

RÉSUMÉ DES TRAVAUX DE RECHERCHE

E. Gutter

Ce document présente l'ensemble de mes travaux de recherche depuis ma thèse de doctorat jusqu'à ce jour. Un mémoire d'habilitation plus spécifique est rédigé sur les parties 4 et 5 de ce document.

Sommaire

1. INTRODUCTION	2
2. PHYSIQUE STATISTIQUE DES MEMBRANES	2
3. RENORMALISATION DES MEMBRANES EN INTERACTION: AUTO-ÉVITEMENT	5
4. PLIAGES DE RÉSEAUX À DEUX DIMENSIONS	7
5. MÉANDRES ET GAZ DE BOUCLES	11
6. RÉSEAUX SEMI-ALÉATOIRES	14
7. COMBINATOIRE DES GRAPHERS ALÉATOIRES	16
8. PERSPECTIVES	19

1. INTRODUCTION

Ce document présente l'ensemble de mes travaux de recherche depuis mon doctorat jusqu'à ce jour. J'ai regroupé ces travaux en 6 grandes sections, dont l'ordre de présentation suit en grande partie l'ordre chronologique des publications.

Même si les techniques employées, allant de la théorie quantique des champs à la combinatoire, sont diverses, l'ensemble de mes travaux s'articule autour d'un même thème, la description des propriétés statistiques de surfaces fluctuantes et de réseaux aléatoires. J'ai donc essayé de présenter les différentes contributions dans un langage unifié pour d'une part permettre de resituer chacune d'elles dans la problématique générale et d'autre part laisser transparaître l'évolution des questions qui sont apparues dans ce domaine. La section 8 propose quelques perspectives pour des développements à venir du sujet.

2. PHYSIQUE STATISTIQUE DES MEMBRANES (publications 1-10,26)

Cette partie englobe l'ensemble de mes travaux de recherche menés pendant ma thèse et poursuivis lors de mon séjour post-doctoral. Ils concernent l'étude théorique des *propriétés statistiques des membranes*. Cette étude s'inscrit dans le cadre général des "surfaces aléatoires", associées à un grand nombre de problèmes de physique: modèle d'Ising tridimensionnel, problèmes d'interfaces, théorie des cordes... Dans la plupart des cas, le problème peut être ramené à la statistique de surfaces fluctuantes régies par une simple tension superficielle, c'est à dire une énergie proportionnelle à l'*aire*. Il s'avère alors que les configurations statistiquement favorisées sont celles où la surface est fortement "froissée".

Le domaine plus spécifique qui m'a intéressé concerne au contraire la description des *membranes* biologiques (membranes cellulaires, globules rouges) ou artificielles (bicouches lipidiques, mélanges eau-huile-surfactant) pour lesquelles la tension superficielle joue peu de rôle, soit parce qu'elle est très faible, soit au contraire parce que l'*aire* varie peu. Dans ce cas, il convient alors de considérer un terme d'énergie proportionnel à la *courbure* locale de la surface, et qui tend à l'aplanir. C'est en particulier cette énergie de courbure qui est responsable de la forme des globules rouges. Quand le module de rigidité (qui mesure l'énergie de courbure typique) est de l'ordre de la température, ces membranes peuvent être sujettes à d'importantes fluctuations et une description statistique s'impose.

La principale question théorique est alors de comprendre le rôle de l'énergie de courbure sur les propriétés statistiques des surfaces et son aptitude à induire de nouvelles phases. Le problème ainsi posé a une formulation naturelle dans le langage de la *théorie quantique des champs*: on adopte une description continue de la surface grâce à un système de coordonnées locales et la moyenne statistique s'obtient alors par une intégrale fonctionnelle sur les diverses configurations. La pertinence à grande distance de l'énergie de courbure dépend alors de la *renormalisation* du module de rigidité par les fluctuations de la surface. L'enseignement principal obtenu (*voir publication 7* pour une synthèse des résultats) est que cette renormalisation dépend de façon essentielle de la structure *interne* de la surface. Plus précisément, on sait qu'un système bidimensionnel peut présenter trois types d'ordre interne, correspondant à la phase fluide, la phase hexatique et la phase solide. A ces trois ordres internes correspondent trois comportements universels différents pour les fluctuations de la surface.

- **Statistique des membranes fluides**

L'étude de la renormalisation de la rigidité des membranes *fluides* (sans structure interne) a été entreprise à la fois en tant que telle par Helfrich (J. Physique **46** (1985) 1263, **47** (1986) 321, **48** (1987) 245) d'une part et Leibler et Peliti d'autre part (Phys.Rev.Lett. **54** (1985) 1960), et en tant qu'alternative aux théories de cordes par Polyakov (Nucl.Phys.**B** **268** (1986) 406). Tous ces travaux utilisent des méthodes perturbatives. J'ai présenté dans ma thèse une approche non perturbative consistant à résoudre le problème dans la limite où la dimension de l'espace de plongement devient grande (*publications 1 et 3*). Tout d'abord, ce calcul vient confirmer et préciser les calculs perturbatifs en montrant que les fluctuations de la surface diminuent sa rigidité effective. Le rôle de l'énergie de courbure est alors d'engendrer une longueur de persistance finie en deçà de laquelle les normales à la surface sont corrélées. Au delà de cette longueur, la rigidité est ineffective et la surface se froisse. Par ailleurs, ce calcul met en évidence l'apparition, en deçà d'une valeur critique de la tension superficielle, d'instabilités non perturbatives qui traduisent une tendance de la surface à développer des inhomogénéités de métriques de la taille de la longueur de persistance et indiquent l'existence d'une transition vers une phase où la surface dégénère en un objet hérissé ou du type d'un polymère branché, un phénomène déjà observé par simulations numériques.

- **Membranes hexatiques**

La phase *hexatique* s'obtient à partir de la phase solide en y ajoutant une densité finie de dislocations. Si l'on perd l'ordre translationnel, l'ordre orientationnel est lui conservé

et le problème revient alors à l'étude du couplage d'un modèle XY défini sur une surface aléatoire aux fluctuations de cette surface. J'ai montré dans ce cas ([publication 2](#)) que le module de rigidité effectif adopte une valeur universelle non nulle à grande distance (point fixe infrarouge). La corrélation des normales décroît alors comme une loi de puissance (longueur de persistance infinie) et la surface est un objet critique dont la dimension fractale varie avec la raideur hexatique (qui mesure l'intensité du couplage). Le diagramme de phase dans les variables module de rigidité – raideur hexatique est discuté dans un formalisme unifié dans la [publication 9](#).

- **Membranes solides ou polymérisées: transition de froissement**

La phase *solide* est adaptée à la description des membranes *polymérisées* qui à la fois présentent un ordre interne solide de type translationnel et peuvent être sujettes à des fluctuations importantes. Elle donne lieu à une physique particulièrement riche. L'existence d'un ordre interne fournit un système de coordonnées privilégié pour décrire la surface. Les déformations de la surface sont dans ce cas convenablement décrites à courtes distances par la théorie de l'élasticité. En présence d'énergie de courbure, il y a alors apparition d'une remarquable transition de froissement ([publications 4-6](#)) entre une phase de faible rigidité (ou haute température) où la surface est froissée et une phase de forte rigidité (ou basse température) où la rigidité effective croît avec la distance et où la surface s'aplatit: la symétrie de rotation dans l'espace ambiant est spontanément brisée dans cette phase. A la transition, la surface est de nouveau un objet critique. Cette transition avait été fortement suggérée par des simulations numériques par Y. Kantor et D.R. Nelson (Phys.Rev.Lett. **58** (1987) 2774, Phys.Rev. **A 36** (1087) 4020). La [publication 4](#) en présente une prédiction analytique. Les propriétés critiques à la transitions sont également étudiées ([publications 5,6](#)).

- **Elasticité anormale**

L'existence de la transition de froissement est surprenante, car elle semble contredire le célèbre théorème de Mermin-Wagner interdisant la brisure d'une symétrie continue (ici la symétrie par rotation dans l'espace ambiant) pour des systèmes à deux dimensions. La résolution de ce paradoxe vient de ce que la phase plate des membranes polymérisées n'est en fait pas décrite à *grandes distances* par la théorie usuelle de l'élasticité à deux dimensions. Celle-ci est remplacée par une théorie critique (élasticité anormale) caractérisée par des exposants non triviaux. L'existence de lois d'échelle réduit le nombre d'exposants indépendants à un. Cet exposant traduit par exemple la modification par les fluctuations de la loi de Hooke: l'élongation n'est plus une fonction linéaire de la tension appliquée

([publication 6,8](#)). La valeur de cet exposant a été déterminée par simulations numériques (Monte Carlo) et les lois d'échelles vérifiées numériquement ([publication 8](#)). Une autre prédiction remarquable est que le module de Poisson σ des membranes fluctuantes est *universel et négatif*. Ce signe indique que, sous l'action d'un étirement dans une direction, la membrane s'étire également dans la direction transverse, contrairement à la plupart des matériaux classiques qui auraient tendance à se contracter. A l'aide de simulations Monte Carlo à grande échelle sur un modèle discret ([publication 26](#)), nous avons confirmé cet effet et obtenu une estimation numérique $\sigma \sim -0.32$ pour un réseau de taille 128^2 , en excellent accord avec une prédiction théorique $\sigma = -1/3$ due à Le Doussal et Radsihovsky (Phys. Rev. Lett **69**, 1209 (1992)).

J'ai enfin étudié comment ces propriétés d'élasticité anormale se transmettaient au cas d'un *empilement* de membranes, les membranes étant fréquemment rencontrées sous forme de phases lamellaires. J'ai pu montrer ([publication 10](#)) analytiquement l'existence d'un régime où l'élasticité anormale d'une membrane se propage à tout l'empilement qui obéit alors également à une loi de Hooke modifiée.

3. RENORMALISATION DES MEMBRANES EN INTERACTION: AUTO-ÉVITEMENT ([publications 12-15,28-30](#))

L'étude présentée dans la section précédente, basée sur une énergie (tension superficielle ou énergie de courbure) purement locale sur la surface, décrit des membranes sans réelle interaction. L'exemple le plus simple d'interaction consiste à considérer une membrane pouvant entrer en contact avec un objet fixe (impureté, paroi,...). Un autre exemple particulièrement important est l'auto-évitement des membranes qui consiste à prendre en compte, dans les phases froissées, le fait que les fluctuations peuvent amener plusieurs points éloignés le long de la surface en contact dans l'espace de plongement. L'auto-évitement revient à introduire une interaction de contact répulsive à deux corps. D'autres types d'interactions (forces à longue portée, forces attractives...) peuvent également être considérées.

Dans les cas de forces à longue portée, on s'attend à ce qu'un traitement variationnel du problème, bien qu'approché, conduise aux bons comportements critiques. Cette approche est discutée dans la [publication 12](#).

Dans le cas de l'auto-évitement, l'étude est beaucoup plus complexe et aujourd'hui encore, la plupart des résultats reposent sur des simulations numériques. Ma contribution dans ce domaine a principalement consisté, en collaboration avec F. David et B. Duplantier, à montrer théoriquement la renormalisabilité de la théorie des membranes polymérisées en interaction (publications 13,14) et en particulier des membranes auto-évitant (publications 15,28). De manière générale, une membrane polymérisée peut être vue comme un assemblage de "monomères" en un réseau bidimensionnel. En ce sens, l'étude des membranes polymérisées constitue l'extension à deux dimensions de l'étude des polymères en solution.

Dans le cas des polymères, le problème des interactions à plusieurs corps peut se formuler à l'aide de théories des champs locales ordinaires *dans l'espace de plongement*. Par exemple, l'auto-évitement des polymères se décrit par un modèle $O(n)$ dans la limite $n \rightarrow 0$. L'existence d'une théorie des champs locale sous-jacente permet alors l'emploi des techniques bien connues de renormalisation perturbative pour d'une part donner un sens précis au modèle, et d'autre part déterminer des comportements d'échelle universels de polymères en interaction, ainsi que les exposants critiques associés.

Deux problèmes fondamentaux se posent si l'on essaie de transposer les techniques de polymères au cas des membranes polymérisées.

- Premièrement, la dimension fractale d'une membrane sans interaction est infinie (contrairement aux polymères sans interaction qui ont une dimension fractale finie 2), ce qui empêche de traiter l'interaction de manière perturbative. Pour conserver un développement perturbatif de l'interaction, on doit alors généraliser la notion de membrane polymérisée à des objets étendus D -dimensionnels où D est un paramètre continu entre 0 et 2, le cas des membranes étant alors retrouvé dans la limite $D \rightarrow 2$ tandis que $D = 1$ redonne une théorie de polymères. Dans cette optique, nous avons développé un formalisme qui, s'appuyant sur une formulation de la géométrie euclidienne en terme de *distances mutuelles*, permet de donner un sens précis à des objets de dimension D non entière. Ce formalisme de géométrie des distances est tout à fait général et conduit à une formulation de la théorie en interaction de la membrane D -dimensionnelle qui généralise le formalisme en paramètre α de Schwinger pour les théories des champs ordinaires (publications 13,14).

- Deuxièmement, la renormalisabilité de la théorie, assurée dans le cas des polymères ($D = 1$) par l'équivalence avec une théorie des champs locale dans l'espace de plongement, n'est plus garantie pour D arbitraire entre 0 et 2. Dans le cas d'un modèle simple de membrane en interaction avec un objet fixe, nous avons prouvé explicitement (publications 13,14) la

renormalisabilité de la théorie à tous les ordres en perturbation, fournissant ainsi le premier exemple de renormalisation d'une membrane en interaction.

Dans le cas de l'interaction d'auto-évitement, on doit considérer une théorie des champs qui n'est pas locale (les deux points en contact sont éloignés le long de la membrane). La localité est d'ordinaire considérée comme l'un des ingrédients cruciaux nécessaires à la renormalisabilité. Nous avons au contraire montré comment certaines propriétés des théories des champs locales (en particulier le développement d'opérateurs à courte distance) pouvaient être en fait étendues à toute une classe de théories non-locales, assurant en particulier leur renormalisabilité (*publications 15,28*). Les membranes auto-évitantes ou en interaction coulombienne appartiennent à cette catégorie de théories non-locales renormalisables, pour lesquelles des lois d'échelle peuvent alors être obtenues.

Par ailleurs, appliquée au cas particulier des polymères, l'étude des effets de taille finie de la théorie non locale d'auto-évitement fournit une justification immédiate de l'approche dite de "renormalisation directe" des polymères, qui évite le recours au modèle $O(n)$, $n \rightarrow 0$.

Une dernière application concerne l'auto-évitement pour les membranes anisotropes dans leur phase tubulaire (*publication 29*), c'est-à-dire des membranes froissées dans une direction et plates dans l'autre.

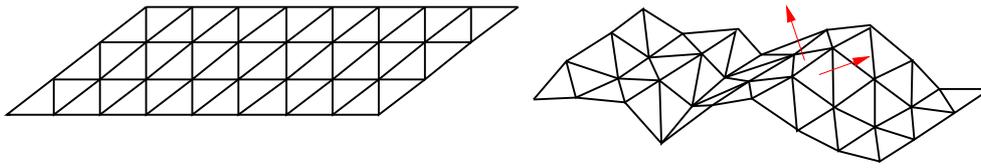
Les techniques de renormalisation pour les polymères et les membranes polymérisées sont décrites dans des notes de cours (*publication 30*).

4. PLIAGES DE RÉSEAUX À DEUX DIMENSIONS (publications 16-18,23,25,27,31,32,44)

Les résultats des deux sections précédentes sont essentiellement basés sur des techniques de théorie quantique des champs où les membranes sont décrites comme des objets continus. Une approche complémentaire consiste à modéliser la membrane par un réseau discret bidimensionnel, par exemple le réseau triangulaire régulier. Cette approche est en particulier adaptée à des études numériques, à la fois de type Monte Carlo, mais également par matrice de transfert. Enfin on peut espérer dans certains cas simples des solutions exactes (par exemple pour le nombre de configurations possibles). Il est à noter que l'emploi de réseaux réguliers est bien adapté à la description de membranes polymérisées pour lesquelles la métrique interne est fondamentalement "gelée" tandis que celle des membranes fluides, dont la métrique fluctue, nécessite plutôt de considérer des réseaux aléatoires.

•Pliage du réseau triangulaire

Il est tentant de visualiser la transition de froissement comme une transition de type paramagnétique-ferromagnétique en assimilant le vecteur normal à la surface à un spin. La phase plate correspond à une phase ordonnée où les normales sont en moyenne alignées tandis que la phase froissée correspond à une phase désordonnée. Cependant, les normales à une surface de métrique “gelée” sont des spins un peu particuliers dans la mesure où ce ne sont pas des variables indépendantes. Plus précisément, dans le cas des membranes polymérisées, on peut montrer qu’il existe une interaction effective à longue portée qui corrèle les normales à la surface.



pliage du réseau triangulaire

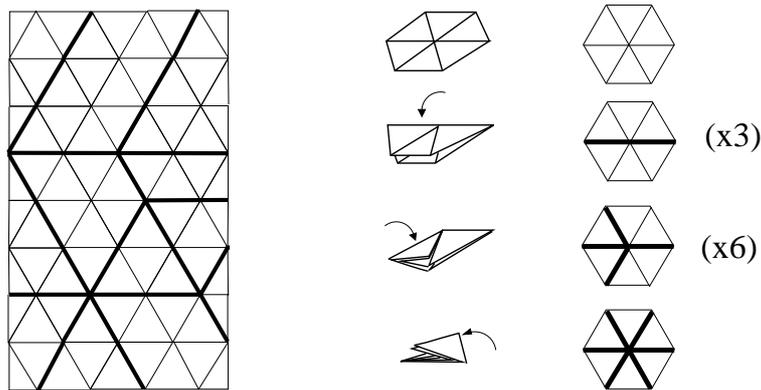


Fig. 1: En haut: pliage du réseau triangulaire. En bas à gauche: exemple de configuration de pliage *bidimensionnel* (les plis sont indiqués en gras); à droite: les règles locales de pliage sélectionnent 11 environnements possibles pour chaque hexagone élémentaire.

Ce phénomène apparaît sous sa forme la plus simple dans le problème du *pliage bidimensionnel* du réseau triangulaire, qui consiste à replier ce réseau sur lui-même le long de ses arêtes (les triangles sont indéformables, voir figure 1). La normale à chaque triangle peut alors prendre deux valeurs $+1$ ou -1 (spins d’Ising), mais ces valeurs sont fortement corrélés par les contraintes géométriques et les plis (qui sont les frontières de domaines entre spins opposés) se propagent à l’infini (ou pour un réseau fini d’un bord à l’autre du réseau). Le problème consiste alors dans un premier temps à caractériser les états de pliage

et à les énumérer. Avec P. Di Francesco, nous avons d’abord pu montrer ([publication 16](#)) que le nombre de pliages se calcule exactement (de manière asymptotique) en montrant que le problème du pliage coïncide en fait avec celui du coloriage des liens du réseau par trois couleurs devant rester distinctes autour de chaque triangle, un problème soluble par ansatz de Bethe. Par la suite nous avons développé une extension du même problème où le pliage du réseau triangulaire s’effectue maintenant dans l’espace *tridimensionnel* ([publication 18](#)), un modèle devant permettre de décrire le froissement des membranes polymérisées dans l’espace à trois dimensions. Notre travail a consisté d’abord à trouver une discrétisation simple de l’espace 3d qui convienne au problème de pliage. Un choix convenable consiste à ne plier le réseau triangulaire que dans la direction des faces d’un octaèdre régulier. Ceci correspond à discrétiser l’espace 3d en un réseau cubique faces centrées. Les règles de pliage s’obtiennent alors en regardant les pliages possibles d’un hexagone élémentaire (formé de 6 triangles) sur le réseau CFC. Notre travail a consisté à identifier ces pliages et à savoir les caractériser en termes simples (du même ordre que la caractérisation du problème précédent en termes de tricoloriage des arêtes) et utilisables notamment dans des simulations numériques. Ceci a été fait grâce à l’utilisation des propriétés du groupe tétraédral qui intervient naturellement dans ce problème. Des bornes rigoureuses sur l’entropie de froissement ont par ailleurs été obtenues.

- **Diagrammes de phases**

Au delà de l’énumération des configurations de pliages, une énergie de courbure peut être introduite dans ces modèles discrets sous la forme d’un simple couplage ferromagnétique entre spins voisins (c’est à dire entre normales voisines). Se pose alors la question du diagramme de phase en fonction de l’énergie de courbure. Une première approche consiste à calculer l’énergie libre de ces systèmes par matrice de transfert pour des bandes de taille finie et à extrapoler à la limite des tailles infinies. Dans le cas du pliage bidimensionnel, nous avons ainsi établi un diagramme de phase complet ([publication 17](#)) qui prévoit une transition de repliement du premier ordre.

Une autre méthode approchée particulièrement efficace est la méthode CVM (Cluster Variation Method). En effet, toutes les contraintes géométriques qui apparaissent dans les problèmes de pliage du réseau triangulaire peuvent être exprimées de manière locale sur les hexagones élémentaires formés de six triangles voisins sur le réseau (c’est le chevauchement de ces hexagones qui induit des corrélations non-locales par la propagation de ces contraintes). On peut alors fabriquer une énergie libre variationnelle dont les paramètres sont les probabilités de rencontrer chacune des configurations hexagonales autorisées, en

nombre en général assez restreint. La méthode variationnelle consiste alors à minimiser l'énergie libre par rapport à ces paramètres. Nous avons ainsi obtenu des diagrammes de phases pour le cas du pliage tridimensionnel ([publication 27](#)): le repliement de la membrane s'effectue dans ce cas à travers deux transitions, l'une continue et l'autre discontinue, séparant trois phases de symétries différentes (octaédrale, tétraédrale et planaire). Nous avons également étudié par la même méthode les pliages bidimensionnel ([publication 25](#)) et tridimensionnel ([publication 32](#)) en présence de *désordre gelé* pour la courbure, décrivant par exemple une situation où un premier pliage aléatoire aurait créé des plis irréversibles dans la membrane. Nous avons obtenu dans ce cas une transition vers une phase gelée du système à grande rigidité.

• Pliabilité des réseaux aléatoires

Pour étendre cette étude au cas d'une membrane fluide, il est naturel de considérer le problème du pliage de triangulations aléatoires, où la connectivité (nombre de triangles autour d'un noeud du réseau) est variable. Avant même de compter les pliages de tels objets se pose la question de leur pliabilité: on montre facilement que les triangulations pliables à deux dimensions sont les triangulations dites eulériennes pour lesquelles chaque noeud a autour de lui un nombre *pair* de triangles. Le problème du pliage met ici en lumière un phénomène qui apparaîtra également dans les sections relatives aux méandres et à la combinatoire des graphes, à savoir la sensibilité d'un certain nombre de problèmes à fortes contraintes géométriques (ici le pliage) à la classe des graphes aléatoires sur lesquels on moyenne (ici l'“eulérité” des triangulations).

Le problème du comptage des triangulations pliables a une formulation mathématique simple en termes d'intégrales matricielles dont le développement diagrammatique reconstruit précisément les triangulations eulériennes. Le problème est équivalent au tricoloriage des *noeuds* de la triangulation par trois couleurs devant rester distinctes pour les trois sommets de chaque triangle. Nous avons résolu entièrement ce problème, de nature essentiellement combinatoire, d'abord par les techniques d'intégrales matricielles ([publication 31](#)) puis par des techniques purement combinatoires développées tout récemment ([publication 44](#)) et ramenant les problèmes d'énumération de graphes à des problèmes de comptage d'arbres décorés, comme expliqué dans la section 7.

Pour pouvoir décrire tous les pliages (pas seulement la pliabilité), il faut colorier à la fois les noeuds et les arêtes du réseau, un problème encore ouvert.

5. MÉANDRES ET GAZ DE BOUCLES (publications 19-22,24,33,36,37,39,40)

• Pliage auto-évitant et méandres

La prise en compte des contraintes d'auto-évitement dans les problèmes de pliages est extrêmement complexe et ce problème reste très mal compris à ce jour. Déjà à une dimension, le comptage des repliements auto-évitants d'une chaîne de maillons sur elle-même (une image facile à retenir est celle d'une bande de timbres-poste repliée sur elle-même) n'est pas résolu. C'est à ce problème que nous nous sommes attaqués en 1995 pour finalement trouver une solution asymptotique en 1999 (*publication 39*).

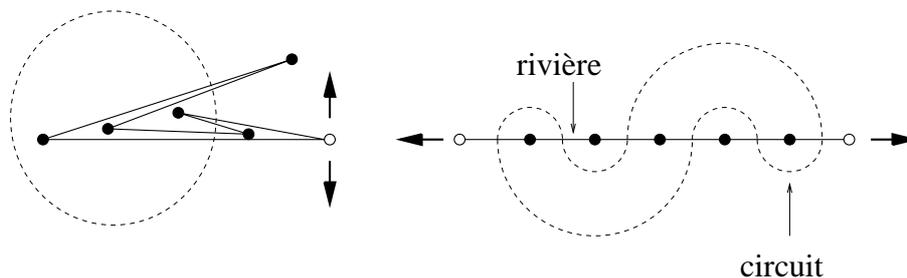


Fig. 2: Une configuration de pliage compact (à gauche) d'une chaîne fermée et le méandre associé (à droite), obtenu en traversant la chaîne par une ligne fermée (en pointillés) et en la dépliant en une ligne droite (rivière), la ligne en pointillés formant le circuit.

Dans le cas du pliage *compact* d'une chaîne fermée (la bande de timbres est repliée sur un seul timbre), une configuration de pliage peut être interprétée comme un *méandre*, c'est-à-dire comme la configuration d'un circuit fermé ne se croisant jamais lui-même, et traversant une rivière (un exemple est donné sur la figure 2).

Le problème de l'énumération des pliages auto-évitants d'une chaîne est donc ramené au problème des méandres, qui consiste à estimer le nombre M_n de configurations topologiquement inéquivalentes d'un circuit fermé traversant une rivière en n ponts. Ce problème, qui remonte à plus d'un siècle, a connu très peu de développements. Sa réexpression dans le langage qui nous intéresse ici de la physique des polymères nous a permis de le replacer dans le cadre des phénomènes critiques et en particulier d'introduire des variables d'échelle (comme l'enroulement de la chaîne) bien adaptées à la description de ses propriétés statistiques. Tous ces aspects sont discutés dans la *publication 19* où

certaines variantes du problème sont résolues: en particulier le modèle est naturellement étendu au cas de plusieurs circuits, avec un poids q par circuit. Les cas $q = 1$, $q = -1$ et $q \rightarrow \infty$ sont solubles exactement, tandis que les méandres correspondent à $q \rightarrow 0$. Une version du problème comme intégrale de matrices aléatoires, due à Kazakov et Kostov, est également présentée et discutée.

L'extension des méandres au cas de plusieurs circuits permet de connecter le problème aux propriétés de l'algèbre de Temperley-Lieb, elle-même connectée à la théorie des nœuds et au cœur des modèles intégrables sur réseaux. Dans ce cadre, nous avons obtenu quelques résultats exacts comme des règles de somme, et surtout le calcul du déterminant d'une matrice codant le nombre de composantes connexes du méandre (le nombre de circuits) ([publication 21](#)).

Notre approche du sujet a également consisté en une étude numérique poussée du problème permettant à la fois de confirmer la validité de l'hypothèse des lois d'échelle et de déterminer numériquement les exposants critiques correspondants ([publication 22](#)). Ces résultats ont également été réanalysés dans un développement systématique à grand q des diverses quantités intéressantes. Par exemple, l'entropie $R(q)$ comptant le nombre de méandres à n ponts dans la limite des grands n (ce nombre croît comme $R(q)^n$) a pu être calculée jusqu'à l'ordre 18 en $1/q$, donnant des résultats tout à fait fiables jusqu'à de petites valeurs de q ([publication 22](#)). Ces calculs nous ont permis de mettre en évidence un changement de comportement du système selon que q est plus grand ou plus petit qu'une valeur critique q_c (avec $q_c \sim 1.7$).

• Gaz de boucles sur réseaux aléatoires

Un chemin hamiltonien dessiné sur un réseau est un chemin qui passe une fois et une seule par tous les nœuds du réseau. En tant que tels, les chemins hamiltoniens peuvent être utilisés pour modéliser un polymère auto-évitant replié dans un espace à deux dimensions et remplissant tout l'espace. De manière plus théorique, le problème des chemins hamiltoniens correspond au cas particulier $n \rightarrow 0$ du modèle $O(n)$ dans sa phase "compacte" (fully packed $O(n)$ model). Il est intéressant de noter que le cas $n = 2$ du même modèle sur réseau triangulaire est équivalent au tricoloriage des arêtes du réseau triangulaire qui, comme nous l'avons vu dans la section 4, décrit le pliage bidimensionnel de ce réseau.

Sur le réseau régulier, la contrainte de compacité fait que le modèle a des propriétés différentes du modèle $O(n)$ traditionnel. Cette différence se traduit par un changement $c \rightarrow c+1$ de la charge centrale du modèle, qui implique notamment de nouveaux exposants critiques (voir Blöte et Nienhuis, Phys.Rev.Lett. **72** (1994) 1372).

De manière générale, on peut se demander ce que devient ce modèle quand il est défini sur des réseaux aléatoires fluctuants, utiles comme nous l’avons vu pour modéliser une membrane fluide. Il est à noter que, pour $n = 0$, le problème des chemins hamiltoniens sur réseau triangulaire aléatoire est très proche conceptuellement du problème des méandres. En dépliant le chemin pour en faire la rivière, on voit que, plutôt que des circuits traversant cette rivière, on a maintenant un système d’arches autour d’elle. C’est sans aucun doute la résolution asymptotique de ce problème qui nous a amenés à la solution asymptotique du problème des méandres.

Nous avons montré que, de manière remarquable, le changement $c \rightarrow c + 1$ de charge centrale n’a pas lieu pour des réseaux aléatoires quelconques mais réapparaît à condition que de considérer des réseaux *eulériens*, c’est à dire avec un nombre pair de faces autour de chaque vertex (comme nous l’avons vu dans la section 4, ce sont en particulier les triangulations eulériennes qu’il faut considérer pour décrire correctement les pliages de membranes).

Ce résultat est d’une part corroboré par une étude du cas $n = 0$ des chemins Hamiltoniens. Ce modèle est résolu exactement ([publication 33](#)) dans le cas de triangulations aléatoires quelconques, et numériquement ([publication 36](#)) dans le cas de triangulations eulériennes. Le changement de charge centrale ($c = -1$ au lieu de $c = -2$) a bien lieu dans ce dernier cas, ce qui se traduit par l’apparition d’un exposant entropique irrationnel pour le nombre de configurations $H_n \sim R^n/n^{\gamma-2}$ avec $\gamma = -(1 + \sqrt{13})/6$.

Nous avons par la suite confirmé ce résultat dans le cas $n = 1$ en montrant que le modèle sur réseau eulérien peut alors être rendu équivalent à un modèle résolu de matrices aléatoires (décrivant un point critique du modèle à six vertex) et qui a précisément la charge centrale et les exposants voulus ([publication 37](#)).

• **Solution asymptotique au problème des méandres**

Elargie au problème des méandres, l’analyse ci-dessus des gaz de boucles compactes sur réseaux aléatoires nous a permis d’identifier le problème des méandres comme étant la version “gravitationnelle” d’un modèle de gaz de boucles compactes sur le réseau régulier, le modèle FPL^2 qui possède deux systèmes de boucles en coexistence. Cette identification nous a permis en particulier de donner la valeur *exacte* de l’exposant critique de configuration $\alpha = (29 + \sqrt{145})/12$ des méandres ([publication 39](#)), qui caractérise le comportement asymptotique du nombre de méandres à grand n ($M_n \sim R^n/n^\alpha$), ainsi que celles des exposants critiques de configuration pour de nombreuses autres géométries (plusieurs rivières, rivière avec source, avec branchement , ...).

Seuls certains de ces exposants avaient été estimés numériquement auparavant et nos résultats appelaient donc à une étude numérique plus systématique pour confirmer nos prédictions. Nous avons procédé à cette étude numérique (*publication 40*), utilisant de nouveaux algorithmes plus performants (matrice de transfert sur des systèmes d’arches) et simulant les géométries non encore étudiées pour lesquelles nous avons des prédictions. Dans tous les cas, nous avons obtenu un accord parfait des résultats numériques avec nos prédictions théoriques.

6. RÉSEAUX SEMI-ALÉATOIRES (publications 38,41,42)

- Gravité lorentzienne .

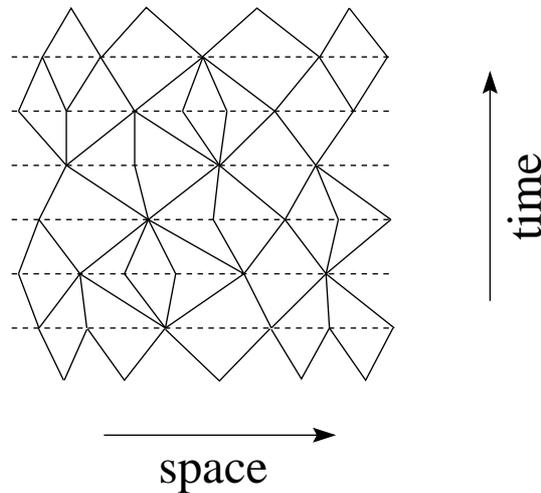


Fig. 3: Exemple de triangulation aléatoire “lorentzienne”, c’est à dire organisée en couches dans la direction du temps

Dans leur version discrétisée, les modèles de gravité quantique bidimensionnelle utilisent des triangulations aléatoires. Un cas particulier de tels modèles est celui de la gravité dite “lorentzienne”, introduite par Ambjørn et Loll (Nucl. Phys. **B 536** (1998) 407) et obtenue en demandant que la triangulation aléatoire s’organise en couches de triangles à temps constant (voir figure 3). Cette organisation en couche permet alors l’emploi de matrices de transfert pour étudier la statistique du problème. En introduisant, outre le poids t par triangle, un poids a associé à la courbure intrinsèque de la triangulation, nous avons montré (*publication 38*) que le problème devenait intégrable (c’est à dire que la matrice de transfert $T(t, a)$ commute avec les matrices $T(t', a')$ sur une ligne de paramètres

$F(t', a', t, a) = 0$), ce qui permet de résoudre explicitement le problème. Nous avons également montré qu'il existait une correspondance directe entre gravité Lorentzienne avec courbure intrinsèque et chemin Brownien avec courbure extrinsèque, ce qui permet de relier un certain nombre des propriétés statistiques respectives de ces deux problèmes. Par exemple, la corrélation de boucles du problème gravitationnel est reliée aux probabilités de grandes excursions du chemin Brownien.

Nous avons par la suite généralisé le modèle en permettant la présence de fluctuations de type “bébés univers”, contrôlées par une fugacité β , au sein de chacune des couches ([publication 41](#)). Par des techniques de matrice de transfert et d'intégrale fonctionnelle, nous avons montré que ce modèle possède une transition de phase à $\beta = 1$, valeur au delà de laquelle il y a prolifération des “bébés univers” dans chacune des couches, résultant en un découplage effectif de ces différentes couches. Pour $\beta < 1$, nous avons également montré que le problème était décrit dans sa limite continue par une équation de Schrödinger pour le Hamiltonien dit de Calogero (potentiel en $1/r^2$), dont la diagonalisation explicite nous a permis le calcul de toutes les observables intéressantes du problème. Cette étude révèle en outre un lien remarquable de ce problème avec les noyaux autosimilaires par groupe de renormalisation fonctionnel (étudiés par exemple dans le contexte du mouillage critique). Ce lien, qui se comprend aisément pour $\beta = 0$ par équivalence avec un chemin Brownien mentionnée plus haut, est plus inattendu pour $\beta \neq 0$.

• Réseaux semi-aléatoires

La gravité quantique lorentzienne utilise une modélisation discrète sous forme de réseaux qui sont aléatoires dans la direction d'espace mais organisés en couches régulières dans la direction de temps. Plus généralement se pose la question de l'étude des réseaux *semi-aléatoires* avec un certain nombre, d , de dimensions aléatoires et un nombre D de dimensions régulières. Pour le cas $d = 1$, D quelconque, nous avons mis en évidence une relation d'inversion ([publication 42](#)) qui permet de relier le problème à celui d'objets durs sur les D dimensions régulières, problème en général beaucoup plus facile à résoudre et dont il existe beaucoup de versions résolues dans la littérature. Comme application principale, cette équivalence avec des objets durs nous a permis de résoudre exactement une multitude de problèmes de réseaux semi-aléatoires à $1 + 1$ dimensions (incluant le gravité Lorentzienne bidimensionnelle usuelle) et de construire des réseaux multicritiques (c'est à dire de dimension fractale plus élevée) utilisant, outre des triangulations, des pavages

avec des objets de taille plus grande. La classification des théories gravitationnelles multicritiques que nous avons obtenue dans le cas lorentzien est tout à fait comparable à celle de la gravité bidimensionnelle ordinaire.

Cette technique d'inversion nous a également permis de donner la première solution exacte d'un problème de gravité Lorentzienne à trois dimensions, basée sur l'équivalence avec le problème des hexagones durs à deux dimensions (*publication 42*).

7. COMBINATOIRE DES GRAPHS ALÉATOIRES (publications 43-49)

• Objets durs sur réseaux aléatoires

L'étude des gaz de boucles compactes sur réseaux aléatoires nous a montré qu'un certain nombre de problèmes à fortes contraintes géométriques donnent lieu à des points critiques dont la classe d'universalité est liée au réseau sous-jacent. En d'autres termes, le résultat dépend de la classe de réseaux sur lesquels on moyenne. Un autre exemple qui nous a intéressé est celui des objets durs (nom générique pour des modèles de particules sur réseau qui excluent leurs plus proches voisins) à deux dimensions. Nous avons résolu exactement plusieurs versions de ce problème sur réseaux aléatoires incluant, outre le modèle simple à une particule, un modèle à deux types de particules. Nous avons montré que dans tous ces cas, c'est la colorabilité des réseaux sous-jacents qui détermine le diagramme de phase et la classe d'universalité des points de transitions. Dans le cas du modèle à deux particules, le diagramme de phase sur réseaux aléatoires bi-coloriables présente en particulier la physique d'un point de cristallisation *tricritique* (point de rencontre d'une transition du premier ordre et d'une transition du second ordre), alors que la transition de cristallisation disparaît pour des réseaux non bi-coloriables. Ces résultats sont rassemblés dans la *publication 43*.

• Combinatoire des graphes planaires

Comme nous l'avons vu, les réseaux aléatoires fournissent l'archétype de discrétisation de surfaces aléatoires, à la fois en gravité quantique à deux dimensions et pour la physique des membranes. Dans leur version duale, ces réseaux ne sont rien d'autre que des graphes de topologie fixée, par exemple planaire. L'énumération des graphes planaires est un sujet classique de combinatoire motivé à l'origine par le célèbre problème des quatre couleurs pour le coloriage des cartes. En physique, le même problème combinatoire est apparu dans le contexte du développement perturbatif des théories de jauge $SU(N)$, dont les

diagrammes de Feynman dominants à grand N correspondent précisément à des graphes planaires.

Jusqu'à présent, la solution la plus efficace au problème reposait sur des méthodes d'intégrale matricielle, qui nécessitent une technicité certaine et cachent en partie la nature combinatoire du problème. Nos travaux ont consisté à développer une méthode d'énumération purement combinatoire, inventée par G. Schaeffer (*Electron.J.Combin* 4 (1997) R20) et basée sur une équivalence entre graphes planaires et des graphes en arbres décorés de manière appropriée.

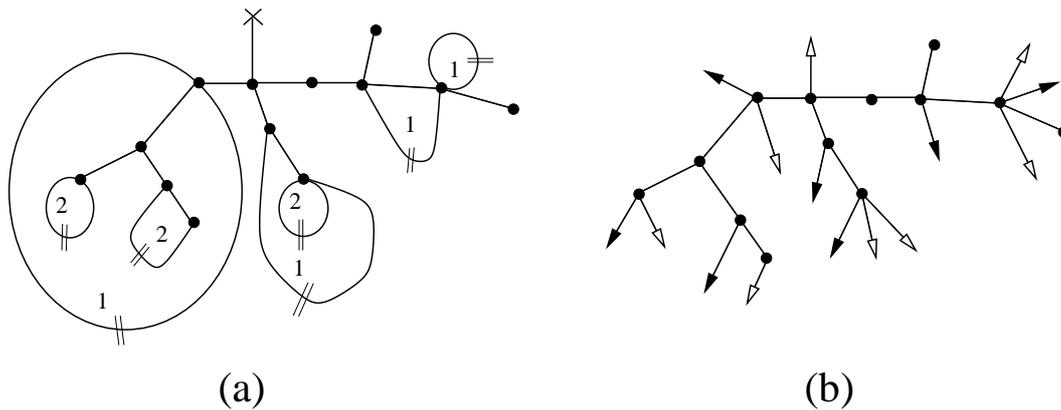


Fig. 4: Un graphe planaire (a) peut être découpé en un arbre “bourgeonnant” (b). La correspondance est biunivoque

Dans la [publication 45](#), nous avons considéré le problème le plus général du dénombrement des graphes planaires avec un poids différent selon les différentes valences (nombre de voisins) possibles des vertex. Nous avons montré comment retrouver la solution du modèle à une matrice pour ce problème, *sous exactement la même forme*, de manière purement combinatoire en établissant une bijection entre les graphes et des arbres dits “bourgeonnants”, faciles à énumérer. L'idée consiste à découper chaque graphe pour obtenir un arbre, tout en plaçant des bourgeons permettant à la fin de reconstruire le graphe de départ (voir figure 4). Une telle bijection était connue dans le cas, beaucoup plus simple, des graphes à vertex de valences uniquement paires. Nous avons généralisé cette bijection au cas de valences arbitraires et fait ainsi le lien direct avec le modèle à une matrice, révélant en particulier le sens combinatoire d'un certain nombre de quantités rencontrées dans le calcul par modèle de matrice.

Des techniques combinatoires similaires sont utilisées dans la [publication 44](#) pour énumérer des triangulations planaires dont les vertex sont tricoloriés, qui ne sont rien

d'autre que les triangulations eulériennes ou pliables. L'introduction de couleurs, qui était difficile dans l'approche par modèle de matrice, devient relativement simple dans l'approche combinatoire, qui mène sans grande difficulté au résultat.

Dans la *publication 46*, nous franchissons une nouvelle étape en généralisant l'approche combinatoire bijective au cas de graphes sur lesquels "vivent" des modèles statistiques, avec interactions entre voisins. Le cas que nous considérons est un des modèles de particules dures décrits plus haut (résolu alors par modèle de matrice). Nous montrons comment la méthode bijective combinatoire peut être appliquée, un résultat a priori surprenant car le découpage des graphes en arbres fait que des points voisins sur le graphe deviennent déconnectés sur l'arbre correspondant. Nous retrouvons ainsi les résultats du modèle de matrice et éclaircissons la nature combinatoire de la solution.

•Statistique des distances sur réseaux aléatoires

La méthode de résolution combinatoire étant complètement nouvelle, elle devrait permettre d'obtenir un certain nombre de résultats nouveaux inaccessibles par les méthodes précédentes.

Un premier exemple concerne la statistique des distances géodésiques sur des graphes aléatoires. Par distance géodésique, on désigne la nombre minimal de liens séparants deux noeuds du réseau. Le découpage d'un graphe planaire en arbre bourgeonnant permet de garder en mémoire la distance géodésique à une origine (un point arbitraire sur le graphe). Nous avons donc pu calculer exactement le nombre de graphes avec deux points marqués à distance géodésique fixée, et ce dans le cas général des graphes à valence paires (*publication 47*). De manière remarquable, la solution explicite du problème fait apparaître des expressions de type "solitons", suggérant une structure intégrable sous-jacente. Par passage à la limite continue, nous obtenons ainsi la valeur de la fonction à deux points sur une surface aléatoire en fonction de la distance géodésique entre ces deux points le long de la surface. Ceci est fait dans le cas dit de gravité pure (qui est la limite générique des surface aléatoires) mais également pour les surfaces dites multicritiques qui peuvent être obtenues en ajustant les poids associés aux différentes valences des noeuds.

Dans le cas des triangulations eulériennes ou des quadrangulations, il existe une autre bijection entre ces graphes et des arbres dit "bien étiquetés", portant des labels entiers positifs sur les noeuds variant d'au plus une unité d'un noeud à son voisin. Ces labels ne sont rien d'autre que la distance géodésique à un point de référence sur le graphe associé. Le dénombrement d'arbres bien étiquetés permet d'avoir accès à la statistique du *nombre* de

points sur le graphe à une distance donnée d'un point de référence, par exemple le nombre de voisins immédiats, de seconds voisins, etc... Nous avons dérivé dans la [publication 49](#) un certain nombre d'expressions explicites pour la statistique du nombre de voisins d'un point donné dans une triangulation eulérienne ou une quadrangulation aléatoires (par exemple la probabilité d'avoir m noeuds voisins et/ou m' arêtes voisines).

Les arbres bien étiquetés peuvent être vus comme la version discrète de processus de branchement diffusant à une dimension, le label jouant le rôle de la position dans l'espace de plongement. De tels processus sont considérés en mathématiques sous le nom d'ISE (Integrated SuperBrownian Excursion). Par exemple, on peut imaginer une population se reproduisant et diffusant à une dimension. Une question naturelle est de calculer la probabilité que cette population reste confinée dans un segment, c'est à dire n'en atteigne jamais les bords. Cette probabilité est calculée dans la [publication 48](#). Dans la limite continue, elle prend la forme remarquable d'une fonction \wp de Weierstrass.

8. PERSPECTIVES

Une direction qui semble aujourd'hui très prometteuse est le développement des techniques combinatoires bijectives basées sur l'énumération d'arbres décorés.

Contrairement aux méthodes combinatoires plus anciennes (par exemple récursives) les approches bijectives font apparaître des quantités qui semblent très liées à celles rencontrées dans les modèles de matrices. Par exemple, les fonctions de partition à distance géodésique fixée des méthodes combinatoires et celles à genre fixé des modèles de matrice ont une structure très similaire. Toutes ces similitudes manifestes sont encore à comprendre et la comparaison croisée des deux techniques semble assez prometteuse.

L'application de ces techniques aux gaz de boucles sur réseaux aléatoires serait, si elle était mise en œuvre (est-ce possible?) probablement très riche d'enseignement.

Les propriétés remarquables des méandres (en particulier l'apparition d'exposants irrationnels) semblent pouvoir se généraliser dans le cadre plus général de la statistique des nœuds. Là encore, les méthodes combinatoires devraient avoir leur mot à dire.

LISTE DE PUBLICATIONS

Emmanuel Gitter

1. DAVID F., GUITTER E., *Instabilities in membrane models*, Europhys. Lett. 3, 1169-1174 (1987)
2. DAVID F., GUITTER E., PELITI L., *Critical properties of fluid membranes with hexatic order*, J. Physique 48, 2059-2066 (1987)
3. DAVID F., GUITTER E., *Rigid random surfaces at large d* , Nucl. Phys. B 295 [FS], 332-362 (1988)
4. DAVID F., GUITTER E., *Crumpling transition in elastic membranes: renormalization group treatment*, Europhys. Lett. 5, 709-713 (1988)
5. GUITTER E., DAVID F., LEIBLER S., PELITI L., *Crumpling and buckling transitions in polymerized membranes*, Phys. Rev. Lett. 61, 2949-2952 (1988)
6. GUITTER E., DAVID F., LEIBLER S., PELITI L., *Thermodynamical behavior of polymerized membranes*, J. Physique 50, 1787-1819 (1989)
7. GUITTER E., *Physique statistique et propriétés critiques des membranes*, Thèse de Doctorat, Université Paris VI, 26 juin 1989
8. GUITTER E., LEIBLER S., MAGGS A.C., DAVID F., *Stretching and buckling of polymerized membranes: a Monte Carlo study*, J. Physique 51, 1055-1060 (1990)
9. GUITTER E., KARDAR M., *Tethering, crumpling, and melting transition in hexatic membranes*, Europhys. Lett. 13, 441-446 (1990)
10. GUITTER E., *Anharmonic theory of a stack of tethered membranes*, J. Physique 51, 2407-2420 (1990)
11. GUITTER E., LEIBLER S., *On supercoiling instability in closed DNA*, Europhys. Lett. 17, 643-648 (1992)
12. GUITTER E., PALMERI J., *Tethered membranes with long-range interactions*, Phys. Rev. A45, 734-744 (1992)
13. DAVID F., DUPLANTIER B., GUITTER E., *Renormalization theory for interacting crumpled manifolds*, Nucl. Phys. B 394, 555-664 (1993)

14. DAVID F., DUPLANTIER B., GUITTER E., *Renormalization of crumpled manifolds*, Phys. Rev. Lett. 70, 2205-2208 (1993)
15. DAVID F., DUPLANTIER B., GUITTER E., *Renormalization and Hyperscaling for Self-Avoiding Manifold Models*, Phys. Rev. Lett. 72, 311-315 (1994)
16. DI FRANCESCO P., GUITTER E., *Entropy of folding of the triangular lattice*, Europhys. Lett. 26, 455-460 (1994)
17. DI FRANCESCO P., GUITTER E., *Folding transition of the triangular lattice*, Phys. Rev. E 50, 4418-4426 (1994)
18. BOWICK M.J., DI FRANCESCO P., GOLINELLI O., GUITTER E., *Three-dimensional folding of the triangular lattice*, Nucl. Phys. B [FS] 450, 463-494 (1995)
19. DI FRANCESCO P., GOLINELLI O., GUITTER E., *Meander, folding and arch statistics*, dans BOUSQUET-MÉLOU M., LOEB D.E., eds., Conférence 'Combinatorics and Physics' du Centre International de Rencontres Mathématiques, à la mémoire de Claude Itzykson, Marseille, France, 27-31 Mars 1995, Math. Comput. Modelling 26, 97-147 (1997)
20. DI FRANCESCO P., GOLINELLI O., GUITTER E., *Folding, meanders and arches* dans BAULIEU L., ed., École d'été de Cargèse 'Low Dimensional Applications of Quantum Field Theory', Cargèse, France, 11-31 Juillet 1995, (Plenum Press) pp. 87-120 (1997)
21. DI FRANCESCO P., GOLINELLI O., GUITTER E., *Meanders and the Temperley-Lieb algebra*, Commun. Math. Phys. 186, 1-59 (1997)
22. DI FRANCESCO P., GOLINELLI O., GUITTER E., *Meanders: a direct enumeration approach*, Nucl. Phys. B 482 [FS], 497-535 (1996)
23. BOWICK M.J., DI FRANCESCO P., GOLINELLI O., GUITTER E., *Discrete folding*, dans ALBERTO DEVOTO, ed., Proceedings of the 4th Chia Meeting on Condensed Matter and High Energy Physics, Chia, Sardègne, 3-10 Septembre 1995 (World Scientific, Singapore, 1996)
24. DI FRANCESCO P., GOLINELLI O., GUITTER E., *Meanders* dans DROUFFE J.-M., ZUBER J.-B., eds., 'The Mathematical Beauty of Physics', à la mémoire de Claude Itzykson, Saclay, France, 5-7 Juin 1996, Advanced Series in Mathematical Physics Vol. 24 (1997) (World Scientific Publishing Co.)

25. DI FRANCESCO P., GUITTER E., MORI S., *Folding of the triangular lattice with quenched random bending rigidity*, Phys. Rev. E 55, 237-251 (1997)
26. FALCIONI M., BOWICK M.J., GUITTER E., THORLEIFSSON G., *The Poisson ratio of crystalline surfaces*, Europhys. Lett. 38, 67-72 (1997)
27. BOWICK M.J., GOLINELLI O., GUITTER E., MORI S., *Geometrical folding transitions of the triangular lattice in the Face-Centred Cubic lattice*, Nucl. Phys. B [FS] 495, 583-607 (1997)
28. DAVID F., DUPLANTIER B., GUITTER E., *Renormalization of Edwards models for polymerized membranes*, prépublication SPhT Saclay T97/001, cond-mat/9701136
29. BOWICK M.J., GUITTER E., *Effects of self-avoidance on the tubular phase of anisotropic membranes*, Phys. Rev. E 56, 7023-7032 (1997)
30. GUITTER E., *Méthodes de théorie des champs pour les polymères et les membranes polymérisées*, Ecole de Physique de la Matière Condensée, Beg-Rohu, France, 25 août - 6 septembre 1997
31. DI FRANCESCO P., EYNARD B., GUITTER E., *Coloring Random Triangulations*, Nucl. Phys. B 516, 543-587 (1998)
32. MORI S., GUITTER E., *Folding of the Triangular Lattice in the Face Centered Cubic lattice with quenched random spontaneous curvature*, J. Phys. A: Math. Gen. 30, 829-838 (1997)
33. EYNARD B., GUITTER E., KRISTJANSEN C., *Hamiltonian Cycles on a Random Three-coordinate Lattice*, Nucl. Phys. B 528, 523-532 (1998)
34. CHAVE J., GUITTER E., *Statistical and dynamical properties of the discrete Sinai model at finite times*, J. Phys. A 32, 445-468 (1999)
35. GUITTER E., ORLANDINI E., *Monte Carlo results for projected self-avoiding polygons: a two-dimensional model for knotted polymers*, J. Phys. A 32, 1359-1385 (1999)
36. GUITTER E., KRISTJANSEN C., NIELSEN J.L., *Hamiltonian Cycles on Random Eulerian Triangulations*, Nucl. Phys. B [FS] 546, 731-750 (1999)
37. DI FRANCESCO P., GUITTER E., KRISTJANSEN C., *Fully Packed $O(n=1)$ Model on Random Eulerian Triangulations*, Nucl. Phys. B 549, 657-667 (1999)

38. DI FRANCESCO P., GUITTER E., KRISTJANSEN C., *Integrable 2D Lorentzian Gravity and Random Walks*, Nucl. Phys. B 567, 515-553 (2000)
39. DI FRANCESCO P., GOLINELLI O., GUITTER E., *Meanders: Exact Asymptotics*, Nucl. Phys. B 570, 699-712 (2000)
40. DI FRANCESCO P., GUITTER E., JACOBSEN J.L., *Exact meander asymptotics: a numerical check*, Nucl. Phys. B [FS] 580, 757-795 (2000)
41. DI FRANCESCO P., GUITTER E., KRISTJANSEN C., *Generalized Lorentzian Gravity triangulations and the Calogero Hamiltonian*, Nucl. Phys. B 608, 485-526 (2001)
42. DI FRANCESCO P., GUITTER E., *Critical and multicritical semi-random (1+d)-dimensional lattices and hard objects in d dimensions*, J. Phys. A 35, 897-927 (2002)
43. BOUTTIER J., DI FRANCESCO P., GUITTER E., *Critical and tricritical hard objects on bicolourable random lattices: exact solutions*, J. Phys. A 35, 3821-3854 (2002)
44. BOUTTIER J., DI FRANCESCO P., GUITTER E., *Counting Colored Random Triangulations*, Nucl. Phys. B 641, 519-532 (2002)
45. BOUTTIER J., DI FRANCESCO P., GUITTER E., *Census of planar maps: from the one-matrix model solution to a combinatorial proof*, Nucl. Phys. B [PM] 645, 477-499 (2002)
46. BOUTTIER J., DI FRANCESCO P., GUITTER E., *Combinatorics of hard particles on planar graphs*, Nucl. Phys. B [FS] 655, 313-341 (2003)
47. BOUTTIER J., DI FRANCESCO P., GUITTER E., *Geodesic distance in planar graphs*, Nucl. Phys. B [FS] 663, 535-567 (2003)
48. BOUTTIER J., DI FRANCESCO P., GUITTER E., *Random trees between two walls: Exact partition function*, à paraître dans J. Phys. A (cond-mat/0306602)
49. BOUTTIER J., DI FRANCESCO P., GUITTER E., *Statistics of planar graphs viewed from a vertex: A study via labeled trees*, à paraître dans Nucl. Phys. B [FS] (cond-mat/0307606)