

UNIVERSITE DE PARIS-SUD U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY
--

THESE

présentée
pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Paris XI ORSAY

par

CHRISTOPHE GROJEAN

Sujet :

**Symétries et brisures de symétries
au-delà de la théorie électrofaible**

Soutenue le 4 mai 1999 devant la Commission d'examen :

MM	Ignatios ANTONIADIS,	Rapporteur,
	Pierre BINÉTRUY,	Président,
	François DELDUC,	Rapporteur,
	Sergio FERRARA,	
	Carlos SAVOY,	Directeur de thèse,
	Jean-Bernard ZUBER.	

UNIVERSITE DE PARIS-SUD U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY
--

THESE

présentée
pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Paris XI ORSAY

par

CHRISTOPHE GROJEAN

Sujet :

**Symétries et brisures de symétries
au-delà de la théorie électrofaible**

Soutenue le 4 mai 1999 devant la Commission d'examen :

MM	Ignatios ANTONIADIS,	Rapporteur,
	Pierre BINÉTRUY,	Président,
	François DELDUC,	Rapporteur,
	Sergio FERRARA,	
	Carlos SAVOY,	Directeur de thèse,
	Jean-Bernard ZUBER.	

Remerciements

“**Q**u'est-ce que notre imagination comparée à celle d'un enfant qui veut construire un chemin de fer avec des asperges ?” s'interrogeait Jules Renard. Les trois années de travail qui se concrétisent aujourd'hui dans ces quelques pages, et tout le cheminement qui m'y a conduit, j'ai essayé de les vivre avec l'émerveillement de l'enfant de Jules Renard, cet émerveillement qui accompagne la découverte du sens caché des objets et des choses de ce monde, découverte à laquelle nous donnent accès l'imagination et l'inventivité. Mais celles d'un étudiant s'apprêtant à soutenir sa thèse sont surtout le fruit d'une longue éducation et je sais que je suis redevable à beaucoup de personnes : à mes parents d'abord qui m'ont appris à formuler mes premières questions et y ont apporté leurs réponses, à tous les enseignants qui m'ont formé, à mes collaborateurs, Carlos, Emilian, Jihad, Philippe et Stefan, qui m'ont accepté avec mes ignorances et ont permis que nous apprenions certaines choses ensemble. Beaucoup d'amis ont eu une influence moins directe mais tout aussi déterminante : Thierry, Bob et Jacqueline, Fabrice et Sandrine.

En 1997, était votée en France une loi sur la réduction du temps de travail : des heures passées au *labo*, certaines allaient devoir être comptabilisées dans le temps de loisir. Vivien et Michel, puis Géraldine et Karim qui ont partagé leur bureau avec moi ont beaucoup contribué à ce décompte par leur joie et leur bonne humeur. Francis, Jean-Yves, Philippe et Riccardo m'ont accompagné pendant mes nombreuses pauses. D'une façon plus générale, je remercie l'ensemble des membres du Service de Physique Théorique et plus particulièrement ses deux secrétaires, Sylvie et Anne-Marie, et ses deux chefs successifs, Jean Zinn-Justin et Jean-Paul Blaizot.

Je n'oublie pas non plus mes amis disséminés dans le monde et avec qui j'ai partagé quelques joies de physique : Grégoire B., Vijay B., Cédric D., Valérie E., Stéphane L., Jean-Baptiste & Sébastien M., Ruben M., Benoît P., Boris P., Pierre V. ... Ainsi que mes copains de l'Ecole Normale : Arnaud B., David C., Sylvain C., François G., François-Xavier H., Thomas K., Judith V., Alexandre V.

Je remercie les personnes qui ont rendu plus agréables les deux interruptions de ma thèse qu'ont été mon séjour au CERN et mon année de service national : Nanie, Suzie, Eric R., Philippe R., François de G. de D., Héloïse D., Sophie P., Jacques D., Bernard D., Jean-François B.

Toute ma reconnaissance va à mon directeur de thèse, C.A. Savoy, qui m'a initié

à la recherche. Il a été secondé en cela, tant la tâche était ardue, par E. Dudas et J. Mourad. J'espère maintenant être bien armé et pouvoir venir vous aider à démêler de nouveaux problèmes de physique.

Je remercie l'ensemble des membres du jury : P. Binétruy, C.A. Savoy, S. Ferrara, J.B. Zuber et I. Antoniadis et F. Delduc qui ont accepté la lourde tâche d'être rapporteurs. Qu'à la suite de P. Valéry, ils excusent mes bêtises, puisque "il importe peu de savoir ce que l'auteur dit ; c'est mon erreur qui est Auteur".

Enfin je remercie les éditeurs de *Nuclear Physics B* et de *Classical and Quantum Gravity* pour m'avoir accordé la permission de reproduire mes articles publiés dans leur revue.

Trois personnes m'ont prodigué sans retenue leur réconfort et leur chaleur, m'apportant leur tendresse et leur humanité : *G.*, *I.* et *V.* je vous embrasse. Et "puisque la lutte elle-même vers les sommets suffit à remplir un cœur d'homme et qu'il faut imaginer Sisyphe heureux", je vous promets d'essayer de l'être à mon tour.

Une pensée de tendresse va l'ensemble de ma famille qui m'a soutenu et sans qui cette thèse n'aurait pas pu être menée à son terme.

Table des matières

Introduction	1
1 Vers une formulation non perturbative des cordes	5
1.1 Les théories perturbatives de cordes	5
1.1.1 Cordes libres. Interactions. Quantification	5
1.1.2 Les théories effectives de supergravité à dix dimensions	11
1.2 Approches non perturbatives. Dualités	14
1.3 Les p -branes des théories de supercordes	16
1.3.1 Les 0-branes de l'électromagnétisme classique	16
1.3.2 Les p -branes comme solutions des actions effectives de supergravité	18
1.3.3 Les dualités des supercordes au niveau des branes.	25
1.4 La dualité de Maldacena	31
1.4.1 Théories effectives de D -branes	31
1.4.2 Géométrie asymptotique. Invariance superconforme	33
1.4.3 Conjecture de Maldacena. Holographie	35
1.5 Etude de la M - 5 brane	36
1.5.1 Modes de masse nulle de la M -5 brane	36
1.5.2 Description en superspace de la M -5 brane libre	38
1.5.3 Interaction d'une M -5 sur un bord d' $AdS_7 \times S^4$	40
1.6 Annexe : supergravité à onze dimensions.	42
1.6.1 Le lagrangien et les transformations de supersymetrie	42
1.6.2 Formulation en superspace	43
1.7 Annexe : Espaces AdS . Invariance conforme	45
1.7.1 Construction des transformations conformes par plongement dans un espace de dimension plus élevée	45
1.7.2 Espaces AdS_d	46
1.7.3 Invariance conforme des espaces AdS_d	48
1.7.4 La frontière d'un espace AdS	49
2 Approche phénoménologique de la M théorie	51
2.1 Réduction dimensionnelle. Théories de Kaluza–Klein	51
2.1.1 théorie en ϕ^4	52
2.1.2 théorie de Maxwell	53
2.1.3 théorie d'Einstein; réduction dimensionnelle de la courbure . . .	54

2.1.4	Les divers systèmes d'unités de la théorie des cordes	57
2.2	Régime de couplage fort. Théorie d'Hořava–Witten	60
2.2.1	Unification des constantes de couplage en théorie des cordes . .	60
2.2.2	Théorie effective de basse énergie de la M théorie	62
2.3	Compactification sur un espace de Calabi–Yau	65
2.3.1	Brisure partielle de supersymétrie par compactification	65
2.3.2	Structure Kählerienne à $4d$	65
2.4	Compactification de la M théorie	67
2.4.1	Troncation de la M théorie	67
2.4.2	Structure Kählerienne de M théorie à $4d$	68
2.4.3	Compactification à la Scherk–Schwarz	69
2.4.4	Résultats phénoménologiques	71
3	Etude de la hiérarchie de masse des quarks et des leptons	73
3.1	La hiérarchie de masse du modèle standard	73
3.1.1	Brisure de symétrie et masse des particules	73
3.1.2	Masses des quarks et des leptons dans le modèle standard . . .	75
3.2	Modèle de Froggatt–Nielsen supersymétrique	78
3.2.1	Hiérarchie de jauge et supersymétrie	78
3.2.2	Le modèle standard supersymétrique minimal	79
3.2.3	Symétrie de saveur et masse des fermions	80
3.2.4	Compensation des anomalies	81
3.3	Etude d'un modèle de symétrie de saveur	83
3.3.1	Invariances modulaires	83
3.3.2	Calculs des termes <i>soft</i>	84
3.3.3	Etude numérique	86
3.3.4	Conclusion	89
	Appendices	93
A	Géométrie différentielle et Riemannienne	93
A.1	Espaces tangent, cotangent	93
A.2	Formes différentielles	95
A.3	Action d'un groupe de Lie sur une variété	97
A.4	Géométrie (pseudo-)Riemannienne	99
A.4.1	Métrique et connection affine	99
A.4.2	Connection affine et courbure dans un système de coordonnées .	102
A.4.3	Dualité de Hodge	105
B	Variétés complexes. Structure Kählerienne	109
B.1	Variétés complexes. Structure presque complexe.	109
B.2	Variétés Hermitiennes	110
B.3	Variétés Kähleriennes.	112

C	Matrices de Dirac. Spineurs. Supersymétrie	115
C.1	Notations	115
C.2	Matrices de conjugaison	116
C.3	Propriétés de symétrie	118
C.4	Produits. Traces	120
C.5	Réarrangements de Fierz	121
C.6	Contraintes sur les spineurs	122
C.7	Représentations de l'algèbre de supersymétrie	124
	Publications	129
I	Abelian Flavour Symmetries in Supersymmetric Models	129
1	Introduction	132
2	Yukawa matrices from horizontal $U(1)_X$ gauge symmetry	134
3	$U(1)_X$ and modular symmetries in effective supergravity from string models	137
4	Predictions for the soft terms	140
5	Mass terms in the Higgs sector	144
6	$U(1) \otimes U'(1)$ horizontal symmetry	148
7	Phenomenological aspects	151
8	Conclusions	153
II	Four-dimensional M-theory and supersymmetry breaking	157
1	Introduction	160
2	Dimensional reduction	161
3	The spontaneous breaking of $N = 1$ supersymmetry in four dimensions by compactification	166
4	Phenomenological implications of M -theory compactifications	171
5	Conclusions	175
III	Superconformal 6d (2,0) theories in superspace	179
1	Introduction	182
2	Free supermultiplet	183
3	Super two-form	185
4	Sigma model	186
5	Superconformal transformations	188
6	Superconformal invariance	191
7	Conclusion	193
A	Appendix. Conventions	194
IV	Anomaly Matching and Syzygies in $N=1$ Gauge Theories	199
1	Introduction	202
2	Flat Directions, Analytic Invariants and Syzygies	204
3	The 't Hooft Anomaly Matching Conditions	206
4	Anomaly Matching and Syzygies	209

5	A Case Study: $SU(N_c)$ and $Spin(7)$ Gauge Theories	214
6	Syzygies and Duality	216
7	Geometry of the Moduli Spaces	219
8	Conclusions	223
V	Super Fivebranes near the boundary of $AdS_7 \times S^4$	227
1	Introduction	230
2	AdS and near horizon geometry	231
3	A realisation of $Osp(6, 2 2)$ on vector fields	233
4	Modified bosonic realisation	234
5	Modified superconformal realisations	235
6	Expansion in R	237
7	Invariant metric	239
8	Interaction in the six-dimensional (2,0) theory	241
V.A	Conventions and Fierz rearrangements	243
V.B	The $Osp(6, 2 2)$ algebra	246
	Bibliographie	249

Introduction

“**L**a nature est-elle symétrique ?” : question philosophique d’un spectateur du monde qui l’entoure tant il est vrai que de la structure fractale des flocons de neige à la répartition des étoiles dans les galaxies et de ces galaxies dans l’univers tout entier, les deux ‘infinis’ de Pascal semblent obéir à un ordre symétrique. Mais au-delà de la contemplation est l’interrogation : “Comment la nature est-elle symétrique et jusqu’à quel degré l’est-elle ?” C’est à ces questions que peut tenter de répondre un physicien.

La notion de symétrie est un principe d’induction : ce que l’on voit se reproduit à l’infini, à l’identique ou selon une règle bien précise. Ainsi l’invariance galiléenne stipule-t-elle que les lois de la physique sont identiques dans tous les référentiels galiléens, ou le principe de relativité restreinte, que la vitesse de la lumière dans le vide est une constante indépendante de l’observateur.

La notion de symétrie a d’abord servi à décrire et classer les systèmes physiques, notamment en cristallographie : Bravais a mis en évidence en 1850 la structure périodique des cristaux; Fedorov, Schoenflies et Barlow en 1890 ont dénombré les 230 symétries possibles de ces cristaux permettant de les classer.

A la fin du XIX^e siècle, P. Curie a énoncé un principe qui confère un statut dynamique à la notion de symétrie : “la symétrie de l’effet est au moins égale à celle de la cause”. Pour la première fois depuis Galilée et Newton, il était question de symétrie et d’interaction entre deux systèmes.

Une bonne part de la physique moderne est le prolongement de cette idée. Avec notamment la découverte que de nombreux phénomènes physiques présentent des symétries dans des espaces plus abstraits que l’espace-temps physique des rotations et des translations. Les théories de jauge, invariantes sous une symétrie locale, étaient nées et allaient révolutionner la physique de la seconde moitié du XX^e siècle, tant en matière condensée par l’étude des phénomènes critiques et des transitions de phase, qu’en physique des ‘hautes énergies’ fournissant le seul cadre théorique cohérent alliant les lois de la relativité restreinte à celles de la mécanique quantique. Avec les théories de jauge, la notion de symétrie en théorie des champs est devenue un principe dynamique à part entière : à toute invariance locale est associée une force correspondant à l’échange d’un boson de jauge. Cet édifice théorique s’est concrétisé dans la construction du modèle standard des interactions électrofaibles et fortes associées à une invariance sous le groupe $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. Cette théorie est renormalisable

en ce sens qu'il est possible d'obtenir les valeurs des paramètres définissant la théorie à une certaine énergie à partir de ceux mesurés à une énergie plus petite ; c'est le groupe de renormalisation qui contrôle cette évolution de la théorie en fonction de l'énergie.

Le modèle standard de la physique des particules a été testé expérimentalement jusqu'à des énergies de l'ordre de 100 GeV. Mais il y a de bonnes raisons de penser qu'il n'est pas une théorie ultime. La plus sérieuse de ces raisons vient du fait qu'il n'inclut pas les forces de gravitation et ne peut pas les inclure puisque la constante de Newton $\mathcal{G}_\mathcal{N}$ qui mesure le couplage de la gravitation est une constante dimensionnée qui rend la théorie non renormalisable c'est-à-dire incompatible avec la mécanique quantique. Cette simple constatation permet de donner une borne supérieure au domaine de validité du modèle standard. Il est en effet nécessaire de quantifier une théorie des interactions de particules élémentaires lorsque l'on examine des phénomènes physiques à une distance de l'ordre de la longueur d'onde de Compton $\lambda_c = \hbar/mc$ des particules. D'autre part la théorie de la relativité générale devient nécessaire lorsque la taille caractéristique d'un système de masse m est de l'ordre de son rayon de Schwarzschild $R_{\text{sch}} = 2\mathcal{G}_\mathcal{N}m/c^2$. Généralement ces deux régimes sont distincts, mais lorsqu'ils coïncident c'est-à-dire lorsqu'on étudie des systèmes pour lesquels la longueur de Compton est égale au rayon de Schwarzschild, alors une formulation quantique de la gravitation est indispensable. L'égalité $\lambda_c = R_{\text{sch}}$ correspond à des énergies de l'ordre de l'échelle de Planck : $mc^2 \sim \sqrt{\hbar c^5/\mathcal{G}_\mathcal{N}} \sim 10^{19}$ GeV. Au-delà de cette échelle, la physique des lois de la nature ne peut plus être décrite par une théorie des champs. Ce n'est qu'au milieu des années 70, qu'une nouvelle théorie est apparue comme un candidat sérieux (et unique à l'heure actuelle) à la description quantique de la gravitation : les objets fondamentaux perdent leur nature ponctuelle et deviennent des cordes.

L'avènement de la théorie des cordes s'est accompagné de plusieurs bouleversements dans notre vision des propriétés de l'espace-temps :

- tout d'abord, il s'est très vite avéré que la cohérence quantique réclamait des dimensions spatiales supplémentaires. Dans notre expérience à basse énergie de la nature, ces dimensions seraient repliées sur elles-mêmes et donc invisibles. Ce qui ne veut pas dire pour autant qu'elles soient sans incidence sur notre perception de la physique des particules ;
- d'autre part, il apparaît de nouvelles symétries au niveau de l'espace-temps : les supersymétries qui relient bosons et fermions. Ces supersymétries peuvent être interprétées comme la conséquence de l'existence de nouvelles dimensions purement quantiques de l'espace-temps.

Que le modèle standard ne soit qu'une théorie effective de basse énergie d'une théorie plus fondamentale comme la théorie des cordes n'est pas sans conséquence. L'un des objectifs de cette thèse a été l'étude de ces conséquences.

A des énergies intermédiaires entre l'échelle électrofaible et l'échelle de la théorie des cordes, de nouveaux phénomènes physiques devraient pouvoir être observés qui se traduiraient notamment par l'existence d'une floraison de nouvelles particules : les partenaires supersymétriques des particules du modèle standard. Leur découverte est l'un des enjeux majeurs de la physique expérimentale actuelle.

La théorie des cordes est *a priori* une théorie entièrement dynamique c'est-à-dire que, mise à part l'échelle fondamentale de cette théorie, toutes les autres grandeurs sont déterminées dynamiquement par un principe de minimisation d'une action. Le vide de la théorie des cordes définirait entre autre les propriétés géométriques de l'espace-temps et expliquerait ainsi pourquoi seules quatre dimensions ne sont pas compactifiées. La géométrie de l'espace compactifié fixe également le contenu en matière observable à basse énergie et sa structure de jauge permettant de comprendre l'émergence du groupe de jauge du modèle standard construit de façon *ad hoc* ainsi que la répartition des quarks et des leptons en trois familles (le nombre de familles est relié à la topologie de l'espace compactifié). Cependant cette compréhension 'ultime' de la nature n'est encore qu'un objectif à long terme. Essentiellement parce que la détermination du vide de la théorie des cordes est un problème délicat : classiquement, une théorie peut avoir plusieurs vides dégénérés mais en général cette dégénérescence est levée au niveau quantique, sauf dans des théories supersymétriques où des théorèmes de non renormalisation assurent l'absence de corrections radiatives. Le choix du vide de la théorie des cordes dépend donc de la brisure de la supersymétrie, mécanisme de brisure qui réclame une connaissance non perturbative de la théorie des cordes elle-même. Dans la recherche de cette formulation non perturbative, l'une des questions principales est d'abord de définir les degrés de liberté fondamentaux du régime de couplage fort puisqu'il se pourrait tout à fait qu'ils ne s'identifient plus aux cordes, objets fondamentaux *a priori* de la limite de couplage nul uniquement.

Le manuscrit de cette thèse est organisé en trois parties :

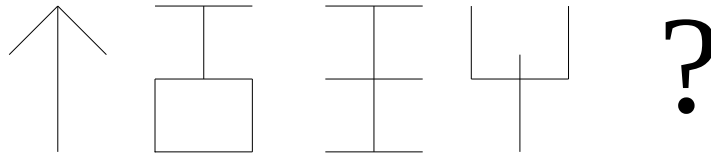
- Le premier chapitre est une introduction générale à la théorie des cordes et aux avancées récentes vers une formulation non perturbative. L'accent est mis sur les objets solitoniques étendus des différentes théories de supercordes, objets qui pourraient être amenés à jouer un rôle de première importance en étant considérés comme les degrés de liberté fondamentaux du régime de couplage fort. La fin du chapitre est consacrée aux travaux reproduits dans les Annexes III et V. A partir des propriétés de symétrie que doivent vérifier les objets solitoniques, on construit une théorie en interaction pouvant décrire leur dynamique.
- Le deuxième chapitre est une étude phénoménologique du régime de couplage fort de la théorie des cordes. Cette étude s'intéresse essentiellement à la compactification des dimensions supplémentaires générales aux théories de cordes. Cette étude permet d'identifier les champs de la théorie à basse dimension à partir des caractéristiques géométriques de l'espace compactifié. De plus il est montré comment briser la supersymétrie au cours de la compactification. Nous avons obtenu un scénario phénoménologiquement cohérent prédisant une échelle intermédiaire de l'ordre de 10^{12} GeV. Ce chapitre est une introduction à l'article reproduit dans l'Annexe II.
- Enfin le troisième chapitre est consacré à des problèmes liés directement à la physique des particules à basse énergie. Le modèle standard est confronté à

certaines insuffisances en ce sens qu'il repose sur un choix *ad hoc* de paramètres pas toujours très naturel, notamment en ce qui concerne la masse des fermions. Ce chapitre propose une théorie d'extension du modèle standard, objet de la publication I. Les clefs de voûte de cette extension sont des propriétés de symétries modulaires inhérentes à une théorie de cordes sous-jacente. Les conséquences de ces symétries sont étudiées d'abord à haute énergie puis, après renormalisation, à l'échelle électrofaible, mettant ainsi en avant un certain nombre de propriétés directement vérifiables auprès des futurs accélérateurs de particules.

Trois appendices techniques nécessaires à la lecture des articles reproduits en Annexe ont été ajoutés au corps du document.

La publication IV s'intéresse aux propriétés des vides d'une théorie de jauge supersymétrique. Cette publication n'a pas été discutée dans le texte car elle sort du cadre retenu. Néanmoins, elle a été ajoutée car elle permet d'éclairer la discussion touchant aux degrés de libertés fondamentaux d'une théorie puisqu'elle montre comment les degrés de liberté composites d'une théorie peuvent être vus comme les degrés de liberté fondamentaux d'une théorie duale équivalente à basse énergie.

En guise d'ouverture, il me semble que le petit problème suivant illustre les difficultés qu'il peut y avoir à rechercher une extension du modèle standard 'trop' symétrique comme l'est peut-être son extension supersymétrique



La présence des partenaires supersymétriques associés aux particules du modèle standard venant finalement obscurcir l'observation des symétries de la théorie, on peut comprendre les difficultés à observer expérimentalement la supersymétrie ...

Chapitre 1

Vers une formulation non perturbative des cordes

Ce premier chapitre théorique est centré sur la théorie des cordes et ses aspects non perturbatifs. D'abord formulées pour tenter de décrire les interactions fortes [1], les théories de cordes se sont très vite avérées une description quantique de la gravitation [2, 3]. La supersymétrie joue un rôle essentiel pour assurer la cohérence quantique de ces théories de cordes. Au milieu des années 80, il a été montré que seules cinq théories pouvaient être formulées de façon cohérente. De surcroît l'une de ces théories, la corde hétérotique $E_8 \times E_8$ était dotée de tous les attraits pour séduire les phénoménologues (spectre chiral et groupe de jauge). Une dizaine d'années plus tard, les cinq théories de supercordes, définies initialement dans un régime de couplage faible, apparaissent comme différentes limites d'une seule et même théorie, des relations de dualité permettant de les relier les unes aux autres. Cette nouvelle théorie est appelée U ou M théorie.

Dans la première section, il sera fait quelques rappels sur les théories de cordes et leurs liens avec les théories de supergravité. La deuxième section présente les différentes relations de dualité. La section 3 construit des états solitoniques jouant un rôle primordial dans les relations de dualité. La quatrième section est une introduction aux idées récentes de dualité entre les théories de cordes et certaines théories superconformes. Enfin la section 5 est une présentation de mes travaux de recherche reproduits en annexe à cette thèse. Deux notes techniques, l'une sur la supergravité à onze dimensions et l'autre sur la géométrie des espaces Anti-de-Sitter et leurs propriétés d'invariance closent ce chapitre.

1.1 Les théories perturbatives de cordes

1.1.1 Cordes libres. Interactions. Quantification

Les degrés de liberté fondamentaux de la théorie des cordes sont des objets ayant une extension spatiale et évoluant dans un espace-temps de plongement supposé, dans un premier temps, être un espace Minkowskien plat. Au cours de leur évolution dans le

temps, ces cordes décrivent une surface d'univers à deux dimensions. La tension de la corde c'est-à-dire sa masse par unité de longueur définit l'échelle fondamentale de la théorie. La dynamique d'une corde libre bosonique (sur laquelle ne vivent que des champs scalaires sous les reparamétrisations de la surface d'univers) est donnée par l'action de Nambu-Goto [4, 5] :

$$\mathcal{S}_{NG} = -\frac{1}{2} M_S^2 \int d^2\xi \sqrt{\left| \det \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial X_\mu}{\partial \xi^b} \right) \right|} \quad (1.1)$$

où $X^\mu(\xi^a)$ sont les coordonnées dans l'espace-temps de plongement d'un point de la corde repéré par ses coordonnées ξ^a ($a = 1, 2$) sur la surface d'univers. M_S est l'échelle fondamentale de la théorie des cordes (les coordonnées ξ^a de la surface d'univers sont sans dimensions et les coordonnées X^μ dans l'espace de plongement ont la dimension d'une longueur). Cette action est équivalente à l'action de Polyakov [6–8] :

$$\mathcal{S}_P = \frac{1}{4} M_S^2 \int d^2\xi \sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu \quad (1.2)$$

où γ_{ab} est un champ auxiliaire correspondant à la métrique sur la surface d'univers. L'invariance par difféomorphisme sur la surface d'univers et l'invariance par transformation de Weyl nous permettent de nous placer dans la jauge conforme caractérisée par $\gamma_{ab} = \eta_{ab}$. Dans cette jauge, l'action de Polyakov est alors celle de champs libres :

$$\mathcal{S}_P = \frac{1}{4} M_S^2 \int d^2\xi \partial_a X_\mu \partial^a X^\mu . \quad (1.3)$$

Il devient alors très facile de résoudre les équations du mouvement. Cependant ces équations libres ne sont obtenues que dans une jauge bien particulière et doivent donc être complétées par des conditions de jauge qui sont ici équivalentes à l'annulation du tenseur énergie-impulsion à deux dimensions au niveau de la surface d'univers c'est-à-dire aux conditions de Virasoro lors de la quantification [9, 10].

Les états physiques⁽¹⁾ qui décriront notamment les particules du modèle standard correspondent aux modes propres d'excitation de la corde. Et les amplitudes de diffusion de ces états, correspondant à des interactions gravitationnelles ou de jauge, sont induites par les interactions des cordes. Ces interactions sont engendrées à partir d'un vertex correspondant à l'union ou à la séparation de deux cordes, ce vertex étant pondéré par une constante de couplage sans dimension g_s . La structure spatiale étendue des cordes a une conséquence importante sur les propriétés de ce vertex élémentaire : il n'est plus, comme en théorie des champs, un point singulier bien défini de l'espace-temps correspondant à un invariant de Lorentz c'est-à-dire un point de l'espace-temps indépendant du référentiel d'observation (*cf.* figure 1.1). Cette distinction de comportement au niveau des vertex d'interaction permet de comprendre

⁽¹⁾Nous verrons que la quantification de la corde conduit à un spectre discret possédant des états de masse nulle. Ce sont ces états qu'on interprète comme des états physiques. La quantification d'objets plus étendus que la corde, notamment la membrane, semble conduire au contraire à un spectre continu qui ne permet plus cette interprétation [11].

les différences essentielles entre la théorie des champs et la théorie des cordes. Tout d'abord, l'invariance de Lorentz du point d'interaction permet en théorie des champs de lui associer différents couplages définissant autant de théories distinctes. En théorie des cordes, cette possibilité n'existe plus et seule la valeur de la constante de couplage caractérise le vertex d'interaction. De plus, localement il existe toujours un référentiel dans lequel le système apparaît comme une corde libre (au moins classiquement ; quantiquement il faudrait sommer sur toutes les configurations et la remarque perd son sens). Cette propriété n'est pas sans rappeler le principe d'équivalence de la relativité générale qui stipule que localement il existe toujours un référentiel dans lequel le champ de gravitation a été supprimé. Enfin, la géométrie du vertex d'interaction de la théorie des cordes assure un bon comportement quantique en affranchissant la théorie de toute divergence ultraviolette. En effet, ces divergences apparaissent en théorie des champs lorsque des points d'interaction coïncident (divergences à petite distance ou grande énergie). En théorie des cordes, l'interaction n'est plus localisée et ces divergences disparaissent.

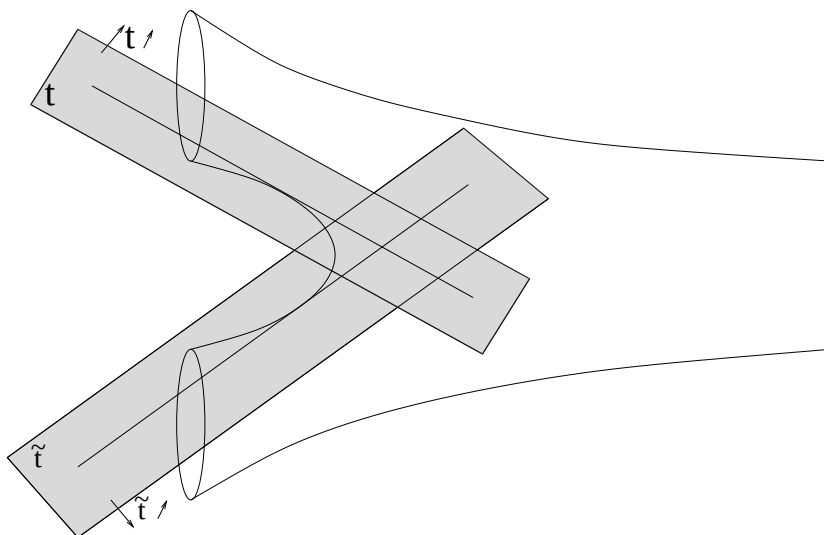


Figure 1.1: Interactions de cordes fermées. Le vertex élémentaire ne correspond pas à un point bien défini mais dépend du référentiel de Lorentz dans lequel est observée l'interaction (le point d'interaction peut être défini comme le point de tangence entre la surface d'univers et la surface à temps constant dans le référentiel considéré). Cette propriété est à l'origine de différences essentielles entre la théorie des champs et la théorie des cordes.

Le calcul des amplitudes de diffusion de cordes correspond à un développement⁽²⁾

⁽²⁾Il a été montré, par des calculs de modèle de matrices, que ce développement est une série asymptotique qui n'est pas sommable de Borel.

en puissance de la constante de couplage g_s selon la topologie des surfaces d'univers :

$$\underbrace{\mathcal{A}}_{\text{amplitude de diffusion totale}} = \sum_{n=0}^{\infty} g_s^{-\chi} \underbrace{\mathcal{A}^{(n)}}_{\text{amplitude de diffusion sur une surface de Riemann } \Sigma \text{ de genre } n} \quad (1.4)$$

où $\chi(\Sigma) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \mathcal{R}^{(2)}$ est la caractéristique d'Euler de la surface Σ ($\chi = 2 - 2n - 2b$ où b est le nombre de 'bords' de la surface). Le calcul de $\mathcal{A}^{(n)}$ ne dépend que de la topologie de la surface de Riemann Σ , ce qui réduit considérablement le nombre de diagrammes à un ordre donné du développement en perturbation ; pour des cordes fermées, il n'y a même qu'un seul diagramme à chaque ordre, ce qui était loin d'être le cas en théorie des champs.

En théorie des cordes, la constante de couplage est une grandeur dynamique et correspond à la valeur moyenne dans le vide à l'infini d'un champ scalaire Φ , le dilaton, qui couple à la courbure de la surface d'univers par $\int_{\Sigma} d^2\xi \sqrt{|\gamma|} \mathcal{R}^{(2)} \Phi$, de sorte que :

$$g_s = \lim_{\infty} e^{\langle \Phi \rangle}. \quad (1.5)$$

Les cordes peuvent être ouvertes c'est-à-dire avec des extrémités libres, ou fermées lorsque les deux extrémités se bouclent l'une sur l'autre. Dans le cas de cordes ouvertes, il est nécessaire d'imposer des conditions aux bords, il y a deux types de conditions distinctes :

- condition de Dirichlet : $X^{\mu}_{|\text{extrémités}} = \text{constante}$.
- condition de Neumann : $\partial_{\perp} X^{\mu}_{|\text{extrémités}} = 0$.

Les cordes peuvent également être orientées ou non orientées suivant qu'elles sont invariantes ou non sous les difféomorphismes de la surface d'univers changeant l'orientation. Il existe des théories cohérentes construites à partir de cordes fermées uniquement, mais en revanche on ne peut envisager de théories de cordes purement ouvertes puisque des cordes fermées sont engendrées par interaction de cordes ouvertes au premier ordre des perturbations (ou dit autrement une théorie de cordes ouvertes est non-unitaire à l'ordre d'une boucle).

L'action de la corde libre bosonique présente un certain nombre de symétries :

- une invariance par difféomorphismes sur la surface d'univers ;
- une invariance de Lorentz d'espace-temps ;
- liée à la nature bidimensionnelle de la surface d'univers, une invariance de Weyl locale par changement d'échelle : $\gamma_{ab} \rightarrow \Lambda(\xi) \gamma_{ab}$. Il est à remarquer que cette symétrie locale est explicitement brisée par le couplage au dilaton si celui-ci n'est pas un champ constant (seule subsiste alors la symétrie de Weyl globale), mais nous verrons comment cette invariance est restaurée au niveau quantique c'est-à-dire comment est annulée son anomalie.

Ces symétries sont des symétries classiques qui peuvent être brisées par des anomalies au niveau quantique. Goddard *et al.* [12] ont montré que les symétries de Lorentz d'espace-temps développent une anomalie sauf lorsque la dimension de l'espace de plongement se trouve égale à une dimension critique qu'ils ont calculée être $d = 26$. Les symétries de Lorentz sont des symétries globales et l'existence d'anomalie quantique n'est pas en soi une inconsistance. En revanche, une anomalie pour une symétrie de jauge est beaucoup plus grave et se traduit par la perte d'unitarité de la théorie. Se pose donc la question de l'anomalie associée aux transformations de Weyl. Le calcul de cette anomalie [8] montre qu'elle ne s'annule que pour $d = 26$ (Polchinski [13, p94] justifie que les deux anomalies sont reliées par le fait qu'une transformation de Lorentz dans la jauge du cône de lumière correspondant aux degrés de liberté physiques doit s'accompagner d'une transformation de Weyl). Le calcul de cette dimension critique reposait sur l'hypothèse d'un espace de plongement plat. On peut construire des théories cohérentes, *i.e.* sans anomalies, de cordes en dimension non-critique ; dans ce cas, l'espace de plongement n'est plus un espace plat mais correspond à un environnement (*background*) non trivial contribuant à l'anomalie conforme et autorisant du même coup une dimension d'espace-temps inférieure à la dimension critique.

La quantification de la corde libre bosonique fait apparaître un état tachyonique *i.e.* de masse carrée négative. Un état tachyonique entraîne une instabilité du vide, ce qui n'est pas en soi une incohérence de la théorie mais signifie que le vide utilisé pour quantifier la théorie n'est pas le bon. D'autre part, le tachyon de la corde bosonique pourrait être un simple effet de la formulation perturbative de la théorie de la même façon qu'un champ de Higgs apparaît comme tachyonique lorsque le potentiel est tronqué aux termes quadratiques. Néanmoins il existe un moyen élégant de s'affranchir de ce problème : en effet l'état tachyonique de la corde bosonique disparaît si des fermions, convenablement associés aux bosons par supersymétrie, sont introduits sur la surface d'univers de la corde (supercordes)⁽³⁾. Un autre avantage des supercordes est l'apparition dans le spectre de masse d'états fermioniques qui manquaient cruellement dans la tentative de description des particules du modèle standard à partir de cordes bosoniques. Dans le cas des supercordes, du fait de la contribution des fermions d'espace-temps aux facteurs d'anomalies, la dimension critique est ramenée à $d = 10$. Finalement, le spectre des états d'excitation des supercordes est formé :

- d'un secteur de masse nulle comportant des champs scalaires, des champs de spin un et un champ de spin deux interprété comme un graviton, ainsi que des fermions associés par supersymétrie. Le graviton apparaît dans le spectre des cordes fermées uniquement. Le secteur scalaire comporte toujours un dilaton, plus éventuellement des composantes de tenseurs antisymétriques. Dans le secteur des cordes ouvertes orientées, il existe aussi un vecteur d'espace-temps.
- d'un spectre infini de particules massives de masse proportionnelle à l'échelle fondamentale des cordes M_S . Ces états disparaissent dans les actions effectives

⁽³⁾Dans une théorie supersymétrique, l'algèbre des charges fermioniques donne une borne inférieure positive à l'énergie du vide et assure donc qu'on ne peut avoir de particules de masse carrée négative.

à des énergies inférieures à M_S mais ils sont importants pour assurer l'absence de divergences ultraviolettes dont il a été question ci-dessus. Ce sont en quelque sorte l'analogue des bosons W qui assurent la renormalisabilité des interactions faibles mais qui sont absents dans la description de Fermi des interactions à quatre fermions.

Il existe deux formulations des théories de supercordes :

- une formulation Ramond–Neveu–Schwarz (RNS) [14,15] dans laquelle, en plus des coordonnées X^μ de la corde bosonique, sont introduites des coordonnées Ψ^μ qui correspondent à des fermions de la surface d'univers (mais ils restent des vecteurs d'espace-temps). La généralisation supersymétrique de l'action de Polyakov avec des fermions de surface d'univers est dans la jauge conforme :

$$\mathcal{S}_{NS} = \frac{1}{4} M_S^2 \int d^2\xi \left(\partial^a X^\mu \partial_a X_\mu - i \bar{\Psi}^\mu \not{\partial} \Psi_\mu \right) \quad (1.6)$$

Dans cette formulation il y a une invariance supersymétrique globale manifeste au niveau de la surface d'univers. Pour aboutir à une théorie cohérente, la quantification nécessite une troncation du spectre respectant la symétrie introduite par Gliozzi *et al.* [16] (projection GSO). Cette troncation permet en outre d'aboutir à une théorie quantique invariante par supersymétrie d'espace-temps (cette supersymétrie est réalisée à chaque niveau d'excitation des cordes et non pas seulement au niveau des modes de masse nulle).

- une formulation Green–Schwarz (GS) [17, 18] dans laquelle, en plus des coordonnées X^μ , sont introduites des coordonnées correspondant cette fois-ci à des fermions d'espace-temps. L'invariance par supersymétrie d'espace-temps est alors manifeste⁽⁴⁾. La généralisation supersymétrique de l'action de Polyakov avec des fermions⁽⁵⁾ θ d'espace-temps est :

$$\mathcal{S}_{GS} = \frac{1}{4} M_S^2 \int d^2\xi \sqrt{|\gamma|} \Pi_a^\nu \Pi_{b\mu} + \underbrace{M_S^2 \int d^2\xi (-i) \epsilon^{ab} \partial_a X^\mu \bar{\theta} \Gamma_\mu \partial_b \theta}_{\text{terme de Wess–Zumino}} \quad (1.7)$$

⁽⁴⁾Le terme de Wess–Zumino dans l'action assure de plus une invariance par κ symétrie (symétrie locale dont les paramètres sont des spineurs). La fixation de cette symétrie locale permet d'éliminer la moitié des degrés de libertés fermioniques et d'assurer une supersymétrie au niveau de la surface d'univers : par exemple dans les cordes de type II, les coordonnées bosoniques X^μ correspondent à huit degrés de liberté réels *on-shell*, et les coordonnées fermioniques (deux spineurs Majorana–Weyl à $10d$), à 16 degrés de liberté réels *on-shell*, la κ symétrie permet d'en éliminer la moitié et assure l'égalité entre degrés de liberté bosoniques et fermioniques. La κ symétrie joue un rôle capital dans la formulation de théorie de volume d'univers pour des objets étendus dans plusieurs directions spatiales [19].

⁽⁵⁾Cette action possède une invariance par supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ c'est-à-dire que les paramètres de transformations forment un spineur d'espace-temps et donc les coordonnées fermioniques correspondent à un seul spineur θ . Il est possible d'étendre cette symétrie à une invariance $\mathcal{N} = 2$ (*cf.* par exemple [20, p.253]) mais au-delà il n'existe plus de terme de Wess–Zumino assurant la κ symétrie nécessaire à la réalisation de la supersymétrie au niveau de la surface d'univers.

où $\Pi_a^\mu = \partial_a X^\mu - i\bar{\theta}\Gamma^\mu\partial_a\theta$ est la combinaison des dérivées invariantes par supersymétrie d'espace-temps ; ϵ^{ab} est le tenseur totalement antisymétrique à deux dimensions. La quantification se fait dans la jauge du cône de lumière (il n'existe pas de quantification covariante de Lorentz).

Witten a montré l'équivalence de ces deux formulations par des techniques de bosonisation [21].

Il n'existe que cinq théories de cordes cohérentes au niveau quantique (le tableau 1.1 résume les principales propriétés de ces théories). Les cordes hétérotiques et de type *I* possèdent une invariance de jauge dont les anomalies, dans les cordes hétérotiques, sont annulées par un mécanisme proposé par Green et Schwarz [22]. Cette invariance de jauge pourrait permettre d'expliquer les symétries du modèle standard à basse énergie. Considérer les interactions de jauge du modèle standard comme provenant de la théorie des cordes permet d'obtenir une relation entre ces interactions de jauge et les forces de gravitation. En effet la constante de couplage g de la théorie de jauge est reliée à la constante de couplage g_s de la théorie des cordes, cette relation dépend de la théorie considérée :

$$\begin{aligned} \text{corde hétérotique} \quad g &= g_s M_S^{-3} \\ \text{corde de type } I \quad g &= g_s^{1/2} M_S^{-6} \end{aligned} \tag{1.8}$$

Nous reviendrons sur ces relations au chapitre 2 et nous verrons leurs implications phénoménologiques sur l'échelle de grande unification.

Le dilaton est un *module* de la théorie effective à basse énergie c'est-à-dire qu'il correspond à une direction de dégénérescence du potentiel effectif ⁽⁶⁾. Il existe d'autres modules caractérisant le vide d'une théorie de cordes, comme il a en effet été discuté dans l'introduction, l'existence au niveau perturbatif d'une dégénérescence continue de vides inéquivalents (*i.e.* non reliés les uns aux autres par une symétrie de la théorie) est un trait général des théories supersymétriques. Typiquement les variables dynamiques définissant la géométrie de l'espace-temps de plongement de la corde correspondent également à des directions de dégénérescence. Le vide de la théorie sera caractérisé par l'ensemble des valeurs de ces différents champs de module. Et les théories perturbatives de cordes correspondent à des points de leur espace des modules caractérisés par :

$$M_S \text{ fixe et } g_s \rightarrow 0 . \tag{1.9}$$

1.1.2 Les théories effectives de supergravité à dix dimensions

La construction des théories de supercordes assure l'existence d'une invariance par supersymétrie d'espace-temps et le spectre de masse nulle (tableau 1.1) de ces théories forme un multiplet gravitationnel plus éventuellement des multiplets vectoriels de

⁽⁶⁾Cette absence de potentiel pour le dilaton est vraie au niveau perturbatif mais il se pourrait que des effets non-perturbatifs engendrent un potentiel permettant ainsi de déterminer de façon dynamique la valeur de la constante de couplage des cordes.

Cordes	$\sharp_{Susy}$	nature des cordes		spectre de masse nulle	
Type <i>IIA</i>	32	cordes fermées	bosons	NS/NS	$g_{\mu\nu}, B_{\mu_1\mu_2}, \Phi$
			fermions	R/R	$A_\mu, A_{\mu_1\mu_2\mu_3}$ $\psi_\mu^L, \psi_\mu^R, \lambda^L, \lambda^R$
Type <i>IIB</i>	32	cordes fermées	bosons	NS/NS	$g_{\mu\nu}, B_{\mu_1\mu_2}, \Phi$
			fermions	R/R	χ (axion), $A_{\mu_1\mu_2}, A_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}^{(+)}$ $2 \psi_\mu^L, 2 \lambda^L$
Hétérotique $E_8 \times E_8$	16	cordes fermées	bosons	NS/NS	$g_{\mu\nu}, \Phi$
			fermions	R/R	$A_{\mu_1\mu_2}, 496 A_\mu$ (adj. de $E_8 \times E_8$) $\psi_\mu^L, \lambda^L, 496 \lambda^L$ (adj. de $E_8 \times E_8$)
Hétérotique $SO(32)$	16	cordes fermées	bosons		$g_{\mu\nu}, \Phi$
			fermions		$A_{\mu_1\mu_2}, 496 A_\mu$ (adj. de $SO(32)$) $\psi_\mu^L, \lambda^L, 496 \lambda^L$ (adj. de $SO(32)$)
Type <i>I</i>	16	cordes fermées non-orientées	bosons	NS/NS	$g_{\mu\nu}, \Phi$
			fermions	R/R	$A_{\mu_1\mu_2}$ ψ_μ^L, λ^L
		cordes ouvertes	bosons		$496 A_\mu$ (adj. de $SO(32)$)
			fermions		$496 \lambda^L$ (adj. de $SO(32)$)

Table 1.1: Les cinq théories de supercordes cohérentes à $10d$. Les états du secteur Ramond (R) sont dans des représentations spinorielles de $SO(1,9)$, le groupe de Lorentz d'espace-temps, tandis que les états du secteur Neveu-Schwarz (NS) sont des représentations tensorielles : les secteurs NS/NS et R/R correspondent donc à des bosons et les secteurs R/NS et NS/R à des fermions. Au premier ordre de la théorie des perturbations, seuls les bosons du secteur NS/NS couplent à la gravitation. Les cordes fermées de la théorie de type *I* sont non-orientées c'est-à-dire que le spectre a été tronqué en imposant une invariance sous la parité Ω de surface d'univers renversant l'orientation. Les champs ψ_μ sont des gravitinos (spin $3/2$) et les champs λ ont un spin $1/2$ (les indices L et R désignent la chiralité). La 4-forme de la corde *IIB* est 'autoduale' (son tenseur de champ est une 5-forme autoduale à $10d$). $\sharp_{Susy}$ est le nombre de charges invariantes fermioniques de la théorie d'espace-temps.

l'algèbre de supersymétrie⁽⁷⁾ à $10d$. Il n'est donc pas étonnant que les théories de cordes et les théories de supergravité soient intimement reliées : en fait les supergravités apparaissent comme des théories effectives de basse énergie des théories de cordes. Ceci peut se comprendre en étudiant le modèle σ décrivant la dynamique d'une corde dans l'environnement (*background*) créé par ses propres modes de masse nulle. Toute théorie de cordes cohérente contient un secteur bosonique comportant une métrique $g_{\mu\nu}$, un tenseur antisymétrique $A_{\mu\nu}$ et un champ scalaire Φ appelé dilaton ; ce sont les seuls champs se couplant directement à la surface d'univers de la corde (secteur NS/NS des supercordes) et le modèle σ est décrit par l'action

$$\mathcal{S} = \frac{1}{4} M_S^2 \int d^2\xi \sqrt{|\gamma|} (\gamma^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}(X) + i\epsilon^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu A_{\mu\nu}(X) + M_S^{-2} \mathcal{R}^{(2)} \Phi(x)) \quad (1.10)$$

γ_{ab} est la métrique sur la surface d'univers, et $\mathcal{R}^{(2)}$, sa courbure scalaire. Callan *et al.* ont notamment montré que la condition d'absence d'anomalie quantique pour la symétrie de Weyl conduit à un système d'équations différentielles pour les modes de masse nulle ; ces équations peuvent être vues comme dérivant de l'action effective de théorie des champs suivante :

$$\mathcal{S}_{\text{eff}} = M_S^d \int d^d x \sqrt{|g|} e^{-2\Phi} \left(\frac{d-10}{3} - M_S^{-2} (\mathcal{R}^{(d)} + 4\partial^\mu \partial_\mu \Phi - 4g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{12} H^2) + \mathcal{O}(M_S^{-4}) \right) \quad (1.11)$$

où d est la dimension de l'espace-temps de plongement, $H_{\mu_1\mu_2\mu_3} = 3\partial_{[\mu_1} A_{\mu_2\mu_3]}$ est le tenseur de champ du tenseur A et $H^2 = H_{\mu_1\mu_2\mu_3} H^{\mu_1\mu_2\mu_3}$. On retrouve $d = 10$ comme dimension critique des supercordes : c'est la seule dimension pour laquelle l'espace plat est solution des contraintes. En dimension critique et après intégration par partie, on obtient, au premier ordre en M_S^{-2} et dans les unités des cordes (nous reviendrons en détail dans le chapitre suivant sur les différents systèmes d'unités des cordes *cf.* §2.1.4), l'action effective du secteur universel des supercordes comprenant le graviton, le dilaton et la 2-forme :

$$\mathcal{S}_{\text{eff}} = -\frac{1}{4} M_S^8 \int d^{10}x \sqrt{|g^{(S)}|} e^{-2\Phi} \left(\mathcal{R} + 4g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2 \cdot 3!} H^2 \right) \quad (1.12)$$

Cette action correspond précisément au secteur universel des trois théories de supergravité à 10 dimensions : théories de type *I* (hétérotique lorsque un groupe de jauge est ajouté), de type *IIA* et de type *IIB*⁽⁸⁾. D'autres termes spécifiques à chaque théorie se

⁽⁷⁾On trouvera dans l'appendice C une introduction aux représentations de l'algèbre de supersymétrie.

⁽⁸⁾La supergravité de type *IIB* ne peut pas être entièrement décrite par un lagrangien car, à moins d'introduire des champs auxiliaires selon une méthode proposée par Tonin *et al.* [23, 24], il n'est pas possible de dériver de façon covariante de Lorentz la propriété d'autodualité de la 4-forme.

rajoutent : ils forment le secteur Ramond–Ramond de la théorie. Des termes incorporant des fermions apparaissent également pour assurer l’invariance par supersymétrie. Les revues de de Wit et Louis [25] et de Sen [26] donnent les actions effectives complètes des cinq théories de supercordes. La figure 1.2 p.50 dresse le portrait des actions effectives des cinq théories de supercordes. Dans le cas des cordes de type *I* et des deux cordes hétérotiques, il existe également une invariance de jauge décrite par une théorie de Yang–Mills supersymétrique.

Il existe une autre approche, basée sur le concept de matrice S , permettant d’obtenir ces actions effectives de supergravité. Elle a été proposée par Gross et Witten [27,28]. Il s’agit de calculer les amplitudes de diffusion à la fois en théorie de cordes et en supergravité. On obtient l’action effective de la théorie de la théorie des cordes correspondante en imposant l’égalité de ces amplitudes dans l’approximation de basse énergie.

Il convient d’insister sur le fait que ces actions effectives sont des actions de basse énergie c’est-à-dire qu’elles ne sont valables que lors de processus physiques mettant en jeu une énergie inférieure à l’échelle de masse des cordes ou lorsque la courbure de l’espace-temps de plongement est suffisamment petite c’est-à-dire lorsque le rayon de courbure R_c est plus grand que la longueur caractéristique d’une corde (de sorte que le couplage adimensionnée $M_S R_c^{-1}$ du modèle σ est petit légitimant un développement en perturbation) :

$$\underbrace{E}_{\text{énergie du processus physique}} \ll \underbrace{M_S}_{\text{échelle de masse des cordes}} \quad i.e. \quad \underbrace{R}_{\text{longueur caractéristique}} \gg \underbrace{M_S^{-1}}_{\text{longueur d'une corde}}$$

Ces actions effectives de supergravité sont des théories non renormalisables (*cf.* par exemple [29] pour une discussion du comportement ultraviolet des théories de supergravité) donc mal définies quantiquement. Ce que nous venons de voir c’est que leur régularisation quantique n’est plus une théorie des champs mais une théorie de supercordes.

1.2 Approches non perturbatives des théories de supercordes: relations de dualité

Les cinq théories de supercordes que nous venons de décrire et dont nous avons discuté les limites de basse énergie correspondent à des théories perturbatives en dimension critique : tel était l’état des lieux des connaissances à l’issue de la “première révolution” des cordes (1984-1985). Une dizaine d’années plus tard il est apparu que ces cinq théories pourraient être intimement reliées les unes aux autres par des *relations de dualité* : plus précisément une certaine région de l’espace des modules d’une première théorie pourrait être équivalente à une autre région de l’espace des modules d’une seconde théorie (pouvant éventuellement se confondre avec la théorie de départ dans le cas d’auto-dualité). Il existe essentiellement deux types de relations de dualité :

- des relations de *T dualité* : les deux théories duales sont toutes deux dans un régime de couplage faible mais les espaces des modules correspondent à une géométrie décrivant une dimension d'espace-temps compactifiée, pour l'une des théories, sur un cercle de rayon R et pour l'autre, sur un cercle de rayon M_S^{-2}/R [30]. Cette situation se généralise à des géométries plus compliquées mais le volume compactifié d'une théorie est toujours l'inverse de celui de la seconde théorie [31–33] : par compactification sur un tore de dimension t , le groupe de *T dualité* généré est $SO(t, t, \mathbb{Z})$. Les *T dualités* sont des relations perturbatives *i.e.* satisfaites à tous les ordres du développement en puissance de la constante de couplage g_s .
- des relations de *S dualité* : le régime de couplage faible d'une première théorie est équivalent au régime de couplage fort d'une seconde théorie ; au niveau des espaces des modules, l'action d'une *S dualité* est de changer le signe de la valeur moyenne du dilaton (lorsque les autres modules sont aussi affectés par l'opération de dualité, on parle plutôt de *U dualité*). Cette dualité est la généralisation de la dualité électrique–magnétique de Montonen–Olive qui s'avère être exacte au niveau quantique pour des théories supersymétriques $\mathcal{N} = 4$ à $4d$ [34–37]. Il est à remarquer que les relations de *S dualité* sont non-perturbatives : si la théorie de départ correspond à l'une des cinq théories de supercordes perturbatives, sa transformée par *S dualité* sera une nouvelle théorie ; dans certains cas, par l'analyse de l'action effective et du spectre des états solitoniques, cette nouvelle théorie pourra être interprétée comme la limite de couplage fort d'une des théories précédentes.

Dès le début des années 90, un certain nombre de conjectures de dualité ont été formulées : mentionnons à titre d'exemple parmi tant d'autres l'autodualité de la corde hétérotique $\mathcal{N} = 1$ à $4d$ proposée par Font *et al.* [38] (une liste plus complète d'exemples peut être trouvée dans [26, 39]). En 1995, les travaux de Hull, Townsend et Witten [40–42] ont systématisé ces conjectures à toutes les théories de supercordes avec au moins seize charges de supersymétrie. Ces différentes conjectures sont résumées sur la figure 1.2 p50. En plus des cinq théories de supercordes, une nouvelle théorie semble jouer un rôle particulier : la *M* théorie.

Les cordes de type *IIA* et *IIB* sont *T* duales [43, 44], de même que les cordes hétérotiques $E_8 \times E_8$ et $SO(32)$ lorsque le groupe de jauge est brisé par une ligne de Wilson en $SO(16) \times SO(16)$ [31, 45]. La corde hétérotique $SO(32)$ et la corde de type *I* sont *S* duales : la limite de couplage faible de la théorie effective de l'une correspond à la limite de couplage fort de l'autre [42] et nous verrons comment s'identifient leurs états solitoniques [46]. La limite de couplage fort de la corde de type *IIB* s'identifie à elle-même : plus précisément de la symétrie classique $Sl(2, \mathbb{R})$ des équations du mouvement de la supergravité de type *IIB* subsiste le sous-groupe $Sl(2, \mathbb{Z})$ comme symétrie de la théorie quantique c'est-à-dire de la théorie de corde *IIB* [40] (cette invariance $Sl(2, \mathbb{Z})$ contient l'inversion des constantes de couplage). Après compactification sur un tore de dimension t , la symétrie $Sl(2, \mathbb{Z})$ se combine avec la symétrie de *T dualité* $SO(t, t, \mathbb{Z})$ pour former le groupe de *U dualité* $E_{t+1}(\mathbb{Z})$ [40]. Les limites de couplage fort des cordes hétérotiques $E_8 \times E_8$ et de type *IIA* ne s'apparentent à aucune des théories de super-

cordes. La nouvelle théorie, appelée M théorie, serait la régularisation quantique de la supergravité $11d$ de Cremmer *et al.* [47], qui par réduction dimensionnelle redonne la supergravité $10d$ IIA . La compactification de cette théorie onze-dimensionnelle sur un cercle serait équivalente au couplage fort de la corde IIA tandis que sa compactification sur un intervalle avec deux bords à $10d$ sur lesquels vivent des champs de jauge E_8 correspondrait au couplage fort de la corde hétérotique.

Les T dualités relient deux théories en régime de couplage faible et peuvent donc être établies ordre par ordre du développement perturbatif. Tester les conjectures de S dualité est par contre plus délicat car on est confronté à des théories en couplage fort *a priori* non encore définies. En fait ce sont des propriétés de supersymétrie qui nous renseignent sur les extensions en couplage fort de théories définies en couplage faible. En effet les théories avec au moins seize charges supersymétriques jouissent de propriétés de non-renormalisation :

- la forme de l'action effective des modes de masse nulles est entièrement fixée par la supersymétrie [48] si bien qu'aucune correction de boucles de cordes (développement en g_s) ne peut venir la modifier. La difficulté réside en revanche à savoir si de nouveaux modes de masse nulle pourraient apparaître en couplage fort : par exemple, dans la théorie de type IIB , le spectre reste inchangé tandis que pour la corde de type IIA , le dilaton s'interprète comme le rayon d'une onzième dimension (le tableau 1.2 donne la correspondance entre les modes de masse nulle de la M théorie et ceux des cordes de type IIA et hétérotique $E_8 \times E_8$).
- le spectre de certains états solitoniques, appelés états BPS⁽⁹⁾, reste inchangé lorsque la constante de couplage varie [35] ou plus exactement l'existence et la dégénérescence de ces états restent inchangées mais leur masse peut évoluer avec g_s . L'étude de ces états BPS fera l'objet de la section suivante.

1.3 Les p -branes des théories de supercordes

1.3.1 Les 0-branes de l'électromagnétisme classique

Les p -branes sont la généralisation de la notion de particules élémentaires couplant à un champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$. Le champ électromagnétique est décrit par un potentiel A^μ dont le tenseur de champ $F^{\mu\nu}$ est relié à $\vec{E}$ et $\vec{B}$: $F^{0i} = E^i$ et $F^{ij} = \epsilon^{ijk} B_k$. Les équations de Maxwell et l'identité de Bianchi en présence d'un monopôle magnétique s'écrivent :

$$*d * F = j_e \quad \text{et} \quad dF = *j_m . \quad (1.13)$$

⁽⁹⁾Ce sont des états saturant la borne de Bogomol'nyi, Prasad et Sommerfeld entre la masse de ces états et leur charge centrale. De ce fait ils préservent la moitié des charges de supersymétrie et appartiennent donc à des représentations courtes de l'algèbre de supersymétrie, par exemple à l'une des représentations de masse nulle décrites dans l'appendice C.

M théorie				
11d sugra	$g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$	$C_{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\hat{\mu}_3}$	$\psi_{\hat{\alpha}}^{\hat{\mu}}$	$\hat{\mu} = 0 \dots 10$ $\hat{\alpha} = 1 \dots 32$
Type IIA	$g_{\mu\nu}$	$C_{\mu_1\mu_2\mu_3}$	$\psi_{\alpha}^{L\mu}$	
	$g_{\mu 10} \rightsquigarrow A_{\mu}$	$C_{\mu_1\mu_2 10} \rightsquigarrow A_{\mu_1\mu_2}$	$\psi_{\alpha}^{R\mu}$	$\mu = 0 \dots 9$
	$g_{10 10} \rightsquigarrow \Phi$		$\psi_{\alpha}^{L 10} \rightsquigarrow \lambda^L$	$\alpha = 1 \dots 16$
			$\psi_{\alpha}^{R 10} \rightsquigarrow \lambda^R$	
Hétérotique	$g_{\mu\nu}$	$C_{\mu_1\mu_2 10} \rightsquigarrow A_{\mu_1\mu_2}$	$\psi_{\alpha}^{L\mu}$	$\mu = 0 \dots 9$
$E_8 \times E_8$	$g_{10 10} \rightsquigarrow \Phi$		$\psi_{\alpha}^{L 10}$	$\alpha = 1 \dots 16$

Table 1.2: Correspondance entre les modes de masse nulle de la M théorie et ceux des cordes hétérotique $E_8 \times E_8$ et de type IIA . Les modes de la corde de type IIA correspondent aux états de Kaluza–Klein de masse nulle de la supergravité compactifiée sur un cercle [41,42]. Les modes de la corde hétérotique $E_8 \times E_8$ correspondent eux aux états de Kaluza–Klein de masse nulle de la supergravité compactifiée sur un intervalle c’est-à-dire un cercle dont on a identifié les points opposés [49,50]. On impose donc une troncation $\mathbb{Z}_2^{HW}$ agissant de la façon suivante (x^{10} désigne la coordonnée compactifiée) : sur les fermions (gravitino et jauginos), $\lambda(x^{\mu}, -x^{10}) = \tilde{\Gamma}\lambda(x^{\mu}, x^{10})$ où $\tilde{\Gamma}$ est la matrice de chiralité à $10d$; sur la métrique, $g(x^{\mu}, -x^{10}) = g(x^{\mu}, x^{10})$; sur la 3-forme, $C(x^{\mu}, -x^{10}) = -C(x^{\mu}, x^{10})$. De plus un champ de jauge dans l’adjointe du groupe E_8 est introduit sur chacune des frontières à $10d$. La comparaison des actions effectives conduit à une relation entre les échelles de masse de la M théorie et des cordes, la constante de couplage et le rayon de la onzième dimension : $R_{11}M_{11}^9g_s^2 = M_S^8$.

Le courant électrique créé par une particule chargée repérée par ses coordonnées $X^\mu(\tau)$ est donné par :

$$j_e(x) = \left(q \int_{\mathcal{L}} d\tau \delta^4(x - X(\tau)) \frac{dX^\mu}{d\tau} \right) dx^\mu \quad (1.14)$$

où $\mathcal{L}$ est la ligne d'univers de la particule et τ son temps propre. La loi de Gauss définit la charge électrique par :

$$Q_e = \int_{\mathbb{R}^3} *j_e = \int_{S^2} *F. \quad (1.15)$$

Les équations de Maxwell assurent que c'est une charge conservée (la charge électrique est donc une charge de Noether dont la conservation est assurée par les équations du mouvement). La charge magnétique est définie par :

$$Q_m = \int_{\mathbb{R}^3} *j_m = \int_{S^2} F. \quad (1.16)$$

C'est l'identité de Bianchi qui assure sa conservation (la charge magnétique est donc une charge topologique).

Le couplage de la particule chargée au champ électromagnétique est donné par le terme de Wess–Zumino :

$$\mathcal{S} = q \int_{\mathcal{L}} d\tau A_\mu(X(\tau)) \frac{dX^\mu}{d\tau}. \quad (1.17)$$

A cause de la présence du monopôle, le potentiel de jauge ne peut pas être défini globalement. Imposer que dans les zones de recouvrement, les différentes définitions de A^μ correspondent les unes aux autres à des transformations de jauge près conduit à la relation de quantification de Dirac [51] :

$$Q_e Q_m \in 2\pi \mathbb{Z}. \quad (1.18)$$

Les particules et les monopôles sont des objets ponctuels sans extension spatiale : ils correspondent à des 0-branes. Les p -branes sont des objets avec une extension dans p directions d'espace. Nous allons les construire comme des solutions classiques des équations de supergravité. Leurs propriétés supersymétriques leur confèrera un statut quantique stable. Une p -brane dans un espace-temps à d dimensions couplera de façon électrique à une $(p+1)$ -forme différentielle et de façon magnétique à une $(d-p-3)$ -forme différentielle. Pour $d = 4$ et $p = 0$, on retrouve les résultats de l'électromagnétisme classique.

1.3.2 Les p -branes comme solutions des actions effectives de supergravité

Les équations de la p -brane

Dabholkar *et al.* [52] ont construit les p -branes comme des solutions des théories effectives de supergravité (à $10d$ ou $11d$) préservant la moitié des supersymétries,

ayant une invariance de Poincaré au niveau de leur surface d'univers et respectant l'isotropie de l'espace transverse : on cherche donc un 'background', c'est-à-dire la valeur des champs de masse nulle de la théorie considérée, respectant l'invariance : $Poincaré_{p+1} \times SO(d - p - 1)$.

La dynamique libre d'un objet étendu dans p directions d'espace est régie par la généralisation de l'action de Nambu-Goto correspondant à l'intégrale de l'élément de volume d'univers :

$$\mathcal{S}_{NG} = -M^{p+1} \int d^{p+1}\xi \sqrt{\left| \det \left(\frac{\partial X^{\hat{\mu}}}{\partial \xi^a} \frac{\partial X_{\hat{\mu}}}{\partial \xi^b} \right) \right|} \quad (1.19)$$

où $X^{\hat{\mu}}(\xi^a)$ sont les coordonnées dans l'espace-temps de plongement d'un point de la p -brane repéré par ses coordonnées de volume d'univers ξ^a ($a = 0 \dots p$) ; et M est une constante dimensionnée $[M] = L^{-1}$ qui sera reliée à tension de la brane. Cette action est équivalente à l'action de Polyakov :

$$\mathcal{S}_P = M^{p+1} \int d^{p+1}\xi \left(-\frac{1}{2} \sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \partial_a X^{\hat{\mu}} \partial_b X_{\hat{\mu}} + \frac{p-1}{2} \sqrt{|\gamma|} \right) \quad (1.20)$$

où γ_{ab} est un champ auxiliaire correspondant à la métrique sur le volume d'univers.

Reste à coupler la p -brane à la théorie effective de supercordes. L'invariance de Lorentz $SO(1, p)$ impose à tous les champs fermioniques d'être nuls. Le secteur bosonique comprend la métrique et, en général, un champ scalaire (le dilaton) et des n -formes différentielles $A_{(n)}$. Le lagrangien bosonique prend la forme générale suivante (les coefficients a , b , c et e correspondent à différentes normalisations numériques possibles que nous ne spécifierons pas ; toutefois, pour que le dilaton corresponde au dilaton de la théorie des cordes, il est nécessaire⁽¹⁰⁾ que $b/a = -1/2$) :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{eff} = \int d^d x \sqrt{|g|} & \left(a \mathcal{R} + b \partial_{\hat{\mu}} \Phi \partial^{\hat{\mu}} \Phi + c e^{\alpha_{n-1} \Phi} F_{(n+1)}^2 \right. \\ & \left. + e A_{(n)} \cdot F_{(n+1)} \cdot F_{(n+1)} \delta_{d, 3n+2} \right) \quad (1.21) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} F_{\hat{\mu}_1 \dots \hat{\mu}_{n+1}} &= (n+1) \partial_{[\hat{\mu}_1} A_{\hat{\mu}_2 \dots \hat{\mu}_{n+1}]} \\ F^2 &= \frac{1}{(n+1)!} F_{\hat{\mu}_1 \dots \hat{\mu}_{n+1}} F^{\hat{\mu}_1 \dots \hat{\mu}_{n+1}} \\ \sqrt{|g|} A \cdot F \cdot F &= \frac{1}{n!(n+1)!(n+1)!} A_{\hat{\mu}_1 \dots \hat{\mu}_n} F_{\hat{\mu}_{n+1} \dots \hat{\mu}_{2n+1}} F_{\hat{\mu}_{2n+2} \dots \hat{\mu}_{3n+2}} \epsilon^{\hat{\mu}_1 \dots \hat{\mu}_{3n+2}} \end{aligned} \quad (1.22)$$

le symbole $\epsilon^{\hat{\mu}_1 \dots \hat{\mu}_{3n+2}}$ désignant le tenseur totalement antisymétrique normalisé à $\epsilon^{0 \dots d-1} = 1$. Le coefficient α_{n-1} mesure le couplage du tenseur au dilaton.

⁽¹⁰⁾A partir de maintenant et jusqu'à la fin de ce chapitre, on adoptera les conventions généralement utilisées par les *cordistes* : la métrique de l'espace de Minkowski à d dimensions est $(- + \dots +)$.

Le couplage électrique de la p -brane à la $(p+1)$ -forme différentielle résulte du terme de Wess–Zumino rajouté à l'action libre (1.20) :

$$\mathcal{S}_p = M^{p+1} \int d^{p+1}\xi \left(-\frac{1}{2} \sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \partial_a X^{\hat{\mu}} \partial_b X^{\hat{\nu}} g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(X) e^{\beta_p \Phi} + \frac{p-1}{2} \sqrt{|\gamma|} \right. \\ \left. + \mathcal{A}_{WZ} \epsilon^{a_1 \dots a_{p+1}} \partial_{a_1} X^{\hat{\mu}_1} \dots \partial_{a_{p+1}} X^{\hat{\mu}_{p+1}} A_{\hat{\mu}_1 \dots \hat{\mu}_{p+1}} \right) . \quad (1.23)$$

Le coefficient $\mathcal{A}_{WZ}$ du terme de Wess–Zumino sera fixé par les propriétés de supersymétrie. Notons que la constante dimensionnée M a été fixée à la masse de Planck M_P car le lagrangien effectif (1.21) est écrit dans les unités d'Einstein. Les fonctions $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ et $e^{\beta_p \Phi}$ sont des fonctions implicites de ξ à travers leur dépendance en X . La valeur de β_p , définissant les ‘unités’ de la p -brane, est déterminée en imposant que $\mathcal{S}_{eff}$ et $\mathcal{S}_p$ aient le même comportement d'échelle [53] (nous reviendrons sur cet argument au chapitre suivant §2.1.4) :

$$\beta_p = -\frac{\alpha_p}{p+1} \quad (1.24)$$

Les équations du mouvement déduites de l'action $\mathcal{S}_{eff} + \mathcal{S}_p$ s'écrivent :

$$\bullet \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta g^{\hat{\mu}\hat{\nu}}} = 0 \Leftrightarrow R_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = -\frac{b}{a} \partial_{\hat{\mu}} \Phi \partial_{\hat{\nu}} \Phi - \frac{c}{a(p+1)!} e^{\alpha_p \Phi} F_{\hat{\mu}\hat{\sigma}_1 \dots \hat{\sigma}_{p+1}} F_{\hat{\nu}}^{\hat{\sigma}_1 \dots \hat{\sigma}_{p+1}} \\ + \frac{c(p+1)}{a(d-2)(p+2)!} e^{\alpha_p \Phi} g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} F_{\hat{\sigma}_1 \dots \hat{\sigma}_{p+2}} F^{\hat{\sigma}_1 \dots \hat{\sigma}_{p+2}} + T_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \frac{1}{d-2} T^{\hat{\sigma}}_{\hat{\sigma}} g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} ; \quad (1.25)$$

$$\bullet \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \Phi} = 0 \Leftrightarrow D_{\hat{\mu}} D^{\hat{\mu}} \Phi = \frac{\alpha_p c}{2b(p+2)!} e^{\alpha_p \Phi} F_{\hat{\sigma}_1 \dots \hat{\sigma}_{p+2}} F^{\hat{\sigma}_1 \dots \hat{\sigma}_{p+2}} + T_{\Phi} ; \quad (1.26)$$

$$\bullet \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta A_{\hat{\mu}_1 \dots \hat{\mu}_{p+1}}} = 0 \Leftrightarrow \partial_{\hat{\mu}_0} \left(\sqrt{|g|} e^{\alpha_p \Phi} F^{\hat{\mu}_0 \dots \hat{\mu}_{p+1}} \right) = \\ \frac{e(1-2(-1)^{p+1})}{2c((p+2)!)^2} \epsilon^{\hat{\mu}_1 \dots \hat{\mu}_{3p+5}} F_{\hat{\mu}_{p+2} \dots \hat{\mu}_{2p+3}} F_{\hat{\mu}_{2p+4} \dots \hat{\mu}_{3p+5}} + J^{\hat{\mu}_1 \dots \hat{\mu}_{p+1}} ; \quad (1.27)$$

$$\bullet \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \gamma^{ab}} = 0 \Leftrightarrow \gamma_{ab} = \partial_a X^{\hat{\mu}} \partial_b X^{\hat{\nu}} g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} e^{\beta_p \Phi} ; \quad (1.28)$$

$$\bullet \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta X^{\hat{\mu}}} = 0 \Leftrightarrow \partial_a \left(\sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \partial_b X^{\hat{\nu}} g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} e^{\beta_p \Phi} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \partial_a X^{\hat{\sigma}_1} \partial_b X^{\hat{\sigma}_2} \partial_{\hat{\mu}} (g_{\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2} e^{\beta_p \Phi}) \\ - \mathcal{A}_{WZ} \epsilon^{a_1 \dots a_{p+1}} \partial_{a_1} X^{\hat{\sigma}_1} \dots \partial_{a_{p+1}} X^{\hat{\sigma}_{p+1}} F_{\hat{\mu}\hat{\sigma}_1 \dots \hat{\sigma}_{p+1}} . \quad (1.29)$$

De plus le tenseur de champ vérifie l'identité de Bianchi :

$$\partial_{[\hat{\mu}_1} F_{\hat{\mu}_2 \dots \hat{\mu}_{p+3}]} = 0 . \quad (1.30)$$

Le tenseur énergie impulsion $T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ de la brane est donné par :

$$T_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = -\frac{M^{p+1}}{2a} \int d^{p+1}\xi \sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \partial_a X^{\hat{\mu}'} \partial_b X^{\hat{\nu}'} g_{\hat{\mu}'\hat{\mu}} g_{\hat{\nu}'\hat{\nu}} e^{\beta_p \Phi} \frac{\delta^d(x-X)}{\sqrt{|g|}} . \quad (1.31)$$

Le courant électrique créé par la brane s'exprime par :

$$J^{\hat{\mu}_1 \dots \hat{\mu}_{p+1}} = \mathcal{A}_{WZ} \frac{(p+1)!}{2c} M^{p+1} \int d^{p+1} \xi \epsilon^{a_1 \dots a_{p+1}} \partial_{a_1} X^{\hat{\mu}_1} \dots \partial_{a_{p+1}} X^{\hat{\mu}_{p+1}} \delta^d(x - X) . \quad (1.32)$$

Et le terme de source pour l'équation du dilaton vaut :

$$T_\Phi = -\frac{\beta_p M^{p+1}}{4b} \int d^{p+1} \xi \sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \partial_a X^{\hat{\mu}} \partial_b X^{\hat{\nu}} g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} e^{\beta_p \Phi} \frac{\delta^d(x - X)}{\sqrt{|g|}} . \quad (1.33)$$

La solution recherchée doit vérifier l'ensemble de ces équations.

Certaines solutions à ces équations présentent une singularité à l'origine (ce sera notamment le cas des 1-branes fondamentales qui seront discutées dans la suite de la section) : ces singularités sont créées par les sources [54, 55]. D'autres solutions, comme les 5-branes par exemple [56], sont en revanche parfaitement régulières et existent même en l'absence de source : ce sont des solutions solitoniques.

Couplage des formes différentielles au dilaton

Les formes différentielles apparaissant dans le secteur de masse nulle des théories de supercordes peuvent appartenir au secteur R/R ou au secteur NS/NS. Dans les unités des cordes, les formes NS/NS couplent au dilaton par un facteur universel $e^{-2\Phi}$ tandis que les formes R/R lui sont découplées (les valeurs de ces couplages résultent de calculs d'opérateurs de vertex en théorie des cordes ; nous verrons qu'elles ne pourraient être autres sans remettre en cause l'existence de p -branes, donnant ainsi un argument de théorie des champs à ces valeurs de couplage). Par conséquent, dans les unités de supergravité correspondantes à l'action effective (1.21), les couplages d'une $(p+1)$ -forme différentielle au dilaton valent :

$$\text{2-forme NS/NS :} \quad \alpha_1 = -1 \quad (1.34)$$

$$(p+1)\text{-forme R/R :} \quad \alpha_p = (3-p)/2 . \quad (1.35)$$

Dans le cas de la supergravité à 11d, le dilaton est absent et :

$$\text{3-forme sugra 11d :} \quad \alpha_2 = 0 . \quad (1.36)$$

p -brane électrique

On choisit un système de coordonnées adaptées à la brane :

$$\begin{aligned} \text{coordonnées de la surface d'univers :} & \quad x^\mu \quad \mu = 0 \dots p ; \\ \text{coordonnées transverses :} & \quad y^i \quad i = 1 \dots d_\perp (= d - p - 1). \end{aligned}$$

Dans ce système de coordonnées, on fait le choix de jauge (*jauge statique ou physique*) :

$$X^\mu(\xi) = \xi^\mu.$$

La métrique la plus générale respectant l'invariance souhaitée prend la forme [52] :

$$g = \underbrace{e^{2A(r)} dx^\mu \otimes dx^\nu \eta_{\mu\nu}}_{\substack{\text{coordonnées longitudinales} \\ \eta_{\mu\nu}=(-+\dots+)}} + \underbrace{e^{2B(r)} dy^i \otimes dy^j \eta_{ij}}_{\substack{\text{coordonnées transverses} \\ \eta_{ij}=(+\dots+)}} \quad (1.37)$$

où $r = \sqrt{|y^i y^j \eta_{ij}|}$ est la distance radiale à la brane ; A et B sont deux fonctions de la variable radiale r uniquement. Le dilaton (sauf dans la supergravité à $11d$ où il n'existe pas) n'est fonction également que de r : $\Phi(r)$. De même les seules composantes non nulles de la $(p+1)$ -forme différentielle couplant électriquement à la p -brane sont données à partir d'une seule fonction de r :

$$A_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} = \underbrace{\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}}}_{\substack{\text{tenseur antisymétrique à} \\ (p+1) \text{ dimensions} \\ \epsilon_{0 \dots p} = \det g_{\mu\nu}}} \frac{1}{\mathcal{A}_{WZ} (p+1)! \det g_{\mu\nu}} e^{C(r)}. \quad (1.38)$$

Remarquons que le couplage, e , dû au terme de Chern-Simons ne contribue pas aux équations du mouvement.

Imposant de plus la condition aux limites d'une métrique asymptotiquement minowskienne loin de la brane ($r \rightarrow \infty$), on peut résoudre l'ensemble (1.25)–(1.30) des équations couplées du système brane/gravité :

$$g = H_r^{2n_x} dx^\mu \otimes dx^\nu \eta_{\mu\nu} + H_r^{2n_y} dy^i \otimes dy^j \eta_{ij} \quad (1.39)$$

$$e^\Phi = H_r^{n_\Phi} e^{\phi_0} \quad (\phi_0 \text{ désigne la valeur à l'infini de } \Phi) \quad (1.40)$$

$$F_{i\mu_1 \dots \mu_{p+1}} = \underbrace{\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}}}_{\epsilon_{0 \dots p} = \det g_{\mu\nu}} \frac{1}{\mathcal{A}_{WZ} (p+1)! \det g_{\mu\nu}} e^{-\alpha_p \phi_0 / 2} \partial_i H_r^{-1} \quad (1.41)$$

les puissances étant données par :

$$n_x = -\frac{d_\perp - 2}{d - 2} \frac{c}{a(\mathcal{A}_{WZ} (p+1)!)^2} \quad n_y = -\frac{d_\parallel}{d_\perp - 2} n_x \quad n_\Phi = -\frac{2}{\alpha_p} (1 - d_\parallel n_x) \quad (1.42)$$

$d_\parallel$ étant la dimension du volume d'univers de la brane ($d_\parallel = p+1$) et $d_\perp$ la dimension de l'espace transverse ($d_\perp = d - p - 1$). De plus l'équation d'Einstein (1.25) fixe le couplage α_p du dilaton au tenseur :

$$\alpha_p^2 = \frac{4b}{c} (\mathcal{A}_{WZ} (p+1)!)^2 - 4 \frac{b}{a} \frac{d_\parallel (d_\perp - 2)}{d - 2} \quad (1.43)$$

La fonction radiale H_r est solution de l'équation de Laplace dans l'espace transverse et donc :

$$H_r = 1 - \frac{1}{2c} \frac{(\mathcal{A}_{WZ} (p+1)!)^2}{(d_\perp - 2)\Omega_{d_\perp - 1}} M_P^{p+1} e^{-\alpha_p \phi_0/2} \frac{1}{r^{d_\perp - 2}} \quad \text{si } d_\perp > 2 \quad (1.44)$$

$$H_r = 1 + \frac{1}{4c} (\mathcal{A}_{WZ} (p+1)!)^2 \frac{M_P^{p+1}}{\pi} e^{-\alpha_p \phi_0/2} \ln r \quad \text{si } d_\perp = 2 \quad (1.45)$$

où $\Omega_{d_\perp - 1}$ est le volume de la sphère de dimension $d_\perp - 1$ (*i.e.* $\Omega_{n+1} = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$).

Reste à examiner l'invariance par certaines supersymétries résiduelles d'espace-temps. Ces supersymétries doivent en particulier être compatibles avec la solution $\psi^\mu = 0$ du gravitino c'est-à-dire que les paramètres fermioniques $\mathcal{E}(x, y)$ de ces supersymétries doivent vérifier :

$$\delta_{\mathcal{E}} \psi^\mu|_{\psi=0} = 0. \quad (1.46)$$

Ce sont ces propriétés de supersymétrie qui font des p -branes des états BPS. L'invariance de Lorentz sous $SO(1, p) \times SO(d - p - 1)$ impose à $\mathcal{E}(x, y)$ de prendre la forme

$$\mathcal{E}(x, y) = \epsilon \otimes \eta(r) \quad (1.47)$$

où ϵ est un spineur constant de $SO(1, p)$ et $\eta(r)$ un spineur de $SO(d - p - 1)$ ne dépendant que de la coordonnée radiale r .

Il existe une solution à (1.46) de la forme :

$$\mathcal{E}(x, y) = H_r^{n_\epsilon} \epsilon \otimes \eta_0 \quad (1.48)$$

où η_0 est solution d'une équation éliminant la moitié de ses composantes (par exemple en lui imposant d'être un spineur chirale). L'existence de cette solution est cependant subordonnée à la relation suivante fixant le couplage de Wess-Zumino en fonction des composantes du lagrangien effectif (1.21) :

$$(\mathcal{A}_{WZ} (p+1)!)^2 = -\frac{2c}{a}. \quad (1.49)$$

Remarquons que l'expression (1.43) du couplage au dilaton devient alors compatible avec les valeurs (1.34) du couplage d'une $(p+1)$ -forme R/R et avec la valeur (1.35) du couplage de la 2-forme NS/NS assurant l'existence des branes supersymétriques pour les théories des cordes.

La tension de la p -brane correspond à sa masse par unité de volume ; elle est calculée par l'intégrale du tenseur énergie impulsion⁽¹¹⁾ :

$$T_p = \int d^{d_\perp} y T_{00} = M_P^{p+1} e^{-\alpha_p \phi_0/2} \quad (1.50)$$

⁽¹¹⁾Dans le cas de branes solitoniques sans terme de source, la tension correspond à la masse ADM par unité de volume obtenue en développant linéairement la métrique autour de la métrique plate, les termes non linéaires dans les équations d'Einstein s'interprétant alors comme un tenseur énergie-impulsion source.

Notons que pour une p -brane couplant à une $(p+1)$ -forme R/R, d'après l'expression (1.35) du couplage au dilaton, l'expression de la tension devient :

$$T_{D-p} = \frac{M_S^{p+1}}{g_s} \quad (1.51)$$

l'échelle de masse des cordes étant reliée à la masse de Planck par $M_S = M_P e^{\phi_0/4}$ (*cf.* chapitre suivant). Pour une 1-brane couplant à la 2-forme NS/NS :

$$T_{NS-1} = M_S^2. \quad (1.52)$$

Le comportement à l'infini (*i.e.* loin de la brane) du tenseur de champ :

$$F \underset{r \sim \infty}{\sim} \frac{1}{r^{d_{\perp}-1}} \quad (1.53)$$

assure l'existence d'une charge électrique calculée à partir d'un théorème de Gauss généralisé :

$$Q_e^{(p)} \propto \int_{\mathcal{B}^{d-p-2}} e^{\alpha_p \Phi} * F_e \quad (1.54)$$

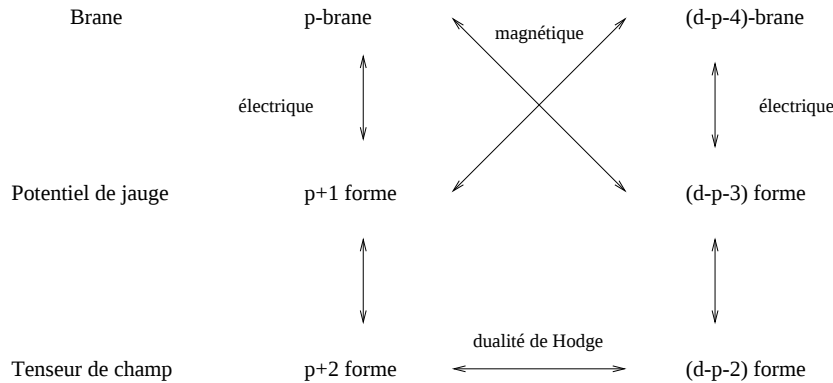
où $\mathcal{B}^{d-p-2}$ est une $(d-p-2)$ -boule enveloppant la p -brane. L'équation du mouvement (1.27) assure que c'est une charge de Noëther conservée. Cette charge électrique est reliée à tension de la brane :

$$T_p \propto |Q_e| e^{\alpha_p \phi_0/2}. \quad (1.55)$$

Cette égalité sature la borne de Bogomol'nyi entre la masse et la charge : $M \geq |Q|$. Cette borne a été obtenue par Dabholkar *et al.* [52] sur un principe utilisé par Witten pour montrer la positivité de l'énergie en relativité générale [57]. La saturation de cette borne assure la stabilité de la solution (il ne peut exister d'états de masse plus petite dans lesquels la brane pourrait se désintégrer).

p -brane magnétique

Une p -brane électrique a un couplage naturel à une $(p+1)$ -forme différentielle. Une $(d-p-4)$ -brane magnétique couplera à cette même forme différentielle mais par l'intermédiaire du dual de Hodge (tenant compte de la puissance du couplage au dilaton) de son tenseur de champ.



La procédure est en tout point identique à la recherche de la p -brane électrique. La solution correspondant à p -brane magnétique est [53] :

$$g = H_r^{2n_x} dx^\mu \otimes dx^\nu \eta_{\mu\nu} + H_r^{2n_y} dy^i \otimes dy^j \eta_{ij} \quad (1.56)$$

$$e^\Phi = H_r^{n_\Phi} e^{\phi_0} \quad (\phi_0 \text{ désigne la valeur à l'infini de } \Phi) \quad (1.57)$$

$$F_{i_1 \dots i_{d-p-2}} \propto \epsilon_{i_1 \dots i_{d-p-2} j} \frac{y^j}{r^{d-2}} \quad (1.58)$$

où les puissances n_x , n_y et n_Φ sont toujours données par les relations (1.42).

La tension d'une D - p brane magnétique est donnée par : $T_{D-p} = M_S^{p+1}/g_s$. Et la tension de la 5-brane magnétique couplant à la 2-forme NS/NS vaut :

$$T_{NS-5} = \frac{M_S^6}{g_s^2} . \quad (1.59)$$

La p -brane magnétique porte une charge magnétique définie par :

$$Q_m^{(p)} \propto \int_{\mathcal{B}^{d-p-2}} F_m . \quad (1.60)$$

C'est une charge topologique conservée. Elle est reliée à la charge électrique de la $(d-p-4)$ -brane électrique duale par une relation de quantification de Dirac⁽¹²⁾ :

$$Q_e^{(p)} Q_m^{(d-p-4)} \in 2\pi\mathbb{Z} . \quad (1.61)$$

1.3.3 Les dualités des supercordes au niveau des branes.

Les différents types de branes

Les branes des différentes théories de supercordes sont couplées aux tenseurs anti-symétriques de ces théories :

- Les branes peuvent coupler de façon électrique ou magnétique aux tenseurs appartenant au secteur NS/NS. Dans le premier cas, on parle de branes élémentaires, électriques ou fondamentales et dans le second cas de branes solitoniques ou magnétiques [56]. Nous avons vu que l'expression de leur tension (masse par unité de volume) se simplifie lorsqu'est introduite l'échelle de masse de la théorie des cordes M_S :

$$p\text{-brane fondamentale :} \quad T_{F-p} = M_S^{p+1} \quad (1.62)$$

$$p\text{-brane solitonique :} \quad T_{NS-p} = \frac{M_S^{p+1}}{g_s^2} \quad (1.63)$$

⁽¹²⁾On peut choisir la dimension de la $(p+1)$ -forme couplant à la p -brane électrique et à la $(d-p-4)$ -brane magnétique de telle façon à ce que le produit des charges $Q_e Q_m$ soit sans dimension. Alors : $[Q_e^{(p)}] = L^{-(d-2p-4)/2}$ et $[Q_e^{(d-p-4)}] = L^{(d-2p-4)/2}$. Les charges électrique et magnétique d'une p -brane sont donc sans dimension pour $d = 2(p+2)$, c'est le cas de la particule et du monopôle à 4d par exemple.

La tension d'une p -brane électrique est indépendante de la constante de couplage g_s de la théorie des cordes. En revanche la tension d'une p -brane magnétique est caractéristique d'un état solitonique de type monopole de 't Hooft–Polyakov [58, 59] : une p -brane magnétique est un état non-perturbatif car dans la limite de couplage faible ($g_s \rightarrow 0$), sa masse par unité de volume tend vers l'infini et découple donc de la théorie tandis qu'une p -brane électrique reste un état de la théorie libre (justifiant l'appellation de brane fondamentale).

- Les branes couplées à des tenseurs appartenant au secteur R/R sont des D - p branes. Elles ont été interprétées par Polchinski comme des surfaces sur lesquelles sont attachées des cordes ouvertes [60]. L'expression de la tension d'une D - p brane en fonction de la constante de couplage est sans analogue en théorie des champs car reflète un comportement intermédiaire entre celui des branes fondamentales et celui des branes solitoniques :

$$D\text{-}p \text{ brane :} \quad T_{D-p} = \frac{M_S^{p+1}}{g_s} . \quad (1.64)$$

On a présenté dans la section précédente un calcul de théorie des champs conduisant à la valeur de cette tension. La présentation de Polchinski [60] repose sur un calcul de théorie des cordes de l'interaction entre deux D -branes parallèles : l'échange de cordes fermées entre les branes compense exactement la force de Casimir d'attraction due aux fluctuations du vide des cordes ouvertes (*cf.* [61, p.14] pour une présentation pédagogique). Ce sont également des états non-perturbatifs de la théorie qui découlent dans la limite de la théorie libre.

En plus de ces branes associées aux actions effectives des théories de supercordes, il existe deux branes couplées, l'une, la M -2 brane, électriquement, l'autre, la M -5 brane, magnétiquement à la 3-forme de la supergravité à $11d$. La seule constante dimensionnée apparaissant à $11d$ étant la masse de Planck M_{11} , les tensions de ces branes sont données par :

$$M\text{-}2 \text{ brane :} \quad T_{M-2} = M_{11}^3 \quad (1.65)$$

$$M\text{-}5 \text{ brane :} \quad T_{M-5} = M_{11}^6 \quad (1.66)$$

Ce sont les branes de la M théorie.

Théories de volume d'univers

Il a été proposé par Bergshoeff *et al.* [62, 63] une théorie de volume d'univers décrivant la M -2 brane⁽¹³⁾ ; cette formulation est analogue à la formulation GS des supercordes : une invariance par κ symétrie assurant la supersymétrie de la théorie, la κ permet en outre de retrouver les équations du mouvement de la supergravité à $11d$ [40]. Cette brane est un exemple de brane scalaire : les champs vivant sur le volume d'univers sont

⁽¹³⁾Duff et Stelle ont construit cette M -2 brane comme solution de la supergravité à $11d$ en g_1 [55].

Théorie	brane	tenseur	couplage	tension
M théorie	M -2 brane	$C_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}$	électrique	M_{11}^3
	M -5 brane	$C_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}$	magnétique	M_{11}^6
Type IIA	F -1 brane	$B_{\mu_1 \mu_2}$	électrique	M_S^2
	NS -5 brane	$B_{\mu_1 \mu_2}$	magnétique	M_S^6/g_s^2
	D -0 brane	A_μ	électrique	M_S/g_s
	D -2 brane	$A_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}$	électrique	M_S^3/g_s
	D -4 brane	$A_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}$	magnétique	M_S^5/g_s
	D -6 brane	A_μ	magnétique	M_S^7/g_s
Type IIB	F -1 brane	$B_{\mu_1 \mu_2}$	électrique	M_S^2
	NS -5 brane	$B_{\mu_1 \mu_2}$	magnétique	M_S^6/g_s^2
	D -1 brane	$A_{\mu_1 \mu_2}$	électrique	M_S^2/g_s
	D -3 brane	$A_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}^{(+)}$	autodual	M_S^4/g_s
	D -5 brane	$A_{\mu_1 \mu_2}$	magnétique	M_S^6/g_s
Hétérotique	F -1 brane	$A_{\mu_1 \mu_2}$	électrique	M_S^2
	NS -5 brane	$A_{\mu_1 \mu_2}$	magnétique	M_S^6/g_s^2
Type I	D -1 brane	$A_{\mu_1 \mu_2}$	électrique	M_S^2/g_s
	D -5 brane	$A_{\mu_1 \mu_2}$	magnétique	M_S^6/g_s

Table 1.3: Les branes des théories des supercordes et de la M théorie. Les D - p branes couplent aux formes du secteur R/R : dans la théorie de type IIA , il n'apparaît donc que des D -($2p+1$) branes, et dans la théorie de type IIB , des D -($2p$) branes. Il existe de plus une 1-brane couplant électriquement à la 2-forme du secteur NS/NS et une 5-brane couplant magnétiquement à cette même forme. Dans les théories hétérotiques, apparaissent également ces 1-brane et 5-brane, leurs tensions étant celles d'une brane électrique et d'une brane magnétique, on les interprète comme la F -1 brane et la NS -5 brane. Dans les cordes de type I , la 1-brane et la 5-brane couplent à la 2-forme qui appartient au secteur R/R: ce sont des D -branes. Dans la M théorie, la 3-forme couple électriquement à la une M -2 brane et magnétiquement à M -5 brane.

des superchamps scalaires interprétés comme les coordonnées transverses à la brane. La condition d'égalité du nombre de degrés de liberté bosoniques et fermioniques limite les dimensions de ces branes scalaires ainsi que les dimensions des espaces de plongement possibles [64]. Les solutions sont cependant plus générales puisque d'autres multiplets supersymétriques peuvent vivre sur le volume d'univers : les D branes contiennent ainsi des champs de jauge appartenant à des multiplets vectoriels [65] et la M -5 brane construite par Güven en 92 est un exemple de brane tensorielle sur laquelle se propage un multiplet tensoriel [66]. La théorie de volume d'univers décrivant une M -5 brane est encore inconnue, la dernière section de ce chapitre sera consacrée à l'étude du multiplet tensoriel de cette M -5 brane et à la recherche d'une théorie pouvant décrire ses interactions.

Identification des branes entre théories duales

Un des tests des conjectures de dualité est l'identification des états BPS des différentes théories. C'est Witten en 95 [42] qui, le premier, a trouvé la correspondance entre les $D=0$ branes de la corde IIA et les états de Kaluza–Klein de la M théorie compactifiée sur un cercle. Ces identifications conduisent à des relations entre les paramètres des différentes théories et sont générales à toutes les dualités dont il a été question dans la section précédente ; nous allons donner ici quelques indications qualitatives basées sur la comparaison des tensions.

- S dualité entre la corde de type IIA et la M théorie compactifiée sur un cercle de rayon R_{11} . La théorie IIA est caractérisée par deux paramètres : l'échelle de masse M_S et la constante de couplage. La compactification de la M théorie, elle aussi, fait apparaître deux paramètres : l'échelle de masse M_{11} et le rayon R_{11} . La $M=5$ brane peut avoir ou non une de ses dimensions s'enroulant dans la direction compactifiée conduisant ainsi à $10d$ à une 4-brane de tension $T_4 = M_{11}^6 R_{11}$ et à une 5-brane de tension $T_5 = M_{11}^6$. Ces branes s'identifient comme la $D=4$ brane et la $NS=5$ brane de la corde de type IIA à la condition que les paramètres des deux théories vérifient :

$$M_{11} = g_s^{-1/3} M_S \quad R_{11} = g_s M_S^{-1} . \quad (1.67)$$

Ces relations permettent d'identifier la $M=2$ brane s'enroulant dans la direction compactifiée comme la 1-brane fondamentale de la corde IIA et la $M=2$ brane non enroulée comme la $D=2$ brane. Les premiers états excités de Kaluza–Klein de la compactification sur le cercle sont des 0-branes et ont une masse valant :

$$T_0 = \frac{1}{R_{11}} = \frac{M_S}{g_s} ; \quad (1.68)$$

ces états correspondent donc aux $D=0$ brane de la théorie IIA . Les monopoles de Kaluza–Klein⁽¹⁴⁾ apparaissant également lors de la compactification sont des $p = d - 5 = 6$ branes et correspondent aux $D=6$ branes de la corde IIA .

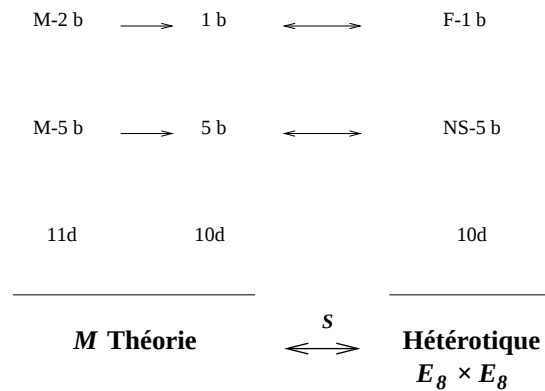
- S dualité entre la corde hétérotique $E_8 \times E_8$ et la M théorie compactifiée sur $S^1/\mathbb{Z}_2^{HW}$. Les deux théories sont caractérisées par deux paramètres : l'échelle de masse M_{11} et le 'rayon' de l'intervalle de compactification, R_{11} , pour la M théorie ; l'échelle de masse M_S et la constante de couplage g_s pour la corde IIA . La géométrie singulière de l'espace serait la cause d'un particularité imposant à l'une des deux dimensions spatiales de la $M=2$ brane d'être le long de la dimension

⁽¹⁴⁾Un monopole de Kaluza–Klein [67–69] correspond à une géométrie du type $\mathbb{R}^{d-4} \times \mathcal{M}$ où $\mathcal{M}$ est une variété de dimension quatre hyperkählienne (la 2-forme de courbure est autoduale). La métrique sur cette variété est donnée par : $ds^2 = U dx^i \otimes dx^i \delta_{ij} + U^{-1} (dx^4 - A_i dx^i) \otimes (dx^4 - A_i dx^i)$ où U est le potentiel créé par un monopole : $U = 1 + q/r$ ($r = \sqrt{x^i x_i}$) et $A_i = \text{grad}_i U$. Pour éviter que cette métrique ne présente de singularité, il est nécessaire que la coordonnée x^4 soit compactifiée sur un cercle. L'espace $\mathbb{R}^{d-4}$ représente le volume d'univers du monopole qui correspond donc à une $p = d - 5$ brane.

compactifiée tandis qu'au contraire toutes les dimensions de la M -5 brane seraient restreintes aux deux bords dix dimensionnels. Bien que non encore comprise, cette singularité permet l'identification des branes à $10d$ à partir de relations identiques aux précédentes :

$$M_{11} = g_s^{-1/3} M_S \qquad R_{11} = g_s M_S^{-1} , \qquad (1.69)$$

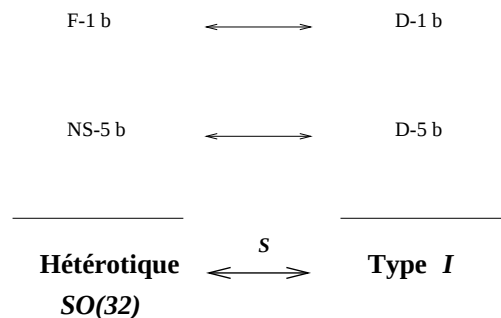
on est conduit à l'identification des branes selon le schéma :



- S dualité entre les cordes hétérotique $SO(32)$ et de type I . Les deux théories sont caractérisées pas l'échelle de masse M_S et la constante de couplage g_s . La S dualité se traduit par les relations :

$$M_S^{SO(32)} = M_S^I g_{s_I}^{-1/2} \qquad g_{s_{SO(32)}} = g_{s_I}^{-1} . \qquad (1.70)$$

Et les branes des deux théories s'identifient suivant le schéma :

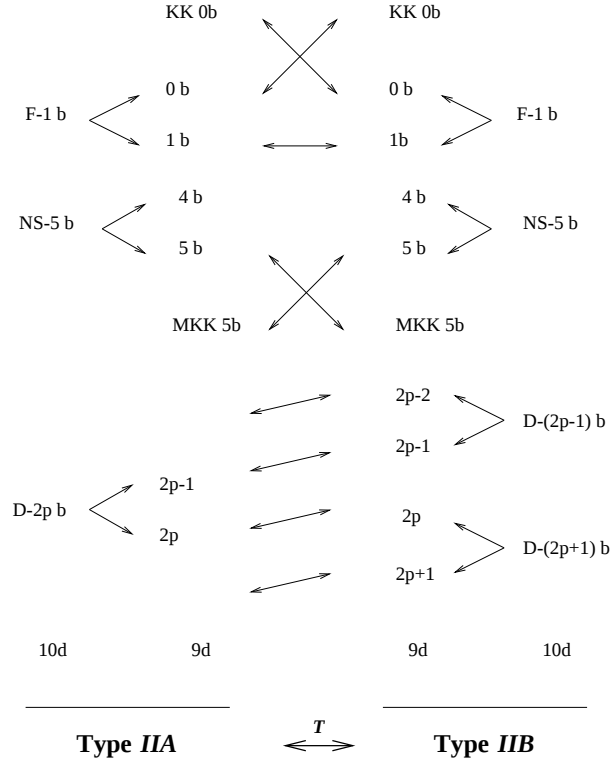


- S autodualité des cordes de type IIB . Au niveau des branes, l'action de la symétrie $Sl(2, \mathbb{Z})$ est une permutation des branes dyoniques c'est-à-dire des branes portant à la fois une charge électrique et une charge magnétique (nous n'en avons pas parlé ici). La revue de Schwarz [70] est une bonne introduction sur le sujet.

- T dualité entre les cordes de type IIA et IIB . La compactification de la corde IIA fait intervenir trois paramètres : l'échelle de masse M_S^A , le rayon de compactification R_A et la constante de couplage g_{s_A} . De même pour la corde IIB . A partir des relations :

$$M_S^A = M_S^B = M_S \quad M_S R_A = 1/(M_S R_B) \quad g_{s_A}^2/R_A = g_{s_B}^2/R_B \quad (1.71)$$

les branes à $9d$ des deux théories s'identifient selon le schéma :



Les 5-branes d'une des théories à $9d$ s'identifient aux monopoles de Kaluza–Klein de l'autre théorie, et de même, il y a une correspondance entre les 0-branes et les premiers états excités de Kaluza–Klein. Les $D-2p$ branes non-enroulées de la théorie IIA s'identifient aux $D-(2p+1)$ enroulées le long de la dimension compactifiée de la théorie IIB et les $D-2p$ branes enroulées le long de la dimension compactifiée de la théorie IIA , aux $D-(2p-1)$ branes non-enroulées de la théorie IIB .

- T dualité entre les cordes hétérotiques $E_8 \times E_8$ et $SO(32)$. Là encore la compactification fait intervenir trois paramètres : l'échelle de masse, le rayon de compactification et la constante de couplage. Au niveau de ces paramètres, la T dualité se traduit par les relations :

$$M_S^E = M_S^O = M_S \quad M_S R_E = 1/(M_S R_O) \quad g_{s_E}^2/R_E = g_{s_O}^2/R_O \quad (1.72)$$

Et l'identification des branes s'opère selon un schéma analogue à celui de la T dualité entre les deux cordes de type II .

L'interconnection de l'ensemble de ces dualités conduit à une interprétation simple de la S dualité entre les cordes hétérotique $SO(32)$ et de type I qu'il est instructif de présenter en guise d'illustration.

Considérons la M théorie compactifiée d'abord sur un cercle S^1 (de rayon R_{11}) : elle est duale à la corde de type IIA . Puis compactifions sur un nouveau cercle S^1 (de rayon R_{10}) et effectuons une T dualité, on obtient la corde IIB ; la projection d'orbifold Ω nous amène à la corde de type I . Les relations entre les paramètres se déduisent des relations que nous avons obtenues précédemment :

$$\begin{aligned} R_{11}M_{11} &= g_A^{2/3} & R_{10}M_{11} &= R_A M_A g_A^{-1/3} \\ R_A M_A &= (R_I M_I)^{-1} & g_A &= g_I (R_I M_I)^{-1} . \end{aligned} \quad (1.73)$$

Considérons maintenant la M théorie compactifiée sur $S^1/\mathbb{Z}_2$ (de rayon R'_{11}) : on obtient la corde hétérotique $E_8 \times E_8$. Compactifions-la sur un cercle S^1 (de rayon R'_{10}) en brisant le groupe de jauge en $SO(16) \times SO(16)$ par une ligne de Wilson ; une T dualité conduit à la corde hétérotique $SO(32)$. L'identification des paramètres est la suivante :

$$\begin{aligned} R'_{11}M_{11} &= g_E^{2/3} & R'_{10}M_{11} &= R_E M_E g_E^{-1/3} \\ R_E M_E &= (R_O M_O)^{-1} & g_E &= g_O (R_O M_O)^{-1} . \end{aligned} \quad (1.74)$$

La S dualité type I – hétérotique $SO(32)$ relie les paramètres selon les relations :

$$R_O M_O = R_I M_I g_I^{-1/2} \quad g_I = g_O^{-1} . \quad (1.75)$$

Ce qui conduit à :

$$R_{11} = R'_{10} \quad R_{10} = R'_{11} . \quad (1.76)$$

La S dualité s'interprète donc comme l'échange des deux rayons de compactification de la M théorie [50]⁽¹⁵⁾.

1.4 La dualité de Maldacena

1.4.1 Théories effectives de D -branes

Une D - p brane est une surface sur laquelle sont attachées des cordes ouvertes, ces dernières étant des objets dynamiques, les branes acquièrent à leur tour un statut dynamique. Une corde ouverte est décrite par une théorie de Yang–Mills supersymétrique à $10d$, un champ de jauge $U(1)$ décrit par un vecteur $A^{\hat{\mu}}(X^{\hat{\mu}}(\xi^a))$ vivant aux extrémités des cordes ouvertes. Lorsque les extrémités des cordes ouvertes sont

⁽¹⁵⁾Le papier d'Hořava–Witten ne spécifie pas toujours dans quelles unités sont mesurés les rayons de compactification. Or le choix de ces unités est capital pour obtenir les bonnes relations.

astreintes à prendre racine sur une D - p brane, le vecteur $A^\mu(\xi^a)$ décrira maintenant une théorie de Yang–Mills supersymétrique à $(p+1)$ dimensions tandis que les composantes $A^i(\xi^a) = M_S^2 X^i(\xi^a)$ seront interprétées comme les coordonnées transverses à la brane ($\mu = 0 \dots p$ désignent les directions du volume d’univers et $i = 1 \dots d - p - 2$ les directions transverses)⁽¹⁶⁾. L’action effective d’une D - p brane couplant à une $p+1$ forme A_{p+1} est une action de Born–Infeld :

$$\mathcal{S}_{D-p} = T_{D-p} \int d^{p+1}\xi \left(\sqrt{|\det(g_{\mu\nu} + \sqrt{2}M_S^{-2}F_{\mu\nu})|} + A_{p+1} \right) \quad (1.77)$$

où $F_{\mu\nu}$ est le tenseur de champ associé au champ de jauge vivant sur la brane et $g_{\mu\nu}$ est la métrique induite sur la brane : $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \partial_\mu X^i \partial_\nu X_i$. Remarquons qu’à basse énergie ($M_S \rightarrow \infty$), l’action de Born–Infeld se réduit à l’action de Yang–Mills :

$$\mathcal{S}_{D-p} = T_{D-p} \int d^{p+1}\xi \sqrt{|g|} \left(1 - \frac{1}{4M_S^4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \dots \right) \quad (1.78)$$

(le terme constant dominant est en fait compensée par la contribution du terme de Wess–Zumino). Cette expression nous permet de déterminer l’expression de la constante de couplage de la théorie de Yang–Mills :

$$\frac{1}{g_{\text{YM}}^2} = \frac{T_{D-p}}{M_S^4} = \frac{M_S^{p-3}}{g_s} \quad (1.79)$$

où pour obtenir la dernière égalité on a utilisé l’expression (1.64) de la tension d’une D -brane. Remarquons que pour $p \leq 3$, la théorie de Yang–Mills est renormalisable ; en revanche pour $p \geq 6$, la théorie effective des p -branes est non-renormalisable et doit inclure, à haute énergie, des effets de gravitation quantique encore inconnus [71, 72] ; dans le cas intermédiaire, $p = 4, 5$, il y a de bonnes raisons de croire en l’existence d’une théorie quantique dont la réduction dimensionnelle de SYM_{10d} , bien que non-renormalisable, correspondrait à la limite de basse énergie.

Dans le cas d’un empilement de N D - p branes, la symétrie de jauge devient $U(1)^N$. Et dans la limite où les N branes coïncident, cette symétrie est promue à $U(N)$: en effet, la masse des cordes ouvertes allant d’un brane à l’autre séparée par une distance l est donnée par $M_S^2 l$ et devient donc nulle dans la limite de séparation nulle suggérant l’apparition de nouveaux états de masse nulle interprétés par Witten [42] comme les bosons de jauge de $U(N)/U(1)^N$; le terme $F_{ij} F^{ij} = \text{Tr}[A^i, A^j]^2$ dans le potentiel provenant de la réduction dimensionnelle de SYM_{10d} interprète la séparation des branes comme des champs de Higgs contrôlant la brisure $U(N) \rightarrow U(1)^N$.

Un ensemble de D branes interagit par l’échange de cordes ouvertes, et cet ensemble de branes interagit également avec le ‘background’ dans lequel il évolue. Dans

⁽¹⁶⁾La dimension du champ de jauge est prise égale à celle d’une masse, de sorte qu’un facteur M_S^{-2} est introduit afin de retrouver la dimension d’une longueur pour les coordonnées transverses. La réduction dimensionnelle du terme cinétique de jauge à $10d$ mène à une action libre pour les champs X^i permettant de les interpréter comme les coordonnées transverses dans la jauge physique ($\xi^\mu = X^\mu$) : $F_{\hat{\mu}\hat{\nu}} F^{\hat{\mu}\hat{\nu}}/4 = F_{\bar{\mu}\bar{\nu}} F^{\bar{\mu}\bar{\nu}}/4 + M_S^4 \partial_\mu X_i \partial^\mu X^i$.

certaines situations, l'ensemble des branes découple du 'background' et devient un système fermé : il faut pour cela que l'échelle typique d'énergie du système de branes reste fixe tandis que la masse de Planck mesurant les échanges d'énergie avec le 'background' devient infinie :

$$\begin{array}{c} \text{domaine de découplage} \\ \text{des } D\text{-branes} \end{array} \quad g_{\text{YM}} \text{ finie} \quad M_P \rightarrow \infty . \quad (1.80)$$

Exprimée à partir de la masse de Planck (rappelons la relation $M_S = M_P g_s^{1/4}$ qui sera établie au chapitre suivant), l'expression de la constante de couplage Yang-Mills devient :

$$g_s = g_{\text{YM}}^{8/(7-p)} M_P^{4(p-3)/(7-p)} \quad (1.81)$$

si bien que la constante de couplage de la théorie des cordes dans le domaine de découplage des D branes suivra le comportement :

$$\begin{aligned} p < 3 & \quad g_s \rightarrow 0 \\ p = 3 & \quad g_s \text{ finie} \\ 3 < p < 7 & \quad g_s \rightarrow \infty . \end{aligned} \quad (1.82)$$

Pour $p < 3$, les D - p branes découpent donc dans un domaine parfaitement compatible avec le régime de couplage faible des cordes ; en revanche pour $p > 3$, la théorie de cordes devient fortement couplée et on peut s'attendre à l'apparition de nouveaux degrés de liberté, selon Sen et Seiberg [71, 72] ces nouveaux degrés de liberté pourraient être décrits par un modèle de matrices [73, 74].

1.4.2 Géométrie asymptotique. Invariance superconforme

Comportement asymptotique de la métrique

Examinons plus en détail la géométrie des solutions des actions effectives de supergravité obtenues dans la section précédente :

- loin de la brane ($r \rightarrow \infty$), $H_r \rightarrow 1$ et on retrouve la géométrie d'un espace de Minkowski avec une invariance de Lorentz $SO(1, d-1)$.
- près de la brane ($r \rightarrow 0$), $H_r \sim 1/r^{d_\perp-2}$. Décomposons alors les coordonnées transverses dans la partie radiale r et des angles de sorte que $dy^i \otimes dy^j \eta_{ij} = dr \otimes dr + r^2 d\Omega_{d_\perp-1}$ où $d\Omega_{d_\perp-1}$ est l'élément de volume de la sphère à $d_\perp-1$ dimensions. Il y a alors trois branes pour lesquelles la métrique prend asymptotiquement, dans les unités de supergravité, la forme de la métrique d'un espace AdS :

– la D -3 brane de la théorie IIB :

$$e^\Phi = e^{\phi_0}$$

$$g = \underbrace{(M_P^4 r^4)^{1/2} dx^\mu \otimes dx^\nu \eta_{\mu\nu}}_{AdS_5} + \underbrace{\left(\frac{1}{M_P^4 r^4} \right)^{1/2} (dr \otimes dr + r^2 d\Omega_5)}_{S^5} \quad (1.83)$$

Le rayon de l'espace AdS_5 est donné par : $R_{AdS_5} = M_P^{-1} = M_S^{-1} g_s^{1/4}$. Et le rayon de la sphère lui est identique : $R_{S^5} = M_P^{-1} = M_S^{-1} g_s^{1/4}$. Dans le cas de plusieurs branes coïncidentes, la relation de quantification de Dirac assure que le tenseur de champ couplant à la brane est multiplié par N , le nombre de branes, et d'après l'expression (1.41) de ce tenseur de champ, on en déduit que les rayons R_{AdS_5} et R_{S^5} sont multipliés par $N^{1/4}$. Notons que le dilaton est une constante (en particulier les unités des cordes sont donc confondues avec les unités d'Einstein).

- la M -2 brane de la supergravité à 11d :

$$g = \underbrace{(M_{11}^6 r^6)^{2/3} dx^\mu \otimes dx^\nu \eta_{\mu\nu}}_{AdS_4} + \underbrace{\left(\frac{1}{M_{11}^6 r^6}\right)^{1/3} (dr \otimes dr + r^2 d\Omega_7)}_{S^7} \quad (1.84)$$

L'échelle de masse est la masse de Planck à 11d. La variable y^+ de l'espace AdS_4 est reliée à la coordonnée radiale r par : $y^+ = M_{11}^{-1} (M_{11} r)^2$. Ce changement de variable induit un rapport entre le rayon de l'espace AdS_4 et celui de la sphère S^7 : dans la configuration de N M -2 branes coïncidentes, $2R_{AdS_4} = R_{S^7} = M_{11}^{-1} N^{1/6}$.

- la M -5 brane de la supergravité à 11d

$$g = \underbrace{(M_{11}^3 r^3)^{1/3} dx^\mu \otimes dx^\nu \eta_{\mu\nu}}_{AdS_7} + \underbrace{\left(\frac{1}{M_{11}^3 r^3}\right)^{2/3} (dr \otimes dr + r^2 d\Omega_4)}_{S^4} \quad (1.85)$$

La variable y^+ de l'espace AdS_7 est reliée à la coordonnée radiale r par : $y^+ = M_{11}^{-1} \sqrt{M_{11} r}$. Là encore ce changement de variable induit un rapport entre le rayon de l'espace AdS_7 et celui de la sphère S^4 : dans la configuration de N M -5 branes coïncidentes, $R_{AdS_4}/2 = R_{S^7} = M_{11}^{-1} N^{1/3}$.

Ces propriétés d'interpolation des solutions de p -brane entre un espace plat et un espace $AdS_{p+2} \times S^{d-p-2}$ avaient été soulignées en 93 par Gibbons et Townsend [75].

$$\underbrace{\begin{array}{c} \text{Espace Minkowskien} \\ SO(1, d-1) \end{array}}_{\text{géométrie à l'infini } (r \sim \infty)} \quad \begin{array}{c} p\text{-brane} \\ \Longleftrightarrow \end{array} \quad \underbrace{\begin{array}{c} \text{Espace } AdS_{p+2} \times S^{d-p-2} \\ SO(2, p+1) \times SO(d-p-1) \end{array}}_{\text{géométrie à l'horizon } (r \sim 0)}$$

Invariance superconforme

La géométrie asymptotique de la configuration de brane induit des propriétés de symétrie particulièrement intéressantes. En effet le groupe d'invariance d'un espace AdS est plus grand qu'un espace minkowskien puisqu'aux générateurs de Lorentz s'ajoutent les générateurs des transformations conformes. Ces générateurs conformes ont des propriétés de commutation non triviales avec les seize charges de supersymétrie préservées

par le ‘background’ de la brane et ces commutations génèrent seize nouvelles charges fermioniques (ce sont les générateurs des supersymétries dites spéciales). Ainsi asymptotiquement, les 32 charges de supersymétrie de l’espace plat à $10d$ ou $11d$ sont préservées par la brane : il y a restauration de symétrie. Le groupe d’isométrie de l’espace bosonique $AdS_{p+2} \times S^{d-p-2}$ est alors étendu à un supergroupe : le supergroupe d’invariance de la D -3 brane est $SU(2, 2|4)$; celui de la M -2 brane, $OSp(8|2)$ et celui de la M -5 brane, $OSp(6, 2|2)$ (une réalisation explicite de l’action de ce supergroupe sur des champs a été étudiée dans les deux publications III et V reproduites en annexe).

1.4.3 Conjecture de Maldacena. Holographie

Comme il a déjà été expliqué, la théorie effective de supergravité est une bonne approximation de la théorie des cordes dans un certain domaine d’énergie seulement. Les effets de cordes peuvent être négligés lorsque le rayon de courbure caractéristique de la géométrie considérée reste grand devant la longueur M_S^{-1} d’une corde. Dans le cas d’une configuration de N branes, la condition de validité de la supergravité devient simplement :

$$R_{AdS} \gg M_S^{-1} \quad i.e. \quad N \gg 1. \quad (1.86)$$

Lorsque les deux contraintes de découplage (1.80) et de supergravité (1.86) sont satisfaites, la théorie de cordes devient équivalente à la théorie effective décrivant les branes. Maldacena a proposé l’équivalence complète des deux théories.

Dans le cas de N D -3 branes coïncidentes, la théorie effective est la théorie⁽¹⁷⁾ $SU(N)$ supersymétrique $\mathcal{N} = 4$ à $4d$ obtenue par réduction dimensionnelle de la théorie SYM_{10d} . Cette théorie possède seize charges de supersymétrie : ce sont les seize charges fermioniques préservées par la brane. Dans ce cas, la formulation précise de la conjecture de Maldacena est la suivante : il existe une correspondance bijective entre les dérivées de l’action effective de la théorie de cordes IIB dans le ‘background’ $AdS_5 \times S^5$ de la brane et les fonctions de corrélation calculées dans la théorie de jauge $SU(N)$ supersymétrique $\mathcal{N} = 4$ à $4d$. La théorie des cordes est caractérisée par trois paramètres : la constante de couplage g_s , la valeur moyenne de l’axion χ et le rayon R de l’espace AdS et de la sphère. La théorie de jauge d’autre part est également caractérisée par trois paramètres : la constante de couplage g , l’angle θ du vide et le rang N du groupe de jauge. La correspondance entre ces paramètres des deux théories est :

$$g_s = g^2 \quad \langle \chi \rangle = \theta \quad RM_S = (g_s^2 N)^{1/4}. \quad (1.87)$$

Cette conjecture est une relation de dualité entre une théorie des cordes dans un certain ‘background’ et une théorie des champs superconforme. Cette théorie est sensée décrire la dynamique d’une brane proche de l’horizon du ‘background’ : la théorie

⁽¹⁷⁾Witten a montré [76] que la conjecture de Maldacena faisait intervenir le groupe de jauge $SU(N)$ et non le groupe $U(N)$ attendu naïvement [77, 78] dans la description de N D -branes.

superconforme de la brane sur l'horizon serait équivalente à la théorie des cordes sur l'espace tout entier.

Dans le cas de M -5 branes, le conjecture de Maldacena prévoit une équivalence entre la M théorie sur $AdS_7 \times S^4$ et une théorie superconforme $(2, 0)$ à six dimensions. Dans la section suivante, on se propose de construire une telle théorie libre puis d'introduire des interactions.

La conjecture de Maldacena est un cas particulier du principe d'holographie proposé par 't Hooft [79] et Susskind [80] et que devrait vérifier toute théorie quantique de la gravitation : ce principe voudrait que tous les degrés de liberté fondamentaux vivent sur la frontière de l'espace-temps et non à l'intérieur, la densité de ces degrés de liberté par unité de volume de Planck devrait alors être de l'ordre de l'unité. Susskind et Witten [81] ont montré qu'une théorie des champs sur un espace AdS suivait ce principe. Witten [76] a proposé le prolongement suivant : soit une variété $\mathcal{M}$ et $\partial\mathcal{M}$ son bord ; considérons ϑ un champ vivant sur $\mathcal{M}$ et ϑ_0 sa valeur sur le bord, l'équation du mouvement permettant de calculer ϑ à partir de la donnée de ϑ_0 sur le bord : $\vartheta[\vartheta_0]$; le principe d'holographie se formulera alors à partir de l'égalité :

$$\langle e^{-\int \vartheta_0 \mathcal{O}} \rangle = e^{-\mathcal{S}[\vartheta[\vartheta_0]]} \quad (1.88)$$

entre la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green de la théorie des champs sur le bord et l'action effective de la théorie de cordes définie sur $\mathcal{M}$ en entier. Witten a obtenu ce résultat dans le cas où la variété $\mathcal{M}$ est un espace AdS et la théorie sur son bord, une théorie conforme.

1.5 Etude de la M - 5 brane

Cette dernière section est une présentation de mes travaux de recherche sur les sujets dont il vient d'être question. Elle est une introduction à la lecture des deux articles reproduits en Appendice.

1.5.1 Modes de masse nulle de la M -5 brane

Il est possible de modifier la solution de la M -5 brane tout en respectant les équations du mouvement de la supergravité. Nous avons vu que seize charges de supersymétrie laissaient la solution invariante. Elles correspondent à 8 degrés de liberté fermioniques réels *on-shell*. On s'attend à retrouver, pour des questions de supersymétrie, huit autres degrés de liberté réels bosoniques. Dans le cas de la M -2 brane, ces huit degrés de liberté sont associés aux translations dans l'espace transverse. Mais pour la M -5 brane, il manque encore trois degrés de liberté. Ces trois degrés de liberté sont associés à la 2-forme autoduale vivant sur le volume d'univers de la brane. Ceci peut se comprendre en cherchant à modifier la solution (1.85). Le tenseur de champ de la 3-forme de cette solution est donné par :

$$G_0 = \star_5 dH \quad \text{avec} \quad H = 1 + k/r^3 . \quad (1.89)$$

On cherche alors des solutions aux équations du mouvement sous la forme $G = G_0 + \delta G$. L'identité de Bianchi assure que $d \delta G = 0$. Ecrivant $\delta G = d(B \wedge dH e^{2H})$ où B est une 2-forme vivant sur les six dimensions du volume d'univers, l'équation du mouvement de la supergravité $d \star G + G \wedge G = 0$, au premier ordre en δG , conduit aux deux équations

$$\begin{aligned} \star_6 dB &= dB \\ d \star_6 dB &= 0 . \end{aligned} \tag{1.90}$$

Nous connaissons ainsi les champs décrivant une M -5 brane :

- huit degrés de liberté bosoniques : cinq champs scalaires ϕ^i interprétés comme les coordonnées transverses à la brane et une 2-forme $B_{\mu_1 \mu_2}$ autoduale à $6d$.
- seize degrés de liberté fermioniques *off-shell* formant quatre spineurs symplectiques Majorana–Weyl à $6d$ ou de façon équivalente un spineur ψ Majorana à $11d$ et chiral à $6d$.

Ces champs forment un supermultiplet tensoriel de la supersymétrie $(2,0)$ à $6d$: c'est le seul multiplet de matière de cette supersymétrie.

Dans l'approximation linéaire, les champs du multiplet tensoriel sont des champs libres. Mais à des ordres plus élevés, les équations de supergravité induisent une dynamique non-triviale sur ces champs. Schwarz *et al.* [82,83] ont obtenu les équations du mouvement résultantes et proposé une action reproduisant ces équations ; cette action a cependant le mauvais goût de ne pas être manifestement invariante de Lorentz au niveau du volume d'univers à $6d$. Pasti *et al.* [84,85] ont proposé une action équivalente en introduisant un champ auxiliaire supplémentaire qui permet d'assurer l'autodualité de la 2-forme tout en préservant l'invariance de Lorentz.

Pour le cas libre, les transformations de supersymétrie linéaires générées par un spineur ϵ Majorana à $11d$ et chiral à $6d$ sont données par :

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon \phi^i &= \bar{\epsilon} \Gamma^i \psi \\ \delta_\epsilon B_{\mu_1 \mu_2} &= \bar{\epsilon} \Gamma_{\mu_1 \mu_2} \psi \\ \delta_\epsilon \psi &= a(\Gamma^\mu_i \epsilon) \partial_\mu \phi^i + b(\partial_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}) (\Gamma^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \epsilon) . \end{aligned} \tag{1.91}$$

Les coefficients a et b sont ajustés afin d'assurer la fermeture de l'algèbre *on-shell* (*i.e.* *modulo* les équations du mouvement⁽¹⁸⁾ et des transformations de jauge de la 2-forme) :

$$[\delta_{\epsilon_1}, \delta_{\epsilon_2}] \underset{on-shell}{\sim} -\bar{\epsilon}_1 \Gamma^\mu \epsilon_2 \partial_\mu . \tag{1.92}$$

Un calcul un peu fastidieux conduit à :

$$a = 1/2 \quad \text{et} \quad b = 1/24 \tag{1.93}$$

Ce multiplet tensoriel décrit une M -5 brane libre. A ce niveau diverses questions se posent :

⁽¹⁸⁾Il s'agit des équations du mouvement libre : $\square \phi^i = 0$, $\not{\partial} \psi = 0$ et $dB = \star dB$.

1. les équations du mouvement utilisées pour fermer l'algèbre étaient des équations libres ; il est alors légitime de se demander s'il y a moyen de modifier ces équations de façon à toujours préserver une invariance par supersymétrie.
2. la théorie libre possède une invariance de Lorentz à $6d$, une invariance par rotation $SO(5)$, une invariance par supersymétrie. Mais existe-t-il d'autres symétries de cette théorie libre ? Il se pourrait notamment qu'il existe des invariances conformes liées à la géométrie de la solution de M -5 brane de la supergravité $11d$.
3. comment introduire des termes d'interaction entre plusieurs branes ? Ces interactions peuvent-elles préserver les symétries de la théorie libre ?

Toutes ces questions sont soulevées par la conjecture de Maldacena concernant la M -5 brane : la M théorie sur $AdS_7 \times S^4$ serait équivalente à une théorie des champs superconforme $(2,0)$ à $6d$ décrivant une théorie effective de M -5 branes. Cependant contrairement à la théorie $SU(N)$ supersymétrique $\mathcal{N} = 4$ à $4d$ des D -3 branes, cette théorie superconforme à $6d$ n'est pas encore formulée. Les deux prochaines sections présenteront succinctement les résultats obtenus dans cette direction en collaboration avec Jihad Mourad.

1.5.2 Description en superspace de la M -5 brane libre

Comme nous venons de le voir, une M -5 brane libre est décrite par un multiplet tensoriel libre de la supersymétrie $(2,0)$ à $6d$. L'idée d'une formulation en superspace est d'obtenir les champs du multiplet tensoriel comme des composantes d'un superchamp c'est-à-dire d'une fonction des coordonnées bosoniques habituelles et de nouvelles coordonnées fermioniques. Les contraintes imposées sur ce superchamp doivent permettre de déduire toutes ses autres composantes à partir des seuls champs du multiplet tensoriel et elles doivent également conduire aux équations du mouvement. L'avantage d'une telle formulation en superspace est de fournir une description manifestement supersymétrique. Ce premier travail est l'objet de la publication III.

Nous avons proposé deux formulations du multiplet tensoriel : la première utilise un superchamp appartenant à une représentation vectorielle du groupe de R symétrie $SO(5)$; la seconde, plus géométrique, définit une super 2-forme et les contraintes imposent à son tenseur de champ de ne pas avoir de composantes purement fermioniques.

- formulation vectorielle. On considère un superchamp Φ^i dans la représentation $\underline{5}$ de $SO(5)$. La contrainte recherchée s'écrit :

$$D_{\hat{\alpha}} \Phi^i = \frac{1}{4} (\Gamma^i_j)_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}} D_{\hat{\beta}} \Phi^j \quad (1.94)$$

où D désigne la dérivée spinorielle commutant avec les transformations de supersymétrie. Les composantes à l'ordre zéro du développement en θ (les coordonnées fermioniques du superspace) sont associées aux cinq champs scalaires ϕ^i du multiplet tensoriel. La contrainte (1.94) permet de déduire toutes les composantes

à l'ordre un du développement à partir d'un seul spineur ψ Majorana à $11d$ et chiral à $6d$, spineur qui sera bien sûr identifié au spineur du multiplet tensoriel. L'application de nouvelles dérivées covariantes spinorielles à la contrainte (1.94) génère une algèbre de contraintes. Ces nouvelles contraintes permettent d'une part d'identifier les termes en θ^2 du développement du superchamp, ceux-ci font apparaître un nouveau champ à partir duquel on construit la 2-forme du multiplet tensoriel ; d'autre part, elles donnent les équations du mouvement recherchées qui se trouvent être les équations du multiplet tensoriel libre. On peut donner une interprétation géométrique à la contrainte (1.94) en considérant le plongement du superspace à six dimensions dans le superspace plat à onze dimensions [86–88]. On impose que ce plongement soit tel que l'espace tangent fermionique au volume d'univers de la brane soit contenu dans l'espace tangent fermionique à l'espace de plongement. Cette contrainte géométrique se traduit par une contrainte algébrique au niveau des coordonnées de plongement. Après fixation de jauge et dans l'approximation linéaire, cette contrainte algébrique est identique à la contrainte (1.94).

- formulation différentielle. On définit une super 2-forme différentielle B_{MN} dans le superspace (M, N désignent l'ensemble des indices bosoniques μ et fermioniques $\hat{\alpha}$). Son tenseur de champ $H_{M_1 M_2 M_3}$ est une super 3-forme. La contrainte est maintenant imposée directement sur le tenseur de champ puisqu'on réclame l'absence de composante purement fermionique : $H_{\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \hat{\alpha}_3} = 0$. On impose d'autre part une seconde contrainte permettant de définir un superchamp identique à celui de la première formulation à partir des autres composantes de la super 2-forme : $H_{\mu \hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2} = (\Gamma_{\mu i})_{\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2} \Phi^i$. Les équations du mouvement se déduisent toutes de l'identité de Bianchi : $dH = 0$, leur conférant ainsi un statut géométrique.

L'équivalence entre les deux formulations a été établie.

Nous avons étudié les modèles σ construits à partir de cette théorie libre et nous avons obtenu un résultat géométrique très intéressant puisque les variétés de ces modèles σ se sont révélées être conformément plates, nous ramenant finalement à des théories équivalentes à la théorie libre. Ce résultat traduit la robustesse de la théorie supersymétrique $(2, 0)$.

Nous nous sommes ensuite intéressés aux invariances de la théorie libre. Nous avons construit dans le superspace des transformations superconformes, celles-ci étant réalisées comme des dérivées dont nous avons calculé les vecteurs de Killing. L'algèbre ainsi engendrée s'avère être celle prédite par les propriétés de symétrie de la solution de supergravité : $OSp(6, 2|2)$; c'est une superalgèbre comportant 38 générateurs bosoniques — correspondant aux translations (P_μ), aux transformations de Lorentz ($M_{\mu\nu}$), aux rotations dans l'espace transverse (J_{ij}), aux dilatations (D) et aux transformations conformes spéciales (K_μ) — ainsi que 32 générateurs fermioniques — correspondant aux supersymétries (Q_α) et aux transformations fermioniques conformes spéciales ($S_{\alpha'}$). L'algèbre est écrite explicitement en termes de ces générateurs dans l'Appendice B de la publication V. Géométriquement ces transformations superconformes sont interprétées comme laissant invariante, à un facteur de dilatation près,

la métrique plate du superspace à $6d$. L'invariance de la contrainte (1.94) sous ces transformations superconformes définit une cochaîne de Chevalley Λ :

$$\delta_\xi \Phi^i = \mathcal{L}_\xi(\Phi^i) + \Lambda^i_j(\xi) \Phi^j \quad (1.95)$$

où $\mathcal{L}_\xi$ est la dérivée de Lie suivant le vecteur de Killing associé à la transformation du groupe superconforme considérée et où la cochaîne Λ s'exprime simplement à partir de ces vecteurs de Killing et de leur dérivées. L'invariance de la contrainte se traduit par la propriété géométrique d'annulation de la courbure de la cochaîne Λ .

Les propriétés d'invariance superconforme du multiplet tensoriel s'obtiennent plus directement dans la formulation à partir de la super 2-forme dont les variations du tenseur de champ sont simplement données par la dérivée de Lie :

$$\delta_\xi H = \mathcal{L}_\xi(H) , \quad (1.96)$$

reflétant le caractère plus géométrique de cette formulation.

1.5.3 Interaction d'une M -5 sur un bord d' $AdS_7 \times S^4$

La section précédente a conduit à un formalisme bien adapté à la description des propriétés d'invariance superconforme d'une 5-brane libre. Se pose alors la question des interactions. Nous avons vu que la théorie libre est robuste vis à vis des déformations : par exemple, un modèle σ ne génère pas d'interaction et est équivalent à la théorie libre. L'obtention d'interaction a été l'objet de notre deuxième travail reproduit dans l'Annexe V. Ces interactions ont été engendrées par une déformation de la réalisation de l'algèbre superconforme $OSp(6, 2|2)$ de la théorie libre.

Nous avons étudié une M -5 brane *test* dans le 'background' créé par d'autres 5-branes sources. La solution de supergravité pour ce 'background' telle que nous l'avons présentée dans la section 1.4.2 a été obtenue avec l'hypothèse d'un espace minkowskien à l'infini, néanmoins si on lève cette hypothèse, la géométrie $AdS_7 \times S^4$ reste une solution de la supergravité et cette géométrie devient la géométrie de l'espace tout entier et non plus seulement de l'horizon (c'est-à-dire à proximité des branes sources).

Dans l'étude précédente, nous avons obtenu une action de l'algèbre $OSp(6, 2|2)$ sur les coordonnées x^μ et θ^α du superspace à $6d$ et sur les superchamps Φ^i et $\Psi^{\alpha'}$. Cette réalisation de l'algèbre nous permet de construire un superspace à $11d$, en considérant Φ^i et $\Psi^{\alpha'}$ non plus comme des champs mais comme des coordonnées : l'algèbre $OSp(6, 2|2)$ est alors réalisée comme un ensemble de dérivation sur cet espace à $11d$: cf. Tableau 1.4.

Cependant, cette réalisation ne correspond pas à la géométrie de l'espace $AdS_7 \times S^4$ créé par les 5-branes sources. Ceci peut se comprendre en examinant la partie bosonique. La métrique est donnée par :

$$g = \frac{2\phi}{R} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{R^2}{4\phi^2} \eta_{ij} d\phi^i d\phi^j, \quad (1.97)$$

Réalisation sur les superchamps
$\delta_0 x^\mu = -(\xi_0^\mu - \xi_0^\alpha (\Gamma^\mu \theta)_\alpha)$
$\delta_0 \theta^\alpha = -\xi_0^\alpha$
$\delta_0 \Phi^i(x, \theta) = \xi_0^\mu \partial_\mu \Phi^i + \xi_0^\beta D_\beta \Phi^i + \Lambda^i_j(\xi_0) \Phi^j$
$\delta_0 \Psi^{\alpha'}(x, \theta) = \xi_0^\mu \partial_\mu \Psi^{\alpha'} + \xi_0^\beta D_\beta \Psi^{\alpha'} + \alpha_0 \Psi^{\alpha'} + \Phi^i (\Gamma_i D \alpha_0)^{\alpha'} + ((D \xi_0) \Psi)^{\alpha'}$
ξ_0^μ et ξ_0^α sont les coordonnées des vecteurs de Killing ξ_0 de la théorie libre, α_0 est le facteur conforme $\alpha_0 = \partial_\mu \xi_0^\mu / 3$, et Λ^i_j la cochaîne de Chevalley.
Réalisation sur les coordonnées
$\delta_0 x^\mu = -(\xi_0^\mu - \xi_0^\alpha (\Gamma^\mu \theta)_\alpha)$
$\delta_0 \theta^\alpha = -\xi_0^\alpha$
$\delta_0 \phi^i = \Lambda^i_j(\xi_0) \phi^j \equiv -\xi_0^i$
$\delta_0 \psi^{\alpha'} = \alpha_0 \psi^{\alpha'} + \phi^i (\Gamma_i D \alpha_0)^{\alpha'} + ((D \xi_0) \psi)^{\alpha'} \equiv \xi_0^{\alpha'}$

Table 1.4: Réalisations de l'algèbre superconforme $OSp(6, 2|2)$ sur les superchamps Φ^i et $\Psi^{\alpha'}$ et sur les coordonnées du superspace à 11d construit à partir des superchamps précédents. Les deux réalisations sont bien équivalentes en ce sens que les transformations forment la même algèbre (un calcul un peu délicat montre que ce sont bien les mêmes signes qui apparaissent dans l'une et l'autre des réalisations).

Le premier terme est bien invariant puisque par construction :

$$\delta_0(\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu) = -\alpha \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad \text{et} \quad \delta_0 \phi = \alpha \phi. \quad (1.98)$$

En revanche, le second terme n'est pas invariant :

$$\delta_0 \left(\frac{R^2}{4\phi^2} \eta_{ij} d\phi^i d\phi^j \right) = \frac{R^2}{4\phi^2} \phi^i (d\alpha d\phi^j + d\phi^j d\alpha) \eta_{ij}. \quad (1.99)$$

Mais cette variation peut être compensée en modifiant la loi de transformation des coordonnées de volume d'univers :

$$\delta x^\mu = \delta_0 x^\mu + \frac{R^3}{8\phi} \partial^\mu \alpha \quad \delta \phi = \delta_0 \phi. \quad (1.100)$$

Le fait que ces nouvelles lois de transformation, au niveau bosonique, engendrent la même algèbre conforme n'est pas évident, mais peut se comprendre en constatant qu'elles correspondent aux lois de transformations induites par les transformations de Lorentz de l'espace de plongement (*cf.* Annexe 1.7 de ce chapitre). Notre travail a consisté à inclure les fermions dans cette discussion. On a cherché, pour l'ensemble des soixante-dix générateurs de l'algèbre $OSp(6, 2|2)$, à modifier l'expression des vecteurs de Killing ξ_0 de la théorie libre, $\xi = \xi_0 + \Delta \xi$, de façon :

- à conserver la loi d'algèbre de $OSp(6, 2|2)$ c'est-à-dire à imposer, pour tout

élément g et g' de cette algèbre, l'identité :

$$\begin{aligned} [\xi(g), \xi(g')] &= \xi([g, g']) \iff \\ [\Delta\xi(g), \xi_0(g')] + [\xi_0(g), \Delta\xi(g')] + [\Delta\xi(g), \Delta\xi(g')] &= \Delta\xi([g, g']). \end{aligned} \quad (1.101)$$

- à préserver la métrique bosonique de l'espace $AdS_7 \times S^4$ lorsque l'ensemble des champs fermioniques s'annulent, c'est-à-dire :

$$\mathcal{L}_\xi \left(\frac{2\phi}{R} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{R^2}{4\phi^2} \eta_{ij} d\phi^i d\phi^j \right) \Big|_{\text{fermions}=0} = 0, \quad (1.102)$$

où $\mathcal{L}_\xi$ désigne la dérivée de Lie suivant le vecteur ξ .

Ces équations sont des équations aux dérivées partielles non linéaires et couplées. Leur résolution a été l'objet principal de la publication V.

La solution a été obtenue comme un développement en puissance du rayon R de l'espace AdS et nous avons déterminé explicitement les premières corrections aux vecteurs de Killing de la théorie libre (les expressions complètes sont données dans la publication). La première observation est qu'il s'agit d'un développement analytique en R et sans terme constant, ce qui permet dans la limite $R \rightarrow 0$ de retrouver la théorie libre : cette limite correspond à une 5-brane *test* placée infiniment loin des 5-branes sources, c'est-à-dire à des distances grandes par rapport à la taille caractéristique de l'espace $AdS_7 \times S^4$: sur le bord de l'espace-temps, la 5-brane est donc une théorie libre.

Les premières corrections en R correspondent aux premières corrections à la théorie libre. Nous avons obtenu les équations du mouvement correspondantes par l'approche de super-plongement (*superembedding*) de Howe, Sezgin et West [86–88]. Par construction, ces équations possèdent une invariance superconforme générée par les vecteurs de Killing modifiés $\xi_0 + \Delta\xi$.

Cette théorie est le premier exemple explicite de théorie (2,0) superconforme en interaction. Elle devrait être duale à la M théorie sur le 'background' créé par les 5-branes sources. La connaissance de cette action effective pourrait donc être un premier pas vers une formulation quantique de la M théorie c'est-à-dire vers une formulation non-perturbative de la théorie des cordes.

1.6 Annexe : supergravité à onze dimensions.

1.6.1 Le lagrangien et les transformations de supersymétrie

Le lagrangien

L'étude des représentations de l'algèbre de supersymétrie (*cf.* Appendice C) nous a appris que $d = 11$ est la dimension minkowskienne maximale dans laquelle il est possible de construire une théorie de supergravité. Le multiplet gravitationnel supersymétrique à $11d$ comprend : les vielbeins e_μ^m (ou de façon équivalente, la métrique), le gravitino

ψ_α^μ et une 3-forme $C_{\mu_1\mu_2\mu_3}$. Cremmer, Julia et Scherk ont construit [47] un lagrangien pour ce multiplet gravitationnel conduisant à des équations du mouvement possédant une invariance par supersymétrie locale (supergravité *on-shell*). La partie purement bosonique a une structure simple :

$$\mathcal{S}_{11}^{bos.} = \int d^{11}x \sqrt{|g|} (a \mathcal{R} + b G^2 + c C.G.G) \quad (1.103)$$

où G désigne le tenseur de champ de la 3-forme : $G_{\mu_1\dots\mu_4} = 4 \partial_{[\mu_1} C_{\mu_2\mu_3\mu_4]}$; et

$$\begin{aligned} G^2 &\equiv *(*G \wedge G) = \frac{1}{4!} \det g G_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} G^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} \\ \sqrt{|g|} C.G.G &\equiv \sqrt{|g|} * (C \wedge G \wedge G) = \frac{1}{3!4!4!} C_{\mu_1\mu_2\mu_3} G_{\mu_4\dots\mu_7} G_{\mu_8\dots\mu_{11}} \epsilon^{\mu_1\dots\mu_{11}} \end{aligned} \quad (1.104)$$

le symbole $\epsilon^{\mu_1\dots\mu_{11}}$ désignant la signature de la permutation normalisée à $\epsilon^{1\dots 11} = 1$. Les coefficients de normalisation devant chacun des termes dépend des conventions retenues *cf.* tableau 1.5

Les transformations de supersymétrie

$$\begin{aligned} \delta e_\mu^m &= s_e \bar{\epsilon} \Gamma^m \psi_\mu \\ \delta C_{\mu_1\mu_2\mu_3} &= s_c \bar{\epsilon} \Gamma_{[\mu_1\mu_2} \psi_{\mu_3]} \\ \delta \psi_\mu &= s_1 \psi D_\mu(\hat{\omega}) \epsilon + s_2 \psi (T_\mu^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} \epsilon) \hat{G}_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} \end{aligned} \quad (1.105)$$

où

$$\begin{aligned} \hat{G}_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} &= G_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} + s_3 \bar{\psi}_{[\nu_1} \Gamma_{\nu_2\nu_3} \psi_{\nu_4]} \\ T_\mu^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} &= \frac{1}{288} (\Gamma_\mu^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} - 8 \delta_\mu^{[\nu_1} \Gamma^{\nu_2\nu_3\nu_4]}) \end{aligned} \quad (1.106)$$

1.6.2 Formulation en superspace

Cremmer et Ferrara [89] et Brink et Howe [90] ont proposé une formulation de la théorie de supergravité à 11d dans un superspace. Ce superspace contient, en plus des coordonnées bosoniques x^μ à 11d, des coordonnées fermioniques qui forment un spineur de Majorana à 11d :

$$Z^M \begin{cases} x^\mu & \mu = 0 \dots 10 \\ \theta^\alpha & \alpha = 1 \dots 32 \end{cases} \quad (1.107)$$

On distinguera les indices courbes (μ, α, M) des indices tangents $(\underline{\mu}, \underline{\alpha}, \underline{M})$. (on notera aussi $\underline{\mu} = m$ pour être en accord avec les notations utilisées tout le long de cette thèse).

La géométrie du superspace est caractérisée par la base mobile $E^{\underline{M}}$ (1-forme différentielle), la connexion $\Omega_{\underline{M}}^{\underline{N}}$ (1-forme différentielle) et la torsion $T^{\underline{M}}$ (2-forme différentielle) : ces formes différentielles sont reliées entre elles par :

$$T^{\underline{M}} = dE^{\underline{M}} + E^{\underline{N}} \wedge \Omega_{\underline{N}}^{\underline{M}}. \quad (1.108)$$

Conventions	dimension des champs	lagrangien	variations
Cremmer	$[\kappa] = L^{9/2}$	$a = -1/(4\kappa^2)$	$s_e = -i\kappa$
Julia	$[e_\mu^m] = L^0$	$b = -1/2$	$s_c = 3/2$
Scherk	$[\Psi^\mu] = L^{-5}$	$c = \kappa/3$	$s_{1\psi} = 1/\kappa$
[47]	$[C_{\mu_1\mu_2\mu_3}] = L^{-9/2}$		$s_{2\psi} = 2i$
$\eta = (+, -\dots, -)$	$[\epsilon] = L^{1/2}$		$s_{3\psi} = -3\kappa$
de Wit	$[\kappa] = L^{9/2}$	$a = -1/(2\kappa^2)$	$s_e = 1/2$
Louis	$[e_\mu^m] = L^0$	$b = 1/(2\kappa^2)$	$s_c = -\sqrt{2}/8$
[25]	$[\Psi^\mu] = L^{-1/2}$	$c = -\sqrt{2}/\kappa^2$	$s_{1\psi} = 1$
	$[C_{\mu_1\mu_2\mu_3}] = L^0$		$s_{2\psi} = 6\sqrt{2}$
$\eta = (-, +\dots, +)$	$[\epsilon] = L^{1/2}$		$s_{3\psi} = \sqrt{2}/4$

Table 1.5: Normalisation du lagrangien de supergravité à onze dimensions. Deux normalisations courantes sont utilisées : celle introduite par Cremmer, Julia et Scherk [47], et une autre plus moderne plutôt utilisée dans le contexte de la théorie des cordes (nous avons retenu celle proposée par de Wit et Louis dans leur récent article de revue [25]).

La 2-forme de courbure est définie par :

$$R_{\underline{M}}^{\underline{N}} d\Omega_{\underline{M}}^{\underline{N}} + \Omega_{\underline{M}}^{\underline{P}} \wedge \Omega_{\underline{P}}^{\underline{N}} . \quad (1.109)$$

Elle obéit aux identités de Bianchi :

$$\begin{aligned} DT^{\underline{M}} (\equiv dT^{\underline{M}} + T^{\underline{N}} \wedge \Omega_{\underline{N}}^{\underline{M}}) &= E^{\underline{N}} R_{\underline{N}}^{\underline{M}} \\ DR_{\underline{M}}^{\underline{N}} (\equiv dR_{\underline{M}}^{\underline{N}} - \Omega_{\underline{M}}^{\underline{P}} \wedge R_{\underline{P}}^{\underline{N}} + R_{\underline{M}}^{\underline{P}} \wedge \Omega_{\underline{P}}^{\underline{N}}) &= 0 \end{aligned} \quad (1.110)$$

Les composantes de ces formes différentielles, qui sont des superchamps *i.e.* des fonctions de Z^M , sont définies par :

$$\begin{aligned} E^{\underline{M}} &= dZ^M E_M^{\underline{M}} & \Omega_{\underline{M}}^{\underline{N}} &= dZ^M \Omega_{M\underline{M}}^{\underline{N}} \\ T^{\underline{M}} &= \frac{1}{2} E^{\underline{N}_1} E^{\underline{N}_2} T_{\underline{N}_1 \underline{N}_2}^{\underline{M}} & R_{\underline{M}}^{\underline{N}} &= \frac{1}{2} E^{P_1} E^{P_2} R_{P_1 P_2 \underline{M}}^{\underline{N}} \end{aligned} \quad (1.111)$$

La connection est supposée avoir une structure Lorentzienne :

$$\Omega_{mn} = -\Omega_{nm} \quad \Omega_{ma} = \Omega_{am} = 0 \quad \Omega_{ab} = \frac{1}{4} (\Gamma^{mn})_{ab} \Omega_{mn} . \quad (1.112)$$

L'idée de la formulation en superspace est de retrouver les champs de la supergravité (les vielbeins e_μ^m , le gravitino ψ^μ et la 3-forme $C_{\mu_1\mu_2\mu_3}$) comme des composantes

du développement des superchamps précédents. Il est nécessaire d'introduire une super 3-forme $\mathcal{C}$ qui sera reliée à la 3-forme de la supergravité. L'identification des composantes physiques se fait alors selon :

$$\begin{aligned} e_\mu{}^m(x) &= E_\mu{}^m(x, \theta = 0) \\ \psi_a^\mu(x) &= E_\mu{}^a(x, \theta = 0) \\ C_{\mu_1\mu_2\mu_3} &= \mathcal{C}_{\mu_1\mu_2\mu_3}(x, \theta = 0) \end{aligned} \quad (1.113)$$

Il faut imposer des contraintes sur ces superchamps afin de pouvoir déduire les composantes supérieures à partir de ces seules composantes physiques (par exemple, toutes les composantes de la torsion, de la courbure et de la super 3-forme sont calculables à partir de la 3-forme de la supergravité). Ces contraintes doivent de plus redonner les équations de la supergravité à $11d$; elles ont été proposées par Cremmer–Ferrara [89] et Brink–Howe [90]. La tentative d'obtenir, à partir de cette formulation en superspace, une formulation *off-shell* de la supergravité à $11d$ ne s'est pas concrétisée. Et les espoirs que cette théorie puisse être une théorie finie comme la théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 4$ à $4d$ ont été déçus puisqu'on sait maintenant que c'est une théorie non-renormalisable.

1.7 Annexe : Espaces AdS . Invariance conforme

L'objectif de cette annexe est de donner une construction géométrique des espaces Anti–de–Sitter (AdS). Cette construction conduit à une interprétation simple des propriétés d'invariances conformes qui n'est pas sans rappeler la construction de l'action du groupe conforme à d dimensions par plongement dans un espace de dimensions $d + 2$.

1.7.1 Construction des transformations conformes par plongement dans un espace de dimension plus élevée

Il existe une façon élégante de construire l'action des transformations conformes dans un espace à d dimensions : cette méthode consiste à plonger l'espace à d dimensions dans un espace de dimension $d + 2$ dans lequel les transformations conformes s'identifient à des transformations de Lorentz ; on obtient alors simplement leur action par induction sur l'espace à d dimensions :

$$\mathbb{R}^d \subset \mathbb{R}^{d+2} \quad \text{muni de la métrique } \underbrace{(-1, 1, \dots, 1)}_d, \underbrace{1, -1}_2.$$

On choisit un système de coordonnées dans l'espace de plongement :

$$x^{\hat{\mu}} \left\{ \begin{pmatrix} x^\mu \\ x^d \\ x^{d+1} \end{pmatrix} \right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^+ = x^{d+1} + x^d \\ x^- = x^{d+1} - x^d \end{pmatrix} \quad \mu = 0 \dots d-1 \quad (1.114)$$

La métrique de $\mathbb{R}^{d+2}$ est invariante sous les transformations de Lorentz $SO(2, d)$:

$$\delta x^{\hat{\mu}} = \omega^{\hat{\mu}}_{\hat{\nu}} x^{\hat{\nu}} \quad \text{avec} \quad \omega^{\hat{\mu}\hat{\nu}} (\equiv \omega^{\hat{\mu}}_{\hat{\nu}'} \eta^{\hat{\nu}'\hat{\nu}}) = -\omega^{\hat{\nu}\hat{\mu}} \quad (1.115)$$

Le plongement de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^{d+2}$ est défini par les deux contraintes invariantes sous $SO(2, d)$ et les dilatations :

$$\begin{cases} x^{\hat{\mu}} \simeq \lambda x^{\hat{\mu}} & \text{pour } \lambda \in \mathbb{R}^* \\ x^{\hat{\mu}} x_{\hat{\mu}} = 0 \end{cases} \quad (1.116)$$

On obtient des coordonnées sur (le compactifié de) $\mathbb{R}^d$ en posant (pour $x^+ \neq 0$) :

$$y^\mu = \frac{x^\mu}{x^+} \quad y^2 = \frac{x^-}{x^+} . \quad (1.117)$$

Sur ces coordonnées, les transformations de Lorentz $SO(2, d)$ induisent les transformations conformes :

$$\delta y^\mu = a^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu + k^\mu x^2 - 2(k^\nu x_\nu) x^\mu \quad (1.118)$$

où l'on a posé :

$$\text{translations à } d \text{ dimensions :} \quad a^\mu = \frac{1}{2} \omega^{\mu d} - \frac{1}{2} \omega^{\mu d+1} \quad (1.119)$$

$$\text{dilatations à } d \text{ dimensions :} \quad \lambda = \omega^{d d+1} \quad (1.120)$$

$$\text{transformations conformes spéciales :} \quad k^\mu = -\frac{1}{2} \omega^{\mu d} - \frac{1}{2} \omega^{\mu d+1} . \quad (1.121)$$

C'est-à-dire que les générateurs de ces transformations conformes s'expriment en fonction des générateurs des transformations de Lorentz à $(d+2)$ dimensions :

$$\begin{aligned} P_\mu &= \frac{1}{2} (M_{\mu d} - M_{\mu d+1}) \\ D &= M_{d d+1} \\ K_\mu &= -\frac{1}{2} (M_{\mu d} + M_{\mu d+1}) \end{aligned} \quad (1.122)$$

1.7.2 Espaces AdS_d

Espace de plongement

L'espace AdS_d est défini comme une section d'un espace de plongement de dimension plus élevée :

$$AdS_d \subset \mathbb{R}^{d+1} \quad \text{muni de la métrique } (\underbrace{-1, 1, \dots, 1}_{d-1}, \underbrace{1, -1}_2) .$$

On choisit un système de coordonnées dans l'espace de plongement :

$$x^{\hat{\mu}} \begin{cases} x^\mu \\ \left(\begin{matrix} x^{d-1} \\ x^d \end{matrix} \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \mu = 0 \dots d-2 \\ \left(\begin{matrix} x^+ = x^{d-1} + x^d \\ x^- = x^{d-1} - x^d \end{matrix} \right) \end{matrix} \quad (1.123)$$

La métrique de l'espace de plongement est donc donnée par :

$$g = dx^{\hat{\mu}} \otimes dx^{\hat{\nu}} \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = dx^\mu \otimes dx^\nu \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (dx^+ \otimes dx^- + dx^- \otimes dx^+) . \quad (1.124)$$

Elle possède une invariance par translation et sous l'action du groupe $SO(2, d-1)$.

Espace AdS

L'espace AdS_d de rayon R est défini par l'équation :

$$x^{\hat{\mu}}x_{\hat{\mu}} = -R^2 \quad i.e. \quad x^{\mu}x_{\mu} + x^{+}x^{-} = -R^2 . \quad (1.125)$$

Par construction, cet espace AdS_d possède une invariance $SO(2, d-1)$ qui correspond au groupe conforme à $d-1$ dimensions (nous calculerons dans le paragraphe suivant l'action de ce groupe sur un système de coordonnées adaptées à l'espace AdS_d). En revanche l'invariance par translation à $d+1$ dimensions est perdue.

L'équation (1.125) permet localement d'éliminer la variable x^{-} : (x^{μ}, x^{+}) forme alors un système de coordonnées locales. La métrique sur AdS_d sera la métrique induite par plongement :

$$g_{AdS_d} = dx^{\mu} \otimes dx^{\nu} \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x^{-}}{\partial x^{\mu}} (dx^{+} \otimes dx^{\mu} + dx^{\mu} \otimes dx^{+}) + 2 \frac{\partial x^{-}}{\partial x^{+}} dx^{+} \otimes dx^{+} \right) . \quad (1.126)$$

Reste à diagonaliser cette métrique, ce qui se fait grâce à un simple changement de variables :

$$y^{\mu} = \frac{R}{x^{+}} x^{\mu} \quad y^{+} = x^{+} \\ g_{AdS_d} = \left(\frac{y^{+}}{R} \right)^2 dy^{\mu} \otimes dy^{\nu} \eta_{\mu\nu} + \left(\frac{R}{y^{+}} \right)^2 dy^{+} \otimes dy^{+} . \quad (1.127)$$

Courbure

Calculons les quantités géométriques associées à la métrique (1.127) :

- les seules composantes non nulles de la connection affine valent :

$$\Gamma_{+\nu}^{\mu} = \frac{1}{y^{+}} \delta^{\mu}_{\nu} \quad \Gamma_{\mu\nu}^{+} = -\frac{y^{+3}}{R^4} \eta_{\mu\nu} \quad \Gamma_{++}^{+} = -\frac{1}{y^{+}} \quad (1.128)$$

- les seules composantes non nulles du tenseur de Riemann sont :

$$R_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} = \frac{y^{+4}}{R^6} (\eta_{\mu_1 \mu_4} \eta_{\mu_2 \mu_3} - \eta_{\mu_1 \mu_3} \eta_{\mu_2 \mu_4}) \\ R_{+\mu_1 + \mu_2} = -\frac{1}{R^2} \eta_{\mu_1 \mu_2} \quad (1.129)$$

- les composantes du tenseur de Ricci sont données par :

$$R_{\mu\nu} = (1-d) \frac{y^{+2}}{R^4} \eta_{\mu\nu} \quad R_{++} = \frac{(1-d)}{y^{+}} \quad (1.130)$$

– et finalement la courbure scalaire vaut :

$$\mathcal{R} = \frac{d(1-d)}{R^2} . \quad (1.131)$$

Il est à remarquer que si la métrique (1.127) présente une singularité en $y^+ = 0$, cette singularité n'est pas physique puisque la courbure est parfaitement régulière en ce point.

1.7.3 Invariance conforme des espaces AdS_d

Par construction, l'espace AdS_d possède une invariance sous l'action de $SO(2, d-1)$. Sur les variables $x^{\hat{\mu}}$ de l'espace de plongement, cette invariance prend la forme de transformations de Lorentz :

$$\delta x^{\hat{\mu}} = \omega^{\hat{\mu}}_{\hat{\nu}} x^{\hat{\nu}} \quad \text{avec} \quad \omega^{\hat{\mu}\hat{\nu}} (\equiv \omega^{\hat{\mu}}_{\hat{\nu}'} \eta^{\hat{\nu}'\hat{\nu}}) = -\omega^{\hat{\nu}\hat{\mu}} . \quad (1.132)$$

Les transformations induites sur les coordonnées (y^μ, y^+) de l'espace AdS_d prennent alors la forme :

$$\begin{aligned} \delta y^\mu &= a^\mu + \omega^\mu_{\nu} y^\nu + \left(k^\mu y^2 - 2(k^\nu y_\nu) y^\mu - \frac{R^4}{y^{+2}} k^\mu \right) + \lambda y^\mu \\ \delta y^+ &= 2(k^\nu y_\nu) y^+ - \lambda y^+ \end{aligned} \quad (1.133)$$

où l'on a posé :

$$\text{translations à } d \text{ dimensions :} \quad a^\mu = \frac{R}{2} (\omega^{\mu d-1} - \omega^{\mu d}) \quad (1.134)$$

$$\text{transformations conformes spéciales :} \quad k^\mu = -\frac{R}{2} (\omega^{\mu d-1} + \omega^{\mu d}) \quad (1.135)$$

$$\text{dilatations à } d \text{ dimensions :} \quad \lambda = \omega^{d-1d} . \quad (1.136)$$

De plus les $\omega^{\mu\nu}$ sont les paramètres des transformations de Lorentz à $d-1$ dimensions.

L'espace AdS_d correspond donc à l'espace quotient (*coset*) du groupe d'invariance de l'espace AdS_d lui-même c'est-à-dire le groupe conforme $SO(2, d-1)$, sur le groupe d'invariance du point ($x^0 = R, x^1 = \dots = x^d = 0$) sur lequel l'action de $SO(2, d-1)$ est transitive, ce groupe d'invariance n'est autre que $SO(1, d-1)$:

$$AdS_d = \frac{SO(2, d-1)}{SO(1, d-1)} \quad (1.137)$$

Cette structure de coset a été étudiée par plusieurs groupes pour tenter de décrire les branes de la M théorie (Castellani *et al.* [91], Kallosh *et al.* [92, 93]).

1.7.4 La frontière d'un espace AdS

Les bords de l'espace AdS_d correspondent aux points à l'infini obéissant à l'équation (1.125). Plus précisément, définissons de nouvelles coordonnées : $x^{\hat{\mu}} = \lambda x'^{\hat{\mu}}$ et considérons la limite $\lambda \rightarrow \infty$. Alors la frontière est décrite par la surface ($i = 1 \dots d-2$, $\mu = 0 \dots d-2$) :

$$\begin{aligned} x'^{\mu} x'_{\mu} + x'^{+} x'^{-} &= 0 \quad i.e. \quad x^i x^i + x^{d-1} x^{d-1} = x^0 x^0 + x^d x^d \\ (x', x'^{+}, x'^{-}) &\sim \varpi(x', x'^{+}, x'^{-}) \quad \varpi \in \mathbb{R}^* . \end{aligned} \quad (1.138)$$

La topologie de la frontière est donc $S^1 \times S^{d-2}$, dont le recouvrement est $\mathbb{R} \times S^{d-2}$. Pour $x'^{+} \neq 0$ (correspondant à des points $x^{+} \rightarrow \infty$ dans les coordonnées de départ), les x'^{μ} décrivent un espace de Minkowski à $d-1$ dimensions dont $y^{\mu} = R x'^{\mu} / x'^{+}$ constituent un système de coordonnées. Les points caractérisés par $x'^{+} = 0$ (correspondant à $x^{+} = 0$ dans les coordonnées de départ) sont sur une sphère S^{d-1} à $d-1$ dimensions. La frontière d' AdS_d est donc constituée de deux bords :

- un espace de Minkowski de dimension $d-1$ à l'infini ;
- un horizon à l'origine $x^{+} = 0$.

Les coordonnées (x^{μ}, x^{+}) sont bien adaptées à l'étude des branes car la coordonnée x^{+} est interprétée comme la distance à la brane. Néanmoins, il existe un autre système de coordonnées où la structure de la frontière est plus transparente. Ces nouvelles coordonnées z^m et τ ($m = 1 \dots d-1$) sont définies par :

$$\begin{aligned} z^m &= x^m / \sqrt{x_0^2 + x_d^2} \quad \rho = \sqrt{z^m z_m} \leq 1 \\ x_0 &= \sqrt{\frac{R^2}{1-\rho^2}} \cos \tau \quad x_d = \sqrt{\frac{R^2}{1-\rho^2}} \sin \tau . \end{aligned} \quad (1.139)$$

La métrique induite par plongement sur ces nouvelles variables devient :

$$g_{AdS_d} = R^2 \left(-\frac{d\tau \otimes d\tau}{1-\rho^2} + \frac{dz^m \otimes dz_m}{1-\rho^2} + \frac{\rho^2 d\rho \otimes d\rho}{(1-\rho^2)^2} \right) . \quad (1.140)$$

La variable de temps τ est une variable périodique (c'est ce qui explique qu'il existe des courbes fermées de genre temps). Cette forme de la métrique rend explicite la structure de la frontière : l'espace AdS_d a la topologie de $S^1 \times \mathcal{B}^{d-1}$ (un cercle de genre temps paramétrisé par τ et une boule de dimension $d-1$ correspondant à $\rho \leq 1$) ; sa frontière est la surface $\rho = 1$, elle a la topologie de $S^1 \times S^{d-2}$. Il existe encore une autre forme équivalente de cette même métrique : redéfinissant $\rho = 2r/(1+r^2)$ et $z'^m/r = z^m/\rho$, on obtient :

$$g_{AdS_d} = R^2 \left(-\left(\frac{1+r^2}{1-r^2} \right)^2 d\tau \otimes d\tau + \frac{4}{(1-r^2)^2} dz'^m \otimes dz'_m \right) . \quad (1.141)$$

C'est à partir de cette paramétrisation que Susskind et Witten [81] ont étudié les propriétés d'holographie des espaces AdS et ainsi obtenu que, après régularisation infrarouge, sur la frontière vit un seul degré de liberté par unité de volume de Planck.

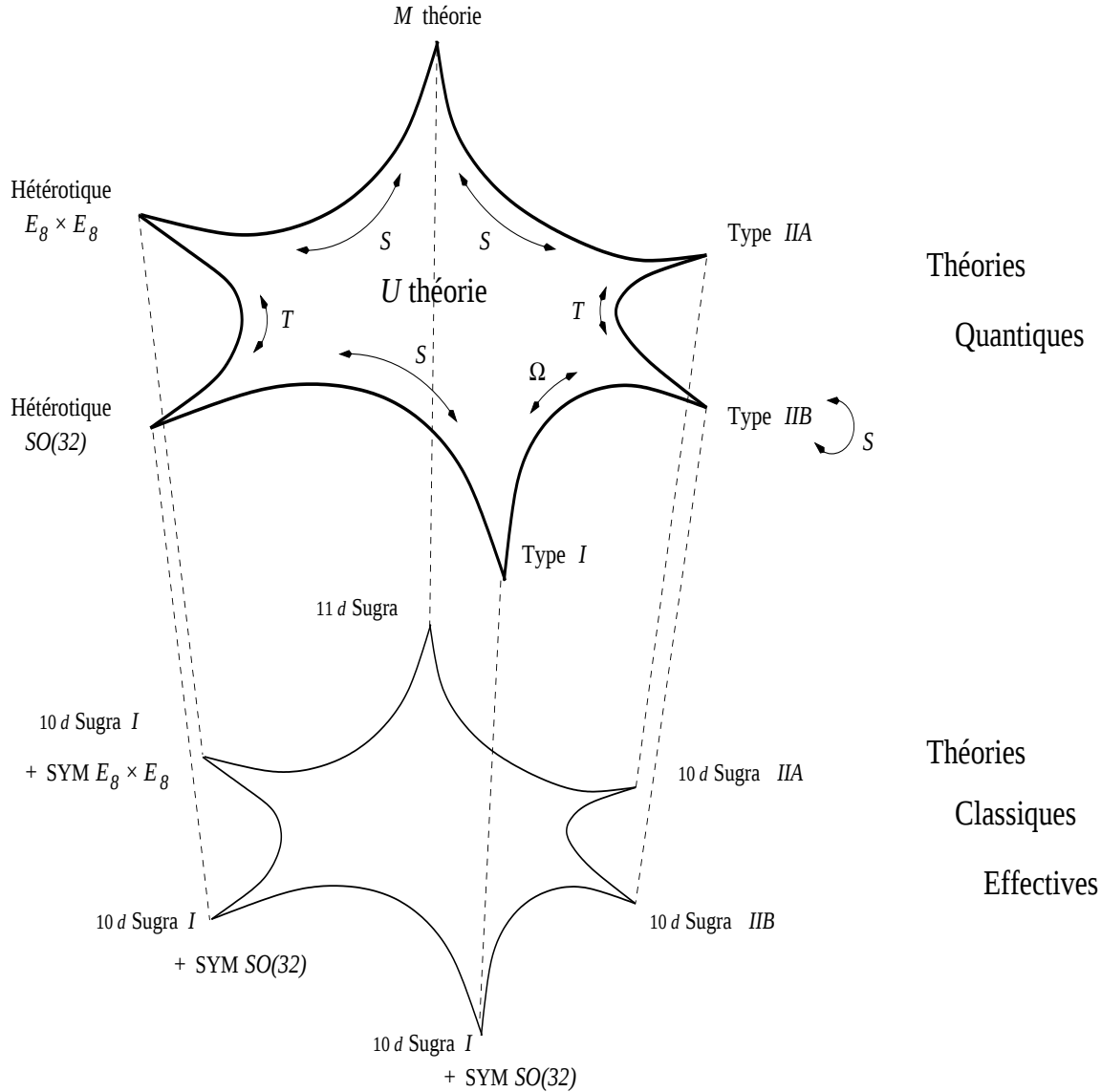


Figure 1.2: Les cinq théories de supercordes et la M théorie : leurs limites de basse énergie et leurs relations de dualité. L'action effective de basse énergie des cinq théories de supercordes sont des théories de supergravité à $10d$ avec éventuellement une invariance de jauge décrite par une théorie de Yang–Mills supersymétrique. La M théorie est la théorie quantique dont la limite de basse énergie est la supergravité à $11d$ de Cremmer, Julia et Scherk. Une T dualité relie les cordes de type IIA et IIB , ainsi que les cordes hétérotiques $SO(32)$ et $E_8 \times E_8$. La corde de type IIB est S auto-duale tandis qu'une S dualité relie les cordes hétérotiques $SO(32)$ et de type I . Enfin les cordes de type IIA et hétérotiques $E_8 \times E_8$ sont toutes deux S duales à la M théorie. La corde de type I peut être vue comme une projection d'«orbifold» de la corde de type IIB .

Chapitre 2

Approche phénoménologique de la M théorie

La première section est consacrée aux théories de Kaluza–Klein, et plus particulièrement à la réduction dimensionnelle de l’action d’Einstein. Il sera donné un exemple simple de symétrie cachée apparaissant lors de la réduction dimensionnelle, ces symétries cachées jouent un rôle important dans les idées récentes de dualité. On discutera le lien entre les différents systèmes d’unités de la théorie des cordes, ce qui nous permettra notamment d’établir la relation entre la masse de Planck et la masse des cordes.

La deuxième section tourne autour du problème de l’unification des constantes de jauge et de la gravitation. On montrera la nécessité d’une formulation de la théorie des cordes en couplage fort⁽¹⁾, formulation dont la théorie d’Hořava–Witten est une première approche.

La troisième section rappelle la procédure de réduction dimensionnelle conduisant à des actions effectives $\mathcal{N} = 1$ de la théorie des cordes à quatre dimensions. La quatrième section étend cette procédure à la M théorie et en étudie les conséquences phénoménologiques. Ce travail a fait l’objet de la publication reproduite dans l’Annexe II.

2.1 Réduction dimensionnelle. Théories de Kaluza–Klein

Les théories de cordes ne sont formulées quantiquement de façon cohérente que dans des espaces de dimensions supérieures à quatre. Cette idée de dimensions supplémentaires avait été proposée très tôt par Kaluza et Klein [94, 95]⁽²⁾ afin d’unifier la gravitation et les interactions électromagnétiques : en effet le lagrangien d’Einstein décrivant la gravitation dans un espace–temps de dimension supérieure à quatre conduit par réduction dimensionnelle à la somme d’un lagrangien d’Einstein à quatre dimensions et d’un

⁽¹⁾Ce domaine a connu de nombreuses avancées ces derniers mois offrant de nouvelles alternatives à celles présentées dans ce chapitre ; elles ne seront malheureusement pas discutées en détail ici.

⁽²⁾Ces deux papiers sont reproduits et traduits en anglais dans [96, 97].

lagrangien de Yang–Mills (*cf.* formule explicite (2.12) ci-dessous). La nature des interactions (groupe de jauge, spectre de masse nulle ...) est entièrement déterminée par la géométrie de la variété compactifiée. En plus des particules de masse nulle, apparaissent également une infinité d'états massifs de masse inversement proportionnelle à la longueur caractéristique de l'espace compactifié ("tour" d'états de Kaluza–Klein) : en théorie des cordes, cette longueur étant de l'ordre de la longueur de Planck [98], les états de Kaluza–Klein auraient une masse supérieure à la masse de Planck⁽³⁾ et resteraient donc inobservables dans les expériences aux accélérateurs.

Le but de cette section n'est pas de décrire les théories de Kaluza–Klein et le processus de réduction dimensionnelle (le lecteur est renvoyé aux références [96, 97, 108, 109]) mais de présenter les principaux résultats qui ont été utilisés dans le travail reproduit dans l'Annexe II.

2.1.1 théorie en ϕ^4

Soit une théorie ϕ^4 en $\hat{d} = d + N$ dimensions :

$$\mathcal{S} = \int d^{\hat{d}}x \left(\frac{1}{2} \partial_{\hat{\mu}} \phi \partial^{\hat{\mu}} \phi - \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 - \frac{1}{4!} \lambda_0 \phi^4 \right) \quad (2.1)$$

On notera :

- $\mu = 0 \dots d - 1$ les indices de la variété non-compacte ;
- $i = 1 \dots N$ les indices de la variété compactifiée ;
- $\hat{\mu} = 0 \dots \hat{d} - 1$ les indices de l'espace total $\hat{\mu} = \{\mu, d - 1 + i\}$.

Supposons que les dimensions supplémentaires soient des cercles de rayon R_i *i.e.* :

$$x_i \sim x_i + 2\pi R_i. \quad (2.2)$$

Les conditions aux bords :

$$\phi(x_i) = \phi(x_i + 2\pi R_i). \quad (2.3)$$

permettent de développer le champ ϕ en série de Fourier :

$$\phi(x_\mu, x_i) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi R_i}} \sum_{\{n_i\}} e^{i \sum x_i n_i / R_i} \phi_{\{n_i\}}(x_\mu). \quad (2.4)$$

⁽³⁾Récemment de nombreux travaux ont étudié la possibilité de dimensions supplémentaires de l'ordre du millimètre [99–101] avec une échelle des cordes pouvant être abaissée jusqu'à des énergies de l'ordre du TeV [102, 103]. Ces dimensions n'interagiraient que gravitationnellement avec la matière visible et ce scénario est donc parfaitement compatible avec les mesures expérimentales, ces dimensions supplémentaires pourraient cependant abaisser l'échelle d'unification des constantes de couplage du groupe de jauge du modèle standard [104, 105]. Ces idées ouvrent de nouvelles perspectives notamment en cosmologie [106, 107].

Après intégration sur les dimensions compactifiées dans l'action (2.1), les états $n_i \neq 0$ acquièrent une masse de Kaluza–Klein :

$$m_{\{n_i\}}^2 = m_0^2 + \sum_{i=1}^N \frac{n_i^2}{R_i^2} \quad (2.5)$$

et, dans la limite $R_i \rightarrow 0$, découplent de la théorie qui se réduit à une théorie ϕ^4 à d dimensions pour le champ $\phi = \phi_{\{n_i\}=0}$:

$$\mathcal{S} = \int d^d x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 - \frac{1}{4!} \lambda \phi^4 \right) \quad (2.6)$$

où le coefficient λ a été renormalisé :

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\prod_{i=1}^N 2\pi R_i}. \quad (2.7)$$

2.1.2 théorie de Maxwell

Considérons une théorie de Maxwell en $\hat{d} = d + N$ dimensions⁽⁴⁾ :

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{4} \int d^{\hat{d}} x F_{\hat{\mu}\hat{\nu}} F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} \quad \text{avec} \quad F_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \partial_{\hat{\mu}} A_{\hat{\nu}} - \partial_{\hat{\nu}} A_{\hat{\mu}}. \quad (2.8)$$

Le vecteur $A_{\hat{\mu}}$ à $\hat{d}$ dimensions se décompose en un vecteur A_μ à d dimensions plus N champs scalaires $\phi_i = \sqrt{V_N} A_i$ où V_N est la dimension de l'espace compactifié, les champs ϕ_i ont ainsi une dimension canonique $[\phi_i] = L^{1-d/2}$ qui correspond bien à la dimension d'un champ scalaire à d dimensions. Comme précédemment les états de Kaluza–Klein découplent dans la limite $R_i \rightarrow 0$. Et le lagrangien résultant à d dimensions est :

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{4} \int d^d x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int d^d x \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i. \quad (2.9)$$

Remarquons que les coordonnées compactifiées doivent être du genre espace, dans le cas contraire on aurait obtenu un champ scalaire avec un terme cinétique du mauvais signe (et des états de Kaluza–Klein tachyoniques). L'action de départ à $\hat{d}$ dimensions possède une invariance de Poincaré $SO(1, \hat{d} - 1)$. Les conditions de bords (2.3) brisent cette invariance en $SO(1, d - 1) \times U(1)^N$ mais dans la limite $R_i \rightarrow 0$, une partie des symétries est restaurée et l'action réduite (2.9) possède une invariance $SO(1, d - 1) \times O(N)$.

$$\begin{array}{ccc} \text{théorie à } \hat{d} \text{ dim.} & & \text{théorie à } d \text{ dim.} \\ \underbrace{SO(1, \hat{d} - 1)} & \xrightarrow[R_i \rightarrow 0]{} & \underbrace{SO(1, d - 1) \times U(1)^N \longrightarrow SO(1, d - 1) \times O(N)} \end{array}$$

⁽⁴⁾Avec les normalisations retenues, le champ vectoriel A_μ a une dimension canonique égale à $[A_\mu] = L^{1-\hat{d}/2}$ et la constante de couplage g , $[g] = L^{-2+\hat{d}/2}$. Une autre normalisation courante est d'inclure la constante de couplage dans le champ de jauge, dans ce cas, il apparaît un facteur $1/g^2$ dans l'action et les champs de jauge ont alors une dimension $[A_\mu] = L^{-1}$.

2.1.3 théorie d'Einstein; réduction dimensionnelle de la courbure

Dans la théorie de la relativité générale, la métrique de l'espace-temps est une grandeur dynamique déterminée à partir des équations du mouvement. Comprendre pourquoi en théorie des cordes l'espace-temps se scinde en une variété à quatre dimensions et une variété compactifiée est un problème difficile qui n'a pas de réponse satisfaisante. Nous supposons que c'est bien le cas et que de plus la géométrie de la variété compactifiée est telle qu'il n'apparaît pas de tachyons dans la théorie effective de basse dimension. La métrique $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ à $\hat{d} = d + N$ dimensions se décompose à d dimensions en :

- une métrique à d dimensions $g_{\mu\nu}$;
- N vecteurs $A_\mu^i \leftrightarrow g_{\mu i}$;
- $\frac{1}{2}N(N+1)$ champs scalaires $\phi^{ij} \leftrightarrow g_{ij}$.

Une paramétrisation commode de la métrique à $\hat{d}$ dimensions est la suivante :

$$g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{(\hat{d})} = \underbrace{\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{(\hat{d})}}_{\text{partie indépendante des champs de jauge}} + \underbrace{\tilde{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{(\hat{d})}}_{\text{partie dépendante des champs de jauge}} \quad (2.10)$$

avec

$$\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{(\hat{d})} = \begin{pmatrix} e^\Sigma g_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & g_{ij} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{(\hat{d})} = \begin{pmatrix} 4\kappa^2 A_\mu^i A_\nu^j g_{ij} & 2\kappa A_\mu^i g_{ij} \\ 2\kappa A_\nu^j g_{ji} & 0 \end{pmatrix}$$

$$i.e. \quad ds^2 = e^\Sigma g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + g_{ij} (dx^i + 2\kappa A_\mu^i dx^\mu) (dx^j + 2\kappa A_\nu^j dx^\nu) \quad (2.11)$$

κ est la constante dimensionnée relative à la gravitation à d dimensions (elle sera reliée à la constante relative à la gravitation à $\hat{d}$ dimensions $\hat{\kappa}$ dans la suite) ; les vecteurs A_μ^i ont alors la dimension canonique des champs de vecteurs à d dimensions $[A_\mu^i] = L^{1-d/2}$; les facteurs 2 sont destinés à retrouver une action convenablement normalisée. Tous les champs sont indépendants des coordonnées de l'espace interne : ce sont des fonctions de $\{x^\mu\}$ uniquement (cette procédure de réduction dimensionnelle sera étendue dans le mécanisme de Scherk-Schwarz afin de permettre une certaine dépendance dans les coordonnées compactifiées *cf.* §2.4.3). Le facteur $e^{\Sigma(x)}$ correspond à un changement d'échelle de la métrique à d dimensions (*rescaling de Weyl*). Le calcul de la courbure à $\hat{d}$ dimensions correspondant à la métrique (2.10) est long et fastidieux⁽⁵⁾ mais conduit à un résultat relativement simple qui, après une intégration par partie de certains

⁽⁵⁾On trouvera dans [110] un calcul élégant et indépendant du système de coordonnées de la transformation du tenseur de Riemann-Christoffel sous un changement d'échelle. Ce calcul est reproduit dans [111, p.237]. Le calcul complet de la courbure est dû à [112, 113].

termes, s'écrit :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4\hat{\kappa}^2} \int d^{\hat{d}}x \sqrt{g^{(\hat{d})}} \mathcal{R}^{(\hat{d})} &= \int d^d x \sqrt{g^{(d)}} \sqrt{g^{(N)}} e^{\frac{d-2}{2}\Sigma} \left(-\frac{1}{4\kappa^2} \mathcal{R}^{(d)} + \frac{1}{4} e^{-\Sigma} g_{ij} F_{\mu\nu}^i F^{j\mu\nu} \right. \\
&\quad - \frac{(d-1)(d-2)}{16\kappa^2} (\partial_\mu \Sigma)(\partial^\mu \Sigma) - \frac{d-1}{8\kappa^2} g^{ij} (\partial_\mu g_{ij})(\partial^\mu \Sigma) \\
&\quad \left. + \frac{1}{16\kappa^2} g^{ij} (\partial_\mu g_{jk}) g^{kl} (\partial^\mu g_{li}) - \frac{1}{16\kappa^2} g^{ij} (\partial_\mu g_{ij}) g^{kl} (\partial^\mu g_{kl}) \right) \quad (2.12)
\end{aligned}$$

où on a posé $F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i$. V_N est le volume de l'espace compactifié, $g^{(d)}$ et $g^{(N)}$ les déterminants des métriques $g_{\mu\nu}$ et g_{ij} , $\hat{\kappa}$ la constante de Newton à $\hat{d}$ dimensions et $\kappa = \hat{\kappa}/\sqrt{V_N}$ la constante de Newton à d dimensions. Dans le membre de droite, les indices μ, ν montent et descendent avec la métrique $g_{\mu\nu}$ et son inverse.

Remarquons qu'il est nécessaire que les dimensions compactifiées soient du genre espace afin que les termes cinétiques des champs de jauge aient le bon signe.

Les *unités d'Einstein* à d dimensions sont associées à un changement d'échelle qui conduit à un terme de courbure convenablement normalisé à d dimensions :

$$\sqrt{g^{(N)}} e^{\frac{d-2}{2}\Sigma} = 1 \quad i.e. \quad \Sigma = -\frac{1}{d-2} \ln g^{(N)}. \quad (2.13)$$

Dans ce système d'unités, la formule (2.12) se simplifie pour donner :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4\hat{\kappa}^2} \int d^{\hat{d}}x \sqrt{g^{(\hat{d})}} \mathcal{R}^{(\hat{d})} &= \int d^d x \sqrt{g^{(d)}} \left(-\frac{1}{4\kappa^2} \mathcal{R}^{(d)} + \frac{1}{4} (g^{(N)})^{1/(d-2)} g_{ij} F_{\mu\nu}^i F^{j\mu\nu} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{16\kappa^2} g^{ij} (\partial_\mu g_{jk}) g^{kl} (\partial^\mu g_{li}) - \frac{1}{16(d-2)\kappa^2} g^{ij} (\partial_\mu g_{ij}) g^{kl} (\partial^\mu g_{kl}) \right). \quad (2.14)
\end{aligned}$$

La théorie de départ à $\hat{d}$ dimensions était invariante sous le groupe des difféomorphismes à $\hat{d}$ dimensions, cette invariance est brisée puisque certaines dimensions deviennent compactes. La théorie réduite à d dimensions reste invariante sous le groupe des difféomorphismes à seulement d dimensions, elle est posséder également une invariance de jauge $U(1)^N$. Il existe aussi une symétrie globale sous $Sl(N, \mathbb{R})$ correspondant à des changements de base de l'espace compactifié.

$$\begin{array}{cc}
\text{théorie à } \hat{d} \text{ dim.} & \text{théorie à } d \text{ dim.} \\
\overbrace{Diff_{\hat{d}}} & \overbrace{Diff_d \times U(1)^N}
\end{array}$$

Transformations de Weyl

Un cas particulier intéressant de ces calculs de réduction dimensionnelle est celui d'un simple changement d'échelle de la métrique, l'expression de la courbure (2.12)

se réduit⁽⁶⁾ alors à :

$$\frac{1}{4\kappa^2} \int d^d x \sqrt{g_1} \mathcal{R}_1 = \frac{1}{4\kappa^2} \int d^d x \sqrt{g_2} e^{\frac{d-2}{2}\Sigma} \left(\mathcal{R}_2 + \frac{(d-1)(d-2)}{4} (\partial_\mu \Sigma)(\partial^\mu \Sigma) \right) \quad (2.15)$$

où $g_{1\mu\nu} = e^\Sigma g_{2\mu\nu}$ et $\mathcal{R}_i$ la courbure calculée avec la métrique g_i . Cette formule *a priori* ne semble pas linéaire sous l'action de deux changements d'échelle successifs bien qu'elle le soit en réalité : ceci vient du fait que la métrique de départ correspond à une action convenablement normalisée (unités d'Einstein) et le résultat ne peut donc s'appliquer directement au membre de droite de (2.15) ; en raison d'une intégration par partie dans le cours du calcul, le facteur d'échelle devant le terme de courbure engendre en effet un terme cinétique par un nouveau changement d'échelle, et pour obtenir le résultat correct il suffit simplement de repasser par les unités d'Einstein. Finalement la formule complète de changement d'échelle est :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\kappa^2} \int d^d x \sqrt{g_1} e^\Omega \mathcal{R}_1 = \frac{1}{4\kappa^2} \int d^d x \sqrt{g_2} e^\Omega e^{\frac{d-2}{2}\Sigma} & \left(\mathcal{R}_2 + (d-1)g_2^{\mu\nu} (\partial_\mu \Omega)(\partial_\nu \Sigma) \right. \\ & \left. + \frac{(d-1)(d-2)}{4} g_2^{\mu\nu} (\partial_\mu \Sigma)(\partial_\nu \Sigma) \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

avec toujours $g_{1\mu\nu} = e^\Sigma g_{2\mu\nu}$.

Symétries cachées

En plus de l'invariance de jauge $U(1)^N$ et de la symétrie globale $Sl(N, \mathbb{R})$, l'action réduite (2.12) possède également une autre invariance globale liée à des changements d'échelle. Nous allons étudier explicitement le cas d'une réduction dimensionnelle sur un cercle (*i.e.* $N = 1$). Ce cas se généralise et conduit, lors de réductions dimensionnelles toroïdales, à des groupes de symétries étudiés par Cremmer et Julia pour les théories de supergravité [114–116] (voir aussi [117]). Dans le cas de la compactification sur un cercle :

$$ds_{d+1}^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - e^{2\phi} (dx^d + 2\kappa A_\mu dx^\mu)(dx^d + 2\kappa A_\nu dx^\nu), \quad (2.17)$$

l'action d'Einstein après intégration sur le cercle devient :

$$-\frac{1}{4\kappa_{d+1}^2} \int d^{d+1} x \sqrt{g^{(d+1)}} \mathcal{R}^{(d+1)} = \int d^d x \sqrt{g^{(d)}} e^\phi \left(-\frac{1}{4\kappa_d^2} \mathcal{R}^{(d)} - \frac{1}{4} e^{2\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \quad (2.18)$$

où κ_d est reliée à κ_{d+1} et au rayon du cercle comme expliqué ci-dessus. L'action réduite (2.18) est invariante sous la symétrie globale $U(1)$ agissant selon :

$$\phi \rightarrow \phi + \alpha, \quad g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} e^{-2\alpha/(d-2)}, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu e^{(1-d)\alpha/(d-2)}. \quad (2.19)$$

⁽⁶⁾Mentionnons, à titre de comparaison avec les normalisations d'autres auteurs, le comportement de la courbure scalaire sous un changement d'échelle lorsqu'aucune intégration par partie n'est pratiquée :

$$\mathcal{R}_1 \rightarrow e^{-\Sigma} \left(\mathcal{R}_2 - (d-1)g_2^{\mu\nu} D_\mu D_\nu \Sigma - \frac{(d-1)(d-2)}{4} g_2^{\mu\nu} (\partial_\mu \Sigma)(\partial_\nu \Sigma) \right)$$

où D_μ dans le membre de droite est la dérivée covariante calculée à partir de la métrique g_2 .

Excitations de Kaluza–Klein comme états BPS

Les modes massifs d’excitation de Kaluza–Klein sont chargés sous les symétries de jauge $U(1)^N$ de l’action réduite (2.12) et leurs charges sont reliées simplement à leur masse par une relation de type BPS. Reprenons le cas simple d’une compactification sur un cercle :

$$\begin{aligned} x^d &\sim x^d + L \\ \phi(x, x^d) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{L}} e^{2i\pi n x^d / L} \phi_{\{n\}}(x). \end{aligned} \quad (2.20)$$

La symétrie de jauge $U(1)$ laisse la métrique à d dimensions invariante ainsi que le champ scalaire mais transforme le vecteur A_μ :

$$\begin{aligned} x^d &\rightarrow x^d + \xi^d(x) \\ a_\mu &\rightarrow a_\mu - \frac{1}{2\kappa} \partial_\mu \xi^d. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Le champ scalaire ϕ est invariant mais par contre ses modes d’excitation de Kaluza–Klein sont chargés, leur charge valant $e_n = 2\pi n/L$. D’autre part leur masse est donnée par : $M_n = 2\pi|n|/L$. On en déduit la relation :

$$M_n = |e_n|, \quad (2.22)$$

qui permet d’interpréter les modes d’excitation de Kaluza–Klein comme des états BPS : bien qu’ici aucune supersymétrie n’assure d’inégalité entre la charge et la masse, inégalité qui serait saturée par les états de Kaluza–Klein, nous avons vu (*cf.* §1.3.3) que dans certaines situations, ces états de Kaluza–Klein correspondent à des D0-branes.

2.1.4 Les divers systèmes d’unités de la théorie des cordes

Les unités des cordes

L’action effective de théorie des cordes peut avoir différentes expressions suivant le *système d’unités* dans lequel on travaille ; on passe d’un système d’unités à un autre par un changement d’échelle (*rescaling de Weyl*). Dans les *unités des cordes*, l’action effective correspondant au secteur NS/NS universel (comportant la métrique $g_{\mu\nu}$, une 2-forme $A_{\mu\nu}$ et le dilaton Φ) est donnée par :

$$\mathcal{S}_{10}^{(S)} = \mathcal{N}_{10} M_S^8 \int d^{10}x \sqrt{|g^{(S)}|} e^{-2\Phi} \left(-\mathcal{R}^{(S)} - 4g_{(S)}^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi + \frac{1}{2 \cdot 3!} H^2 \right) \quad (2.23)$$

où $\Phi = \phi_0 + \phi$ est le dilaton, ϕ_0 étant la valeur moyenne dans le vide du dilaton à l’infini, $H^2 = H_{\mu_1\mu_2\mu_3} H_{\nu_1\nu_2\nu_3} g^{\mu_1\nu_1} g^{\mu_2\nu_2} g^{\mu_3\nu_3}$ avec $H_{\mu_1\mu_2\mu_3} = 3\partial_{[\mu_1} A_{\mu_2\mu_3]}$. M_S est l’échelle fondamentale de la théorie des cordes et $\mathcal{N}_{10}$ est un facteur purement numérique de

normalisation lié à la définition de M_S . De plus, le secteur R/R n'a pas de couplage au dilaton [118, 119] :

$$\mathcal{S}_{10R/R}^{(S)} = \mathcal{N}_{10} M_S^8 \int d^{10}x \sqrt{|g^{(S)}|} \sum_n \frac{1}{2n!} F_n^2 \quad (2.24)$$

Considérons la transformation de Weyl correspondant au changement d'échelle de la métrique :

$$g_{\mu\nu}^{(\lambda)} = e^{\lambda\phi} g_{\mu\nu}^{(S)}. \quad (2.25)$$

Remarquons que le changement d'échelle ne fait intervenir que la différence $\phi = \Phi - \phi_0$ de sorte que les deux métriques tendent asymptotiquement à l'infini vers la métrique plate, ce qui permet d'interpréter l'échelle de masse comme la constante de Newton de la gravitation grâce à l'équation de Poisson (*cf.* note p.104).

Les unités d'Einstein

Les *unités d'Einstein* sont définies en imposant que le terme de courbure soit convenablement normalisé ; la formule générale (2.16) conduit à la transformation de Weyl correspondant à $\lambda = -1/2$:

$$g_{\mu\nu}^{(E)} = e^{-\phi/2} g_{\mu\nu}^{(S)} \\ \mathcal{S}_{10}^{(S)} = \mathcal{N}_{10} M_S^8 e^{-2\phi_0} \int d^{10}x \sqrt{|g^{(E)}|} \left(-\mathcal{R}^{(E)} + \frac{1}{2} g_{(E)}^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi + \frac{1}{2.3!} e^{-\phi} H^2 \right). \quad (2.26)$$

Le facteur de normalisation du terme de courbure définit l'échelle fondamentale du système d'unités considéré ; dans les unités d'Einstein, cette échelle n'est autre que la masse de Planck et elle est donc reliée à l'échelle des cordes par :

$$M_P = e^{-\phi_0/4} M_S. \quad (2.27)$$

Cette relation permet de retrouver les expressions des tensions des branes telles qu'elles ont été discutées dans le chapitre précédent §1.3.3.

Les unités de 5-brane

Les *unités de 5-brane* [120–122] sont définies par l'absence de terme cinétique pour le dilaton ; il y a deux valeurs du facteur de Weyl qui assurent cette propriété : $\lambda = -1/3$ ou $\lambda = -2/3$, la seconde valeur conduit à une échelle de masse reliée à la solution solitonique 5-brane des supergravités de type *II*, c'est donc elle qui définira les unités de 5-brane :

$$g_{\mu\nu}^{(B)} = e^{-2\phi/3} g_{\mu\nu}^{(S)} \\ \mathcal{S}_{10}^{(B)} = \mathcal{N}_{10} M_S^8 e^{-8\phi_0/3} \int d^{10}x \sqrt{|g^{(B)}|} e^{2\Phi/3} \left(-\mathcal{R}^{(B)} + \frac{1}{2.3!} e^{-4\phi/3} H^2 \right). \quad (2.28)$$

Et l'échelle fondamentale des unités de 5-brane est reliée à l'échelle des cordes par :

$$M_B = e^{-\phi_0/3} M_S. \quad (2.29)$$

Les unités de p -brane

D'une façon générale, il est possible de définir les unités associées à une p -brane par un argument de comportement d'échelle. Considérons pour cela l'action effective (1.21) et l'action de volume d'univers (1.23) décrivant une p -brane électrique couplée à la gravitation :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{eff} &= M_P^{d-2} \int d^d x \sqrt{|g|} (\mathcal{R} + \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + c e^{\alpha_p \Phi} F_{(p+2)}^2) \\ \mathcal{S}_p &= M_P^{p+1} \int d^{p+1} \xi \left(\sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}(X) e^{\beta_p \Phi} + \sqrt{|\gamma|} \right. \\ &\quad \left. + \epsilon^{a_1 \dots a_{p+1}} \partial_{a_1} X^{\mu_1} \dots \partial_{a_{p+1}} X^{\mu_{p+1}} A_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} \right) .\end{aligned}\tag{2.30}$$

(on a supprimé les facteurs numériques et conservé uniquement les facteurs dimensionnés ; le potentiel de jauge $A_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}}$ est supposé être de dimension nulle). Dans ces deux expressions, $g_{\mu\nu}$ est la métrique des unités d'Einstein ; mais la brane ne couple pas directement à $g_{\mu\nu}$, il faut lui adjoindre une dépendance dans le dilaton. Cherchons une transformation d'échelle de tous les champs de façon à ce que les actions $\mathcal{S}_{eff}$ et $\mathcal{S}_p$ aient le même comportement :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{eff} &\rightarrow \lambda^{p+1} \mathcal{S}_{eff} && \text{et} && \mathcal{S}_p \rightarrow \lambda^{p+1} \mathcal{S}_p \\ &&& \text{pour} && \\ g_{\mu\nu} &\rightarrow \lambda^{2(p+1)/(d-2)} g_{\mu\nu} && e^\Phi \rightarrow \lambda^{-2(p+1)(d-p-3)/(\alpha_p(d-2))} e^\Phi \\ X^\mu &\rightarrow X^\mu && \gamma_{ab} \rightarrow \lambda^2 \gamma_{ab} && A_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} \rightarrow \lambda^d A_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} \\ &&& && \text{ssi} \\ \beta_p &= -\alpha_p/(p+1) .\end{aligned}$$

Les unités de p -brane sont définies par la métrique apparaissant dans $\mathcal{S}_p$ couplant à la brane :

$$g_{\mu\nu}^{(p\text{-brane})} = e^{-\alpha_p \Phi/(p+1)} g_{\mu\nu}^{(E)} .\tag{2.31}$$

Pour la 1-brane fondamentale couplant électriquement à la 2-forme NS/NS et pour les D -branes couplant électriquement aux formes différentielles R/R, les valeurs du couplage au dilaton sont données par (1.34)–(1.35) :

$$F\text{-1 brane} : \quad \alpha_1 = -1 \tag{2.32}$$

$$D\text{-}p \text{ brane électrique} : \quad \alpha_p = (3-p)/2 . \tag{2.33}$$

La 5-brane NS couple magnétiquement à la 2-forme NS/NS $B_{\mu_1 \mu_2}$ c'est-à-dire électriquement à la 6-forme duale (dont le tenseur de champ correspond à $e^\Phi \star H$ dans les unités de supergravité) : la couplage au dilaton de la NS-5 brane vaut donc $\alpha_5 = 1$ et la formule (2.31) conduit bien à la définition précédente des unités de 5-brane. De même le couplage d'une D - p brane magnétique au dilaton vaut : $\alpha_p^m = -\alpha_{10-p-4}^e = (3-p)/2$:

$$NS\text{-}5 \text{ brane} : \quad \alpha_1 = 1 \tag{2.34}$$

$$D\text{-}p \text{ brane magnétique} : \quad \alpha_p = (3-p)/2 . \tag{2.35}$$

On peut montrer [53, p.262] que la métrique correspondant à la solution (1.39) de p -brane de la supergravité devient celle d'un produit $AdS_{p+2} \times S^{d-p-2}$ dans les unités de la $(d - p - 4)$ -brane duale.

Echelle de masse de la M théorie. Compactification de la supergravité à onze dimensions

Le même principe de comparaison des actions effectives permet également de retrouver une des relations entre l'échelle de la supergravité à onze dimensions M_{11} , définie comme l'échelle de masse de la M théorie, le rayon de la onzième dimension R_{11} et l'échelle des cordes M_S . Par réduction dimensionnelle à la Kaluza–Klein, la supergravité à onze dimensions conduit à la supergravité de type IIA à dix dimensions. Dans le système graviton/dilaton :

$$0 \leq x^{11} < 1$$

$$g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{(11)} = e^{a\phi} g_{\mu\nu}^{(S)} dx^\mu \otimes dx^\nu - R_{11}^2 e^{b\phi} (dx^{11} + 2\kappa A_\mu dx^\mu) \otimes (dx^{11} + 2\kappa A_\nu dx^\nu). \quad (2.36)$$

R_{11} est le rayon de la onzième dimension et les coefficients a et b sont ajustés de façon à retrouver l'action effective (2.23) des cordes à dix dimensions dans les unités des cordes :

$$a = -2/3, \quad b = 4/3$$

$$M_{11}^9 \int d^{11}x \sqrt{g_{(11)}} \mathcal{R}^{(11)} = M_{11}^9 R_{11} e^{2\phi_0} \int d^{10}x \sqrt{g_{(S)}} e^{-2\Phi} \left(\mathcal{R}^{(S)} + 4g_{(S)}^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi + \dots \right) \quad (2.37)$$

La comparaison des coefficients des termes de courbure conduit alors à la relation⁽⁷⁾ :

$$R_{11} M_{11}^9 e^{2\phi_0} = M_S^8. \quad (2.38)$$

Cette relation est bien compatible avec l'identification (1.67) des paramètres de la M théorie en fonction de ceux de la corde de type IIA , identification obtenue par la comparaison du spectre des branes des deux théories.

2.2 Régime de couplage fort de la corde hétérotique $E_8 \times E_8$: théorie d'Hořava–Witten

2.2.1 Unification des constantes de couplage en théorie des cordes

L'unification des trois constantes de couplage de jauge du modèle standard est une constatation semi-expérimentale [123, 124] : à partir des mesures de ces constantes à

⁽⁷⁾A partir de la valeur des coefficients de Weyl a et b , Witten [42] en déduit les deux relations : $M_{11} = e^{-\phi_0/3} M_S$ et $R_{11} M_{11} = e^{2\phi_0/3}$. A ce stade, cette dérivation me semble ambiguë car il n'est pas fait de distinction entre le dilaton Φ et sa valeur moyenne à l'infini ϕ_0 .

l'échelle électrofaible, le groupe de renormalisation prédit, avec une grande précision dans les théories supersymétriques, une unification de ces trois constantes à une énergie⁽⁸⁾ de l'ordre de $M_{GUT}c^2 \simeq 2 \cdot 10^{16} \text{GeV}$ avec $\alpha_{GUT} \simeq 1/24$.

A quatre dimensions, l'unification des constantes de couplage est donc caractérisée par trois grandeurs : (i) l'échelle d'unification, (ii) la valeur des constantes de couplage unifiées α_{GUT} et (iii) la constante de Newton des interactions gravitationnelles $\mathcal{G}_N = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2\text{kg}^{-2} \sim (10^{19} \text{GeV } c^{-2})^{-2}$.

La théorie des cordes est particulièrement intéressante parce qu'elle relie les interactions de jauge aux interactions gravitationnelles. Cependant la théorie des cordes étant définie à $10d$, les prédictions physiques s'obtiennent après compactification de dimensions supplémentaires. Les grandeurs caractéristiques de la théorie des cordes seront donc également au nombre de trois : (i) l'échelle de masse des cordes M_S , (ii) la constante de couplage des cordes qui sera aussi reliée à la constante de couplage des interactions de jauge à $10d$ et (iii) le volume V de l'espace de compactification. On pourrait donc penser reproduire les valeurs de la physique à $4d$ en ajustant les valeurs des paramètres de la théorie des cordes⁽⁹⁾. Toutefois il faut veiller à rester dans le domaine de validité de la théorie c'est-à-dire en particulier dans le cadre des théories perturbatives veiller à ce que la constante de couplage reste faible. Dans les théories hétérotiques, les relations entre la constante de jauge g , la constante de couplage de la gravitation κ et la constante de couplage des cordes g_s sont :

$$g^2 = \frac{1}{4}g_s^2 M_S^{-6} \quad \kappa^2 = \frac{1}{16}g_s^2 M_S^{-8} \quad (2.39)$$

C'est-à-dire que le lagrangien effectif s'écrit :

$$\mathcal{S}_{\text{het}}^{(10)} = \int d^{10}x \sqrt{|g|} e^{-2\Phi} (4M_S^8 \mathcal{R} + M_S^6 \text{Tr} F^2 + \dots) \quad (2.40)$$

Après compactification, on en déduit un lagrangien effectif à $4d$:

$$\mathcal{S}_{\text{het}}^{(4)} = \int d^4x \sqrt{|g|} e^{-2\Phi} V (4M_S^8 \mathcal{R} + M_S^6 \text{Tr} F^2 + \dots) \quad (2.41)$$

lagrangien qui permet d'identifier la constante de Newton et la constante de couplage des interactions de jauge à $4d$:

$$\mathcal{G}_N = \frac{g_s^2 M_S^{-8}}{64\pi V} \quad \alpha_{GUT} = \frac{g_s^2 M_S^{-6}}{16\pi V} \quad (2.42)$$

⁽⁸⁾Voir [104, 105] pour l'influence de dimensions supplémentaires de l'ordre du TeV sur l'échelle d'unification.

⁽⁹⁾A *priori* les paramètres de la théorie des cordes sont déterminés dynamiquement. Mais cette détermination nécessite une formulation non-perturbative de la théorie des cordes permettant de caractériser le vide de la théorie. Cette formulation est encore inconnue. Le but de cette analyse est de savoir s'il existe un vide de la théorie compatible avec les données expérimentales, laissant de côté pour le moment le problème du choix dynamique de ce vide.

Il est également supposé que c'est au cours de la compactification que se produirait la brisure du groupe de jauge, de sorte que $V \sim M_{GUT}^{-6}$. Éliminant l'échelle des cordes entre les deux relations précédentes, on obtient [125–127] :

$$\mathcal{G}_N = \frac{(16\pi)^{4/3}}{64\pi} \frac{\alpha_{GUT}^{4/3}}{g_s^{2/3} M_{GUT}^2} . \quad (2.43)$$

Les données expérimentales conduisent alors à une constante de couplage des cordes de l'ordre de $g_s \sim 10^4$, valeur sortant largement du domaine perturbatif. C'est l'incohérence de ce résultat qui a conduit Witten à réexaminer [128] le problème de l'unification en couplage fort. La suite de ce chapitre s'intéresse directement à cette approche et examine plus en détail la structure de la théorie effective obtenue à $4d$. Mais avant cela, mentionnons dans le paragraphe suivant la situation différente de l'unification dans la théorie de type I .

Unification dans les cordes de type I

Les conclusions précédentes sont différentes dans la théorie de type I : le multiplet gravitationnel provient de la quantification des cordes fermées tandis que le multiplet vectoriel de jauge provient lui de la quantification des cordes ouvertes de la théorie. Les termes de gravitation et de jauge de l'action effective ne sont pas générés au même ordre du développement perturbatif et de ce fait ne couplent pas à la même puissance du dilaton :

$$\mathcal{S}_I^{(10)} = \int d^{10}x \sqrt{|g|} 4 \left(e^{-2\Phi} M_S^8 \mathcal{R} + e^{-\Phi} M_S^6 \text{Tr} F^2 + \dots \right) . \quad (2.44)$$

La compactification conduit maintenant à la relation :

$$\mathcal{G}_N = \frac{(16\pi)^{4/3}}{64\pi} \frac{g_s^{2/3} \alpha_{GUT}^{4/3}}{M_{GUT}^2} . \quad (2.45)$$

Et l'hypothèse de couplage faible est alors parfaitement compatible avec les données expérimentales. Longtemps négligées, les cordes de type I ont récemment suscité des travaux [129–131] visant à construire une extension du modèle standard phénoménologiquement acceptable à partir d'une théorie de type I . Notons de plus que les relations de dualité mettent dorénavant les théories de type I sur le même plan que les théories hétérotiques, l'intérêt de ces dernières rejaillissant du même coup sur les cordes de type I .

2.2.2 Théorie effective de basse énergie de la M théorie

Dans le chapitre précédent (§1.3.3), nous avons discuté un certain nombre de relations de dualité, en particulier les S dualités reliant une théorie en régime de couplage fort à une autre théorie en couplage faible pouvant donc être étudiée en perturbation. Nous avons avancé des arguments en faveur d'une S dualité entre la théorie des cordes

hétérotiques $E_8 \times E_8$ et la M théorie, arguments basés sur la comparaison des modes de masse nulle et l'identification des branes des deux théories. Fort peu de choses sont encore connues quant à la formulation quantique de la M théorie, néanmoins, à basse énergie, la supergravité à $11d$ devrait en être une théorie effective. Une étude attentive de cette action effective et plus particulièrement de ses anomalies confirme la conjecture de S dualité [49, 50].

Considérons la M théorie sur l'orbifold $\mathbb{E}^{(1,9)} \times S^1/\mathbb{Z}_2^{HW}$ ($\mathbb{E}^{(1,9)}$ est un espace Minkowskien à dix dimensions), l'action de la symétrie $\mathbb{Z}_2^{HW}$ sur cet orbifold renverse l'orientation : $x^{10} \rightarrow -x^{10}$. Si R_{11} est le rayon de la onzième dimension, cette symétrie $\mathbb{Z}_2^{HW}$ laisse deux surfaces dix dimensionnelles invariantes : $x^{10} = 0$ et $x^{10} = \pi R_{11}$. Recherchons l'action de cette symétrie $\mathbb{Z}_2^{HW}$ sur les fermions :

$$\begin{aligned} (x^\mu, x^{10}) &\rightarrow (\tilde{x}^\mu, \tilde{x}^{10}) = (x^\mu, -x^{10}) \\ \lambda(x) &\rightarrow \tilde{\lambda}(\tilde{x}) = S \lambda(x) . \end{aligned} \quad (2.46)$$

L'équation de Dirac de masse nulle pour λ devient :

$$S^{-1} \gamma^{\hat{\mu}} \tilde{\partial}_{\hat{\mu}} \tilde{\lambda}(\tilde{x}) = \left(\{ \gamma^\mu, S^{-1} \} \tilde{\partial}_\mu - [\gamma^{10}, S^{-1}] \tilde{\partial}_{10} \right) \tilde{\lambda}(\tilde{x}) . \quad (2.47)$$

Et donc une action compatible avec l'équation de Dirac est :

$$\lambda(x) \rightarrow \gamma^{10} \lambda(x^\mu, -x^{10}) . \quad (2.48)$$

En particulier les fermions vivant sur les points fixes de la symétrie $\mathbb{Z}_2^{HW}$ ainsi que les fermions n'ayant aucune dépendance en x^{10} , comme par exemple les modes de masse nulle de la réduction dimensionnelle, doivent être des fermions chiraux à $10d$ (γ^{10} est la matrice de chiralité à $10d$ cf. Appendice C).

Enfin, l'action de la symétrie $\mathbb{Z}_2^{HW}$ n'est compatible avec le couplage de Chern–Simons $\int C \wedge dC \wedge dC$ de la supergravité que si $C(x^\mu, -x^{10}) = -C(x^\mu, x^{10})$.

Sur $\mathbb{E}^{(1,9)} \times S^1$ la M théorie conserve trente deux charges de supersymétrie dont l'action est générée par un spineur constant $\mathcal{E}$. L'invariance sous l'action de $\mathbb{Z}_2^{HW}$ impose à $\mathcal{E}$ une contrainte de chiralité à $10d$, éliminant ainsi la moitié de ses composantes : à basse énergie (lorsque les modes de Kaluza–Klein massifs découplent), on obtient une théorie supersymétrique chirale à $10d$. Il n'existe que trois théories possédant ces propriétés de symétrie : les cordes hétérotiques $E_8 \times E_8$ ou $SO(32)$ et les cordes de type I . La condition d'absence d'anomalie⁽¹⁰⁾ a conduit Hořava et Witten à éliminer les deux derniers candidats.

Une théorie à $11d$ ne présente pas d'anomalie gravitationnelle⁽¹¹⁾. Cependant la géométrie que nous considérons ici n'est pas régulière et des anomalies apparaissent sur

⁽¹⁰⁾Une anomalie est par définition une quantité quantique et il peut sembler *a priori* étrange d'obtenir des résultats sans connaître de formulation quantique de la M théorie. En fait le calcul d'anomalie nécessite uniquement la connaissance de la théorie à basse énergie et c'est précisément cette théorie de basse énergie que nous cherchons à caractériser.

⁽¹¹⁾L'anomalie à d dimensions est définie par la variation de l'action effective $\delta_\epsilon \Gamma = \int_{\mathcal{M}^d} I_d$, elle se calcule à partir d'une $(d+2)$ -forme différentielle exacte ('équation de descente') : $I_{d+2} = dI_{d+1}$ et $\delta_\epsilon I_{d+1} = dI_d$. La forme I_{d+2} s'obtient à partir de la 2-forme de courbure et du tenseur de champ dans le

les points de singularité (d'ailleurs, comme nous l'avons vu, la symétrie $\mathbb{Z}_2^{HW}$ se traduit au niveau des modes fermioniques de masse nulle par une condition de chiralité pouvant donner lieu à des anomalies). L'anomalie gravitationnelle à $10d$ se partage en deux sur chacune des frontières invariantes sous $\mathbb{Z}_2^{HW}$. Une partie seulement de cette anomalie peut être compensée par un mécanisme de Green–Schwarz et il reste une composante irréductible. La troncation simple de la supergravité $11d$ sur $\mathbb{E}^{(1,9)} \times S^1/\mathbb{Z}_2^{HW}$ est donc incohérente quantiquement : il doit exister de nouveaux modes chiraux de masse nulle se propageant sur les frontières et composant l'anomalie gravitationnelle : Green–Schwarz ont montré que 496 multiplets vectoriels de SYM_{10d} sont nécessaires ; ici l'anomalie devant de surcroît se diviser en deux sur chaque frontière, la seule solution est l'apparition sur chacune de ces frontières de 248 vecteurs formant une représentation adjointe du groupe ⁽¹²⁾ E_8 .

Revenons aux relations (1.69) entre les paramètres de la M théorie et ceux de la corde hétérotique $E_8 \times E_8$:

$$R_{11}M_{11} = g_s^{2/3} \quad M_{11}^3 R_{11} = M_S^2 \quad (2.49)$$

Lorsque $R_{11} \ll M_{11}^{-1}$, des effets quantiques doivent venir corriger la théorie de supergravité et la relation (2.49) nous apprend que le théorie de corde $E_8 \times E_8$ dans son régime de couplage faible est alors une bonne description de ces effets quantiques. Réciproquement, lorsque la constante de couplage de la corde hétérotique devient important, la supergravité constitue une bonne approximation pour décrire les modes de masse nulle de la corde. Remarquons que la comparaison des actions effectives de la supergravité à $11d$ et à $10d$ conduisait à une seule relation et ne permettait pas cette interprétation.

Ainsi nous avons obtenu un moyen d'étudier le régime de couplage fort de la théorie de corde. Il est alors intéressant de s'interroger sur ce que devient dans ce scénario la relation d'unification des constantes de couplage de jauge et de gravitation.

cas d'une symétrie de jauge : $I_{d+2} = \left[\hat{A}(R) \text{Tr}_{\mathcal{R}} e^{iF} \right]_{|d+2}$, $\hat{A}(R)$, le genre de Dirac, est une fonction paire

dont les premiers termes du développement sont donnés par : $\hat{A}(R) = 1 - p_1/24 + (7p_1^2 - 4p_2)/5760 + \dots$ avec $p_1 = -\text{Tr} R^2/8\pi^2$, $p_2 = (\text{Tr}^2 R^2 - 2\text{Tr} R^4)/128\pi^4$. Les formes apparaissant dans le développement de $\hat{A}(R)$ sont toutes de degré $4n$ et donc une anomalie purement gravitationnelle ne peut exister que lorsque la dimension d de l'espace-temps vérifie : $d + 2 = 4n$.

⁽¹²⁾Hořava et Witten ont aussi montré [50] que ces multiplets vectoriels dans l'adjointe de E_8 sur chaque frontière sont nécessaires à la compensation des anomalies de volume d'univers de la membrane. Cette méthode du calcul d'anomalie de volume d'univers s'avère très fructueuse dans la recherche des degrés de liberté vivant sur une brane : Mourad a par exemple obtenu [132] le spectre de masse nulle de la NS -5 brane de la théorie hétérotique $SO(32)$.

2.3 Compactification sur un espace de Calabi–Yau

2.3.1 Brisure partielle de supersymétrie par compactification

Supersymétrie à $4d$

La compactification toroïdale, lorsque les dimensions compactifiées correspondent à des cercles, préservent l'ensemble des charges de supersymétrie de la théorie de départ. Phénoménologiquement, ces modèles sont peu réalistes : nos connaissances actuelles en physique des particules nous font préférer des théories à $4d$ avec une seule supersymétrie (*i.e.* quatre charges fermioniques conservées) d'ailleurs brisée de manière douce à basse énergie comme nous le verrons au chapitre suivant.

Il est possible d'obtenir de telles propriétés de symétrie par compactification sur des variétés ayant une géométrie plus riche que celle d'un tore : les espaces de Calabi–Yau.

Le groupe de Lorentz à $10d$ est brisé en $SO(1,3) \times SO(6) \simeq SO(1,3) \times SU(4)$, la représentation spinorielle se décomposant en :

$$\mathbf{16} \rightarrow (\mathbf{2}, \mathbf{4}) + (\bar{\mathbf{2}}, \bar{\mathbf{4}}) .$$

Un spineur Majorana–Weyl à $10d$ donnera donc par compactification quatre spineurs Majorana à $4d$, ce qui explique que par compactification toroïdale, on obtienne une supersymétrie $\mathcal{N} = 4$ à $4d$. Pour se limiter à $\mathcal{N} = 1$, l'idée est de considérer une géométrie possédant une invariance $SU(3) \subset SU(4)$: dans la décomposition $\mathbf{4} \rightarrow \mathbf{3} + \mathbf{1}$, seul le spineur $4d$ de la représentation $\mathbf{1}$ survivra donc à la compactification.

Groupe d'holonomie

La structure géométrique de la variété de compactification est en fait caractérisée par la condition de persistance d'une supersymétrie à $4d$ qui se traduit par l'existence d'un spineur à $10d$, ϵ , paramètre de transformations de supersymétrie laissant invariants les champs fermioniques (gravitino, jaugino et dilatino) :

$$\delta_\epsilon \psi_{\hat{\mu}} = \delta_\epsilon \lambda = \delta_\epsilon \chi = 0 \tag{2.50}$$

Ce sont les conditions étudiées par Candelas *et al.* [133–135]. Une analyse de ces conditions est détaillée dans [20, p.415] et [136, p.303], elle conduit à la restriction du groupe d'holonomie de la variété de compactification à $SU(3) \subset SO(6)$ et à l'égalité de la connection de spin et de la connection de jauge. Des théorèmes mathématiques [137, 138] assurent qu'une telle variété est une variété complexe munie d'une structure Kählerienne, de plus son tenseur de Ricci soit s'annuler : ces propriétés définissent des espaces de Calabi–Yau *cf.* Appendice B.

2.3.2 Structure Kählerienne à $4d$

A quatre dimensions, le couplage de la matière à la supergravité $\mathcal{N} = 1$ est décrit en termes géométriques : les champs scalaires sont complexes et décrivent une variété

Kählerienne. C'est cette structure que l'on cherche à identifier dans la compactification de la théorie des cordes c'est-à-dire par réduction dimensionnelle des actions effectives de supergravité sur un espace de Calabi–Yau.

Le processus de réduction dimensionnelle est en général compliqué puisqu'il faut intégrer sur les modes massifs de Kaluza–Klein. Witten en 1985 [139] a proposé une méthode alternative, basée sur une simple troncation, pour obtenir une action effective $\mathcal{N} = 1$ à $4d$.

Le secteur bosonique universel de la supergravité à $10d$ comprend le graviton $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$, le dilaton Φ et le tenseur antisymétrique $B_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$.

On introduit une structure complexe sur l'espace compactifié :

$$y^i = \frac{x^{2i-1} + i x^{2i}}{\sqrt{2}}, \quad y^{\bar{i}} = \frac{x^{2i-1} - i x^{2i}}{\sqrt{2}} \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.51)$$

La méthode de troncation consiste à imposer une invariance par translation dans l'espace compactifié et une invariance sous une symétrie $SU(3)$ transformant (y^1, y^2, y^3) comme une représentation **3**. Alors les seuls modes de masse nulle à $4d$ sont ceux rassemblés dans le tableau 2.1.

spectre $11d$	spectre $4d$
$g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$	$g_{\mu\nu} \quad g_{i\bar{j}} = e^\sigma \delta_{i\bar{j}}$
Φ	Φ
$B_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$	$B_{\mu\nu} \quad B_{i\bar{j}} = a \delta_{i\bar{j}}$

Table 2.1: Troncation du secteur bosonique universel de la supergravité $10d$. A $4d$, le tenseur antisymétrique est dual à un pseudo-scalaire : $dB = \star_4 db$. Les quatre champs scalaires et le graviton ne sont fonction que des coordonnées $4d$.

Le lagrangien à $10d$ se réduit à un lagrangien à $4d$:

$$\begin{aligned} \int d^{10}x \sqrt{|g^{(10)}|} & \left(\frac{1}{2} \mathcal{R}^{(10)} + \frac{1}{4} \partial_{\hat{\mu}} \Phi \partial^{\hat{\mu}} \Phi + \frac{1}{24} e^{-\Phi} (dB)^2 \right) \\ &= \int d^4x \sqrt{|g^{(4)}|} \left(\frac{1}{2} \mathcal{R}^{(4)} + 3 \partial_{\mu} \sigma \partial^{\mu} \sigma + \frac{1}{4} \partial_{\mu} \Phi \partial^{\mu} \Phi \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{24} e^{-\Phi+6\sigma} (dB)^2 + \frac{3}{4} e^{-\Phi-2\sigma} \partial_{\mu} a \partial^{\mu} a \right) \quad (2.52) \end{aligned}$$

Ce lagrangien dérive d'un potentiel de Kähler pour deux champs complexe S et T . La

structure de Kähler s'identifie comme [139]⁽¹³⁾ :

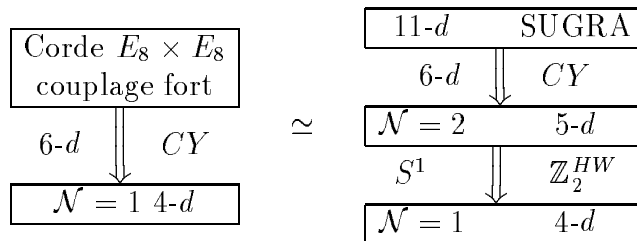
$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= -\ln(S + \bar{S}) - 3\ln(T + \bar{T}) \\ S &= e^{-\Phi/2+3\sigma} + ib \\ T &= e^{\Phi/2+\sigma} + ia\end{aligned}\tag{2.53}$$

Cette procédure peut être généralisée afin d'inclure le champ de jauge de la corde hétérotique par exemple. Dans ce cas, il faut considérer le plongement du groupe $SU(3)$ précédent dans le groupe de jauge. La troncation correspond à l'invariance sous le groupe diagonal, ce qui a pour effet de briser le groupe de jauge $E_8 \times E_8$ en $E_8 \times E_6$ ($SU(3) \times E_6$ est un sous-groupe maximal de E_8)

2.4 Compactification de la M théorie

2.4.1 Troncation de la M théorie

Dans notre travail reproduit dans l'Annexe II nous avons repris l'approche précédente dans le cadre de la M théorie. Le rayon de la onzième dimension étant relié au couplage des cordes à $10d$ par $R_{11}M_{11} \sim g_s^{2/3}$, dans le régime de couplage fort, ce rayon sera grand, en particulier probablement plus grand que le rayon typique des six autres dimensions compactifiées, c'est pourquoi nous allons chercher à compactifier la onzième dimension après les six autres. La description à $4d$ de la corde hétérotique $E_8 \times E_8$ fortement couplée devrait donc être équivalente à la compactification de la supergravité sur une variété à six dimensions puis sur un orbifold $S^1/\mathbb{Z}_2^{HW}$:



En raison de la présence des deux frontières à $10d$ et des interactions entre les champs de jauge vivant sur ces frontières et les champs de gravitation se propageant dans l'espace tout entier, l'espace compactifié à $7d$ n'est pas un produit direct d'un espace de Calabi-Yau et de l'orbifold $S^1/\mathbb{Z}_2^{HW}$ [128]. La procédure de troncation est donc en toute rigueur moins bien justifiée que lors de la compactification dans le régime de couplage faible ; mais ces objections disparaissent dans le secteur purement gravitationnel auquel nous nous sommes intéressés. Dans l'absence d'une formulation quantique de la M théorie, on ignore jusqu'aux équations du mouvement des différents champs et il ne peut donc être question d'intégrer les modes massifs de Kaluza-Klein. La méthode de troncation est la seule capable de nous renseigner sur la structure de la théorie effective à $4d$.

⁽¹³⁾Cette identification des modules de la théorie effective à $4d$ est obtenue dans les unités de supergravité de la théorie des cordes ; dans les unités de 5-branes, Binétruy [122] a remarqué un échange entre le rôle du dilaton et du module T .

2.4.2 Structure Kählerienne de M théorie à $4d$

Suivant la procédure proposée par Witten, on impose une troncation $\mathcal{P}$ sur le spectre à $11d$ afin d'obtenir une théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 2$ à $5d$ c'est-à-dire $\mathcal{N} = 1$ à $4d$ après réduction dimensionnelle de la dimension d'Hořava–Witten. $\mathcal{P}$ doit être un sous-groupe de la symétrie $SU(3)$ de la structure complexe des six dimensions compactifiées et agir de façon non-triviale sur la représentation $\mathbf{3}$ afin de ne conserver qu'un seul gravitino invariant à $5d$. L'analyse est présentée en détail dans la publication II. Les deux tableaux suivants résument les résultats : le premier tableau 2.2 identifie le spectre de masse nulle à $4d$ provenant du secteur gravitationnel de la M théorie (le secteur de jauge a été ignoré) ; le second tableau 2.3 identifie la structure de Kähler dont dérive la théorie à $4d$.

Symétrie	action sur $\mathbf{3}$ de $SU(3)$	spectre à $4d$	nombres de Hodge du C.Y.
$\mathcal{P} = \mathbb{Z}_{12}$	$(ie^{2i\pi/3}, -ie^{2i\pi/3}, e^{2i\pi/3})$	$g_{\mu\nu} \ g_{55} \ g_{i\bar{j}} = e^{\sigma_i} \delta_{i\bar{j}}$ $C_{\mu\nu 5} \ C_{5i\bar{j}} = B_i \delta_{i\bar{j}}$	$h_{(1,1)} = 3 \ h_{(1,2)} = 0$
$\mathcal{P} = \mathbb{Z}_3$	$e^{2i\pi/3} (1, 1, 1)$	$g_{\mu\nu} \ g_{55} \ g_{i\bar{j}}$ $C_{\mu\nu 5} \ C_{5i\bar{j}} = B_{i\bar{j}}$	$h_{(1,1)} = 9 \ h_{(1,2)} = 0$
$\mathcal{P} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}'_2$	$(-1, 1, -1) \times (1, -1, -1)$	$g_{\mu\nu} \ g_{55} \ g_{ii} \ g_{i\bar{i}}$ $C_{\mu\nu 5} \ C_{5i\bar{j}} = B_i \delta_{i\bar{j}}$	$h_{(1,1)} = 3 \ h_{(1,2)} = 3$

Table 2.2: Troncations de la M théorie. $\mathcal{P}$ est un sous-groupe discret de $SU(3)$ agissant de façon non-triviale sur la représentation $\mathbf{3}$ afin de ne conserver qu'une seule supersymétrie. Ces troncations correspondent à des compactifications sur des espaces de Calabi–Yau de la théorie de cordes $E_8 \times E_8$ à $10d$ en régime de coulage fort. La structure des espaces de Calabi–Yau est définie par les nombres de Hodge : $h_{(1,1)}$ et $h_{(1,2)}$. Le nombre de multiplets vectoriels (comprenant un vecteur à $4d$ et un scalaire complexe) est donné par $h_{(1,1)} - 1$; le nombre d'hypermultiplets (deux champs scalaires complexes à $4d$), dont l'hypermultiplet universel provenant du secteur gravitationnel, vaut $h_{(1,2)} + 1$.

Une observation particulièrement intéressante est l'indépendance des champs de modules autres que le dilaton sous une dilatation globale de l'espace de C.Y. : seul le dilaton est donc sensible à un effet de volume. Cette propriété a des conséquences phénoménologiques sur l'unification des interactions de jauge et de la gravitation ainsi que sur l'échelle de brisure de la supersymétrie (*cf.* §2.4.4).

Symétrie	potentiel de Kähler	champs de module
$\mathcal{P} = \mathbb{Z}_{12}$	$\mathcal{K} = -\ln(S + S^\dagger)$ $-\sum_{1 \leq k \leq 3} \ln(T_k + T_k^\dagger)$	$S = e^{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3} + i a_1$ $T_k = e^\gamma e^{-(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 + \sigma_k} + i B_k$
$\mathcal{P} = \mathbb{Z}_3$	$\mathcal{K} = -\ln(S + S^\dagger)$ $-\ln \det(T_{i\bar{j}} + T_{i\bar{j}}^\dagger)$	$S = G^{1/2} + i a_1$ $T_{i\bar{j}} = e^\gamma G^{-1/6} g_{i\bar{j}} + i B_{i\bar{j}}$
$\mathcal{P} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}'_2$	$\mathcal{K} = -\ln(S + S^\dagger)$ $-\sum_{1 \leq k \leq 3} \ln(T_k + T_k^\dagger)$ $-\sum_{1 \leq k \leq 3} \ln(U_k + U_k^\dagger)$	$S = G^{1/2} + i a_1$ $T_k = e^\gamma G^{-1/6} G_k^{1/2} + i B_k$ $U_k = \frac{(G_k)^{1/2}}{g_{22}^{(k)}} + i \frac{g_{12}^{(k)}}{g_{22}^{(k)}}$

Table 2.3: Structure de Kähler et identification des champs de module en fonction des caractéristiques géométriques des variétés de compactification. Dans la troisième ligne, l'indice k se réfère au bloc $(y^i, y^{\bar{i}})$ de la métrique, G_k est le déterminant de ce bloc et G est le déterminant global de la métrique de l'espace compactifié.

2.4.3 Compactification à la Scherk–Schwarz

La réduction dimensionnelle telle qu'elle a été présentée jusqu'à maintenant souffre de trois lacunes pour être pertinente d'un point phénoménologique :

1. en règle générale, elle conduit uniquement à des groupes de jauge abéliens. Dans l'étude de la compactification de la M théorie, cet obstacle n'est que secondaire puisque sur chacune des frontières vit une groupe de jauge suffisamment grand pour contenir le groupe de jauge du modèle standard ;
2. il n'est généré aucun terme de masse : si on part d'une théorie avec des scalaires de masse nulle, tous les scalaires de la théorie obtenue par réduction dimensionnelle resteront de masse nulle ;
3. la dernière supersymétrie survivant au processus de réduction dimensionnelle est réalisée de façon exacte alors qu'à basse énergie, cette supersymétrie devrait être brisée spontanément et il serait agréable que cette brisure résulte du processus de compactification.

En fait, ces trois lacunes peuvent être surmontées par un processus de réduction dimensionnelle plus élaboré d'abord proposé par Scherk et Schwarz [140,141] dans un contexte de supergravité puis généralisé un peu plus tard à la théorie des cordes [142,143].

Le mécanisme de Scherk–Schwarz est une réduction dimensionnelle généralisée qui autorise une dépendance des champs en fonction des coordonnées compactifiées. Imaginons qu'une théorie possède une invariance $U(1)$ et compactifions cette théorie sur un

cercle de rayon R le long d'une coordonnée y : les points (x, y) et $(x, y + 2\pi R)$ sont équivalents, donc les champs évalués en ces deux points doivent prendre des valeurs identiques à une transformation de symétrie près : dans le cas d'un champ scalaire, cette condition devient :

$$\phi(x, y + 2\pi R) = e^{2i\pi m R} \phi(x, y), \quad (2.54)$$

où m est un paramètre de masse. Ce facteur génère une dépendance non-triviale des modes de Kaluza–Klein en fonction de la coordonnée compactifiée :

$$\phi(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi(ny/R + my)} \phi_{(n)}(x). \quad (2.55)$$

En particulier les modes zéros acquièrent une dépendance en fonction de y à l'origine d'un terme de masse proportionnelle à l'échelle m .

D'une façon plus générale, Scherk et Schwarz ont considéré une dépendance sous forme factorisable et correspondant à une symétrie de la théorie de départ : tout champ aura donc une expression du genre :

$$\hat{T}(x, y) = \mathcal{U}(y) T(x), \quad (2.56)$$

$\mathcal{U}$ étant une symétrie de la théorie. Dans le secteur gravitationnel, la réduction dimensionnelle du terme de courbure suivant cette approche engendre un potentiel pour les champs scalaires qui décrivent la métrique dans l'espace compactifié. Scherk et Schwarz ont écrit des contraintes auxquelles devait satisfaire la symétrie $\mathcal{U}$ afin d'aboutir à un potentiel borné inférieurement ne déstabilisant pas le vide de la théorie. Si de plus, la symétrie $\mathcal{U}$ est une R symétrie de la théorie, c'est-à-dire une symétrie agissant de façon différente sur les bosons et les fermions, la réduction dimensionnelle s'accompagne d'une brisure de la supersymétrie.

Dans notre travail, nous avons utilisé une telle procédure de réduction dimensionnelle pour compactifier la dimension d'Hořava–Witten de la M théorie. Nous avons étudié explicitement le cas d'une troncation $SU(3) \times \mathbb{Z}_2^{HW}$ pour laquelle la théorie à $4d$ fait intervenir un dilaton S et un seul autre champ de module T . La réduction du terme de courbure est source d'un potentiel pour ces champs scalaires :

$$V = \frac{4m^2}{(T + T^\dagger)^3} \frac{|1 - S|^2}{S + S^\dagger}, \quad (2.57)$$

où m est le paramètre de masse apparaissant dans le mécanisme de Scherk–Schwarz. Ce potentiel dérive d'un superpotentiel pour le dilaton :

$$W = 2m(1 + S). \quad (2.58)$$

Ce potentiel se traduit par une stabilisation du dilaton puisque $\langle S \rangle = 1$ est un minimum du potentiel. Ce minimum brise spontanément la supersymétrie en donnant une masse au gravitino $m_{3/2}^2 = e^{\mathcal{K}} |W|^2 = 8m^2/(T + \bar{T})^3$.

2.4.4 Résultats phénoménologiques

La constante de Newton

La théorie des cordes dans le régime de couplage fort est décrit par la supergravité à onze dimensions et les facteurs de jauge sur chaque frontière :

$$\mathcal{S} = M_{11}^9 \int_{\mathcal{M}_{11}} \sqrt{|g|} \mathcal{R} + M_{11}^6 \int_{\partial \mathcal{M}_{11}} F^2. \quad (2.59)$$

La seule échelle est la masse de Planck à onze dimensions M_{11} , et le dilaton est maintenant remplacé par le rayon de la dimension d’Hořava–Witten. Dans les coordonnées de la M théorie, la réduction dimensionnelle de cette action, dans le cas le plus général d’une troncation $SU(3) \times \mathbb{Z}_2^{HW}$, conduit à l’action suivante à $4d$:

$$\mathcal{S} = \int_{\mathcal{M}_4} \sqrt{|g|} (t M_{11} \mathcal{R} + s F^2) \quad (2.60)$$

où s est la partie réelle du dilaton et t , celle du champ de module T . Ces quantités sont reliées au volume de l’espace de Calabi–Yau, identifié comme l’échelle de grande unification $V = M_{GUT}^{-6}$, et au rayon R_{HW} de la dimension d’Hořava–Witten :

$$s = \left(\frac{M_{GUT}}{M_{11}} \right)^{-1/6} \quad t = R_{HW} M_P, \quad (2.61)$$

où M_P est la masse de Planck à $4d$. Ces relations nous permettent d’identifier la constante de Newton à partir des paramètres de la M théorie⁽¹⁴⁾ :

$$\mathcal{G}_N \sim \left(\frac{\alpha_{GUT}^{1/3}}{R_{HW} M_{GUT}} \right)^{1/2}. \quad (2.62)$$

Et les données expérimentales se traduisent par une prédiction sur l’échelle de la dimension d’Hořava–Witten de l’ordre de :

$$R_{HW}^{-1} \sim 10^{12} \text{ GeV}/c^2, \quad (2.63)$$

valeur qui avait été proposée par Antoniadis et Quirès [144] à partir de considérations générales basées sur des arguments dimensionnels. Reste en revanche à voir si cette échelle est compatible avec le mécanisme de brisure de la supersymétrie par réduction dimensionnelle à la Scherk–Schwarz.

⁽¹⁴⁾Witten a donné [128] une borne supérieure à la valeur de la constante de Newton théorique obtenue par compactification : le volume de l’espace de Calabi–Yau dépend de la coordonnée le long de la dimension d’Hořava–Witten, cependant afin de conserver une description effective en terme de supergravité il ne faut que la taille du CY devienne inférieure à la longueur de Planck, ce qui se traduit par l’inégalité : $\mathcal{G}_N \geq \alpha_{GUT}^2 / M_{GUT}^2$.

Echelle de brisure de la supersymétrie

Si l'on suppose que l'échelle de masse m apparaissant dans le mécanisme de Scherk–Schwarz est de l'ordre de l'échelle d'énergie de la M théorie, ce qui revient à supposer que la brisure de supersymétrie est un effet de couplage fort de la théorie des cordes, alors l'expression de la masse du gravitino devient :

$$m_{3/2} \sim \frac{M_{11}}{t^{3/2}} = \frac{1}{R_{HW}^2 M_P}. \quad (2.64)$$

L'échelle de brisure de la supersymétrie est donc reliée à l'échelle de la dimension d'Hořava–Witten (2.63) fixée par la constante de Newton des interactions gravitationnelles, on obtient : $m_{3/2} = 10^5 \text{ GeV}/c^2$. Cette valeur est à comparer avec celle obtenue traditionnellement par un mécanisme de Scherk–Schwarz en théorie des cordes [142, 143] : $m_{3/2} \sim R_{CY}^{-1} \sim M_{GUT}$ qui serait catastrophique d'un point de vue phénoménologique. La valeur obtenue de 10^5 GeV certes encore un peu élevée peut certainement être abaissée en considérant la compactification de la M théorie sur des variétés moins symétriques que celle retenue ici et qui seraient l'équivalent des Calabi–Yau asymétriques de la théorie des cordes.

Cette étude phénoménologique semble répondre favorablement à la question de l'existence d'un vide de la théorie des cordes compatible, dans le régime de couplage fort, avec les résultats que nous permettent d'extrapoler nos connaissances expérimentales actuelles en physique des particules. Mais comprendre pourquoi la nature aurait choisi ce vide plutôt qu'un autre reste une interrogation encore toute ouverte ...

Chapitre 3

Etude de la hiérarchie de masse des quarks et des leptons

Ce troisième et dernier chapitre s'intéresse à des problèmes directement liés à la physique des particules. Il est consacré à un modèle d'extension du modèle standard de Glashow–Salam–Weinberg. Toute extension de ce modèle doit d'abord satisfaire à un certain nombre de contraintes phénoménologiques qui seront discutées et doit aussi répondre à quelques insuffisances du modèle standard lui-même. Un modèle explicite de symétrie de saveur permettant d'expliquer le problème de la hiérarchie de masse des quarks et des leptons est étudié en détail à haute et basse énergie.

3.1 La hiérarchie de masse du modèle standard

3.1.1 Brisure de symétrie et masse des particules

Le problème de la masse des particules est l'une des plus belles illustrations de la notion de symétrie et de brisure de symétrie et ce en raison de deux théorèmes centraux de la théorie des champs : le théorème de Nambu–Goldstone [145, 146] et le mécanisme de Higgs [147–152].

- Le théorème de Nambu–Goldstone assure l'existence d'un boson de masse nulle, boson de Goldstone, lorsqu'une symétrie continue globale du lagrangien est brisée spontanément. Une symétrie continue globale n'est que rarement réalisée de façon exacte, en revanche il est fréquent qu'elle le soit de façon approchée. La brisure de symétrie est alors traitée comme une perturbation et la symétrie du terme dominant se traduit par l'existence de bosons de petite masse appelés bosons pseudo-Goldstone [153]. Ce théorème a trouvé l'une de ses premières applications à la physique des hautes énergies dans l'approximation chirale des interactions fortes : lorsqu'on néglige la masse des quarks u et d , le lagrangien de la chromodynamique quantique (QCD) possède une invariance $SU(2) \times SU(2)$ (il existe aussi une symétrie $U(1)_B$ correspondant au nombre baryonique et une symétrie axiale $U(1)_A$ qui présente une anomalie et sera brisée explicite-

ment au niveau quantique). La partie chirale est spontanément brisée donnant naissance à trois bosons pseudo-Goldstone dont les nombres quantiques sont ceux des générateurs brisés (parité négative, spin zéro, isospin un, nombre baryonique et étrangeté nuls). Phénoménologiquement ces bosons s'identifient aux plus légers des hadrons : les trois pions $\pi^\pm, \pi^0$ ($m_\pi \simeq 140 \text{ MeV}/c^2$ tandis que $m_P \simeq 938 \text{ MeV}/c^2$ i.e. $m_\pi^2/m_P^2 \simeq 0.022$, valeur justifiée par les théories de conservation partielle du courant vecteur-axial — PCAC [154,155]). La symétrie approchée $SU(2)$ d'isospin peut être étendue à une symétrie $SU(3) \times SU(3)$ [156,157] correspondant à la brisure de la symétrie chirale $SU(3)$ de la limite de masse nulle des quarks u, d et s : les huit bosons de Goldstone s'identifient comme les pions, $\pi^\pm, \pi^0$, les kaons, $K^0, \bar{K}^0, K^\pm$ ($m_K^2/m_P^2 \simeq 0.3$) et le méson η ($m_\eta^2/m_P^2 \simeq 0.3$).

- Le mécanisme de Higgs s'applique dans le cas d'une symétrie continue non plus globale mais locale⁽¹⁾ : les degrés de liberté qui auraient été identifiés comme des bosons de Goldstone dans le cas d'une symétrie globale forment ici les états d'hélicité nulle des vecteurs associés aux symétries brisées. Une symétrie locale brisée se traduit donc par l'apparition d'une particule vectorielle de masse⁽²⁾ proportionnelle à la constante de couplage de jauge de sorte que dans la limite de couplage nul, les bosons de Goldstone réapparaissent dans le spectre. Le rôle capital de la notion de brisure de symétrie locale, en l'occurrence la symétrie électromagnétique, a été souligné pour la première fois par Anderson [164] dans son interprétation microscopique de la supraconductivité à la suite du travail de Bardeen *et al.* [165]. En physique des particules, le mécanisme de Higgs est l'une des pierres angulaires de la théorie électrofaible de Glashow, Salam et Weinberg [166–168] : la brisure de la symétrie $SU(2)_L \times U(1)_Y$ en $U(1)_{em}$ est confirmée expérimentalement par l'observation des bosons de jauge massifs $W^\pm$ et Z^0 ($m_W = gv/2 \simeq 80 \text{ GeV}/c^2$ et $m_Z = \sqrt{g^2 + g'^2}v/2 \simeq 92 \text{ GeV}/c^2$ où $v/\sqrt{2} \simeq 246/\sqrt{2} \text{ GeV}/c^2$ désigne la *vev* du champ de Higgs neutre). La brisure de symétrie par la valeur moyenne dans le vide du champ de Higgs est également responsable, *via* les couplages de Yukawa, de la masse des particules de matière c'est-à-dire des quarks et des leptons.

⁽¹⁾Il est à noter qu'une symétrie locale n'est pas une 'vraie' symétrie : elle n'est pas observable mais sert seulement à éliminer certains états non physiques (les modes longitudinaux des vecteurs de jauge).

⁽²⁾Les théories de jauge brisées explicitement par les termes de masse des champs vectoriels ne sont pas renormalisables. En revanche, une brisure spontanée par un mécanisme de Higgs conduit à une théorie parfaitement renormalisable comme l'ont montré 't Hooft et Veltman [158], Lee et Zinn-Justin [159–163].

3.1.2 Masses des quarks et des leptons dans le modèle standard

Structure de la matière

Le modèle standard est une théorie de jauge correspondant à l'invariance locale sous les transformations du groupe $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$:

- $SU(3)_C$ est le groupe de couleur décrivant les interactions de la chromodynamique quantique,
- $SU(2)_L$ décrit la symétrie *left* (seules les particules de chiralité gauche sont sensibles à l'interaction faible),
- $U(1)_Y$ décrit la symétrie liée à l'hypercharge définie par $Q = t_3 - Y$ (Q est la charge électrique et t_3 est la troisième composante de l'isospin).

Le secteur de jauge comprend donc douze bosons de jauge vectoriels. Il apparaît trois constantes de couplage associées aux trois facteurs du groupe de jauge ; ces constantes sont fonction de l'énergie et les équations du groupe de renormalisation déterminent leur évolution [169–172]. Dans l'extension supersymétrique minimale du modèle standard (MSSM), ces trois constantes de couplage s'unifient [173] à une échelle de l'ordre de $M_{GUT} \simeq 210^{16} \text{GeV}/c^2$ avec $\alpha_{GUT} \simeq 1/24$ [123, 124].

La détermination du comportement de la matière sous les transformations de jauge a été le fruit de progrès conjoints tant théoriques⁽³⁾ qu'expérimentaux⁽⁴⁾. Finalement les particules de matière se groupent en trois familles ayant une structure de jauge identique : *cf.* Tableau 3.1.

Le terme de masse d'un fermion de Dirac couple la partie gauche à la partie droite :

$$-m \bar{\psi} \psi = -m(\bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R) . \quad (3.1)$$

Ceci interdit des termes de masse de Dirac pour les neutrinos qui n'existent que dans un état gauche. L'invariance de jauge interdit, elle, des termes de masse pour les fermions L et Q : la composante gauche appartient à un doublet de $SU(2)_L$ et la composante droite à un singulet. Les masses des fermions s'obtiennent à partir du seul couplage au doublet de Higgs, ce sont les couplages de Yukawa :

$$\mathcal{L}_{Yuk} = \lambda_{ij}^L (\bar{L}_L^i H^c) l_R^j + \lambda_{ij}^U (\bar{Q}_L^i H) u_R^j + \lambda_{ij}^D (\bar{Q}_L^i H^c) d_R^j + cc , \quad (3.2)$$

avec $H^c = i\tau_2 H^*$. Les neutrinos n'existent que sous leur état d'hélicité gauche, on ne peut construire de couplage de Yukawa générant un terme de masse : les neutrinos du modèle standard sont donc de masse nulle.

Les couplages de Yukawa dépendent également de l'énergie et leur évolution est gouvernée par le groupe de renormalisation (voir par exemple [185–188] pour une étude dans le modèle supersymétrique minimal).

⁽³⁾Introduction de l'angle de mélange des quarks d et s [174] ; mécanisme de Glashow–Iliopoulos–Maiani et prédiction d'un quatrième quark, le quark c [175].

⁽⁴⁾Observation du quark c [176, 177], du lepton τ [178], du quark b [179], des bosons $W^\pm$ et Z^0 [180], du quark t [181, 182].

Particules	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$
$L_L^i = \begin{cases} \nu^i & \text{neutrino} \\ l_L^i & \text{lepton gauche} \end{cases}$	1	2	1/2
$L_R^i = l_R^i$ lepton droit	1	1	1
$Q_L^i = \begin{cases} u_L^i & \text{quark } up \text{ gauche} \\ d_L^i & \text{quark } down \text{ gauche} \end{cases}$	3	2	-1/6
$U_R^i = u_R^i$ quark <i>up</i> droit	3	1	-2/3
$D_R^i = d_R^i$ quark <i>down</i> droit	3	1	1/3
$H = \begin{cases} H^0 & \text{composante neutre} \\ H^- & \text{composante chargée} \end{cases}$	1	2	1/2

Table 3.1: Contenu en quarks et en leptons d'une famille du modèle standard (l'indice $i = 1 \dots 3$ est un indice de famille). Chaque famille contient trois leptons, dont un neutrino n'existant que sous un seul état d'hélicité, ainsi que douze quarks. Les leptons ne sont sensibles qu'aux interactions électrofaibles. Les charges des différents champs assurent l'absence d'anomalie de jauge au sein d'une famille [183], résultat qui peut se comprendre aisément en considérant le plongement de $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ dans le groupe de grande unification $SO(10)$ [184]. La dernière ligne du tableau donne les nombres quantiques du doublet de Higgs.

Angle de mélange : matrice de Cabibbo–Kobayashi–Maskawa

Aucune symétrie du modèle standard n'interdit les couplages de Yukawa entre fermions de familles différentes : les couplages non diagonaux nous amènent à distinguer les états propres des interactions de jauge des états propres de masse, le passage des uns aux autres correspondant à des transformations unitaires. Dans le secteur des quarks les composantes *up* et *down* ne se transforment pas de la même façon, ce qui se traduit pas un couplage non diagonal au boson $W^\pm$ dans la base des états de masse :

$$J_\mu^+ = \bar{u}_L^i \gamma_\mu \mathcal{V}_{ij} d_L^j \quad (3.3)$$

$\mathcal{V}_{ij}$ étant la matrice unitaire de Cabibbo–Kobayashi–Maskawa [174, 189]. Un certain nombre de phases peuvent être absorbées par redéfinition des quarks si bien que $\mathcal{V}$ est paramétrisée par trois angles de mélange et une phase, source de la violation de la symétrie CP .

Dans l'expression du courant neutre, en revanche, les transformations nécessaires pour passer dans la base des états propres de masse se compensent et il n'y a pas de violation de saveur (des effets de violation de saveur peuvent évidemment être engendrés dans le développement en perturbation à l'ordre d'une boucle, mais ils sont en général supprimés par des facteurs $\Delta m_{\text{quarks}}^2 / M_W^2$).

Notons de plus qu'il n'existe pas d'effets de changement de saveur dans le secteur des leptons (les nombres leptoniques électrique, muonique et taunique sont conservés séparément), ceci en raison de l'existence des neutrinos sous un seul état de chiralité. Dans certaines extensions du modèle standard, de nouveaux états d'hélicité peuvent être introduits, ils sont la source d'une violation de la saveur leptonique fortement contrainte expérimentalement.

L'ensemble des données expérimentales est résumé dans la paramétrisation de Wolfenstein de la matrice CKM [190] :

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2/2 & \lambda & \lambda^3 A(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \lambda^2/2 & \lambda^2 A \\ \lambda^3 A(1 - \rho - i\eta) & -\lambda^2 A & 1 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

avec

$$\lambda = \sin \theta_C \simeq 0.22 \quad A \simeq 0.8 \quad \sqrt{\rho^2 + \eta^2} \simeq 0.4 . \quad (3.5)$$

La renormalisation des coefficients de la matrice CKM a été étudiée par exemple dans [188, 191]

Hiérarchie de masse des quarks et des leptons

La mesure de la masse des quarks pose problème car ceux-ci n'existent pas à l'état libre mais sont confinés. Pour les quarks légers, les masses sont déduites de la mesure des masses des mésons par perturbation de la symétrie chirale [192]. Pour les quarks lourds, les mesures sont plus directes et obtenues par l'étude du spectre des hadrons (masse du J/ψ par exemple). Expérimentalement, on constate une forte disparité entre les trois familles du modèle standard : on parle de hiérarchie entre les masses des particules de la première famille beaucoup plus légères que celles de la deuxième famille, elles-mêmes encore plus légères que celles de la troisième famille (*cf.* Tableau 3.2).

$m_u/m_c/m_t$	$\lambda^8/\lambda^4/1$
$m_d/m_s/m_b$	$\lambda^4/\lambda^2/1$
$m_e/m_\mu/m_\tau$	$\lambda^4/\lambda^2/1$

Table 3.2: Hiérarchie de masse des quarks et leptons à l'échelle de grande unification M_{GUT} . Les rapports des masses entre les trois familles sont exprimés en fonction de l'angle de Cabibbo : $\lambda = \sin \theta_C \simeq 0.22$. Ces rapports ont été obtenus par Ramond *et al.* [193] après évolution du groupe de renormalisation.

Ces valeurs ne semblent pas très naturelles : les couplages de Yukawa sont des paramètres libres du modèle standard qui ne sont contraints par aucune symétrie. Dans leur structure de jauge, les trois familles ne sont que des répétitions les unes des autres : comment se fait-il alors qu'elles se distinguent si fortement par leur masse ?

Cette hiérarchie de masse serait plus naturelle, au sens qu’a pu en donner ’t Hooft⁽⁵⁾, si les faibles rapports des masses d’une famille sur celles d’une seconde famille plus lourde étaient les reliquats d’une symétrie qui aurait annulé ces rapports si elle n’avait pas été brisée. Cette approche à la Froggatt–Nielsen du problème de la hiérarchie de masse par l’introduction d’une symétrie distinguant les trois familles [200] est celle que nous avons développée dans le cadre d’une extension supersymétrique du modèle standard. Ce travail a fait l’objet de la publication I reproduite en Annexe.

Mentionnons pour mémoire trois autres approches du problème de hiérarchie de masse (la thèse de S. Lavignac [201] donne une description plus exhaustive de ces différentes approches) :

- les modèles de technicouleur [202, 203] dans lesquels le champ de Higgs est remplacé par un champ composite correspondant à un condensat fermion-antifermion ; les masses sont déterminées dynamiquement. Ces modèles semblent peu viables phénoménologiquement en raison de l’existence d’un grand nombre de bosons pseudo-Goldstone non observés expérimentalement.
- les modèles de préons [204, 205] qui seraient les constituants élémentaires dont seraient formés les quarks et les leptons. Une nouvelle interaction ‘superforte’ à l’ordre du TeV est nécessaire à la cohésion des préons au sein des quarks et des leptons. Il semble peu envisageable de mettre en évidence expérimentalement cette nouvelle interaction.
- des modèles dynamiques dans lesquels les couplages de Yukawa sont déterminés par le couplage de jauge des interactions fortes en atteignant un point fixe ou un quasi-point fixe infrarouge [206, 207]. Ce scénario semble exclu dans le cadre du modèle standard car il conduit à une valeur de la masse du *top* en contradiction avec les données expérimentales [208]. En revanche, il semble parfaitement viable en supersymétrie [207].

3.2 Modèle de Froggatt–Nielsen supersymétrique

3.2.1 Hiérarchie de jauge et supersymétrie

Comme il a été expliqué dans la section précédente, le problème de la hiérarchie de masse des particules est un problème au-delà du modèle standard : le spectre de masse observé à l’échelle électrofaible serait la conséquence d’une symétrie de la théorie à une plus haute échelle d’énergie M_{sup} jusqu’à laquelle le modèle standard serait une théorie

⁽⁵⁾On peut distinguer trois principes de naturalité : *(i)* la naturalité au sens de Dirac [194, 195] qui veut que tous les couplages qui ne sont pas interdits par des symétries soient présents et que leur rapport soit de l’ordre de l’unité, *(ii)* la naturalité au sens de ’t Hooft [196] qui justifie les petits rapports de couplage, par exemple le rapport de l’échelle électrofaible sur la masse de Planck, par l’existence d’une symétrie approchée, *(iii)* la naturalité locale [197–199] qui réclame que toutes les symétries interdisant certains couplages soient des symétries locales, sinon des effets de gravitation quantique pourraient venir briser ces symétries.

effective parfaitement viable. L'étude des corrections radiatives du potentiel de Higgs conduit à une borne inférieure sur la valeur de cette nouvelle échelle [209] :

$$\begin{aligned} \text{Higgs lourd } (m_H \simeq 500 \text{ GeV}/c^2) &\iff M_{\text{sup}} \simeq 1 \text{ TeV}/c^2 \\ \text{Higgs léger } (m_H \simeq 150 \text{ GeV}/c^2) &\iff M_{\text{sup}} \simeq 10^{16} \text{ TeV}/c^2. \end{aligned}$$

L'existence de deux échelles de masse, l'échelle électrofaible et l'échelle d'une nouvelle physique, très distinctes l'une de l'autre pose un problème d'abord de compréhension d'une telle disparité au niveau classique, ensuite de stabilité au niveau quantique [210,211], les corrections radiatives ayant tendance à mélanger ces échelles. Maintenir la disparité au niveau quantique réclame un ajustement très précis (*fine tuning*) des valeurs à haute énergie, ajustement peu élégant et encore moins naturel [196].

Il existe un moyen technique de résoudre ce problème de hiérarchie de jauge : la supersymétrie qui relie bosons et fermions ; elle introduit des compensations dans les corrections radiatives, gomme ainsi leur caractère quadratique et conduit à un comportement logarithmique autorisant la coexistence de deux échelles distinctes. La supersymétrie est donc le cadre naturel d'extension du modèle standard⁽⁶⁾.

3.2.2 Le modèle standard supersymétrique minimal

Structure de la matière

Les particules fondamentales de spin 1/2 du modèle standard ont un partenaire de spin 0 : les squarks et les sleptons. Une particule et son partenaire supersymétrique sont décrits par un superchamp chiral. Aux bosons de jauge vectoriels sont associés des partenaires supersymétriques de spin 1/2 : les jauginos. Le multiplet supersymétrique ainsi formé est décrit par un superchamp vectoriel.

La structure du modèle standard supersymétrique minimal (MSSM) construit par P. Fayet [212,213] est résumée dans le Tableau 3.3. Le superpotentiel le plus général respectant les symétries du modèle (et ayant la dimension d'une masse au cube *i.e.* conduisant à un potentiel de dimension quatre donc renormalisable) s'écrit :

$$\begin{aligned} W = \mu H_d H_u + Y_{ij}^d Q^i D^j H_d + Y_{ij}^u Q^i U^j H_u + Y_{ij}^l L_L^i E^j H_d \\ + \underline{\lambda L H_u} + \underline{\alpha^{ijk} Q^i D^j L_L^k} + \underline{\beta^{ijk} D^i D^j U^k} + \underline{\gamma^{ijk} L_L^i L_L^j E^k} . \end{aligned} \quad (3.6)$$

Les termes soulignés violent le nombre leptonique ou baryonique et peuvent se révéler particulièrement dangereux d'un point de vue phénoménologique (désintégration du proton) : ils peuvent être supprimés en imposant une symétrie discrète : la R parité⁽⁷⁾ [213].

⁽⁶⁾Dans le modèle standard, les masses des fermions sont protégées des corrections radiatives par les symétries chirales ; la supersymétrie reliant bosons et fermions, permet aussi d'étendre cette protection chirale au secteur scalaire.

⁽⁷⁾La R parité est inopérante sur les particules du modèle standard et change le signe de tous leurs partenaires supersymétriques : c'est une symétrie qui ne commute pas avec la supersymétrie.

Termes de brisure douce

La supersymétrie est l'extension la plus générale de l'algèbre de Poincaré par adjonction d'une symétrie entre bosons et fermions. Or expérimentalement, on n'observe pas de dégénérescence de masse entre bosons et fermions; ceci implique que la supersymétrie doit être brisée. Cette brisure doit cependant respecter la solution du problème de hiérarchie de jauge, ce qui a deux conséquences sur d'une part la nature de la brisure, et d'autre part sur l'échelle de cette brisure :

- les termes de brisure ne doivent pas engendrer de corrections radiatives quadratiques afin de pouvoir maintenir la disparité des échelles d'énergie au niveau quantique. Ceci impose une forme bien particulière des termes de brisure : ils peuvent correspondre à des termes de masse pour les sfermions et pour les jauginos et à des couplages triscalaires, équivalents bosoniques des couplages de Yukawa. Ce sont des termes de brisure douce de la supersymétrie. Ils apparaissent naturellement dans le cadre des théories de supergravité. La brisure spontanée de la supergravité dans le secteur caché, c'est-à-dire couplé à la matière de façon gravitationnelle uniquement, engendre précisément ces termes de brisure douce [215, 216].
- l'échelle de brisure de la supersymétrie dans le secteur observable est l'échelle d'énergie des termes de masse *soft* des scalaires. Ces scalaires jouent un rôle important dans les corrections radiatives du potentiel de Higgs expérimentalement contraint : phénoménologiquement, la supersymétrie doit être brisée à une échelle de l'ordre du TeV.

3.2.3 Symétrie de saveur et masse des fermions

L'idée proposée par Froggatt et Nielsen [200] pour expliquer la hiérarchie de masse consiste à introduire une symétrie agissant différemment sur les trois familles : on parle de symétrie de saveur ou de famille ou encore de symétrie horizontale. Cette symétrie peut être discrète ou continue : le groupe de saveur maximal compatible avec la structure de jauge du modèle standard est $U(3)^5$.

Les symétries continues non-abéliennes ont l'avantage de permettre de limiter fortement les violations de saveur par courant neutre (FCNC) dans le secteur scalaire⁽⁸⁾ par une dégénérescence des deux premières familles par exemple [217–220]. Leur inconvénient est de conduire difficilement à un spectre hiérarchique pour les fermions.

Dans notre travail, nous avons utilisé une symétrie abélienne. Le schéma de principe est le suivant :

1. on adjoint un facteur abélien $U(1)_X$ au groupe de jauge du modèle standard :

$$G_{MS} \rightarrow G_{MS} \times U(1)_X.$$

⁽⁸⁾Nous avons expliqué précédemment pourquoi ces violations étaient supprimées dans le secteur fermionique du modèle standard. Un des problèmes majeurs de toute extension du modèle standard est de veiller à maintenir toute source potentielle de ces violations de saveur dans les limites expérimentales autorisées. En supersymétrie, ces sources de violation proviennent du secteur scalaire.

Cette nouvelle symétrie est une symétrie de saveur qui va venir distinguer les différentes familles si celles-ci prennent des nombres quantiques différents.

2. on introduit un nouveau champ ϕ , singulet du modèle standard, mais chargé sous $U(1)_X$ (par convention $X_\phi = -1$).
3. on écrit des couplages effectifs invariants sous $G_{MS} \times U(1)_X$ qui généralisent les couplages de Yukawa, origine de la masse des fermions, par exemple :

$$Y_{ij}^U \left(\frac{\phi}{M} \right)^{q_i + h_u + u_j} Q^i H_u U^j$$

(les lettres majuscules désignent les champs physiques et les minuscules les charges $U(1)_X$ associées) M est ici une échelle d'énergie fondamentale (masse de Planck M_P , ou masse de grande unification M_{GUT}) et les constantes Y_{ij}^U sont des nombres de l'ordre de l'unité. Dans le cas supersymétrique, les couplages de Yukawa apparaissent dans le superpotentiel soumis à une contrainte d'analyticité, les charges doivent alors vérifier :

$$q_i + h_u + u_j \geq 0 .$$

4. on brise spontanément la symétrie de saveur en donnant une valeur moyenne dans le vide au singulet ϕ

$$\frac{\langle \phi \rangle}{M} \sim \lambda \sim 0.2,$$

ce petit paramètre apparaît naturellement en théorie des cordes via le mécanisme de Green-Schwarz de compensation des anomalies (*cf.* ci-après). La brisure de symétrie se traduit par des couplages de Yukawa effectifs :

$$Y_{ij}^U \left(\frac{\langle \phi \rangle}{M} \right)^{q_i + h_u + u_j} Q^i H_u U^j .$$

5. la hiérarchie des couplages de Yukawa est alors reproduite en ajustant les charges $U(1)_X$ des différents champs pour obtenir les ordres de grandeur en puissance de λ des couplages de Yukawa.

3.2.4 Compensation des anomalies

Les valeurs des charges de saveur sont ajustées afin de reproduire la hiérarchie des masses et des angles de mélange (dans la section suivante, nous relierons ces charges de saveur à des quantités définies lors de certaines transformations géométriques de la théorie des cordes sous-jacente ; mais ces quantités dépendent beaucoup des modèles de compactification de la théorie des cordes, ce qui ne permet donc pas de déterminer les charges de saveur à partir de principes théoriques). Puisque une anomalie conduit à une incohérence (non-unitarité) se pose alors le problème des anomalies associées à une nouvelle symétrie locale additionnelle au groupe de jauge du modèle standard. Dans

le modèle de Froggatt–Nielsen, Binétruy et Ramond [221] ont montré que la présence d’anomalie est intimement liée à la hiérarchie de masse. Par exemple :

$$\prod_{\text{quarks}} m_q \sim m_b^3 m_t^3 \left(\frac{\langle \phi \rangle}{M} \right)^{C_3 + h_u + h_d} \quad (3.7)$$

où C_3 est le coefficient de l’anomalie $SU(3)_C^2 U(1)_X$: $C_3 = \sum_{i=1,2,3} (2q_i + u_i + d_i)$.

Les données phénoménologiques réclament donc des anomalies. Néanmoins, il existe une façon de compenser ces anomalies par une translation de l’axion, champ pseudo-scalaire identifié comme la partie imaginaire du dilaton de la théorie des cordes : c’est le mécanisme de compensation des anomalies⁽⁹⁾ proposé par Green et Schwarz [22]. Ce mécanisme permet de compenser toutes les anomalies de jauge de la forme $G^2 U(1)_X$ et l’anomalie mixte gravitationnelle $U(1)_X$, à la condition qu’elles soient ‘proportionnelles’ entre elles :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{A}(SU(3)_C^2 U(1)_X)}{k_3} &= \frac{\mathcal{A}(SU(2)_L^2 U(1)_X)}{k_2} = \frac{\mathcal{A}(U(1)_Y^2 U(1)_X)}{k_1} \\ &= \frac{\mathcal{A}(U(1)_X^3)}{k_X} = \frac{\mathcal{A}(U(1)_X)}{24} \end{aligned} \quad (3.8)$$

k_i désigne le niveau de Kac–Moody définissant le couplage des champs de jauge au dilaton. En revanche, l’anomalie $U(1)_Y U(1)_X^2$ ne peut être compensée par le mécanisme de Green–Schwarz et doit donc s’annuler par ailleurs.

L’anomalie de la symétrie de saveur fixe l’échelle de brisure de cette symétrie selon un mécanisme proposé par Dine *et al.* [224, 225]. En effet, l’anomalie contribue à l’ordre d’une boucle au terme D associé au facteur $U(1)_X$ de saveur par l’apparition d’un terme de Fayet–Iliopoulos :

$$D_X = g_x \left(\sum_{\text{matière}} \varphi_i |\Phi_i|^2 - |\phi|^2 + \frac{M_S^2}{192\pi^2} \mathcal{A}(U(1)_X) \right), \quad (3.9)$$

Φ désigne l’ensemble des champs de matière à l’exception du singulet dont la contribution est écrite séparément, φ désigne la charge du champ Φ sous la symétrie $U(1)_X$. Si le terme de Fayet–Iliopoulos n’était pas compensé par la *vev* du singulet ϕ , il se traduirait par une brisure de la supersymétrie [226] à une échelle de l’ordre de la masse des cordes M_S , ce qui est inacceptable phénoménologiquement. La seule solution compatible avec les résultats expérimentaux (si l’on veut préserver les symétries du modèle standard les champs de matière ne peuvent acquérir de *vev*) est bien que la symétrie de saveur soit brisée à l’échelle des cordes par la *vev* du singulet :

$$\frac{\langle \phi \rangle^2}{M_S^2} = \frac{\mathcal{A}(U(1)_X)}{192\pi^2}. \quad (3.10)$$

⁽⁹⁾La compensation des anomalies par le mécanisme de Green–Schwarz a conduit Ibáñez et Ross [222, 223] à une valeur de l’angle de Weinberg (définissant le rapport des constantes de couplage des symétries $SU(2)_L$ et $U(1)_Y$) à l’échelle de brisure de la symétrie de saveur. Si cette échelle de brisure est identifiée comme l’échelle de grande unification, on retrouve la valeur obtenue dans les modèles de grande unification comme $SU(5)$ [173] : $\sin \theta_W = 3/8$.

Ce mécanisme fixe l'échelle de brisure et fait apparaître naturellement un petit paramètre (pour des valeurs raisonnables de $\mathcal{A}(U(1)_X) \sim 10\text{--}100$).

3.3 Etude d'un modèle de symétrie de saveur

Dans cette dernière section sont présentés les principaux résultats obtenus dans notre travail reproduit en Annexe. Une étude numérique du modèle ainsi construit clôt le chapitre.

3.3.1 Invariances modulaires

Les théories supersymétriques avec des termes de brisure douce sont des limites de basse énergie des théories de supergravité brisées spontanément [215, 216, 227]. Nous avons vu au cours des deux chapitres précédents que ces théories de supergravité sont elles-mêmes des théories effectives des théories de cordes et de la M théorie. Dans ces théories, apparaissent un certain nombre de symétries intrinsèques nécessaires à leur cohérence : les symétries modulaires⁽¹⁰⁾. Les propriétés géométriques des théories des cordes, comme dans l'exemple étudié explicitement au chapitre 2, sont décrites à basse énergie et à $4d$ par des champs de modules $(T_\alpha, S \dots)$. A ce niveau, les invariances modulaires se résument à des transformations de $SL(2, \mathbb{Z})$ [30, 230–233] :

$$\Phi_i \rightarrow (ic_\alpha T_\alpha + d_\alpha)^{n_i^{(\alpha)}} \Phi_i \quad \text{et} \quad T_\alpha \rightarrow \frac{a_\alpha T_\alpha - ib_\alpha}{ic_\alpha T_\alpha + d_\alpha} \quad (3.11)$$

les nombres $n_i^{(\alpha)}$ sont les poids modulaires associés au champ de matière Φ_i ; les paramètres entiers des transformations satisfont de plus l'égalité : $a_\alpha d_\alpha - b_\alpha c_\alpha = 1$.

Nous avons montré, au cours de notre travail, comment l'invariance conjointe sous la symétrie $U(1)_X$ de Froggatt–Nielsen et sous les transformations modulaires imposait une relation entre les charges horizontales et les poids modulaires des différents champs :

$$n_{\Phi_i}^{(\alpha)} - n_{\Phi_j}^{(\alpha)} = n_\phi^{(\alpha)} (\varphi_i - \varphi_j) . \quad (3.12)$$

Ces relations fixent alors la forme du potentiel de Kähler :

$$K = K_0 (T_\alpha, \bar{T}^{\bar{\alpha}}) - \ln (S + \bar{S}) + \prod_{\alpha=1}^p t_\alpha^{n_\phi^{(\alpha)}} \bar{\phi} \phi + \sum_{\Phi^i = Q^i, U^i, D^i, L^i, E^i, H_u, H_d} K_{ij}^\Phi \Phi^i \bar{\Phi}^{\bar{j}}, \quad (3.13)$$

avec

$$K_{ij}^\Phi = \delta_{ij} \prod_{\alpha=1}^p t_\alpha^{n_i^{(\alpha)}} + Z_{ij}^\Phi \left[\theta (\varphi_i - \varphi_j) \prod_{\alpha=1}^p t_\alpha^{n_j^{(\alpha)}} \left(\frac{\phi}{M_P} \right)^{\varphi_i - \varphi_j} \right. \\ \left. + \theta (\varphi_j - \varphi_i) \prod_{\alpha=1}^p t_\alpha^{n_i^{(\alpha)}} \left(\frac{\bar{\phi}}{M_P} \right)^{\varphi_j - \varphi_i} \right] + \dots \quad (3.14)$$

les facteurs Z_{ij}^Φ étant des nombres arbitraires de l'ordre de l'unité.

⁽¹⁰⁾Dans les cordes de type I par exemple, ces invariances modulaires assurent l'absence de divergences ultraviolettes [228, 229].

3.3.2 Calculs des termes *soft*

L'expression du potentiel de Kähler permet d'obtenir des expressions pour les termes de brisure douce de la supersymétrie globale. Bien sûr un scénario de brisure de la supersymétrie pleinement satisfaisant n'a toujours pas été proposé, aussi avons-nous fait l'hypothèse que seuls les champs de modules participaient à la brisure de la supergravité et que cette brisure était ensuite transmise au secteur observable par les interactions gravitationnelles. Nous avons adopté une paramétrisation suffisamment générale des termes de brisure dans le secteur des modules, paramétrisation proposée par Brignole *et al.* [234, 235].

La partie la plus importante du travail a consisté à calculer explicitement les termes de brisure douce d'abord dans la base des états d'interaction puis, après diagonalisation des matrices de masse, dans la base des états propres de masse. Les résultats relativement simples, et pour une bonne part indépendants de la paramétrisation de la brisure de la supergravité, sont la conséquence de simplifications entre une contribution purement géométrique de supergravité et une autre contribution d'effets à une boucle de la théorie des cordes qui se traduisent par l'apparition d'un terme de Fayet–Iliopoulos. La relation (3.12) entre poids modulaires et charges de saveur contribue beaucoup à ces simplifications entre les deux contributions.

Masses des scalaires

Les résultats concernant les masses des sfermions sont particulièrement simples : ces masses contiennent un terme universel, c'est-à-dire indépendant de la saveur, et une contribution proportionnelle à la charge de saveur ; ainsi :

$$\tilde{m}_i^2 - \tilde{m}_j^2 = (\varphi_i - \varphi_j)m_{3/2}^2 \quad (3.15)$$

$\tilde{m}_i$ désigne la masse *soft* du sfermion $\Phi^i = Q^i, U^i, D^i, L^i, E^i$, et $m_{3/2}$ est la masse du gravitino qui mesure la brisure de la supersymétrie. Les charges φ_i étant reliées à la hiérarchie de masse des fermions, on peut alors relier le secteur scalaire au secteur fermionique ; par exemple :

$$m_{3/2}^2 \ln \frac{m_{U_i}}{m_{U_j}} = \left(\tilde{m}_{Q_i}^2 - \tilde{m}_{Q_j}^2 + \tilde{m}_{U_i}^2 - \tilde{m}_{U_j}^2 \right) \ln \lambda \quad (3.16)$$

Le spectre du secteur fermionique étant connu expérimentalement, on en déduit une prédiction théorique sur le spectre du secteur scalaire. En particulier d'après (3.15) la masse des scalaires augmente avec la valeur des charges de saveur alors que dans le même temps, la masse des fermions diminue (les coupages de Yukawa correspondent à des puissances d'un nombre plus petit que 1). Ainsi le modèle étudié prédit une hiérarchie de masse inversée de la 'supermatière' (les squarks et les sleptons) par rapport à la matière ordinaire (les quarks et les leptons). Cette inversion de hiérarchie à l'échelle de brisure de la symétrie de saveur M_{GUT} ou M_P sera mise en évidence, à plus basse énergie après évolution sous le groupe de renormalisation, dans l'étude numérique présentée dans la section suivante.

La relation entre charges de saveur et poids modulaire permet également d'établir un certain nombre de règles de somme reliant les masses des scalaires à la masse M des jauginos. Par exemple :

$$\tilde{m}_{Q_i}^2 + \tilde{m}_{U_j}^2 + \tilde{m}_{H_u}^2 = M^2 + (q_i + u_j + h_u)m_{3/2}^2. \quad (3.17)$$

Secteur de Higgs

Dans le secteur de Higgs, le superpotentiel contient un terme de masse supersymétrique pour les doublets de Higgs : $\mu H_u H_d$. Les termes *soft* comprennent les masses scalaires $\tilde{m}_{H_u}^2$ et $\tilde{m}_{H_d}^2$ ainsi que le couplage analytique scalaire traditionnellement noté $B\mu \tilde{H}_u \tilde{H}_d$.

Nous avons obtenu les expressions explicites de ces paramètres en fonction des charges de saveur associées aux doublets de Higgs, de leur poids modulaire et de la paramétrisation Θ_α de la brisure de la supersymétrie :

$$\begin{aligned} \tilde{m}_i^2 &= \left(1 + h_i + 3\Theta_\alpha^2 \left(n_i^{(\alpha)} + h_i n_\phi^{(\alpha)}\right)\right) m_{3/2}^2, \\ \mu &= m_{3/2} (1 + (h_1 + h_2)\theta(-h_1 - h_2)) Z \epsilon^{|h_1+h_2|}, \\ B &= m_{3/2} (2 + (h_1 + h_2)\theta(h_1 + h_2)), \end{aligned} \quad (3.18)$$

Z est un nombre de l'ordre de l'unité apparaissant dans le potentiel de Kähler associé aux champs de Higgs.

Le secteur de Higgs contrôle la brisure électrofaible. Celle-ci ne peut avoir lieu que si les deux conditions suivantes à l'ordre des arbres sont satisfaites :

$$\begin{aligned} 2|B\mu|_{M_Z} &\leq (\tilde{m}_1^2 + \tilde{m}_2^2 + 2\mu^2)_{|M_Z}, \\ B^2\mu^2_{|M_Z} &\geq (\tilde{m}_1^2 + \mu^2)(\tilde{m}_2^2 + \mu^2)_{|M_Z}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Ces inégalités sont à considérer à l'échelle électrofaible et doivent donc être étudiées après évolution sous le groupe de renormalisation. Les résultats numériques seront présentés dans la section suivante (*cf.* courbe 3.1).

Analyse des changements de saveur par courant neutre

En général, les termes de masse des scalaires dans la base des états propres d'interaction sont non-diagonaux et constituent donc une source potentielle de violation de saveur par courant neutre.

Une étude de ces effets de changements de saveur avait déjà été menée [236,237] dans des modèles de symétrie de saveur. Avec une seule symétrie $U(1)_X$, il a été montré que les charges de saveur des différents champs étaient presque entièrement fixées, les seules possibilités pour éviter des effets de changement de saveur trop importants par rapport aux contraintes expérimentales étant soit d'aligner les scalaires et les fermions, c'est-à-dire d'obtenir des changements de base entre les états de masse et les états d'interaction identiques pour les fermions et les scalaires, soit d'introduire des dégénérescences partielles entre les scalaires des deux premières familles par exemple [238–240].

Nos résultats, donnant accès aux préfacteurs dans les expressions des masses et des couplages triscalaires, ont permis d'étudier des conditions de dégénérescence qui avaient échappé à la seule analyse d'ordre de grandeur, autorisant du même coup certains modèles qui avaient été exclus auparavant. La situation est particulièrement intéressante dans le cas de plusieurs facteurs de saveur abéliens. Nous avons étudié le cas d'une symétrie $U(1)_X \times U(1)'_X$. Les formules des termes soft se généralisent assez simplement et permettent de conclure que les termes non-diagonaux entre les scalaires de deux familles i et j ne peuvent s'annuler que si $\varphi_i = \varphi_j$ et $\varphi'_i = \varphi'_j$; mais il est alors impossible d'obtenir la bonne hiérarchie de masse des fermions : il n'existe pas de charges de saveur reproduisant la hiérarchie des fermions et menant à un secteur scalaire diagonal et dégénéré, ce qui peut sembler problématique pour les changements de saveur par courant neutre. Mais il est possible de choisir les charges de façon non pas à supprimer les masses non-diagonales, mais de façon à introduire des dégénérescences entre les termes diagonaux, dégénérescence suffisante à la suppression des effets de changement de saveur.

3.3.3 Etude numérique

Cette section est destinée à présenter une étude numérique que j'ai menée à la suite du travail qui vient d'être présenté. La première difficulté consiste à étudier l'évolution sous le groupe de renormalisation des principales quantités que nous avons calculées à l'échelle de brisure de la symétrie de saveur, échelle identifiée finalement comme l'échelle de la théorie des cordes ou la masse de Planck. Il convient ensuite d'imposer un certain nombre de contraintes expérimentales sur la masse du *top* ou des limites de masse pour les charginos.

Charges du secteur de Higgs

Le rapport de la masse des quarks *down* sur la masse des leptons fait apparaître une combinaison des charges qui s'exprime simplement en termes des anomalies :

$$\frac{m_d m_s m_b}{m_e m_\mu m_\tau} \simeq \lambda^{-(\mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_2 - 8\mathcal{A}_1/3)/2 + h_u + h_d} \quad (3.20)$$

où $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}(U(1)_Y^2 U(1)_X)$, $\dots$, sont les facteurs d'anomalie des trois facteurs du groupe de jauge du modèle standard⁽¹¹⁾. La compensation des anomalies par le mécanisme de Green–Schwarz annule précisément cette combinaison (notamment si l'on souhaite retrouver la valeur de l'angle de Weinberg des modèles de grande unification). La relation (3.20) est évidemment une relation entre les masses définies à l'échelle de brisure de la symétrie de saveur, échelle très supérieure à l'échelle électrofaible où sont mesurées

⁽¹¹⁾Il est supposé que les champs de module ne sont pas chargés sous le groupe de jauge du modèle standard, ils appartiennent au secteur 'caché' qui ne couple au secteur visible que par des interactions gravitationnelles. Les modules peuvent donc acquérir des *vev* à haute énergie sans briser les symétries du modèle standard qui restent donc exactes jusqu'à l'échelle électrofaible. En revanche, les modules peuvent être chargés sous la symétrie de saveur.

expérimentalement ces masses ; la comparaison ne peut donc se faire qu'après renormalisation. Finalement, les seules valeurs de $h_u + h_d$ compatibles avec l'expérience sont $h_u + h_d = -1, 0, +1$.

La valeur $h_u + h_d = -1$ interdit le terme $\mu H_u H_d$ dans le superpotentiel ($H_u H_d$ devrait se coupler à une puissance négative de ϕ c'est-à-dire à $\phi^\dagger$, ce qui est interdit par l'analyticité). Mais en l'absence de ce terme, il apparaît une symétrie globale $U(1)_{PQ}$ de Peccei–Quinn, symétrie spontanément brisée qui se traduirait par l'existence d'un boson de Goldstone, l'axion, inobservé expérimentalement.

La valeur $h_u + h_d = +1$ conduit à des masses *soft* pour les Higgs de l'ordre de $m_{3/2}$ tandis que les termes μ et $B\mu$ sont tous deux de l'ordre de $\lambda m_{3/2}$. Afin de satisfaire à la seconde équation (3.19) assurant la stabilité du vide électromagnétique après renormalisation, il est nécessaire d'ajuster les valeurs de $\tilde{m}_u$ et $\tilde{m}_d$ à haute énergie et la valeur de la masse des jauginos apparaissant dans la renormalisation. On est donc confronté à un problème de *fine-tuning*.

La solution la plus naturelle est donc $h_u + h_d = 0$.

Détermination de la valeur de $\tan \beta$

La masse du *top* est reliée au couplage de Yukawa et au rapport $\tan \beta$ des *vev* des champs de Higgs⁽¹²⁾ :

$$m_t^2 = Y_t^2 v^2 \sin^2 \beta . \quad (3.21)$$

Expérimentalement, à l'échelle électrofaible, la masse du *top* est connue avec une assez bonne précision : $156 \text{ GeV}/c^2 < m_t < 180 \text{ GeV}/c^2$. Ceci nous permet d'obtenir, en fonction de $\sin \beta$, la valeur du couplage du *top* à basse énergie, et après évolution sous le groupe de renormalisation d'obtenir des contraintes sur sa valeur à haute énergie. Cette évolution est gouvernée par l'équation :

$$\frac{dY_t^2}{dt} = -12Y_t^4 + 4 \left(\sum_{\alpha=1}^3 C_\alpha^U g_\alpha^2 \right) Y_t^2 \quad (3.22)$$

où $t = \frac{1}{16\pi^2} \ln \frac{\Lambda_0}{\Lambda}$ est le paramètre d'énergie et g_α , les constantes de couplage des groupes de jauge du modèles standard (les nombres C_α^U sont des facteurs de groupe associés).

Ce sont ces valeurs du couplage du *top* qui contrôlent la renormalisation des termes *soft* des scalaires du secteur de Higgs ; on peut ainsi obtenir des valeurs à l'échelle électrofaible à partir des valeurs prédites par notre modèle à haute énergie. Ces valeurs doivent être compatibles avec les conditions (3.19) de stabilité du vide électromagnétique.

Les résultats numériques sont reportés sur la figure 3.1. Les données expérimentales ne sont donc compatibles, dans notre modèle, qu'avec de petites valeurs de $\tan \beta$.

Hiérarchie inversée du secteur scalaire à basse énergie

Le spectre de la matière est relié au spectre de la supermatière et nous avons vu dans le paragraphe §3.3 que la symétrie de saveur se traduisait à haute énergie par une

⁽¹²⁾ $\tan \beta$ est définie par $\tan \beta = \langle H_u \rangle / \langle H_d \rangle$.

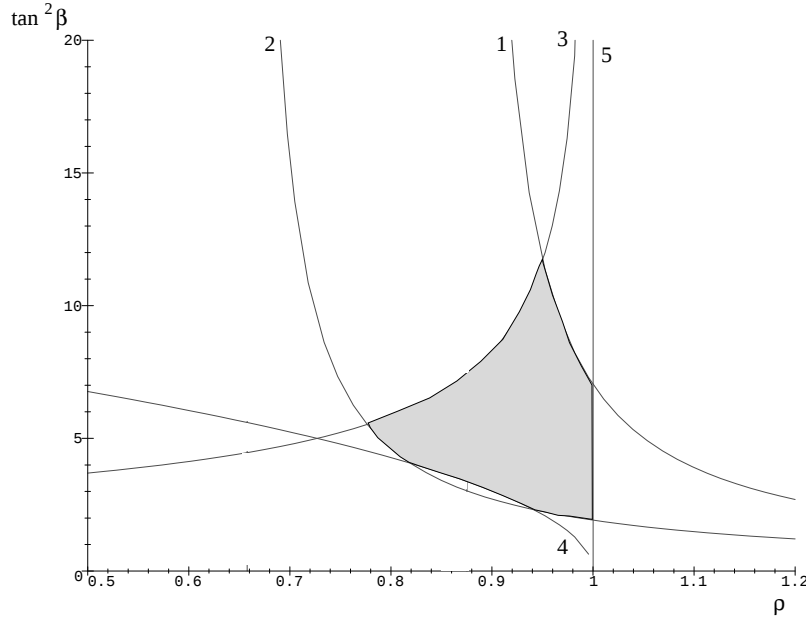


Figure 3.1: Détermination de $\tan \beta$ à partir des contraintes expérimentales. ρ désigne le rapport du couplage de Yukawa à l'échelle électrofaible sur sa valeur au pôle de Landau. Le domaine de variation de $\tan \beta$ est fixé par les bornes expérimentales sur la masse du top et par les contraintes de stabilité du vide électrofaible. La courbe 1 exclut une masse du top supérieure à $180 \text{ GeV}/c^2$, la courbe 2 exclut une masse du top inférieure à $156 \text{ GeV}/c^2$. Les courbes 3 et 4 définissent le domaine de stabilité du vide électromagnétique : ce domaine correspond à la région dans laquelle les deux contraintes (3.19) sont satisfaites. Enfin la courbe 5 définit le pôle de Landau.

inversion de hiérarchie de masse : les squarks de la première famille sont beaucoup plus lourds que ceux de la deuxième famille, eux-mêmes plus lourds que ceux de la troisième famille. Il est légitime de se demander ce que deviennent ces relations à basse énergie après renormalisation. Cette renormalisation est contrôlée par le couplage du top sur lequel nous avons obtenu des contraintes dans l'étude précédente. Ceci nous permet d'en déduire un spectre pour les sfermions à basse énergie. Les résultats numériques sont reproduits sur la figure 3.2

Echelle de brisure de la supersymétrie

En plus des fermions habituels, l'extension supersymétrique du modèle standard comporte les partenaires fermioniques des bosons de jauge (les jauginos) et ceux des champs de Higgs (les Higgsinos). Certains sont chargés (les charginos : $\tilde{W}^\pm$, $\tilde{H}_u^\pm$, $\tilde{H}_d^\pm$), d'autres sont neutres (les neutralinos : $\tilde{Z}^0$, $\tilde{\gamma}$, $\tilde{H}_u^0$, $\tilde{H}_d^0$). Expérimentalement, ces fermions n'ont

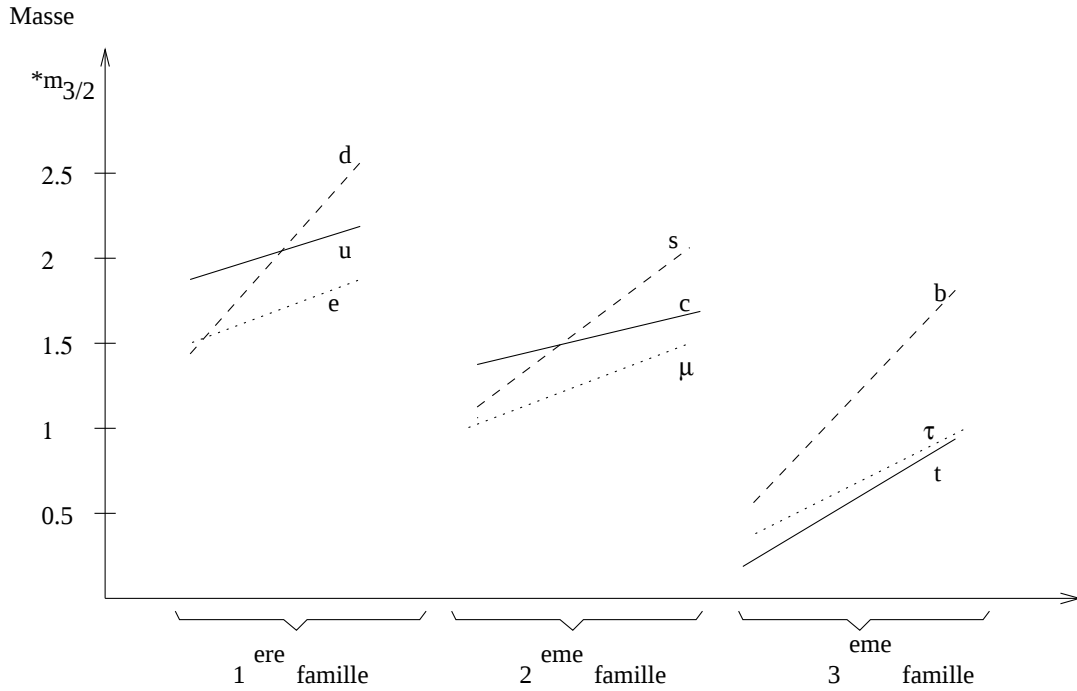


Figure 3.2: Spectre des sfermions à basse énergie. La hiérarchie de masse inversée prédite à haute énergie est maintenue après renormalisation à basse énergie. Les masses de sfermions sont proportionnelles à la masse du gravitino $m_{3/2}$.

pas (encore) été observés, ce qui impose une borne inférieure sur leur masse (de l'ordre de $65 \text{ GeV}/c^2$ pour les charginos).

La masse du plus léger des charginos se calcule à partir de la masse des bosons de jauge, de la masse supersymétrique μ de champs de Higgs et de la masse *soft* du wino $\tilde{m}_w$ [241, 242] :

$$m_\chi^2 = \frac{1}{2} \left(\tilde{m}_w^2 + \mu^2 + 2M_W^2 - \sqrt{(\tilde{m}_w^2 - \mu^2)^2 + 4M_W^4 \cos 2\beta + 4M_W^2(\tilde{m}_w^2 + \mu^2 + 2\mu\tilde{m}_w \sin 2\beta)} \right). \quad (3.23)$$

Numériquement, la contrainte expérimentale sur la masse de ce chargino se traduit pas une limite inférieure sur la masse du gravitino $m_{3/2}$: $m_{3/2} \gtrsim 4m_Z$.

Ainsi le modèle proposé prévoit une échelle de brisure de la supersymétrie dans le secteur observable de l'ordre du TeV.

3.3.4 Conclusion

Le problème de la hiérarchie de masse ne peut s'approcher que dans des théories d'extension du modèle standard. Ces nouvelles théories sont formulées à des énergies très supérieures à l'échelle électrofaible. La supersymétrie permet de s'affranchir du

problème de hiérarchie de jauge c'est-à-dire de la coexistence au niveau quantique de ces deux échelles d'énergie. De nouvelles particules apparaissent dans les extensions du modèle standard. Et leurs effets ne doivent pas être en conflit avec les résultats expérimentaux obtenus jusqu'à présent : il faut notamment veiller à ne pas engendrer de changements de saveur par courant neutre supprimés dans le modèle standard par le mécanisme de Glashow–Iliopoulos–Maiani.

Nous avons proposé un modèle dans lequel la hiérarchie de masse est la conséquence de la brisure spontanée à haute énergie d'une symétrie locale abélienne additionnelle aux symétries de jauge du modèle standard. Nous avons relié cette symétrie à des propriétés géométriques de la théorie des cordes dont notre théorie de saveur serait une théorie effective de basse énergie. Ces propriétés géométriques nous ont permis de relier le spectre du secteur scalaire au spectre du secteur fermionique. Et l'étude de l'évolution sous le groupe de renormalisation a dégagé les caractéristiques essentielles de ce modèle à l'échelle électrofaible, mettant ainsi en évidence des propriétés d'une théorie d'extension du modèle standard formulée à (très) haute énergie, propriétés testables à basse énergie, dans les expériences auprès des futurs accélérateurs.

Particules	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$	R
$L_L^i = \begin{cases} N^i = (\nu^i, \tilde{\nu}^i) \\ E_L^i = (l_L^i, \tilde{l}_L^i) \end{cases}$	1	2	1/2	-1
$E^i = (CP(l_R^i), CP(\tilde{l}_R^i))$	1	1	-1	-1
$Q_L^i = \begin{cases} U_L^i = (u_L^i, \tilde{u}_L^i) \\ D_L^i = (d_L^i, \tilde{d}_L^i) \end{cases}$	3	2	-1/6	-1
$U_R^i = (CP(u_R^i), CP(\tilde{u}_R^i))$	$\bar{3}$	1	2/3	-1
$D_R^i = (CP(d_R^i), CP(\tilde{d}_R^i))$	$\bar{3}$	1	-1/3	-1
$H_d = \begin{cases} (h_d^0, \tilde{h}_d^0) \\ (h_d^-, \tilde{h}_d^-) \end{cases}$	1	2	1/2	1
$H_u = \begin{cases} (h_u^+, \tilde{h}_u^+) \\ (h_u^0, \tilde{h}_u^0) \end{cases}$	1	2	-1/2	1

Table 3.3: Description du modèle standard supersymétrique minimal. La première partie du tableau donne la structure d'une famille : les lettres majuscules désignent les superchamps, les lettres minuscules, les fermions ordinaires du modèle standard et les lettres tildées, leurs partenaires supersymétriques. La dernière colonne indique les charges R des superchamps [213]. La seconde partie du tableau s'intéresse au secteur de Higgs : dans le modèle standard, les quarks *up* couplent au champ de Higgs et les quarks *down*, à son conjugué de charge. Ce couplage est interdit par l'analyticité du superpotentiel en supersymétrie. Un deuxième champ de Higgs est nécessaire pour engendrer les termes de masse de tous les quarks (remarquons que le théorème de Glashow–Weinberg [214] est respecté : tous les fermions de même charge électrique couplent à un seul et même Higgs, ce qui assure un courant faible neutre diagonal pour les fermions). L'existence de deux doublets de Higgs peut également être justifiée par la condition d'absence d'anomalie.

Appendice A

Géométrie différentielle. Géométrie Riemannienne.

Dans cet appendice sont définies les principales notions de géométrie différentielle utilisées dans cette thèse. L'objectif n'était pas de proposer une définition précise au sens mathématique mais plutôt d'insister sur le choix des normalisations et des conventions de signes retenues. Il ne sera pas précisé par exemple le degré de différentiabilité des fonctions nécessaire à telle ou telle définition. Bien souvent aussi les variétés sur lesquelles on travaillera seront supposées orientables (notamment lorsqu'on définira l'opération de dualité de Hodge) sans que cela soit dit explicitement.

Les références générales abordant les notions dont il est question ici sont les livres de Kobayashi–Nomizu [243, 244] et celui plus pédagogique de Nakahara [111].

A.1 Espaces tangent, cotangent

Soit $\mathcal{M}$ une variété différentiable de dimension m ; $M, N \dots$ des points de cette variété. On notera $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ l'ensemble des *fonctions* définies sur $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{F}(\mathcal{M}) \ni f : \begin{array}{l} \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \\ M \mapsto f(M) \end{array} . \quad (\text{A.1})$$

Un *vecteur* $V_{|M}$ au point M est une application linéaire de $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ dans $\mathbb{R}$ obéissant à la règle de Leibniz :

$$\mathcal{T}_M \mathcal{M} \ni V_{|M} : \begin{array}{l} \mathcal{F}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto V_{|M}(f) \end{array} \text{ avec } V_{|M}(fg) = V_{|M}(f)g + fV_{|M}(g). \quad (\text{A.2})$$

L'ensemble des vecteurs au point M est l'*espace vectoriel tangent* à $\mathcal{M}$ au point M . On le notera $\mathcal{T}_M \mathcal{M}$. Si $\{x^\mu\}$ sont des coordonnées locales sur $\mathcal{M}$, un vecteur se décomposera sur la base des dérivées partielles :

$$V_{|M} = V_{|M}^\mu \partial_\mu. \quad (\text{A.3})$$

Un *champ de vecteurs* est une application⁽¹⁾ qui à tout point M de $\mathcal{M}$ associe un vecteur $V|_M \in \mathcal{T}_M\mathcal{M}$. On notera $\mathcal{TM}$ l'ensemble des champs de vecteurs sur $\mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{TM} \ni V : \quad & \mathcal{M} \rightarrow \bigcup_{M \in \mathcal{M}} \mathcal{T}_M\mathcal{M} \\ & M \mapsto V|_M \in \mathcal{T}_M\mathcal{M}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Pour des champs de vecteurs, les composantes du développement (A.3) deviennent des fonctions :

$$V = V^\mu(x)\partial_\mu. \quad (\text{A.5})$$

Il existe sur $\mathcal{TM}$ une *structure de Lie* naturelle construite de la façon suivante :

$$[\cdot, \cdot] : \begin{aligned} & \mathcal{TM}^2 \rightarrow \mathcal{TM} \\ & (V_1, V_2) \mapsto [V_1, V_2] \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

où $[V_1, V_2]$ est le champ de vecteurs défini par son action sur les fonctions :

$$[V_1, V_2]|_M(f) = V_1|_M(V_2|_M(f)) - V_2|_M(V_1|_M(f)). \quad (\text{A.7})$$

En composantes, cette définition devient :

$$[V_1, V_2]^\mu = V_1^\nu \partial_\nu V_2^\mu - V_2^\nu \partial_\nu V_1^\mu. \quad (\text{A.8})$$

Un *vecteur cotangent* ou *1-forme différentielle* $\omega|_M$ au point M est une application de $\mathcal{T}_M(\mathcal{M})$ dans $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{T}_M^*(\mathcal{M}) \ni \omega_M : \begin{aligned} & \mathcal{T}_M(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R} \\ & V|_M \mapsto \omega|_M \langle V|_M \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

L'action sur les vecteurs étant définie à partir du développement en composantes :

$$V|_M \mapsto \omega|_M \langle V|_M^\mu \partial_\mu \rangle = \omega|_{M_\mu} V|_M^\mu. \quad (\text{A.10})$$

Il est commode d'introduire la base $\{dx^\mu\}$ duale à la base $\{\partial_\mu\}$ des vecteurs :

$$dx^\mu \langle \partial_\nu \rangle = \delta^\mu_\nu. \quad (\text{A.11})$$

De sorte que

$$\omega|_M = \omega|_{M_\mu} dx^\mu. \quad (\text{A.12})$$

L'ensemble des vecteurs cotangents au point M est l'*espace vectoriel cotangent* à $\mathcal{M}$ au point M . On le notera $\mathcal{T}_M^*(\mathcal{M})$.

Un *champ de 1-formes différentielles* ω est une application qui à tout point M de $\mathcal{M}$ associe un vecteur cotangent $\omega|_M \in \mathcal{T}_M^*(\mathcal{M})$. On notera $\Omega^1(\mathcal{M})$ l'ensemble des champs de 1-formes sur $\mathcal{M}$. Là encore pour des champs de 1-formes, les composantes du développement (A.12) deviennent des fonctions.

⁽¹⁾Tout champ de vecteurs est une dérivation *i.e.* une application linéaire de $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ dans lui-même obéissant à la règle de Leibniz. $\mathcal{TM}$ est un $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ -module puisque tout champ de vecteurs multiplié par une fonction reste un champ de vecteurs.

A.2 Formes différentielles

Un *tenseur* de rang (q, p) au point M est une application linéaire de $\mathcal{T}_M^*(\mathcal{M})^q \times \mathcal{T}_M(\mathcal{M})^p$ dans $\mathbb{R}$. En composantes, une base des tenseurs de rang (q, p) est :

$$\partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_q} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_p}. \quad (\text{A.13})$$

L'espace des tenseurs de rang (q, p) au point M est noté $\mathcal{T}_M^{(q,p)}(\mathcal{M})$ et $\mathcal{T}^{(q,p)}(\mathcal{M})$ désignera l'espace des champs de tenseurs de rang (q, p) sur $\mathcal{M}$.

Le *produit tensoriel* d'un tenseur T_1 de rang (q_1, p_1) et d'un tenseur T_2 de rang (q_2, p_2) est un tenseur $T_1 \otimes T_2$ de rang $(q_1 + q_2, p_1 + p_2)$ défini par :

$$(T_1 \otimes T_2)_{|M}(\omega_1 \dots \omega_{q_1+q_2}, V_1 \dots V_{p_1+p_2}) = T_{1|M}(\omega_1 \dots \omega_{q_1}, V_1 \dots V_{p_1}) T_{2|M}(\omega_{q_1+1} \dots \omega_{q_1+q_2}, V_{p_1+1} \dots V_{p_1+p_2}). \quad (\text{A.14})$$

Tout tenseur s'obtient par produit tensoriel de vecteurs tangents (tenseur de rang $(1, 0)$) et cotangents (tenseur de rang $(0, 1)$).

Une *p-forme différentielle* est un tenseur de rang $(0, p)$ totalement antisymétrique :

$$\Omega_M^p(\mathcal{M}) \ni \omega_{p|M} : \mathcal{T}_M(\mathcal{M})^p \rightarrow \mathbb{R} \quad (V_1 \dots V_p) \mapsto \omega_{p|M} \langle V_1 \dots V_p \rangle \quad (\text{A.15})$$

où $\omega_{p|M} \langle V_{\sigma(1)} \dots V_{\sigma(p)} \rangle = \epsilon(\sigma) \omega_{p|M} \langle V_1 \dots V_p \rangle$ pour tout élément σ du groupe des permutations $\mathfrak{S}_p$, $\epsilon(\sigma)$ étant la signature de la permutation. On notera $\Omega_M^p(\mathcal{M})$ l'ensemble des p -formes au point M et $\Omega^p(\mathcal{M})$ l'ensemble des champs de p -formes. Remarquons que les 0-formes sont les fonctions $\Omega^0(\mathcal{M}) = \mathcal{F}(\mathcal{M})$ et que les 1-formes sont les champs de vecteurs cotangents. Pour $p > 0$, $\Omega^p(\mathcal{M})$ est un espace vectoriel de dimension C_m^p . $\Omega(\mathcal{M}) = \bigoplus_{p=0}^m \Omega^p(\mathcal{M})$ est l'ensemble des formes différentielles; cet ensemble est muni d'une structure d'algèbre, le *produit extérieur* de $\omega_p \in \Omega^p(\mathcal{M})$ et de $\omega_q \in \Omega^q(\mathcal{M})$ étant l'élément de $\Omega^{p+q}(\mathcal{M})$ défini par :

$$(\omega_p \wedge \omega_q) \langle V_1 \dots V_{p+q} \rangle = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \epsilon(\sigma) \omega_p \langle V_{\sigma(1)} \dots V_{\sigma(p)} \rangle \omega_q \langle V_{\sigma(p+1)} \dots V_{\sigma(p+q)} \rangle. \quad (\text{A.16})$$

Une base de $\Omega^p(\mathcal{M})$ est alors donnée par $dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}$, le développement d'une p -forme s'écrivant :

$$\omega_p = \frac{1}{p!} \omega_{p \mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}. \quad (\text{A.17})$$

Remarquons qu'avec la normalisation choisie $\omega_{p \mu_1 \dots \mu_p} = \omega_p \langle \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_p} \rangle$. En composantes, le produit extérieur s'écrit :

$$\begin{aligned} (\omega_p \wedge \omega_q)_{\mu_1 \dots \mu_{p+q}} &= \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \epsilon(\sigma) \omega_{p \mu_{\sigma(1)} \dots \mu_{\sigma(p)}} \omega_{q \mu_{\sigma(p+1)} \dots \mu_{\sigma(p+q)}} \\ &= \frac{(p+q)!}{p!q!} \omega_{p[\mu_1 \dots \mu_p} \omega_{q \mu_{p+1} \dots \mu_{p+q}]} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Le produit extérieur vérifie la loi de commutation suivante :

$$\omega_p \wedge \omega_q = (-1)^{pq} \omega_q \wedge \omega_p. \quad (\text{A.19})$$

Notons de plus la loi d'associativité :

$$\begin{aligned} ((\omega_p \wedge \omega_q) \wedge \omega_r)_{\mu_1 \dots \mu_{p+q+r}} &= (\omega_p \wedge (\omega_q \wedge \omega_r))_{\mu_1 \dots \mu_{p+q+r}} \\ &= \frac{(p+q+r)!}{p!q!r!} \omega_p_{\mu_1 \dots \mu_p} \omega_q_{\mu_{p+1} \dots \mu_{p+q}} \omega_r_{\mu_{p+q+1} \dots \mu_{p+q+r}}. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

On définit sur $\Omega(\mathcal{M})$ l'opération de *dérivation extérieure* :

$$d : \begin{array}{l} \Omega^p(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^{p+1}(\mathcal{M}) \\ \omega_p \rightarrow d\omega_p \end{array} \quad (\text{A.21})$$

où $d\omega_p$ est défini par⁽²⁾ :

$$\begin{aligned} (d\omega_p) \langle V_0 \dots V_p \rangle &= \sum_{0 \leq i \leq p} (-1)^i V_i (\omega_p \langle V_0 \dots \hat{V}_i \dots V_p \rangle) \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \omega_p \langle [V_i, V_j] V_0 \dots \hat{V}_i \dots \hat{V}_j \dots V_p \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

En composantes, on obtient :

$$(d\omega_p)_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} = (p+1) \partial_{[\mu_1} \omega_p_{\mu_2 \dots \mu_{p+1}]} . \quad (\text{A.23})$$

On montre que l'opération de dérivation extérieure vérifie les deux propriétés suivantes :

$$d^2 = 0; \quad (\text{A.24})$$

$$d(\omega_p \wedge \omega_q) = (d\omega_p) \wedge \omega_q + (-1)^p \omega_p \wedge (d\omega_q). \quad (\text{A.25})$$

Soit V un champ de vecteur. On définit sur $\Omega(\mathcal{M})$ l'opération de *produit intérieur* suivant V :

$$\iota_V : \begin{array}{l} \Omega^p(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^{p-1}(\mathcal{M}) \\ \omega_p \rightarrow \iota_V \omega_p \end{array} \quad (\text{A.26})$$

où $\iota_V \omega_p$ est défini par :

$$(\iota_V \omega_p) \langle V_1 \dots V_{p-1} \rangle = \omega_p \langle V V_1 \dots V_{p-1} \rangle. \quad (\text{A.27})$$

En composantes, on obtient :

$$(\iota_V \omega_p)_{\mu_1 \dots \mu_{p-1}} = V^{\mu_0} \omega_p_{\mu_0 \mu_1 \dots \mu_{p-1}}. \quad (\text{A.28})$$

⁽²⁾La notation $\hat{V}_i$ signifie que le vecteur V_i a été omis de la liste.

On montre que

$$\iota_V(\omega_p \wedge \omega_q) = (\iota_V \omega_p) \wedge \omega_q + (-1)^p \omega_p \wedge (\iota_V \omega_q). \quad (\text{A.29})$$

Soit ϕ un difféomorphisme de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}'$. ϕ induit une application ϕ_* de $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}(\mathcal{M})$ dans $\mathcal{T}_{\phi(M)}(\mathcal{M}')$, de $\mathcal{T}_{\phi(M)}^*(\mathcal{M}')$ dans $\mathcal{T}_M^*(\mathcal{M})$ et plus généralement de $\mathcal{T}^{(q,p)}(\mathcal{M})$ dans $\mathcal{T}^{(q,p)}(\mathcal{M}')$ par :

$$\begin{aligned} (\phi_* V)|_{\phi(M)}(f) &= V|_M(f \circ \phi); \\ (\phi_* \omega)|_M \langle V|_M \rangle &= \omega|_{\phi(M)} \langle \phi_* V \rangle; \\ (\phi_* T)|_{M'}(\omega_1 \dots \omega_q V_1 \dots V_p) &= T|_{\phi^{-1}(M')}(\phi_* \omega_1 \dots \phi_* \omega_q \phi_* V_1 \dots \phi_* V_p). \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Remarquons que l'action de ϕ_* est compatible avec la structure de Lie :

$$(\phi_*[V_1, V_2])|_M = [\phi_* V_1, \phi_* V_2]|_M. \quad (\text{A.31})$$

On montre également que, dans son action sur les formes, ϕ_* commute avec l'opération de dérivation extérieure :

$$d(\phi_* \omega) = \phi_*(d\omega). \quad (\text{A.32})$$

A.3 Action d'un groupe de Lie sur une variété

Un *groupe de Lie* G est une variété différentiable munie d'une structure de groupe (on notera e l'élément unité de G). Soit g_0 un élément quelconque de G . On définit la translation à gauche selon g_0 par :

$$L_{g_0} : \begin{aligned} G &\rightarrow G \\ g &\mapsto g_0 g. \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Cet endomorphisme induit une application⁽³⁾ $L_{g_0}^*$ de $\mathcal{T}(G)$ dans lui-même par :

$$(L_{g_0}^* \xi)|_g(f) = \xi|_{g_0^{-1}g}(f \circ L_{g_0}). \quad (\text{A.34})$$

Un champ de vecteurs ξ sur G est dit *invariant à gauche* ssi $(L_{g_0}^* \xi)_g = \xi_{g_0 g}$ pour tout g_0 . L'espace $\mathcal{G}$ des champs de vecteurs invariants à gauche est isomorphe à l'espace tangent à l'origine $\mathcal{T}_e(G)$ puisque $\xi|_g = L_g^* \xi_e$, défini pour tout $\xi_e \in \mathcal{T}_e(G)$, est invariant à gauche. La propriété (A.31) assure que la structure de Lie de $\mathcal{T}_e(G)$ induit une structure de Lie sur $\mathcal{G}$: $\mathcal{G}$ est l'*algèbre de Lie* associée à G .

A partir d'une base ξ_{e_i} de l'espace tangent à l'identité $\mathcal{T}_e(G)$, on construit une base de $\mathcal{G}$:

$$\xi_{i|g} = L_g^* \xi_{e_i}. \quad (\text{A.35})$$

⁽³⁾Dans le reste de cet exposé, on notera ξ les vecteurs de $\mathcal{T}(G)$ afin de ne pas les confondre avec les vecteurs V de $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ où $\mathcal{M}$ est une variété sur laquelle peut agir le groupe G .

Par construction :

$$[\xi_i, \xi_j]_{|g} = L_g * [\xi_{e_i}, \xi_{e_j}] = c_{ij}^k L_g * \xi_{e_k} = c_{ij}^k \xi_{k|g} . \quad (\text{A.36})$$

Les coefficients c_{ij}^k , indépendants du point g , sont les constantes de structure de l'algèbre. Si on note θ^i les champs de 1-formes duaux aux champs de vecteurs ξ_i , les relations de structure (A.36) s'écrivent :

$$d\theta^i + \frac{1}{2} c_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k = 0 . \quad (\text{A.37})$$

Ce sont les *équations de Maurer-Cartan*. Il est commode d'introduire la *forme de Maurer-Cartan* : c'est le champ de 1-formes différentielles à valeur dans l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ défini par :

$$\theta_{|g} = \xi_{e_i} \theta^i_{|g} . \quad (\text{A.38})$$

Les équations de Maurer-Cartan deviennent alors simplement :

$$d\theta + \frac{1}{2} \theta \wedge \theta = 0 . \quad (\text{A.39})$$

Une *action* d'un groupe de Lie G sur une variété $\mathcal{M}$ est une application différentiable σ de $G \times \mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}$ compatible avec la structure de groupe :

1. $\sigma(e, M) = M$ pour tout $M \in \mathcal{M}$;
2. $\sigma(g_1, \sigma(g_2, M)) = \sigma(g_1 g_2, M)$.

L'action est dite *transitive* si

$$\forall M_1, M_2 \in \mathcal{M} \quad \exists g \in G \quad / \quad \sigma(g, M_1) = M_2 .$$

L'action est dite *libre* si aucun élément non trivial de G (*i.e.* distinct de e) n'admet de point fixe sur $\mathcal{M}$.

On voudrait maintenant caractériser la variation sous l'action du groupe G des fonctions, des vecteurs et plus généralement des champs de tenseurs définis sur la variété $\mathcal{M}$. Comme on sait bien définir les dérivées de fonctions de variables réelles, l'idée est de construire une application de $\mathbb{R}$ dans G ; une telle application sera caractérisée par un élément de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ ce qui nous permettra de définir la *dérivée de Lie* d'un champ de vecteur le long d'un vecteur ξ de $\mathcal{G}$. On peut construire (*cf.* [111, p.173]) à partir de tout vecteur ξ de $\mathcal{G}$ un sous-groupe à un paramètre de G *i.e.* une application $\phi_\xi : \mathbb{R} \rightarrow G$ telle que $\phi_\xi(t_1)\phi_\xi(t_2) = \phi_\xi(t_1 + t_2)$ (habituellement, on note $\phi_\xi(t) = e^{t\xi}$), et donc un groupe de difféomorphismes de $\mathcal{M}$: $\sigma_{\xi,t}(M) = \sigma(\phi_\xi(t), M)$ vérifiant $\sigma_{\xi,t_1} \circ \sigma_{\xi,t_2} = \sigma_{\xi,t_1+t_2}$. Le champ de vecteurs ξ induit alors de façon naturelle un champ de vecteurs $\hat{\xi}$ sur $\mathcal{M}$ agissant sur les fonctions selon :

$$\hat{\xi}_{|M}(f) = \frac{d}{dt} f(\sigma_{\xi,t}(M))_{|t=0} . \quad (\text{A.40})$$

On définit la dérivée de Lie d'un champ de tenseur T de rang (q, p) par :

$$\mathcal{L}_\xi T = \lim_{t \rightarrow 0} (\sigma_{\xi, -t} * T - T) / t . \quad (\text{A.41})$$

Compte tenu de la définition (A.30), on montre que la dérivée de Lie agit sur les fonctions, les champs de vecteurs et les p -formes de la façon suivante :

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_\xi f)(M) &= \hat{\xi}_M(f); \\ \mathcal{L}_\xi V &= [\hat{\xi}, V]; \\ \mathcal{L}_\xi \omega &= (\iota_{\hat{\xi}} d + d \iota_{\hat{\xi}}) \omega . \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

En composantes, l'action de la dérivée de Lie sur les p -formes s'écrit :

$$(\mathcal{L}_\xi \omega_p)_{\mu_1 \dots \mu_p} = \hat{\xi}^\nu \partial_\nu \omega_{p \mu_1 \dots \mu_p} + p (\partial_{[\mu_1} \hat{\xi}^{\nu]} \omega_{p \nu \mu_2 \dots \mu_p]) . \quad (\text{A.43})$$

Mentionnons deux propriétés des dérivées de Lie :

$$\mathcal{L}_\xi (\omega_p \wedge \omega_q) = (\mathcal{L}_\xi \omega_p) \wedge \omega_q + \omega_p \wedge (\mathcal{L}_\xi \omega_q); \quad (\text{A.44})$$

$$(\mathcal{L}_\xi \omega_p)_{|M} \langle V_1 \dots V_p \rangle = \mathcal{L}_\xi (\omega_{p|M} \langle V_1 \dots V_p \rangle) - \sum_{1 \leq i \leq p} \omega_{p|M} \langle V_1 \dots \mathcal{L}_\xi V_i \dots V_p \rangle . \quad (\text{A.45})$$

A.4 Géométrie (pseudo-)Riemannienne

A.4.1 Métrique et connection affine

Une *métrique* sur une variété $\mathcal{M}$ est un champ de tenseurs de rang $(0, 2)$ symétrique et non-dégénéré :

1. $\forall M \in \mathcal{M}, \forall V_1, V_2 \in \mathcal{T}_M(\mathcal{M}), \quad g_{|M}(V_1, V_2) = g_{|M}(V_2, V_1) ;$
2. $(\forall V_2 \quad g_{|M}(V_1, V_2) = 0) \Rightarrow V_1 = 0.$

Dans le cas où g est définie positive, la métrique est Riemannienne, sinon on parle de métrique pseudo-Riemannienne. Si $\{x^\mu\}$ sont des coordonnées sur $\mathcal{M}$ alors

$$g_{|M(x)} = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu \otimes dx^\nu \text{ avec } g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} . \quad (\text{A.46})$$

La métrique étant non-dégénérée, on peut construire des champs de vecteurs $\{e_m\}$ tels que

$$g_{|M}(e_m, e_n) = \eta_{mn} \quad (\text{A.47})$$

où $\eta = \text{diag}(+1, \dots +1, -1, \dots -1)$ est la signature de la métrique. Les coefficients du développement de la *base mobile* $\{e_m\}$ sur les champs de vecteurs associés aux coordonnées $\{x^\mu\}$ sont appelés *vielbeins* :

$$e_{m|M} = e_m^\mu {}_{|M} \partial_\mu . \quad (\text{A.48})$$

Les champs de 1-formes définis par :

$$e^m|_M = dx^\mu (e^{-1}|_M)_\mu{}^m . \quad (\text{A.49})$$

sont duaux aux champs de vecteurs $e_m : e^m \langle e_n \rangle = \delta^m_n$. Les vielbeins sont reliés à la métrique et à la métrique inverse par les égalités :

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= (e^{-1})_\mu{}^m (e^{-1})_\nu{}^n \eta_{mn} ; \\ g^{\mu\nu} &= e_m{}^\mu e_n{}^\nu \eta^{mn} . \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

En général, les champs de vecteurs e_m induisent une structure de Lie non triviale :

$$[e_m, e_n]|_M = c_{mn}{}^p|_M e_p|_M . \quad (\text{A.51})$$

les fonctions de structure se calculant à partir des vielbeins⁽⁴⁾ :

$$c_{mn}{}^p = (e_m{}^\mu \partial_\mu e_n{}^\rho - e_n{}^\nu \partial_\nu e_m{}^\rho) e_\rho{}^p . \quad (\text{A.52})$$

Une *connection affine* ∇ est une application bilinéaire :

$$\begin{aligned} \nabla : \quad & \mathcal{TM} \times \mathcal{TM} \rightarrow \mathcal{TM} \\ & (V_1, V_2) \mapsto \nabla_{V_1}(V_2) . \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

agissant comme une dérivation et vérifiant certaines propriétés de compatibilité avec le produit tensoriel (*cf.* [111, p.210]). A partir d'une connection affine, on construit les tenseurs de *torsion* et de *courbure* (*cf.* [111, p.215]) :

$$\begin{aligned} T(V_1, V_2) &= \nabla_{V_1}(V_2) - \nabla_{V_2}(V_1) - [V_1, V_2] ; \\ R(V_1, V_2)V_3 &= \nabla_{V_1}\nabla_{V_2}V_3 - \nabla_{V_2}\nabla_{V_1}V_3 - \nabla_{[V_1, V_2]}V_3 . \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

Etant donnée une connection, on définit les composantes de la connection, de la torsion et de la courbure relatives à la base mobile e_m :

$$\begin{aligned} \nabla_{e_m}(e_n) &= \omega_{mn}{}^p e_p ; \\ T_{mn}{}^p &= e^p \langle T(e_m, e_n) \rangle = \omega_{mn}{}^p - \omega_{nm}{}^p - c_{mn}{}^p ; \\ R^p{}_{qmn} &= e^p \langle R(e_m, e_n)e_q \rangle . \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

A partir de ces composantes, on définit des formes différentielles :

- la connection de spin (1-forme) : $\omega^m{}_n = \omega_{pn}{}^m e^p$;
- la torsion (2-forme) : $T^p = \frac{1}{2} T_{mn}{}^p e^m \wedge e^n$;
- la courbure (2-forme) : $R^p{}_q = \frac{1}{2} R^p{}_{qmn} e^m \wedge e^n$

⁽⁴⁾A partir de maintenant, les vielbeins inverses seront notés $e^m{}_\mu$, la place des indices plats et courbes venant faire la distinction en vielbeins et vielbeins inverses.

Ces formes différentielles vérifient les *équations de structure de Cartan* :

$$\begin{aligned} T^m &= de^m + \omega^m_n \wedge e^n ; \\ R^m_n &= d\omega^m_n + \omega^m_p \wedge \omega^p_n ; \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

ainsi que les *identités de Bianchi* :

$$\begin{aligned} dT^m + \omega^m_n \wedge T^n &= R^m_n \wedge e^n ; \\ dR^m_n + \omega^m_p \wedge R^p_n - R^m_p \wedge \omega^p_n &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.57})$$

Les composantes de la connection affine, de la torsion et de la courbure dans le système de coordonnées $\{x^\mu\}$ sont reliées aux composantes dans la base mobile par⁽⁵⁾ :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\sigma &= e_\mu^m e_\nu^n e_s^\sigma (\omega_{mn}^s - e_m(e_n^\rho) e_\rho^s) ; \\ T_{\mu\nu}^\sigma &= e_\mu^m e_\nu^n e_s^\sigma T_{mn}^s ; \\ R_{\sigma\mu\nu}^\rho &= e_\sigma^r e_\mu^s e_\nu^m e_n^n R_{smn}^r . \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

Sur une variété (pseudo)-Riemannienne, il existe une connection qui joue un rôle privilégié : la *connection de Levi-Civita*. Elle est définie par les deux conditions suivantes :

- compatibilité avec la métrique :

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_\mu} g &= 0 \quad i.e. \quad \eta_{mp} \omega^p_n = -\eta_{np} \omega^p_m \\ \text{ou encore} \quad \partial_\sigma g_{\mu\nu} - \Gamma_{\sigma\mu}^\rho g_{\rho\nu} - \Gamma_{\sigma\nu}^\rho g_{\mu\rho} &= 0 ; \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

- absence de torsion :

$$T = 0 \quad i.e. \quad c_{mn}^p = \omega_{mn}^p - \omega_{nm}^p \quad \text{ou encore} \quad \Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho . \quad (\text{A.60})$$

Ces relations permettent de calculer les composantes de la connection de spin et de la courbure à partir des vielbeins et de leurs dérivées :

$$\begin{aligned} \omega_{mnp} &= \frac{1}{2}(c_{mnp} - c_{npm} + c_{pmn}) \quad (\text{avec la propriété } \omega_{mnp} = -\omega_{mpn}) ; \\ R_{qmn}^p &= e_m(\omega_{nq}^p) - e_n(\omega_{mq}^p) + \omega_{mr}^p \omega_{nq}^r - \omega_{nr}^p \omega_{mq}^r \\ &\quad - (\omega_{mn}^r - \omega_{nm}^r) \omega_{rq}^p . \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

où l'on a posé $\omega_{mnp} = \omega_{mn}^q \eta_{qp}$ et $c_{mnp} = c_{mn}^q \eta_{qp}$.

⁽⁵⁾Les composantes de la connection affine dans la base des coordonnées sont traditionnellement notées $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$; elles sont définies comme en (A.55).

A.4.2 Connection affine et courbure dans un système de coordonnées

Dérivée covariante

On va donner dans cette section les expressions des quantités définies précédemment dans un système de coordonnées $\{x^\mu\}$. On ne s'intéresse ici qu'à la connection affine de Levi-Civita.

Les symboles de Christoffel s'expriment en fonction de la métrique courbe :

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\mu'}(\partial_\nu g_{\mu'\rho} + \partial_\rho g_{\nu\mu'} - \partial_{\mu'} g_{\nu\rho}). \quad (\text{A.62})$$

Sur cette expression explicite, on constate la propriété de symétrie des symboles de Christoffel : $\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \Gamma_{\rho\nu}^\mu$.

La dérivée covariante d'un tenseur d'ordre (q, p) est définie par⁽⁶⁾ :

$$\begin{aligned} D_\rho T^{\mu_1 \dots \mu_q}_{\nu_1 \dots \nu_p} &\equiv \partial_\rho T^{\mu_1 \dots \mu_q}_{\nu_1 \dots \nu_p} \\ &+ \sum_{i=1}^q \Gamma_{\rho\alpha}^{\mu_i} T^{\mu_1 \dots \overset{\alpha}{\mu_i} \dots \mu_q}_{\nu_1 \dots \nu_p} - \sum_{i=1}^p \Gamma_{\rho\nu_i}^\alpha T^{\mu_1 \dots \mu_q}_{\nu_1 \dots \overset{\alpha}{\nu_i} \dots \nu_p} \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

Ce sont les composantes d'un tenseur d'ordre $(q+1, p)$. Remarquons que la définition (A.62) de la connection affine implique que la dérivée covariante de la métrique est nulle :

$$D_\rho g_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.64})$$

Tenseur de Riemann

Le tenseur de Riemann est défini à partir du commutateur de deux dérivées covariantes :

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] T^{\mu_1 \dots \mu_q}_{\nu_1 \dots \nu_p} &= \sum_{i=1}^q R^{\mu_i}_{\mu'_i \mu \nu} T^{\mu_1 \dots \overset{\mu'_i}{\mu_i} \dots \mu_q}_{\nu_1 \dots \nu_p} \\ &- \sum_{i=1}^p R^{\nu'_i}_{\nu_i \mu \nu} T^{\mu_1 \dots \mu_q}_{\nu_1 \dots \overset{\nu'_i}{\nu_i} \dots \nu_p} \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

avec explicitement

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\mu - \partial_\sigma \Gamma_{\nu\rho}^\mu + \Gamma_{\rho\beta}^\mu \Gamma_{\sigma\nu}^\beta - \Gamma_{\sigma\beta}^\mu \Gamma_{\rho\nu}^\beta. \quad (\text{A.66})$$

⁽⁶⁾Les notations $\overset{\alpha}{\mu}, \underset{\alpha}{\mu}$ signifient que l'indice μ a été remplacé par l'indice α .

Le tenseur de Riemann–Christoffel possède des propriétés de symétrie remarquables. En effet :

$$R_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu_1} \partial_{\mu_4} g_{\mu_2 \mu_3} - \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_3} g_{\mu_2 \mu_4} - \partial_{\mu_2} \partial_{\mu_4} g_{\mu_1 \mu_3} + \partial_{\mu_2} \partial_{\mu_3} g_{\mu_1 \mu_4}) \\ + g_{\alpha\beta} (\Gamma_{\mu_1 \mu_4}^{\alpha} \Gamma_{\mu_2 \mu_3}^{\beta} - \Gamma_{\mu_1 \mu_3}^{\alpha} \Gamma_{\mu_2 \mu_4}^{\beta}), \quad (\text{A.67})$$

et il devient explicite que :

$$R_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} = -R_{\mu_2 \mu_1 \mu_3 \mu_4} = -R_{\mu_1 \mu_2 \mu_4 \mu_3} = R_{\mu_2 \mu_1 \mu_4 \mu_3} \quad (\text{A.68})$$

$$R_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} = R_{\mu_3 \mu_4 \mu_1 \mu_2} \quad (\text{A.69})$$

Le tenseur de Riemann-Christoffel est solution des deux identités de Bianchi:

$$R_{\mu\nu_1\nu_2\nu_3} + R_{\mu\nu_2\nu_3\nu_1} + R_{\mu\nu_3\nu_1\nu_2} = 0 ; \quad (\text{A.70}) \\ D_{\nu_1} R_{\mu_1\mu_2\nu_2\nu_3} + D_{\nu_2} R_{\mu_1\mu_2\nu_3\nu_1} + D_{\nu_3} R_{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2} = 0,$$

qui se démontrent sans difficulté dans le repère localement cartésien et s'étend par difféomorphisme à tout système de coordonnées.

Compte tenu des propriétés de symétrie (A.68)-(A.69) et de la première identité de Bianchi (A.70), on montre (*cf.* [111, p.232]) que le nombre de composantes indépendantes du tenseur de Riemann-Christoffel vaut⁽⁷⁾ :

$$N_m = \frac{1}{12} m^2 (m^2 - 1) \quad (\text{A.71})$$

où m est la dimension de la variété $\mathcal{M}$.

Tenseur de Ricci et courbure scalaire

Le tenseur de Ricci est défini comme :

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}. \quad (\text{A.72})$$

D'après (A.69), c'est un tenseur symétrique : $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$.

La courbure scalaire⁽⁸⁾ est la trace du tenseur de Ricci :

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (\text{A.73})$$

La seconde identité de Bianchi (A.70) devient, au niveau du tenseur de Ricci :

$$D_{\mu} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{R} \right) = 0, \quad (\text{A.74})$$

⁽⁷⁾Par exemple : $N_1 = 0$, $N_2 = 1$, $N_3 = 6$, $N_4 = 20$.

⁽⁸⁾Avec les conventions adoptées ici la courbure d'une sphère de rayon r dans $\mathbb{R}^3$ est positive et vaut $2/r^2$. La courbure de la sphère de rayon r à d dimensions (*i.e.* plongée dans $\mathbb{R}^{d+1}$) vaut $d(d-1)/r^2$.

qui n'est rien d'autre qu'une équation de conservation généralisée qui s'interprète en relativité générale, *via* les équations d'Einstein $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = 8\pi\mathcal{G}_\mathcal{N}T_{\mu\nu}$, comme la conservation du tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$.

Notons les propriétés de parité des différents tenseurs définis ci-dessus lorsqu'on change de signe la métrique :

$$g_{\mu\nu} \rightarrow -g_{\mu\nu} \\ R_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} \rightarrow -R_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}, \quad R^{\mu_1}_{\mu_2\mu_3\mu_4} \rightarrow R^{\mu_1}_{\mu_2\mu_3\mu_4}, \quad R_{\mu_1\mu_2} \rightarrow R_{\mu_1\mu_2}, \quad \mathcal{R} \rightarrow -\mathcal{R}. \quad (\text{A.75})$$

On trouvera dans le chapitre 2 des formules de réduction dimensionnelle de la courbure scalaire et des propriétés de comportement sous des changements d'échelle (*rescaling de Weyl*).

Action d'Einstein

Pour écrire des actions à partir de tenseurs, on a besoin de connaître leurs dimensions d'échelle. Si les coordonnées ont la dimension d'une longueur, alors :

$$[x^\mu] = L^1, \quad [g_{\mu\nu}] = L^0, \quad [\Gamma^\rho_{\mu\nu}] = L^{-1}, \quad [R_{\mu\nu\rho\sigma}] = [R_{\mu\nu}] = [\mathcal{R}] = L^{-2}. \quad (\text{A.76})$$

Les équations d'Einstein⁽⁹⁾ dans un espace à d dimensions :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = 8\pi\mathcal{G}_\mathcal{N}T_{\mu\nu} \quad (\text{A.77})$$

s'obtiennent à partir de l'action⁽¹⁰⁾ :

$$\mathcal{S} = \int d^d x \sqrt{\frac{\det g_{\mu\nu}}{\det \eta_{mn}}} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{16\pi\mathcal{G}_\mathcal{N}} \mathcal{R} \right) \quad (\text{A.78})$$

où ϕ est un champ de matière scalaire. La constante de Newton est une grandeur dimensionnée :

$$[\mathcal{G}_\mathcal{N}] = L^{d-2}. \quad (\text{A.79})$$

On définit la masse de Planck par la relation :

$$(M_P c^2)^{2-d} = 4\pi \mathcal{G}_\mathcal{N} \frac{(\hbar c)^{3-d}}{c^4}. \quad (\text{A.80})$$

Il est courant également d'introduire la grandeur κ définie par :

$$\kappa^2 = 4\pi \mathcal{G}_\mathcal{N} = M_P^{2-d}. \quad (\text{A.81})$$

⁽⁹⁾La normalisation des équations d'Einstein avec le facteur $8\pi\mathcal{G}_\mathcal{N}$ permet, à quatre dimensions avec la signature $(+1, -1, -1, -1)$ pour l'espace plat, de retrouver l'équation de Poisson $\Delta\phi = 4\pi\mathcal{G}_\mathcal{N}\rho$ (ϕ est le potentiel gravitationnel relié à l'accélération de la pesanteur par $\vec{g} = \nabla\phi$, et ρ est la densité de matière) pour un gaz de poussière en champ gravitationnel statique faible (limite Newtonienne : la pression est négligeable devant la densité de matière et $g_{00} = 1 + 2\phi$). Dans cette limite, la relativité générale est donc en accord avec la loi de gravitation de Newton définissant la force entre deux masses m_1 et m_2 par $\vec{F}_{1\rightarrow 2} = -\mathcal{G}_\mathcal{N} \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{r}_{12}$. Expérimentalement, la constante de Newton vaut $\mathcal{G}_\mathcal{N} = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2 \text{kg}^{-2}$.

⁽¹⁰⁾Rappelons les deux formules : $\delta\sqrt{|g|} = \frac{1}{2}\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$ et $\delta\sqrt{|g|}\mathcal{R} = -\sqrt{|g|}(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\mathcal{R})\delta g_{\mu\nu}$.

A.4.3 Dualité de Hodge

L'existence d'une métrique sur $\mathcal{M}$ permet d'identifier les p -formes avec les $(m - p)$ -formes (où m est la dimension de $\mathcal{M}$) grâce à la *dualité de Hodge*. Soit un système de coordonnées $\{x^\mu\}$. Définissons le symbole $\mathcal{E}$:

$$\sqrt{\frac{\det \eta_{mn}}{\det g_{\mu\nu}}} \mathcal{E}_{\mu_1 \dots \mu_m} = \begin{cases} +1 & \text{si la signature de } (\mu_1 \dots \mu_m) \text{ est paire,} \\ -1 & \text{si la signature de } (\mu_1 \dots \mu_m) \text{ est impaire.} \end{cases} \quad (\text{A.82})$$

Il est facile de voir que $\mathcal{E}_{\mu_1 \dots \mu_m}$ sont les composantes de la m -forme différentielle $\mathcal{E} = e^1 \wedge \dots \wedge e^m$ où $\{e^i\}$ est la base locale définie ci-dessus. Les indices du tenseur $\mathcal{E}$ montent et descendent avec la métrique; en particulier :

$$\mathcal{E}^{1\dots m} = \frac{1}{\det g_{\mu\nu}} \mathcal{E}_{1\dots m} = \sqrt{\frac{\det \eta_{mn}}{\det g_{\mu\nu}}} . \quad (\text{A.83})$$

On définit une opération $*$ sur l'espace de champs de formes différentielles :

$$\begin{aligned} * : \quad & \Omega^p(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^{m-p}(\mathcal{M}) \\ & \omega \mapsto *\omega \end{aligned} \quad (\text{A.84})$$

l'action de $*$ étant définie sur la base générée par les $\{dx^\mu\}$ selon la loi :

$$*(dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}) = \frac{1}{(m-p)!} \mathcal{E}^{\mu_1 \dots \mu_p}{}_{\mu_{p+1} \dots \mu_m} dx^{\mu_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_m} \quad (\text{A.85})$$

et on étend la définition par linéarité de sorte que les composantes de $*\omega_p$ sont données par :

$$(*\omega_p)_{\mu_{p+1} \dots \mu_m} = \frac{1}{p!} \omega_p{}_{\mu_1 \dots \mu_p} \mathcal{E}^{\mu_1 \dots \mu_p}{}_{\mu_{p+1} \dots \mu_m} . \quad (\text{A.86})$$

Pour passer d'un système d'unité à l'autre, on est souvent amené à faire un changement d'échelle dans la métrique : $g_{1\mu\nu} \rightarrow g_{2\mu\nu} = e^\Sigma g_{1\mu\nu}$. Sous une telle opération, l'action de l'opérateur de Hodge est modifiée :

$$*_1 \omega_p \rightarrow *_2 \omega_p = e^{\frac{d-2p}{2}\Sigma} *_1 \omega_p . \quad (\text{A.87})$$

Cette opération de dualité permet de définir un *produit intérieur* sur $\Omega(\mathcal{M})$:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \quad \begin{aligned} & \Omega^p(\mathcal{M}) \times \Omega^q(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^{p-q}(\mathcal{M}) \\ & \omega_p, \omega_q \mapsto \langle \omega_p, \omega_q \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.88})$$

avec, pour $p \geq q$,

$$\langle \omega_p, \omega_q \rangle = *((\omega_p) \wedge \omega_q) . \quad (\text{A.89})$$

En composantes, cette définition devient :

$$\langle \omega_p, \omega_q \rangle_{\mu_1 \dots \mu_{p-q}} = \frac{1}{q!} \det \eta (-1)^{p(m-p)+q(m-q)} \omega_{p \mu_1 \dots \mu_{p-q} \nu_1 \dots \nu_q} \omega_{q \nu'_1 \dots \nu'_q} g^{\nu_1 \nu'_1} \dots g^{\nu_q \nu'_q} . \quad (\text{A.90})$$

Sous un changement d'échelle de la métrique $g_{1\mu\nu} \rightarrow g_{2\mu\nu} = e^\Sigma g_{1\mu\nu}$, le produit intérieur est modifié par :

$$\langle \omega_p, \omega_q \rangle_1 \rightarrow \langle \omega_p, \omega_q \rangle_2 = e^{-q\Sigma} \langle \omega_p, \omega_q \rangle_1 . \quad (\text{A.91})$$

Deux produits intérieurs sont particulièrement intéressants à considérer :

- si $q = 0$ alors le produit intérieur se réduit à la double dualité de Hodge et de la relation (A.90), on déduit :

$$* * \omega_p = (-1)^{p(m-p)} \det \eta \omega_p . \quad (\text{A.92})$$

- si $p = q$, alors $\langle \omega_p, \omega'_p \rangle$ est une 0-forme et dans ce cas le produit intérieur a la propriété de commutativité suivante :

$$\langle \omega_p, \omega'_p \rangle = (-1)^{p(m-p)} \langle \omega'_p, \omega_p \rangle . \quad (\text{A.93})$$

Le produit intérieur permet de décomposer une p -forme selon une q -forme (pour $p \geq q$) :

$$\omega_p = \langle \omega_p, \omega_q \rangle \wedge \omega_q + \langle \omega_p \wedge \omega_q, \omega_q \rangle . \quad (\text{A.94})$$

La formule (A.92) sur la double dualité de Hodge permet de déterminer dans quelle dimension il existe des formes auto-duales c'est-à-dire que l'on peut identifier à leur forme duale. Nécessairement, l'espace-temps doit être de dimension paire $d = 2p$ et la condition $*\omega_p = \alpha \omega_p$ où α est un nombre réel *a priori* quelconque n'a de sens que si elle est involutive ce qui impose $(-1)^{d/2} \det \eta = 1$ *i.e.* :

$$s - t \equiv 0 [4] , \quad (\text{A.95})$$

le coefficient de proportionnalité α ne pouvant alors valoir que $+1$ (forme auto-duale) ou -1 (forme anti-auto-duale). Notons que dans l'espace Minkowskien à quatre dimensions habituel, il n'existe pas de forme (anti)-auto-duale. Par contre dans un espace Euclidien à quatre dimensions, de telles formes existent et permettent de construire des solutions solitoniques des équations de Yang-Mills (*cf.* par exemple [245, chap.5] pour une présentation pédagogique ou les deux papiers originaux de Belavin, Polyakov, Shvarts et Tyupkin [58] et 't Hooft [59]).

Construction de lagrangien à partir de formes différentielles

Un lagrangien invariant par reparamétrisation sera donné par : $\mathcal{S} = \int d^m x \sqrt{|g|}$ *scalaire*. Deux scalaires peuvent être formés avec des formes différentielles :

- à partir d'une p -forme différentielle ω_p :

$$\star(\star\omega_p \wedge \omega_p) = \frac{1}{p!} \det \eta \, \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \omega^{\mu_1 \dots \mu_p} . \quad (\text{A.96})$$

Ce scalaire permet d'écrire un terme cinétique pour la p -forme.

- à partir d'une collection de formes $\omega_{p_1}, \dots, \omega_{p_n}$ telle que $p_1 + \dots + p_n = m$:

$$\star(\omega_{p_1} \wedge \dots \wedge \omega_{p_n}) = \frac{1}{p_1! \dots p_n!} \frac{1}{\sqrt{|g|}} \underbrace{\epsilon^{\mu_1 \dots \mu_m}}_{\epsilon^{0 \dots m-1}=1} \omega_{\mu_1 \dots \mu_{p_1}} \dots \omega_{\mu_{m-p_n+1} \dots \mu_m} . \quad (\text{A.97})$$

Ce scalaire permet de construire des termes d'interaction de Chern–Simons.

Appendice B

Variétés complexes. Structure Kählerienne

B.1 Variétés complexes. Structure presque complexe.

Une *variété complexe* $\mathcal{M}$ de dimension $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M} = m$ est une variété réelle de dimension $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M} = 2m$ telle que les changements de coordonnées soient des fonctions holomorphes *i.e.* vérifient les relations de Cauchy-Riemann : si $\{x^\mu, y^\mu\}_{\mu=1\dots m}$ et $\{\tilde{x}^\mu, \tilde{y}^\mu\}_{\mu=1\dots m}$ sont des systèmes de coordonnées

$$\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial \tilde{y}^\mu}{\partial y^\nu} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{y}^\mu}{\partial x^\nu} = -\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial y^\nu} . \quad (\text{B.1})$$

Si $\{x^\mu, y^\mu\}_{\mu=1\dots m}$ sont des coordonnées sur la variété complexe $\mathcal{M}$ (avec $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M} = m$) alors une base de l'espace tangent à $\mathcal{M}$ au point M est :

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}, \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^m} . \quad (\text{B.2})$$

Le champ de tenseurs de rang $(1,1)$ défini par :

$$\mathcal{J}_{|M} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial y^\mu} \quad \text{et} \quad \mathcal{J}_{|M} \frac{\partial}{\partial y^\mu} = -\frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (\text{B.3})$$

correspond à la multiplication par i ; il définit la *structure presque complexe* de $\mathcal{M}$. Il vérifie :

$$\mathcal{J}_{|M}^2 = -\mathbf{1}_{|M} . \quad (\text{B.4})$$

Il est commode d'introduire les coordonnées complexes z^μ :

$$\begin{aligned} z^\mu &= x^\mu + iy^\mu & \bar{z}^\mu &= x^\mu - iy^\mu ; \\ dz^\mu &= dx^\mu + idy^\mu & d\bar{z}^\mu &= dx^\mu - idy^\mu ; \\ \partial_\mu &= \frac{\partial}{\partial z^\mu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - i \frac{\partial}{\partial y^\mu} \right) & \bar{\partial}_\mu &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + i \frac{\partial}{\partial y^\mu} \right) . \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Les vecteurs $\{\partial_\mu, \bar{\partial}_\mu\}_{\mu=1\dots m}$ forment une base de $\mathcal{T}_M\mathcal{M}^\mathbb{C}$, complexifié de l'espace tangent à $\mathcal{M}$ au point M ($\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension complexe $2m$). Les 1-formes $\{dz^\mu, d\bar{z}^\mu\}$ forment la base duale de $\mathcal{T}_M^*\mathcal{M}^\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} dz^\mu \langle \bar{\partial}_\nu \rangle &= d\bar{z}^\mu \langle \partial_\nu \rangle = 0 ; \\ dz^\mu \langle \partial_\nu \rangle &= d\bar{z}^\mu \langle \bar{\partial}_\nu \rangle = \delta^\mu_\nu . \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

L'action de $\mathcal{J}$ peut être étendue à $\mathcal{T}_M\mathcal{M}^\mathbb{C}$ et dans la base $\{\partial_\mu, \bar{\partial}_\mu\}$ on obtient :

$$\mathcal{J}_{|M}\partial_\mu = i\partial_\mu \quad \text{et} \quad \mathcal{J}_{|M}\bar{\partial}_\mu = -i\bar{\partial}_\mu . \quad (\text{B.7})$$

Grâce à l'action de $\mathcal{J}$, le complexifié $\mathcal{T}_M\mathcal{M}^\mathbb{C}$ peut être décomposé en somme directe de deux espaces de vecteurs holomorphes et antiholomorphes :

$$\mathcal{T}_M\mathcal{M}^\mathbb{C} = \mathcal{T}_M\mathcal{M}^+ \oplus \mathcal{T}_M\mathcal{M}^- \quad (\text{B.8})$$

avec

$$\mathcal{T}_M\mathcal{M}^+ = \left\{ V \in \mathcal{T}_M\mathcal{M}^\mathbb{C} \mid \mathcal{J}_{|M}V = \pm iV \right\} . \quad (\text{B.9})$$

Cette décomposition a la propriété d'être compatible avec la structure de Lie de $\mathcal{T}_M\mathcal{M}^\mathbb{C}$:

$$[\mathcal{T}_M\mathcal{M}^+, \mathcal{T}_M\mathcal{M}^+] \in \mathcal{T}_M\mathcal{M}^+ \quad \text{et} \quad [\mathcal{T}_M\mathcal{M}^-, \mathcal{T}_M\mathcal{M}^-] \in \mathcal{T}_M\mathcal{M}^- . \quad (\text{B.10})$$

L'ensemble des p -formes différentielles complexes est défini par :

$$\Omega^p(\mathcal{M})^\mathbb{C} = \Omega^p(\mathcal{M}) + i\Omega^p(\mathcal{M}) . \quad (\text{B.11})$$

C'est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $\dim_{\mathbb{R}} \Omega^p(\mathcal{M})^\mathbb{C} = C_{2m}^p$. La décomposition d'une p -forme sur la base $\{dz^\mu, d\bar{z}^\mu\}$ s'écrit :

$$\omega = \sum_{r+s=p} \frac{1}{r!s!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r \bar{\nu}_1 \dots \bar{\nu}_s} \underbrace{dz^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dz^{\mu_r} \wedge d\bar{z}^{\bar{\nu}_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{\bar{\nu}_s}}_{q\text{-forme de bidegré } (r,s)} . \quad (\text{B.12})$$

B.2 Variétés Hermitiennes

Si g est une métrique (pseudo)-Riemannienne sur $\mathcal{M}$ variété complexe (vue comme variété réelle). On étend g à $\mathcal{T}_M\mathcal{M}^\mathbb{C}$ par la relation :

$$\begin{aligned} \forall V_1, V_2, W_1, W_2 \in \mathcal{T}_M\mathcal{M} \quad g_{|M}(V_1 + iW_1, V_2 + iW_2) = \\ g_{|M}(V_1, V_2) - g_{|M}(W_1, W_2) + i(g_{|M}(V_1, iW_2) + g_{|M}(W_1, V_2)) . \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Dans la base $\{\partial_\mu, \bar{\partial}_\mu\}$, on définit les composantes de g par :

$$g_{\mu\nu} = g(\partial_\mu, \partial_\nu), \quad g_{\mu\bar{\nu}} = g(\partial_\mu, \bar{\partial}_\nu), \quad g_{\bar{\mu}\nu} = g(\bar{\partial}_\mu, \partial_\nu), \quad g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = g(\bar{\partial}_\mu, \bar{\partial}_\nu) . \quad (\text{B.14})$$

Ces composantes vérifient les propriétés de symétrie :

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}, g_{\mu\bar{\nu}} = g_{\bar{\nu}\mu}, g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = g_{\bar{\nu}\bar{\mu}} ; \quad (\text{B.15})$$

ainsi que les propriétés de réalité :

$$\overline{g_{\mu\nu}} = g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}, \overline{g_{\mu\bar{\nu}}} = g_{\bar{\mu}\nu} . \quad (\text{B.16})$$

La métrique est dite *Hermitienne* si elle est compatible avec la structure presque complexe $\mathcal{J}$ associée à la variété $\mathcal{M}$:

$$\forall V_1, V_2 \in \mathcal{T}_M \mathcal{M} \quad g_{|M}(\mathcal{J}_{|M} V_1, \mathcal{J}_{|M} V_2) = g_{|M}(V_1, V_2) . \quad (\text{B.17})$$

A partir de toute métrique g sur la variété complexe $\mathcal{M}$, on construit une métrique Hermitienne $\hat{g}$ par :

$$\hat{g}_{|M}(V_1, V_2) = \frac{1}{2} \left(g_{|M}(V_1, V_2) + g_{|M}(\mathcal{J}_{|M} V_1, \mathcal{J}_{|M} V_2) \right) . \quad (\text{B.18})$$

Dans la base $\{dz^\mu, d\bar{z}^{\bar{\mu}}\}$, le développement d'une métrique hermitienne est donné par :

$$g = g_{\mu\bar{\nu}} dz^\mu \otimes d\bar{z}^{\bar{\nu}} + g_{\bar{\mu}\nu} d\bar{z}^{\bar{\mu}} \otimes dz^\nu . \quad (\text{B.19})$$

A une métrique Hermitienne g est associée une 2-forme définie par :

$$\Phi_{|M}(V_1, V_2) = g_{|M}(\mathcal{J}_{|M} V_1, V_2), \quad (\text{B.20})$$

la propriété d'hermiticité de g assurant l'antisymétrie de Φ . Φ est la 2-forme de Kähler associée à g . Dans la base $\{dz^\mu, d\bar{z}^{\bar{\mu}}\}$, Φ se développe selon :

$$\Phi = i g_{\mu\bar{\nu}} dz^\mu \wedge d\bar{z}^{\bar{\nu}} . \quad (\text{B.21})$$

La *connection affine Hermitienne* est définie par⁽¹⁾ :

- sa compatibilité avec la structure presque complexe $\mathcal{J}$:

$$\nabla_{\partial_\mu} \mathcal{J} = \nabla_{\bar{\partial}_{\bar{\mu}}} \mathcal{J} = 0 \text{ i.e. } \begin{cases} \Gamma_{\mu\nu}^{\bar{\sigma}} = \Gamma_{\bar{\mu}\nu}^{\bar{\sigma}} = \Gamma_{\mu\bar{\nu}}^{\bar{\sigma}} = 0 ; \\ \Gamma_{\bar{\mu}\nu}^{\sigma} = \Gamma_{\mu\bar{\nu}}^{\sigma} = \Gamma_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{\sigma} = 0 . \end{cases} \quad (\text{B.22})$$

- sa compatibilité avec la métrique hermitienne g :

$$\nabla_{\partial_\mu} g = \nabla_{\bar{\partial}_{\bar{\mu}}} g = 0 \text{ i.e. } \begin{cases} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = g^{\bar{\rho}\sigma} \partial_\mu g_{\nu\bar{\rho}} ; \\ \Gamma_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{\bar{\sigma}} = g^{\bar{\rho}\sigma} \partial_{\bar{\mu}} g_{\rho\bar{\nu}} . \end{cases} \quad (\text{B.23})$$

La compatibilité (B.22) de la connection affine avec la structure presque complexe assure que bon nombre des composantes de cette connection sont nulles. Cela simplifie grandement le calcul de la torsion et de la courbure. Dans la base $\{\partial_\mu, \bar{\partial}_{\bar{\mu}}\}$, les seules composantes non nulles sont :

⁽¹⁾Par définition d'une métrique, $g_{\mu\bar{\nu}}$ est une matrice $m \times m$ régulière. Son inverse sera notée $g^{\bar{\mu}\nu}$: $g^{\bar{\mu}\nu} g_{\nu\bar{\sigma}} = \delta_{\bar{\sigma}}^{\bar{\mu}}$ et $g_{\sigma\bar{\mu}} g^{\bar{\mu}\nu} = \delta_{\sigma}^{\nu}$. Puisque $g_{\mu\bar{\nu}} = g_{\bar{\nu}\mu}$, on posera $g^{\mu\bar{\nu}} = g^{\bar{\nu}\mu}$.

- pour la torsion :

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}{}^{\sigma} &= \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} ; \\ T_{\bar{\mu}\bar{\nu}}{}^{\bar{\sigma}} &= \Gamma_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{\bar{\sigma}} - \Gamma_{\bar{\nu}\bar{\mu}}^{\bar{\sigma}} . \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

- pour la courbure :

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\bar{\rho}\sigma} &= -R_{\mu\nu\sigma\bar{\rho}} = \bar{\partial}_{\bar{\rho}}\Gamma_{\sigma\nu}^{\mu} ; \\ R_{\bar{\mu}\bar{\nu}\rho\bar{\sigma}} &= -R_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\sigma}\rho} = \partial_{\rho}\Gamma_{\bar{\sigma}\bar{\nu}}^{\bar{\mu}} . \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

D'où les propriétés de symétrie :

$$R_{\bar{\mu}\nu\bar{\rho}\sigma} = -R_{\bar{\mu}\nu\sigma\bar{\rho}} = -R_{\nu\bar{\mu}\bar{\rho}\sigma} = R_{\nu\bar{\mu}\sigma\bar{\rho}} \quad (\text{B.26})$$

B.3 Variétés Kähleriennes.

Une *variété Kählerienne* est telle que sa structure Riemannienne s'identifie à sa structure Hermitienne c'est-à-dire que sa connection affine de Levi-Civita est confondue avec sa connection affine Hermitienne. On montre (*cf.* [111, p.287]) qu'une variété complexe est Kählerienne *ssi* la 2-forme de Kähler associée à la métrique Hermitienne est fermée :

$$d\Phi = 0 \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} \partial_{\sigma}g_{\mu\bar{\nu}} = \partial_{\mu}g_{\sigma\bar{\nu}} ; \\ \partial_{\bar{\sigma}}g_{\mu\bar{\nu}} = \partial_{\bar{\nu}}g_{\mu\bar{\sigma}} . \end{cases} \quad (\text{B.27})$$

Ces conditions assurent que localement la métrique dérive d'une fonction, $\mathcal{K}$, appelée *potentiel de Kähler* :

$$g_{\mu\bar{\nu}} = \partial_{\mu}\bar{\partial}_{\bar{\nu}}\mathcal{K} . \quad (\text{B.28})$$

Remarquons que la métrique est laissée invariante par toute transformation de Kähler :

$$\mathcal{K}(z, \bar{z}) \rightarrow \mathcal{K}(z, \bar{z}) + f(z) + g(\bar{z}) . \quad (\text{B.29})$$

Compte tenu des contraintes (B.27), les composantes de la torsion et de la courbure se simplifient encore par rapport au cas simplement Hermitien :

- la torsion s'annule (ce qui est bien compatible avec la structure Riemannienne de la connection affine de Levi-Civita);
- le tenseur de Riemann possède une symétrie supplémentaire :

$$R^{\mu}{}_{\nu\rho\bar{\sigma}} = R^{\mu}{}_{\rho\nu\bar{\sigma}}, \quad R^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\nu}\bar{\rho}\sigma} = R^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\rho}\bar{\nu}\sigma} . \quad (\text{B.30})$$

Les seules composantes du tenseur de Ricci non nulles valent :

$$R_{\mu\bar{\nu}} = R_{\bar{\nu}\mu} = R^{\sigma}{}_{\mu\sigma\bar{\nu}} = -\partial_{\mu}\bar{\partial}_{\bar{\nu}} \ln \det g_{\rho\bar{\sigma}} . \quad (\text{B.31})$$

Un espace de *Calabi-Yau* est une variété complexe de dimension $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M} = m$ dont le tenseur de Ricci s'annule. Des théorèmes difficiles montrent [133–135, 138] que cette caractérisation est équivalente à la propriété que le groupe d'holonomie de $\mathcal{M}$ est $SU(m) \subset O(2m)$ ou que la première classe de Chern de $\mathcal{M}$ s'annule.

Les *variétés de Kähler spéciales* sont des variétés de Kähler pour lesquelles le potentiel de Kähler s'obtient à partir d'une seule fonction holomorphe, $\mathcal{F}(z)$, le *prépotentiel* :

$$\mathcal{K}(z, \bar{z}) = -\ln \left(2(\mathcal{F}(z) + \bar{\mathcal{F}}(\bar{z})) - (z^i - \bar{z}^{\bar{i}})(\partial_i \mathcal{F}(z) - \bar{\partial}_{\bar{i}} \bar{\mathcal{F}}(\bar{z})) \right). \quad (\text{B.32})$$

L'espace des modules de certaines compactifications de cordes a une structure de Kähler spéciale.

Appendice C

Propriétés des matrices de Dirac et des spineurs en diverses dimensions. Multiplets de supersymétrie

Le but de cet appendice est de donner quelques conventions relatives au calcul spinoriel où tout est souvent affaire de signes et de facteurs de combinatoire. Il convient en particulier de préciser les places des indices.

On donnera la définition des matrices de conjugaison complexe et de conjugaison de charge. On étudiera plus en détail la base des produits totalement antisymétriques de matrices de Dirac, en particulier leur propriétés de symétrie sous la transposition.

Dans les calculs explicites de supersymétrie, on a très souvent besoin de changer de base *i.e.* de réarranger les indices spinoriels (réarrangements de Fierz) ; une formule générale, inédite et fort utile, fonction de la signature de l'espace-temps, sera présentée.

Cet appendice se veut plus un recueil de formules qu'une étude *stricto sensu* des matrices de Dirac. Le lecteur intéressé est renvoyé aux articles de Gliozzi, Olive et Scherk [16, 108] où sont calculées les propriétés de symétrie des produits de matrices de Dirac suivant une méthode proposée par Pauli, Case et Pais [246–248] ; l'article de Kugo et Townsend [249] où sont définies les conditions de Majorana, symplectique–Majorana et $SU(2)$ –Majorana ; l'article [250] où figurent bon nombre de réarrangements de Fierz concernant la supergravité à onze dimensions et enfin les articles de Wetterich [251–253] où sont étudiées les propriétés de décomposition des spineurs par réduction dimensionnelle.

Dans la dernière section sont présentés les principaux multiplets de supersymétrie. Les représentations de l'algèbre de supersymétrie ont été construites par Nahm [254], Strathdee [255], Ferrara, Savoy et Zumino [256, 257]. Signalons deux revues récentes [25, 258] qui décrivent en détail ces constructions.

C.1 Notations

On s'intéresse aux matrices de Dirac sur l'espace $\mathbb{E}^{(t,s)}$ c'est-à-dire l'espace plat de signature (t,s) correspondant à la métrique $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, \dots, +1, -1, \dots, -1)$ avec t fois le signe $+$ et s fois le signe $-$. Les matrices de Dirac sont des matrices unitaires $\{\Gamma_\mu\}_{\mu=0\dots t+s-1}$ vérifiant l'algèbre de Clifford :

$$\{\Gamma_\mu, \Gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu} . \quad (\text{C.1})$$

Les composantes d'un spineur Ψ seront naturellement notées : Ψ^α . Les matrices de Dirac et leurs produits agissant sur des spineurs seront donc notés : $(\Gamma^{(n)\mu_1\dots\mu_n})^\alpha{}_\beta$; et leurs transposées : $(\Gamma^{(n)\mu_1\dots\mu_n})^\alpha{}_\beta$. La matrice de conjugaison de charge et son inverse : $\mathcal{C}_{\alpha\beta}$ et $(\mathcal{C}^{-1})^{\alpha\beta}$. On utilisera $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}^{-1}$ pour descendre et monter les indices spinoriels :

$$\begin{aligned} (\Gamma^{(n)\mu_1\dots\mu_n})^{\alpha\beta} &\equiv (\Gamma^{(n)\mu_1\dots\mu_n}\mathcal{C}^{-1})^{\alpha\beta} = (\Gamma^{(n)\mu_1\dots\mu_n})^\alpha{}_{\alpha'}(\mathcal{C}^{-1})^{\alpha'\beta} ; \\ (\Gamma^{(n)\mu_1\dots\mu_n})_{\alpha\beta} &\equiv (\mathcal{C}\Gamma^{(n)\mu_1\dots\mu_n})_{\alpha\beta} = \mathcal{C}_{\alpha\alpha'}(\Gamma^{(n)\mu_1\dots\mu_n})^{\alpha'}{}_\beta ; \\ \Psi_\alpha &\equiv (\mathcal{C}\Psi)_\alpha = \mathcal{C}_{\alpha\beta}\Psi^\beta \quad i.e. \quad \Psi^\alpha = (\mathcal{C}^{-1})^{\alpha\beta}\Psi_\beta . \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Les composantes du spineur adjoint associé à Ψ , $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \Gamma^0$, seront naturellement notées : $\bar{\Psi}_\alpha$. On définira :

$$\bar{\Psi}^\alpha \equiv (\bar{\Psi}\mathcal{C}^{-1})^\alpha = \bar{\Psi}_\beta(\mathcal{C}^{-1})^{\beta\alpha} \quad i.e. \quad \bar{\Psi}_\alpha = \bar{\Psi}^\beta\mathcal{C}_{\beta\alpha} . \quad (\text{C.3})$$

Si Ψ_1 et Ψ_2 sont deux spineurs et M une matrice, on définira le produit $\bar{\Psi}_1 M \Psi_2$ par :

$$\bar{\Psi}_1 M \Psi_2 \equiv (\bar{\Psi}_1)_\alpha M^\alpha{}_\beta (\Psi_2)^\beta = (\bar{\Psi}_1)_\alpha M^{\alpha\beta} (\Psi_2)_\beta = (\bar{\Psi}_1)^\alpha M_{\alpha\beta} (\Psi_2)^\beta = (\bar{\Psi}_1)^\alpha M_{\alpha}{}^\beta (\Psi_2)_\beta . \quad (\text{C.4})$$

C.2 Matrices d'adjonction, de conjugaison complexe et de conjugaison de charge

Les matrices d'adjonction, de conjugaison complexe et de conjugaison de charge sont reliées aux trois opérations de base que l'on peut réaliser sur les matrices :

- la matrice d'adjonction est la matrice unitaire définie par :

$$\mathcal{T} = (-1)^{t(t-1)/2} \mathcal{T}^{-1} = (-1)^{t(t-1)/2} \mathcal{T}^\dagger \equiv \Gamma^0 \dots \Gamma^{t-1} . \quad (\text{C.5})$$

L'unitarité des matrices de Dirac se traduisant alors par la relation :

$$\Gamma^{\mu\dagger} = (-1)^{t-1} \mathcal{T} \Gamma^\mu \mathcal{T}^{-1} . \quad (\text{C.6})$$

- les matrices de conjugaison complexe positive et négative $\mathcal{B}_+$ et $\mathcal{B}_-$, lorsqu'elles existent, sont définies par :

$$\Gamma^{\mu*} \equiv \pm \mathcal{B}_\pm \Gamma^\mu \mathcal{B}_\pm^{-1} . \quad (\text{C.7})$$

On montre qu'il existe des nombres réels $b_{\pm}$, indépendants de la représentation des matrices de Dirac choisie, tels que

$$\mathcal{B}_{\pm}^* \mathcal{B}_{\pm} \equiv b_{\pm} \mathbf{1} . \quad (\text{C.8})$$

On normalise les matrices $\mathcal{B}_{\pm}$ telles que $b_{\pm} = +1$ ou -1 . $\mathcal{B}_{\pm}$ sont alors unitaires et la relation (C.8) implique la propriété de symétrie :

$$\mathcal{B}_{\pm}^t = b_{\pm} \mathcal{B}_{\pm} . \quad (\text{C.9})$$

En dimension paire, on montre que les deux matrices $\mathcal{B}_{+}$ et $\mathcal{B}_{-}$ coexistent, on peut alors toujours les choisir telles que :

$$\mathcal{B}_{-} = \mathcal{B}_{+} \tilde{\Gamma} . \quad (\text{C.10})$$

Par contre en dimension impaire, $\mathcal{B}_{+}$ n'existe que pour $s - t \equiv 3[4]$ et $\mathcal{B}_{-}$ n'existe que pour $s - t \equiv 1[4]$. Ceci signifie que si en dimension paire, toutes les représentations des matrices de Dirac sont équivalentes (*i.e.* reliées par une transformation unitaire), par contre en dimension impaire ce n'est plus le cas.

- les matrices de conjugaison de charge positive et négative, $\mathcal{C}_{+}$ et $\mathcal{C}_{-}$, lorsqu'elles existent, sont définies par :

$$\mathcal{C}_{\pm} \equiv \mathcal{B}_{\pm}^t \mathcal{T} . \quad (\text{C.11})$$

Le choix de normalisation de $\mathcal{B}_{\pm}$ assurent que $\mathcal{C}_{\pm}$ sont des matrices unitaires. Les matrices de Dirac vérifient :

$$\Gamma^{\mu t} = \pm (-1)^{t-1} \mathcal{C}_{\pm} \Gamma^{\mu} \mathcal{C}_{\pm}^{-1} . \quad (\text{C.12})$$

On montre que :

$$\mathcal{C}_{\pm}^t = c_{\pm} \mathcal{C}_{\pm} \quad \text{avec} \quad c_{\pm} = (\pm 1)^t (-1)^{t(t-1)/2} b_{\pm} . \quad (\text{C.13})$$

Comme pour les matrices $\mathcal{B}_{\pm}$, en dimension paire les deux matrices $\mathcal{C}_{+}$ et $\mathcal{C}_{-}$ coexistent⁽¹⁾, et si on a choisi $\mathcal{B}_{\pm}$ telles que (C.10), alors $\mathcal{C}_{-} = (-1)^{st+(s-t)/2} \mathcal{C}_{+} \tilde{\Gamma}$. Par contre, en dimension impaire, $\mathcal{C}_{+}$ n'existe que pour $s - t \equiv 3[4]$ et $\mathcal{C}_{-}$ n'existe que pour $s - t \equiv 1[4]$.

Mentionnons l'action de $\mathcal{B}_{\pm}$ et $\mathcal{C}_{\pm}$ sur $\mathcal{T}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^* &= (\pm 1)^t \mathcal{B}_{\pm} \mathcal{T} \mathcal{B}_{\pm}^{-1} ; \\ \mathcal{T}^t &= (\pm 1)^t (-1)^{t(t-1)/2} \mathcal{C}_{\pm} \mathcal{T} \mathcal{C}_{\pm}^{-1} . \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

⁽¹⁾Dans les conventions relatives à la place des indices, il convient de spécifier quelle matrice de conjugaison de charge on utilise pour monter et descendre les indices spinoriels. On choisit en général $\mathcal{C}_{-}$ car ce choix permet d'obtenir des résultats simples en présence de spineurs de Majorana (*cf.* ci-après).

En dimension paire, il existe une matrice unitaire de carré unité anticommutable avec toutes les matrices de Dirac : c'est la matrice de chiralité $\tilde{\Gamma}$. Elle vaut :

$$\tilde{\Gamma} \equiv \chi \Gamma^0 \dots \Gamma^{t+s-1} \quad \text{où } \chi = \begin{cases} 1 & \text{si } s-t \equiv 0[4] \\ i & \text{si } s-t \equiv 2[4] \end{cases} \quad \text{donc } \chi^2 = (-1)^{(s-t)/2}. \quad (\text{C.15})$$

Elle vérifie bien :

$$\{\Gamma^\mu, \tilde{\Gamma}\} = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{\Gamma}^2 = \mathbf{1}. \quad (\text{C.16})$$

Les actions des matrices $\mathcal{T}$, $\mathcal{B}_\pm$ et $\mathcal{C}_\pm$ sur la matrice de chiralité sont données par :

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma} \mathcal{T} &= (-1)^{st} \mathcal{T} \tilde{\Gamma}; \\ \tilde{\Gamma}^\star &= (-1)^{(s-t)/2} \mathcal{B}_\pm \tilde{\Gamma} \mathcal{B}_\pm^{-1}; \\ \tilde{\Gamma}^t &= (-1)^{(s+t)/2} \mathcal{C}_\pm \tilde{\Gamma} \mathcal{C}_\pm^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

C.3 Propriétés de symétrie

En dimension paire, une représentation des matrices de Dirac se construit à partir de produits tensoriels de matrices de Pauli. Et les matrices de Dirac en dimension impaire s'obtiennent à partir de celles en dimension paire juste inférieure et de la matrice de chiralité. Finalement, les matrices de Dirac de $\mathbb{E}^{(t,s)}$ sont des matrices $2^{[(t+s)/2]} \times 2^{[(t+s)/2]}$ (où $[x]$ désigne la partie entière de x). On montre les propriétés de symétrie⁽²⁾ :

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}_\pm \Gamma^{(n)}_{\mu_1 \dots \mu_n})^t &= (\pm 1)^n (-1)^{n(n+2t-3)/2} c_\pm \mathcal{C}_\pm \Gamma^{(n)}_{\mu_1 \dots \mu_n}; \\ (\Gamma^{(n)}_{\mu_1 \dots \mu_n} \mathcal{C}_\pm^{-1})^t &= (\pm 1)^n (-1)^{n(n+2t-3)/2} c_\pm \Gamma^{(n)}_{\mu_1 \dots \mu_n} \mathcal{C}_\pm^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Le calcul du nombre de matrices symétriques/antisymétriques implique alors que :

$$c_\pm = \sqrt{2} \cos \pi(d \pm (-1)^t)/4 \quad (\text{C.19})$$

où $d = s + t$ est la dimension de l'espace-temps et donc du même coup :

$$b_\pm = \cos \pi(s - t)/4 \mp \sin \pi(s - t)/4 \quad (\text{C.20})$$

Les valeurs de ces coefficients ainsi que les propriétés de symétrie des produits $\Gamma^{(n)}_{\mu_1 \dots \mu_n}$ sont données dans les tables C.1 et C.2.

En dimension impaire, les $(t + s + 1)$ matrices de Dirac de $\mathbb{E}^{(t+1,s)}$ sont obtenues en rajoutant $\Gamma^{t+s} = \pm \tilde{\Gamma}$ aux $(t + s)$ matrices de Dirac de $\mathbb{E}^{(t,s)}$; tandis que pour $\mathbb{E}^{(t,s+1)}$, $\Gamma^{t+s} = \pm i \tilde{\Gamma}$. L'analogue en dimension impaire de la relation (C.15) définissant la matrice de chiralité est l'identité :

$$\chi \Gamma^0 \dots \Gamma^{t+s-1} = \mathbf{1} \quad \text{où } \chi = \begin{cases} 1 & \text{si } s-t \equiv 3[4] \\ i & \text{si } s-t \equiv 1[4] \end{cases} \quad (\text{C.21})$$

⁽²⁾Avec les conventions adoptées où les indices spinoriels montent et descendent avec $\mathcal{C}_+$ ou $\mathcal{C}_-$, les propriétés de symétrie des produits $\mathcal{C}_\pm \Gamma^{(n)}$ se lisent aussi : $(\Gamma^{(n)}_{\mu_1 \dots \mu_n})_\alpha^\beta = (\pm 1)^n (-1)^{n(n+2t-3)/2} (\Gamma^{(n)}_{\mu_1 \dots \mu_n})^\beta_\alpha$.

$s - t \equiv [8]$	0	1	2	3
valeur de b_+	+1	○	-1	-1
valeur de b_-	+1	+1	+1	○
valeur de c_+	$(-1)^{t(t-1)/2}$ +1 $t \equiv 0, 1 [4]$ -1 $t \equiv 2, 3 [4]$	○	$(-1)^{t(t-1)/2}$ +1 $t \equiv 2, 3 [4]$ -1 $t \equiv 0, 1 [4]$	$(-1)^{t(t-1)/2}$ +1 $t \equiv 2, 3 [4]$ -1 $t \equiv 0, 1 [4]$
valeur de c_-	$(-1)^{t(t+1)/2}$ +1 $t \equiv 0, 3 [4]$ -1 $t \equiv 1, 2 [4]$	$(-1)^{t(t+1)/2}$ +1 $t \equiv 0, 3 [4]$ -1 $t \equiv 1, 2 [4]$	$(-1)^{t(t+1)/2}$ +1 $t \equiv 0, 3 [4]$ -1 $t \equiv 1, 2 [4]$	○
symétrie de $C_+ \Gamma^{(n)}$	$t \equiv 0 [4]$ +1 $n \equiv 0, 3 [4]$ -1 $n \equiv 1, 2 [4]$ $t \equiv 1 [4]$ +1 $n \equiv 0, 1 [4]$ -1 $n \equiv 2, 3 [4]$ $t \equiv 2 [4]$ +1 $n \equiv 1, 2 [4]$ -1 $n \equiv 0, 3 [4]$ $t \equiv 3 [4]$ +1 $n \equiv 2, 3 [4]$ -1 $n \equiv 0, 1 [4]$	○	$t \equiv 0 [4]$ +1 $n \equiv 1, 2 [4]$ -1 $n \equiv 0, 3 [4]$ $t \equiv 1 [4]$ +1 $n \equiv 2, 3 [4]$ -1 $n \equiv 0, 1 [4]$ $t \equiv 2 [4]$ +1 $n \equiv 0, 3 [4]$ -1 $n \equiv 1, 2 [4]$ $t \equiv 3 [4]$ +1 $n \equiv 0, 1 [4]$ -1 $n \equiv 2, 3 [4]$	$t \equiv 0 [4]$ +1 $n \equiv 1, 2 [4]$ -1 $n \equiv 0, 3 [4]$ $t \equiv 1 [4]$ +1 $n \equiv 2, 3 [4]$ -1 $n \equiv 0, 1 [4]$ $t \equiv 2 [4]$ +1 $n \equiv 0, 3 [4]$ -1 $n \equiv 1, 2 [4]$ $t \equiv 3 [4]$ +1 $n \equiv 0, 1 [4]$ -1 $n \equiv 2, 3 [4]$
symétrie de $C_- \Gamma^{(n)}$	$t \equiv 0 [4]$ +1 $n \equiv 0, 1 [4]$ -1 $n \equiv 2, 3 [4]$ $t \equiv 1 [4]$ +1 $n \equiv 1, 2 [4]$ -1 $n \equiv 0, 3 [4]$ $t \equiv 2 [4]$ +1 $n \equiv 2, 3 [4]$ -1 $n \equiv 0, 1 [4]$ $t \equiv 3 [4]$ +1 $n \equiv 0, 3 [4]$ -1 $n \equiv 1, 2 [4]$	$t \equiv 0 [4]$ +1 $n \equiv 0, 1 [4]$ -1 $n \equiv 2, 3 [4]$ $t \equiv 1 [4]$ +1 $n \equiv 1, 2 [4]$ -1 $n \equiv 0, 3 [4]$ $t \equiv 2 [4]$ +1 $n \equiv 2, 3 [4]$ -1 $n \equiv 0, 1 [4]$ $t \equiv 3 [4]$ +1 $n \equiv 0, 3 [4]$ -1 $n \equiv 1, 2 [4]$	$t \equiv 0 [4]$ +1 $n \equiv 0, 1 [4]$ -1 $n \equiv 2, 3 [4]$ $t \equiv 1 [4]$ +1 $n \equiv 1, 2 [4]$ -1 $n \equiv 0, 3 [4]$ $t \equiv 2 [4]$ +1 $n \equiv 2, 3 [4]$ -1 $n \equiv 0, 1 [4]$ $t \equiv 3 [4]$ +1 $n \equiv 0, 3 [4]$ -1 $n \equiv 1, 2 [4]$	○

Table C.1: Propriétés de symétrie des matrices de Dirac.

$s - t \equiv [8]$	4	5	6	7
valeur de b_+	-1	○	+1	+1
valeur de b_-	-1	-1	-1	○
valeur de c_+	$(-1)^{t(t-1)/2}$ +1 $t \equiv 2, 3 [4]$ -1 $t \equiv 0, 1 [4]$	○	$(-1)^{t(t-1)/2}$ +1 $t \equiv 0, 1 [4]$ -1 $t \equiv 2, 3 [4]$	$(-1)^{t(t-1)/2}$ +1 $t \equiv 0, 1 [4]$ -1 $t \equiv 2, 3 [4]$
valeur de c_-	$(-1)^{t(t+1)/2}$ +1 $t \equiv 1, 2 [4]$ -1 $t \equiv 0, 3 [4]$	$(-1)^{t(t+1)/2}$ +1 $t \equiv 1, 2 [4]$ -1 $t \equiv 0, 3 [4]$	$(-1)^{t(t+1)/2}$ +1 $t \equiv 1, 2 [4]$ -1 $t \equiv 0, 3 [4]$	○
symétrie de $C_+ \Gamma^{(n)}$	$t \equiv 0 [4]$ +1 $n \equiv 1, 2 [4]$ -1 $n \equiv 0, 3 [4]$ $t \equiv 1 [4]$ +1 $n \equiv 2, 3 [4]$ -1 $n \equiv 0, 1 [4]$ $t \equiv 2 [4]$ +1 $n \equiv 0, 3 [4]$ -1 $n \equiv 1, 2 [4]$ $t \equiv 3 [4]$ +1 $n \equiv 0, 1 [4]$ -1 $n \equiv 2, 3 [4]$	○	$t \equiv 0 [4]$ +1 $n \equiv 0, 3 [4]$ -1 $n \equiv 1, 2 [4]$ $t \equiv 1 [4]$ +1 $n \equiv 0, 1 [4]$ -1 $n \equiv 2, 3 [4]$ $t \equiv 2 [4]$ +1 $n \equiv 1, 2 [4]$ -1 $n \equiv 0, 3 [4]$ $t \equiv 3 [4]$ +1 $n \equiv 2, 3 [4]$ -1 $n \equiv 0, 1 [4]$	$t \equiv 0 [4]$ +1 $n \equiv 0, 3 [4]$ -1 $n \equiv 1, 2 [4]$ $t \equiv 1 [4]$ +1 $n \equiv 0, 1 [4]$ -1 $n \equiv 2, 3 [4]$ $t \equiv 2 [4]$ +1 $n \equiv 1, 2 [4]$ -1 $n \equiv 0, 3 [4]$ $t \equiv 3 [4]$ +1 $n \equiv 2, 3 [4]$ -1 $n \equiv 0, 1 [4]$
symétrie de $C_- \Gamma^{(n)}$	$t \equiv 0 [4]$ +1 $n \equiv 2, 3 [4]$ -1 $n \equiv 0, 1 [4]$ $t \equiv 1 [4]$ +1 $n \equiv 0, 3 [4]$ -1 $n \equiv 1, 2 [4]$ $t \equiv 2 [4]$ +1 $n \equiv 0, 1 [4]$ -1 $n \equiv 2, 3 [4]$ $t \equiv 3 [4]$ +1 $n \equiv 1, 2 [4]$ -1 $n \equiv 0, 3 [4]$	$t \equiv 0 [4]$ +1 $n \equiv 2, 3 [4]$ -1 $n \equiv 0, 1 [4]$ $t \equiv 1 [4]$ +1 $n \equiv 0, 3 [4]$ -1 $n \equiv 1, 2 [4]$ $t \equiv 2 [4]$ +1 $n \equiv 0, 1 [4]$ -1 $n \equiv 2, 3 [4]$ $t \equiv 3 [4]$ +1 $n \equiv 1, 2 [4]$ -1 $n \equiv 0, 3 [4]$	$t \equiv 0 [4]$ +1 $n \equiv 2, 3 [4]$ -1 $n \equiv 0, 1 [4]$ $t \equiv 1 [4]$ +1 $n \equiv 0, 3 [4]$ -1 $n \equiv 1, 2 [4]$ $t \equiv 2 [4]$ +1 $n \equiv 0, 1 [4]$ -1 $n \equiv 2, 3 [4]$ $t \equiv 3 [4]$ +1 $n \equiv 1, 2 [4]$ -1 $n \equiv 0, 3 [4]$	○

Table C.2: Propriétés de symétrie des matrices de Dirac (suite). Les coefficients $b_{\pm}$ et $c_{\pm}$ sont reliés aux propriétés des matrices de conjugaison complexe et de conjugaison de charge : $\mathcal{B}_{\pm}^* \mathcal{B}_{\pm} = b_{\pm} \mathbf{1}$ et $\mathcal{C}_{\pm}^t = c_{\pm} \mathcal{C}_{\pm}$. Les actions de ces matrices sur les matrices de Dirac sont données par : $\Gamma^{\mu*} \equiv \pm \mathcal{B}_{\pm} \Gamma^{\mu} \mathcal{B}_{\pm}^{-1}$ et $\Gamma^{\mu t} = \pm (-1)^{t-1} \mathcal{C}_{\pm} \Gamma^{\mu} \mathcal{C}_{\pm}^{-1}$.

C.4 Produits totalement antisymétriques. Calculs de trace

On normalise les produits totalement antisymétriques de n matrices de Dirac par :

$$\Gamma^{(n)}_{\mu_1 \dots \mu_n} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) \Gamma^{\mu_{\sigma(1)}} \dots \Gamma^{\mu_{\sigma(n)}} \quad (\text{C.22})$$

Ces produits obéissent à la loi de multiplicativité suivante (loi de fusion) :

$$\begin{aligned} \Gamma^{(m)}_{\mu_1 \dots \mu_m} \Gamma^{(n)}_{\nu_1 \dots \nu_n} &= \sum_{k=0}^{\min(m,n)} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} (-1)^{k(m+1) + \sum_{l=1}^k i_l + j_l} \\ &\quad \epsilon(\sigma) \delta_{\nu_{j_{\sigma(1)}}}^{\mu_{i_1}} \dots \delta_{\nu_{j_{\sigma(k)}}}^{\mu_{i_k}} \Gamma^{(m+n-2k)}_{\mu_1 \dots \hat{\mu}_{i_1} \dots \hat{\mu}_{i_k} \dots \mu_m \nu_1 \dots \hat{\nu}_{j_1} \dots \hat{\nu}_{j_k} \dots \nu_n} \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Des produits particulièrement intéressants à considérer car intervenant dans les réarrangements de Fierz sont :

$$\Gamma^{(n)}_{\sigma_1 \dots \sigma_n} \Gamma^{(m)}_{\mu_1 \dots \mu_m} \Gamma^{(n)}_{\sigma_1 \dots \sigma_n} = \mathcal{A}(t+s, m, n) \Gamma^{(m)}_{\mu_1 \dots \mu_m} \quad (\text{C.24})$$

avec

$$\begin{aligned} (-1)^{n(n+2m-1)/2} \frac{\mathcal{A}(d, m, n)}{n!} &= \sum_{l=0}^{\min(m,n)} (-1)^l C_m^l C_{d-m}^{n-l} \\ &= {}_2F_1(-m, -n; d-m-n+1; -1) C_{d-m}^n . \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

Il existe sur les produits totalement antisymétriques une relation de “dualité” ou formule des compléments :

- en dimension $t+s$ paire

$$\Gamma^{(n)}_{\mu_1 \dots \mu_n} = \frac{(-1)^{n(n-1)/2+s}}{(t+s-n)!} \chi \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_{t+s}} \Gamma_{\mu_{n+1} \dots \mu_{t+s}}^{(t+s-n)} \tilde{\Gamma} , \quad (\text{C.26})$$

où le symbole ϵ désigne la signature de la permutation $(\mu_1 \dots \mu_{t+s})$ normalisé à $\epsilon^{0 \dots t+s-1} = 1$.

- en dimension $t+s$ impaire

$$\Gamma^{(n)}_{\mu_1 \dots \mu_n} = \frac{1}{(t+s-n)!} \chi^{-1} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_{t+s}} \Gamma_{\mu_{t+s} \dots \mu_{n+1}}^{(t+s-n)} . \quad (\text{C.27})$$

Les traces des produits $\Gamma^{(n)}$ valent :

$$\text{Tr}(\Gamma^{(n)}_{\mu_1 \dots \mu_n}) = 2^{[(s+t)/2]} (\delta_0^n + \chi^{-1} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_n} \delta_{t+s}^n) , \quad (\text{C.28})$$

le second terme dans le membre de droite n'étant présent que dans le cas de dimension impaire.

Dans le cas de dimension paire, on obtient également :

$$\text{Tr}(\Gamma^{(m)}_{\mu_1 \dots \mu_m} \Gamma^{(n)}_{\nu_1 \dots \nu_n}) = 2^{[(s+t)/2]} \delta_n^m (-1)^{m(m-1)/2} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \epsilon(\sigma) \delta_{\nu_{\sigma(1)}}^{\mu_1} \dots \delta_{\nu_{\sigma(m)}}^{\mu_m} . \quad (\text{C.29})$$

Pour le cas de dimension impaire, la formule précédente comporte également un second terme plus compliqué à calculer.

C.5 Réarrangements de Fierz

Les formules de trace permettent d'identifier des bases de l'espace des matrices $2^{[(t+s)/2]}_*$ $2^{[(t+s)/2]}$ pouvant servir pour des réarrangements de Fierz :

- en dimension $t + s$ paire, une base des matrices est donnée par :

$$\{\Gamma^{(n)}_{\mu_1 \dots \mu_n}\} \text{ pour } n = 0 \dots t + s \text{ et } 0 \leq \mu_1 < \dots < \mu_n \leq t + s - 1 . \quad (\text{C.30})$$

Cette base conduit aux réarrangements de Fierz suivant :

$$\delta^\alpha_\beta \delta^\gamma_\delta = \sum_{\substack{n=0 \dots t+s \\ 0 \leq \mu_1 < \dots < \mu_n \leq t+s-1}} \frac{1}{c_n} (\Gamma^{(n)}_{\mu_1 \dots \mu_n})^\alpha_\delta (\Gamma^{(n)}_{\mu_1 \dots \mu_n})^\gamma_\beta \quad (\text{C.31})$$

les coefficients c_n étant données par l'expression :

$$c_n = (-1)^{n(n-1)/2} 2^{[(t+s)/2]} . \quad (\text{C.32})$$

Lorsqu'on appliquera cette formule à des spineurs de Weyl, il est parfois utile de la réécrire en faisant intervenir la matrice de chiralité à partir de la formule des compléments (C.26) :

$$\delta^\alpha_\beta \delta^\gamma_\delta = \sum_{\substack{n=0 \dots (t+s)/2 \\ 0 \leq \mu_1 < \dots < \mu_n \leq t+s-1}} \frac{1}{d_n} \left((\Gamma^{(n)}_{\mu_1 \dots \mu_n})^\alpha_\delta (\Gamma^{(n)}_{\mu_1 \dots \mu_n})^\gamma_\beta \right. \\ \left. + (-1)^n (\Gamma^{(n)}_{\mu_1 \dots \mu_n} \tilde{\Gamma})^\alpha_\delta (\Gamma^{(n)}_{\mu_1 \dots \mu_n} \tilde{\Gamma})^\gamma_\beta \right) \quad (\text{C.33})$$

où $d_n = (1 + \delta_n^{(t+s)/2}) c_n$.

- en dimension $t + s$ impaire, deux bases peuvent être considérées : l'une construite à partir des matrices de Dirac en dimension paire juste inférieure :

$$\{\Gamma^{(n)}_{\mu_1 \dots \mu_n}\} \text{ pour } n = 0 \dots t + s - 1 \\ \text{et } 0 \leq \mu_1 < \dots < \mu_n \leq t + s - 2 ; \quad (\text{C.34})$$

Les réarrangements de Fierz correspondants sont donnés par la formule précédente (C.31) (formellement, il suffit de changer $t + s \rightarrow t + s - 1$ puisque on utilise la dimension paire inférieure).

Une autre base est obtenue en considérant également la matrice Γ^{t+s-1} , mais la relation (C.27) limite le nombre de produits indépendants :

$$\{\Gamma^{(n)\mu_1\ldots\mu_n}\} \text{ pour } n = 0 \ldots (t+s-1)/2 \text{ et } 0 \leq \mu_1 < \ldots < \mu_n \leq t+s-1. \quad (\text{C.35})$$

Dans cette base, les réarrangements de Fierz prennent une forme un peu plus simple :

$$\delta^\alpha_\beta \delta^\gamma_\delta = \sum_{\substack{n=0 \ldots [(t+s)/2] \\ 0 \leq \mu_1 < \ldots < \mu_n \leq t+s-1}} \frac{1}{c_n} (\Gamma^{(n)\mu_1\ldots\mu_n})^\alpha_\delta (\Gamma^{(n)\mu_1\ldots\mu_n})^\gamma_\beta \quad (\text{C.36})$$

les coefficients étant toujours donnés par l'expression (C.32).

C.6 Contraintes sur les spineurs

Si le spineur ψ est solution de l'équation de Dirac en présence d'un champ électromagnétique A_μ :

$$(i\Gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu) - m)\psi = 0; \quad (\text{C.37})$$

alors les spineurs conjugués $\psi_\pm^c = \mathcal{B}_\pm^{-1}\psi^\star$, lorsqu'ils existent, vérifient :

$$(i\Gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) \pm m)\psi_\pm^c = 0. \quad (\text{C.38})$$

On montre de plus qu'ils se transforment de la même façon que ψ sous l'action du groupe de Lorentz :

$$\psi \rightarrow S(\Lambda)\psi = \left(\mathbf{1} + \frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu}\right)\psi. \quad (\text{C.39})$$

Il est légitime de se demander à quelle condition on peut identifier ψ et $\psi_\pm^c$. Remarquons déjà que nécessairement sa charge doit être nulle. Pour que la condition⁽³⁾ $\psi = \psi_\pm^c$ ait un sens, il est nécessaire que $\mathcal{B}_\pm^\star\mathcal{B} = \mathbf{1}$ i.e. $b_\pm = 1$. On définit :

- la condition de Majorana :

$$\psi = \psi_-^c. \quad (\text{C.40})$$

Un spineur de Majorana ne peut exister que pour $s - t \equiv 0, 1, 2 [8]$.

⁽³⁾On pourrait tout aussi bien considérer la condition $\psi = \lambda\psi_\pm^c$ où λ est un nombre complexe de module un quelconque ; les conclusions seraient inchangées.

- la condition pseudo-Majorana :

$$\psi = \psi_+^c. \quad (\text{C.41})$$

Un spineur pseudo-Majorana ne peut exister que pour $s - t \equiv 0, 6, 7 [8]$.

- la condition $SU(2)$ -Majorana :

$$\psi^i = \epsilon^i_j \psi^{j^c}_- \quad \text{avec} \quad \epsilon^1_2 = -\epsilon^2_1 = 1. \quad (\text{C.42})$$

Un couple (ψ^1, ψ^2) de spineurs $SU(2)$ -Majorana ne peut exister que pour $s - t \equiv 4, 5, 6 [8]$.

- la condition $SU(2)$ -pseudo-Majorana :

$$\psi^i = \epsilon^i_j \psi^{j^c}_+ \quad \text{avec} \quad \epsilon^1_2 = -\epsilon^2_1 = 1. \quad (\text{C.43})$$

Un couple (ψ^1, ψ^2) de spineurs $SU(2)$ -pseudo-Majorana ne peut exister que pour $s - t \equiv 2, 3, 4 [8]$.

Dans les cas où $s - t \equiv 0, 1, 2, 6, 7 [8]$ *i.e.* lorsque la condition (pseudo)-Majorana a un sens, on montre [16] qu'il existe une représentation des matrices de Dirac dans laquelle $\mathcal{B}_\pm = \mathbf{1}$. Les matrices de Dirac sont alors réelles ou imaginaires pures et les composantes d'un spineur (pseudo)-Majorana sont réelles.

Dans le cas d'espaces à un seul temps ($t = 1$), la contrainte (pseudo)-Majorana s'écrit $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \Gamma^0 = \psi^t \mathcal{C}_\pm$ et la condition $b_\pm = +1$ est équivalente à l'antisymétrie de la matrice de conjugaison de charge $\mathcal{C}_\pm$. Si (ψ_1, ψ_2) sont deux spineurs de Majorana anticommutants, on obtient alors les propriétés de symétrie des tenseurs :

$$\bar{\psi}_1 \Gamma^{(n)} \psi_2 = -s_n \bar{\psi}_1 \Gamma^{(n)} \psi_2 \quad \text{avec} \quad s_n = \begin{cases} -(-1)^{n(n+1)/2} & \text{Majorana;} \\ -(-1)^{n(n-1)/2} & \text{pseudo-Majorana.} \end{cases} \quad (\text{C.44})$$

Notons de plus qu'avec les conventions adoptées, si ψ est un spineur de (pseudo)-Majorana :

$$\begin{aligned} (\bar{\psi} \Gamma^{(n) \mu_1 \dots \mu_n})_\alpha &= s_n (\Gamma^{(n) \mu_1 \dots \mu_n} \psi)_\alpha ; \\ (\bar{\psi} \Gamma^{(n) \mu_1 \dots \mu_n})^\alpha &= -s_n (\Gamma^{(n) \mu_1 \dots \mu_n} \psi)^\alpha . \end{aligned} \quad (\text{C.45})$$

En dimension paire, on définit les *spineurs de Weyl* comme vecteurs propres de la matrice de chiralité :

$$\psi = \pm \tilde{\Gamma} \psi . \quad (\text{C.46})$$

Remarquons que si ψ est un spineur de Weyl de chiralité χ alors, $\psi_\pm^c$ sont également des spineurs de Weyl de chiralité $(-1)^{(s-t)/2} \chi$. Remarquons qu'à quatre dimensions minkowskiennes la conjugaison de charge change la chiralité ; c'est ce qui explique que les antineutrinos, transformés des neutrinos sous la symétrie CPT , aient une chiralité droite alors que les neutrinos ont une chiralité gauche. La condition (pseudo)-Majorana

est donc compatible avec la condition de Weyl $ssi\ s - t \equiv 0[4]$. La condition $SU(2)$ -(pseudo)-Majorana est compatible avec la condition de Weyl $ssi\ s - t \equiv 0[4]$ si les spineurs (ψ^1, ψ^2) sont de même chiralité, et $ssi\ s - t \equiv 2[4]$ s'ils sont de chiralité opposée.

Si on applique les formules de réarrangements de Fierz à des spineurs obéissant à certaines des contraintes ci-dessus, ces formules se simplifient et conduisent à certaines identités remarquables qui jouent un rôle important lorsqu'on cherche à montrer l'invariance par κ symétrie de certaines théories d'objets étendus. Par exemple à onze dimensions appliquées à des indices spinoriels vérifiant la condition de Majorana (C.40) elles donnent l'identité :

$$(\Gamma_{\mu\nu})_{(\alpha\beta}(\Gamma^\nu)_{\gamma\delta)} = 0 . \quad (C.47)$$

De même à dix dimensions pour des indices de Majorana-Weyl (de même chiralité), on obtient la relation :

$$(\Gamma_\mu)_{\alpha(\beta}(\Gamma^\mu)_{\gamma\delta)} = 0 . \quad (C.48)$$

C.7 Représentations de l'algèbre de supersymétrie

Les résultats du paragraphe précédent sur les contraintes applicables aux spineurs permettent de déterminer le nombre minimal de degrés de liberté (*off-shell i.e.* sans tenir compte de l'équation de Dirac) d'un spineur en fonction de la dimension d'espace-temps. Le tableau C.3 donne la valeur de ce nombre dans le cas d'espace Euclidien ($t = 0$), Minkoskien ($t = 1$) et de F -espace ($t = 2$). Ces résultats permettent de calculer le nombre de générateurs fermioniques d'une théorie supersymétrique.

Considérons uniquement des espaces Minkowskiens. Avec les conventions adoptées, l'algèbre de supersymétrie est donnée⁽⁴⁾ par :

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = 2P^\mu (\mathcal{C}\Gamma_\mu)_{\alpha\beta} \quad \alpha, \beta = 1 \dots \sharp_Q . \quad (C.49)$$

Les représentations de l'algèbre de supersymétrie sont caractérisées par la valeur de l'impulsion P^μ (qui commute avec les charges de supersymétrie). Dans le cas d'une représentation *sans masse*, on peut toujours choisir $P^\mu = P^0(1, 1, 0 \dots 0)$, de sorte que la loi de commutation (C.49) se réécrit :

$$\{Q_\alpha, Q_\beta^\dagger\} = 2P^0(\mathcal{C} + \mathcal{C}\Gamma_{01})_{\alpha\beta} . \quad (C.50)$$

On montre que le membre de droite est un opérateur diagonalisable avec la moitié de ses valeurs propres nulles, l'autre moitié engendre une algèbre de Clifford permettant de construire $2^{\sharp_Q/4-1}$ états fermioniques et autant d'états bosoniques (pour $d \geq 4$). Afin de satisfaire aux propriétés générales de théorie des champs, un multiplet de supersymétrie doit être auto-conjugué sous la symétrie CPT ; ceci impose dans la plupart des cas de

⁽⁴⁾Remarquons que $\text{Tr}(\mathcal{C}^{-1}\{Q_\alpha, Q_\beta^\dagger\}) = 2\sharp_Q P^0$ où $\sharp_Q$ est le nombre de charges fermioniques, et on obtient bien la propriété de positivité de l'énergie d'une théorie supersymétrique.

d [8]	Espace Euclidien		Espace Minkowskien		F -espace	
	$\sharp_{Q\,ir.}$	spineur	$\sharp_{Q\,ir.}$	spineur	$\sharp_{Q\,ir.}$	spineur
0	$2^{(d-2)/2}$	MW ou pMW	$2^{d/2}$	pM ou W	$2^{d/2}$	W
1	$2^{(d-1)/2}$	M	$2^{(d-1)/2}$	pM	$2^{(d+1)/2}$	D
2	$2^{d/2}$	W ou M	$2^{(d-2)/2}$	MW ou pMW	$2^{d/2}$	pM ou W
3	$2^{(d+1)/2}$	D	$2^{(d-1)/2}$	M	$2^{(d-1)/2}$	pM
4	$2^{d/2}$	W	$2^{d/2}$	M ou W	$2^{(d-2)/2}$	MW ou pMW
5	$2^{(d+1)/2}$	D	$2^{(d+1)/2}$	D	$2^{(d-1)/2}$	M
6	$2^{d/2}$	W ou pM	$2^{d/2}$	W	$2^{d/2}$	M ou W
7	$2^{(d-1)/2}$	pM	$2^{(d+1)/2}$	D	$2^{(d+1)/2}$	D

Table C.3: Dimension réelle *off-shell*, notée $\sharp_{Q\,ir.}$, des spineurs. Suivant la dimension et la signature de l'espace-temps, ces spineurs vérifient des contraintes : spineur de Majorana (M), pseudo-Majorana (pM), spineur de Weyl (W) ou spineur de Dirac (D) lorsqu'aucune contrainte ne peut être imposée. Remarquons que dans le cas d'espace Minkowskiens, $\sharp_{Q\,ir.}$ est un multiple de quatre dès que $d \geq 4$. Ce tableau donne les valeurs de $\sharp_{Q\,ir.}$ pour des espaces Euclidiens ($t = 0$, $d = s$), Minkowskiens ($t = 1$, $d = s - 1$) et des F -espace ($t = 2$, $d = s - 2$).

doubler le spectre naïvement construit de la façon précédente (*cf.* [259, chap.2] ou [260, chap.3] pour plus de détails). L'hélicité des états d'un supermultiplet varie de $\lambda_{\max}$ à $\lambda_{\max} - \sharp_Q/8$ et de $\sharp_Q/8 - \lambda_{\max}$ lorsqu'on a doublé le spectre. Les multiplets pour lesquels $\lambda_{\max} = 2$ sont appelés multiplets gravitationnels, ceux pour lesquels $\lambda_{\max} \leq 1$, multiplets de matière. Le tableau C.4 dresse la liste des multiplets de matière pour diverses dimensions d'espace-temps. La dimension maximale dans laquelle existent des multiplets de matière est $d = 10$.

Le tableau C.5 dresse lui la liste des principaux multiplets gravitationnels en diverses dimensions. La dimension maximale dans laquelle il existe de tels multiplets est $d = 11$, au-delà un supermultiplet contient forcément une particule de spin supérieur à deux qu'on ne sait inclure dans aucune théorie physique (*cf.* [261, p.246-255] pour une discussion sur les particules de spin supérieur à deux).

Pour une *représentation massive* et en l'absence de charge centrale, nous n'avons plus cette propriété de réduction du nombre des valeurs propres et l'algèbre de Clifford engendre alors $2^{\sharp_Q/2-1}$ fermions et autant de bosons et un multiplet de supersymétrie double encore en général ces valeurs pour respecter la symétrie *CPT* : par exemple un multiplet chiral $\mathcal{N} = 1$ massif à $4d$ correspond à 4 bosons et à 4 fermions ; le multiplet vectoriel $\mathcal{N} = 4$ massif à $4d$ (autoconjugué sous *CPT*) correspond à 128 bosons et 128 fermions ; et le multiplet gravitationnel $\mathcal{N} = 1$ massif à $11d$ correspond à 32768 bosons et 32768 fermions.

d [8]	$\sharp_Q$	$\mathcal{N}$ Susy	Multiplet	Spineur	Champs	$\sharp_B$
10	16	1	vectorel	MW	A_μ, λ	8
9	16	1	vectorel	pM	A_μ, λ, ϕ	8
8	16	1	vectorel	pM	$A_\mu, \lambda, 2\phi$	8
6	16	(2,0)	tensoriel	SMW	$B_{\mu_1\mu_2}^{(-)}, 4\lambda, 5\phi$	8
	8	(1,0)	tensoriel	SMW	$B_{\mu_1\mu_2}^{(-)}, 2\lambda, \phi$	4
			vectorel	SMW	$A_\mu, 2\lambda$	4
			hypermultiplet	SMW	$2\lambda, 4\phi$	4
5	16	2	vectorel	SpM	$A_\mu, 4\lambda, 5\phi$	8
	8	1	vectorel	SpM	$A_\mu, 2\lambda, \phi$	4
			hypermultiplet	SpM	$2\lambda, 4\phi$	4
4	16	4	vectorel	W	$A_\mu, 4\lambda, 6\phi$	8
	12	3	vectorel	W	$A_\mu, 4\lambda, 6\phi$	8
	8	2	vectorel	W	$A_\mu, 2\lambda, 2\phi$	4
			hypermultiplet	W	$2\lambda, 4\phi$	4
	4	1	vectorel	W	$A_\mu \lambda$	2
			chiral	W	$\lambda, 2\phi$	2

Table C.4: Multiplets de matière de masse nulle de l'algèbre de supersymétrie en diverses dimensions. d est la dimension de l'espace-temps Minkowskien. $\sharp_Q$ est le nombre de charges de supersymétrie : $\sharp_Q = \mathcal{N}\sharp_{Q\text{ir.}}$ où les valeurs de $\sharp_{Q\text{ir.}}$ ont été calculées dans le tableau C.3. Tous les multiplets correspondant à 16 charges fermioniques sont auto-conjugués sous CPT sans avoir à doubler le spectre. Le nombre de degrés de liberté réels bosoniques *on-shell* vaut : $\sharp_B = 2^{\sharp_Q/4-1} \times 2 (\times \frac{1}{2}$ pour les multiplets directement CPT invariants.) Pour les deux multiplets tensoriels à six dimensions $B_{\mu\nu}$ est une 2-forme anti-auto-duale et donc correspond à seulement trois degrés de liberté réels. On a également indiqué la nature des spineurs apparaissant dans le multiplet : M pour Majorana, pM pour pseudo-Majorana, SM pour symplectique-Majorana, SpM pour symplectique-pseudo-Majorana, W pour Weyl et D pour Dirac. Le nombre de degrés de liberté fermioniques réels *on-shell* est $\sharp_F = \sharp_{Q\text{ir.}} \times \text{nbre de fermions}/2 (\times 1/\sqrt{2}$ lorsqu'une condition S(p)M est imposée sur 2 fermions). Bien-sûr : $\sharp_B = \sharp_F$.

d [8]	Susy	Spineurs	Champs	$\sharp_B$
11	1	M	$e_\mu^m, \psi_\mu, B_{\mu_1\mu_2\mu_3}$	128
10	(1,1)	MW	$e_\mu^m, \psi_\mu^L, \psi_\mu^R, B_{\mu_1\dots\mu_3}, B_{\mu_1\mu_2}, B_\mu, \lambda^L, \lambda^R, \phi$	128
	(2,0)	MW	$e_\mu^m, 2\psi_\mu^L, B_{\mu_1\dots\mu_4}^{(+)}, B_{\mu_1\dots\mu_3}, B_{\mu_1\mu_2}, B_\mu, \lambda^L, \lambda^R, \phi$	128
	(1,0)	MW	$e_\mu^m, \psi_\mu^L, B_{\mu_1\mu_2}, \lambda^R, \phi$	64
9	2	pM	$e_\mu^m, 2\psi_\mu, B_{\mu_1\dots\mu_3}, 2B_{\mu_1\mu_2}, 3B_\mu, 4\lambda, 3\phi$	128
	1	pM	$e_\mu^m, \psi_\mu, B_{\mu_1\mu_2}, B_\mu, \lambda, \phi$	56
8	2	pM	$e_\mu^m, 2\psi_\mu, B_{\mu_1\dots\mu_3}, 3B_{\mu_1\mu_2}, 6B_\mu, 6\lambda, 7\phi$	128
	1	pM	$e_\mu^m, \psi_\mu, B_{\mu_1\mu_2}, 2B_\mu, \lambda, \phi$	56
7	4	SM	$e_\mu^m, 4\psi_\mu, 5B_{\mu_1\mu_2}, 10B_\mu, 16\lambda, 14\phi$	128
	2	SM	$e_\mu^m, 2\psi_\mu, B_{\mu_1\mu_2}, 3B_\mu, 2\lambda, \phi$	40
6	(2,2)	SMW	$e_\mu^m, 4\psi_\mu^L, 4\psi_\mu^R, 5B_{\mu_1\mu_2}, 16B_\mu, 20\lambda^L, 20\lambda^R, 25\phi$	128
	(2,1)	SMW	$e_\mu^m, 4\psi_\mu^L, 2\psi_\mu^R, 5B_{\mu_1\mu_2}^{(+)}, B_{\mu_1\mu_2}^{(-)}, 8B_\mu, 10\lambda^L, 4\lambda^R, 5\phi$	64
	(1,1)	SMW	$e_\mu^m, 2\psi_\mu^L, 2\psi_\mu^R, B_{\mu_1\mu_2}, 4B_\mu, 2\lambda^L, 2\lambda^R, \phi$	32
	(2,0)	SMW	$e_\mu^m, 4\psi_\mu^L, 5B_{\mu_1\mu_2}^{(+)}$	24
	(1,0)	SMW	$e_\mu^m, 2\psi_\mu^L, B_{\mu_1\mu_2}^{(+)}$	12
5	8	SpM	$e_\mu^m, 8\psi_\mu, 27B_\mu, 48\lambda, 42\phi$	128
	6	SpM	$e_\mu^m, 6\psi_\mu, 15B_\mu, 20\lambda, 14\phi$	64
	4	SpM	$e_\mu^m, 4\psi_\mu, 6B_\mu, 4\lambda, \phi$	24
	2	SpM	$e_\mu^m, 2\psi_\mu, B_\mu$	8
4	8	M	$e_\mu^m, 8\psi_\mu, 28B_\mu, 56\lambda, 70\phi$	128
	6	M	$e_\mu^m, 6\psi_\mu, 16B_\mu, 26\lambda, 30\phi$	64
	5	M	$e_\mu^m, 5\psi_\mu, 10B_\mu, 11\lambda, 10\phi$	32
	4	M	$e_\mu^m, 4\psi_\mu, 6B_\mu, 4\lambda, 2\phi$	16
	3	M	$e_\mu^m, 3\psi_\mu, 3B_\mu, \lambda$	8
	2	M	$e_\mu^m, 2\psi_\mu, B_\mu$	4
	1	M	e_μ^m, ψ_μ	2

Table C.5: Multiplets gravitationnels de l'algèbre de supersymétrie en diverses dimensions. $\sharp_B$ est le nombre de degrés de liberté réels bosoniques *on-shell*. Le nombre de degrés de liberté réels *on-shell* associés aux vielbeins e_μ^m en dimension d vaut $(d-1)(d-2)/2-1$, ceux associés à une p -forme $B_{\mu_1\dots\mu_p}$ sont au nombre de $C_{d-2}^p (\times 1/2$ lorsqu'une contrainte d'(anti)-auto-dualité est imposée ; rappelons qu'une condition d'autodualité ne peut exister dans un espace Minkowskien que si $d \equiv 2[4]$ cf. §A.4.3) et un champ scalaire réel correspond à un degré de liberté. Le nombre de degrés de liberté réels *on-shell* associés à un gravitino ψ_μ en dimension d vaut $\sharp_{Q\text{ir.}}(d-3)/2 (\times 1/\sqrt{2}$ lorsqu'une condition S(p)M est imposée sur deux gravitinos). Le calcul de ces nombres de degrés de liberté est par exemple expliqué dans [258, sec.4] et [25, App.A]. La construction de ces multiplets est plus complexe que celle des multiplets de matière et la règle permettant d'obtenir le nombre de degrés de liberté bosoniques et fermioniques ne s'applique plus dans tous les cas (elle reste toutefois valable à $4d$ et à $11d$).

Publication I

**Abelian Flavour Symmetries in
Supersymmetric Models**

Saclay T96/065
hep-ph/9606383
June 1996

Abelian Flavour Symmetries in Supersymmetric Models

E. Dudas ^a, C. Grojean ^{a,b}, S. Pokorski ^c and C.A. Savoy ^a

^a CEA-SACLAY, Service de Physique Théorique
F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, FRANCE

^b Ecole Normale Supérieure de Lyon
F-69364 Lyon Cedex 07, FRANCE

^c Institute of Physics, Warsaw

Abstract

We propose a theory of flavour based on abelian horizontal gauge symmetries and modular invariances. We construct explicit supergravity models where the scale of the horizontal $U(1)$ symmetry breaking is fixed by the Green-Schwarz mechanism for anomaly cancellation. The supersymmetric spectrum is obtained in terms of the $U(1)$ charges which are determined by the Yukawa matrices.

PACS: 12.15.Ff, 12.60.Jv, 14.60.Pg, 04.65+e

Keywords: Supersymmetry; Flavour; Fermion masses; Soft terms.

1 Introduction

There is a revival of interest in explaining the pattern of fermion masses and mixings by postulating a horizontal $U(1)_X$ gauge symmetry [1]- [5]. The $U(1)_X$ charges are assigned to fermions in such a way that only a small number of Yukawa interactions is allowed by the symmetry. The remaining effective Yukawa vertices are generated through non-renormalizable couplings to fields which are Standard Model gauge singlets but carry horizontal charge, in the effective theory defined at some large scale M_P (we shall identify it later with the Planck scale). When these singlet fields get vev's of $O(\varepsilon M_P)$, $\varepsilon \leq 1$ and spontaneously break $U(1)_X$, the resulting Yukawa couplings are suppressed by powers of the small parameter, ε^{n_i} , where the powers n_i depend on the $U(1)_X$ charge assignment [6]. There are several reasons to assume this horizontal symmetry to be a local one. Of course, this avoids physical problems related to massless Goldstone bosons. Moreover, in the context of supersymmetric models with "stringy" $U(1)_X$ symmetry [7]- [8], this mechanism of fermion mass generation shows an interesting connection between phenomenologically viable mass pattern and the Green-Schwarz mechanism of anomaly cancellation, which successfully predicts the Weinberg angle [9]. It has also been suggested that the Fayet-Iliopoulos term that is fixed by the anomalies will naturally generate the small parameter ε in the $U(1)_X$ breaking.

In broken supergravity models with horizontal abelian symmetries the squark soft masses and the trilinear soft terms are correlated with the quark mass matrices by the symmetry. Generically, the off-diagonal entries (in the basis in which quarks are diagonal) are predicted [10] to be of the order of some powers of the Cabibbo mixing angle λ and in some cases comparable with the existing experimental limits. In a recent paper [11] it has been proposed to impose on such models the symmetries (and the spectrum) generic for effective supergravity lagrangian which originates from orbifold models of string compactifications. By combining the horizontal symmetry and the modular invariances that characterize these models, the soft terms can be calculated not only as powers of λ but also with their relative coefficients fixed in terms of the horizontal charges and modular weights.

If one consistently assumes that the hierarchies in the fermion mass spectrum are entirely due to the $U(1)_X$ symmetry, there are interesting relations between charges and modular weights. As a consequence, the sfermion (squarks and sleptons) spectrum is also predicted in terms of the $U(1)_X$ charges. Given a pattern of fermion mass matrices in terms of a set of $U(1)_X$ charges, the sfermion masses are obtained in terms of two parameters characterizing the supersymmetry breaking, the gaugino mass M and the gravitino mass $m_{3/2}$. Now, this provides a unique way to test our horizontal symmetry models by a study of the sfermion mass spectrum, since the fermion masses and mixings are used to fix the charges and the $U(1)_X$ sector is in general too heavy to become visible.

By adopting the dilaton/moduli parametrisation of supersymmetry breaking proposed in [12] and in the case of one $U(1)_X$ symmetry spontaneously broken by the vev

of a scalar field of charge $X = -1$, we get [11] (in the $U(1)_X$ basis)

$$\begin{aligned}\tilde{m}_{q_i}^2 - \tilde{m}_{q_j}^2 &= (q_i - q_j) m_{3/2}^2, \\ \tilde{m}_{q_i}^2 + \tilde{m}_{u_j}^2 + \tilde{m}_{h_2}^2 &= M^2 + (q_i + u_j + h_2) m_{3/2}^2,\end{aligned}\tag{1.1}$$

where $\tilde{m}_{q_i}$ ($\tilde{m}_{u_i}$) is the diagonal element of the sfermion mass matrix and q_i (u_i) the $U(1)_X$ charge associated with the left-handed (right-handed up) quark of the i^{th} family, and $\tilde{m}_{h_2}$ and h_2 are the corresponding quantities for one of the Higgs doublets. Regarding the trilinear soft terms we get, e.g., the prediction

$$A_{ij}^U \simeq -M + (q_i + u_j + h_2) m_{3/2}\tag{1.2}$$

for the coefficient of trilinear coupling $Y_{ij}^U Q^i U^j H_2$. The complete relations exhibit flavour off-diagonal terms in the soft masses and the full trilinear soft terms are not proportional to the corresponding Yukawa couplings. As will be explained, these additional contributions give physical observable effects of the same order as the "diagonal" ones displayed in (1.1) and (1.2). Similar relations hold for down-type squarks and sleptons. It must be noticed that the simple results (1.1) - (1.2) follow from a cancellation between the geometrical supergravity contribution and the part of the mass splitting from the $U(1)_X$ D-term that contain model dependent parameters. The horizontal splitting in (1.1) is proportional to the charge differences which appear in the Yukawa mass matrices. Since the lighter fermions are associated to larger charges, the corresponding sfermions are predicted to be heavier than superpartners of heavier fermions.

Extensions of the Standard Model of the electroweak interactions are constrained by flavour changing neutral current (FCNC) processes like $K^0 - \bar{K}^0$ mixing, $b \rightarrow s\gamma$, $\mu \rightarrow e\gamma$ or the electric dipole moment (e.d.m.) of the neutron. The observed suppression of FCNC transitions is nicely explained in the Standard Model (SM) by the GIM mechanism. The supersymmetric extensions of the SM do contain additional contributions to FCNC transitions from sfermion exchange in loop diagrams. They can be potentially dangerous if, in the basis in which fermion mass matrices are diagonal, the sfermion mass matrices have large flavour off-diagonal entries. In addition, new phases which are usually present in the sfermion mass matrices and in the trilinear couplings can give too large CP violating effects (e.g. too large neutron e.d.m.). After a rotation to the quark diagonal basis, we obtain our prediction for the squark mass matrices up to an overall scale. The question one may ask in our class of models is this: can one suppress the off-diagonal entries in the squark mass matrices below the order of magnitude estimate based on the $U(1)_X$ symmetry alone? A priori, this might occur if some coefficients vanish, i.e. for certain choice of horizontal charges. The conclusion of ref. [11] is that such an additional off-diagonal suppression does not hold for the phenomenologically acceptable quark masses. In the case of one $U(1)_X$ symmetry, squarks masses can be neither universal nor aligned with quark masses. Thus, the models of this class predict some deviations from the Standard Model predictions for the FCNC transitions to be eventually observed at higher level than in the case of universal soft masses at the Planck scale.

In the next three Sections of this paper we discuss the case of one $U(1)_X$ symmetry. We extend the formalism of ref. [11] by allowing for flavour dependent modular weights

for the superpotential and give some details of the calculation of the soft terms. The breaking of the horizontal $U(1)_X$ is investigated and the induced D-term is evaluated. In Section 5, the Higgs sector mass parameters are obtained in terms of their $U(1)_X$ charges, which are restricted by the fermion masses. Then, it is shown that the requirement of proper electroweak symmetry breaking strongly constrains the scales $m_{3/2}$ and M . In consequence, the magnitude of the FCNC effects is also determined. It is interesting to notice that this highly predictive class of models with one $U(1)_X$ symmetry, although only marginally acceptable from the point of view of FCNC effects, is qualitatively consistent with the existing phenomenology and, moreover, gives testable predictions for superpartners masses.

In Section 6 we consider a class of models with two abelian horizontal symmetries. They have been suggested [10] to reduce flavour non-diagonal entries in the scalar mass matrices and so to alleviate FCNC effects. By an ad hoc choice of charges, one can further suppress $\tilde{K}K$ and $\tilde{D}D$ mixings. The relation between the modular weights and horizontal charges are derived for this case and used to calculate the soft mass terms. It becomes clear from our results that, with any number of abelian symmetries, it is impossible to get either universal or aligned (with quarks) squark masses for acceptable quark mass matrices and therefore the models predict interesting phenomenology in the FCNC sector.

In the last section we summarize the main features of the models with horizontal $U(1)$'s and modular invariances from the phenomenological point of view.

2 Yukawa matrices from horizontal $U(1)_X$ gauge symmetry

A natural way of understanding the fermion mass matrices is to postulate a family (horizontal) gauge symmetry spontaneously broken by the vacuum expectation values (vev's) of some scalar fields ϕ which are singlets under the Standard Model gauge group. The hierarchy of fermion masses and mixing angles is then explained by assigning different charges to different fermions. Only the third family of fermions acquires a mass at the tree level and all the other Yukawa couplings are forbidden by the $U(1)_X$ symmetry. After spontaneous symmetry breaking of the $U(1)_X$ symmetry, higher order invariant terms in the lagrangian (or superpotential in the supersymmetric case) can be written and have the form $(\frac{\langle\phi\rangle}{M_P})^{n_{ij}}\bar{\psi}_i\psi_j H$ (after decoupling of the heavy fields), where ψ_i are the SM fermions, H is a Higgs field and M_P is a large scale. Postulating $\varepsilon \equiv \frac{\langle\phi\rangle}{M_P} \simeq \lambda$ (the Cabibbo angle) one can easily explain hierarchies in the effective Yukawa couplings, precisely in the simplest case of abelian symmetry, with all the coefficients of the higher dimension operators of the order $O(1)$.

In the context of the string inspired models, the most natural candidate for such a symmetry is the anomalous $U(1)_X$ gauge group present in most of the known 4-dimensional string models [7,8]. In this case, one-loop triangle graphs generate Adler-Bell-Jackiw gauge anomalies. The gauge symmetry is restored by the 4-dimensional version of the Green-Schwarz mechanism [13], by the use of the dilaton-axion super-

field. The relevant terms in the Lagrangian are

$$\mathcal{L}_{gauge} = \frac{1}{4} \sum_a k_a S \int d^2\theta (tr W^\alpha W_\alpha)_a , \quad (2.1)$$

$$K = -\ln(S + S^\dagger + \delta_{GS} V) + \dots$$

In (2.1), V and W_α are respectively the $U(1)_X$ gauge superfield and the gauge superfield strength, S is the dilaton superfield, k_a is the Kac-Moody level of the factor G_a of the gauge group $G = SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \otimes U(1)_X$, and δ_{GS} is the Green-Schwarz coefficient. Under a $U(1)_X$ gauge transformation, S is shifted as $S \rightarrow S + i\delta_{GS}\alpha(x)$. The complete Lagrangian is gauge invariant provided the anomaly coefficients A_i satisfy the condition

$$\delta_{GS} = \frac{A_1}{k_1} = \frac{A_2}{k_2} = \frac{A_3}{k_3} = \frac{A_X}{k_X} , \quad (2.2)$$

where δ_{GS} is computed to be $\delta_{GS} = \frac{1}{192\pi^2} Tr X$. The mixing $S - V$ in the Kähler potential gives rise to a term ($g_X = 1/(S + S^\dagger)$)

$$V_D = \frac{g_X^2}{2} \left(\sum_A K_A X_A \phi^A + \frac{M_P^2}{192\pi^2} Tr X \right)^2 , \quad (2.3)$$

in the scalar potential, where A labels all chiral fields of charges X_A and $K_A = \partial K / \partial \phi^A$. The last term in the parenthesis in (2.3) is the coefficient of the Fayet-Iliopoulos D-term [14], which forces at least one of the fields to get a vacuum expectation value and to break the $U(1)_X$ gauge symmetry at a scale slightly below the Planck scale, depending on the value of $Tr X$. If $n > 1$ $U(1)$ symmetries are considered, we can always define $n - 1$ anomaly free symmetries and the present discussion applies. Recently, it has been shown [1] that using this symmetry and imposing phenomenologically successful fermion mass matrices one correctly predicts the Weinberg angle at the scale where $U(1)_X$ is spontaneously broken. This indicates a close relation between the Green-Schwarz mechanism and $U(1)_X$ fermion mass matrices. Also, a direct connection between fermion mass matrices and mixed gauge anomalies was established [2] and further studied in [4, 5]. Within this scheme the scale M_P of the effective theory is assumed to be the Planck mass, while the parameter ε^2 is equal to $-(M_P^2 Tr X)/(192\pi^2 X_\phi)$.

Let us now consider the case when one SM gauge singlet takes a vev and all other matter field vev's are zero at the Planck scale. Supersymmetry is assumed, so that the Yukawa couplings are encoded in the $U(1)_X$ invariant superpotential

$$W = \sum_{ij} \left[Y_{ij}^U \theta(q_i + u_j + h_2) \left(\frac{\phi}{M_P} \right)^{q_i + u_j + h_2} Q^i U^j H_2 \right. \\ \left. + Y_{ij}^D \theta(q_i + d_j + h_1) \left(\frac{\phi}{M_P} \right)^{q_i + d_j + h_1} Q^i D^j H_1 \right. \\ \left. + Y_{ij}^E \theta(\ell_i + e_j + h_1) \left(\frac{\phi}{M_P} \right)^{\ell_i + e_j + h_1} L^i E^j H_1 \right] , \quad (2.4)$$

where we denote the matter fields by capitals Φ^i , the corresponding $U(1)_X$ charges by small letters φ_i (after choosing the normalization of the $U(1)_X$ to be such that the singlet charge is $X_\phi = -1$.) The θ -functions remove the Yukawa couplings that are forbidden by the $U(1)_X$ symmetry combined with the holomorphicity of W . We also assume R-parity symmetry in W (see [15] for attempts to enforce R-parity through horizontal symmetries). All the allowed entries in the Yukawa coupling matrices Y^D , Y^D , Y^E are assumed to be "natural", of $O(1)$. The scalar potential in (2.3) vanishes for

$$\phi^2 = \epsilon^2 M_P^2 = \frac{Tr X}{192\pi^2} M_P^2, \quad (2.5)$$

if we postulate $Tr X > 0$. As stated before we assume ϵ to be of the order of the Cabibbo angle. By a choice of the $U(1)_X$ charges we get the powers of ϵ in the effective low energy Yukawa couplings,

$$\hat{Y}_{ij}^U = Y_{ij}^U \epsilon^{(q_i+u_j+h_2)} \theta(q_i + u_j + h_2) \quad (2.6)$$

(analogously for $\hat{Y}^D$, $\hat{Y}^E$) needed to implement their hierarchy.

Before proceeding to study the consequences of this broken horizontal symmetry in the supergravity framework, let us pay some attention to the question of the uniqueness of the solution (2.5). Indeed, in the supersymmetric limit one expects degenerate minima of the scalar potential. They correspond to the vanishing of all the auxiliary fields: the gradients of the superpotential (F-type) and the D-terms associated to each one of the $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \otimes U(1)_X$ gauged symmetries. It has been shown that the D-terms vanish at and only at those values of the field that correspond to extrema of holomorphic invariant polynomials [16] (with the exception of D_X -terms that contain a Fayet-Iliopoulos constant). This allows for a systematic classification of the zeros of the $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ D-terms. For instance, the invariant $Q^i D^j H_1$ corresponds to a direction $Q^i = D^j = H_1 = v$ in the field space where all these D-terms vanish, while $D_X = 0$ may be written as⁽¹⁾

$$g_X (-|\phi|^2 + (q_i + d_j + h_1)v^2 + \epsilon^2 M_P^2) = 0. \quad (2.7)$$

Combining similar solutions corresponding to all other invariants, one defines a manifold of solutions of D-terms. Those that correspond to non-vanishing gradients of the superpotential W break supersymmetry and are not minima of the scalar potential (at large scales). So, in our example (2.7), one easily checks from (2.4) that for $v \neq 0$ and $\phi \neq 0$, the scalar potential will vanish only if all the entries in the i^{th} row and j^{th} column of the matrix Y^D vanish. This is obviously excluded in phenomenologically viable models. Of course the same arguments applies for solutions associated to the Y^U and Y^E terms in (2.4). The solutions of (2.7) with $\phi = 0$ are also excluded if $q_i + d_j + h_1 \geq 0$, $q_i + u_j + h_2 \geq 0$ and $l_i + e_j + h_1 \geq 0$. Therefore these conditions are sufficient (though they seem also necessary at this stage, they can be avoided

⁽¹⁾The vev's considered here are to be understood in the canonical basis as discussed in the next sections.

as discussed herebelow) to ensure the uniqueness of the solution (2.5) if R-parity is assumed. Next, one has to take care of solutions coming from R-parity violating invariants such as $L^k Q^i D^j$, where the Higgs H_1 is replaced in (2.7) by one of the sleptons L^k , and $L^k = Q^i = D^j \neq 0$. For $\phi \neq 0$, the scalar potential gets a non-vanishing contribution if $Y_{ij}^D \neq 0$, ie if $q_i + d_j + h_1 \geq 0$. Analogously, from $L^k L^i E^j$ invariants one deduces the condition $h_1 + l_i + e_j \geq 0$. Since the experimental data allow for some violation of R-parity, one can replace the positivity condition above by a condition on the non-vanishing of rows and columns of the R-parity violating Yukawa couplings. In this case, the solutions of (2.7) with $\phi = 0$, when allowed, will be degenerate with that in (2.5). They correspond, however, to very isolated points in the field space and (2.5) should remain stable, if not unique. As mentioned earlier, the positivity conditions are sufficient but not necessary. Other invariants with more than three matter and Higgs superfields can be included in the superpotential without any consequence on the Froggatt-Nielsen mechanism. They may help to avoid the supersymmetric minima. For instance, a (R-parity conserving) term like $(H_1 Q^i D^j)^2$ in W would allow for a zero in the Y^D matrix with $h_1 + q_i + d_j < 0$. Notice that the (sufficient) positivity conditions are consistent with most of the models considered in the literature [1]- [5].

Finally, let us consider the two bilinear invariants $H_1 H_2$ and $L^k H_2$. The vanishing of D-terms leads to $H_1 = H_2 = v$ and $-\phi^2 + (h_1 + h_2)v^2 + \epsilon^2 M_P^2 = 0$, for the former, and similarly for the latter with $H_1 \rightarrow L^k$ (the combination of these solutions are, in general, forbidden by non-zero entries in Y^E). However, at this level, one cannot argue that the degeneracy is lifted by the term $\mu H_1 H_2$ in the superpotential, since it has to be absent in the supersymmetric limit, even if $(h_1 + h_2) > 0$. For phenomenological reasons, it has to be related to the supersymmetry breaking scale (the so-called μ -problem). We postpone the question of this particular degeneracy until section 4.

3 $U(1)_X$ and modular symmetries in effective supergravity from string models

The phenomenologically interesting low energy limit of the superstring models is the $N = 1$ supergravity defined by the Kähler function K , the superpotential W and the gauge kinetic function f . The fields in the massless string spectrum are a universal dilaton S , moduli fields with no scalar potential generically denoted by T_α and matter chiral fields Φ^i which include the SM particles, $\Phi^i = Q^i, U^i, D^i, L^i, E^i, H_1, H_2$. An important role in the following discussion will be played by the target-space modular symmetries $SL(2, Z)$ [17] associated with the moduli fields T_α ($\alpha = 1..p$), acting as $T_\alpha \rightarrow (a_\alpha T_\alpha - ib_\alpha)/(ic_\alpha T_\alpha + d_\alpha)$, with $(a_\alpha d_\alpha - b_\alpha c_\alpha) = 1$ and $a_\alpha \dots d_\alpha \in Z$. In effective string theories of the orbifold type, the matter fields Φ^i transform under $SL(2, Z)$ as $\Phi^i \rightarrow (ic_\alpha T_\alpha + d_\alpha)^{n_i^{(\alpha)}} \Phi^i$, where the $n_i^{(\alpha)}$ are called the modular weights of the fields Φ^i with respect to the modulus T_α [18]. These modular transformations, which are symmetries of the supergravity theory, can be viewed as a particular type of Kähler transformations.

We assume the existence of superstring models which in the low-energy limit yield effective supergravity theories with the above minimal content of superfields, the gauge group $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \otimes U(1)_X$ and a SM singlet supermultiplet ϕ with $X_\phi = -1$. The superpotential W is defined in (2.4) and the Kähler potential K is as follows,

$$K = K_0 (T_\alpha, \bar{T}^{\bar{\alpha}}) - \ln (S + \bar{S}) + \sum_{\alpha=1}^p t_\alpha^{n_\phi^{(\alpha)}} \bar{\phi} \phi + \sum_{\Phi^i=Q^i, U^i, D^i, L^i, E^i, H_1, H_2} K_{i\bar{j}}^\Phi \Phi^i \bar{\Phi}^{\bar{j}},$$

$$K_{i\bar{j}}^\Phi = \delta_{i\bar{j}} \prod_{\alpha=1}^p t_\alpha^{n_i^{(\alpha)}} + Z_{i\bar{j}}^\Phi \left[\theta(\varphi_i - \varphi_j) \prod_{\alpha=1}^p t_\alpha^{n_j^{(\alpha)} + \bar{n}_{\Phi, i\bar{j}}^{(\alpha)}} \left(\frac{\phi}{M_P} \right)^{\varphi_i - \varphi_j} \right. \\ \left. + \theta(\varphi_j - \varphi_i) \prod_{\alpha=1}^p t_\alpha^{n_i^{(\alpha)} + n_{\Phi, i\bar{j}}^{(\alpha)}} \left(\frac{\bar{\phi}}{M_P} \right)^{\varphi_j - \varphi_i} \right] + \dots \quad (3.1)$$

where $i, j = 1, 2, 3$. In (3.1), t_α are the real part of the p moduli fields T_α and the dots stand for higher order terms in the fields ϕ and Φ^i . Note that the flavour non-diagonal terms in the Kähler potential, proportional to the coefficients $Z_{i\bar{j}}^\Phi$, are constrained only by the gauge symmetry and R-parity and have the form $K_{i\bar{j}}^Q Q^i \bar{Q}^{\bar{j}}$, $K_{i\bar{j}}^U U^i \bar{U}^{\bar{j}}$, $K_{i\bar{j}}^D D^i \bar{D}^{\bar{j}}$, $K_{i\bar{j}}^L L^i \bar{L}^{\bar{j}}$ and $K_{i\bar{j}}^E E^i \bar{E}^{\bar{j}}$. The explicit dependence on t_α in these terms is fixed by the modular invariance conditions, which are discussed in detail below. In general, the coefficients $Z_{i\bar{j}}^\Phi$ are automorphic functions of the moduli, of chiral weight $n_{\Phi, i\bar{j}}^{(\alpha)}$ and antichiral weight $\bar{n}_{\Phi, i\bar{j}}^{(\alpha)}$, i.e. they transform under the modular transformations as $Z_{i\bar{j}}^\Phi \rightarrow (ic_\alpha T_\alpha + d_\alpha)^{n_{\Phi, i\bar{j}}^{(\alpha)}} (-ic_\alpha T_\alpha + d_\alpha)^{\bar{n}_{\Phi, i\bar{j}}^{(\alpha)}} Z_{i\bar{j}}^\Phi$. The coefficients $Y_{ij}^U, Y_{ij}^D, Y_{ij}^E$ in (2.4) can also be automorphic functions of the moduli fields, of weight $n_{U, ij}^{(\alpha)}$, etc. Note that a coefficient with two analytic indices, like $n_{U, ij}^{(\alpha)}$, is related to the modular transformations of a Yukawa coefficient, here Y_{ij}^U , while a coefficient with an analytic and an antianalytic indices, like $n_{U, i\bar{j}}^{(\alpha)}$, is related to the modular transformations of a non-diagonal Kähler coefficient, here $K_{i\bar{j}}^U$.

In order to impose the modular symmetries, let us first define $n_0^{(\alpha)}$ by the modular transformations of the Kähler potential for the moduli fields, $K_0 \rightarrow K_0 + n_0^{(\alpha)} \ln |ic_\alpha T_\alpha + d_\alpha|^2$, which is a Kähler transformation. A typical example is

$$K_0 = - \sum_{\alpha=1}^p n_0^{(\alpha)} \ln t_\alpha. \quad (3.2)$$

The modular invariance of the full Kähler potential requires the following relations between modular weights and $U(1)_X$ charges

$$(\varphi_i - \varphi_j) n_\phi^{(\alpha)} = X_\phi \left(n_i^{(\alpha)} - n_j^{(\alpha)} + n_{\Phi, i\bar{j}}^{(\alpha)} - \bar{n}_{\Phi, i\bar{j}}^{(\alpha)} \right), \quad (3.3)$$

where $i, j = 1, 2, 3$ are family indices, X_ϕ is the $U(1)_X$ charge of the singlet ϕ and φ_i are $U(1)_X$ charges for fermions with the same SM quantum numbers. So (3.3) is a horizontal (family) relation applying separately for Q, U, D, L and E fermions.

From the superpotential, to be consistent with modular invariance of the complete theory, we get the following conditions for the quarks and leptons:

$$\begin{aligned} -X_\phi^{-1}(q_i + u_j + h_2)n_\phi^{(\alpha)} + n_{q_i}^{(\alpha)} + n_{u_j}^{(\alpha)} + n_{h_2}^{(\alpha)} + n_0^{(\alpha)} + n_{U,ij}^{(\alpha)} &= 0, \\ -X_\phi^{-1}(q_i + d_j + h_1)n_\phi^{(\alpha)} + n_{q_i}^{(\alpha)} + n_{d_j}^{(\alpha)} + n_{h_1}^{(\alpha)} + n_0^{(\alpha)} + n_{D,ij}^{(\alpha)} &= 0, \\ -X_\phi^{-1}(l_i + e_j + h_1)n_\phi^{(\alpha)} + n_{l_i}^{(\alpha)} + n_{e_j}^{(\alpha)} + n_{h_1}^{(\alpha)} + n_0^{(\alpha)} + n_{E,ij}^{(\alpha)} &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Each of these equations must hold if the corresponding Yukawa term is not zero. From (3.4), we get the relation

$$(q_i - q_j)n_\phi^{(\alpha)} = X_\phi \left(n_{q_i}^{(\alpha)} - n_{q_j}^{(\alpha)} + n_{U,ik}^{(\alpha)} - n_{U,jk}^{(\alpha)} \right), \quad (3.5)$$

as a consequence of the existence of the Yukawa couplings Y_{ik}^U and Y_{jk}^U in the superpotential. Similar relations are obtained by replacing q_i by u_i, d_i, l_i, e_i . Comparing (3.5) with (3.3), we get additional conditions between the modular transformations of the off-diagonal terms in the Kähler potential and the transformations of the Yukawa couplings, namely,

$$\begin{aligned} n_{U,ik}^{(\alpha)} - n_{U,jk}^{(\alpha)} &= n_{D,ik}^{(\alpha)} - n_{D,jk}^{(\alpha)} = n_{Q,i\bar{j}}^{(\alpha)} - \bar{n}_{Q,i\bar{j}}^{(\alpha)} \equiv s_{Q,ij}^{(\alpha)}, \\ n_{U,ki}^{(\alpha)} - n_{U,kj}^{(\alpha)} &= n_{U,i\bar{j}}^{(\alpha)} - \bar{n}_{U,i\bar{j}}^{(\alpha)} \equiv s_{U,ij}^{(\alpha)}, \\ n_{D,ki}^{(\alpha)} - n_{D,kj}^{(\alpha)} &= n_{D,i\bar{j}}^{(\alpha)} - \bar{n}_{D,i\bar{j}}^{(\alpha)} \equiv s_{D,ij}^{(\alpha)}, \\ n_{E,ki}^{(\alpha)} - n_{E,kj}^{(\alpha)} &= n_{E,i\bar{j}}^{(\alpha)} - \bar{n}_{E,i\bar{j}}^{(\alpha)} \equiv s_{E,ij}^{(\alpha)}, \\ n_{E,ik}^{(\alpha)} - n_{E,jk}^{(\alpha)} &= n_{L,i\bar{j}}^{(\alpha)} - \bar{n}_{L,i\bar{j}}^{(\alpha)} \equiv s_{L,ij}^{(\alpha)}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

which are all independent of the values of $k = 1, 2, 3$. Actually, by putting the $U(1)_X$ charges to zero in (3.3) and (3.4) one finds that the relations (3.6) are independent of the $U(1)_X$ symmetry and apply more generally. They restrict the moduli dependence of the Yukawa couplings. Fourteen of these equations are independent, ten in the quark sector and four in the leptonic sector. So, if the quark Yukawa couplings are a priori defined by eighteen modular weights, one for each coupling, only eight of them are independent. Analogously, the lepton Yukawa couplings are defined by five independent modular weights.

A simple and interesting case is when the Yukawa couplings do not depend on the moduli fields or the dependence is flavour blind and Y are of $O(1)$. We shall mainly consider this case, to be consistent with our physical assumption in this paper, that the fermion mass hierarchy is entirely due to the $U(1)_X$ charges. Then the relations (3.6) also imply $n_{\Phi,i\bar{j}}^{(\alpha)} = \bar{n}_{\Phi,i\bar{j}}^{(\alpha)}$, etc., and a real type modular transformations $Z_{i\bar{j}}^\Phi \rightarrow |ic_\alpha T_\alpha + d_\alpha|^{2n_{\Phi,i\bar{j}}^{(\alpha)}} Z_{i\bar{j}}^\Phi$. In this case (3.5) simplifies to

$$(\varphi_i - \varphi_j)n_\phi^{(\alpha)} = X_\phi \left(n_i^{(\alpha)} - n_j^{(\alpha)} \right). \quad (3.7)$$

The relations (3.7) give a connection between the modular weights and the $U(1)_X$ charges and can be interpreted as an embedding of the $U(1)_X$ symmetry in the modular symmetries. They enable us to write the Kähler metric for the matter fields as

$$K_{i\bar{j}}^\Phi = \prod_{\alpha=1}^p t_\alpha^{(n_i^{(\alpha)} + n_j^{(\alpha)})/2} (\delta_{i\bar{j}} + Z_{i\bar{j}}^\Phi \hat{\epsilon}^{|\varphi_i - \varphi_j|}) , \quad (3.8)$$

where the small parameter $\hat{\epsilon} = \prod_{\alpha} t_\alpha^{n_\phi^{(\alpha)}/2} \langle \phi \rangle / M_P$ settles the hierarchy in the fermion and scalar mass matrix elements (if, for some $(i\bar{j})$, (3.7) is not fulfilled, the coefficient vanishes).

If eq.(3.5) are not satisfied, modular invariance of the superpotential implies zeroes in the Yukawa matrices and in the off-diagonal entries of the Kähler metric. These type of zeroes must be distinguished from the ones given by $U(1)_X$ invariance and the holomorphicity of the superpotential W as described by the θ -functions in (2.4). We could try to construct phenomenologically interesting models in this way, in the spirit of ref. [19]. However, as argued in [11], due to the fact that modular symmetry zeroes in Yukawa matrices imply zeroes in the corresponding off-diagonal elements of the Kähler metrics, the zero textures of the above matrices are preserved in the fermion canonical basis. Phenomenologically, they can accommodate the fermion masses and one mixing angle, but they cannot explain the whole V_{CKM} matrix. Hence, for the quarks, the relations (3.5) must be imposed for *all* the indices (i, j) .

The physical Yukawa couplings $\hat{Y}$ are obtained by the canonical normalization of the kinetic terms, which requires the redefinition of the fields $\hat{\Phi}^i = e_j^i \Phi^j$ where the vielbein $e_j^i(t_\alpha, \phi)$ verifies

$$K_{i\bar{j}}^\Phi = \delta_{\bar{k}l} \bar{e}_j^{\bar{k}} e_i^l . \quad (3.9)$$

The potential effect of these field redefinitions is to remove the eventual zeroes in the Yukawa matrices coming from the holomorphicity and $U(1)_X$ invariance of the superpotential (Examples of this type of a phenomenological interest can be found in [4]).

4 Predictions for the soft terms

The spontaneous breaking of local supersymmetry gives rise to a low-energy global supersymmetric theory together with terms that explicitly break supersymmetry, but in a soft way. The signal of supersymmetry breaking is in non zero vev's of the auxiliary components of the chiral superfields $F^a = e^{\frac{G}{2}} G^a$, where $G^a = K^{a\bar{b}} \partial_{\bar{b}} G$ and $G = K + \ln|W|^2$. We consider only the case of zero tree level cosmological constant, i.e., we impose $\langle G^A G_A \rangle = 3$ and the order parameter for the supergravity breaking is provided by the gravitino mass $m_{3/2}^2 = e^G$. A complete scenario of supersymmetry breaking is still missing. A pragmatic attitude was taken in [12], where a parametrization of the supersymmetry breaking was proposed, quite independent of its specific mechanism. The fields which participate in the supergravity breaking were assumed to be

the moduli T_α and the dilaton S . The parametrization is⁽²⁾

$$G^\beta = \sqrt{3}\Theta_\beta t_\beta, \quad G^\beta G_\beta = 3 \cos^2 \theta, \quad G^S G_S = 3 \sin^2 \theta. \quad (4.1)$$

The angle θ and the Θ_α 's parametrize the direction of the goldstino in the T_α, S space. The normalization of the Θ_α is fixed by (4.1). If (3.2) is assumed we get $\sum_\alpha n_0^{(\alpha)} \Theta_\alpha^2 = \cos^2 \theta$. In the presence of the $U(1)_X$ symmetry spontaneously broken close to the Planck scale there is an additional contribution to supersymmetry breaking with $\langle G^\phi G_\phi \rangle \sim \langle \phi \rangle^2$. More generally, any field with a large vev (non negligible compared to M_P) contributes to supersymmetry breaking.

The soft terms are computed from the usual expressions of supergravity, but with the flavour non-diagonal Kähler potential, eq.(3.1). It is worth noticing that only the lowest power of $\hat{\epsilon}$ or ϕ have been included in (3.1). Therefore, the predictions herebelow have also been derived to the lowest power of $\hat{\epsilon}$. In this approximation, it is straightforward to find

$$G^\phi = (1 - \sqrt{3}n_\phi^{(\alpha)}\Theta_\alpha)\phi. \quad (4.2)$$

Even with $G^\phi \neq 0$ in eq. (4.2), the parametrization (4.1) is consistent with the vanishing of the cosmological constant in the leading order in $\hat{\epsilon}$.

The soft terms are computed from the scalar potential, which in our case reads ($a = T^\alpha, S, \phi, \text{matter fields}$).

$$V = e^G \left(G_A (G^{-1})^{A\bar{B}} G_{\bar{B}} - 3 \right) + \frac{g_X^2}{2} (K^A \varphi_A \phi_A + \delta_{GS} M_P^2)^2. \quad (4.3)$$

Since the soft parameters are relevant for low-energy phenomenology, it is more appropriate to express them *after the field redefinition* that brings the kinetic terms to their canonical forms as consistently done in the following.

Let us first consider the soft scalar masses that have the standard supergravity expression [20]

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{i\bar{j}}^2 &= (\tilde{m}_{i\bar{j}}^2)_F + (\tilde{m}_{i\bar{j}}^2)_D \\ &= \left(G_{i\bar{j}} - G^\alpha \hat{R}_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}} G^{\bar{\beta}} \right) m_{3/2}^2 + g_X \min(\varphi_i, \varphi_j) G_{i\bar{j}} \langle D \rangle, \end{aligned} \quad (4.4)$$

where $\hat{R}_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}}$ is the Riemann tensor of the Kähler space and $\langle D \rangle$ stands for the contribution from the D-term of the $U(1)_X$ gauge group,

$$\begin{aligned} D_X &= g_X (K_A \varphi_A \phi^A + \delta_{GS} M_P^2) \\ &= g_X \left(- \prod_{\alpha=1}^p t_\alpha^{n_\alpha^{(\phi)}} \phi \bar{\phi} + \min(\varphi_i, \varphi_j) K_{i\bar{j}} \Phi^i \bar{\Phi}^{\bar{j}} + \delta_{GS} M_P^2 \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

In the simple case with only one singlet field ϕ , expanding the scalar potential in powers of ϕ we get

$$V(\phi) = \tilde{m}_\phi^2 |\phi|^2 + \frac{1}{2} D^2, \quad (4.6)$$

⁽²⁾Our definition of Θ_α in (4.1) is different from that in [12].

where $\tilde{m}_\phi^2 = \left(1 + 3n_\phi^{(\alpha)}\Theta_\alpha^2\right)m_{3/2}^2$ is the F-term soft mass of ϕ induced by dilaton/moduli breaking. In (4.6) we used the fact that ϕ appears in the superpotential only through the Yukawa couplings to matter. The minimization of the potential (4.6) gives $g_X\langle D_X \rangle = \prod_{\alpha=1}^p t_\alpha^{-n_\phi^{(\alpha)}} \tilde{m}_\phi^2$. The D-breaking is induced by the soft mass $\tilde{m}_\phi^2$ which is generated by the F-type dilaton/moduli breaking. The breaking of $U(1)_X$ yields a massive real scalar field of mass $\sqrt{2}g_X\varepsilon M_P$.

In the following, we place ourselves in the case where

$$\partial_\alpha Z_{i\bar{j}}, \partial_{\bar{\alpha}} Z_{i\bar{j}}, \partial_\alpha Y_{ij} \simeq 0, \quad (4.7)$$

but still they have nontrivial associated modular weights. For the Yukawa couplings, this happens for example for functions of the form (keeping only an overall moduli field T) $Y \sim c + e^{-T}$ in the large radius (moduli) limit (see [12] for a more detailed discussion on this point). The Kähler off-diagonal terms $Z_{i\bar{j}}$ are related to Yukawas through (3.6) and the explicit moduli dependence is probably closely related to that of the Yukawas.

From (3.9), (4.1) and (4.4), one obtains the expression for the soft scalar mass matrices as follows,

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{m}_{i\bar{j}}^2}{m_{3/2}^2} = & \left(1 + \varphi_i + 3\Theta_\alpha^2(n_i^{(\alpha)} + \varphi_i n_\phi^{(\alpha)})\right) \delta_{ij} + \left[-\frac{1}{2}|\varphi_i - \varphi_j| + \frac{3}{2}(n_{i\bar{j}}^{(\alpha)} + \bar{n}_{i\bar{j}}^{(\alpha)})\Theta_\alpha^2\right. \\ & \left.- \sqrt{3}\Theta_\alpha(n_{i\bar{j}}^{(\alpha)}\theta_{ji}(\varphi_j - \varphi_i) + \bar{n}_{i\bar{j}}^{(\alpha)}\theta_{ij}(\varphi_i - \varphi_j)) - 3\Theta_\alpha\Theta_\beta n_{i\bar{j}}^{(\alpha)}\bar{n}_{i\bar{j}}^{(\beta)}\right] \hat{Z}_{i\bar{j}}^\Phi, \quad (4.8) \end{aligned}$$

where $\hat{Z}_{i\bar{j}}^\Phi = \prod_\alpha t_\alpha^{\frac{1}{2}(n_{i\bar{j}}^{(\alpha)} + \bar{n}_{i\bar{j}}^{(\alpha)})} Z_{i\bar{j}}^\Phi \hat{\varepsilon}^{|\varphi_i - \varphi_j|}$ and $\theta_{ij} = \theta(\varphi_i - \varphi_j)$. This general result simplifies in our case of physical interest, i.e. with the mass hierarchies given solely by the $U(1)_X$ symmetry. Using eq. (3.7) we find that the combination $n_i^{(\alpha)} + \varphi_i n_\phi^{(\alpha)}$ is flavour blind and we get

$$\tilde{m}_{i\bar{i}}^2 - \tilde{m}_{j\bar{j}}^2 = (\varphi_i - \varphi_j)m_{3/2}^2 \quad (4.9)$$

for $\Phi^i = Q^i, U^i, D^i, L^i, E^i$. Therefore the splitting in the diagonal elements of the sfermion masses is independent of the parameters Θ_α and proportional to the charge differences, which fix also the fermion masses. For example, in the Froggatt-Nielsen case ($\varphi_i \geq \varphi_j$ for $i \geq j$), we have $\frac{m_i^U}{m_j^U} \sim \hat{\varepsilon}^{q_{ij} + u_{ij}}$ and we get the fermion-sfermion mass predictions ($\tilde{m}_{q_i}^2 \equiv \tilde{m}_{q_{ii}}^2$, etc.)

$$m_{3/2}^2 \ln \frac{m_i^U}{m_j^U} = (\tilde{m}_{q_i}^2 - \tilde{m}_{q_j}^2 + \tilde{m}_{u_i}^2 - \tilde{m}_{u_j}^2) \ln \hat{\varepsilon} \quad (4.10)$$

and similar relations for down-quarks and leptons. Also, using (4.9), we deduce that the higher the $U(1)_X$ charge (i.e. the smaller the corresponding Yukawa couplings) the larger the soft scalar mass. Hence, in that model the spectrum of the matter field superpartners has *inverted hierarchy* compared to that of the associated fermions.

Furthermore, combining (3.4) and (4.8) and introducing the tree-level gaugino masses $M = \sqrt{3} \sin \theta m_{3/2}$, we obtain the relations

$$\tilde{m}_{q_i}^2 + \tilde{m}_{u_j}^2 + \tilde{m}_{h_2}^2 = M^2 + (q_i + u_j + h_2)m_{3/2}^2. \quad (4.11)$$

Similar relations are obtained for d-type squarks and sleptons. Notice that the combination of charges in the r.h.s. is precisely the power of $\hat{e}$ in the effective Yukawa couplings. So, since the top Yukawa is of $O(1)$, $q_3 + u_3 + h_2 = 0$.

Due to the non-diagonal form of the Kähler potential, the scalar mass matrices are not diagonal, in contrast to the usual computations in the literature. Moreover, under a stronger assumption $n_{\phi, i\bar{j}}^{(\alpha)} = \bar{n}_{\phi, i\bar{j}}^{(\alpha)} = 0$, we find that the flavour-dependent effects in the off-diagonal terms do not depend on the unknown parameters $\Theta_\alpha, n_i^{(\alpha)}$. Remarkably enough, in this case the contribution to $(\tilde{m}_{i\bar{j}}^2)_F$ from supersymmetry breaking along the ϕ direction to (4.8) vanishes in the leading order in $\langle \phi \rangle / M_P$.

All these equations for scalar masses are to be understood at energies of the order M_P , and lead to low energy relations after renormalization.

The non-diagonal terms in K and W affect the trilinear soft terms V_{ijk} , too. The general expression for the trilinear terms corresponding to the fields with $\langle G^i \rangle = \langle G_i \rangle = 0$ is [20]

$$V_{ijk} = \left[(G^A D_A + 3) \frac{W_{ijk}}{W} \right] m_{3/2}^2, \quad (4.12)$$

where D stands for the covariant derivative in the Kähler manifold. Here we give only the expressions for the most constrained case, i.e. where eqs.(3.7) and (4.7) are valid, with $n_{\phi, ij}^{(\alpha)} = 0$. Once again we work with canonical normalization of the scalar fields. With this convention and in the leading order of the small parameter $\hat{e}$ the connections in the covariant derivatives in (4.12) take the simple form

$$\begin{aligned} G^\alpha \Gamma_{\alpha i}^j &= \sqrt{3} n_i^{(\alpha)} \Theta_\alpha \delta_i^j + \frac{\sqrt{3}}{2} |\varphi_i - \varphi_j| n_\phi^{(\alpha)} \Theta_\alpha \hat{e}^{|\varphi_i - \varphi_j|} Z_{i\bar{j}}^\Phi, \\ G^\phi \Gamma_{\phi i}^j &= (1 - \sqrt{3} n_\phi^{(\alpha)} \Theta_\alpha) (\varphi_i - \varphi_j) \theta(\varphi_i - \varphi_j) \hat{e}^{|\varphi_i - \varphi_j|} Z_{i\bar{j}}^\Phi. \end{aligned} \quad (4.13)$$

The final result for the triscalar coefficient V_{ia}^U , for example, reads (with $\hat{Y}^U = e^{K/2} Y^U$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_{3/2}} V_{ia}^U &= \left[-\sqrt{3} \sin \theta + (q_i + u_a + h_2) \right] \hat{Y}_{ia}^U \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\sum_j |q_i - q_j| Z_{i\bar{j}}^Q \hat{Y}_{ja} \hat{e}^{|q_i - q_j|} + \sum_b |u_b - u_a| Z_{a\bar{b}}^U \hat{Y}_{ib} \hat{e}^{|u_b - u_a|} \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

and similar expressions hold for V^D and V^L with obvious replacements. Notice that the matrices $\hat{Y}$ have hierarchical entries and that the last line in (4.14) contain terms not directly proportional to the Yukawa coupling $\hat{Y}_{ia}$, but rotated in the flavour space.

The last terms in (4.14) come from $G^\phi D_\phi$, namely, from supersymmetry breaking along the ϕ direction. It is useful to introduce the matrices

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_{3/2}}(A_L)_{ij} &= (q_i + \frac{h_2}{2})\delta_{ij} - \frac{1}{2}|q_i - q_j|Z_{i\bar{j}}^Q \hat{e}^{|q_i - q_j|} , \\ \frac{1}{m_{3/2}}(A_R)_{ba} &= (u_a + \frac{h_2}{2})\delta_{ab} - \frac{1}{2}|u_a - u_b|Z_{a\bar{b}}^U \hat{e}^{|u_a - u_b|} . \end{aligned} \quad (4.15)$$

Then

$$V_{ia}^U = -M\hat{Y}^U + A_L\hat{Y}^U + \hat{Y}^U A_R . \quad (4.16)$$

This parametrization was already used in [21] in the context of the models proposed in [12]. The simplicity of the results follows from nontrivial cancellations between G^α and G^ϕ contributions due to eq.(3.7).

As a particular case, in the absence of the $U(1)_X$ symmetry we recover the minimal MSSM. Therefore, in this case, imposing appropriate modular transformations for the renormalizable Yukawa couplings and under the assumption that they do not depend explicitly on moduli fields, we get *family-universal* soft terms related by

$$\begin{aligned} \tilde{m}_q^2 + \tilde{m}_u^2 + \tilde{m}_{h_2}^2 &= \tilde{m}_q^2 + \tilde{m}_d^2 + \tilde{m}_{h_1}^2 = \tilde{m}_l^2 + \tilde{m}_e^2 + \tilde{m}_{h_1}^2 = M^2 , \\ A^U &= A^D = A^E = -M . \end{aligned} \quad (4.17)$$

These simple relations appeared already in the literature in different contexts [12, 22] and can be explained here by the modular invariance conditions of the Yukawa couplings combined with dilaton/moduli breaking. It is interesting to compare our results with those obtained in [22], where the role of the horizontal symmetry is played by modular symmetries. The essential difference is in the predictions for the soft terms which in [22] turn out to be flavour blind.

5 Mass terms in the Higgs sector

In this section we discuss the predictions for the mass parameters of the Higgs sector, the soft masses m_1^2, m_2^2 , the μ parameter of MSSM and its associated soft breaking term $B\mu$.

In order to avoid the usual μ -problem of the MSSM, we assume here that both the μ and $B\mu$ terms are effective interactions resulting from the Kähler potential after supersymmetry breaking [23]. Actually, a $H_1 H_2$ term in the superpotential is forbidden by the $U(1)_X$ symmetry if $h_1 + h_2 < 0$ (in the case of only one singlet field considered in this section). For $h_1 + h_2 = 0$, the absence of the corresponding mass term in low energy string models is equivalent (after decoupling of heavy modes) to the presence of massless Higgs doublets in the effective theory. Instead, for $h_1 + h_2 > 0$, an effective μ -term of $O(\epsilon^{h_1+h_2} M_P)$ would be possible, which is inconsistent with the proper breaking of the electroweak symmetry. This μ -problem could be solved by further symmetries, e.g. modular symmetries (provided that they would allow for appropriate terms in the

Kähler potential, of course). The allowed values of $(h_1 + h_2)$ are strongly correlated to the generation of fermion mass hierarchies in this approach with horizontal $U(1)_X$ symmetry and Green-Schwarz anomaly cancellation. One derives [1] - [5] the relation $(h_1 + h_2) \ln \epsilon \simeq \text{Tr} \ln(Y^D/Y^E)$, which, after substituting the physical fermion masses, favours the values $(h_1 + h_2) = 0, -1$, with the values $(+1)$ and (-2) marginally allowed.

For the purpose of generating the μ and $B\mu$ terms, we consider here two classes of Kähler potentials for the Higgs doublets. As a first instance, we just extend the general approach of sections 2 and 4 to include a $H_1 H_2$ term in the Kähler potential, with the $U(1)_X$ symmetry restored by powers of ϕ or $\bar{\phi}$, as follows:

$$K = \dots + \prod_{\alpha=1}^p t_{\alpha}^{n_1^{(\alpha)}} |H_1|^2 + \prod_{\alpha=1}^p t_{\alpha}^{n_2^{(\alpha)}} |H_2|^2 + Z \left(\left(\frac{\phi}{M_P} \right)^{h_1+h_2} H_1 H_2 \theta(h_1 + h_2) + \prod_{\alpha=1}^p t_{\alpha}^{n_1^{(\alpha)}+n_2^{(\alpha)}} \left(\frac{\bar{\phi}}{M_P} \right)^{-(h_1+h_2)} H_1 H_2 \theta(-h_1 - h_2) + h.c. \right), \quad (5.1)$$

where Z is of $O(1)$ and the dots stand for terms independent of H_1, H_2 . Modular invariance of eq. (5.1) demands the following relation

$$n_1^{(\alpha)} + n_2^{(\alpha)} + (h_1 + h_2) n_{\phi}^{(\alpha)} = 0, \quad (5.2)$$

if Z is assumed to be t_{α} -independent. In turn, imposing (5.2) forbids the presence of the μ -term directly in the superpotential, even in the case $h_1 + h_2 > 0$. From (5.1), one expects the μ -term to be of the order $O(\epsilon^{|h_1+h_2|} m_{3/2})$, also favouring small values of $(h_1 + h_2)$.

With the Kähler potential completed as in eqs. (5.1) and (5.2), we return to the question of the uniqueness of the solution (2.5) for the vanishing of the D-term of the $U(1)_X$ group. It reads

$$D_X = g_X \left(-\frac{\partial K}{\partial \phi} \phi + \sum_{i=1,2} h_i \frac{\partial K}{\partial H_i} H_i + \dots + \delta_{GS} M_P^2 \right). \quad (5.3)$$

The vanishing of the $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ D-terms requires $\frac{\partial K}{\partial \ln H_1} = \frac{\partial K}{\partial \ln H_2}$, hence, for the canonically normalized Higgs fields, $H_1 = \pm H_2 = v$. In the absence of any relevant term in the superpotential, there are continuously degenerate solutions satisfying $\delta_{GS} M_P^2 = \phi^2 - (h_1 + h_2) v^2$. This degeneracy is removed by supersymmetry breaking assumed in the dilaton and moduli sector, which yields the scale $m_{3/2} \ll \epsilon M_P$ and the soft terms. The resulting scalar potential along the flat direction can be analysed through an expansion in powers of ϵ . At leading order, we get (for $h_1 + h_2 \neq 0$)

$$V = (2 + h_1 + h_2) m_{3/2}^2 v^2 + \text{const}. \quad (5.4)$$

Therefore, for $(h_1 + h_2) \geq -2$, the minimum is for $\tilde{\phi} = \delta_{GS}^{1/2} M_P$, $v = 0$ and $D_X = \tilde{m}_{\phi}^2 / g_X$. The same conclusion holds for $h_1 + h_2 = 0$, as will be evident from the discussion below eq. (5.10). For $(h_1 + h_2) = -2$, the continuous degeneracy persists at this

level of approximation. For $(h_1 + h_2) < -2$, the minimum of V is for $\phi = 0$ and $(h_1 + h_2)v^2 = \delta_{GS}M_P^2$, which is physically uninteresting.

We proceed to calculate the effective lagrangian in the Higgs doublet sector. The scalar terms are obtained from (4.4) and the μ and $B\mu$ effective parameters are derived from the general supergravity expressions for a fermion supersymmetric mass term $(M_{1/2})_{ij}$ and analytic scalar soft mass $(M_0^2)_{ij}$ (i, j are matter indices) [20]

$$\begin{aligned} (M_{1/2})_{ij} &= m_{3/2} \left(D_i G_j + \frac{1}{3} G_i G_j \right) , \\ (M_0^2)_{ij} &= m_{3/2}^2 (G^A D_A + 2) D_i G_j . \end{aligned} \quad (5.5)$$

We find the following results:

$$\begin{aligned} \tilde{m}_i^2 &= \left(1 + h_i + 3\Theta_\alpha^2 \left(n_i^{(\alpha)} + h_i n_\phi^{(\alpha)} \right) \right) m_{3/2}^2 , \\ \mu &= m_{3/2} (1 + (h_1 + h_2)\theta(-h_1 - h_2)) Z \epsilon^{|h_1+h_2|} , \\ B &= m_{3/2} (2 + (h_1 + h_2)\theta(h_1 + h_2)) . \end{aligned} \quad (5.6)$$

The simple prediction $B = 2$ for $(h_1 + h_2) \leq 0$ arises from a cancellation between the geometric and D_X -term contributions to the $B\mu$ analytic coupling, due to the relation (5.2). The latter is absent for $h_1 + h_2 > 0$ because of the analyticity of the coupling $H_1 H_2 (\phi/M_P)^{h_1+h_2}$. Though the parameters $\tilde{m}_1^2$ and $\tilde{m}_2^2$ depend on the unknown quantities Θ_α^2 , their sum does not

$$\tilde{m}_1^2 + \tilde{m}_2^2 = (2 + h_1 + h_2) m_{3/2}^2 . \quad (5.7)$$

In order to decide if these predictions are consistent with the requirements of $SU(2) \otimes U(1)$ breaking, one has to renormalize the parameters down to the Fermi scale. In our models the relevant parameters take a very simple form. As discussed in section 3, $Y_{33}^U \sim O(1)$ implies $h_2 + q_3 + u_3 = 0$, which, in turn, gives

$$\begin{aligned} A_t &= -M = -\sqrt{3} m_{3/2} \sin \theta , \\ \tilde{m}_{h_2}^2 + \tilde{m}_{U_3}^2 + \tilde{m}_{Q_3}^2 &= M^2 . \end{aligned} \quad (5.8)$$

Therefore the low energy parameters in the Higgs sector depend only on their initial values (5.6), on the top mass, relatively well-known, and on the gaugino masses parameter, M . One gets the following approximate results:

$$\begin{aligned} (\tilde{m}_1^2 + \tilde{m}_2^2)_{|M_Z} &= (\tilde{m}_1^2 + \tilde{m}_2^2) - \frac{1}{2} (10\rho - 2 - \rho^2) M^2 , \\ B_{|M_Z} &= B - \frac{1-\rho}{2} M , \\ \mu_{|M_Z}^2 &= 2(1-\rho)^{1/2} \mu^2 , \end{aligned} \quad (5.9)$$

where $\rho = m_t^2/m_{t_{crit}}^2$ is the ratio between the physical and the infrared fixed-point values of the (running) top mass squared. Let us consider the following necessary

conditions for $SU(2) \otimes U(1)$ breaking in the MSSM model:

$$\begin{aligned} 2|B\mu|_{M_Z} &\leq (\tilde{m}_1^2 + \tilde{m}_2^2 + 2\mu^2)_{M_Z} , \\ B^2\mu^2_{M_Z} &\geq (\tilde{m}_1^2 + \mu^2)(\tilde{m}_2^2 + \mu^2)_{M_Z} . \end{aligned} \quad (5.10)$$

For $(h_1 + h_2) = -1$, $\mu = 0$ indicating that, in this case, the gauged symmetry $U(1)_X$ implies an accidental $U(1)_{PQ}$ symmetry. It is well-known that this symmetry is inconsistent with phenomenology.

For $(h_1 + h_2) = 0$, one has $\tilde{m}_1^2 + \tilde{m}_2^2 + 2\mu^2 - 2B\mu = 2(1 - Z)^2 m_{3/2}^2$ at the unification scale. This implies (for $Z \neq 1$) that the scalar potential at this scale has a minimum for $H_1 = \pm H_2 = v = 0$. The relations (5.9) are satisfied if $|M| < (1 - Z)m_{3/2}$. In this case we predict low values for $\tan \beta$.

For $(h_1 + h_2) = 1$, $B = 3m_{3/2}$, $\mu = Z\epsilon m_{3/2}$, $\tilde{m}_1^2 + \tilde{m}_2^2 = 3m_{3/2}^2$. The breaking of $SU(2) \otimes U(1)$ then needs a fine-tuning between M and $m_{3/2}$ (to $O(\epsilon^2)$), with $\tan \beta \sim O(1/\epsilon^2)$.

The case $(h_1 + h_2) = -2$, already plagued by vacuum degeneracy at high energies, leads to $B = 2m_{3/2}$, $\mu \sim \epsilon^2 m_{3/2}$ and $\tilde{m}_1^2 + \tilde{m}_2^2 = 0$. These values are inconsistent with (5.10) even after renormalization.

Summarizing, in this class of models, only those with $(h_1 + h_2) = 0$ seem to stand up to $SU(2) \otimes U(1)$ breaking requirements, if $M < (1 - Z)m_{3/2}$. As discussed in section 7, in this case the gaugino mass can help to suppress FCNC effects. Radiative corrections will affect to some extent the constraints (5.10), but a detailed phenomenological discussion of the Higgs sector is beyond the scope of this paper.

We now turn to a model which has been found in $(2, 2)$ superstring compactification [24]. The Kähler potential of such models is

$$K = -\ln [(T + \bar{T})(U + \bar{U}) - (H_1 + \bar{H}_2)(\bar{H}_1 + H_2)] + \dots , \quad (5.11)$$

where T, U are two moduli fields and the dots stand for terms independent of H_1, H_2 . The $U(1)_X$ symmetry of (5.11) demands $(h_1 + h_2) = 0$. The modular transformations associated to T and U now read

$$\begin{aligned} T &\rightarrow \frac{aT - ib}{icT + d} , \\ H_{1,2} &\rightarrow \frac{1}{icT + d} H_{1,2} , \\ U &\rightarrow U - \frac{ic}{icT + d} H_1 H_2 . \end{aligned} \quad (5.12)$$

The soft terms are calculated to be

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{h_i}^2 &= \left(1 + h_i - 3(\Theta_T^2 + \Theta_U^2) + 3h_i(n_\phi^{(T)}\Theta_T^2 + n_\phi^{(U)}\Theta_U^2) \right) m_{3/2}^2 , \\ \mu &= \left(1 + \sqrt{3}(\Theta_T + \Theta_U) \right) m_{3/2} , \\ B\mu &= \left(2 + 2\sqrt{3}(\Theta_T + \Theta_U) + 6\Theta_T\Theta_U \right) m_{3/2}^2 . \end{aligned} \quad (5.13)$$

This case is much less predictive than the previous one (the soft terms depend on the unknown parameters $\Theta_{T,U}$), mainly because of the lack of a relation as (5.2) between the moduli weights and the $U(1)_X$ charges. As noticed in [12] and [25], the inequality (5.10) is saturated at the classical level, corresponding to a flat direction in the classical potential, even if the degeneracy between $\tilde{m}_1^2$ and $\tilde{m}_2^2$ is removed by the D_X -terms. From (5.9) one deduces that in order to fulfill the first condition in (5.10), one needs $M/m_{3/2} \sim O(\frac{1}{10})$, namely, a moduli dominated supersymmetry breaking. Furthermore, from the second condition in (5.10) and the requirement of the proper value for M_Z we get $\tilde{m}_2^2 \sim O(-M_Z^2)$ and low $\tan \beta$ values. It follows from eq.(5.8) that $\tilde{m}_{Q_3}, \tilde{m}_{U_3} \sim O(M_Z)$. Consequently, in this case we expect light gauginos and light third generation scalars.

It is possible to arbitrarily extend the model to $(h_1 + h_2) > 0$ by replacing in (5.11) and (5.12), $H_1 H_2 \rightarrow \phi^{h_1+h_2} H_1 H_2$. But there is no theoretical basis for such models anymore.

6 $U(1) \otimes U'(1)$ horizontal symmetry

It has been demonstrated in ref. [10] that, in models with two $U(1) \otimes U'(1)$ symmetries, further suppression of the FCNC effects is possible.

Hence, we now extend our study to this class of models. We introduce two SM singlet fields ϕ_1 and ϕ_2 . Their charges can be chosen to be $\phi_1(-1, 0)$ and $\phi_2(0, -1)$ (except for the case of proportional charges). Then, no superpotential term $W(\phi_1, \phi_2)$ can be written for zero vev's of matter fields; the vev's of the fields ϕ_1, ϕ_2 are fixed by the Fayet-Iliopoulos term. The superpotential W and the Kähler potential K (with $\varepsilon_1 = \phi_1/M_P$ and $\varepsilon_2 = \phi_2/M_P$) are:

$$W = \sum_{ij} \left[Y_{ij}^U \theta_{q_i, u_j, h_2} \theta_{q'_i, u'_j, h'_2} \varepsilon_1^{q_i+u_j+h_2} \varepsilon_2^{q'_i+u'_j+h'_2} Q^i U^j H_2 + \right. \\ \left. Y_{ij}^D \theta_{q_i, d_j, h_1} \theta_{q'_i, d'_j, h'_1} \varepsilon_1^{q_i+d_j+h_1} \varepsilon_2^{q'_i+d'_j+h'_1} Q^i D^j H_1 + \right. \\ \left. Y_{ij}^E \theta_{\ell_i, e_j, h_1} \theta_{\ell'_i, e'_j, h'_1} \varepsilon_1^{\ell_i+e_j+h_1} \varepsilon_2^{\ell'_i+e'_j+h'_1} L^i E^j H_1 \right],$$

$$K = K_0 (T_\alpha, \bar{T}^{\bar{\alpha}}) - \ln (S + \bar{S}) + \prod_{\alpha=1}^p t_\alpha^{n_\alpha^{(\alpha)}} \phi_1 \bar{\phi}_1 + \prod_{\alpha=1}^p t_\alpha^{n_\alpha^{(\alpha)}} \phi_2 \bar{\phi}_2$$

$$+ \sum_{\Phi^i=Q^i, U^i, D^i, L^i, E^i} K_{i\bar{j}}^\Phi \Phi^i \bar{\Phi}^{\bar{j}},$$

$$K_{i\bar{j}}^\Phi = \delta_{i\bar{j}} \prod_{\alpha=1}^p t_\alpha^{n_\alpha^{(\alpha)}} + Z_{i\bar{j}}^\Phi \left[\theta_{ij} \theta'_{ij} \prod_{\alpha=1}^p t_\alpha^{n_\alpha^{(\alpha)}} \varepsilon_1^{\varphi_i - \varphi_j} \varepsilon_2^{\varphi'_i - \varphi'_j} \right. \\ + \theta_{ji} \theta'_{ij} \prod_{\alpha=1}^p t_\alpha^{n_\alpha^{(\alpha)} + n_{\phi_1}^{(\alpha)} (\varphi_j - \varphi_i)} \bar{\varepsilon}_1^{\varphi_j - \varphi_i} \varepsilon_2^{\varphi'_i - \varphi'_j} \\ + \theta_{ij} \theta'_{ji} \prod_{\alpha=1}^p t_\alpha^{n_\alpha^{(\alpha)} + n_{\phi_1}^{(\alpha)} (\varphi_i - \varphi_j)} \varepsilon_1^{\varphi_i - \varphi_j} \bar{\varepsilon}_2^{\varphi'_j - \varphi'_i} \\ \left. + \theta_{ji} \theta'_{ji} \prod_{\alpha=1}^p t_\alpha^{n_\alpha^{(\alpha)}} \bar{\varepsilon}_1^{\varphi_j - \varphi_i} \bar{\varepsilon}_2^{\varphi'_j - \varphi'_i} \right] + \dots, \quad (6.1)$$

where the previous notation is used and we define $\theta_{(a,b,c)} = \theta(a+b+c)$, $\theta_{ij} = \theta(\varphi_i - \varphi_j)$ and $\theta'_{ij} = \theta(\varphi'_i - \varphi'_j)$.

The D -term contributions to the scalar potential are,

$$V_D = \frac{g_1^2}{2} (K_i \varphi_i \Phi^i - K_{\phi_1} \phi_1 + \xi_1)^2 + \frac{g_2^2}{2} (K_i \varphi'_i \Phi^i - K_{\phi_2} \phi_2 + \xi_2)^2,$$

where ξ_1, ξ_2 are the Fayet-Iliopoulos terms. We can, of course, always define one linear combination of the two $U(1)$'s which is anomaly free, but we prefer to work in a basis where the ϕ_i charges are simple. Only the simplest and most predictive case $n_{\Phi, ij}^{(\alpha)} = n_{\Phi, i\bar{j}}^{(\alpha)} = \bar{n}_{\Phi, i\bar{j}}^{(\alpha)} = 0$ for $\Phi = Q, U, D, E, L$ is considered here.

In analogy with the case of one $U(1)$ symmetry, the relation between horizontal charges and modular weights reads:

$$n_j^{(\alpha)} - n_i^{(\alpha)} = n_{\phi_1}^{(\alpha)} (\varphi_i - \varphi_j) + n_{\phi_2}^{(\alpha)} (\varphi'_i - \varphi'_j). \quad (6.2)$$

The relations (6.2) enable us to rewrite the matter field metric as:

$$K_{i\bar{j}}^\Phi = \prod_{\alpha=1}^p t_\alpha^{(n_i^{(\alpha)} + n_j^{(\alpha)})/2} \left[\delta_{ij} + \hat{Z}_{i\bar{j}}^\Phi \right],$$

where

$$\begin{aligned} \hat{Z}_{i\bar{j}}^\Phi &= Z_{i\bar{j}}^\Phi \prod_{\alpha=1}^p t_\alpha^{\frac{1}{2}(n_{\phi_1}^{(\alpha)}|\varphi_i - \varphi_j| + n_{\phi_2}^{(\alpha)}|\varphi'_i - \varphi'_j|)} \\ &\quad \left[\theta_{ij} \theta'_{ij} \varepsilon_1^{\varphi_i - \varphi_j} \varepsilon_2^{\varphi'_i - \varphi'_j} + \theta_{ji} \theta'_{ij} \bar{\varepsilon}_1^{\varphi_j - \varphi_i} \bar{\varepsilon}_2^{\varphi'_i - \varphi'_j} + \right. \\ &\quad \left. \theta_{ij} \theta'_{ji} \varepsilon_1^{\varphi_i - \varphi_j} \bar{\varepsilon}_2^{\varphi'_j - \varphi'_i} + \theta_{ji} \theta'_{ji} \bar{\varepsilon}_1^{\varphi_j - \varphi_i} \bar{\varepsilon}_2^{\varphi'_j - \varphi'_i} \right]. \end{aligned}$$

The soft scalar mass matrices are as follows:

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{i\bar{j}}^2 &= \left(G_{i\bar{j}} - G^A \hat{R}_{i\bar{j}A\bar{B}} G^{\bar{B}} \right) m_{3/2}^2 + \\ &\quad g_1 \min(\varphi_i, \varphi_j) G_{i\bar{j}} \langle D_1 \rangle + g_2 \min(\varphi'_i, \varphi'_j) G_{i\bar{j}} \langle D_2 \rangle, \end{aligned} \quad (6.3)$$

where $A, B = \alpha, \phi_1, \phi_2$. In absence of the term $W(\phi_1, \phi_2)$ in the superpotential, one finds by minimization of the scalar potential

$$g_i \prod_{\alpha=1}^p t_\alpha^{n_{\phi_i}^{(\alpha)}} \langle D_i \rangle = \tilde{m}_{\phi_i}^2, \text{ where } \tilde{m}_{\phi_i}^2 = (1 + 3n_{\phi_i}^{(\alpha)} \Theta_\alpha^2) m_{3/2}^2.$$

The final expression for the scalar masses in the canonical basis reads:

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{i\bar{j}}^2 &= m_{3/2}^2 \left(\left(1 + \varphi_i + \varphi'_i + 3\Theta_\alpha^2 (n_i^{(\alpha)} + \varphi_i n_{\phi_1}^{(\alpha)} + \varphi'_i n_{\phi_2}^{(\alpha)}) \right) \delta_{ij} \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} (|\varphi_i - \varphi_j| + |\varphi'_i - \varphi'_j|) \hat{Z}_{i\bar{j}}^\Phi \\ &\quad \left. - (\varphi_i - \varphi_j)(\varphi'_j - \varphi'_i) \theta_{ij} \theta'_{ji} \hat{Z}_{i\bar{j}}^\Phi - (\varphi_j - \varphi_i)(\varphi'_i - \varphi'_j) \theta_{ji} \theta'_{ij} \hat{Z}_{i\bar{j}}^\Phi \right). \end{aligned} \quad (6.4)$$

As for the one $U(1)_X$ symmetry case, the only dependence on the unknown parameters $\Theta_\alpha, n_i^{(\alpha)}$ is contained in a diagonal flavour independent term. This is a consequence of the eq. (6.2) which leads to nontrivial cancellations between F-terms and D-terms. Now, however, supersymmetry breaking along directions G^{ϕ_i} do contribute to the soft masses; in eq. (6.4) the last two lines come from $G^{\phi_1} G^{\phi_2} \frac{\partial K_{i\bar{j}}}{\partial \phi_1 \partial \phi_2} + h.c.$

For the trilinear coefficient $\hat{V}_{ia}^U$, we obtain, by using (6.2):

$$\begin{aligned} V_{ia}^U &= m_{3/2} \left(\left(-\sqrt{3} \sin \theta + (q_i + u_a + h_2) + (q'_i + u'_a + h'_2) \right) \hat{Y}_{ia}^U \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} (|q_i - q_k| + |q'_i - q'_k|) \hat{Z}_{i\bar{k}}^\Phi \hat{Y}_{ka}^U \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (|u_a - u_c| + |u'_a - u'_c|) \hat{Z}_{a\bar{c}}^\Phi \hat{Y}_{ic}^U \right), \end{aligned} \quad (6.5)$$

where we have defined $\hat{Y}^U = e^{K/2} Y^U$, as in section 4. It is straightforward to check that, using the results (6.4) and (6.5), we get predictions similar to eqs.(4.9) and (4.11) with $\varphi_i \rightarrow \varphi_i + \varphi'_i$.

An important consequence of eqs.(6.4) and (6.5) is that the flavour off-diagonal terms can vanish only if $\varphi_i = \varphi_j$ and $\varphi'_i = \varphi'_j$. In this case, also the diagonal terms are flavour independent. However, the corresponding fermion mass matrix will not

have the required hierarchical structure. Thus, it is impossible to have the sfermion mass matrices *diagonal and degenerate* and simultaneously to keep the hierarchical structure of the corresponding fermion mass matrices. This result can be generalized to an arbitrary number of abelian symmetries. It is, nevertheless, still possible to have degeneracy between some *diagonal entries* in sfermion mass matrices $\tilde{m}_i^2 = \tilde{m}_j^2$ by choosing models with $\varphi_i + \varphi'_i = \varphi_j + \varphi'_j$. We shall return to this discussion in the next section.

7 Phenomenological aspects

We have proposed a class of supergravity models with horizontal abelian gauge symmetries and modular invariance in which the hierarchies in the fermion mass spectrum are entirely due to the $U(1)$ symmetries. They have several interesting phenomenological aspects which can be grouped as very general qualitative features and more model dependent results. On the general side, the most important are :

i) high predictivity for the supersymmetric spectrum; the sfermion spectrum and the Higgs boson spectrum is strongly correlated with the fermion masses and mixing angles (in the simplest case of one $U(1)$ it is entirely determined) and shows the family dependence inverse to fermions (lighter sfermions correspond to heavier fermions).

ii) generic presence of flavour mixing effects already at the Planck scale in the squark mass soft terms and trilinear terms; again, these effects are strongly correlated with the pattern of fermion masses and not only at the order of magnitude level (like in models with $U(1)$ symmetries alone) but with the relative magnitude of different terms fixed by the horizontal charges.

iii) qualitative consistency with the present experimental constraints, which is remarkable in view of the rigidity of the models; in particular one can construct models which give FCNC effects at low energy suppressed strongly enough to meet the experimental limits. However, at the same time our class of models typically gives FCNC effects which are stronger than expected from the universality ansatz at the Planck scale and with predictable dependence on the up-down, left-right sectors. Thus, this class of models is suggestive of very rich future phenomenology in the domain of FCNC effects, once the experimental sensitivity is improved. One should stress that we expect FCNC effects to be only little below the present limits.

On the more model dependent side, we can distinguish the two cases of one $U(1)$ and two $U(1)$ symmetries. With one $U(1)$ our results are particularly definite. The only acceptable $U(1)$ charge assignment for the Higgs fields is $h_1 + h_2 = 0$. The FCNC effects are predicted to be large, although still marginally acceptable for certain charge assignments. They have been discussed in some detail in ref. [11], [26]) and we do not repeat this discussion here. One should stress that with the moduli-dominated supersymmetry breaking, i.e. with small strong interaction renormalization effects in the RG running from M_P to M_Z (see section 5) the FCNC effects are indeed at the border line of the present experimental limits [27] for $(\delta_{MM}^{u,d})_{1,2} = \frac{(\Delta M_{1,2}^{u,d})^2}{M_{av}^2}$

($M = L, R$) and $\delta_{1,2}^{u,d} = \sqrt{(\delta_{LL}^{u,d})_{1,2}(\delta_{RR}^{u,d})_{1,2}}$ (defined in the quark mass diagonal basis; M_{av} is an averaged squark mass).

It was shown in [10] that the constraints from $K^0 - \bar{K}^0$ mixing can be satisfied in models with two $U(1)$ symmetries and two mass scales. Models with two $U(1)$ symmetries give, of course, more freedom in the $U(1)$ charge assignments consistent with the pattern of Yukawa matrices and, in consequence, ease the problem of FCNC effects.

One can identify certain qualitative features of such models. One way to suppress FCNC is to impose some partial degeneracy for the diagonal entries in the squark masses. One can see on general grounds that it is the diagonal non-degeneracy in the $U(1)$ basis which is the main source of FCNC effects. Let us suppose that the Cabibbo angle λ is obtained by diagonalizing Y^U (Y^D). Then in the quark physical basis $(\delta_{LL}^u)_{12} \left((\delta_{LL}^d)_{12} \right) \sim \max\left(\frac{\tilde{m}_1^2 - \tilde{m}_2^2}{M_{av}^2} V_{us}, \frac{(\tilde{m}^Q)_{12}^2}{M_{av}^2}\right) \simeq V_{us}$. This prediction seems to be valid for any model based on an arbitrary number of abelian horizontal symmetries. Too large a $D^0 - \bar{D}^0$ mixing is predicted (the $K^0 - \bar{K}^0$ mixing can be suppressed as in [10] or as in our example below). In our class of models, this result can be avoided by a proper choice of charges. Indeed, with $q_1 + q'_1 = q_2 + q'_2$ one has $\tilde{m}_1^2 = \tilde{m}_2^2$ and the problem disappears.

We need to check if this charge assignment is consistent with Yukawa matrices. Writing $Y_{ia}^U / Y_{33}^U \sim \varepsilon_1^{q_{13}+u_{a3}} \varepsilon_2^{q'_{13}+u'_{a3}} \Theta(q_i + u_a + h_2) \Theta(q'_i + u'_a + h'_2)$, etc. one can check that, after imposing $q_1 + q'_1 = q_2 + q'_2$, we get $V_{us} \sim (\varepsilon_1 / \varepsilon_2)^{q'_{12}}$. So, we necessarily need two mass scales. It is easy to construct an acceptable explicit model. We choose $\varepsilon_1 = \lambda$, $\varepsilon_2 = \lambda^2$ and the charge differences

$$\begin{aligned} q_{13} = 1, q_{23} = 2, u_{13} = 5, u_{23} = 2, d_{13} = 3, d_{23} = 0, \\ q'_{13} = 1, q'_{23} = 0, u'_{13} = 0, u'_{23} = 0, d'_{13} = -1, d'_{23} = 0. \end{aligned} \quad (7.1)$$

The quark mass matrices are then of the form

$$Y^U \sim \begin{pmatrix} \lambda^8 & \lambda^5 & \lambda^3 \\ \lambda^7 & \lambda^4 & \lambda^2 \\ \lambda^5 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}, Y^D \sim \begin{pmatrix} \lambda^4 & \lambda^3 & \lambda^3 \\ 0 & \lambda^2 & \lambda^2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.2)$$

For the squark masses we get

$$\begin{aligned} (\tilde{m}_{LL})^2 &\sim \tilde{m}^2 \begin{pmatrix} 1 & \lambda^3 & \lambda^3 \\ \lambda^3 & 1 & \lambda^2 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}, \\ (\tilde{m}_{RR}^u)^2 &\sim \tilde{m}^2 \begin{pmatrix} 1 & \lambda^3 & \lambda^5 \\ \lambda^3 & 1 & \lambda^2 \\ \lambda^5 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}, (\tilde{m}_{RR}^d)^2 \sim \tilde{m}^2 \begin{pmatrix} 1 & \lambda^5 & \lambda^3 \\ \lambda^5 & 1 & 0 \\ \lambda^3 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

From the assignment $q_1 + q'_1 = q_2 + q'_2$ we get $(\tilde{m}_{LL})_{11}^2 = (\tilde{m}_{LL})_{22}^2$. The charge assignment (7.1) gives also $d_2 = d_3$ and $d'_2 = d'_3$. Therefore, $(\tilde{m}_{RR}^d)_{22}^2 = (\tilde{m}_{RR}^d)_{33}^2$.

and $(\tilde{m}_{RR}^d)_{23}^2 = (\tilde{m}_{RR}^d)_{32}^2$. The most important FCNC effects remain in $(\delta_{LL}^{u,d})_{12} \sim \lambda^3$, $(\delta_{RR}^u)_{12} \sim \lambda^3$, $(\delta_{RR}^d)_{12} \sim \lambda^5$ and $\delta_{12}^d \sim \lambda^4$. These signals are below the present experimental bounds but can be tested in the next generation of experiments.

Finally, we address the question of new supersymmetric phases which may be dangerous for CP violations. On general grounds, the soft mass matrices for left and right handed squarks are hermitian, i.e. the diagonal terms are real. In the flavour off-diagonal terms (in the quark mass diagonal basis) arbitrary phases can be present. However, in any model with proper suppression of the FCNC effects those off-diagonal terms are suppressed. Thus, in the case of squark masses the problem of new phases is automatically solved together with the FCNC problem.

For the trilinear terms (L-R mixing terms in the complete squark mass matrices) the situation is not so simple. It is still true that the phases in the flavour off-diagonal terms are typically not dangerous, for the same reason as in case of soft masses. For instance, for one $U(1)$ and in the quark mass diagonal basis we have

$$\frac{V^U}{m_{3/2}} = -\frac{M}{m_{3/2}} Y_d^U + (U_L A_L U_L^\dagger) Y_d^U + Y_d^U (U_R A_R U_R^\dagger) \quad (7.3)$$

and similar expressions for V^D and V^E . In (7.3), U_L and U_R are unitary matrices which diagonalize the mass matrix $Y_d^U = U_L Y^U U_R^\dagger$. The result can be expressed in the form ($i \neq j$)

$$\frac{v_2}{m_{3/2}} (V^U)_{ij} = A_{ij} \hat{e}^{|q_{ij}|} m_j^U + B_{ij} \hat{e}^{|u_{ij}|} m_i^U + \dots, \quad (7.4)$$

where $m_i^U = (m_u, m_c, m_t)$. The $\mathcal{O}(1)$ matrices A_{ij} and B_{ij} are easily computed; for example, in the Froggatt-Nielsen hierarchical case, using the notation $(U_L)_{ij} = c_i \delta_{ij} + d_{ij} \hat{e}^{|q_{ij}|}$, we find $A_{ij} = (q_i - q_j) d_{ji}^* c_j - \frac{1}{2} |q_{ij}| c_i c_j^* Z_{ij}^\Phi$. The dots in (7.4) denote higher order terms.

However, there is no general principle to protect diagonal A -terms against new phases. They can be dangerous for the electric dipole moment of the neutron. Actually, the relevant phases are $\text{Im}(A_{ii} M^*)$, with A_{ii} defined in eq. (1.2). Consequently, we get $\text{Im}(A_{ii}^U M^*) = (q_i + u_i + h_2) \text{Im}(m_{3/2} M^*)$ and all other possible phases in G^α are irrelevant here.

8 Conclusions

The main purpose of this paper is to propose a theory of flavour where the supersymmetric spectrum is completely determined and experimentally testable. We study effective superstring models with abelian horizontal gauge symmetries and modular invariances. It is shown that the horizontal charges and the modular weights have to be correlated if the hierarchy of fermion masses follows solely from the $U(1)$ symmetries. In consequence, the soft terms in the supersymmetric spectrum, including the Higgs boson mass terms, are determined by the quark masses and mixing angles. This

results in a predictive framework for the scalar masses. Indeed, the splittings between the diagonal as well as the non diagonal entries in the squark and slepton soft mass matrices turn out to be independent of the direction of supersymmetry breaking and of the modular weights associated to the matter fields.

We consider models with one and two $U(1)$ symmetries. The latter have more freedom in the assignment of the $U(1)$ charges and allow for stronger suppression of FCNC effects. However, as a generic feature, models of our type give FCNC effects only little below the present experimental limits, and are suggestive of very rich future phenomenology in this domain.

References

- [1] L. E. Ibáñez and G. G. Ross, *Phys. Lett.* **B332** (1994) 100.
- [2] P. Binétruy and P. Ramond, *Phys. Lett.* **B350** (1995) 49.
- [3] V. Jain and R. Shrock, *Phys. Lett.* **B352** (1995) and hep-ph/9507238.
- [4] E. Dudas, S. Pokorski and C. A. Savoy, *Phys. Lett.* **B356** (1995) 45.
- [5] Y. Nir, *Phys. Lett.* **B354** (1995) 107.
- [6] C. D. Froggatt and H. B. Nielsen, *Nucl. Phys.* **B147** (1979) 277;
Z.G. Berezhiani, *Phys. Lett.* **B129** (1983) 99; **B150** (1985) 177;
J. Bagger, S. Dimopoulos, E. Masso and M. Reno, *Nucl. Phys.* **B258** (1985) 565;
J. Bijnens and C. Wetterich, *Nucl. Phys.* **B283** (1987) 237.
- [7] M. Dine, N. Seiberg and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B289** (1987) 585;
J. Atick, L. Dixon and A. Sen, *Nucl. Phys.* **B292** (1987) 109;
M. Dine, I. Ichinose and N. Seiberg, *Nucl. Phys.* **B293** (1987) 253.
- [8] A. Font, L. E. Ibáñez, H. P. Nilles and F. Quevedo, *Nucl. Phys.* **B307** (1988) 109;
Phys. Lett. **B210** (1988) 101;
J. A. Casas, E. K. Katehou, C. Muñoz, *Nucl. Phys.* **B317** (1989) 171;
A. Font, L.E. Ibáñez, F. Quevedo and A. Sierra, *Nucl. Phys.* **B331** (1990) 421.
- [9] L. E. Ibáñez, *Phys. Lett.* **B303** (1993) 55.
- [10] M. Leurer, Y. Nir and N. Seiberg, *Nucl. Phys.* **B398** (1993) 319 and **B420** (1994) 468;
Y. Nir and N. Seiberg, *Phys. Lett.* **B309** (1993) 337.
- [11] E. Dudas, S. Pokorski and C. A. Savoy, *Phys. Lett.* **B369** (1996) 255.
- [12] A. Brignole, L. E. Ibáñez and C. Muñoz, *Nucl. Phys.* **B422** (1994) 235;
A. Brignole, L. E. Ibáñez, C. Muñoz, and C. Scheich, Madrid preprint FTUAM-95-26, hep-ph/9508258.

- [13] M. Green and J. Schwarz, *Phys. Lett.* **B149** (1984) 117.
- [14] P. Fayet and J. Iliopoulos, *Phys. Lett.* **B51** (1974) 461.
- [15] P. Binétruy, S. Lavignac and P. Ramond, LPTHE-ORSAY 95/54, UFIFT-HEP-96-1, hep-ph/9601243.
- [16] F. Buccella, J.P. Derendinger, S. Ferrara, C.A. Savoy, *Phys. Lett.* **B115** (1982) 375.
- [17] K. Kikkawa and M. Yamasaki, *Phys. Lett.* **B149** (1984) 357;
N. Sakai and I. Senda, *Prog. Theor. Phys.* **75** (1986) 692;
S. Ferrara, D. Lüst and S. Theisen, *Phys. Lett.* **B233** (1989) 147.
- [18] M. Cvetič, A. Font, L. E. Ibáñez, D. Lüst and F. Quevedo, *Nucl. Phys.* **B361** (1991) 194;
L. E. Ibáñez and D. Lüst, *Nucl. Phys.* **B382** (1992) 305.
- [19] P. Ramond, R.G. Roberts and G. G. Ross, *Nucl. Phys.* **B406** (1993) 19.
- [20] E. Cremmer, B. Julia, J. Scherk, S. Ferrara, L. Girardello and P. Van Nieuwenhuizen, *Nucl. Phys.* **B147** (1979) 105;
J. Bagger, *Nucl. Phys.* **B211** (1983) 302;
V. S. Kaplunovsky and J. Louis, *Phys. Lett.* **B306** (1993) 269;
S. Ferrara, C. Kounnas and F. Zwirner, *Nucl. Phys.* **B429** (1994) 589.
- [21] P. Brax and C. A. Savoy, *Nucl. Phys.* **B447** (1995) 227.
- [22] P. Binétruy and E. Dudas, *Nucl. Phys.* **B451**(1995) 31;
P. Binétruy and E. Dudas, unpublished; E. Dudas, hep-ph/9602231.
- [23] G. Giudice and A. Masiero, *Phys. Lett.* **B206** (1988) 480.
- [24] I. Antoniadis, E. Gava, K. Narain and T. Taylor, *Nucl. Phys.* **B432** (1994) 187.
- [25] A. Brignole and F. Zwirner, *Phys. Lett.* **B342** (1995) 117.
- [26] Y. Kawamura and T. Kobayashi, DPSU-96-2, hep-ph/9601365.
- [27] F. Gabbiani and A. Masiero, *Nucl. Phys.* **B322** (1989) 2345;
Y. Grossman and Y. Nir, *Nucl. Phys.* **B448** (1995) 30;
D. Choudhury, F. Eberlein, A. König, J. Louis and S. Pokorski, *Phys. Lett.* **B342** (1995) 180;
E. Gabrielli, A. Masiero and L. Silvestrini, preprint Rome1-1109/95, hep-ph/9509379.

Publication II

Four-dimensional M -theory and supersymmetry breaking

CERN-TH/97-79
LP THE-ORSAY 97/17
Saclay T97/038
hep-th/9704177

Four-dimensional M -theory and supersymmetry breaking

Emilian Dudas ^{a,b} and Christophe Grojean ^{a,c}

^a CERN-TH

CH-1211 Geneva 23, SWITZERLAND

^b Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies
Bât. 211, Univ. Paris-Sud, F-91405 Orsay Cedex, FRANCE

^c CEA-SACLAY, Service de Physique Théorique
F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, FRANCE

Abstract

We investigate compactifications of M -theory from $11 \rightarrow 5 \rightarrow 4$ dimensions and discuss geometrical properties of 4-d moduli fields related to the structure of 5-d theory.

We study supersymmetry breaking by compactification of the fifth dimension and find that a universal superpotential is generated for the axion-dilaton superfield S . The resulting theory has a vacuum with $\langle S \rangle = 1$, zero cosmological constant and a gravitino mass depending on the fifth radius as $m_{3/2} \sim R_5^{-2}/M_{Pl}$.

We discuss phenomenological aspects of this scenario, mainly string unification and the decompactification problem.

PACS: 04.65+e;11.25.Mj

Keywords: Supergravity; Compactification; M-theory.

1 Introduction

In trying to describe four-dimensional physics from compactified string theories, it soon appeared [1] that the ten-dimensional string can hardly be weakly coupled, leading to far too large a Newton constant. So phenomenological attention must be paid to strongly coupled strings. Recently [2], [3], a lot of progress has been made in understanding this new physics: the strongly coupled regime is now viewed as the low energy limit of M -theory and, in particular, the strongly coupled $E_8 \times E_8$ heterotic string, traditionally considered as the most relevant one for phenomenology, can be described, in the low energy limit, by the eleven-dimensional supergravity with the two E_8 gauge factors living each on a 10-d boundary. The radius of the eleventh dimension is related to the string coupling by $R_{11} \sim \lambda_{st}^{2/3}$. So in the strongly coupled regime, R_{11} has to be large; in particular, it could be larger than the typical radius of the other six compact dimensions. Therefore, it appears in that case that the eleventh dimension has to be compactified after the Calabi-Yau internal manifold ([4], [5], [6]). Describing four-dimensional physics from $E_8 \times E_8$ heterotic strongly coupled string should thus be equivalent to compactifying the eleven-dimensional supergravity on a Calabi-Yau manifold and then compactifying the fifth dimension on S^1/Z_2 . Our goal is to compactify the Lagrangian to 4-d in a way compatible with $N = 1$ 4-d supersymmetry. As shown in [3], the presence of the boundaries and the interaction between the boundary fields and the bulk fields make this task difficult, as the 7-d internal space is not really a direct product $Q \times S^1/Z_2$. However, we shall be mainly concerned with compactifying the (bulk) gravitational sector of the theory, where this difficulty does not appear and simply add the kinetic terms for the gauge fields on the boundaries. We ignore all the matter fields in 4-d and their interactions. This is the point of view adopted here and we compare this pattern of compactification with the previous one, studied in [7], which corresponds to $11 \rightarrow 10 \rightarrow 4$.

Performing an explicit compactification on a CY manifold can be rather difficult, so we adopt an alternative way, by truncating with a symmetry of the compact space such as to maintain $N = 1$ supersymmetry in 4-d. Of course, in this case we can describe only the analogue of untwisted fields of string theories, originating from 11-d and 10-d fields.

In section 2 of this paper, we identify, for different projections, the Kähler structure for the moduli fields describing the shape of the internal manifold. We will observe very interesting geometrical properties, namely in all the cases the size of the compactified manifold is contained exclusively in the dilaton-axion superfield S , all the other moduli fields being invariant under dilatations of the 6-d compactified space.

Our main goal, to be studied in section 3, is the $N = 1$ spontaneous supersymmetry breaking in 4-d by compactification from 5-d to 4-d, by using the Scherk-Schwarz mechanism [8]. We argue that we obtain results that look like non-perturbative from the perturbative heterotic string point of view, like a universal superpotential generation for S . The corresponding model spontaneously breaks supersymmetry with a zero cosmological constant, has the invariance $S \rightarrow 1/S$ and a minimum that is reached for $S = 1$.

Section 4 shows that the use of the eleventh (or fifth, after the CY compactification) dimension to break supersymmetry offers a new perspective on the decompactification problem and the unification problem of perturbative string theories. The dependence of the gravitino mass on the fifth radius R_5 (seen from 4-d in Einstein units) is

$$m_{3/2} \sim \frac{R_5^{-2}}{M_{Pl}^{(4)}}. \quad (1.1)$$

By using this result, we argue that a value of the fifth radius of the order of 10^{12} GeV could solve both above-mentioned problems.

We end with some conclusions and prospects.

2 Dimensional reduction

The bosonic part of the strongly coupled $E_8 \times E_8$ heterotic string Lagrangian is (we neglect for the moment higher-derivative terms) [3]:

$$\begin{aligned} S^{(11)} = & \frac{1}{\kappa_{11}^2} \int_{M^{11}} d^{11}x \sqrt{g} \left(-\frac{1}{2} \mathcal{R}^{(11)} - \frac{1}{48} G_{IJKL} G^{IJKL} \right) \\ & - \frac{\sqrt{2}}{3456 \kappa_{11}^2} \int_{M^{11}} d^{11}x \epsilon^{I_1 \dots I_{11}} C_{I_1 I_2 I_3} G_{I_4 \dots I_7} G_{I_8 \dots I_{11}} \\ & - \frac{1}{8\pi (4\pi \kappa_{11}^2)^{2/3}} \int_{M^{10}} d^{10}x \sqrt{g} \text{tr} F_{AB} F^{AB}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

where $I, J, K, L = 1, \dots, 11$ and G_{IJKL} is related to the field strength of the three-form C_{IJK} by (in differential form language)

$$G = 6dC + \frac{\kappa_{11}^{2/3} \delta(x^{11})}{2\sqrt{2}\pi (4\pi)^{2/3}} dx^{11} \omega_{3Y}, \quad (2.2)$$

which is similar to the ten-dimensional relation $H = dB - \frac{\alpha'}{2} \omega_{3Y}$. In (2.1), κ_{11} is the 11-d gravitational coupling that defines the 11-d Newton constant $\kappa_{11} = M_{11}^{-2/9}$, which is the M -theory scale. For the purposes of this section we set $M_{11} = 1$. The mass units will be discussed in detail later on.

The above Lagrangian must be supplemented by the Horava-Witten Z_2 projection, which projects out one gravitino and part of the other fields on the boundary. It acts in the following way:

$$x_{11} \rightarrow -x_{11}, \quad \Psi_I(-x_{11}) = \Gamma_{11} \Psi_I(x_{11}), \quad (2.3)$$

where Ψ_I is the 11-d gravitino and $\Gamma_{11} = \Gamma_1 \cdots \Gamma_{10}$ is the 10-d chirality matrix, while the three-form C is odd and the metric tensor is even.

Throughout the paper, $x^6, \dots, x^{11}$ will denote coordinates on the CY manifold Q , x^5 the extra eleventh dimension, and $x^1, \dots, x^4$ the ordinary 4-d space-time. We

introduce a complex structure on Q by defining

$$y^i = \frac{x^{2i+4} + i x^{2i+5}}{\sqrt{2}}, \quad y^{\bar{i}} = \frac{x^{2i+4} - i x^{2i+5}}{\sqrt{2}}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.4)$$

In the following, $\mu, \nu, \dots$ will refer to 4-d and 5-d Lorentz indices (to be distinguished whenever necessary) and $i, j, k, \dots$ to compact indices.

We truncate the Lagrangian (2.1) in order to obtain $N = 2$ models⁽¹⁾ in 5-d in the supergravity (Einstein) units, which we argue are the natural units in M -theory. Then we impose the Horava-Witten projection (acting by substituting $x_{11} \rightarrow x_5$ and $\Gamma_{11} \rightarrow \Gamma_5$ in (2.3)), which gives $N = 1$ models in 4-d.

A simple dimensional reduction can be performed to obtain an action in 5-d. Our way of truncation (see below) is such that, in the metric tensor, there is no mixing between compact and non-compact indices. So, going into supergravity coordinates in 5-d, we take

$$g_{\mu\nu}^{(11)} = G^{-1/3} g_{\mu\nu}^{(5)}, \quad g_{ij}^{(11)} = g_{ij}, \quad (2.5)$$

where G is the determinant of the metric in the compact space g (to be distinguished from $g^{(5)}$).

Similarly, the relevant components of the three-form are

$$C_{\mu\nu\rho}, \quad C_{\mu i \bar{j}} = A_{\mu}^{(i\bar{j})}, \quad C_{ijk} = a \epsilon_{ijk}, \quad C_{i \bar{j} \bar{k}}, \quad (2.6)$$

where a and $C_{i \bar{j} \bar{k}}$ are complex scalars. Moreover we shall take $C_{i \bar{j} \bar{k}} = 0$ in the following, these fields being irrelevant to our analysis.

After algebraic manipulations, we obtain the desired 5-d bosonic action (see [9]):

$$\begin{aligned} S^{(5)} = & -\frac{1}{2} \int d^5 x \sqrt{g^{(5)}} \left[\mathcal{R}^{(5)} + \frac{1}{12} \text{tr}(g^{-1} \partial_{\mu} g) \text{tr}(g^{-1} \partial^{\mu} g) \right. \\ & + \frac{1}{4} \text{tr}(g^{-1} \partial_{\mu} g g^{-1} \partial^{\mu} g) + \frac{1}{24} G G_{\mu\nu\rho\sigma} G^{\mu\nu\rho\sigma} \\ & + 18 G^{1/3} (g^{ik} g^{\bar{j}\bar{l}} - g^{i\bar{l}} g^{k\bar{j}}) F_{\mu\nu}^{(i\bar{j})} F^{\mu\nu (k\bar{l})} \\ & + 36 (\det g^{ij} (\partial_{\mu} a) (\partial^{\mu} a) + 2 \det g^{i\bar{j}} (\partial_{\mu} a) (\partial^{\mu} a^{\dagger}) + \det g^{\bar{i}\bar{j}} (\partial_{\mu} a^{\dagger}) (\partial^{\mu} a^{\dagger})) \Big] \\ & - 36 \sqrt{2} \int d^5 x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\tau} \left(i C_{\mu\nu\rho} (\partial_{\sigma} a) (\partial_{\tau} a^{\dagger}) + \frac{1}{4} \epsilon_{ikm} \epsilon_{\bar{j}\bar{l}\bar{n}} A_{\mu}^{(i\bar{j})} F_{\nu\rho}^{(k\bar{l})} F_{\sigma\tau}^{(m\bar{n})} \right) \\ & - \frac{1}{2\pi(4\pi)^{2/3}} \int d^4 x \sqrt{g^{(4)}} G^{1/2} \text{tr} F_{AB} F^{AB}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

In the following, we perform the rescalings $(a, A_{\mu}^{(i\bar{j})}) \rightarrow (a, A_{\mu}^{(i\bar{j})})/6$. We now consider particular truncations and also compactify the fifth dimension to obtain a 4-d action. For each case in our discussion, the gauge group on the observable boundary is broken by the usual embedding of the spin connection into the gauge group.

To begin with, consider the simplest truncation, corresponding to a compactified space with just one radius $e^{\sigma/2}$, the “breathing” mode⁽²⁾. Following Witten [10], we pick

⁽¹⁾We call $N = 2$ supersymmetry the smallest possible supersymmetry in 5-d.

⁽²⁾This simple truncation in the M -theory regime has recently been performed also in [6].

up an $SU(3)$ subgroup of the $SU(4) \simeq SO(6)$ rotational group acting on $x^6, \dots, x^{11}$. We define this $SU(3)$ such that (y^1, y^2, y^3) transforms like a representation 3 and $(y^{\bar{1}}, y^{\bar{2}}, y^{\bar{3}})$ like a representation $\bar{3}$. The 11-d fields have to respect this $SU(3)$ symmetry and also the Z_2 symmetry acting on x^5 . The observable gauge group is E_6 . The massless spectrum in 5-d is the universal hypermultiplet $(C_{\mu\nu\rho}, e^{3\sigma}, a, a^\dagger)$ and the gravitational multiplet, which corresponds to a CY manifold with $h_{(1,1)} = 1$ and $h_{(2,1)} = 0$. The resulting 11-d tensor metric is written

$$\begin{aligned} g_{i\bar{j}}^{(11)} &= e^\sigma \delta_{i\bar{j}}, \quad g_{\mu\nu}^{(11)} = e^{-2\sigma} g_{\mu\nu}^{(5)}, \\ g_{55}^{(5)} &= e^{2\gamma}, \quad g_{\mu\nu}^{(5)} = e^{-\gamma} g_{\mu\nu}^{(4)}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

We have adopted here supergravity coordinates in which the 5-d and 4-d actions have a canonical supergravity expression. The scalar field e^σ is related to the radius of the CY manifold, while e^γ is related to the radius of the fifth dimension. Similarly, in 4-d and after the Horava-Witten (Z_2^{HW}) projection, the three-form has only the massless components

$$C_{\mu\nu 5}^{(11)} = C_{\mu\nu 5}, \quad C_{5i\bar{j}}^{(11)} = B \delta_{i\bar{j}}. \quad (2.9)$$

$C_{\mu\nu 5}$ is a two-form in the 4-d space-time while B is a 4-d scalar field.

The dimensional truncation of $S^{(5)}$ is easily performed and leads to

$$\begin{aligned} S^{(4)} &= - \int d^4x \sqrt{g^{(4)}} \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{R}^{(4)} + \frac{3}{4} (\partial_\mu \gamma) (\partial^\mu \gamma) + \frac{9}{4} (\partial_\mu \sigma) (\partial^\mu \sigma) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12} e^{6\sigma} G_{\mu\nu\rho 5} G^{\mu\nu\rho 5} + \frac{3}{4} e^{-2\gamma} (\partial_\mu B) (\partial^\mu B) + \frac{1}{2\pi (4\pi)^{2/3}} e^{3\sigma} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

To be consistent with a true CY compactification, this 4-d action has to derive from a Kähler potential; the supergravity coordinates are the appropriate ones for the identification of this Kähler structure. The complex fields are indeed easily identified as

$$\begin{aligned} S &= e^{3\sigma} + i a_1, \\ T &= e^\gamma + i B, \end{aligned} \quad (2.11)$$

and the corresponding Kähler potential is $\mathcal{K} = -\ln(S + S^\dagger) - 3\ln(T + T^\dagger)$. The imaginary part of S is obtained from a Hodge duality of G :

$$e^{6\sigma} G_{\mu\nu\rho 5} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\sigma a_1. \quad (2.12)$$

Notice, first of all, the well-known exchange of roles between S and T compared to string compactifications. Moreover, unlike the case of the direct compactification of 10-d string case, the definitions of T and S are completely decoupled, S being related to the volume of the 6-d compactified space and T to the radius of the eleventh dimension, but seen from 5-d. We call it the radius of the fifth dimension R_5 in the following, in M -theory units (denoted by $R_5^{(M)}$ in section 4). In the last section, we shall see how,

with another interpretation of this radius, we can reproduce the Kähler structure of usual string compactifications.

The $SU(3)$ invariance requirement on the CY manifold allows one single field σ in the metric. We can in fact mimic compactification on orbifolds by restricting to discrete subgroups of $SU(3)$ that act non-trivially on the representation 3 and $\bar{3}$ in such a way that we maintain $N = 2$ in 5-d, by using the methods employed in [11]. We shall consider three cases (the action is on the representation 3):

- a. Z_{12} symmetry acting like $(ie^{2i\pi/3}, -ie^{2i\pi/3}, e^{2i\pi/3})$;
- b. Z_3 symmetry acting like $(e^{2i\pi/3}, e^{2i\pi/3}, e^{2i\pi/3})$;
- c. $Z_2 \times Z'_2$ symmetry acting like $(-1, 1, -1) \times (1, -1, -1)$.

a. Z_{12} symmetry. This model has a massless spectrum in 5-d consisting of the universal hypermultiplet, two vector multiplets and the gravitational multiplet, corresponding to $h_{(1,1)} = 3, h_{(2,1)} = 0$. The observable gauge group is $E_6 \times U(1) \times U(1)$. In the supergravity coordinates, the metric tensor then takes the form (written directly from 11-d $\rightarrow$ 4-d):

$$g_{\mu\nu}^{(11)} = e^{-\gamma-2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)/3} g_{\mu\nu}^{(4)}, \quad g_{55}^{(11)} = e^{2\gamma-2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)/3}, \quad g_{i\bar{j}}^{(11)} = e^{\sigma_i} \delta_{i\bar{j}}, \quad (2.13)$$

where the shape of the orbifold is described by the three radii σ_1, σ_2 and σ_3 . After the Z_2^{HW} projection, the massless modes of the three-form in 4-d are

$$C_{\mu\nu 5}, \quad C_{5i\bar{j}} = B_i \delta_{i\bar{j}}. \quad (2.14)$$

It is easy to perform the dimensional reduction of $S^{(5)}$ and, as previously, to identify the Kähler structure. The 4-d action now derives from

$$\mathcal{K} = -\ln(S + S^\dagger) - \sum_{1 \leq k \leq 3} \ln(T_k + T_k^\dagger), \quad (2.15)$$

and the complex fields are identified as

$$\begin{aligned} S &= e^{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3} + i a_1, \\ T_k &= e^\gamma e^{-(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)/3+\sigma_k} + i B_k, \end{aligned} \quad (2.16)$$

where a_1 is still defined by a Hodge duality $e^{2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)} G'_{\mu\nu\rho 5} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\sigma a_1$. Notice here the relations $t_i/t_j = R_i^2/R_j^2$, $t_1 t_2 t_3 = R_5^3$, $s = R_1^2 R_2^2 R_3^2$, where R_i denote the three CY radii. An interesting fact is that under a dilatation of the 6-d compactified space $g_{i\bar{j}} \rightarrow \lambda g_{i\bar{j}}$, the only field that changes is S . This will be valid for the more general truncations discussed below and is related to the special geometry structure in 5-d.

b. Z_3 symmetry. The massless fields in 5-d are the gravitational multiplet, the universal hypermultiplet and eight vectors multiplets, corresponding to $h_{(1,1)} = 9$ and

$h_{(2,1)} = 0$ and the observable gauge group is $E_6 \times SU(3)$. In the supergravity coordinates, the Z_3 -invariant metric tensor takes the form

$$g_{\mu\nu}^{(11)} = e^{-\gamma} G^{-1/3} g_{\mu\nu}^{(4)}, \quad g_{55}^{(11)} = e^{2\gamma} G^{-1/3}, \quad g_{i\bar{j}}^{(11)} = g_{i\bar{j}}. \quad (2.17)$$

The shape of the orbifold is here described by the nine parameters appearing in the unrestricted $g_{i\bar{j}}$. The massless modes of the three-form in 4-d are $C_{\mu\nu 5}$, $C_{5i\bar{j}} = B_{i\bar{j}}$. The resulting compactified 4-d action now derives from the following Kähler potential

$$\mathcal{K} = -\ln(S + S^\dagger) - \ln \det(T_{i\bar{j}} + T_{i\bar{j}}^\dagger), \quad (2.18)$$

and the complex fields are identified as

$$\begin{aligned} S &= G^{1/2} + i a_1, \\ T_{i\bar{j}} &= e^\gamma G^{-1/6} g_{i\bar{j}} + i B_{i\bar{j}}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

where $G^2 G_{\mu\nu\rho 5} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\sigma a_1$. Notice the relation $\det t_{i\bar{j}} = e^{3\gamma} = R_5^3$, which is again related to special geometry in 5-d.

c. $Z_2 \times Z'_2$ symmetry. Here, in contrast with previous cases, we obtain three additional hypermultiplets (in addition to the universal one) containing the bosonic fields $(g_{ii}, C_{i\bar{j}k})$. The model is described by $h_{(1,1)} = 3, h_{(2,1)} = 3$ and the observable gauge group on the boundary is $E_6 \times U(1) \times U(1)$. In the supergravity coordinates, the $Z_2 \times Z'_2$ -invariant metric tensor now takes the form

$$g_{\mu\nu}^{(11)} = e^{-\gamma} G^{-1/3} g_{\mu\nu}^{(4)}, \quad g_{55}^{(11)} = e^{2\gamma} G^{-1/3} \quad (2.20)$$

and

$$g_{ij}^{(11)} = \begin{pmatrix} g^{(1)} & & \\ & g^{(2)} & \\ & & g^{(3)} \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

where $g^{(i)}$ are 2×2 symmetric matrices, G_i their determinant, and G the global determinant.

The 4-d massless modes of the three-form are $C_{\mu\nu 5}$, $C_{5i\bar{j}} = B_i \delta_{i\bar{j}}$. The corresponding 4-d Kähler potential now is

$$\mathcal{K} = -\ln(S + S^\dagger) - \sum_{1 \leq k \leq 3} \ln(T_k + T_k^\dagger) - \sum_{1 \leq k \leq 3} \ln(U_k + U_k^\dagger), \quad (2.22)$$

where

$$\begin{aligned} S &= G^{1/2} + i a_1, \\ T_k &= e^\gamma G^{-1/6} G_k^{1/2} + i B_k, \\ U_k &= \frac{(G_k)^{1/2}}{g_{22}^{(k)}} + i \frac{g_{12}^{(k)}}{g_{22}^{(k)}}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

with $G G_{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\sigma a_1$.

Notice that all the models studied above are particular cases of no-scale models [12]. So the no-scale structure seems to be present in both the weak-coupling limit and the strong-coupling one of superstring compactifications [4], [6].

Recently, it was shown that the anomaly cancellation in M -theory asks for another term in the M -theory Lagrangian [3], [13], which can be viewed as a term cancelling five-brane world-volume anomalies [14] or, by compactifying one dimension, as a one-loop term in the type IIA superstring [15]. In our conventions and by using differential form language, it reads

$$W_5 = -\frac{1}{2^{11/6}(2\pi)^{10/3}} \int_{M_{11}} C \wedge X_8, \quad (2.24)$$

where $X_8 \equiv -\frac{1}{8}\text{tr}R^4 + \frac{1}{32}(\text{tr}R^2)^2$. This term can be compactified to 4-d in different compactification schemes by using the field definitions given above and the quantization rule $\frac{1}{8\pi^2} \int \text{tr}R \wedge R = m$, where m is an integer and the integration is over a 4-cycle in the compactified space. Without entering into details and restricting to one overall radius, we find in 4-d a higher-derivative term of the type TR^2 in superfield language (recently, similar 4-d terms were studied [16] and claimed to be relevant for supersymmetry breaking).

Armed with the above field definitions, we can now study our main concern, supersymmetry breaking from $5 \rightarrow 4$ dimensions by compactification.

3 The spontaneous breaking of $N = 1$ supersymmetry in four dimensions by compactification

We are interested in the phenomenology of the M -theory compactifications, in particular we would like to break the $N = 1$ supersymmetry in 4-d. To achieve this aim, we perform a mechanism proposed by Scherk and Schwarz [8] in a supergravity context and then generalized to superstrings in [17] (another possibility for breaking supersymmetry is the gaugino condensation of one of the E_8 gauge group [18]). As there is, for the moment, no quantum description of M -theory, we use its effective low energy description at the level of supergravity.

The Scherk–Schwarz mechanism is a generalized dimensional reduction that allows for the fields a dependence in the compact coordinates. Nevertheless, to avoid ghost particles and to include ordinary dimensional reduction, this dependence must satisfy some properties: it has to be in a factorizable form and has to correspond to an R -symmetry of the theory. The simplest example is the use of the compact $SO(6)$ symmetry of the 6-d compact manifold, which is readily applicable to the superstrings case. In this case, any component of a tensor with p compact indices and q non-compact indices takes the form

$$\hat{T}_{i_1 \dots i_p \mu_1 \dots \mu_q}(x, y) = \prod_{n=1}^p U_{i_n}^{i'_n}(y) T_{i'_1 \dots i'_n \mu_1 \dots \mu_q}(x), \quad (3.1)$$

where y denotes compact coordinates and x non-compact ones. This tensor decomposition is stable under product and exterior derivation.

This extended dimensional reduction, when applied to the curvature term, generates a potential for the scalar fields corresponding to the metric in the compact space. The requirement for this scalar potential to be positive imposes further restrictions on the form of U . A solution was proposed by Scherk and Schwarz, by taking

$$U = e^{My^1}, \quad (3.2)$$

where M is an antisymmetric matrix in the compact space with zeros in the row and the column corresponding to y^1 . Then the 4-d scalar potential, in supergravity units, reads [8]

$$V_0 = \frac{1}{4\sqrt{G}} \left(g^{1,1} \text{tr} (M^2 - M g M g^{-1}) - (g^{-1} M^t g M g^{-1})^{1,1} \right); \quad (3.3)$$

in (3.3) and the rest of this section, g is the metric in the 7-d compact space and G its determinant.

When applied to the kinetic term for the 11-d spin- $\frac{3}{2}$ field, this extended dimensional reduction also generates, through the spin connection for compact indices, masses for the resulting 4-d gravitinos.

More important for our purposes are symmetries that mix fields of different parities, for reasons that will become transparent below. For the truncations we are discussing here, these must be subgroups of the $Sp(8)$ symmetry present in the $N = 8$ supergravity in 5-d (see third reference in [8]).

We shall perform this mechanism in two cases

- a. with y^1 being the extra eleventh dimension, x^5 ;
- b. with y^1 being a Calabi-Yau or orbifold coordinate.

We use for this purpose the truncations derived in the preceding section. The projections P we use have to commute with the Scherk-Schwarz matrix U , which means explicitly

$$\begin{aligned} [P, M] &= 0 \quad \text{if } P y^1 = y^1, \\ \{P, M\} &= 0 \quad \text{if } P y^1 = -y^1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

a. An eleventh-dimension coordinate dependence. The characteristics of this case is the anticommutation relation

$$\{Z_2^{HW}, M\} = 0. \quad (3.5)$$

We consider here two different possibilities. The first uses an $SU(2)$ R -symmetry present in the 5-d theory, which we argue to be the subgroup of $Sp(8)$, which commutes with all the projections. The second uses the usual symmetry of the 6-d internal manifold, which is relevant for the type *IIA* supergravity in 4-d.

i. $SU(2)$ R -symmetry.

To keep things as easy as possible, consider for the moment the simplest truncation (2.8) corresponding to an $SU(3)$ invariance in the compactified space. In this case, in 5-d the only matter multiplet is the universal hypermultiplet, whose scalar fields parametrize the coset $\frac{SU(2,1)}{SU(2) \times U(1)}$ [19]. This structure can be simply viewed from 4-d by a direct truncation (*without* the Z_2^{HW} projection). The truncated dependence on the universal hypermultiplet can be derived from the Kähler potential [19]

$$\mathcal{K} = -\ln(S + S^\dagger - 2a^\dagger a) , \quad (3.6)$$

where the Hodge duality in 5-d is $GG_{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}(-\partial^\delta a_1 + ia^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\delta a/\sqrt{2})$ and $S = e^{3\sigma} + a^\dagger a + ia_1$. The $SU(2)$ symmetry acts linearly on the redefined fields

$$z_1 = \frac{1-S}{1+S} , \quad z_2 = \frac{2a}{1+S} , \quad (3.7)$$

which form a doublet (z_1, z_2) . The Z_2^{HW} projection acts as $Z_2^{HW} S = S$, $Z_2^{HW} a = -a$, which translates on the $SU(2)$ doublet in the obvious way:

$$Z_2^{HW} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} . \quad (3.8)$$

The Scherk–Schwarz decomposition in this case reads explicitly

$$\begin{pmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos mx_5 & \sin mx_5 \\ -\sin mx_5 & \cos mx_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} , \quad (3.9)$$

corresponding to the matrix defined in (3.2) $M = im\sigma_2$ and where m is a mass parameter. Notice that, thanks to the anticommutation relation (3.5), which is clearly verified, the fields $\hat{z}_i$ have the same Z_2^{HW} parities as the fields z_i . The resulting scalar potential in 4-d in Einstein metric is computed from the kinetic terms of the $(\hat{z}_1, \hat{z}_2)$ fields derived from (3.6). After making $z_2 = 0$, corresponding to the projection Z_2^{HW} , it is easily worked out and it is positive semi-definite. Expressed in terms of S and T , the result is

$$V = \frac{4m^2}{(T + T^\dagger)^3} \frac{|1 - S|^2}{S + S^\dagger} . \quad (3.10)$$

This can be seen as a superpotential generation for S . The 4-d theory is completely described by⁽³⁾

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= -\ln(S + S^\dagger) - 3\ln(T + T^\dagger) , \\ W &= 2m(1 + S) . \end{aligned} \quad (3.11)$$

⁽³⁾This result is in agreement with general results on no-scale models (second reference in [17]).

Notice that this superpotential for S should correspond to a non-perturbative effect from the heterotic string point of view. The minimum of the scalar potential corresponds to $S = 1$ and a spontaneously broken supergravity model with a zero cosmological constant. The order parameter for supersymmetry breaking is the gravitino mass $m_{3/2}^2 = e^{\mathcal{K}}|W|^2 = 8m^2/(T + T^\dagger)^3$. Notice that the theory (3.11) is symmetric under the inversion $S \rightarrow 1/S$, easily checked also on the scalar potential (3.10). This corresponds to a subgroup of the $SL(2, Z)$ acting on S as $S \rightarrow (aS - ib)/(icS + d)$, where $ad - bc = 1$, restricted here to $a = d = 0$, $b = -c = 1$. This already suggests a weak coupling – strong coupling symmetry of our resulting model, as in the S -duality models proposed some time ago [20].

We stress out that this 4-d model presents some general features, independent of the details of the compactification⁽⁴⁾. The most general R -symmetry present in 5-d in $N = 8$ supergravity is $Sp(8)$. This symmetry is reduced once we impose truncations, and the truncation to $N = 2$ leaves an $SU(2)$ symmetry appearing in the supersymmetry algebra. The scalar fields from the universal hypermultiplet, present in any compactification, transform as a doublet under $SU(2)$. The Scherk–Schwarz mechanism uses only the antisymmetric part ($O(2)$) of this doublet, so we are led to (3.9). On the other hand, the $O(2)$ part is exactly that required by the Horava–Witten Z_2^{HW} projection, which defines the $E_8 \times E_8$ heterotic string. In more general CY models in 5-d, the $SU(2)$ symmetry acts also on other scalar fields than the universal hypermultiplet, but the piece (3.11) we computed should always exist and is universal.

ii. Symmetry of the compactified space.

Since P ($SU(3)$, Z_3 , Z_{12} or $Z_2 \times Z'_2$) does not act on x^5 , the commutation relation (3.4) simply reads

$$[P, M] = 0. \quad (3.12)$$

For $P = SU(3)$, there is no antisymmetric matrix M respecting this condition, so we can not perform the Scherk–Schwarz mechanism. For $P = Z_2 \times Z'_2$, the allowed M matrices involve three parameters and, in the basis $(x^5, x^6, \dots, x^{11})$, read

$$M = \begin{pmatrix} 0 & & \dots & & 0 \\ & 0 & m_1 & & \\ & -m_1 & 0 & & \\ \vdots & & & 0 & m_2 \\ & & & -m_2 & 0 \\ & & & & 0 & m_3 \\ 0 & & & & -m_3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

In this case, the Scherk–Schwarz matrix does not anticommute with Z_2^{HW} , so the mechanism is better adapted to type *IIA* supergravity in 4-d. We are only interested here in a field spectrum common to type *IIA* and heterotic string. As we will see in the next section, the qualitative features of this case concerning the decompactification problem are, however, similar to that of the previous example.

⁽⁴⁾The following arguments were developed in collaboration with R. Minasian.

The scalar potential (3.3) reads, in this case:

$$V_0 = \frac{1}{4}e^{-3\gamma} \sum_{i=1}^3 \frac{m_i^2}{G_i} \left(\left(g_{11}^{(i)} - g_{22}^{(i)} \right)^2 + 4g_{12}^{(i)2} \right), \quad (3.14)$$

which, expressed in terms of moduli fields (2.23), takes the simple expression

$$V_0 = \frac{1}{t_1 t_2 t_3} \sum_{i=1}^3 m_i^2 \left| \frac{U_i^2 - 1}{U_i + U_i^\dagger} \right|^2. \quad (3.15)$$

This scalar potential has interesting consequences. In analogy with our previous example, the scalar potential is invariant under $U_i \rightarrow 1/U_i$. The three U -fields develop a *vev* $\langle U_i \rangle = 1$ (the self-dual points of duality transformations) and acquire masses

$$m_{U_i}^2 = \frac{m_i^2}{\langle t_1 t_2 t_3 \rangle}. \quad (3.16)$$

At the same time, the single gravitino that remains after imposing the $Z_2 \times Z'_2 \times Z_2^{HW}$ symmetries also acquires a mass, which is computed to be

$$m_{3/2} = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{2\sqrt{\langle t_1 t_2 t_3 \rangle}}. \quad (3.17)$$

b. A Calabi-Yau or orbifold coordinate dependence. We choose here y^1 to be x^6 , a CY or orbifold coordinate. Then the commutation relation (3.4) reads

$$[P, Mx^6] = 0, \quad [Z_2^{HW}, Mx^6] = 0. \quad (3.18)$$

For $P = SU(3)$, there is no antisymmetric matrix M respecting this condition, so we can not perform the Scherk-Schwarz mechanism. For $P = Z_2 \times Z'_2$, the situation is different; since x^6 is now odd under the first Z_2 and even under the second one and under Z_2^{HW} , the commutation relation simplifies again

$$\{Z_2, M\} = 0, \quad [Z'_2, M] = 0, \quad [Z_2^{HW}, M] = 0. \quad (3.19)$$

Thus we can always choose M to be of the off-diagonal following form, in the basis $(x^5, x^6, \dots, x^{11})$,

$$M = \begin{pmatrix} & & & 0 & & \\ & & & & & \\ 0 & & & m & 0 & \\ & & & 0 & m' & \\ & -m & 0 & & & \\ & 0 & -m' & & & \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Then the scalar potential, written directly in terms of moduli fields, reads

$$V_0 = \frac{1}{4st_1u_1t_2u_2t_3u_3} \left(m^2|t_2U_2 - t_3U_3|^2 + m'^2|t_2U_3 - t_3U_2|^2 - \frac{1}{2}((m - m')^2t_2t_3 - mm'(t_2 - t_3)^2)(U_2 - U_2^\dagger)(U_3 - U_3^\dagger) \right). \quad (3.21)$$

The minimum (for $m \neq m'$) of the scalar potential corresponds to the flat directions

$$\langle t_2 \rangle = \langle t_3 \rangle, \quad \langle u_2 \rangle = \langle u_3 \rangle \quad \text{and} \quad \langle \text{Im}U_2 \rangle = \langle \text{Im}U_3 \rangle = 0. \quad (3.22)$$

We do not write here the scalar mass matrix, but just notice that the leading matrix elements, which fix the physical masses, are of the type (consider $m \sim m'$):

$$m_0^2 \sim \frac{m^2}{st_1}, \quad (3.23)$$

where t_1 is the modulus field corresponding to the Scherk–Schwarz coordinate. This case is the analogue of the supersymmetry breaking by compactification in the weakly coupled superstrings [17]. Notice that in the superstring case, the mass parameters m, m' in (3.20) are discrete, being related to automorphisms of the compactification lattice.

All the masses we computed above are measured in M -theory units. In the following section, we translate these results in 4-d supergravity units.

4 Phenomenological implications of M -theory compactifications

We shall discuss in this section some phenomenological issues of M -theory compactifications focusing essentially on the 4-d Newton constant and the gravitino mass. For simplicity, and without affecting our conclusions, we restrict ourselves to the simplest case of $t_i = e^\gamma$.

String compactifications do not easily allow [1], [21] an adjustment of the string mass scale, the v_{ev} of the dilaton and the volume of the compact space to tune the three 4-d observable quantities that are the Planck scale, the GUT scale and the gauge coupling constant. For instance, in the weakly coupled regime of the $E_8 \times E_8$ heterotic string, the well-known relation

$$G_N \sim \lambda_{st}^{2/3} \frac{\alpha_{GUT}^{4/3}}{M_{GUT}^2} \quad (4.1)$$

disagrees with experimental values by a factor of order 20. Witten has shown [21] how in strongly coupled regime the compatibility between string predictions and experimental values could be restored. It is interesting to worry about this issue in our patterns of compactification.

In the 11-d action, only the M -theory scale appears, which is the 11-d Planck mass M_{11} , such that

$$S^{(11)} \supset -\frac{1}{2} \int d^{11}x \sqrt{g^{(11)}} M_{11}^9 \mathcal{R}^{(11)} - \frac{1}{8\pi(4\pi)^{2/3}} \int_{x^5=0} d^{10}x \sqrt{g^{(10)}} M_{11}^6 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (4.2)$$

Now we compactify this action in the M -theory coordinates in which, as in the five-brane units for the 10-d string, there is no kinetic term for the “radius” of the extra-dimension, that is we adopt

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}^{(11)} &= e^{-2\sigma} g_{\mu\nu}^{(5)}, \quad g_{i\bar{j}}^{(11)} = e^{\sigma} \delta_{i\bar{j}}, \\ g_{55}^{(5)} &= e^{2\gamma}, \quad g_{\mu\nu}^{(5)} = g_{\mu\nu}^{(4)}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

It is transparent that these are the natural units of 5-d supergravity. By performing the Hodge transformation (using the field definitions (2.11))

$$\frac{s}{t} G_{\mu\nu\rho 5} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^{\sigma} a', \quad (4.4)$$

the 4-d low energy effective action contains the terms

$$S^{(4)} \supset -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g^{(4)}} \left[t M_{11}^2 \left(\mathcal{R}^{(4)} + \frac{1}{2s^2} (\partial_{\mu} s)^2 + (\partial_{\mu} a')^2 \right) + \frac{1}{(4\pi)^{5/3}} s F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \quad (4.5)$$

We can pass from the M -theory action (4.5) to the Einstein action (2.10) by the Weyl rescaling $g_E^{(4)} = t g_M^{(4)}$. Notice the absence of a kinetic term for t in (4.5), the clear indication of a no-scale structure. This can therefore be associated with the M -theory (or 5-d supergravity) units.

The Lagrangian (4.5) allows us to identify the gauge coupling and the 4-d reduced Planck mass to be ⁽⁵⁾

$$\frac{1}{\alpha_{GUT}} \sim \frac{1}{(4\pi)^{5/3}} s, \quad t M_{11}^2 = M_{Pl}^{(4)2}. \quad (4.6)$$

These quantities are related to the radii of the Calabi-Yau space and the extra fifth dimension expressed in terms of the M -theory units

$$e^{-\sigma/2} = s^{-1/6} = \frac{M_{GUT}}{M_{11}}, \quad t = R_5^{(M)} M_{11}. \quad (4.7)$$

However the radius of the fifth dimension expressed in M -theory units is not convenient for physics in four dimensions, so we prefer to express it in terms of $M_{Pl}^{(4)}$, the four-dimensional Planck scale, by defining

$$t = \frac{M_{Pl}^{(4)}}{R_5^{-1}}. \quad (4.8)$$

⁽⁵⁾In the weakly coupled regime, the gauge coupling constant can have large threshold corrections. If this holds true in the strongly coupled regime, some of our considerations below will be modified.

Combining these equalities, we obtain the M -theory equivalent of (4.1):

$$G_{\mathcal{N}} \sim \frac{R_5^{-1} \alpha_{GUT}^{1/3}}{M_{Pl}^{(4)} M_{GUT}^2}, \quad (4.9)$$

and, in order to be compatible with experimental constraints, the “radius” of the fifth dimension has an intermediate scale value, as already suggested by [4], [5]

$$R_5^{-1} \sim 10^{12-13} \text{GeV}. \quad (4.10)$$

The fifth radius also appears in the gravitino mass generated by the Scherk–Schwarz mechanism, so we have to take care that R_5^{-1} be compatible with phenomenologically preferred value for the gravitino mass. In the expressions for the gravitino mass from (3.11) and (3.17), the mass parameters that appear in the Scherk–Schwarz mechanism using the fifth dimension are naturally of the order of the M -theory scale, so we obtain⁽⁶⁾

$$m_{3/2} \sim \frac{M_{11}}{\sqrt{\langle t^3 \rangle}} = \frac{R_5^{-2}}{M_{Pl}^{(4)}}, \quad (4.11)$$

where to arrive at the last identity we have used the identification of the moduli fields (2.11) and the definitions (4.6), (4.8). This expression is similar to a usual supergravity form in which an auxiliary field would have developed a v_{ev} of the order of R_5^{-2} . Phenomenologically, the gravitino mass should be of the order of 1 TeV⁽⁷⁾. This leads to a value for the extra-radius quite compatible with the one deduced from Newton’s constant,

$$R_5^{-1} \sim 10^{11-12} \text{GeV}. \quad (4.12)$$

Consequently, the presence of the extra-dimension could offer a solution to the decompactification puzzle usually encountered in string compactifications. Indeed, generically, the Scherk–Schwarz mechanism in strings leads to [17]

$$m_{3/2} \sim \frac{1}{R_{CY}} \sim M_{GUT}. \quad (4.13)$$

This is actually similar to the result we obtained in the last section in the case where a CY coordinate was used for the Scherk–Schwarz mechanism. To check it, rewrite the masses (3.23) in 4-d supergravity units as $m_0^2 \sim M_{Pl}^{(4)2}/(st^2) \sim g^2/R_5^2$, where g is the gauge coupling.

This relation is phenomenologically hard to accommodate. Two issues have been proposed to solve this problem:

⁽⁶⁾A similar formula was conjectured by Antoniadis and Quiros [5], but replacing R_5 with the eleventh radius. In our expression, R_5 is the radius of the fifth dimension measured in 4-d Planck units (4.8).

⁽⁷⁾This mass will be transmitted to the observable sector if part of the gauge group originates from 5-d vector multiplets or if moduli contributing to supersymmetry breaking give threshold corrections to gauge coupling. If not, the transmission occurs through gravitational interactions [24], in which case we need $m_{3/2} \sim 10^{12} \text{GeV}$ so $R_5^{-1} \sim 10^{15} \text{GeV}$.

– compactify six dimensions on an asymmetric Calabi-Yau space with two or more different radii [22]. However, to agree with phenomenological values for the gravitino mass, these two (or more) radii must have hierarchical values within about fifteen orders of magnitude.

– construct models of strings such that the gravitino mass is $m_{3/2} \sim 1/(R_{CY}^{n+1} M_{Pl}^{(4)n}) \sim (M_{GUT}/M_{Pl}^{(4)})^n M_{GUT}$. However, phenomenology asks for $n = 4, 5$, and it is difficult to explicitly construct such models.

So the extra-dimension brings a new and more satisfying alternative to the decompactification problem of compactified strings.

To conclude this phenomenological study, we would like to compare our pattern of compactification ($11 \rightarrow 5 \rightarrow 4$) with another one, already studied [7], in which the extra-dimension was compactified first ($11 \rightarrow 10 \rightarrow 4$). From a strongly coupled 10-d point of view, the radius of the eleventh dimension x^5 is $R_{11}^2 \sim g_{55}^{(11)} \sim e^{2\gamma-2\sigma}$, and this radius is related to the string dilaton by [21]

$$R_{11} \sim e^{2\phi/3}. \quad (4.14)$$

Combining those relations, the expressions of the real part of T becomes $t \sim e^{2\phi/3} e^\sigma$, which is the expression obtained by Binétry [23] by compactifying the 10-d heterotic string in the five-brane units that are supposed to be appropriate to the strongly coupled regime.

Actually we can, in the same way, reproduce the moduli's identification obtained by string compactification down to 4-d in the various units. Suppose that we are working in units characterized, in 10-d, by the tensor metric $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{(10)}$. These units are related to the five-brane ones by a Weyl rescaling

$$g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{(10)} = \lambda g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{(10) B}. \quad (4.15)$$

So the typical radius of the Calabi-Yau space, measured in five-brane units, is now $R_{CY} \sim (\lambda^{-1} e^\sigma)^{1/2} \equiv (e^{\sigma_B})^{1/2}$; the radius of the extra-dimension, viewed from 10-d in five-brane units, is $R_{11} \sim e^{\gamma-\sigma_B}$, which is still related to the string dilaton by (4.14). The real parts of the fields are now identified as

$$\begin{aligned} s = e^{3\sigma_B} &= \lambda^{-3} e^{3\sigma} \\ t = e^\gamma &= \lambda^{-1} e^{\sigma+2\phi/3}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

For instance, string (S) and supergravity (E) units are related to five-brane (B) units by

$$g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{(10) B} = e^{-2\phi/3} g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{(10) S} = e^{-\phi/6} g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{(10) E}. \quad (4.17)$$

Equations (4.16) reproduce the results of string compactification summarized in table II.1.

However from a 5-d point of view, *i.e.* after the compactification of the CY manifold, the radius of the eleventh dimension should be $R_{11} \sim e^\gamma$, so the identification of the moduli fields is now different, leading to the previous conclusions.

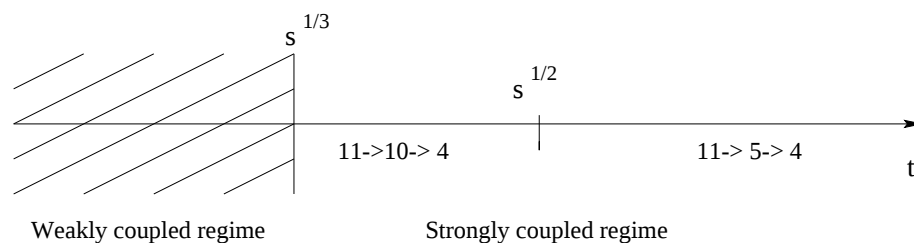
Units	Five-brane	String	Supergravity
λ	1	$e^{2\phi/3}$	$e^{\phi/6}$
s	$e^{3\sigma}$	$e^{3\sigma-2\phi}$	$e^{3\sigma-\phi/2}$
t	$e^{\sigma+2\phi/3}$	e^{σ}	$e^{\sigma+\phi/2}$

Table II.1: Identification of the real parts of moduli fields in string compactification in various units.

From an 11-d point of view in M -theory coordinates (4.3), the $11 \rightarrow 5 \rightarrow 4$ pattern of compactification is consistent if $R_5 > R_{CY}$, which reads $t > s^{1/2}$.

From a 10-d point of view in five-brane coordinates (4.15), in the $11 \rightarrow 10 \rightarrow 4$ pattern of compactification, the radii of the Calabi-Yau space and of the extra-dimension are now $R_{CY} \sim e^{\sigma/2}$ and $R_{11} \sim e^{2\phi/3}$, while the consistency condition of compactification is $R_{CY} > R_{11}$, which, in term of moduli fields (table II.1), now becomes $t < s^{1/2}$.

In both cases, the 10-d string strongly coupled regime condition $e^{\phi} > 1$ simply reads $t > s^{1/3}$. So we can draw, on the $\langle t \rangle$ line, the different consistent patterns of compactification (we assume that $s > 1$)



We have seen that phenomenology asks for large values of t , so our pattern of compactification is self-consistent.

5 Conclusions

We studied truncations of M -theory from $11 \rightarrow 5 \rightarrow 4$ dimensions, applying our results to the supersymmetry-breaking mechanism by compactification from 5-d to 4-d. The geometric properties of the moduli fields, related to the special geometry of the 5-d theory, are peculiar and important for phenomenological purposes. $\Re S$ is the volume of 6-d internal manifold, the various $h_{1,1}$ moduli fields T are related to the radius of the fifth-dimension and are invariant under dilatations of the 6-d manifold and the $h_{2,1}$ moduli U characterize, as usual, the complex structure of the 6-d manifold.

Using different symmetries of the 5-d theory, we are able to break supersymmetry by compactification in various ways. The most interesting one is by using an $SU(2)$ symmetry related to the universal hypermultiplet of the 5-d theory. In this case, we

obtain (for the simplest possible truncation) a model described by

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= -\ln(S + S^\dagger) - 3\ln(T + T^\dagger) , \\ W &= 2m(1 + S) .\end{aligned}\tag{5.1}$$

This universal superpotential for S should correspond to a non-perturbative string effect. The minimization gives $S = 1$ and a spontaneously broken supergravity model with a zero cosmological constant. We hope that this result will shed some light on problems such as dilaton stabilization and supersymmetry breaking in effective strings. Another example, using symmetries of the compactified 6-d space, gives rise to a potential for the U moduli, the corresponding vacuum is $U_i = 1$ with a zero cosmological constant.

Defining 4-d scales and couplings, we find that the resulting gravitino mass in supergravity units is $m_{3/2} \sim R_5^{-2}/M_{Pl}^{(4)}$, which betters the usual decompactification limit ($R_5 \rightarrow 0$) problem and correlates it with the unification problem in a way that looks phenomenologically promising.

Acknowledgements

It is a pleasure to thank P. Binétruy, C. Kounnas, R. Minasian, J. Mourad, B. Pioline and C. Savoy for helpful discussions and comments.

References

- [1] M. Dine and N. Seiberg, *Phys. Rev. Lett.* **55** (1985) 366;
V.S. Kaplunovsky, *Phys. Rev. Lett.* **55** (1985) 1036;
M. Dine and N. Seiberg, *Phys. Lett.* **162B** (1985) 299.
- [2] C.M. Hull and P.K. Townsend, *Nucl. Phys.* **B438** (1995) 409;
E. Witten, *Nucl. Phys.* **B443** (1995) 85;
for recent reviews, see for instance, P.K. Townsend, *hep-th/9612121*.
- [3] P. Hořava and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B460** (1996) 506 and **B475** (1996) 94.
- [4] T. Banks and M. Dine, *Nucl. Phys.* **B479** (1996) 173, *hep-th/9609046*;
E. Caceres, V.S. Kaplunovsky and I.M. Mandelberg, *hep-th/9606036*;
T. Li, J.L. Lopez and D.V. Nanopoulos, *hep-ph/9702237*.
- [5] I. Antoniadis and M. Quiros, *Phys. Lett.* **B392** (1997) 61.
- [6] T. Li, J.L. Lopez and D.V. Nanopoulos, *hep-th/9704247*.
- [7] E. Dudas and J. Mourad, *hep-th/9701048*.

- [8] J. Scherk and J.H. Schwarz, *Nucl. Phys.* **B153** (1979) 61, and *Phys. Lett.* **B82** (1979) 60;
E. Cremmer, J. Scherk and J.H. Schwarz, *Phys. Lett.* **B84** (1979) 83;
P. Fayet, *Phys. Lett.* **B159** (1985) 121, *Nucl. Phys.* **B263** (1986) 649.
- [9] M. Günaydin, G. Sierra and P.K. Townsend, *Nucl. Phys.* **B242** (1984) 244, *Nucl. Phys.* **B253** (1985) 573;
A.C. Cadavid, A. Ceresole, R. D'Auria and S. Ferrara, *Phys. Lett.* **B357** (1995) 76.
- [10] E. Witten, *Phys. Lett.* **155B** (1985) 151.
- [11] S. Ferrara, C. Kounnas and M. Porrati, *Phys. Lett.* **181B** (1986) 263.
- [12] E. Cremmer, S. Ferrara, C. Kounnas and D.V. Nanopoulos, *Phys. Lett.* **B133** (1983) 61;
J. Ellis, C. Kounnas and D.V. Nanopoulos, *Nucl. Phys.* **B241** (1984) 406 and **B247** (1984) 373.
- [13] S.P. de Alwis, *Phys. Lett.* **B388** (1996) 291.
- [14] M.J. Duff, J.T. Liu and R. Minasian, *Nucl. Phys.* **B452** (1995) 261.
- [15] C. Vafa and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B447** (1995) 261.
- [16] A. Hindawi, B. Ovrut and D. Waldram, *hep-th/9602075*;
R. Ledu, *PhD thesis*, CPT Marseille, (1997).
- [17] C. Kounnas and M. Porrati, *Nucl. Phys.* **B310** (1988) 355;
S. Ferrara, C. Kounnas, M. Porrati and F. Zwirner, *Nucl. Phys.* **B318** (1989) 75.
- [18] P. Hořava, *Phys. Rev.* **D54** (1996) 7561.
- [19] S. Ferrara and S. Sabharwal, *Class. Quantum Grav.* **6** (1989) L77, *Nucl. Phys.* **B332** (1990) 317.
- [20] A. Font, L. Ibáñez, D. Lüst and F. Quevedo, *Phys. Lett.* **B249** (1990) 35;
S.J. Rey, *Phys. Rev.* **D43** (1991) 526;
Z. Lalak, A. Niemeyer and H.P. Nilles, *Phys. Lett.* **B349** (1995) 99;
P. Binétruy and M.K. Gaillard, *Phys. Lett.* **B365** (1996) 87.
- [21] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B471** (1996) 135.
- [22] I. Antoniadis, C. Muñoz and M. Quiros, *Nucl. Phys.* **B397** (1993) 515;
I. Antoniadis and K. Benakli, *Phys. Lett.* **B326** (1994) 69.
- [23] P. Binétruy, *Phys. Lett.* **B315**(1993) 80.
- [24] I. Antoniadis and M. Quiros, preprint CERN-TH/97-90.

Publication III

Superconformal six-dimensional (2,0) theories in superspace

hep-th/9807055

LPTM 98/66

Saclay T98/068

Superconformal six-dimensional (2,0) theories in superspace

C. Grojean^a and J. Mourad^{b,c}

^a Service de Physique Théorique, CEA-Saclay
F-91191 Gif/Yvette Cedex, France

^b Laboratoire de Physique Théorique et Modélisation,
Université de Cergy-Pontoise
Site Saint-Martin, F-95032 Cergy-Pontoise, France

^c Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies,
Université de Paris-Sud, Bât. 211, F-91405 Orsay Cedex, France

Abstract

A geometrical construction of superconformal transformations in six dimensional (2,0) superspace is proposed. Superconformal Killing vectors are determined. It is shown that the transformation of the tensor multiplet involves a zero curvature non-trivial cochain.

PACS: 11.10.K, 11.25.H, 11.30.P.

1 Introduction

Many reasons motivate the study of supersymmetric six dimensional chiral theories with sixteen supercharges [1]. The more recent one is that the worldvolume of the five-brane [2–6] of M -theory [7] is described by such a theory. Not much is known about M -theory besides that it contains membranes and five-branes and that by compactification it reduces to superstring theory. A recent conjecture by Maldacena [8] states that M -theory on $AdS_7 \times S^4$ with radii $R_{sph} = R_{AdS}/2 = l_p(\pi N)^{1/3}$ (l_p is the eleventh dimensional Planck length) is dual to the superconformal worldvolume theory describing N coincident five-branes. Some consequences of this conjecture were examined in [9]. The study of six dimensional (2,0) theories may thus provide important clues concerning the still mysterious M -theory. Another conjecture on M -theory is that of Matrix theory [10]; here too, (2,0) six dimensional theories appear from Matrix theory compactified on T^4 [11].

The aim of this paper is the geometrical study of six dimensional (2,0) theories in superspace. The (2,0) multiplet contains five scalars, one Weyl-symplectic Majorana spinor and an anti-self dual three form [12]. In section 2, we recall the superfield description of this multiplet [13] with one superfield in the vector representation of the R -symmetry group $SO(5)$. This superfield is subject to a constraint which, as shown in section 2, reproduces the correct multiplet and the equations of motion. In section 3, we show that there exists an alternative formulation with the aid of a closed super three-form which is subject to some constraints. These constraints are somewhat similar to those of the 10D super Yang-Mills constraints [14] and to the six dimensional (1,0) constraints for the tensorial multiplet [15]. For (1,0) six dimensional theories it is possible to find nontrivial sigma models living on a quaternionic target space [16]. In section 4, we show that a generalization to sigma models of the free theory leads only to trivial conformally flat target spaces. This illustrates the rigidity of (2,0) theories. In section 5, we define superconformal transformations as supercoordinate transformations leaving the super-flat metric invariant up to a scale. A similar construction for $N=1$ 4D theories is considered in [17] and references therein. We calculate the resulting super-Killing vectors and show that their Lie algebra is that of $OSp(6, 2|2)$. An algebraic construction of the superconformal (2,0) algebra was given in ref [18], it relies on the triality property of the six-dimensional conformal group $SO(6, 2)$ and results in the orthosymplectic group $OSp(6, 2|2)$. Our geometrical construction provides a realisation of the generators of $OSp(6, 2|2)$ in superspace and facilitates the study of superconformal invariance in a manifestly supersymmetric context. In section 6, we determine the transformation of the scalar superfield under superconformal transformations. We find that this transformation involves a zero curvature 1-cochain on the superconformal Lie algebra. We determine explicitly this cochain and show that it is non-trivial. We illustrate the usefulness of the formalism of section 3 by showing that the transformation of the super-three form is purely geometrical and simpler than that of the scalar superfield. We collect our conclusions in section 7. Our notations and some technical results which are used in the text can be found in the Appendix.

2 Free supermultiplet

The on-shell (2,0) supermultiplet comprises five scalars ϕ^i transforming as a vector of $SO(5)$, one symplectic Majorana-Weyl fermion and a two-form with self dual field strength. The goal of this section is to provide a manifestly supersymmetric description of this multiplet [13]. One may try to consider a scalar superfield transforming in the **5** of $SO(5)$ whose $\theta = 0$ component is the scalar field. Such a superfield would have the general form⁽¹⁾

$$\Phi^i(x, \theta) = \phi^i(x) + \bar{\theta}\psi^i + \dots, \quad (2.1)$$

where $\dots$ stand for terms with two and more θ . We see that at the one θ level we have five independent fermions. Since the on-shell supermultiplet has only one fermion we have to constrain the superfield in such a way that only one out of the five ψ^i be independent. An $SO(5)$ covariant way of doing this is to impose that

$$\psi^i = \Gamma^i \psi \text{ with } \psi = \frac{1}{5} \Gamma_i \psi^i. \quad (2.2)$$

Note that ψ^i may be written as the $\theta = 0$ component of $D_{\hat{\alpha}}\Phi^i = (\partial_{\hat{\alpha}} - (\Gamma^\mu \theta)_{\hat{\alpha}} \partial_\mu) \Phi^i$, so that a manifestly supersymmetric and $SO(5)$ covariant constraint on the superfield is

$$D\Phi^i = \frac{1}{5} \Gamma^i \Gamma_j D\Phi^j, \quad (2.3)$$

or equivalently

$$D\Phi^i = \frac{1}{4} \Gamma^i{}_j D\Phi^j. \quad (2.4)$$

When indices are made explicit this constraint reads

$$D_{\alpha a} \Phi^i = \frac{1}{4} (\gamma^i{}_j)_a{}^b D_{\alpha b} \Phi^j. \quad (2.5)$$

Our notations can be found in the appendix. The rest of this section is devoted to the analysis of the constraint (2.5). We will show that it reproduces the (2,0) supermultiplet and the equations of motion.

Let $\Psi_{\alpha a} = (\gamma_i)_a{}^b D_{\alpha b} \Phi^i / 5$ then the supersymmetric transformation of ϕ^i is given by the $\theta = 0$ component of $D\Phi^i = \Gamma^i \Psi$. In order to get the quadratic terms in θ we take the $D_{\beta b}$ of the constraint (2.5). The following decomposition of the product of two derivative is useful

$$D_{\alpha a} D_{\beta b} = -(\gamma^\mu)_{[\alpha\beta]} \Omega_{[ab]} \partial_\mu + \Omega_{[ab]} D_{(\alpha\beta)} + (\gamma^i)_{[ab]} D_{i(\alpha\beta)} + (\gamma^{ij})_{(ab)} D_{[ij][\alpha\beta]}, \quad (2.6)$$

⁽¹⁾In ref [13] the scalar superfield is in the antisymmetric representation of $Sp(2)$, $\Phi_{[ab]}$. It is related to ours by $\Phi^i = (\gamma^i)_{ab} \Phi^{[ab]}$.

where $(\alpha\beta)$ or $[\alpha\beta]$ means that the quantity is symmetric or antisymmetric. The quantities appearing in (2.6) are defined, for $N = \emptyset, i$ and ij , by

$$D_{N\alpha\beta} = \frac{1}{8}[D_{\alpha a}, D_{\beta b}](\gamma_N)^{ba} \quad (2.7)$$

Taking the supersymmetric derivative of (2.5) and using the identities

$$\gamma^{ij}\gamma^l = 2\eta^{lj}\gamma^i - \frac{1}{2}\epsilon^{ijl}{}_{mn}\gamma^{mn}, \quad (2.8)$$

$$\gamma^{ij}\gamma_{kl} = \epsilon^{ij}{}_{klm}\gamma^m + 4\eta^{[i}{}_{[k}\gamma^{j]}{}_{l]} + 2\eta^{[i}{}_{[k}\eta^{j]}{}_{l]}, \quad (2.9)$$

we get the following equations

$$D_{(\alpha\beta)}\Phi^i = 0, \quad D_{k(\alpha\beta)}\Phi^j = \frac{1}{5}\eta_k{}^j D_{i(\alpha\beta)}\Phi^i, \quad (2.10)$$

$$D_{kl[\alpha\beta]}\Phi^j = \frac{1}{2}(\eta_k{}^j(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\partial_\mu\Phi_l - \eta_l{}^j(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\partial_\mu\Phi_k). \quad (2.11)$$

Taking the $\theta = 0$ part of these equations shows that the only new field that appears at this level is the $\theta = 0$ component of

$$H_{\alpha\beta} \equiv D_{i(\alpha\beta)}\Phi^i. \quad (2.12)$$

Regarded as a matrix, this superfield H can be decomposed in the basis made by the antisymmetrised products of the Dirac matrices. Taking into account the symmetry and chirality properties (α and β are both of the opposed chirality compared to the θ 's), only products of three Dirac matrices appear in this decomposition. So H is equivalent to an anti self-dual three-form given by

$$h_{\mu_1\mu_2\mu_3} = (\gamma_{\mu_1\mu_2\mu_3})^{\alpha\beta} H_{\alpha\beta}. \quad (2.13)$$

$h_{\mu_1\mu_2\mu_3}$ is anti self-dual because

$$\epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3}{}^{\mu_4\mu_5\mu_6}\gamma_{\mu_4\mu_5\mu_6} = -6\gamma_{\mu_1\mu_2\mu_3}, \quad (2.14)$$

when acting on chiral spinors. In order to get the transformation of the spinor ψ , we take the supersymmetric derivative of the equation $\Psi = \gamma_i D\Phi^i/5$ to get

$$D_{\beta b}\Psi_{\alpha a} = -(\gamma^\mu)_{[\beta\alpha]}(\gamma_i)_{[ba]}\partial_\mu\Phi^i + \frac{1}{5}\Omega_{[ba]}H_{\beta\alpha}. \quad (2.15)$$

In order to look for possible new fields at the level of the product of three θ 's we have to calculate the supersymmetric derivative of $H_{\alpha\beta}$. The consistency of (2.15) gives

$$\begin{aligned} & 2(\Gamma^\mu)_{\gamma c\beta b}\partial_\mu\Psi_{\alpha a} - (\Gamma^{\mu i})_{\beta b\alpha a}(\gamma_i)_c{}^d\partial_\mu\Psi_{\gamma d} - (\Gamma^{\mu i})_{\gamma c\alpha a}(\gamma_i)_b{}^d\partial_\mu\Psi_{\beta d} \\ & - \frac{1}{5}\Omega_{ab}D_{\gamma c}H_{\beta\alpha} - \frac{1}{5}\Omega_{ac}D_{\beta b}H_{\gamma\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Taking the symmetric part in ac and multiplying by $(\Omega^{-1})^{ba}$ we get

$$D_{\gamma a} H_{\alpha\beta} = 5(\gamma^\mu)_{\gamma\beta} \partial_\mu \Psi_{\alpha a} + 5(\gamma^\mu)_{\gamma\alpha} \partial_\mu \Psi_{\beta a} \quad (2.17)$$

which gives the supersymmetric transformation of the three-form and shows that no new degrees of freedom appear at the three θ 's as well as at higher levels. Multiplying (2.17) by $\mathcal{C}^{\alpha\beta}$ gives the equation of motion of the fermion $\gamma^\mu \partial_\mu \Psi = 0$ which when used in (2.15) gives the bosonic equations $\partial^\mu \partial_\mu \Phi^i = 0$ and $\gamma^\nu \gamma^\alpha \partial_\nu H_{\alpha\beta} = 0$. The simplest way to obtain the latter is to notice that

$$H_{\alpha\beta} = -\frac{5}{4} D_{\beta b} \Psi_\alpha{}^b \quad (2.18)$$

and use the Dirac equation. The equation of motion of $H_{\alpha\beta}$ reads for the three-form h defined in (2.13) as $dh = d^*h = 0$ which gives the Bianchi identity and the equations of motion of the three-form. This equation assures that the three-form h is the field strength of a two-form which can be identified with the two-form of the tensoriel supermultiplet. It remains to prove that equations (2.16) have no other content than equations (2.17). This is easily proved when the relation

$$(\gamma^i)_{ab} (\gamma_i)_c{}^d = 2\delta_a{}^d \Omega_{cb} - 2\delta_b{}^d \Omega_{ca} - \delta_c{}^d \Omega_{ab} \quad (2.19)$$

is used.

3 Super two-form

In this section we formulate the (2,0) free theory with a super two-form $B = \frac{1}{2} B_{MN} E^M E^N$ with field strength $H = dB$. Here $M = (\mu, \hat{\alpha})$, $E^\mu = dx^\mu - \bar{\theta} \Gamma^\mu d\theta$ and $E^{\hat{\alpha}} = d\theta^{\hat{\alpha}}$ are the basis of 1 super-forms invariant under global supersymmetries. In a way similar to Yang-Mills theories [14], we impose the constraints

$$H_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}} = 0, \quad (3.1)$$

$$H_{\mu\hat{\alpha}\hat{\beta}} = (\Gamma_\mu \Gamma_i)_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \tilde{\Phi}^i, \quad (3.2)$$

and solve the Bianchi identity $dH = 0$. Here $\tilde{\Phi}^i$ is a scalar superfield which belongs to the vectorial representation of $SO(5)$. We shall prove that we can identify $\tilde{\Phi}^i$ with the scalar superfield Φ^i of the previous section.

Terms with four spinorial indices in the Bianchi identity give $H_{\mu(\hat{\alpha}\hat{\beta}} (\Gamma^\mu)_{\hat{\delta}\hat{\lambda}}) = 0$ which is satisfied thanks to the relation

$$(\Gamma^{\mu i})_{(\hat{\alpha}\hat{\beta}} (\Gamma^\mu)_{\hat{\delta}\hat{\lambda}}) = 0, \quad (3.3)$$

which is proved in the Appendix.

Terms with three spinorial indices in the Bianchi identity give

$$D_{(\hat{\alpha}} H_{\hat{\beta}\hat{\gamma})\mu} + 2H_{\nu\mu(\hat{\alpha}} (\Gamma^\nu)_{\hat{\beta}\hat{\gamma}}) = 0. \quad (3.4)$$

Taking into account the Dirac matrices property

$$(\Gamma_{\nu\mu})_{\hat{\alpha}(\hat{\beta}}(\Gamma^{\mu})_{\hat{\delta}\hat{\lambda}}) + (\Gamma^i)_{\hat{\alpha}(\hat{\beta}}(\Gamma_{\nu i})_{\hat{\delta}\hat{\lambda}}) = 0, \quad (3.5)$$

which is proved in the Appendix, the solution to (3.4) can be given with the aid of a spinorial superfield $\tilde{\Psi}_{\hat{\alpha}}$ as

$$2H_{\nu\mu\hat{\beta}} = (\Gamma_{\nu\mu})_{\hat{\beta}}^{\hat{\delta}} \tilde{\Psi}_{\hat{\delta}}, \quad (3.6)$$

$$D_{\hat{\gamma}} H_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\mu} = (\Gamma_{\mu}\Gamma_i)_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} (\Gamma^i)_{\hat{\gamma}}^{\hat{\delta}} \tilde{\Psi}_{\hat{\delta}}. \quad (3.7)$$

Comparing (3.7) with (3.2) we see that $\tilde{\Phi}^i$ and $\tilde{\Psi}^{\hat{\alpha}}$ must be related by

$$(\Gamma^i)_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}} \tilde{\Psi}_{\hat{\beta}} = D_{\hat{\alpha}} \tilde{\Phi}^i, \quad (3.8)$$

which is equivalent to the constraint (2.5) obeyed by the scalar superfield Φ^i allowing us to identify the two.

The terms with two spinorial indices in the Bianchi identity lead to

$$\partial_{[\mu} H_{\nu]\hat{\alpha}\hat{\beta}} + D_{(\hat{\alpha}} H_{\hat{\beta})\mu\nu} - H_{\mu\nu\rho} (\Gamma^{\rho})_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = 0, \quad (3.9)$$

which is satisfied provided we make the identification

$$H_{\mu\nu\rho} = h_{\mu\nu\rho} \quad (3.10)$$

and use equation (2.15).

The term with one spinorial index is identically zero du to (2.17) and finally the term with no spinorial indices in the Bianchi identity is zero du to the equation of motion of $h_{\mu\nu\rho}$ and the identification (3.10).

In brief, the constraints (3.1) and (3.2) for the closed super three form H are equivalent to the constraints (2.5): from the superfield Φ^i we can construct a closed super three form verifying (3.1) and (3.2), and, conversely, from the constraints (3.1) and (3.2) on a closed super three-form, we get a scalar superfield verifying (2.5).

4 Sigma model

In this section, we search for sigma-model generalizations of the constraint (2.5). For (1,0) theories, this was done in [16]. The five dimensional target space is assumed to be described by a moving basis $e_i^I(\Phi)$, where $I = 1, \dots, 5$ is a flat index of $SO(5)$ and i is a curved space index. We generalise the constraint (2.5) to have the form

$$e^I_i(\Phi) D_{\alpha a} \Phi^i = \frac{1}{4} (\gamma^I_J)_a^b e^J_j(\Phi) D_{\alpha b} \Phi^j. \quad (4.1)$$

From (4.1), we can deduce, as in section 2, the transformations of the fields under supersymmetry, their equations of motions and, in addition, the constraints on the geometry of the target space.

The transformation rule for ϕ^i can be deduced from the $\theta = 0$ component of the equation

$$D_{\alpha a} \Phi^i = e_I^i (\gamma^I)_a{}^b \Psi_{\alpha b}. \quad (4.2)$$

In order to get the constraints on the moving basis $e^I_i(\Phi)$, we take the spinorial derivative of (4.1) to obtain

$$e^I_i(\Phi) D_{\gamma c} D_{\alpha a} \Phi^i - \frac{1}{4} (\gamma^I_J)_a{}^b e^J_j(\Phi) D_{\gamma c} D_{\alpha b} \Phi^j = f^I_{\gamma \alpha c a}, \quad (4.3)$$

where we used the definition

$$f^I_{\gamma \alpha c a} = \left(\frac{1}{4} \gamma^I_J - \eta^I_J \right)_a{}^b e^J_{j,k} D_{\gamma c} \Phi^k D_{\alpha b} \Phi^j. \quad (4.4)$$

It is convenient, for the analysis of (4.3), to use the following decomposition on the $SO(5)$ gamma matrices

$$f^I_{\gamma \alpha c a} = f^I_{\gamma \alpha} \Omega_{ca} + f^I_{J \gamma \alpha} (\gamma^J)_{ca} + f^I_{JK \gamma \alpha} (\gamma^{JK})_{ca}. \quad (4.5)$$

Then equation (4.3), using the decomposition (2.6), gives the following relations which replace eqs (2.10) and (2.11)

$$e^I_j D_{(\gamma \alpha)} \Phi^j = f^I_{(\gamma \alpha)}, \quad (4.6)$$

$$e_{Ij} D_{K(\gamma \alpha)} \Phi^j = \frac{1}{5} \eta_{IK} e^J_j D_{J(\gamma \alpha)} \Phi^j + \frac{16}{15} f_{IK(\gamma \alpha)} - \frac{4}{15} f_{KI(\gamma \alpha)}, \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} e_{Ij} D_{MN[\gamma \alpha]} \Phi^j &= \frac{1}{2} (\eta_{MI} e_{Nj} (\gamma^\mu)_{\gamma \alpha} \partial_\mu \Phi^j - \eta_{NI} e_{Mj} (\gamma^\mu)_{\gamma \alpha} \partial_\mu \Phi^j) \\ &\quad - \frac{1}{5} \epsilon^{JK}{}_{IMN} f_{JK[\gamma \alpha]} + \frac{2}{5} (\eta_{MI} f_{N[\gamma \alpha]} - \eta_{NI} f_{M[\gamma \alpha]}) + \frac{4}{5} f_{IMN[\gamma \alpha]}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

as well as the following constraints on $f^I_{\gamma \alpha c a}$:

$$f^I_{I \gamma \alpha} = 0, \quad f_{(IK)[\gamma \alpha]} = 0, \quad (4.9)$$

$$f_{I[\gamma \alpha]} = 2 f^J_{JI[\gamma \alpha]}, \quad \epsilon^{IJKMN} f_{KMN[\gamma \alpha]} = -2 f^{IJ}{}_{[\gamma \alpha]}, \quad (4.10)$$

$$f^I_{MN(\gamma \alpha)} = \frac{1}{8} (-\eta^I_N f_{M(\gamma \alpha)} + \eta^I_M f_{N(\gamma \alpha)}) - \frac{1}{6} \epsilon^{IJK}{}_{MN} f_{JK(\gamma \alpha)}. \quad (4.11)$$

The structure of $f^I_{\gamma \alpha c a}$ given in (4.4) implies a number of constraints which are identically satisfied. These are given by

$$f^I_{\gamma \alpha} = 2 f^J{}_J{}^I{}_{\gamma \alpha}, \quad f^J_{J \gamma \alpha} = 0, \quad 6 f_{[IMN] \gamma \alpha} = -\epsilon_{IMN}{}^{JK} f_{JK \gamma \alpha}. \quad (4.12)$$

So only the second constraint in (4.9) and (4.11) are not identically satisfied. It turns out that these two imply that the moving basis must be such

$$de^I \wedge e^J + de^J \wedge e^I - \frac{2}{5} \eta^{IJ} \eta_{KL} de^K \wedge e^L = 0. \quad (4.13)$$

It is possible to solve equations (4.13) to get $e^I = \Sigma d\Upsilon^I$ for some functions Σ and Υ^I which means that the target space is conformally flat. By a change of coordinates in the target space $\Phi^i \rightarrow \Upsilon^I$ the theory is transformed to the free theory of section 2. So no non-trivial sigma-models are allowed by (2,0) supersymmetry.

5 Superconformal transformations

In this section we give a geometrical construction of the superconformal transformations and determine explicitly the realisation of the generators in the (2,0) superspace.

The flat supersymmetric metric in superspace is given by

$$g = \eta_{\mu\nu} E^\mu \otimes E^\nu. \quad (5.1)$$

Notice that the other term appearing *a priori* in the (2,2) superspace, $C_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} E^{\hat{\alpha}} \otimes E^{\hat{\beta}}$, is forbidden by chirality in (2,0) theories. A supercoordinate transformation is generated by an even vector field $\xi = \xi^\mu E_\mu + \xi^{\hat{\beta}} E_{\hat{\beta}}$, where ξ^μ is even and $\xi^{\hat{\beta}}$ is odd. Under this transformation, the supercoordinates Z^M transform as

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= \xi^\mu + \theta^{\hat{\alpha}} (\Gamma^\mu)_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \xi^{\hat{\beta}}, \\ \delta \theta^{\hat{\alpha}} &= \xi^{\hat{\alpha}}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

and the metric varies as

$$\delta g = L_\xi g, \quad (5.3)$$

where L_ξ is the Lie derivative with respect to the vector ξ . A superconformal transformation is defined by the requirement that the transformed metric be proportional to the initial one, that is

$$\delta g = \alpha(Z)g, \quad (5.4)$$

where α is *a priori* an arbitrary superfield. The vector field ξ is said to be a superconformal Killing vector. The use of the relation $[L_\xi, L_{\xi'}] = L_{[\xi, \xi']}$, where $[\cdot, \cdot]$ is the Lie bracket, shows that if ξ and ξ' are two superconformal Killing vector fields with scales α and α' then $[\xi, \xi']$ is also a superconformal Killing vector with scale $\xi(\alpha') - \xi'(\alpha)$, so that the set of all ξ 's forms a Lie algebra.

In order to determine explicitly the superconformal Killing vectors we first calculate the variation of the basis super one-forms:

$$\delta E^\mu = (d\iota_\xi + \iota_\xi d)E^\mu = (\partial_\nu \xi^\mu)E^\nu - (D_{\hat{\alpha}} \xi^\mu + 2(\Gamma^\mu)_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \xi^{\hat{\beta}})E^{\hat{\alpha}}, \quad (5.5)$$

so the condition (5.4) is verified provided

$$D_{\hat{\alpha}} \xi^\mu + 2(\Gamma^\mu)_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \xi^{\hat{\beta}} = 0, \quad (5.6)$$

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = \alpha \eta_{\mu\nu}. \quad (5.7)$$

We shall show that the equation (5.7) is a consequence of (5.6), so that the solutions of the latter determine all superconformal Killing vectors. Note that, by equation (5.6), $\xi^{\hat{\beta}}$ is determined in terms of ξ^μ by

$$\xi^{\hat{\beta}} = -\frac{1}{12} (\Gamma^\mu)^{\hat{\beta}\hat{\alpha}} D_{\hat{\alpha}} \xi_\mu. \quad (5.8)$$

This allows to write equation (5.6) in terms of ξ_μ as

$$D_{\hat{\alpha}}\xi^\mu = \frac{1}{5}(\Gamma^{\mu\nu})_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}} D_{\hat{\beta}}\xi_\nu, \quad (5.9)$$

which is very similar to the constraint of the scalar superfield (2.5), the vectorial structure in $SO(5)$ being replaced by the same one in $SO(1,5)$. In order to analyse equation (5.9) it is convenient to decompose the product of two spinorial derivatives as

$$\begin{aligned} D_{\hat{\alpha}} D_{\hat{\beta}} &= -(\Gamma^\nu)_{(\hat{\alpha}\hat{\beta})} \partial_\nu + (\Gamma^{\nu ij})_{[\hat{\alpha}\hat{\beta}]} D_{\nu[ij]} \\ &\quad + (\Gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3})_{[\hat{\alpha}\hat{\beta}]} D_{\mu_1\mu_2\mu_3} + (\Gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3 i})_{[\hat{\alpha}\hat{\beta}]} D_{\mu_1\mu_2\mu_3 i}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

then taking the spinorial derivative of (5.9) yields

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = \frac{1}{3} \partial_\rho \xi^\rho \eta_{\mu\nu}, \quad (5.11)$$

$$D_{\nu[ij]} \xi_\mu = \frac{1}{6} D_{\rho[ij]} \xi^\rho \eta_{\nu\mu}, \quad (5.12)$$

$$D_{\mu_1\mu_2\mu_3} \xi_{\mu_4} = -\frac{1}{4} \left(\eta_{\mu_4[\mu_1} \partial_{\mu_2} \xi_{\mu_3]} - \frac{1}{6} \epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3}^{\nu_1\nu_2\nu_3} \eta_{\mu_4[\nu_1} \partial_{\nu_2} \xi_{\nu_3]} \right), \quad (5.13)$$

$$D_{\mu_1\mu_2\mu_3 i} \xi_{\mu_4} = 0. \quad (5.14)$$

The first equation is equivalent to (5.7) which shows that (5.7) is contained in (5.6). Let $\zeta_\mu(x)$, $\zeta^{\hat{\beta}}(x)$ and $\zeta^{ij}(x)$ be the $\theta = 0$ components of ξ_μ , $\xi^{\hat{\beta}}$ and $D_{\rho[ij]} \xi^\rho$, then equations (5.11, 5.12, 5.13) and (5.14) show that the superfield ξ_μ is determined in terms of the ζ 's. These are solutions to the following decoupled equations which are consequences of (5.11)

$$\partial_\mu \zeta_\nu + \partial_\nu \zeta_\mu = \frac{1}{3} \partial_\rho \zeta^\rho \eta_{\mu\nu}, \quad (5.15)$$

$$(\Gamma_\mu)_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \partial_\nu \zeta^{\hat{\beta}} + (\Gamma_\nu)_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \partial_\mu \zeta^{\hat{\beta}} = \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} (\Gamma_\rho)_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \partial^\rho \zeta^{\hat{\beta}}, \quad (5.16)$$

$$\partial_\mu \zeta^{ij} = 0. \quad (5.17)$$

The solutions to (5.15) are the well-known conformal Killing vectors

$$\zeta_\mu = a_\mu + a_{[\mu\nu]} x^\nu + \lambda x_\mu + (x^2 \eta_{\mu\nu} - 2x_\mu x_\nu) k^\nu, \quad (5.18)$$

where a_μ , $a_{\mu\nu}$, λ and k_μ are parameters of infinitesimal translations, Lorentz transformations, dilatations and special conformal transformations. Similarly, the solutions to (5.16) are determined in terms of two constant spinors ϵ and η (respectively symplectic-Majorana-Weyl and anti-symplectic-Majorana-Weyl spinors) as

$$\zeta^{\hat{\beta}} = \epsilon^{\hat{\beta}} + x_\mu (\Gamma^\mu)^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}} \eta^{\hat{\alpha}}, \quad (5.19)$$

ϵ is the parameter of a supersymmetry transformation and η that of a special supersymmetry transformation. Finally the solution of (5.17) is given by

$$\zeta^{ij} = \frac{1}{4} \epsilon^{[ij]}, \quad (5.20)$$

where $\epsilon^{[ij]}$ are constants which represent infinitesimal $SO(5)$ rotations. The complete θ expansion of the superfield ξ_μ follows from the solutions (5.18, 5.19, 5.20) and from the equations (5.11, 5.12, 5.13) after some tedious algebra as

$$\begin{aligned}\xi^\mu &= \zeta^\mu - 2\bar{\theta}\Gamma^\mu\zeta + \bar{\theta}\left(\Gamma^{\mu ij}\zeta_{ij} + \frac{1}{4}\Gamma^{\mu\mu_1\mu_2}\partial_{\mu_1}\zeta_{\mu_2}\right)\theta \\ &\quad + \frac{1}{2}\bar{\theta}\Gamma^{\mu\mu_1\mu_2}\theta\bar{\theta}\Gamma_{\mu_1}\partial_{\mu_2}\zeta - \frac{1}{64}\bar{\theta}\Gamma^{\mu\mu_1\mu_2}\theta\bar{\theta}\Gamma_{\mu_1\mu_2\mu_3}\theta\partial_\rho\partial^\rho\zeta^{\mu_3}.\end{aligned}\quad (5.21)$$

In order to have the complete expression of the superconformal Killing vector field ξ we have to calculate $\xi^{\hat{\alpha}}$ from equation (5.8), the result, after some arrangements is

$$\begin{aligned}\xi^{\hat{\alpha}} &= \left[\zeta - \Gamma_{ij}\theta\zeta^{ij} + \frac{1}{12}\theta\partial_\mu\zeta^\mu - \frac{1}{4}\Gamma^{\mu\nu}\theta\partial_\mu\zeta_\nu\right. \\ &\quad - \frac{1}{6}\theta\bar{\theta}\Gamma^\mu\partial_\mu\zeta - \frac{1}{2}\Gamma^{\mu\nu}\theta\bar{\theta}\Gamma_\mu\partial_\nu\zeta - \frac{1}{24}\Gamma_{\mu_1\mu_2}\partial_{\mu_3}\zeta\bar{\theta}\Gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3}\theta \\ &\quad \left. + \frac{1}{32}\Gamma^{\mu_1\mu_2}\theta\bar{\theta}\Gamma_{\mu_1\mu_2\mu_3}\theta\partial_\sigma\partial^\sigma\zeta^{\mu_3}\right]^{\hat{\alpha}}.\end{aligned}\quad (5.22)$$

It is also possible to determine the scale α ,

$$\alpha = \frac{1}{3}[\partial_\mu\zeta^\mu - 2\bar{\theta}\Gamma^\mu\partial_\mu\zeta].\quad (5.23)$$

The Lie algebra of superconformal transformations can be deduced from the calculation of the Lie bracket of two super-Killing vectors ξ_1 and ξ_2 which we denote by ξ_3 . Let the parameters determining the ξ_a ($a = 1, 2, 3$) be given by a_a^μ , $a_{a\nu}^\mu$, λ_a , k_a^μ , ϵ_a , η_a and ϵ_a^{ij} then the parameters of ξ_3 are given⁽²⁾ by

$$\begin{aligned}a_3^\mu &= a_1^\nu a_{2\nu}^\mu - a_2^\nu a_{1\nu}^\mu + \lambda_2 a_1^\mu - \lambda_1 a_2^\mu - 2\bar{\epsilon}_1\Gamma^\mu\epsilon_2, \\ a_3^{\mu\nu} &= 2(a_1^\nu k_2^\mu - a_1^\mu k_2^\nu - a_2^\nu k_1^\mu + a_2^\mu k_1^\nu + \bar{\epsilon}_2\Gamma^{\mu\nu}\eta_1 - \bar{\epsilon}_1\Gamma^{\mu\nu}\eta_2) \\ &\quad + a_1^{\rho\nu}a_{2\rho}^\mu - a_2^{\rho\nu}a_{1\rho}^\mu, \\ \lambda_3 &= -2(a_1^\nu k_{2\nu} - a_2^\nu k_{1\nu} + \bar{\epsilon}_1\eta_2 - \bar{\epsilon}_2\eta_1), \\ k_3^\mu &= a_2^{\mu\nu}k_{1\nu} - a_1^{\mu\nu}k_{2\nu} + \lambda_1 k_2^\mu - \lambda_2 k_1^\mu - 2\bar{\eta}_1\Gamma^\mu\eta_2, \\ \epsilon_3 &= a_{1\mu}\Gamma^\mu\eta_2 - a_{2\mu}\Gamma^\mu\eta_1 + \frac{1}{4}(\epsilon_1^{ij}\Gamma_{ij}\epsilon_2 - \epsilon_2^{ij}\Gamma_{ij}\epsilon_1) - \frac{1}{2}(\lambda_1\epsilon_2 - \lambda_2\epsilon_1) \\ &\quad - \frac{1}{4}(a_{1\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu}\epsilon_2 - a_{2\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu}\epsilon_1), \\ \eta_3 &= k_{1\mu}\Gamma^\mu\epsilon_2 - k_{2\mu}\Gamma^\mu\epsilon_1 + \frac{1}{4}(\epsilon_1^{ij}\Gamma_{ij}\eta_2 - \epsilon_2^{ij}\Gamma_{ij}\eta_1) + \frac{1}{2}(\lambda_1\eta_2 - \lambda_2\eta_1) \\ &\quad - \frac{1}{4}(a_{1\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu}\eta_2 - a_{2\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu}\eta_1), \\ \epsilon_3^{ij} &= \epsilon_2^{ik}\epsilon_1^j - \epsilon_1^{ik}\epsilon_2^j - 4(\bar{\epsilon}_1\Gamma^{ij}\eta_2 - \bar{\epsilon}_2\Gamma^{ij}\eta_1).\end{aligned}\quad (5.24)$$

These relations encode the Lie algebra of superconformal transformations. It can be readily verified that this Lie algebra is that of $OSp(6, 2|2)$ given in reference [18].

⁽²⁾We have defined $\xi_3 = [\xi_1, \xi_2]$.

6 Superconformal invariance

The vector fields ξ , in general, do not commute with $D_{\hat{\alpha}}$; using the relation (5.6) on the Killing vector, the precise commutation relations is given by

$$[D_{\hat{\alpha}}, \xi] = (D_{\hat{\alpha}} \xi^{\hat{\beta}}) D_{\hat{\beta}}. \quad (6.1)$$

This equation shows that under a superconformal transformation the vector fields $D_{\hat{\alpha}}$ are not invariant. However they transform in such a way as not to mix with the ∂_{μ} . This could have been also a starting point for the definition of superconformal transformations. For future use it is important to explicit the right hand side of (6.1) as

$$D_{\hat{\alpha}} \xi_{\hat{\beta}} = -\frac{1}{4}(\Gamma^{\mu\nu})_{\hat{\beta}\hat{\alpha}} \partial_{\mu} \xi_{\nu} + \frac{1}{12} C_{\hat{\beta}\hat{\alpha}} \partial_{\sigma} \xi^{\sigma} + \frac{1}{12} (\Gamma^{ij})_{\hat{\beta}\hat{\alpha}} D_{\sigma[ij]} \xi^{\sigma}, \quad (6.2)$$

where $D_{\sigma[ij]} \xi^{\sigma}$ is given, from (5.21), by

$$D_{\sigma[ij]} \xi^{\sigma} = -12 \zeta_{ij} + 2 \bar{\theta} \Gamma_{ij} \Gamma^{\sigma} \partial_{\sigma} \zeta - \frac{3}{4} \bar{\theta} \Gamma_{\nu} \Gamma_{ij} \theta \partial_{\sigma} \partial^{\sigma} \zeta^{\nu}. \quad (6.3)$$

From equation (6.1) we can easily deduce that the constraint (2.5) is not invariant under the transformations $\delta \Phi^i = \xi(\Phi^i)$. This motivates the introduction of a connection $\Lambda^i_j(\xi)$ so that the transformation of Φ^i becomes

$$\delta_{\xi} \Phi^i = \xi(\Phi^i) + \Lambda^i_j(\xi) \Phi^j. \quad (6.4)$$

We shall explicitly construct $\Lambda(\xi)$ later. Here, we examine some of its mathematical properties. In fact Λ is not strictly a connection because in general we do not have $\Lambda(f\xi) = f\Lambda(\xi)$, it is only a cochain on the Lie algebra of superconformal transformations realised with the superconformal Killing vectors. It is valued in the tensor product of the algebra of superfields and the algebra of 5×5 matrices. This cochain is however not arbitrary. The requirement $[\delta_{\xi}, \delta_{\xi'}] = \delta_{[\xi, \xi']}$ gives the following consistency condition on $\Lambda(\xi)$

$$\xi(\Lambda(\xi')) - \xi'(\Lambda(\xi)) - \Lambda([\xi, \xi']) + [\Lambda(\xi), \Lambda(\xi')] = 0, \quad (6.5)$$

where we have used a matrix notation for Λ . In order to make the algebraic meaning of (6.5) clearer, recall that given a n -cochain on a Lie algebra, g , $\alpha(g_1, \dots, g_n)$ which is valued in a g -module $\mathcal{M}$ then the Chevalley exterior derivative $s\alpha$ is a $n+1$ -cochain given by

$$\begin{aligned} s\alpha(g_1, \dots, g_{n+1}) &= \sum_{1 \leq i \leq n+1} (-1)^{i-1} g_i \alpha(g_1 \dots \hat{g}_i \dots g_{n+1}) \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{i+j} \alpha([g_i, g_j] g_1 \dots \hat{g}_i \dots \hat{g}_j \dots g_{n+1}). \end{aligned} \quad (6.6)$$

where the notation $\hat{g}_i$ means that the element g_i has been omitted. The Chevalley exterior derivative verifies $\mathbf{s}^2 = 0$ and the graded Leibniz rule. This allows to write condition (6.5) as

$$\mathbf{s}\Lambda + \Lambda^2 = 0, \quad (6.7)$$

where the exterior product of two cochains is defined in a way similar to the exterior product of two forms. The algebraic interpretation of condition (6.5) is thus that Λ has vanishing curvature. A particular solution to (6.7) is given by a “pure gauge”

$$\Lambda = \beta^{-1} \mathbf{s}\beta, \quad (6.8)$$

where β is a 0-cochain. Equation (6.8) reads explicitly

$$\Lambda(\xi) = \beta^{-1} \xi(\beta). \quad (6.9)$$

Note that if Λ is a pure gauge then if we define Φ' by $\beta\Phi$ we get $\delta\Phi' = \xi(\Phi')$, so that a rescaling of the superfield allows the elimination of Λ . We shall show below that the correct Λ is not a pure gauge but has vanishing curvature.

In order to explicitly determine $\Lambda(\xi)$, we demand that if Φ verifies the constraint (2.5) then so does $\delta\Phi = \xi(\Phi) + \Lambda(\xi)\Phi$. This is true provided

$$D_{\hat{\alpha}} \Lambda^i_j - \frac{1}{4} (\Gamma^i_k)_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}} D_{\hat{\beta}} \Lambda^k_j = 0, \quad (6.10)$$

$$(\gamma^i_j)_a{}^b D_{\alpha b} \xi^{\beta c} - D_{\alpha a} \xi^{\beta b} (\gamma^i_j)_b{}^c + ((\gamma^i_k)_a{}^c \Lambda^k_j - \Lambda^i_k (\gamma^k_j)_a{}^c) \delta_{\alpha}^{\beta} = 0. \quad (6.11)$$

By replacing $D_{\hat{\alpha}} \xi_{\hat{\beta}}$ in equation (6.11) by its expression (6.2) we determine Λ_{ij} up to an arbitrary function χ as

$$\Lambda_{ij} = -\frac{1}{3} D_{\nu[ij]} \xi^{\nu} + \eta_{ij} \chi. \quad (6.12)$$

This expression shows that Λ is actually valued in the Lie algebra of $u(1) \oplus so(5)$ rather than gl_5 . The function χ is calculated with the aid of equation (6.10) after using the explicit expression of $D_{\nu[ij]} \xi^{\nu}$ given in (6.3) as well as its spinorial derivative which is given by

$$D_{\hat{\alpha}} D_{\sigma[ij]} \xi^{\sigma} = 2(\Gamma^{\nu} \Gamma_{ij})_{\hat{\alpha}\hat{\delta}} \partial_{\nu} \xi^{\hat{\delta}}. \quad (6.13)$$

The resulting expression for χ turns out to be very simple

$$\chi = \frac{1}{3} \partial_{\mu} \xi^{\mu} + \lambda' = \alpha + \lambda', \quad (6.14)$$

where λ' is an arbitrary constant which has to be set to zero in order to have $\Lambda(0) = 0$. Finally, we are in position to deduce the complete expression for the 1-cochain Λ_{ij} as

$$\Lambda_{ij}(\xi) = 4\zeta_{ij} - \frac{2}{3} \bar{\theta} \Gamma_i \Gamma_j \Gamma^{\sigma} \partial_{\sigma} \zeta + \frac{1}{4} \bar{\theta} \Gamma_{\nu} \Gamma_{ij} \theta \partial_{\sigma} \partial^{\sigma} \zeta^{\nu} + \frac{1}{3} \eta_{ij} \partial_{\mu} \zeta^{\mu}. \quad (6.15)$$

The above expression for Λ shows clearly that it is a non-trivial zero-curvature 1-cochain because it cannot be written as a “pure gauge”-cochain of the form (6.9). It remains to check that Λ indeed verifies the consistency condition (6.7). Note first that the $u(1)$ part of (6.7) reads

$$s\chi = 0, \quad (6.16)$$

which is true because χ is given by equation (6.14) and α is closed : $\alpha([\xi, \xi']) = \xi(\alpha(\xi')) - \xi'(\alpha(\xi))$. The antisymmetric part of Λ has also a vanishing curvature. This can be verified by a direct calculation using (5.24) but a more simple way is to examine the transformation property of the super three-form.

We shall show that the simple geometrical transformation

$$\delta H = L_\xi H \quad (6.17)$$

leaves the constraints (3.1) and (3.2) invariant. Note first that the transformation of the moving basis E^μ does not involve the spinorial basis $E^{\hat{\alpha}}$, so the constraint (3.1) is left invariant by (6.17). The transformation of the $\mu\hat{\alpha}\hat{\beta}$ components of H under (6.17) reads

$$\delta H_{\mu\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \xi(H_{\mu\hat{\alpha}\hat{\beta}}) + H_{\nu\hat{\alpha}\hat{\beta}}\partial_\mu\xi^\nu + H_{\mu\hat{\alpha}\hat{\delta}}D_{\hat{\beta}}\xi^{\hat{\delta}} + H_{\mu\hat{\beta}\hat{\delta}}D_{\hat{\alpha}}\xi^{\hat{\delta}}. \quad (6.18)$$

The use of relation (6.2) allows to write

$$\delta H_{\mu\hat{\alpha}\hat{\beta}} = (\Gamma_\mu\Gamma_i)_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\delta\Phi^i, \quad (6.19)$$

with $\delta\Phi^i$ given by

$$\delta\Phi^i = \xi(\Phi^i) + \frac{1}{3}(\partial_\mu\xi^\mu\Phi^i - D_\sigma{}^i{}_j\xi^\sigma\Phi^j). \quad (6.20)$$

Relation (6.19) shows that the constraint (3.2) is left invariant by the transformation (6.17). In addition we can identify the transformation of Φ^i which agrees, as it should, with the previously calculated one. This geometrical construction of Λ assures the vanishing curvature property due to the Lie structure of the transformations of the three-form H .

7 Conclusion

We have given two equivalent formulations of the tensorial multiplet of $6D$ (2,0) theories. We have illustrated the rigidity of (2,0) supersymmetries by showing the triviality of the sigma-model. We note here that this triviality can be understood from the super three-form point of view; indeed, the generalization of the constraints (3.2) to a curved target space manifold, $H_{\mu\hat{\alpha}\hat{\beta}} = (\Gamma_\mu\Gamma_i)_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}e^I{}_ie^i{}_J\Phi^J$ does not lead to an interacting sigma-model.

Note that the five scalars ϕ^i describe the transverse fluctuations of the five-brane. The constraint (2.5) coincides with the equation obtained in [3] using the superembedding

formalism applied for a five-brane in a super-flat background, in the physical gauge and in the linearised approximation. This suggests the existence of a formulation of the full non-linear equations of motion of the five-brane which is analogous to the one presented in section 3 and which is based on constraints on a three-form in a non super-flat background. We hope to come back to this issue in more details elsewhere. We have also realised the superconformal transformations as derivations in superspace. This gives a geometric construction of the superconformal Lie algebra compared to the algebraic one presented in [18]. Moreover, this allows to realise, in a manifestly supersymmetric way, the transformation of the supermultiplet. This gives an alternative proof to the one relying on the component formalism presented in [18] that the linearised equations of motion of the five-brane are superconformally invariant.

We have found that the transformation of the three-form involves only coordinate reparametrisations whereas, for the scalar superfield, the introduction of a cochain is in addition needed. This suggests that the formulation in terms of super three-forms may be helpful in the construction of superconformal interacting theories and shed some light on the conjecture [8] relating them to M -theory. In this respect, recently it has been shown [19] that the bosonic action for M -theory five-branes in their near horizon background have a non-linearly realised conformal invariance. Our results may be useful in extending this invariance to a superconformal one.

A Appendix. Conventions

In this Appendix we collect our conventions and notations. The 6D (2,0) supersymmetry algebra is conveniently described as a chiral truncation of the reduction of the 11D algebra. The 11D superalgebra reads

$$\{Q_{\hat{\alpha}}, Q_{\hat{\beta}}\} = 2(\Gamma^{\hat{\mu}}C)_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}P_{\hat{\mu}}, \quad (\text{A.1})$$

where $\hat{\alpha} = 1, \dots, 32$, $\hat{\mu} = 0, \dots, 10$ and $C_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ is an antisymmetric matrix verifying

$$C^{-1}\Gamma^{\hat{\mu}}C = -\Gamma^{\hat{\mu}T}. \quad (\text{A.2})$$

The reality condition on 11D fermions reads

$$\Psi = C\bar{\Psi}^T, \quad (\text{A.3})$$

or equivalently

$$\bar{\Psi}^{\hat{\alpha}} = C^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\Psi_{\hat{\beta}} \equiv \Psi^{\hat{\alpha}}, \quad (\text{A.4})$$

where $C^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ is the inverse of $C_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$. We shall use C to raise and lower indices and the notation $(\Gamma^{\mu})_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ for $(\Gamma^{\mu}C)_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$. Under reduction to six dimensions the spinorial index $\hat{\alpha}$ decomposes as αa where α is an $SO(5,1)$ spinorial index and a an $SO(5)$ spinorial index. A representation of the Gamma matrices is conveniently given by

$$\Gamma^{\mu} = \gamma^{\mu} \otimes 1, \quad \Gamma^{5+i} = \tilde{\gamma} \otimes \gamma^i, \quad (\text{A.5})$$

where μ and i are respectively six and five dimensional vector indices, and $\tilde{\gamma}$ is the chirality matrix in six dimensions:

$$\tilde{\gamma} = \gamma^0 \dots \gamma^5. \quad (\text{A.6})$$

We shall also denote Γ^{5+i} by Γ^i . In this representation the charge conjugation matrix C may be written as

$$C = \mathcal{C} \otimes \Omega, \quad (\text{A.7})$$

where $\mathcal{C}$ is symmetric and verifies

$$\mathcal{C}^{-1} \gamma^\mu \mathcal{C} = -\gamma^\mu{}^T, \quad (\text{A.8})$$

whereas Ω is antisymmetric and verifies

$$\Omega^{-1} \gamma^i \Omega = \gamma^i{}^T. \quad (\text{A.9})$$

Spinorial indices of $SO(5,1)$ and $SO(5)$ can be raised and lowered with respectively $\mathcal{C}$ and Ω . The reduction of the algebra (A.1) to six dimensions leads to the (2,2) algebra

$$\{Q^+, Q^+\} = 2\Pi^+ \gamma^\mu P_\mu \Pi^+, \quad (\text{A.10})$$

$$\{Q^-, Q^+\} = 2\Pi^- \gamma^i c_i \Pi^+, \quad (\text{A.11})$$

$$\{Q^-, Q^-\} = 2\Pi^- \gamma^\mu P_\mu \Pi^-, \quad (\text{A.12})$$

where the five-dimensional momentum appears as a central charge, and $\Pi^\pm$ are the projectors on fermions of a given six-dimensional chirality. The (2,2) algebra is invariant under the transformation $Q^- \rightarrow -Q^-$, $c \rightarrow -c$. Modding out with respect to this symmetry leads to the desired (2,0) algebra. This is obtained by setting $Q^- = c^i = 0$ in the above formulae. As is evident from its construction this algebra has a $Spin(5) = Sp(2)$ R-symmetry. The 11D Majorana fermion becomes a $Spin(5)$ Majorana-Weyl six dimensional fermion :

$$\Psi = C \bar{\Psi}^T, \quad (\text{A.13})$$

which reads in components

$$\Psi_a = \Omega_{ab} \mathcal{C} \bar{\Psi}^b{}^T. \quad (\text{A.14})$$

The antisymmetrised product of n gamma matrices is denoted by $\Gamma^{\hat{\mu}_1 \dots \hat{\mu}_n}$. We have

$$(\Gamma^{\hat{\mu}_1 \dots \hat{\mu}_n} C)^T = -(-1)^{n(n+1)/2} \Gamma^{\hat{\mu}_1 \dots \hat{\mu}_n} C, \quad (\text{A.15})$$

from which we get

$$(\gamma^{\mu_1 \dots \mu_n} \mathcal{C})^T = (-1)^{n(n+1)/2} \gamma^{\mu_1 \dots \mu_n} \mathcal{C}, \quad (\text{A.16})$$

$$(\gamma^{i_1 \dots i_n} \Omega)^T = -(-1)^{n(n-1)/2} \gamma^{i_1 \dots i_n} \Omega. \quad (\text{A.17})$$

A useful relation is the Fierz rearrangement formula which reads for four Weyl-Majorana fermions [20]

$$\begin{aligned}
& (\bar{\epsilon}_1 \Pi^+ \epsilon_2) (\bar{\epsilon}_3 \Pi^+ \epsilon_4) = \\
& - \sum_{\substack{n_1=0,2 \\ n_2=0,1,2}} \frac{2}{c_{n_1} \tilde{c}_{n_2}} (\bar{\epsilon}_1 \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_{n_1}} \Gamma^{i_1 \dots i_{n_2}} \Pi^+ \epsilon_4) (\bar{\epsilon}_3 \Gamma_{\mu_1 \dots \mu_{n_1}} \Gamma_{i_1 \dots i_{n_2}} \Pi^+ \epsilon_2), \\
& (\bar{\epsilon}_1 \Pi^+ \epsilon_2) (\bar{\epsilon}_3 \Pi^- \epsilon_4) = \\
& \sum_{n_2=0,1,2} \frac{(-1)^{n_2}}{8 \tilde{c}_{n_2}} (-2 (\bar{\epsilon}_1 \Gamma^{\mu_1} \Gamma^{i_1 \dots i_{n_2}} \Pi^- \epsilon_4) (\bar{\epsilon}_3 \Gamma_{\mu_1} \Gamma_{i_1 \dots i_{n_2}} \Pi^+ \epsilon_2) \\
& + (\bar{\epsilon}_1 \Gamma^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \Gamma^{i_1 \dots i_{n_2}} \Pi^- \epsilon_4) (\bar{\epsilon}_3 \Gamma_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \Gamma_{i_1 \dots i_{n_2}} \Pi^+ \epsilon_2))
\end{aligned} \tag{A.18}$$

with coefficients c_n and $\tilde{c}_n$ given ⁽³⁾ by

$$c_n = 8 (-1)^{n(n-1)/2} \quad \text{and} \quad \tilde{c}_n = 4 (-1)^{n(n-1)/2}. \tag{A.19}$$

Using the Fierz rearrangement for commuting spinors E and F , we get the useful relations

$$(\bar{E} \Gamma_{\mu i} E) (\bar{E} \Gamma^\mu E) = 0, \tag{A.20}$$

and

$$(\bar{F} \Gamma_{\mu\nu} E) (\bar{E} \Gamma^\nu E) + (\bar{F} \Gamma^i E) (\bar{E} \Gamma_{\mu i} E) = 0. \tag{A.21}$$

References

- [1] Seiberg N 1997, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **67** 158.
- [2] Güven R 1992, *Phys. Lett* **B276** 49.
 Gibbons G W, Horowitz G T and Townsend P K 1995, *Class. Quant. Grav.* **12** 297.
 Kaplan D N and Michelson J 1996, *Phys. Rev.* **D53** 3474.
- [3] Howe P S and Sezgin E 1997, *Phys. Lett.* **B394** 62.
 Howe P S, Sezgin E and West P C 1997, *Phys. Lett.* **B399** 49.
 Howe P S, Sezgin E and West P C 1997, *Phys. Lett.* **B400** 255.
- [4] Aganagic M, Park J, Popescu C and Schwarz J H 1997, *Nucl. Phys.* **B496** 191.
- [5] Bandos I, Lechner K, Nurmagambetov A, Pasti P, Sorokin D and Tonin M 1997, *Phys. Rev. Lett.* **78** 4332.

⁽³⁾The summation over the indices μ and i is ordered in the formula (A.18) : $\mu_1 < \dots \mu_{n_1}$ and $i_1 < \dots < i_{n_2}$. Otherwise some factoriels appear in the normalization.

- [6] Witten E 1997, J. Geom. Phys. **22** 103.
Cederwall M, Nilsson B E W and Sundell P 1998, J. High Energy Phys. **04** 007.
- [7] Witten E 1995, Nucl. Phys. **B443** 85.
Townsend P K 1995, Phys. Lett. **B350** 184.
- [8] Maldacena J 1997, The large N limit of superconformal field theories and supergravity, hep-th/9711200.
- [9] Leigh G L and Rozali M 1998, *Phys. Lett.* **B431** 311.
- [10] Banks T, Fischler W, Shenker S H and Susskind L. 1997, Phys. Rev. **D55** 5112.
- [11] Rozali M 1997, Phys. Lett **B400** 260.
Berkooz M, Rozali M and Seiberg N 1997, Phys. Lett. **B408** 105.
Sen A 1997, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** 51.
Seiberg N 1997, Phys. Rev. Lett. **79** 3577.
Aharony O, Berkooz M and Seiberg N, 1997, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** 119.
- [12] Nahm W 1978, Nucl. Phys. **B135** 149.
- [13] Howe P S, Sierra G and Townsend P K 1983, Nucl. Phys. **B221** 331.
- [14] Nilsson B E W 1986, Class. Quant. Grav. **3** L41.
Witten E 1986, Nucl. Phys. **B266** 245.
- [15] Bergshoeff E Sezgin E and Sokatchev E 1996, Class. Quant. Grav., **13** 2875.
- [16] Sierra G and Townsend P K 1983, Phys. Lett. **B124** 497.
Sierra G and Townsend P K, 1984, Nucl. Phys. **B233** 289.
- [17] West P C 1998, Introduction to rigid supersymmetric theories, hep-th/9805055.
- [18] Claus P, Kallosh R and Van Proeyen A 1998, Nucl. Phys. **B518** 117.
- [19] Kallosh R, Kumar J and Rajaraman A 1998, Phys.Rev. **D57** 6452.
Claus P, Kallosh R, Kumar J, Townsend P K and Van Proeyen A 1998, *J. High Energy Phys.* 06 (1998) 004.
Kallosh R, Rahmfeld J and Rajaraman A 1998, Near horizon superspace, hep-th/9805217.
- [20] Grojean C 1998, Dirac matrices and Fierz rearrangements in various dimensions, preprint Saclay T98/067, in preparation.

Publication IV

Anomaly Matching and Syzygies in
 $N=1$ Gauge Theories

Saclay T98/090
hep-ph/9808345

Anomaly Matching and Syzygies in $N=1$ Gauge Theories

P. Brax, C. Grojean and C.A. Savoy

CEA-SACLAY, Service de Physique Théorique
F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, FRANCE

Abstract

We investigate the connection between the moduli space of $N = 1$ supersymmetric gauge theories and the set of polynomial gauge invariants constrained by classical/quantum relations called *syzygies*. We examine the existence of a superpotential reproducing these syzygies and the link with the 't Hooft anomaly matching between the fundamental fields at high energy and the gauge invariant degrees of freedom at low energy for the flavour symmetry group. We show that the anomaly matching is equivalent to the vanishing of the flavour anomaly on the normal space to the manifold defined by the syzygies. For normal spaces in a real representation of the flavour group we strengthen the connection between the 't Hooft anomaly matching and the existence of a superpotential by constructing a flavour invariant polynomial whose gradient vanishes at least on the solutions of the syzygies. This corroborates a recent definition of confining theories. We illustrate our general result by considering two examples based on the $SU(N_c)$ and $Spin(7)$ gauge theories. We also examine the role of syzygies in the context of non-Abelian duality. We emphasize the relevance of non-perturbative effects in the dual magnetic theories in proving the equivalence of the electric and magnetic syzygies.

PACS: 11-30p; 12.40

Keywords: Supersymmetry; Duality.

1 Introduction

Recently there has been a tremendous increase of one's understanding of supersymmetric field theories in four dimensions. Extended supersymmetric theories with $N = 2, 4$ provide a wealth of information on the non-perturbative nature of quantum field theories. The $N = 1$ theories have also been thoroughly investigated. Nevertheless their description is not as complete as their extended counterparts. This is certainly due to the less restrictive mathematical framework of $N = 1$ theories. Yet, a new insight on the infrared (IR) properties of asymptotically free supersymmetric gauge theories has been provided by the recent work [1, 2] on these theories⁽¹⁾. The most striking result on $N = 1$ theories is the existence of a new type of duality. This duality relates two apparently different theories in the short distance regime that are described by the same effective theory in the IR limit. In the same vein the basic question concerning the issue of colour confinement has been tackled and clarified in these non-perturbative approaches for a large class of supersymmetric theories. The dual descriptions and the strong coupling effects have also received a new treatment and a broader understanding via the study of the D-brane dynamics [7].

The key ideas in these studies are the non-renormalization theorems and the holomorphy of the superpotential on the one hand [8–11], and the matching of the global symmetry anomalies as advocated by 't Hooft [12] on the other hand. Effective theories have been written and argued to describe the IR behaviour of some gauge theories in terms of gauge invariant composite chiral superfields [1, 2, 9]. The perturbative quantum corrections only affect the Kähler metrics through wave-function renormalization, the non-perturbative quantum effects are fixed to a great extent by the holomorphy and by the global symmetries of the theory. The remaining ambiguities in the IR theory are lifted and further support for their validity is obtained through the use of several arguments: the decoupling of flavours (chiral multiplets) establishing a descent link among a series of theories with the same gauge group and different representations for the chiral supermultiplets, the reduction of the gauge symmetry through the Higgs mechanism.

The relevance of the analytic gauge invariants in the study of supersymmetric theories has been noticed a long time ago. Indeed, the F -terms in the scalar potential are components of the gradient of the superpotential, an invariant analytic function. The D -terms are Hermitean functions of the scalar fields, but a beautiful result in algebraic geometry [13] provides the link with holomorphic invariants, at least for the analysis of the vacua [14–17]. The degeneracy of the classical solutions is described in terms of massless fields, the *moduli*. The fundamental mathematical property of the (classical) moduli space (modulo the group of gauge symmetry) is its isomorphism with an algebraic variety of analytic gauge invariant polynomials in the primordial fields, which we call the *chiral ring*, following ref. [2]. The chiral rings can be classified into two categories, those which have algebraic constraints among the invariants of the integrity basis, called *syzygies*, and those with a free basis. This classification is also related to

⁽¹⁾For a complete review on first duality examples see [3–5] and many other examples constructed later have been reviewed in [6].

the possible patterns of gauge and flavour symmetry breaking and to the structure of the commutant, the largest symmetry group commuting with the gauge group. These results are summarized in the section 2 of this paper.

A powerful and necessary criterion for the existence of an effective theory describing the IR regime of an asymptotically free gauge theory was stated by 't Hooft : there should be matching of the (formal) anomalies of the global symmetries calculated with either the UV or the IR massless fermions. This has been extensively exploited to classify confining theories (for a review see [18]). In section 3, we also stress that the 't Hooft matching conditions for the *unbroken global (flavour) symmetries* have to be satisfied at the origin of the UV and IR field spaces. It is then easy to select the unbroken flavour subgroups that are allowed at low energies. The breaking has to be provided by an appropriate superpotential which is restricted by the global symmetries, including a R -symmetry.

One of the main aims of this paper is the analysis of the necessity of a sufficient condition recently obtained [19] from the isomorphism between the moduli space and the chiral ring constrained by the syzygies. With this completion the conjecture reads:

The 't Hooft anomaly matching conditions are satisfied for supersymmetric gauge theories if and only if the syzygies of the chiral ring derive from a superpotential.

Rather than proving this statement we shall be interested in making explicit the intimate link between a physical condition, the t'Hooft anomaly matching, and the geometry of the space of gauge invariants. We show that the anomaly matching is equivalent to the vanishing of the flavour anomaly on the normal space to the zeros of the syzygies. In the case where the normal space is real under the action of the residual flavour subgroup, we construct a flavour group invariant polynomial in the gauge invariants whose gradient vanishes at all the solutions of the syzygies. For the proof to be complete it remains to be shown that all of the zeros of the gradient of this superpotential are solutions of the syzygies. Now, as discussed in section 4, if a superpotential exists that reproduces the syzygies, the normal space transforms as a real representation of the flavour group, implying that the correspondence between the anomaly matching condition and the existence of superpotential occurs in the widest possible sense.

The global symmetries of a supersymmetric gauge theory always possesses an Abelian subfactor $U(1)_R$, the R symmetry, which differs notably from the rest of the flavour symmetries. The role of the R symmetry has been crucial in analyzing both confining theories and the $N = 1$ duality. The main difference between the R symmetry and the flavor symmetries stems from the non-trivial action of the R symmetry on the gauginos , the fermions in the gauge vector multiplets, while the flavour symmetries leave the vector multiplets invariant. Another essential property of the R symmetry is the different R charges of the bosons and fermions in a chiral multiplet. The boson have a R charge which is shifted by one unit from the charges of the fermions, *i.e.* $R_F = R_B - 1$. This plays a noteworthy role in the analysis of the matching conditions as the fermions are the fields involved in the anomaly calculations.

At low energy we shall only consider the cases where the gauge invariant polynomials

in the matter fields are sufficient to satisfy the matching conditions. In the rest of this paper we shall not be interested in the explicit role that the invariants constructed using the field strength chiral superfield W_α can have.

It is well-known that the R -symmetry only allows for a polynomial superpotential for chiral supermultiplets in representations of the gauge group with special values of Dynkin index, and the corresponding theories have been extensively analysed [20–24]. Our result corroborates the conjecture that the confining theories are those that admit a polynomial superpotential [22, 25]. These proofs are given in section 4.

The second object of this paper is to present a consistency check on dual theories: we verify that the solutions of the magnetic theories satisfy the syzygies of the electric theory if and only if a non-perturbative superpotential is added to the former. This is done by considering the theories with any number N_f of chiral multiplets in the fundamental representations of the gauge groups $SU(N_c)$ and $Spin(7)$. We give the (unique) superpotentials for any N_f which are consistent with the flavour symmetries and with the successive decoupling of flavours. Then we find the gauge invariants and their syzygies and proceed to test the electric syzygies in terms of the magnetic solutions. These results are displayed in sections 5 and 6.

Finally, in section 7, the geometry of the moduli space of the $SU(N)$ theories with a large number of flavours is determined in an attempt to have access to the (classical) Kähler potential of the dual theory. This is done by finding the non-compact invariance group of the equations of motion. It is shown that the dense part of the moduli space consists of two conjugated orbits of this non-compact group whose closure are the singular orbits. This provides a coset parameterisation of the solutions which, however, is not (explicitly) holomorphic and breaks the Kähler invariance. Therefore it is not possible to obtain the induced Kähler potential for the dual theory in a straightforward way. But some issues suggested by these results are under investigation.

2 Flat Directions, Analytic Invariants and Syzygies

In this section we recall some important mathematical results that allow a general analysis of supersymmetric gauge theories. In global supersymmetric theories the scalar potential is a sum of F - and D -terms : the F -terms are the norm of the gradient W_i of a holomorphic function, the superpotential $W(z^i)$. For the D -terms, the relation with holomorphy is more subtle and appears when we are interested in supersymmetric vacua. In a supersymmetric theory with scalar fields z^i , Kähler potential $\mathcal{K}(z, z^*)$ and gauge group G , the D -terms are defined as

$$D^A = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial z^i} (T^A z)^i \quad (2.1)$$

where T^A ($A = 1, 2, \dots, \dim G$) are the Hermitian generators of G in the representation of the scalar fields.

A sufficient and necessary condition for the vanishing of the D -terms is [14–16]:

For any holomorphic gauge-invariant polynomial $I(z^i)$ in the scalar fields, a solution ξ of the equation

$$\frac{\partial I}{\partial z^i}|_{z=\xi} = C \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial z^i}|_{z=\xi} \quad (2.2)$$

where C is a complex constant, is a solution of $D^A = 0$ (of course the whole G -orbit associated to ξ is a solution). Conversely to any solution of $D^A = 0$ one can associate a holomorphic gauge invariant satisfying (2.2).

The proof of this results is obtained by studying the closed orbits of the complexified G^c of the gauge group G and the ring of G^c -invariant analytic polynomials. This ring is finitely generated : one can find an integrity basis *i.e.* a set of G -invariant holomorphic homogeneous polynomials $\{I^a(z)\}_{a=1\dots d}$ such that every G^c -invariant polynomial in z can be written as a polynomial in the $I^a(z)$.

The elements of an integrity basis are not always algebraically independent. In general, there exist algebraic relations (called *syzygies*) satisfied by the fundamental invariants ⁽²⁾ :

$$\mathcal{S}^\alpha(I^a(z)) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, N \quad (2.3)$$

To each G^c -orbit corresponds a vector in $\mathbf{C}^d$ made out of the values taken by the invariants $\{I^a(z)\}$ along this orbit. Conversely, it can be shown that to each vector in $\mathbf{C}^d$ satisfying the syzygies (2.3) is associated a unique closed G^c -orbit. In that sense the algebraic manifold defined by the syzygies is identified with the set of closed G^c -orbits. Notice that the origin $\{I^a = 0\}$ is associated with the unique closed G^c -orbit of $z^i = 0$.

The existence of the syzygies can be related to the index of the matter field representation, $\mu = \sum_i \mu_i$, where μ_i is the index of the irreducible representation R_i defined by $\text{tr}(T^a(R_i)T^b(R_i)) = \mu_i \delta^{ab}$. For low indices $\mu < \mu_{adj}$, where μ_{adj} is the index of the adjoint representation, the gauge invariant rings have been classified [20,21,26,27] and it has been shown that there are no syzygies. For indices larger than the index of the adjoint representation the generic situation is that there are syzygies, with a few exceptional cases with no syzygies.

Equations (2.2) can be seen as a condition for the points of a closed G^c -orbit to extremize the Kähler potential, the constant C^{-1} being a Lagrange multiplier. A result of geometric invariant theory [13] states that the points extremizing the Kähler potential on a G^c -orbit form a unique G -orbit and are solutions of $\{D^A = 0\}$. Identifying the points on a same G -orbit, there is a one-to-one correspondence between any two of the following sets :

- (i) the algebraic manifold defined by the syzygies (2.3);
- (ii) the closed G^c -orbits;
- (iii) the solutions of (2.2) modulo gauge transformations;

⁽²⁾A trivial example is provided by the $SU(N_c)$ gauge theory with N_c fields in the fundamental and antifundamental representations; the fundamental invariants are the mesons $M = z\tilde{z}$ and the baryons $B = \det z$ and $\tilde{B} = \det \tilde{z}$; classically, they are constrained by $\det M - B\tilde{B} = 0$. See below for further examples.

(iv) the solutions of $D^A = 0$ modulo gauge transformations.

Therefore, there is a homeomorphism between the set of the scalar field space defined by $D^A = 0$, i.e. the moduli space, $\mathcal{M}_z$, and the algebraic variety defined by the fundamental invariants I^a constrained by $\mathcal{S}^\alpha(I^a(z)) = 0$, $\mathcal{M}_I$:

$$\mathcal{M}_I \sim \mathcal{M}_z. \quad (2.4)$$

This homeomorphism is instrumental in studying the low energy physics of supersymmetric gauge theories.

There is a natural stratification of $\mathcal{M}_z$ according to the unbroken gauge symmetry, i.e., the little group $G_z \subset G$ at each point z . A *stratum* (G_z) is the set of all points which have the same invariance gG_zg^{-1} , where g is any element of G . The generic or principal stratum has the smallest residual symmetry G_z while the more singular ones correspond to larger numbers of unbroken gauge symmetries. For $\mu < \mu_{adj}$ the gauge group is generically broken to a non-void residual gauge group, while for $\mu > \mu_{adj}$ the gauge group is totally broken in the generic stratum. Because of the isomorphism (2.4), there is a corresponding stratification of the algebraic manifold defined by the syzygies, $\mathcal{M}_I$.

A powerful property for the study of supersymmetric gauge theories is the following theorem [15, 28] :

The tangent space to the moduli space at a point ξ in a stratum is analytically isomorphic to the tangent space at the point $I^a(\xi)$ to the corresponding stratum of the manifold of gauge invariant polynomials.

In particular, it has an important consequence on anomalies of the flavour group in both theories and the 't Hooft matching conditions.

3 The 't Hooft Anomaly Matching Conditions

Let us recall that the matching conditions concern the global (unbroken) anomalous symmetries H of a given gauge theory. It specifies that the anomalies $\text{tr } H^3$ and $\text{tr } H$ are equal when evaluated with the high energy content of the gauge theory, i.e. the matter fields z^i in diverse representations of the gauge and flavour groups, and with the low energy degrees of freedom of the theory. The (perturbative) degeneracy of the supersymmetric vacua requires a more careful analysis. In a supersymmetric theory with gauge symmetry group G and superpotential $W(z^i)$ with flavour symmetry H , at any vacuum z such that $W_i(z) = 0$ and $D^A(z, z^*) = 0$, the mass matrices for the chiral multiplets are $W_{ij}(z)$ and $D_i^A(z, z^*)$. If the residual global (flavour) group at z is $H_z \subset H$, the mass matrix is H_z -invariant and the massive states are in a real (vector-like) representation of H_z . Therefore the anomalies $\text{tr } H_z^3$ and $\text{tr } H_z$ can be calculated at z where the massive states are excluded or at the origin $z = 0$ where all states are massless. In particular the 't Hooft conditions can be checked at the origin of the UV theory on the one hand, and at the origin of the IR theory on the other hand, for each relevant flavour subgroup $H_z \subset H$.

The role of the superpotentials (both in the UV and the IR theories) is then clear: *they cannot change the anomaly matching, but they could restrict the vacua, hence the flavour invariance of the theories to a subgroup whose anomalies match*, provided that such superpotentials that are consistent with the symmetries of the theory exist. This argument corresponds to examining the anomaly matching at the origin of the moduli space. Given the UV fields, z^i , and the IR composites, I^a , the flavour symmetries consistent with the 't Hooft conditions are easily checked by considering the chains of subgroups H_z and calculating their anomalies at the origin.

Since the inclusion of a superpotential is easily taken into account, we assume for simplicity that the UV theory has no superpotential. As seen in the previous section the moduli space is homeomorphic to the variety of gauge invariant polynomials. These gauge invariants are chiral superfields which are good candidates for a low energy description of the gauge theory. The direct relationship between the moduli space and gauge invariants entails a close relationship between the IR and UV anomalies.

Let us decompose $\mathcal{M}_z$ and $\mathcal{M}_I$ into strata and then apply the theorem quoted in the previous section. The relevant point of this theorem is the analyticity of the mapping. It implies that chiral superfields in the tangent space of the $D^A = 0$ set at z are mapped to chiral superfields in the tangent space of the manifold of gauge invariants at $I^a(z)$. The tangent space within a given stratum corresponds to singlet fields under the residual gauge group. They fall into representations of the residual global symmetry H_z and are mapped into corresponding representations in the tangent space to the variety of gauge invariants. An immediate consequence is *the equality between the contributions to the anomalies from the fields associated to both tangent spaces*. Our results in the next section rely on this powerful property.

We first discuss an example before embarking upon the general cases. For simplicity we describe the case of the $SU(N_c)$ gauge theory with $N_f < N_c$ flavours of quarks and antiquarks [29]. This theory possesses two global axial symmetries that we shall denote by $SU(N_f)_A \times U(1)_R$. The charges of both the quarks and the antiquarks are $(N_f, 1 - N_c/N_f)$. The chiral ring is generated by the (meson) invariants $M_{i\bar{j}}$ transforming under the axial flavour group as $(\square + \bar{\square}, 2(1 - N_c/N_f))$. The anomalies of the various possible $SU(N_f)_A \times U(1)_R$ subgroups calculated (at the origins) for the quark and antiquarks and for the mesons do not match, so that the low energy theory cannot preserve any flavour symmetry. At the generic stratum of the $D^A = 0$ manifold, the gauge group is broken to $SU(N_c - N_f)$, and there is no residual global symmetries. At the singular strata, the gauge group is broken to $SU(N_c - r)$, $r < N_f$, and the axial flavour group is broken to $U(N_f - r)$. The tangent spaces to the strata are, respectively, all the quarks but $(N_f - r)$ families in the fundamental representations of $SU(N_c - r)$, and all the mesons $M_{i\bar{j}}$ except those for which $i > r$ and $j > r$. The global anomalies of $U(N_f - r)$ are easily checked to coincide. However, by taking into account the other mesonic fields, which are not in the tangent space this matching is destroyed. Therefore one has to look for a theory where besides the $SU(N_c - r)$ gauge theory with $(N_f - r)$ flavours, the IR physics is defined in terms of this restricted set of mesons.

The only non-perturbative superpotential consistent with the flavour symmetries

is [29]

$$W = (N_c - N_f) \left(\frac{\det M_D}{\Lambda^{3N_c - N_f}} \right)^{1/(N_f - N_c)} \quad (3.1)$$

implying $\det M \neq 0$ and restricting M to the generic stratum. The singular strata are excluded as they must be because of the anomaly mismatch. Actually, the only way to introduce a supersymmetric theory with the mesonic fields restricted to the coset $U(N_f)/U(N_f - r)$ would be through a non-linear realization of the global symmetries, namely, through a non-trivial Kähler potential. Of course, this is a difficult task in the absence of important constraints such as holomorphy and perturbative non-renormalization which allow for the determination of the superpotential. Anyway, as such, the superpotential (3.1) destabilizes the theory which has no ground state.

On more general grounds, at a non-trivial vacuum, the anomalies receive two contributions, one from the charged fields under the residual gauge group, G_z , and another one from the singlet fields. Neither all singlet fields nor all chiral invariants belong to the lesser dimensional tangent spaces to the singular strata which the theorems of the previous section apply to, yet they may contribute to the anomalies which may not match as in the previous example. As already stressed, the anomaly matching for the corresponding flavour subgroups are easily checked at the origins.

Although the flavour symmetries that constrain the non-perturbatively generated potential are model dependent, a general structure can be already established from the general form of the non-anomalous R -symmetry. The charges of the matter fields z_i under the $U(1)_R$ can be chosen as

$$R_i = 1 - \frac{\mu_{adj}}{n\mu_i} \quad (3.2)$$

where n is the number of matter field representations. The charges of the fermions in the same chiral multiplets are $R_i - 1 = -\frac{\mu_{adj}}{n\mu_i}$. The low energy superpotential is a combination of terms having $R = 2$ which can be expressed in terms of the matter field content of the gauge invariants as [20–22]

$$W \sim \left(\prod_i z_i^{\mu_i} \right)^{2/(\mu - \mu_{adj})} \quad (3.3)$$

The special cases where $W = 0$ have been classified and studied in Refs. [21, 22]. When $\mu < \mu_{adj}$ the superpotential has a runaway behaviour with a minimum at infinity. In a theory with confinement, this general form has to be reproduced in terms of various combinations of the chiral invariants, and there can be several. Its determination then relies on different arguments involving decoupling and higgsing [1, 2, 22, 30]. We give some examples of (3.3) in section 5

For low indices $\mu < \mu_{adj}$ the gauge invariant rings have been classified [26, 27] and it has been shown that there are no syzygies. There were several prior examples of confining theories of this kind in the literature [18–21]. The case study of all these theories has not been carried out. Nevertheless the studied cases reveal the pattern

emerging from the 't Hooft matching, either the anomalies do not match and there is a superpotential, or the anomalies do match and there is a branch of the low energy theory with a vanishing superpotential. We refer to these detailed studies and concentrate on the $\mu \geq \mu_{adj}$ in the following.

4 Anomaly Matching and Syzygies

The gauge theories with $\mu \geq \mu_{adj}$ have syzygies generically. There are a few classified cases where the basic invariants are not constrained. Barring these examples which have been extensively studied [19–21, 23, 24] in the literature, in the following we shall be interested exclusively in theories with non-void syzygies, *i.e.* there exists relations between the basic invariants of the theory. We shall now examine the connection between the anomaly matching and the existence of a superpotential which reproduces the syzygies.

Let us recall that the moduli space $\mathcal{M}_z$ is homeomorphic to the manifold $\mathcal{M}_I$ defined in terms of the composite fields I^a by the syzygies (2.3). The gauge group is generically broken, *i.e.* the gauge group is completely broken on the generic stratum, a dense open set. In this section we concentrate on the principal stratum. For the singular ones, where there remains a residual gauge group, the analysis is more involved as already discussed in the previous section. Since the gauge group is completely broken, the anomaly calculated from the chiral fields in the tangent space to the moduli space at a point z of the generic stratum is the same as the anomaly (formally) calculated from the gauge invariants in the tangent space to the corresponding point of the chiral ring with the syzygies (2.3). Then [19]⁽³⁾:

*The 't Hooft anomaly matching conditions are satisfied for supersymmetric gauge theories if the syzygies $\mathcal{S}^a(I^a) = 0$ of the gauge invariant ring $\mathbf{C}[I^a]/\{S^a = 0\}$ derive from a superpotential $W(I)$ *i.e.* $\mathcal{S}^a = \partial W / \partial I^a = 0$.*

Let us show this result. Assume that there exists a superpotential $W(I^a)$ such that the syzygies are the F -terms

$$\mathcal{S}^a = \frac{\partial W}{\partial I^a} \quad (4.1)$$

The tangent space to the variety defined by the syzygies is given by the zero eigenvectors of the matrix

$$\mathcal{S}_a^b = \frac{\partial \mathcal{S}^b}{\partial I^a}(I^a) = \frac{\partial^2 W}{\partial I^a \partial I^b}, \quad (4.2)$$

namely, by the massless composite superfields. The anomalies in the IR supersymmetric theory defined by the superpotential $W(I^a)$ are the same as the formal one defined within the tangent space to $\mathcal{S}^a = 0$. As already stated, these coincide with the anomalies calculated within the tangent space to the set of solutions of $D^A = 0$,

⁽³⁾See the remark at the end of this section concerning the case $\mu = \mu_{adj}$ and the quantum modifications.

defined by the zero eigenstates of the matrix D_i^A , namely, with the massless states of the UV supersymmetric theory. Of course, the mass matrices are invariant under the residual global (flavour) group $H_z \subset H$, and the massive states are in a real (vector-like) representation of H_z . These anomalies of H_z coincide also when calculated at the origins, $z^i = 0$ and $I^a = 0$, respectively. Therefore the 't Hooft matching conditions are satisfied.

Let us examine the statement:

The 't Hooft anomaly matching implies the existence of a flavour invariant polynomial whose gradient vanishes on the zeros of the syzygies.

The 't Hooft conditions imply the matching of the anomalies of H_z calculated in the fundamental theory with all the fields z^i and in the low energy theory, with all the composite fields I^a . The former also match with the anomalies calculated with the zero eigenstates of the mass matrix D_i^A , namely on $\mathcal{M}_z$, which, in turn, match with the anomalies calculated with the zero eigenstates of $\mathcal{S}_a^\alpha(I)$, namely on $\mathcal{M}_I$. Therefore the $N \times d$ matrix $\mathcal{S}_a^\alpha$ ($N < d$) projects onto the normal space to $\mathcal{M}_I$ which transforms as an anomaly free representation of H_z . There are two distinct possibilities concerning the representations of H_z forming the normal space. When the normal space is an anomaly free chiral representation of the little group there cannot exist a superpotential reproducing the syzygies. This follows from our earlier analysis showing that the existence of a superpotential implies that the normal space is a real representation of the little group. In the following we only focus on the case where the normal space is a real representation of H_z and show how this allows to construct a H -invariant polynomial whose gradient is zero when the syzygies are satisfied. It is important to notice that the restoration of the H -invariance of the constructed polynomial concerns the flavour symmetries acting on the fermions associated to the invariants. This implies the invariance of the polynomial under the $(R-1)$ Abelian symmetry.

The transformations $\{h\}$ of H define the orbit $\{hI\}$ of each point $I \in \mathbb{C}[I^a]$. The covariance of the syzygies defines a representation $\{\hat{h}\}$ such that

$$\mathcal{S}^\alpha(hI) = \hat{h}^\alpha_\beta \mathcal{S}^\beta(I). \quad (4.3)$$

At any point $I_0 \in \mathcal{M}_I$ the gradients $\mathcal{S}_a^\alpha(I_0)$ are invariant under the action of the little group of I_0 , H_{I_0} . It is then possible to construct a basis of the syzygies and a basis of the invariants associated to the point I_0 , with the indices α and a decomposed into $\alpha = \{i, m\}$ and $a = \{i, r\}$ such that:

$$\frac{\partial \mathcal{S}^\alpha}{\partial I^a}(I_0) = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

where D is a non-singular diagonal matrix. The set $\{I^i\}$ spans $\mathcal{N}_{I_0}$, the normal space to $\mathcal{M}_I$ at the point I_0 , and $\{I^r\}$, the tangent space. Under the flavour group H ,

$$I_0 \in \mathcal{M}_I \rightarrow hI_0 \in \mathcal{M}_I, \quad H_{I_0} \rightarrow hH_{I_0}h^{-1}, \quad \mathcal{N}_{I_0} \rightarrow h\mathcal{N}_{I_0}. \quad (4.5)$$

The reality of $\mathcal{N}_{I_0}$ under H_{I_0} implies the existence of a unitary matrix η such that for any element $h_{\mathcal{N}}$ of the representation of H_{I_0} on $\mathcal{N}_{I_0}$: $h_{\mathcal{N}}^* = \eta h_{\mathcal{N}} \eta^{-1}$. Now, if I_0 is

the projection of I on $\mathcal{M}_I$ (the projection is always defined at least in a neighborhood of $\mathcal{M}_I$), we define $W(I)$ as the integral along the normal direction $(I - I_0)$:

$$W(I) = \int_0^1 dt \mathcal{S}^{i_1}(I_0 + t(I - I_0)) (I - I_0)^{i_2} \eta_{i_1 i_2} \quad (4.6)$$

where the basis associated to I_0 has been chosen. By construction, this function is H_{I_0} -invariant. To see its H -invariance, we have to relate the basis at different points. Consider any element h of H . The unitarity of H ensures that hI_0 is the projection of hI (note that the covariance of the syzygies guarantees that hI_0 belongs to $\mathcal{M}_I$). It is easy to verify that $\hat{h}^{-1}\mathcal{S}$ and $h^{-1}I$ are the bases associated to hI_0 . The coordinates of the point hI in the new basis are the same as those of I in the old basis. Moreover η is independent of the basis. Thus

$$\begin{aligned} W(hI) &= \int_0^1 dt (\hat{h}^{-1})^{i_1}_{i_2} \mathcal{S}^{i_2}(h(I_0 + t(I - I_0))) (I - I_0)^{i_3} \eta_{i_1 i_3} \\ &= W(I) \end{aligned} \quad (4.7)$$

which proves the invariance of W under the action of flavour group H . Note that the reality of $\mathcal{N}_{I_0}$, which we assume to follow from the 't Hooft matching condition, is necessary in our construction of W ; the invariance under H then follows from covariance. The H -invariance of the polynomial W concerns the flavour symmetries acting on the fermions associated to the invariants. When $\mu \neq \mu_{adj}$ the R symmetry is broken at low energy. The restored symmetry acting on W is the $(R - 1)$ symmetry of the fermions. Assuming that the directions $(I - I_0)^i$ have a well-defined R charge, this leads to the invariance condition $(R_S - 1) + (R_I - 1) = 0$. The R charge of the polynomial W is explicitly given by $R_W \equiv R_S + R_I = 2$. The R symmetry of the polynomial W is then two as required for a superpotential.

The gradients of $W(I)$ along the tangent directions to $\mathcal{M}_I$,

$$\partial_r W(I) = \int_0^1 dt \mathcal{S}_r^{i_1}(I_0 + t(I - I_0)) (I - I_0)^{i_2} \eta_{i_1 i_2} \quad (4.8)$$

obviously vanishes when $I = I_0$. Along the normal directions the gradient becomes

$$\partial_i W(I) = \mathcal{S}_i(I) + \int_0^1 dt (\mathcal{S}_{i_1 i}(I_0 + t(I - I_0)) - \mathcal{S}_{i i_1}(I_0 + t(I - I_0))) (I - I_0)^{i_1} \quad (4.9)$$

where the indices are lowered using η . This vanishes for $I = I_0$. This guarantees that the polynomial $W(I)$ has a vanishing gradient on the zeros of the syzygies. The previous formulae imply that the gradient of W is equal to the set of syzygies when the matrix $\mathcal{S}_a^\alpha$ is symmetric. This requires a connection between the H -representations of the syzygies and of the invariants which seems difficult to establish in general.

Up to now our discussion has been restricted to the normal space to one particular point I_0 on $\mathcal{M}_I$. We have constructed explicitly a polynomial W on the normal space at I_0 which has a dependence on the point I_0 . We shall now extend our analysis to

non-singular strata on the non-singular manifold $\hat{\mathcal{M}}_I$ of $\mathcal{M}_I$. By a standard result of differential geometry [32] we can choose a tubular neighbourhood of this manifold $\hat{\mathcal{M}}_I$ which is diffeomorphic to the normal bundle $\mathcal{N}$. This is an open neighbourhood of the manifold $\hat{\mathcal{M}}_I$. Locally in an open neighbourhood the coordinates describing the tubular neighbourhood are (I_0, E) where $I_0 \in \hat{\mathcal{M}}_I$ and the vector $E \in \mathcal{N}_{I_0}$ in the normal space at I_0 . This implies that every point in the tubular neighbourhood is represented by the vector $I = I_0 + E$.

We can extend the definition of W to the stratum of I_0 on the manifold $\hat{\mathcal{M}}_I$. We choose I_0 such that its stratum possesses a little group $H_{I_0} \neq 0$ with the smallest dimension. Let us now introduce the slice Σ_{I_0} passing through I_0 in the stratum of I_0 . It is such that it parametrizes the orbits and is in a sense normal to them. In particular the tangent space to the slice Σ_{I_0} at I_0 comprises only singlets of the little group H_{I_0} . Consider another point $I'_0 \in \Sigma_{I_0} \cap \hat{\mathcal{M}}_I$ then the little groups $H_{I_0} \equiv H_{I'_0}$ and one can easily verify that the normal spaces coincide.

Choose a point I' in the tubular neighbourhood such that $I' - I'_0 = I - I_0$ identified with E in the normal space. By the line integral similar to (4.6) starting from I'_0 one can define a polynomial $W'(I')$ with an explicit dependence on I'_0 . One can also extend the polynomial $W(I)$ defined in the normal space at I_0 to $W(I')$ using the Taylor polynomial in $\delta I_0 = I'_0 - I_0$. A calculation shows that the two polynomials coincide

$$W'(I') \equiv W(I') \quad (4.10)$$

This allows to extend the definition of the polynomial W to the whole tubular neighbourhood of the slice Σ_{I_0} and therefore by the H -invariance to the tubular neighbourhood to the stratum of I_0 in $\hat{\mathcal{M}}_I$. We have then defined a polynomial W on each of the tubular neighbourhoods of the non-singular strata of the manifold $\hat{\mathcal{M}}_I$.

Although this provides a working definition of a superpotential W there are still two points which should be clarified in order to complete the proof of the existence of a superpotential reproducing the syzygies. First of all we have not proved that the polynomials $W_i, i = 1 \dots p$, corresponding to p different non-singular strata coincide on the singular sets where the closures of the strata meet. Assuming that this is the case allows to extend the polynomial W to the singular strata by analytic continuation. Secondly we have not shown that the zeros of the gradient of the polynomial W , when extended to the whole set of gauge invariants from the tubular neighbourhood of $\hat{\mathcal{M}}_I$ by analytic continuation, coincide with $\hat{\mathcal{M}}_I$. These two points require some global analysis which goes beyond the scope of the present paper.

In general, one can write a IR superpotential $W(I^a)$ which is invariant under the global symmetries of the UV theory. The ambiguities in its construction can be resolved by means of the decoupling technique. Two examples are discussed in the next section.

Let us now consider the cases where the R symmetry belongs to the residual flavour symmetry. This is feasible only in the case $\mu = \mu_{adj}$ when the R charges of the scalars z_i vanish. Consequently the R charges of the invariants and of the syzygies vanish. The $(R-1)$ charges of the syzygies and of the invariants are all (-1) implying that the

normal space cannot be real. The matching condition for the R symmetry is violated. Let us focus on one particular invariant syzygy, one can associate to this syzygy a new invariant X whose role is to cancel the anomaly. Introducing the X field corresponds to an extension of the space of invariants. This field is such that its $(R-1)$ symmetry is unity in order to render the normal space real. Having paired the syzygy with the field X in a real normal space one can define the invariant polynomial (4.6) by integration along the X direction. This leads to $W = XS$. This superpotential reproduces the classical moduli space $\mathcal{M}_I$ augmented with the X direction at the origin. In general this superpotential is deformed by quantum effects which forbids the unwanted X direction.

As the superpotential that we have constructed is a polynomial we can deduce conditions on μ . Replacing the $I^a(z^i)$ polynomials, the IR superpotential W is a polynomial in the fields z^i . Now by comparing with the general structure (3.3) required by the R -symmetry, one obtains the following condition:

A necessary condition for the matching of the anomalies in theories with non-trivial syzygies is:

$$\mu = \mu_{adj} + k, \quad k = 0, 1, 2. \quad (4.11)$$

This is the confinement condition⁽⁴⁾ for theories with $\mu \geq \mu_{adj}$. This condition has been already introduced in the literature [18, 22–25, 31] by requiring a polynomial structure in (3.3). Here, it follows from the necessary 't Hooft matching conditions on anomalies. In particular this excludes all higher order Dynkin index theories where the possible superpotential would have a branch cut at the origin.

Notice that we are including in the series (4.11) the theories with quantum modified moduli spaces [1, 23, 24, 33], where the (quantum modified) syzygies are usually introduced as constraints rather than as field equations. We have shown how the case $\mu = \mu_{adj}$ can be included by introducing a new field X when the syzygies are invariant under the flavour group. With this in mind, we find it more appropriate to include these theories among the other confining theories in (4.11).

Another important remark concerning the quantum modified moduli spaces is the following. By writing the general superpotential in terms of the different invariants there are ambiguities due to the presence of different combinations of invariants with the right quantum numbers. When the superpotential is obtained through decoupling in the descent procedure, the constraint corresponding to the equations of motion turns out to be the quantum modified one [1]. The syzygies follow if one discards the dimensionful scale, which is obviously absent in the classical syzygy. Of course, the deformation of the manifold $\mathcal{M}_I$ when taking into account the quantum modified syzygy must preserve the isomorphism (2.4). However, we do not have a general proof of this conjecture.

⁽⁴⁾Strictly speaking this only applies to gauge theories without a UV superpotential. In the presence of a UV superpotential, the results stand for the unbroken gauge and flavour symmetries and the massless states even though the anomaly matching, as previously noticed, can be analysed at the origin of the moduli space. Indeed the massive states decoupled below the symmetry breaking scale are in a real representation of the residual flavour group.

5 A Case Study: $SU(N_c)$ and $Spin(7)$ Gauge Theories

Let us illustrate these general results by a study of the well-known case of the supersymmetric $SU(N_c)$ gauge group with N_f flavours of quarks and antiquarks, denoted by Q_α^i and $\tilde{Q}_\alpha^i$, respectively. The global symmetries are $SU(N_f) \times SU(N_f) \times U(1)_B \times U(1)_R$ with Q_α^i transforming as $(N_f, 1, 1, 1 - N_c/N_f)$ and $\tilde{Q}_\alpha^i$ as $(1, N_f, -1, 1 - N_c/N_f)$. The chiral ring is generated by meson and baryon composite fields (with obvious contractions of the colour indices) :

$$\begin{aligned} M^{i\tilde{j}} &= Q^i \tilde{Q}^{\tilde{j}} , \\ B_{i_1 \dots i_{N_f - N_c}} &= \epsilon_{i_1 \dots i_{N_f}} Q^{i_{N_f - N_c + 1}} \dots Q^{i_{N_f}} , \\ \tilde{B}_{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_{N_f - N_c}} &= \epsilon_{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_{N_f}} \tilde{Q}^{\tilde{i}_{N_f - N_c + 1}} \dots \tilde{Q}^{\tilde{i}_{N_f}} , \end{aligned} \quad (5.1)$$

constrained by the (overdetermined) set of syzygies:

$$\begin{aligned} B_{i_1 \dots i_{N_f - N_c}} M^{i_1 \tilde{j}} &= 0 , \\ M^{i \tilde{j}_1} \tilde{B}_{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{N_f - N_c}} &= 0 , \\ B_{i_1 \dots i_{N_f - N_c}} \tilde{B}_{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{N_f - N_c}} &= \epsilon_{i_1 \dots i_{N_f}} \epsilon_{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{N_f}} M^{i_{N_f - N_c + 1} \tilde{j}_{N_f - N_c + 1}} \dots M^{i_{N_f} \tilde{j}_{N_f}} . \end{aligned} \quad (5.2)$$

if $N_f \geq N_c$. In this case one can easily solve the syzygies. The solutions are up to a $U(N_f) \times U(N_f)$ transformation given by

$$\begin{aligned} M &= \text{diag}(M_1 \dots M_{N_c}, 0 \dots 0) , \\ B_{N_c + 1 \dots N_f} &= B , \\ \tilde{B}_{N_c + 1 \dots N_f} &= \tilde{B} , \end{aligned} \quad (5.3)$$

with all other components of B and $\tilde{B}$ vanishing. The syzygies (5.2) are satisfied by (5.3) provided :

$$B \tilde{B} = \prod_{i=1}^{N_c} M_i . \quad (5.4)$$

The global symmetry preserved by the solution of the syzygies (5.2) is $H_z = SU(N_f - N_c)^2 \times U(1)^{N_c - 1}$ for $N_f \geq N_c$. The quark representation decomposes as N_c copies of the fundamental representation of $SU(N_f - N_c)$. The tangent space to the moduli space defined by the action of $U(N_f) \times U(N_f)$ on (5.3) is defined by the action of the generators $\left(\frac{U(N_f)}{U(N_f - N_c) \times U(N_c)} \right)^2$ on M . This gives two $N_c \times (N_f - N_c)$ matrices, transforming as N_c copies of the fundamental representations of each $SU(N_f - N_c)$ factor in H_z . This proves that the $SU(N_f - N_c)$ anomalies match. Similarly the $U(1)$'s are vector-like and the anomalies match. This is a consequence of isomorphism between the moduli spaces defined for Q_α^i , $\tilde{Q}_\alpha^i$ and the M 's, B 's and $\tilde{B}$'s that fulfill (5.2).

From the global symmetries, one deduces the superpotential

$$W = (N_f - N_c) \left(\frac{\det M - \text{tr} \left(B \parallel M^{N_f - N_c} \parallel \tilde{B} \right)}{\Lambda_{N_f}^{3N_c - N_f}} \right)^{1/(N_f - N_c)} \quad (5.5)$$

where $\parallel M^{N_f - N_c} \parallel^{i_1 \dots i_{N_f - N_c} \tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_{N_f - N_c}}$ is the minor of rank $N_f - N_c$ of the meson matrix M specified by the appropriate rows and columns. This superpotential has the required charge $R = 2$. Starting from $N_f > N_c + 1$, and adding a source to the N_f flavour $m M_{N_f N_f}$ one can check that it correctly satisfies the holomorphic decoupling condition yielding the same superpotential with one less flavour, and $m \Lambda_{N_f}^{3N_c - N_f} = \Lambda_{N_f - 1}^{3N_c - N_f - 1}$. In particular, going down to $N_f = N_c + 1$, one gets $W = (\det M - B M \tilde{B}) / \Lambda_{N_c + 1}^{2N_c - 1}$ and decoupling the $N_c + 1$ flavour the superpotential yields the quantum constraint of the $N_f = N_c$ theory, $W = X(\det M - B \tilde{B} - \Lambda_{N_c}^{2N_c})$ with the help of a Lagrange multiplier $X = M_{N_f N_f} / \Lambda_{N_c + 1}^{2N_c - 1}$. For $N_f = N_c, N_c + 1$ the equations for the extrema of the superpotential reproduce the syzygies. When $N_f > N_c + 1$, the superpotential is not polynomial and it does not yield the syzygies.

The previous example dealt with a vector-like theory with the matter fields in a real representation of the gauge group. In the following we will discuss the case of $Spin(7)$ with N_f spinors in the 8 representation [35]. In order to describe the low energy dynamics of the theory let us study the global symmetries. There is a non-Abelian flavour symmetry $SU(N_f)$ and also a single anomaly free $U(1)_R$ symmetry which is non-anomalous. The spinors have charges $(N_f, 1 - \frac{5}{N_f})$. The gauge invariants are the mesons $M^{ij} = q^i q^j$ which is a symmetric matrix and the baryons $B^{i_1 i_2 i_3 i_4} = q^{[i_1} q^{i_2} q^{i_3} q^{i_4]}$. It is also convenient to define the baryons as the Hodge dual of B , *i.e.* as an $(N_f - 4)$ antisymmetric tensor.

There are two different syzygies. The first one is formally $\parallel M^5 \parallel = MBB$ or explicitly

$$\epsilon^{i_1 \dots i_{N_f}} \epsilon^{j_1 \dots j_{N_f}} M_{i_1 j_1} \dots M_{i_5 j_5} = M_{ij} B^{i i_6 \dots i_{N_f}} B^{j j_6 \dots j_{N_f}}. \quad (5.6)$$

The second one denoted by $M^2 B + B^2 = 0$ reads

$$M_{i_1 j_1} M_{i_2 j_2} B^{i_1 i_2 j_3 \dots j_{N_f - 4}} + \epsilon^{abcd j_3 \dots j_{N_f - 4}} B^{ef}_{ab} B_{efcd} = 0. \quad (5.7)$$

Let us define the gauge invariant polynomial

$$\begin{aligned} \Omega_{N_f} = & \det M + a_{N_f} B^{i_1 \dots i_{N_f - 4}} B^{j_1 \dots j_{N_f - 4}} M_{i_1 j_1} \dots M_{i_{N_f - 4} j_{N_f - 4}} \\ & + b_{N_f} \epsilon^{i_1 \dots i_{N_f}} B_{i_1 i_2 j_1 \dots j_{N_f - 6}} B_{i_3 i_4 k_1 \dots k_{N_f - 6}} B_{i_5 \dots i_{N_f}} M^{j_1 k_1} \dots M^{j_{N_f - 6} k_{N_f - 6}} \end{aligned} \quad (5.8)$$

where $a_{n-1} = (n-4)a_n$, $b_{n-1} = (n-4)(n-6)b_n$ and the initial values $a_6 = -1$, $b_6 = -1$. There is a unique superpotential

$$W_{N_f} = (5 - N_f) \left(\frac{\Omega_{N_f}}{\Lambda_{N_f}^{15 - N_f}} \right)^{1/(N_f - 5)}. \quad (5.9)$$

which has a R -charge of two and satisfies the decoupling requirements. It reproduces the syzygies when $N_f = 6$. This corresponds to the anomaly matching case and $\mu = \mu_{adj} + 1$ as $\mu_{spinor} = 1$, $\mu_{adj} = 5$. For N_f , the anomalies match when including the Lagrange multiplier charged under $U(1)_R$. For $6 < N_f < 15$ the superpotential is not polynomial and therefore there is no matching.

We have thus given two examples where the possibilities $\mu = \mu_{adj} + k$, $k = 1, 2$ for the index of the matter fields have been illustrated.

6 Syzygies and Duality

As shown in the previous section the gauge theories with $\mu > \mu_{adj} + 2$ are far more difficult to analyse than their counterparts with either no syzygies or a superpotential describing the low energy physics. Let us first recall the conventional lore [3,4] about gauge theories with higher indices and their relation with syzygies.

It is generally assumed that theories with $2 + \mu_{adj} < \mu < 3\mu_{adj}$ have an infrared fixed point [2] where they are described by a superconformal theory. This fixed point describes either an interacting theory or it is a free theory in magnetic phase. Using this conjecture one can describe the set of chiral primary fields⁽⁵⁾ of the superconformal theories. The primary chiral superfields form a chiral ring under the operator product defined by the short distance expansion. This ring is identified with the ring of gauge invariant polynomials. The syzygies are therefore exact quantum relations between the chiral primary fields at the superconformal fixed point.

At these fixed points, the dimension d of the chiral primary field is related to the R -charge by $d = \frac{3}{2}|R|$. Unitary conditions restrict these dimensions to be greater than one, the bound being saturated for a free field. So the description in terms of infrared fixed points breaks down when the dimensions of certain operators becomes formally less than one. For instance for vector-like theories with quarks and antiquarks this happens for the mesons when $\mu < \frac{3}{2}\mu_{adj}$. In that case the theory is supposed to possess a dual description where the dual mesons become a free field, leading to a “free magnetic phase”. Unfortunately there is no prescription for constructing such dual models. Nevertheless the known examples have to satisfy stringent consistency checks.

In this section, we present, for two well known examples, a new check. Whereas in “electric theories” the gauge invariants are composite fields and so subject to syzygies, in the magnetic dual theories, some of them appear as elementary fields and do not have *a priori* to satisfy the syzygies. As suggested in [3,36], these “magnetic syzygies” should appear as non-perturbative effects, which we will show explicitly by an appropriate regularization of the superpotentials generated non perturbatively in the magnetic theories.

Let us first describe the duality of the $SU(N_c)$ with $N_f > N_c + 2$ quarks and antiquarks. The dual gauge group [2] is $SU(N_f - N_c)$ with N_f matter fields $q, \tilde{q}$ in the fundamental and antifundamental representations respectively. The dual theory also

⁽⁵⁾Let us recall that chiral fields are defined by $\bar{D}\Phi = 0$ where $\bar{D}$ is the supersymmetric fermionic derivative. Primary fields are such that $\Phi \neq \bar{D}\chi$ for a given superfield χ .

possesses dual mesons M_D , invariant under $SU(N_f - N_c)$ and that couple to q and $\tilde{q}$ through a superpotential:

$$W = \frac{1}{\mu} \text{tr} (M_D q \tilde{q}^t), \quad (6.10)$$

where μ is a scale parameter. This superpotential is not sufficient to show the equivalence between the original theory and its dual, and in particular is not sufficient to identify the dual mesons M_D with the electric ones $Q\tilde{Q}$. This requires non perturbative modification of the magnetic moduli space. Along a flat direction with $\langle M_D \rangle \neq 0$, the matter fields q and $\tilde{q}$ become massive and decouple from the low energy theory. The pure gauge theory then undergoes gaugino condensation which generates an extra contribution to the superpotential [36]

$$W_{n.p.} = (N_c - N_f) \left(\frac{\det M_D}{\Lambda^{3N_c - N_f}} \right)^{1/(N_f - N_c)}. \quad (6.11)$$

The analysis of the vacua of the dual theory necessitates to introduce source terms $W_{reg.} = \text{tr}(m M_D)$ in the superpotential. The vacua are obtained by taking the limit of zero sources. From the total superpotential $W + W_{n.p.} + W_{reg.}$, the equations of motion for the mesons lead to a vacuum satisfying

$$M_D = \left(\Lambda^{3N_c - N_f} \det \left(m + \frac{q \tilde{q}^t}{\mu} \right) \right)^{1/N_c} \left(m + \frac{q \tilde{q}^t}{\mu} \right)^{-1}. \quad (6.12)$$

As in the electric theory, a flavour and gauge transformation diagonalize the matter fields

$$(q_\alpha^i, \tilde{q}_\alpha^i) = \begin{cases} (a_i, \tilde{a}_i) \delta_\alpha^i & , \\ 0 & . \end{cases} \quad (6.13)$$

The matrix parameter m regularizes the matrice on the right hand side of (6.12). In the limit $m \rightarrow 0$, the vacuum (6.12) becomes

$$M_D = \left(\Lambda^{3N_c - N_f} \prod_{i=1}^{N_f - N_c} \frac{a_i \tilde{a}_i}{\mu} \right)^{1/N_c} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_D \end{pmatrix}, \quad (6.14)$$

where m_D is a $N_c \times N_c$ matrix of determinant one. The claim is that this relation exactly reproduces the syzygies of the electric theory. Indeed, according to ref. [3], the identification between the electric and magnetic gauge invariants is

$$M \rightarrow M_D, \quad (B, \tilde{B})^{i_1 \dots i_{N_f - N_c}} \rightarrow \sqrt{\Lambda^{3N_c - N_f} \mu^{N_c - N_f}} (b, \tilde{b})^{i_1 \dots i_{N_f - N_c}}, \quad (6.15)$$

where $b^{i_1 \dots i_{N_f - N_c}}$ is defined by the totally antisymmetric gauge invariant combination $q^{[i_1} \dots q^{i_{N_f - N_c}]}$. Using the electric variables, the relation (6.14) reads

$$B \tilde{B} = \| M^{N_c} \|, \quad (6.16)$$

whereas the two other sets of electric syzygies are also trivially satisfied. In that sense, the magnetic theory with an appropriate regularization satisfies the same set of syzygies as the electric theory.

The same analysis can be applied to the $Spin(7)$ theory. Its dual theory [35] is a chiral $SU(N_f - 4)$ gauge theory with N_f matter fields q^i in the antifundamental representation and one field S in the symmetric representation. There is also a symmetric meson matrix M_D which is a singlet under the gauge group. These fields are coupled by the superpotential

$$W = \frac{1}{\mu^2} \text{tr}(M_D q S q^t) + \frac{1}{\mu^{N_f-7}} \det S. \quad (6.17)$$

This tree-level superpotential needs to be completed by a non-perturbative part and source terms. As before, we consider a flat direction where the symmetric field is proportional to the identity and $M_D \neq 0$. The matter fields become massive leading to gaugino condensation of the pure gauge theory. This leads to the following term in the superpotential

$$\begin{aligned} W_{n.p.} &= (5 - N_f) \left(\frac{\det M_D}{\Lambda^{15-N_f}} \right)^{1/(N_f-5)} \\ W_{reg.} &= \text{tr}(m M_D) + \text{tr}(m_s S), \end{aligned} \quad (6.18)$$

where sources m and m_s have been introduced for regularization purposes. Firstly, the D -terms have to vanish, *i.e.*

$$2S^\dagger S - q^\dagger q = \lambda \mathbf{1}, \quad (6.19)$$

with a suitable real number λ . Then once again, gauge and flavour transformations can simultaneously diagonalize q and S . The solutions of equations of motion derived from the total superpotential are,

$$S = \left(-\mu^{N_f-7} \det \left(m_s + \frac{M_D q q^t}{\mu^2} \right) \right)^{1/(N_f-5)} \left(m_s + \frac{M_D q q^t}{\mu^2} \right)^{-1}, \quad (6.20)$$

and

$$M_D = \left(\Lambda^{15-N_f} \det \left(m + \frac{q S q^t}{\mu^2} \right) \right)^{1/5} \left(m + \frac{q S q^t}{\mu^2} \right)^{-1}. \quad (6.21)$$

The physical vacua correspond to the limit $m \rightarrow 0$ and $m_s \rightarrow 0$ where (6.20) and (6.21) become

$$S = \left(-\mu^{N_f-7} \frac{M_{N_f-4} q_{N_f-4}^2}{\mu^2} \right)^{1/(N_f-5)} \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.22)$$

s being a $(N_f - 5) \times (N_f - 5)$ matrix of determinant one, and

$$M_D = \left(\Lambda^{15-N_f} \prod_{i=1}^{N_f-5} \frac{q_i^2 S_i}{\mu^2} \right)^{1/5} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_D \end{pmatrix}, \quad (6.23)$$

m_D being a 5×5 matrix of determinant one. Quarks and mesons have only one non-vanishing flavour index in common that is taken here to be the $(N_f - 4)^{\text{th}}$ one. Equations (6.22) and (6.23) assures that only one 5×5 minor of M_D is non vanishing and it is given by

$$\| M_D^5 \| = -\Lambda^{15-N_f} \mu^{1-N_f} M_{N_f-4} b b, \quad (6.24)$$

where b is the only non vanishing dual baryon $b = \prod_{i=1}^{N_f-4} q_i$. Providing the following identification between electric and magnetic gauge invariants

$$\begin{aligned} M &\rightarrow M_d, \\ B^{i_1 \dots i_{N_f-4}} &\rightarrow \sqrt{-\Lambda^{15-N_f} \mu^{1-N_f}} b^{i_1 \dots i_{N_f-4}}, \end{aligned} \quad (6.25)$$

the relation (6.24) is the only non trivial electric syzygy expressed in terms of magnetic variables.

So we have seen in the two examples explicitly studied how the syzygies of the electric theory are fulfilled in the magnetic theory thanks to non-perturbative effects that eliminate magnetic vacua without counterparts in the electric theory.

7 Geometry of the Moduli Spaces

In supersymmetric theories, the Kähler potential is sensitive to perturbative quantum effects, non-perturbative ones, threshold and decoupling corrections. For this reason it is not obvious how to extend the analysis of confinement and duality to this sector of the theory. Nevertheless, the Kähler potential encodes important information on the dynamics. It gives the σ -model geometry of the complex scalar manifolds, with the quantum modifications that includes a scale dependence. Therefore, one would like to understand the relationship between the Kähler structures of dual pairs of theories, for instance. Of course, a classical approach would be incomplete, but it could be of some usefulness if only the perturbative corrections are the most relevant, which is consistent with the fact that we do not expect quantum modifications of the moduli spaces in dual theories.

In this section, we present an approach to the geometry of the moduli space [37] which is based on a study of the hidden symmetries of the scalar potential. This provides a parameterisation in terms of IR degrees of freedom. We show that the moduli space consists of one orbit of a non-compact group $\mathcal{F}$ (the so-called *commutant* as it commutes with the gauge symmetry) and its closure, corresponding to the singular

orbits. The commutant group is a non-trivial non-compact extension of the compact flavour symmetry. Therefore the geometry of the moduli space is that of a Kähler coset space $\mathcal{F}/\mathcal{H}$, where $\mathcal{H}$ is the little group of the orbit.

Of course this structure is to be identified in both the dual theories, providing IR parameterisations along the lines of the usual approach to spontaneously broken symmetries. This would give access to a comparison of the classical Kähler potential⁽⁶⁾ of the dual theories, but there is a major obstacle in the fact that the parameterisations are not holomorphic. In spite of this failure, the possibility of identifying (in both senses) the geometry of the moduli space of dual theories is worthwhile presenting.

We shall carry out our analysis in the explicit context of the $SU(N_c)$ gauge theory with N_f flavours of quarks and antiquarks. The classical moduli space is not modified non-perturbatively when $N_f > N_c$. The construction of the duality between the electric and the magnetic theories has been obtained in the conformal range $\frac{3}{2}N_c < N_f < 3N_c$ in which the electric and magnetic theories are both asymptotically free. We denote by Q_α^i and $\tilde{Q}_\alpha^{\tilde{i}}$ the corresponding scalar fields. The Kähler potential is

$$\mathcal{K}(Q, Q^\dagger, \tilde{Q}, \tilde{Q}^\dagger) = \text{tr}(Q^\dagger Q + \tilde{Q}^\dagger \tilde{Q}) . \quad (7.26)$$

In order to identify this manifold, one has to determine the symmetries of the flat potential condition $V = 0$, namely the simultaneous zeros of the D^A 's and F_i 's. In the electric theory, due to the absence of superpotential, the vacua are only restricted to the D -flatness equations which are equivalent to the single relation:

$$(Q_\alpha^i)^* Q_\beta^i - \tilde{Q}_\alpha^{\tilde{i}} (\tilde{Q}_\beta^{\tilde{i}})^* = \lambda \delta_{\alpha\beta} , \quad (7.27)$$

where λ is a real number. Equation (7.27) explicitly exhibits an $SU(N_f, N_f) \times U(1)_B$ flavour invariance [14], acting on the $2N_f$ component vectors $(Q, \tilde{Q}^*)$, including a Cartan generator corresponding to the $U(1)_R$. Moreover there is an obvious invariance under dilation. Finally the symmetry of the moduli space is

$$\mathcal{F}_e = U(N_f, N_f) \times D . \quad (7.28)$$

Notice that holomorphy is not preserved by the action of $\mathcal{F}_e$. This is the main drawback of this approach where the supersymmetry is not explicit.

The moduli space corresponds to the following orbits of $\mathcal{F}_e$. There are two conjugated *baryonic orbits* corresponding to $\lambda > 0$ and $\lambda < 0$. They are called baryonic orbits as there is always a non-zero baryon on these branches of the moduli space. Each of them forms a single orbit under the symmetry group $\mathcal{F}_e$. The case $\lambda < 0$ is obtained from $\lambda > 0$ by exchanging the roles of Q and $\tilde{Q}^*$. Their common boundary $\lambda = 0$ is the *mesonic orbit*.

Therefore, the vacua manifold has been identified as a finite set of $SU(N_f, N_f) \times U(1)_B \times SU(N_c) \times D$ orbits. Each of these orbits can be represented by the quotient of the symmetry group (acting transitively on the orbit) by the stabilizer (or

⁽⁶⁾For different attempts see refs. [38, 39].

little group) of one point. Thus we have to identify the stabilizer of each representative point considered earlier to characterize each orbit.

For the *baryonic orbit*, the little group associated to the generic vacuum takes a simple structure of direct product

$$\mathcal{H}_e = SU(N_f - N_c, N_f) \times U(1) \times SU(N_c)_D , \quad (7.29)$$

where $SU(N_c)_D$ is the diagonal combination of the gauge $SU(N_c)_G$ and an $SU(N_c)$ subgroup of $U(N_f, N_f)$. The $U(1)$ is a combination of the $U(1)_B$ and an element of the Cartan subalgebra of $SU(N_f, N_f)$. Here the gauge group is completely broken; then after eliminating the spurious massless scalars associated to the Higgs mechanism, the real dimension of the coset $\mathcal{F}_e/\mathcal{H}_e$ is $4N_f N_c - 2N_c^2 + 2$.

In order to further characterize the geometry of the baryonic branch of moduli space, we first extract a flat subspace associated to the diagonal $Gl(1, \mathbf{C})$ factor in the coset and then introduce as coordinates the $N_c \times (2N_f - N_c)$ complex matrix z and define its transformation under $U(N_f, N_f)$ as

$$z \rightarrow (Az + B)(Cz + D)^{-1} . \quad (7.30)$$

The elements of the coset are then parameterized by the exponentials $e^{t(z)}$

$$\left(\begin{array}{c} Q \\ \tilde{Q}^* \end{array} \right)_{|D^A=0} = e^{t(z)} \left(\begin{array}{c} \mathbf{1}_{N_c} \\ 0 \end{array} \right) , \quad (7.31)$$

where

$$t(z) = \left(\begin{array}{cc} 0 & z \\ -\eta z^\dagger & 0 \end{array} \right) . \quad (7.32)$$

and η is the $(N_f - N_c, N_f)$ signature. There is only one $U(N_f, N_f)$ -invariant Kähler potential up to a Kähler transformation, namely: $\mathcal{K} = \text{tr} \ln(1 + z\eta z^\dagger)$. Nevertheless as $U(N_f, N_f)$ is not a symmetry of the theory (it does not preserve the kinetic terms), this is not the Kähler potential of the theory on the moduli space.

Let us now check the correspondence between the massless scalar fields and the moduli fields. As already discussed previously, since there is no superpotential and the whole gauge group is Higgsed around the vacuum, all the scalars are moduli with the exception of the $N_c^2 - 1$ complex scalars given by $T_{i\beta}^A Q_\beta^i$, associated to the $SU(N_c)$ massive vector multiplets. All the $4N_f N_c - 2N_c^2 + 2$ remaining scalar fields are massless, and their number coincides with the real dimension of G_e/H_e .

For the *mesonic orbit*, the pattern is more complicated since the little group associated to the generic vacuum now has a structure of semi-direct product, $\mathcal{H}_r \times SU(N_c - r)_G$, with:

$$\mathcal{H}_r = SU(N_f - r, N_f - r) \times U(1)^2 \times SU(r)_D \rtimes \tilde{H} , \quad (7.33)$$

where $SU(r)_D$ is the diagonal combination of the gauge and flavour $SU(r)$ subgroups, the two $U(1)$'s are combinations of the $U(1)_B$, an element of the Cartan subalgebra

of $SU(N_f, N_f)$ and an element of the Cartan subalgebra of $SU(N_c)_G$. The semi-direct factor $\tilde{H}$ is a nilpotent subgroup ⁽⁷⁾ with generators transforming as $(2(N_f - r), \bar{r}) \oplus (2(N_f - r), r)$ under $U(N_f - r, N_f - r) \times SU(r)_D$ and the Abelian subalgebra defined by their commutators, which transform as $(1, Adj \oplus 1)$.

The mesonic orbits are stratified by the index r . The stratum corresponding to $r = N_c$ is such that the gauge group is completely broken. In fact the mesonic orbits correspond to the “infinitely boosted” baryonic orbit. Hence the moduli space is the closure of the baryonic orbit, *i.e.* by applying appropriate boosts and a global dilation to the baryonic orbit one can converge to all the strata of the mesonic orbits. In the same way, by applying infinite boosts, we can go from a mesonic orbit with a stratification index r to a more singular one with lower index. Geometrically, these boosts correspond to the shrinking of some circles in the moduli space. From a physical point of view, the stratification index is related to the number of massless singlets of the theory. As the stratification index goes from r to $r - 1$, the corresponding orbits differ by a dimension $4(r - N_f) - 2$. In terms of the solutions of the syzygies, the baryonic orbit is equivalent to the open set characterized by $b \neq \tilde{b}$ while the mesonic orbits correspond to $b = \tilde{b}$. One retrieves the fact that the mesonic orbits form the natural boundary of the baryonic orbit.

We now turn to the analysis of the dual theory, or magnetic theory, described in the previous section. Notice in particular the non-perturbative superpotential (6.11), which restricts the solutions so that the meson field matrix has rank less than N_c . This is crucial in identifying the dual moduli spaces. The magnetic theory possesses the same anomaly-free global symmetries as the electric one $SU(N_f) \times SU(N_f) \times U(1)_B \times U(1)_R$, which transform the dual quark superfields as $(\tilde{N}_f, 1, N_c/(N_f - N_c), N_c/N_f)$, the antiquark ones as $(1, N_f, -N_c/(N_f - N_c), N_c/N_f)$ and the gauge-singlet superfields M as $(N_f, \tilde{N}_f, 0, 2(N_f - N_c)/N_f)$.

The classical moduli space of the magnetic theory is identified with the solutions of the F - and D -terms. A thorough analysis of these equations and their relationship with the electric moduli space has been given in [37]. In summary

$$\begin{aligned} q &= e^{t(u)} q_0 ; \\ \tilde{q} &= 0 ; \\ M &= (0 \ M_0) e^{t(u)^\dagger} \end{aligned} \tag{7.34}$$

where

$$t(u) = \begin{pmatrix} 0 & u \\ -u^\dagger & 0 \end{pmatrix} ,$$

with u a $(N_f - N_c) \times N_c$ matrix which parameterises the coset $\frac{U(N_f)}{U(N_f - N_c) \times U(N_c)}$. The following $N_c \times (2N_f - N_c)$ complex matrix can be constructed:

$$z_m = (u^T \ M_0^T) . \tag{7.35}$$

⁽⁷⁾Just as for the Lorentz group, the little groups of singular orbits of non compact groups have semi direct products with nilpotent subgroups.

Consider the homographic action of the group $U(N_f, N_f)$ on z_m , analogous to (7.30). The magnetic moduli space is invariant under this non-linear action of $U(N_f, N_f)$. Consider the image of the origin $z_m = (0, 0)$. As the action on z_m is the same as (7.30) on the electric baryonic orbit we know that the image of the origin is the whole baryonic orbit. Therefore the baryonic branches of the electric and magnetic moduli spaces are isomorphic as non-compact complex manifolds. The dualising map reads simply $z \leftrightarrow z_m$. This isomorphism is valid at the level of the classical moduli spaces. The non-perturbative part of the superpotential is necessary to study another branch of the dual theory. In the case $q = \tilde{q} = 0$ the mesons M is restricted by the superpotential (6.11) to have rank N_c .

The Kähler potential of the magnetic theory is not known. If the quark kinetic term is expected to become canonical in the UV region, there is no reason for the Kähler geometry of the meson fields to be trivial. One can try to use the isomorphism between the baryonic orbits of the dual theories in order to deduce the Kähler potential of the dual meson field in the UV region. However, we cannot use this twin parameterisation of the electric and magnetic fields in the classical part of the moduli space to deduce the magnetic Kähler potential from the electric one (7.26). Indeed, the induced metric cannot be straightforwardly calculated from (7.31) and (7.32) because this is not an analytic transformation of variables consistent with the Kählerian geometry. Still, it provides a link that we hope to be able to exploit in the future.

8 Conclusions

We have argued that the 't Hooft matching of the anomalies, when the normal space to the manifold defined by the syzygies is a real representation of the flavour unbroken subgroup, is equivalent to the existence of a polynomial superpotential that has been put forward to characterize the confinement in $N = 1$ supersymmetric gauge theories. This allows a complete classification of the confining theories for $\mu \geq \mu_{adj}$. Non-confining theories, with $3\mu_{adj} > \mu > \mu_{adj} + 2$, are expected to have dual(s). Some of the properties concerning both confinement and duality discussed in this paper have been illustrated by the analysis of two series of theories, $SU(N_c)$ and $Spin(7)$, with a descent relation between the successive decoupling of flavours.

For all confining theories the IR superpotentials for the gauge invariant composites are completely fixed by the flavour symmetries. We have shown, in theories characterized by non-trivial syzygies, that the following additional requirements are strongly related: (i) the matching of the anomalies, (ii) polynomiality of the superpotential, and (iii) the equations of motion leading to the syzygies. We have stressed the equivalence of (i) and (ii) by constructing a superpotential in the case of a normal space in a real representation of the residual flavour group, and we have partially proved the equivalence with (iii) (we were unable to prove that the syzygies are the only solutions of the equations of motion). Of course, one would like to have also a proof of the conjecture that the normal space to the zeros of the syzygies are not in an anomaly free complex representation of the unbroken flavour subgroup.

In the case of dual theories, we have checked, with the aid of explicit examples, the consistency between duality and syzygies. This property is verified only if non-perturbative superpotentials are included.

Finally we have discussed how a non-compact hidden symmetry of the vacua characterizes the classical moduli space geometry, but the non-analyticity of the action of the non-compact hidden group makes it difficult to gain further insight into the Kähler geometry of the dual theories.

Acknowledgements

We would like to thank the anonymous referee for his constructive remarks that have contributed to the improvement of section 4.

References

- [1] N. Seiberg, Phys. Rev. D49 (1994) 6857, hep-th/9402044.
- [2] N. Seiberg, Nucl. Phys. B435 (1995) 129, hep-th/9411149.
- [3] K. Intriligator and N. Seiberg, Nucl. Phys. Proc. Suppl. 45BC (1996) 1, hep-th/9509066.
- [4] M.E. Peskin, (1997), hep-th/9702094.
- [5] M. Shifman, Prog. Part. Nucl. Phys. 39 (1997) 1, hep-th/9704114.
- [6] J.H. Brodie and M.J. Strassler, Nucl. Phys. B524 (1998) 224, hep-th/9611197.
- [7] S. Elitzur, A. Giveon and D. Kutasov, Phys. Lett. B400 (1997) 269, hep-th/9702014.
- [8] M.A. Shifman and A.I. Vainshtein, Nucl. Phys. B277 (1986) 456.
- [9] D. Amati, K. Konishi, Y. Meurice, G.C. Rossi and G. Veneziano, Phys. Rept. 162 (1988) 169.
- [10] M.A. Shifman and A.I. Vainshtein, Nucl. Phys. B359 (1991) 571.
- [11] N. Seiberg, Phys. Lett. B318 (1993) 469, hep-ph/9309335.
- [12] G. 't Hooft et al., editors, Naturalness, chiral symmetry breaking and spontaneous chiral symmetry breaking, NATO advanced study, Cargese, France, Plenum, 1980.
- [13] G. Kempf and L. Ness, Lecture Notes in Mathematics 732 (1978).
- [14] F. Buccella, J.P. Derendinger, S. Ferrara and C.A. Savoy, Phys. Lett. 115B (1982) 375.

- [15] C. Procesi and G.W. Schwarz, Phys. Lett. 161B (1985) 117.
- [16] R. Gatto and G. Sartori, Phys. Lett. 157B (1985) 389.
- [17] M.A. Luty and I. Washington Taylor, Phys. Rev. D53 (1996) 3399, hep-th/9506098.
- [18] C. Csáki, (1998), hep-th/9807222.
- [19] G. Dotti and A.V. Manohar, Nucl. Phys. B518 (1998) 575, hep-th/9710024.
- [20] G. Dotti, A.V. Manohar and W. Skiba, Nucl. Phys. B531 (1998) 507, hep-th/9803087.
- [21] G. Dotti and A.V. Manohar, Phys. Rev. Lett. 80 (1998) 2758, hep-th/9712010.
- [22] C. Csáki, M. Schmaltz and W. Skiba, Phys. Rev. D55 (1997) 7840, hep-th/9612207.
- [23] B. Grinstein and D.R. Nolte, Phys. Rev. D57 (1998) 6471, hep-th/9710001.
- [24] B. Grinstein and D.R. Nolte, Phys. Rev. D58 (1998) 5012, hep-th/9803139.
- [25] C. Csáki, M. Schmaltz and W. Skiba, Phys. Rev. Lett. 78 (1997) 799, hep-th/9610139.
- [26] G. Schwarz, Inv. Math. 49 (1978) 167.
- [27] O. Adamovich and E. Golovina, Sel. Math. Sov. 3 (1983) 183.
- [28] M. Abud and G. Sartori, Phys. Lett. 104B (1981) 147.
- [29] I. Affleck, M. Dine and N. Seiberg, Nucl. Phys. B241 (1984) 493.
- [30] O. Aharony, J. Sonnenschein and S. Yankielowicz, Nucl. Phys. B449 (1995) 509, hep-th/9504113.
- [31] W. Skiba, (1998), hep-th/9806079.
- [32] R. Bott and L. W. Tu, *Differential Forms in Algebraic topology* GTM 92 Springer-Verlag.
- [33] E. Poppitz and S.P. Trivedi, Phys. Lett. B365 (1996) 125, hep-th/9507169.
- [34] P. Cho, Phys. Rev. D57 (1998) 5214, hep-th/9712116.
- [35] P. Pouliot, Phys. Lett. B359 (1995) 108, hep-th/9507018.
- [36] O. Aharony, Phys. Lett. B351 (1995) 220, hep-th/9502013.
- [37] P. Brax, C. Grojean and C.A. Savoy, (1997), hep-th/9707226.

[38] E. Poppitz and L. Randall, Phys. Lett. B336 (1994) 402, hep-th/9407185.

[39] P. Cho, (1998), hep-th/9806142.

Publication V

Super Fivebranes near the
boundary of $AdS_7 \times S^4$

Saclay T99/028
hep-ph/9903164

Super Fivebranes near the boundary of $AdS_7 \times S^4$

C. Grojean^a and J. Mourad^{b,c}

^a Service de Physique Théorique, CEA-Saclay
F-91191 Gif/Yvette Cedex, France

^b Laboratoire de Physique Théorique et Modélisation,
Université de Cergy-Pontoise
Site Saint-Martin, F-95032 Cergy-Pontoise, France

^c Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies,
Université de Paris-Sud, Bât. 211, F-91405 Orsay Cedex, France

Abstract

We determine, to the first order in the radius of Anti-de-Sitter, the realisation of the $OSp(6,2|2)$ superconformal algebra on vector fields. We then calculate, to this order, the superspace metric describing the background of $AdS_7 \times S^4$. The coordinates we work with are adapted to a 6+5 splitting of the eleven dimensional superspace. Finally, we deduce in a manifestly supersymmetric form the equations governing the dynamics of the fivebrane near the boundary of AdS_7 .

PACS: 11.10.K, 11.25.H, 11.30.P.

1 Introduction

The relation between Anti-de-Sitter space (AdS) and superconformal field theories defined on its boundary has been a subject of interest for a relatively long time [1–3] (see [4] for a review). The AdS/CFT conjecture [5–7] is the latest proposed such relation and has, if correct, far reaching consequences: it allows, in principle, a non-perturbative definition of string or M-theory on AdS backgrounds. The conjecture states [5], for example, that M-theory on $AdS_7 \times S^4$ is equivalent to a six-dimensional superconformal (2,0) field theory [8] defined on the boundary of AdS . Little is known about M-theory besides that its low energy approximation is given by eleven-dimensional supergravity, its compactification on a circle leads to type IIA superstring [9] and that it contains membranes [10] and fivebranes [11–15]. The worldvolume action of super p-branes and/or their equations of motion are formulated in a superspace background. So the study of p-branes in AdS space necessitates the determination of the superbackground. The bosonic $SO(6,2) \times SO(5)$ symmetry of $AdS_7 \times S^4$ is promoted, when one considers the fermionic coordinates in addition to the bosonic ones, to a $Osp(6,2|2)$ superconformal symmetry. The expression of the moving basis and the rest of the background depend on the eleven-dimensional supercoordinates one chooses to work with or equivalently on the realisation of the isometries as super vector fields in superspace. Such a realisation was found in [16–19] using the coset approach [20]. With a particular choice of super coordinates, this approach leads to closed expressions for the isometries of $AdS_7 \times S^4$ as well as the moving basis. However these coordinates are not particularly adapted to a 6+5 splitting of eleven dimensional spacetime, the six dimensions representing the fivebrane’s worldvolume and the five remaining dimensions the transverse dimensions. The aim of this paper is to propose such coordinates and use the resulting isometries and background to deduce in a manifestly supersymmetric form the equations of motion of a fivebrane near the boundary of AdS .

In order to study the super fivebrane in the $AdS_7 \times S^4$ background there exists a privileged system of coordinates which can be seen as follows: the fivebrane super worldvolume is spanned by the (2,0) six-dimensional supercoordinates (x^μ, θ^α) where $\mu = 0, \dots, 5$ and α is a spin index of the $(4_+, 4)$ spinorial representation of $SO(5,1) \times SO(5)$. The transverse fluctuations of the fivebrane are described by a (2,0) multiplet which comprises five scalars ϕ^i in the vectorial representation of $SO(5)$ and a symplectic-Weyl-Majorana fermion $\psi^{\alpha'}$ in the $(4_-, 4)$ spinorial representation of $SO(5,1) \times SO(5)$. A convenient set of super-coordinates to parametrise the eleven-dimensional superspace is thus given by $(x^\mu, \phi^i, \theta^\alpha, \psi^{\alpha'})$. The (2,0) super Poincaré six-dimensional group is a subgroup of $Osp(6,2|2)$ and so it has natural realisation on the six-dimensional super worldvolume of the fivebrane. In this paper, we shall use these coordinates to parametrise the eleven-dimensional superspace. This will allow us to find, in a manifestly supersymmetric way, the interacting (2,0) theory describing the fivebrane near the boundary of AdS_7 . In order to do so, we determine first the realisation of the superconformal algebra on vector fields and the invariant metric.

In section 2, we briefly review the AdS_7 metric and how it arises in eleven-dimensional supergravity. In section 3, we determine from [21, 22] a realisation of the superconfor-

mal algebra on vector fields. This realisation does not provide us with the Killing vector fields, as we show in section 4, but will be the zero order approximation to it. In section 5, we look for a modification of the realisation found in section 3. We demand that the action of the super-Poincaré group be not modified and we show, in section 6, that the vector fields have an expansion in the radius, R , of AdS . In this section we also determine explicitly the first order expansion which we use in section 7 to construct the invariant metric. In section 8, relying on the doubly supersymmetric formalism of the superembedding approach [11], we determine from the invariant metric the equations governing the dynamics of the fivebrane to the first order in R ; this constitutes a good approximation near the boundary of AdS . Due to our choice of coordinates, we get manifestly worldvolume superconformal equations of motions. At order zero in R the equations, that is at the boundary of AdS , the equations reduce to the doubleton equations [2] and at the next order we get interaction terms in the (2,0) theory. The equations we get are the supersymmetric version of the bosonic ones found for radial coordinates in [5,23] and all bosonic degrees of freedom in [24]. Our conventions and some of the technical tools are collected in Appendix A; the superconformal $OSp(6,2|2)$ algebra is presented in Appendix B.

2 AdS and near horizon geometry

The $d+1$ dimensional Anti-de-Sitter manifold is conveniently described as the submanifold of flat $d+2$ dimensional flat manifold with signature $(-, -, +, \dots, +)$ embedded by the equation

$$\phi\chi + \eta_{\mu\nu}X^\mu X^\nu = -R^2, \quad (2.1)$$

where $\eta_{\mu\nu}$ is a d -dimensional metric with signature $(-, +, \dots, +)$ and R is the radius of AdS_{d+1} spacetime. The boundary of AdS is obtained by considering points at infinity subject to (2.1). More precisely define the primed coordinates by $\phi = \lambda\phi'$, $\chi' = \lambda\chi$, and $X^\mu = \lambda X'^\mu$ and take the limit $\lambda \rightarrow \infty$ then the boundary is described by the surface

$$\phi'\chi' + \eta_{\mu\nu}X'^\mu X'^\nu = 0, \quad (2.2)$$

subject to the equivalence relation $(\phi', \chi', X'^\mu) \equiv s(\phi', \chi', X'^\mu)$ where s is any real non zero number. The surface (2.2) is a compactification of a d -dimensional Minkowski spacetime: when $\phi' \neq 0$ the coordinates X'^μ span $\mathbb{R}^d$ which when added to the $\phi' = 0$ part provides the compactification, $S^1 \times S^{d-2}$, whose universal cover is $\mathbb{R} \times S^{d-1}$. Convenient coordinates of AdS are given by ϕ and $x^\mu = RX'^\mu/\phi$. These are well defined if $\phi \neq 0$ and x^μ remain finite in the scaling limit $\lambda \rightarrow \infty$. So the boundary at $\phi = \infty$ can be parametrised by x^μ . In these coordinates the AdS metric takes the form

$$g = \frac{\phi^2}{R^2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{R^2}{\phi^2} d\phi d\phi. \quad (2.3)$$

This metric has an apparent singularity at $\phi = 0$, however as noted above, this is merely a coordinate singularity. Note that the $\phi = 0$ part of AdS_{d+1} is given by $\mathbb{R} \times AdS_{d-1}^E$ where AdS^E is Eucliden Anti-de-Sitter which is topologically a ball and its boundary is the sphere S^{d-2} . In the following, we shall see that ϕ has a natural interpretation as the radial distance from a fivebrane source and so the fivebrane is at $\phi = 0$. Note also that by a change of coordinates $\phi \rightarrow \beta\phi^\alpha$ the metric becomes $\beta^2\phi^{2\alpha}/R^2 dx dx + \alpha^2 R^2 d\phi d\phi/\phi^2$ which when $\alpha = 1/2$ and $\beta^2/R^2 = 2/R$ will be the form we shall use in the following.

The eleven-dimensional fivebrane is a solitonic solution to the eleven-dimensional supergravity low energy equations of motion which preserves sixteen supersymmetries. The solution is given by

$$g_{p=5} = H^{-1/3} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + H^{2/3} \eta_{ij} d\phi^i d\phi^j, \quad G_{i_1 \dots i_4} = \epsilon_{i_1 \dots i_5} \partial^{i_5} H, \quad (2.4)$$

where x^μ , $\mu = 0, \dots, 5$ are the coordinates along the fivebrane and ϕ^i are the transverse coordinates. The function H entering the solution is radial and harmonic, $\eta^{ij} \partial_i \partial_j H = 0$, and so it reads

$$H = c + \frac{R^3}{8\phi^3}, \quad (2.5)$$

where $\phi^2 = \eta_{ij} \phi^i \phi^j$, c is a constant and

$$R^3 = N l_p^3, \quad (2.6)$$

where l_p is the eleven-dimensional Planck length and N is the charge of the field strength G or the number of fivebranes.

If one insists on having an asymptotically flat eleven dimensional spacetime then one has to impose that c is not zero and one can set it equal to one. However, another solution is to set $c = 0$. This does not change the charge of the G field strength and preserves one-half of the eleven-dimensional supersymmetries. In the latter case, $c = 0$, the metric takes the form of $AdS_7 \times S^4$. The radial coordinate ϕ combines with the worldvolume coordinates x^μ to form AdS_7 . In fact in this case, the number of supersymmetries is greater then sixteen since the six-dimensional Poincaré invariance of the general ($c \neq 0$) case is transformed to a conformal invariance under the group $SO(6, 2)$ which when combined with the sixteen supersymmetries gives sixteen other special conformal supersymmetries. Another way to get the AdS spacetime is to consider the decoupling limit $l_p \rightarrow 0$ and ϕ/l_p^3 finite ⁽¹⁾ so that $\phi \ll R$ and one can neglect the constant c in H . It is this limit that suggested the relation between the AdS_{d+1} bulk theory and the worldvolume d -dimensional effective theory [5].

More generally, the AdS/CFT conjecture states that M-theory in $AdS_7 \times S^4$ is holographically equivalent to the six-dimensional $(2, 0)$ theory at the boundary of AdS [7]. In the following, we shall show that it is possible to determine as an expansion in R^3/ϕ the metric and isometries of the superbackground whose bosonic limit is $AdS_7 \times S^4$. We shall calculate explicitly the first order terms which give the correction to the free dynamics of the fivebrane near the (part of the) boundary at $\phi = \infty$.

⁽¹⁾this guarantees that the tension of the string obtained from the open membrane stretched between the origin and ϕ is finite

3 A realisation of $Osp(6, 2|2)$ on vector fields

In this section we determine, from the free six-dimensional $(2,0)$ multiplet, a realisation of $Osp(6, 2|2)$ on eleven-dimensional spacetime.

The six-dimensional $(2,0)$ superspace is spanned by the coordinates (x^μ, θ^α) where $\mu = 0, \dots, 5$ and α is a spinorial index in the $(4_+, 4)$ of $SO(5, 1) \times SO(5)$, $SO(5)$ being the R-symmetry group. The “flat” superconformal transformations are defined as in ref. [21] by the requirement that the flat six-dimensional supersymmetric metric

$$g = \eta_{\mu\nu} E^\mu \otimes E^\nu, \quad (3.1)$$

where $E^\mu = dx^\mu - \bar{\theta} \Gamma^\mu d\theta$, transforms by a scale factor, that is

$$\delta g = L_{\xi_0} g = -\alpha g, \quad (3.2)$$

where α is the scale factor. The realisation of the transformations in superspace was determined and is given by $\xi_0 = \xi_0^\mu E_\mu + \xi_0^\alpha E_\alpha$. Here, $E_\mu = \partial_\mu$ and $E_\alpha = D_\alpha = \partial_\alpha - (\bar{\theta} \Gamma^\mu)_\alpha \partial_\mu$ are the supersymmetric basis of vectors. The components of ξ_0 are determined in terms of ζ^μ , ζ^α and ζ_{ij} which are defined by

$$\zeta_\mu = a_\mu + a_{[\mu\nu]} x^\nu + \lambda x_\mu + (x^2 \eta_{\mu\nu} - 2x_\mu x_\nu) k^\nu, \quad (3.3)$$

and

$$\zeta^\beta = \epsilon^\beta + x_\mu (\Gamma^\mu)^\beta{}_\alpha \eta^{\alpha'}, \quad \zeta_{ij} = \frac{\epsilon_{ij}}{4}. \quad (3.4)$$

The parameters a_μ , $a_{\mu\nu}$, λ , k_μ , ϵ_{ij} , $\epsilon^{\hat{\alpha}}$ and η^α are those of infinitesimal translations, Lorentz transformations, dilatation, special conformal transformations, rotations, supersymmetries and fermionic special conformal transformations. The six-dimensional super Killing vector fields are given by [21]

$$\begin{aligned} \xi_0^\mu &= \zeta^\mu - 2\bar{\theta} \Gamma^\mu \zeta + \bar{\theta} \left(\Gamma^{\mu ij} \zeta_{ij} + \frac{1}{4} \Gamma^{\mu\mu_1\mu_2} \partial_{\mu_1} \zeta_{\mu_2} \right) \theta \\ &\quad + \frac{1}{2} \bar{\theta} \Gamma^{\mu\mu_1\mu_2} \theta \bar{\theta} \Gamma_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \zeta - \frac{1}{64} \bar{\theta} \Gamma^{\mu\mu_1\mu_2} \theta \bar{\theta} \Gamma_{\mu_1\mu_2\mu_3} \theta \partial_\rho \partial^\rho \zeta^{\mu_3}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

and

$$\begin{aligned} \xi_0^\alpha &= \left[\zeta - \Gamma_{ij} \theta \zeta^{ij} + \frac{1}{12} \theta \partial_\mu \zeta^\mu - \frac{1}{4} \Gamma^{\mu\nu} \theta \partial_\mu \zeta_\nu \right. \\ &\quad - \frac{1}{6} \theta \bar{\theta} \Gamma^\mu \partial_\mu \zeta - \frac{1}{2} \Gamma^{\mu\nu} \theta \bar{\theta} \Gamma_\mu \partial_\nu \zeta - \frac{1}{24} \Gamma_{\mu_1\mu_2} \partial_{\mu_3} \zeta \bar{\theta} \Gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3} \theta \\ &\quad \left. + \frac{1}{32} \Gamma^{\mu_1\mu_2} \theta \bar{\theta} \Gamma_{\mu_1\mu_2\mu_3} \theta \partial_\sigma \partial^\sigma \zeta^{\mu_3} \right]^\alpha. \end{aligned} \quad (3.6)$$

The scale factor, α , is given by

$$\alpha = \frac{1}{3} \partial_\mu \zeta^\mu - \frac{2}{3} \bar{\theta} \Gamma^\sigma \partial_\sigma \zeta, \quad (3.7)$$

which reads explicitly

$$\alpha = 2\lambda - 4x^\mu k_\mu - 4\bar{\theta}\eta. \quad (3.8)$$

The (2,0) on-shell multiplet is described by a superfield Φ^i in the vectorial representation of $SO(5)$ subject to the constraint [25]

$$D_\alpha \Phi^i = \frac{1}{4}(\Gamma^i_j)_\alpha^\beta D_\beta \Phi^j. \quad (3.9)$$

It has been shown in [21] that (3.9) is invariant under the superconformal group provided the scalar superfield Φ^i transforms as

$$\delta_0 \Phi^i = \xi_0(\Phi^i) + \Lambda^i_j(\xi) \Phi^j, \quad (3.10)$$

where

$$\Lambda_{ij}(\xi) = 4\zeta_{ij} - \frac{2}{3}\bar{\theta}\Gamma_i\Gamma_j\Gamma^\sigma\partial_\sigma\zeta + \frac{1}{4}\bar{\theta}\Gamma_\nu\Gamma_{ij}\theta\partial_\sigma\partial^\sigma\zeta^\nu + \frac{1}{3}\eta_{ij}\partial_\mu\zeta^\mu. \quad (3.11)$$

From (3.10) and (3.11) we get

$$\delta_0 \Phi = \xi_0(\Phi) + \alpha\Phi, \quad (3.12)$$

where $\Phi^2 = \Phi^i\Phi_i$. The fermionic superfield whose $\theta = 0$ component, $\psi^{\alpha'}$ is the superpartner of ϕ^i , the $\theta = 0$ component of Φ^i , is $\Psi = 1/5\Gamma_i D\Phi^i$. Under a superconformal transformation, it transforms as

$$\delta\Psi = \xi(\Psi) + \alpha\Psi + \Phi^j\Gamma_j D\alpha + D\xi\Psi, \quad (3.13)$$

where $D\xi$ denotes the matrix $D_\alpha\xi^\beta$. We can construct a realisation of the superconformal group in eleven-dimensional superspace as follows. We consider $x^{\hat{\mu}} = (x^\mu, \phi^i)$ to be the even coordinates and $\theta^{\hat{\alpha}} = (\theta^\alpha, \psi^{\alpha'})$ to be the odd coordinates. The two spinors of $SO(5,1) \times SO(5)$ of opposite six-dimensional chirality combine to form one Majorana spinor of $SO(10,1)$. The vector fields

$$\xi_0 = \xi_0^\mu\partial_\mu + \xi_0^\alpha D_\alpha - \Lambda^i_j\phi^j\partial_i - \left((\alpha + \phi^j\Gamma_j D\alpha + D\xi)\psi\right)^{\alpha'}\partial_{\alpha'}, \quad (3.14)$$

where $\partial_i = \partial/\partial\phi^i$ and $\partial_{\alpha'} = \partial/\partial\psi^{\alpha'}$, provide a realisation of the superconformal algebra on eleven dimensional superspace. Note that ϕ^i and $\psi^{\alpha'}$ are no longer fields but become coordinates in the eleven-dimensional superspace.

4 Modified bosonic realisation

In this section, we show that the realisation found in the previous section does not provide us with the super Killing vectors of $AdS^7 \times S^4$. In order to see that, it suffices to examine the bosonic part of the metric and the transformations.

The bosonic metric of $AdS_7 \times S^4$ is given by

$$g = \frac{2\phi}{R} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{R^2}{4\phi^2} \eta_{ij} d\phi^i d\phi^j, \quad (4.1)$$

where $\phi^2 = \phi^i \phi_i$. This metric is not invariant under the transformations generated by the bosonic part of ξ_0 constructed above. In fact we have

$$\delta_0(\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu) = -\alpha \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (4.2)$$

and

$$\delta_0 \phi = \alpha \phi, \quad (4.3)$$

so the first piece of the metric is invariant. However the second part is not invariant and its variation is given by

$$\delta_0 \left(\frac{R^2}{4\phi^2} \eta_{ij} d\phi^i d\phi^j \right) = \frac{R^2}{4\phi^2} \phi^i (d\alpha d\phi^j + d\phi^j d\alpha) \eta_{ij} \quad (4.4)$$

This variation can be cancelled by modifying the transformation of x^μ by

$$\delta x^\mu = \delta_0 x^\mu + \frac{R^3}{8\phi} \partial^\mu \alpha. \quad (4.5)$$

The modified transformations, as will be seen in the next section, still close on the superconformal algebra. In order to extend the bosonic metric to the superconformal case we have to modify the realisation found in the previous section of the superconformal algebra on eleven dimensional superspace. This will be the goal of the next section.

5 Modified superconformal realisations

Let g be an element of the superconformal algebra which is presented in Appendix B, the vector field which gives a realisation of $Sp(6, 2|2)$ must verify

$$[\xi(g), \xi(g')] = \xi([g, g']), \quad (5.1)$$

In terms of the generators, $\xi(g)$ is of the form

$$\xi = a^\mu P_\mu + \epsilon^\alpha Q_\alpha + \frac{1}{2} a^{\mu\nu} M_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \epsilon^{ij} J_{ij} + k^\mu K_\mu + \eta^{\alpha'} S_{\alpha'} + \lambda D, \quad (5.2)$$

We write ξ as $\xi_0 + \Delta\xi$, where ξ_0 is the previously determined solution to the closure relations. So $\Delta\xi$ must be a solution of

$$[\Delta\xi(g), \xi_0(g')] + [\xi_0(g), \Delta\xi(g')] + [\Delta\xi(g), \Delta\xi(g')] = \Delta\xi([g, g']). \quad (5.3)$$

We require that (x^μ, θ^α) span the six-dimensional superspace so that translations and supersymmetric transformations are unchanged

$$\Delta P_\mu = \Delta Q_\alpha = 0, \quad (5.4)$$

and we also require that the Lorentz and R -group $SO(5)$ realisations be unchanged

$$\Delta M_{\mu\nu} = \Delta J_{ij} = 0. \quad (5.5)$$

The weights of the different coordinates remain the same so

$$\Delta D = 0. \quad (5.6)$$

So the modification concerns only $\Delta K_\mu \equiv X_\mu$ and $\Delta S_\alpha \equiv X_\alpha$. These have to obey the following constraints which are the closure relations (5.1) expressed in terms of the generators

$$\begin{aligned} [P_\mu, X_\alpha] &= 0, \quad [P_\mu, X_\nu] = 0, \\ \{X_\alpha, Q_\beta\} &= 0, \quad [X_\mu, Q_\alpha] = -(\Gamma_\mu)_\alpha{}^\beta X_\beta, \\ [X_\mu, K_\nu] + [K_\mu, X_\nu] + [X_\mu, X_\nu] &= 0, \\ [X_\alpha, S_\beta] + [S_\alpha, X_\beta] + \{X_\alpha, X_\beta\} &= 2(\Gamma^\mu)_{\alpha\beta} X_\mu. \end{aligned} \quad (5.7)$$

The other commutation relations give the Lorentz, $SO(5)$ and dilatation transformations of X_μ and X_α . The first two equations imply that the components of X_μ and X_α are independent of x in the $(\partial_\mu, D_\alpha, \partial_i, \partial_{\alpha'})$ basis. Similarly the next two equations imply that the components of X_α are independent of θ and that those of X_μ are of the form

$$X_\mu = Y_\mu + \theta^\alpha (\Gamma_\mu)_\alpha{}^\beta X_\beta, \quad (5.8)$$

where the components of Y_μ are independent of θ . The last equation turns out, after the use of Jacobi identities, to be a consequence of the fifth relation. Finally we end with the equation

$$[X_\mu, K_\nu] + [K_\mu, X_\nu] + [X_\mu, X_\nu] = 0, \quad (5.9)$$

where the components of X_μ are independent of x and depend linearly on θ as in equation (5.8).

Let us examine first the bosonic case, where θ and ψ are absent. The most general form of X_μ whose components are independent of x and have the correct transformations under $SO(5,1)$, $SO(5)$ and dilatations is given by

$$X_\mu^{(b)} = a \frac{1}{\phi} \partial_\mu, \quad (5.10)$$

where a is a constant. Note that there are no components on ∂_i because there are no Lorentz vectors independent of x . This X_μ satisfies $[X_\mu, X_\nu] = 0$ and a non-trivial calculation gives, for any value of a ,

$$[X_\mu^{(b)}, K_\nu] + [K_\mu, X_\nu^{(b)}] = 0. \quad (5.11)$$

So in the bosonic case we have a one parameter deformation of the realisation of the conformal Lie algebra on space-time.

In the supersymmetric case, the most general expression for X_μ is much more complicated, it has an expansion in powers of ψ which a priori stops at sixteen ψ 's. However, this power series in ψ is correlated, as will be shown in the next section, with the dependence on R and ϕ . This will help simplifying the resulting expressions.

6 Expansion in R

Define ϕ'^i by $\phi^i = R^3 \phi'^i$ then the bosonic metric, expressed in the new coordinates, when divided by R^2 does not depend on R . From the expression of ξ_0 , we deduce that if we define $\psi' = R^{-3} \psi$ then ξ_0 , when expressed in terms of the primed quantities is independent of R . Since the bosonic metric has only an overall scale dependence on R the full ξ , which are the Killing vectors of the full superconformal metric, are independent of R when expressed in terms of the primed quantities.

Let us first consider Y_μ , it has an expansion in ψ' of the form

$$Y_\mu = \sum_n \left(\frac{y_{(n)\mu}^\nu(\psi')}{\phi'^{1+5n/4}} \partial_\nu + \frac{y_{(n)\mu}^\alpha(\psi')}{\phi'^{3/4+5n/4}} D_\alpha + \frac{y_{(n)\mu}^i(\psi')}{\phi'^{-1/2+5n/4}} \partial'_i + \frac{y_{(n)\mu}^{\alpha'}(\psi')}{\phi'^{-3/4+5n/4}} \partial'_{\alpha'} \right), \quad (6.1)$$

where the $y_{(n)\mu}^M(\psi')$ are homogeneous polynomials in ψ' of degree n . The powers of ϕ in the denominators are determined from the behaviour under dilatations. When expressed in terms of unprimed quantities we get

$$Y_\mu = \sum_n \left(\mathcal{R}^{4+n} \frac{y_{(n)\mu}^\nu(\psi)}{\phi^{1+5n/4}} \partial_\nu + \mathcal{R}^{3+n} \frac{y_{(n)\mu}^\alpha(\psi)}{\phi^{3/4+5n/4}} D_\alpha + \mathcal{R}^{2+n} \frac{y_{(n)\mu}^i(\psi)}{\phi^{-1/2+5n/4}} \partial_i + \mathcal{R}^{1+n} \frac{y_{(n)\mu}^{\alpha'}(\psi)}{\phi^{-3/4+5n/4}} \partial_{\alpha'} \right), \quad (6.2)$$

where $\mathcal{R} = R^{3/4}$. Lorentz invariance constrains the degrees of polynomials appearing in (6.2). For example, all terms quadratic in ψ are of the form $\bar{\psi} \Gamma^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \psi$, $\bar{\psi} \Gamma^{\mu i j} \psi$, $\bar{\psi} \Gamma^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 i} \psi$, so they all have an odd number of six-dimensional vector indices and thus cannot contribute to Y_μ^ν . Using this kind of arguments one can show that if a polynomial of degree n contributes to one component then the other polynomials appearing in the component have degrees $n + 4p$. The lowest degree polynomials appearing in each

component are given by

$$\begin{aligned}
y_{(0)\mu}^\nu &= a_1 \frac{\eta_\mu^\nu}{\phi} \\
y_{(1)\mu}^\alpha &= a_2 (\Gamma_{\mu i} \psi)^\alpha \frac{\phi^i}{\phi^3} + a_3 (\Gamma_\mu \psi)^\alpha \frac{1}{\phi^2} \\
y_{(2)\mu}^i &= a_4 \bar{\psi} \Gamma_\mu^{ij} \psi \frac{\phi_j}{\phi^3} \\
y_{(3)\mu}^{\alpha'} &= a_5 (\Gamma^{\nu_1 \nu_2} \psi)^{\alpha'} (\bar{\psi} \Gamma_{\mu \nu_1 \nu_2} \psi) \frac{1}{\phi^3} + a_6 (\Gamma^{\nu_1 \nu_2 i} \psi)^{\alpha'} (\bar{\psi} \Gamma_{\mu \nu_1 \nu_2} \psi) \frac{\phi_i}{\phi^4} \\
&\quad + a_7 (\Gamma^{\nu_1 \nu_2} \psi)^{\alpha'} (\bar{\psi} \Gamma_{\mu \nu_1 \nu_2 i} \psi) \frac{\phi^i}{\phi^4} + a_8 (\Gamma^{\nu_1 \nu_2 i} \psi)^{\alpha'} (\bar{\psi} \Gamma_{\mu \nu_1 \nu_2 j} \psi) \frac{\phi_i \phi^j}{\phi^5},
\end{aligned} \tag{6.3}$$

where a_i , $i = 1, \dots, 8$ are arbitrary constants. We have used Fierz rearrangements to eliminate some of the terms with three powers of ψ (see Appendix A). Note that the leading power of r in (6.2) for all the components is $\mathcal{R}^4$; from (6.2) and (6.3) we see that the general form of Y_μ is given by

$$Y_\mu = \sum_{p=0}^4 \mathcal{R}^{4(p+1)} Y_\mu^{(p)}, \tag{6.4}$$

with

$$\begin{aligned}
Y_\mu^{(p)} &= y_{(4p)\mu}^\nu \frac{1}{(\phi)^{1+5p}} \partial_\nu + y_{(1+4p)\mu}^\alpha \frac{1}{(\phi)^{2+5p}} D_\alpha \\
&\quad + y_{(2+4p)\mu}^i \frac{1}{(\phi)^{2+5p}} \partial_i + y_{(3+4p)\mu}^{\alpha'} \frac{1}{(\phi)^{3+5p}} \partial_{\alpha'}.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Similarly, one can make an analogous analysis for X_α . Here, the lowest degree polynomial contributing to X_α are given by

$$\begin{aligned}
x_{(1)\alpha}^\mu &= b_1 (\Gamma^\mu \psi)_\alpha \frac{1}{\phi^2} + b_2 (\Gamma^{\mu i} \psi)_\alpha \frac{\phi_i}{\phi^3} \\
x_{(2)\alpha}^\beta &= b_3 (\Gamma_{\nu i j})_\alpha^\beta (\bar{\psi} \Gamma^{\nu i j} \psi) \frac{1}{\phi^3} + b_4 (\Gamma_{\nu i j})_\alpha^\beta (\bar{\psi} \Gamma^{\nu i k} \psi) \frac{\phi^j \phi_k}{\phi^5} \\
&\quad + b_5 (\Gamma_{\nu i})_\alpha^\beta (\bar{\psi} \Gamma^{\nu i j} \psi) \frac{\phi_j}{\phi^4} + b_6 (\Gamma_{\nu i j k})_\alpha^\beta (\bar{\psi} \Gamma^{\nu i j} \psi) \frac{\phi^k}{\phi^4} \\
x_{(3)\alpha}^i &= b_7 (\Gamma_\nu \psi)_\alpha (\bar{\psi} \Gamma^{\nu i j} \psi) \frac{\phi_j}{\phi^4} + b_8 (\Gamma_{\nu j} \psi)_\alpha (\bar{\psi} \Gamma^{\nu i k} \psi) \frac{\phi^j \phi_k}{\phi^5} \\
x_{(0)\alpha}^{\alpha'} &= b_9 \delta_\alpha^{\alpha'} \phi + b_{10} (\Gamma_i)_\alpha^{\alpha'} \phi^i.
\end{aligned} \tag{6.6}$$

The corresponding expansion in r follows with the difference with respect to Y_μ that the last term in (6.6) contributes at order zero and the contribution to the first order

comes from terms with four ψ 's. We deduce that X_α and X_μ have an expansion of the form

$$X_\alpha = \sum_{p=1}^4 \mathcal{R}^{4p} X_\alpha^{(p)}, \quad X_\mu = \sum_{p=1}^4 \mathcal{R}^{4p} X_\mu^{(p)}, \quad (6.7)$$

and the closure relation gives

$$[K_\mu, X_\nu^{(p)}] + [X_\mu^{(p)}, K_\nu] = \sum_{q+q'=p} [X_\nu^{(q)}, X_\mu^{(q')}]. \quad (6.8)$$

Since K_μ has an x and θ dependence, each component of the equation above gives upon identification of terms dependent on x and θ a series of equations which consistency is not guaranteed *a priori*. To the lowest order, equation (6.8) yields the linear equation

$$[K_\mu, X_\nu^{(1)}] + [X_\mu^{(1)}, K_\nu] = 0, \quad (6.9)$$

where $X_\mu^{(1)} = Y_\mu^{(1)} + \bar{\theta} \Gamma_\mu X^{(1)}$, with the components of $Y_\mu^{(1)}$ given in (6.3) and those of $X_\alpha^{(1)}$ given in (6.6). The detailed analysis of the equations is long but straightforward. The number of equations is much greater than the number of coefficients. We have checked the compatibility of all the equations. Some of the resulting equations are homogeneous and are identically satisfied, if we set $a_1 \neq 0$, then the inhomogeneous equations allow the determination of the other coefficients in terms of a_1 . We obtain the following results for the coefficients in Y_μ :

$$\begin{aligned} a_3 &= a_5 = a_6 = a_7 = 0 \\ a_1 &= -4a_2 = 8a_4 = 32a_8 \end{aligned} \quad (6.10)$$

and for X_α

$$\begin{aligned} b_1 &= b_5 = b_6 = b_7 = b_9 = b_{10} = 0 \\ b_2 &= -\frac{a_1}{4}, \quad b_3 = \frac{a_1}{128}, \quad b_4 = -\frac{a_1}{32}, \quad b_8 = -\frac{a_1}{32}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

7 Invariant metric

In this section we shall use the Killing vector fields determined in the preceding section to deduce the invariant metric. We write the metric in the form

$$g = \frac{2\phi}{R} \eta_{\mu\nu} \tilde{E}^\mu \otimes \tilde{E}^\nu + \frac{R^2}{4\phi^2} \eta_{ij} \tilde{E}^i \otimes \tilde{E}^j. \quad (7.1)$$

taking into account the behaviour under translation, supersymmetry, dilatations, rotation and Lorentz transformations as well as a $\mathbb{Z}_2$ symmetry acting as $\phi^i \rightarrow -\phi^i$ and

$\psi \rightarrow -\psi$, we get, to order $\mathcal{R}^4$ the following expression for $\tilde{E}^\mu$

$$\begin{aligned} \tilde{E}^\mu = & E^\mu + \mathcal{R}^4 \left(c_1 \frac{1}{\phi^5} (\bar{\psi} \Gamma^{\mu\nu_1\nu_2} \psi) (\bar{\psi} \Gamma_{\nu\nu_1\nu_2} \psi) E^\nu + c_2 (\bar{\psi} \Gamma^\mu d\psi) \frac{1}{\phi^3} \right. \\ & + c_3 (\bar{\psi} \Gamma^{\mu ij} \psi) (\bar{\psi} \Gamma_{ij} d\theta) \frac{1}{\phi^4} + c_4 (\bar{\psi} \Gamma^{\mu ij} \psi) (\bar{\psi} \Gamma_{kj} d\theta) \frac{\phi_i \phi^k}{\phi^6} \\ & + c_5 (\bar{\psi} \Gamma^{\mu ij} \psi) (\bar{\psi} \Gamma_i d\theta) \frac{\phi_j}{\phi^5} + c_6 (\bar{\psi} \Gamma^{\mu ij} \psi) (\bar{\psi} \Gamma_{ijk} d\theta) \frac{\phi^k}{\phi^4} \\ & + c_7 (\bar{\psi} \Gamma^{\mu\nu_1\nu_2} \psi) (\bar{\psi} \Gamma_{\nu_1\nu_2 i} d\theta) \frac{\phi^i}{\phi^5} + c_8 (\bar{\psi} \Gamma^{\mu\nu_1\nu_2 i} \psi) (\bar{\psi} \Gamma_{\nu_1\nu_2} d\theta) \frac{\phi_i}{\phi^5} \\ & \left. + c_9 (\bar{\psi} \Gamma^{\nu ij} \psi) (\bar{\psi} \Gamma^\mu_{\nu i} d\theta) \frac{\phi_j}{\phi^5} + c_{10} (\bar{\psi} \Gamma^{\mu ij} \psi) \frac{\phi_i d\phi_j}{\phi^5} \right). \end{aligned} \quad (7.2)$$

The terms in c_3 , c_4 , c_5 and c_6 are redundant since, by Fierz rearrangements they can be cast into the form of already present terms (see Appendix A); so we can set these coefficients to zero. Similarly, we get for $\tilde{E}^i$, to the order zero

$$\begin{aligned} \tilde{E}^i = & d\phi^i + d_1 (\bar{\psi} \Gamma^i d\theta) + d_2 (\bar{\psi} \Gamma^{ij} d\theta) \frac{\phi_j}{\phi} \\ & + d_3 (\bar{\psi} \Gamma^j d\theta) \frac{\phi^i \phi_j}{\phi^2} + d_4 (\bar{\psi} d\theta) \frac{\phi^i}{\phi} + d_5 (\bar{\psi} \Gamma_\mu{}^{ij} \psi) \frac{\phi_j}{\phi^2} E^\mu. \end{aligned} \quad (7.3)$$

The coefficients c_i and d_i are determined by the requirement of invariance of the metric under conformal and special conformal transformations which were determined in the preceding section. The metric can be decomposed as a term of order zero and a term of order one

$$g = g_0 + g_1, \quad (7.4)$$

where

$$g_0 = \frac{2\phi}{R} \eta_{\mu\nu} E^\mu \otimes E^\nu \quad (7.5)$$

and

$$g_1 = \frac{2\phi}{R} \eta_{\mu\nu} \left((\tilde{E}^\mu - E^\mu) \otimes E^\nu + E^\mu \otimes (\tilde{E}^\nu - E^\nu) \right) + \frac{R^2}{4\phi^2} \eta_{ij} \tilde{E}^i \otimes \tilde{E}^j. \quad (7.6)$$

The equations governing the invariance of the metric give at order zero

$$L_{\xi_0} g_0 = 0, \quad (7.7)$$

which is satisfied by the construction of ξ_0 presented in section 3. At the next order we get

$$L_{\Delta\xi} g_0 + L_{\xi_0} g_1 = 0. \quad (7.8)$$

This equation is satisfied by construction for all generators except for conformal and superconformal transformations (the invariance under the other transformations are implemented in the ansatz (7.2)–(7.3)). These give the values of the constants appearing in $\tilde{E}^\mu$:

$$\begin{aligned} c_3 &= c_4 = c_5 = c_6 = c_9 = 0 \\ c_1 &= -\frac{1}{512}, \quad c_2 = -\frac{1}{32} \\ c_7 &= -\frac{1}{16} + \frac{\sqrt{3}}{128}, \quad c_8 = -\frac{1}{32} + \frac{\sqrt{3}}{128} \\ c_{10} &= -\frac{3}{64} + \frac{\sqrt{3}}{32}, \end{aligned} \tag{7.9}$$

and those appearing in $\tilde{E}^i$:

$$\begin{aligned} d_2 &= d_3 = d_4 = 0, \\ d_1 &= 1, \quad d_5 = \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{aligned} \tag{7.10}$$

In addition the value of a_1 is fixed as

$$a_1 = \frac{1}{2}. \tag{7.11}$$

8 Interaction in the six-dimensional (2,0) theory

In this section we derive the equations governing a fivebrane in the $AdS_7 \times S^4$ background to the first order in $\mathcal{R}^4$. This will give the first order interaction terms in the (2,0) theory. We shall use the superembedding approach [11] which is particularly convenient for our purposes. This approach is manifestly worldvolume and target space supersymmetric. It has been shown that, by fixing the worldvolume coordinates, it leads to the manifestly target space supersymmetric Green–Schwarz equations for p-branes [11]. Here, we shall choose to work in the “physical” gauge which leads to manifestly worldvolume supersymmetric equations in terms of the superfields Φ^i and Ψ which appeared in the free (2,0) theory reviewed in section 3.

In the physical gauge, the super worldvolume of the fivebrane is spanned by the (x^μ, θ^α) coordinates. The dynamics is described by the superfields $\Phi^i(x, \theta)$ and $\Psi(x, \theta)$. Let e_α be a basis of odd vector fields on the worldvolume. And let $e^{\hat{\mu}}$ be the pull-back of the eleven-dimensional even moving basis:

$$e^{\hat{\mu}} = \tilde{E}_\alpha^{\hat{\mu}} d\theta^\alpha + \tilde{E}_\nu^{\hat{\mu}} dx^\nu + \tilde{E}_i^{\hat{\mu}} d\Phi(x, \theta)^i + \tilde{E}_\alpha^{\hat{\mu}} d\Psi^{\alpha'}(x, \theta), \tag{8.1}$$

where d is the six-dimensional exterior derivative ($d = dx^\mu \partial_\mu + d\theta^\alpha \partial_\alpha$). The equations governing the dynamics of the fivebrane are simply

$$e^{\hat{\mu}}(e_\alpha) = 0. \tag{8.2}$$

These are equivalent to the equations obtained from the superembedding approach. The most general odd vector field on the worldvolume reads

$$e_\alpha = \Delta_\alpha^\beta D_\beta + \Delta_\alpha^\mu \partial_\mu. \quad (8.3)$$

Thanks to the linearity property of (8.2), it is possible to normalise the e_α such that $e_\alpha(d\theta^\beta) = \delta_\alpha^\beta$, and e_α can be cast in the form

$$e_\alpha = D_\alpha + \Delta_\alpha^\mu \partial_\mu. \quad (8.4)$$

Note that Δ_α^μ is determined from (8.2) as well as the equation relating Φ^i to Ψ .

The μ components of the equation (8.2) give

$$\begin{aligned} 0 = & \Delta_\alpha^\mu + \mathcal{R}^4 \left(c_1 \frac{1}{\Phi^5} (\bar{\Psi} \Gamma^{\mu\nu_1\nu_2} \Psi) (\bar{\Psi} \Gamma_{\nu_1\nu_2} \Psi) \Delta_\alpha^\nu - c_2 (e_\alpha(\bar{\Psi}) \Gamma^\mu \Psi) \frac{1}{\Phi^3} \right. \\ & + [c_7 (\bar{\Psi} \Gamma^{\mu\nu_1\nu_2} \Psi) (\Gamma_{\nu_1\nu_2} \Psi) \frac{\Phi^i}{\Phi^5} - c_8 (\bar{\Psi} \Gamma^{\mu\nu_1\nu_2} \Psi) (\Gamma_{\nu_1\nu_2} \Psi) \frac{\Phi_i}{\Phi^5}]_\alpha \\ & \left. + c_{10} (\bar{\Psi} \Gamma^{\mu ij} \Psi) \frac{\Phi_i e_\alpha(\Phi_j)}{\Phi^5} \right), \end{aligned} \quad (8.5)$$

where we have kept non-zero constants. The i components of equation (8.2) give

$$0 = e_\alpha(\Phi^i) - d_1(\Gamma^i \Psi)_\alpha + d_5(\bar{\Psi} \Gamma_\mu^{ij} \Psi) \frac{\Phi_j}{\Phi^2} \Delta_\alpha^\mu. \quad (8.6)$$

Equation (8.5) shows that, to the first order in $\mathcal{R}^4$, Δ_α^μ is given by

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha^\mu = & -\mathcal{R}^4 \left(-c_2 (D_\alpha(\bar{\Psi}) \Gamma^\mu \Psi) \frac{1}{\Phi^3} + [c_7 (\bar{\Psi} \Gamma^{\mu\nu_1\nu_2} \Psi) (\Gamma_{\nu_1\nu_2} \Psi) \frac{\Phi^i}{\Phi^5} \right. \\ & \left. - c_8 (\bar{\Psi} \Gamma^{\mu\nu_1\nu_2} \Psi) (\Gamma_{\nu_1\nu_2} \Psi) \frac{\Phi_i}{\Phi^5}]_\alpha + c_{10} (\bar{\Psi} \Gamma^{\mu ij} \Psi) \frac{\Phi_i D_\alpha(\Phi_j)}{\Phi^5} \right), \end{aligned} \quad (8.7)$$

Substituting the expression of Δ_α^μ in equation (8.6), we get

$$\begin{aligned} D_\alpha \Phi^i = & d_1(\Gamma^i \Psi)_\alpha + \mathcal{R}^4 \left(-c_2 (D_\alpha(\bar{\Psi}) \Gamma^\mu \Psi) \frac{1}{\Phi^3} + [c_7 (\bar{\Psi} \Gamma^{\mu\nu_1\nu_2} \Psi) (\Gamma_{\nu_1\nu_2} \Psi) \frac{\Phi^j}{\Phi^5} \right. \\ & \left. - c_8 (\bar{\Psi} \Gamma^{\mu\nu_1\nu_2} \Psi) (\Gamma_{\nu_1\nu_2} \Psi) \frac{\Phi_k}{\Phi^5}]_\alpha + c_{10} (\bar{\Psi} \Gamma^{\mu kj} \Psi) \frac{\Phi_k D_\alpha(\Phi_j)}{\Phi^5} \right) \left(\partial_\mu \Phi^i + d_5 (\bar{\Psi} \Gamma_\mu^{ij} \Psi) \frac{\Phi_j}{\Phi^2} \right). \end{aligned} \quad (8.8)$$

To order zero we have [21]

$$\begin{aligned} D_\beta \Psi_\alpha = & -(\Gamma^\mu_i)_{\beta\alpha} \partial_\mu \Phi^i + \frac{1}{5} H_{\beta\alpha}, \\ D_\gamma H_{\alpha\beta} = & 5(\Gamma^\mu)_{\gamma\beta} \partial_\mu \Psi_\alpha + 5(\Gamma^\mu)_{\gamma\alpha} \partial_\mu \Psi_\beta \end{aligned} \quad (8.9)$$

where

$$H_{\alpha\beta} = H_{\mu_1\mu_2\mu_3}(\Gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3})_{\alpha\beta}, \quad (8.10)$$

$H_{\mu_1\mu_2\mu_3}$ being a self-dual 3-form. So to order $\mathcal{R}^4$, we can replace in the right hand side of equation (8.8) $D\Phi^i$ by $\Gamma^i\Psi$ and $D\Psi$ by its zero order expression (8.9). The equation of motion to the first order becomes

$$D_\alpha\Phi^i = (\Gamma^i\Psi)_\alpha + \mathcal{R}^4 \left(-c_2(D_\alpha(\bar{\Psi})\Gamma^\mu\Psi)\frac{1}{\Phi^3} + [c'_7(\bar{\Psi}\Gamma^{\mu\nu_1\nu_2}\Psi)(\Gamma_{\nu_1\nu_2j}\Psi)\frac{\Phi^j}{\Phi^5} - c'_8(\bar{\Psi}\Gamma^{\mu\nu_1\nu_2k}\Psi)(\Gamma_{\nu_1\nu_2}\Psi)\frac{\Phi_k}{\Phi^5}]_\alpha \right) \left(\partial_\mu\Phi^i + d_5\bar{\Psi}\Gamma_\mu^{ij}\Psi\frac{\Phi_j}{\Phi^2} \right), \quad (8.11)$$

where $c'_7 = c_7 - c_{10}/4$ and $c'_8 = c_8 - c_{10}/4$. These equations are invariant under the superconformal transformations which read

$$\delta\Phi^i = \delta_0\Phi^i + a_1\mathcal{R}^4 \left(\frac{k^\mu}{\Phi} - \frac{1}{4\Phi^3}(\bar{\eta}'\Gamma^{\mu j}\Psi)\Phi_j \right) \left(\partial_\mu\Phi^i - \frac{1}{8}(\bar{\Psi}\Gamma_\mu^{ij}\Psi)\frac{\Phi_j}{\Phi^2} \right) \quad (8.12)$$

where $\eta' = \eta - k_\mu\Gamma^\mu\theta$ and $\delta_0\Phi^i$ is given in (3.10).

On the boundary of AdS , the resulting equations are the doubleton equation of the free multiplet, the first correction in R yields an interacting (2,0) theory with a non-linear realisation of the superconformal algebra.

V.A Conventions and Fierz rearrangements

The eleven dimensional superalgebra reads

$$\{Q_{\hat{\alpha}}, Q_{\hat{\beta}}\} = 2(\Gamma^{\hat{\mu}}C)_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}P_{\hat{\mu}}, \quad (V.A.1)$$

where $\hat{\alpha} = 1, \dots, 32$, $\hat{\mu} = 0, \dots, 10$ and $C_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ is an antisymmetric matrix verifying

$$C^{-1}\Gamma^{\hat{\mu}}C = -\Gamma^{\hat{\mu}T}. \quad (V.A.2)$$

The reality condition on 11D fermions reads

$$\Psi = C\bar{\Psi}^T, \quad (V.A.3)$$

or equivalently

$$\bar{\Psi}^{\hat{\alpha}} = C^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\Psi_{\hat{\beta}} \equiv \Psi^{\hat{\alpha}}, \quad (V.A.4)$$

where $C^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ is the inverse of $C_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$. We shall use C to raise and lower indices and the notation $(\Gamma^{\hat{\mu}})_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ for $(\Gamma^{\hat{\mu}}C)_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$.

We are interested in the $6 + 5$ splitting the eleven dimensional spacetime. A representation of the Gamma matrices is conveniently given by

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \otimes 1, \quad \Gamma^{5+i} = \tilde{\gamma} \otimes \gamma^i, \quad (V.A.5)$$

where μ and i are respectively six and five dimensional vector indices, and $\tilde{\gamma}$ is the chirality matrix in six dimensions:

$$\tilde{\gamma} = \gamma^0 \dots \gamma^5. \quad (\text{V.A.6})$$

This matrix allows to decompose 11D Majorana fermions into two 6D $Sp(2)$ symplectic Majorana Weyl fermions: $\psi^{\hat{\alpha}} = (\psi^{\alpha}, \psi^{\alpha'})$. We shall also denote Γ^{5+i} by Γ^i . In this representation the charge conjugation matrix C may be written as

$$C = \mathcal{C} \otimes \Omega, \quad (\text{V.A.7})$$

where $\mathcal{C}$ is symmetric and verifies

$$\mathcal{C}^{-1} \gamma^{\mu} \mathcal{C} = -\gamma^{\mu T}, \quad (\text{V.A.8})$$

whereas Ω is antisymmetric and verifies

$$\Omega^{-1} \gamma^i \Omega = \gamma^{iT}. \quad (\text{V.A.9})$$

The antisymmetrised product of n gamma matrices is denoted by $\Gamma^{\hat{\mu}_1 \dots \hat{\mu}_n}$. We have

$$(\Gamma^{\hat{\mu}_1 \dots \hat{\mu}_n} C)^T = -(-1)^{n(n+1)/2} \Gamma^{\hat{\mu}_1 \dots \hat{\mu}_n} C. \quad (\text{V.A.10})$$

A useful relation is the Fierz rearrangement formula which reads for four Weyl-Majorana fermions ⁽²⁾

$$\begin{aligned} & (\bar{\epsilon}_1 \Pi^+ \epsilon_2) (\bar{\epsilon}_3 \Pi^+ \epsilon_4) = \\ & - \sum_{\substack{n_1=0,2 \\ n_2=0,1,2}} \frac{2}{c_{n_1} \tilde{c}_{n_2}} (\bar{\epsilon}_1 \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_{n_1}} \Gamma^{i_1 \dots i_{n_2}} \Pi^+ \epsilon_4) (\bar{\epsilon}_3 \Gamma_{\mu_1 \dots \mu_{n_1}} \Gamma_{i_1 \dots i_{n_2}} \Pi^+ \epsilon_2), \\ & (\bar{\epsilon}_1 \Pi^+ \epsilon_2) (\bar{\epsilon}_3 \Pi^- \epsilon_4) = \\ & \sum_{n_2=0,1,2} \frac{(-1)^{n_2}}{8 \tilde{c}_{n_2}} (-2 (\bar{\epsilon}_1 \Gamma^{\mu_1} \Gamma^{i_1 \dots i_{n_2}} \Pi^- \epsilon_4) (\bar{\epsilon}_3 \Gamma_{\mu_1} \Gamma_{i_1 \dots i_{n_2}} \Pi^+ \epsilon_2) \\ & + (\bar{\epsilon}_1 \Gamma^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \Gamma^{i_1 \dots i_{n_2}} \Pi^- \epsilon_4) (\bar{\epsilon}_3 \Gamma_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \Gamma_{i_1 \dots i_{n_2}} \Pi^+ \epsilon_2)) \end{aligned} \quad (\text{V.A.11})$$

with coefficients c_n and $\tilde{c}_n$ given by

$$c_n = 8 (-1)^{n(n-1)/2} \quad \text{and} \quad \tilde{c}_n = 4 (-1)^{n(n-1)/2}. \quad (\text{V.A.12})$$

$\Pi^{\pm}$ are the chirality projection operators in six dimensions. The formula (V.A.11) has been used in our derivations to restrict the number of independent terms appearing in the Killing vectors and in the metric, particularly those involving three fermions ψ .

⁽²⁾The summation over the indices μ and i is ordered in the formula (V.A.11) : $\mu_1 < \dots < \mu_{n_1}$ and $i_1 < \dots < i_{n_2}$. Otherwise some factorials appear in the normalization.

First, in the expression (6.3) of $y_{(3)\mu}^{\alpha'}$ and in the expression (7.2) of $\tilde{E}^\mu$, Fierz rearrangements eliminate terms with combinations like $(\Gamma^i \psi)(\bar{\psi} \Gamma_{\nu ji} \psi)$ or $(\Gamma^{j_1 j_2} \psi)(\bar{\psi} \Gamma_{\nu j_1 j_2} \psi)$, indeed

$$\begin{aligned} (\Gamma^j \psi)(\bar{\psi} \Gamma_{\nu ji} \psi) &= \frac{1}{4}(\Gamma_{i\sigma_1\sigma_2} \psi)(\bar{\psi} \Gamma_{\nu}^{\sigma_1\sigma_2} \psi) + \frac{1}{4}(\Gamma^{\sigma_1\sigma_2} \psi)(\bar{\psi} \Gamma_{i\nu\sigma_1\sigma_2} \psi) \\ (\Gamma^{j_1 j_2} \psi)(\bar{\psi} \Gamma_{\nu j_1 j_2} \psi) &= -(\Gamma^{\sigma_1\sigma_2} \psi)(\bar{\psi} \Gamma_{\nu\sigma_1\sigma_2} \psi). \end{aligned} \quad (\text{V.A.13})$$

The expression (6.6) of $x_{(3)\alpha}^i$ involves terms of the form

$$(\Gamma_\sigma N_{[i_1 i_2]}^i \psi)(\bar{\psi} \Gamma^{\sigma i_1 i_2} \psi). \quad (\text{V.A.14})$$

There are *a priori* twelve terms that can be constructed using ϕ^i and gamma matrices :

$$\begin{aligned} N_{[i_1 i_2]}^i &= a(\delta_{i_1}^i \phi_{i_2} - \delta_{i_2}^i \phi_{i_1}) \mathbf{1} + a'(\delta_{i_1}^i \phi_{i_2} - \delta_{i_2}^i \phi_{i_1}) \frac{\phi_m}{\phi} \Gamma^m \\ &\quad + b\phi(\delta_{i_1}^i \Gamma_{i_2} - \delta_{i_2}^i \Gamma_{i_1}) + b'(\delta_{i_1}^i \Gamma_{i_2 m} - \delta_{i_2}^i \Gamma_{i_1 m}) \phi^m \\ &\quad + c \frac{\phi^i}{\phi} (\Gamma_{i_1} \phi_{i_2} - \Gamma_{i_2} \phi_{i_1}) + c' \frac{\phi^i \phi^m}{\phi^2} (\Gamma_{m i_1} \phi_{i_2} - \Gamma_{m i_2} \phi_{i_1}) \\ &\quad + d\phi^i \Gamma_{i_1 i_2} + d' \frac{\phi^i \phi^m}{\phi} \Gamma_{m i_1 i_2} \\ &\quad + e(\Gamma_{i_1}^i \phi_{i_2} - \Gamma_{i_2}^i \phi_{i_1}) + e'(\Gamma_{m i_1}^i \phi_{i_2} - \Gamma_{m i_2}^i \phi_{i_1}) \frac{\phi^m}{\phi} \\ &\quad + f\phi \Gamma_{i_1 i_2}^i + f' \Gamma_{i_1 i_2 m}^i \phi^m. \end{aligned} \quad (\text{V.A.15})$$

However a Fierz rearrangement insures that $N_{[i_1 i_2]}^i$ and $(QN)_{[i_1 i_2]}^i$ where Q is defined as

$$(QN)_{i_1 i_2}^i = -\frac{1}{6} N_{[j_1 j_2]}^i \Gamma^{j_1 j_2}{}_{i_1 i_2} - \frac{1}{3} (N_{[i_1 j]}^i \Gamma^j{}_{i_2} - N_{[i_2 j]}^i \Gamma^j{}_{i_1}), \quad (\text{V.A.16})$$

are equivalent in the sense that the expression (V.A.14) computed with $N_{[i_1 i_2]}^i$ and $(QN)_{[i_1 i_2]}^i$ are equal. Examining the eigenvalues of the operator Q allows to conclude that

$$\begin{aligned} b &\sim c \sim c' \sim d \sim d' \sim f \sim 0 \\ a &\sim b' \sim -e \sim -f' \\ a' &\sim e'. \end{aligned} \quad (\text{V.A.17})$$

Finally, we end up with only the two terms written in (6.6).

V.B The $Osp(6, 2|2)$ algebra

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \quad (V.B.1)$$

$$[P_\mu, M_{\rho\sigma}] = -\eta_{\mu\rho}P_\sigma + \eta_{\mu\sigma}P_\rho \quad (V.B.2)$$

$$[P_\mu, J_{ij}] = 0 \quad (V.B.3)$$

$$[P_\mu, D] = P_\mu \quad (V.B.4)$$

$$[P_\mu, K_\nu] = -2\eta_{\mu\nu}D - 2M_{\mu\nu} \quad (V.B.5)$$

$$[P_\mu, Q_{\alpha'}] = 0 \quad (V.B.6)$$

$$[P_\mu, S_\alpha] = -(\Gamma_\mu)_\alpha^{\beta'} Q_{\beta'} \quad (V.B.7)$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -\eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + \eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} \quad (V.B.8)$$

$$[M_{\mu\nu}, J_{ij}] = 0 \quad (V.B.9)$$

$$[M_{\mu\nu}, D] = 0 \quad (V.B.10)$$

$$[M_{\mu\nu}, K_\sigma] = \eta_{\mu\sigma}K_\nu - \eta_{\nu\sigma}K_\mu \quad (V.B.11)$$

$$[M_{\mu\nu}, Q_{\alpha'}] = \frac{1}{2}(\Gamma_{\mu\nu})_{\alpha'}^{\beta'} Q_{\beta'} \quad (V.B.12)$$

$$[M_{\mu\nu}, S_\alpha] = \frac{1}{2}(\Gamma_{\mu\nu})_\alpha^\beta S_\beta \quad (V.B.13)$$

$$[J_{ij}, J_{kl}] = \eta_{il}J_{jk} - \eta_{ik}J_{jl} + \eta_{jk}J_{il} - \eta_{jl}J_{ik} \quad (V.B.14)$$

$$[J_{ij}, D] = 0 \quad (V.B.15)$$

$$[J_{ij}, K_\mu] = 0 \quad (V.B.16)$$

$$[J_{ij}, Q_{\alpha'}] = -\frac{1}{2}(\Gamma_{ij})_{\alpha'}^{\beta'} Q_{\beta'} \quad (V.B.17)$$

$$[J_{ij}, S_\alpha] = -\frac{1}{2}(\Gamma_{ij})_\alpha^\beta S_\beta \quad (V.B.18)$$

$$[D, D] = 0 \quad (V.B.19)$$

$$[D, K_\mu] = K_\mu \quad (V.B.20)$$

$$[D, Q_{\alpha'}] = -\frac{1}{2}Q_{\alpha'} \quad (V.B.21)$$

$$[D, S_\alpha] = \frac{1}{2}S_\alpha \quad (V.B.22)$$

$$[K_\mu, K_\nu] = 0 \quad (V.B.23)$$

$$[K_\mu, Q_{\alpha'}] = -(\Gamma_\mu)_{\alpha'}^\beta S_\beta \quad (V.B.24)$$

$$[K_\mu, S_\alpha] = 0 \quad (V.B.25)$$

$$\{Q_{\alpha'}, Q_{\beta'}\} = 2(\Gamma^\mu)_{\alpha'\beta'} P_\mu \quad (V.B.26)$$

$$\{Q_{\alpha'}, S_\beta\} = 2\mathcal{C}_{\alpha'\beta} + 2(\Gamma^{ij})_{\alpha'\beta} J_{ij} + (\Gamma^{\mu\nu})_{\alpha'\beta} M_{\mu\nu} \quad (V.B.27)$$

$$\{S_\alpha, S_\beta\} = 2(\Gamma^\mu)_{\alpha\beta} K_\mu \quad (V.B.28)$$

References

- [1] Angelopoulos E, Flato M, Fronsdal C and Steinheimer D 1981 Phys. Rev. D23 1278;
Flato M and Fonsdal C 1981, J. Math. Phys. 22 1100;
Fronsdal C 1982, Phys. Rev D26 1988.
- [2] Gunaydin M, Nilsson B E W, Sierra G and Townsend P K 1986, Phys. Lett. **B176** 45;
Bergshoeff E, Duff M J, Pope C N and Sezgin E 1987 Phys. Lett. B199 69;
Blencowe M P and Duff M J 1988, Phys. Lett. B203 229;
Nicolai H, Sezgin E and Tanii Y 1988, Nucl. Phys. B305 483;
Bergshoeff E, Salam A, Sezgin E and Tanii Y 1988, Nucl. Phys. B305 497.
- [3] Gibbons G W and Townsend P K 1993, Phys. Rev. Lett. 71 3754.
- [4] Duff M J 1998, *Anti-de-Sitter space, branes, singletons, superconformal field theories and all that*, hep-th/9808100.
- [5] Maldacena J 1998, Adv. Theor. Math. Phys. 2 231.
- [6] Gubser S R, Klebanov I R and Polyakov A M 1998, Phys. Lett. B428 105.
- [7] Witten E 1998, Adv. Theor. Math. Phys. 2 253.
- [8] Witten E 1995, "Some comments on string dynamics" in *Future Perspectives in string theory: String 95*, I. Bars et al., eds World Scientific, Singapore, 1996, hep-th/9507121;
Strominger A 1996, Phys. Lett. B 383 44;
Seiberg N 1998, Nucl. Phys. Proc. Suppl. 67 158.
- [9] Witten E 1995, Nucl. Phys. B443 85;
Townsend P K 1995, Phys. Lett. B350 184.
- [10] Bergshoeff E, Sezgin E and Townsend P 1987, Phys. Lett. B189 75;
Duff M J and Stelle K S 1991, Phys. Lett. B253 113.
- [11] Howe P S and Sezgin E 1997, Phys. Lett. **B394** 62.
Howe P S, Sezgin E and West P C 1997, Phys. Lett. **B399** 49.
Howe P S, Sezgin E and West P C 1997, Phys. Lett. **B400** 255.
- [12] Güven R 1992, Phys. Lett **B276** 49.
Gibbons G W, Horowitz G T and Townsend P K 1995, Class. Quant. Grav. **12** 297.
Kaplan D N and Michelson J 1996, Phys. Rev. **D53** 3474.
- [13] Aganagic M, Park J, Popescu C and Schwarz J H 1997, Nucl. Phys. **B496** 191.

- [14] Bandos I, Lechner K, Nurmagambetov A, Pasti P, Sorokin D and Tonin M 1997, Phys. Rev. Lett. **78** 4332.
- [15] Witten E 1997, J. Geom. Phys. **22** 103.
Cederwall M, Nilsson B E W and Sundell P 1998, J. High Energy Phys. **04** 007.
- [16] de Wit B, Peeters K, Plefka J and Sevrin A 1998, Phys. Lett. **B443** (1998) 153;
de Wit B 1999, “Supermembranes and Super Matrix Models”, hep-th/9902051.
- [17] Dall’Agata G, Fabbri D, Fraser C, Fré P, Termonia P and Trigiante M, *The $Osp(8|4)$ singleton action from the supermembrane*, hep-th/9807115.
- [18] Claus P, *Super M-brane actions in $AdS_4 \times S^7$ and $AdS_7 \times S^4$* , hep-th/9809045.
- [19] Claus P and Kallosh R 1998, Superisometries of the $AdS \times S$ Superspace, hep-th/9812087
- [20] Castellani L., D’Auria R. and Fré P. 1991, “Supergravity and Superstrings — A Geometric Perspective”, vol. 1,2 & 3, World Scientific;
Castellani L., Ceresole A., D’Auria R., Ferrara S., Fré P. and Trigiante M. 1998, Nucl. Phys. **B527** 142.
- [21] Grojean C and Mourad J 1998, Class. Quantum Grav. 15 3397.
- [22] Park J H 1999, Nucl. Phys. **B539** 599.
- [23] R. Kallosh, J. Kumar, A. Rajaraman 1998, Phys.Rev. D57 6452.
- [24] Claus P, Kallosh R, Kumar J, Tomnsend P K and Van Proyen A 1998, J. High Energy Phys. 6 4.
- [25] Howe P S, Sierra G and Townsend P K 1983, Nucl. Phys. **B221** 331.

Repères bibliographiques

Bibliographie

- [1] G. Veneziano, *Construction of a Crossing-Symmetric, Regge Behaved Amplitude for Linearly Rising Trajectories*, Nuovo. Cim. **A57** (1968) 190–197.
- [2] T. Yoneya, *Connection of Dual Models to Electrodynamics and Gravidynamics*, Prog. Theor. Phys. **51** (1974) 1907.
- [3] J. Scherk and J. H. Schwarz, *Dual Models for Nonhadrons*, Nucl. Phys. **B81** (1974) 118–144.
- [4] T. Goto, *Relativistic Quantum Mechanics of One-Dimensional Mechanical Continuum and Subsidiary Condition of Dual Resonance Model*, Prog. Theor. Phys. **46** (1971) 1560–1569.
- [5] Y. Nambu, *Duality and Hydrodynamics*,. Lectures at the Copenhagen symposium.
- [6] S. Deser and B. Zumino, *A Complete Action for the Spinning String*, Phys. Lett. **65B** (1976) 369–373.
- [7] L. Brink, P. D. Vecchia, and P. Howe, *A Locally Supersymmetric and Reparametrization Invariant Action for the Spinning String*, Phys. Lett. **65B** (1976) 471–474.
- [8] A. M. Polyakov, *Quantum Geometry of Bosonic Strings*, Phys. Lett. **103B** (1981) 207.
- [9] M. S. Virasoro, *Subsidiary Conditions and Ghosts in Dual Resonance Models*, Phys. Rev. **D1** (1970) 2933–2936.
- [10] E. D. Giudice and P. D. Vecchia, *Factorization and Operator Formalism in the Generalized Virasoro Model*, Nuovo Cim. **5A** (1971) 90.
- [11] B. de Wit, J. Hoppe, and H. Nicolai, *On the Quantum Mechanics of Supermembranes*, Nucl. Phys. **B305** (1988) 545.
- [12] P. Goddard, J. Goldstone, C. Rebbi, and C. B. Thorn, *Quantum Dynamics of a Massless Relativistic String*, Nucl. Phys. **B56** (1973) 109–135.

- [13] J. Polchinski, *String Theory. I: an Introduction to the Bosonic String*. Cambridge University Press, 1998.
- [14] P. Ramond, *Dual Theory for Free Fermions*, Phys. Rev. **D3** (1971) 2415–2418.
- [15] A. Neveu, J. H. Schwarz, and C. B. Thorn, *Reformulation of the Dual Pion Model*, Phys. Lett. **35B** (1971) 529.
- [16] F. Gliozzi, J. Scherk, and D. Olive, *Supersymmetry, Supergravity Theories and the Dual Spinor Model*, Nucl. Phys. **B122** (1977) 253.
- [17] M. B. Green and J. H. Schwarz, *Supersymmetrical Dual String Theory*, Nucl. Phys. **B181** (1981) 502–530.
- [18] M. B. Green and J. H. Schwarz, *Supersymmetrical String Theories*, Phys. Lett. **109B** (1982) 444.
- [19] J. Hughes, J. Liu, and J. Polchinski, *Supermembranes*, Phys. Lett. **180B** (1986) 370.
- [20] M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten, *Superstring Theory. Vol. I: Introduction*. Cambridge University Press, 1987.
- [21] E. Witten, *$D = 10$ Superstring Theory*, Proceedings of the fourth workshop on Grand Unification (1983).
- [22] M. B. Green and J. H. Schwarz, *Anomaly Cancellations in Supersymmetric $D = 10$ Gauge Theory Require $SO(32)$* , Phys. Lett. **149B** (1984) 117.
- [23] P. Pasti, D. Sorokin, and M. Tonin, *Duality Symmetric Actions with Manifest Space-Time Symmetries*, Phys. Rev. **D52** (1995) 4277–4281, [hep-th/9506109](#).
- [24] P. Pasti, D. Sorokin, and M. Tonin, *On Lorentz Invariant Actions for Chiral p -Forms*, Phys. Rev. **D55** (1997) 6292–6298, [hep-th/9611100](#).
- [25] B. de Wit and J. Louis, *Supersymmetry and Dualities in Various Dimensions*, [hep-th/9801132](#).
- [26] A. Sen, *An Introduction to Nonperturbative String Theory*, [hep-th/9802051](#).
- [27] D. J. Gross and E. Witten, *Superstring Modifications of Einstein's Equations*, Nucl. Phys. **B277** (1986) 1.
- [28] D. J. Gross and J. H. Sloan, *The Quartic Effective Action for the Heterotic String*, Nucl. Phys. **B291** (1987) 41.
- [29] P. S. Howe and K. S. Stelle, *The Ultraviolet Properties of Supersymmetric Field Theories*, Int. J. Mod. Phys. **A4** (1989) 1871.

- [30] K. Kikkawa and M. Yamasaki, *Casimir Effects in Superstring Theories*, Phys. Lett. **149B** (1984) 357.
- [31] K. S. Narain, *New Heterotic String Theories in Uncompactified Dimensions < 10* , Phys. Lett. **169B** (1986) 41.
- [32] K. S. Narain, M. H. Sarmadi, and E. Witten, *A Note on Toroidal Compactification of Heterotic String Theory*, Nucl. Phys. **B279** (1987) 369.
- [33] A. Giveon, M. Porrati, and E. Rabinovici, *Target Space Duality in String Theory*, Phys. Rept. **244** (1994) 77–202, [hep-th/9401139](#).
- [34] C. Montonen and D. Olive, *Magnetic Monopoles as Gauge Particles ?*, Phys. Lett. **72B** (1977) 117.
- [35] E. Witten and D. Olive, *Supersymmetry Algebras that Include Topological Charges*, Phys. Lett. **78B** (1978) 97.
- [36] H. Osborn, *Topological Charges for $\mathcal{N} = 4$ Supersymmetric Gauge Theories and Monopoles of Spin 1*, Phys. Lett. **83B** (1979) 321.
- [37] A. Sen, *Strong–Weak Coupling Duality in Four–Dimensional String Theory*, Int. J. Mod. Phys. **A9** (1994) 3707–3750, [hep-th/9402002](#).
- [38] A. Font, L. E. Ibáñez, D. Lüst, and F. Quevedo, *Strong–Weak Coupling Duality and Nonperturbative Effects in String Theory*, Phys. Lett. **B249** (1990) 35–43.
- [39] J. Polchinski, *String Duality: A Colloquium*, Rev. Mod. Phys. **68** (1996) 1245–1258, [hep-th/9607050](#).
- [40] C. M. Hull and P. K. Townsend, *Unity of Superstring Dualities*, Nucl. Phys. **B438** (1995) 109–137, [hep-th/9410167](#).
- [41] P. K. Townsend, *The Eleven–Dimensional Supermembrane Revisited*, Phys. Lett. **B350** (1995) 184–187, [hep-th/9501068](#).
- [42] E. Witten, *String Theory Dynamics in Various Dimensions*, Nucl. Phys. **B443** (1995) 85–126, [hep-th/9503124](#).
- [43] M. Dine, P. Huet, and N. Seiberg, *Large and Small Radius in String Theory*, Nucl. Phys. **B322** (1989) 301.
- [44] J. Dai, R. G. Leigh, and J. Polchinski, *New Connections between String Theories*, Mod. Phys. Lett. **A4** (1989) 2073–2083.
- [45] P. Ginsparg, *Comment on Toroidal Compactification of Heterotic Superstrings*, Phys. Rev. **D35** (1987) 648.
- [46] J. Polchinski and E. Witten, *Evidence for Heterotic – Type I String Duality*, Nucl. Phys. **B460** (1996) 525–540, [hep-th/9510169](#).

- [47] E. Cremmer, B. Julia, and J. Scherk, *Supergravity Theory in Eleven-Dimensions*, Phys. Lett. **76B** (1978) 409–412.
- [48] P. Fré, *Lectures on Special Kähler Geometry and Electric–Magnetic Duality Rotations*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **45BC** (1996) 59–114, [hep-th/9512043](#).
- [49] P. Hořava and E. Witten, *Eleven-Dimensional Supergravity on a Manifold with Boundary*, Nucl. Phys. **B475** (1996) 94–114, [hep-th/9603142](#).
- [50] P. Hořava and E. Witten, *Heterotic and Type I String Dynamics from Eleven-dimensions*, Nucl. Phys. **B460** (1996) 506–524, [hep-th/9510209](#).
- [51] P. A. M. Dirac, *Quantized Singularities in the Electromagnetic Field*, Proc. Roy. Soc. **A133** (1931) 60.
- [52] A. Dabholkar, G. Gibbons, J. A. Harvey, and F. R. Ruiz, *Superstrings and Solitons*, Nucl. Phys. **B340** (1990) 33–55.
- [53] M. J. Duff, R. R. Khuri, and J. X. Lu, *String Solitons*, Phys. Rept. **259** (1995) 213–326, [hep-th/9412184](#).
- [54] P. K. Townsend, *Supersymmetric Extended Solitons*, Phys. Lett. **202B** (1988) 53.
- [55] M. J. Duff and K. S. Stelle, *Multimembrane Solutions of $D = 11$ Supergravity*, Phys. Lett. **B253** (1991) 113–118.
- [56] A. Strominger, *Heterotic Solitons*, Nucl. Phys. **B343** (1990) 167–184.
- [57] E. Witten, *A Simple Proof of the Positive Energy Theorem*, Commun. Math. Phys. **80** (1981) 381.
- [58] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Shvarts, and Y. S. Tyupkin, *Pseudoparticle Solutions of the Yang–Mills Equations*, Phys. Lett. **59B** (1975) 85.
- [59] G. 't Hooft, *Symmetry Breaking Through Bell–Jackiw Anomalies*, Phys. Rev. Lett. **37** (1976) 8–11.
- [60] J. Polchinski, *Dirichlet Branes and Ramond–Ramond Charges*, Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 4724–4727, [hep-th/9510017](#).
- [61] C. P. Bachas, *Lectures on D branes*, [hep-th/9806199](#).
- [62] E. Bergshoeff, E. Sezgin, and P. K. Townsend, *Supermembranes and Eleven-Dimensional Supergravity*, Phys. Lett. **B189** (1987) 75–78.
- [63] E. Bergshoeff, E. Sezgin, and P. K. Townsend, *Properties of the Eleven-Dimensional Super Membrane Theory*, Ann. Phys. **185** (1988) 330.

- [64] A. Achucarro, J. M. Evans, P. K. Townsend, and D. L. Wiltshire, *Super p -Branes*, Phys. Lett. **198B** (1987) 441.
- [65] M. J. Duff and J. X. Lu, *Type II p -Branes: The Brane Scan Revisited*, Nucl. Phys. **B390** (1993) 276–290, [hep-th/9207060](#).
- [66] R. Gueven, *Black p -Brane Solutions of $D = 11$ Supergravity Theory*, Phys. Lett. **B276** (1992) 49.
- [67] R. D. Sorkin, *Kaluza–Klein Monopole*, Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 87.
- [68] D. J. Gross and M. J. Perry, *Magnetic Monopoles in Kaluza–Klein Theories*, Nucl. Phys. **B226** (1983) 29.
- [69] M. J. Perry, *Nonabelian Kaluza–Klein Monopoles*, Phys. Lett. **137B** (1984) 171.
- [70] J. H. Schwarz, *Lectures on Superstring and M Theory Dualities.*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **55B** (1997) 1, [hep-th/9607201](#).
- [71] A. Sen, *$D0$ -Branes on T^n and Matrix Theory*, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 51, [hep-th/9709220](#).
- [72] N. Seiberg, *Why is the Matrix Model Correct ?*, Phys. Rev. Lett. **79** (1997) 3577–3580, [hep-th/9710009](#).
- [73] T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker, and L. Susskind, *M theory as a Matrix Model: A Conjecture*, Phys. Rev. **D55** (1997) 5112–5128, [hep-th/9610043](#).
- [74] L. Susskind, *Another Conjecture About M (atrix) Theory*, [hep-th/9704080](#).
- [75] G. W. Gibbons and P. K. Townsend, *Vacuum Interpolation in Supergravity via Super p -Branes*, Phys. Rev. Lett. **71** (1993) 3754–3757, [hep-th/9307049](#).
- [76] E. Witten, *Anti-de Sitter Space and Holography*, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 253, [hep-th/9802150](#).
- [77] E. Witten, *Bound States of Strings and p -Branes*, Nucl. Phys. **B460** (1996) 335–350, [hep-th/9510135](#).
- [78] M. R. Douglas, *Branes within Branes*, [hep-th/9512077](#).
- [79] G. 't Hooft, *Dimensional Reduction in Quantum Gravity*, [gr-qc/9310026](#).
- [80] L. Susskind, *The World as a Hologram*, J. Math. Phys. **36** (1995) 6377–6396, [hep-th/9409089](#).
- [81] L. Susskind and E. Witten, *The Holographic Bound in Anti-de Sitter Space*, [hep-th/9805114](#).

- [82] M. Perry and J. H. Schwarz, *Interacting Chiral Gauge Fields in Six-Dimensions and Born-Infeld Theory*, Nucl. Phys. **B489** (1997) 47–64, [hep-th/9611065](#).
- [83] M. Aganagic, J. Park, C. Popescu, and J. H. Schwarz, *World Volume Action of the M Theory Five-Brane*, Nucl. Phys. **B496** (1997) 191, [hep-th/9701166](#).
- [84] P. Pasti, D. Sorokin, and M. Tonin, *Covariant Action for a $D = 11$ Five-Brane with the Chiral Field*, Phys. Lett. **B398** (1997) 41–46, [hep-th/9701037](#).
- [85] I. Bandos, K. Lechner, A. Nurmagambetov, P. Pasti, D. Sorokin, and M. Tonin, *Covariant Action for the Superfive-Brane of M theory*, Phys. Rev. Lett. **78** (1997) 4332–4334, [hep-th/9701149](#).
- [86] P. S. Howe and E. Sezgin, *$D = 11$, $p = 5$* , Phys. Lett. **B394** (1997) 62–66, [hep-th/9611008](#).
- [87] P. S. Howe, E. Sezgin, and P. C. West, *The Six-Dimensional Selfdual Tensor*, Phys. Lett. **B400** (1997) 255–259, [hep-th/9702111](#).
- [88] P. S. Howe, E. Sezgin, and P. C. West, *Covariant Field Equations of the M Theory Five-Brane*, Phys. Lett. **B399** (1997) 49, [hep-th/9702008](#).
- [89] E. Cremmer and S. Ferrara, *formulation of Eleven-Dimensional Supergravity in Superspace*, Phys. Lett. **91B** (1980) 61.
- [90] L. Brink and P. Howe, *Eleven-Dimensional Supergravity on the Mass-Shell in Superspace*, Phys. Lett. **91B** (1980) 384.
- [91] L. Castellani, A. Ceresole, R. D’Auria, S. Ferrara, P. Fré, and M. Trigiante, *G/H M-Branes and AdS_{p+2} Geometries*, Nucl. Phys. **B527** (1998) 142, [hep-th/9803039](#).
- [92] P. Claus, R. Kallosh, and A. V. Proeyen, *M Five-Brane and Superconformal $(0, 2)$ Tensor Multiplet in Six-Dimensions*, Nucl. Phys. **B518** (1998) 117, [hep-th/9711161](#).
- [93] P. Claus, R. Kallosh, J. Kumar, P. Townsend, and A. V. Proeyen, *Conformal Theory of $M2$, $D3$, $M5$ and $D1$ -Branes + $D5$ -Branes*, [hep-th/9801206](#).
- [94] T. Kaluza, *On the Unification Problem in Physics*, Sitzungsber Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. **K1** (1921) 966.
- [95] O. Klein, *Quantum Theory and Five-Dimensional Relativity*, Z. Phys. **37** (1926) 895.
- [96] H. C. Lee, *An Introduction to Kaluza-Klein Theories*, Proceedings, Workshop, Chalk River, Canada, August 11-16, 1983 (1985). Singapore: World Scientific.

- [97] T. Appelquist, A. Chodos, and P. G. O. Freund, *Introduction to Modern Kaluza–Klein Theories*,. Modern Kaluza–Klein theories.
- [98] J. Scherk and J. H. Schwarz, *Dual Field Theory of Quarks and Gluons*, Phys. Lett. **57B** (1975) 463–466.
- [99] I. Antoniadis, S. Dimopoulos, and G. Dvali, *Millimeter Range Forces in Superstring Theories with Weak Scale Compactification*, Nucl. Phys. **B516** (1998) 70, [hep-ph/9710204](#).
- [100] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. Dvali, *The Hierarchy Problem and New Dimensions at a Millimeter*, Phys. Lett. **B429** (1998) 263, [hep-ph/9803315](#).
- [101] I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. Dvali, *New Dimensions at a Millimeter to a Fermi and Superstrings at a TeV*, Phys. Lett. **B436** (1998) 257, [hep-ph/9804398](#).
- [102] I. Antoniadis, *A Possible New Dimension at a Few TeV*, Phys. Lett. **B246** (1990) 377–384.
- [103] J. D. Lykken, *Weak Scale Superstrings*, Phys. Rev. **D54** (1996) 3693–3697, [hep-th/9603133](#).
- [104] K. R. Dienes, E. Dudas, and T. Gherghetta, *Grand Unification at Intermediate Mass Scales through Extra Dimensions*, Nucl. Phys. **B537** (1999) 47, [hep-ph/9806292](#).
- [105] K. R. Dienes, E. Dudas, and T. Gherghetta, *Extra Space-Time Dimensions and Unification*, Phys. Lett. **B436** (1998) 55, [hep-ph/9803466](#).
- [106] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. Dvali, *Phenomenology, Astrophysics and Cosmology of Theories with Submillimeter Dimensions and TeV Scale Quantum Gravity*, Phys. Rev. **D59** (1999) 086004, [hep-ph/9807344](#).
- [107] K. R. Dienes, E. Dudas, T. Gherghetta, and A. Riotto, *Cosmological Phase Transitions and Radius Stabilization in Higher Dimensions*, Nucl. Phys. **B543** (1999) 387, [hep-ph/9809406](#).
- [108] J. Scherk, *Extended Supersymmetry and Extended Supergravity Theories, Cargèse*, NATO Advanced Study Institute on Gravitation: Recent Developments, Cargèse, France (1978).
- [109] M. J. Duff, B. E. W. Nilsson, and C. N. Pope, *Kaluza–Klein Supergravity*, Phys. Rept. **130** (1986) 1.
- [110] K. Nomizu, *Introduction to Modern Differential Geometry*. Tokyo: Shokabo, 1981.

- [111] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*. Adam Hilger, IOP, 1990.
- [112] Y. M. Cho and P. G. O. Freund, *Nonabelian Gauge Fields in Nambu–Goldstone Fields*, Phys. Rev. **D12** (1975) 1711.
- [113] Y. M. Cho and P. S. Jang, *Unified Geometry of Internal Space with Space-Time*, Phys. Rev. **D12** (1975) 3789.
- [114] E. Cremmer and B. Julia, *The $\mathcal{N} = 8$ Supergravity Theory. I: The lagrangian*, Phys. Lett. **80B** (1978) 48.
- [115] E. Cremmer and B. Julia, *The $SO(8)$ Supergravity*, Nucl. Phys. **B159** (1979) 141.
- [116] B. Julia, *Group Disintegrations*, Invited paper presented at Nuffield Gravity Workshop, Cambridge, England (1980).
- [117] S. Ferrara, J. Scherk, and B. Zumino, *Algebraic Properties of Extended Supergravity Theories*, Nucl. Phys. **B121** (1977) 393.
- [118] C. G. Callan, C. Lovelace, C. R. Nappi, and S. A. Yost, *Loop Corrections to Superstring Equations of Motion*, Nucl. Phys. **B308** (1988) 221.
- [119] M. Li, *Dirichlet Boundary State in Linear Dilaton Background*, Phys. Rev. **D54** (1996) 1644–1646, [hep-th/9512042](#).
- [120] M. J. Duff and J. X. Lu, *Remarks on String / Five-Brane Duality*, Nucl. Phys. **B354** (1991) 129–140.
- [121] M. J. Duff and J. X. Lu, *String / Five-Brane Duality, Loop Expansions and the Cosmological Constant*, Nucl. Phys. **B357** (1991) 534–546.
- [122] P. Binétruy, *Dilaton, Moduli and String / Five-Brane Duality as Seen from Four-Dimensions*, Phys. Lett. **B315** (1993) 80–87, [hep-th/9305069](#).
- [123] J. Ellis, S. Kelley, and D. V. Nanopoulos, *Probing the Desert using Gauge Coupling Unification*, Phys. Lett. **B260** (1991) 131–137.
- [124] P. Langacker and M.-X. Luo, *Implications of Precision Electroweak Experiments for m_t , ρ_0 , $\sin^2\theta_W$ and Grand Unification*, Phys. Rev. **D44** (1991) 817–822.
- [125] M. Dine and N. Seiberg, *Couplings and Scales in Superstring Models*, Phys. Rev. Lett. **55** (1985) 366.
- [126] V. S. Kaplunovsky, *Mass Scales of the String Unification*, Phys. Rev. Lett. **55** (1985) 1036.
- [127] K. R. Dienes, *String Theory and the Path to Unification: A Review of Recent Developments*, Phys. Rept. **287** (1997) 447–525, [hep-th/9602045](#).

- [128] E. Witten, *Strong Coupling Expansion of Calabi–Yau Compactification*, Nucl. Phys. **B471** (1996) 135–158, [hep-th/9602070](#).
- [129] I. Antoniadis, G. D’Appollonio, E. Dudas, and A. Sagnotti, *Partial Breaking of Supersymmetry, Open Strings and M theory*, [hep-th/9812118](#).
- [130] I. Antoniadis, E. Dudas, and A. Sagnotti, *Supersymmetry Breaking, Open Strings and M theory*, [hep-th/9807011](#).
- [131] L. E. Ibáñez, R. Rabadan, and A. M. Uranga, *Anomalous $U(1)$ ’s in type I and type IIB $D = 4$, $\mathcal{N} = 1$ string vacua*, Nucl. Phys. **B542** (1999) 112, [hep-th/9808139](#).
- [132] J. Mourad, *Anomalies of the $SO(32)$ Five-Brane and their Cancellation*, Nucl. Phys. **B512** (1998) 199, [hep-th/9709012](#).
- [133] P. Candelas, G. T. Horowitz, A. Strominger, and E. Witten, *Vacuum Configurations for Superstrings*, Nucl. Phys. **B258** (1985) 46.
- [134] P. Candelas, *Lectures on Complex Manifolds*, Trieste 1987, Proceedings (1987).
- [135] G. T. Horowitz, *What is a Calabi–Yau Space ?*, Proceedings of Workshop on Unified String Theories, Santa Barbara, CA, Jul 29 – Aug 16, 1985 (1986).
- [136] J. Polchinski, *String Theory. II: Superstring Theory and Beyond*. Cambridge University Press, 1998.
- [137] E. Calabi, *On Kähler Manifolds with Vanishing Canonical Class*, *Algebraic Geometry and Topology*, Algebraic Geometry and Topology: A Symposium in Honor of S. Lefschetz (1955) 78.
- [138] S.-T. Yau, *Calabi’s Conjecture and Some New Results in Algebraic Geometry*, Proc. Nat. Acad. Sci. **74** (1977) 1798–1799.
- [139] E. Witten, *Dimensional Reduction of Superstring Models*, Phys. Lett. **155B** (1985) 151.
- [140] J. Scherk and J. H. Schwarz, *Spontaneous Breaking of Supersymmetry through Dimensional Reduction*, Phys. Lett. **82B** (1979) 60.
- [141] J. Scherk and J. H. Schwarz, *How to Get Masses from Extra Dimensions*, Nucl. Phys. **B153** (1979) 61–88.
- [142] C. Kounnas and M. Porrati, *Spontaneous Supersymmetry Breaking in String Theory*, Nucl. Phys. **B310** (1988) 355.
- [143] S. Ferrara, C. Kounnas, M. Porrati, and F. Zwirner, *Superstrings with Spontaneously Broken Supersymmetry and their Effective Theories*, Nucl. Phys. **B318** (1989) 75.

- [144] I. Antoniadis and M. Quiros, *Large radii and string unification*, Phys. Lett. **B392** (1997) 61, [hep-th/9609209](#).
- [145] J. Goldstone, *Field Theories with ‘Superconductor’ Solutions*, Nuovo Cim. **19** (1961) 154.
- [146] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, *Broken Symmetries*, Phys. Rev. **127** (1962) 965.
- [147] P. W. Higgs, *Broken Symmetries, Massless Particles and Gauge Fields*, Phys. Lett. **12** (1964) 132.
- [148] P. W. Higgs, *Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons*, Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 508.
- [149] P. W. Higgs, *Spontaneous Symmetry Breakdown without Massless Bosons*, Phys. Rev. **145** (1966) 1156.
- [150] F. Englert and R. Brout, *Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons*, Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 321.
- [151] G. S. Guralnik, C. R. Hagen, and T. W. B. Kibble, *Global Conservation Laws and Massless Particles*, Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 585.
- [152] T. W. B. Kibble, *Symmetry Breaking in Nonabelian Gauge Theories*, Phys. Rev. **155** (1967) 1554–1561.
- [153] S. Weinberg, *Approximate Symmetries and Pseudo-Goldstone Bosons*, Phys. Rev. Lett. **29** (1972) 1698–1701.
- [154] J. Bernstein, S. Fubini, M. Gell-Mann, and W. Thirring, *On the Decay Rate of the Charged Pion*, Nuovo Cim. **17** (1960) 757.
- [155] M. Gell-Mann and M. Levy, *The Axial Vector Current in Beta Decay*, Nuovo Cim. **16** (1960) 705.
- [156] Y. Ne’eman, *Derivation of Strong Interactions from a Gauge Invariance*, Nucl. Phys. **26** (1961) 222–229.
- [157] M. Gell-Mann, *Nonleptonic Weak Decays and the Eightfold Way*, Phys. Rev. Lett. **12** (1964) 155–156.
- [158] G. ’t Hooft and M. Veltman, *Combinatorics of Gauge Fields*, Nucl. Phys. **B50** (1972) 318–353.
- [159] B. W. Lee and J. Zinn-Justin, *Spontaneously Broken Gauge Symmetries. I: Preliminaries*, Phys. Rev. **D5** (1972) 3121.
- [160] B. W. Lee and J. Zinn-Justin, *Spontaneously Broken Gauge Symmetries. II: Perturbation Theory and Renormalization*, Phys. Rev. **D5** (1972) 3137.

- [161] B. W. Lee and J. Zinn-Justin, *Spontaneously Broken Gauge Symmetries. III: Equivalence*, Phys. Rev. **D5** (1972) 3155.
- [162] B. W. Lee and J. Zinn-Justin, *Spontaneously Broken Gauge Symmetries. IV: General Gauge Formulation*, Phys. Rev. **D7** (1973) 1049.
- [163] B. W. Lee, *Renormalization of Gauge Theories Unbroken and Broken*, Phys. Rev. **D9** (1974) 933–946.
- [164] P. Anderson, *Plasmons, Gauge Invariance and Mass*, Phys. Rev. **130** (1963) 439.
- [165] J. Bardeen, L. Cooper, and J. Schrieffer, *Theory of Superconductivity*, Phys. Rev. **108** (1957) 1175.
- [166] S. L. Glashow, *Partial Symmetries of Weak Interactions*, Nucl. Phys. **22** (1961) 579.
- [167] S. Weinberg, *A Model of Leptons*, Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1264.
- [168] A. Salam, *Weak and Electromagnetic Interactions*,. Elementary Particle Theory, Proceedings Of The Nobel Symposium Held 1968 At Lerum, Sweden, Stockholm 1968, 367–377.
- [169] D. J. Gross and F. Wilczek, *Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories*, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1343.
- [170] H. D. Politzer, *Reliable Perturbative Results for Strong Interactions ?*, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1346.
- [171] D. J. Gross and F. Wilczek, *Asymptotically Free Gauge Theories. I*, Phys. Rev. **D8** (1973) 3633.
- [172] D. J. Gross and F. Wilczek, *Asymptotically Free Gauge Theories. II*, Phys. Rev. **D9** (1974) 980–993.
- [173] H. Georgi and S. L. Glashow, *Unified Weak and Electromagnetic Interactions without Neutral Currents*, Phys. Rev. Lett. **28** (1972) 1494.
- [174] N. Cabibbo, *Unitary Symmetry and Leptonic Decays*, Phys. Rev. Lett. **10** (1963) 531.
- [175] S. L. Glashow, J. Iliopoulos, and L. Maiani, *Weak Interactions with Lepton – Hadron Symmetry*, Phys. Rev. **D2** (1970) 1285.
- [176] J. J. Aubert *et al.* , *Experimental Observation of a Heavy Particle J* , Phys. Rev. Lett. **33** (1974) 1404.
- [177] J. E. Augustin *et al.* , *Discovery of a Narrow Resonance in $e^+ e^-$ Annihilation*, Phys. Rev. Lett. **33** (1974) 1406–1408.

- [178] M. L. Perl *et al.*, *Evidence for Anomalous Lepton Production in $e^+ e^-$ Annihilation*, Phys. Rev. Lett. **35** (1975) 1489.
- [179] S. W. Herb *et al.*, *Observation of a Dimuon Resonance at 9.5 GeV in 400 GeV Proton – Nucleus Collisions*, Phys. Rev. Lett. **39** (1977) 252.
- [180] UA1 Collaboration, G. Arnison *et al.*, *Experimental Observation of Isolated Large Transverse Energy Electrons with Associated Missing Energy at $\sqrt{s} = 540$ GeV*, Phys. Lett. **B122** (1983) 103–116.
- [181] CDF Collaboration, F. Abe *et al.*, *Observation of Top Quark Production in Anti- p p Collisions*, Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 2626–2631, [hep-ex/9503002](#).
- [182] D0 Collaboration, S. Abachi *et al.*, *Observation of the Top Quark*, Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 2632–2637, [hep-ex/9503003](#).
- [183] C. Bouchiat, J. Iliopoulos, and P. Meyer, *An Anomaly Free Version of Weinberg’s Model*, Phys. Lett. **38B** (1972) 519.
- [184] H. Georgi, *Particles and Fields*,. American Institute of Physics, New York.
- [185] J. P. Derendinger and C. A. Savoy, *Quantum Effects and $SU(2) \times U(1)$ Breaking in Supergravity Gauge Theories*, Nucl. Phys. **B237** (1984) 307.
- [186] A. Bouquet, J. Kaplan, and C. A. Savoy, *Low-energy Constraints on Supergravity Parameters*, Nucl. Phys. **B262** (1985) 299.
- [187] A. Bouquet, J. Kaplan, and C. A. Savoy, *On Flavor Mixing in Broken Supergravity*, Phys. Lett. **148B** (1984) 69.
- [188] P. Brax and C. A. Savoy, *Flavor Changing Neutral Current Effects from Flavor Dependent Supergravity Couplings*, Nucl. Phys. **B447** (1995) 227–251, [hep-ph/9503306](#).
- [189] M. Kobayashi and T. Maskawa, *CP Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction*, Prog. Theor. Phys. **49** (1973) 652.
- [190] L. Wolfenstein, *Parametrization of the Kobayashi–Maskawa Matrix*, Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 1945.
- [191] M. Olechowski and S. Pokorski, *Heavy Top Quark and Scale Dependence of Quark Mixing*, Phys. Lett. **B257** (1991) 388–392.
- [192] J. Gasser and H. Leutwyler, *Quark Masses*, Phys. Rept. **87** (1982) 77–169.
- [193] P. Ramond, R. G. Roberts, and G. G. Ross, *Stitching the Yukawa Quilt*, Nucl. Phys. **B406** (1993) 19–42, [hep-ph/9303320](#).
- [194] P. A. M. Dirac, *???*, Proc. Roy. Soc. Lond. **A165** (1938) 199.

- [195] P. A. M. Dirac, *???*, *Nature* **139** (1937) 323.
- [196] G. 't Hooft, *Naturalness, Chiral Symmetry, and Spontaneous Chiral Symmetry Breaking*, Lecture given at Cargèse Summer Institute, Cargèse, France (1979).
- [197] T. Banks and L. J. Dixon, *Constraints on String Vacua with Space-Time Supersymmetry*, *Nucl. Phys.* **B307** (1988) 93–108.
- [198] M. Kamionkowski and J. March-Russell, *Are Textures Natural ?*, *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 1485–1488, [hep-th/9201063](#).
- [199] R. Holman, S. D. H. Hsu, E. W. Kolb, R. Watkins, and L. M. Widrow, *Cosmological Texture is Incompatible with Planck Scale Physics*, *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 1489–1492.
- [200] C. D. Froggatt and H. B. Nielsen, *Hierarchy of Quark Masses, Cabibbo Angles and CP Violation*, *Nucl. Phys.* **B147** (1979) 277.
- [201] S. Lavignac, *Le problème des hiérarchies de masses dans les modèles supersymétriques*. Thèse de doctorat, Université Paris XI, 1997.
- [202] S. Weinberg, *Implications of Dynamical Symmetry Breaking*, *Phys. Rev.* **D13** (1976) 974–996.
- [203] L. Susskind, *Dynamics of Spontaneous Symmetry Breaking in the Weinberg–Salam Theory*, *Phys. Rev.* **D20** (1979) 2619.
- [204] J. C. Pati and A. Salam, *Lepton Number as the Fourth Color*, *Phys. Rev.* **D10** (1974) 275–289.
- [205] O. W. Greenberg and J. Sucher, *A Quantum Structure Dynamic Model of Quarks, Leptons, Weak Vector Bosons, and Higgs Mesons*, *Phys. Lett.* **99B** (1981) 339.
- [206] B. Pendleton and G. G. Ross, *Mass and Mixing Angle Predictions from Infrared Fixed Points*, *Phys. Lett.* **B98** (1981) 291.
- [207] W. A. Bardeen, M. Carena, S. Pokorski, and C. E. M. Wagner, *Infrared Fixed Point Solution for the Top Quark Mass and Unification of Couplings in the MSSM*, *Phys. Lett.* **B320** (1994) 110–116, [hep-ph/9309293](#).
- [208] M. Lanzagorta and G. G. Ross, *Infrared Fixed Points Revisited*, *Phys. Lett.* **B349** (1995) 319–328, [hep-ph/9501394](#).
- [209] M. Quirós, *Higgs Bosons in the standard model and the minimal supersymmetric standard model*, [hep-ph/9609392](#).
- [210] S. Weinberg, *Ambiguous Solutions of Supersymmetric Theories (F1)*, *Phys. Lett.* **62B** (1976) 111.

- [211] E. Gildener and S. Weinberg, *Symmetry Breaking and Scalar Bosons*, Phys. Rev. **D13** (1976) 3333.
- [212] P. Fayet, *Supersymmetry and Weak, Electromagnetic and Strong Interactions*, Phys. Lett. **64B** (1976) 159.
- [213] P. Fayet, *Spontaneously Broken Supersymmetric Theories of Weak, Electromagnetic and Strong Interactions*, Phys. Lett. **69B** (1977) 489.
- [214] S. L. Glashow and S. Weinberg, *Natural Conservation Laws for Neutral Currents*, Phys. Rev. **D15** (1977) 1958.
- [215] R. Barbieri, S. Ferrara, and C. A. Savoy, *Gauge Models with Spontaneously Broken Local Supersymmetry*, Phys. Lett. **119B** (1982) 343.
- [216] S. K. Soni and H. A. Weldon, *Analysis of the Supersymmetry Breaking Induced by $\mathcal{N} = 1$ Supergravity Theories*, Phys. Lett. **126B** (1983) 215.
- [217] L. J. Hall and L. Randall, *Weak Scale Effective Supersymmetry*, Phys. Rev. Lett. **65** (1990) 2939–2942.
- [218] M. Dine, R. Leigh, and A. Kagan, *Flavor Symmetries and the Problem of Squark Degeneracy*, Phys. Rev. **D48** (1993) 4269–4274, hep-ph/9304299.
- [219] P. Pouliot and N. Seiberg, *(S)quark Masses and Nonabelian Horizontal Symmetries*, Phys. Lett. **B318** (1993) 169–173, hep-ph/9308363.
- [220] K. S. Babu and S. M. Barr, *Gauged $SO(3)$ Family Symmetry and Squark Mass Degeneracy*, Phys. Lett. **B387** (1996) 87–98, hep-ph/9606384.
- [221] P. Binétruy and P. Ramond, *Yukawa Textures and Anomalies*, Phys. Lett. **B350** (1995) 49–57, hep-ph/9412385.
- [222] L. E. Ibáñez, *Computing the Weak Mixing Angle from Anomaly Cancellation*, Phys. Lett. **B303** (1993) 55–62, hep-ph/9205234.
- [223] L. Ibáñez and G. G. Ross, *Fermion Masses and Mixing Angles from Gauge Symmetries*, Phys. Lett. **B332** (1994) 100–110, hep-ph/9403338.
- [224] M. Dine, N. Seiberg, and E. Witten, *Fayet–Iliopoulos Terms in String Theory*, Nucl. Phys. **B289** (1987) 589.
- [225] J. J. Atick, L. J. Dixon, and A. Sen, *String Calculation of Fayet–Iliopoulos D Terms in Arbitrary Supersymmetric Compactifications*, Nucl. Phys. **B292** (1987) 109–149.
- [226] P. Fayet and J. Iliopoulos, *Spontaneously Broken Supergauge Symmetries and Goldstone Spinors*, Phys. Lett. **B51** (1974) 461.

- [227] V. S. Kaplunovsky and J. Louis, *Model Independent Analysis of Soft Terms in Effective Supergravity and in String Theory*, Phys. Lett. **B306** (1993) 269–275, [hep-th/9303040](#).
- [228] M. B. Green and J. H. Schwarz, *Infinity Cancellations in $SO(32)$ Superstring Theory*, Phys. Lett. **151B** (1985) 21–25.
- [229] J. Polchinski and Y. Cai, *Consistency of Open Superstring Theories*, Nucl. Phys. **B296** (1988) 91.
- [230] N. Sakai and I. Senda, *Vacuum Energies of String Compactified on Torus*, Prog. Theor. Phys. **75** (1986) 692.
- [231] S. Ferrara, . D. Lüst, and S. Theisen, *Target Space Modular Invariance and Low-Energy Couplings in Orbifold Compactifications*, Phys. Lett. **B233** (1989) 147.
- [232] M. Cvetič, A. Font, L. E. Ibáñez, D. Lüst, and F. Quevedo, *Target Space Duality, Supersymmetry Breaking and the Stability of Classical String Vacua*, Nucl. Phys. **B361** (1991) 194–232.
- [233] L. E. Ibáñez and D. Lüst, *Duality Anomaly Cancellation, Minimal String Unification and the Effective Low-Energy Lagrangian of 4-D Strings*, Nucl. Phys. **B382** (1992) 305–364, [hep-th/9202046](#).
- [234] A. Brignole, L. E. Ibáñez, and C. Muñoz, *Towards a Theory of Soft Terms for the Supersymmetric Standard Model*, Nucl. Phys. **B422** (1994) 125–171, [hep-ph/9308271](#).
- [235] A. Brignole, L. E. Ibáñez, C. Muñoz, and C. Scheich, *Some Issues in Soft SUSY Breaking Terms from Dilaton / Moduli Sectors*, Z. Phys. **C74** (1997) 157, [hep-ph/9508258](#).
- [236] E. Dudas, S. Pokorski, and C. A. Savoy, *Soft Scalar Masses in Supergravity with Horizontal $U(1)_X$ Gauge Symmetry*, Phys. Lett. **B369** (1996) 255–261, [hep-ph/9509410](#).
- [237] Y. Kawamura and T. Kobayashi, *Soft Scalar Masses in String Models with Anomalous $U(1)$ Symmetry*, Phys. Lett. **B375** (1996) 141–148, [hep-ph/9601365](#).
- [238] M. Leurer, Y. Nir, and N. Seiberg, *Mass Matrix Models*, Nucl. Phys. **B398** (1993) 319–342, [hep-ph/9212278](#).
- [239] M. Leurer, Y. Nir, and N. Seiberg, *Mass Matrix Models: The Sequel*, Nucl. Phys. **B420** (1994) 468–504, [hep-ph/9310320](#).
- [240] Y. Nir and N. Seiberg, *Should Squarks Be Degenerate ?*, Phys. Lett. **B309** (1993) 337–343, [hep-ph/9304307](#).

- [241] H. P. Nilles, *Supersymmetry, Supergravity and Particle Physics*, Phys. Rept. **110** (1984) 1.
- [242] H. E. Haber and G. L. Kane, *The Search for Supersymmetry: Probing Physics beyond the Standard Model*, Phys. Rept. **117** (1985) 75.
- [243] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry, I*. New-York: Interscience, 1963.
- [244] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry, II*. New-York: Interscience, 1969.
- [245] K. Huang, *Quarks, Leptons and Gauge Fields*. Singapore: World Scientific, 1982.
- [246] W. Pauli, *Contributions Mathématiques à la théorie des Matrices de Dirac*, Ann. Inst. Poincaré **6** (1936) 109.
- [247] K. Case, *Biquadratic Spinor Identities*, Phys. Rev. **97** (1955) 810.
- [248] A. Pais, *On Spinors in n Dimensions*, J. Math Phys. **3** (1962) 1135.
- [249] T. Kugo and P. Townsend, *Supersymmetry and the Division Algebras*, Nucl. Phys. **B221** (1983) 357.
- [250] S. Naito, K. Osada, and T. Fukui, *Fierz Identities and Invariance of Eleven-Dimensional Supergravity Action*, Phys. Rev. **D34** (1986) 536.
- [251] C. Wetterich, *Chirality Index and Dimensional Reduction of Fermions*, Nucl. Phys. **B223** (1983) 109.
- [252] C. Wetterich, *Dimensional Reduction of Weyl, Majorana and Majorana-Weyl Spinors*, Nucl. Phys. **B222** (1983) 20.
- [253] C. Wetterich, *Massless Spinors in more than Four-Dimensions*, Nucl. Phys. **B211** (1983) 177.
- [254] W. Nahm, *Supersymmetries and Their Representations*, Nucl. Phys. **B135** (1978) 149.
- [255] J. Strathdee, *Extended Poincaré Supersymmetry*, Int. J. Mod. Phys. **A2** (1987) 273.
- [256] S. Ferrara, C. A. Savoy, and B. Zumino, *General Massive Multiplets in Extended Supersymmetry*, Phys. Lett. **100B** (1981) 393.
- [257] S. Ferrara and C. A. Savoy, *Representations of Extended Supersymmetry on One and Two Particle States*, Lectures given at the Spring School on Supergravity, ICTP, Trieste (1981).

- [258] Y. Tanii, *Introduction to Supergravities in Diverse Dimensions*, hep-th/9802138.
- [259] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*. Princeton University Press, 1983.
- [260] J.-P. Derendinger, *Lecture Notes on Globally Supersymmetric Theories in Four-Dimensions and Two-Dimensions*. ETH-TH-90-21, 1990.
- [261] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields. I: Foundations*. Cambridge University Press, 1995.

Résumé

La théorie électrofaible de Glashow–Salam–Weinberg est l’une des plus belles réussites de la théorie des champs ; elle est testée avec une grande précision dans les expériences de physique des particules. Néanmoins, cette théorie souffre de quelques insuffisances en ce sens qu’un certain nombre de paramètres, notamment ceux caractérisant la masse des particules élémentaires, prennent des valeurs peu naturelles au sens de ’t Hooft. De surcroît, les forces de gravitation, dont la quantification pose de sérieuses difficultés, ne sont pas prises en compte. L’objet de cette thèse est l’étude de théories d’extension du modèle standard inspirées de la théorie des cordes. Cette étude possède un aspect théorique avec la construction de théories effectives décrivant la dynamique d’objets solitoniques de la théorie des cordes en couplage fort, et offre également une approche plus phénoménologique par l’examen des conséquences, observables à basse énergie, des symétries des théories à haute énergie : ces symétries pourraient par exemple être à l’origine de la hiérarchie de masse des fermions. Il est également montré comment caractériser le vide de la théorie des cordes en couplage fort par les propriétés géométriques de l’espace compactifié, caractérisation conduisant à une solution phénoménologiquement acceptable aux problèmes de l’unification de la gravitation et de la brisure spontanée de la supergravité.

Symétries et brisures de symétries au-delà de la théorie électrofaible

Résumé

La théorie électrofaible de Glashow–Salam–Weinberg est l’une des plus belles réussites de la théorie des champs ; elle est testée avec une grande précision dans les expériences de physique des particules. Néanmoins, cette théorie souffre de quelques insuffisances en ce sens qu’un certain nombre de paramètres, notamment ceux caractérisant la masse des particules élémentaires, prennent des valeurs peu naturelles au sens de ’t Hooft. De surcroît, les forces de gravitation, dont la quantification pose de sérieuses difficultés, ne sont pas prises en compte. L’objet de cette thèse est l’étude de théories d’extension du modèle standard inspirées de la théorie des cordes. Cette étude possède un aspect théorique avec la construction de théories effectives décrivant la dynamique d’objets solitoniques de la théorie des cordes en couplage fort, et offre également une approche plus phénoménologique par l’examen des conséquences, observables à basse énergie, des symétries des théories à haute énergie : ces symétries pourraient par exemple être à l’origine de la hiérarchie de masse des fermions. Il est également montré comment caractériser le vide de la théorie des cordes en couplage fort par les propriétés géométriques de l’espace compactifié, caractérisation conduisant à une solution phénoménologiquement acceptable aux problèmes de l’unification de la gravitation et de la brisure spontanée de la supergravité.

Mots-clés

Supersymétrie, Supergravité, Supercordes, M théorie, Symétries de dualité, Hiérarchie de jauge et hiérarchie de masse, Unification, Physique des saveurs.