\pi} \oint z V'(z) \frac{\partial W(z)}{\partial a^2} dz$.

Il est alors naturel de conjecturer que la structure du modèle à une matrice se généralise de la façon suivante:

$$M_k = \frac{1}{2i\pi} \oint dz z V'(z) \frac{\partial^k W}{(\partial a^2)^k} \quad , \quad J_k = \frac{1}{2i\pi} \oint dz z V'(z) \frac{\partial^k W}{(\partial b^2)^k}$$

$$\Phi_{(a)k}(z) = \frac{\partial^k W(z)}{(\partial a^2)^k} \quad , \quad \Phi_{(b)k}(z) = \frac{\partial^k W(z)}{(\partial b^2)^k}$$

Mais comme je l'ai indiqué ce travail n'est pas terminé. A suivre dans un prochain article sans doute...

En attendant voyons ce que devient le modèle $O(n)$ dans le cas $n = \pm 2$

VI.7 Cas $n = \pm 2$

La transition de Kosterlitz–Thouless

Les cas $n = \pm 2$ sont les cas limites du modèle $O(n)$, ils correspondent à $\nu \rightarrow 0$ et $\nu \rightarrow 1$ avec la paramétrisation $n = 2 \cos \nu\pi$. Il est intéressant de les étudier en détail, en particulier le cas $n = 2$. Celui-ci correspond à une charge centrale $c = 1$, c'est à dire qu'il permet d'étudier la théorie des cordes plongée dans un espace de dimension 1, qui est la dimension maximale que permettent les modèles de matrices. Par ailleurs le modèle $O(2)$ sur un réseau régulier a été très étudié, c'est le modèle XY et l'on sait qu'il présente une transition de phase très particulière découverte par Kosterlitz–Thouless [79]: cette transition n'est pas du tout semblable à la transition de Curie du modèle d'Ising, il n'apparaît pas d'aimantation spontanée et l'énergie libre et toutes ses dérivées sont continues au point critique. On trouve que les exposants critiques sont des entiers, mais en fait les comportements critiques ne sont pas seulement en lois de puissances, il contiennent aussi des termes logarithmiques. On va voir que l'on retrouve ces caractéristiques pour le modèle $O(2)$ sur réseau aléatoire formulé par les modèles de matrices.

Le cas $n = -2$ est aussi intéressant, il décrit une théorie des cordes de charge centrale $c = -2$, et possède également des comportements critiques avec des exposants entiers et des corrections logarithmiques.

Modèle $O(\pm 2)$ sur réseau aléatoire

Sur réseau aléatoire ces deux modèles sont obtenus par une intégrale de matrices (VI.7) ou (VI.14). J'ai montré dans les paragraphes précédents comment calculer une telle intégrale pour n'importe quelle valeur de ν . Il suffit en principe de passer à la limite $\nu \rightarrow 0$ et $\nu \rightarrow 1$, mais cette limite est assez singulière et il est aussi simple de procéder directement [72].

On observera deux familles de points critiques comme dans le modèle $O(n)$ général (l'exposant critique μ vaut $2m + 1 \pm \nu$):

La première famille donne des points critiques qui ressemblent aux points critiques habituels d'un modèle à une matrice, à condition de changer la matrice M en M^2 , et l'on obtient des exposants entiers au lieu de demi-entiers.

La deuxième famille donne des points critiques avec des corrections logarithmiques, ce sont ces points critiques qui décrivent la transition de Kosterlitz–Thouless.

On va d'abord voir sur le cas $n = -2$ comment ceci peut se comprendre à partir d'un simple changement de variables.

VI.7.1 Cas $n = -2$

La fonction de partition du modèle $O(-2)$ sur réseau aléatoire est (cf eq.VI.14):

$$Z = \int \prod_{i=1}^N d\lambda_i 2\lambda_i e^{-NV(\lambda_i)} \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 (\lambda_i + \lambda_j)^2 \quad (\text{VI.59})$$

Si l'on change de variable $x_i = \lambda_i^2$, on retrouve un modèle à une matrice habituel, mais avec un potentiel qui peut contenir des racines carrées:

$$Z = \int \prod_{i=1}^N dx_i e^{-NV(\sqrt{x_i})} \prod_{i<j} (x_i - x_j)^2 = \int dM e^{-N \operatorname{tr} V(\sqrt{M})}$$

Lorsque le potentiel V est pair, on retrouve exactement le modèle à une matrice. En particulier les points critiques sont donnés par le comportement singulier en zéro de la densité de valeurs propres: $\tilde{\rho}(x) \sim x^{\tilde{\mu}}$. Pour le modèle à une matrice on sait que l'exposant $\tilde{\mu}$ vaut $m + 1/2$. En utilisant $\rho(\lambda) = 2\lambda\tilde{\rho}(\lambda^2)$ on en déduit que pour le modèle $O(-2)$ l'exposant μ est un entier pair et vaut $2m + 2$.

Il existe néanmoins d'autres points critiques pour le modèle $O(-2)$ lorsque le potentiel V n'est pas pair. On va voir que l'on obtient alors un comportement singulier en $\lambda^{2m+2} \ln \lambda$. Je vais maintenant expliciter la solution du modèle $n = -2$ par la méthode du col, c'est à dire montrer comment calculer l'intégrale (VI.59) dans la limite N grand.

Solution directe du modèle $O(-2)$ par la méthode du col

Comme d'habitude avec la méthode du col, la quantité que l'on cherche à calculer est la résolvante $\omega(z)$, car celle ci permet de calculer la densité de valeurs propres $\rho(\lambda)$:

$$\omega(\lambda + i0) - \omega(\lambda - i0) = -2i\pi\rho(\lambda)$$

La résolvante satisfait l'équation du col (VI.20) :

$$\omega(\lambda + i0) + \omega(\lambda - i0) - 2\omega(-\lambda) = V'(\lambda)$$

Pour la résoudre il faut décomposer ω en ses parties paires et impaires:

$$\omega(z) = \omega_+(z) + z\omega_-(z)$$

On trouve alors que la densité $\rho(\lambda)$ peut être calculée seulement à partir de ω_- :

$$2\lambda(\omega_-(\lambda + i0) - \omega_-(\lambda - i0)) = -2i\pi\rho(\lambda)$$

Et la fonction ω_- peut être exprimée en fonction du potentiel V par une intégrale de contour qui généralise (III.22) :

$$\omega_-(z) = \frac{1}{4i\pi} \oint \frac{d\zeta}{\zeta^2 - z^2} V'(\zeta) \sqrt{\frac{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}{(\zeta^2 - a^2)(\zeta^2 - b^2)}}$$

On a en plus deux équations exprimant les conditions aux limites et qui permettent de calculer a et b :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2 - a^2)(\zeta^2 - b^2)}} V'(\zeta) \\ -2 &= \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2 - a^2)(\zeta^2 - b^2)}} \zeta^2 V'(\zeta) \end{aligned}$$

Toutes ces expressions auraient pu être trouvées en remarquant que ω_- n'est autre que la résolvante du modèle à une matrice obtenu en changeant de variable $x = \lambda^2$.

Voyons maintenant quels sont les points critiques de ce modèle, pour cela on utilisera simplement les expressions de la partie VI.5 du modèle $O(n)$ général dans la limite $\nu \rightarrow 1$.

Points critiques

- Cas $\mu = 2m + 1 - \nu$ et $\nu \rightarrow 1$:

La résolvante ω_s au point critique (VI.45) devient dans la limite $\nu \rightarrow 1$:

$$b\omega_s(z) = \frac{1}{T_c} z^{2m+1} (\pi/2 + \psi) 2 \cos \psi \quad \text{avec} \quad z = \frac{b}{\sin \psi} \quad \text{et} \quad T_c = 2\pi (b/2)^{2m+2} \frac{2m!}{m+1!m!}$$

Le potentiel critique minimal permettant d'atteindre ce point critique est un potentiel pair, il est obtenu en posant $\nu \rightarrow 1$ dans (VI.46) :

$$bV'_c(z) = 4 \frac{m+1!m!}{2m!} \text{Pol} \left(\frac{2z}{b} \right)^{2m} \sqrt{1 - \frac{b^2}{z^2}}$$

Le comportement critique de la densité de valeur propre au voisinage de zéro est alors régulier en λ^{2m} :

$$\frac{-1}{\pi} \text{Im} \omega(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow 0}{\sim} \frac{4}{\pi} \frac{m+1!m!}{2m!} \left(\frac{2\lambda}{b} \right)^{2m}$$

Ce point critique est celui que j'ai mentionné plus haut, il est obtenu pour des potentiels pairs et correspond au modèle à une matrice pour la matrice M^2 . On trouve que l'exposant γ_{str} de la susceptibilité de corde est le même que pour le cas à une matrice: $\gamma_{\text{str}} = -1/m$. La dérivée seconde de l'énergie libre se comporte en

$$u(T) \sim (T_c - T)^{1/m}$$

- Cas $\mu = 2m + 1 + \nu$ et $\nu \rightarrow 1$:

Le potentiel critique minimal obtenu en prenant la limite $\nu \rightarrow 1$ de (VI.49) n'est pas un potentiel pair, il vaut:

$$bV'_c(z) = 4(2m+3) \frac{m+1!^2}{2m+2!} \text{Pol} \left(\frac{2z}{b} \right)^{2m+2} (\pi/2 - \psi) \quad \text{avec} \quad \sin \psi = \frac{b}{z}$$

On s'attend donc à un comportement critique assez différent du précédent. En effet la densité de valeurs propres $\rho(\lambda)$ au point critique vaut

$$b\rho(\lambda) = \frac{2}{\pi} (2m+3) \frac{m+1!^2}{2m+2!} \left(\frac{2\lambda}{b} \right)^{2m+2} \ln \left(\frac{b}{\lambda} + \sqrt{\frac{b^2}{\lambda^2} - 1} \right)$$

on constate qu'elle contient un terme logarithmique en accord avec le comportement de la transition de Kosterlitz–Thouless:

$$b\rho(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{\pi} (2m+3) \frac{m+1!^2}{2m+2!} \left(\frac{2\lambda}{b} \right)^{2m+2} \ln \left(\frac{2b}{\lambda} \right)$$

On peut également tenter de calculer l'exposant de susceptibilité de corde γ_{str} , mais là aussi la dérivée seconde de l'énergie libre $u(T)$ possède un comportement logarithmique:

$$(T_c - T) \sim u^{m+1} \ln u$$

VI.7.2 Cas $n = 2$

Le modèle $O(2)$ ne peut pas comme le modèle $O(-2)$ être reformulé en terme d'un modèle à une matrice, mais il a des propriétés similaires, on peut trouver des solutions assez explicites et les comportements critiques ne sont pas si éloignés du cas $n = -2$.

La fonction de partition du modèle $O(2)$ est (cf eq.VI.14):

$$Z = \int \prod_{i=1}^N d\lambda_i \frac{1}{2\lambda_i} e^{-NV(\lambda_i)} \prod_{i<j} \left(\frac{\lambda_i - \lambda_j}{\lambda_i + \lambda_j} \right)^2$$

La raison pour laquelle elle va être assez simple à calculer est qu'elle peut également se ramener par un changement de variable à un gaz de particules qui se repoussent avec une force à deux corps qui ne dépend que de leur distance. En effet si l'on pose $\lambda_i = e^{2x_i}$ la fonction de partition devient:

$$Z = \int \prod_{i=1}^N dx_i e^{-NV(e^{2x_i})} \prod_{i<j} \tanh^2(x_i - x_j)$$

Elle représente un gaz de particules placées dans le potentiel $V(e^{2x})$ et se repoussant avec une force en $1/\sinh^2(x_i - x_j)$ qui ne dépend que de leur distance.

Il y a encore une autre façon de formuler le modèle $O(2)$ en termes d'un problème à deux corps, il suffit de remarquer que

$$\prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 / \prod_{i,j} (\lambda_i + \lambda_j) = \det \left[\frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} \right]$$

ce qui conduit à

$$Z = \int \prod_{i=1}^N d\lambda_i \det K(\lambda_i, \lambda_j) \quad \text{où} \quad K(\lambda, \mu) = \frac{e^{-\frac{N}{2}(V(\lambda) + V(\mu))}}{\lambda + \mu}$$

Calculer Z revient alors à diagonaliser le noyau $K(\lambda, \mu)$.

Il y a donc de nombreuses méthodes pour étudier le modèle $O(2)$, je vais présenter celle qui se rapproche le plus de la méthode générale que j'ai exposée pour le modèle $O(n)$.

Solution directe du modèle $O(2)$ par la méthode du col

La résolvante $\omega(z)$ satisfait l'équation du col (VI.20) :

$$\omega(\lambda + i0) + \omega(\lambda - i0) + 2\omega(-\lambda) = V'(\lambda)$$

Comme pour $n = -2$ on la résout en décomposant ω en ses parties paires et impaires $\omega(z) = \omega_+(z) + z\omega_-(z)$ et la densité $\rho(\lambda)$ peut être calculée seulement à partir de ω_+ :

$$-2i\pi\rho(\lambda) = 2(\omega_+(\lambda + i0) - \omega_+(\lambda - i0))$$

La fonction ω_+ peut de nouveau être exprimée en fonction du potentiel V par une intégrale de contour:

$$\omega_+(z) = \frac{1}{4i\pi} \oint \frac{2xdx}{x^2 - z^2} \frac{1}{2} V'(x) \sqrt{\frac{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}}$$

La condition aux limites $\omega_+(z) \rightarrow 0$ quand $z \rightarrow \infty$ entraîne immédiatement que

$$0 = \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{2xdx}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} V'(x)$$

Mais la seconde condition qui traduit que $\int \rho(\lambda) d\lambda = 1$ ne peut pas être simplement écrite comme une intégrale de contour.

On va maintenant passer à l'étude des points critiques en reprenant les expressions générales de la partie VI.5 et en passant à la limite $\nu \rightarrow 0$.

Points critiques

- Cas $\mu = 2m + 1 - \nu$ et $\nu \rightarrow 0$:

Le potentiel critique minimal correspondant est donné par la limite $\nu \rightarrow 0$ de (VI.46) :

$$bV'_c(z) = 4\pi \frac{2m+2!}{m!^2} \text{Pol} \left(\frac{z}{2b} \right)^{2m+1} (\pi/2 - \psi) \quad \text{où} \quad z = \frac{b}{\sin \psi}$$

La partie singulière de la résolvante $\omega(z)$ au point critique est alors (cf (VI.45)) :

$$b\omega_s(z) = \frac{2m+2!}{m!^2} \left(\frac{z}{2b} \right)^{2m+1} (\pi/2 + \psi)^2$$

Elle correspond à une densité de valeurs propres

$$b\rho(\lambda) = \frac{2m+2!}{m!^2} \left(\frac{\lambda}{2b} \right)^{2m+1} 2 \ln \left(\frac{b}{z} + \sqrt{\frac{b^2}{z^2} - 1} \right)$$

qui a un comportement logarithmique en zéro:

$$\rho(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow 0}{\sim} \frac{2m+2!}{m!^2} \frac{2}{b} \left(\frac{\lambda}{2b} \right)^{2m+1} \ln \frac{2b}{\lambda}$$

On peut également calculer l'exposant de corde γ_{str} , en calculant la dérivée seconde de l'énergie libre $u(T)$:

$$u \sim 1/\ln a \quad \text{et} \quad T - T_c \sim a^{2m+2} \ln a$$

c'est à dire à l'ordre dominant

$$u(T) \sim 1/\ln(T_c - T)$$

ce qui correspond à $\gamma_{\text{str}} = 0$ et est en accord avec la transition de Kosterlitz-Thouless.

- Cas $\mu = 2m + 1 + \nu$ et $\nu \rightarrow 0$:

De même le potentiel critique est la limite de (VI.49) :

$$bV'_c(z) = 4\pi \frac{2m+3!}{m+1!m!} \text{Pol} \left(\frac{z}{2b} \right)^{2m+2} \sqrt{1 - \frac{b^2}{z^2}}$$

Au point critique la partie singulière de la résolvante vaut

$$\omega_s(z) = \frac{1}{T_c} z^{2m+2} (\pi/2 + \psi) \cos \psi \quad \text{avec} \quad 4T_c = (2b)^{2m+3} \frac{m+1!m!}{2m+3!}$$

Et le comportement singulier de la densité est régulier, sans corrections logarithmiques:

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{T_c} \lambda^{2m+1} \sqrt{b^2 - \lambda^2}$$

Quant à la dérivée seconde de l'énergie libre $u(T)$, elle est donnée par:

$$u \sim 1/\ln a \quad \text{et} \quad T - T_c \sim a^{2m+2} \ln^2 a$$

on trouve qu'elle est semblable à celle du cas précédent au moins à l'ordre dominant:

$$u(T) \sim 1/\ln(T_c - T)$$

Tous ces résultats permettent de retrouver simplement ce qui était déjà bien connu pour la théorie des cordes en dimension $c = 1$.

Chapter VII

Articles

Dans ce chapitre je présente les deux articles publiés en collaboration avec mon directeur de thèse J. Zinn–Justin. Ceux ci ont été rédigés en Anglais.

- Le premier (p. 124) concerne le modèle $O(n)$ (chap. VI), ses points critiques et le problème du comportement aux grands ordres (chap. V). Il a été publié dans *Nuclear Physics* B386 (1992).

- Le second (p. 155) concerne le comportement aux grands ordres des modèles de matrices décrivant des modèles conformes minimaux (p, q) . J'ai déjà explicité son contenu dans le chapitre V. Il a été publié dans *Physical Letters* B302 (1993).

Je présente également (p. 167) mes travaux concernant la statistique des valeurs propres de matrices aléatoires comme je l'avais annoncé en introduction. Cet article n'a pas encore été accepté mais a déjà été soumis à *Nuclear Physics* B. J'ai également d'autres articles en préparation sur ce sujet, ils concernent la généralisation au cas des modèles à plusieurs matrices. Mais j'ai choisi par manque de place, de temps et par souci de clarté et d'unité de ne pas développer ces aspects dans ce manuscrit.

VII.1 The $O(n)$ model on a random surface: critical points and large order behaviour

The $O(n)$ model on a random surface: critical points and large order behaviour. (J .Zinn-Justin, B.E.) , 33 pages. Nuc. Phys. B386 558-591, (1992). hep-th/9204082

VII.2 Large order behaviour of 2D gravity coupled to $D < 1$ matter

Large order behaviour of 2D gravity coupled to $D < 1$ matter. (J. Zinn-Justin, B.E.) , 6 pages. Phys. Lett. B302 396-402, (1993). hep-th/9301004

VII.3 Large random matrices: eigenvalue distribution (non publié)

Large random matrices: eigenvalue distribution. (B.E.) , 18 pages. hep-th/9401165

Chapter VIII

Conclusions

Conclusions

Conclusion sur ma thèse

J'ai tenté de rédiger une thèse assez pédagogique sur les modèles de matrices, dans le sens où j'ai introduit tous les concepts nécessaires et je n'ai pas supposé de connaissance approfondie en théorie des cordes. C'est au lecteur et au jury de décider si j'ai accompli cet effort avec succès. Dans tous les cas, cette présentation pédagogique ne signifie pas que j'ai voulu faire une revue systématique et exhaustive des modèles de matrices. Je n'y ai développé qu'une petite partie des résultats connus en théorie des cordes et dans leur approche par les modèles de matrices. Par exemple je n'ai pas décrit le comportement des fonctions de corrélations, les opérateurs autres que la température (ou constante cosmologique) ni les flots KDV. Je n'ai pas non plus évoqué les modèles à plusieurs matrices ni l'intégrale de Kontsevitch.

Et surtout je n'ai pas exposé l'ensemble de mes propres travaux. Pour des raisons de temps et de clarté j'ai dû faire des choix. J'ai choisi de concentrer la rédaction de ma thèse sur deux sujets, les deux seuls sur lesquels j'ai publié des articles: il s'agit des instantons et des problèmes de stabilité des modèles de matrices, et de l'étude du modèle $O(n)$. En réalité j'ai également étudié l'universalité des fonctions de corrélation de valeurs propres, à la suite des travaux de Brézin et Zee [10], ces travaux n'ont pas encore été publiés mais pour donner une idée de leur contenu j'ai aussi ajouté en appendice un projet d'article déjà soumis à Nuclear Physics B mais pas accepté.

Il convient maintenant que j'ai un peu plus de recul de juger l'intérêt et la portée de mes travaux.

Perspectives: les modèles de matrices

Les modèles de matrices ont d'abord donné une grande accélération à la compréhension de la théorie des cordes et de la gravitation quantique, mais ils ne suscitent plus le même enthousiasme qu'à leurs débuts. La principale déception provient de ce que tous les modèles que l'on sait traiter sont limités à une charge centrale $c \leq 1$, et donc les théories des cordes en dimension 4 ou 10 ou 26 ne sont pas accessibles par cette voie. Malgré cela il reste encore beaucoup à faire:

pour commencer il faut comprendre la nature de la singularité à $c = 1$, est ce une barrière infranchissable ?

Un autre problème est celui des instabilités. Comme je l'ai exposé au chapitre V certains modèles de matrices (la plupart en fait) sont instables, c'est à dire que l'on ne sait pas resommer la série de perturbations, on ne sait pas si l'intégrale de matrices reproduit correctement une somme sur des surfaces (cf [67]).

On peut également ajouter que le travail effectué dans le cadre de la théorie des cordes est susceptible de donner lieu à des applications dans d'autres domaines de la physique des matrices aléatoires comme le chaos quantique ou les conducteurs mésoscopiques.

Voilà donc quelques uns des objectifs à poursuivre dans l'étude des modèles de matrices.

Je vais maintenant conclure ma thèse en résumant le contenu de mes travaux personnels, et en évoquant les suites qu'ils permettent d'envisager.

Résumé de mes travaux

Stabilité et instantons

J'ai commencé au début de ma thèse par étudier le problème de la stabilité des modèles de matrices. C'est ce que j'ai présenté au chapitre V dans le cas du modèle à une matrice.

Le problème de la stabilité est celui de savoir si le développement de l'intégrale de matrices en puissances de $1/N^2$ a un sens. En effet on trouve que ce développement est identique terme à terme avec celui que l'on souhaiterait obtenir en théorie des cordes. Mais cela ne suffit pas car il s'agit du développement d'une série divergente ou asymptotique, et deux séries asymptotiques ayant le même développement ne représentent pas nécessairement la même fonction. Dans le cas où l'on sait resommer la série de façon unique tout va bien, on peut identifier les deux fonctions. Cette resommation utilise la méthode de Borel et le critère pour savoir si une série asymptotique est resommable est de considérer sa transformée de Borel, il faut que celle ci ne possède pas de singularité ni de pôle sur l'axe réel positif. Par ailleurs la position de ce pôle n'est autre que l'action de l'instanton, c'est à dire la différence entre deux minimas locaux de l'action. Dans le cas du modèle à une matrice ceci est connu depuis longtemps et l'on sait calculer par la méthode du col l'action de l'instanton.

Mon premier travail de recherche consistait à vouloir généraliser ce calcul au cas du modèle à deux matrices comme par exemple le modèle d'Ising. Or la méthode du col est inapplicable directement pour le modèle à deux matrices, c'est ce qui m'a conduit à étudier le modèle $O(n)$. En effet pour $n = 1$ le modèle $O(n)$ est identique au modèle d'Ising et il a l'avantage d'être formulé comme un modèle à une seule matrice ce qui permet l'utilisation de la méthode du col. En généralisant cette méthode aux autres valeurs de n , on pouvait espérer calculer les instantons de tous les modèles conformes minimaux (p, q) .

Les modèles (p, q) peuvent être représentés soit par des modèles à plusieurs matrices, résolus par la méthode des polynômes orthogonaux et qui conduisent dans la double limite d'échelle aux équations de cordes (cf chap. IV part. IV.6), soit par le modèle $O(n)$ pour $n = -2 \cos \pi p/q$ mais alors les résultats sont plus difficiles à interpréter car le modèle $O(n)$ ne reproduit que partiellement le modèle minimal (p, q) (cf chap. VI).

Plus tard, j'ai trouvé une méthode directe pour calculer l'action de l'instanton de tous les modèles minimaux (p, q) , en utilisant les équations de cordes issues de la formulation en termes de modèles à plusieurs matrices, et non la méthode du col du modèle $O(n)$ (article 2). Bien que cette méthode directe soit relativement simple, elle ne donne pas explicitement l'action de l'instanton en fonction de p et q . Nous avons au moins pu montrer que les modèles unitaires $p = q \pm 1$ et les modèles "pseudo-unitaires" $p = (2m + 1)q \pm 1$ sont tous instables. Le travail suivant pourrait consister à tenter une classification complète des modèles stables et instables.

Le modèle $O(n)$

Le modèle $O(n)$ est déjà étudié depuis longtemps [72] et l'on s'intéressait surtout à sa limite continue, c'est à dire que l'on connaissait bien ses points critiques [73], mais le cas non critique

ainsi que le développement topologique en $1/N^2$ étaient peu étudiés.

Comme je viens de l'évoquer, je me suis d'abord intéressé au modèle $O(n)$ comme un moyen de calcul des instantons du modèle d'Ising et des modèles (p, q) . En effet le modèle d'Ising écrit sous la forme d'un modèle $O(1)$ au lieu d'un modèle à deux matrices peut être entièrement résolu par la méthode du col.

Pour calculer les instantons du modèle $O(n)$ j'ai alors dû étudier en grand détail la méthode du col, c'est à dire résoudre l'équation suivante du type Riemann–Hilbert:

$$\omega(\lambda + i0) + \omega(\lambda - i0) + n\omega(-\lambda) = V'(\lambda)$$

La solution en était connue au voisinage des points critiques [73]. Avec J. Zinn–Justin nous avons prolongé cette solution au cas d'un potentiel $V(\lambda)$ polynomial quelconque (pas nécessairement critique) et nous avons développé tout un arsenal de techniques qui nous a permis de calculer de façon exacte l'énergie libre, et d'affiner les approximations au voisinage des points critiques. En particulier nous avons calculé l'action de l'instanton et le comportement d'échelle universel de la résolvante au voisinage du point critique.

A partir de ces techniques on peut maintenant envisager d'attaquer des problèmes plus difficiles, en particulier le développement en puissances de $1/N^2$, c'est à dire les corrections à l'approximation de la méthode du col. C'est le travail sur lequel je compte me concentrer à l'avenir. On peut s'attendre à ce que ce développement soit analogue à celui introduit par [59] pour le modèle à une matrice. Il doit ensuite être possible d'identifier les termes dominants lorsque l'on s'approche d'un point critique, ceci devrait permettre de traiter proprement la double limite d'échelle du modèle $O(n)$, et peut être d'obtenir des équations de cordes ou des flots du type KDV. De plus comme le suggère C. Kristjansen [74] on devine que ce développement doit correspondre à celui que l'on obtiendrait par le modèle de Kontsevitch généralisé.

J'ai également d'autres projets d'application des techniques que j'ai utilisées pour le modèle $O(n)$. Par exemple I.K. Kostov [77] a besoin pour son modèle de cordes ouvertes de diagonaliser l'opérateur linéaire L suivant:

$$L.f = f(\lambda + i0) + f(\lambda - i0) + nf(-\lambda)$$

qui n'est autre que celui que l'on doit inverser pour résoudre l'équation du col du modèle $O(n)$, et j'ose espérer que mes méthodes seront efficaces pour ce problème. On remarque aussi que la même équation intervient dans la résolution du modèle de Potts [78], et une question naturelle est de chercher la relation entre modèle de Potts et modèle $O(n)$.

Enfin, il reste à comprendre la structure des opérateurs du modèle $O(n)$. J'ai déjà signalé que le modèle $O(n)$ permet de décrire un modèle minimal (p, q) avec $n = -2 \cos \pi p/q$, mais que les opérateurs habituels du modèle (p, q) ne sont pas tous présents. Ceci est dû au fait que l'on ne considère que des opérateurs associés à des perturbations polynomiales du potentiel V . Pour avoir les autres opérateurs il faudrait considérer des potentiels non polynomiaux et en particulier avec des singularités en $z = 0$. Par exemple dans le cas du modèle d'Ising, on trouve que le champ magnétique est associé à un potentiel avec un pôle en $1/z$. J'ai déjà commencé d'explorer ce domaine

avec mon directeur de thèse J. Zinn-Justin, mais ce travail n'a pas été achevé ni publié, il existe sous forme de preprint à Saclay [76].

La statistique des valeurs propres de matrices aléatoires

Enfin pour terminer, je vais évoquer rapidement le dernier des points sur lequel j'ai travaillé, mais que je n'ai pas présenté dans ma thèse. C'est un problème issu de la physique de l'état condensé, en particulier du chaos quantique et des conducteurs mésoscopiques. Les propriétés physiques de ces systèmes sont reliés à la distribution des valeurs propres d'une matrice de transmission qui est d'une telle complexité ou alors dépend si fortement des détails microscopiques de l'échantillon qu'elle peut être considérée comme aléatoire.

Bien que l'on ait de nouveau affaire à des matrices aléatoires les objectifs et les hypothèses ne sont pas identiques. En effet en théorie des cordes on s'intéresse à la limite continue, ce qui suppose que la matrice aléatoire se trouve dans un potentiel critique. Ici au contraire, on ne connaît pas le potentiel qui donne la loi de probabilité des matrices de transmission, et à priori ce potentiel n'est pas critique mais générique. On aimerait donc trouver des propriétés universelles qui ne dépendent presque pas des hypothèses faites sur ce potentiel. Des arguments de groupe de renormalisation [62] montrent que dans la limite des matrices de grande taille, le potentiel gaussien est attractif, c'est à dire que toute les lois raisonnables conduisent aux propriétés universelles du potentiel gaussien.

Récemment les auteurs de [10] ont suggéré une autre approche pour le calcul des fonctions de corrélations des valeurs propres. Ils ont retrouvé le fait que dans le régime de courte distance entre valeurs propres les corrélations sont universelles, elles ne dépendent pas du potentiel, mais ils ont trouvé plus: les corrélations ont aussi des propriétés universelles dans le régime de grande distance.

C'est en m'inspirant de leurs travaux que j'ai d'abord constaté que la méthode des boucles permettait de démontrer l'ansatz fait par [10] pour le calcul des polynômes orthogonaux, et j'ai montré que d'une façon générale on savait dans le cadre de la théorie des cordes [58] calculer toutes les fonctions de corrélations dans le régime de grande distance. J'ai ensuite étendu ces résultats à d'autres modèles de matrices: le modèle à deux matrices, la chaîne de matrices, une matrice dépendant du temps, et le modèle $O(n)$. Ces travaux sont en cours et n'ont pas encore été publiés ni même soumis.

Finalement je crois que les modèles de matrices n'ont pas encore livré tous leurs secrets...

Bibliography

- [1] F.J. Dyson, *Commun. Math. Phys.* 19(1970) 235; *Correlations between the eigenvalues of a random matrix*; M.L. Mehta, M. Gaudin, *Nucl. Phys.* A18 (1960) 395, A25 (1961) 447; F.J. Dyson, *J. Math. Phys.* 3 (1962) 140,157,166,1199; M.L. Mehta, F.J. Dyson, *J. Math. Phys.* 4 (1963) 701,713.
- [2] E.P. Wigner, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 47(1951) 790, reprinted in *C.E. Porter, Statistical theories of spectra: fluctuations* (Academic Press, New York, 1965).
- [3] G. Hacken, R. Werbin, J. Rainwater, *Phys.Rev.*C17 (1978)43; W.M. Wilson, E.G. Bilpuch, G.E. Mitchel, *Nucl.Phys.*A245(1975); R.U. Hag, A. Pandey, O. Bohigas, *Phys.Rev.Lett.*48(1982) 1086.
- [4] M.L. Mehta, *Random Matrices, 2e edition* (Academic Press, New York, 1991).
- [5] Contemporary Mathematics, *Random Matrices and their Applications* (Am. math. Soc vol 50, 1984); *Products of random matrices qith applications to Schrödinger operators*, ed. P. Huber, M. Rosenblatt, in *Progress in probability and statistics*, Vol.8 Birkhäuser.
- [6] D.S. Fisher, P.A. Lee *Relation between conductivity and transmission matrix*, *Phys.Rev* B23 (1981) 6851.
- [7] J.L. Pichard, *Quantum Coherence in Mesoscopic Systems* (NATO ASI sries, Plenum, New York 1991) ed. by B. Kramer.
- [8] H.S. Camarda, *Phys.Rev.*A45 (1992) 579; H.S. Camarda, P.D. Georgopulos, *Phys.Rev.Lett.*50(1983) 492.
- [9] *Mesoscopic Phenomena in Solids*, ed. by B.L. Altschuler, P.A. Lee, R.A. Webb in *Modern Problems in Condensed Matter Sciences*, Vol.30 (1991).
- [10] E. Brézin and A. Zee, *Nucl. Phys.*B402 (1993); *Correlation functions in disordered systems*.
- [11] R.A. Jalabert, J.L Pichard, C.W.J. Beenakker, *Universal quantum signature of chaos in ballistic transport* S94017.
- [12] M.C. Gutzwiller, *Chaos in classical and quantum mechanics*, Springer Verlag

- [13] *Chaotic behaviour in quantum systems* ed. by G. Casati, NATO–ASI Series Vol.120 Plenum Press; *Quantum Chaos* ed. by H.A. Cerdeira, R. Ramawamy, M.C. Gutzwiller, G. Casati, World Scientific (1990); *Chaos and quantum physics* Les Houches 1989.
- [14] G. 't Hooft, *Nucl.Phys.* B72 (1974) 461.
- [15] K. Wilson, *Phys. Rev.* D7 2911, D10(1974) 2445.
- [16] I.K. Kostov, *Nucl. Phys.* B415 (1994) 29 ; V. Kazakov, *Phys. Lett.* B128 (1983) 316; K.H. O'Brien, J.B. Zuber, *Nucl. Phys.* B253 (1985) 621, *Phys. Lett.* B144 (1984) 407; I.K. Kostov, *Phys. Lett.* B138 (1984) 191, B147 (1984) 445.
- [17] Yu. Makeenko, A.A. Migdal, *Nucl. Phys.* B188 (1981) 269.
- [18] *Statistical mechanics of membranes and surfaces*, Jerusalem winter school, vol D5, eds. D. Nelson, T. Piran, S. Weinberg, World Scientific (1989).
- [19] *Introduction to the statistical mechanics of random surfaces and membranes*, F. David in *Two dimensional quantum gravity and random surfaces*, Jerusalem winter school 1991, eds D.J. Gross, T. Piran, S. Weinberg, World Scientific.
- [20] M.E. Fisher, *Interfaces: fluctuations, interactions and related transitions* in [18]; S. Leibler, *Equilibrium statistical mechanics of fluctuating films and membranes* in [18]; *Physics of amphiphilic layers*, eds. J. Meunier, D. Langevin, N. Boccara, Springer Verlag 1987.
- [21] E.L. Thomas, J.R. Reffner, J. Bellare, *A menagerie of interface structure in copolymers systems*, International workshop on geometry and interfaces, Colloques de physique C7-1990, J. Phys. France (Colloques) 23 (1990) 119.
- [22] D. Jasnow, *Renormalization group theory of interfaces*, in *Phase transitions and critical phenomena*, Vol 10, C. Domb, J.L. Lebowitz eds. Academic Press, New-York 1986.
- [23] A.A. Migdal, *Loop equations and area law in turbulence*. PUPT-1426.
- [24] M. Green, J. Schwarz, E. Witten, *Superstring Theory*, Cambridge University Press (1987).
- [25] *The first 15 years of superstring theory*, ed. by J. Schwarz, World Scientific (1985).
- [26] G. Veneziano, *An introduction to dual models of strong interactions and their physical motivations*, *Phys. Rep.* C9 199; J.H. Schwarz, *Dual resonance theory*, *Phys. Rep.* C8 (1973) 269.
- [27] C. Rebbi, *Dual models and relativistic quantum strings*, *Phys. Rep.* C12 (1974) 1.
- [28] J. Scherk, J.H. Schwarz, *Dual Model for non hadrons*, *Nucl. Phys.* B81 (1974) 118;
- [29] P. Ramond, *Dual theory for fermions*, *Phys. Rev.* D3 (1971) 2415; A. Neveu, J.H. Schwarz, *Nucl. Phys.* B31 86.

- [30] Y. Nambu, *Lectures at Copenhagen Symposium 1970*; T. Goto, *Relativistic quantum mechanics of a one-dimensionnal mechanical continuum and subsidiary condition of dual resonance model*, *Prog. Theor. Phys.* 46 1560.
- [31] A.M. Polyakov, *Phys. Lett.* B103 (1981) 207; B103 211.
- [32] A.M. Polyakov, *Gauge fields and strings*, Contemporary concepts in physics, Vol 3, ed. Harwood academic publishers.
- [33] *Two dimensional quantum gravity and random surfaces*, ed by D.J. Gross, T. Piram, S. Weinberg, Jerusalem Winter School for Theoretical Physics, Worl Scientific (1991).
- [34] *String Theory and Quantum Gravity*, proc of the Trieste Spring School (1991), ed by J. Harvey, R. Iengo, K.S. Narav9in, S. Randjbar Daemi, H. Verlinde, World Scientific (1991).
- [35] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.* B241 (1974) 333.
- [36] C. Itzykson, H. Saleur, J.B. Zuber, *Conformal Invariance and Applications to Statistical Mechanics* World Scientific (1988).
- [37] J.L. Cardy, *Domb Lebowitz* Vol 11, Academic Press New York.
- [38] V.S. Dotsenko, *Nucl. Phys.* B235 (1984) 54; V.A. Fateev, *Nucl. Phys.* B251 (1985) 691.
- [39] V.G. Kac, *Springer lecture notes in physics* 94 (1979) 441; Infinite dimensional Lie algebras, Birkhäuser; B.L. Feigins, D.B. Fuchs, *Funct. Anal. and Appl.* 16 (1983) 114; 17 (1984) 241. D. Friedan, Z. Qiu, S. Shenker, *Phys. Rev. Lett* 52 (1984) 1575.
- [40] *Large N Expansion in Quantum Field Theory and Statistical Physics*, ed. by E. Brezin and S.R. Wadia, World Scientific.
- [41] F. David, *Nucl.Phys.* B257(1985)45; V. Kazakov, *Phys. Lett.* B150 (1985) 282; J. Ambjørn, B. Durhuus, J. Frölich, *Nucl.Phys.* B257(1985)433; J. Frölich, *Lecture Notes in Physics* Vol.216, ed L. Garrido (SPringer, Berlin 1985);
- [42] V. Kazakov, I.K. Kostov, A.A. Migdal, *Phys. Lett.* B157 (1985) 295; D. Boulatov, V. Kazakov, I.K. Kostov, A.A. Migdal, *Nucl. Phys. Lett.* B174 (1986) 87, *Nucl.Phys.* B275 (1986) 641.
- [43] V.G. Knizhnik, A.M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov, *Mod. Phys. Lett.* A3 (1988) 819; F. David, *Mod. Phys. Lett.* A3 (1988) 1651; J. Distler, H. Kawai, *Nucl. Phys.* B321 (1989) 509.
- [44] V. Kazakov, *Mod. Phys. Lett.* A4 (1989) 1191.
- [45] L. Alvarez-Gaumé, *Random Surfaces, Statistical Mechanics, and String Theory*, Lausanne lectures, winter 1990; P. Ginsparg, *Matrix Models of 2d Gravity*, Trieste Summer school, July 1991, LA-UR-91-4101 (hep-th/9112013); A. Bilal, *2d Gravity from Matrix Models*, John Hopkins Lectures, CERN TH5867/90.
- [46] *Random surfaces and quantum gravity*, proc. of 1990 Cargèse workshop, ed. O. Alvarez, E. Marinari, P. Windey, NATO ASI Series B262.

- [47] I. Klebanov, *String theory in two dimensions*, Trieste spring 1991, Princeton preprint PUPT-1271 (hep-th/9108019); D. Kutasov, *Some properties of (non) critical strings*, Trieste spring 1991, PUPT-1277 (hep-th/9110041); J. Mañes, Y. Lozano, *Introduction to nonperturbative 2d quantum gravity*, Barcelona preprint UB-ECM-PF3/91; E. Martinec, *An introduction to 2d gravity and solvable models*, Trieste spring 1991, Rutgers preprint RU-91-51; F. David, *Simplicial quantum gravity and random lattices*, Les Houches July 1992, Saclay preprint T93/028.
- [48] P. Ginsparg, G. Moore, *Lectures on 2d gravity and 2d string theory*, TASI summer 1992, preprint LA-UR-92-3479(92), YCTP-P23-92, hep-th@xxx.lanl.gov.9304011.
- [49] E. Brezin, V. Kazakov, *Phys. Lett.* B236 (1990) 2125; M.R. Douglas, S.H. Shenker, *Nucl. Phys.* B335 (1990) 635; D.J. Gross, A.A. Migdal, *Phys. Rev. Lett.* 64 (1990) 27.
- [50] P. Di Francesco, P. Ginsparg, J. Zinn-Justin, *2D Gravity and random matrices* SPhT/93-061.
- [51] E. Brezin, C. Itzykson, G. Parisi, J.B. Zuber, *Comm. Math. Phys.* 59(1978)35
- [52] F.J. Dyson, *J. Math. Phys.* 3 (1962) 1191.
- [53] M. Douglas, S. Shenker, *Nucl. Phys.* B335 (1990) 635; E. Brézin, V. Kazakov, *Phys. Lett.* B326 (1990) 144; D. Gross, A. Migdal, *Phys. Rev. Lett.* 64 (1990) 127, *Nucl. Phys.* B340 (1990) 333.
- [54] C. Itzykson, J.B. Zuber, *J. Math. Phys.* 79 (1980) 327; S. Chada, G. Mahoux, M.L. Mehta, *J. Phys.* A14 (1981) 579.
- [55] M.R. Douglas, *Phys. Lett.* B348 (1991) 507.
- [56] I.M. Gel'fand, L.A. Dikii, *Russian Math. Surveys* 30:5 (1975) 77; *Funct. Anal. Appl.* 10 (1976) 259.
- [57] J.M. Daul, V.A. Kazakov, I.K. Kostov, *Nuc.Phys*B409 (1993) 311, *Rational theories of 2d gravity from the two-matrix model*.
- [58] J. Ambjørn, J. Jurkiewicz and Yu.M. Makeenko, *Phys. Lett.* B251 (1990) 517; *Multiloop correlators for two-dimensional quantum gravity*.
- [59] J. Ambjørn, L. Chekhov, C.F. Kristjansen, Yu Makeenko, *Nucl. Phys.* B404 (1993) 127; *Matrix model calculations beyond the spherical limit*.
- [60] E. Brezin, J. Zinn-Justin, *Phys. Lett* B288 (1992) 54.
- [61] S. Higuchi, C. Itoi, S. Nishigaki, N. Sakai, *Nonlinear Renormalization Group Equation for Matrix Models*, July 93.
- [62] S. Higuchi, C. Itoi, S. Nishigaki, N. Sakai, *Large N renormalization group approach to matrix models*, Saclay preprint SPhT94/110.
- [63] *Large Order Behaviour of Perturbation Theory*, ed. J.C. Le Guillou and J. Zinn-Justin, in Current physical sources and comments, Vol.7 (1990).

- [64] J. Zinn–Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Oxford Univ. Press (1993), pp 91–928 in 2nd ed.
- [65] E. Brézin, E. Marinari, G. Parisi, *Phys. Lett.* B242 (1990) 35.
- [66] P. Ginsparg, J. Zinn–Justin, *Phys. Lett.* B255 (1991) 189; *Action principle and large order behaviour of non-perturbative gravity*, in [46].
- [67] F. David, *Nucl. Phys.* B238 (1990) 176.
- [68] F. David, *Non perturbative effects in 2D gravity and matrix models*, in [46].
- [69] B. Eynard, J. Zinn–Justin, *Large order behaviour of 2D gravity coupled to $c < 1$ matter*, *Phys. Lett.* B302 (1993) 396.
- [70] V. Kazakov, *Phys. Lett.* A119 (1986) 140.
- [71] C. Itzykson, J.M. Drouffe, *Théorie Statistique des Champs*, Inter Editions, ed du CNRS (1989)
- [72] I.K. Kostov, *Mod. Phys. Lett.* A4 (1989) 217; M. Gaudin, I.K. Kostov, *Phys. Lett.* B220 (1989) 200.
- [73] I.K. Kostov, M Staudacher, *Multicritical phases of the $O(n)$ model coupled to 2D gravity*, *Nucl. Phys.* B384 (1992) 459.
- [74] C. Kristjansen, *Multi-loop correlators for rational theories of 2d gravity from the generalized Kontsevitch models*, Saclay preprint T94/102.
- [75] B. Eynard, J. Zinn–Justin, *The $O(n)$ model on a random surface, critical points and large order behaviour*, *Nucl. Phys.* B386 (1992) 55.
- [76] B. Eynard, J. Zinn–Justin, *The $O(n)$ model on a random surface, critical points and large order behaviour II*, Saclay preprint T92/042.
- [77] I.K. Kostov, *Field theory for open and closed strings with a discrete target space*, Saclay preprint T94/097.
- [78] J.M. Daul, *Q -states Potts model on a random planar lattice*, preprint LPTENS nov 94.
- [79] J.M. Kosterlitz, *The critical properties of the two dimensionnal xy model*, *J. Phys.* C7 (1974) 1046.