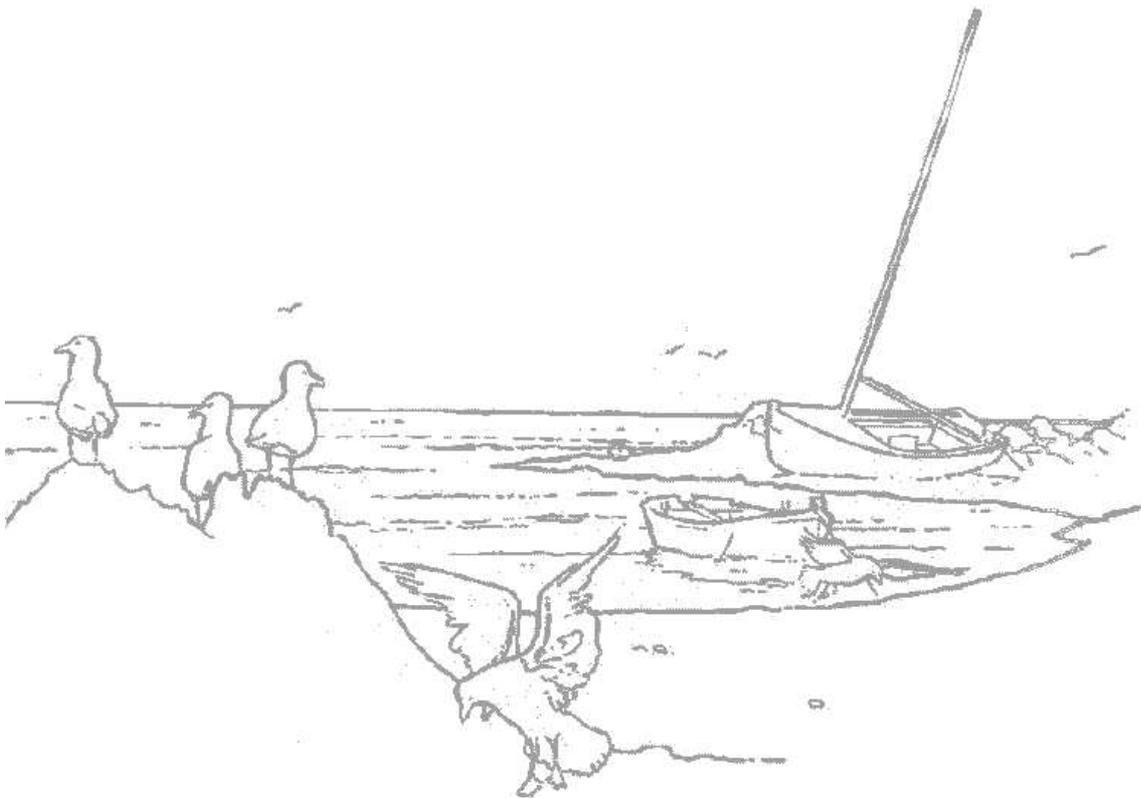


Méthodes de théorie des champs pour les polymères et les membranes polymérisées

Emmanuel Gutter*,
Service de Physique Théorique,
C.E.A. Saclay, F-91191 Gif sur Yvette Cedex, France



Cours donné à l'Ecole de Physique de la Matière Condensée/ 25 août-6 septembre 1997/ Beg-Rohu, France

* e-mail: gutter@spht.saclay cea.fr

où n_i dénote le nombre de pas dans la direction i du réseau qui doit être le même dans un sens et dans l'autre le long de cette direction et $C(n_1, n_2, \dots, n_d)$ un facteur combinatoire. Pour N grand, on peut remplacer la somme (1.3) par une intégrale et évaluer $Z_{\text{fermé}}$ comme suit. Le facteur $C(n_1, n_2, \dots, n_d)$ est maximal pour $n_i = \frac{N}{2d} \forall i$. On écrit:

$$n_i = \frac{N}{2d} + \epsilon_i \quad , \quad \sum_{i=1}^d \epsilon_i = 0 \quad (1.4)$$

et on utilise la formule de Stirling

$$n! \underset{n \gg 1}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} = \exp \left[n \ln(n) - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n) \right] . \quad (1.5)$$

On a alors

$$\begin{aligned} n_i! &\sim \exp \left[\frac{N}{2d} \ln\left(\frac{N}{2d}\right) - \frac{N}{2d} + \frac{1}{2} \ln\left(2\pi \frac{N}{2d}\right) + \epsilon_i \ln\left(\frac{N}{2d}\right) + \frac{\epsilon_i^2}{2} \left(\frac{2d}{N}\right) \right] \\ &= \left(\frac{N}{2de}\right)^{\frac{N}{2d}} \sqrt{\frac{\pi N}{d}} \exp \left[\epsilon_i \ln\left(\frac{N}{2d}\right) + \epsilon_i^2 \left(\frac{d}{N}\right) \right] , \end{aligned} \quad (1.6)$$

et donc

$$\begin{aligned} Z_{\text{fermé}} &\sim \left(\frac{N}{e}\right)^N \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{2de}\right)^{-N} \left(\frac{\pi N}{d}\right)^{-d} \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^d d\epsilon_i \delta\left(\sum_{i=1}^d \epsilon_i\right) \exp \left[-\left(\sum_{i=1}^d \epsilon_i\right) 2 \ln\left(\frac{N}{2d}\right) - \left(\sum_{i=1}^d \epsilon_i^2\right) \left(\frac{2d}{N}\right) \right] \\ &= (2d)^N \sqrt{2\pi N} \left(\frac{\pi N}{d}\right)^{-d} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon \exp \left[ik\epsilon - \left(\frac{2d}{N}\right) \epsilon^2 \right]}_{\left(\sqrt{\frac{\pi N}{2d}}\right)^d \exp\left[-\frac{k^2 N}{8}\right]} \right)^d}_{\left(\sqrt{\frac{\pi N}{2d}}\right)^d \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{8\pi}{N}}} \quad (1.7) \\ &= 2 \left(\frac{d}{2\pi}\right)^{\frac{d}{2}} (2d)^N N^{-\frac{d}{2}} . \end{aligned}$$

On définit l'exposant α par

$$Z_{\text{fermé}} \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} \mu^N N^{\alpha-2} . \quad (1.8)$$

On vérifie que la valeur de μ , qui traduit un nombre de choix local, ne dépend pas des effets de bord et est la même pour les chemins ouverts et fermés. L'exposant α est un nouvel (indépendant de γ) exposant universel et vaut $\alpha = 2 - \frac{d}{2}$.

Pour $d = 1$, le calcul se simplifie puisque

$$Z_{\text{fermé}} = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2}\right)! \left(\frac{N}{2}\right)!} \sim \frac{\left(\frac{N}{e}\right)^N \sqrt{2\pi N}}{\left(\frac{N}{2e}\right)^N \pi N} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^N N^{-\frac{1}{2}} . \quad (1.9)$$

1.1.2 Distance bout à bout, exposant ν :

Dénotant \vec{r}_{i-1} et \vec{r}_i les positions des extrémités du i -ème maillon et $\vec{u}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}$ (tel que $|\vec{u}_i| = a$ où a est la taille des liens du réseau), la distance bout à bout s'écrit

$$\vec{r}_N - \vec{r}_0 = \sum_{i=1}^N \vec{u}_i \quad (1.10)$$

de sorte que

$$\begin{aligned} (\vec{r}_N - \vec{r}_0)^2 &= \sum_{i,j=1}^N \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j \\ &= \sum_{i=1}^N (\vec{u}_i)^2 + 2 \sum_{i<j}^N \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j \\ &= N a^2 + 2 \sum_{i<j}^N \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j . \end{aligned} \quad (1.11)$$

En prenant la moyenne sur toutes les configurations accessibles, on obtient

$$\begin{aligned} R_{BB}^2 &\equiv \langle (\vec{r}_N - \vec{r}_0)^2 \rangle \\ &= N a^2 + 2 \sum_{i<j} \underbrace{\langle \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j \rangle}_{=0} = N a^2 , \end{aligned} \quad (1.12)$$

et donc

$$R_{BB} = a N^{\frac{1}{2}} \quad (1.13)$$

De manière générale, on définit l'exposant critique ν par

$$R_{BB} \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} N^\nu . \quad (1.14)$$

Pour le chemin Brownien, on a donc $\nu = \frac{1}{2}$.

De même, on peut définir le rayon de giration moyen du polymère par

$$R_G^2 \equiv \left\langle \frac{1}{2(N+1)^2} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 \right\rangle . \quad (1.15)$$

On obtient aisément comme pour R_{BB}

$$R_G^2 = \frac{1}{6} \left(\frac{N+2}{N+1} \right) N a^2 \quad (1.16)$$

et le même comportement $R_G \sim N^\nu$ que R_{BB} à grand N .

La valeur de ν peut être retrouvée par un simple argument d'échelle concernant la probabilité de retour à l'origine

$$\text{Proba} (\vec{r}_N - \vec{r}_0 = \vec{0}) = \frac{Z_{\text{fermé}}}{Z_{\text{ouvert}}} . \quad (1.17)$$

On s'attend à ce que cette probabilité se comporte comme $(\frac{a}{R_G})^d$, c'est à dire le rapport entre le volume de la cellule élémentaire autour de \vec{r}_0 et le volume exploré par le polymère. En comparant avec (1.17), on lit:

$$\frac{(2d)^N N^{-\frac{d}{2}}}{(2d)^N} \propto \left(\frac{1}{N^\nu} \right)^d \quad (1.18)$$

qui donne immédiatement $\nu = 1/2$. De manière générale, on peut introduire une fonction d'échelle f par

$$\text{Proba} (\vec{r}_N - \vec{r}_0 = \vec{r}) = \left(\frac{a}{R_G} \right)^d f \left(\frac{|\vec{r}|}{R_G} \right) \quad (1.19)$$

et définir un exposant θ par

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^\theta . \quad (1.20)$$

Cet exposant est nul pour un chemin Brownien car la probabilité de retour à l'origine est non nulle. En revanche, pour un polymère auto-évitant qui ne peut repasser au même endroit, on a $\theta > 0$. Reproduisant l'argument ci-dessus de probabilité de retour à l'origine, on obtient directement la relation d'échelle

$$(\alpha - 2) - (\gamma - 1) = -\nu d - \nu\theta. \quad (1.21)$$

De manière remarquable, on peut montrer dans certains cas une relation plus forte que (1.21), dite d'"hyperscaling", à savoir:

$$\begin{aligned} \alpha - 2 &= -\nu d \\ \gamma - 1 &= \nu\theta . \end{aligned} \quad (1.22)$$

1.1.3 Probabilité $P(\vec{m}, n)$, équation de diffusion:

Revenons maintenant pour le chemin Brownien à la probabilité (1.19) que $\vec{r}_N - \vec{r}_0$ soit égal à \vec{r} . Plus généralement, partant de l'origine $\vec{r}_0 = \vec{0}$, définissons la probabilité $P(\vec{m}, n)$ d'arriver en n pas au point $\vec{m}a$ du réseau hypercubique, avec $\vec{m} = (m_1, m_2, \dots, m_d)$ un d -uplet d'entiers. On a

$$\begin{aligned}
P(\vec{m}, n) &= \left(\frac{1}{2d}\right)^n \sum_{\substack{n_1, \dots, n_d \\ n'_1, \dots, n'_d \\ n_i - n'_i = m_i \ \forall i \\ \sum_{i=1}^d (n_i + n'_i) = n}} \frac{n!}{\prod_{i=1}^d (n_i!)(n'_i!)} \\
&= \left(\frac{1}{2d}\right)^n \times \text{coeff. de } e^{i(\Phi_1 m_1 + \dots + \Phi_d m_d)} \text{ dans } (e^{i\Phi_1} + e^{-i\Phi_1} + \dots + e^{i\Phi_d} + e^{-i\Phi_d})^n \\
&= \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d^d \vec{\Phi}}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{\Phi} \cdot \vec{m}} \left(\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \cos \Phi_i\right)^n,
\end{aligned} \tag{1.23}$$

où $\vec{\Phi} = (\Phi_1, \dots, \Phi_d)$. Il est à remarquer que l'expression (1.23) n'est non nulle que si n et $m_1 + \dots + m_d$ sont de même parité.

La formule (1.23) donne une autre façon d'évaluer $Z_{\text{fermé}}$ par

$$Z_{\text{fermé}} = (2d)^N P(\vec{m} = \vec{0}, n = N) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d^d \vec{\Phi}}{(2\pi)^d} \left(\sum_{i=1}^d 2 \cos \Phi_i\right)^N. \tag{1.24}$$

Pour N grand et pair, l'intégrale ci-dessus a deux cols à $\Phi_i = 0 \ \forall i$ et $\Phi_i = \pm\pi \ \forall i$ qui donnent la même contribution. Développant par exemple autour du col à $\vec{\Phi} = \vec{0}$ et posant $\Phi_i = \frac{\varphi_i}{\sqrt{N}}$, on obtient à N grand

$$\begin{aligned}
Z_{\text{fermé}} &\sim 2 \times \frac{2^N}{(2\pi)^d} \frac{1}{N^{\frac{d}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} d^d \vec{\varphi} e^{N \ln d - \sum_{i=1}^d \frac{\varphi_i^2}{2d}} \\
&= 2 \frac{2^N}{(2\pi)^d} d^N \left(\frac{2\pi d}{N}\right)^{\frac{d}{2}} \\
&= 2 \left(\frac{d}{2\pi}\right)^{\frac{d}{2}} (2d)^N N^{-\frac{d}{2}} \text{ CQFD.}
\end{aligned} \tag{1.25}$$

La probabilité $P(\vec{m}, n)$ peut être obtenue comme la solution d'une équation de diffusion reliant à l'étape $n + 1$ les positions \vec{r}_n et \vec{r}_{n+1} . On a

$$P(\vec{m}, n + 1) = \frac{1}{2d} \sum_{i=1}^d (P(\vec{m} + \vec{e}_i, n) + P(\vec{m} - \vec{e}_i, n)) \tag{1.26}$$

où $\vec{e}_i = (0, 0, \dots, \underbrace{1}_{i\text{-eme pos.}}, \dots, 0)$. Cette équation traduit le fait que pour atteindre le point $\vec{r}_{n+1} = \vec{m}a$ au $n + 1$ -ième pas, on doit être à l'une des positions voisines $\vec{m} \pm \vec{e}_i$ au n -ième pas et choisir la bonne direction (d'où le facteur $\frac{1}{2d}$). L'équation (1.26) n'est autre qu'une équation de diffusion discrète

$$\partial_n P(\vec{m}, n) = \frac{1}{2d} \Delta P(\vec{m}, n) \quad (1.27)$$

avec

$$\partial_n P(\vec{m}, n) \equiv P(\vec{m}, n + 1) - P(\vec{m}, n) \quad (1.28)$$

et où

$$\Delta P(\vec{m}, n) \equiv \sum_{i=1}^d (P(\vec{m} + \vec{e}_i, n) + P(\vec{m} - \vec{e}_i, n) - 2P(\vec{m}, n)) \quad (1.29)$$

est le Laplacien discret sur le réseau hypercubique. On peut résoudre facilement cette équation en transformée de Fourier, c'est à dire en considérant

$$c_n(\vec{\Phi}) \equiv \sum_{m_1, \dots, m_d} e^{i\vec{\Phi} \cdot \vec{m}} P(\vec{m}, n) \quad (1.30)$$

qui s'inverse en

$$P(\vec{m}, n) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d^d \vec{\Phi}}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{\Phi} \cdot \vec{m}} c_n(\vec{\Phi}) . \quad (1.31)$$

L'équation (1.26) devient une récurrence simple sur c_n :

$$c_{n+1}(\vec{\Phi}) = c_n(\vec{\Phi}) \times \left(\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \cos(\Phi_i) \right) \quad (1.32)$$

qui compte tenu de $P(\vec{m}, 0) = \delta_{\vec{m}, \vec{0}}$ et donc $c_0(\vec{\Phi}) = 1$ implique

$$c_n(\vec{\Phi}) = \left(\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \cos(\Phi_i) \right)^n , \quad (1.33)$$

ce qui redonne bien le résultat (1.23).

1.2. Limite continue

1.2.1 Calcul direct de $\mathcal{P}(\vec{r}, s)$:

Que devient la loi $P(\vec{m}, n)$ dans la limite où la taille a des maillons tend vers zéro? Plus précisément, on s'intéresse à la probabilité d'atteindre un point $\vec{r} = \vec{m}a$ fixé dans l'espace, avec $a \rightarrow 0$ et donc $|\vec{m}| = \frac{|\vec{r}|}{a} \rightarrow \infty$. Un tel point ne peut être atteint que pour un nombre de pas n tel que $an^\nu \sim |\vec{r}|$, c'est à dire pour une valeur de n tendant vers l'infini avec $a^2 n$ d'ordre 1. On s'intéresse finalement à la limite continue

$$\begin{aligned} a &\rightarrow 0 \\ \vec{m}a &\equiv \vec{r} \text{ fixé} \\ n a^2 &\equiv ds \text{ fixé} . \end{aligned} \tag{1.34}$$

Le facteur d dans la définition de s est purement conventionnel. La variable continue s peut être vue comme une abscisse curviligne le long du polymère. On pose aussi

$$N a^2 = dS \tag{1.35}$$

de sorte que $R_{BB} = \sqrt{dS}$ et de sorte que s varie continuellement entre 0 et S . En utilisant la formule (1.23) pour $P(\vec{m}, n)$, et en posant $\vec{\Phi} = \vec{k}a$, on obtient

$$P(\vec{m}, n) = a^d \int_{-\frac{\pi}{a}}^{+\frac{\pi}{a}} \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \left(1 - \frac{k^2 a^2}{2d} + \mathcal{O}(a^4) \right)^{\frac{ds}{a^2}} . \tag{1.36}$$

Dans la limite $a \rightarrow 0$, la quantité $a^{-d} P(\vec{m}, n)$ tend alors vers une limite finie

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\vec{r}, s) &\equiv \lim_{a \rightarrow 0} a^{-d} P(\vec{m} = \frac{\vec{r}}{a}, n = \frac{ds}{a^2}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{-\frac{k^2}{2} s} . \end{aligned} \tag{1.37}$$

Il s'agit maintenant d'une *densité de probabilité*, c'est à dire que $\mathcal{P}(\vec{r}, s) d^d \vec{r}$ est la probabilité que le point du polymère d'abscisse curviligne s soit à la position \vec{r} à $d^d \vec{r}$ près. L'intégration sur \vec{k} donne directement

$$\boxed{\mathcal{P}(\vec{r}, s) = \frac{1}{(2\pi s)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|\vec{r}|^2}{2s}} .} \tag{1.38}$$

1.2.2 Calcul par l'équation de diffusion:

La formule (1.38) pour $\mathcal{P}(\vec{r}, s)$ peut s'obtenir également à partir de la limite continue de l'équation de diffusion (1.27) qui devient

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial s}(\vec{r}, s) = \frac{1}{2} \Delta \mathcal{P}(\vec{r}, s) \quad , \quad \Delta \equiv \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial r_i^2} \quad (1.39)$$

avec la condition $\mathcal{P}(\vec{r}, 0) = \delta^d(\vec{r})$. En transformée de Fourier

$$\hat{\mathcal{P}}(\vec{k}, s) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} d^d \vec{r} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \mathcal{P}(\vec{r}, s) \quad (1.40)$$

l'équation de diffusion devient

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{P}}}{\partial s}(\vec{k}, s) = -\frac{\vec{k}^2}{2} \hat{\mathcal{P}}(\vec{k}, s) \quad , \quad \hat{\mathcal{P}}(\vec{k}, 0) = 1 \quad (1.41)$$

qui redonne directement le résultat précédent

$$\hat{\mathcal{P}}(\vec{k}, s) = e^{-\frac{\vec{k}^2}{2} s} .$$

(1.42)

1.2.3 Propriétés de $\mathcal{P}(\vec{r}, s)$:

La densité de probabilité $\mathcal{P}(\vec{r}, s)$ est bien entendu normalisée:

$$\int d^d \vec{r} \mathcal{P}(\vec{r}, s) = 1 . \quad (1.43)$$

Elle satisfait également la condition

$$\mathcal{P}(\vec{r}, s) = \int d^d \vec{r}' \mathcal{P}(\vec{r}', s') \mathcal{P}(\vec{r} - \vec{r}', s - s') \quad (1.44)$$

pour $0 < s' < s$. Cette propriété est évidente en transformée de Fourier puisque

$$\hat{\mathcal{P}}(\vec{k}, s) = \hat{\mathcal{P}}(\vec{k}, s') \times \hat{\mathcal{P}}(\vec{k}, s - s') \quad (1.45)$$

clairement d'après (1.42).

1.2.4 Limite centrale:

La loi limite (1.38) donnant $\mathcal{P}(\vec{r}, s)$ est tout à fait générale pour tout modèle de maillons indépendants. C'est en fait une manifestation du théorème de la limite centrale qui régit la loi de probabilité d'une somme d'un grand nombre de variables aléatoires

indépendantes. Ici, les variables aléatoires sont les variables de pas $\vec{u}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}$. On peut partir d'une densité de probabilité quelconque $p(\vec{u})$ pour un pas élémentaire, qu'on supposera paire et de moments finis:

$$\begin{aligned}
\langle u_i \rangle &= \int d^d \vec{u} p(\vec{u}) u_i = 0 \\
\langle u_i u_j \rangle &= \int d^d \vec{u} p(\vec{u}) u_i u_j = \delta_{ij} \frac{a^2}{d} \\
\langle u_{i_1} \dots u_{i_{2k+1}} \rangle &= 0 \\
\langle u_{i_1} \dots u_{i_{2k}} \rangle &= c_{i_1, \dots, i_{2k}} a^{2k} .
\end{aligned} \tag{1.46}$$

Le cas du réseau hypercubique correspond simplement au choix particulier

$$p_{\text{réseau}}(\vec{u}) = \frac{1}{2d} \sum_{i=1}^d (\delta^d(\vec{u} - a\vec{e}_i) + \delta^d(\vec{u} + a\vec{e}_i)) . \tag{1.47}$$

On s'intéresse alors à la loi de probabilité de la somme $\vec{r} = \sum_{i=1}^n \vec{u}_i$ qui s'écrit

$$\mathcal{P}(\vec{r}, n) = \int \prod_{i=1}^n (d^d \vec{u}_i p(\vec{u}_i)) \delta^d(\vec{r} - \sum_{i=1}^n \vec{u}_i) . \tag{1.48}$$

Sa transformée de Fourier satisfait

$$\hat{\mathcal{P}}(\vec{k}, n) = \left(\hat{p}(\vec{k}) \right)^n \quad \text{avec} \quad \hat{p}(\vec{k}) = \langle e^{i\vec{k} \cdot \vec{u}} \rangle . \tag{1.49}$$

Dans le cas du réseau hypercubique, on a $\hat{p}_{\text{réseau}}(\vec{k}) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \cos(k_i a)$. En développant

$$\begin{aligned}
\hat{p}(\vec{k}) = \langle e^{i\vec{k} \cdot \vec{u}} \rangle &= 1 - \frac{1}{2} k_i k_j \langle u_i u_j \rangle + \dots \\
&= 1 - \frac{\vec{k}^2}{2d} a^2 + \mathcal{O}(a^4) ,
\end{aligned} \tag{1.50}$$

on obtient dans la limite $a \rightarrow 0$, $n a^2 = d s$ fixé la loi (1.42) pour $\hat{\mathcal{P}}(\vec{k}, s)$ et donc la loi (1.38) pour $\mathcal{P}(\vec{r}, s)$, et ce quelle que soit la forme précise de $p(\vec{u})$.

1.3. Formulation fonctionnelle

1.3.1 Expression fonctionnelle de $\mathcal{P}(\vec{r}, S)$:

Bien que le résultat soit continu, la dérivation de $\mathcal{P}(\vec{r}, S)$ repose sur un modèle de polymère à maillons discrets. On aimerait maintenant avoir une description entièrement continue du polymère par une fonction $\vec{r}(s)$ ($0 \leq s \leq S$) et une formulation de $\mathcal{P}(\vec{r}, S)$ comme une somme pondérée du type

$$\mathcal{P}(\vec{r}, S) = \int_{\substack{\vec{r}(0)=\vec{0} \\ \vec{r}(S)=\vec{r}}} [\mathcal{D}\vec{r}(s)] \mathbb{P}(\{\vec{r}(s)\}) \quad (1.51)$$

où on intègre sur tous les chemins $\vec{r}(s)$ ($0 \leq s \leq S$) allant de $\vec{r}(0) = \vec{0}$ à $\vec{r}(S) = \vec{r}$ avec un poids $\mathbb{P}(\{\vec{r}(s)\})$ qui soit une fonctionnelle de la fonction $\vec{r}(s)$. Pour trouver ce poids, on utilise la formule (1.44) satisfaite par $\mathcal{P}(\vec{r}, S)$, itérée $n-1$ fois par découpage de l'intervalle $[0, S]$ en n segments de longueur $\tau = \frac{S}{n}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\vec{r}, S) &= \int \prod_{i=1}^n d^d \vec{r}_i \prod_{i=1}^n \mathcal{P}(\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}, \tau) \delta^d(\vec{r}_n - \vec{r}) \\ &= \int \prod_{i=1}^n \frac{d^d \vec{r}_i}{(2\pi\tau)^{\frac{d}{2}}} \exp \left[-\sum_{i=1}^n \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1})^2}{2\tau} \right] \delta^d(\vec{r}_n - \vec{r}) \end{aligned} \quad (1.52)$$

avec $\vec{r}_0 = \vec{0}$. On fait maintenant tendre $n \rightarrow \infty$ et $\tau = \frac{S}{n} \rightarrow 0$. En posant $i = \frac{s}{\tau}$ et $\vec{r}_i = \vec{r}(s)$, on obtient la correspondance

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n &\leftrightarrow \frac{1}{\tau} \int_0^S ds \\ (\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1})^2 &\leftrightarrow \tau^2 \left(\frac{d\vec{r}}{ds}(s) \right)^2 \\ \exp \left[-\sum_{i=1}^n \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1})^2}{2\tau} \right] &\leftrightarrow \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^S ds \left(\frac{d\vec{r}}{ds}(s) \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Si on définit la mesure fonctionnelle formellement par

$$[\mathcal{D}\vec{r}(s)] = \lim_{\tau \rightarrow 0} \prod_{i=1}^{S/\tau} \frac{d^d \vec{r}_i}{(2\pi\tau)^{\frac{d}{2}}}, \quad (1.54)$$

on a alors la formule recherchée

$$\mathcal{P}(\vec{r}, S) = \int_{\vec{r}(0)=\vec{0}} [\mathcal{D}\vec{r}(s)] \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^S ds \left(\frac{d\vec{r}}{ds}(s) \right)^2 \right] \delta^d(\vec{r}(S) - \vec{r}). \quad (1.55)$$

La définition de la mesure (1.54) est assez formelle. On peut cependant considérer qu'elle est fixée par la condition de normalisation (1.43) qui s'écrit dans le langage de l'intégrale fonctionnelle

$$\mathcal{Z} \equiv \int_{\vec{r}(0)=\vec{0}} [\mathcal{D}\vec{r}(s)] \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^S ds \left(\frac{d\vec{r}}{ds}(s) \right)^2 \right] = 1, \quad (1.56)$$

où la contrainte sur $\vec{r}(S)$ est relâchée. la contrainte sur $\vec{r}(0)$ demeure et est essentielle pour la bonne définition de l'intégrale fonctionnelle. En effet, le poids $\mathbb{P}(\{\vec{r}(s)\})$ étant invariant par translation globale du polymère $\vec{r}(s) \rightarrow \vec{r}(s) + \vec{R}$, une bonne définition de l'intégrale fonctionnelle nécessite de briser cette invariance par translation en fixant l'un des points (ici le point 0). Le même résultat $\mathcal{Z} = 1$ peut être obtenu en choisissant d'autres conditions pour la brisure de l'invariance par translation, par exemple en fixant $\vec{r}(S)$ ou même en fixant le centre de gravité $\frac{1}{S} \int_0^S ds \vec{r}(s)$. Toutes ces conditions sont équivalentes pour \mathcal{Z} . Notons aussi qu'une telle condition peut être omise dans le cas particulier où l'on calcule la moyenne d'une observable invariante par translation, puisqu'on a alors à faire le rapport de deux intégrales fonctionnelles invariantes.

1.3.2 Polymère infini:

On peut généraliser l'intégrale fonctionnelle au cas d'un polymère infiniment long, décrit par une fonction $\vec{r}(s)$ ($-\infty < s < +\infty$). Ceci peut se faire par simple recollement de fonctionnelles de fonctions $\vec{r}_i(s)$ ($i \in \mathbb{Z}^*$) définies sur des intervalles finis $0 < s < S$ en posant

$$\begin{aligned} \vec{r}(s) &= \vec{r}_i(s - (i-1)S) \text{ pour } s \geq 0 \text{ et } (i-1)S \leq s \leq iS \\ \vec{r}(s) &= \vec{r}_{-i}((1-i)S - s) \text{ pour } s < 0 \text{ et } (-i)S \leq s \leq (1-i)S. \end{aligned} \quad (1.57)$$

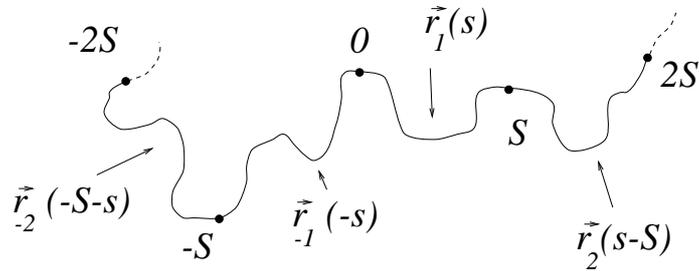


Fig. 2: Un polymère infini obtenu par recollement de polymères finis

L'invariance par translation est brisée en fixant $\vec{r}_1(0) = \vec{r}_{-1}(0) = \vec{0}$, ce qui fixe $\vec{r}(0) = \vec{0}$ et, à chaque recollement, par la condition $\vec{r}_i(0) = \vec{r}_{i-1}(S)$ pour $i > 0$ et $\vec{r}_i(0) = \vec{r}_{i+1}(S)$ pour $i < 0$. Les poids $\mathbb{P}(\{\vec{r}_i(s)\})$ se multiplient pour former un poids

$$\mathbb{P}(\{\vec{r}(s)\}) = \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \left(\frac{d\vec{r}}{ds}(s) \right)^2 \right], \quad (1.58)$$

et la condition de normalisation

$$\mathcal{Z} \equiv \int_{\vec{r}(0)=\vec{0}} [\mathcal{D}\vec{r}(s)] \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \left(\frac{d\vec{r}}{ds}(s) \right)^2 \right] = 1 \quad (1.59)$$

est maintenue.

1.3.3 Règles de calcul:

Revenons au cas d'un polymère de longueur finie S et montrons maintenant comment calculer directement à partir de l'intégrale fonctionnelle. Comme premier exemple, on peut recalculer directement dans le formalisme de l'intégrale fonctionnelle la formule (1.38) pour $\mathcal{P}(\vec{r}, S)$. Etant donnée une fonctionnelle $A(\{\vec{r}(s)\})$, on définit sa valeur moyenne par

$$\langle A(\{\vec{r}(s)\}) \rangle \equiv \frac{1}{\mathcal{Z}} \int_{\vec{r}(0)=\vec{0}} [\mathcal{D}\vec{r}(s)] A(\{\vec{r}(s)\}) \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^S ds \left(\frac{d\vec{r}}{ds}(s) \right)^2 \right] \quad (1.60)$$

avec $\mathcal{Z} = 1$ par choix de normalisation. Pour retrouver $\mathcal{P}(\vec{r}, S)$, il faut imposer que $\vec{r}(S) = \vec{r}$, et sommer sur tous les chemins $\vec{r}(s)$, ce qui revient à calculer au sens de la moyenne ci-dessus

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\vec{r}, s) &= \langle \delta^d(\vec{r}(S) - \vec{r}) \rangle \\ &= \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \langle e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}(S)} \rangle. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Pour calculer

$$\langle e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}(S)} \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int_{\vec{r}(0)=\vec{0}} [\mathcal{D}\vec{r}(s)] \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^S ds \left(\frac{d\vec{r}}{ds}(s) \right)^2 + i\vec{k} \cdot \int_0^S ds \frac{d\vec{r}}{ds}(s) \right], \quad (1.62)$$

on fait le changement de variable $\vec{r}'(s) = \vec{r}(s) - i\vec{k} s$ de sorte que

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{r}}{ds}(s) \right)^2 - i\vec{k} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds}(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{r}'}{ds}(s) \right)^2 + \frac{1}{2} \vec{k}^2. \quad (1.63)$$

La formule (1.62) devient

$$\langle e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}(S)} \rangle = \underbrace{\frac{1}{\mathcal{Z}} \int_{\vec{r}'(0)=\vec{0}} [\mathcal{D}\vec{r}'(s)] \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^S ds \left(\frac{d\vec{r}'(s)}{ds} \right)^2 \right]}_{=1} \times \exp \left[-\frac{\vec{k}^2}{2} \int_0^S ds \right], \quad (1.64)$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\vec{r}, S) &= \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{-\frac{\vec{k}^2}{2} S} \\ &= \frac{1}{(2\pi S)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\vec{r}^2}{2S}} \text{ CQFD.} \end{aligned} \quad (1.65)$$

Comme deuxième exemple de calcul avec l'intégrale fonctionnelle, établissons la formule de base suivante qui sera utile dans les chapitres à venir:

$$\begin{aligned} \langle e^{i \sum_{i=1}^P \vec{k}_i \vec{r}(s_i)} \rangle &= e^{\frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^P |s_i - s_j| \vec{k}_i \cdot \vec{k}_j} \\ \text{si } \sum_{i=1}^P \vec{k}_i &= \vec{0}. \end{aligned}$$

(1.66)

La condition de somme nulle pour les \vec{k}_i assure que la quantité calculée est invariante par translation.

De manière générale, pour une moyenne Gaussienne, on a la formule générale

$$\frac{\int \prod_i dx_i e^{-\frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i M_{ij} x_j} e^{i \sum_i k_i x_i}}{\int \prod_i dx_i e^{-\frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i M_{ij} x_j}} = e^{-\frac{1}{2} \sum_{i,j} k_i A_{ij} k_j} \quad (1.67)$$

où M est supposée symétrique positive et $A_{ij} = M_{ij}^{-1} = \langle x_i x_j \rangle$ au sens de la moyenne Gaussienne. Ici, on a également un poids Gaussien avec un terme quadratique que l'on peut écrire $\frac{1}{2} \int_0^S ds \vec{r}(s) \left(-\frac{d^2}{ds^2} \right) \vec{r}(s)$ modulo des termes de bords. L'équivalent de $A_{ij} = M_{ij}^{-1}$ est donc la fonction $A(s, s')$ solution de

$$-\frac{\partial^2}{\partial s^2} A(s, s') = \delta(s - s'). \quad (1.68)$$

La solution de cette équation dépend en fait des conditions aux bords imposées au polymère. Dans le cas qui nous intéresse où l'on a $\vec{r}(0) = \vec{0}$ et $\vec{r}(S)$ libre, on trouve

$$A(s, s') = -\frac{1}{2}|s - s'| + \frac{1}{2}(s + s') = \min(s, s') . \quad (1.69)$$

Si on avait laissé les deux extrémités du polymère libres mais fixé simplement à $\vec{0}$ la centre de gravité, on aurait trouvé une formule différente

$$A(s, s') = -\frac{1}{2}|s - s'| - \frac{1}{2}(s + s') + \frac{s^2 + s'^2}{2S} + \frac{S}{3} . \quad (1.70)$$

Ces formules sont dérivées dans le chapitre suivant.

La formule (1.69) a une interprétation évidente par l'argument suivant pour calculer

$$A(s, s') = \frac{1}{d} \langle \vec{r}(s) \cdot \vec{r}(s') \rangle . \quad (1.71)$$

Si on suppose $s' > s$, on peut dire que $\vec{r}(s')$ est le résultat du chemin de longueur s menant à $\vec{r}(s)$ et d'un chemin partant de $\vec{r}(s)$ de longueur $s' - s$ en écrivant $\vec{r}(t) = \vec{r}(s) + \vec{x}(t)$ pour $t > s$. Le chemin $\vec{x}(t)$ est un chemin partant de l'origine et est complètement décorrélé de la position $\vec{r}(s)$. On a alors

$$\langle \vec{r}(s) \cdot \vec{r}(s') \rangle = \langle \vec{r}(s) \cdot (\vec{r}(s) + \vec{x}(s')) \rangle = \underbrace{\langle \vec{r}(s) \cdot \vec{r}(s) \rangle}_{=d s} + \underbrace{\langle \vec{r}(s) \cdot \vec{x}(s') \rangle}_{=0} = d s \quad (1.72)$$

où l'on a utilisé le résultat $(ds)^{1/2}$ pour la distance bout à bout d'un polymère de longueur s . Bien évidemment, le même argument conduit à un résultat ds' si $s' < s$, et donc dans tous les cas à $d \min(s, s')$, d'où (1.69).

Dans tous les cas, on trouve une formule du type

$$A(s, s') = -\frac{1}{2}|s - s'| + F(s) + F(s') . \quad (1.73)$$

On obtient donc d'après (1.67) le résultat

$$\left\langle e^{\sum_{i=1}^P \vec{k}_i \vec{r}(s_i)} \right\rangle = e^{-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^P A(s_i, s_j) \vec{k}_i \cdot \vec{k}_j} , \quad (1.74)$$

et comme $\sum_{i=1}^P \vec{k}_i = \vec{0}$, on peut remplacer dans cette formule $A(s_i, s_j)$ par $-\frac{1}{2}|s_i - s_j|$, ce qui donne le résultat (1.66) annoncé indépendamment des conditions de bords. Notons que si la condition de somme nulle n'est pas réalisée, le résultat dépend alors explicitement des

conditions aux bords. Pour une observable invariante par translation, le remplacement de $A(s, s')$ par $-\frac{1}{2}|s - s'|$ est assez naturel en ce sens qu'il correspond de manière générale au remplacement de $A(s, s')$ par $A(s, s') - \frac{1}{2}A(s, s) - \frac{1}{2}A(s', s')$. En terme de moyenne, cela revient à considérer à la place de la quantité

$$A(s, s') = \frac{1}{d} \langle \vec{r}(s) \cdot \vec{r}(s') \rangle \quad (1.75)$$

la quantité correspondante invariante par translation

$$G(s, s') \equiv \frac{1}{d} \langle (\vec{r}(s) - \vec{r}(s'))^2 \rangle = |s - s'| \quad (1.76)$$

reliée à A par

$$-\frac{1}{2}G(s, s') = A(s, s') - \frac{1}{2}A(s, s) - \frac{1}{2}A(s', s') . \quad (1.77)$$

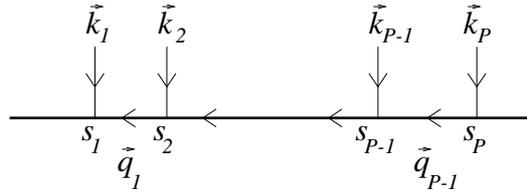


Fig. 3: Correspondance entre les vecteurs \vec{k}_i et les vecteurs \vec{q}_i

La formule (1.66) devient plus transparente si l'on suppose que les abscisses s_i sont ordonnées le long du polymère $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_P < S$. On peut poser alors (voir Fig. 3)

$$\vec{q}_i = \sum_{n=i+1}^P \vec{k}_n \quad , \quad i = 1, \dots, P-1 \quad (1.78)$$

qui peut être vu comme l'impulsion qui circule entre s_i et s_{i+1} . On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^P \vec{k}_i \cdot \vec{r}(s_i) &= \vec{k}_P \cdot (\vec{r}(s_P) - \vec{r}(s_{P-1})) + (\vec{k}_P + \vec{k}_{P-1}) \cdot (\vec{r}(s_{P-1}) - \vec{r}(s_{P-2})) + \dots \\ &\dots + (\vec{k}_P + \dots + \vec{k}_2) \cdot (\vec{r}(s_2) - \vec{r}(s_1)) \\ &= \sum_{i=1}^{P-1} \vec{q}_i \cdot (\vec{r}(s_{i+1}) - \vec{r}(s_i)) \end{aligned} \quad (1.79)$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} \vec{k}_i \cdot \vec{k}_j |s_i - s_j| &= 2 \sum_{i < j} \vec{k}_i \cdot \vec{k}_j (s_j - s_i) \\
&= 2 \sum_{l=1}^{P-1} (s_{l+1} - s_l) \underbrace{\sum_{i=1}^l \vec{k}_i}_{= - \sum_{i=l+1}^P \vec{k}_i} \cdot \sum_{j=l+1}^P \vec{k}_j \\
&= -2 \sum_{l=1}^{P-1} (s_{l+1} - s_l) \vec{q}_l^2
\end{aligned} \tag{1.80}$$

de sorte que (1.66) s'écrit

$$\left\langle e^{\sum_{i=1}^{P-1} \vec{q}_i \cdot (\vec{r}(s_{i+1}) - \vec{r}(s_i)) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{P-1} \vec{q}_i^2 (s_{i+1} - s_i)} \right\rangle = e^{\dots} \tag{1.81}$$

C'est équation n'est autre que la transformée de Fourier de l'équation évidente

$$\left\langle \prod_{i=1}^{P-1} \delta^d \left(\vec{r}(s_{i+1}) - \vec{r}(s_i) - \vec{R}_i \right) \right\rangle = \prod_{i=1}^{P-1} \mathcal{P}(\vec{R}_i, s_{i+1} - s_i) \tag{1.82}$$

pour la densité de probabilité que chacun des s_{i+1} soit à la position relative \vec{R}_i à $d^d \vec{r}$ près du point s_i . La formule (1.81) sera la formule de base utilisée dans les calculs futurs de polymères en interaction. Son expression (1.74) est plus générale et restera valable dans le cas des membranes où il n'est pas possible d'ordonner les points i de manière naturelle.

1.3.4 Calcul de la fonction à deux points avec diverses conditions aux bords:

Nous allons calculer ici la fonction à deux points

$$A(s, s') \equiv \frac{1}{d} \langle \vec{r}(s) \cdot \vec{r}(s') \rangle \tag{1.83}$$

au sens de la moyenne Gaussienne avec le poids fonctionnel $\mathbb{P}(\{\vec{r}(s)\})$ apparaissant dans l'équation (1.55). Si la condition $\vec{r}(0) = \vec{0}$, que nous traiterons en premier, est la plus naturelle pour fixer l'invariance par translation, nous considérerons ici deux autres possibilités: le cas où les deux extrémités sont fixées à des positions différentes, et enfin le cas où les extrémités sont libres mais le centre de gravité fixé à l'origine. On s'intéressera aussi à la fonction à deux points invariante par translation

$$G(s, s') \equiv \frac{1}{d} \langle (\vec{r}(s) - \vec{r}(s'))^2 \rangle = A(s, s) + A(s', s') - 2A(s, s') . \tag{1.84}$$

1er Cas

Considérons d'abord le cas où l'on impose $\vec{r}(0) = \vec{0}$ tout en laissant l'extrémité à $s = S$ libre. En écrivant

$$\int_0^S \left(\frac{d\vec{r}}{ds}(s) \right)^2 = \int_0^S \vec{r}(s) \cdot \left(-\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}(s) \right) + \vec{r}(S) \cdot \frac{d\vec{r}}{ds}(S) - \vec{r}(0) \cdot \frac{d\vec{r}}{ds}(0) , \quad (1.85)$$

on voit que, si le terme de bord en $s = 0$ est automatiquement nul, celui en $s = S$ ne l'est pas forcément et l'équation à résoudre pour $A(s, s')$ est

$$-\frac{\partial^2}{\partial s^2} A(s, s') + \underbrace{\delta(s - S) \frac{\partial}{\partial s} A(s, s')}_{\text{terme de bord}} = \delta(s - s') . \quad (1.86)$$

Dans la pratique, on résout l'équation sans terme de bord et l'on impose la contrainte $\frac{\partial}{\partial s} A(S, s') = 0 \forall s'$ pour l'extrémité libre à $s = S$, ainsi que la condition $A(0, s') = 0 \forall s'$ obligatoire pour l'extrémité fixée à $s = 0$. On retiendra également que, de par sa définition (1.83), $A(s, s')$ doit être symétrique dans l'échange de s et s' .

En intégrant une première fois $-\frac{\partial^2}{\partial s^2} A(s, s') = \delta(s - s')$, on obtient $-\frac{\partial}{\partial s} A(s, s') = \theta(s - s') - \mu(s')$ et donc

$$A(s, s') = -\frac{1}{2}|s - s'| + \frac{1}{2}(s + s') + s\mu(s') + \nu(s') \quad (1.87)$$

faisant intervenir deux fonctions arbitraires de s' , $\mu(s')$ et $\nu(s')$. Ces fonctions sont fixées par la symétrie $s \leftrightarrow s'$ qui donne la forme générale

$$A(s, s') = -\frac{1}{2}|s - s'| + \alpha(s + s') + \beta ss' + \gamma \quad (1.88)$$

avec trois constantes α , β et γ à déterminer. En écrivant

$$A(0, s') = (\alpha - 1/2)s' + \gamma = 0 \quad \forall s' , \quad (1.89)$$

il vient $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\gamma = 0$. Enfin en écrivant

$$\frac{\partial}{\partial s} A(S, s') = - \left(\underbrace{\theta(S - s')}_{=1} - \frac{1}{2} \right) + \alpha + \beta s' = \beta s' = 0 \quad \forall s' , \quad (1.90)$$

il vient $\beta = 0$ et donc on retrouve l'expression (1.69):

$$A(s, s') = -\frac{1}{2}|s - s'| + \frac{1}{2}(s + s') = \min(s, s') , \quad (1.91)$$

et la valeur correspondante

$$G(s, s') = |s - s'| . \quad (1.92)$$

On vérifie

$$\langle \vec{r}(s)^2 \rangle = d s . \quad (1.93)$$

2ème Cas

On impose maintenant que les deux extrémités soient fixées par $\vec{r}(0) = \vec{0}$ et $\vec{r}(S) = \vec{R}$. On supposera dans un premier temps que $\vec{R} = \vec{0}$, auquel cas on n'a pas de termes de bords dans (1.85) et l'on peut simplement reprendre l'expression générale (1.88) en imposant maintenant $A(0, s') = A(S, s') = 0 \forall s'$. Cela donne maintenant $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{S}$ et $\gamma = 0$, et donc

$$A(s, s') = \min(s, s') - \frac{ss'}{S} , \quad (1.94)$$

et la valeur correspondante

$$G(s, s') = |s - s'| - \frac{(s - s')^2}{S} . \quad (1.95)$$

On a alors

$$\langle \vec{r}(s)^2 \rangle = d \frac{s(S - s)}{S} . \quad (1.96)$$

Pour \vec{R} arbitraire, il suffit de poser

$$\vec{r}(s) = \vec{r}'(s) + \frac{s}{S} \vec{R} . \quad (1.97)$$

Le poids pour $\vec{r}'(s)$ fait maintenant intervenir

$$\int_0^S \left(\frac{d\vec{r}}{ds}(s) \right)^2 = \int_0^S \left(\frac{d\vec{r}'}{ds}(s) \right)^2 + 2\vec{R} \cdot \underbrace{\int_0^S \frac{d\vec{r}'}{ds}(s)}_{\vec{r}'(S) - \vec{r}'(0)} + \frac{\vec{R}^2}{S} , \quad (1.98)$$

et est donc le même que pour $\vec{r}(s)$ à une constante près qui disparaît de toute façon dans la moyenne. On peut donc utiliser les résultats (1.94) et (1.95) ci-dessus pour \vec{r}' . On obtient alors, en utilisant $\langle \vec{r}'(s) \rangle = \vec{0}$,

$$\begin{aligned} A(s, s') &= \langle \vec{r}(s) \cdot \vec{r}(s') \rangle = \langle \vec{r}'(s) \cdot \vec{r}'(s') \rangle + \frac{ss'}{S^2} \vec{R}^2 \\ &= \min(s, s') + \frac{ss'}{S^2} (\vec{R}^2 - S) \\ \langle \vec{r}(s) \rangle &= \frac{s}{S} \vec{R} \\ G(s, s') &= |s - s'| + \frac{(s - s')^2}{S^2} (\vec{R}^2 - S) . \end{aligned} \quad (1.99)$$

Il est à noter que les expressions (1.94) et (1.99) ne sont pas de la forme générale (1.73) puisqu'au delà de la brisure de l'invariance par translation (imposée par la condition $\vec{r}(0) = \vec{0}$ à elle seule), une condition supplémentaire a été introduite qui modifie clairement les propriétés statistiques du polymère. Ce 2ème cas n'est donc pas générique.

3ème Cas

Considérons finalement le cas où les deux extrémités du polymère sont libres et où le centre de gravité obéit à $\vec{r}_G \equiv \frac{1}{S} \int_0^S ds \vec{r}(s) = \vec{0}$. Pour ce faire, on utilise la décomposition

$$\begin{aligned} \vec{r}(s) &= \left(\vec{r}(s) - \frac{1}{S} \int_0^S ds \vec{r}(s) \right) + \frac{1}{S} \int_0^S ds \vec{r}(s) \\ &= \int_0^S ds' \underbrace{\left(\delta(s-s') - \frac{1}{S} \right)}_{(1-P)_{ss'}} \vec{r}(s') + \int_0^S ds' \underbrace{\frac{1}{S}}_{P_{ss'}} \vec{r}(s') \end{aligned} \quad (1.100)$$

que l'on peut écrire formellement $\vec{r} = (1-P)\vec{r} + P\vec{r}$, où P est le projecteur ($P^2 = P$) sur l'espace des fonctions constantes et $(1-P)$ le projecteur sur l'espace des fonctions satisfaisant $\vec{r}_G = \vec{0}$. L'opérateur M à inverser (ici l'opérateur $-\frac{\partial^2}{\partial s^2}$) qui satisfait $MP = 0$ et a donc des modes zéro (les fonctions \vec{r} de la forme $\vec{r} = P\vec{u}$, c'est à dire les fonctions constantes) n'est pas inversible sur tout l'espace des \vec{r} . Il est cependant inversible sur le sous espace des fonctions telles que $P\vec{r} = \vec{0}$, qui sont justement les configurations telles que $\vec{r}_G = \vec{0}$, et qui sont de la forme $\vec{r} = (1-P)\vec{u}$. On peut alors définir l'inverse de M sur ce sous espace comme la solution A de $MA = (1-P)$, c'est à dire $MA\vec{r} = \vec{r}$ si $P\vec{r} = \vec{0}$ tandis que $MA\vec{r} = \vec{0}$ pour les modes zéro $(1-P)\vec{r} = \vec{0}$. En conclusion, l'équation à résoudre est maintenant

$$-\frac{\partial^2}{\partial s^2} A(s, s') = \delta(s-s') - \frac{1}{S}, \quad (1.101)$$

avec deux conditions aux bords $\frac{\partial}{\partial s} A(0, s') = \frac{\partial}{\partial s} A(S, s') = 0 \forall s'$ traduisant le fait que les deux extrémités sont libres. La solution générale (symétrique en $s \rightarrow s'$) de (1.101) est

$$A(s, s') = -\frac{1}{2}|s-s'| + \alpha(s+s') + \beta ss' + \gamma + \frac{s^2 + s'^2}{2S}. \quad (1.102)$$

Les conditions de bords fixent $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\beta = 0$ tandis que γ est fixé par la contrainte $\vec{r}_G = \vec{0}$ qui implique $\int_0^S ds A(s, s') = 0 \forall s'$. On trouve $\gamma = -\frac{S}{3}$ et

$$\begin{aligned} A(s, s') &= -\max(s, s') + \frac{s^2 + s'^2}{2S} + \frac{S}{3} \\ G(s, s') &= |s-s'|. \end{aligned} \quad (1.103)$$

On trouve en particulier

$$\langle \bar{r}(s)^2 \rangle = \frac{S}{3} - \frac{s(S-s)}{S}. \quad (1.104)$$

La formule (1.103) est bien de la forme générale (1.73).

Pour tester la cohérence des formules à $\bar{r}(0)$ fixé et à \bar{r}_G fixé, on peut calculer dans les deux cas la quantité

$$R_{0G}^2 = \frac{1}{d} \langle (\bar{r}(0) - \bar{r}_G)^2 \rangle \quad (1.105)$$

qui doit être identique dans les deux cas. Dans le cas où \bar{r}_G est fixé à l'origine, on trouve simplement, en utilisant (1.103), $R_{0G}^2 = A(0,0) = \frac{S}{3}$. Dans le cas $\bar{r}(0) = \bar{0}$, utilisant (1.69), $R_{0G}^2 = \frac{1}{S^2} \int_0^S ds \int_0^S ds' \min(s, s') = \frac{2}{S^2} \int_0^S ds \int_0^s ds' s' = \frac{S}{3}$ comme attendu.

Finalement, revenons au calcul de $G(s, s')$ dans le cas générique où une seule condition de brisure d'invariance est imposée (cas 1 et 3 ci-dessus). Nous avons déjà dit que dans ce cas, $G(s, s')$ est insensible aux conditions aux bords. Il peut donc être calculé pour un polymère infini. En écrivant en transformée de Fourier par rapport à s

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds \bar{r}(s) \cdot \left(-\frac{d^2}{ds^2} \right) \bar{r}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \hat{\bar{r}}(p) \cdot p^2 \hat{\bar{r}}(-p) \quad (1.106)$$

on trouve

$$G(s, s') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \frac{2 \left(1 - e^{-ip(s-s')} \right)}{p^2} \quad (1.107)$$

qui peut se calculer par

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \frac{2 \left(1 - e^{-ip(s-s')} \right)}{p^2} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{-\alpha p^2} \left(1 - e^{-ip(s-s')} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\alpha \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \left(1 - e^{-\frac{(s-s')^2}{4\alpha}} \right) \\ &= |s-s'| \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{du}{u^2} \left(1 - e^{-u^2} \right)}_{=1} \end{aligned} \quad (1.108)$$

où l'on a posé $u = \frac{|s-s'|}{2\sqrt{\alpha}}$. On retrouve bien le résultat (1.76). Cette méthode est très générale et sera utilisée pour les membranes.

1.3.5 Correspondance discret - continu:

Nous pouvons maintenant dresser un tableau des correspondances entre les quantités entièrement discrètes obtenues sur le réseau hypercubique et les quantités continues obtenues soit par passage à la limite, soit par le formalisme entièrement continu de l'intégrale fonctionnelle.

Discret	Limite continue	Formalisme fonctionnel
$Z_{\text{ouvert}} = (2d)^N$	diverge	$\mathcal{Z} = 1$
$a^{-d} \frac{Z_{\text{fermé}}}{Z_{\text{ouvert}}} = 2 \left(\frac{d}{2\pi N a^2} \right)^{\frac{d}{2}}$	$\mathcal{P}(\vec{0}, S) = \frac{1}{(2\pi S)^{\frac{d}{2}}}$	$\langle \delta^d(\vec{r}(S)) \rangle$
$P(\vec{m}, n)$	$\mathcal{P}(\vec{r}, s)$	$\langle \delta^d(\vec{r}(s) - \vec{r}) \rangle$
$c_n(\Phi) = \left(\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \cos(\Phi_i) \right)^n$	$\hat{\mathcal{P}}(\vec{k}, s) = e^{-\frac{\vec{k}^2}{2} s}$	$\langle e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}(s)} \rangle$
$R_{BB}^2 = N a^2$	$\int d^d \vec{r} \mathcal{P}(\vec{r}, S) \vec{r}^2 = d S$	$d G(S, 0) = \langle (\vec{r}(S) - \vec{r}(0))^2 \rangle$

Il est à remarquer qu'une quantité comme Z_{ouvert} , au demeurant non universelle, diverge par passage à la limite. Dans le formalisme fonctionnel, elle est remplacée par la condition de normalisation (arbitraire) $\mathcal{Z} = 1$. Ces problèmes de normalisation disparaissent dans les probabilités ou les valeurs moyennes qui sont des rapports de quantités non normalisées. Remarquons également le fait amusant que la limite $a \rightarrow 0$ de $a^{-d} \frac{Z_{\text{fermé}}}{Z_{\text{ouvert}}} = 2 \left(\frac{d}{2\pi N a^2} \right)^{\frac{d}{2}}$ fabrique $2 \times \mathcal{P}(\vec{0}, S)$ et non $\mathcal{P}(\vec{0}, S)$ à cause du fait que la formule discrète n'est en fait valable qu'une fois sur deux (pour N pair) et devrait être prise égale à zéro pour N impair, ce qui double artificiellement la limite.

1.4. Chemin Brownien dans un potentiel

En revenant au formalisme discret sur le réseau hypercubique, on peut introduire maintenant un poids $w(\vec{m})$ sur chacun des sites \vec{m} du réseau et considérer la somme des chemins partant de l'origine et de longueur N , pondérée par le produit des poids w sur les sites visités par le chemin, soit

$$Z_w = \sum_{\substack{\text{Chemins } \vec{m}(n) \\ n = 1, \dots, N}} \prod_{n=1}^N w(\vec{m}(n)) . \quad (1.109)$$

On peut également se limiter aux chemins finissant à un point $\vec{m}(N) = \vec{m}$ fixé en considérant

$$P_w(\vec{m}, N) = \sum_{\substack{\text{Chemins } \vec{m}(n) \\ n = 1, \dots, N \\ \text{tels que } \vec{m}(N) = \vec{m}}} \prod_{n=1}^N \frac{w(\vec{m}(n))}{2d} . \quad (1.110)$$

Le facteur $2d$ au dénominateur est introduit de sorte que $P_w(\vec{m}, N)$ soit normalisé par un facteur $\frac{1}{(2d)^N} = \frac{1}{Z_{\text{ouvert}}}$. Quand $w = 1$ sur tous les sites, on réobtient alors la probabilité (1.23)

$$P_{w=1}(\vec{m}, N) = P(\vec{m}, N) . \quad (1.111)$$

Notons que pour w arbitraire, $P_w(\vec{m}, N)$ n'est pas normalisé à 1 mais à $\frac{Z_w}{Z_{\text{ouvert}}}$.. La quantité $P_w(\vec{m}, N)$ obéit à une équation de diffusion discrète

$$P_w(\vec{m}, N+1) = \frac{w(\vec{m})}{2d} \sum_{i=1}^d (P_w(\vec{m} + \vec{e}_i, N) + P_w(\vec{m} - \vec{e}_i, N)) \quad (1.112)$$

qui peut se réécrire

$$\partial_N P_w(\vec{m}, N) = \frac{1}{2d} \Delta P_w(\vec{m}, N) + \frac{w(\vec{m}) - 1}{2d} \sum_{i=1}^d (P_w(\vec{m} + \vec{e}_i, N) + P_w(\vec{m} - \vec{e}_i, N)) , \quad (1.113)$$

faisant intervenir les opérateurs discrets (1.28) et (1.29), ainsi qu'un nouveau terme lié au poids w . On peut comme auparavant passer à la limite continue $a \rightarrow 0$ avec $\vec{m} = \frac{\vec{r}}{a}$ et $N = \frac{dS}{a^2}$. L'équation de diffusion (1.113) admet une limite continue si l'on choisit un poids w de la forme

$$w(\vec{m}) = e^{-\frac{a^2}{d} V(\vec{r}=\vec{m}a)} . \quad (1.114)$$

On obtient alors pour la quantité continue

$$\mathcal{P}_V(\vec{r}, S) \equiv \lim_{a \rightarrow 0} a^{-d} P_w(\vec{m} = \frac{\vec{r}}{a}, N = \frac{dS}{a^2}) \quad (1.115)$$

l'équation continue

$$\frac{\partial \mathcal{P}_V}{\partial S}(\vec{r}, S) = \frac{1}{2} \Delta \mathcal{P}_V(\vec{r}, S) - V(\vec{r}) \mathcal{P}_V(\vec{r}, S) \quad (1.116)$$

avec la condition initiale $\mathcal{P}_V(\vec{r}, 0) = \delta^d(\vec{r})$. Dans la formulation fonctionnelle, le produit

$\prod_{n=1}^N w(\vec{m}(n))$ fabrique un terme

$$e^{-\int_0^S ds V(\vec{r}(s))} \quad (1.117)$$

et la somme Z_w devient alors

$$\mathcal{Z}_V \equiv \int_{\vec{r}(0)=\vec{0}} [\mathcal{D}\vec{r}(s)] \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^S ds \left(\frac{d\vec{r}}{ds}(s) \right)^2 - \int_0^S ds V(\vec{r}(s)) \right] \quad (1.118)$$

tandis que

$$\mathcal{P}_V(\vec{r}, S) = \int_{\vec{r}(0)=\vec{0}} [\mathcal{D}\vec{r}(s)] \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^S ds \left(\frac{d\vec{r}}{ds}(s) \right)^2 - \int_0^S ds V(\vec{r}(s)) \right] \delta^d(\vec{r}(S) - \vec{r}) . \quad (1.119)$$

Notons encore que la quantité $\mathcal{P}_V(\vec{r}, S)$ n'est pas normalisée à 1 mais à \mathcal{Z}_V (qui n'est pas égal à 1 en général, sauf si $V = 0$). On définit l'énergie libre \mathcal{F}_V par

$$\mathcal{Z}_V = \exp [-\mathcal{F}_V] . \quad (1.120)$$

En prenant l'intégrale sur l'espace de l'équation (1.116), on obtient que

$$\frac{\partial \mathcal{F}_V}{\partial S} = \int d^d \vec{r} \underbrace{\left(\frac{\mathcal{P}_V(\vec{r}, S)}{\mathcal{Z}_V} \right)}_{\text{Proba normalisée}} V(\vec{r}) = \langle V(\vec{r}(S)) \rangle_V . \quad (1.121)$$

1.5. Théorie des champs dans l'espace de plongement

Pour clore ce chapitre, montrons comment nos résultats peuvent être reliés à une théorie des champs dans l'espace de plongement d -dimensionnel. Pour ce faire, considérons la transformée de Laplace par rapport à S de la fonction $\mathcal{P}_V(\vec{R}, S)$:

$$G_V(\vec{R}, m^2) \equiv \int_0^{+\infty} dS e^{-\frac{m^2}{2} S} \mathcal{P}_V(\vec{R}, S) . \quad (1.122)$$

En utilisant l'équation (1.116) et le fait que $\mathcal{P}_V(\vec{R}, 0) = \delta^d(\vec{R})$, on obtient directement l'équation correspondante pour $G_V(\vec{R}, m^2)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta G_V(\vec{R}, m^2) - V(\vec{R}) G_V(\vec{R}, m^2) &= \int_0^S dS e^{-\frac{m^2}{2} S} \frac{\partial}{\partial S} \mathcal{P}_V(\vec{R}, S) \\ &= \left[e^{-\frac{m^2}{2} S} \mathcal{P}_V(\vec{R}, S) \right]_0^{+\infty} + \frac{m^2}{2} \int_0^{+\infty} dS e^{-\frac{m^2}{2} S} \mathcal{P}_V(\vec{R}, S) \\ &= \delta^d(\vec{R}) + \frac{m^2}{2} G_V(\vec{R}, m^2) , \end{aligned} \quad (1.123)$$

soit

$$\left(-\frac{1}{2}\Delta + \frac{m^2}{2} + V(\vec{R})\right) G_V(\vec{R}, m^2) = \delta^d(\vec{R}) . \quad (1.124)$$

On peut donc écrire $G_V(\vec{R}, m^2)$ comme la fonction à deux points d'une théorie d'un champ $\Phi(\vec{r})$ défini dans l'espace à d dimensions:

$$\begin{aligned} G_V(\vec{R}, m^2) &= \langle \Phi(\vec{R})\Phi(\vec{0}) \rangle_V \\ &\equiv \frac{\int [\mathcal{D}\Phi(\vec{r})] \Phi(\vec{R})\Phi(\vec{0}) e^{-\frac{1}{4} \int d^d\vec{r} \{(\nabla_{\vec{r}}\Phi(\vec{r}))^2 + m^2(\Phi(\vec{r}))^2\}} - \frac{1}{2} \int d^d\vec{r} V(\vec{r})(\Phi(\vec{r}))^2}}{\int [\mathcal{D}\Phi(\vec{r})] e^{-\frac{1}{4} \int d^d\vec{r} \{(\nabla_{\vec{r}}\Phi(\vec{r}))^2 + m^2(\Phi(\vec{r}))^2\}} - \frac{1}{2} \int d^d\vec{r} V(\vec{r})(\Phi(\vec{r}))^2}} . \end{aligned} \quad (1.125)$$

On peut interpréter cette formule comme suit: supposons que l'on ait voulu décrire le polymère non pas par le champ $\vec{r}(s)$ mais par son champ de densité dans l'espace à d -dimensions:

$$\mathcal{C}(\vec{r}) \equiv \int_0^S ds \delta^d(\vec{r} - \vec{r}(s)) . \quad (1.126)$$

Quelle mesure doit on alors utiliser pour que la distribution de $\mathcal{C}(\vec{r})$ corresponde bien à la densité venant d'un polymère, c'est à dire d'un objet étendu unidimensionnel (et non par exemple d'un gaz de particules indépendantes dans l'espace)? En remarquant que l'interaction peut s'écrire

$$\int d^d\vec{r} \mathcal{C}(\vec{r}) V(\vec{r}) \quad (1.127)$$

et que

$$\frac{m^2}{2} S = \int d^d\vec{r} \frac{m^2}{2} \mathcal{C}(\vec{r}) , \quad (1.128)$$

on lit sur (1.125) que pour décrire un polymère, on doit poser

$$\mathcal{C}(\vec{r}) = \frac{1}{2} (\Phi(\vec{r}))^2 \quad (1.129)$$

où $\Phi(\vec{r})$ est un champ qu'il faut pondérer avec le poids

$$e^{-\frac{1}{4} \int d^d\vec{r} (\nabla_{\vec{r}}\Phi(\vec{r}))^2} . \quad (1.130)$$

On interprète le carré dans (1.129) comme lié au fait que *deux* demi-lignes partent de part et d'autre d'un point le long du polymère et l'insertion des champs $\Phi(\vec{R})$ et $\Phi(\vec{0})$ dans (1.125) par le fait qu'une extrémité (d'où part une seule demi-ligne) du polymère est placée en \vec{R} et l'autre en $\vec{0}$.

2. Polymère en interaction avec une impureté

Dans ce chapitre, nous allons étudier le problème d'un polymère en interaction avec une impureté localisée à l'origine $\vec{0}$ de l'espace de plongement d -dimensionnel. Cette interaction pourra être attractive ou répulsive, menant bien sûr à des conclusions physiques très différentes.

2.1. Formulation discrète: solution sur réseau par matrice de transfert

2.1.1 Matrice de transfert: formalisme général:

Nous revenons ici au cas discret d'un polymère partant de l'origine $\vec{0}$ et tracé sur le réseau hypercubique à d dimensions, en présence d'un potentiel arbitraire, c'est à dire avec des poids $w(\vec{m})$ sur les sites du réseau. L'équation (1.112) peut se réécrire sous forme matricielle

$$P_w(\vec{m}, N+1) = \sum_{\vec{m}'} \frac{w(\vec{m})}{2d} \underbrace{\sum_{i=1}^d (\delta_{\vec{m}, \vec{m}' + \vec{e}_i} + \delta_{\vec{m}, \vec{m}' - \vec{e}_i})}_{=M_{\vec{m}, \vec{m}'}} P_w(\vec{m}', N), \quad (2.1)$$

qui fait intervenir une matrice de transfert M indexée par les sites du réseau. Si on introduit le vecteur $X^{(\vec{m}_0)}$ de composantes

$$X_{\vec{m}}^{(\vec{m}_0)} = \delta_{\vec{m}, \vec{m}_0}, \quad (2.2)$$

on a $P_w(\vec{m}, 0) = X_{\vec{m}}^{(\vec{0})}$ et donc (2.1) donne par itération

$$P_w(\vec{m}, N) = {}^t X^{(\vec{m})} M^N X^{(\vec{0})}. \quad (2.3)$$

Si l'on peut de plus diagonaliser la matrice M , l'expression ci-dessus devient

$$\begin{aligned} P_w(\vec{m}, N) &= {}^t X^{(\vec{m})} \left(\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^N V^{(\alpha)} {}^t W^{(\alpha)} \right) X^{(\vec{0})} \\ &= \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^N \left({}^t X^{(\vec{m})} V^{(\alpha)} \right) \left({}^t W^{(\alpha)} X^{(\vec{0})} \right), \end{aligned} \quad (2.4)$$

où $V^{(\alpha)}$ et $W^{(\alpha)}$ dénotent des vecteurs propres (normalisés) à droite et à gauche, de valeur propre λ_{α} . Nous avons utilisé ici un indice discret α mais comme la matrice M est infinie, il peut y avoir dans certains cas un continuum de valeurs propres.

Si la matrice M a une plus grande valeur λ_{\max} non dégénérée et isolée (c'est à dire hors d'un continuum), on peut écrire à N grand

$$P_w(\vec{m}, N) \sim \lambda_{\max}^N \left({}^t X^{(\vec{m})} V^{(\max)} \right) \left({}^t W^{(\max)} X^{(\vec{0})} \right) \quad (2.5)$$

et

$$Z_w \sim \lambda_{\max}^N \left({}^t Y V^{(\max)} \right) \left({}^t W^{(\max)} X^{(\vec{0})} \right) \quad (2.6)$$

où Y est le vecteur de coordonnées $Y_{\vec{m}} = 1 \forall \vec{m}$. On a alors une énergie libre par pas

$$F_w \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{N} \ln(Z_w) \right) = -\ln(\lambda_{\max}) . \quad (2.7)$$

2.1.2 Solution du cas sans interaction:

Dans le cas sans interaction, avec $w = 1$ pour tous les sites, la matrice de transfert M devient

$$M_{\vec{m}, \vec{m}'} = \frac{1}{2d} \sum_{i=1}^d (\delta_{\vec{m}, \vec{m}' + \vec{e}_i} + \delta_{\vec{m}, \vec{m}' - \vec{e}_i}) . \quad (2.8)$$

Elle est symétrique et ses vecteurs propres V (qui sont alors les mêmes à gauche et à droite) ne sont autres que

$$V_{\vec{m}}^{(\vec{\Phi})} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{i\vec{\Phi} \cdot \vec{m}} \quad (2.9)$$

indexés par un d -uplet d'indices continus $\vec{\Phi} = (\Phi_1, \dots, \Phi_d)$, $-\pi < \Phi_i \leq +\pi$. Les valeurs propres correspondantes sont

$$\lambda_{\vec{\Phi}} = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \cos(\Phi_i) \quad (2.10)$$

qui forment un continuum entre -1 et $+1$. La formule (2.4) redonne alors précisément la solution (1.23) pour $P(\vec{m}, N)$.

2.1.3 Solution du problème de l'impureté attractive:

Passons maintenant au cas d'une interaction avec une impureté attractive placée à l'origine. En d'autres termes, on met un poids $w(\vec{0}) = e^\beta$ plus grand que 1 ($\beta > 0$) à l'origine et un poids $w(\vec{m}) = 1 \forall \vec{m} \neq \vec{0}$ partout ailleurs. On peut écrire

$$w(\vec{m}) = 1 + (e^\beta - 1) \delta_{\vec{m}, \vec{0}} . \quad (2.11)$$

Dans ce cas, Z_w devient simplement

$$Z_\beta = \sum_{\text{Chemins de longueur } N} e^{\beta \times \text{Nombre de passages du chemin en } \vec{0}} . \quad (2.12)$$

On s'intéressera à la fréquence moyenne de retour à l'origine

$$r(\beta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \times \text{Nombre moyen de passages en } \vec{0} \quad (2.13)$$

qui constitue un paramètre d'ordre qui caractérise l'accrochage éventuel du polymère par l'impureté. On a alors dans le formalisme de la matrice de transfert

$$r(\beta) = \frac{d}{d\beta} \ln(\lambda_{\max}(\beta)) . \quad (2.14)$$

L'équation aux valeurs propres pour la matrice de transfert s'écrit

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{m}'} \left\{ \frac{1}{2d} \sum_{i=1}^d (\delta_{\vec{m}, \vec{m}'+\vec{e}_i} + \delta_{\vec{m}, \vec{m}'-\vec{e}_i}) \right\} V_{\vec{m}'} &= \lambda V_{\vec{m}} \quad \text{si } \vec{m} \neq \vec{0} \\ \sum_{\vec{m}'} \left\{ \frac{1}{2d} \sum_{i=1}^d (\delta_{\vec{0}, \vec{m}'+\vec{e}_i} + \delta_{\vec{0}, \vec{m}'-\vec{e}_i}) \right\} V_{\vec{m}'} &= e^{-\beta} \lambda V_{\vec{0}} \end{aligned} \quad (2.15)$$

ou encore

$$\sum_{\vec{m}'} \left\{ \frac{1}{2d} \sum_{i=1}^d (\delta_{\vec{m}, \vec{m}'+\vec{e}_i} + \delta_{\vec{m}, \vec{m}'-\vec{e}_i}) \right\} V_{\vec{m}'} - \lambda V_{\vec{m}} = (e^{-\beta} - 1) \lambda V_{\vec{0}} \delta_{\vec{m}, \vec{0}} . \quad (2.16)$$

On peut noter d'ores et déjà que si $V_{\vec{0}} = 0$, les équations aux valeurs propres ne dépendent pas de β et sont les mêmes que dans le cas sans interaction. Une fonction d'onde du problème sans interaction qui satisfait $V_{\vec{0}} = 0$ est donc automatiquement fonction d'onde du problème avec impureté avec la même valeur propre. De telles fonctions d'onde peuvent être construites à partir des fonctions d'ondes (2.9) en prenant maintenant la combinaison linéaire

$$V_{\vec{m}}^{(\vec{\Phi})} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{i\vec{\Phi} \cdot \vec{m}} - \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-i\vec{\Phi} \cdot \vec{m}} \right) \quad (2.17)$$

pour $\vec{\Phi} \neq \vec{0}$. On retrouve donc un continuum de valeurs propres entre -1 et 1 . Si $\lambda_{\max} = 1$, on a $r = 0$ et il n'y a pas d'accrochage. Pour avoir accrochage il faut trouver une valeur propre dépendant de β (ce qui nécessite $V_{\vec{0}} \neq 0$) et plus grande que 1 . Pour savoir si une telle valeur propre existe, réécrivons l'équation (2.16) en transformée de Fourier. Posant

$$V_{\vec{m}} = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d^d \vec{\Phi}}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{\Phi} \cdot \vec{m}} c(\vec{\Phi}) , \quad (2.18)$$

on obtient

$$c(\vec{\Phi}) \left(\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \cos(\Phi_i) - \lambda \right) = (e^{-\beta} - 1) \lambda V_{\vec{0}} . \quad (2.19)$$

On obtient alors une condition de compatibilité

$$V_{\vec{0}} = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d^d \vec{\Phi}}{(2\pi)^d} c(\vec{\Phi}) = (1 - e^{-\beta}) \lambda V_{\vec{0}} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d^d \vec{\Phi}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\lambda - \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \cos(\Phi_i)}. \quad (2.20)$$

Pour $\lambda > 1$ et $V_{\vec{0}} \neq 0$, on obtient

$$\underbrace{\frac{1}{1 - e^{-\beta}}}_{\equiv f(\beta)} = \underbrace{\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d^d \vec{\Phi}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\lambda - \frac{1}{\lambda} \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \cos(\Phi_i)}}_{\equiv I(\lambda)}. \quad (2.21)$$

Cette équation, si elle admet une solution, fixe la valeur de l'unique valeur propre de la matrice de transfert plus grande que 1, qui est alors de fait la plus grande valeur propre λ_{\max} .

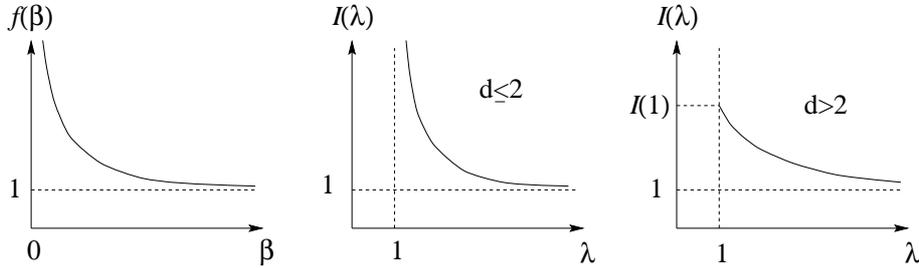


Fig. 4: La fonction $f(\beta)$ et la fonction $I(\lambda)$ pour $d \leq 2$ et $d > 2$

La fonction $f(\beta)$ est monotone décroissante entre $f(0) = +\infty$ et $f(+\infty) = 1$. La fonction $I(\lambda)$ est également monotone décroissante pour $\lambda > 1$ entre $I(1)$ et $I(+\infty) = 1$. Deux situations sont possibles pour $I(1)$ suivant que la dimension d est plus petite ou plus grande que 2. En développant au voisinage de $\vec{\Phi} = \vec{0}$ le dénominateur $1 - \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \cos(\Phi_i) \sim \frac{1}{2d} \vec{\Phi}^2$, on voit que l'intégrale diverge alors en $\vec{\Phi} = \vec{0}$ pour $d \leq 2$ mais reste convergente pour $d > 2$. Pour $d \leq 2$, on a donc $I(1) = +\infty$ et la fonction $I(\lambda)$ prend toutes les valeurs entre 1 et $+\infty$, ce qui garantit l'existence d'une et une seule solution $\lambda > 1$ à l'équation (2.21) pour tout β . Le polymère est dans ce cas toujours accroché à l'impureté avec un paramètre d'ordre $r(\beta)$ strictement positif pour $\beta > 0$. A titre d'exemple, le cas $d = 1$ est particulièrement simple puisqu'on a alors

$$I(\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1}}. \quad (2.22)$$

On obtient alors

$$r(\beta) = \frac{e^{-\beta}(1 - e^{-\beta})}{1 + (1 - e^{-\beta})^2}, \quad (2.23)$$

qui est une fonction croissante partant de $r(0) = 0$ à $r(+\infty) = \frac{1}{2}$, qui est bien le résultat attendu pour un chemin qui peut revenir au maximum une fois sur deux à l'origine.

Pour $d > 2$ au contraire, l'intégrale $I(1)$ est finie et la fonction $I(\lambda)$ ne prend pas toutes les valeurs entre 1 et $+\infty$. Dans ces conditions, l'équation (2.21) n'a une solution $\lambda > 1$ que pour $\beta > \beta_{\text{crit.}}$ avec $\beta_{\text{crit.}}$ défini par $f(\beta_{\text{crit.}}) = I(1)$, ou encore

$$\beta_{\text{crit.}} = \ln \left(\frac{I(1)}{I(1) - 1} \right). \quad (2.24)$$

Pour une attraction assez forte $\beta > \beta_{\text{crit.}}$, le polymère est accroché à l'impureté avec $r > 0$. Pour $\beta < \beta_{\text{crit.}}$, le polymère est libre, c'est à dire $r = 0$. On a une transition d'accrochage à $\beta = \beta_{\text{crit.}}$.

2.2. Formulation continue: développement perturbatif à tous les ordres

Nous allons maintenant traiter le problème de l'interaction avec une impureté à l'origine dans le formalisme continu de l'intégrale fonctionnelle. L'interaction est décrite par le potentiel

$$V(\vec{r}) = b \delta^d(\vec{r}) \quad (2.25)$$

où b est positif pour une interaction répulsive et négatif pour une interaction attractive. L'intégrale fonctionnelle correspondante s'écrit

$$\mathcal{Z}_b \equiv \int_{\vec{r}(0)=\vec{0}} [\mathcal{D}\vec{r}(s)] \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^S ds \left(\frac{d\vec{r}}{ds}(s) \right)^2 - b \int_0^S ds \delta^d(\vec{r}(s)) \right]. \quad (2.26)$$

2.2.1 Pertinence de l'interaction:

A b petit, le terme d'interaction peut être vu comme une simple perturbation du problème libre sans interaction. Cette interaction est-elle pertinente, c'est à dire modifie-t-elle les propriétés du polymère à grand S ? Pour répondre à cette question, on peut développer \mathcal{Z}_b au premier ordre en b , ce qui donne

$$\mathcal{Z}_b = 1 - b \left\langle \int_0^S ds \delta^d(\vec{r}(s)) \right\rangle + \mathcal{O}(b^2) \quad (2.27)$$

où la moyenne est prise avec le poids Gaussien sans interaction. La perturbation au problème libre fait donc intervenir la quantité

$$\mathcal{C}_0 \equiv \left\langle \int_0^S ds \delta^d(\vec{r}(s)) \right\rangle = \int_0^S ds \mathcal{P}(\vec{0}, s), \quad (2.28)$$

qui est la densité moyenne de polymère à l'origine dans le problème libre, ou encore le "temps" total passé par le chemin au voisinage de l'origine. Réintroduisons pour quelques temps un régulateur à courte distance s_0 qui prend en compte le fait que les maillons du polymère ont une longueur microscopique a (on a alors $d s_0 = a^2$ comme dans (1.34)). On peut écrire

$$\mathcal{C}_0 = \int_{s_0}^S ds \frac{1}{(2\pi s)^{\frac{d}{2}}} = \begin{cases} \frac{2}{(2-d)(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \left(S^{1-\frac{d}{2}} - s_0^{1-\frac{d}{2}} \right) \underset{S \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{(2-d)(2\pi)^{\frac{d}{2}}} S^{1-\frac{d}{2}} & \text{si } d < 2 , \\ \frac{2}{(d-2)(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \left(\frac{1}{s_0^{\frac{d}{2}-1}} - \frac{1}{S^{\frac{d}{2}-1}} \right) \underset{S \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{(d-2)(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{s_0^{\frac{d}{2}-1}} & \text{si } d > 2 , \\ \frac{1}{(2\pi)} \ln \left(\frac{S}{s_0} \right) & \text{si } d = 2 . \end{cases} \quad (2.29)$$

On voit donc que pour $d > 2$, le temps passé à l'origine tend vers une constante quand $S \rightarrow +\infty$. Pour b assez petit, on s'attend alors à ce que le polymère soit libre et insensible à l'impureté. Notons que pour une interaction attractive, cette conclusion est compatible avec les résultats du chapitre précédent utilisant le formalisme de la matrice de transfert. Nous savons que dans ce cas, il faut que la force de l'interaction soit supérieure à une valeur critique pour que le polymère s'accroche à l'impureté. Pour b trop petit, le polymère sera donc libre. Une estimation du b critique (qui est négatif) peut être obtenue ici en demandant que la perturbation $b\mathcal{C}_0$ soit d'ordre 1, ce qui donne

$$b_{\text{crit.}} \sim -(2\pi)^{\frac{d}{2}} \left(\frac{d}{2} - 1 \right) s_0^{\frac{d}{2}-1} . \quad (2.30)$$

Cette estimation est précisément (à un facteur d'ordre 1 près) la même que celle obtenue en prenant la limite continue de l'équation (2.24) si on fait la correspondance $\beta = -a^{2-d}b$ et $d s_0 = a^2$ et on estime $I(1)$ dans la limite continue par un changement de variable $\vec{\Phi} = \vec{k} a$.

Au contraire, pour $d \leq 2$, le temps passé à l'origine croît avec S et tend vers l'infini quand $S \rightarrow +\infty$. On s'attend dans ce cas à ce que l'interaction due à l'impureté soit pertinente même pour un b infiniment petit et modifie donc les propriétés physiques du polymère. Que modifie l'interaction dans ce cas?

Dans le cas où b est négatif, le polymère va s'accrocher à l'impureté. On s'attend alors à ce que, pour tout $b < 0$

$$\begin{aligned} \langle (\vec{r}(S) - \vec{r}(0))^2 \rangle_b &\underset{S \rightarrow +\infty}{\sim} \text{Constante indep}^t \text{ de } S \\ \frac{\mathcal{P}_b(\vec{0}, S)}{\mathcal{Z}_b} &\underset{S \rightarrow +\infty}{\sim} \mathcal{P}_0 = \text{Constante indep}^t \text{ de } S \\ \mathcal{Z}_b &\underset{S \rightarrow +\infty}{\sim} e^{\alpha S} , \end{aligned} \quad (2.31)$$

avec une énergie libre $\mathcal{F}_b = -\alpha S$ proportionnelle à S . En utilisant (1.121), on obtient de plus l'identité

$$\alpha = - \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{\partial \mathcal{F}_b}{\partial S} = - \lim_{S \rightarrow +\infty} \langle b \delta^d(\vec{r}(S)) \rangle_b = -b\mathcal{P}_0 . \quad (2.32)$$

Dans le cas où b est positif, on s'attend à ce que

$$\begin{aligned} \langle (\vec{r}(S) - \vec{r}(0))^2 \rangle_0 &\underset{S \rightarrow +\infty}{\sim} c \underbrace{\frac{dS}{\text{Rés. Brownien}}} \\ \frac{\mathcal{P}_b(\vec{0}, S)}{\mathcal{Z}_b} &\text{tend vers 0 plus vite que } \underbrace{\frac{1}{(2\pi S)^{\frac{d}{2}}}}_{\text{Rés. Brownien}} \\ \mathcal{Z}_b &\underset{S \rightarrow +\infty}{\sim} S^{\gamma_I - 1} , \end{aligned} \quad (2.33)$$

avec un coefficient c strictement plus grand que 1 traduisant le gonflement du polymère dû à l'interaction, et un exposant universel γ_I indépendant de b et plus petit que le résultat Brownien $\gamma = 1$, traduisant le fait que la présence de l'impureté répulsive diminue le nombre de chemins effectivement accessibles.

Analyse dimensionnelle

La pertinence de l'interaction selon que d est plus petit ou plus grand que 2 peut se voir directement par un simple argument d'analyse dimensionnelle comme suit. Le terme

$$\frac{1}{2} \int_0^S ds \left(\frac{d\vec{r}}{ds}(s) \right)^2 \quad (2.34)$$

doit être sans dimension, ce qui implique que les dimensions $[s]$ de s et $[\vec{r}]$ de \vec{r} sont reliées par $2[\vec{r}] - [s] = 0$, ou encore

$$[\vec{r}] = \frac{1}{2}[s] . \quad (2.35)$$

Ceci n'est autre que la traduction du fait qu'en passant à la limite, nous avons posé $\vec{r} = \vec{m} a$ mais $s = \frac{n}{d} a^2$, d'où le facteur 2 entre les deux dimensions. En utilisant maintenant le fait que

$$b \int_0^S ds \delta^d(\vec{r}(s)) \quad (2.36)$$

est lui aussi sans dimension, on obtient que $[b] + [s] - d[\vec{r}] = 0$, et donc

$$[b] = \left(\frac{d}{2} - 1 \right) [s] . \quad (2.37)$$

On voit alors que pour $d < 2$, b a une dimension négative en unité de s , ce qui signifie que si l'on prend pour s une unité plus grande (la valeur de s dans cette unité est alors plus petite) la valeur de b dans cette unité sera elle plus grande. En d'autres termes, b devient de plus en plus important à de plus grandes échelles de s et l'interaction est pertinente à grand S . Au contraire, pour $d > 2$, la dimension de b est positive en unité de s et sa valeur relative décroît quand l'échelle des s croît. L'interaction est non pertinente (pour b suffisamment petit). La dimension $d = 2$ s'appelle la dimension critique supérieure pour la pertinence de l'interaction.

Cet argument de comptage est très général et prédit qu'une interaction de "constante de couplage" B est pertinente à grande échelle de X , c'est à dire dans la limite où une variable dimensionnée X devient grande si la dimension de B est *négative* en unité de X .

2.2.2 Calculs à $d < 2$:

Nous nous proposons maintenant de calculer par un développement à tous les ordres en b la probabilité normalisée

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{P}_b(\vec{r}, S)}{\mathcal{Z}_b} &= \frac{\int_{\vec{r}(0)=\vec{0}} [\mathcal{D}\vec{r}(s)] \delta^d(\vec{r}(S) - \vec{r}) \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^S ds \left(\frac{d\vec{r}}{ds}(s) \right)^2 - b \int_0^S ds \delta^d(\vec{r}(s)) \right]}{\int_{\vec{r}(0)=\vec{0}} [\mathcal{D}\vec{r}(s)] \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^S ds \left(\frac{d\vec{r}}{ds}(s) \right)^2 - b \int_0^S ds \delta^d(\vec{r}(s)) \right]} \\ &= \frac{\langle \delta^d(\vec{r}(S) - \vec{r}) \exp \left[-b \int_0^S ds \delta^d(\vec{r}(s)) \right] \rangle}{\langle \exp \left[-b \int_0^S ds \delta^d(\vec{r}(s)) \right] \rangle}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

où les moyennes sont effectuées avec le poids Gaussien sans interaction. Nous nous limiterons dans un premier temps au cas $d < 2$ où l'introduction d'un régulateur pour rendre les intégrales convergentes à courte distance n'est pas nécessaire. La théorie ne dépend dans ce cas que de b et de S . En transformée de Fourier, on a à calculer la quantité

$$I_b(\vec{k}, S) \equiv \langle e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}(S)} \exp \left[-b \int_0^S ds \delta^d(\vec{r}(s)) \right] \rangle, \quad (2.39)$$

de sorte que

$$\frac{\mathcal{P}_b(\vec{r}, S)}{\mathcal{Z}_b} = \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \frac{I_b(\vec{k}, S)}{I_b(\vec{0}, S)}. \quad (2.40)$$

On obtient en développant en b

$$I_b(\vec{k}, S) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-b)^n}{n!} \int_0^S ds_1 ds_2 \dots ds_n \langle \delta^d(\vec{r}(s_1)) \delta^d(\vec{r}(s_2)) \dots \delta^d(\vec{r}(s_n)) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}(S)} \rangle. \quad (2.41)$$

En écrivant

$$\int_0^S ds_1 ds_2 \dots ds_n = n! \int_{0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq S} ds_1 ds_2 \dots ds_n, \quad (2.42)$$

on obtient pour le terme d'ordre n du développement

$$I_b^{(n)} = (-b)^n \int_{0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq S} ds_1 ds_2 \dots ds_n \left\langle \prod_{i=1}^n \delta^d(\vec{r}(s_i) - \vec{r}(s_{i-1})) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}(s_{n+1}) - \vec{r}(s_n))} \right\rangle, \quad (2.43)$$

où on a posé $s_0 \equiv 0$, $s_{n+1} = S$ et $\vec{r}(s_0) = \vec{0}$. De manière équivalente, on a

$$I_b^{(n)} = (-b)^n \int_{0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq S} ds_1 ds_2 \dots ds_n \int \prod_{i=1}^n \frac{d^d \vec{q}_i}{(2\pi)^d} \left\langle e^{i \sum_{i=1}^{n+1} \vec{q}_i \cdot (\vec{r}(s_i) - \vec{r}(s_{i-1}))} \right\rangle, \quad (2.44)$$

avec la convention $\vec{q}_{n+1} = \vec{k}$ sur lequel on n'intègre pas. En utilisant la formule (1.81) pour la moyenne Gaussienne, on trouve finalement

$$\begin{aligned} I_b^{(n)} &= (-b)^n \int_{0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq S} ds_1 ds_2 \dots ds_n \int \prod_{i=1}^n \frac{d^d \vec{q}_i}{(2\pi)^d} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \vec{q}_i^2 (s_i - s_{i-1})} \\ &= (-b)^n \int_{0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq S} ds_1 ds_2 \dots ds_n \prod_{i=1}^n \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} (s_i - s_{i-1})^{\frac{d}{2}}}}_{\substack{\text{Proba de revenir en } \vec{0} \\ \text{pour un morceau de polymère} \\ \text{de longueur } s_i - s_{i-1}}} \times \underbrace{e^{-\frac{1}{2} \vec{k}^2 (S - s_n)}}_{\substack{\langle e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}(S) - \vec{r}(s_n))} \rangle \\ \text{pour un polymère} \\ \text{de longueur } S - s_n}}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

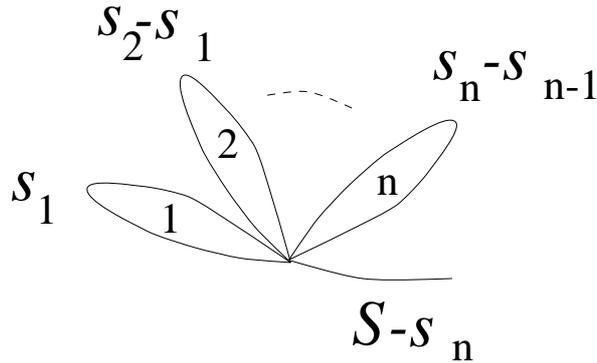


Fig. 5: Diagramme en marguerite à n pétales représentant l'intégrale $I_b^{(n)}$ à n contacts

Cette formule est évidente si on admet que le développement en b est un développement en nombre de contacts “forcés” avec l’impureté. Le terme $I_b^{(n)}$ revient alors principalement à intégrer sur les positions s_i des contacts la probabilité d’une telle configuration de contacts. On représente l’intégrale $I_b^{(n)}$ par le diagramme en marguerite à n pétales de la figure 5. En posant $t_i = s_i - s_{i-1}$, on peut écrire

$$I_b^{(n)} = \left(\frac{-b}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \right)^n \int_0^{+\infty} dt_1 dt_2 \dots dt_n \theta \left(S - \sum_{i=1}^n t_i \right) \prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{1}{2}\vec{k}^2 \left(S - \sum_{i=1}^n t_i \right)}. \quad (2.46)$$

On peut calculer cette intégrale en transformée de Laplace. On a

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dS e^{-aS} \frac{I_b^{(n)}(S)}{\left(\frac{-b}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \right)^n} &= \int_0^{+\infty} dt_1 dt_2 \dots dt_n \prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{d}{2}} e^{\frac{1}{2}\vec{k}^2 \sum_{i=1}^n t_i} \underbrace{\int_{\sum_{i=1}^n t_i}^{+\infty} dS e^{-(a+\frac{1}{2}\vec{k}^2)S}}_{= \frac{1}{a+\frac{1}{2}\vec{k}^2} e^{-(a+\frac{1}{2}\vec{k}^2) \sum_{i=1}^n t_i}} \\ &= \int_0^{+\infty} dt_1 dt_2 \dots dt_n \prod_{i=1}^n \left(t_i^{-\frac{d}{2}} e^{-at_i} \right) \times \frac{1}{a + \frac{1}{2}\vec{k}^2} \\ &= \frac{1}{a + \frac{1}{2}\vec{k}^2} \left(\int_0^{+\infty} dt t^{-\frac{d}{2}} e^{-at} \right)^n \\ &= \frac{1}{a + \frac{1}{2}\vec{k}^2} \left(\frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{a^{1-\frac{d}{2}}} \right)^n. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Pour effectuer la transformée de Laplace inverse, on peut remarquer que la fonction $\left(\frac{1}{a^{1-\frac{d}{2}}} \right)^n$ a pour transformée de Laplace inverse la fonction $\frac{S^{n(1-\frac{d}{2})-1}}{\Gamma(n(1-\frac{d}{2}))}$ et que si $f(S)$ est la transformée de Laplace inverse de $\bar{f}(a)$, celle de $\frac{1}{a+\frac{1}{2}\vec{k}^2} \bar{f}(a)$ est

$$e^{-\frac{1}{2}\vec{k}^2 S} \int_0^S dt e^{\frac{1}{2}\vec{k}^2 t} f(t), \quad (2.48)$$

on obtient finalement la formule

$$I_b(\vec{k}, S) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-b\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \right)^n \frac{e^{-\frac{1}{2}\vec{k}^2 S} \int_0^S dt e^{\frac{1}{2}\vec{k}^2 t} t^{n(1-\frac{d}{2})-1}}{\Gamma(n(1-\frac{d}{2}))}, \quad (2.49)$$

avec la convention que pour $n = 0$, on a simplement un terme $e^{-\frac{1}{2}\vec{k}^2 S}$.

Nous allons maintenant voir un certain nombre d'applications du résultat ci-dessus. Il est commode d'introduire les notations suivantes

$$\begin{aligned}\epsilon &\equiv 1 - \frac{d}{2} \\ \ell_b &\equiv \left(\frac{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}{|b|\Gamma(\epsilon)} \right)^{\frac{1}{\epsilon}} \\ z &= b \frac{\Gamma(\epsilon)}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} S^\epsilon = \frac{b}{|b|} \left(\frac{S}{\ell_b} \right)^\epsilon.\end{aligned}\tag{2.50}$$

Le paramètre ϵ mesure l'écart à la dimension critique supérieure $d = 2$ et n'est autre que l'opposé de la dimension de b en unité de S ($[b] = -\epsilon[S]$). La quantité positive ℓ_b est une "longueur" (nous parlerons d'unité de longueur pour S) fabriquée à partir de b . La quantité z est un paramètre sans dimension proportionnel au paramètre d'interaction b . C'est en fait le paramètre naturel du développement perturbatif. Il est important de noter que pour $d < 2$ ($\epsilon > 0$), ce paramètre devient grand quand S devient grand.

• **Expression de \mathcal{Z}_b**

Comme première application de la formule (2.49), regardons d'abord la quantité $\mathcal{Z}_b = I_b(\vec{0}, S)$ obtenue en faisant $\vec{k} = \vec{0}$ dans (2.49):

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_b &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-b\Gamma(1-\frac{d}{2})}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \right)^n \frac{S^{n(1-\frac{d}{2})}}{n(1-\frac{d}{2})\Gamma(n(1-\frac{d}{2}))} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{\Gamma(\epsilon n + 1)}.\end{aligned}\tag{2.51}$$

La fonction

$$E_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}\tag{2.52}$$

s'appelle la fonction de Mittag-Leffler de paramètre α (avec $\alpha > 0$). C'est une généralisation de l'exponentielle puisque on a clairement $E_1(x) = \exp(x)$. Nous obtenons donc le résultat compact

$$\boxed{\mathcal{Z}_b = E_\epsilon(-z)}.\tag{2.53}$$

Notons le résultat amusant que pour $d = 0$ ($\epsilon = 1$) nous trouvons $\mathcal{Z}_b = \exp(-z) = \exp(-bS)$, un résultat évident dans un espace réduit au seul point $\vec{0}$.

• **Expression de $\langle (\vec{r}(S) - \vec{r}(0))^2 \rangle_b$**

On peut calculer la distance bout à bout en utilisant

$$\langle (\vec{r}(S) - \vec{r}(0))^2 \rangle_b = \frac{1}{\mathcal{Z}_b} \left(-\frac{\partial}{\partial \vec{k}} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{k}} \right) \Big|_{\vec{k}=\vec{0}} I_b(\vec{k}, S) = -\frac{2d}{\mathcal{Z}_b} \frac{\partial}{\partial \vec{k}^2} \Big|_{\vec{k}^2=0} I_b(\vec{k}, S) . \quad (2.54)$$

On obtient

$$\langle (\vec{r}(S) - \vec{r}(0))^2 \rangle_b = d S \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} (-z)^n / \Gamma(\epsilon n + 2)}{\sum_{n=0}^{+\infty} (-z)^n / \Gamma(\epsilon n + 1)} . \quad (2.55)$$

• **Expression de $\frac{\mathcal{P}_b(\vec{0}, S)}{\mathcal{Z}_b}$**

On peut calculer la probabilité normalisée de retour à l'origine en présence de l'impureté directement par l'équation

$$-b \frac{\mathcal{P}_b(\vec{0}, S)}{\mathcal{Z}_b} = \frac{\partial}{\partial S} \ln \left(I_b(\vec{0}, S) \right) . \quad (2.56)$$

On obtient alors

$$\frac{\mathcal{P}_b(\vec{0}, S)}{\mathcal{Z}_b} = \frac{1}{(2\pi S)^{\frac{d}{2}}} \Gamma(\epsilon) \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} (-z)^n / \Gamma(\epsilon(n+1))}{\sum_{n=0}^{+\infty} (-z)^n / \Gamma(\epsilon n + 1)} . \quad (2.57)$$

• **Expression de $\frac{\mathcal{P}_b(\vec{r}, S)}{\mathcal{Z}_b}$**

Finalement, on peut donner une expression de la probabilité normalisée $\frac{\mathcal{P}_b(\vec{r}, S)}{\mathcal{Z}_b}$ en utilisant (2.40). On obtient

$$\frac{\mathcal{P}_b(\vec{r}, S)}{\mathcal{Z}_b} = \frac{1}{(2\pi S)^{\frac{d}{2}}} \Gamma(\epsilon) \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} (-z)^n \int_0^1 du \frac{u^{n\epsilon-1}}{(1-u)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{(\vec{r}^2/S)}{2(1-u)}} / \Gamma(\epsilon n)}{\sum_{n=0}^{+\infty} (-z)^n / \Gamma(\epsilon n + 1)} , \quad (2.58)$$

avec la convention que pour $n = 0$, le terme au numérateur vaut simplement $e^{-\frac{\vec{r}^2}{2S}}$.

2.2.3 Comportements asymptotiques:

Nous nous intéressons maintenant à la limite des grands S . Dans cette limite, le paramètre sans dimension z tend vers $+\infty$ si l'interaction avec l'impureté est répulsive et

vers $-\infty$ si elle est attractive. On peut montrer les comportements suivants des fonctions de type Mittag-Leffler (pour $0 < \epsilon < 1$):

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{\Gamma(\epsilon n + 1)} = \begin{cases} \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} & \frac{1}{z \Gamma(1-\epsilon)} \\ \underset{z \rightarrow -\infty}{\sim} & \frac{1}{\epsilon} e^{|z|^{\frac{1}{\epsilon}}} \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{\Gamma(\epsilon n + 2)} = \begin{cases} \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} & \frac{1}{z \Gamma(2-\epsilon)} \\ \underset{z \rightarrow -\infty}{\sim} & \frac{1}{\epsilon |z|^{\frac{1}{\epsilon}}} e^{|z|^{\frac{1}{\epsilon}}} \end{cases} \quad (2.59)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{\Gamma(\epsilon(n+1))} = \begin{cases} \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} & \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right) \\ \underset{z \rightarrow -\infty}{\sim} & \frac{1}{\epsilon |z|^{1-\frac{1}{\epsilon}}} e^{|z|^{\frac{1}{\epsilon}}} \end{cases} .$$

• Cas attractif

Examinons tout d'abord les résultats obtenus dans le cas attractif avec $z \rightarrow -\infty$. On a alors $|z|^{\frac{1}{\epsilon}} = \frac{S}{\ell_b}$, ce qui donne

$$\mathcal{Z}_b \underset{S \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\epsilon} e^{\frac{S}{\ell_b}} \quad (2.60)$$

et une énergie libre $\mathcal{F}_b \sim -\alpha S$ proportionnelle à S avec $\alpha = \frac{1}{\ell_b}$. La distance à l'origine, mesurée par

$$\langle (\vec{r}(S) - \vec{r}(0))^2 \rangle_b \underset{S \rightarrow +\infty}{\sim} d \ell_b , \quad (2.61)$$

reste finie quand S tend vers l'infini. La probabilité normalisée de retour à l'origine tend elle aussi vers une valeur finie non nulle

$$\frac{\mathcal{P}_b(\vec{0}, S)}{\mathcal{Z}_b} \underset{S \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{|b| \ell_b} \equiv \mathcal{P}_0 , \quad (2.62)$$

avec $\mathcal{P}_0 = -\frac{\alpha}{b}$ comme attendu. En utilisant le comportement à grand S de (2.58), et dans la limite des courtes distances $\frac{\vec{r}^2}{S} \ll 1$, on peut montrer que

$$\frac{\mathcal{P}_b(\vec{r}, S)}{\mathcal{Z}_b} = \frac{\mathcal{P}_b(\vec{0}, S)}{\mathcal{Z}_b} - \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\epsilon (2\pi \ell_b)^{\frac{d}{2}}} \left(\frac{\vec{r}^2}{2\ell_b} \right)^\epsilon + \dots \quad (2.63)$$

La force effective exercée au voisinage de l'origine par l'impureté peut alors se calculer par

$$\vec{F}(\vec{r}) = \nabla_{\vec{r}} \ln(\mathcal{P}_b(\vec{r}, S)) \propto \nabla_{\vec{r}} \left(-(\vec{r}^2)^\epsilon \right) \propto -\frac{\vec{r}}{r^2} |\vec{r}|^{2\epsilon} , \quad (2.64)$$

c'est à dire une force attractive en $r^{2\epsilon-1} = \frac{1}{r^{d-1}}$ avec une constante de proportionalité non universelle.

• **Cas répulsif**

Examinons maintenant les résultats obtenus dans le cas répulsif avec $z \rightarrow +\infty$. On a pour \mathcal{Z}_b le comportement

$$\mathcal{Z}_b \underset{S \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\Gamma(1-\epsilon)} \left(\frac{\ell_b}{S}\right)^\epsilon \sim S^{\gamma_I-1} \quad (2.65)$$

avec un exposant γ_I donné par $\gamma_I = \frac{d}{2} < 1$. La distance à l'origine croît avec S comme

$$R_b^2(S) \equiv \langle (\vec{r}(S) - \vec{r}(0))^2 \rangle_b \underset{S \rightarrow +\infty}{\sim} dS \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(2-\epsilon)} = 2S = c \times (dS), \quad (2.66)$$

avec un coefficient de gonflement $c = \frac{2}{d} > 1$ par rapport au cas sans interaction. Ce coefficient est universel et ne dépend pas de la valeur de b . Remarquons que l'impureté ne modifie pas l'exposant ν du polymère, c'est à dire que l'on a $\nu_I = \frac{1}{2}$ comme pour le chemin Brownien. La probabilité normalisée de retour à l'origine tend vers 0 comme

$$\frac{\mathcal{P}_b(\vec{0}, S)}{\mathcal{Z}_b} \underset{S \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(2\pi S)^{\frac{d}{2}}} \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right) \sim S^{-1}. \quad (2.67)$$

Ceci donne un comportement pour la quantité non normalisée (qui compte les chemins terminant en $\vec{0}$ et, selon la définition des exposants critiques se comporte comme S^{α_I-2}) $\mathcal{P}_b(\vec{0}, S) \sim S^{\gamma_I-1} \times S^{-1}$ et donc un exposant $\alpha_I = \gamma_I = \frac{d}{2}$.

Pour S grand et dans la limite des courtes distances $\frac{\vec{r}^2}{S} \ll 1$, on montre maintenant que

$$\frac{\mathcal{P}_b(\vec{r}, S) - \mathcal{P}_b(\vec{0})}{\mathcal{Z}_b} \sim \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{(2\pi S)^{\frac{d}{2}}} \left(\frac{\vec{r}^2}{2S}\right)^\epsilon. \quad (2.68)$$

Ceci est bien compatible avec la forme d'échelle voulue pour $\mathcal{P}_b(\vec{r}, S)/\mathcal{Z}_b$:

$$\frac{\mathcal{P}_b(\vec{r}, S)}{\mathcal{Z}_b} \underset{S \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(R_b^2(S))^{\frac{d}{2}}} f\left(\frac{|\vec{r}|}{R_b(S)}\right), \quad (2.69)$$

et précise la valeur de l'exposant θ_I (tel que $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^{\theta_I}$) qui vaut $\theta_I = 2 - d$. La relation (1.21) affirmant que $(\alpha_I - 2) - (\gamma_I - 1) = -\nu_I d - \nu_I \theta_I$ est bien vérifiée. Notons qu'il n'y a pas "hyperscaling" dans ce problème. La force exercée au voisinage de l'origine par l'impureté vaut maintenant (avec la différence par rapport au cas attractif que $\mathcal{P}_b(\vec{0}, S)$ tend maintenant vers 0)

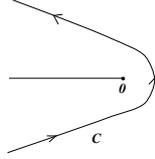
$$\vec{F}(\vec{r}) = \nabla_{\vec{r}} \ln(\mathcal{P}_b(\vec{r}, S)) \sim \theta_I \nabla_{\vec{r}} \ln(|\vec{r}|) = \theta_I \frac{\vec{r}}{r^2} \quad (2.70)$$

c'est à dire une force répulsive en $\frac{1}{r}$ avec une constante de proportionnalité universelle θ_I .

Nous terminons en établissant à titre d'exemple les comportements asymptotiques (2.59) pour la fonction de Mittag-Leffler $E_\alpha(x)$ à $|x|$ grand et pour $0 < \alpha < 1$. Pour cela, on utilise une représentation intégrale du coefficient

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha n + 1)} = \frac{1}{2i\pi} \int_C du e^u u^{-n\alpha-1}, \quad (2.71)$$

où C est un contour dans le plan complexe laissant l'origine à sa gauche et allant à l'infini à gauche dans chacun des demi-plans supérieur et inférieur comme ci-dessous



On obtient alors pour $E_\alpha(x)$ la représentation intégrale

$$\begin{aligned} E_\alpha(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \frac{1}{2i\pi} \int_C du e^u u^{-n\alpha-1} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_C du \frac{e^u}{u} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{u^\alpha}\right)^n \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C(x)} du \frac{e^u}{u} \frac{u^\alpha}{u^\alpha - x}, \end{aligned} \quad (2.72)$$

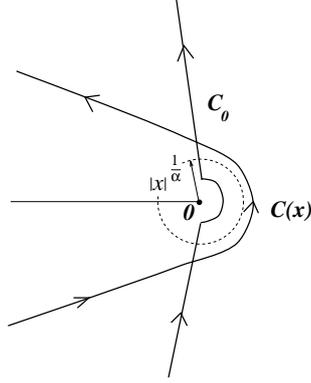
où on a choisi le contour $C = C(x)$ de sorte que $|u| > |x|^{\frac{1}{\alpha}} \forall u$. En écrivant

$$\frac{u^\alpha}{u^\alpha - x} = -\frac{u^\alpha}{x} + \frac{u^{2\alpha}}{x(u^\alpha - x)}, \quad (2.73)$$

on obtient

$$\begin{aligned} E_\alpha(x) &= -\frac{1}{x} \frac{1}{2i\pi} \int_{C(x)} du \frac{e^u}{u} u^\alpha - \frac{1}{x} \frac{1}{2i\pi} \int_{C(x)} du \frac{e^u}{u} \frac{u^{2\alpha}}{x - u^\alpha} \\ &= -\frac{1}{x\Gamma(1-\alpha)} - \frac{1}{x} \frac{1}{2i\pi} \int_{C(x)} du \frac{e^u}{u} \frac{u^{2\alpha}}{x - u^\alpha}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

L'intégrale de contour restante est un $\mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$ à condition de choisir un contour C_0 indépendant de x tel que ci-dessous



Le passage de $C(x)$ à C_0 est neutre pour $x < 0$ mais pas pour x positif puisqu'on doit alors passer à travers un pôle à $u = x^{\frac{1}{\alpha}}$. On obtient dans ce cas

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(x)} du \frac{e^u}{u} \frac{u^{2\alpha}}{x - u^\alpha} - \frac{1}{2i\pi} \int_{C_0} du \frac{e^u}{u} \frac{u^{2\alpha}}{x - u^\alpha} = \frac{e^{x^{\frac{1}{\alpha}}}}{x^{\frac{1}{\alpha}}} x^2 \frac{x^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha} = \frac{x}{\alpha} e^{x^{\frac{1}{\alpha}}}. \quad (2.75)$$

On obtient finalement les comportements asymptotique

$$E_\alpha(x) \begin{cases} \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} & -\frac{1}{x \Gamma(1-\alpha)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} & \frac{1}{\alpha} e^{x^{\frac{1}{\alpha}}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) \end{cases} \quad (2.76)$$

La même méthode permet de calculer toutes les formules asymptotiques (2.59).

2.3. Groupe de renormalisation

2.3.1 Renormalisation des divergences à $d = 2$:

Les calculs du chapitre précédent sont valables pour $d < 2$. Dans ce cas, les seules échelles dans le problème sont la taille S du polymère et la longueur ℓ_b qui code l'intensité de l'interaction. A $d = 2$, b devient sans dimension et il n'est plus possible de construire une échelle de longueur avec b . Dans le même temps, les intégrales comme (2.46) deviennent divergentes car

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^{\frac{d}{2}}} \quad (2.77)$$

développe une divergence à courte distance $t \rightarrow 0$ quand $d \rightarrow 2$. Ces divergences se traduisent directement par l'apparition d'un pôle en $\epsilon = 1 - \frac{d}{2}$ dans le paramètre sans dimension z du développement perturbatif. Elles peuvent être supprimées simplement en

réintroduisant une coupure s_0 et en demandant que l'on intègre uniquement sur les $t > s_0$. Physiquement, s_0 représente la taille non nulle des monomères. La coupure s_0 est donc une donnée physique du problème. Pour $d < 2$ on l'on peut faire tendre $s_0 \rightarrow 0$ sans dommage, cette donnée devient invisible à une échelle suffisamment grande et peut en fait être ignorée totalement dès le départ. A $d = 2$ au contraire, on ne peut faire l'économie de cette donnée. Comme b est alors sans dimension, s_0 devient avec S la seule échelle de longueur du problème avec comme nouvelle variable sans dimension la quantité $\frac{S}{s_0}$. Comprendre la limite à grand S du problème revient alors à comprendre la limite à s_0 petit, autrement dit comprendre la structure des divergences des intégrales à $d = 2$ quand $s_0 \rightarrow 0$.

Ici, nous allons adopter le point de vue légèrement différent de la régularisation dimensionnelle, qui consiste à revenir à la théorie à $\epsilon > 0$ ($d < 2$), et à comprendre comment s'organisent les pôles en ϵ afin de définir une théorie, dite renormalisée, qui reste finie à $d = 2$ et soit équivalente en contenu physique à la première.

Nous repartons de l'intégrale

$$A^{(n)} \equiv \int_0^{+\infty} dt_1 dt_2 \dots dt_n \theta \left(S - \sum_{i=1}^n t_i \right) \prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{1}{2} \vec{k}^2 \left(S - \sum_{i=1}^n t_i \right)} \quad (2.78)$$

apparaissant dans la formule (2.46) donnant $I_b^{(n)}$. On peut supprimer la divergence quand l'un des t_k tend vers 0 en soustrayant à l'intégrand une fonction qui possède la même divergence quand $t_k \rightarrow 0$. On choisit de soustraire la quantité

$$C_k^{(n)} \equiv \int_0^{+\infty} dt_1 dt_2 \dots dt_n \theta \left(S - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n t_i \right) \prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{1}{2} \vec{k}^2 \left(S - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n t_i \right)} \theta(X - t_k) \quad (2.79)$$

obtenue en faisant $t_k = 0$ dans la partie régulière de l'intégrand. La fonction $\theta(X - t_k)$, faisant intervenir une échelle arbitraire X , est introduite de manière à ne pas créer de divergence dans l'intégrale quand $t_k \rightarrow +\infty$. L'amplitude soustraite $A_k^{(n)} \equiv A^{(n)} - C_k^{(n)}$ n'est plus divergente quand t_k tend vers 0. Pour $d < 2$ où tout converge, l'intégrale sur t_k dans (2.79) est complètement factorisée et fabrique un terme

$$\int_0^X \frac{dt_k}{(2\pi t_k)^{\frac{d}{2}}} = \frac{X^\epsilon}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \epsilon} \cdot \quad (2.80)$$

Sous forme diagrammatique, on peut représenter l'amplitude (2.78) par un diagramme marguerite à n pétales et l'amplitude (2.79) par le même diagramme marguerite avec le k ème pétale arraché, représentant la factorisation du terme (2.80). On fabrique ainsi une amplitude soustraite:

$$\begin{aligned}
 A_k^{(n)} &= \text{diagramme à } n \text{ pétales} - \underbrace{\text{diagramme à } n \text{ pétales avec le } k\text{ème pétale arraché}}_{\text{facteur}} \\
 &= \text{pétale isolé} \times \text{diagramme à } (n-1) \text{ pétales}
 \end{aligned}
 \tag{2.81}$$

avec

$$\text{pétale isolé} = \frac{X^\epsilon}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \epsilon} .
 \tag{2.82}$$

Il est à remarquer que la divergence a été entièrement factorisée dans le pétale arraché et que le diagramme restant (une marguerite à $(n - 1)$ pétales) est un diagramme déjà présent dans la théorie (à l'ordre $(n - 1)$). Nous allons voir que la divergence peut alors être absorbée dans une renormalisation de la "constante de couplage" b . Si on veut itérer le processus et soustraire la divergence quand un autre t_l ($l \neq k$) tend vers zero, il faut maintenant considérer l'amplitude soustraite

$$\begin{aligned}
 A_{lk}^{(n)} &= \text{(a)} - \text{(b)} - \text{(c)} + \underbrace{\text{(d)}}_{\text{facteur}} \\
 &= \text{pétale } k \times \text{pétale } l \times \text{diagramme à } (n-2) \text{ pétales}
 \end{aligned}
 \tag{2.83}$$

Quand $t_k \rightarrow 0$, les divergences des termes (a) et (b) s'annihilent, ainsi que celles de (c) et (d). Quand $t_l \rightarrow 0$, ce sont les divergences de (a) et (c) qui s'annihilent, ainsi que celles de (b) et (d). Finalement, l'amplitude qui est finie (c'est à dire sans divergence à $d = 2$) à l'ordre n est

$$A_S^{(n)}(\vec{k}, S) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \underbrace{\frac{n!}{k!(n-k)!}}_{\text{Choix des } k \text{ pétales}} \underbrace{\left(\text{diagramme à } k \text{ pétales} \right)^k}_{n-k \text{ pétales}}, \quad (2.84)$$

La soustraction dans l'amplitude soustraite revient en fait à supprimer les fluctuations du polymère aux échelles $t < X$. Avec les amplitudes soustraites, on fabrique la quantité renormalisée

$$I_b^R(\vec{k}, S) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-b_R)^n A_S^{(n)}(\vec{k}, S), \quad (2.85)$$

fonction d'une constante de couplage renormalisée b_R et finie quand $d \rightarrow 2$. Nous allons maintenant montrer comment, par un choix judicieux de b_R en fonction de b et de X , nous pouvons relier la quantité renormalisée $-b_R I_b^R(\vec{k}, S)$ à la quantité $-b I_b(\vec{k}, S)$ pour la théorie non soustraite qui nous intéresse. On peut écrire

$$-b_R I_b^R(\vec{k}, S) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-b_R)^{n+1} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \underbrace{\left(\text{diagramme à } k \text{ pétales} \right)^k}_{n-k \text{ pétales}} \quad (2.86)$$

et on pose $n = k + m$, de sorte que

$$-b_R I_b^R(\vec{k}, S) = \sum_{m=0}^{+\infty} (-b_R)^{m+1} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{+\infty} (+b_R)^k \frac{(k+m)!}{k!m!} \left(\text{diagramme à } k \text{ pétales} \right)^k \right)}_{\equiv \Sigma} \underbrace{\left(\text{diagramme à } m \text{ pétales} \right)}_{m \text{ pétales}}. \quad (2.87)$$

On peut évaluer le terme Σ ci-dessus en remarquant que

$$\frac{(k+m)!}{k!m!} = \sum_{\substack{p_1, p_2, \dots, p_{m+1} \geq 0 \\ p_1 + p_2 + \dots + p_{m+1} = k}} 1, \quad (2.88)$$

qui compte le nombre de manières de choisir $m + 1$ entiers positifs dont la somme vaut k . On peut donc écrire

$$\begin{aligned} \Sigma &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\substack{p_1, p_2, \dots, p_{m+1} \geq 0 \\ p_1 + p_2 + \dots + p_{m+1} = k}} \left(b_R \left\langle \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\rangle \right)^{p_1} \dots \left(b_R \left\langle \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\rangle \right)^{p_{m+1}} \\ &= \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \left(b_R \left\langle \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\rangle \right)^p \right)^{m+1} . \end{aligned} \quad (2.89)$$

On obtient finalement ¹

$$\begin{aligned} -b_R I_b^R(\vec{k}, S) &= \sum_{m=0}^{+\infty} \left(-b_R \sum_{p=0}^{+\infty} \left(b_R \left\langle \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\rangle \right)^p \right)^{m+1} \underbrace{\left\langle \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\rangle}_{m \text{ pétales}} \\ &= -b I_b(\vec{k}, S) , \end{aligned} \quad (2.90)$$

à condition de choisir

$$-b = -b_R \sum_{p=0}^{+\infty} \left(b_R \left\langle \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\rangle \right)^p , \quad (2.91)$$

soit

$$b = \frac{b_R}{1 - b_R \left\langle \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\rangle} , \quad (2.92)$$

ou encore

$$b_R(X, b) = \frac{b}{1 + b \frac{X^\epsilon}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \epsilon}} . \quad (2.93)$$

Toutes les quantités normalisées (comme $\langle (\vec{r}(S) - \vec{r}(0))^2 \rangle_b$ ou $\frac{\mathcal{P}_b(\vec{r}, S)}{\mathcal{Z}_b}$) qui font intervenir le rapport de deux $I_b(\vec{k}, S)$ et donc le rapport de deux termes du type $b I_b(\vec{k}, S)$ ainsi que $b \mathcal{Z}_b = b I_b(\vec{0}, S)$ sont donc des fonctions de b_R (et de X) qui restent finies dans ces deux variables quand $\epsilon \rightarrow 0$. Bien sûr, les divergences n'ont pas disparues et sont en fait cachées dans le fait que le passage de b à $b_R(X, b)$ est singulier quand $\epsilon = 0$. Malgré tout, on voit que tous les pôles à $\epsilon = 0$ ont été absorbés dans une simple renormalisation de la constante de couplage b .

¹ Le facteur b supplémentaire vient en fait du contact imposé à l'extrémité fixée à l'origine.

A titre d'exemple, nous pouvons vérifier que $b\mathcal{Z}_b$ reste bien fini quand $d \rightarrow 2$ en fonction de X et b_R . Pour cela, nous écrivons, utilisant (2.51)

$$\begin{aligned}
b\mathcal{Z}_b &\underset{\epsilon \rightarrow 0}{\sim} b \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{\Gamma(1)} \\
&= b \frac{1}{1+z} \\
&= \frac{b_R}{1 - b_R \frac{X^\epsilon}{(2\pi)^{\frac{d}{2}\epsilon}} + b_R \frac{\Gamma(\epsilon)S^\epsilon}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} } \\
&\xrightarrow{d \rightarrow 2} \frac{b_R}{1 + b_R \ln\left(\frac{S}{X}\right) + \frac{\Gamma'(1)}{2\pi}}.
\end{aligned} \tag{2.94}$$

2.3.2 Flot de la constante de couplage à $d < 2$:

Dans notre recherche d'une théorie finie à $d = 2$, nous avons en fait établi une propriété plus forte d'équivalence entre la théorie de départ et une théorie renormalisée dépendant d'une échelle X , où les fluctuations du polymère à des échelles inférieures à X sont supprimées. Dans la théorie de paramètre X , les fluctuations à des échelles inférieures à X ont en fait été intégrées dans la valeur de la constante de couplage $b_R(X, b)$. Toute quantité (normalisée) $\Gamma(b, S, \vec{r})$ de la théorie de départ est égale à une quantité renormalisée $\Gamma_R(b_R(X, b), S, \vec{r}; X)$ calculée dans la théorie renormalisée avec des amplitudes soustraites. Notons que comme les amplitudes soustraites dépendent de X explicitement, Γ_R a une dépendance explicite en X . Comme X peut varier arbitrairement, l'équivalence est en fait avec une famille continue de théories renormalisées indexées par X . La théorie de départ n'est qu'un cas particulier de cet ensemble de théories, correspondant à $X = 0$.

Nous allons voir dans la suite comment utiliser cette liberté dans le choix de X :

- d'abord à $d < 2$ pour retrouver simplement les résultats asymptotiques à S grand;
- à $d = 2$ et même $d > 2$ pour étudier simplement les propriétés à grand S de la théorie avec coupure s_0 , et retrouver en particulier pour $d > 2$ et $b < 0$ l'existence d'une transition d'accrochage.

Revenons donc dans un premier temps au cas $d < 2$ et imposons de plus pour le moment que b soit positif. Il est plus commode de considérer la constante de couplage sans dimension

$$g(X, b) \equiv \frac{b_R(X, b)X^\epsilon}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} = \frac{\frac{bX^\epsilon}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}}{1 + \frac{1}{\epsilon} \frac{bX^\epsilon}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}}. \tag{2.95}$$

On dira que $g(X, b)$ est la constante de couplage effective à l'échelle X . La dépendance de g avec l'échelle X à b fixé (c'est à dire pour la même donnée physique de l'interaction) est codée dans la fonction de Wilson

$$W(g(X, b)) \equiv X \left. \frac{d}{dX} \right|_b g(X, b) , \quad (2.96)$$

qui décrit le “flot” de g avec X . Ici, nous avons

$$\boxed{W(g) = \epsilon g - g^2 .} \quad (2.97)$$

La fonction de Wilson ne dépend plus de b , qui n'intervient en fait que comme condition initiale à l'équation $X \frac{d}{dX} g = W(g)$, à savoir que $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{g(X, b)}{X^\epsilon} = \frac{b}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}$. Quand X tend vers l'infini (et pour $b > 0$), $g(X, b)$ tend vers une limite

$$g^* = \lim_{X \rightarrow \infty} g(X, b) = \epsilon \quad (2.98)$$

indépendante de b . Cette limite se lit directement sur la fonction de Wilson comme solution de l'équation $W(g) = 0$, qui donne les points fixes de l'équation de flot $X \frac{d}{dX} g = W(g)$. Le flot a ici deux points fixes, un point fixe dit “ultraviolet” à $g = 0$ vers lequel tend $g(X, b)$ à petit X et un point fixe “infrarouge” à $g = g^* = \epsilon$ vers lequel tend $g(X, b)$ à grand X . C'est ce point fixe qui nous intéresse ici car il va décrire les propriétés asymptotiques du polymère dans la limite des grandes tailles S .

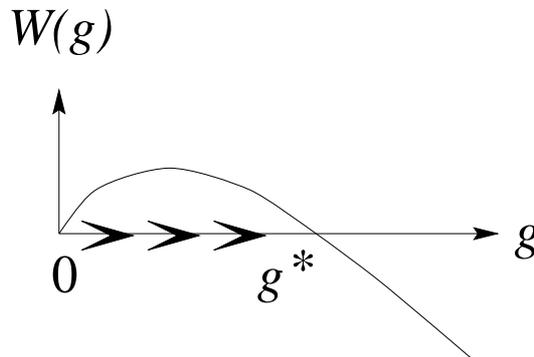


Fig. 6: La fonction de Wilson $W(g)$ et le flot de g pour des X croissants

Le flot de $g(X, b)$ pour des X croissants est indiqué sur la figure 6.

2.3.3 Equation du groupe de renormalisation:

Nous pouvons tirer parti du caractère arbitraire de l'échelle X pour déterminer le comportement asymptotique à grand S de la théorie. Considérons une quantité $\Gamma(b, S)$ (supposée indépendante de \bar{r} pour simplifier). Sa valeur est la même dans les deux théories renormalisées d'échelles respectives X et X' :

$$\Gamma_R(g(X, b), S; X) = \Gamma_R(g(X', b), S; X') . \quad (2.99)$$

Par ailleurs, si $\Gamma(b, S)$ a une dimension canonique d_Γ en unité de S , nous avons par homogénéité:

$$\Gamma_R(g(X, b), S; X) = S^{d_\Gamma} f \left(g(X, b), \frac{S}{X} \right) . \quad (2.100)$$

On peut alors relier directement au sein d'une même théorie renormalisée à X fixé un changement de S à un changement de constante de couplage g par

$$\Gamma_R(g, \lambda S; X) = \lambda^{d_\Gamma} \Gamma_R(\tilde{g}(\lambda, g), S; X) , \quad (2.101)$$

où $\tilde{g}(\lambda, g)$ est solution de

$$\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \tilde{g}(\lambda, g) = W(\tilde{g}(\lambda, g)) \quad (2.102)$$

avec $\tilde{g}(1, g) = g$. Pour montrer (2.101), il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} \Gamma_R(g(X, b), \lambda S; X) &= \Gamma_R(g(\lambda X, b), \lambda S; \lambda X) \\ &= (\lambda S)^{d_\Gamma} f \left(g(\lambda X, b), \frac{\lambda S}{\lambda X} \right) \\ &= \lambda^{d_\Gamma} S^{d_\Gamma} f \left(g(\lambda X, b), \frac{S}{X} \right) \\ &= \lambda^{d_\Gamma} \Gamma_R(g(\lambda X, b), S; X) , \end{aligned} \quad (2.103)$$

et de définir $\tilde{g}(\lambda, g) = g(\lambda X, b(g, X))$ où $b(g, X, X)$ est la fonction inverse de $g(X, b)$ à X fixé. Comme la fonction $\tilde{g}(\lambda, g)$ est sans dimension, elle ne dépend pas en fait de X . On a clairement $\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \tilde{g}(\lambda, g) = X \frac{d}{dX} \Big|_b g(\lambda X, b(g, X)) = W(g(\lambda X, b(g, X))) = W(\tilde{g}(\lambda, g))$ et $\tilde{g}(1, g) = g(X, b(g, X)) = g$, ce qui détermine entièrement \tilde{g} . La constante de couplage $\tilde{g}(\lambda, g)$ n'est autre que la constante effective à l'échelle λX sachant qu'elle vaut g à l'échelle X . Pour le cas particulier qui nous intéresse où $W(g) = \epsilon g - g^2$, on trouve

$$\tilde{g}(\lambda, g) = \frac{g \lambda^\epsilon}{1 + (\lambda^\epsilon - 1) \frac{g}{\epsilon}} . \quad (2.104)$$

On a évidemment $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \tilde{g}(\lambda, g) = g^*$. La formule (2.101) s'appuie sur le schéma suivant:

$$\begin{array}{ccc}
& 0 & X & \lambda S & g \\
\text{CHGT D'ECHELLE} & \downarrow & & & \\
\text{DE RENORMALISATION} & & 0 & \lambda X & \lambda S & \tilde{g}(\lambda, g) \\
& \downarrow & & & \\
\text{HOMOGENEITE} & & 0 & X & S & \times \lambda^{d_r} & \tilde{g}(\lambda, g)
\end{array}$$

On peut retrouver le résultat (2.101) à l'aide d'une équation différentielle, dite équation du groupe de renormalisation. On commence par écrire que la quantité

$$\Gamma_R(g(X, b), S; X) = \Gamma(b, S) \quad (2.105)$$

est en fait indépendante de X à b fixé, ce qui donne

$$\begin{aligned}
0 = X \frac{d}{dX} \Big|_b \Gamma_R(g(X, b), S; X) &= X \frac{\partial}{\partial X} \Gamma_R(g(X, b), S; X) \\
&+ X \underbrace{\frac{d}{dX} \Big|_b g(X, b)}_{=W(g(X, b))} \frac{\partial}{\partial g} \Gamma_R(g(X, b), S; X) , \quad (2.106)
\end{aligned}$$

ou encore

$$X \frac{\partial}{\partial X} \Gamma_R(g, S; X) + W(g) \frac{\partial}{\partial g} \Gamma_R(g, S; X) = 0 . \quad (2.107)$$

L'équation d'homogénéité s'écrit pour sa part

$$X \frac{\partial}{\partial X} \Gamma_R(g, S; X) + S \frac{\partial}{\partial S} \Gamma_R(g, S; X) = d_\Gamma \Gamma_R(g, S; X) . \quad (2.108)$$

En combinant les deux équations, on obtient l'équation du groupe de renormalisation recherchée

$$S \frac{\partial}{\partial S} \Gamma_R(g, S; X) - W(g) \frac{\partial}{\partial g} \Gamma_R(g, S; X) - d_\Gamma \Gamma_R(g, S; X) = 0 . \quad (2.109)$$

La solution générale de cette équation s'écrit

$$\Gamma_R(g, S; X) = S^{d_\Gamma} f \left(S \exp \left[\int_*^g \frac{du}{W(u)} \right] \right) , \quad (2.110)$$

où $*$ dénote une borne arbitraire d'intégration. On a alors

$$\Gamma_R(g, \lambda S; X) = \lambda^{d_\Gamma} \Gamma_R(\tilde{g}(\lambda, g), S; X) \quad (2.111)$$

en choisissant $\tilde{g}(\lambda, g)$ de sorte que

$$\exp \left[\int_g^{\tilde{g}(\lambda, g)} \frac{du}{W(u)} \right] = \lambda, \quad (2.112)$$

qui est précisément équivalent à la définition (2.102) de \tilde{g} .

2.3.4 Comportements asymptotiques à $d < 2$:

Reprenons de la relation (2.101) que nous pouvons réécrire de manière complètement équivalente (en rebaptisant S le produit λS):

$$\Gamma_R(g, S; X) = \lambda^{d_\Gamma} \Gamma_R(\tilde{g}(\lambda, g), \frac{S}{\lambda}; X). \quad (2.113)$$

En prenant comme choix particulier de λ la valeur $\lambda = \frac{S}{X}$, nous obtenons que

$$\begin{aligned} \Gamma_R(g, S; X) &= \left(\frac{S}{X} \right)^{d_\Gamma} \Gamma_R\left(\tilde{g}\left(\frac{S}{X}, g\right), X; X\right) \\ &= \left(\frac{S}{X} \right)^{d_\Gamma} X^{d_\Gamma} f\left(\tilde{g}\left(\frac{S}{X}, g\right), \frac{X}{X}\right) \\ &= S^{d_\Gamma} f\left(\tilde{g}\left(\frac{S}{X}, g\right), 1\right). \end{aligned} \quad (2.114)$$

Cette relation est plus forte que la simple relation d'homogénéité qui nous dirait que $\Gamma_R(g, S; X) = S^{d_\Gamma} F(g, \frac{S}{X})$. On apprend par (2.114) que les deux quantités sans dimensions g et $\frac{S}{X}$ n'apparaissent en fait que sous la combinaison $\tilde{g}(\frac{S}{X}, g)$.

Quand S tend vers l'infini et pour $b > 0$, $\tilde{g}(\frac{S}{X}, g)$ tend vers g^* et on obtient le comportement

$$\Gamma_R(g, S; X) \underset{S \rightarrow +\infty}{\sim} S^{d_\Gamma} f(g^*, 1), \quad (2.115)$$

avec un coefficient universel $f(g^*, 1)$ qui est un pur nombre dépendant de la dimension d (et bien sûr de la quantité Γ regardée) mais pas de la valeur de b initiale. A titre d'exemple, nous pouvons retrouver les comportements asymptotiques (2.65), (2.66) et (2.67) du cas répulsif. Pour \mathcal{Z}_b , nous savons que la bonne variable est $b\mathcal{Z}_b$, de dimension $-\epsilon$, pour laquelle nous avons le comportement

$$b\mathcal{Z}_b \underset{S \rightarrow +\infty}{\sim} \text{Pur nombre} \times S^{-\epsilon} = \text{Pur nombre} \times b \left(\frac{\ell_b}{S} \right)^\epsilon, \quad (2.116)$$

qui redonne bien le résultat (2.65) (sans cependant préciser le pur nombre $\frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})}$ obtenu alors). La distance (carrée) à l'origine, de dimension canonique 1, croît pour S grand comme

$$R_b^2(S) \equiv \langle (\vec{r}(S) - \vec{r}(0))^2 \rangle_b \underset{S \rightarrow +\infty}{\sim} \text{Pur nombre} \times S, \quad (2.117)$$

qui est bien le résultat (2.66) voulu. Le cas de la probabilité normalisée de retour à l'origine est un peu plus compliqué car si on écrit comme pour les autres quantités

$$\frac{\mathcal{P}_b(\vec{0}, S)}{\mathcal{Z}_b} \underset{S \rightarrow +\infty}{\sim} \text{Pur nombre} \times S^{-\frac{d}{2}}, \quad (2.118)$$

on s'attend dans ce cas à ce que le pur nombre soit en fait égal à zéro, disant que la probabilité de retour à l'origine tend plus vite vers 0 que pour le chemin Brownien. On peut alors revenir à l'expression (2.114) et développer

$$f\left(\tilde{g}\left(\frac{S}{X}, g\right), 1\right) = \underbrace{f(g^*, 1)}_{=0} + (\tilde{g}\left(\frac{S}{X}, g\right) - g^*) \frac{\partial}{\partial g} f(g^*, 1) + \dots \quad (2.119)$$

Pour λ grand, la quantité $\tilde{g}(\lambda, g) - g^*$ obéit à l'équation linéarisée

$$\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} (\tilde{g}(\lambda, g) - g^*) = W(\tilde{g}(\lambda, g)) = \underbrace{W(g^*)}_{=0} + (\tilde{g}(\lambda, g) - g^*) W'(g^*) + \dots \quad (2.120)$$

et donc

$$\tilde{g}(\lambda, g) - g^* \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} C(g) \lambda^{W'(g^*)}, \quad (2.121)$$

avec un coefficient de proportionnalité $C(g)$ dépendant de g . Notons que pour un point fixe infrarouge $W'(g^*)$ est négatif. Dans notre cas nous avons $W'(g^*) = -\epsilon$ et donc

$$\frac{\mathcal{P}_b(\vec{0}, S)}{\mathcal{Z}_b} \underset{S \rightarrow +\infty}{\sim} S^{-\frac{d}{2}} \times C(g) \left(\frac{S}{X}\right)^{-\epsilon}. \quad (2.122)$$

Pour déterminer la fonction de $C(g)$, nous remarquons que g ne dépend que de la variable sans dimension bX^ϵ et que $\frac{\mathcal{P}_b(\vec{0}, S)}{\mathcal{Z}_b}$ ne peut pas dépendre de X . Pour faire disparaître la dépendance en X , nous devons avoir $C(g) = \text{Pur nombre} \times \frac{1}{bX^\epsilon}$. Nous obtenons finalement le résultat

$$\frac{\mathcal{P}_b(\vec{0}, S)}{\mathcal{Z}_b} \underset{S \rightarrow +\infty}{\sim} \text{Pur nombre} \times S^{-\frac{d}{2}} \left(\frac{S}{X}\right)^{-\epsilon} \frac{1}{bX^\epsilon} = \text{Pur nombre} \times \frac{1}{bS}. \quad (2.123)$$

Enfin, nous pouvons regarder la quantité

$$\frac{\mathcal{P}_b(\vec{r}, S) - \mathcal{P}_b(\vec{0}, S)}{\mathcal{Z}_b} \underset{S \rightarrow +\infty}{\sim} S^{-\frac{d}{2}} f\left(g^*, \frac{\vec{r}^2}{S}, 1\right), \quad (2.124)$$

avec la variable supplémentaire sans dimension $\frac{\vec{r}^2}{S}$. Pour \vec{r} fixé et S grand, on s'attend à ce que $\mathcal{P}_b(\vec{r}, S)$ ait le même comportement en $\frac{1}{S}$ à grand S que $\mathcal{P}_b(\vec{0}, S)$, ce qui implique que $f(g^*, \frac{\vec{r}^2}{S}, 1)$ doit se comporter comme $\left(\frac{\vec{r}^2}{S}\right)^{\frac{\theta_I}{2}}$ pour $\frac{\vec{r}^2}{S}$ petit, avec $\theta_I = 2 - d$.

En conclusion, tous les comportements asymptotiques à grand S du modèle à interaction répulsive à $d < 2$ découlent simplement de l'existence d'un point fixe infrarouge. On explique à la fois l'existence d'exposants universels et de certaines amplitudes universelles (comme le coefficient de gonflement du polymère).

Pour le cas attractif $b < 0$, la fonction

$$g(X, b) = \frac{\frac{bX^\epsilon}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}}{1 + \frac{1}{\epsilon} \frac{bX^\epsilon}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}} \quad (2.125)$$

n'atteint pas de point fixe à grand X . Elle diverge à une valeur finie de X donnée par l'annulation du dénominateur:

$$X_b = \left(\frac{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \epsilon}{|b|} \right)^{\frac{1}{\epsilon}} = \ell_b (\epsilon \Gamma(\epsilon))^{\frac{1}{\epsilon}} \quad (2.126)$$

de l'ordre de ℓ_b . On peut interpréter ce résultat en disant que le polymère est accroché à l'impureté à une échelle de l'ordre de X_b (ou de ℓ_b).

2.3.5 Théorie à $d \geq 2$:

Pour $d \geq 2$, la théorie doit dès le départ être "régularisée", c'est à dire avoir une coupure s_0 pour être bien définie et sans divergences. Une bonne manière de régulariser la théorie est de prendre comme diagrammes définissant la théorie les diagrammes soustraits introduits dans la construction de la théorie renormalisée, avec s_0 comme échelle de renormalisation en deçà de laquelle les fluctuations sont supprimées. En d'autres termes, nous choisissons notre régularisation de sorte que

$$\Gamma(b, S, s_0) \equiv \Gamma_R \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} b s_0^\epsilon, S; s_0 \right) \quad (2.127)$$

avec comme données physiques microscopiques la coupure s_0 et l'interaction b , ou encore la constante de couplage

$$g_0 = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} b s_0^\epsilon \quad (2.128)$$

à l'échelle s_0 . On peut vérifier que la théorie avec amplitudes soustraites reste finie tant que $\epsilon > -1$ ($d < 4$).

La théorie renormalisée à l'échelle X équivalente à la théorie de départ satisfait alors

$$\Gamma_R(g_0, S; s_0) = \Gamma_R(g(X, b, s_0), S; X) , \quad (2.129)$$

avec une constante de couplage effective à l'échelle X fonction maintenant de b , X mais aussi de s_0 . Clairement, $g(X, b, s_0)$ est la constante de couplage effective à l'échelle X sachant qu'elle vaut $g_0 = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} b s_0^\epsilon$ à l'échelle s_0 . La relation (2.104) reliant les constantes de couplage effectives de deux théories d'échelles différentes reste valable pour $d \geq 2$. Cette relation qui ne fait intervenir que des théories finies à $\epsilon = 0$ n'est en effet pas singulière au passage à $\epsilon = 0$. La fonction $W(g)$ est en particulier bien définie pour tout ϵ . En utilisant (2.104) avec $\lambda = \frac{X}{s_0}$, $g = g_0$ et $\tilde{g}(\lambda, g) = g(X, b, s_0)$, nous obtenons la valeur explicite

$$g(X, b, s_0) = \frac{\frac{bX^\epsilon}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}}{1 + \frac{1}{\epsilon} \frac{b}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} (X^\epsilon - s_0^\epsilon)} . \quad (2.130)$$

Pour $\epsilon > 0$ où l'on peut se passer de coupure, on peut passer à la limite $\epsilon = 0$ et on retrouve alors le résultat (2.93).

Pour $\epsilon < 0$ en revanche, on doit conserver un s_0 non nul. On définit alors b^* par

$$1 = \frac{1}{\epsilon} \frac{b^* s_0^\epsilon}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} . \quad (2.131)$$

Notons que b^* est négatif puisque $\epsilon < 0$. On peut alors écrire

$$g(X, b, s_0) = \epsilon \frac{bX^\epsilon}{bX^\epsilon + (b^* - b)s_0^\epsilon} . \quad (2.132)$$

Pour $b = b^*$, on a

$$g(X, b^*, s_0) = g^* = \epsilon \quad \forall X . \quad (2.133)$$

Pour $b > b^*$, $g(X, b, s_0)$ tend vers zéro à grand X . L'interaction est alors non pertinente. Ceci inclut le cas répulsif $b > 0$ pour tout b et le cas attractif pour une interaction assez faible $|b| < |b^*|$. Enfin, pour $b < b^*$, $g(X, b, s_0)$ diverge pour une valeur finie de X donnée par $X_b = s_0 \left(1 - \frac{b^*}{b}\right)^{\frac{1}{\epsilon}}$, ce qui indique un accrochage du polymère à l'impureté à une échelle de l'ordre de X_b d'autant plus petite que $|b|$ est grand. En conclusion, nous avons une transition d'accrochage à $b = b^*$. Au point de transition, la théorie est invariante d'échelle, comme le montre (2.133).

Pour $\epsilon = 0$ ($d = 2$), la relation (2.130) devient

$$g(X, b, s_0) = \frac{\frac{b}{2\pi}}{1 + \frac{b}{2\pi} \ln\left(\frac{X}{s_0}\right)} . \quad (2.134)$$

Pour $b > 0$, la constante de couplage effective tend vers 0 à grand X mais lentement comme $\frac{1}{\ln(X)}$. On parle alors de liberté asymptotique. Pour $b < 0$, la constante de couplage diverge et on a accrochage à une longueur $X_b = s_0 e^{\frac{2\pi}{|b|}}$ exponentiellement grande pour $|b|$ petit.

2.3.6 Résumé:

Les différents comportements selon que ϵ est positif, négatif ou nul et selon la valeur de b se lisent tous très simplement sur la fonction $W(g)$ décrivant le flot de la constante de couplage. Un point fixe infrarouge ($W(g^*) = 0$) infrarouge ($W'(g^*) < 0$) décrit un comportement universel à grande distance, tandis qu'un point fixe ultraviolet ($W'(g^*) > 0$) décrit un point de transition. Pour $\epsilon > 0$, on a une transition à $g = 0$ (c'est à dire à $b = 0$) entre une phase accrochée si l'interaction est attractive et une phase avec comportements asymptotiques universels décrite par le point fixe infrarouge à $g^* = \epsilon$ si l'interaction est répulsive. Pour $\epsilon < 0$, on a une transition à $g^* = \epsilon$ ($b = b^*$) entre une phase accrochée si l'interaction est attractive d'intensité supérieure au seuil de transition $|b^*|$ et une phase décrite par le point fixe infrarouge $g = 0$ indiquant que l'interaction est non pertinente à grande distance quelle que soit son intensité dans le cas répulsif et pour une intensité inférieure au seuil d'accrochage dans le cas attractif. Le cas $\epsilon = 0$ est un cas dégénéré avec une transition à $g = 0$ entre une phase accrochée si l'interaction est attractive et une phase de liberté asymptotique si l'interaction est répulsive.

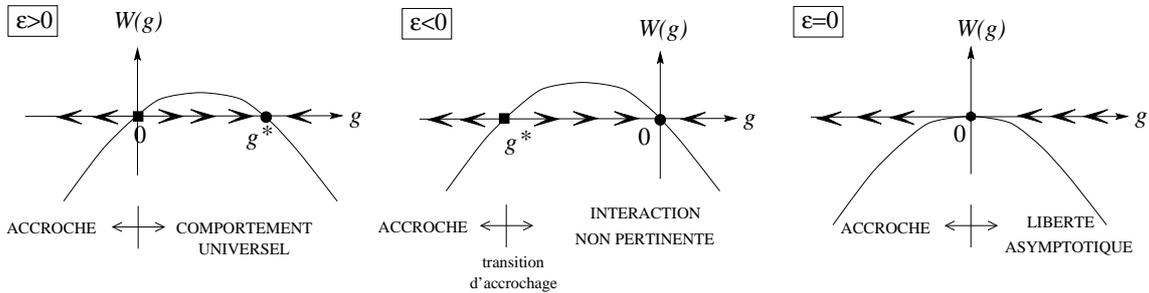


Fig. 7: Le flot de la constante de couplage et les différents phases pour $\epsilon > 0$, $\epsilon < 0$ et $\epsilon = 0$

Ces différents comportements sont résumés sur la figure 7

2.4. Théorie des champs $\Phi^2(\vec{0})$

Pour conclure sur le problème de l'interaction du polymère avec une impureté, nous allons brièvement vérifier l'équivalence avec une théorie des champs dans l'espace de plongement d -dimensionnel.

Nous obtenons d'après le résultat général (1.125) et pour le cas $V(\vec{r}) = b\delta^d(\vec{r})$ le résultat suivant pour la transformée de Laplace $G_b(\vec{R}, m^2)$ de la fonction (non normalisée) $\mathcal{P}_b(\vec{R}, S)$:

$$G_b(\vec{R}, m^2) = \frac{\int [\mathcal{D}\Phi(\vec{r})] \Phi(\vec{R})\Phi(\vec{0}) e^{-\frac{1}{4} \int d^d\vec{r} \{(\nabla_{\vec{r}}\Phi(\vec{r}))^2 + m^2(\Phi(\vec{r}))^2\} - \frac{b}{2}(\Phi(\vec{0}))^2}}{\int [\mathcal{D}\Phi(\vec{r})] e^{-\frac{1}{4} \int d^d\vec{r} \{(\nabla_{\vec{r}}\Phi(\vec{r}))^2 + m^2(\Phi(\vec{r}))^2\} - \frac{b}{2}(\Phi(\vec{0}))^2}}, \quad (2.135)$$

faisant intervenir une théorie des champs avec interaction $(\Phi(\vec{0}))^2$ localisée à l'origine. En développant en b le numérateur et le dénominateur de (2.135), nous obtenons

$$G_b(\vec{R}, m^2) = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{b}{2}\right)^n \langle \Phi(\vec{0})\Phi(\vec{R}) \left((\Phi(\vec{0}))^2\right)^n \rangle}{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{b}{2}\right)^n \langle \left((\Phi(\vec{0}))^2\right)^n \rangle}. \quad (2.136)$$

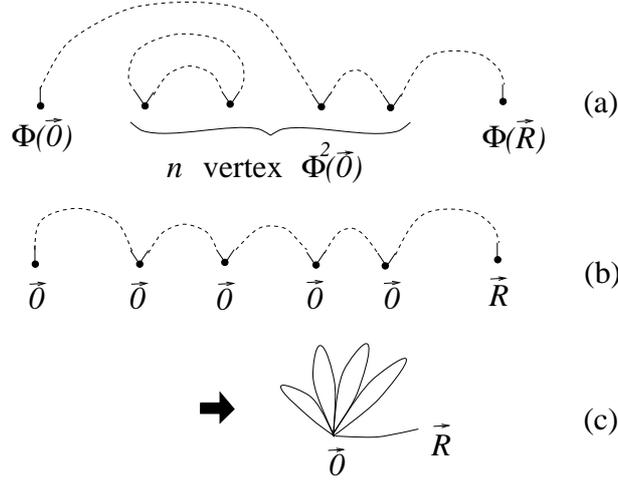


Fig. 8: La valeur moyenne $\langle \Phi(\vec{0})\Phi(\vec{R}) \left((\Phi(\vec{0}))^2\right)^n \rangle$ est obtenue en faisant toutes les contractions entre pattes externes et vertex. Une contraction est en général non connexe (a). Une contraction connexe (b) refabrique le diagramme marguerite (c).

Pour évaluer la valeur moyenne Gaussienne $\langle \Phi(\vec{0})\Phi(\vec{R}) \left((\Phi(\vec{0}))^2\right)^n \rangle$, nous décidons arbitrairement de conserver groupées les paires $(\Phi(\vec{0}))^2$ et de représenter les deux opérateurs $\Phi(\vec{0})$, $\Phi(\vec{R})$ (pattes externes) et les n paires $(\Phi(\vec{0}))^2$ (vertex) comme sur la figure 8- (a). La valeur moyenne Gaussienne est obtenue en faisant toutes les contractions entre pattes externes et vertex. Toutes ces contractions donnent ici le même résultat

$\langle \Phi(\vec{0})\Phi(\vec{R}) \rangle \left(\langle (\Phi(\vec{0}))^2 \rangle \right)^n$ et le seul problème est de les compter. En factorisant dans chaque contraction la composante connexe liée aux pattes externes, on écrit le numérateur de (2.136) comme le produit de deux termes: la somme sur les contractions connexes liées aux pattes externes (comme sur la figure 8-(b)) que multiplie la somme sur les contractions (connexes ou non) non liées aux pattes externes. Cette dernière somme refabrique précisément le dénominateur de (2.136). Le rôle de ce dénominateur est donc finalement de supprimer les contractions non connexes. De manière plus générale, si on avait plus de deux opérateurs insérés au numérateur, le dénominateur supprimerait tous les diagrammes ayant une composante connexe déconnectée des pattes externes (c'est à dire non liée à un au moins des opérateurs insérés au numérateur).

En conséquence, le terme d'ordre n du développement de $G_b(\vec{R}, m^2)$ est donné par

$$\frac{1}{n!} \left(-\frac{b}{2} \right)^n \times \text{Nombre de diagrammes connexes} \times \langle \Phi(\vec{0})\Phi(\vec{r}) \rangle \left(\langle (\Phi(\vec{0}))^2 \rangle \right)^n . \quad (2.137)$$

Le nombre de diagrammes connexes vaut $2^n n!$ correspondant au $n!$ façons d'ordonner les paires et aux 2 choix d'ordre des pattes pour chaque paire. En utilisant l'expression intégrale

$$\langle (\Phi(\vec{0}))^2 \rangle = \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\frac{1}{2} \vec{k}^2 + \frac{1}{2} m^2} = \int_0^{+\infty} dt \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{m^2}{2} t} \quad (2.138)$$

et l'expression analogue

$$\langle \Phi(\vec{0})\Phi(\vec{R}) \rangle = \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}}}{\frac{1}{2} \vec{k}^2 + \frac{1}{2} m^2} = \int_0^{+\infty} dT \frac{1}{(2\pi T)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{m^2}{2} T} e^{-\frac{\vec{R}^2}{2T}} , \quad (2.139)$$

nous obtenons pour le terme d'ordre n

$$\left(\frac{-b}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \right)^n \int_0^{+\infty} dt_1 dt_2 \dots dt_n dT \prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{m^2}{2} \left(T + \sum_{i=1}^n t_i \right)} \frac{1}{(2\pi T)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\vec{R}^2}{2T}} , \quad (2.140)$$

qui en posant $S = T + \sum_{i=1}^n t_i$ est bien la transformée de Laplace du terme d'ordre n du développement de $\mathcal{P}_b(\vec{R}, S)$:

$$\left(\frac{-b}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \right)^n \int_0^{+\infty} dt_1 dt_2 \dots dt_n \theta \left(S - \sum_{i=1}^n t_i \right) \prod_{i=1}^n t_i^{-\frac{d}{2}} \frac{1}{\left(2\pi \left(S - \sum_{i=1}^n t_i \right) \right)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\vec{R}^2}{2 \left(S - \sum_{i=1}^n t_i \right)}} \quad (2.141)$$

(voir (2.46) pour la même expression en transformée de Fourier).

3. Polymères auto-évitants

3.1. Modèle d'Edwards

Nous allons maintenant aborder le problème d'un polymère auto-évitant, c'est à dire sans recouvrement. La modélisation d'un tel polymère se fait dans le formalisme de l'intégrale fonctionnelle au moyen du modèle d'Edwards. L'auto-évitement y est représenté par une interaction de contact répulsive entre toutes les paires de points le long du polymère. L'énergie correspondante s'écrit:

$$\frac{b}{2} \int_0^S ds \int_0^S ds' \delta^d(\vec{r}(s) - \vec{r}(s')) , \quad (3.1)$$

qui compte le nombre de contacts de paires de monomères. Le paramètre $b > 0$, dit de volume exclu, décrit l'interaction répulsive entre les monomères en contact. Nous aurons donc à évaluer des intégrales fonctionnelles du type

$$\mathcal{Z}_b \equiv \int_{\vec{r}(0)=\vec{0}} [\mathcal{D}\vec{r}(s)] \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^S ds \left(\frac{d\vec{r}}{ds}(s) \right)^2 - \frac{b}{2} \int_0^S ds \int_0^S ds' \delta^d(\vec{r}(s) - \vec{r}(s')) \right] . \quad (3.2)$$

De manière analogue au cas du problème de l'impureté, on peut d'abord se poser la question de la pertinence de l'interaction de contact de paires. Pour cela, estimons d'abord le nombre n_R de recouvrements pour un chemin Brownien. Nous introduisons ici une coupure s_0 pour la distance minimale le long du polymère entre les points en contacts. Nous avons alors

$$\begin{aligned} n_R &= \frac{1}{2} \int_0^S ds \int_0^S ds' \theta(|s - s'| - s_0) \mathcal{P}(\vec{0}, |s - s'|) \\ &= \int_0^{S-s_0} ds \int_{s_0}^{S-s} du \frac{1}{(2\pi u)^{\frac{d}{2}}} \\ &= \int_0^{S-s_0} ds \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{1 - \frac{d}{2}} \left((S - s)^{1 - \frac{d}{2}} - s_0^{1 - \frac{d}{2}} \right) \\ &= \int_{s_0}^S du \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{1 - \frac{d}{2}} u^{1 - \frac{d}{2}} - \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{1 - \frac{d}{2}} (S - s_0) s_0^{1 - \frac{d}{2}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{1 - \frac{d}{2}} \left(\frac{S^{2 - \frac{d}{2}}}{2 - \frac{d}{2}} - \frac{s_0^{2 - \frac{d}{2}}}{2 - \frac{d}{2}} - S s_0^{1 - \frac{d}{2}} + s_0^{2 - \frac{d}{2}} \right) . \end{aligned} \quad (3.3)$$

Pour $d < 2$, nous obtenons

$$n_R \underset{S \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{(1 - \frac{d}{2})(2 - \frac{d}{2})} S^{2 - \frac{d}{2}} , \quad (3.4)$$

qui tend vers l'infini avec S et l'interaction est donc pertinente. Ceci n'est pas une surprise puisque l'interaction de contact à deux corps est certainement plus forte que la simple interaction de contact avec une impureté fixe. Pour $d > 2$, nous avons le comportement

$$n_R \underset{S \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{\frac{d}{2} - 1} \frac{1}{s_0^{\frac{d}{2}-1}} S = \mathcal{C}_0 S , \quad (3.5)$$

c'est à dire un nombre de contacts proportionnel à S avec un coefficient de proportionnalité simplement égal à

$$\mathcal{C}_0 = \int_{s_0}^{+\infty} ds \frac{1}{(2\pi s)^{\frac{d}{2}}} . \quad (3.6)$$

L'interprétation de ce résultat est simple. Chaque point fixé du polymère a une certaine densité de contacts \mathcal{C}_0 avec le reste du polymère (où \mathcal{C}_0 a la même valeur que pour le problème du contact avec une impureté). Il s'agit en fait principalement pour ce point de contacts avec son entourage immédiat (\mathcal{C}_0 est d'autant plus grand que s_0 est petit), les contacts plus lointains devenant de moins en moins probables. L'interaction est donc pertinente pour $d > 2$ mais il s'agit d'un effet trivial. Il se traduit par l'apparition d'un poids

$$e^{-bn_R} \sim (e^{-b\mathcal{C}_0})^S . \quad (3.7)$$

Ce poids, qui correspond à une augmentation de l'énergie libre, est la traduction dans le formalisme continu d'un changement de coordianance effective qui dans un modèle discret sur le réseau hypercubique passerait de $2d$ à $\mu = 2d f$ avec $f < 1$ indiquant la perte d'entropie due à la contrainte d'auto-évitement. Dans le modèle continu, il apparaît à $d > 2$ une renormalisation de l'énergie libre proportionnelle à S . Cet effet disparaît complètement si l'on regarde des valeurs moyennes, qui font intervenir des rapports d'intégrales fonctionnelles où les facteurs de coordianance au numérateur et au dénominateur se compensent exactement.

La véritable pertinence de l'interaction, et notamment sa capacité à changer l'exposant ν , dépend de ce que deux segments lointains du même polymère se "voient" ou non. Pour répondre à cette question, on peut regarder simplement le nombre de contacts entre deux parties distinctes du même polymère, par exemple entre sa moitié gauche et sa moitié

droite. En fixant le centre du polymère à $\vec{0}$, nous estimons ce nombre de contacts à:

$$\begin{aligned}
n_{GD} &= \int_{\frac{s_0}{2}}^{\frac{S}{2}} ds \int_{\frac{s_0}{2}}^{\frac{S}{2}} ds' \int d^d \vec{r} \mathcal{P}(\vec{r}, s) \mathcal{P}(\vec{r}, s') \\
&= \int_{\frac{s_0}{2}}^{\frac{S}{2}} ds \int_{\frac{s_0}{2}}^{\frac{S}{2}} ds' \frac{1}{(2\pi s)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{(2\pi s')^{\frac{d}{2}}} \int d^d \vec{r} e^{-\frac{\vec{r}^2}{2} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} \right)} \\
&= \int_{\frac{s_0}{2}}^{\frac{S}{2}} ds \int_{\frac{s_0}{2}}^{\frac{S}{2}} ds' \frac{1}{(2\pi(s+s'))^{\frac{d}{2}}} \\
&= \int_{\frac{s_0}{2}}^{\frac{S}{2}} ds \int_{s+\frac{s_0}{2}}^{s+\frac{S}{2}} du \frac{1}{(2\pi u)^{\frac{d}{2}}} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{1-\frac{d}{2}} \int_{\frac{s_0}{2}}^{\frac{S}{2}} ds \left(\left(s + \frac{S}{2} \right)^{1-\frac{d}{2}} - \left(s + \frac{s_0}{2} \right)^{1-\frac{d}{2}} \right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{1-\frac{d}{2}} \left(\int_{\frac{s_0+S}{2}}^S du u^{1-\frac{d}{2}} - \int_{s_0}^{\frac{s_0+S}{2}} du u^{1-\frac{d}{2}} \right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{1-\frac{d}{2}} \frac{1}{2-\frac{d}{2}} \left(S^{2-\frac{d}{2}} + s_0^{2-\frac{d}{2}} - 2 \left(\frac{s_0+S}{2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \right).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Pour $d > 4$, nous avons une limite finie

$$n_{GD} \underset{S \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{\frac{d}{2}-1} \frac{1}{\frac{d}{2}-2} \frac{1}{s_0^{\frac{d}{2}-2}}, \tag{3.9}$$

et l'interaction n'est en fait pas pertinente. Pour $2 < d < 4$ au contraire

$$n_{GD} \underset{S \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{\frac{d}{2}-1} \frac{1}{2-\frac{d}{2}} \left(2^{\frac{d}{2}-1} - 1 \right) S^{2-\frac{d}{2}}, \tag{3.10}$$

et l'interaction est alors réellement pertinente. De même, pour $d < 2$,

$$n_{GD} \underset{S \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{1-\frac{d}{2}} \frac{1}{2-\frac{d}{2}} \left(1 - \frac{1}{2^{1-\frac{d}{2}}} \right) S^{2-\frac{d}{2}}, \tag{3.11}$$

et l'interaction est pertinente.

La dimension critique supérieure $d = 4$ peut s'obtenir simplement par analyse dimensionnelle. Nous avons comme auparavant la relation $[\vec{r}] = \frac{1}{2}[s]$. En écrivant que le terme de contact de paires est sans dimension, nous obtenons $[b] + 2[s] - d[\vec{r}] = 0$, et donc

$$[b] = \left(\frac{d}{2} - 2 \right) [s]. \tag{3.12}$$

Pour $d < 4$, $[b] < 0$ et l'interaction est pertinente à grande échelle. Pour $d > 4$, $[b] > 0$ et l'interaction n'est pas pertinente.

Que va alors modifier l'interaction pour $d < 4$? Au delà du simple changement de coordinance effective, nous allons maintenant avoir de nouvelles valeurs pour les exposants α et γ , et surtout une nouvelle valeur

$$\nu > \frac{1}{2} \quad (3.13)$$

pour la distance bout à bout du polymère (ou son rayon de giration). C'est cet exposant qui caractérise le mieux le nouvel état du polymère. Dans le chapitre suivant, nous allons en donner deux estimations dans deux approximations différentes. Nous l'estimerons ensuite plus exactement au premier ordre dans un développement en $\epsilon = 4 - d$ au voisinage de la dimension critique supérieure.

3.2. Approximations diverses (Flory, variationnelle)

Une première approximation pour évaluer l'exposant ν d'un polymère auto-évitant consiste à imaginer le polymère confiné dans une boule de rayon R de l'ordre de la distance bout à bout, à estimer le poids d'une telle configuration en fonction de R et de S et à trouver le comportement de R avec S en maximisant ce poids.

Pour estimer l'énergie due aux contacts de paires pour un polymère confiné dans une boule de rayon R , nous remarquons qu'en fonction de la densité

$$\mathcal{C}(\vec{r}) = \int_0^S ds \delta^d(\vec{r} - \vec{r}(s)) \quad (3.14)$$

de polymère au point \vec{r} , l'interaction s'écrit

$$E_b \equiv \frac{b}{2} \int_0^S ds \int_0^S ds' \delta^d(\vec{r}(s) - \vec{r}(s')) = \frac{b}{2} \int d^d \vec{r} (\mathcal{C}(\vec{r}))^2 . \quad (3.15)$$

En estimant que $\mathcal{C}(\vec{r})$ est plus ou moins uniforme et de l'ordre du rapport $\frac{S}{R^d}$ entre la quantité de polymère et le volume occupé, nous obtenons l'estimation

$$E_b \sim bR^d \left(\frac{S}{R^d} \right)^2 = b \frac{S^2}{R^d} . \quad (3.16)$$

Cette énergie tend bien sûr à faire gonfler le polymère.

Par ailleurs, la probabilité de la configuration en absence d'interaction se comporte comme

$$\mathcal{P}_0 \propto e^{-\alpha \frac{R^2}{S}} \quad (3.17)$$

puisque

$$\int_0^S ds \left(\frac{d}{ds} \vec{r}(s) \right)^2 \sim S \left(\frac{R}{S} \right)^2 = \frac{R^2}{S} . \quad (3.18)$$

On peut interpréter le terme $\alpha \frac{R^2}{S}$ dans (3.17) comme un terme d'énergie élastique, dont l'origine est ici entropique, et qui tend à contracter le polymère. Le poids total en présence de l'auto-évitement peut donc s'écrire

$$\mathcal{P}_b \propto e^{-\alpha \frac{R^2}{S} - \beta b \frac{S^2}{R^d}} . \quad (3.19)$$

En maximisant ce poids, ce qui revient à contrebalancer la force répulsive d'auto-évitement et la force élastique effective attractive, on obtient

$$2\alpha \frac{R}{S} = d\beta b \frac{S^2}{R^{d+1}} \Rightarrow R \sim b^{\frac{1}{d+2}} S^{\frac{3}{d+2}} . \quad (3.20)$$

Nous avons finalement l'estimation de Flory de l'exposant ν :

$$\nu_{\text{Flory}} = \frac{3}{d+2} . \quad (3.21)$$

La condition $\frac{1}{2} \leq \nu \leq 1$ nous donne le domaine d'application de cette estimation, à savoir $1 \leq d \leq 4$. Pour $d = 1$, la valeur $\nu_{\text{Flory}}(d = 1) = 1$ est la valeur exacte attendue puisqu'un polymère auto-évitant en dimension 1 est complètement étiré. Pour $d = 4$, la valeur $\nu_{\text{Flory}}(d = 4) = \frac{1}{2}$ est aussi exacte (puisque l'interaction devient non pertinente à $d > 4$), à des corrections logarithmiques près. À $d = 2$, on peut montrer que la valeur $\nu_{\text{Flory}}(d = 2) = \frac{3}{4}$ est également exacte. Enfin à $d = 3$, l'approximation de Flory prédit $\nu_{\text{Flory}} = \frac{3}{5}$, très proche (mais différent) du résultat exact $\nu = 0.588(1)$ obtenu par le développement perturbatif. En conclusion, l'estimation de Flory est très bonne pour les polymères auto-évitants. Le statut de cette prédiction est cependant assez mal compris. En particulier, l'approximation de Flory ne relève pas d'une logique systématique qui permettrait de l'améliorer. La qualité de son résultat reste assez miraculeuse.

Une deuxième approximation relève d'une approche variationnelle du problème. Plutôt que de l'exposer en détail, nous mentionnons ici qu'il s'agit d'une approximation

de couplage fort dont le résultat net revient à dire que le nombre de contacts de paires est invariant d'échelle. En d'autres termes, la quantité

$$\int_0^S ds \int_0^S ds' \delta^d(\vec{r}(s) - \vec{r}(s')) \quad (3.22)$$

doit être invariante si $\vec{r} \sim s^\nu$, ce qui impose $2 - d\nu = 0$ et donc

$$\nu_{\text{Var.}} = \frac{2}{d}. \quad (3.23)$$

Cette estimation, qui donne le bon résultat à $d = 4$ est en fait beaucoup trop grande. Elle sature en particulier à $\nu_{\text{Var.}} = 1$ dès $d = 2$. Nous mentionnons le résultat variationnel car il existe des cas où sa prédiction devient exacte. C'est le cas en particulier pour les polyélectrolytes, c'est à dire des polymères chargés en interaction Coulombienne non écrantée. En dimension d , la méthode variationnelle prédit $\nu_{\text{Poly.}} = \frac{2}{d-2}$ qui est un résultat exact pour $4 \leq d \leq 6$.

3.3. Calculs à une boucle

3.3.1 Développement perturbatif:

Comme dans le cas de l'interaction avec une impureté, nous allons calculer dans un développement perturbatif la quantité

$$\begin{aligned} I_b(\vec{k}, S) &\equiv \int_{\vec{r}(0)=\vec{0}} [\mathcal{D}\vec{r}(s)] \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^S ds \left(\frac{d\vec{r}}{ds}(s) \right)^2 - \frac{b}{2} \int_0^S ds \int_0^S ds' \delta^d(\vec{r}(s) - \vec{r}(s')) \right] e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}(S)} \\ &= \langle \exp \left[-\frac{b}{2} \int_0^S ds \int_0^S ds' \delta^d(\vec{r}(s) - \vec{r}(s')) \right] e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}(S)} \rangle \end{aligned} \quad (3.24)$$

au sens de la moyenne Gaussienne. Nous allons limiter ici le développement à l'ordre 2 en b en écrivant

$$I_b(\vec{k}, S) = \mathcal{Z}_0(\vec{k}, S) - b \mathcal{Z}_1(\vec{k}, S) + b^2 \mathcal{Z}_2(\vec{k}, S) + \mathcal{O}(b^3). \quad (3.25)$$

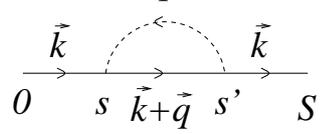
A l'ordre zéro, on a

$$\mathcal{Z}_0(\vec{k}, S) = \langle e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}(S)} \rangle = e^{-\frac{\vec{k}^2}{2} S}. \quad (3.26)$$

A l'ordre un,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_1(\vec{k}, S) &= \left\langle \frac{1}{2} \int_0^S ds \int_0^S ds' \delta^d(\vec{r}(s) - \vec{r}(s')) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}(S)} \right\rangle \\
&= \left. \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ 0 \quad s \quad s' \quad S \\ \text{---} \end{array} \\ \text{ou} \\ \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \leftarrow s \quad \leftarrow S-s' \rightarrow \\ \text{---} \end{array} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{deux représentations} \\ \text{équivalentes} \end{array} \quad (3.27)
\end{aligned}$$

On peut supposer que $s \leq s'$ et écrire

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_1(\vec{k}, S) &= \int_{0 \leq s \leq s' \leq S} ds ds' \int \frac{d^d \vec{q}}{(2\pi)^d} \langle e^{-i\vec{q} \cdot (\vec{r}(s) - \vec{r}(s'))} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}(S) - \vec{r}(0))} \rangle \\
&= \int_{0 \leq s \leq s' \leq S} ds ds' \int \frac{d^d \vec{q}}{(2\pi)^d} \underbrace{\langle e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}(s) - \vec{r}(0))} e^{i(\vec{k} + \vec{q}) \cdot (\vec{r}(s') - \vec{r}(s))} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}(S) - \vec{r}(s'))} \rangle}_{\vec{q}} .
\end{aligned}$$


$$\begin{array}{c} \vec{k} \quad \vec{q} \quad \vec{k} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ 0 \quad s \quad \vec{k} + \vec{q} \quad s' \quad S \end{array} \quad (3.28)$$

En utilisant (1.81), nous obtenons

$$\begin{array}{c} \vec{q} \\ \vec{k} \quad \vec{k} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ 0 \quad s \quad \vec{k} + \vec{q} \quad s' \quad S \end{array} = e^{-\frac{\vec{k}^2}{2}(S-s'+s-0) - \frac{(\vec{k} + \vec{q})^2}{2}(s'-s)} , \quad (3.29)$$

et donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_1(\vec{k}, S) &= \int_{0 \leq s \leq s' \leq S} ds ds' \frac{1}{(2\pi)^d} \left(\frac{2\pi}{s' - s} \right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{\vec{k}^2}{2}(S-(s'-s))} \\
&= \int_0^S dt \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\vec{k}^2}{2}(S-t)} \underbrace{\int_0^{S-t} ds}_{S-t} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^S dt (S-t) \frac{1}{t^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\vec{k}^2}{2}(S-t)} .
\end{aligned} \quad (3.30)$$

Si on compare à la formule (2.46) pour la quantité $I_b^{(1)}$ du problème avec impureté, on voit que la seule différence est l'apparition d'un facteur $(S - t)$. Ce facteur correspond simplement à promener l'origine de la boucle (pétale) de longueur t , qui n'est plus attachée à l'origine, le long du polymère de longueur totale S .

A l'ordre deux,

$$\mathcal{Z}_2(\vec{k}, S) = \frac{1}{8} \left\langle \int_0^S ds_1 \int_0^S ds'_1 \int_0^S ds_2 \int_0^S ds'_2 \delta^d(\vec{r}(s_1) - \vec{r}(s'_1)) \delta^d(\vec{r}(s_2) - \vec{r}(s'_2)) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}(S)} \right\rangle$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \text{---} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \text{---} + \begin{array}{c} \text{---} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \text{---} + \begin{array}{c} \text{---} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \text{---} \\ 0 \ s_1 \ s'_1 \ s_2 \ s'_2 \ S \end{array} & + & \begin{array}{c} \text{---} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \text{---} \\ 0 \ s_1 \ s_2 \ s'_2 \ s'_1 \ S \end{array} & + & \begin{array}{c} \text{---} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \text{---} \\ 0 \ s_1 \ s_2 \ s'_2 \ s'_1 \ S \end{array} \\ \text{ou} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} & + & \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} & + & \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \\ \mathcal{Z}_2^{(a)} & & \mathcal{Z}_2^{(b)} & & \mathcal{Z}_2^{(c)} \end{array} \right. \quad (3.31)$$

Suivant la position relative des deux paires de points en contact (disjointes, croisées ou emboîtées), on obtient trois diagrammes dont les contributions respectives seront notées $\mathcal{Z}_2^{(a)}$, $\mathcal{Z}_2^{(b)}$ et $\mathcal{Z}_2^{(c)}$. On peut supposer les points ordonnés de sorte que $s_1 < s'_1$, $s_2 < s'_2$ et $s_1 < s_2$, ce qui donne un facteur 8 global qui compense le facteur $\frac{1}{8}$ dans (3.31). En posant $t_1 = s'_1 - s_1$, $t_2 = s'_2 - s_2$ et $t_3 = s_2 - s_1$, on a alors

$$\mathcal{Z}_2^{(a)} = \int_0^{+\infty} dt_1 \int_0^{+\infty} dt_2 \theta(S - t_1 - t_2) \frac{1}{(2\pi t_1)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{(2\pi t_2)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\vec{k}^2}{2}(S - t_1 - t_2)}$$

$$\times \underbrace{\int_0^{S - t_1 - t_2} dt_3 \int_0^{S - t_1 - t_2 - t_3} ds_1}_{=\frac{1}{2}(S - t_1 - t_2)^2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_0^{+\infty} dt_1 \int_0^{+\infty} dt_2 \frac{1}{2} (S - t_1 - t_2)^2 \theta(S - t_1 - t_2) \frac{1}{t_1^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{t_2^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\vec{k}^2}{2}(S - t_1 - t_2)}. \quad (3.32)$$

Le passage de l'amplitude initiale à l'amplitude soustraite correspond bien, au premier ordre en b , à avoir divisé $I_b(\vec{k}, S)$ par le facteur $(e^{-b\mathcal{C}_0})^S$, c'est à dire à avoir réabsorbé le changement de coordianance effective. Comme nous l'avons déjà dit, une telle renormalisation est sans effet sur les valeurs moyennes. Diagrammatiquement, on peut représenter la partie soustraite par la "contraction" du sous-diagramme à deux pattes formé par la boucle interne dans \mathcal{Z}_1 , ce que nous représentons par

$$\begin{array}{c} \text{diagram with one loop on a line, dashed box around it} \end{array} = \underbrace{\text{diagram with a dot on a line}}_{=S e^{-\frac{\vec{k}^2}{2} S}} \times \underbrace{\text{diagram with one loop}}_{=\mathcal{C}_0} . \quad (3.37)$$

La contraction, qui est l'analogie de l'arrachage d'un pétale dans le problème de l'impureté, factorise la contribution du sous-diagramme contracté qui contient la divergence (ici \mathcal{C}_0). La boucle est alors remplacée par un marquage. Ce marquage doit être promené le long du polymère, ce qui fabrique un facteur S qui multiplie la ligne non marquée de valeur \mathcal{Z}_0 .

A l'ordre deux, la même opération de soustraction doit être faite sur $\mathcal{Z}_2^{(a)}$ et $\mathcal{Z}_2^{(c)}$. Il faut alors soustraire

$$\begin{array}{c} \text{diagram with two loops, dashed box around the first} \end{array} = \underbrace{\text{diagram with one loop and a dot}}_{=\mathcal{C}_0} \times \underbrace{\text{diagram with one loop}}_{=\mathcal{C}_0} , \quad (3.38)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^{+\infty} \frac{dt_2}{t_2^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{2} (S-t_2)^2 \theta(S-t_2) e^{-\frac{\vec{k}^2}{2} (S-t_2)}$$

$$\begin{array}{c} \text{diagram with two loops, dashed box around the second} \end{array} = \underbrace{\text{diagram with one loop and a dot}}_{=\mathcal{C}_0} \times \underbrace{\text{diagram with one loop}}_{=\mathcal{C}_0} , \quad (3.39)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^{+\infty} \frac{dt_1}{t_1^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{2} (S-t_1)^2 \theta(S-t_1) e^{-\frac{\vec{k}^2}{2} (S-t_1)}$$

$$\begin{array}{c} \text{diagram with two loops, dashed box around both} \end{array} = \underbrace{\text{diagram with one loop and a dot}}_{=\mathcal{C}_0} \times \underbrace{\text{diagram with one loop}}_{=\mathcal{C}_0} . \quad (3.40)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^{+\infty} dt_1 \int_0^{+\infty} dt_3 \frac{1}{(t_1+t_3)^{\frac{d}{2}}} (S-t_1-t_3) \theta(S-t_1-t_3) e^{-\frac{\vec{k}^2}{2} (S-t_1-t_3)}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{d}{2}}} t (S-t) \theta(S-t) e^{-\frac{\vec{k}^2}{2} (S-t)}$$

Au total, la somme des trois contributions (3.38), (3.39) et (3.40) fabrique un terme égal à $\mathcal{Z}_1 \mathcal{C}_0 S$ à soustraire. Ici encore le facteur S correspond à promener le marquage tout au long du polymère, à gauche, à l'intérieur, puis à droite de la boucle résiduelle. Comme dans le cas de l'interaction avec une impureté, pour traiter simultanément les divergences des deux boucles, il faut en fait rajouter la contribution

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram of two loops side-by-side} = \underbrace{\hspace{2cm}}_{= \frac{1}{2} S^2 e^{-\frac{k^2}{2} S}} \times \underbrace{\text{Diagram of one loop}}_{= \mathcal{C}_0} \times \underbrace{\text{Diagram of one loop}}_{= \mathcal{C}_0}, \quad (3.41)
 \end{aligned}$$

à savoir un terme $\frac{1}{2} \mathcal{Z}_0 (\mathcal{C}_0 S)^2$. Les termes soustraits ou ajoutés reconstruisent exactement l'ordre deux du développement de

$$\begin{aligned}
 \frac{I_b}{e^{-b\mathcal{C}_0 S}} &= \frac{\mathcal{Z}_0 - b\mathcal{Z}_1 + b^2 \mathcal{Z}_2 + \dots}{1 - b\mathcal{C}_0 S + \frac{b^2}{2} (\mathcal{C}_0 S)^2 + \dots} \\
 &= \mathcal{Z}_0 - b(\mathcal{Z}_1 - \mathcal{Z}_0 \mathcal{C}_0 S) + b^2(\mathcal{Z}_2 - \mathcal{Z}_1 \mathcal{C}_0 S + \frac{1}{2} \mathcal{Z}_0 (\mathcal{C}_0 S)^2) + \dots, \quad (3.42)
 \end{aligned}$$

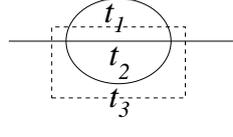
ce qui confirme que les divergences correspondent bien à un simple changement de coordonnée effective.

3.3.3 Renormalisations à une boucle à $d = 4$:

Pour pouvoir garder une théorie finie jusqu'à la dimension critique supérieure, il faut soustraire d'autres divergences qui apparaissent maintenant à $d = 4$. Ces nouvelles divergences ont un contenu physique plus intéressant que celles à $d = 2$ et, comme nous allons le voir, correspondent à une renormalisation de la constante de couplage, une renormalisation du champ $\vec{r}(s)$ et une renormalisation multiplicative de \mathcal{Z}_b . Nous allons traiter ces divergences indépendamment des précédentes et indépendamment les unes des autres. Nous admettrons que toutes les divergences peuvent être soustraites simultanément et que l'amplitude soustraite ainsi obtenue correspond bien à faire les trois renormalisations ci-dessus de manière simultanée.

Un premier type de divergences à $d = 4$ provient des sous-diagrammes à quatre pattes externes. Ces diagrammes correspondent à une renormalisation de la constante de couplage b . Par exemple, l'expression (3.33) de $\mathcal{Z}_2^{(b)}$ a une divergence à $d = 4$ quand on fait tendre t_2

et t_3 simultanément vers zéro, ce qui correspond à contracter le sous-diagramme à quatre pattes formé par les deux lignes 2 et 3, ce qu'on représente par



$$(3.43)$$

Dans cette limite, l'intégrand de (3.33) se comporte comme

$$\frac{(S - t_1 - t_2 - t_3) \theta(S - t_1 - t_2 - t_3)}{(t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\bar{k}^2}{2} \left(S - \frac{(t_1+t_2)(t_1+t_3)(t_2+t_3)}{t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3} \right)}$$

$$\underset{t_2, t_3 \rightarrow 0}{\sim} \frac{(S - t_1) \theta(S - t_1)}{t_1^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\bar{k}^2}{2} (S - t_1)} \frac{1}{(t_2 + t_3)^{\frac{d}{2}}} .$$

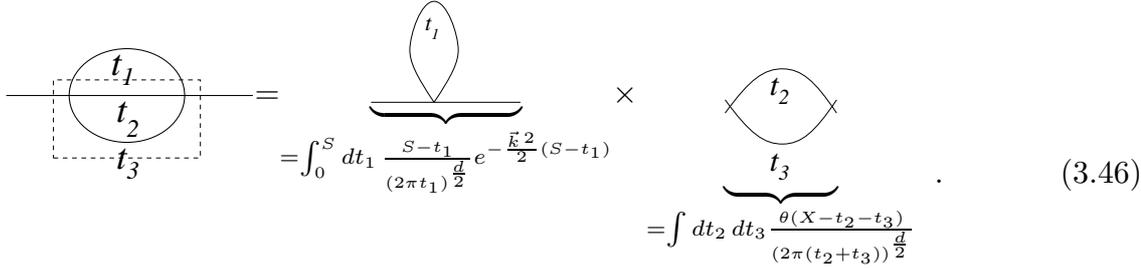
$$(3.44)$$

Pour rendre l'intégrale convergente, il faut donc retrancher à l'intégrand la quantité

$$\frac{(S - t_1) \theta(S - t_1)}{t_1^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\bar{k}^2}{2} (S - t_1)} \times \frac{\theta(X - t_2 - t_3)}{(t_2 + t_3)^{\frac{d}{2}}} ,$$

$$(3.45)$$

où nous devons maintenant introduire une échelle de renormalisation X arbitraire pour assurer la convergence à grand t_2 et t_3 . Nous définissons donc



$$= \int_0^S dt_1 \frac{S - t_1}{(2\pi t_1)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\bar{k}^2}{2} (S - t_1)} \times \int dt_2 dt_3 \frac{\theta(X - t_2 - t_3)}{(2\pi(t_2 + t_3))^{\frac{d}{2}}} .$$

$$(3.46)$$

Le premier terme n'est autre que \mathcal{Z}_1 , conformément à l'image de la contraction, tandis que le deuxième terme contient la divergence à $d = 4$

$$\text{fish} = \int dt_2 dt_3 \frac{\theta(X - t_2 - t_3)}{(2\pi(t_2 + t_3))^{\frac{d}{2}}} = \int_0^X \frac{t dt}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} = \frac{X^{\frac{\epsilon}{2}}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \frac{\epsilon}{2}}$$

$$(3.47)$$

avec

$$\epsilon \equiv 4 - d .$$

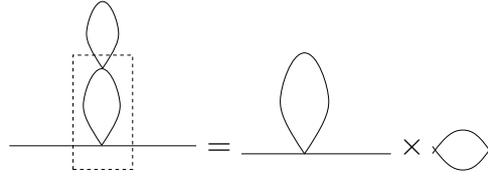
$$(3.48)$$

Pour rendre l'intégrale complètement convergente à $d = 4$, il faut faire trois soustractions correspondant aux trois sous-diagrammes (t_1, t_2) , (t_1, t_3) et (t_2, t_3) . Ceci revient à considérer la combinaison

$$\mathcal{Z}_2^{(b)} - 3\mathcal{Z}_1 \text{fish} .$$

$$(3.49)$$

De même, le diagramme donnant $\mathcal{Z}_2^{(c)}$ a un sous-diagramme à quatre pattes qui donne lieu à la soustraction de



$$\text{Diagram} = \text{Diagram} - \text{Diagram} \quad (3.50)$$

et à la combinaison

$$\mathcal{Z}_2^{(c)} - \mathcal{Z}_1 \text{Diagram} . \quad (3.51)$$

Au total, nous sommes donc amenés à considérer la fonction soustraite

$$\begin{aligned} I_{b_R}^R(\vec{k}, S; X) &= \mathcal{Z}_0 - b_R \mathcal{Z}_1 + b_R^2 \left\{ \mathcal{Z}_2^{(a)} + (\mathcal{Z}_2^{(b)} - 3\mathcal{Z}_1 \text{Diagram}) + \mathcal{Z}_2^{(c)} - \mathcal{Z}_1 \text{Diagram} \right\} + \mathcal{O}(b_R^3) \\ &= \mathcal{Z}_0 - (b_R + 4b_R^2 \text{Diagram}) \mathcal{Z}_1 + (b_R + 4b_R^2 \text{Diagram})^2 (\mathcal{Z}_2^{(a)} + \mathcal{Z}_2^{(b)} + \mathcal{Z}_2^{(c)}) + \mathcal{O}(b_R^3) . \end{aligned} \quad (3.52)$$

Cette fonction est identique à la fonction $I_b(\vec{k}, S)$ qui nous intéresse par simple renormalisation de la constante de couplage avec le choix

$$b = b_R + 4b_R^2 \text{Diagram} + \mathcal{O}(b_R^3) , \quad (3.53)$$

ou encore au même ordre

$$\begin{aligned} b_R &= \frac{b}{1 + 4b \text{Diagram}} + \mathcal{O}(b^2) \\ &= \frac{b}{1 + 8 \frac{b}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{X^{\frac{\epsilon}{2}}}{\epsilon}} + \mathcal{O}(b^2) . \end{aligned} \quad (3.54)$$

On introduit alors la constante de couplage sans dimension

$$g = \frac{b_R}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} X^{\frac{\epsilon}{2}} = \frac{\frac{b}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} X^{\frac{\epsilon}{2}}}{1 + 8 \frac{b}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{X^{\frac{\epsilon}{2}}}{\epsilon}} + \mathcal{O}(b^2) . \quad (3.55)$$

La fonction de Wilson correspondante

$$W(g) = X \left. \frac{d}{dX} \right|_b g = \frac{\epsilon}{2} g - 4g^2 + \mathcal{O}(g^2) \quad (3.56)$$

a un point fixe infrarouge à

$$g^* = \frac{\epsilon}{8} + \mathcal{O}(\epsilon^2) . \quad (3.57)$$

Notons qu'à la différence du cas du problème de l'impureté où nous avons un résultat exact, la formule (3.57) résulte ici d'un calcul à une boucle en b et fournit en fait le premier ordre d'un développement systématique en ϵ de g^* .

Pour finir, de nouvelles divergences apparaissent à $d = 4$ pour les sous-diagrammes à deux pattes, auxquels nous devons faire une soustraction supplémentaire pour les rendre finis jusqu'à $d = 4$ inclus. Nous nous limiterons ici au premier ordre en b , c'est à dire à \mathcal{Z}_1 . Pour supprimer les divergences liées à la boucle interne de longueur $t \rightarrow 0$, et atteindre $d = 4$, nous devons soustraire maintenant les deux premiers termes du développement à $t = 0$ de la partie régulière de l'intégrand,

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{d}{2}}} \left\{ (S-t)\theta(S-t)e^{-\frac{\vec{k}^2}{2}(S-t)} - Se^{-\frac{\vec{k}^2}{2}S} - \theta(X-t)t \left(\frac{\vec{k}^2}{2}S - 1 \right) e^{-\frac{\vec{k}^2}{2}S} \right\}, \quad (3.58)$$

avec une échelle de renormalisation pour la seconde soustraction. Prenant en compte les ordres zéro et un du développement perturbatif, nous définissons donc

$$\begin{aligned} I_{b_R}^R(\vec{k}_R, S; X) &= e^{-\frac{\vec{k}_R^2}{2}S} - b_R \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} \left\{ (S-t)\theta(S-t)e^{-\frac{\vec{k}_R^2}{2}(S-t)} - Se^{-\frac{\vec{k}_R^2}{2}S} \right\} \\ &\quad + b_R \int_0^X dt \frac{t}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} \frac{\vec{k}_R^2}{2} Se^{-\frac{\vec{k}_R^2}{2}S} - b_R \int_0^X dt \frac{t}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\vec{k}_R^2}{2}S} \\ &= \frac{\left(e^{-b_R \int_0^X \frac{t dt}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} \right)}{e^{-b_R c_0 S}} \left\{ e^{-\frac{\left\{ \vec{k}_R \left(1 - \frac{b_R}{2} \int_0^X \frac{t dt}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} \right) \right\}^2}{2} S} \right. \\ &\quad \left. - b_R \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} (S-t)\theta(S-t)e^{-\frac{\left\{ \vec{k}_R \left(1 - \frac{b_R}{2} \int_0^X \frac{t dt}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} \right) \right\}^2}{2} (S-t)} \right\} + \mathcal{O}(b_R^2) \\ &= \frac{Z_I}{e^{-b_R c_0 S}} I_b(\vec{k}, S), \end{aligned} \quad (3.59)$$

à condition de choisir

$$\begin{aligned} \vec{k}_R &= Z^{-1} \vec{k} \\ Z &= 1 - \frac{b_R}{2} \int_0^X \frac{t dt}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} = 1 - \frac{g}{\epsilon} + \mathcal{O}(g^2) \\ Z_I &= \exp \left(-b_R \int_0^X \frac{t dt}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} \right) = \exp \left(-2\frac{g}{\epsilon} + \mathcal{O}(g^2) \right). \end{aligned} \quad (3.60)$$

En plus de la renormalisation de la constante de couplage, on a donc dans ce problème deux nouvelles renormalisations:

- une renormalisation du vecteur \vec{k} , ou de manière équivalente, du paramètre conjugué \vec{r} , par un facteur de renormalisation Z ;
- une renormalisation multiplicative par un facteur Z_I de I_b . Cette renormalisation disparaît dans les rapports d'intégrales fonctionnelles. En revanche, elle reste présente dans des quantités comme $I_b(\vec{0}, S) = \mathcal{Z}_b$, et est à l'origine d'un exposant γ non-trivial.

Comme pour la constante de couplage g , codée par la fonction de Wilson $W(g)$, on définit les deux fonctions

$$\begin{aligned}\gamma(g) &= X \left. \frac{d}{dX} \right|_b \ln(Z) = \frac{-1}{\epsilon} \frac{\epsilon g}{2} + \mathcal{O}(g^2) = -\frac{g}{2} + \mathcal{O}(g^2) \\ \gamma_I(g) &= X \left. \frac{d}{dX} \right|_b \ln(Z_I) = \frac{-2}{\epsilon} \frac{\epsilon g}{2} + \mathcal{O}(g^2) = -g + \mathcal{O}(g^2) .\end{aligned}\tag{3.61}$$

Ces fonctions restent bien définies à $d = 4$ ($\epsilon = 0$).

3.3.4 Equation du groupe de renormalisation: exposants critiques:

Une valeur moyenne de la théorie de départ, faisant intervenir le rapport de deux fonctions I_b , est reliée à la quantité renormalisée correspondante par

$$\Gamma(b, \vec{k}, S) = \Gamma_R(g(X, b), \vec{k}_R, S; X) .\tag{3.62}$$

En écrivant que le membre de gauche est indépendant de X à b et \vec{k} fixé, nous obtenons l'équation

$$\begin{aligned}0 &= X \left. \frac{d}{dX} \right|_{b, \vec{k}} \Gamma_R(g(X, b), \vec{k}_R, S; X) = X \frac{\partial}{\partial X} \Gamma_R(g(X, b), \vec{k}_R, S; X) \\ &\quad + X \underbrace{\left. \frac{d}{dX} \right|_b g(X, b)}_{=W(g(X, b))} \frac{\partial}{\partial g} \Gamma_R(g(X, b), \vec{k}_R, S; X) \\ &\quad - X \underbrace{\left. \frac{d}{dX} \right|_b \ln Z(g(X, b))}_{=\gamma(g(X, b))} \vec{k}_R \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{k}_R} \Gamma_R(g(X, b), \vec{k}_R, S; X) .\end{aligned}\tag{3.63}$$

On a aussi par homogénéité

$$\left\{ X \frac{\partial}{\partial X} + S \frac{\partial}{\partial S} - \frac{1}{2} \vec{k}_R \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{k}_R} \right\} \Gamma_R(g, \vec{k}_R, S; X) = d_\Gamma \Gamma_R(g, \vec{k}_R, S; X) .\tag{3.64}$$

En combinant les deux équations, nous obtenons l'équation du groupe de renormalisation

$$\left\{ S \frac{\partial}{\partial S} - \left(\frac{1}{2} - \gamma(g) \right) \vec{k}_R \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{k}_R} - W(g) \frac{\partial}{\partial g} - d_\Gamma \right\} \Gamma_R(g, \vec{k}_R, S; X) = 0. \quad (3.65)$$

Dans la limite des grandes tailles $S \rightarrow +\infty$, l'équation ci-dessus est gouvernée par le point fixe infrarouge g^* (solution de $W(g^*) = 0$, $W'(g^*) < 0$). Un tel point fixe non-trivial existe en perturbation pour $\epsilon > 0$, c'est à dire $d < 4$. L'équation (3.65) se simplifie alors en

$$\left\{ S \frac{\partial}{\partial S} - \left(\frac{1}{2} - \gamma(g^*) \right) \vec{k}_R \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{k}_R} - d_\Gamma \right\} \Gamma_R(g^*, \vec{k}_R, S; X) = 0, \quad (3.66)$$

où $\gamma(g^*)$ est maintenant un pur nombre. La solution de cette équation est

$$\Gamma_R(g^*, \vec{k}_R, S; X) = S^{d_\Gamma} f \left(\vec{k}_R^2 S^{1-2\gamma(g^*)} \right). \quad (3.67)$$

En particulier, en prenant $\Gamma(b, \vec{k}, S) = \frac{I_b(\vec{k}, S)}{I_b(\vec{0}, S)}$, de dimension $d_\Gamma = 0$, et en développant au premier ordre en \vec{k}_R^2 l'équation (3.67) pour la quantité renormalisée correspondante, nous obtenons

$$R_{BB}^2 = \langle (\vec{r}(S) - \vec{r}(0))^2 \rangle_b \propto S^{1-2\gamma(g^*)} \quad (3.68)$$

et donc un exposant ν égal à

$$\nu = \frac{1}{2} - \gamma(g^*). \quad (3.69)$$

En prenant la valeur (3.57) de g^* et la valeur (3.61) de $\gamma(g)$, nous obtenons le premier ordre en ϵ de l'exposant ν

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{16} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.70)$$

Pour $d = 3$ ($\epsilon = 1$), l'estimation correspondante de ν est $\nu(d = 3) \sim 0.5625$.

Pour calculer l'exposant γ du nombre de chemins auto-évitant ouverts, nous utilisons

$$\mathcal{Z}_b = I_b(\vec{0}, S) = Z_I^{-1} I_{b_R}^R(\vec{0}, S; X) \quad (3.71)$$

faisant maintenant intervenir le facteur de renormalisation Z_I , et écrivons que le membre de gauche de l'équation est indépendant de X à b fixé. Nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &= Z_I X \left. \frac{d}{dX} \right|_b \left(Z_I^{-1} I_{b_R}^R(\vec{0}, S; X) \right) \\ &= \left\{ X \frac{\partial}{\partial X} + W(g) \frac{\partial}{\partial g} - \gamma_I(g) \right\} I_{b_R}^R(\vec{0}, S; X). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Nous avons aussi par homogénéité

$$\left\{ S \frac{\partial}{\partial S} + X \frac{\partial}{\partial X} \right\} I_{b_R}^R(\vec{0}, S; X) = 0, \quad (3.73)$$

et donc finalement

$$\left\{ S \frac{\partial}{\partial S} - W(g) \frac{\partial}{\partial g} + \gamma_I(g) \right\} I_{b_R}^R(\vec{0}, S; X) = 0. \quad (3.74)$$

Au point fixe g^* , nous déduisons le comportement

$$\mathcal{Z}_b \propto I_{b_R}^R(\vec{0}, S; X) \propto S^{-\gamma_I(g^*)}, \quad (3.75)$$

et donc un exposant γ donné par

$$\gamma = 1 - \gamma_I(g^*). \quad (3.76)$$

Au premier ordre en ϵ , nous obtenons

$$\gamma = 1 + \frac{\epsilon}{8} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.77)$$

Les calculs ci-dessus peuvent être poursuivis de manière systématique, à l'ordre deux en ϵ , on trouve $\nu = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{16} + \frac{15\epsilon^2}{512} + \mathcal{O}(\epsilon^3)$ et $\gamma = 1 + \frac{\epsilon}{8} + \frac{13\epsilon^2}{256} + \mathcal{O}(\epsilon^3)$. A $d = 3$ ($\epsilon = 1$), une resommation des premiers ordres donne l'estimation $\nu \simeq 0.588$ et $\gamma \simeq 1.161$. Les exposants α et θ s'en déduisent par la relation d'hyperscaling, qui est vérifiée pour ce problème.

La solution générale de (3.65) est

$$\Gamma_R(g, S, \vec{k}_R; X) = S^{d_\Gamma} f \left(S \exp \left[\int_\star^g \frac{du}{W(u)} \right], \vec{k}_R \exp \left[- \int_\star^g du \frac{\frac{1}{2} - \gamma(u)}{W(u)} \right] \right), \quad (3.78)$$

avec une même borne \star arbitraire. Nous définissons comme auparavant $\tilde{g}(\lambda, g)$ par

$$\lambda = \exp \left[\int_g^{\tilde{g}(\lambda, g)} \frac{du}{W(u)} \right], \quad (3.79)$$

solution de $\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \tilde{g}(\lambda, g) = W(\tilde{g}(\lambda, g))$ et une nouvelle quantité

$$\tilde{\alpha}(\lambda, g) = \exp \left[\int_g^{\tilde{g}(\lambda, g)} du \frac{\frac{1}{2} - \gamma(u)}{W(u)} \right], \quad (3.80)$$

solution de $\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \tilde{\alpha}(\lambda, g) = \left(\frac{1}{2} - \gamma(\tilde{g}(\lambda, g)) \right) \tilde{\alpha}(\lambda, g)$, de sorte que

$$\Gamma_R(g, \lambda S, \vec{k}_R; X) = \lambda^{d_\Gamma} \Gamma_R(\tilde{g}(\lambda, g), S, \tilde{\alpha}(\lambda, g) \vec{k}_R; X), \quad (3.81)$$

ou de manière équivalente

$$\Gamma_R(g, S, \vec{k}_R; X) = \lambda^{d\Gamma} \Gamma_R(\tilde{g}(\lambda, g), \frac{S}{\lambda}, \tilde{\alpha}(\lambda, g) \vec{k}_R; X) . \quad (3.82)$$

En prenant $\lambda = \frac{S}{X}$ dans cette dernière équation, nous obtenons

$$\begin{aligned} \Gamma_R(g, S, \vec{k}_R; X) &= \left(\frac{S}{X}\right)^{d\Gamma} \Gamma_R\left(\tilde{g}\left(\frac{S}{X}, g\right), X, \tilde{\alpha}\left(\frac{S}{X}, g\right) \vec{k}_R; X\right) \\ &= \left(\frac{S}{X}\right)^{d\Gamma} X^{d\Gamma} f\left(\tilde{g}\left(\frac{S}{X}, g\right), \frac{X}{X}, \frac{\left(\tilde{\alpha}\left(\frac{S}{X}, g\right) \vec{k}_R\right)^2}{X}\right) \\ &= S^{d\Gamma} f\left(\tilde{g}\left(\frac{S}{X}, g\right), 1, \frac{\left(\tilde{\alpha}\left(\frac{S}{X}, g\right) \vec{k}_R\right)^2}{X}\right) . \end{aligned} \quad (3.83)$$

Quand $S \rightarrow +\infty$, $\tilde{g}(\frac{S}{X}, g) \rightarrow g^*$ et $\tilde{\alpha}(\frac{S}{X}, g) \sim c(g) \left(\frac{S}{X}\right)^{\frac{1}{2}-\gamma(g^*)}$ et nous trouvons alors le comportement (3.67) annoncé.

3.4. Théorie des champs Φ^4 à $n = 0$

Le modèle d'Edwards peut être formulé comme une théorie des champs dans l'espace de plongement \mathbb{R}^d . En utilisant la densité de polymère

$$\mathcal{C}(\vec{r}) = \int_0^S ds \delta^d(\vec{r} - \vec{r}(s)) , \quad (3.84)$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \exp\left[-\frac{b}{2} \int_0^S ds \int_0^S ds' \delta^d(\vec{r}(s) - \vec{r}(s'))\right] &= \exp\left[-\frac{b}{2} \int d^d\vec{r} \mathcal{C}^2(\vec{r})\right] \\ &= \frac{\int [\mathcal{D}\omega(\vec{r})] \exp\left[-\frac{1}{2b} \int d^d\vec{r} \omega^2(\vec{r}) - i \int d^d\vec{r} \omega(\vec{r}) \mathcal{C}(\vec{r})\right]}{\int [\mathcal{D}\omega(\vec{r})] \exp\left[-\frac{1}{2b} \int d^d\vec{r} \omega^2(\vec{r})\right]} \\ &= \frac{\int [\mathcal{D}\omega(\vec{r})] \exp\left[-\frac{1}{2b} \int d^d\vec{r} \omega^2(\vec{r}) - i \int_0^S ds \omega(\vec{r}(s))\right]}{\int [\mathcal{D}\omega(\vec{r})] \exp\left[-\frac{1}{2b} \int d^d\vec{r} \omega^2(\vec{r})\right]} . \end{aligned} \quad (3.85)$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_b(\vec{R}, S) &= \int_{\vec{r}(0)=\vec{0}} [\mathcal{D}\vec{r}(s)] \delta^d(\vec{r}(S) - \vec{R}) \exp\left[-\frac{1}{2} \int_0^S ds \left(\frac{d\vec{r}}{ds}(s)\right)^2 - \frac{b}{2} \int_0^S ds \int_0^S ds' \delta^d(\vec{r}(s) - \vec{r}(s'))\right] \\ &= \frac{\int [\mathcal{D}\omega(\vec{r})] \exp\left[-\frac{1}{2b} \int d^d\vec{r} \omega^2(\vec{r})\right] \left\{ \int_{\vec{r}(0)=\vec{0}} [\mathcal{D}\vec{r}(s)] \delta^d(\vec{r}(S) - \vec{R}) \exp\left[-\frac{1}{2} \int_0^S ds \left(\frac{d\vec{r}}{ds}(s)\right)^2 - i \int_0^S ds \omega(\vec{r}(s))\right] \right\}}{\int [\mathcal{D}\omega(\vec{r})] \exp\left[-\frac{1}{2b} \int d^d\vec{r} \omega^2(\vec{r})\right]} , \end{aligned} \quad (3.86)$$

où la quantité entre accolades n'est autre que l'intégrale fonctionnelle $\mathcal{P}_\omega(\vec{R}, S)$ pour un polymère non auto-évitant dans un potentiel (complexe) $i\omega(\vec{r})$. La quantité $\mathcal{P}_b(\vec{R}, S)$ s'obtient alors par une moyenne sur les configurations de potentiel avec un poids approprié. Le problème du polymère auto-évitant est donc équivalent à un problème particulier de polymère non auto-évitant plongé dans un potentiel (complexe) aléatoire. Nous pouvons maintenant utiliser pour $\mathcal{P}_\omega(\vec{R}, S)$ sa représentation en terme de théorie des champs pour écrire la transformée de Laplace:

$$\int_0^{+\infty} dS e^{-\frac{m^2}{2}S} \mathcal{P}_b(\vec{R}, S) = \frac{\int[\mathcal{D}\omega] \exp\left[-\frac{1}{2b} \int d^d\vec{r} \omega^2(\vec{r})\right] \frac{\int[\mathcal{D}\Phi] \Phi(\vec{0})\Phi(\vec{R}) \exp\left[-\frac{1}{4} \int d^d\vec{r} \{(\nabla\Phi)^2(\vec{r}) + m^2\Phi^2(\vec{r})\} - \frac{i}{2} \int d^d\vec{r} \omega(\vec{r})\Phi^2(\vec{r})\right]}{\int[\mathcal{D}\Phi] \exp\left[-\frac{1}{4} \int d^d\vec{r} \{(\nabla\Phi)^2(\vec{r}) + m^2\Phi^2(\vec{r})\} - \frac{i}{2} \int d^d\vec{r} \omega(\vec{r})\Phi^2(\vec{r})\right]}}{\int[\mathcal{D}\omega] \exp\left[-\frac{1}{2b} \int d^d\vec{r} \omega^2(\vec{r})\right]} \quad (3.87)$$

Au vu de cette expression, on aimerait réintégrer sur $\omega(\vec{r})$ pour obtenir une théorie du seul champ $\Phi(\vec{r})$. Le problème vient alors du dénominateur D dans le rapport des intégrales fonctionnelles sur $\Phi(\vec{r})$. En terme de systèmes désordonnés, on a affaire ici à un désordre gelé, où l'on moyenne sur le désordre des quantités qui sont elles-mêmes des moyennes à désordre fixé. La solution du problème consiste à prendre n copies indentiques du champ $\Phi(\vec{r})$, notées $\Phi^i(\vec{r})$, $i = 1, \dots, n$. En d'autres terme, le champs $\Phi(\vec{r})$ est remplacé par un champ $\vec{\Phi}(\vec{r})$ à n composantes. La formule (3.87) reste valable sous la forme

$$\int_0^{+\infty} dS e^{-\frac{m^2}{2}S} \mathcal{P}_b(\vec{R}, S) = \frac{\int[\mathcal{D}\omega] \exp\left[-\frac{1}{2b} \int d^d\vec{r} \omega^2(\vec{r})\right] \frac{\int[\mathcal{D}\vec{\Phi}] \Phi^1(\vec{0})\Phi^1(\vec{R}) \exp\left[-\frac{1}{4} \int d^d\vec{r} \{(\nabla\vec{\Phi})^2(\vec{r}) + m^2\vec{\Phi}^2(\vec{r})\} - \frac{i}{2} \int d^d\vec{r} \omega(\vec{r})\vec{\Phi}^2(\vec{r})\right]}{\int[\mathcal{D}\vec{\Phi}] \exp\left[-\frac{1}{4} \int d^d\vec{r} \{(\nabla\vec{\Phi})^2(\vec{r}) + m^2\vec{\Phi}^2(\vec{r})\} - \frac{i}{2} \int d^d\vec{r} \omega(\vec{r})\vec{\Phi}^2(\vec{r})\right]}}{\int[\mathcal{D}\omega] \exp\left[-\frac{1}{2b} \int d^d\vec{r} \omega^2(\vec{r})\right]} \quad (3.88)$$

où le rapport des intégrale fonctionnelles sur $\vec{\Phi}(\vec{r})$ calcule maintenant la fonction à deux points $\langle \Phi^1(\vec{0})\Phi^1(\vec{R}) \rangle$ d'une quelconque des composantes Φ^i de $\vec{\Phi}(\vec{r})$ (ici $i = 1$). l'intérêt de cette manipulation est que le nouveau dénominateur est factorisé en D^n et disparaît dans la limite $n \rightarrow 0$. On peut alors intégrer sur $\omega(\vec{r})$, ce qui donne le résultat

$$\int_0^{+\infty} dS e^{-\frac{m^2}{2}S} \mathcal{P}_b(\vec{R}, S) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\int[\mathcal{D}\vec{\Phi}] \Phi^1(\vec{0})\Phi^1(\vec{R}) \exp\left[-\frac{1}{4} \int d^d\vec{r} \{(\nabla\vec{\Phi})^2(\vec{r}) + m^2\vec{\Phi}^2(\vec{r})\} - \frac{b}{8} \int d^d\vec{r} \left(\vec{\Phi}^2(\vec{r})\right)^2\right]}{\int[\mathcal{D}\vec{\Phi}] \exp\left[-\frac{1}{4} \int d^d\vec{r} \{(\nabla\vec{\Phi})^2(\vec{r}) + m^2\vec{\Phi}^2(\vec{r})\} - \frac{b}{8} \int d^d\vec{r} \left(\vec{\Phi}^2(\vec{r})\right)^2\right]} \quad (3.89)$$

où $\vec{\Phi}(\vec{r})$ est un champs à n composantes. Le dénominateur (qui vaut 1 dans la limite $n \rightarrow 0$) est réintroduit arbitrairement. En conclusion, un polymère auto-évitant peut être décrit par une théorie des champs “ Φ^4 ” (en fait plus précisément $\left((\vec{\Phi})^2\right)^2$) pour un champ $\vec{\Phi}$ à n composantes et dans la limite $n \rightarrow 0$. Le terme d’interaction en “ Φ^4 ” se comprend bien puisqu’un contact fait intervenir quatre demi-lignes partant du même point. Dans le “vertex” $\left((\vec{\Phi})^2\right)^2 = \sum_{i,j} \Phi^i \Phi^i \Phi^j \Phi^j$, ces quatre demi-lignes sont en fait arrangées en deux paires de demi-lignes (correspondant au même indice i ou j), chaque paire décrivant les deux morceaux de la *même* portion de polymère de part et d’autre du contact. Le fait que l’on doive prendre la limite $n \rightarrow 0$ revient en fait à éliminer les configurations de vertex qui conduiraient à créer des boucles de polymère déconnectées, c’est à dire à fabriquer un polymère non connexe.

4. Membrane polymérisée en interaction avec une impureté

4.1. Membrane libre

4.1.1 Elasticité et transition de froissement:

Nous allons maintenant étendre les résultats des chapitres précédents au cas d'une membrane polymérisée. Par membrane, nous désignons ici un objet géométrique de dimension interne $D = 2$, par opposition au polymère dont la dimension interne vaut $D = 1$. Une membrane plongée dans l'espace de dimension d sera donc décrite dans un formalisme continu par un champ

$$\vec{r}(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^d \quad (4.1)$$

défini sur une variété à 2 dimensions. Nous aurons alors à moyenner sur toutes les valeurs du champ correspondant à des configurations accessibles à la membrane, avec pour chacune d'elles un poids approprié.

Contrairement au cas d'un polymère, une membrane peut développer différents types d'ordres internes. Parmi les plus importants, nous distinguerons le cas d'une membrane fluide et celui d'une membrane polymérisée.

La plupart des membranes biologiques (telles que les membranes cellulaires) sont fluides. Elles sont formées de molécules amphiphiles qui s'arrangent en bicouche. Au sein de chacune des monocouches formant la bicouche, les molécules sont libres et constituent ainsi un fluide bidimensionnel. Ce caractère fluide a deux implications quant à la description théorique de ces membranes. D'abord, il n'y a pas de système de coordonnées privilégié pour décrire la membrane. L'énergie d'une configuration $\vec{r}(x_1, x_2)$ doit alors être invariante par reparamétrisation $\vec{r}(x_1, x_2) \rightarrow \vec{r}'(x'_1, x'_2) = \vec{r}(x_1(x'_1, x'_2), x_2(x'_1, x'_2))$. Par ailleurs, la métrique interne

$$g_{ab} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_b} \quad (4.2)$$

peut fluctuer d'une configuration à l'autre de la membrane. Les membranes étant incompressibles, c'est à dire d'aire constante, leurs fluctuations sont en fait gouvernées par un terme d'énergie de courbure

$$E_{\text{Courbure}} = \frac{\kappa}{2} \int \underbrace{dx_1 dx_2 \sqrt{\det(g_{ab})}}_{=\text{élément d'aire}} \left(\frac{1}{R_1(x_1, x_2)} + \frac{1}{R_2(x_1, x_2)} \right)^2, \quad (4.3)$$

où $R_1(x_1, x_2)$ et $R_2(x_1, x_2)$ sont les deux rayons de courbure principaux de la membrane au point (x_1, x_2) . Le module de rigidité κ est sans dimension. On peut montrer qu'il est renormalisé par les fluctuations de la membrane. Cette renormalisation est codée dans la fonction de Wilson pour la constante de couplage $g = \frac{1}{\kappa}$, qui vaut

$$W(g) = \frac{d}{4\pi} g^2. \quad (4.4)$$

En d'autres termes, en intégrant le flot correspondant, on montre que si le module de rigidité vaut κ_0 à l'échelle X_0 , il vaut

$$\kappa(X) = \kappa_0 - \frac{d}{4\pi} \ln \left(\frac{X}{X_0} \right) \quad (4.5)$$

à l'échelle X . La rigidité effective décroît donc à grande échelle. On interprète ce résultat en disant que la rigidité est non pertinente, et que la membrane est froissée à grande échelle.

Nous allons nous intéresser ici à un autre type de membranes, les membranes polymérisées. Ces membranes présentent un ordre interne avec une élasticité de type solide. Un exemple de telles membranes est fourni par le réseau de spectrines qui soutient la membrane cellulaire des globules rouges. Pour ces membranes, la configuration d'énergie minimale définit un système de coordonnées privilégié dans lequel la métrique vaut alors simplement

$$g_{ab}^{\min}(x_1, x_2) = \delta_{ab} \quad \forall (x_1, x_2). \quad (4.6)$$

Une déformation autour de cette configuration d'énergie minimale se traduit par un changement de métrique dans le système de coordonnées privilégié, mesuré par le tenseur des déformations

$$u_{ab} \equiv g_{ab} - \delta_{ab}. \quad (4.7)$$

On doit alors considérer, en plus de l'énergie de courbure introduite auparavant, l'énergie élastique interne associée à cette déformation. On peut alors montrer que les modes de fluctuations changeant la courbure sont couplés aux modes de vibration interne de la membrane. Le résultat net est une fonction de Wilson pour g maintenant égale à

$$W(g) = -\eta g + \frac{d}{4\pi} g^2, \quad (4.8)$$

avec un terme linéaire en g supplémentaire avec un coefficient $\eta > 0$ (qui peut être évalué dans un développement en $\frac{1}{d}$, $\eta = \frac{2}{d} + \mathcal{O}(\frac{1}{d^2})$). On trouve alors le comportement

$$\kappa(X) = \frac{d}{4\pi\eta} + \left(\kappa_0 - \frac{d}{4\pi\eta} \right) \left(\frac{X}{X_0} \right)^\eta . \quad (4.9)$$

Pour $\kappa_0 > \frac{d}{4\pi\eta}$, on a $\kappa(X) \underset{X \rightarrow +\infty}{\sim} +\infty$ et la membrane se trouve alors dans une phase plate de forte rigidité. Au contraire, pour $\kappa_0 < \frac{d}{4\pi\eta}$, $\kappa(X)$ s'annule à une échelle X finie et la membrane est alors dans une phase froissée. Le point $\kappa_0 = \frac{d}{4\pi\eta}$ est le lieu d'une transition de froissement.

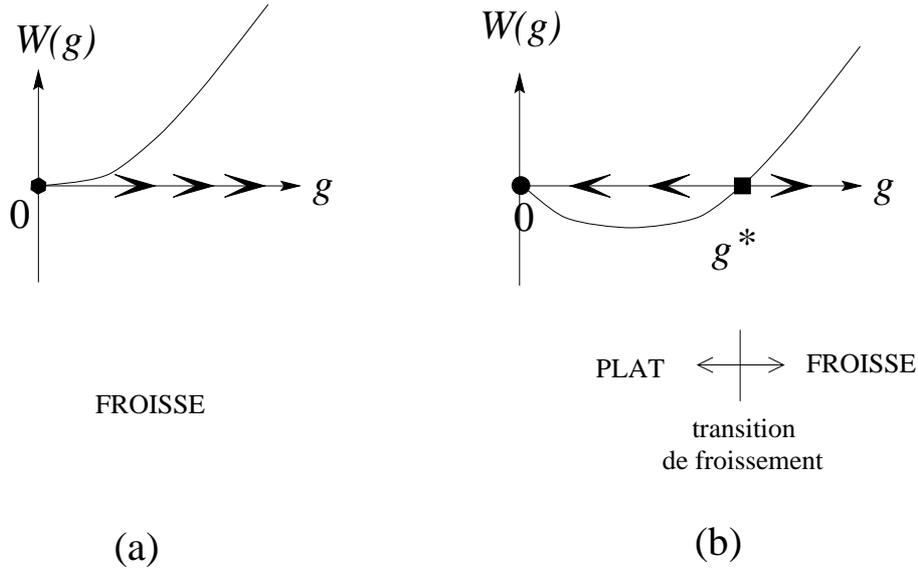


Fig. 9: Le flot de la constante de couplage $g = \frac{1}{\kappa}$ pour une membrane fluide (a) et pour une membrane polymérisée (b).

Tous ces résultats sont résumés sur la figure 9.

4.1.2 Phase froissée:

Nous allons maintenant dans la suite de ce cours nous intéresser au problème d'une membrane polymérisée soit en interaction avec une impureté localisée à l'origine, soit en présence de contraintes d'auto-évitement. Dans les deux cas, il n'y aura d'effet que si la membrane repasse fréquemment au même point. Ceci suppose que la membrane soit initialement dans sa phase froissée. On peut alors décrire la membrane par une théorie effective directement inspirée de la formulation fonctionnelle d'un polymère. A une configuration $\vec{r}(x_1, x_2)$ correspond simplement un poids

$$\exp \left[-\frac{1}{2} \int dx_1 dx_2 (\nabla_x \vec{r}(x_1, x_2))^2 \right] , \quad (4.10)$$

où $(\nabla_x \vec{r})^2 = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_2}\right)^2$. Nous considérerons par simplicité le cas d'une membrane infiniment grande, où nous intégrons (x_1, x_2) sur tout \mathbb{R}^2 . On peut de plus à ce stade généraliser le problème à une variété à D dimensions internes, décrite par un champ $\vec{r}(x)$ avec $x \equiv (x_1, \dots, x_D)$ un vecteur de \mathbb{R}^D , et un poids

$$\exp \left[-\frac{1}{2} \int d^D x (\nabla_x \vec{r}(x))^2 \right], \quad (4.11)$$

où $(\nabla_x \vec{r})^2 = \sum_{i=1}^D \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i}\right)^2$. Le cas $D = 1$ correspond à un polymère infiniment long, le cas $D = 2$ à une membrane polymérisée. Le cas $D = 3$ peut décrire un gel polymérisé. Comme nous allons le voir dans la suite, des raisons techniques nous empêcheront de travailler à $D = 2$ directement. Nous allons donc être amenés à considérer les différents modèles d'interaction pour des valeurs de D variant continuellement entre $D = 0$ et $D = 2$. Formellement, rien n'empêche en effet de considérer le modèle à D non-entier. Nous continuerons à désigner dans la suite par le terme générique de membrane un objet D -dimensionnel avec D arbitraire.

La première chose que nous devons faire pour ensuite développer les calculs perturbatifs est d'évaluer la fonction à deux points de la membrane libre dans sa phase froissée, c'est à dire décrite par le poids (4.11). Nous nous limiterons au cas $0 < D \leq 2$. Nous allons calculer comme au chapitre 1.3.4 la fonction à deux points invariante par translation

$$G(x, x') = \frac{1}{d} \langle (\vec{r}(x) - \vec{r}(x'))^2 \rangle, \quad (4.12)$$

qui généralise la fonction $G(s, s')$ calculée alors. Comme dans l'équation (1.107), nous avons la représentation en transformée de Fourier

$$G(x, x') = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{2 \left(1 - e^{-ip \cdot (x-x')}\right)}{p^2} \quad (4.13)$$

qui peut se calculer par

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{2 \left(1 - e^{-ip \cdot (x-x')}\right)}{p^2} &= \frac{2}{(2\pi)^D} \int_0^\infty d\alpha \int d^D p e^{-\alpha p^2} \left(1 - e^{-ip \cdot (x-x')}\right) \\ &= \frac{2}{(2\pi)^D} \int_0^\infty d\alpha \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{D}{2}} \left(1 - e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha}}\right) \\ &= \frac{2(\pi)^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} \left(\frac{|x-x'|}{2}\right)^{2-D} \underbrace{\int_0^\infty \frac{du}{u} u^{\frac{D}{2}-1} (1 - e^{-u})}_{= \frac{\Gamma(\frac{D}{2})}{1-\frac{D}{2}}} \quad (4.14) \\ &= \frac{1}{\pi^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{D}{2})}{2-D} |x-x'|^{2-D} \end{aligned}$$

Si nous introduisons le volume de la sphère en dimension D

$$S_D = \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}, \quad (4.15)$$

nous obtenons la formule

$$G(x, x') = \frac{2|x - x'|^{2-D}}{(2-D)S_D}. \quad (4.16)$$

Pour $D = 1$, nous retrouvons la formule (1.76). On peut lire de plus sur cette formule la valeur de l'exposant ν d'une membrane libre D -dimensionnelle:

$$\nu = \frac{2-D}{2}. \quad (4.17)$$

A partir de $G(x, x')$, nous pouvons revenir à la fonction à deux points non invariante par translation

$$A(x, x') = \frac{1}{d} \langle \vec{r}(x) \cdot \vec{r}(x') \rangle, \quad (4.18)$$

telle que

$$G(x, x') = A(x, x) + A(x', x') - 2A(x, x'). \quad (4.19)$$

L'équation ci dessus garantit la forme

$$A(x, x') = -\frac{|x - x'|^{2-D}}{(2-D)S_D} + F(x) + F(x'), \quad (4.20)$$

avec une fonction $F(x)$ qui dépend de la manière dont l'invariance par translation est explicitement brisée. Dans toutes les applications, où l'on ne considérera que des quantités invariantes par translation, nous pouvons utiliser

$$A(x, x') = -\frac{|x - x'|^{2-D}}{(2-D)S_D}, \quad (4.21)$$

bien que, strictement parlant, il n'existe aucun mode de brisure qui donne $F = 0$ ($F(x) = A(x, x)$ doit rester en principe strictement positif).

La quantité $A(x, x')$ n'est autre que le potentiel Coulombien entre deux charges unité de même signe aux points x et x' dans l'espace à D dimensions. Elle est solution de l'équation de Poisson $\Delta_x A(x, x') = -\delta^D(x - x')$ pour le potentiel ressenti par une charge unité en x en présence d'une autre charge unité en x' .

A $D = 2$, la formule (4.21) se transforme en

$$A(x, x') = -\frac{1}{2\pi} \ln |x - x'|. \quad (4.22)$$

Nous avons comme pour le cas du polymère la formule de base de l'intégrale Gaussienne

$$\left\langle e^{i \sum_{i=1}^N \vec{k}_i \cdot \vec{r}(x_i)} \right\rangle = e^{-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \vec{k}_i \cdot \vec{k}_j A(x_i, x_j)}, \quad (4.23)$$

avec A donné par (4.21), valable si

$$\sum_{i=1}^N \vec{k}_i = \vec{0}. \quad (4.24)$$

La quantité apparaissant dans l'exponentielle du membre de droite de (4.22) n'est autre que l'énergie Coulombienne d'un gaz de charges (vectorielles) \vec{k}_i placées en x_i . La condition (4.24) indique simplement que ce gaz doit être globalement neutre.

4.2. Interaction δ : développement perturbatif

Nous revenons ici au problème de l'interaction avec une impureté localisée à l'origine, généralisé au cas d'une membrane D -dimensionnelle. On supposera la membrane fixée à l'origine par la contrainte $\vec{r}(0) = \vec{0}$. Un poids

$$\exp \left[-b \int d^D x \delta^d(\vec{r}(x)) \right] \quad (4.25)$$

pénalise ($b > 0$) ou favorise ($b < 0$) le passage de la membrane par l'origine dans \mathbb{R}^d .

4.2.1 Pertinence de l'interaction:

Nous pouvons dans un premier temps discuter de la pertinence de l'interaction par une simple analyse dimensionnelle. D'après le terme Gaussien de la membrane libre, la dimension de x et celle de \vec{r} sont reliées par

$$[\vec{r}] = \frac{2-D}{2}[x]. \quad (4.26)$$

Nous trouvons alors que $[b] + D[x] - d[\vec{r}] = 0$, qui donne $[b] = -\epsilon(D, d)[x]$ avec

$$\epsilon(D, d) = D - \frac{2-D}{2}d. \quad (4.27)$$

L'interaction est pertinente à grande échelle pour $\epsilon(D, d) > 0$ c'est à dire pour $d < d_c(D)$ où la dimension critique supérieure $d_c(D)$ est donnée par

$$d_c(D) = \frac{2D}{2-D}. \quad (4.28)$$

Pour $D = 1$, nous retrouvons $d_c(1) = 2$. Pour $D = 2$, la dimension critique supérieure est infinie, ce qui indique que l'interaction est pertinente pour tout d . En fait, on a dans ce cas $\epsilon(2, d) = 2$ pour tout d . En particulier, il est impossible de faire un développement en ϵ autour de la dimension critique supérieure directement à $D = 2$. La solution de ce problème consiste à considérer une variété de dimension $D < 2$, pour laquelle la dimension critique supérieure est finie et un développement en ϵ possible. On peut alors calculer un exposant critique tel que ν dans un tel développement. Ce développement n'est pas singulier à $D = 2$, ce qui permet une estimation de ν à $D = 2$ par continuité.

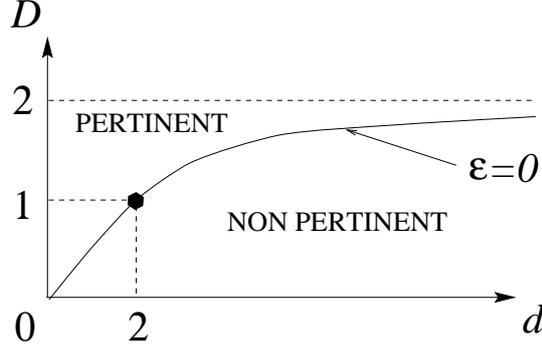


Fig. 10: Le domaine de pertinence de l'interaction avec une impureté dans le plan (d, D)

Le domaine de pertinence de l'interaction dans le plan (d, D) est indiqué sur la figure 10.

4.2.2 Développement perturbatif:

On normalise l'intégrale Gaussienne par

$$\int_{\vec{r}(0)=\vec{0}} [\mathcal{D}\vec{r}(x)] \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^D x (\nabla_x \vec{r}(x))^2 \right] = 1 . \quad (4.29)$$

On veut alors calculer

$$\begin{aligned} \langle e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}(x)} \rangle_b &= \frac{\int_{\vec{r}(0)=\vec{0}} [\mathcal{D}\vec{r}(x)] \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^D x (\nabla_x \vec{r}(x))^2 - b \int d^D x \delta^d(\vec{r}(x)) \right] e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}(x)}}{\int_{\vec{r}(0)=\vec{0}} [\mathcal{D}\vec{r}(x)] \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^D x (\nabla_x \vec{r}(x))^2 - b \int d^D x \delta^d(\vec{r}(x)) \right]} \\ &\equiv \frac{I_b(\vec{k}, x)}{I_b(\vec{0})} . \end{aligned} \quad (4.30)$$

Ici x est un point quelconque de la membrane, supposée infiniment grande. Regardons pour commencer le développement formel de $I_b(\vec{0})$ en puissances de b :

$$I_b(\vec{0}) = \sum_{N=0}^{+\infty} \frac{(-b)^N}{N!} \mathcal{Z}_N , \quad (4.31)$$

avec $\mathcal{Z}_0 = 1$ et, pour $N \geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_N &= \int \prod_{i=1}^N d^D x_i \langle \prod_{i=1}^N \delta^d(\vec{r}(x_i)) \rangle \\ &= \int \prod_{i=1}^N d^D x_i \int \prod_{i=1}^N \frac{d^d \vec{k}_i}{(2\pi)^d} \langle e^{i \sum_{i=1}^N \vec{k}_i \cdot \vec{r}(x_i)} \rangle.\end{aligned}\quad (4.32)$$

avec une moyenne Gaussienne. Pour pouvoir utiliser (4.23), il faut $\sum_i \vec{k}_i = \vec{0}$. On peut pour cela poser $x_0 = 0$ et introduire un vecteur supplémentaire \vec{k}_0 en insérant l'égalité

$$1 = \int d^d \vec{k}_0 \delta^d(\vec{k}_0 + \sum_{i=1}^N \vec{k}_i) e^{i \vec{k}_0 \cdot \vec{r}(x_0)} \quad (4.33)$$

puisque $\vec{r}(x_0) = \vec{0}$. On a alors

$$\mathcal{Z}_N = \int \prod_{i=1}^N d^D x_i \prod_{i=0}^N \frac{d^d \vec{k}_i}{(2\pi)^d} (2\pi)^d \delta^d(\sum_{i=0}^N \vec{k}_i) \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^N \vec{k}_i \cdot \vec{k}_j A(x_i, x_j) \right]. \quad (4.34)$$

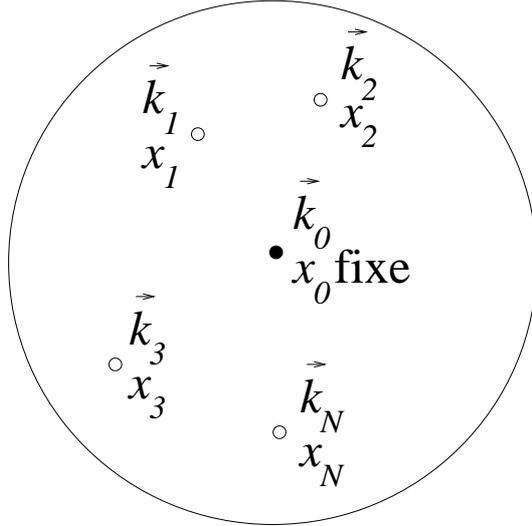


Fig. 11: Diagramme représentant l'amplitude \mathcal{Z}_N avec N points libres (○) et un point fixe (●). Le gaz de "charges" \vec{k}_i est globalement neutre.

On représentera l'amplitude définissant \mathcal{Z}_N par un diagramme comme celui de la figure 11. On peut effectuer l'intégrale sur \vec{k}_0 dans (4.34), avec pour résultat

$$\mathcal{Z}_N = \int \prod_{i=1}^N d^D x_i \prod_{i=1}^N \frac{d^d \vec{k}_i}{(2\pi)^d} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \vec{k}_i \cdot \vec{k}_j \Pi_0(x_i, x_j) \right], \quad (4.35)$$

où

$$\begin{aligned}\Pi_0(x_i, x_j) &= A(x_i, x_j) - A(x_i, 0) - A(0, x_j) + A(0, 0) \\ &= \frac{1}{(2-D)S_D} \{ |x_i|^{2-D} + |x_j|^{2-D} - |x_i - x_j|^{2-D} \} .\end{aligned}\quad (4.36)$$

Par intégration sur les \vec{k}_i , nous obtenons finalement la formule

$$\mathcal{Z}_N = \frac{1}{(2\pi)^{N\frac{d}{2}}} \int \prod_{i=1}^N d^D x_i \left[\det (\Pi_0(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq N} \right]^{-\frac{d}{2}} .\quad (4.37)$$

Le déterminant dans (4.37) est le déterminant associé à la forme quadratique

$$Q(\{k_i\}) = \sum_{i,j=0}^N k_i k_j A(x_i, x_j)\quad (4.38)$$

restreinte au sous-espace $\sum_{i=0}^N k_i = 0$. Cette forme quadratique peut être vue comme l'énergie Coulombienne d'un gaz de charges k_i placées aux points x_i et globalement neutre. Sous cette forme, le choix du point $x_0 = 0$ comme "point de référence" dans la définition de Π_0 est arbitraire. On peut définir

$$\Pi_p(x_i, x_j) = A(x_i, x_j) - A(x_i, x_p) - A(x_p, x_j) + A(x_p, x_p)\quad (4.39)$$

pour p quelconque entre 1 et N . On a $\det(\Pi_p) = \det(\Pi_0)$ pour tout p (comme on peut le voir par simples combinaisons linéaires de lignes et de colonnes). On a en fait la formule suivante pour $\det(\Pi_p)$:

$$- \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & & & & \\ \vdots & & & & \\ & & & & \\ 1 & & & & \end{vmatrix} ,\quad (4.40)$$

sous la forme d'un déterminant $(N+2) \times (N+2)$.

On calcule de même le développement de $I_b(\vec{k}, x)$:

$$I_b(\vec{k}, x) = \sum_{N=0}^{+\infty} \frac{(-b)^N}{N!} \mathcal{Z}_N(\vec{k}, x) ,\quad (4.41)$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_0(\vec{k}, x) &= \langle e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}(x) - \vec{r}(0))} \rangle \\ &= \exp \left[-\frac{1}{2} \vec{k}^2 \Pi_0(x, x) \right]\end{aligned}\quad (4.42)$$

et, pour $N \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_N(\vec{k}, x) &= \int \prod_{i=1}^N d^D x_i \int \prod_{i=0}^N \frac{d^d \vec{k}_i}{(2\pi)^d} (2\pi)^d \delta^d \left(\sum_{i=0}^N \vec{k}_i + \vec{k} \right) \left\langle e^{i \left(\sum_{i=0}^N \vec{k}_i \cdot \vec{r}(x_i) + \vec{k} \cdot \vec{r}(x) \right)} \right\rangle \\
&= \int \prod_{i=1}^N d^D x_i \int \prod_{i=0}^N \frac{d^d \vec{k}_i}{(2\pi)^d} (2\pi)^d \delta^d \left(\sum_{i=0}^N \vec{k}_i + \vec{k} \right) \\
&\quad \times \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^N \vec{k}_i \cdot \vec{k}_j A(x_i, x_j) - \frac{1}{2} \vec{k} \cdot \sum_{i=0}^N \vec{k}_i A(x_i, x) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \vec{k} \cdot \sum_{j=0}^N \vec{k}_j A(x, x_j) - \frac{1}{2} \vec{k}^2 A(x, x) \right] \\
&= \int \prod_{i=1}^N d^D x_i \int \prod_{i=1}^N \frac{d^d \vec{k}_i}{(2\pi)^d} \\
&\quad \times \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \vec{k}_i \cdot \vec{k}_j \Pi_0(x_i, x_j) - \frac{1}{2} \vec{k} \cdot \sum_{i=1}^N \vec{k}_i \Pi_0(x_i, x) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \vec{k} \cdot \sum_{j=1}^N \vec{k}_j \Pi_0(x, x_j) - \frac{1}{2} \vec{k}^2 \Pi_0(x, x) \right] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{Nd}{2}}} \int \prod_{i=1}^N d^D x_i \left[\det \left(\Pi_0(x_i, x_j) \right)_{1 \leq i, j \leq N} \right]^{-\frac{d}{2}} \\
&\quad \times \exp \left[-\frac{1}{2} \vec{k}^2 \frac{\det_{N+1} \begin{pmatrix} \Pi_0(x, x) & \Pi_0(x, x_j) \\ \Pi_0(x_i, x) & \Pi_0(x_i, x_j) \end{pmatrix}}{\det_N \left(\Pi_0(x_i, x_j) \right)} \right]
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Pour $D = 1$ et $x = S$, les formules ci dessus se simplifient si l'on suppose les points x_i ordonnés ($x_0 = 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_N \leq x = S$). On pose $x_i - x_{i-1} = t_i$ de sorte que

$$\begin{aligned}
\Pi_0(x_i, x_j) &= \frac{1}{2} \{ |x_i| + |x_j| - |x_i - x_j| \} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^i t_k + \sum_{k=1}^j t_k - \sum_{k=\min(i,j)+1}^{\max(i,j)} t_k \right\} \\
&= \sum_{k=1}^{\min(i,j)} t_k
\end{aligned} \tag{4.44}$$

et donc on trouve facilement que

$$\det_N \left(\Pi_0(x_i, x_j) \right) = \prod_{i=1}^N t_i . \tag{4.45}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
\Pi_0(x, x_j) &= \sum_{k=1}^j t_k \\
\Pi_0(x_i, x) &= \sum_{k=1}^i t_k \\
\Pi_0(x, x) &= S,
\end{aligned} \tag{4.46}$$

et donc on trouve

$$\det_{N+1} \begin{pmatrix} \Pi_0(x, x) & \Pi_0(x, x_j) \\ \Pi_0(x_i, x) & \Pi_0(x_i, x_j) \end{pmatrix} = \left(S - \sum_{i=1}^N t_i \right) \prod_{i=1}^N t_i. \tag{4.47}$$

On retrouve alors la formule (2.46).

4.3. Renormalisation

4.3.1 Singularités:

L'intégration (4.37) donnant \mathcal{Z}_N et l'intégration (4.43) donnant $\mathcal{Z}_N(\vec{k}, x)$ nécessite que le déterminant $\det_N(\Pi_0(x_i, x_j))$ soit positif. Ceci est garanti par le théorème de Schönberg qui dit que, pour $0 < D < 2$, on a

$$\begin{aligned}
\det_N(\Pi_0(x_i, x_j)) &\geq 0 \\
\det_N(\Pi_0(x_i, x_j)) = 0 &\Leftrightarrow \exists(i, j) \in [0, N]^2 \text{ tel que } x_i = x_j.
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Ce théorème nous permet de plus d'identifier les configurations singulières comme étant les configurations où le déterminant s'annule, et qui sont caractérisées par le fait qu'au moins deux "charges" i et j prises dans l'ensemble des $N + 1$ charges du diagramme (incluant la charge en 0) sont en contact ($x_i = x_j$).

On peut comprendre le théorème de Schönberg dans le langage de l'électrostatique en utilisant le fait déjà mentionné que $\det_N(\Pi_0(x_i, x_j))$ est le déterminant associé à la forme quadratique $Q(\{k_i\})$ de l'équation (4.38), restreinte au sous-espace $\sum_i k_i = 0$, qui représente l'énergie Coulombienne d'un gaz globalement neutre de $N + 1$ charges k_i aux points x_i . Pour un tel gaz de charges, l'énergie Coulombienne est *minimale* si la densité de charge est nulle partout. Pour $0 < D < 2$, l'énergie minimale correspondante est alors *nulle*. Ceci implique que la forme quadratique est toujours *positive* et donc son déterminant aussi. De plus, on peut identifier les modes zéro de cette forme quadratique comme les

configurations de charges où certains des k_i sont non nuls mais où la densité de charge reste partout nulle. Ceci n'est possible que si certains points sont *en contact* et leurs charges, non nulles, s'annihilent exactement. Le déterminant est alors nul.

Le résultat ci-dessus peut être dérivé en détail comme suit. Nous utilisons la représentation intégrale suivante de la fonction à deux points, valable pour $0 < D < 2$:

$$A(x, y) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{e^{i p \cdot (x-y)} - 1}{p^2}, \quad (4.49)$$

Nous obtenons, à la condition que $\sum_{i=0}^N k_i = 0$,

$$Q(\{k_i\}) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\left| \sum_{i=0}^N k_i e^{i p \cdot x_i} \right|^2}{p^2}. \quad (4.50)$$

La forme quadratique Q est donc positive sauf pour les configurations de points $\{x_i\}$ pour lesquelles on peut trouver un ensemble de charges $\{k_i\}$, non toutes nulles, telles que

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N k_i e^{i p \cdot x_i} &= 0 \quad \forall p \\ \Leftrightarrow \rho(x) &\equiv \sum_{i=0}^N k_i \delta^D(x - x_i) = 0 \quad \forall x \end{aligned} \quad (4.51)$$

Cette dernière condition signifie que la densité de charge $\rho(x)$ s'annule exactement, tandis que certaines des charges k_i restent non nulles.

4.3.2 Développement de produit d'opérateurs:

Nous venons d'identifier les configurations singulières, qui sont des sources potentielles de divergences, si la singularité correspondante n'est pas intégrable. Une configuration singulière peut se caractériser par un sous-ensemble \mathcal{P} (ou plusieurs) de $[0, N]$, de cardinal $P \equiv |\mathcal{P}| \geq 2$, de points i en contact ($x_i = x_j$ pour $i, j \in \mathcal{P}$). Pour pouvoir nous débarrasser d'une divergence éventuelle, nous avons besoin de connaître un équivalent du déterminant $\det_N(\Pi_0(x_i, x_j))$ dans la limite où les points i de \mathcal{P} tendent les uns vers les autres. Nous pourrions alors fabriquer des intégrales soustraites en soustrayant ces équivalents à l'intégrale de départ et rendre la théorie convergente.

Choisissons donc un point p dans \mathcal{P} (Si \mathcal{P} contient le point 0, on choisit alors $p = 0$.) et désignons par \mathcal{P}^* l'ensemble \mathcal{P} privé du point p . Supposons que $x_i \rightarrow x_p$ pour tout $i \in \mathcal{P}^*$. Nous avons alors la propriété

$$\left[\det_N (\Pi_0(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq N} \right]^{-\frac{d}{2}} \underset{\substack{x_i \rightarrow x_p \\ i \in \mathcal{P}^*}}{\sim} \left[\det_{P-1} (\Pi_p(x_i, x_j))_{i, j \in \mathcal{P}^*} \right]^{-\frac{d}{2}} \times \left[\det_{N-P+1} (\Pi_0(x_i, x_j))_{\substack{1 \leq i, j \leq N \\ i, j \notin \mathcal{P}^*}} \right]^{-\frac{d}{2}}. \quad (4.52)$$

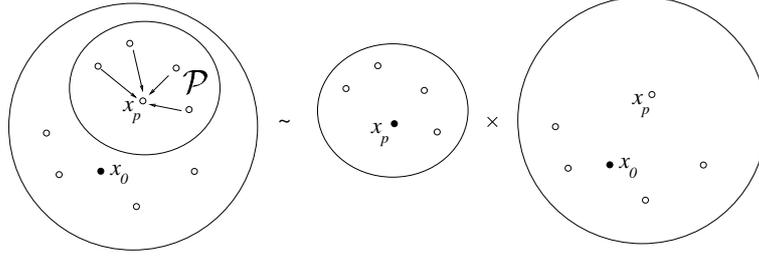


Fig. 12: Factorisation de l'intégrand quand les points de \mathcal{P}^* tendent vers le point p

On peut représenter graphiquement cette factorisation comme sur la figure 12. On peut également écrire de manière équivalente

$$\left\langle \prod_{i=1}^N \delta^d(\vec{r}(x_i)) \right\rangle_0 \underset{\substack{x_i \rightarrow x_p \\ i \in \mathcal{P}^*}}{\sim} \left\langle \prod_{i \in \mathcal{P}^*} \delta^d(\vec{r}(x_i)) \right\rangle_p \times \left\langle \prod_{\substack{i \in [1, N] \\ i \notin \mathcal{P}^*}} \delta^d(\vec{r}(x_i)) \right\rangle_0, \quad (4.53)$$

où l'indice 0 indique une valeur moyenne Gaussienne avec la condition $\vec{r}(0) = \vec{0}$ et l'indice p une valeur moyenne Gaussienne avec la condition $\vec{r}(x_p) = \vec{0}$. Une même propriété de factorisation pour le déterminant en présence d'un point externe x assure que

$$\left\langle \prod_{i=1}^N \delta^d(\vec{r}(x_i)) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}(x)} \right\rangle_0 \underset{\substack{x_i \rightarrow x_p \\ i \in \mathcal{P}^*}}{\sim} \left\langle \prod_{i \in \mathcal{P}^*} \delta^d(\vec{r}(x_i)) \right\rangle_p \times \left\langle \prod_{\substack{i \in [1, N] \\ i \notin \mathcal{P}^*}} \delta^d(\vec{r}(x_i)) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}(x)} \right\rangle_0. \quad (4.54)$$

Dans les deux cas (4.53) et (4.54), on a remplacé dans la valeur moyenne le produit des opérateurs $\delta^d(\vec{r}(x_i))$ pour $i \in \mathcal{P}$ par un seul opérateur $\delta^d(\vec{r}(x_p))$ dans la valeur moyenne $\langle \dots \rangle_0$ et factorisé un coefficient

$$C_{\mathcal{P}}(\{x_i - x_p\}_{i \in \mathcal{P}^*}) \equiv \left\langle \prod_{i \in \mathcal{P}^*} \delta^d(\vec{r}(x_i)) \right\rangle_p, \quad (4.55)$$

qui est une fonction *homogène* des $x_i - x_p$, $i \in \mathcal{P}^*$. Cette propriété, qui serait vraie quels que soient les autres opérateurs non contractés dans la valeur moyenne, s'écrit sous forme opératorielle

$$\prod_{i \in \mathcal{P}^*} \delta^d(\vec{r}(x_i)) \underset{i \in \mathcal{P}^*}{\underset{x_i \rightarrow x_p}{\sim}} C_{\mathcal{P}}(\{x_i - x_p\}_{i \in \mathcal{P}^*}) \delta^d(\vec{r}(x_p)) . \quad (4.56)$$

Cette formule est le premier terme d'un développement du produit d'opérateurs du membre de gauche comme une somme d'opérateurs locaux au point x_p . Nous avons extrait ici le terme dominant, correspondant au degré d'homogénéité le plus bas pour le coefficient associé.

Montrons maintenant la propriété de factorisation (4.52). Nous partons de la représentation intégrale du déterminant (membre de gauche de (4.52)):

$$\int \prod_{i=0}^N \frac{d^d \vec{k}_i}{(2\pi)^d} (2\pi)^d \delta^d \left(\sum_{i=0}^N \vec{k}_i \right) \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^N \vec{k}_i \cdot \vec{k}_j A(x_i, x_j) \right] . \quad (4.57)$$

Pour évaluer $\sum_{i,j=0}^N \vec{k}_i \cdot \vec{k}_j A(x_i, x_j)$, on sépare les paires de points (i, j) en quatre sous-ensembles:

$$\begin{aligned} \text{(I)} & \quad i \in \mathcal{P} \text{ et } j \in \mathcal{P} \\ \text{(II)} & \quad i \in \mathcal{P} \text{ et } j \notin \mathcal{P} \\ \text{(III)} & \quad i \notin \mathcal{P} \text{ et } j \in \mathcal{P} \\ \text{(IV)} & \quad i \notin \mathcal{P} \text{ et } j \notin \mathcal{P} \end{aligned} \quad (4.58)$$

On pose

$$x_i = y_p + \rho y_i \quad \text{pour } i \in \mathcal{P} , \quad (4.59)$$

avec $y_p = 0$. On a alors, selon les quatre cas

$$\begin{aligned} \text{(I)} & \quad A(x_i, x_j) = \rho^{2-D} A(y_i, y_j) \\ \text{(II)} & \quad A(x_i, x_j) = A(x_p, x_j) + \mathcal{O}(\rho) \\ \text{(III)} & \quad A(x_i, x_j) = A(x_i, x_p) + \mathcal{O}(\rho) \\ \text{(IV)} & \quad A(x_i, x_j) = A(x_i, x_j) \text{ inchangé ,} \end{aligned} \quad (4.60)$$

et donc

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=0}^N \vec{k}_i \cdot \vec{k}_j A(x_i, x_j) &= \rho^{2-D} \sum_{i,j \in \mathcal{P}} \vec{k}_i \cdot \vec{k}_j A(y_i, y_j) + \vec{K}_p \cdot \sum_{j \notin \mathcal{P}} \vec{k}_j A(x_p, x_j) \\ &+ \vec{K}_p \cdot \sum_{i \notin \mathcal{P}} \vec{k}_i A(x_i, x_p) + \sum_{i,j \notin \mathcal{P}} \vec{k}_i \cdot \vec{k}_j A(x_i, x_j) + \mathcal{O}(\rho) , \end{aligned} \quad (4.61)$$

où on a posé $\vec{K}_p = \sum_{i \in \mathcal{P}} \vec{k}_i$. On peut introduire \vec{K}_p dans l'intégrale (4.57) en écrivant

$$1 = \int d^d \vec{K}_p \delta^d \left(\sum_{i \in \mathcal{P}} \vec{k}_i - \vec{K}_p \right). \quad (4.62)$$

En faisant le changement de variable $\vec{k}_i = \rho^{\frac{D-2}{2}} \vec{q}_i$ pour $i \in \mathcal{P}$, on obtient pour l'intégrale

$$\begin{aligned} & \rho^{(P-1)\frac{D-2}{2}d} \int \prod_{i \in \mathcal{P}} \frac{d^d \vec{q}_i}{(2\pi)^d} (2\pi)^d \delta^d \left(\sum_{i \in \mathcal{P}} \vec{q}_i - \underbrace{\rho^{\frac{2-D}{2}} \vec{K}_p}_{\rightarrow 0} \right) \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j \in \mathcal{P}} \vec{q}_i \cdot \vec{q}_j A(y_i, y_j) \right] \\ & \prod_{i \notin \mathcal{P}} \frac{d^d \vec{k}_i}{(2\pi)^d} \frac{d^d \vec{K}_p}{(2\pi)^d} (2\pi)^d \delta^d (\vec{K}_p + \sum_{i \notin \mathcal{P}} \vec{k}_i) \\ & \times \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j \notin \mathcal{P}} \vec{k}_i \cdot \vec{k}_j A(x_i, x_j) - \frac{1}{2} \vec{K}_p \cdot \sum_{j \notin \mathcal{P}} \vec{k}_j A(x_p, x_j) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \vec{K}_p \cdot \sum_{i \notin \mathcal{P}} \vec{k}_i A(x_i, x_p) - \frac{1}{2} \vec{K}_p^2 \underbrace{A(x_p, x_p)}_{=0} + \underbrace{\mathcal{O}(\rho^{\frac{D}{2}})}_{\rightarrow 0} \right]. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Quand $\rho \rightarrow 0$, l'intégrale se factorise et donne précisément après un changement de variable inverse $\vec{q}_i = \rho^{\frac{2-D}{2}} \vec{k}_i$ le membre de droite de (4.52).

4.3.3 Opérateur de soustraction:

Dans les intégrales \mathcal{Z}_N et $\mathcal{Z}_N(\vec{k}, x)$, nous avons donc une singularité quand les x_i pour i dans un sous-ensemble \mathcal{P} tendent vers le même point x_p . La singularité est entièrement factorisée dans la fonction

$$C_{\mathcal{P}}(\{x_i - x_p\}_{i \in \mathcal{P}^*}) = \frac{1}{(2\pi)^{(P-1)\frac{d}{2}}} \left[\det(\Pi_p(x_i, x_j))_{i,j \in \mathcal{P}^*} \right]^{-\frac{d}{2}}, \quad (4.64)$$

qui est une fonction homogène des coordonnées relatives $x_i - x_p$ pour $i \in \mathcal{P}^*$ de degré

$$-\frac{d}{2}(2-D)(P-1) \quad (4.65)$$

où P est le cardinal de \mathcal{P} . Cette singularité donne lieu à une divergence si une fois *intégrée* sur les x_i pour $i \in \mathcal{P}^*$, ou de manière équivalente sur les $P-1$ coordonnées relatives $x_i - x_p$, on a un degré total négatif. Le degré total est simplement dans ce cas

$$(P-1)\left(D - \frac{2-D}{2}d\right) = (P-1)\epsilon(D, d). \quad (4.66)$$

La théorie est donc sans divergence pour $d < d_c(D)$ ($\epsilon(D, d) > 0$) et développe des divergences à $d = d_c(D)$ ($\epsilon(D, d) = 0$). De plus, on sait exactement comment supprimer ces divergences. Pour la divergence liée au sous ensemble \mathcal{P} , il suffit de considérer le diagramme soustrait

$$\int \prod_{i=1}^N d^D x_i \left\{ \left\langle \prod_{i \in \mathcal{P}} \delta^d(\vec{r}(x_i)) \dots \right\rangle_0 - \theta \left(X - \sum_{i \in \mathcal{P}^*} |x_i - x_p| \right) C_{\mathcal{P}}(\{x_i - x_p\}_{i \in \mathcal{P}^*}) \left\langle \delta^d(\vec{r}(x_p)) \dots \right\rangle_0 \right\}, \quad (4.67)$$

où les pointillés dénotent les autres opérateurs $\delta^d(\vec{r}(x_i))$ pour les points i qui ne sont pas dans \mathcal{P} et éventuellement l'opérateur $e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}(x)}$ ou tout autre opérateur externe. Une échelle de renormalisation X a été introduite.

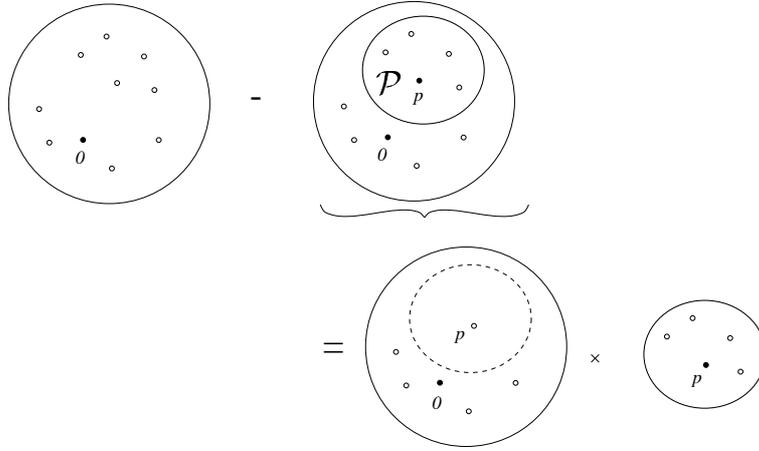


Fig. 13: Diagramme soustrait associé au sous ensemble \mathcal{P} . Le sous-ensemble \mathcal{P} est remplacé par un seul point p , et l'amplitude associée est factorisée. Une échelle de renormalisation X est sous-entendue pour ce dernier terme.

Le diagramme soustrait est représenté sur la figure 13.

Le “contreterme” soustrait est adapté au sous-ensemble \mathcal{P} . Que se passe-t’il maintenant si les points x_i d’un autre sous-ensemble \mathcal{Q} tendent vers un même point x_q . Si \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont disjoints, il suffit de considérer l’amplitude soustraite

$$\begin{aligned} & \text{Diagram 1} - \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} \\ & = \text{Diagram 5} \times \text{Diagram 6} \times \text{Diagram 7} \end{aligned} \quad (4.68)$$

The equation shows a sequence of diagrams. The first row has four diagrams: a large circle, a large circle with a smaller circle labeled \mathcal{P} inside, a large circle with a smaller circle labeled \mathcal{Q} inside, and a large circle with two smaller circles labeled \mathcal{P} and \mathcal{Q} inside. The second row shows the result of the subtraction: a large circle with two dashed inner circles labeled p and q , multiplied by a small circle labeled \mathcal{P} , multiplied by a small circle labeled \mathcal{Q} .

Si \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont emboîtés (par exemple $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$, il suffit de considérer l'amplitude soustraite

$$(4.69)$$

Notons que nous avons le choix du point p , soit à l'extérieur, soit à l'intérieur de \mathcal{Q} . Dans ce dernier cas, nous choisirons toujours le même point $p = q$ que pour \mathcal{Q} . Si \mathcal{P} et \mathcal{Q} ne sont ni disjoints, ni emboîtés, on peut tout de même utiliser des contretermes impliquant uniquement des diagrammes disjoints ou emboîtés. Si $q \in \mathcal{P}$, la combinaison utilisant des diagrammes emboîtés

$$(4.70)$$

reste finie quand on contracte soit \mathcal{P} , soit \mathcal{Q} . Si $q \notin \mathcal{P}$, c'est la combinaison utilisant des diagrammes disjoints

$$(4.71)$$

qui reste finie.

Au total, il suffit de soustraire tous les contretermes fabriqués avec des sous-diagrammes (en nombre arbitraire) disjoints ou emboîtés. On appelle "forêt" de l'ensemble $[0, N]$ tout ensemble de sous-ensembles de $[0, N]$ tel que deux éléments de la forêt sont soit disjoints, soit emboîtés. Par convention, l'ensemble vide est considéré comme une forêt.

On définit l'amplitude soustraite comme une somme sur toutes les forêts de sous-ensembles \mathcal{P}_l à au moins deux éléments ($|\mathcal{P}_l| \geq 2$) de $[0, N]$

$$\mathcal{Z}_N^S = \int \prod_{i=1}^N d^D x_i \sum_{\substack{\mathcal{F} \\ \text{forêt de } [0, N]}} (-1)^{|\mathcal{F}|} \mathbf{C}_{\mathcal{F}}, \quad (4.72)$$

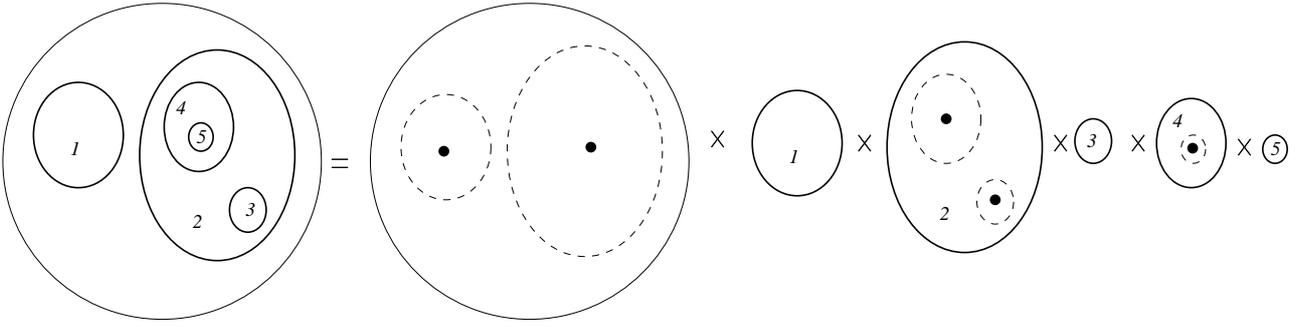


Fig. 14: Un exemple de contraction pour une forêt à 5 éléments

où $|\mathcal{F}|$ est le cardinal de la forêt et avec pour chaque forêt un contreterme $\mathbf{C}_{\mathcal{F}}$ obtenu en contractant successivement les différents sous-ensembles appartenant à la forêt considérée. Un exemple de contraction pour une forêt à 5 éléments est donné sur la figure 14.

Partant de $N + 1$ points dans le diagramme initial (N points d'intégration plus le points x_0), les factorisations successives pour une forêt donnée réduisent le nombre de points à un nombre $P + 1$ (avec $P \leq N$) égal au nombre de points non contractés plus le nombre de *plus grands* sous-ensembles (c'est à dire des sous-ensembles non inclus dans d'autres sous-ensembles pour la forêt considérée). Après factorisation, on refabrique une amplitude \mathcal{Z}_P de la théorie de départ par intégration. On peut regrouper les forêts qui ont *les mêmes plus grands* sous-ensembles $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$ et ne diffèrent que par des sous-ensembles emboîtés plus "profonds". Ces forêts donnent une contribution totale

$$\mathcal{Z}_P \prod_{i=1}^k \left(-B_{|\mathcal{P}_i|}^{(X)} \right) \quad (4.73)$$

où le signe $-$ est introduit pour refabriquer le facteur $(-1)^{|\mathcal{F}|}$ dans (4.72) et où $B_{|\mathcal{P}_i|}^{(X)}$ somme les contributions correspondant aux diverses sous-forêts de \mathcal{P}_i . La somme inclut toutes les sous-forêts de sous-ensembles (à au moins de éléments) de \mathcal{P}_i qui ne contiennent pas \mathcal{P}_i lui-même comme plus grand élément. La quantité $B_{|\mathcal{P}_i|}^{(X)}$ ne dépend que du cardinal de \mathcal{P}_i , et bien sûr de l'échelle de renormalisation X . On a $P = N - \sum_{i=1}^k (|\mathcal{P}_i| - 1)$. Dans (4.73), chacun des \mathcal{P}_i a un cardinal au moins égal à deux. On peut compléter le produit par tous les sous-ensembles à un point formés pour chacuns des $N + 1 - \sum_{i=1}^k |\mathcal{P}_i|$ points n'appartenant à aucun des \mathcal{P}_i . La formule (4.73) reste valable, avec maintenant $k = P + 1$ et en posant

$$B_1^{(X)} \equiv -1 . \quad (4.74)$$

En utilisant cette formule, on trouve que

$$\mathcal{Z}_N^S = \sum_{P=0}^N \mathcal{Z}_P \underbrace{\frac{1}{(P+1)!}}_{\substack{\text{échange des} \\ P+1 \text{ ensembles}}} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_{P+1} \geq 1 \\ \sum_{i=1}^{P+1} n_i = N+1}} \underbrace{\frac{(N+1)!}{\prod_{i=1}^{P+1} n_i!}}_{\substack{\text{placement des points} \\ \text{dans les sous-ens.}}} \prod_{i=1}^{P+1} \left(-B_{n_i}^{(X)} \right). \quad (4.75)$$

Ici n_i dénote le nombre de points dans le i ème sous-ensemble. Dans ces conditions, on a

$$\begin{aligned} \sum_{N=0}^{+\infty} \frac{(-b_R)^{N+1}}{(N+1)!} \mathcal{Z}_N^S &= \sum_{N=0}^{+\infty} (-b_R)^{N+1} \sum_{P=0}^N \frac{\mathcal{Z}_P}{(P+1)!} \sum_{\substack{\{n_i \geq 1\} \\ \sum_{i=1}^{P+1} n_i = N+1}} \frac{1}{\prod_{i=1}^{P+1} n_i!} \prod_{i=1}^{P+1} \left(-B_{n_i}^{(X)} \right) \\ &= \sum_{P=0}^{+\infty} \frac{\mathcal{Z}_P}{(P+1)!} \sum_{N \geq P} \sum_{\substack{\{n_i \geq 1\} \\ \sum_{i=1}^{P+1} n_i = N+1}} \prod_{i=1}^{P+1} \left(\frac{(-b_R)^{n_i} \left(-B_{n_i}^{(X)} \right)}{n_i!} \right) \\ &= \underbrace{\sum_{\{n_i \geq 1\}} \text{sans contrainte de somme}}_{\substack{\text{sans contrainte} \\ \text{de somme}}} \prod_{i=1}^{P+1} \left(\frac{(-b_R)^{n_i} \left(-B_{n_i}^{(X)} \right)}{n_i!} \right) \\ &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-b_R)^n \left(-B_n^{(X)} \right)}{n!} \right)^{P+1} \\ &= \sum_{P=0}^{+\infty} \frac{(-b)^{P+1}}{(P+1)!} \mathcal{Z}_P, \end{aligned} \quad (4.76)$$

en choisissant

$$\begin{aligned} b &= - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-b_R)^n \left(-B_n^{(X)} \right)}{n!} \\ &= b_R + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-b_R)^n B_n^{(X)}}{n!}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Le lien entre une quantité renormalisée

$$I_{b_R}^R = \sum_{N=0}^{+\infty} \frac{(-b_R)^N}{N!} \mathcal{Z}_N^S \quad (4.78)$$

et la quantité non renormalisée I_b correspondante est alors simplement au vu de (4.76):

$$I_{b_R}^R = \frac{db}{db_R} I_b. \quad (4.79)$$

La constante de passage $\frac{db}{db_R}$, qui n'a pas vraiment d'importance, est légèrement différente du cas du polymère traité au chapitre 2. Ceci vient de ce que les quantités I_b sont elles-mêmes un peu différentes de ce qu'elles étaient au chapitre 2, en ce sens que le point x_0 fixé à l'origine dans \mathbb{R}^d est maintenant à l'intérieur du polymère (infini) et non plus à une extrémité.

Pour inverser la formule (4.77), on remarque que si l'on part de l'amplitude non soustraite

$$\mathcal{Z}_N^{(X)} \equiv \frac{1}{(2\pi)^{\frac{Nd}{2}}} \int \prod_{i=1}^N d^D x_i \theta \left(X - \sum_{i=1}^N |x_i - x_0| \right) \left[\det (\Pi_0(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq N} \right]^{-\frac{d}{2}}, \quad (4.80)$$

(avec $\mathcal{Z}_0^{(X)} = 1$) correspondant au cas où il n'y a pas de points externes *et* où on a mis artificiellement une limitation X comme pour les contretermes, on a une amplitude soustraite $\mathcal{Z}_N^{(X)S}$ correspondante qui est *nulle* dès que $N \geq 1$ car toute forêt ne contenant pas le sous-ensemble $[0, N]$ comme plus grand élément donne (à cause de la limitation X artificielle) le même résultat (au signe près) que la forêt où le sous-ensemble $[0, N]$ a été rajouté. On a alors

$$\begin{aligned} b_R &= - \sum_{N=0}^{+\infty} \frac{(-b_R)^{N+1}}{(N+1)!} \mathcal{Z}_N^{(X)S} \\ &= - \sum_{N=0}^{+\infty} \frac{(-b)^{N+1}}{(N+1)!} \mathcal{Z}_N^{(X)} \\ &= b - \sum_{N=1}^{+\infty} \frac{(-b)^{N+1}}{(N+1)!} \mathcal{Z}_N^{(X)}. \end{aligned} \quad (4.81)$$

4.4. Calculs à une boucle

Au premier ordre en b , on a

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_1^{(X)} &= \int_{|x_1| < X} d^D x_1 (2\pi \Pi_0(x_1, x_1))^{-\frac{d}{2}} \\ &= S_D \int_0^X d|x_1| |x_1|^{D-1} \left(\frac{4\pi|x_1|^{2-D}}{(2-D)S_D} \right)^{-\frac{d}{2}} \\ &= S_D^{1+\frac{d}{2}} \left(\frac{2-D}{4\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \frac{X^\epsilon}{\epsilon}. \end{aligned} \quad (4.82)$$

et donc

$$\begin{aligned} b_R &= b - \frac{1}{2} \mathcal{Z}_1^{(X)} b^2 + \mathcal{O}(b^3) \\ &= b - \frac{1}{2} S_D^{1+\frac{d}{2}} \left(\frac{2-D}{4\pi} \right)^{\frac{d}{2}} b^2 + \mathcal{O}(b^3) . \end{aligned} \quad (4.83)$$

Pour $D = 1$, la formule ci dessus donne

$$b_R = b - \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{X^\epsilon}{\epsilon} b^2 + \mathcal{O}(b^3) . \quad (4.84)$$

Nous avons vu que la formule exacte est en fait

$$\begin{aligned} b_R &= \frac{b}{1 + \frac{bX^\epsilon}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \epsilon}} \\ &= b - \sum_{N=1}^{+\infty} (-b)^{N+1} \left(\frac{\mathcal{Z}_1^{(X)}}{2} \right)^N , \end{aligned} \quad (4.85)$$

qui est compatible avec le premier ordre (4.84) et fixe de plus les $\mathcal{Z}_N^{(X)}$ pour $N > 1$ à la valeur

$$\mathcal{Z}_N^{(X)} = \frac{(N+1)!}{2^N} \left(\mathcal{Z}_1^{(X)} \right)^N . \quad (4.86)$$

Cette formule, exacte à $D = 1$, n'est qu'approchée à D quelconque. La quantité $\mathcal{Z}_1^{(X)}$ a un pôle simple en ϵ . La quantité $\mathcal{Z}_N^{(X)}$ a un pôle dominant d'ordre N en ϵ et des pôles d'ordres inférieurs. La formule (4.86) revient à remplacer $\mathcal{Z}_N^{(X)}$ par son pôle dominant. Celui-ci est obtenu quand les distances entre points tendent vers zéro *de manière récursive*. On peut découper le domaine d'intégration de $\mathcal{Z}_N^{(X)}$ en "secteurs", qui précisent la hiérarchie des distances entre points. Un secteur est un ensemble particulier de $N + 1$ partitions $\mathcal{S}_0, \dots, \mathcal{S}_N$ de $[0, N]$ construit comme suit:

- La partition \mathcal{S}_0 est formée des $N + 1$ sous-ensembles à un point $\{i\}$ pour i de 0 à N .
- La partition \mathcal{S}_1 est obtenue à partir de \mathcal{S}_0 en réunissant les deux sous-ensembles $\{i\}$ et $\{j\}$ des deux points i et j ayant la distance minimale parmi toutes les paires de points.
- On construit la partition \mathcal{S}_{k+1} à partir de \mathcal{S}_k en cherchant la paire de points n'appartenant pas au même sous-ensemble de \mathcal{S}_k et ayant la plus petite distance relative. Pour former \mathcal{S}_{k+1} , on réunit les deux sous-ensembles de \mathcal{S}_k contenant ces deux points en un seul sous-ensemble.
- Après N itérations, \mathcal{S}_N est formé du seul sous-ensemble $[0, N]$.

Dans chaque secteur, on peut utiliser au lieu des N coordonnées d'intégration x_i , ($i = 1, \dots, N$) un ensemble de N coordonnées relatives y_k ($k = 1, \dots, N$), y_k étant la coordonnée relative entre deux points (arbitraires) pris dans chacun des deux sous-ensembles réunis à l'étape k du processus de construction du secteur. Chaque secteur donne la même contribution au pôle dominant, d'ordre N en ϵ , obtenu en faisant tendre récursivement chacun des y_k vers zéro. Dans cette limite, on peut remplacer l'intégrand dans $\mathcal{Z}_N^{(X)}$ par son équivalent factorisé en produit d'intégrands à deux points. On obtient par secteur le résultat

$$\int_{0 < |y_1| < |y_2| < \dots < |y_N| < X} \prod_{k=1}^N \left(d^D y_k (2\pi \Pi_0(y_k, y_k))^{-\frac{d}{2}} \right) = \frac{1}{N!} \left(\mathcal{Z}_1^{(X)} \right)^N . \quad (4.87)$$

Le nombre de secteurs est donné par le produit de coefficients du binôme

$$\begin{aligned} C_{N+1}^2 C_N^2 C_{N-1}^2 \dots C_3^2 C_2^2 &= \left(\frac{(N+1)!}{2!(N-1)!} \right) \left(\frac{(N)!}{2!(N-2)!} \right) \dots \left(\frac{3!}{2!1!} \right) \\ &= \frac{N!(N+1)!}{2^N} . \end{aligned} \quad (4.88)$$

Au total, on trouve bien pour le pôle d'ordre N en ϵ la valeur $\frac{(N+1)!}{2^N} \left(\mathcal{Z}_1^{(X)} \right)^N$ annoncée. Le remplacement à D quelconque de $b_R = b - \frac{1}{2} \mathcal{Z}_1^{(X)} b^2 + \mathcal{O}(b^3)$ par

$$b_R = \frac{b}{1 + b \frac{\mathcal{Z}_1^{(X)}}{2}} + \mathcal{O}(b^3) \quad (4.89)$$

n'est donc pas innocent et revient à resommer les divergences dominantes. En terme de la constante de couplage sans dimension

$$g \equiv b_R X^\epsilon \left(\frac{(2-D)S_D}{4\pi} \right)^{\frac{d}{2}} , \quad (4.90)$$

la formule (4.89) correspond au résultat de l'intégration de l'équation $X \frac{d}{dX} g = W(g)$ pour une fonction de Wilson

$$W(g) = \epsilon g - \frac{S_D}{2} g^2 + \mathcal{O}(g^3, \epsilon g^2) . \quad (4.91)$$

Il est facile de voir que c'est la finitude des coefficients de la fonction de Wilson quand $\epsilon = 0$ qui implique la forme particulière (4.89) et donc a posteriori la forme particulière du pôle dominant de $\mathcal{Z}_N^{(X)}$. Les pôles sous-dominants apparaissent en fait aux ordres supérieurs dans la fonction de Wilson.

Pour conclure, mentionnons que les propriétés physiques de la membrane en interaction avec une impureté, selon le signe de b et selon que d est plus grand ou plus petit que $d_c(D)$, sont qualitativement les mêmes que dans le cas du polymère dans tout le domaine $0 \leq D \leq 2$.

5. Membranes auto-évitant

5.1. Le modèle, pertinence de l'interaction

Nous allons terminer ce cours par l'étude des membranes auto-évitant. Généralisant le modèle d'Edwards au cas d'un objet D -dimensionnel, nous associons à une configuration $\vec{r}(x)$ de la membrane le poids

$$\exp \left[-\frac{1}{2} \int d^D x (\nabla_x \vec{r}(x))^2 - \frac{b}{2} \int d^D x d^D x' \delta^d(\vec{r}(x) - \vec{r}(x')) \right]. \quad (5.1)$$

Ici aussi, nous considérerons pour simplifier le cas d'une membrane infinie. Par simple analyse dimensionnelle, nous avons $[r] = \frac{2-D}{2}[x]$ et donc $[b] = -\epsilon(D, d)[x]$ avec

$$\epsilon(D, d) = 2D - \frac{2-D}{2}d, \quad (5.2)$$

et une dimension critique supérieure

$$d_c(D) = \frac{4D}{2-D}. \quad (5.3)$$

Notons que pour $D = 1$, la définition de $\epsilon(1, d) = 2 - \frac{d}{2}$ diffère de la définition du chapitre 3 par un facteur 2 purement conventionnel.

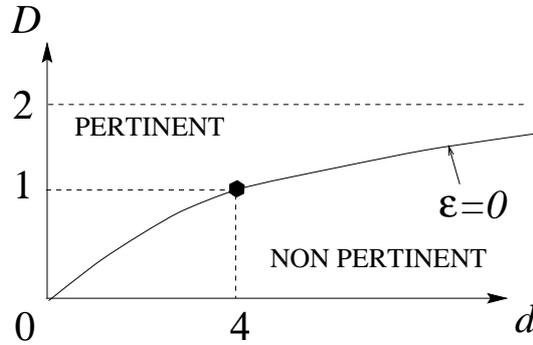


Fig. 15: Pertinence de l'interaction d'auto-évitement

L'interaction est pertinente pour $\epsilon(D, d) \geq 0$, c'est à dire $d \leq d_c(D)$, comme indiqué sur la figure 15. Ici encore, nous travaillerons dans un premier temps avec $D < 2$. Nous calculerons par exemple au premier ordre la valeur de l'exposant $\nu(D, d)$ pour la taille de la membrane. La formule donnant $\nu(D, d)$ n'est pas singulière à $D = 2$. La quantité $\nu(2, d)$ s'obtiendra alors par continuité.

5.2. Flory, méthode variationnelle

Nous pouvons répéter l'argument de Flory pour le calcul de l'exposant ν , appliqué maintenant au cas d'un objet D -dimensionnel. Pour une membrane de taille linéaire interne L occupant un volume dans \mathbb{R}^d de taille linéaire R , l'énergie élastique se comporte comme

$$L^D \left(\frac{R}{L} \right)^2 = L^{D-2} R^2, \quad (5.4)$$

tandis que l'énergie de contact se comporte comme

$$L^{2D} R^{-d}. \quad (5.5)$$

En minimisant la somme de ces deux termes par rapport à R à L fixé, nous trouvons que

$$R \propto L^{\nu_{\text{Flory}}(D,d)}, \quad (5.6)$$

avec

$$\nu_{\text{Flory}}(D,d) = \frac{D+2}{d+2}. \quad (5.7)$$

La condition $\frac{2-D}{2} \leq \nu(D,d) \leq 1$ fixe le domaine de validité de cette formule à $D \leq d \leq d_c(D)$. Pour $D=2$ et $d=3$, nous trouvons $\nu_{\text{Flory}}(2,3) = \frac{4}{5}$.

Nous mentionnons également ici le résultat variationnel généralisé à D dimensions:

$$\nu_{\text{Var.}}(D,d) = \frac{2D}{d}, \quad (5.8)$$

valable pour $2D \leq d \leq d_c(D)$.

5.3. Diagrammatique

Nous allons nous intéresser à calculer en perturbation la quantité

$$\begin{aligned} I_b(\vec{k}, x, x') &= \langle e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}(x) - \vec{r}(x'))} \rangle_b \\ &= \sum_{N=0}^{+\infty} \frac{(-b)^N}{N!} \mathcal{Z}_N(\vec{k}, x, x'), \end{aligned} \quad (5.9)$$

où

$$\mathcal{Z}_0(\vec{k}, x, x') = \exp \left[-\vec{k}^2 \frac{|x - x'|^{2-D}}{(2-D)S_D} \right], \quad (5.10)$$

et où $\mathcal{Z}_N(\vec{k}, x, x')$ est donné pour $N \geq 1$ par

$$\mathcal{Z}_N(\vec{k}, x, x') = \frac{1}{2^N} \int \prod_{i=1}^{2N} d^D x_i \langle e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}(x) - \vec{r}(x'))} \prod_{a=1}^N \phi(x_{2a-1}, x_{2a}) \rangle \quad (5.11)$$

avec une moyenne Gaussienne. Ici, l'opérateur *bi-local* $\phi(x, x')$ dénote simplement

$$\phi(x, x') \equiv \delta^d(\vec{r}(x) - \vec{r}(x')) \quad (5.12)$$

de sorte que

$$\prod_{a=1}^N \phi(x_{2a-1}, x_{2a}) = \int \prod_{i=1}^{2N} \frac{d^d \vec{k}_i}{(2\pi)^d} \prod_{a=1}^N C_a(\{\vec{k}_i\}) \prod_{i=1}^{2N} e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}(x_i)} , \quad (5.13)$$

avec

$$C_a(\{\vec{k}_i\}) = (2\pi)^d \delta^d(\vec{k}_{2a-1} + \vec{k}_{2a}) . \quad (5.14)$$

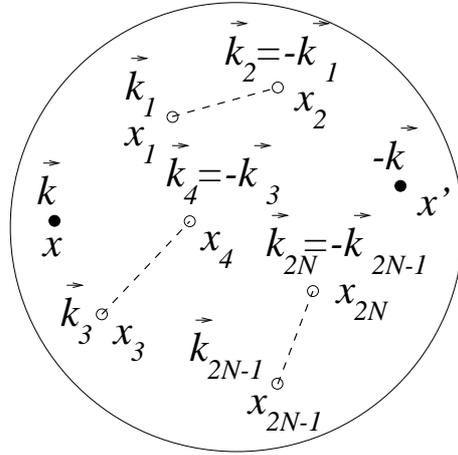


Fig. 16: La représentation diagrammatique de l'amplitude $\mathcal{Z}_N(\vec{k}, x, x')$

Nous représenterons l'amplitude $\mathcal{Z}_N(\vec{k}, x, x')$ par le diagramme de la figure 16. Si nous réutilisons l'image électrostatique où un opérateur $e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}(x_i)}$ est vu comme une charge \vec{k}_i au point x_i , nous pouvons dire que les contraintes C_a regroupent les charges en N *dipôles*.

Pour $\vec{k} = \vec{0}$, nous pouvons utiliser la neutralité *globale* $\sum_{i=1}^{2N} \vec{k}_i = \vec{0}$ pour écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_N(\vec{0}) &= \frac{1}{2^N} \int \prod_{i=1}^{2N} \left(d^D x_i \frac{d^d \vec{k}_i}{(2\pi)^d} \right) \prod_{a=1}^N C_a(\{\vec{k}_i\}) \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2N} \vec{k}_i \cdot \vec{k}_j A(x_i, x_j) \right] \\ &= \frac{1}{2^N} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{Nd}{2}}} \int \prod_{i=1}^{2N} d^D x_i (\Delta(\{x_i\}))^{-\frac{d}{2}} , \end{aligned} \quad (5.15)$$

où $\Delta(\{x_i\})$ est le déterminant associé à la forme quadratique

$$Q(\{\vec{k}_i\}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2N} k_i k_j A(x_i, x_j) \quad (5.16)$$

restreinte au sous espace des k_i tels que $k_{2a-1} + k_{2a} = 0$ ($a = 1, \dots, N$), qui n'est autre que l'énergie Coulombienne de l'ensemble de dipôles. Nous pouvons écrire plus explicitement

$$\Delta(\{x_i\}) = \det (\Pi_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N} , \quad (5.17)$$

où

$$\Pi_{ij} \equiv A(x_{2i}, x_{2j}) + A(x_{2i-1}, x_{2j-1}) - A(x_{2i}, x_{2j-1}) - A(x_{2i-1}, x_{2j}) . \quad (5.18)$$

Pour $\vec{k} \neq \vec{0}$, la formule devient

$$\mathcal{Z}_N(\vec{k}, x, x') = \frac{1}{2^N} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{Nd}{2}}} \int \prod_{i=1}^{2N} d^D x_i (\Delta(\{x_i\}))^{-\frac{d}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \vec{k}^2 \frac{P(\{x_i\}, x, x')}{\Delta(\{x_i\})} \right] , \quad (5.19)$$

où

$$P(\{x_i\}, x, x') \equiv \det (\Pi_{i,j})_{0 \leq i,j \leq N} \quad (5.20)$$

avec la convention

$$\begin{aligned} \Pi_{00} &= A(x, x) + A(x', x') - A(x, x') - A(x', x) \\ \Pi_{i0} &= A(x_{2i-1}, x) + A(x_{2i}, x') - A(x_{2i-1}, x') - A(x_{2i}, x) \\ \Pi_{0j} &= A(x, x_{2j-1}) + A(x', x_{2j}) - A(x', x_{2j-1}) - A(x, x_{2j}) . \end{aligned} \quad (5.21)$$

5.4. Renormalisation

5.4.1 Configurations singulières:

Le gaz de dipôles étant en particulier globalement neutre, nous pouvons appliquer le théorème de Schönberg. La forme quadratique $Q(\{k_i\})$ restreinte au gaz de dipôle est positive pour $0 < D < 2$, ce qui implique $\Delta(\{x_i\}) \geq 0$. De plus $\Delta(\{x_i\}) = 0$ pour une configuration donnée de x_i si et seulement si on peut trouver des charges k_i non toutes nulles telles que la densité de charge $\rho(x) = \sum_i k_i \delta^D(x - x_i)$ soit nulle. Il faut clairement de nouveau que certains des points x_i soient en contact et aient des charges qui s'annihilent. La nouveauté vient ici de ce que les charges doivent de plus être arrangées en dipôles, ce qui introduit des corrélations supplémentaires. L'agrégation de dipôles forme ce que nous appellerons des "molécules". Les extrémités x_i des dipôles qui viennent en

contact forment ce que nous appellerons des “atomes”, tandis que les liens dipolaires lient ces atomes précisément en molécules. Il est facile de voir que pour conserver une densité de charge nulle, c’est à dire conserver des atomes neutres, une molécule doit de plus former une boucle de dipôles. Les dipôles de la molécule qui n’appartiennent pas à une boucle (branches mortes) ont automatiquement leur charge nulle et ne contribuent pas à la singularité. Nous pouvons également nous limiter au cas de molécules connexes, les singularités associées à différentes parties connexes étant complètement factorisées. En conclusion, nous associons une singularité à une molécule connexe sans branches mortes.

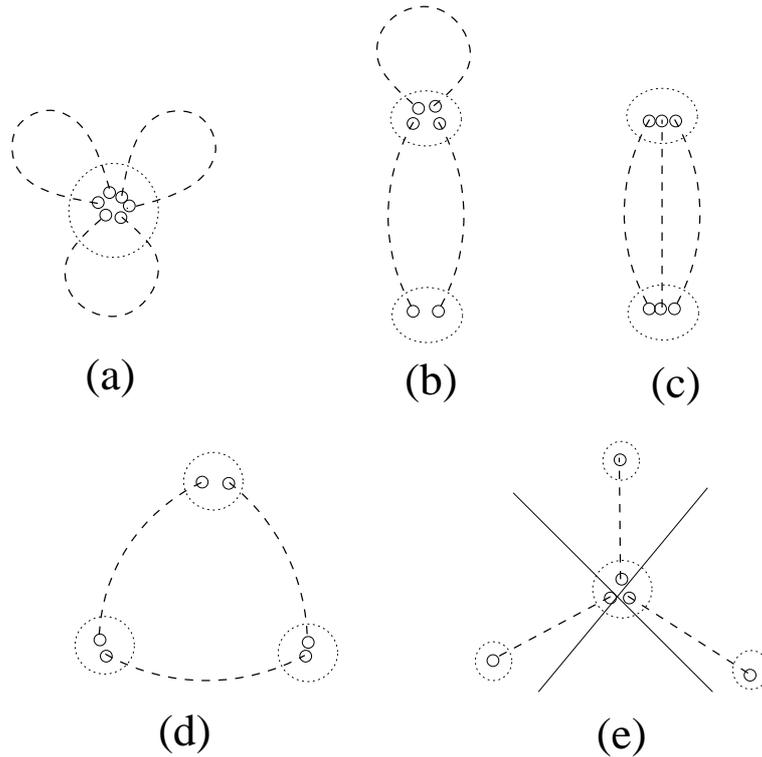


Fig. 17: Exemple de configuration singulières pour $N = 3$ dipôles, avec respectivement 1 (a), 2 (b), (c) et 3 (d) atomes. La configuration (e) à 4 atomes n’est pas singulière.

La figure 17 montre des exemples de configurations singulières à $N = 3$ dipôles.

Considérons donc une molécule \mathcal{M} formée de L atomes $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_L$. Chaque \mathcal{P}_l est un sous-ensemble de $[1, 2N]$. Nous nous intéressons à la limite où les points x_i pour $i \in \mathcal{P}_l$ tendent vers le même point x_{p_l} où p_l est un élément arbitraire de \mathcal{P}_l . Nous désignons enfin par \mathcal{L} l’ensemble des dipôles a de $[1, N]$ (un dipôle a représente la paire (x_{2a-1}, x_{2a})) appartenant à la molécule. Comme dans le problème de l’interaction avec

une impureté, nous avons pour le produits d'opérateurs bi-locaux $\phi(x_{2a-1}, x_{2a})$ pour $a \in \mathcal{L}$ un développement autour de la configuration singulière qui s'écrit:

$$\prod_{a \in \mathcal{L}} \phi(x_{2a-1}, x_{2a}) \underset{\substack{x_i \rightarrow x_{p_l} \\ i \in \mathcal{P}_l}}{\sim} C_{\mathcal{M}} \left(\{x_i - x_{p_l}\}_{i \in \mathcal{P}_l^*} \right) \Phi_L(x_{p_1}, x_{p_2}, \dots, x_{p_L}) . \quad (5.22)$$

En d'autres termes, on peut remplacer dans la limite singulière un produit d'opérateurs bi-locaux par un seul opérateur $\Phi_L(x_{p_1}, x_{p_2}, \dots, x_{p_L})$ multi-local à L corps, localisé aux points x_{p_1}, \dots, x_{p_L} vers lesquels les atomes sont contractés, multiplié par un coefficient $C_{\mathcal{M}}$ dépendant de la forme particulière de la molécule et faisant intervenir uniquement les positions relatives au sein de chacun des atomes, et pas entre atomes.

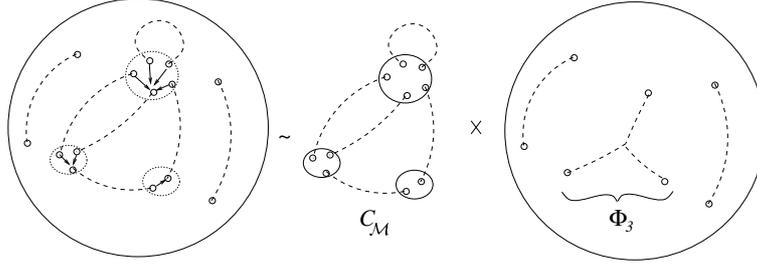


Fig. 18: Factorisation d'un produit d'opérateurs bi-locaux au voisinage d'une configuration singulière (ici une molécule à 3 atomes) en un opérateur multi-local (ici à 3 corps) et un coefficient dépendant de la structure précise de la molécule

Une représentation diagrammatique de la formule (5.22) est donnée sur la figure 18.

Que valent l'opérateur Φ_L et le coefficient $C_{\mathcal{M}}$? Plutôt que de donner la dérivation pas à pas de la formule (5.22), nous pouvons directement trouver Φ_L en nous appuyant sur les résultats du calcul dans le cas d'une impureté. Nous avons vu dans ce cas que chaque ensemble \mathcal{P} est remplacé par une seule charge $\vec{K}_p = \sum_{i \in \mathcal{P}} \vec{k}_i$ égale à la charge totale du sous-ensemble, concentrée au point x_p . Ici, à cause de la neutralité de chacun des dipôles, on a une condition de neutralité pour l'ensemble des charges K_{p_l} associées à chacun des atomes \mathcal{P}_l , à savoir

$$\sum_{l=1}^L \vec{K}_{p_l} = \vec{0} . \quad (5.23)$$

Au total, l'opérateur Φ_L fabriqué par la contraction est simplement

$$\begin{aligned} \Phi_L(x_{p_1}, x_{p_2}, \dots, x_{p_L}) &= \int \prod_{l=1}^L \frac{d^d \vec{K}_{p_l}}{(2\pi)^d} (2\pi)^d \delta^d \left(\sum_{l=1}^L \vec{K}_{p_l} \right) e^{i \vec{K}_{p_l} \cdot \vec{r}(x_{p_l})} \\ &= \int d^d \vec{r} \prod_{l=1}^L \delta^d(\vec{r} - \vec{r}(x_{p_l})) . \end{aligned} \quad (5.24)$$

L'opérateur Φ_L n'est rien d'autre que l'interaction de contact à L corps. Pour $L = 1, 2, 3$, nous avons

$$\begin{aligned}
\Phi_1(x_{p_1}) &= 1 \\
\Phi_2(x_{p_1}, x_{p_2}) &= \delta^d(\vec{r}(x_{p_1}) - \vec{r}(x_{p_2})) \\
&= \phi(x_{p_1}, x_{p_2}) \\
\Phi_3(x_{p_1}, x_{p_2}, x_{p_3}) &= \delta^d(\vec{r}(x_{p_1}) - \vec{r}(x_{p_2})) \delta^d(\vec{r}(x_{p_2}) - \vec{r}(x_{p_3})) .
\end{aligned} \tag{5.25}$$

En ce qui concerne le coefficient $C_{\mathcal{M}}$, nous avons vu dans le cas de l'impureté que nous fabriquons une contrainte de neutralité $\sum_{i \in \mathcal{P}} \vec{k}_i = \vec{0}$ par sous-ensemble \mathcal{P} et ne retenons que les fonctions à deux points $A(x_i, x_j)$ pour $i, j \in \mathcal{P}$. Dans notre cas, nous fabriquerons donc, en plus des conditions de neutralité de chaque dipôle, une condition de neutralité par atome \mathcal{P}_l et ne retiendrons que les fonctions à deux points $A(x_i, x_j)$ entre paires de points du *même* atome. Nous obtenons donc la formule générale

$$\begin{aligned}
C_{\mathcal{M}}(\{x_i - x_{p_l}\}_{i \in \mathcal{P}_l^*}) &= \int \prod_{l=1}^L \left\{ \prod_{i \in \mathcal{P}_l} \frac{d^d \vec{k}_i}{(2\pi)^d} \right\} \prod_{l=1}^{L'} (2\pi)^d \delta^d \left(\sum_{i \in \mathcal{P}_l} \vec{k}_i \right) \prod_{a \in \mathcal{L}} (2\pi)^d \delta^d \left(\vec{k}_{2a-1} + \vec{k}_{2a} \right) \\
&\quad \times \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{l=1}^L \left(\sum_{i, j \in \mathcal{P}_l} \vec{k}_i \cdot \vec{k}_j A(x_i, x_j) \right) \right] .
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Dans cette formule, la notation Π' indique que le produit est effectué sur tous les atomes sauf un (arbitraire). La neutralité de tous les dipôles plus celle de tous les atomes sauf un garantit en effet la neutralité du dernier atome. La condition manquante, réécrite de manière équivalente comme une condition de neutralité globale de la molécule, est précisément celle qui a été utilisée au préalable dans la formule donnant Φ_L sous la forme (5.23). C'est pourquoi elle n'apparaît pas dans $C_{\mathcal{M}}$.

C'est le coefficient $C_{\mathcal{M}}$ qui contient la singularité. Pour savoir si on a effectivement une divergence, il faut maintenant regarder le degré d'homogénéité de ce coefficient, une fois intégré sur l'ensemble des positions relatives $y_i = x_i - x_{p_l}$ pour $i \in \mathcal{P}_l^*$ pour tous les atomes. Ce degré est simplement

$$\omega_{\mathcal{M}} = D \left(\sum_{l=1}^L \underbrace{(|\mathcal{P}_l| - 1)}_{\text{coordonnées relatives}} \right) - \frac{2-D}{2} d \left(\sum_{l=1}^L \underbrace{(|\mathcal{P}_l| - 1)}_{\text{neutralité de l'atome}} - |\mathcal{L}| + \underbrace{1}_{\text{condition manquante}} \right) . \tag{5.27}$$

En utilisant

$$2|\mathcal{L}| = \sum_{i=1}^L |\mathcal{P}_i| , \quad (5.28)$$

nous obtenons

$$\omega_{\mathcal{M}} = (|\mathcal{L}| - L + 1) \epsilon(D, d) + (L - 2)D . \quad (5.29)$$

La quantité $|\mathcal{L}| - L + 1$ n'est autre que le nombre de boucles de la molécule. Nous obtenons finalement

$$\omega_{\mathcal{M}} = \epsilon(D, d) \times (\text{Nombre de boucles}) + D \times (\text{Nombre d'atomes} - 2) . \quad (5.30)$$

Pour $\epsilon > 0$, $\omega_{\mathcal{M}}$ croît avec le nombre de boucles. Les seules configurations divergentes correspondent à des molécules à un seul atome et un nombre de boucles inférieur à $\frac{D}{\epsilon}$. On a donc, (pour $\frac{D}{\epsilon} \geq 1$, c'est à dire d supérieur à la dimension critique supérieure (4.28) du problème de l'impureté) uniquement une renormalisation proportionnelle à l'opérateur $\Phi_1 = 1$, c'est à dire une renormalisation de l'énergie libre dont nous savons qu'elle disparaît en fait dans les valeurs moyennes. Cet effet est le même que pour le polymère auto-évitant. La théorie est dite super-renormalisable puisque le nombre de diagrammes divergents est fini. Pour $\epsilon < 0$, ω est de plus en plus négatif quand le nombre de boucles croît et le nombre d'opérateurs Φ_L à renormaliser croît avec l'ordre des perturbations. La théorie n'est pas renormalisable. A $\epsilon = 0$, ω est indépendant du nombre de boucles et ne dépend que du nombre d'atomes de la molécule. Les divergences proviennent:

- des molécules à deux atomes (et un nombre arbitraire de boucles). Ces molécules ont toutes $\omega_{\mathcal{M}} = 0$. La soustraction de ces divergences correspond à une renormalisation proportionnelle à l'opérateur $\Phi_2(x, x') = \phi(x, x')$. Il s'agit donc d'une renormalisation de la constante de couplage b .
- des molécules à un atome. Pour ces molécules, on a une singularité forte puisque $\omega_{\mathcal{M}} = -1$. On doit alors pousser le développement (5.22) un cran plus loin, comme nous l'avons fait pour le problème du polymère auto-évitant. Nous allons voir qu'en plus de la renormalisation de l'énergie libre (proportionnelle à l'opérateur Φ_1) nous devons faire une soustraction supplémentaire proportionnelle à l'opérateur $(\nabla_x \vec{r}(x))^2$ et qui peut être absorbée dans une renormalisation du champ $\vec{r}(x)$.

Reprenons donc la formule (5.22) dans le cas d'une molécule à un seul atome \mathcal{P} et montrons que nous avons le développement

$$\prod_{a \in \mathcal{L}} \phi(x_{2a-1}, x_{2a}) \underset{i \in \mathcal{P}}{\underset{x_i \rightarrow x_p}{\approx}} \underbrace{C_{\mathcal{M}}(\{x_i - x_p\}_{i \in \mathcal{P}^*})}_{\text{singularité forte}} 1 + \underbrace{C'_{\mathcal{M}}(\{x_i - x_p\}_{i \in \mathcal{P}^*})}_{\text{singularité sous-dominante}} : (\nabla_x \vec{r}(x))^2 : + \dots \quad (5.31)$$

La notation $:\cdot:$ désigne ce qu'on appelle le produit normal. Nous reviendrons sur sa définition précise ultérieurement. L'opérateur 1 dans la formule ci-dessus vient de ce que nous pouvons remplacer à l'ordre dominant le potentiel $A(x_i, x_j)$ pour un point $i \in \mathcal{P}$ et un point $j \notin \mathcal{P}$ par $A(x_p, x_j)$ si $x_i \rightarrow x_p$. Nous remplaçons ainsi la somme $\sum_{i \in \mathcal{P}} \vec{k}_i \cdot \vec{k}_j A(x_i, x_j)$ par $\vec{K}_p \cdot \vec{k}_j A(x_p, x_j)$ où $\vec{K}_p = \sum_{i \in \mathcal{P}} \vec{k}_i$, ce qui revient précisément à fabriquer un opérateur $e^{i\vec{K}_p \cdot \vec{r}(x_p)}$. Comme pour une molécule à un atome et sans branches mortes, chaque dipôle de la molécule a ses deux extrémités de charges opposées dans l'atome, la charge totale de l'atome est automatiquement nulle et l'opérateur fabriqué est dans ce cas l'opérateur 1. Nous pouvons poursuivre ce développement en écrivant

$$A(x_i, x_j) \underset{x_i \rightarrow x_p}{=} A(x_p, x_j) + (x_i - x_p) \cdot \nabla_x A(x_p, x_j) + \dots \quad (5.32)$$

et nous obtenons une correction

$$\begin{aligned} \exp \left[- \sum_{\substack{i \in \mathcal{P} \\ j \notin \mathcal{P}}} \vec{k}_i \cdot \vec{k}_j A(x_i, x_j) \right] &= \exp \left[- \sum_{\substack{i \in \mathcal{P} \\ j \notin \mathcal{P}}} \vec{k}_i \cdot \vec{k}_j (x_i - x_p) \cdot \nabla_x A(x_p, x_j) + \dots \right] \\ &= 1 - \left(\sum_{i \in \mathcal{P}} (x_i - x_p) \vec{k}_i \right) \cdot \sum_{j \notin \mathcal{P}} \nabla_x A(x_p, x_j) \vec{k}_j \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \left(\sum_{i \in \mathcal{P}} (x_i - x_p) \vec{k}_i \right) \cdot \sum_{j \notin \mathcal{P}} \nabla_x A(x_p, x_j) \vec{k}_j \right\}^2 + \dots \end{aligned} \quad (5.33)$$

Dans chacun des termes, il y a factorisation entre une partie ne dépendant que des points $i \in \mathcal{P}$ et une partie ne dépendant que des points $j \notin \mathcal{P}$ et du point p . La partie ne dépendant que des points dans \mathcal{P} , une fois intégrée sur les \vec{k}_i avec le poids $\exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i, i' \in \mathcal{P}} \vec{k}_i \cdot \vec{k}_{i'} A(x_i, x_{i'}) \right]$ fabrique le coefficient C contenant la singularité tandis que la partie ne dépendant que des points hors de \mathcal{P} et du point p refabrique la valeur moyenne du produit des opérateurs $e^{i\vec{k}_j \cdot \vec{r}(x_j)}$ pour $j \notin \mathcal{P}$ et d'un opérateur inséré au point x_p . Dans le cas présent, le premier terme de la correction fabrique un coefficient C qui est nul par symétrie de l'intégrale sur \vec{k}_i . En revanche, le deuxième terme de la correction fabrique le coefficient qui nous intéresse:

$$C'_{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \int \prod_{i \in \mathcal{P}} \frac{d^d \vec{k}_i}{(2\pi)^d} \prod_{a \in \mathcal{L}} (2\pi)^d \delta^d \left(\vec{k}_{2a-1} + \vec{k}_{2a} \right) \sum_{i \in \mathcal{P}} \frac{(x_i - x_p)^2}{D} \frac{\vec{k}_i^2}{d} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i, i' \in \mathcal{P}} \vec{k}_i \cdot \vec{k}_{i'} A(x_i, x_{i'}) \right]. \quad (5.34)$$

Ce coefficient est en facteur d'un terme

$$\sum_{j,j'} \vec{k}_j \cdot \vec{k}_{j'} \nabla_x A(x_p, x_j) \cdot \nabla_x A(x_p, x_{j'}) \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{j,j' \notin \mathcal{P}} \vec{k}_j \cdot \vec{k}_{j'} A(x_j, x_{j'}) \right], \quad (5.35)$$

qui n'est autre que la valeur moyenne Gaussienne

$$\langle : (\nabla_x \vec{r}(x_p))^2 : \prod_{j \notin \mathcal{P}} e^{i\vec{k}_j \cdot \vec{r}(x_j)} \rangle. \quad (5.36)$$

Le produit normal $::$ indique que dans la valeur moyenne Gaussienne, la contraction entre les deux opérateurs $\nabla_x \vec{r}(x)$ au point x_p est omise. En d'autres termes

$$\langle : (\nabla_x \vec{r}(x_p))^2 : \rangle = 0, \quad (5.37)$$

ou plus formellement

$$: (\nabla_x \vec{r}(x_p))^2 : \equiv (\nabla_x \vec{r}(x_p))^2 - \langle (\nabla_x \vec{r}(x_p))^2 \rangle. \quad (5.38)$$

Le degré d'homogénéité de $C'_{\mathcal{M}}$ est

$$\begin{aligned} \omega'_{\mathcal{M}} &= D(2|\mathcal{L}| - 1) + 2 - \frac{2-D}{2} d(|\mathcal{L}| + 2) \\ &= \epsilon(D, s) |\mathcal{L}|. \end{aligned} \quad (5.39)$$

On a donc bien à $\epsilon(D, d) = 0$ une divergence proportionnelle à $: (\nabla_x \vec{r}(x_p))^2 :$.

5.4.2 Renormalisation:

Si on omet les divergences donnant une renormalisation de l'énergie libre (qui sont sans effet sur les valeurs moyennes), toutes les divergences à $\epsilon(D, d) = 0$ sont proportionnelles à deux opérateurs: l'opérateur local $: (\nabla_x \vec{r}(x))^2 :$ et l'opérateur bi-local $\Phi_2(x, x') = \delta^d(\vec{r}(x) - \vec{r}(x'))$. On peut donc avoir une théorie renormalisée finie à $\epsilon = 0$ en prenant comme poids pour une configuration renormalisée $\vec{r}_R(x)$

$$\begin{aligned} \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^D x (\nabla_x \vec{r}_R(x))^2 - \frac{b_R}{2} \int d^D x d^D x' \delta^d(\vec{r}_R(x) - \vec{r}_R(x')) \right. \\ \left. - \frac{Z^{-2} - 1}{2} \int d^D x : (\nabla_x \vec{r}_R(x))^2 : - \frac{b_R}{2} (Z_g - 1) \int d^D x d^D x' \delta^d(\vec{r}_R(x) - \vec{r}_R(x')) \right], \end{aligned} \quad (5.40)$$

dépendant d'une constante de couplage renormalisée b_R , en ajustant les coefficients de renormalisations $Z = 1 + \mathcal{O}(b_R)$ et $Z_g = 1 + \mathcal{O}(b_R)$ de manière à compenser ordre par

ordre les divergences. Nous verrons dans le chapitre suivant comment fixer Z et Z_g au premier ordre en b_R . Les coefficients sans dimension Z et Z_g dépendent en fait uniquement de la constante de couplage sans dimension

$$g \equiv b_R X^{\epsilon(D,d)} \left(\frac{(2-D)S_D}{4\pi} \right)^{\frac{d}{2}}, \quad (5.41)$$

où X est l'échelle de renormalisation. Avec le poids (5.40), une quantité moyenne comme

$$G_{b_R}(\vec{k}_R, x, x'; X) \equiv \langle e^{i\vec{k}_R \cdot (\vec{r}_R(x) - \vec{r}_R(x'))} \rangle = \frac{I_{b_R}(\vec{k}_R, x, x'; X)}{I_{b_R}(\vec{0}; X)} \quad (5.42)$$

sera une fonction finie de b_R et \vec{k}_R quand $\epsilon \rightarrow 0$.

Le lien entre la théorie renormalisée et la théorie de départ est simple. On a en effet

$$G_{b_R}(\vec{k}_R, x, x'; X) = G_b(\vec{k}, x, x') \quad (5.43)$$

à condition de prendre

$$\begin{aligned} \vec{k} &= Z\vec{k}_R, \\ b &= b_R Z_g Z^{-d}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Pour le voir, il suffit de faire dans les intégrales fonctionnelles de la théorie renormalisée le changement de variable

$$\vec{r}(x) = Z^{-1}\vec{r}_R(x). \quad (5.45)$$

La seule subtilité vient du produit normal et du Jacobien du changement de variables. Les calculs sont faits avec la convention

$$\begin{aligned} \int_{\vec{r}(0)=\vec{0}} [\mathcal{D}\vec{r}(x)] \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^D x (\nabla_x \vec{r}(x))^2 \right] &= 1, \\ \int_{\vec{r}_R(0)=\vec{0}} [\mathcal{D}\vec{r}_R(x)] \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^D x (\nabla_x \vec{r}_R(x))^2 \right] &= 1. \end{aligned} \quad (5.46)$$

On a alors dans le changement de variable $\vec{r}_R(x) \rightarrow \vec{r}(x)$ un Jacobien $J(Z)$ formellement égal à Z à une puissance (infinie) égale au nombre de degrés de liberté de $\vec{r}_R(x)$. Nous avons

$$\begin{aligned} J(Z) &= \frac{\int_{\vec{r}_R(0)=\vec{0}} [\mathcal{D}\vec{r}_R(x)] \exp \left[-\frac{Z^{-2}}{2} \int d^D x (\nabla_x \vec{r}_R(x))^2 \right]}{\int_{\vec{r}(0)=\vec{0}} [\mathcal{D}\vec{r}(x)] \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^D x (\nabla_x \vec{r}(x))^2 \right]} \\ &= \int_{\vec{r}_R(0)=\vec{0}} [\mathcal{D}\vec{r}_R(x)] \exp \left[-\frac{Z^{-2}}{2} \int d^D x (\nabla_x \vec{r}_R(x))^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Dans ces conditions, nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \int_{\vec{r}_R(0)=\vec{0}} [\mathcal{D}\vec{r}_R(x)] \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^D x (\nabla_x \vec{r}_R(x))^2 - \frac{Z^{-2}-1}{2} \int d^D x : (\nabla_x \vec{r}_R(x))^2 : \right] \\
& \quad \times \exp \left[-\frac{b_R}{2} \int d^D x d^D x' \delta^d (\vec{r}_R(x) - \vec{r}_R(x')) - \frac{b_R}{2} (Z_g - 1) \int d^D x d^D x' \delta^d (\vec{r}_R(x) - \vec{r}_R(x')) \right] \\
& = \int_{\vec{r}_R(0)=\vec{0}} [\mathcal{D}\vec{r}_R(x)] \exp \left[-\frac{Z^{-2}}{2} \int d^D x (\nabla_x \vec{r}_R(x))^2 + \frac{Z^{-2}-1}{2} \int d^D x \langle (\nabla_x \vec{r}_R(x))^2 \rangle \right] \\
& \quad \times \exp \left[-\frac{Z_g b_R}{2} \int d^D x d^D x' \delta^d (\vec{r}_R(x) - \vec{r}_R(x')) \right] \\
& = \int_{\vec{r}(0)=\vec{0}} [\mathcal{D}\vec{r}(x)] \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^D x (\nabla_x \vec{r}(x))^2 \right] \\
& \quad \times \exp \left[-\frac{Z_g Z^{-d} b_R}{2} \int d^D x d^D x' \delta^d (\vec{r}(x) - \vec{r}(x')) \right] \\
& \quad \times \int_{\vec{r}_R(0)=\vec{0}} [\mathcal{D}\vec{r}_R(x)] \exp \left[-\frac{Z^{-2}}{2} \int d^D x (\nabla_x \vec{r}_R(x))^2 + \frac{Z^{-2}-1}{2} \int d^D x \langle (\nabla_x \vec{r}_R(x))^2 \rangle \right] \\
& = \int_{\vec{r}(0)=\vec{0}} [\mathcal{D}\vec{r}(x)] \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^D x (\nabla_x \vec{r}(x))^2 - \frac{b}{2} \int d^D x d^D x' \delta^d (\vec{r}(x) - \vec{r}(x')) \right] \\
& \quad \times \langle \exp \left[-\frac{Z^{-2}-1}{2} \int d^D x : (\nabla_x \vec{r}_R(x))^2 : \right] \rangle .
\end{aligned} \tag{5.48}$$

Le facteur multiplicatif dans cette dernière égalité est sans importance et disparaît dans les valeurs moyennes.

On définit ici encore

$$\begin{aligned}
W(g) & \equiv X \left. \frac{d}{dX} \right|_b g , \\
\gamma(g) & \equiv X \left. \frac{d}{dX} \right|_b \ln Z .
\end{aligned} \tag{5.49}$$

En présence d'un point fixe infrarouge g^* ($W(g^*) = 0$, $W'(g^*) < 0$), le même argument que dans le cas du polymère auto-évitant donne l'exposant

$$\nu(D, d) = \frac{2-D}{2} - \gamma(g^*) . \tag{5.50}$$

5.5. Calculs explicites à une boucle

5.5.1 Renormalisation de b :

La renormalisation à une boucle de b vient du diagramme à deux dipôles apparaissant à l'ordre 2 en b_R , quand les deux dipôles viennent en contact l'un avec l'autre comme sur

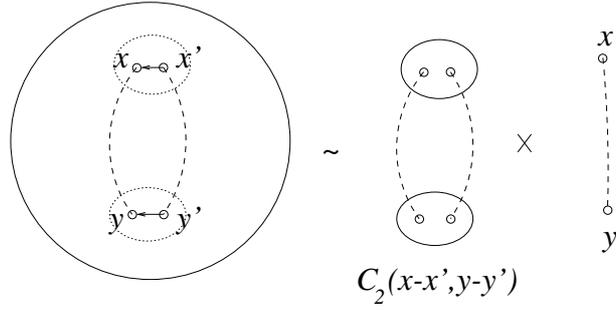


Fig. 19: Renormalisation de l'opérateur à deux corps

la figure 19 (molécule à deux atomes). Le deuxième ordre en b_R fabrique un terme

$$\frac{1}{2} \left(\frac{b_R}{2} \right)^2 \int d^D x d^D x' d^D y d^D y' \delta^d(\vec{r}_R(x) - \vec{r}_R(y)) \delta^d(\vec{r}_R(x') - \vec{r}_R(y')) . \quad (5.51)$$

Quand $x' \rightarrow x$ et $y' \rightarrow y$, on a

$$\delta^d(\vec{r}_R(x) - \vec{r}_R(y)) \delta^d(\vec{r}_R(x') - \vec{r}_R(y')) \underset{\substack{x' \rightarrow x \\ y' \rightarrow y}}{\sim} C_2(x - x', y - y') \delta^d(\vec{r}_R(x) - \vec{r}_R(y)) , \quad (5.52)$$

avec un coefficient C_2 égal à

$$\begin{aligned} C_2(x - x', y - y') &= \int \frac{d^d \vec{k}_x}{(2\pi)^d} \frac{d^d \vec{k}_y}{(2\pi)^d} \frac{d^d \vec{k}_{x'}}{(2\pi)^d} \frac{d^d \vec{k}_{y'}}{(2\pi)^d} (2\pi)^d \delta^d(\vec{k}_x + \vec{k}_y) \delta^d(\vec{k}_{x'} + \vec{k}_{y'}) \\ &\quad \times (2\pi)^d \delta^d(\vec{k}_x + \vec{k}_{x'}) \exp \left[-\vec{k}_x \cdot \vec{k}_{x'} A(x, x') - \vec{k}_y \cdot \vec{k}_{y'} A(y, y') \right] \\ &= \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \exp \left[\vec{k}^2 (A(x, x') + A(y, y')) \right] \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{(-A(x, x') - A(y, y'))^{\frac{d}{2}}} . \end{aligned} \quad (5.53)$$

Il faut compenser la divergence quand $x' \rightarrow x$ et $y' \rightarrow y$ mais aussi celle, identique, quand $x' \rightarrow y$ et $y' \rightarrow x$. Pour cela, on doit soustraire un terme égal à

$$2 \times \frac{1}{2} \left(\frac{b_R}{2} \right)^2 \int^{X} d^D(x - x') d^D(y - y') C_2(x - x', y - y') \times \int d^D x d^D y \delta^d(\vec{r}_R(x) - \vec{r}_R(y)) . \quad (5.54)$$

Ici, nous désignons par \int^X une intégrale où les distances $|x - x'|$ et $|y - y'|$ sont bornées par l'échelle de renormalisation X . La manière précise dont cette borne est implémentée n'a pas réellement d'importance ici si on s'intéresse uniquement au pôle en $\epsilon(D, d)$ à soustraire. En effet, différentes implémentations diffèrent uniquement par une quantité qui reste finie

quand $\epsilon(D, d) \rightarrow 0$. La correction proportionnelle à $Z_g - 1$ dans (5.40) fabrique pour sa part au premier ordre un terme en

$$-(Z_g - 1) \left(\frac{b_R}{2} \right) \int d^D x d^D y \delta^d(\vec{r}_R(x) - \vec{r}_R(y)) . \quad (5.55)$$

Il y aura effectivement compensation si l'on choisit

$$\begin{aligned} Z_g &= 1 + \left(\frac{b_R}{2} \right) \int^X d^D(x - x') d^D(y - y') C_2(x - x', y - y') + \mathcal{O}(b_R^2) \\ &= 1 + \frac{b_R}{2} \left(\frac{(2-D)S_D}{4\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \int^X d^D u d^D v \frac{1}{(|u|^{2-D} + |v|^{2-D})^{\frac{d}{2}}} + \mathcal{O}(b_R^2) \\ &= 1 + \frac{g}{2} \int^1 d^D u d^D v \frac{1}{(|u|^{2-D} + |v|^{2-D})^{\frac{d}{2}}} + \mathcal{O}(g^2) . \end{aligned} \quad (5.56)$$

Pour calculer l'intégrale

$$I = \int^1 d^D u d^D v \frac{1}{(|u|^{2-D} + |v|^{2-D})^{\frac{d}{2}}} = S_D^2 \int^1 du dv \frac{(uv)^{D-1}}{(u^{2-D} + v^{2-D})^{\frac{d}{2}}} , \quad (5.57)$$

nous posons d'abord $\alpha = u^{2-D}$ et $\beta = v^{2-D}$ de sorte que

$$I = \frac{S_D^2}{(2-D)^2} \int^1 d\alpha d\beta \frac{(\alpha\beta)^{\frac{2D-2}{2-D}}}{(\alpha + \beta)^{\frac{d}{2}}} . \quad (5.58)$$

En posant maintenant $\alpha = u\gamma$ et $\beta = u(1-\gamma)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} I &= \frac{S_D^2}{(2-D)^2} \underbrace{\int_0^1 d\gamma \gamma^{2+2\frac{2D-2}{2-D}-\frac{d}{2}}}_{=\frac{2-D}{\epsilon(D,d)}} \underbrace{\int_0^1 du u^{\frac{2D-2}{2-D}} (1-u)^{\frac{2D-2}{2-D}}}_{=\frac{[\Gamma(\frac{D}{2-D})]^2}{\Gamma(\frac{2D}{2-D})}} \\ &= \frac{S_D^2}{2-D} \frac{1}{\epsilon(D,d)} \frac{[\Gamma(\frac{D}{2-D})]^2}{\Gamma(\frac{2D}{2-D})} . \end{aligned} \quad (5.59)$$

Nous obtenons finalement le résultat à une boucle:

$$Z_g = 1 + \frac{1}{2} \frac{S_D^2}{(2-D)} \frac{[\Gamma(\frac{D}{2-D})]^2}{\Gamma(\frac{2D}{2-D})} \frac{g}{\epsilon(D,d)} + \mathcal{O}(g^2, \epsilon g) . \quad (5.60)$$

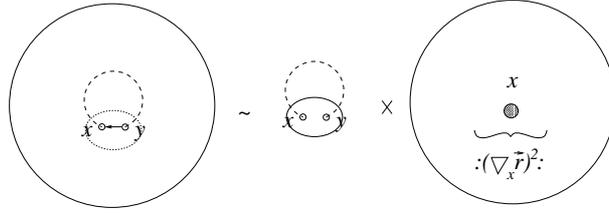


Fig. 20: Renormalisation de l'opérateur $:(\nabla_x \vec{r}(x))^2:$

5.5.2 Renormalisation de \vec{r} :

La renormalisation à une boucle de \vec{r} vient du terme à un dipôle quand les deux extrémités de ce dipôle s'approchent l'une de l'autre (molécule à un atome), comme sur la figure 20. Nous partons maintenant du premier ordre en b_R , à savoir du terme

$$-\frac{b_R}{2} \int d^D x d^D y \delta^d(\vec{r}_R(x) - \vec{r}_R(y)) . \quad (5.61)$$

Nous avons quand $x \rightarrow y$ le comportement

$$\delta^d(\vec{r}_R(x) - \vec{r}_R(y)) \underset{y \rightarrow x}{\sim} -\frac{1}{4D} \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} (x-y)^2 \frac{1}{(-A(x,y))^{1+\frac{d}{2}}} \times :(\nabla_x \vec{r}(x))^2: . \quad (5.62)$$

Nous devons donc choisir

$$\begin{aligned} \frac{Z^{-2} - 1}{2} &= \frac{b_R}{2} \frac{1}{4D} \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} ((2-D)S_D)^{1+\frac{d}{2}} S_D \int_0^X du \frac{u^{D-1}}{u^{(2-D)(1+\frac{d}{2})}} + \mathcal{O}(b_R^2) \\ &= \frac{g}{2} \frac{1}{4D} (2-D) S_D^2 \frac{1}{\epsilon(D,d)} + \mathcal{O}(g^2, \epsilon g) . \end{aligned} \quad (5.63)$$

Nous obtenons finalement

$$Z = 1 - \frac{1}{8D} (2-D) S_D^2 \frac{g}{\epsilon(D,d)} + \mathcal{O}(g^2, \epsilon g) . \quad (5.64)$$

5.5.3 Exposant $\nu(D, d)$:

Nous présentons pour finir le calcul de l'exposant $\nu(D, d)$ au premier ordre en $\epsilon(D, d)$.

Nous venons de trouver

$$\begin{aligned} Z_g &= 1 + A \frac{g}{\epsilon} + \mathcal{O}(g^2, \epsilon g) \\ Z &= 1 - B \frac{g}{\epsilon} + \mathcal{O}(g^2, \epsilon g) , \end{aligned} \quad (5.65)$$

avec

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \frac{S_D^2}{(2-D)} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{D}{2-D}\right) \right]^2}{\Gamma\left(\frac{2D}{2-D}\right)} \\ B &= \frac{1}{8D} (2-D) S_D^2 . \end{aligned} \quad (5.66)$$

D'après (5.49) et la relation $b = b_R Z_g Z^{-d}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} W(g) &= \epsilon g - (A + dB)g^2 + \mathcal{O}(g^3, \epsilon g^2) \\ \gamma(g) &= -Bg + \mathcal{O}(g^2, \epsilon g) . \end{aligned} \quad (5.67)$$

Nous avons donc pour $\epsilon > 0$ un point fixe infrarouge à

$$g^* = \frac{\epsilon}{A + dB} , \quad (5.68)$$

et, en utilisant (5.50),

$$\nu(D, d) = \frac{2 - D}{2} + \frac{B}{A + dB} \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) . \quad (5.69)$$

Dans cette formule, les quantités A , B et ϵ dépendent à la fois de D et d . Comme il s'agit d'un résultat au premier ordre en $\epsilon(D, d) = 2D - \frac{2-D}{2}d$, on peut:

- soit se placer à D fixé et écrire $d = \frac{4D}{2-D} + \mathcal{O}(\epsilon)$. On obtient alors le résultat à D fixé

$$\nu_D(\epsilon) = \frac{2 - D}{2} \left\{ 1 + \frac{\epsilon}{2D \left(1 + \frac{[\Gamma(\frac{D}{2-D})]^2}{(2-D)\Gamma(\frac{2D}{2-D})} \right)} \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2) . \quad (5.70)$$

En particulier, pour $D = 1$, où $\epsilon = 2 - \frac{d}{2}$, on retrouve $\nu = \frac{1}{2} + \frac{4-d}{16} + \mathcal{O}((4-d)^2)$. Le problème de cette approximation est qu'elle donne $\nu = 0$ pour $D = 2$, indépendamment de d .

- soit se placer à d fixé et écrire $D = 2\frac{d+\epsilon}{4+d} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$, ce qui donne

$$\nu_d(\epsilon) = \frac{4}{4+d} - \frac{\epsilon}{4+d} + \frac{\epsilon}{d \left(1 + \frac{4+d}{8} \frac{[\Gamma(\frac{d}{4})]^2}{\Gamma(\frac{d}{2})} \right)} + \mathcal{O}(\epsilon^2) . \quad (5.71)$$

Pour $d = 3$, on trouve alors $\nu(\epsilon) = \frac{4}{7} - 0.00859\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)$. Pour $D = 1$, c'est à dire $\epsilon = \frac{1}{2}$, nous obtenons l'estimation $\nu = 0.5671$, tandis que pour $D = 2$, c'est à dire $\epsilon = 4$, nous trouvons $\nu = 0.537$. Cette valeur est malheureusement bien trop faible et les corrections aux ordres supérieurs sont vraisemblablement grandes à $D = 2$.

Références

Livres

- “Scaling Concepts in Polymer Physics”, de Gennes P.G., Cornell University Press (1979).
- “Les Polymères en Solution: leur Modélisation et leur Structure”, des Cloizeaux J. and Jannink G., Les Editions de Physique (1987).
- “Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, and Polymer Physics”, Kleinert H., World Scientific (1990).
- “Statistical Mechanics of Membranes and Surfaces”, Nelson D.R., Piran T. and Weinberg S. Editors, Proceedings of the fifth Jerusalem Winter School for Theoretical Physics, World Scientific (1989).
- “Fluctuating Geometries in Statistical Mechanics and Field Theory”, F. David, P. Ginsparg and J. Zinn-Justin eds., Les Houches Summer School Session LXXX (Elsevier Science, 1996).
- “Statistical Field Theory: from Brownian Motion to Renormalization and Lattice Gauge Theory”, Itzykson C. and Drouffe J.-M., Cambridge University Press (1989).
- “Quantum Field Theory and Critical Phenomena”, Zinn-Justin J., Clarendon Press (1989).

Articles

Polymère en interaction avec une impureté

Douglas J.F., Wang S.-Q. and Freed K.F., *Macromolecules* **19** (1986) 2207.

Joanny J.F., *J. Phys. France* **49** (1988) 1981.

Polymères auto-évitants

Edwards S.F., *Proc. Phys. Soc. Lond.* **85** (1965) 613.

de Gennes P.G., *Phys. Lett. A* **38** (1972) 339.

des Cloizeaux J., *J. Phys. France* **42** (1981) 635.

Membranes polymérisées

Nelson D.R. and Peliti L., *J. Phys. France* **48** (1987) 1085.

Kantor Y. and Nelson D.R., *Phys. Rev. Lett.* **58** (1987) 2774, *Phys. Rev. A* **36** (1987) 4020.

Paczuski M., Kardar M. and Nelson D.R., *Phys. Rev. Lett.* **60** (1988) 2638.

David F. and Gitter E., *Europhys. Lett* **5** (1988) 709.

Membrane en interaction avec une impureté

Duplantier B., *Phys. Rev. Lett.* **62** (1989) 2337.

David F., Duplantier B. and Guitter E., Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 2205; Nucl. Phys. **B394** (1993) 555.

Membranes auto-évitantes

Kantor Y., Kardar M. and Nelson D.R., Phys. Rev. Lett. **57** (1986) 791, Phys. Rev. **A 35** (1987) 3056.

Kardar M. and Nelson D.R., Phys. Rev. Lett. **58** (1987) 1289, 2280(E); Phys. Rev. **A 38** (1988) 966.

Aronovitz J.A. and Lubensky T.C., Europhys. Lett. **4** (1987) 395.

Duplantier B., Phys. Rev. Lett. **58** (1987) 2733.

Duplantier B., Hwa T. and Kardar M., Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 2022.

Gutter E. and Palmeri J., Phys. Rev **A[15] 45** (1992) 734.

David F., Duplantier B. and Gutter E., Phys. Rev. Lett. **72** (1994) 311; cond-mat 9702136.
→ *travaux numériques*

Plischke M. and Boal D., Phys. Rev. **A 38** (1988) 4943.

Abraham F.F., Rudge W.E. and Plischke M., Phys. Rev. Lett. **62** (1989) 1757.

Boal D., Levinson E., Liu D. and Plischke M., Phys. Rev. **A 40** (1989) 3292.

Ho J.-S. and Baumgärtner A., Phys. Rev. Lett. **63** (1989) 1324.

Pliages

Di Francesco P. and Gutter E., Europhys. Lett. **26**, 455-460 (1994); Phys. Rev. **E 50**, 4418-4426 (1994).

Bowick M., Di Francesco P., Golinelli O. and Gutter E., Nucl. Phys. **B450** [FS] 463-494 (1995).

Méandres

Di Francesco P., Golinelli O. and Gutter E., Nucl. Phys. **B482** [FS] 497-535 (1996).

Sommaire

1. Marches aléatoires et polymères	1
1.1. Chemin Brownien sur réseau hypercubique	1
1.2. Limite continue	7
1.3. Formulation fonctionnelle	10
1.4. Chemin Brownien dans un potentiel	21
1.5. Théorie des champs dans l'espace de plongement	23
2. Polymère en interaction avec une impureté	25
2.1. Formulation discrète: solution sur réseau par matrice de transfert	25
2.2. Formulation continue: développement perturbatif à tous les ordres	29
2.3. Groupe de renormalisation	40
2.4. Théorie des champs $\Phi^2(\vec{0})$	53
3. Polymères auto-évitants	56
3.1. Modèle d'Edwards	56
3.2. Approximations diverses (Flory, variationnelle)	59
3.3. Calculs à une boucle	61
3.4. Théorie des champs Φ^4 à $n = 0$	73
4. Membrane polymérisée en interaction avec une impureté	76
4.1. Membrane libre	76
4.2. Interaction δ : développement perturbatif	81
4.3. Renormalisation	86
4.4. Calculs à une boucle	95
5. Membranes auto-évitantes	98
5.1. Le modèle, pertinence de l'interaction	98
5.2. Flory, méthode variationnelle	99
5.3. Diagrammatique	99
5.4. Renormalisation	101
5.5. Calculs explicites à une boucle	109