Université Pierre et Marie Curie PARIS 6

Habilitation à diriger des recherches

Spécialité : Physique Théorique

présentée par

Emmanuel Guitter

CEA-Saclay, Service de Physique Théorique,

F-91191 Gif sur Yvette Cedex, France

Sujet :

Physique statistique de modèles contraints sur réseaux réguliers et aléatoires: des pliages aux méandres

soutenue le 10 mai 2004 devant le jury composé de

Bertrand DUPLANTIER	Président
Malte HENKEL	Rapporteur
Vladimir KAZAKOV	Rapporteur
Bernard NIENHUIS	Rapporteur
Mireille BOUSQUET–MÉLOU	
Jesper JACOBSEN	

Table des matières

Introduction

Le but de ce mémoire est de présenter un certain nombre de résultats concernant les propriétés statistiques de systèmes fortement contraints, tous intimement liés à des problèmes de *pliages de réseaux* bidimensionnels discrets, qu'ils soient réguliers ou aléatoires. Ce travail s'appuie plus particulièrement sur les 9 publications reproduites en annexe et tente de les regrouper dans un langage unifié mettant en évidence les liens étroits qui existent entre des problèmes au départ assez différents.

La première partie s'intéresse au problème du pliage de réseaux bidimensionnels proprement dit. Il s'agit de plier un réseau (par exemple triangulaire) le long de ses arêtes tout en conservant ses faces non-déformées (ici les faces doivent rester des triangles équilatéraux). Une des caractéristiques principales de ce problème est que les degrés de liberté de pliage sont très "rigides", ce qui conduit à des systèmes fortement contraints. En fait, la nature intrinsèquement géométrique du pliage rend le problème extrêmement sensible aux détails à la fois du réseau à plier et de l'espace "cible" dans lequel on le plie. Dans cette première partie, nous étudions en détail le cas du réseau triangulaire, pour lequel plusieurs modèles de pliage seront discutés, correspondant à plusieurs "espaces cibles". Nous nous attacherons à la fois à montrer comment définir les modèles en identifiant les degrés de liberté de pliage et à en donner quelques propriétés statistiques (entropie, diagramme de phase). Cette étude révélera le lien intime qui existe entre les problèmes de pliage, de coloriage, et également les gaz de boucles compactes dont les pliages sont en fait des cas particuliers. Nous verrons finalement comment étendre notre description au cas du pliage de triangulations aléatoires, ce qui mettra en évidence le rôle particulier des réseaux dits "eulériens" adaptés à ces problèmes.

La deuxième partie s'intéresse à des problèmes de gaz de boucles compactes, c'est à dire passant par tous les nœuds du réseau et dont les pliages de la première partie sont en fait des cas particuliers. Nous verrons plus précisément ce que deviennent les modèles correspondants quand les boucles sont tracées sur des réseaux aléatoires. Cette étude révélera comment le caractère bipartite ou non du réseau change les propriétés statistiques du système. Une attention particulière sera portée aux cycles hamiltoniens, correspondant au cas où le réseau est couvert par une boucle unique. Dans le cas de graphes trivalents bipartites (duaux des triangulations eulériennes), nous verrons comment l'étude du problème amène de façon assez surprenante à la prédiction d'un exposant de configuration irrationnel dans un problème combinatoire apparemment anodin.

Enfin, la troisième partie s'intéresse aux méandres, un problème de combinatoire à l'énoncé particulièrement simple (compter le nombre de configurations d'un circuit traversant une rivière en un nombre donné de ponts) mais qui résiste encore aujourd'hui à une énumération exacte. Après avoir donné un certain nombre de résultats exacts pour des variantes du problème, nous étudierons les propriétés asymptotiques (à grand nombre de ponts) des méandres proprement dits. La formulation des méandres comme gaz de boucles compactes sur des graphes aléatoires tétravalents permettra en particulier, comme dans la deuxième partie, la prédiction d'exposants de configuration irrationnels qui seront testés numériquement. Enfin nous terminerons cette étude en montrant comment les méandres peuvent être re-interprétés comme un problème particulier de pliage de quadrangulations aléatoires.

Nos conclusions et quelques perspectives sont regroupées dans la dernière partie de ce mémoire.

Nous avons volontairement privilégié dans ce mémoire une présentation synthétique des problèmes posés et des résultats correspondants obtenus. Le lecteur est invité à consulter les 9 publications en annexe pour les détails des divers calculs, preuves ou constructions, ainsi que pour une liste plus exhaustive des références. Notons finalement qu'une autre discussion des problèmes de pliage et de coloriage se trouve dans la référence [1].

Partie A : Pliages

L'étude des pliages de réseaux bidimensionnels a été entreprise dans le but de fournir des modèles discrets de surfaces fluctuantes. Dans cette approche, les pliages de réseaux réguliers comme par exemple le réseau triangulaire sont apparus comme des discrétisations élémentaires de membranes polymérisées dont la métrique interne est essentiellement gelée mais qui peuvent fluctuer dans l'espace. De même, le pliage de réseaux aléatoires permet de modéliser les fluctuations de membranes fluides, dont la métrique interne est une variable dynamique.

D'un point de vue plus intrinsèque, la caractéristique principale des pliages est qu'ils fournissent des modèles statistiques à fortes contraintes géométriques, dont les degrés de liberté sont intimement liés aux symétries du réseau sous-jacent. Cette sensibilité au réseau sous-jacent existe également dans d'autres problèmes comme les objets durs ou les gaz de boucles compactes dont nous verrons que les pliages sont en fait des cas particuliers. Dans le cas de réseaux aléatoires, ce lien entre statistique et géométrie a la conséquence inhabituelle que la classe d'universalité du modèle dépend du maintien ou non de certaines symétries du réseau. Nous en verrons une illustration dans les parties B et C de ce mémoire.

Dans cette première partie dédiée au pliage, on s'intéressera exclusivement au pliage de *triangulations*, soit dans le cas régulier (réseau triangulaire plan), soit dans le cas aléatoire (triangulations aléatoires planaires). La section 1 donne une définition générale des pliages du réseau triangulaire régulier. Deux cas particuliers sont discutés en détail dans les sections 2 et 3, correspondant respectivement au pliage plan (c'est à dire à deux dimensions) et au pliage à trois dimensions sur le réseau cubique faces centrées. Le lien entre ces pliages et des gaz de boucles compactes est établi dans la section 4. Le cas du pliage de triangulations aléatoires est discuté dans la section 5.

1. Pliages du réseau triangulaire: généralités

Les pliages du réseau triangulaire peuvent être définis de manière équivalente par des variables de nœuds, de liens, ou de faces.

◇ <u>*Variables de nœuds*</u>

De manière générale, on désigne par *pliage* du réseau triangulaire toute application $v \to X_v$ associant à chaque nœud v du réseau une position X_v dans $\mathbb{R}^d$, avec la contrainte de lien que si v et w sont voisins sur le réseau, alors

$$|X_v - X_w| = 1. \tag{1.1}$$

En particulier, tout triangle élémentaire du réseau triangulaire a pour image un triangle *équilatéral* de côté 1 dans $\mathbb{R}^d$. Les liens servent alors de *charnières* entre triangles voisins qui peuvent a priori former un angle arbitraire.

Dans la suite nous étudierons deux exemples particuliers de pliages:

- le pliage plan, c'est à dire le cas $d = 2$.
- le pliage sur le réseau Cubique Faces Centrées (CFC) correspondant à $d = 3$ et des angles de pliages bien précis.

◇ <u>*Variables de liens*</u>

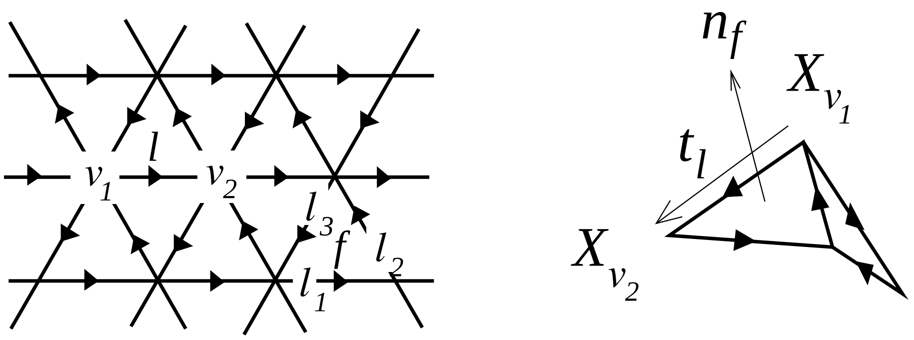

Fig. 1: Orientation des liens du réseau triangulaire. Les variables de nœuds (X_v), de liens (t_l) et de faces (n_f)

Les positions X_v sont des variables de nœuds. A une translation globale près, on peut définir de manière équivalente un pliage par des variables de liens. On commence pour cela par *orienter* tous les liens du réseau triangulaire de manière cohérente de sorte que tous les triangles pointe en haut soient orientés dans le sens trigonométrique et tous les triangles pointe en bas soient orientés dans le sens inverse (voir figure 1). A tout lien orienté $l \equiv (v_1 \to v_2)$, on associe la variable de lien

$$t_l \equiv X_{v_2} - X_{v_1} \tag{1.2}$$

de sorte que la contrainte (1.1) impose que les t_l soient des vecteurs *unitaires*. Les variables de liens ne sont pas indépendantes puisqu'elles doivent satisfaire la contrainte de face:

$$t_{l_1} + t_{l_2} + t_{l_3} = 0 \tag{1.3}$$

pour les trois liens orientés l_1, l_2 et l_3 autour de chaque triangle.

◇ *Variables de faces*

Enfin, on peut également décrire un pliage par des variables de faces en considérant par exemple (pour $d = 2, 3$) le vecteur normal à chaque triangle f

$$n_f \equiv \epsilon \frac{2}{\sqrt{3}}\; t_{l_1} \times t_{l_2} \tag{1.4}$$

où l_1 et l_2 sont deux liens orientés consécutifs autour de f et avec $\epsilon = +1$ (resp. -1) pour les triangles pointe en haut (resp. pointe en bas) sur le réseau.

Il est naturel de penser à ce vecteur normal comme à une variable de spin. L'introduction d'un couplage ferromagnétique entre normales voisines permet alors de modéliser une *énergie de courbure* pour la surface discrétisée, tendant à l'aplanir. Les membranes avec énergie de courbure sont connues pour présenter une “transition de froissement” [2-5] entre une phase *plate* et une phase *froissée*. Dans le langage du pliage, une phase plate correspond à un ordre ferromagnétique où les normales sont en moyenne alignées tandis qu'une phase froissée correspond au contraire à une phase de type paramagnétique. Nous verrons par la suite de tels exemples de transitions de froissement ainsi que d'autres types de transitions de conformation.

Dans les deux cas que nous allons considérer plus en détail ci-dessous, la donnée des vecteurs normaux permet toujours de reconstruire le pliage à une translation et une rotation globales près. Comme les variables de nœuds et de liens , les variables de faces ne sont pas indépendantes sur chaque triangle. Les 6 vecteurs normaux associés aux 6 triangles autour d'un nœud sont corrélés par une contrainte de nœud. Une formulation précise de cette contrainte sera donnée dans le cas du pliage plan, où elle conduit à un modèle “à 11 vertex”, et dans le cas du pliage sur le réseau CFC, où elle conduit à un modèle “à 96 vertex”.

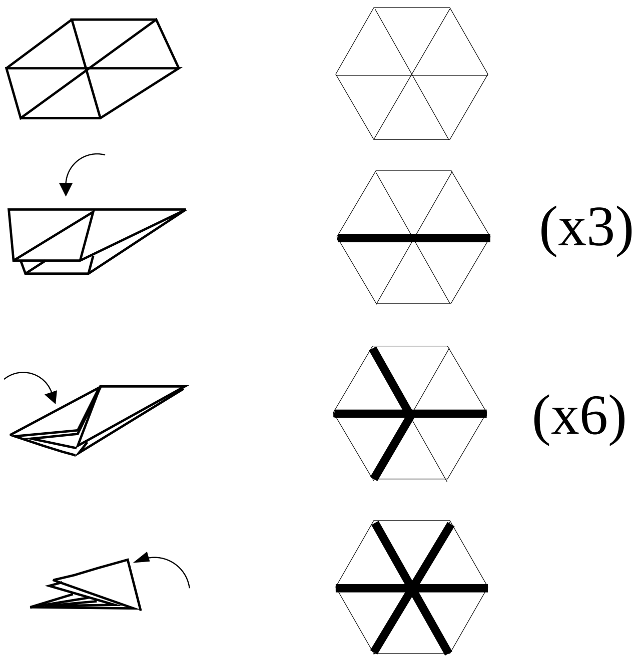

Fig. 2: Les 11 environnements possibles de plis d'un hexagone élémentaire correspondant (de haut en bas) à: pas de plis, 1 pli (3 configurations), 2 plis (6 configurations) ou 3 plis. Les plis sont indiqués à droite par un trait gras.

2. Pliage plan du réseau triangulaire: modèle à 11 vertex

Cette section est basée sur les publications I et II reproduites en annexe.

Le cas le plus simple de pliage, introduit pour la première fois par par Y. Kantor et M.V. Jarić [6], correspond au pliage plan, c'est à dire dans $\mathbb{R}^2$. Dans ce cas, l'angle entre deux triangles voisins[1] est soit 0° (pas de pli), soit 180° (pli). L'examen des pliages possibles d'un hexagone élémentaire conduit aux 11 environnements possibles dessinés sur la figure 2. Il est à noter que notre définition du pliage se limite à l'*image* du réseau par le pliage (les X_v) et ne distingue pas les différentes manières de plier menant à la même configuration. En particulier, la surface pliée est "fantôme", c'est à dire non auto-évitante. Le problème de l'auto-évitement est extrêmement difficile, même à une dimension, comme nous le verrons avec les méandres dans la partie C. On peut facilement se convaincre que le pliage n'introduit pas de contraintes supplémentaires au delà de celles existant sur les hexagones élémentaires. Cela sera plus visible plus bas dans l'expression du pliage en termes de variables de liens. Le problème du pliage plan est entièrement caractérisé par

[1] On prendra ici comme définition de l'angle entre deux triangles l'angle entre leurs deux vecteurs normaux.

les règles sur les hexagones élémentaires. En ce sens, le pliage plan est un modèle à 11 vertex.

◇ *Variables de faces: spins d'Ising contraints*

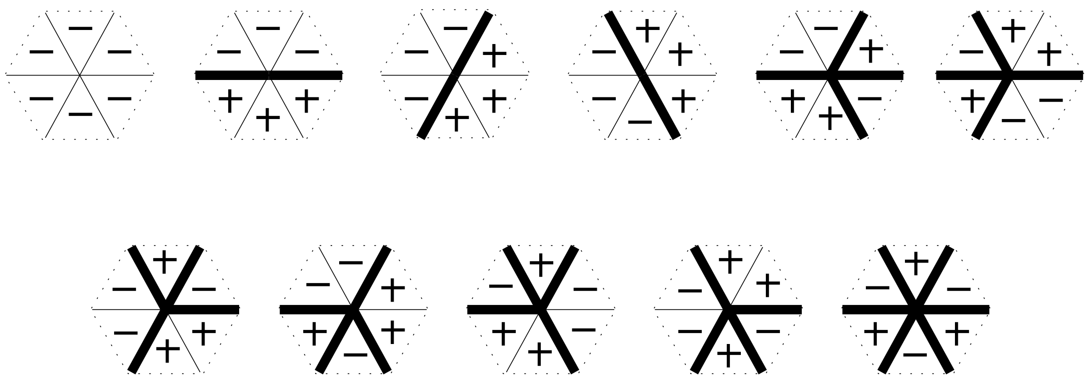

Fig. 3: Les 11 environnements possibles de spins (à un retournement global de spins près) autour d'un nœud. Dans tous les cas, le nombre de spins $+1$ (resp. -1) est un multiple de 3.

Le vecteur normal à chaque triangle peut être décrit par un spin d'Ising qui ne peut prendre que deux valeurs $\sigma = +1$ ou $\sigma = -1$ suivant que le triangle a été retourné ou non dans le pliage. Les plis ne sont rien d'autre que les frontières de domaine pour la variable de spin. Les 11 environnements de la figure 2 correspondent aux 11 environnements possibles en termes de spins (à un retournement global des spins près) indiqués sur la figure 3. On voit alors immédiatement qu'une caractérisation simple des configurations de spins admises est que le nombre de spins $+1$ doit valoir 0, 3 ou 6, c'est à dire doit être un multiple de 3, ou de manière équivalente:

$$\sum_{i=1}^{6} \sigma_i = 0 \mod 3 \tag{2.1}$$

pour les six spins autour de chaque nœud. On vérifie que le nombre de telles configurations est bien $\binom{6}{0} + \binom{6}{3} + \binom{6}{6} = 22 = 2 \times 11$ comme il se doit.

◇ *Variables de liens: modèle des trois couleurs*

Une question naturelle concerne le calcul de l'*entropie* de pliage qui caractérise la croissance exponentielle du nombre Z_N de pliages possibles en fonction du nombre N de triangles (pour un sous-réseau fini du réseau triangulaire) . On définit l'entropie s de pliage par[2]:

$$s \equiv \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \text{Log } Z_N \equiv \text{Log } q \ . \tag{2.2}$$

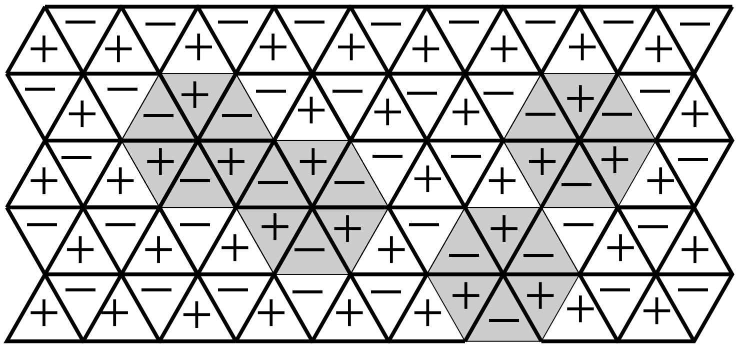

Fig. 4: En partant de la configuration complètement repliée, on peut retourner les 6 spins d'un hexagone élémentaire (ici en grisé) et conserver une configuration admise. Ce retournement est possible simultanément pour plusieurs hexagones tant qu'ils ne se chevauchent pas (hexagones durs).

On peut alors interpréter q comme le nombre de degrés de liberté par triangle, avec clairement, pour des spins d'Ising contraints, $1 \leq q \leq 2$. L'existence d'une entropie s non nulle (i.e. $q > 1$) n'est pas évidente a priori car il n'existe pas de configuration où les plis soient localisés. Une manière simple de s'en convaincre consiste à couper chaque configuration de la figure 3 verticalement en son milieu et à remarquer que chaque fois qu'un pli est présent sur la moitié gauche de l'hexagone, alors un pli est également présent sur la moitié droite. Les plis se propagent donc à l'infini de la gauche vers la droite. En d'autres termes, la configuration plate (sans plis) n'admet pas d'"excitations locales". Numériquement, Y. Kantor et M.V. Jarić ont montré que $q \sim 1,21$ et donc qu'il y a bien une entropie de pliage non nulle. Ce résultat peut être compris en partant non pas de la configuration plate mais de la configuration complètement repliée, avec un ordre antiferromagnétique parfait pour les spins. On peut alors retourner globalement tous les spins d'un même hexagone et la configuration est toujours admise (voir figure 4). En ce

[2] Dans cette définition, on s'attend à ce que la forme du sous-réseau ne soit pas importante pourvu que les deux dimensions soient extensives et que les conditions au bord soient libres.

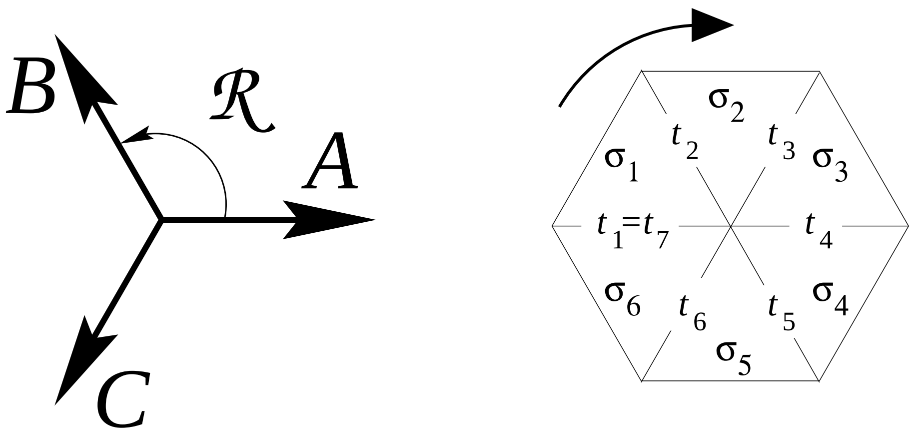

Fig. 5: Les trois valeurs (couleurs) permises pour t_l sont A, $B = \mathcal{R}A$ et $C = \mathcal{R}^2 A$. La relation entre variables de liens et variables de faces autour d'un nœud s'écrit $t_{i+1} = \mathcal{R}^{\sigma_i} t_i$. La variable de lien est bien définie si $t_7 = t_1$, c'est à dire si (2.1) est satisfaite.

sens, il existe des excitations locales de la configuration complètement repliée et donc une entropie de "dépliage".

L'entropie peut être calculée exactement en décrivant le pliage plan en termes de variables de liens. Partant d'un triangle de référence, les vecteurs t_{l_i}, $i = 1, 2, 3$ autour de ce triangle sont trois vecteurs unitaires dont la somme est nulle, donc de la forme $t_{l_1} = A$, $t_{l_2} = B \equiv \mathcal{R}A$ et $t_{l_3} = C \equiv \mathcal{R}^2 A$ où A est un vecteur unitaire et $\mathcal{R}$ la rotation d'angle $120°$ (ou au choix $-120°$). Il est alors facile de se convaincre de proche en proche que les vecteurs t_l pour *tous* les liens du réseau ne peuvent prendre que les mêmes valeurs A, B ou C, avec de plus la contrainte que les trois "couleurs" A, B et C soient représentées une et une seule fois autour de chaque triangle. Un pliage plan du réseau triangulaire est donc équivalent à un *tricoloriage* des liens du réseau par trois couleurs devant rester distinctes autour de chaque triangle. La couleur représente alors simplement l'orientation du lien dans la configuration pliée, parmi trois orientations possibles.

Dans ce langage, le spin d'une face nous renseigne sur l'ordre cyclique des couleurs autour de cette face avec $\sigma = +1$ (resp. $\sigma = -1$) si les couleurs sont dans l'ordre A,B,C (resp. A,C,B) pour les trois liens lus dans le sens trigonométrique. En particulier (voir figure 5), les variables t_i, $i = 1, \cdots, 6$ des liens autour d'un nœud sont reliés aux spins σ_i par $t_{i+1} = \mathcal{R}^{\sigma_i} t_i$. Comme $\mathcal{R}^3$ est égal à l'identité, la variable de lien est bien définie après un tour autour du nœud si et seulement si la relation (2.1) est vérifiée. Dans ce langage, toutes les autres contraintes, qui consisteraient à vérifier la bonne définition d'une variable de lien en suivant ses transformations sur un contour fermé plus grand, se ramènent clairement à la vérifier autour d'hexagones élémentaires uniquement. La règle sur les 6 spins de chaque hexagone élémentaire est donc bien la seule contrainte à imposer.

Dans la version duale, un pliage plan correspond donc au coloriage des liens du réseau hexagonal par trois couleurs devant rester distinctes sur les trois liens arrivant à chaque noeud du réseau. L'entropie de ce problème des trois couleurs a été obtenue par R.J. Baxter [7], et peut donc être réinterprétée comme l'entropie de pliage plan du réseau triangulaire, avec le résultat:

$$q = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)}{\sqrt{3n(3n-2)}} = \frac{\sqrt{\Gamma(1/3)}}{\Gamma(2/3)} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\Gamma(1/3)^{3/2} \tag{2.3}$$

Sa valeur numérique $q = 1,208717...$ ($s = 0,189560...$) est en très bon accord avec l'estimation de la référence [6].

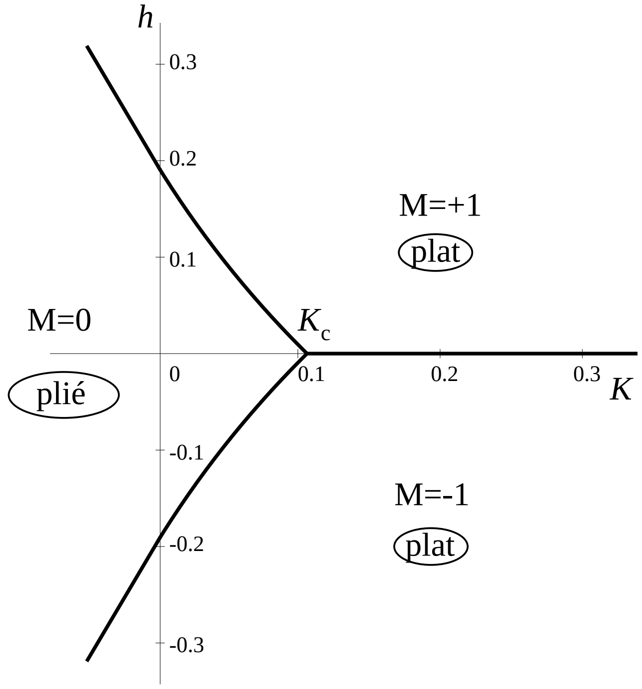

Fig. 6: Diagramme de phase du pliage plan en présence d'un terme de courbure $E = -K\cos(\theta)$ et d'un "champ magnétique" h. Une transition du premier ordre sépare la phase froissée où $M \equiv \langle\sigma\rangle = 0$ d'une phase plate où $M = 1$ (ou -1). Cette phase est en fait gelée dans l'état pur de la surface complètement plate.

On peut finalement s'interroger sur le diagramme de phase obtenu en introduisant une énergie de courbure, par exemple sous la forme d'une énergie de lien $E = -K\cos(\theta)$ où θ est l'angle de pli: 0° (pas de pli) ou 180° (pli complet). On peut également introduire un "champ magnétique" h conjugué au spin σ et qui joue le rôle d'une tension latérale appliquée à la surface. La publication II présente une détermination du diagramme de phase par matrice de transfert (voir figure 6). Cette étude montre l'existence d'une transition de froissement du premier ordre entre une phase froissée à petite valeur de K où $\langle\sigma\rangle = 0$ et une phase *complètement plate* à grande valeur de K correspondant à un *état pur* sans aucun pli, avec $\langle\sigma\rangle = 1$ (ou -1). Ces résultats sont corroborés par l'étude du même problème par une méthode variationnelle [8]. Le fait que la phase plate soit "gelée" dans un seul état est lié au fait que, comme nous l'avons vu, l'état plat n'a pas d'excitations locales.

3. Pliage du réseau triangulaire sur le réseau CFC : modèle à 96 vertex

Cette section et la suivante s'appuient sur les publications III et IV reproduites en annexe.

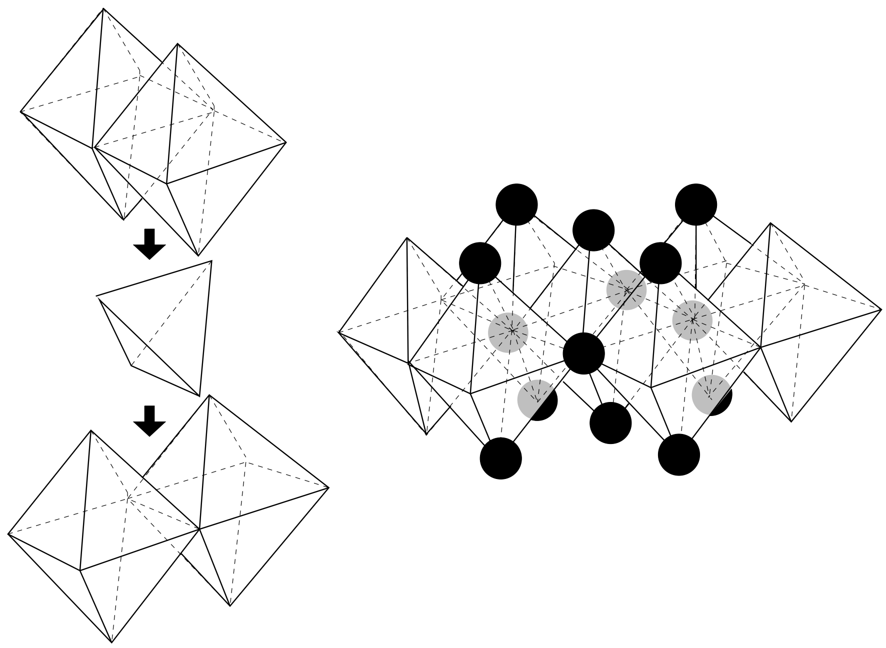

Fig. 7: Le réseau CFC vu comme un empilement d'octaèdres et de tétraèdres. Les sommets (sphères noires) des octaèdres se placent aux sommets de cellules cubiques ainsi qu'au centre des faces de ces cellules.

Un deuxième exemple simple de pliage du réseau triangulaire consiste à le plier sur le réseau Cubique Faces Centrées (CFC) qui a la propriété d'être une discrétisation de $\mathbb{R}^3$ où toutes les cellules élémentaires ont pour faces des triangles équilatéraux. Plus précisément,

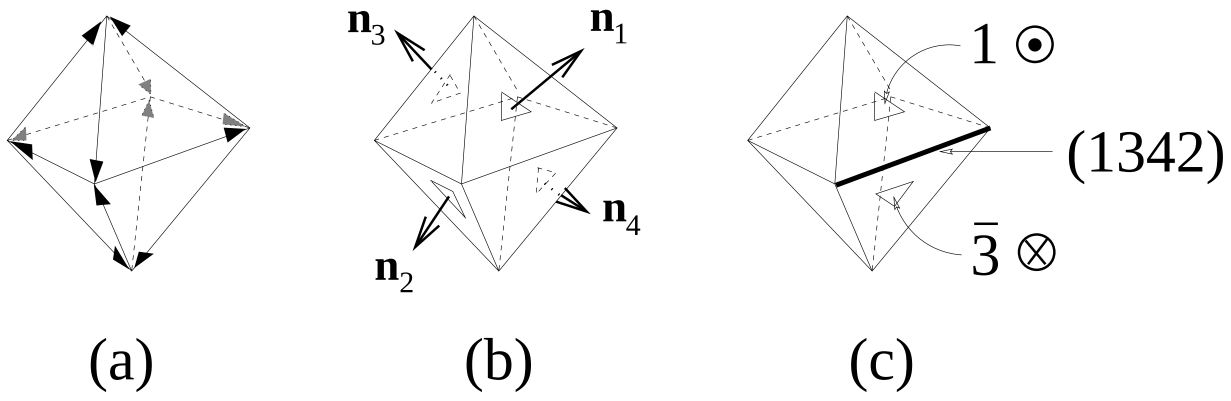

Fig. 8: (a) Les 12 arêtes orientées d'un octaèdre élémentaire de côté 1 fournissent 12 vecteurs unitaires pour les variables de liens admises. (b) Les 4 faces "sortantes" de l'octaèdre, i.e. avec un vecteur normal sortant, numérotées de 1 à 4. A chaque face sortante i est associée la face "entrante" opposée $\bar{i}$. (c) Chaque lien est étiqueté par une permutation paire $(ijkl)$ de (1234), avec i le numéro de la face sortante ($\bigodot$) adjacente et $\bar{j}$ celui de la face entrante ($\bigotimes$) adjacente.

le réseau CFC peut être vu comme un empilement régulier d'octaèdres élémentaires, complétés par des tétraèdres, comme indiqué sur la figure 7.

Le pliage du réseau triangulaire sur le réseau CFC n'autorise donc que quatre angles de plis: $0°$ (pas de pli) $180°$ (pli complet) $109°28'$ (pli aigu, i.e. sur un même tétraèdre) et $70°32'$ (pli obtus, i.e sur un même octaèdre). Les variables de liens t_l prennent alors leur valeur dans un ensemble de 12 valeurs permises, qui sont les 12 vecteurs unitaires décrivant les arêtes orientées d'un octaèdre élémentaire de côté 1 (voir figure 8). Les trois vecteurs t_{l_i}, $i = 1, 2, 3$ autour d'une même face doivent de plus être de somme nulle, ce qui nécessite qu'il soient choisis parmi les $3! \times 8$ triplets (ordonnés) de vecteurs unitaires de somme nulle correspondant aux 8 faces de l'octaèdre (et aux 3! permutations des trois vecteurs). Une manière simple d'étiqueter les faces et les arêtes de l'octaèdre consiste à numéroter de 1 à 4 les quatre faces avec un vecteur normal "sortant" (voir figure 8) et par $\bar{1}, \cdots, \bar{4}$ les quatre faces opposées avec un vecteur normal "entrant". Chaque arête sépare une face "sortante" i d'une face "entrante" $\bar{j}$ et sera notée dans ce cas $(ijkl)$ où on complète la paire (ij) par les deux indices manquant k et l de sorte que $(ijkl)$ soit une permutation *paire* de (1234). Cette représentation permet d'utiliser les propriétés du groupe tétraédral A_4, c'est à dire du groupe des permutations paires d'un ensemble de quatre éléments, pour

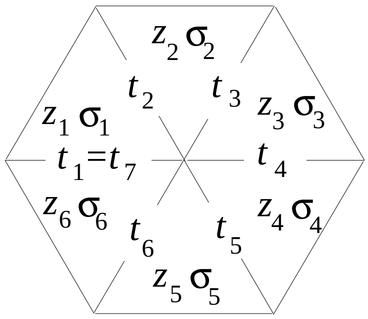

Fig. 9: Les 6 variables de liens et les 6 paires de spins autour d'un nœud.

décrire les contraintes sur les variables de liens du pliage, ou mieux encore sur les variables de faces comme nous allons le voir.

Chaque triangle peut donc être dans $3! \times 8 = 48$ états possibles. On peut alors suivre autour d'un nœud les 6 variables de liens t_i dans le sens des aiguilles d'une montre (voir figure 9). Partant de t_1 qui prend une des 12 valeurs correspondant à une permutation paire de (1234), le vecteur t_2 ne peut prendre que $48/12 = 4$ valeurs possibles qui correspondent à l'action sur t_1 d'une des quatre permutations suivantes du groupe tétraédral[3]

$$\begin{aligned}
\tau_{++} &\equiv \tau_1 = [243] \\
\tau_{+-} &\equiv \tau_3 = [134] \\
\tau_{-+} &\equiv (\tau_1)^2 = [234] \\
\tau_{--} &\equiv (\tau_3)^3 = [143]
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Plus précisément, l'action de τ_{++} (resp. τ_{+-}) revient à choisir le vecteur t_2 sur la face sortante (resp. entrante) adjacente à t_1 et suivant t_1 sur cette face. De même, l'action de τ_{-+} (resp. τ_{--}) revient à choisir le vecteur t_2 sur la face sortante (resp. entrante) adjacente à t_1 et précédant t_1 sur cette face. On peut donc associer à la face 1 deux variables de spins $\sigma_1 = \pm 1$ et $z_1 = \pm 1$ correspondant à la permutation[4] τ_{σ_1, z_1} utilisée pour passer de t_1 à t_2, et ainsi de suite pour les faces 2 à 6. Il est à noter que la superposition des frontières de domaines pour les deux variables de spins σ et z nous renseigne sur le

[3] Une permutation est notée de manière standard en listant ses cycles non réduits à un élément. Par exemple [243] signifie que le premier élément est inchangé, que le nouveau 2ème est l'ancien 4ème, le nouveau 4ème l'ancien 3ème, et le nouveau 3ème l'ancien 2ème.

[4] Les spins sont bien des variables de face au sens où c'est la même permutation τ_{σ_1, z_1} qui fait passer de t_2 au vecteur t correspondant au troisième côté de la face, et également de t à t_1

type de pli sous-jacent avec la correspondance suivante

z_2/z_1	σ_2/σ_1	type de pli
1	1	pas de pli
1	-1	pli complet
-1	1	pli aigu
-1	-1	pli obtus

Une fois un tour complet effectué autour du nœud, on a la contrainte que

$$\prod_{i=1}^{6} \tau_{\sigma_i, z_i} = I \tag{3.2}$$

où I désigne la permutation identité. Cette contrainte peut être traduite en contraintes sur les spins grâce aux propriétés du groupe tétraédral. On utilise pour cela le fait que ses générateurs τ_1 et τ_3 satisfont les relations $(\tau_1)^3 = (\tau_3)^3 = I$, $(\tau_1)^2\tau_3 = (\tau_3)^2\tau_1$ et $\tau_1\tau_3\tau_1 = \tau_3\tau_1\tau_3$. On en déduit alors les deux contraintes suivantes sur les spins:

$$\sum_{i=1}^{6} \sigma_i = 0 \mod 3 \tag{3.3}$$

et[5]

$$\prod_{\substack{i \text{ tels que:} \\ \sum_{j=1}^{i} \sigma_j = c \mod 3}} z_i z_{i+1} = 1, \quad c = 1, 2, 3 \tag{3.4}$$

.

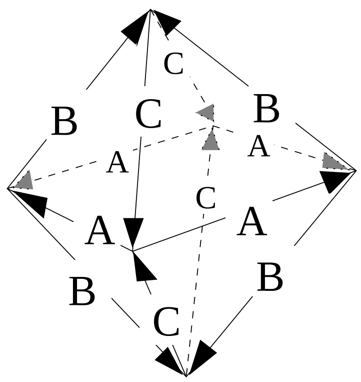

Fig. 10: Coloriage des arêtes de l'octaèdre par trois couleurs A, B, C. Les quatre arêtes dans un même plan ont la même couleur.

[5] Notons que la relation à $c = 3$ est une conséquence de celles à $c = 1, 2$.

La relation (3.3) est la même que celle (2.1) du pliage plan. Elle peut se comprendre aisément en coloriant les arêtes de notre octaèdre élémentaire par trois couleurs A,B,C, de sorte que les quatre arêtes situées dans un même plan aient la même couleur, comme indiqué sur la figure 10. De cette manière, toutes les faces de l'octaèdre (qui fournissent les triplets possibles de t_l autour d'un triangle) sont tricoloriées. Une configuration de pliage induit donc naturellement un tricoloriage des liens du réseau. Plus précisément, dénotant les couleurs cycliquement $A = 0 \bmod 3$, $B = 1 \bmod 3$, $C = 2 \bmod 3$, l'action de $\tau_{\sigma,z}$ fait passer de la couleur c à la couleur $c+\sigma \bmod 3$. La relation (3.3) traduit donc la condition nécessaire que l'on retrouve la même couleur après un tour. Cette condition n'est pas suffisante puisque quatre arêtes ont la même couleur. La relation (3.4) comptabilise de son côté le nombre de changements de signe de la variable z sur des liens de la couleur c pour $c = 1, 2, 3$. Chaque changement de signe correspond sur l'octaèdre élémentaire à une traversée du plan de couleur c. La relation (3.4) traduit le fait que le nombre de traversées doit être pair pour chacun des trois plan pour assurer qu'on retrouve exactement la même variable de lien après un tour.

En termes de spins contraints, il est facile de dénombrer tous les environnements permis par les contraintes (3.3) et (3.4) autour d'un nœud. Ils sont au nombre de 96 et dessinés sur la figure 11.

Il est intéressant de noter que le modèle à 96 vertex ainsi obtenu possède les trois sous-modèles suivants (voir figure 11):

1. Un modèle à 11 vertex correspondant au *pliage plan* obtenu en ne retenant que les vertex ayant uniquement des liens non pliés ou complètement pliés. Cela revient à demander que $z = 1$ pour tous les triangles, auquel cas (3.4) est automatiquement satisfaite et on retrouve la contrainte (2.1).
2. Un modèle à 11 vertex correspondant au *pliage sur un seul tétraèdre*, obtenu en ne retenant que les vertex ayant uniquement des liens avec des plis aigus ou complets. Cela revient à demander que $z = \epsilon\sigma$ où ϵ vaut 1 sur les triangles pointe en haut et -1 sur les triangles pointe en bas. Encore une fois, la relation (3.4) est automatiquement satisfaite.
3. Un modèle à 16 vertex correspondant au *pliage sur un seul octaèdre*, obtenu en ne conservant que les vertex ayant uniquement des liens avec des plis obtus ou complets. Cela revient à prendre un ordre antiferromagnétique parfait $\sigma = \epsilon$, avec ϵ comme défini ci-dessus, auquel cas la relation (3.4) devient $\prod_{i=1}^{6} z_i z_{i+1} = 1$.

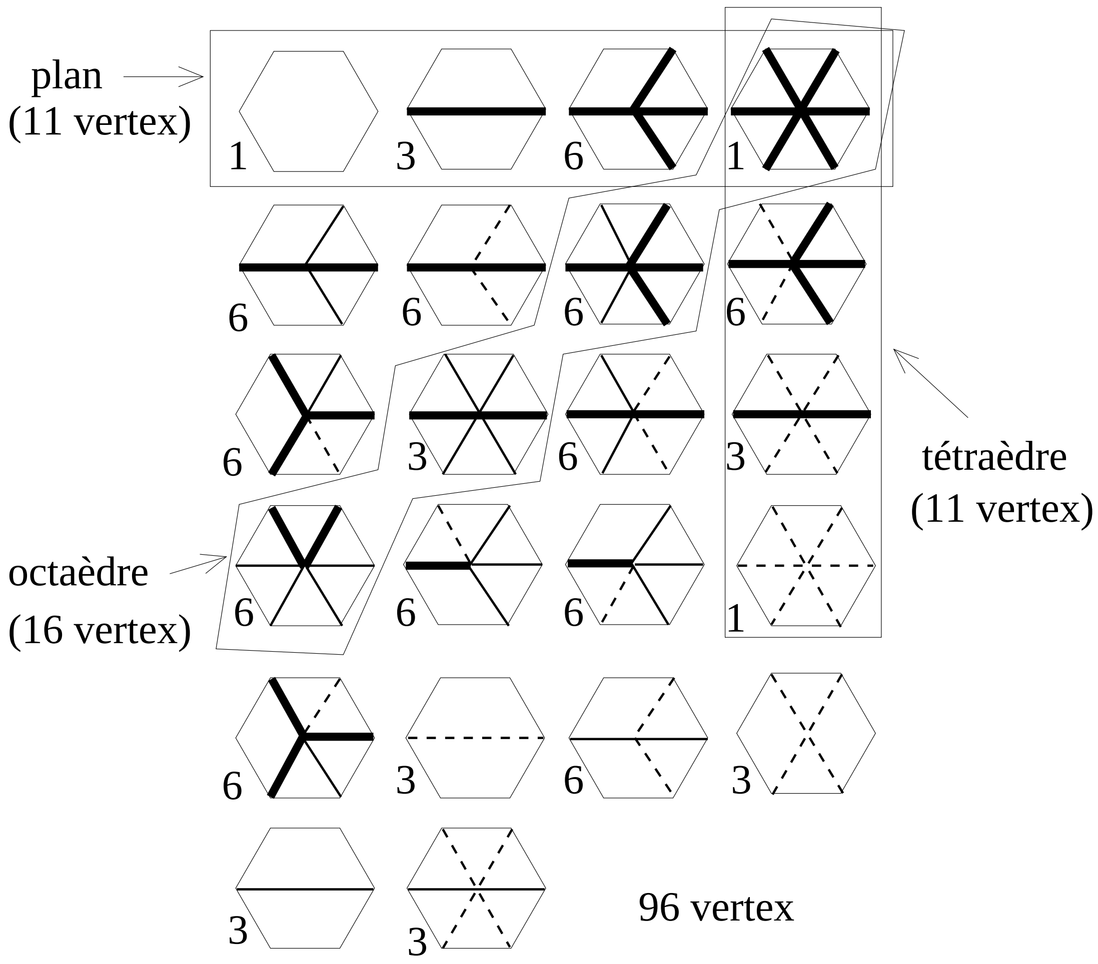

Fig. 11: Les 96 configurations de pliage d'un hexagone élémentaire. Les plis complets sont indiqués par un trait gras, les plis obtus par un trait fin et les plis aigus par un trait pointillé. Sous chaque environnement, on a indiqué sa multiplicité correspondant aux rotations de l'hexagone. On a indiqué également les vertex à retenir pour les trois sous-modèles correspondant aux pliages plan (11 vertex), sur un seul tétraèdre (11 vertex) et sur un seul octaèdre (16 vertex).

Il est à noter que les contraintes (3.3) et (3.4) sont invariantes par le changement $(\sigma, z) \to (\sigma, \epsilon z \sigma)$. On a ainsi une relation de dualité qui consiste à échanger globalement toutes les arêtes non pliées et celles ayant un pli aigu, comme apparent sur la figure 11. Le sous-modèle 3 ci-dessus est auto-dual et les sous-modèles 1 et 2 sont duaux l'un de l'autre. En particulier, l'entropie de pliage sur un seul tétraèdre est la même que celle du pliage plan et donnée par (2.3).

L'entropie de pliage sur le réseau CFC n'est pas connue exactement à ce jour. Des estimations numériques montrent que $q \sim 1,43(1)$. On peut montrer simplement que $q > \sqrt{2} = 1,414\cdots$ en regardant l'entropie du sous-modèle 3 de pliage sur un seul octaèdre.

En effet, la contrainte $\prod_{i=1}^{6} z_i z_{i+1} = 1$ revient à dire que z est le produit $\eta_{v_1}\eta_{v_2}\eta_{v_3}$ sur les trois nœuds v_1, v_2 et v_3 adjacents à la face considérée d'une variable de nœud η_v égale à ± 1 et *indépendante* sur chaque nœud du réseau. Le modèle 3 a donc une entropie de 2 par nœud, soit $\sqrt{2}$ par triangle.

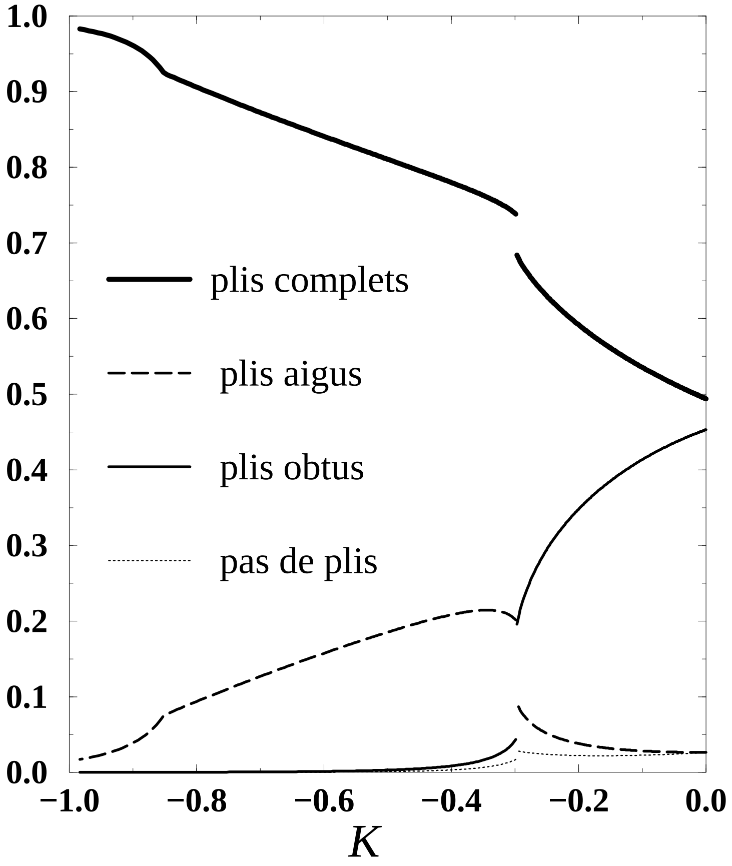

Fig. 12: La proportion des différents types de plis en fonction du module de rigidité K (énergie $E = -K\cos(\theta)$).

On peut enfin s'interroger sur le diagramme de phase obtenu en introduisant une énergie de courbure, par exemple sous la forme d'une énergie de lien $E = -K\cos(\theta)$ où θ est l'angle de pli: $0°$ (pas de pli) $180°$ (pli complet) $109°28'$ (pli aigu) ou $70°32'$ (pli obtus). Cette question est traitée dans la publication IV qui présente une solution variationnelle du pliage sur le réseau CFC en présence d'énergie de courbure. Comme pour le cas du pliage plan, on montre dans le régime $K \geq 0$ l'existence d'une transition de phase du premier ordre entre une phase froissée à petite valeur de K et une phase *complètement plate* à grande valeur de K. La situation à $K \leq 0$ (c'est à dire favorisant les plis) est plus riche: la figure 12 montre la proportion des différents types de plis en fonction de K. On distingue deux transitions successives de repliement: une première transition, discontinue, passant d'un régime où le repliement se fait préférentiellement sur des octaèdres à un régime où il se fait préférentiellement sur des tétraèdres. Une deuxième transition, continue, sépare ce dernier régime d'un régime où le repliement est essentiellement maximal avec presque uniquement des plis complets.

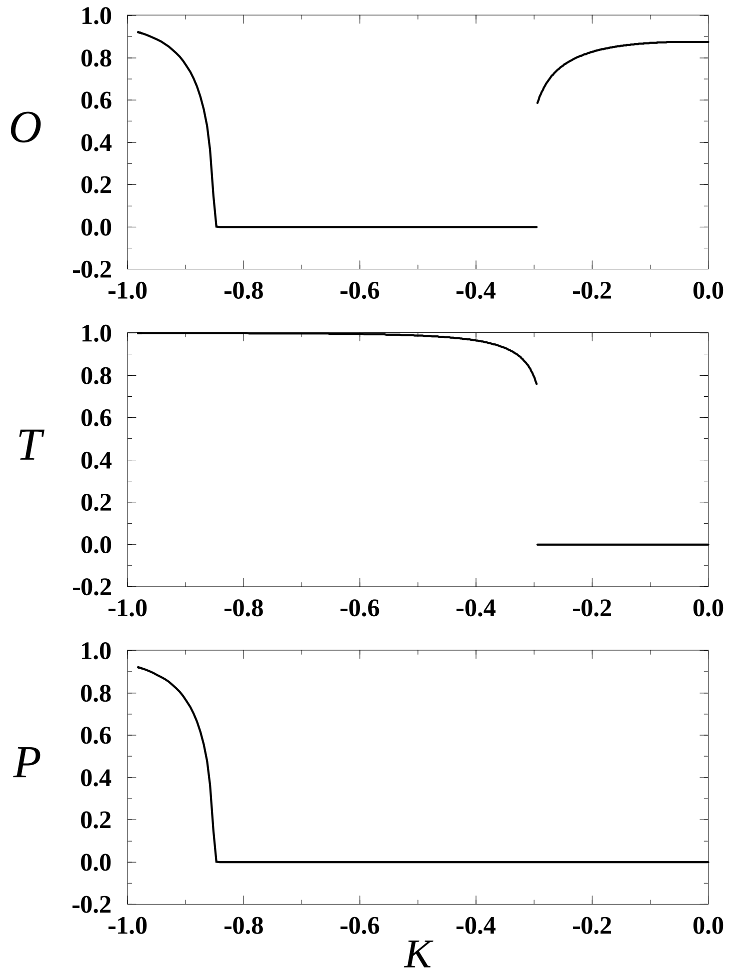

Fig. 13: Les trois paramètres d'ordre O, P et T définis dans le texte en fonction du module de rigidité K (énergie $E = -K\cos(\theta)$).

Ces transitions sont également visibles sur les trois paramètres d'ordres O, T et P

définis par

$$
\begin{aligned}
O &\equiv \langle \epsilon\, \sigma \rangle \\
T &\equiv \langle z\, \epsilon\, \sigma \rangle \qquad (3.5) \\
P &\equiv \langle z \rangle
\end{aligned}
$$

en fonction des variables de spins σ et z du modèle et avec $\epsilon = +1$ (resp. -1) sur les triangles pointe en haut (resp. pointe en bas) du réseau triangulaire. Ces trois paramètres d'ordre sont représentés sur la figure 13. Leur interprétation est qu'une valeur non nulle de O (respectivement de T) traduit une tendance du réseau à se plier préférentiellement autour des octaèdres (respectivement autour des tétraèdres). De même, une valeur non nulle de P traduit une tendance du réseau à rester préférentiellement dans des plans du réseau CFC.

4. Pliages et gaz de boucles compactes

De manière générale, tous les modèles de pliages peuvent se ramener à des problèmes de gaz de boucles compactes sur réseau. Nous allons illustrer cette propriété dans le cas des deux pliages (plan et CFC) décrits ci-dessus.

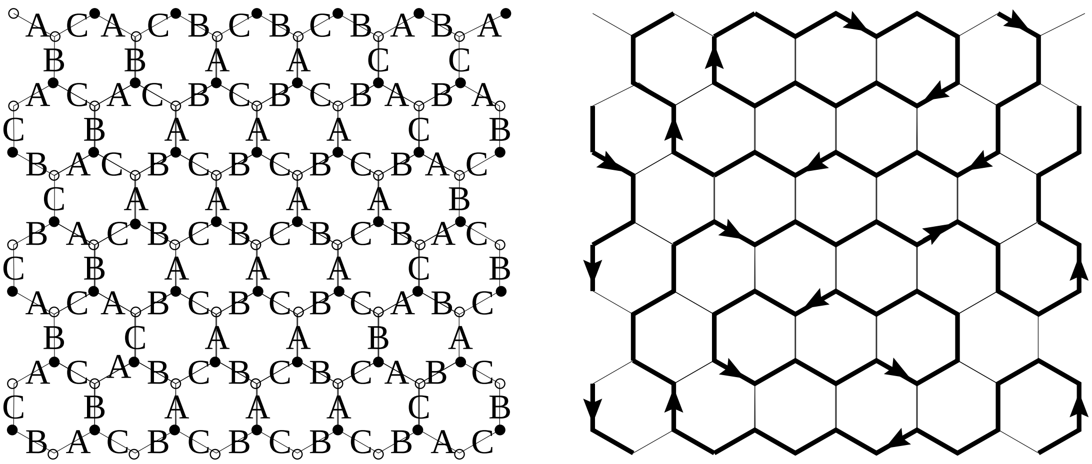

Fig. 14: Exemple de tricoloriage des liens du réseau hexagonal et la configuration de boucles orientées compactes correspondante.

Revenons d'abord au pliage plan du réseau triangulaire, qui comme nous l'avons vu est équivalent au tricoloriage des liens du réseau *hexagonal* par trois couleurs A, B et C devant rester distinctes sur les trois liens arrivant à chaque nœud du réseau. Notons que le réseau hexagonal est bipartite, c'est à dire peut être séparé en deux sous-réseaux, disons un sous-réseau noir et un sous-réseau blanc de sorte que les voisins d'un nœud noir soient blancs et inversement. La couleur noire ou blanche d'un nœud traduit le caractère pointe en haut ou pointe en bas du triangle dual. En ignorant les liens de couleur A, les liens de couleur B ou C forment alors des boucles sur le réseau hexagonal sur lesquelles les couleurs B et C alternent (voir figure 14). En orientant les liens de couleur B du nœud adjacent noir vers le nœud adjacent blanc, et inversement les liens de couleur C du nœud adjacent blanc vers le nœud adjacent noir, on oriente chaque boucle de manière cohérente. Changer l'orientation d'une boucle revient simplement à échanger les liens de couleur B avec ceux de couleur C. Les boucles orientées ainsi formées d'une part ne se croisent pas et d'autre part forment un ensemble *compact*, c'est à dire que chaque nœud du réseau est visité par une boucle.

Inversement, la donnée d'un ensemble compact de boucles orientées permet de reproduire les couleurs de tous les liens, donc le pliage correspondant. Le problème du pliage plan du réseau triangulaire est donc équivalent à celui d'un gaz de boucles compactes orientées sur le réseau hexagonal. On peut oublier l'orientation des boucles à condition de pondérer chaque boucle par un poids $n = 2$. De manière plus générale, on peut considérer le modèle FPL(n) (pour Fully Packed Loops) d'un gaz de boucles compactes sur le réseau hexagonal avec un poids n par boucle. Ce modèle est à rapprocher du modèle O(n) sur le réseau hexagonal qui, dans sa formulation en gaz de boucles, revient à considérer des boucles avec un poids n par boucle mais sans demander que tous les nœuds du réseau soient visités par une boucle. Nous étudierons plus en détail la physique de ces deux modèles dans la partie B.

Dans le cas du pliage sur le réseau CFC, nous avons vu que les variables de liens induisent également un tricoloriage des liens du réseau triangulaire, donc, par dualité, des liens du réseau hexagonal. Ce tricoloriage par trois couleurs A, B et C est, comme nous venons de le voir, équivalent à la donnée du gaz des boucles compactes BC. On peut également considérer les deux systèmes de boucles compactes formées par les liens AC ou par les liens AB. Les trois systèmes de boucles sont fortement corrélés puisque la donnée d'un seul permet de reconstruire les deux autres. Les couleurs ne suffisent cependant pas à reconstruire le pliage d'origine. On peut compléter la couleur par une variable de lien supplémentaire définie comme suit: sur chaque lien de couleur A ou B, ont définit une variable $\mathcal{C} = \pm 1$ qui indique de quel côté du plan de couleur C sur l'octaèdre élémentaire est l'arête considérée (voir figure 15). De même on définit une variable $\mathcal{B} = \pm 1$ sur les liens de couleur A ou C et une variable $\mathcal{A} = \pm 1$ sur les liens de couleur B ou C. Le

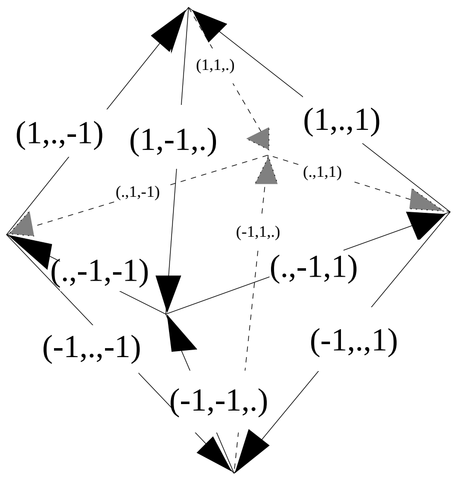

Fig. 15: Les variables de liens $\mathbb{Z}^2$ $\mathcal{A} = \pm 1$ (définie sur les liens de couleur B ou C), $\mathcal{B} = \pm 1$ (définie sur les liens de couleur A ou C), $\mathcal{C} = \pm 1$ (définie sur les liens de couleur A ou B). On a indiqué pour chaque arête la valeur du triplet $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ avec un point $(\cdot)$ lorsque la variable n'est pas définie.

vecteur unitaire sur un lien du réseau triangulaire est entièrement spécifié par la couleur de ce lien (disons A) et la valeur de deux variables ($\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$) définies sur ce lien. Si l'on regarde maintenant une boucle BC sur le réseau hexagonal dual, il est facile de voir que la valeur de $\mathcal{A}$ est *constante* le long de la boucle. En effet, un changement de signe de $\mathcal{A}$ nécessite de traverser le plan de couleur A sur l'octaèdre élémentaire et donc de passer par un lien de couleur A, ce qui impose de changer de boucle BC. De plus, la valeur de $\mathcal{A}$ est indépendante sur chacune des boucles BC. Il en est de même pour la variable $\mathcal{B}$ sur les boucles AC et la variable $\mathcal{C}$ sur les boucles AB. En résumé, on peut représenter tout pliage sur le réseau CFC par un tricoloriage du réseau hexagonal, complété par la donnée d'une variable de spin $\mathbb{Z}_2$ pour chacune des boucles BC, AC et AB. Le dénombrement de ces pliages revient donc à considérer un poids 2 pour chacune de ces boucles.

En conclusion, on peut écrire les fonctions de partition des pliages plan et sur réseau CFC comme des fonctions de partition de gaz de boucles compactes[6]

$$\begin{aligned} Z_{\text{plan}} &= \sum_{\text{Tricoloriages}} 1 = \sum_{\text{Boucles compactes}} 2^{\text{Nb. boucles}} \\ Z_{\text{CFC}} &= \sum_{\text{Tricoloriages}} 2^{\text{Nb. boucles AB}} \times 2^{\text{Nb. boucles BC}} \times 2^{\text{Nb. boucles AC}} \end{aligned} \tag{4.1}$$

[6] Dans le cas du pliage CFC, on peut s'affranchir du tricoloriage et définir le modèle uniquement en termes de boucles en imposant d'avoir trois systèmes de boucles compactes et la contrainte que chaque lien est visité par deux boucles de type différent.

D'autres problèmes de pliages ont été considérés [9], comme le pliage plan du réseau carré à diagonales, ou du réseau triangulaire à diagonales. Tous ces problèmes sont équivalents à des gaz de boucles compactes sur des réseaux appropriés.

5. Pliage de triangulations aléatoires

Cette section est basée sur la publication V reproduite en annexe.

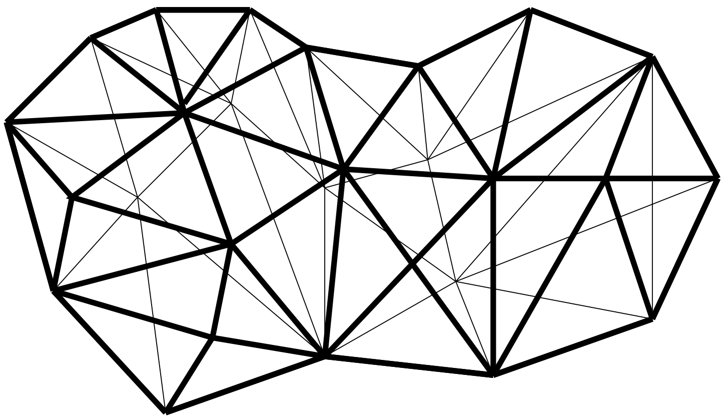

Fig. 16: Exemple de triangulation de topologie sphérique.

On aimerait généraliser les modèles de pliages décrits plus haut au cas de triangulations aléatoires. Nous nous limiterons au cas le plus simple de triangulations planaires, c'est à dire ayant la topologie d'une sphère. Un exemple de telle triangulation est donné sur la figure 16. Etant donnée une telle triangulation, on définit comme auparavant un pliage comme une application $v \to X_v$ associant à chaque nœud de la triangulation sa position dans $\mathbb{R}^d$ avec toujours la contrainte que deux voisins soient à distance 1 l'un de l'autre dans $\mathbb{R}^d$. En particulier, chaque triangle a de nouveau pour image un triangle équilatéral dans $\mathbb{R}^d$.

Dans le cas le plus simple du pliage plan ($d = 2$), la première question qui se pose est celle, pour une triangulation, de l'existence même d'au moins un pliage plan. En d'autres termes, toutes les triangulations ne sont pas pliables dans le plan. Par exemple, la triangulation en haut sur la figure 17 (qui peut être plongée dans $\mathbb{R}^3$ pour former un tétraèdre) ne peut pas être pliée dans le plan. Inversement, la triangulation en bas sur la figure 17 (qui peut être plongée dans $\mathbb{R}^3$ pour former un octaèdre) peut être pliée dans le plan.

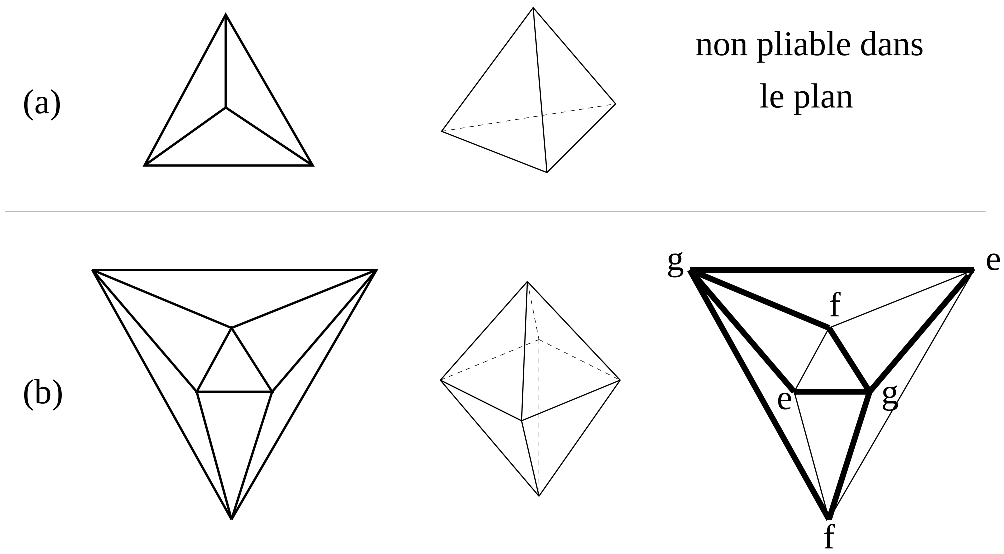

Fig. 17: Deux exemples de triangulations planaires (dans la représentation planaire, la face externe est également un triangle). La triangulation (a), pliable dans $\mathbb{R}^3$ en un tétraèdre, n'est pas pliable dans le plan car ses nœuds ne sont pas tricoloriables. La triangulation (b), pliable dans $\mathbb{R}^3$ en un octaèdre (par exemple) est tricoloriable des nœuds (ici par trois couleurs e,f,g) et donc pliable dans le plan. Un exemple de pliage est indiqué à droite, où les plis sont indiqués par des traits gras.

Une réponse simple à la question de pliabilité dans le plan consiste à remarquer que, si un pliage existe, les positions dans le plan X_v des nœuds de la triangulation doivent appartenir nécessairement à un réseau triangulaire régulier de maille 1 dans le plan $\mathbb{R}^2$. Les *nœuds* de ce réseau triangulaire peuvent être tricoloriés par trois couleurs (e,f,g) de sorte que deux nœuds voisins aient une couleur distincte. Ce tricoloriage est unique (à une permutation globale des trois couleurs près). Si un pliage existe, il induit donc un tricoloriage des nœuds de la triangulation de départ. Une condition nécessaire à la pliabilité est donc que la triangulation soit *tricoloriable des nœuds*, ou en d'autres termes soit tripartite. Inversement, considérons une triangulation aléatoire tricoloriable des nœuds. Il est à noter que, quand il existe, ce tricoloriage des nœuds est unique (à une permutation globale des couleurs près). Il est facile de voir qu'une telle triangulation est effectivement pliable en envoyant chaque nœud d'une même couleur sur un des trois sommets d'un triangle équilatéral $\mathbb{R}^2$. Un tel pliage correspond au repliement *complet* de la triangulation sur un seul triangle.

Si on se limite au cas des triangulations planaires on a finalement les caractérisations équivalentes suivantes:

1. La triangulation est pliable dans le plan

2. Ses nœuds sont tricoloriables par trois couleurs devant être distinctes sur deux nœuds voisins
3. Ses faces sont *bicoloriables* par deux couleurs devant être distinctes sur deux triangles voisins
4. Ses arêtes sont orientables de sorte que chaque triangle ait une orientation bien définie
5. Le nombre de triangles autour de chaque nœud est pair.
6. Le nombre d'arêtes adjacentes à chaque nœud est pair

La dernière proposition justifie l'appellation "eulérienne" pour de telles triangulations car elle garantit l'existence sur la triangulation d'un chemin fermé eulérien (c'est à dire passant par toutes les arêtes)[7].

En résumé, *les triangulations planaires pliables sont donc les triangulations eulériennes*, caractérisées par l'une quelconque des propriétés ci-dessus.

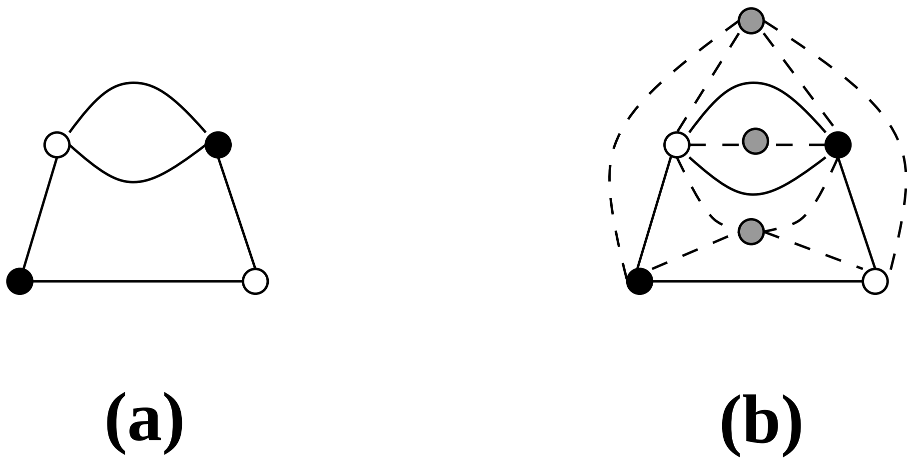

Fig. 18: Equivalence entre (a) un graphe bicolorié de valences quelconques et (b) une triangulation tricoloriée.

L'énumération des triangulations eulériennes a été obtenue pour la première fois par W. Tutte [10] dans une version duale du problème et sous la dénomination de "cartes bicubiques". Cette énumération peut être généralisée en conservant la trace des trois couleurs, c'est à dire avec des poids différents p, q et z pour les nœuds de couleur e, f ou g respectivement. En d'autres termes, on énumère les pliages complets de triangulations aléatoires sur un seul triangle, en retenant le nombre de nœuds envoyés sur chacun des trois sommets du triangle. C'est l'objet de la publication V où on utilise pour cela des

[7] En d'autres termes, elle garantit la possibilité de tracer la triangulation d'un seul trait (fermé) sans lever le crayon.

techniques d'intégrales matricielles avec un modèle à deux matrices. Plus précisément, on commence par remarquer que la donnée d'une triangulation planaire tricoloriée des nœuds est équivalente à celle d'un graphe bicolorié de valences quelconques. Il suffit pour cela de supprimer tous les nœuds de la triangulation de couleur g ainsi que tous les liens menant à ces nœuds (voir figure 18) pour obtenir le graphe bicolorié avec les couleurs e et f. Inversement, partant d'un graphe bicolorié, les nœuds autour de chaque face ont des couleurs e et f qui alternent. On peut réintroduire au centre de chaque face un nœud de couleur g et le connecter à tous les nœuds autour de la face pour refabriquer des triangles. Le problème est donc ramené à l'énumération de graphes bicoloriés avec un poids p (resp. q) par nœud de couleur e (resp. f) et un poids z par face. Il est utile d'introduire également un poids t par lien du graphe bicolorié[8]. Cette énumération peut se faire au moyen d'une intégrale matricielle [11]. On est alors amené à évaluer l'intégrale à deux matrices suivante:

$$Z(p,q,t;n,N) \;=\; \int dMdRe^{-N\,\mathrm{Tr}\,V(M,R;p,q,t)} \tag{5.1}$$

avec le potentiel non-polynomial

$$V(M,R;p,q,t) \;=\; p\mathrm{Log}(1-M)+q\mathrm{Log}(1-R)+\frac{1}{t}MR \tag{5.2}$$

où M et R sont des matrices hermitiennes de taille $n\times n$ et on normalise de sorte que $Z(0,0,t;n,N)=1$. Un développement formel de Z en puissances de t s'exprime comme une somme sur des graphes de Feynman "épais" faits de doubles-lignes orientées têtes-bêches et portant un indice matriciel $i\in\{1,2,...,n\}$, avec deux types de nœuds, les nœuds M (de couleur e) avec un poids Np et les nœuds R (de couleur f) avec un poids Nq, quelle que soit leur valence, connectés par un propagateur $\langle MR\rangle$, pondéré par t/N. Chaque graphe reçoit une contribution n par boucle orientée de par la sommation des indices matriciels, et il en résulte un poids n par face du graphe. On obtient finalement:

$$Z(p,q,t;n,N) \;=\; \sum_{\substack{\text{graphes épais }\Gamma\\ \text{bicoloriés des noeuds}}} \frac{\left(\frac{n}{N}\right)^{F(\Gamma)} t^{E(\Gamma)}\, N^{\chi(\Gamma)}\, p^{V_p(\Gamma)} q^{V_q(\Gamma)}}{|\mathrm{Aut}(\Gamma)|} \tag{5.3}$$

où $E(\Gamma)$ dénote le nombre de liens du graphe Γ, $V_p(\Gamma)$, $V_q(\Gamma)$ ses nombres de nœuds de couleur e et f respectivement, $F(\Gamma)$ son nombre de faces (qui correspond au nombre

[8] Le nombre de liens du graphe bicolorié vaut un tiers du nombre de liens de la triangulation tricoloriée associée.

de nœuds de couleur g dans la triangulation associée), $\chi(\Gamma)$ sa caractéristique d'Euler $F - E + V_p + V_q$ (qui est également la caractéristique d'Euler de la triangulation associée) et $|\mathrm{Aut}(\Gamma)|$ l'ordre de son groupe de symétrie. La somme peut être ramenée aux graphes connexes en considérant F=Log Z au lieu de Z. La fonction génératrice $f(p, q, z; t)$ des triangulations tricoloriées planaires avec un poids p, q, z pour les nœuds des trois couleurs et $t^{1/3}$ par arête est finalement obtenue en prenant la limite $N \to \infty$ pour sélectionner les graphes planaires, et avec $n/N = z$ fixé, précisément

$$f(p, q, z; t) \equiv \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \mathrm{Log} Z(p, q, t; zN, N) \tag{5.4}$$

Un calcul explicite donne (voir publication V)

$$t\partial_t f(p, q, z; t) \;=\; \frac{U_1 U_2 U_3}{t^2}(1 - U_1 - U_2 - U_3) \tag{5.5}$$

où les fonctions U_1, U_2 et U_3 sont déterminées par les équations

$$\begin{aligned} U_1(1 - U_2 - U_3) &= pt \\ U_2(1 - U_1 - U_3) &= qt \\ U_3(1 - U_1 - U_2) &= zt \end{aligned} \tag{5.6}$$

avec la condition $U_i = \mathcal{O}(t)$, $i = 1, 2, 3$. Le même résultat a été retrouvé récemment par des techniques purement combinatoires consistant à découper les triangulations en arbres tricoloriés [12]. Par élimination de U_2 et U_3, on se ramène à l'équation du 5ème ordre suivante pour U_1

$$U_1^2(1 - U_1)^2(1 - 2U_1 + 2(p - q - z)t) \;=\; t^2\big((1 - U_1)^2p^2 - U_1^2(z - q)^2\big) \tag{5.7}$$

dont on retiendra l'unique solution se comportant comme $U_1 \sim pt$ à petit t. Les valeurs de U_2 et U_3 sont obtenues à partir de U_1 en permutant les poids p, q, z.

Le cas $p = q = z$ peut être résolu plus simplement car dans ce cas, $U_1 = U_2 = U_3 \equiv U$, où U est la solution de l'équation quadratique $U(1 - 2U) = zt$, à savoir

$$U \;=\; \frac{1}{4}(1 - \sqrt{1 - 8zt}) \tag{5.8}$$

La fonction génératrice $f(z; t)$ s'écrit alors

$$t\partial_t f(z; t) \;=\; \frac{U^3}{t^2}(1 - 3U) \;=\; \frac{z}{8t}\left(\left(2 - \frac{1}{4zt}\right)(1 - \sqrt{1 - 8zt}) + 1 - 6zt\right) \tag{5.9}$$

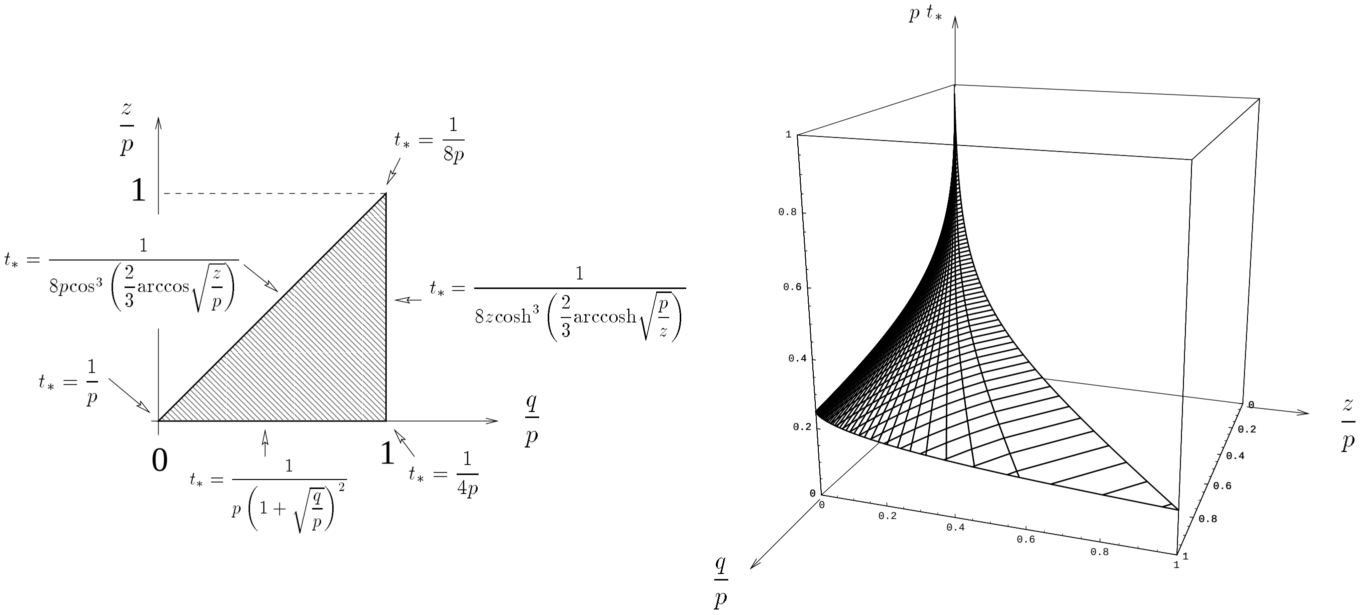

Fig. 19: La valeur de $t_\star(p, q, z)$ dans le domaine $z \leq q \leq p$.

d'où l'on déduit le nombre N_s de triangulations eulériennes (tricoloriées des nœuds) à $3s$ arêtes (ou $2s$ faces)[9]

$$N_s = \frac{3}{s} 2^{s-1} \frac{(2s)!}{s!(s+2)!} \sim \frac{3}{2\sqrt{\pi}} \frac{8^s}{s^{7/2}} \tag{5.10}$$

en accord avec le résultat de Tutte [10]. Ce résultat est à comparer au cas de triangulations planaires quelconques à $2s$ faces, qui se comporte comme $(12\sqrt{3})^s/s^{7/2}$ [10,13].

De manière générale, on déduit de la solution (5.7) qu'avec des poids p, q, z positifs quelconques, la fonction de partition $f_s(p, q, z)$ des triangulations tricoloriées à $3s$ arêtes se comporte à grand s de manière générique comme

$$f_s(p, q, z) \sim C(p, q, z) \frac{\big(t_\star(p, q, z)\big)^{-s}}{s^{\frac{7}{2}}} \tag{5.11}$$

où $t_\star(p, q, z)$ est la valeur de t où la fonction U_1 devient singulière. On a par homogénéité $t_\star(p, q, z) = (1/p)T(z/p, q/p)$ et, par symétrie, on peut se limiter au domaine où, par

[9] Les triangulations sont ici comptées avec un facteur de symétrie $1/S$ où S est l'ordre du groupe des automorphismes laissant la triangulation invariante. Pour éviter ce facteur de symétrie, on peut décider de *marquer une arête*, par exemple entre un nœud de couleur e et un nœud de couleur f. Le nombre sN_s de tels objets est un bonne quantité combinatoire, c'est à dire un entier.

exemple, $z \leq q \leq p$. La figure 19 représente $t_\star(p,q,z)$ dans ce domaine et donne quelques formules explicites sur les bords du domaine. La valeur 7/2 de l'exposant dans la formule (5.11) est la valeur générique obtenue quand tous les poids p, q et z sont non nuls. La limite où l'un des poids, par exemple z tend vers 0 dénombre les triangulations qui, repliées sur un seul triangle, sont telles qu'un des sommets de ce triangle n'est occupé que par un seul nœud de la triangulation. Dans ce cas limite, l'exposant devient 5/2.

L'énumération ci-dessus des triangulations eulériennes, c'est à dire pliables dans le plan, résout le problème du pliage *complet* des triangulations sur un seul triangle. Le caractère eulérien d'une triangulation permet d'orienter tous ses liens de manière cohérente, ce qui autorise une définition des variables de liens sous la forme de vecteurs unitaires dont la somme est nulle autour de chaque face. Pour décrire l'ensemble des pliages plans de la triangulation, on peut comme dans le cas régulier coder les variables de liens par trois couleurs représentant leur orientation dans la configuration repliée. Pour obtenir tous les pliages, il faut donc effectuer tous les tricoloriages des liens par trois couleurs A, B ou C devant être distinctes autour de chaque triangle. En d'autres termes, le pliage des triangulations aléatoires planaires équivaut au tricoloriage simultané des nœuds et des liens. Si le tricoloriage des nœuds est, quand il existe, unique, celui des liens est pour sa part non unique et source d'une entropie supplémentaire. A ce jour, le problème du tricoloriage des *liens seuls* a été résolu [14,15] mais le tricoloriage simultané des liens et des nœuds est encore une question ouverte.

Partie B : Boucles compactes sur réseaux aléatoires

On désigne de manière générale par *gaz de boucles compactes* (en anglais *fully packed loops*) sur un réseau un ensemble de boucles auto-évitantes tracées sur les liens du réseau et telles que *tous les nœuds du réseau soient visités par une boucle.*

L'étude des pliages du réseau triangulaire nous a amené à introduire le cas particulier du modèle FPL(n) fait de boucles compactes tracées sur le *réseau hexagonal* avec un poids n par boucle. Beaucoup d'autres exemples existent selon le réseau sous-jacent utilisé, les règles précises d'évitement et le poids associé aux boucles. Nous serons ainsi amenés dans la partie C à considérer le modèle $\mathrm{FPL}^2(n_1, n_2)$ fait de deux types de boucles et qui nous sera utile pour résoudre le problème des méandres.

Nous allons nous intéresser plus précisément dans cette partie à décrire le "couplage à la gravité" de tels modèles, qui consiste à tracer le gaz de boucles compactes sur des réseaux aléatoires. La difficulté du passage du cas régulier au cas aléatoire vient de ce que la contrainte de compacité rend le système sensible aux symétries du réseau sous-jacent. En ce sens, la notion même d'universalité est perdue. Les symétries des réseaux réguliers étant par nature plus grandes que celles des réseaux aléatoires, il devient alors important de comprendre quelles sont les symétries à conserver au passage sur réseau aléatoire pour garder la classe d'universalité observée sur le réseau régulier. C'est à cette question que nous allons donner quelques éléments de réponse dans les sections qui suivent.

Dans cette partie B, nous allons nous limiter au cas du modèle FPL(n) et à sa version gravitationnelle qui consiste en un gaz de boucles compactes sur des graphes aléatoires planaires *trivalents.* La version duale équivalente correspond à considérer des boucles allant de face en face sur des triangulations aléatoires planaires et visitant toutes les faces.

6. Gaz de boucles compactes sur le réseau hexagonal

Avant de passer au cas aléatoire, il est utile de rappeler les propriétés du cas régulier et de comprendre en particulier le lien entre la géométrie du réseau et la statistique à grandes distances du gaz de boucles. On considérera donc dans cette section le modèle FPL(n) de boucles compactes auto-évitantes sur le réseau hexagonal, avec un poids n par boucle: le cas $n = 2$ décrit comme nous l'avons vu le pliage plan du réseau triangulaire; le cas $n \to 0$ décrit pour sa part le problème des chemins hamiltoniens, comptant les configurations d'un chemin unique passant par tous les nœuds du réseau hexagonal.

L'approche présentée ici suit la référence [16] et s'appuie sur des techniques de gaz coulombien à deux dimensions [17]. Cette présentation a l'avantage de mettre en avant le lien entre la géométrie du problème et ses propriétés statistiques. Notons que les résultats ainsi obtenus sont confirmés par une solution exacte du problème par Ansatz de Bethe [18].

On commence par considérer le cas $n = 2$, c'est à dire avec des boucles *orientées* sans poids, que l'on transforme en un *modèle de hauteurs* comme suit. A chaque face du réseau hexagonal est associée une "hauteur" X dans $\mathbb{R}^d$ dont la variation d'une face à l'autre dépend de l'état, occupé ou non, de l'arête entre les deux faces. Les règles précises de variation des hauteurs sont indiquées sur la figure 20 et font intervenir 3 différences de hauteur élémentaires A, B et C. Il est à noter que ces règles utilisent explicitement le caractère bipartite du réseau hexagonal, avec des règles différentes selon que le lien est orienté du nœud blanc vers le nœud noir ou inversement. Si l'on remplace les boucles orientées par un tricoloriage des liens comme sur la figure 14, la différence de hauteur est simplement donnée par la couleur A,B ou C du lien traversé.

L'examen des configurations permises autour d'un nœud montre que, pour que la hauteur soit bien définie après un tour, il faut imposer la contrainte $A + B + C = 0$ (voir figure 20-(a)). Ceci amène naturellement à une hauteur X *bidimensionnelle*, et nous conduit à déduire que le modèle FPL(2) est une théorie conforme de *charge centrale* 2 correspondant aux deux dimensions de hauteur, un résultat confirmé par [18]. Une solution symétrique consiste à prendre A unitaire, $B = \mathcal{R}A$ et $C = \mathcal{R}^2 A$ où $\mathcal{R}$ est la rotation de 120° dans le plan, auquel cas la hauteur X d'une face n'est rien d'autre que la position dans le plan du nœud dual à cette face dans le pliage plan du réseau triangulaire associé. C'est cette solution symétrique que nous utiliserons dans la suite de cette section.

Si l'on relâche la contrainte de compacité, en permettant à des nœuds de ne pas être visités par une boucle, on doit considérer également la configuration de la figure 20-(b)

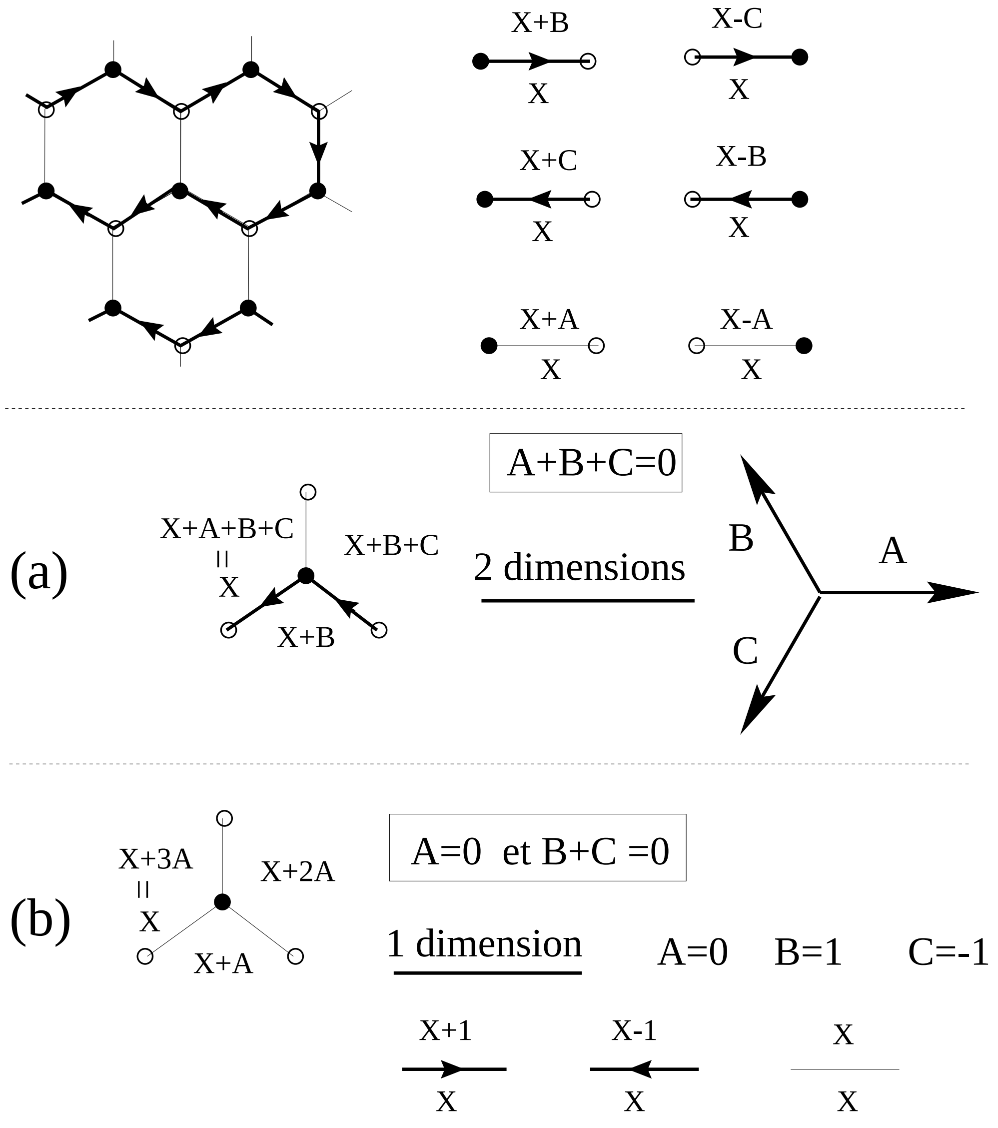

Fig. 20: Définition des variables de hauteur X pour le gaz de boucles sur réseau hexagonal. La règle utilise explicitement le bicoloriage des nœuds du réseau hexagonal. Dans le cas de boucles compactes, seul l'environnement (a) est rencontré (modulo des symétries évidentes), et la cohérence des définitions des hauteurs impose $A + B + C = 0$. Dans le cas de boucles non compactes, la présence de nœuds non visités avec l'environnement (b) impose de plus que $A = 0$, auquel cas $B = -C$ ($= 1$ par exemple) et les règles deviennent insensibles au bicoloriage des nœuds du réseau hexagonal.

correspondant à un nœud non visité. La cohérence après un tour autour du nœud impose alors la contrainte supplémentaire $A = 0$, et donc $B + C = 0$. On ne peut plus dans ce cas définir qu'une hauteur *unidimensionnelle*. On en déduit que le gaz de boucles correspondant, qui décrit le point critique du modèle O(2), a alors une charge centrale 1, un résultat bien connu. Notons au passage que les règles de définition des hauteurs dans ce cas deviennent insensibles au caractère bipartite du réseau (voir figure 20-(b)).

Il est remarquable que la compacité influe sur la charge centrale, et donc sur la classe d'universalité du modèle. C'est cette propriété que nous allons tenter de retrouver dans les sections suivantes dans le cas de réseaux aléatoires.

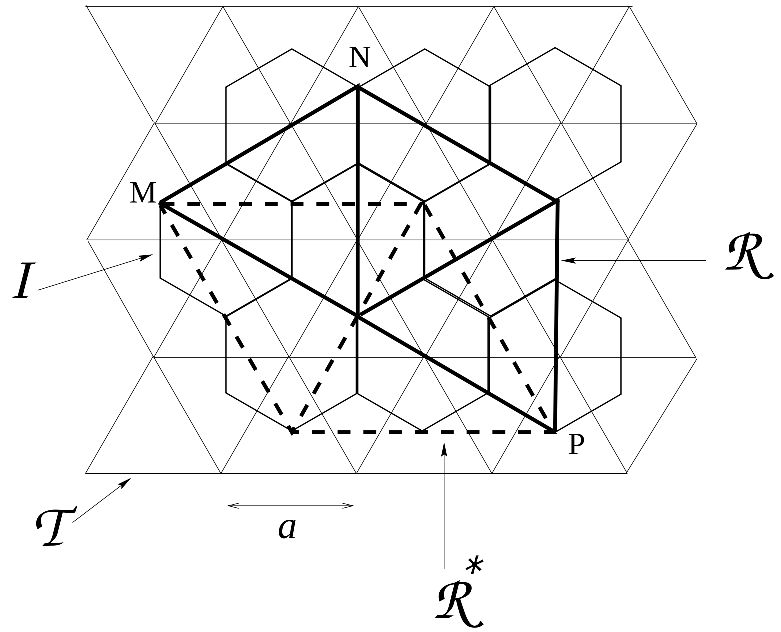

Fig. 21: Le réseau triangulaire $\mathcal{T}$ de maille a, dual du réseau hexagonal où sont tracées les boucles, et lieu des hauteurs X permises par les règles de la figure 20-(a). Le réseau idéal $\mathcal{I}$, correspondant aux valeurs de $h = \langle X \rangle$ où l'énergie libre est minimale, est un réseau hexagonal de maille $a/\sqrt{3}$. Le sous-réseau triangulaire $\mathcal{R}$ de $\mathcal{I}$ correspond aux états idéaux associés au *même* coloriage. La maille de $\mathcal{R}$ vaut $\sqrt{3}a$. Le passage du triangle M au triangle N par des pivots successifs le long des arêtes ramène le triangle dans la même orientation. Le réseau réciproque $\mathcal{R}^*$ du réseau $\mathcal{R}$ est un réseau triangulaire de maille $2/(3a)$ (ici représenté pour $a = 1/\sqrt{3}$). Le plus petit vecteur non nul du réseau réciproque $\mathcal{I}^*$ de $\mathcal{I}$ est le deuxième plus petit vecteur de $\mathcal{R}^*$, par exemple le vecteur joignant M à P sur la figure. Sa longueur est $2/(\sqrt{3}a)$.

Revenons au cas de boucles compactes et voyons comment on peut fabriquer une théorie effective du modèle à grandes distances. On introduit pour cela une description continue des hauteurs sous la forme d'un champ bidimensionnel à deux composantes $h(r) = (h_1(r), h_2(r))$ où $r = (r_1, r_2)$ est l'analogue continu des deux coordonnées d'un nœud sur le réseau hexagonal et $h(r)$ une valeur moyennée de X autour du point r. Une définition plus précise n'est pas nécessaire car seules les symétries du problème vont jouer un rôle.

La première étape consiste à identifier les configurations dites "idéales" ayant une entropie d'excitations maximale. On fait en effet l'hypothèse que ce sont les fluctuations autour de ces états idéaux qui dominent la statistique du problème. Dans le langage dual du pliage plan du réseau triangulaire, *ces configurations idéales correspondent aux pliages maximaux* où le réseau est entièrement replié sur un seul triangle. Ce sont en effets ces états qui ont le plus d'excitations élémentaires. A chaque configuration idéale, on peut associer la valeur moyenne de h correspondante, égale à la position du centre de gravité du triangle sur lequel le réseau est replié. Les valeurs de h correspondant à des états idéaux se placent sur un réseau hexagonal $\mathcal{I}$ de maille $a/\sqrt{3}$ si a est la maille du réseau triangulaire plié (voir figure 21). On écrit finalement l'énergie libre effective comme

$$f = \int d^2r \big[\pi g \left((\nabla h_1)^2 + (\nabla h_2)^2\right) + V(h)\big] \tag{6.1}$$

avec une partie gaussienne décrivant les fluctuations de hauteurs et un potentiel effectif $V(h)$ ayant la périodicité du réseau $\mathcal{I}$ et favorisant les états idéaux. La "rigidité" g sera déterminée plus bas de manière auto-cohérente.

En termes de boucles, chaque état idéal correspond à un pavage régulier de boucles hexagonales de taille 6, toutes orientées dans le même sens et centrées sur un des trois sous réseaux du réseau triangulaire dual. Il y a six tels pavages qui correspondent aux six permutations des trois couleurs ABC. Les points du réseau idéal $\mathcal{I}$ correspondant au *même pavage*, c'est à dire au *même coloriage*, forment un sous réseau $\mathcal{R}$ du réseau $\mathcal{I}$, qui est un réseau triangulaire de maille $\sqrt{3}a$ (voir figure 21).

Toute observable locale du gaz de boucles doit donc avoir la périodicité du réseau $\mathcal{R}$ et peut donc s'écrire

$$\Phi(r) = \sum_{G\in\mathcal{R}^*} \Phi_G \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi G.h(r)} \tag{6.2}$$

où G est un vecteur du réseau réciproque $\mathcal{R}^*$ du réseau $\mathcal{R}$ (défini par $G.b =$ entier pour tout b dans $\mathcal{R}$). Le réseau $\mathcal{R}^*$ est un réseau triangulaire de maille $2/(3a)$ (voir figure 21). Le potentiel $V(h)$ n'a pour sa part de composantes que sur le sous-réseau $\mathcal{I}^*$ de $\mathcal{R}^*$ correspondant au réseau réciproque du réseau idéal $\mathcal{I}$. La valeur de g est maintenant obtenue en supposant que $V(h)$ est une perturbation *marginale* du champ libre gaussien, c'est à dire de dimension $x = 2$. De manière générale, la dimension de l'"opérateur électrique" $V_G(r) \equiv \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi G.h(r)}$, qui décrit la décroissance $\langle V_G(r)V_{-G}(0)\rangle \sim r^{-2x(G)}$ vaut [17]

$$x(G) = \frac{G^2}{2g} \tag{6.3}$$

La dimension x de $V(h)$ correspond à celle de l'opérateur électrique le plus relevant (avec le $x(G)$ le plus petit) intervenant dans la décomposition de $V(h)$, donc au vecteur G de

$\mathcal{I}^*$ de norme *minimale* (vecteur MP sur la figure 21). La norme de ce vecteur étant égale à $2/(\sqrt{3}a)$, on obtient finalement

$$g = \frac{1}{3a^2} \tag{6.4}$$

Une fois g fixé, on peut alors obtenir l'exposant de décroissance des corrélations de *défauts de coloriage* sous la forme de dimensions d'"opérateurs magnétiques" définis comme suit. Un défaut de coloriage autour d'un nœud du réseau hexagonal correspond à un défaut dans la hauteur X d'une quantité $M = m_1(A-B) + m_2(A-C)$ avec m_1 et m_2 entiers (le vecteur M est donc un vecteur du réseau $\mathcal{R}$). Pour avoir une configuration sans défauts à l'infini, on doit avoir *neutralité magnétique*, par exemple en ayant un autre défaut $-M$ sur un autre nœud. Dans ce cas, la variable X a une discontinuité M le long d'une ligne joignant les deux défauts. La corrélation défaut anti-défaut décroît alors avec la distance r comme $r^{-2x(M)}$ où

$$x(M) = \frac{gM^2}{2} = \frac{1}{6}\left(\frac{M}{a}\right)^2 \tag{6.5}$$

Un premier exemple de défauts consiste à avoir deux sites non visités à distance r l'un de l'autre. Cela correspond à un défaut de coloriage caractérisé par $M = 3A$ de norme $3a$ et on a donc $x = 3/2$. Le fait que $x < 2$ montre qu'il s'agit d'une perturbation pertinente et que le gaz de boucles compactes est donc une phase *instable* vis à vis de tels défauts. L'introduction de défauts de coloriage est également utile pour décrire des lignes ouvertes dans le gaz de boucles. Par exemple, on peut décrire une ligne BC *ouverte* reliant deux points à distance r en introduisant un défaut de coloriage de type (A,A,B) autour de ces deux points. La valeur de M correspondante vaut $M = 2A + B$ de norme $\sqrt{3}a$, ce qui donne un exposant $x_1 = 1/2$. De manière générale, on trouve un exposant x_l associé à la corrélation en r^{-2x_l} pour un ensemble de l lignes BC partant d'un même point et terminant à un autre point distant de r, avec la valeur [16]

$$\begin{aligned} x_{2k} &= \frac{1}{2}k^2 \\ x_{2k-1} &= \frac{1}{2}(k^2 - k + 1) \end{aligned} \tag{6.6}$$

selon la parité de l.

Au delà du cas $n = 2$, le cas $-2 \leq n \leq 2$ peut être décrit par des boucles compactes orientées mais avec un poids $\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\pi e/6}$ par tournant à droite sur chaque nœud et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi e/6}$ par tournant à gauche. Une fois sommé sur les deux orientations possibles de chaque boucle, la collection de ces poids fabrique un poids $n = 2\cos(\pi e)$ par boucle. Ceci est vrai pour les boucles contractibles mais pas pour les boucles partant à l'infini. Une vision plus satisfaisante consiste à imaginer le modèle défini sur un cylindre, auquel cas les boucles non-contractibles s'enroulent une fois autour du cylindre et reçoivent un poids 1 au lieu de n. Ceci est corrigé en introduisant deux opérateurs électriques de charges (bidimensionnelles) E et $-E$ à l'infini aux deux bouts du cylindre, soit une énergie de la forme $2\mathrm{i}\pi E.(h(+\infty)-h(-\infty))$. Comme chaque boucle non-contractible induit une discontinuité de h de $\pm B$ (ou $\mp C$ respectivement), il suffit de choisir E tel que $E \cdot B = -E \cdot C = e/2$, soit $E = e(B-C)/(3a^2)$. Les dimensions des opérateurs électriques et magnétiques sont alors modifiées en

$$x(G,M) = \frac{1}{2g} G \cdot (G-2E) + \frac{g}{2} M^2 \tag{6.7}$$

où g est fixé en demandant une fois encore que V soit marginal. On obtient finalement

$$g = \frac{(1-e)}{3a^2} \tag{6.8}$$

où l'on a choisi ici la détermination $0 \leq e \leq 1$ de e. On trouve alors un exposant $x_l(n)$ associé à la corrélation de l lignes BC valant

$$\begin{aligned} x_{2k}(n) &= \frac{1-e}{2} k^2 - \frac{e^2}{2(1-e)} (1-\delta_{k,0}) \\ x_{2k-1}(n) &= \frac{1-e}{2} (k^2-k+1) - \frac{e^2}{2(1-e)} \end{aligned} \tag{6.9}$$

Finalement, la charge centrale du modèle passe de 2 à $2+12x(E,0)$, c'est à dire:

$$c_{\text{compact}}(n) = 2 - 6\frac{e^2}{1-e}, \qquad n = 2\cos(\pi e) \tag{6.10}$$

Pour finir l'étude du gaz de boucles sur le réseau hexagonal, notons ce que deviennent les formules ci-dessus dans le cas de la phase dense du modèle $\mathrm{O}(n)$, qui comme nous l'avons vu pour $n=2$, consiste à autoriser la présence de nœuds non visités, auquel cas la hauteur devient unidimensionnelle. L'analyse ci-dessus ramenée à ce cas beaucoup plus simple donne finalement une charge centrale

$$c_{\text{dense}}(n) = 1 - 6\frac{e^2}{1-e}, \qquad n = 2\cos(\pi e) \tag{6.11}$$

et des exposants

$$x_l(n) = \frac{1-e}{8} l^2 - \frac{e^2}{2(1-e)} (1-\delta_{l,0}) \tag{6.12}$$

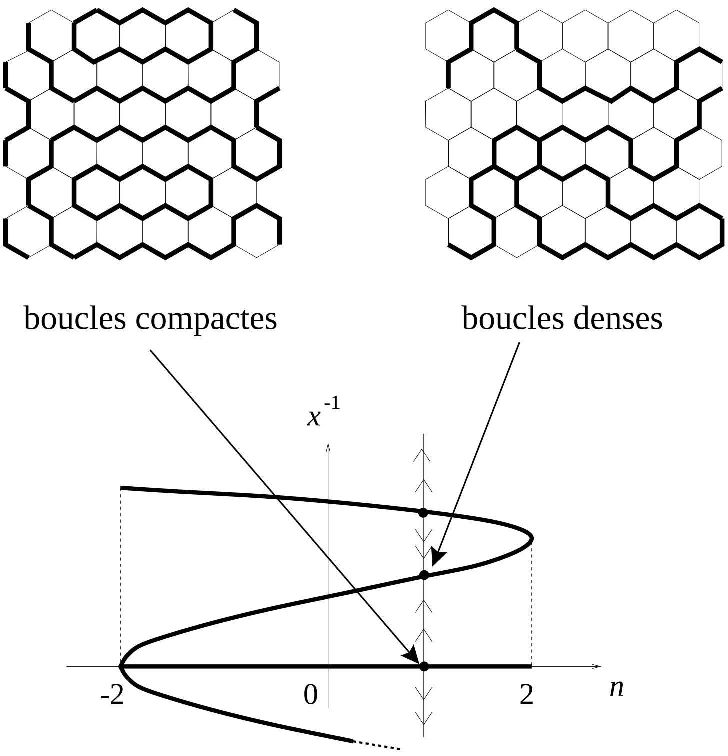

Fig. 22: Flot de renormalisation dans le plan (n, x^{-1}). On a indiqué un exemple de flot à n constant. Les boucles compactes correspondent à un point fixe instable à $x^{-1} = 0$. Les boucles denses correspondent à un point fixe stable. La charge centrale diminue de 1 entre ces deux points fixes $c_{\text{dense}}(n) = c_{\text{compact}}(n) - 1$.

pour tout l.

En conclusion, nous retiendrons que, à poids n par boucle fixé, le gaz de boucles compactes a une charge centrale augmentée de 1 par rapport au cas des boucles denses. On peut illustrer ce résultat par un diagramme de flots de renormalisation dans le plan (n, x^{-1}) où x est un poids par site visité et $-2 \leq n \leq 2$ [19]. Tous les flots se font à n constant et le problème est symétrique sous $x \to -x$ (car le nombre de sites visités par des boucles est pair). La ligne $x^{-1} = 0$, qui correspond au gaz de boucles compactes est une ligne de points fixes instables (voir figure 22) tandis que le gaz de boucles denses correspond à un point fixe stable. On retrouve également un point fixe instable à une valeur finie de x^{-1} correspondant à la transition du modèle O(n) proprement dite [19].

7. Boucles compactes sur graphes aléatoires trivalents

Venons en maintenant à la version aléatoire du problème, c'est à dire au gaz de boucles compactes sur graphes aléatoires planaires trivalents. La version la plus naturelle consiste à

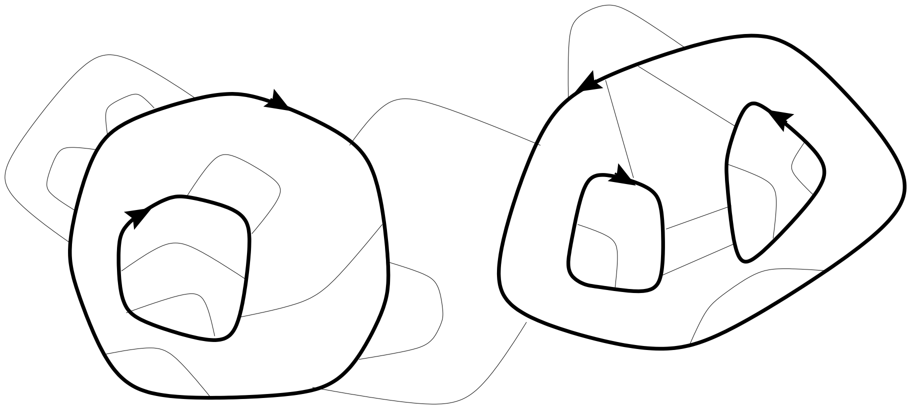

Fig. 23: Un exemple de configuration de boucles compactes orientées sur un graphe aléatoire planaire trivalent.

autoriser tous les graphes trivalents planaires. On obtient alors des configurations du type de celle représentée sur la figure 23, faites d'un ensemble de boucles orientées disjointes ou emboîtées reliées par des *arches* ne se croisant pas, correspondant aux liens non visités par une boucle.

La fonction de partition Z_s du modèle, qui compte le nombre de configurations avec $2s$ nœuds trivalents et un poids n par boucle non-orientée (ou $n/2$ par boucle orientée), se comporte comme

$$Z_s \sim C \, \frac{R^s}{s^{3-\gamma}} \tag{7.1}$$

où C, R et γ dépendent de n. La théorie générale du couplage des théories conformes à la gravité bidimensionnelle permet de relier l'exposant γ à la charge centrale du problème grâce à la célèbre relation KPZ [20]

$$\gamma = \frac{c - 1 - \sqrt{(25-c)(1-c)}}{12} \tag{7.2}$$

En d'autres termes, la détermination de γ est une *mesure directe de la charge centrale* de la théorie conforme associée.

Plus généralement, nous pouvons également considérer la corrélation $\langle \Phi_{M_1} \Phi_{M_2} \cdots \Phi_{M_k} \rangle$ correspondant à l'insertion de k opérateurs magnétiques M_i (avec la contrainte de neutralité $\sum_i M_i = 0$). Dans le langage des graphes, l'insertion de ces opérateurs magnétiques revient à considérer des graphes avec un certain nombre de nœuds marqués avec des défauts, par exemple des nœuds non visités ou des nœuds d'où partent ou arrivent des nombres prédéfinis de lignes. La théorie générale du couplage des théories conformes à la gravité bidimensionnelle prévoit alors

$$\langle \Phi_{M_1} \Phi_{M_2} \cdots \Phi_{M_k} \rangle \sim C' \frac{R^s}{s^\alpha}, \qquad \alpha = 3 - k - \gamma + \sum_{i=1}^{k} \Delta(M_i) \tag{7.3}$$

avec γ donné par (7.2) et une relation entre l'exposant $x(M_i)$ dans le plan et l'exposant $\Delta(M_i)$ couplé à la gravité donnée par

$$\Delta = \frac{\sqrt{1-c+12x} - \sqrt{1-c}}{\sqrt{25-c} - \sqrt{1-c}} \tag{7.4}$$

Dans le cas qui nous intéresse ici, la valeur de γ peut être obtenue exactement par des techniques d'intégrales de matrice (voir Refs. [21]) avec le résultat

$$\gamma = -\frac{e}{1-e} \qquad n = 2\cos(\pi e), \qquad 0 \le e \le 1 \tag{7.5}$$

On peut également calculer l'exposant α pour la fonction de partition avec deux points marqués d'où partent (respectivement arrivent) l lignes, avec le résultat [22]

$$\alpha = 1 + \frac{l}{2} \tag{7.6}$$

indépendamment de n.

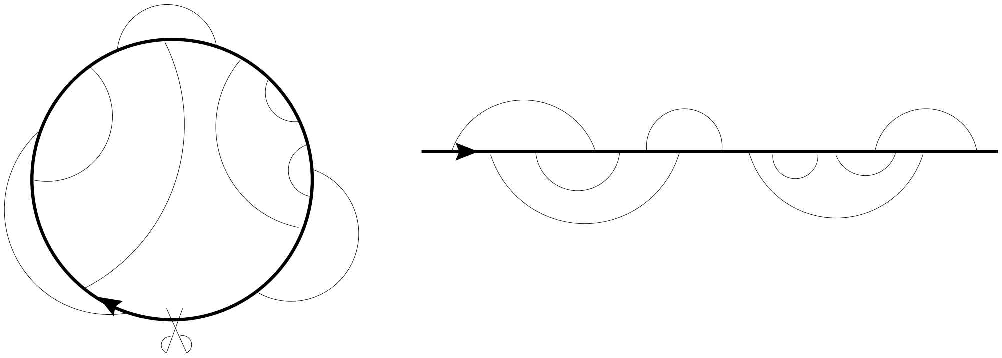

Fig. 24: Un exemple de cycle hamiltonien orienté sur un graphe aléatoire planaire trivalent. En coupant un lien et étirant la boucle en une ligne orientée infinie, on obtient un système d'arches au dessus et en dessous de la ligne.

A titre d'illustration, un cas particulier intéressant concerne le cas $n \to 0$ où on impose d'avoir une seule boucle, et qui décrit donc le problème des cycles *hamiltoniens*, c'est à dire passant par tous les nœuds du graphe aléatoire trivalent. Si on ouvre la boucle sur l'un des $2s$ liens visités et on l'étend en une ligne infinie orientée de gauche à droite comme sur la figure 24, on obtient simplement un système d'arches fait de k arches au dessus de la ligne et $s-k$ en dessous, d'où l'on déduit

$$2sZ_s = \sum_{k=0}^{s} \binom{2s}{2k} c_k c_{n-k} = c_s c_{s+1} \sim \frac{4}{\pi}\frac{16^s}{s^3} \tag{7.7}$$

où le nombre de Catalan $c_s = (2s)!/(s!(s+1)!)$ compte le nombre de configurations possibles de s arches ne se croisant pas. On trouve ainsi $\gamma = -1$, compatible avec (7.5) pour $n = 0$ ($e = 1/2$).

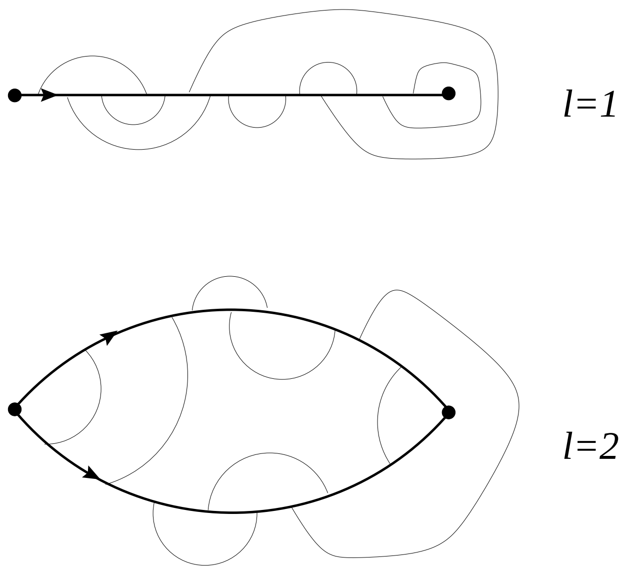

Fig. 25: Exemples de configurations avec deux points marqués d'où partent ou arrivent l lignes, pour $l = 1$ (haut) et $l = 2$ (bas)

On peut de la même façon traiter le cas de configurations avec deux points marqués d'où partent ou arrivent l lignes orientée (voir figure 25). Par exemple, le cas $l = 1$ correspond à une ligne *ouverte* habillée par des arches. Le nombre de telles configurations à $2s$ nœuds trivalent est clairement $2^{2s}c_s \sim 16^s/s^{3/2}$, en accord avec (7.6) pour $l = 1$. De même, pour $l = 2$, on décrit des configurations de cycles hamiltoniens avec deux liens marqués (voir figure 25), en nombre $4s^2 Z_s \sim 16^s/s^2$, en accord avec (7.6) pour $l = 2$.

En inversant la relation (7.2), on voit que la valeur (7.5) de γ est compatible avec une charge centrale $c = c_{\text{dense}}(n) = 1 - 6e^2/(1-e)$. De même, en utilisant (7.3) avec $k = 2$, c'est à dire $\alpha = 1 - \gamma + 2\Delta$, et en inversant la relation (7.4), on trouve que le résultat (7.6) pour α est alors compatible avec $x = x_l(n)$ donné par (6.12). En conclusion, le modèle de boucles compactes défini sur des graphes aléatoires trivalents quelconques correspond au couplage à la gravité d'une théorie de charge centrale $c_{\rm dense}(n)$ comme quand les boucles ne sont pas compactes, et non $c_{\rm compact}(n)$. En d'autres termes, on n'observe pas le phénomène $c \to c+1$ qui apparaissait sur réseau régulier au passage des boucles denses à celui des boucles compactes .

Une première tentative d'explication pourrait mettre en cause la définition du modèle en remarquant que si nous avions voulu retenir que les boucles compactes orientées soient les boucles BC d'un tricoloriage ABC sous-jacent, il fallait imposer la contrainte supplémentaire que les boucles soient de longueur *paire* (pour assurer l'alternance BC). Il a été montré [14,15] que le modèle O(n) avec boucles paires sur graphes aléatoires est de la classe d'universalité du modèle O($n/2$), ce qui ne correspond pas au phénomène $c \to c+1$ recherché. Comme nous allons le voir dans la section suivante, c'est en fait plutôt *la classe des graphes aléatoires* qu'il faut changer pour retrouver la charge centrale $c_{\rm compact}(n)$ du cas régulier.

8. Boucles compactes sur graphes aléatoires trivalents bipartites

Cette partie s'appuie sur la publication VI reproduite en annexe et sur la référence [23].

Dans le cas $n = 2$ sur réseau régulier, la charge centrale $c = 2$ du gaz de boucles compactes au lieu de $c = 1$ pour des boucles denses avait une interprétation géométrique comme étant associée aux 2 degrés de libertés correspondant aux deux dimensions des coordonnées dans le problème équivalent du pliage plan du réseau triangulaire. Nous avons vu qu'en passant au cas aléatoire, on ne pouvait conserver cette image de pliage qu'à condition de demander que les triangulations soient pliables, c'est à dire *eulériennes.* Dans le langage dual de graphes trivalents, cette condition consiste à demander que le graphe soit bipartite, c'est à dire qu'on puisse colorier ses nœuds en noir et blanc de sorte que deux nœuds voisins soient de couleurs différentes. Au delà de l'interprétation en termes de pliages, nous avons déjà remarqué que les règles de la figure 20 permettant de définir une hauteur bidimensionnelle utilisaient explicitement le caractère bipartite du réseau hexagonal. Il n'est pas surprenant que ce caractère bipartite intervienne également de manière cruciale dans le cas aléatoire.

Nous allons maintenant montrer dans les deux cas $n = 0$ et $n = 1$ que le modèle de gaz de boucles compactes sur graphes trivalents bicoloriés des nœuds a bien la charge centrale “augmentée” $c_{\text{compact}}(n)$ donnée par (6.10). Dans le cas $n = 0$, ce phénomène se traduira par l'apparition remarquable d'un exposant critique irrationnel pour un problème de combinatoire apparemment anodin.

Traitons d'abord ce cas $n = 0$ décrivant des cycles hamiltoniens passant par tous les nœuds d'un graphe trivalent bicolorié, ou de manière équivalente par toutes les faces d'une triangulation eulérienne. On veut calculer le nombre Z_s^E de telles configurations avec $2s$ nœuds trivalents.

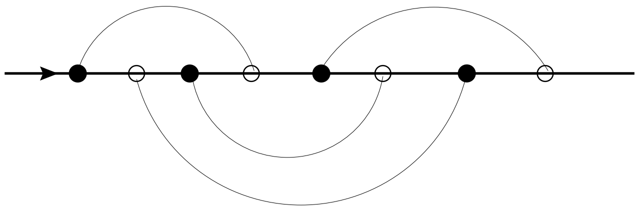

Fig. 26: Exemple de configuration d'arches autour d'une ligne obtenue en découpant le cycle hamiltonien. Les nœuds blancs et noirs alternent le long de la ligne. Chaque arche relie un nœud blanc à un nœud noir.

On peut encore une fois ouvrir le cycle hamiltonien sur n'importe lequel des s liens menant à un nœud noir pour fabriquer une ligne infinie orientée de gauche à droite avec un système d'arches au dessus et en dessous de la ligne (voir figure 26). Par rapport au cas traité dans la section précédente, on a maintenant les deux contraintes suivantes:

(i) *les couleurs* des nœuds *le long de la ligne alternent entre noir et blanc* (en commençant par un noir);

(ii) *toute arche relie un nœud blanc à un nœud noir.*

Ce problème combinatoire, bien qu'apparemment extrêmement simple, n'est pas résolu à ce jour. On peut cependant assez facilement obtenir le nombre sZ_s^E de telles configurations pour les premières valeurs de s. Une première méthode consiste à utiliser une matrice de transfert pour engendrer les systèmes d'arches de la gauche vers la droite. Nous verrons une technique similaire dans la section suivante pour décrire les méandres. Une autre approche, présentée dans la publication VI, consiste à fabriquer les deux systèmes d'arches en haut et en bas et à compter le nombre de manières de les intercaler pour que la suite des noirs et blancs alterne. Les premières valeurs de sZ_s^E pour $s = 1, 2, \cdots, 22$ sont données dans la table ci-dessous:

1	2
2	8
3	40
4	228
5	1424
6	9520
7	67064
8	492292
9	3735112
10	29114128
11	232077344
12	1885195276
13	15562235264
14	130263211680
15	1103650297320
16	9450760284100
17	81696139565864
18	712188311673280
19	6255662512111248
20	55324571848957688
21	492328039660580784
22	4406003100524940624

On peut alors facilement extraire de ces données une estimation de l'exposant γ (voir figure 27), qui conduit à $\gamma = -0,77(1)$ clairement différente de la valeur $\gamma = -1$ obtenue dans la section précédente. De plus, cette nouvelle valeur est compatible avec une charge centrale $c = c_{\text{compact}}(0) = -1$, pour laquelle γ vaut, d'après (7.2)

$$\gamma = -\frac{1+\sqrt{13}}{6} \sim -0,76759\cdots \tag{8.1}$$

Par inversion de la relation (7.2), on trouve une charge centrale $c = -1 \pm 0,05$ (voir figure 28), qui laisse peu de doute sur le fait que $c = c_{\text{compact}}(0) = -1$ comme attendu. Nous sommes ainsi amenés à conclure que le gaz de boucles compactes sur graphes trivalents bicoloriés des nœuds correspond à une charge centrale $c_{\text{compact}}(0) = -1$ et que notre problème combinatoire simple fait apparaître de manière assez remarquable un exposant de configurations irrationnel donné par (8.1).

Venons en maintenant au cas $n = 1$ d'un gaz de boucles compactes *non-orientées* sans poids par boucle sur des graphes trivalents bicoloriés des nœuds. On peut alors orienter chaque lien, occupé ou non par une boucle, du nœud blanc vers le nœud noir adjacent. En contractant en un seul nœud tétravalent chaque paire de nœuds trivalents séparés par un lien vide, et en ne conservant donc que les liens occupés, on obtient un graphe tétravalent avec des *liens orientés* satisfaisant la règle du modèle à six vertex que chaque nœud a

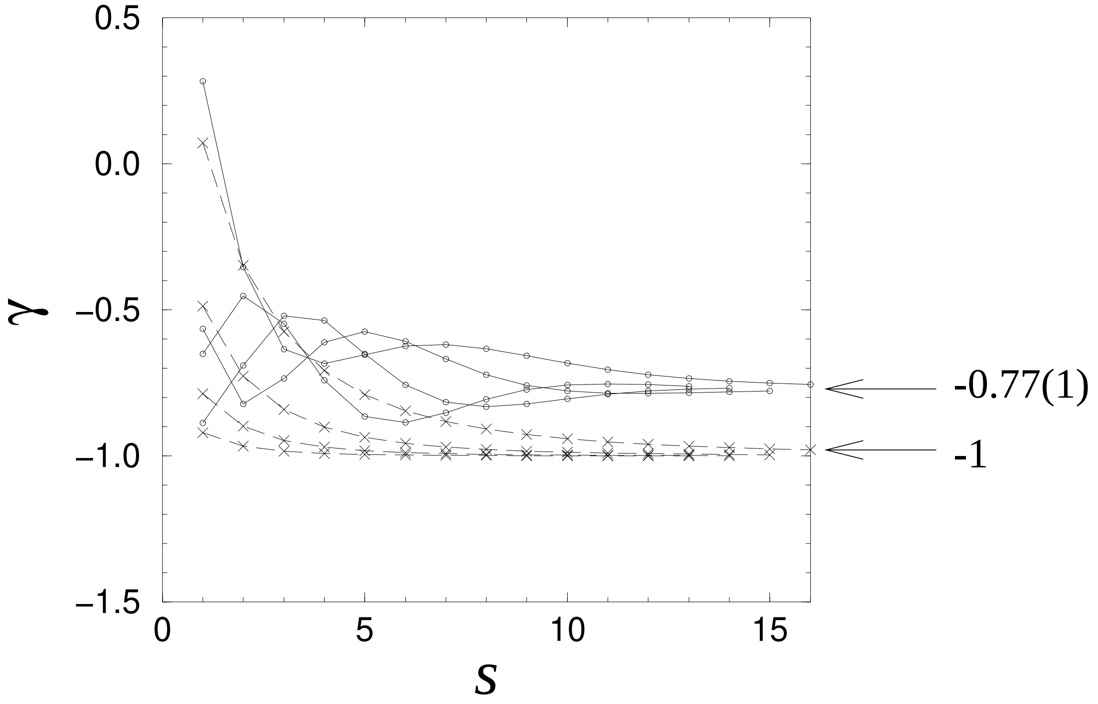

Fig. 27: Estimations de γ à partir des énumérations exactes sZ_s^E (voir table) dans le cas eulérien ($\circ$) et $2sZ_s = c_s c_{s+1}$ dans le cas non eulérien ($\times$). L'abscisse correspond à la valeur minimale de s utilisée dans la détermination. Les différentes courbes correspondent à des itérations successives de l'algorithme utilisé (voir publication VI). La valeur de γ qui vaut -1 dans le cas non eulérien vaut $\sim -0,77(1)$ dans le cas eulérien.

exactement deux flèches entrantes et deux sortantes (voir figure 29). Plus précisément, les deux flèches entrantes doivent être *consécutives* autour du nœud, ce qui correspond au cas particulier où l'un des poids (w_3) est nul. Ce modèle particulier a été résolu dans le formalisme des intégrales matricielles dans la référence [24], où il est montré d'une part que le point $w_3 = 0$ correspond à un point critique du modèle à six vertex gravitationnel, et d'autre part que la théorie à ce point a charge centrale $c = 1$ qui correspond bien à $c_{\text{compact}}(n = 1)$.

Pour conclure cette partie, l'analyse ci-dessus des cas $n = 0$ et $n = 1$ suggère finalement que c'est bien la bicoloriabilité du graphe trivalent sous-jacent, c'est à dire le caractère eulérien de la triangulation aléatoire duale, qu'il faut conserver pour garder la classe d'universalité spécifique des boucles compactes, telle qu'observée sur réseau régulier. Dans le cas $n = 2$, qui décrit le pliage plan des triangulations aléatoires pliables, on s'attend à une théorie de charge centrale $c_{\text{compact}}(2) = 2$ dont le couplage à la gravité

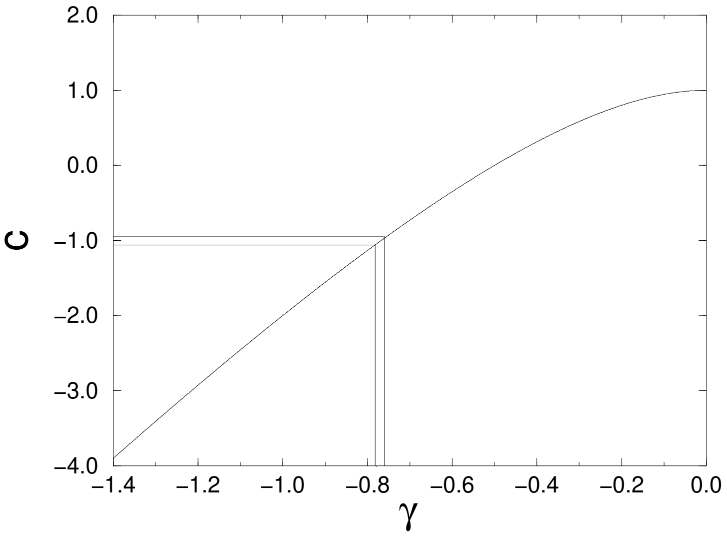

Fig. 28: Estimation de la charge centrale par la donnée de γ. On a indiqué l'erreur sur c héritée de celle sur γ.

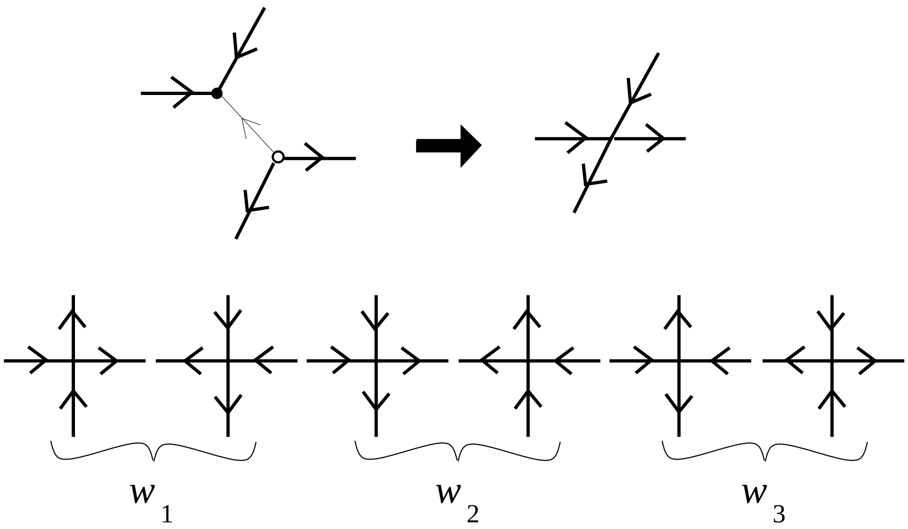

Fig. 29: Transformation du modèle de boucles compactes à $n = 1$ en un cas particulier du modèle à six vertex gravitationnel. En haut: en orientant les liens vers les nœuds noirs et en contractant les liens non-visités, on obtient des nœuds tétravalents avec deux flèches entrantes consécutives. En bas: les six vertex du modèle à six vertex et leurs poids respectifs sur réseau régulier. Une fois défini sur réseau aléatoire, on a nécessairement $w_1 = w_2$. La contrainte que les deux flèches entrantes soient consécutives impose de plus $w_3 = 0$.

dépasserait la célèbre barrière à $c = 1$ où les formules de KPZ (7.2) cessent d'être valables. De manière heuristique, on s'attend à ce que la statistique soit alors dominée par des configurations où la surface dégénère en objets formant des structures unidimensionnelles fortement branchées. Une confirmation de cette image nécessiterait de résoudre le problème simultané du tricoloriage des nœuds et des liens de triangulations aléatoires, un problème toujours ouvert.

Partie C : Méandres

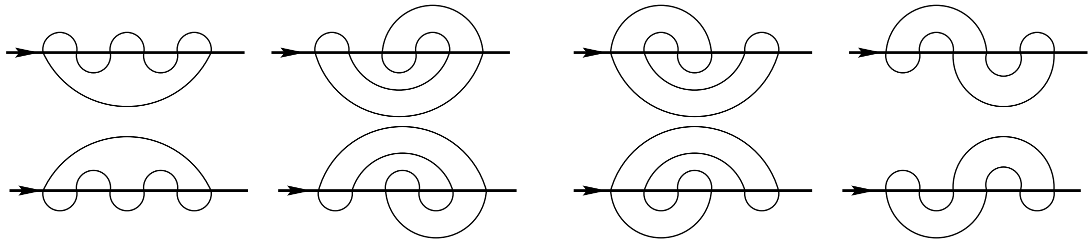

Fig. 30: Les $M_3 = 8$ configurations de méandres pour $2n = 6$ ponts.

Le problème des méandres fait partie de ces problèmes combinatoires qui, bien qu'ayant une formulation très simple, résistent encore à une énumération exacte, fût-elle asymptotique. La question posée est la suivante: *quel est le nombre M_n de configurations topologiquement inéquivalentes d'un circuit fermé traversant une rivière en $2n$ ponts.* Dans cette image, la rivière est supposée infinie et orientée, disons d'ouest en est[10]. La figure 30 représente par exemple les $M_3 = 8$ configurations de méandres à 6 ponts.

Le problème des méandres est en fait relié à une question de pliage unidimensionnel par l'équivalence suivante. Imaginons une bande de $n-1$ timbres-poste attachée à une souche. On veut calculer le nombre de manières distinctes de replier la bande de timbres sur un seul timbre (adjacent à la souche). La difficulté du problème vient ici de l'évitement des timbres qui ne peuvent pas se croiser. La figure 31-(a) représente par exemple les 4 façons de plier une bande de 3 timbres. Etant donné un pliage de la bande de timbres, on peut imaginer transpercer le pliage par une aiguille et un fil et refermer le fil sur la souche pour faire une boucle (voir figure 31-(b)). On peut ensuite déplier la bande de timbres et observer le fil qui forme des méandres autour d'elle. L'objet ainsi obtenu est ce que nous appellerons un *semi-méandre*, car dans ce cas la rivière est *semi-infinie*, c'est à dire

[10] En refermant la rivière en une ligne fermée et en déformant les contours, on voit que le circuit et la rivière jouent en fait des rôles symétriques dans ce problème. La terminologie de méandres se réfère plutôt à l'image duale où c'est la rivière qui serpenterait autour du circuit.

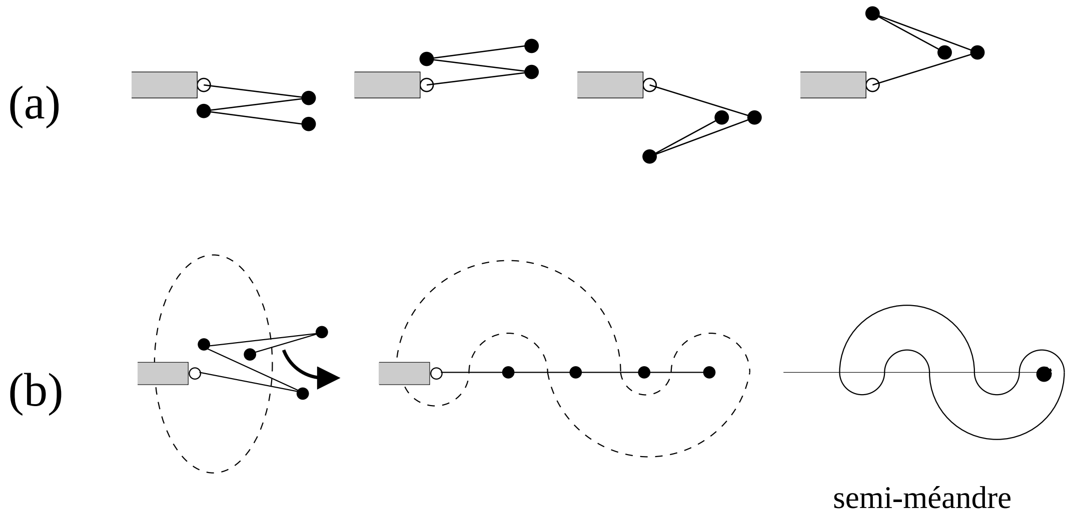

Fig. 31: Les quatre façons (a) de plier une bande de 3 timbres (ici vus en coupe) sur un seul timbre. Transformation (b) d'un pliage d'une bande de $n-1$ timbres sur un seul timbre en un semi-méandre à n ponts. Les semi-méandres correspondent au cas d'une rivière semi-infinie avec une source ($\bullet$) autour de laquelle le circuit peut s'enrouler.

coulant, disons vers l'ouest, à partir d'une source. Le circuit fermé croise cette rivière en n ponts, correspondant aux $n-1$ timbres plus la souche. Il est à noter que le circuit peut s'enrouler autour de la source, correspondant au cas où l'extrémité libre de la bande de timbres est enfouie à l'intérieur du pliage. La construction ci-dessus est clairement une bijection entre pliages d'une bande de $n-1$ timbres et semi-méandres à n ponts.

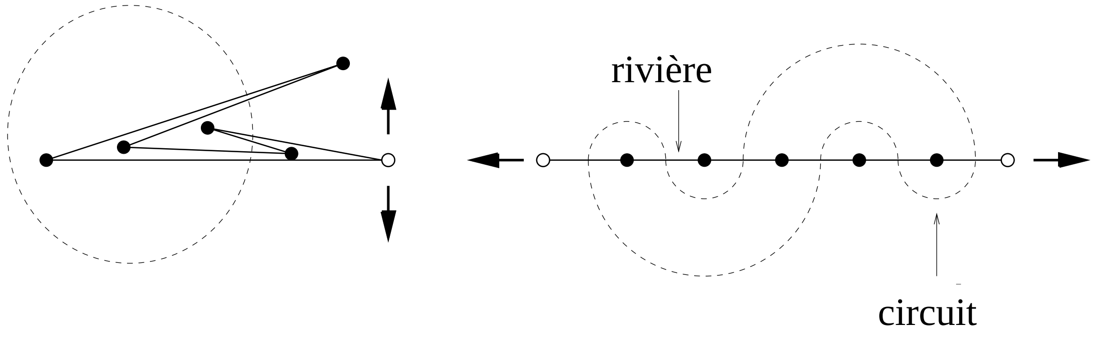

Fig. 32: Correspondance entre les repliements d'une bande *fermée* de $2n$ timbres et les méandres à $2n$ ponts.

Le problème original des méandres correspond pour sa part au repliement d'une bande *fermée* de $2n$ timbres formant une boucle. On voit en effet aisément que les repliements d'une telle boucle de timbres sur un seul timbre (supposé marqué) sont en bijection avec les méandres à $2n$ ponts (voir figure 32).

Le problème des méandres est assez ancien. Il est mentionné dès 1891 sous le nom de "problème des timbres-poste" [25]. Par la suite, Sainte-Lagüe y consacre un chapitre dans son ouvrage de 1937 "Avec de nombres et des lignes: récréations mathématiques" [26]. Diverses approches combinatoires du problème sont discutées dans les références [27-29]. Plus récemment, le problème est réapparu avec des travaux d' Arnol'd [30] en connexion avec le seizième problème de Hilbert (l'énumération des ovales de courbes algébriques planes). La formulation moderne du problème, telle qu'elle est présentée ci-dessus, est due à Lando et Zvonkin [31]. Citons finalement que le problème est connecté à bien d'autres problèmes, mathématiques comme la classification des 3-surfaces [32], informatiques comme l'étude des permutations planes [33], ou même artistiques, comme la description des labyrinthes dans les mosaïques romanes [34].

Malgré un certain nombre de tentatives, le problème reste cependant non-résolu à ce jour. Le résultat le plus important de cette partie C sera la prédiction d'un certain nombre d'exposants critiques, tous irrationnels, associés aux comportements asymptotiques à grand n des nombres de méandres ou semi-méandres.

Après avoir donné quelques définitions générales dans la section 9, nous passerons en revue dans la section 10 un certain nombre de résultats exacts concernant les méandres et semi-méandres généralisés à plusieurs circuits. Nous verrons dans la section 11 comment procéder à une énumération systématique pour des petites valeurs du nombre de ponts et comment extraire de ces résultats les comportements asymptotiques à grand nombre de ponts. La section 12 sera consacrée à la description du problème comme couplage d'une théorie conforme à la gravité et fournira les valeurs de divers exposants critiques. Enfin, la section 13 montrera le lien qui existe entre le problème des méandres et le pliage de quadrangulations aléatoires.

9. Définitions générales

Cette partie s'appuie sur la référence [35].

Dans les trois premières sections de cette partie C, nous allons nous intéresser au cas généralisé de *méandres à k composantes connexes* formés toujours d'*une seule rivière* mais

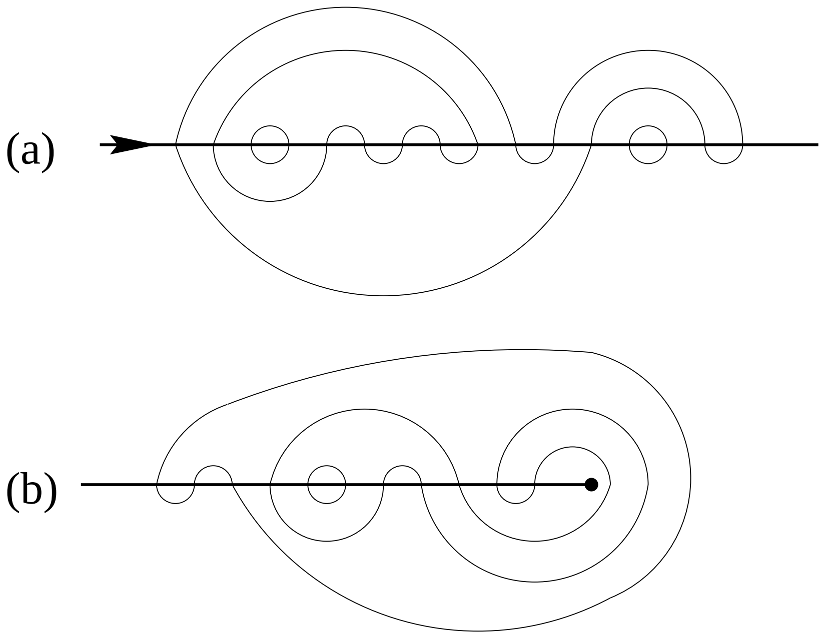

Fig. 33: Un exemple de méandre (a) à $2n = 16$ ponts et $k = 4$ composantes connexes. Un exemple de semi-méandre (b) à $n = 11$ ponts, $k = 3$ composantes connexes et d'enroulement $w = 3$ autour de la source de la rivière ($\bullet$).

d'un nombre k de circuits. Nous désignerons ainsi par $M_n^{(k)}$ le nombre de configurations topologiquement inéquivalentes de k circuits ne s'intersectant pas et croisant une rivière (orientée d'ouest en est) en un total de $2n$ ponts, avec clairement $k \leq n$ (on demande que chaque circuit croise la rivière). Plus simplement, nous parlerons de méandres à $2n$ ponts et k composantes connexes (voir figure 33). De même, nous dénoterons par $SM_n^{(k)}$ le nombre de *semi-méandres* à n ponts et k composantes connexes correspondant au cas où la rivière est une ligne semi-infinie avec une source autour de laquelle les k circuits peuvent s'enrouler (voir figure 33). Là encore, on a nécessairement $k \leq n$. Avec ces définitions, les problèmes originaux des méandres et semi-méandres correspondent au cas $k = 1$.

Plutôt que de travailler à k constant, il est plus facile de laisser k varier mais d'introduire un poids q par composante connexe. On définit ainsi les fonctions de partition

$$\begin{aligned} M_n(q) &\equiv \sum_{k=0}^{n} q^k \, M_n^{(k)} \\ SM_n(q) &\equiv \sum_{k=0}^{n} q^k \, SM_n^{(k)} \end{aligned} \tag{9.1}$$

Le cas original des méandres et semi-méandres est alors retrouvé en considérant la limite $q \to 0$.

A grand n, on s'attend aux comportements asymptotiques suivants:

$$\begin{aligned} M_n(q) &\sim C(q)\,\frac{R(q)^{2n}}{n^{\alpha(q)}} \\ SM_n(q) &\sim \bar{C}(q)\,\frac{\bar{R}(q)^{n}}{n^{\bar{\alpha}(q)}} \end{aligned} \tag{9.2}$$

avec des exposants critiques $\alpha(q)$ et $\bar{\alpha}(q)$ à déterminer. Dans le cas des semi-méandres, on peut également définir l'*enroulement* w d'un semi-méandre comme le nombre total de portions de circuits s'enroulant autour de la source (voir figure 33). On peut s'intéresser à la valeur moyenne de w pour les configurations à n ponts et avec un poids q par composante connexe. On s'attend au comportement à grand n:

$$\langle w \rangle_n(q) \sim n^{\nu(q)} \tag{9.3}$$

avec un exposant $0 \leq \nu(q) \leq 1$. Il est clair que n et w ont la même parité et que les méandres correspondent aux semi-méandres à $2n$ ponts ayant un enroulement w nul.

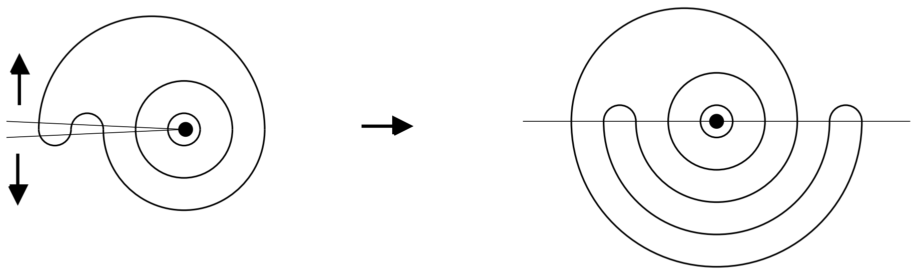

Fig. 34: En ouvrant en deux la rivière et en la dépliant en une ligne infinie, on transforme tout semi-méandre à n ponts en un méandre à $2n$ ponts fait d'un système de n arches au dessus de la ligne complété par n arches emboîtées en arc-en-ciel en dessous de la ligne (qui gardent trace de la connectivité). L'enroulement (ici $w = 3$) correspond au nombre d'arches au dessus du point milieu ($\bullet$).

Notons inversement qu'un semi-méandre à n ponts peut être vu comme un méandre particulier à $2n$ ponts en "ouvrant en deux" la rivière (voir figure 34) et en reliant les ponts diamétralement opposés par un "arc-en-ciel" pour conserver la connectivité des boucles.

Deux situations sont a priori possibles:

(i) $\nu(q) < 1$ et $R(q) = \bar{R}(q)$. Ce cas correspond à une situation où l'enroulement devient négligeable à grand n et l'entropie par pont des méandres et des semi-méandres est donc la même;

ou:

(ii) $\nu(q) = 1$ et $R(q) < \bar{R}(q)$. Ce cas correspond à une situation où l'enroulement est source pour les semi-méandres d'une entropie extensive par pont supplémentaire.

Nous allons voir dans la section suivante que les deux situations (i) et (ii) se rencontrent suivant la valeur de q.

10. Quelques cas solubles: statistique d'arches

Cette partie est basée sur la référence [35] et, pour ce qui concerne le "déterminant des méandres", sur la référence [36].

La liste des dénombrements exacts de méandres connus pour tout n se limite aux trois cas $q \to \infty$, $q = 1$ et $q = -1$. Dans tous les cas, on se ramène à une statistique d'arches. Un méandre à $2n$ ponts peut en effet être vu comme la juxtaposition de deux systèmes arbitraires de n arches, un de chaque côté de la rivière, connectés au niveau des ponts. De même, en ouvrant la rivière en deux (voir figure 34), un semi-méandre est la juxtaposition d'un système arbitraire de n arches d'un côté et du système particulier fait d'arches emboîtées en arc-en-ciel de l'autre côté.

Rappelons que le nombre de configurations possibles de n arches est donné par le n-ième nombre de Catalan

$$c_n \equiv \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!} \tag{10.1}$$

Dans le cas $q = 1$ où l'on ne distingue pas suivant le nombre de composantes connexes, on en déduit les dénombrements exacts

$$\begin{aligned} M_n(q=1) &= (c_n)^2 \sim \frac{1}{\pi}\frac{4^{2n}}{n^3} \\ SM_n(q=1) &= c_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{4^n}{n^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \tag{10.2}$$

d'où l'on déduit $R(1) = \bar{R}(1) = 4$, $\alpha(1) = 3$ et $\bar{\alpha}(1) = 3/2$. L'enroulement w correspond au nombre d'arches ouvertes au dessus de la source de la rivière (point milieu sur la figure 34). On calcule aisément la moyenne de w pour tout n, avec le comportement asymptotique à grand n:

$$\langle w \rangle_n(q=1) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} n^{\frac{1}{2}} \tag{10.3}$$

c'est à dire $\nu(q = 1) = 1/2$. On est donc dans la situation (i) d'enroulement négligeable décrite dans la section précédente.

Dans le cas $q \to \infty$, on veut maximiser le nombre de composantes connexes k à n fixé, c'est à dire avoir $k = n$. Dans le cas des méandres, il est facile de voir qu'une condition nécessaire et suffisante est que le système d'arches au dessus de la rivière soit identique au système d'arches en dessous. De même, dans le cas des semi-méandres, le système d'arches au dessus de la rivière (ouverte en deux) doit être fait d'arches emboîtées, ce qui, une fois la rivière refermée, sélectionne une configuration unique de grands cercles emboîtés entourant la source. On en déduit les dénombrements suivants:

$$\begin{aligned} M_n(q) &\overset{q\to\infty}{\sim} c_n q^n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(2\sqrt{q})^{2n}}{n^{3/2}} \\ SM_n(q) &\overset{q\to\infty}{\sim} q^n \end{aligned} \tag{10.4}$$

et donc $R(q) = 2\sqrt{q}$, $\bar{R}(q) = q$, $\alpha(q) = 3/2$, $\bar{\alpha}(q) = 0$. On a clairement $\langle w \rangle = n$ puisque l'unique semi-méandre à n composantes connexes a enroulement n et donc $\nu(q) = 1$. On est ainsi dans la situation (ii) décrite à la section précédente. Nous verrons un peu plus loin comment le résultat à $q \to \infty$ peut être pris comme point de départ d'un développement systématique en $1/q$.

Enfin, un dernier cas soluble concerne le cas $q = -1$ pour lequel on montre que [35]

$$\begin{aligned} M_n(q=-1) &= \begin{cases} 0 & n \quad \text{pair} \\ -(c_p)^2 & n = 2p+1 \end{cases} \\ SM_n(q=-1) &= \begin{cases} 0 & n \quad \text{pair} \\ -c_p & n = 2p+1 \end{cases} \end{aligned} \tag{10.5}$$

◇ *Déterminant des méandres*

Au delà des énumérations particulières ci-dessus, un autre résultat exact concerne le calcul *pour tout q* d'un *déterminant des méandres* défini comme suit. Nous avons vu que tout méandre à $2n$ ponts (et à un nombre arbitraire de composantes connexes) peut être vu comme la juxtaposition de deux systèmes de n arches, disons $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. En prenant toutes les paires de systèmes de n arches, on peut définir une matrice carrée symétrique $\mathcal{G}_n(q)$ de taille $c_n \times c_n$ dont l'élément $\mathcal{G}_n(q)_{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ vaut

$$\mathcal{G}_n(q)_{\mathcal{A}\mathcal{B}} = q^{c(\mathcal{A},\mathcal{B})} \tag{10.6}$$

où $c(\mathcal{A},\mathcal{B})$ dénote le nombre de composantes connexes du méandre obtenu en juxtaposant les systèmes d'arches $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ (voir figure 35). Il est à noter que la matrice $\mathcal{G}_n(q)$ contient toutes les informations relatives aux méandres et semi-méandres. Par exemple, on a

$$M_n(q) = \sum_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \mathcal{G}_n(q)_{\mathcal{A}\mathcal{B}} = \mathrm{Tr}\Big[\big(\mathcal{G}_n(\sqrt{q})\big)^2\Big] \tag{10.7}$$

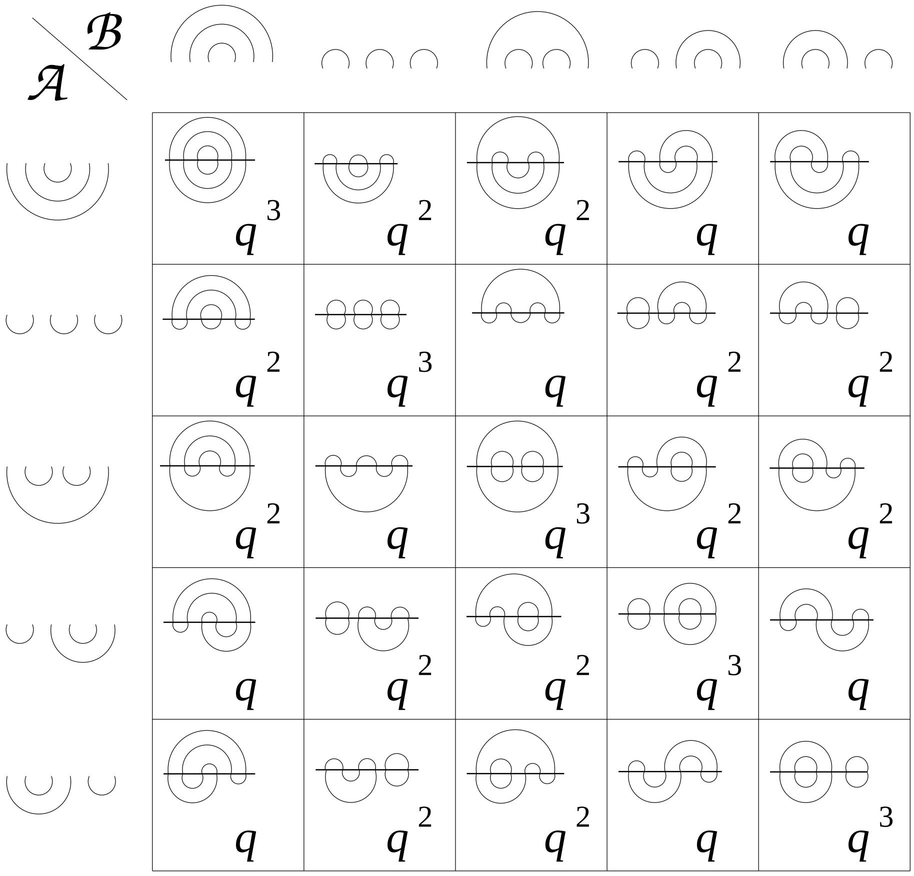

Fig. 35: La matrice $\mathcal{G}_n(q)$ (ici pour $n = 3$, $c_3 = 5$) obtenue en juxtaposant toutes les paires $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ de systèmes de n arches. L'élément de matrice $\mathcal{G}_n(q)_{\mathcal{A}\mathcal{B}} = q^{c(\mathcal{A},\mathcal{B})}$ code le nombre de composantes connexes $c(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ du méandre obtenu.

Nous appellerons "déterminant des méandres" le déterminant de la matrice $\mathcal{G}_n(q)$. Il est remarquable que ce déterminant se calcule exactement, avec le résultat [36]:

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{G}_n(q)) &= \prod_{i=1}^{n} U_i(q)^{a_{n,i}} \\ a_{n,i} &= \binom{2n}{n-i} - 2\binom{2n}{n-i-1} + \binom{2n}{n-i-2} \end{aligned} \tag{10.8}$$

où les $U_i(q)$ sont les polynômes de Tchebytcheff définis de manière récurrente par $U_{j+1}(q) = qU_j(q) - U_{j-1}(q)$, $U_0(q) = 1$, $U_1(q) = q$. On peut définir ces polynômes de manière équivalente par $U_j(2\cos(\theta)) = \sin((j+1)\theta)/\sin(\theta)$, ce qui conduit à la formulation équivalente du déterminant

$$\det(\mathcal{G}_n(q)) = \prod_{1 \le l \le i \le n} \left(q - 2\cos\left(\pi \frac{l}{i+1}\right)\right)^{a_{n,i}} \tag{10.9}$$

A titre d'exemple, pour $n = 3$, le déterminant de la matrice $\mathcal{G}_3(q)$ représentée sur la figure 35 vaut $q^5(q^2-1)^4(q^2-2)$. La démonstration des formules ci-dessus utilise le lien étroit entre le problème des méandres et l'algèbre de Temperley-Lieb [37,38] (voir [36]). Des extensions de ces formules au cas plus général de l'algèbre de Hecke se trouvent dans la référence [39].

11. Enumération directe

Cette partie est basée sur les publications VII et IX reproduites en annexe.

On peut procéder à une énumération directe par ordinateur des configurations de méandres ou semi-méandres. Divers algorithmes ont été utilisés, les meilleurs produisant des résultats jusqu'à une cinquantaine de ponts. Nous présenterons ici deux algorithmes, un algorithme de croissance d'arches particulièrement adapté au cas des semi-méandres, et un algorithme par matrice de transfert. Au delà de l'énumération exacte, des approches statistiques de type Monte Carlo ont également été utilisées [40].

◇ *Croissance d'arches*

Cet algorithme engendre les configurations de semi-méandres, les méandres étant retrouvés comme cas particulier de semi-méandres d'enroulement nul. On utilise l'image "ouverte" des semi-méandres obtenue en ouvrant la rivière en deux comme sur la figure 34. Un semi-méandre est donc représenté par un système d'arches refermées par un arc-en-ciel. On engendre les semi-méandres à $n+1$ ponts (c'est à dire $n+1$ arches au dessus de la rivière) à partir de ceux à n ponts en appliquant au système d'arches une des deux transformations suivantes illustrées sur la figure 36:

(I) On sélectionne une des arches les plus externes du système d'arches, on l'ouvre et on rejoint les deux extrémités ainsi crééees sous la rivière en entourant le semi-méandre, créant ainsi deux arches au dessus de la rivière, deux nouveaux croisements avec la rivière et une nouvelle arche d'arc-en-ciel sous la rivière. Cette transformation correspond à la création d'un nouveau pont par refermeture de la rivière et *ne modifie pas le nombre de composantes connexes.*

(II) On entoure le semi-méandre existant par un grand cercle, créant ainsi une arche au dessus de la rivière, deux nouveaux croisements avec la rivière et une nouvelle arche d'arc-en-ciel sous la rivière. Cette transformation correspond à la création d'un nouveau pont par refermeture de la rivière et *augmente de* 1 *le nombre de composantes connexes*

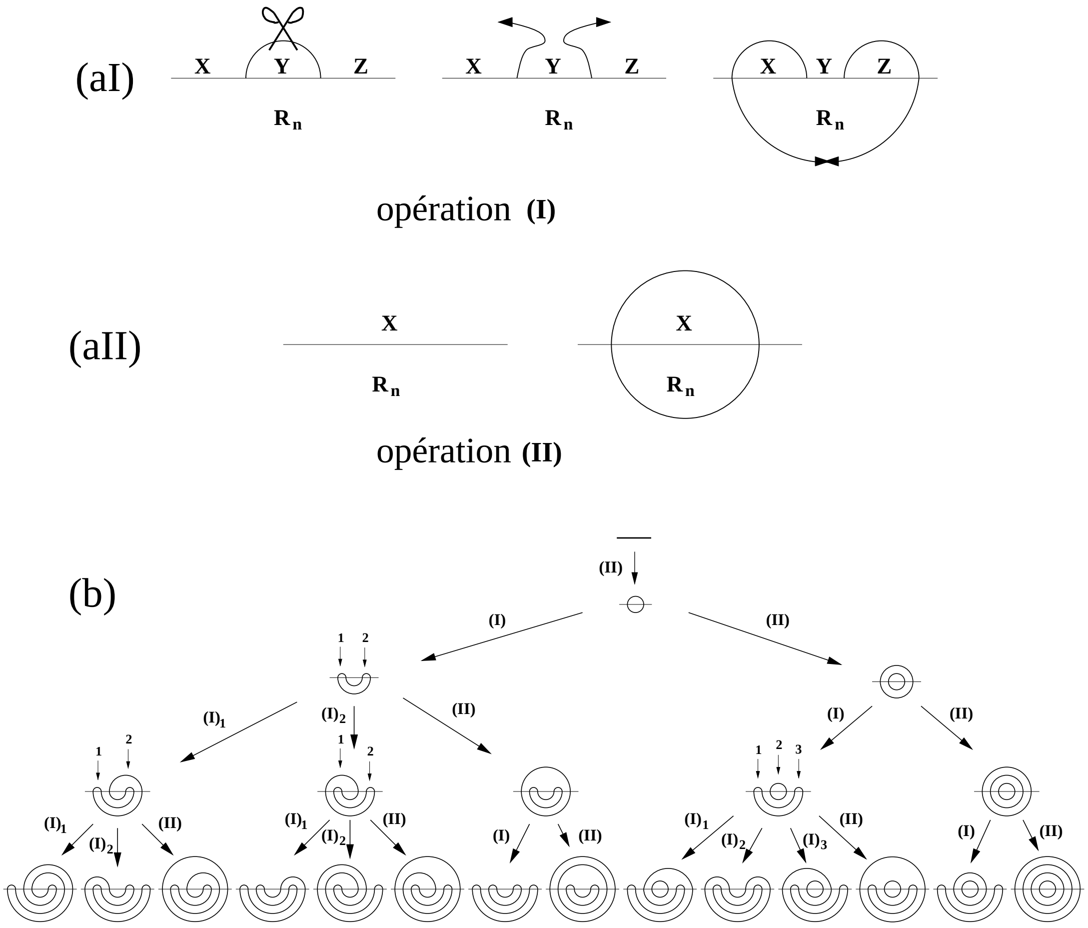

Fig. 36: Algorithme de croissance d'arches (a): les deux transformations (I) et (II) sont décrites dans le texte. X, Y et Z désignent des systèmes d'arches quelconques et $\mathrm{R_n}$ un arc-en-ciel fait de n arches emboîtées. L'application exhaustive (b) de ces transformations à partir d'une configuration vide fabrique tous les semi-méandres, ici jusqu'à $n = 4$.

Il est facile de voir que l'algorithme ci-dessus engendre tous les semi-méandres à $n+1$ ponts une fois et une seule à partir de l'ensemble des semi-méandres à n ponts. En effet, la transformation est réversible en découpant l'arche externe de l'arc-en-ciel sous la rivière. Chaque semi-méandre est donc obtenu à partir de la configuration vide *de manière unique* par l'application d'une succession de transformations (I) et (II) (voir figure 36). Une conséquence immédiate de cette propriété est que le nombre moyen $\langle \mathrm{ext} \rangle_n(q)$ d'arches externes au dessus de la rivière pour les semi-méandres à n ponts avec un poids q par composante connexe vaut

$$\langle \mathrm{ext} \rangle_n(q) = \frac{SM_{n+1}(q)}{SM_n(q)} - q \overset{n \to \infty}{\sim} \bar{R}(q) - q \tag{11.1}$$

L'algorithme de croissance d'arches a été utilisé dans la publication VII pour dénombrer les semi-méandres jusqu'à 27 ponts. Au delà de son aspect opérationnel, l'avantage de cet algorithme est qu'il permet, en suivant pas à pas le nombre de composantes connexes, de comprendre la structure analytique des $SM_n^{(k)}$. Notons ainsi que le nombre de composantes connexes d'une configuration de semi-méandres correspond au nombre de fois que l'opération (II) a été utilisée dans sa construction. Pour n grand et $k = n - l$ avec l *fini*, on en déduit ainsi que

$$SM_n^{(n-l)} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^l}{l!} \tag{11.2}$$

correspondant au $\binom{n}{l} \sim n^l/l!$ tirages de la transformation (I). Nous verrons plus loin comment cette analyse peut être affinée.

◇ *Matrice de transfert*

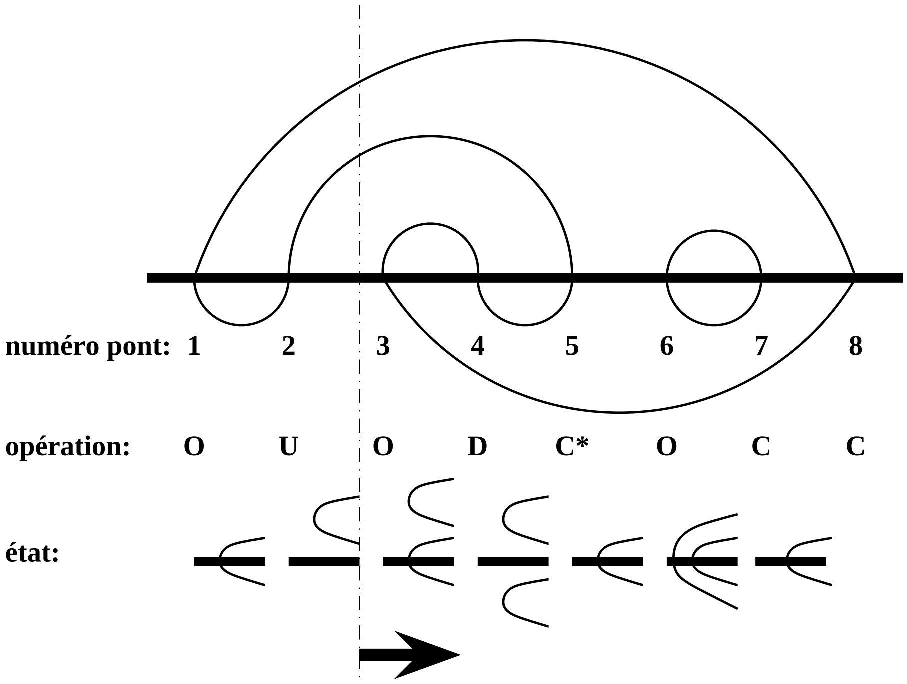

Fig. 37: Algorithme de matrice de transfert. Les opérations O, C, U et D sont décrites dans le texte.

Cet algorithme particulièrement efficace a été utilisé pour la première fois par I. Jensen dans la référence [41], où les méandres sont énumérés jusqu'à $2n = 48$ ponts. L'idée consiste à engendrer les méandres d'ouest en est pont par pont au moyen d'une matrice de transfert. L'état du système entre le n-ième et le $(n+1)$-ième pont est caractérisé par la connexion des arches ouvertes au dessus ou en dessous de la rivière et non encore refermées (voir figure 37). Ces arches non encore refermées sont en effet connectées deux à deux dans la partie gauche du méandre. L'ensemble de ces connexions, qui forment un système d'*arches transverses*, plus la position de la rivière caractérisent entièrement l'état du système. La matrice de transfert correspond au passage d'un pont où s'effectue l'une des quatre opérations suivantes (voir figure 37):

- O: Ouverture d'une nouvelle arche transverse dont les extrémités sont immédiatement de part et d'autre de la rivière.
- C: Réunion des deux extrémités d'arches transverses immédiatement de part et d'autre de la rivière. Si ces deux extrémités correspondaient à la même arche transverse, une nouvelle composante connexe a été créée. Sinon, le nombre de composantes connexes reste inchangé (opération notée C* sur la figure 37).
- U: Migration vers le haut du système d'arches transverses par rapport à la rivière par la traversée d'une extrémité d'arche.
- D: Migration vers le bas du système d'arches transverses par rapport à la rivière par la traversée d'une extrémité d'arche.

Partant d'un état vide, l'application répétée de la matrice de transfert permet ainsi d'engendrer méandres ou semi-méandres selon l'état final atteint après n itérations.

◇ *Résultats numériques*

Venons en maintenant aux résultats numériques proprement dits. A titre d'illustration, la table suivante donne les nombres $SM_n^{(k)}$ de semi-méandres à n ponts et k composantes connexes pour n jusqu'à 27:

Semi-meandres a n ponts et k composantes connexes

n\k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1												
2	1	1											
3	2	2	1										
4	4	6	3	1									
5	10	16	11	4	1								
6	24	48	37	17	5	1							
7	66	140	126	66	24	6	1						
8	174	428	430	254	104	32	7	1					
9	504	1308	1454	956	438	152	41	8	1				
10	1406	4072	4976	3584	1796	690	211	51	9	1			
11	4210	12796	16880	13256	7238	3028	1023	282	62	10	1		
12	12198	40432	57824	49052	28848	12996	4759	1451	366	74	11	1	
13	37378	129432	197010	179552	113518	54812	21533	7112	1989	464	87	12	1
14	111278	413900	675428	658560	444278	228284	95419	33721	10227	2653	577	101	13
15	346846	1342580	2310268	2394504	1720384	939148	415956	155994	50606	14262	3460	706	116
16	1053874	4335288	7927778	8724464	6643492	3833076	1790038	708018	243392	73428	19394	4428	852
17	3328188	4201804	27205180	31575096	25421620	15487428	7613504	3164400	1145250	366100	103642	25820	5576
18	10274466	46226896	93448486	114451388	97136712	62244564	32094902	13965780	5295316	1780690	534494	142940	33758
19	32786630	152594276	321537086	412811544	368280210	247973928	134013518	60951384	24133016	8492044	2681612	761120	193274
20	102511418	500016036	1105589516	1490190544	1395104236	984221764	555915344	263582744	108659880	39849468	13162018	3932262	1061000
21	329903058	1660630740	3812424912	5360943684	5250325378	3876113404	2286993326	1129603888	484054494	184478424	63454876	19831956	5636950
22	1042277722	5472190206	13121988240	19288139802	19746342212	15223550024	9361284260	4806762528	2136797694	844196480	301374534	98069830	29174206
23	3377919260	18264517264	45330375774	69245171564	73863421894	59379645924	38033821330	20294654048	9351763592	3823988336	1413224292	477060460	147790618
24	10765024432	60475691308	156172996170	248463024330	276113486146	231124139318	153915109102	85198877660	40632714144	17168256704	6554314890	2288540120	735416776
25	35095839848	202684618564	540314673678	890477645192	1027609657470	894157177372	618666292694	355164255600	175243060328	76446485224	30103132270	10847350988	3604466262
26	112670468128	673892675030	1863197292582	3188033497580	3821478801772	3453279084296	2478777647126	1473618143854	751285460888	337955598100	137072634698	50877605328	17437690722
27	369192702554	2266436498400	6454265995454	11409453277272	14161346139866	13266154255196	9870806627980	6074897248976	3199508682588	1483533803900	619231827340	236416286832	83407238044

n\k	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
14	1													
15	14	1												
16	132	15	1											
17	1016	149	16	1										
18	6924	1199	167	17	1									
19	43448	8493	1402	186	18	1								
20	256880	55153	10305	1626	206	19	1							
21	1451964	336303	69160	12383	1872	227	20	1						
22	7923526	1955009	434423	85781	14751	2141	249	21	1					
23	42037340	10947269	2594686	554482	105354	17434	2434	272	22	1				
24	217928136	59481467	14895219	3399516	700112	128244	20458	2752	296	23	1			
25	1108184612	315291663	82818768	19990983	4402436	875364	154844	23850	3096	321	24	1		
26	5543795384	1637050027	448523733	113659789	26500047	5641276	1084738	185576	27638	3467	347	25	1	
27	27346198448	8352021621	2376167414	628492938	153966062	34735627	7159268	1333214	220892	31851	3866	374	26	1

De même, la table suivante donne les nombres $M_n^{(k)}$ de méandres à $2n$ ponts et k composantes connexes pour n jusqu'à 20:

Meandres a 2n ponts et k composantes connexes

n\k	l	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	2	2								
3	8	12	5							
4	42	84	56	14						
5	262	640	580	240	42					
6	1828	5236	5894	3344	990	132				
7	13820	45164	60312	42840	17472	4004	429			
8	110954	406012	624240	529104	271240	85904	16016	1430		
9	933458	3772008	6540510	6413784	3935238	1569984	405552	63648	4862	
10	8152860	35994184	69323910	76980880	54787208	26200468	8536890	1860480	251940	16796
11	73424650	351173328	742518832	919032664	742366152	412348728	161172704	44346456	8356656	994840
12	678390116	3490681428	8028001566	10941339452	9871243896	6230748192	2830421952	934582000	222516030	36936988
13	6405031050	35253449296	87526544560	130091632424	129477031190	91385152248	47201994762	18117824400	5177642470	1086685600
14	61606881612	360946635312	961412790002	1546164900644	1681013854212	1310296996120	757218876394	330541081704	109808112960	27665650740
15	602188541928	3739935635756	10630964761766	18379165280940	21653861838390	18456675484196	11786257964504	5757601848920	2175182186120	637007339280
16	5969806669034	39159200588780	118257400015312	218576190891816	277215342450784	256301542207920	179081046215568	96693197936632	40879675203224	13612373527632
17	59923200729046	413836299216608	1322564193698320	2601195918964184	3531450469003880	3517938623873672	2667822886408272	1576533680321408	736731216104224	274491451519648
18	608188709574124	4409705753032648	14863191405246888	30980323101952368	44806855312849362	47820811912386732	39096415694808648	25083534947894304	12830020606659746	5283147737822600
19	6234277838531806	47337525317450816	167771227744292160	369289984556000856	566627894954179026	644758338073769464	565064355359024840	390970503448090488	217139225832110534	97860442915614704
20	64477712119584604	511563350415103008	1901345329566422790	4405839231880790648	7145814923879522986	8632733743310196256	8070705247685170684	5988061883039308848	3587066097601934530	1755310029771295216

n\k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
11	58786									
12	3922512	208012								
13	161226780	15452320	742900							
14	5193298110	696717840	60843510	2674440						
15	143558599080	24384586200	2986292400	239519700	9694845					
16	3565368581568	727159530240	112831907760	12713873760	942871200	35357670				
17	81730331363736	19370390667040	3609538084152	515709552000	53823058080	3711935040	129644790			
18	1759714658172372	474000318895104	102630316254240	17612853736464	2332549535400	226765486080	14615744220	477638700		
19	36017597277612496	10850034322572432	2669370671766112	532249661425760	84688447403968	10455495457248	951484123440	57562286760	1767263190	
20	706958959835806990	235265604762448572	64713641205591820	14658557362753320	2709804590263296	402058856155712	46500885666900	3978168316200	226760523600	6564120420

Ces données peuvent être analysées de deux manières différentes, soit numérique, soit analytique. La première approche, purement numérique, consiste à fabriquer $M_n(q)$ et $SM_n(q)$ pour les valeurs de n accessibles à partir des données ci-dessus et à estimer directement $R(q)$ (resp. $\bar{R}(q)$) en faisant par exemple le rapport de deux valeurs consécutives de $M_n(q)$ (resp. $SM_n(q)$) et en utilisant des algorithmes de convergence pour extraire une limite à n grand.

La figure 38 montre l'estimation de $R(q)$ et $\bar{R}(q)$ ainsi obtenue pour des valeurs de q entre 0 et 6. On distingue clairement deux régimes, un régime à grand q où $\bar{R}(q) > R(q)$

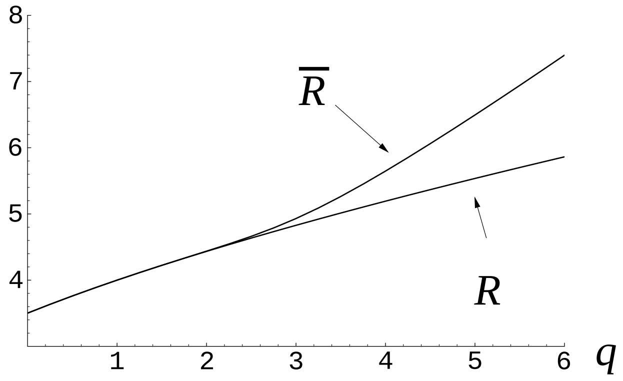

Fig. 38: Estimation de $R(q)$ et $\bar{R}(q)$ pour q entre 0 et 6.

et un régime à petit q où $\bar{R}(q) = R(q)$ aux incertitudes numériques près (rappelons qu'à $q = 1$, nous savons qu'il y a effectivement égalité). Le point de transition $q_c \sim 2$ entre ces deux régimes est difficile à évaluer car l'approche se fait tangentiellement. Nous donnerons une prédiction analytique pour q_c dans la section suivante. Le régime à grand q correspond à la situation (ii) décrite dans la section 9 d'enroulement extensif tandis que le régime à petit q correspond à la situation (i) d'enroulement négligeable.

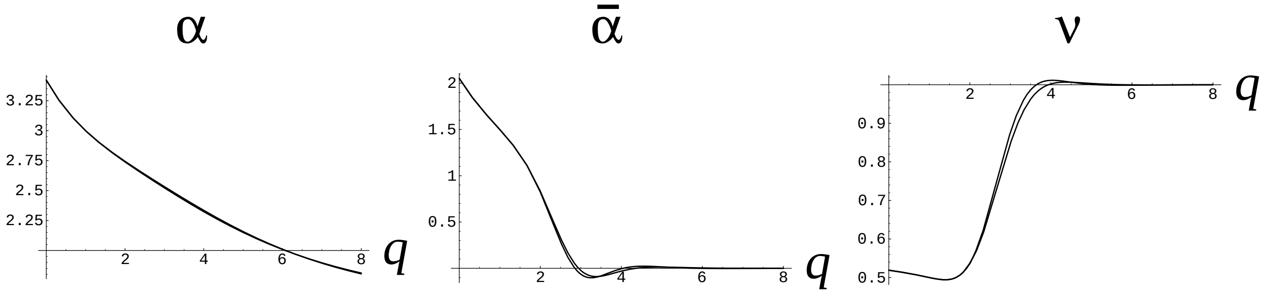

Fig. 39: Estimations des exposants $\alpha(q)$, $\bar{\alpha}(q)$ et $\nu(q)$ pour q entre 0 et 8. Les diverses courbes correspondent à diverses itérations de l'algorithme de convergence utilisé.

On peut de même estimer les exposants $\alpha(q)$, $\bar{\alpha}(q)$ et même $\nu(q)$ en prenant une combinaison adéquate qui converge vers ces exposants à grand n. Ces estimations sont présentées sur la figure 39 pour q entre 0 et 8. La valeur estimée de $\nu(q)$ varie brutalement autour de $q \sim 2$, ce qui suggère une discontinuité au point de transition $q = q_c$ entre les deux régimes (i) et (ii). Il est probable que la valeur de $\nu(q)$ varie continûment avec q pour $q < q_c$ puis saute de manière discontinue à $\nu(q) = 1$ pour $q > q_c$. La valeur $\nu(q) = 1$ attendue dans le régime (ii) est bien la valeur observée à q suffisamment grand. L'exposant $\bar{\alpha}(q)$ suit le même scénario avec une variation continue pour $q < q_c$ et un saut discontinu à une valeur *constante* pour $q > q_c$ qui semble de plus valoir $\bar{\alpha}(q) = 0$ (rappelons que nous savons déjà que $\bar{\alpha}(q) \overset{q\to\infty}{\sim} 0$). Finalement, l'exposant $\alpha(q)$ semble décroître de manière douce vers sa valeur limite $\alpha(q) \overset{q\to\infty}{\sim} 3/2$.

Concernant le problème original des méandres et semi-méandres à une seule composante connexe (c'est à dire $q \to 0$), un analyse fine des données numériques est présentée dans la référence [41] et mène aux estimations précises

$$R(q=0) = \bar{R}(q=0) = 3,501837(3) \tag{11.3}$$

$$\alpha(q=0) = 3,4208(6) \quad \bar{\alpha}(q=0) = 2,0537(2) \tag{11.4}$$

◇ *Développements à grand q*

Une deuxième approche d'analyse consiste à utiliser les énumérations numériques pour obtenir des expressions *exactes pour tout n* (suffisamment grand) des nombres de méandres et semi-méandres à grand nombre de composantes connexes. Plus précisément, on peut obtenir des expressions exactes de $M_n^{(n-l)}$ et $SM_n^{(n-l)}$ pour les premières valeurs de l. Traitons par exemple le cas des semi-méandres. Il est assez facile de se convaincre grâce à l'algorithme de croissance d'arches que pour n assez grand (en fait $n \geq 2l-1$), le nombre de semi-méandres $SM_n^{(n-l)}$ est un *polynôme* $p_l(n)$ de la variable n de degré l et de coefficient dominant donné par (11.2). On a ainsi les premières valeurs:

$$\begin{aligned}
SM_n^{(n)} &= p_0(n) \equiv 1 \\
SM_n^{(n-1)} &= p_1(n) \equiv n-1 \quad n \geq 1 \\
SM_n^{(n-2)} &= p_2(n) \equiv \frac{1}{2}(n^2+n-8) \quad n \geq 3 \\
SM_n^{(n-3)} &= p_3(n) \equiv \frac{1}{6}(n^3+6n^2-31n-24) \quad n \geq 5 \\
SM_n^{(n-4)} &= p_4(n) \equiv \frac{1}{24}(n^4+14n^3-49n^2-254n) \quad n \geq 7
\end{aligned} \tag{11.5}$$

Si, pour les premières valeurs de l, les polynômes $p_l(n)$ peuvent être facilement obtenus par un examen exhaustif des configurations possibles pour tout n, l'exercice devient vite très complexe et une méthode beaucoup plus efficace consiste à imposer à ces polynômes de reproduire les données numériques. En fait, en écrivant

$$SM_n(q) = q^n \sum_{l \geq 0} \frac{SM_n^{(n-l)}}{q^l} \tag{11.6}$$

et en imposant la condition d'avoir le comportement asymptotique (9.2) $SM_n(q) \sim \bar{C}(q)\bar{R}(q)^n/n^{\bar{\alpha}(q)}$, on voit qu'on doit satisfaire à grand n et ordre par ordre en $1/q$

$$\begin{aligned}
&n\,\mathrm{Log}(\bar{R}(q)) + \mathrm{Log}(\bar{C}(q)) - \bar{\alpha}(q)\mathrm{Log}(n) \\
&\qquad = n\,\mathrm{Log}(q) + \mathrm{Log}\left(1 + \sum_{l\geq 1} \frac{SM_n^{(n-l)}}{q^l}\right) \\
&\qquad = n\,\mathrm{Log}(q) + \sum_{l\geq 1} \frac{1}{q^l}\left(\sum_{j=1}^{l} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \sum_{\substack{l_1+l_2+\cdots+l_j=l \\ l_i\geq 1}} p_{l_1}(n)p_{l_2}(n)\cdots p_{l_j}(n)\right)
\end{aligned} \tag{11.7}$$

Les $p_l(n)$ étant des polynômes, il est impossible de fabriquer un terme en $\mathrm{Log}(n)$, ce qui mène au premier résultat que:

$$\bar{\alpha}(q) = 0 \tag{11.8}$$

tant que le développement en $1/q$ du problème reste valable. Par ailleurs, on voit que nécessairement $p_l(n)$ est relié aux $p_m(n)$ avec $m < l$ par

$$p_l(n) = \sum_{j=2}^{l} \frac{(-1)^j}{j} \sum_{\substack{l_1+l_2+\cdots+l_j=l \\ l_i\geq 1}} p_{l_1}(n)p_{l_2}(n)\cdots p_{l_j}(n) \; - a_l - n\,b_l \tag{11.9}$$

où les a_l et b_l sont les coefficients du développement de $\mathrm{Log}(\bar{C}(q))$ et $\mathrm{Log}\bar{R}(q)$, en particulier

$$\mathrm{Log}\bar{R}(q) = \mathrm{Log}(q) - \sum_{l\geq 1} \frac{b_l}{q^l} \tag{11.10}$$

L'obtention de chaque nouveau polynôme $p_l(n)$ nécessite donc uniquement la détermination par comparaison avec les données numériques des 2 coefficients a_l et b_l. Le résultat net est finalement, grâce à (11.10), un développement de $\bar{R}(q)$ à grand q, donné par

$$\begin{aligned}
\bar{R}(q) \;=\; & q + 1 + \frac{2}{q} + \frac{2}{q^2} + \frac{2}{q^3} - \frac{4}{q^5} - \frac{8}{q^6} - \frac{12}{q^7} - \frac{10}{q^8} - \frac{4}{q^9} + \frac{12}{q^{10}} + \frac{46}{q^{11}} \\
& + \frac{98}{q^{12}} + \frac{154}{q^{13}} + \frac{124}{q^{14}} + \frac{10}{q^{15}} - \frac{102}{q^{16}} + \frac{20}{q^{17}} - \frac{64}{q^{18}} + O(\frac{1}{q^{19}})
\end{aligned} \tag{11.11}$$

Une analyse similaire sur les méandres permet de déterminer la structure analytique des $M_n^{(n-l)}$ à grand n pour l fini. Au lieu de polynômes, on a dans ce cas des fractions rationnelles. On en déduit le développement suivant de $R(q)$ à grand q:

$$R(q) \;=\; 2\sqrt{q}\big(1 + \frac{1}{q} + \frac{3}{2q^2} - \frac{3}{2q^3} - \frac{29}{8q^4} - \frac{81}{8q^5} - \frac{89}{16q^6} + O(\frac{1}{q^7})\big) \tag{11.12}$$

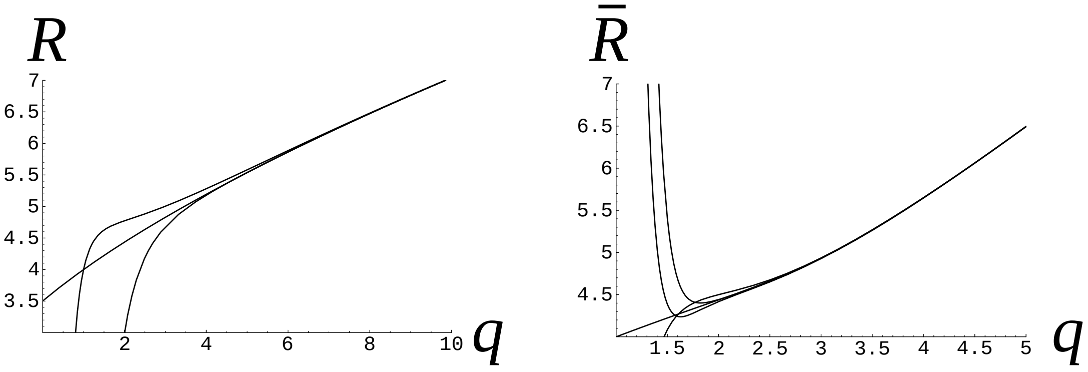

Fig. 40: Comparaison entre les estimations numériques et les développements à grand q pour $R(q)$ (a) et $\bar{R}(q)$ (b). Pour $R(q)$, on a tracé les développements tronqués aux ordres q^{-3} et q^{-6}. Pour $\bar{R}(q)$, on a indiqué les développements tronqués aux ordres q^{-6}, q^{-12} et q^{-18}.

mais pas de prédiction sur $\alpha(q)$.

La figure 40 montre la comparaison entre les valeurs de $R(q)$ et $\bar{R}(q)$ estimées numériquement et les développements (11.12) et (11.11) ci-dessus.

L'analyse des corrections au comportement polynomial (11.5) des nombres des semi-méandres $SM_n^{(n-l)}$ révèle des corrections de la forme $R(q)^n$ avec $R(q)$ donné par (11.12). Il est donc naturel de penser que les développements ci-dessus sont valables tant que $\bar{R}(q) > R(q)$, c'est à dire dans tout le régime (ii), et en particulier que $\bar{\alpha}(q) = 0$, $\nu(q) = 1$ pour tout $q > q_{\mathrm{c}}$. Pour $q < q_{\mathrm{c}}$, ces développements cessent d'être valides et ne permettent donc pas de décrire le régime (i).

En conclusion, l'analyse des données numériques nous amène à prédire deux régimes pour la statistique des méandres et semi-méandres selon la valeur de q. Pour $q > q_{\mathrm{c}}$, on a un régime où $R(q) < \bar{R}(q)$, $\nu(q) = 1$, $\bar{\alpha}(q) = 0$. Les valeurs de $R(q)$ et $\bar{R}(q)$ y sont accessibles par un développement systématique en $1/q$ à partir de la solution à $q \to \infty$. Pour $0 \leq q < q_{\mathrm{c}}$, on a un régime où $R(q) = \bar{R}(q)$, $\nu(q) < 1$, $\bar{\alpha}(q) > 0$. Ce régime n'est malheureusement pas accessible à partir du développement en $1/q$. C'est à ce régime, qui contient le cas limite $q \to 0$ décrivant le problème original des méandres, que nous allons nous intéresser dans la section suivante où, en particulier, des prédictions pour $\alpha(q)$, $\bar{\alpha}(q)$ seront données, ainsi que pour la valeur de q_{c}.

12. Gaz de boucles et exposants critiques

Cette partie s'appuie sur les publications VIII et IX reproduites en annexe.

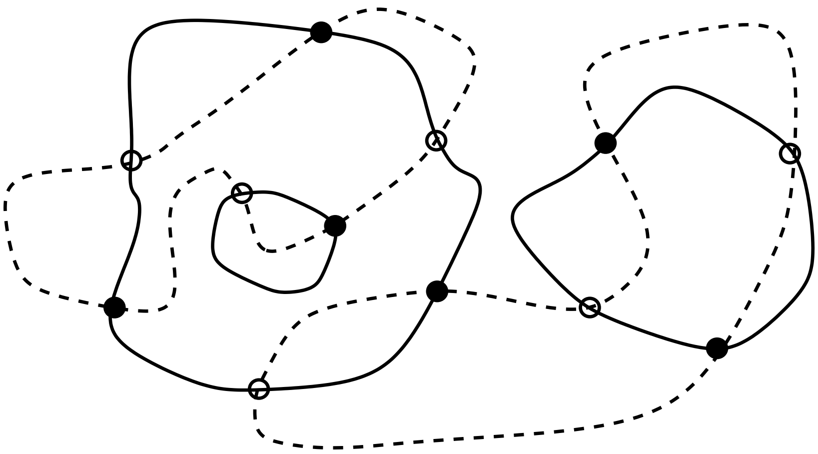

Fig. 41: Un exemple de méandre généralisé avec trois composantes connexes de rivière (traits pleins) et deux composantes connexes de circuit (traits pointillés). Le graphe ainsi obtenu est automatiquement bipartite.

La description la plus élaborée du problème des méandres consiste à le voir comme la version "gravitationnelle" (c'est à dire définie sur réseau aléatoire) d'un gaz de boucles compactes. En plus des diverses composantes connexes de circuit, on est amené naturellement à généraliser le problème en autorisant également plusieurs composantes connexes de rivière, supposées également fermées pour former des boucles (voir figure 41). Comme auparavant, il est préférable de laisser varier le nombre des composantes connexes de rivière comme de circuits et d'introduire un poids n_1 par composante connexe de rivière et n_2 par composante connexe de circuit. On s'intéressera donc à dénombrer les configurations d'un ensemble de rivières et de circuits avec les contraintes que:

(a) Les rivières ne se croisent pas;

(b) Les circuits ne se croisent pas;

(c) Une rivière et un circuit peuvent se croiser en un pont;

(d) Le graphe total obtenu est connexe.

Pour éviter les problèmes de facteurs de symétrie, il est pratique de considérer les configurations avec une arête (correspondant disons une portion de rivière) marquée et orientée. Le modèle ci dessus est donc un modèle de gaz de boucles compactes sur des graphes aléatoires *tétravalents* dont les nœuds correspondent aux ponts, avec deux types de boucles (les rivières et les circuits) pondérées par n_1 et n_2 respectivement. Nous dénoterons ce modèle $\mathrm{GFPL}^2(n_1, n_2)$ (pour "gravitational fully packed loops"). Le problème des méandres des sections précédentes correspond à choisir $n_2 = q$ et considérer la limite $n_1 \to 0$ en ouvrant l'unique boucle de rivière au niveau de son arête marquée. Le problème original des méandres consiste à prendre en plus la limite $n_2 \to 0$.

Il est à remarquer que, comme conséquence du fait que les nœuds correspondent à des croisements de rivières et de circuits, tous fermés, les graphes tétravalents correspondants sont automatiquement bipartites, c'est à dire peuvent avoir leurs nœuds bicoloriés (voir figure 41).

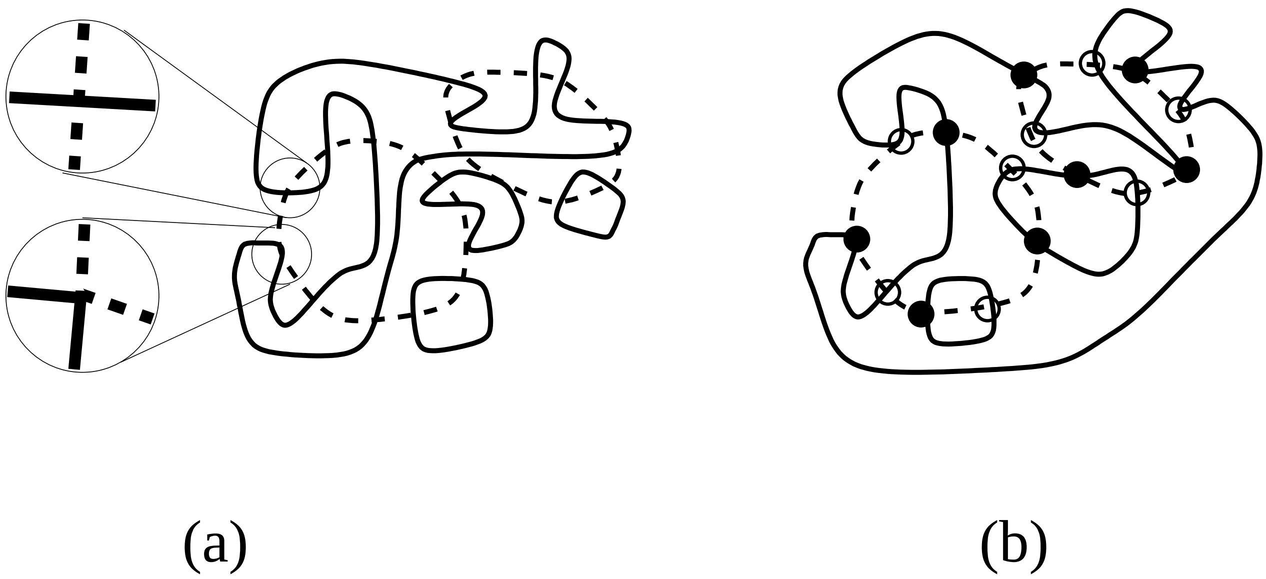

Fig. 42: Exemples de configurations de méandres tangents avec deux vertex possibles, soit un croisement des deux boucles, soit un point de tangence (contact sans croisement). Le graphe tétravalent sous-jacent peut être quelconque (a) ou contraint à être bipartite (b).

En anticipant sur la discussion à venir, nous pouvons introduire deux autres variantes du problème consistant à autoriser, en plus des croisements, des *points de tangence* où un circuit et une rivière viennent en contact mais repartent chacun de leur côté (voir figure 42). Nous parlerons dans ce cas de *méandres tangents*. La bicoloriabilité du graphe sous-jacent n'étant plus garantie dans ce cas, on peut considérer les deux variantes consistant à permettre tous les graphes tétravalents ou à se limiter au cas des graphes tétravalents bicoloriables des nœuds.

Avant d'aborder la statistique du gaz de boucles, notons que le modèle $\mathrm{GFPL}^2(n_1, n_2)$ a une formulation en termes d'intégrale à deux matrices, décrivant respectivement les rivières et les circuits. Des poids n_1 et n_2 entiers sont obtenus en prenant n_1 copies de la première matrice et n_2 copies de la deuxième. Malheureusement, l'intégrale matricielle obtenue n'a pas pu être évaluée à ce jour.

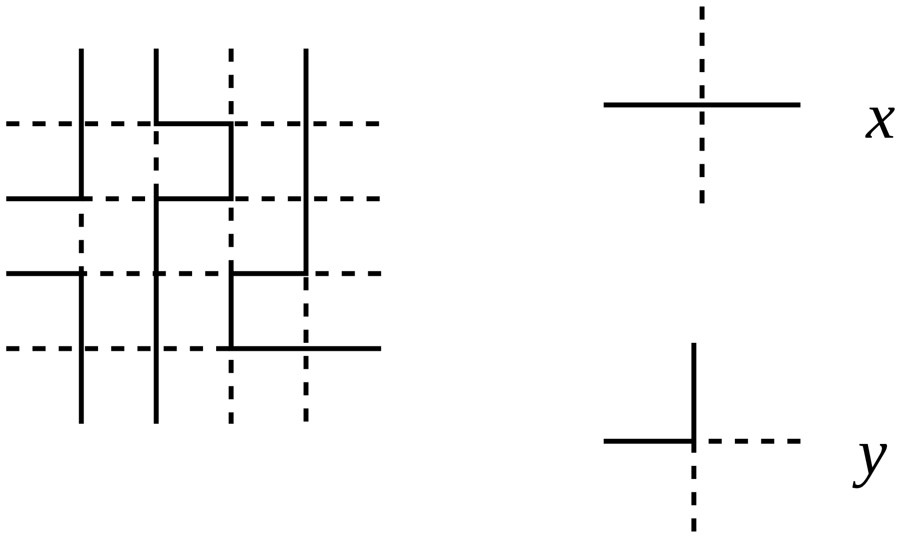

Fig. 43: Exemple de configuration du modèle FPL^2. Les boucles noires et blanches (ici représentées en pointillés) peuvent se croiser ou s'éviter. Les deux seuls vertex admis (à des rotations et symétries près) sont représentés à droite.

◇ <u>*Modèle* FPL^2 *sur réseau carré*</u>

Nous aimerions maintenant interpréter le modèle $\mathrm{GFPL}^2(n_1, n_2)$ ou ses généralisations avec points de tangence comme la version gravitationnelle d'un modèle défini sur le réseau régulier. Dans le cas de graphes tétravalents, le réseau régulier à considérer est le réseau carré régulier, dont nous noterons au passage qu'il est bipartite. Un candidat naturel est le modèle $\mathrm{FPL}^2(n_1, n_2)$, introduit dans la référence [42], qui consiste à considérer un gaz de deux types de boucles, disons noires et blanches, avec des poids respectifs n_1 et n_2 et les contraintes que:

1. Les boucles sont compactes, c'est à dire que chacun des deux systèmes de boucles visite tous les nœuds du réseau;
2. Chaque lien n'est occupé que par une boucle, les boucles n'étant en contact qu'au niveau des nœuds.

Le modèle $\mathrm{FPL}^2(n_1, n_2)$ autorise deux types de vertex (à des rotations et symétries près), représentés sur la figure 43 et correspondant respectivement à un croisement des deux types de boucles ou à un contact avec évitement. En toute généralité, on peut introduire des poids différents, disons x et y respectivement pour les deux types de vertex. Le modèle $\mathrm{FPL}^2(n_1, n_2)$ de la référence [42] considère le cas particulier où $x = y$.

Avant d'étudier ce modèle, on peut remarquer que la suppression du vertex de contact avec évitement (c'est à dire $y = 0$) conduit à un modèle assez dégénéré sur le réseau carré puisque la seule configuration de boucles permise est celle où les “boucles” noires occupent les liens horizontaux du réseau et les boucles blanches les liens verticaux (ou inversement). Notons tout de même qu'en prenant $n_1 = n_2 = 2$, ce qui revient à orienter indépendamment vers le haut ou vers le bas chaque ligne verticale (blanche) et vers la gauche ou vers la droite chaque ligne horizontale (noire), les configurations obtenues sont en bijection avec les *pliages plan du réseau carré dual.* Ce pliage est lui même dégénéré puisque les plis se propagent en ligne droite à travers tout le réseau . La correspondance est simplement qu'une ligne verticale (resp. horizontale) du réseau carré dual est pliée si et seulement si l'orientation des deux lignes verticales (resp. horizontales) immédiatement de part et d'autre sont opposées. Cette remarque, bien qu'élémentaire, préfigure le lien entre le modèle $\mathrm{GFPL}^2(2,2)$ et le pliage de quadrangulations aléatoires. Nous verrons ce lien plus précisément dans la section 13.

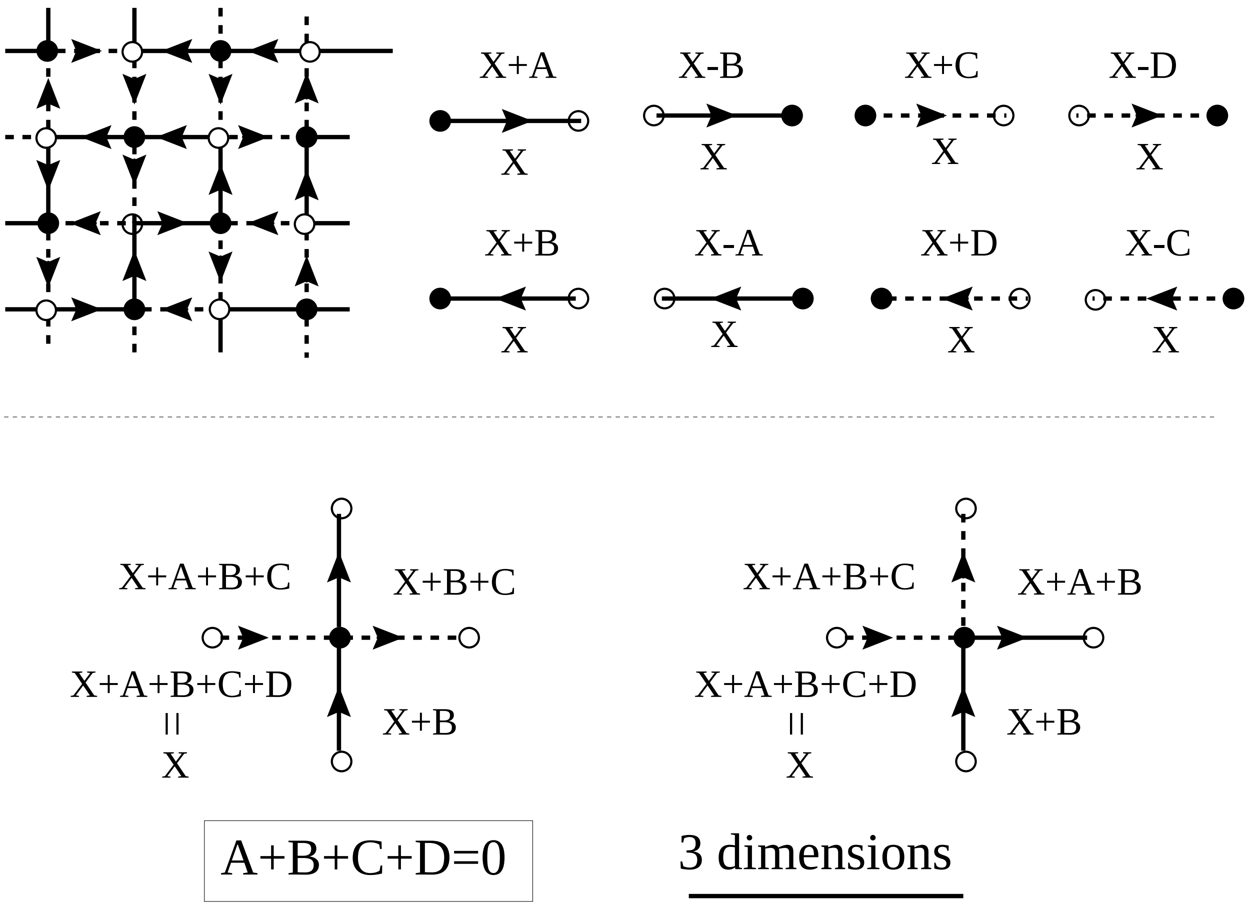

Fig. 44: Définition des hauteurs X dans le modèle FPL^2. La définition utilise le caractère bipartite du réseau. La cohérence après un tour impose la contrainte $A + B + C + D = 0$. La hauteur est donc tridimensionnelle.

Revenons au modèle $\mathrm{FPL}^2(n_1,n_2)$ proprement dit avec $x=y$. Ce modèle a été étudié dans la référence [42] par des techniques similaires à celles présentées dans la section 6. Certaines propriétés ont pu également être dérivées exactement par Ansatz de Bethe [43]. Partons du cas $n_1=n_2=2$, ce qui revient à orienter les boucles. Le modèle est alors équivalent à un modèle à quatre couleurs, disons A, B, C et D sur les liens du réseau carré avec la contrainte que les quatre couleurs sont présentes autour de chaque nœud. Le liens de couleur A ou B (resp. C ou D) forment les boucles noires (resp. blanches) et alternent le long de ces boucles. Les deux alternances possibles correspondent aux deux orientations de la boucle. On peut transformer le modèle en un modèle de hauteurs X sur les faces du réseau carré avec les règles de variations de hauteur représentées sur la figure 44. Interviennent a priori quatre hauteurs A, B (boucles noires) et C, D (boucles blanches), avec la contrainte que $A+B+C+D=0$ pour avoir une hauteur bien définie sur chaque face. La hauteur obtenue est donc tridimensionnelle, correspondant à une théorie de charge centrale 3. L'introduction des poids n_1 et n_2 se fait en mettant des poids de vertex $\exp(\pm\pi e_1/4)$ (resp. $\exp(\pm\pi e_2/4)$) par tournant à gauche ou à droite des boucles noires (resp. blanches), avec $n_1=2\cos(\pi e_1)$ et $n_2=2\cos(\pi e_2)$. Pour $0\leq n_1,n_2\leq 2$, la théorie ainsi obtenue est conforme de charge centrale [42]:

$$c_{\mathrm{FPL}^2}(n_1,n_2)=3-6\frac{e_1^2}{1-e_1}-6\frac{e_2^2}{1-e_2}=1+c_{\mathrm{dense}}(n_1)+c_{\mathrm{dense}}(n_2) \tag{12.1}$$

avec c_{dense} donnée par (6.11). On peut par ailleurs calculer les exposants $x_{l,m}$ associés à la corrélation en $r^{-2x_{l,m}}$ pour un ensemble de l lignes noires et m lignes blanches partant d'un même point et terminant à un autre point distant de r, avec la valeur [42]

$$\begin{aligned}x_{l,m}(n_1,n_2)=&\frac{1-e_1}{8}l^2-\frac{e_1^2}{2(1-e_1)}(1-\delta_{l,0})\\&+\frac{1-e_2}{8}m^2-\frac{e_2^2}{2(1-e_2)}(1-\delta_{m,0})\\&+\frac{1}{16}\delta_{l+m,\mathrm{impair}}+\delta_{l,\mathrm{impair}}\delta_{m,\mathrm{impair}}\frac{(1-e_1)(1-e_2)}{(1-e_1)+(1-e_2)}\end{aligned} \tag{12.2}$$

On peut finalement étudier une version "dense" du problème, notée DPL^2 (pour densely packed loops) en permettant à certains sites de ne pas être visités par des boucles noires ou des boucles blanches [44]. En termes de hauteur, cela demande alors d'imposer la contrainte supplémentaire $A+B=0=C+D$, ce qui mène à des hauteurs bidimensionnelles et réduit la charge centrale à une valeur

$$c_{\mathrm{DPL}^2}(n_1,n_2)=2-6\frac{e_1^2}{1-e_1}-6\frac{e_2^2}{1-e_2}=c_{\mathrm{dense}}(n_1)+c_{\mathrm{dense}}(n_2) \tag{12.3}$$

Dans ce cas, les exposants $x_{l,m}$ se réduisent à

$$\begin{aligned} x_{l,m}(n_1,n_2) &= \frac{1-e_1}{8}l^2 - \frac{e_1^2}{2(1-e_1)}(1-\delta_{l,0}) \\ &+ \frac{1-e_2}{8}m^2 - \frac{e_2^2}{2(1-e_2)}(1-\delta_{m,0}) \\ &= x_l(n_1) + x_m(n_2) \end{aligned} \tag{12.4}$$

avec x_l donné par (6.12).

◇ <u>*Couplage à la gravité*</u>

La version gravitationnelle du modèle $\mathrm{FPL}^2(n_1,n_2)$ correspond *stricto sensu* au cas de méandres tangents avec les deux types de vertex. De plus, pour conserver un charge centrale $c_{\mathrm{FPL}^2}(n_1,n_2)$ donnée par (12.1), il nous faut imposer aux graphes tétravalents d'être bicoloriés des nœuds, la bicoloriabilité étant cruciale pour pouvoir définir une hauteur à trois dimensions.

Si l'on retire cette contrainte, c'est à dire que l'on considère des méandres tangents sur graphe tétravalents quelconques, on ne peut plus distinguer entre A et $-B$ (resp. C et $-D$) dans les règles de la figure 44, ce qui revient à imposer $A+B=0=C+D$. On ne peut donc plus construire qu'une hauteur bidimensionnelle et on s'attend à la charge centrale diminuée $c_{\mathrm{DPL}^2}(n_1,n_2) = c_{\mathrm{dense}}(n_1) + c_{\mathrm{dense}}(n_2)$.

De manière plus surprenante, la présence ou non du vertex avec évitement des boucles influe elle aussi de façon déterminante sur la charge centrale. Supposons en effet que ce vertex soit absent, comme c'est le cas pour reproduire le modèle $\mathrm{GFPL}^2(n_1,n_2)$ tel que nous l'avons défini et où seuls existent des croisements. En présence du vertex de croisement seul, la bicoloriabilité des nœuds du graphe est automatiquement garantie et on peut donc bien construire une hauteur tridimensionnelle. Dans le même temps, le graphe est également automatiquement bicoloriable des faces (comme tout graphe tétravalent) et on peut donc définir un sous-réseau $\mathcal{B}$ de faces blanches et un sous-réseau $\mathcal{N}$ de faces noires. Il est alors facile de voir que les hauteurs de deux faces voisines sur le sous-réseau $\mathcal{B}$, c'est à dire diamétralement opposées autour d'un nœud, ne peuvent différer que de $\pm(A+C)$ ou $\pm(A+D)$ mais que la troisième dimension $\pm(A+B)$ n'est jamais explorée. Les hauteurs du sous-réseau $\mathcal{B}$ sont donc de fait bidimensionnelles dans le plan $(A+C, A+D)$ et il en est de même pour celles du sous-réseau $\mathcal{N}$. On s'attend finalement à ce que la charge centrale soit là encore réduite à

$$c_{\text{méandres}}(n_1,n_2) = c_{\mathrm{DPL}^2}(n_1,n_2) = c_{\mathrm{dense}}(n_1) + c_{\mathrm{dense}}(n_2) \tag{12.5}$$

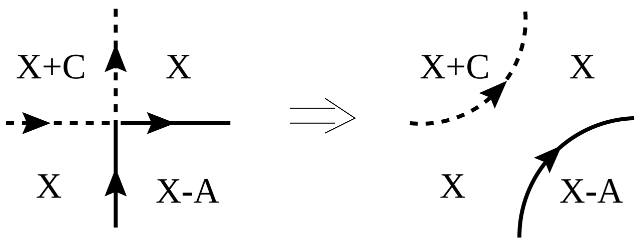

Fig. 45: Dans le cas bidimensionnel correspondant à des graphes tétravalents quelconques ($B = -A$, $D = -C$), les vertex tangents peuvent être défaits sans modifier les hauteurs.

On peut sans perte de généralité poser $A + B = 0 = C + D$ puisque cette direction n'est pas explorée, ce qui ramène les hauteurs du réseau complet à varier de $\pm A$ ou $\pm C$ d'un voisin à l'autre selon le type de boucle traversée.

Le fait que la charge centrale soit la même pour les méandres tangents avec les deux types de vertex sur des graphes tétravalents quelconques et pour les méandres avec le seul vertex de croisement semble indiquer que les vertex tangents sont en fait *non pertinents.* On peut comprendre ce phénomène schématiquement comme sur la figure 45 en notant que l'on peut "défaire" tout vertex tangent sans modifier les hauteurs.

En résumé, nous prédisons une charge centrale $c_{\text{méandre}}(n_1, n_2)$ donnée par (12.5) pour les méandres tangents sur graphes tétravalents quelconques ainsi que pour les méandres avec croisements seuls. En fait, en réinstaurant les poids x et y pour ces deux vertex comme indiqué sur la figure 43, on attend la même charge centrale quel que soit y positif ou nul, tant que x reste non nul.

On peut vérifier cette prédiction sur quelques cas solubles: Le cas $y = 0$, $n_1 = 1$, $n_2 = q$ est résolu dans la référence [45] où il est prédit une charge centrale $c_{\text{dense}}(q) = c_{\text{méandre}}(1, q)$. De même, dans le cas $x = 2y$, $n_1 = 1$, $n_2 = q$, on peut, en séparant chaque nœud tétravalent en deux nœuds trivalents, formuler le modèle comme celui d'un seul type de boucles compactes de longueur paire sur des graphes trivalents quelconques avec un poids $2q$ par boucle (voir figure 46). Ce modèle à également charge centrale $c_{\text{dense}}(q) = c_{\text{méandre}}(1, q)$ [14,15], ce qui confirme la non-pertinence des vertex tangents.

La seule façon de retrouver une charge centrale $c_{\text{FPL}^2}(n_1, n_2)$ consiste à à la fois permettre des vertex tangents et se restreindre à des graphes tétravalents bicoloriés des nœuds.

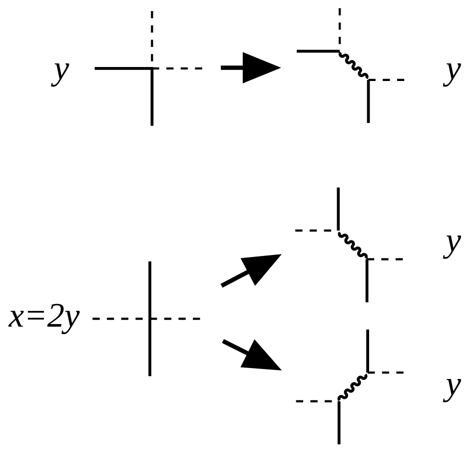

Fig. 46: Transformation des nœuds tétravalents en une paire de nœuds trivalents connectés par un lien "gris" (ligne ondulée). La correspondance 1 à 2 du cas du vertex de croisement nous oblige à choisir $x = 2y$. Dans le cas $n_1 = 1$, $n_2 = q$, le poids q des boucles blanches est transmis au boucles compactes faites d'alternances de liens blancs et gris. On peut supprimer les couleurs à condition de mettre un poids $2q$ par boucle et ne retenir que des boucles de longueur paire.

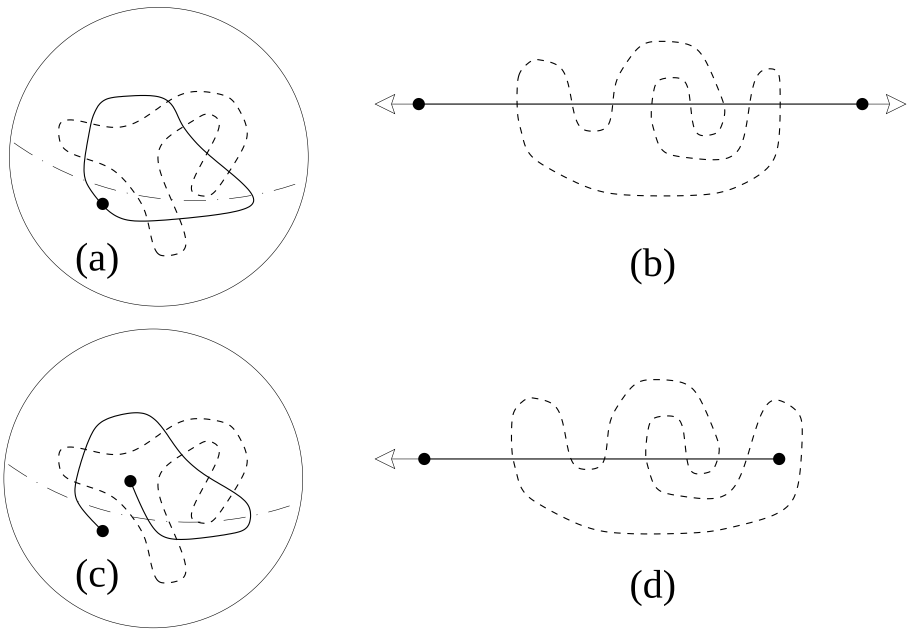

Fig. 47: Correspondance (a) $\leftrightarrow$ (b) (resp. (c) $\leftrightarrow$ (d)) entre les représentations des méandres (resp. semi-méandres) sur la sphère et dans le plan.

◇ <u>*Exposants des méandres*</u>

Venons en maintenant à la comparaison entre nos prédictions et les données

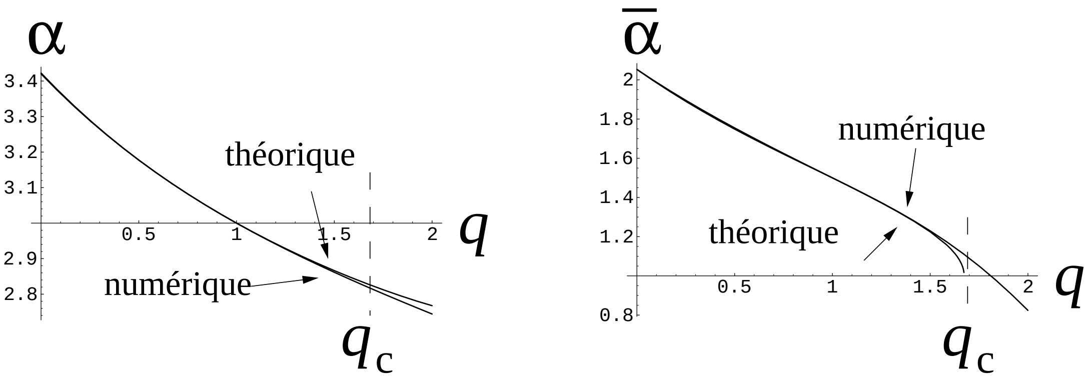

Fig. 48: Comparaison entre les estimations numériques de $\alpha(q)$ et $\bar{\alpha}(q)$ et les prédictions théoriques (12.6) et (12.8).

numériques pour les méandres obtenues dans la section précédente. On doit considérer dans ce cas $n_1 \to 0$ et $n_2 = q$ et nos prédictions nécessitent de plus que $0 \leq q \leq 2$ pour que la théorie associée soit conforme. Rappelons enfin que les exposants "gravitationnels" correspondent à l'énumération de graphes planaires, c'est à dire dessinés sur la sphère, comme indiqué sur la figure 47. Dans le cas des méandres, la fonction de partition des graphes sur la sphère doit être multipliée par $2 \times 2n$ correspondant à ouvrir la boucle de rivière entre deux ponts consécutifs et à l'orienter pour obtenir une configuration dans le plan. Nous prédisons donc un exposant critique $\alpha(q) = 2 - \gamma$, avec γ donné par la relation (7.2) avec $c = c_{\text{méandre}}(0, q) = -1 + 6e^2/(1-e)$ si $q = 2\cos(\pi e)$. Tous calculs faits, nous obtenons ainsi la prédiction théorique

$$\alpha(q) = 2 + \frac{1 - e + 3e^2 + \sqrt{(1 - e + 3e^2)(13 - 13e + 3e^2)}}{6(1-e)} \qquad q = 2\cos(\pi e) \tag{12.6}$$

Cette prédiction est représentée sur la figure 48 et montre un excellent accord avec l'estimation numérique, avec une légère déviation pour $q \sim 2$ où l'estimation numérique est de toute façon plus difficile (notamment pour $\bar{\alpha}(q)$ qui varie fortement autour de $q = 2$). En particulier, pour $q = 0$ ($e = 1/2$), nous prédisons une charge centrale $c = -4$, c'est à dire une valeur de l'exposant $\alpha(q = 0)$ des méandres:

$$\alpha(q = 0) = \frac{29 + \sqrt{145}}{12} = 3,420132\cdots \tag{12.7}$$

à comparer à l'estimation (11.4).

De même, nous pouvons calculer l'exposant $\bar{\alpha}(q)$ en insérant deux défauts correspondant aux deux extrémités d'une ligne ouverte sur la sphère. Dans cette représentation, l'enroulement peut être ramené autour d'une seule des extrémités assimilée à la source tandis que l'autre extrémité est envoyée à l'infini dans la représentation dans le plan (voir figure 47). L'utilisation de (7.3) mène à la prédiction $\bar{\alpha}(q) = \alpha(q) - 1 + 2\Delta_{1,0}(0,q)$ avec $\Delta_{1,0}(0,q)$ relié à $x_{1,0}(0,q)$ par (7.4) et $x_{1,0}(0,q)$ donné par (12.4). On obtient finalement

$$\bar{\alpha}(q) = 1 + \frac{\sqrt{2(24e^2+e-1)}(\sqrt{1-e+3e^2}+\sqrt{13-13e+3e^2})}{24(1-e)} \qquad q = 2\cos(\pi e) \quad (12.8)$$

Dans le cas $q = 0$, la valeur

$$\bar{\alpha}(q=0) = 1 + \frac{1}{24}\sqrt{11}(\sqrt{29}+\sqrt{5}) = 2,053198\cdots \tag{12.9}$$

est à comparer à l'estimation (11.4).

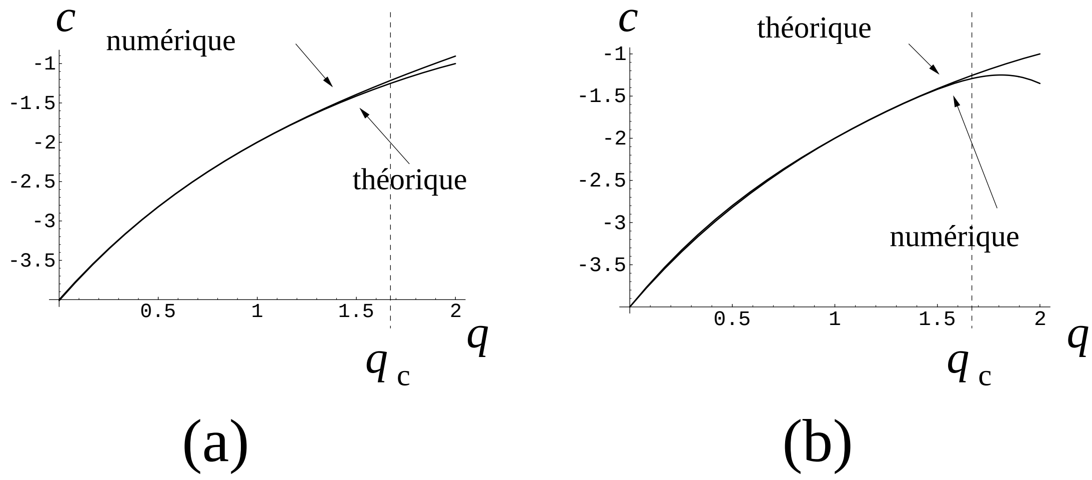

Fig. 49: Comparaison entre la valeur théorique $c_{\text{méandre}}(0,q)$ et l'estimation de la charge centrale à partir des données numériques des méandres (a) et semi-méandres (b).

Nous avons représenté sur la figure 49 la comparaison entre la charge centrale théorique $c_{\text{méandre}}(0,q)$ et ses deux estimations numériques: (a) celle obtenue en inversant la relation (12.6) à partir de la valeur de $\alpha(q)$ mesurée et (b) celle obtenue en inversant la relation (12.8) à partir de la valeur de $\bar{\alpha}(q)$ mesurée. Pour $q = 0$, les estimations (11.4) conduisent respectivement pour les cas (a) et (b) à $c = -4,003(3)$ et $c = -4,002(1)$. Si les auteurs de la référence [41] ont une réserve sur la compatibilité de cette dernière estimation avec $c = -4$, l'accord nous paraît de notre côté pour le moins inespéré.

La prédiction pour $\bar{\alpha}(q)$ nécessite que q soit plus petit qu'une valeur critique donnée par $2\cos(\pi e)$ où e est la racine positive de $24e^2 + e - 1 = 0$. A cette valeur, on a $\bar{\alpha} \to 1$.

Un argument heuristique montre qu'il devient alors entropiquement favorable d'avoir des semi-méandres avec une structure "télescopique" faite d'un premier petit semi-méandre n'utilisant que les, disons s_1 premiers ponts *les plus près de la source*, d'un second semi-méandre n'utilisant que les s_2 ponts suivants (et s'enroulant éventuellement autour de l'ensemble source/premier semi-méandre), etc... avec des s_i finis. On s'attend donc à une transition vers un régime où l'enroulement devient extensif. La valeur critique de q est donc un bon candidat pour le point de transition q_c entre les régimes (i) et (ii) de la section 9. Si tel est le cas, on prédit la valeur

$$q_c = 2\cos\left(\pi\frac{\sqrt{97}-1}{48}\right) = 1,6738\cdots \qquad (12.10)$$

Cette valeur est portée sur les figures 48 et 49.

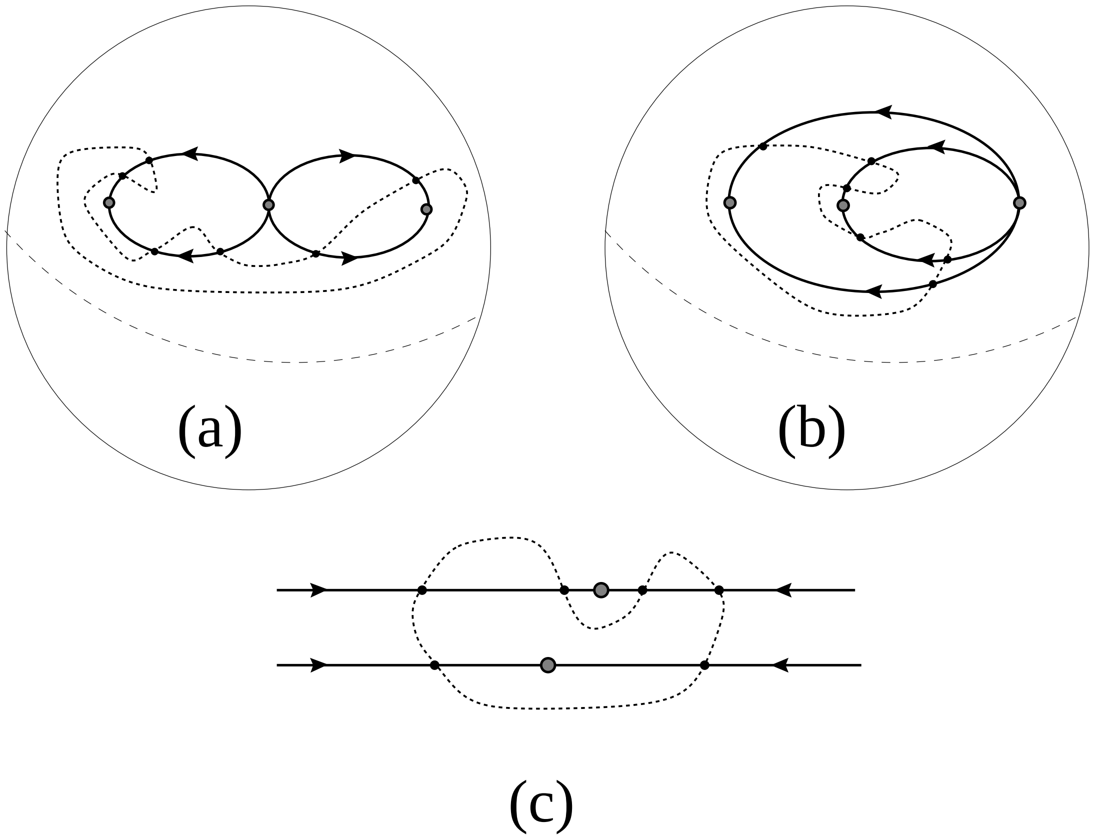

Fig. 50: En demandant d'avoir deux points où arrivent deux lignes noires et un point d'où partent quatre lignes noires, on fixe de manière unique la configuration de ces lignes sur la sphère (Les situations (a) et (b) ci-dessus correspondent au même graphe sur la sphère). Le point d'où partent les quatre lignes noires peut être envoyé à l'infini dans la représentation planaire (c), fabriquant deux rivières infinies parallèles. Les deux points où arrivent deux lignes noires deviennent deux segments marqués, un sur chaque rivière.

Pour finir cette section, notons que les prédictions ne se limitent pas aux seules géométries des méandres et semi-méandres. L'insertion d'opérateurs magnétiques variés permet d'imposer la présence de points marqués d'où partent ou arrivent des nombres prédéfinis de lignes orientées noires ou blanches. Une restriction à signaler est que les lignes doivent être orientables de sorte que toutes les lignes de la même couleur aient la même orientation (arrivant ou partant) par rapport à un même point marqué (cela interdit en particulier à une ligne de se refermer sur un même point marqué). Dans un certain nombre de cas, la simple donnée des *nombres* de lignes partant ou arrivant aux points marqués *fixe* de manière unique la géométrie du problème, c'est à dire sélectionne une *unique* configuration relative de ces lignes marquées. L'exposant de configuration associé peut alors être prédit en utilisant les dimensions (12.4) des opérateurs magnétiques, et les formules de KPZ (7.3), (7.4).

Signalons à titre d'exemple la configuration de la figure 50 correspondant à deux rivières infinies parallèles et avec un segment de rivière marqué sur chaque rivière. L'exposant correspondant $\alpha_2 = (\sqrt{5}+\sqrt{14})/(\sqrt{29}-\sqrt{5})$ a pu être comparé à sa valeur numérique obtenue par matrice de transfert, avec un excellent accord.

13. Méandres et pliages de quadrangulations aléatoires

Dans ce mémoire, nous avons commencé par étudier le pliage plan du réseau triangulaire puis son extension au cas de triangulations aléatoires, nécessairement eulériennes pour être pliables. Nous avons vu que ce dernier problème avait une formulation en termes de boucles compactes sur des graphes trivalents bicoloriés des nœuds. Nous avons finalement rencontré le problème des méandres correspondant à un problème de nature a priori différente de pliage unidimensionnel d'une bande de timbres *auto-évitante*. Néanmoins, la formulation comme gaz de boucles compactes sur des graphes tétravalents aléatoires (et nécessairement bicoloriés des nœuds par construction) suggère un lien avec le pliage de quadrangulations. Nous allons dans cette section "boucler la boucle" en montrant que le problème des méandres est en fait le même problème que celui du *pliage plan de quadrangulations aléatoires*, au même titre que, comme nous l'avons vu, le modèle $\mathrm{FPL}^2(n_1,n_2)$ pour $n_1 = n_2 = 2$ et avec le seul vertex de croisement était équivalent au pliage plan du réseau carré régulier.

Commençons par considérer l'ensemble des quadrangulations aléatoires planaires, duales des graphes aléatoires tétravalents planaires et donc formées de faces à quatre côtés.

Par pliage plan d'une telle quadrangulation, nous désignons toute application $v \to X_v$ associant aux nœuds v de la quadrangulation leur position X_v dans le plan avec la contrainte que toute face de la quadrangulation a pour image un carré de côté 1 dans le plan. L'ensemble des nœuds de la quadrangulation ont alors nécessairement leur image sur les nœuds d'un réseau carré régulier dans le plan.

◇ *Pliabilité de quadrangulations aléatoires*

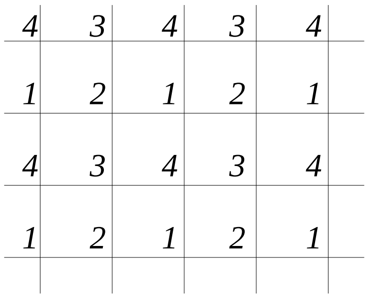

Fig. 51: Quadricoloriage des nœuds du réseau carré régulier

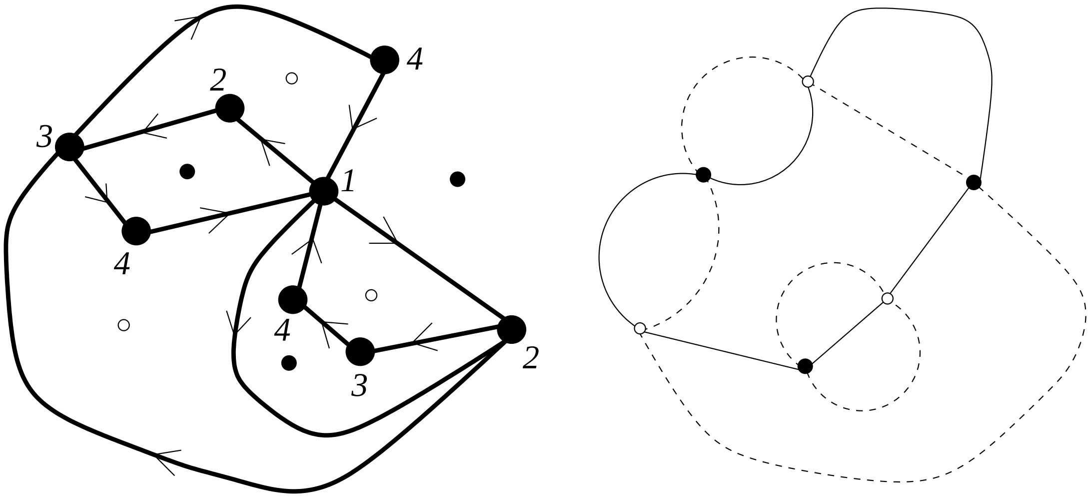

Fig. 52: Exemple de quadrangulation pliable (à gauche), c'est à dire dont les nœuds peuvent être colorié par des couleurs 1, 2, 3 et 4 de sorte que les nœuds autour de chaque face présentent l'ordre cyclique 1,2,3,4 ou 4,3,2,1, représentable également par une orientation des liens. Le graphe tétravalent dual (à droite) est bicoloriable des nœuds. Les liens duaux des liens $1 \to 2$ et $3 \to 4$ forment des boucles noires qui croisent les lignes blanches formées par les liens duaux des liens $2 \to 3$ et $4 \to 1$.

Dans le cas aléatoire, la première question est celle de la pliabilité d'une quadrangulation dans le plan. En utilisant le quadricoloriage des nœuds du réseau carré régulier (voir figure 51), on voit que, si un pliage existe, il induit naturellement un quadricoloriage des nœuds de la quadrangulation par quatre couleurs 1, 2, 3, 4, de sorte que les nœuds autour d'une face présentent l'ordre *cyclique* 1,2,3,4 ou 4,3,2,1. Inversement, une quadrangulation quadricoloriable de la sorte (et donc implicitement quadricoloriée car la coloration est essentiellement unique à une permutation cyclique des couleurs près) est clairement pliable sur un seul carré dont les sommets auraient été labellés 1,2,3,4. Nous avons donc les caractérisations équivalentes suivantes:

1. La quadrangulation est pliable dans le plan
2. Ses nœuds sont quadricoloriables par quatre couleurs 1, 2, 3 et 4 devant présenter l'ordre cyclique 1,2,3,4 ou 4,3,2,1 autour de chaque face
3. Ses faces sont *bicoloriables* par deux couleurs devant être distinctes sur deux faces voisines
4. Ses arêtes sont orientables de sorte que chaque face ait une orientation bien définie
5. Le nombre de faces autour de chaque nœud est pair.
6. Le nombre d'arêtes adjacentes à chaque nœud est pair

La propriété 6 justifie d'appeler ces quadrangulations eulériennes.

Les quadrangulations planaires pliables sont donc les quadrangulations eulériennes, caractérisées par l'une quelconque des propriétés ci-dessus.

Le nombre de telles quadrangulations avec $4s$ arêtes est donné par [46][11]

$$N_s = \frac{4}{s} 3^{s-1} \frac{(3s)!}{(2s+2)!s!} \sim \frac{1}{12\sqrt{\pi}} \frac{\left(\frac{9}{2}\right)^{2s}}{s^{\frac{7}{2}}} \tag{13.1}$$

à comparer à (5.10).

◇ <u>Pliage plan de quadrangulations aléatoires</u>

La quadricoloriabilité des nœuds permet de classer tous les liens de la quadrangulation en liens "horizontaux" pour les liens 1–2 et 3–4 et "verticaux" pour les liens 2–3 et 4–1.

[11] Les quadrangulations sont comptées avec un facteur de symétrie $1/S$ où S est le cardinal du groupe des automorphismes laissant la quadrangulation invariante. Pour éviter ce facteur de symétrie, on peut décider de *marquer une arête*, par exemple entre un nœud de couleur 1 et un nœud de couleur 2. Le nombre sN_s de tels objets est une bonne quantité combinatoire, c'est à dire un entier.

Ces liens sont de plus naturellement orientés dans le sens $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$ (voir figure 52). En représentation duale, correspondant à un graphe tétravalent bicolorié des nœuds, les liens duaux des liens horizontaux forment des boucles compactes, disons noires, et il en est de même pour les liens duaux des liens verticaux qui forment des boucles compactes blanches. Les deux systèmes de boucles compactes sont contraints à se *croiser* sur les nœuds du graphe tétravalent.

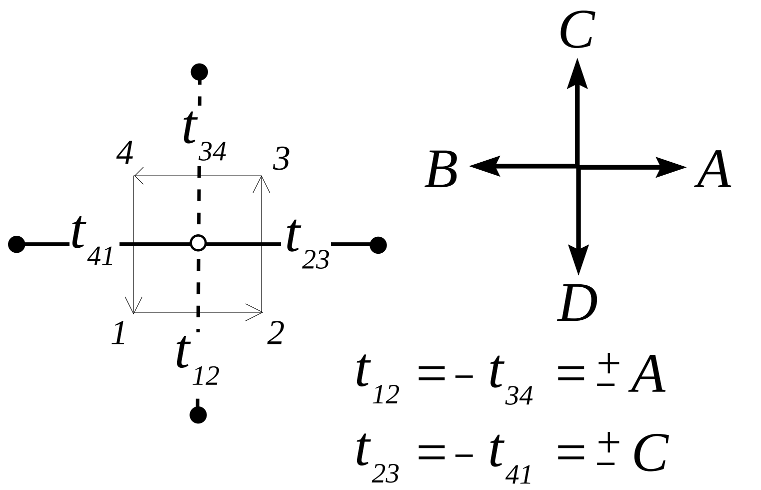

Fig. 53: Pour avoir un carré de côté unité, on doit avoir $t_{12} = -t_{34} = \pm A$ et $t_{23} = -t_{41} = \pm C$ où A et C sont deux vecteurs unitaires orthogonaux. Ces contraintes se propagent aux carrés voisins de sorte que tout carré à ses deux liens "horizontaux" valant A et $B = -A$, et ses deux liens verticaux valant C et $D = -C$.

Il est alors clair de proche en proche que, pour avoir des faces dont l'image soit un carré dans le plan, les variables de liens (définies sur les liens orientés par $t_{v_1 \to v_2} = X_{v_2} - X_{v_1}$) ne peuvent prendre que deux valeurs, disons A et $B = -A$ sur les liens horizontaux, tandis que celles sur les liens verticaux prennent les deux valeurs C et $D = -C$, où A et C sont deux vecteurs unitaires orthogonaux (voir figure 53). De plus, les deux liens horizontaux (resp. verticaux) autour d'une même face ont des valeurs opposées.

En représentation duale, on peut transférer la "couleur" A, B, C ou D de la variable de lien au lien dual, auquel cas les couleurs alternent entre A et B le long des boucles noires. De même, les couleurs alternent entre C et D le long des lignes blanches. En orientant les liens de couleur A (resp. C) du nœud adjacent noir vers le nœud adjacent blanc, et inversement les liens de couleur B (resp. D) du nœud adjacent blanc vers le nœud adjacent noir, on oriente chaque boucle. Les orientations sont indépendantes d'une boucle à l'autre, ce qui définit précisément le modèle $\mathrm{GFPL}^2(n_1, n_2)$ avec $n_1 = n_2 = 2$.

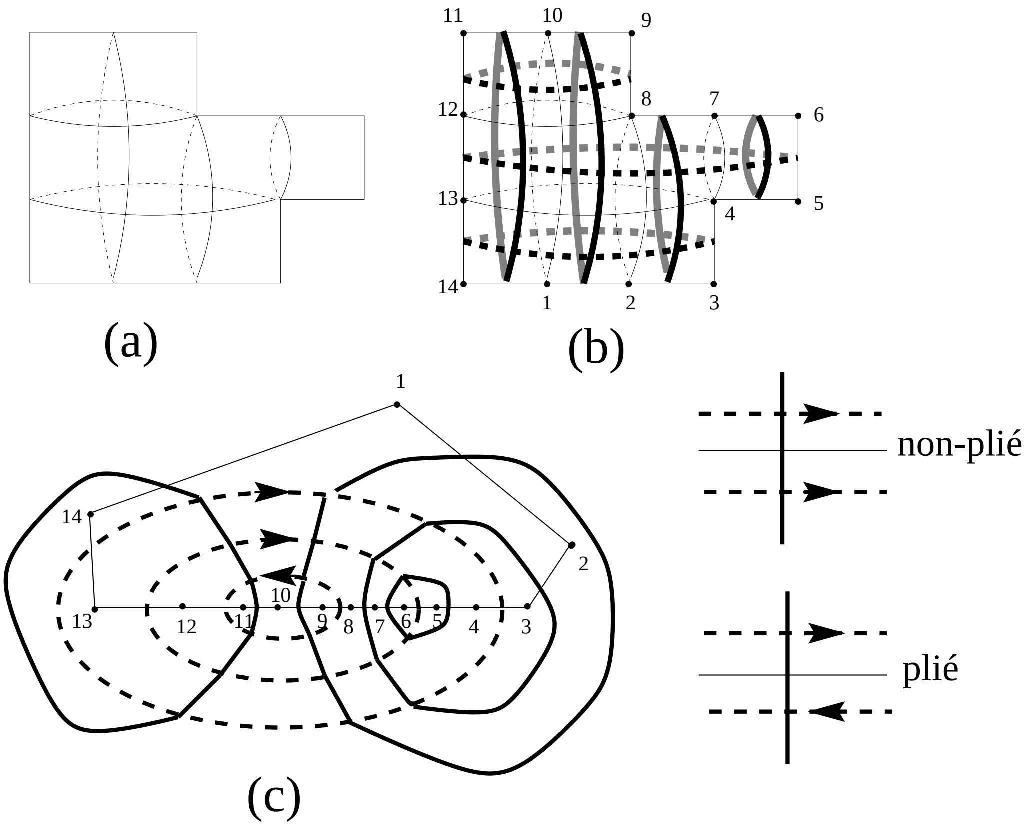

Fig. 54: Exemple de quadrangulation planaire pliable (a) en représentation sphérique. Les boucles compactes noires et blanches correspondantes (b) sont entièrement fixées. Seule leur orientation reste arbitraire. Les mêmes boucles en représentation planaire forment une configuration du modèle GFPL^2. L'orientation des boucles blanches détermine les liens horizontaux pliés selon la règle représentée à droite. Une règle similaire détermine les liens verticaux pliés en fonction de l'orientation des boucles noires (non représentée ici). Pour la configuration de boucles considérée, les liens du "périmètre" joignant les nœuds notés 1 à 14 sont toujours pliés *quelle que soit l'orientation des boucles noires et blanches.* Les autres liens peuvent ou non être pliés. Par exemple, le choix particulier d'orientation des boucles blanches représenté en (c) correspond à avoir fait un pli horizontal entre les points 12 et 8 sur la représentation (b), pliant ainsi quatre liens.

L'orientation des boucles correspond au degré de liberté de pliage, un lien horizontal (resp. vertical) étant plié si et seulement si les deux boucles blanches (resp. noires) de part et d'autre du lien dual sont orientées dans des sens opposés (voir figure 54). Inversement, la variable de hauteur associée à une configuration du modèle GFPL^2 (qui par définition n'autorise que le vertex de croisement) avec les règles 44 et le choix $B = -A$ et $D = -C$ n'est rien d'autre que la position des nœuds pour le pliage correspondant. En résumé, le modèle $\mathrm{GFPL}^2(2, 2)$ décrit le pliage plan de quadrangulations aléatoires.

◇ *Pliages complets, partiels et quadrangulations non-dépliables*

La situation est plus simple que dans le cas des triangulations pour la raison suivante. Etant donné une quadrangulation pliable, ou plutôt son graphe dual tétravalent et bicolorié, il existe clairement une *unique configuration de boucles* compactes compatible avec la règle de croisement (à une inversion des deux types de boucles près). Il n'y a donc pas, pour un graphe donné, d'entropie associée au positionnement des boucles. L'entropie de pliage est entièrement codée dans le choix d'orientation des boucles, avec un poids 2 par boucle.

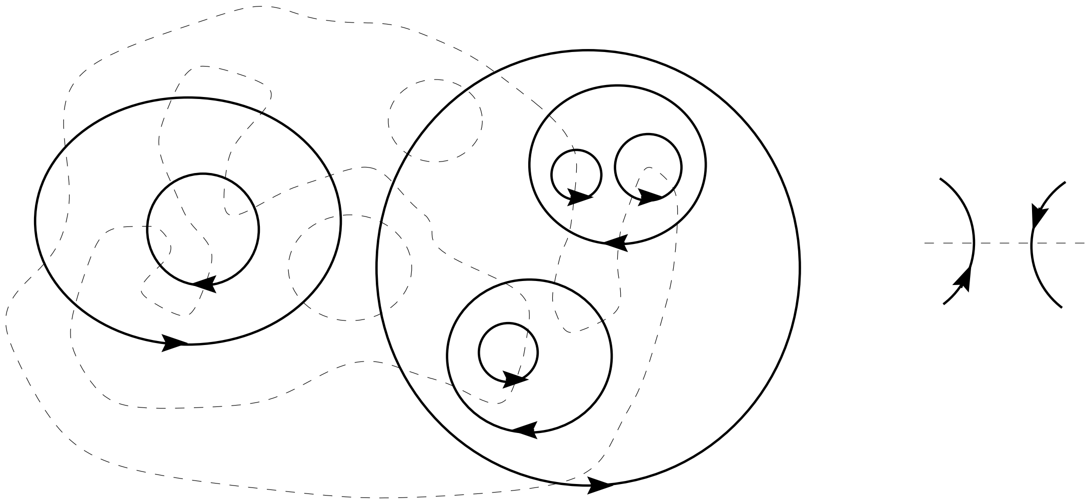

Fig. 55: Orientation des boucles conduisant au pliage complet. Les boucles noires sont orientées alternativement dans le sens trigonométrique et le sens trigonométrique inverse en s'enfonçant dans le graphe à partir des boucles les plus externes. Les deux boucles noires sur les deux nœuds de part et d'autre d'un même lien blanc sont ainsi toujours orientées têtes-bêches. Pour obtenir le pliage complet, il faut en plus orienter les boucles blanches suivant une procédure analogue.

Une première conséquence de cette remarque est qu'on décrit le pliage *complet*, c'est à dire sur un seul carré, des quadrangulations aléatoires simplement en considérant le modèle GFPL(n_1, n_2) avec $n_1 = n_2 = 1$. En effet le pliage sur un seul carré existe toujours et est unique pour chaque quadrangulation pliable. Il est obtenu par l'unique orientation globale des boucles définie comme suit:

1. On oriente les boucles noires les plus externes dans le sens trigonométrique;
2. A l'intérieur de chacune de ces boucles, on recommence en orientant dans le sens trigonométrique inverse les boucles noires incluses les plus externes;
3. On continue récursivement pour les boucles plus profondes en alternant les orientations trigonométrique et trigonométrique inverse;

4. On répète la procédure pour les boucles blanches.

On voit clairement (voir figure 55) que toutes les boucles d'une même couleur sur deux nœuds voisins sont ainsi orientées têtes-bêches et que donc tous les liens sont pliés.

Les quadrangulations pliables étant en bijection avec leurs pliages complet, on en déduit que le modèle GFPL$(1,1)$ ne compte rien d'autre que les quadrangulations eulériennes, dont le nombre est donné par (13.1).

De même le modèle GFPL(n_1, n_2) avec $n_1 = 1$ et $n_2 = 2$ décrit le pliage *partiel*, c'est à dire *dans une seule direction*, la direction verticale, avec des liens horizontaux pliés ou non, tandis que tous les liens verticaux sont pliés (le pliage est maximal dans la direction horizontale). Les interprétations ci-dessus sont compatibles avec la valeur des charges centrales $c_{\text{méandre}}(2,2) = 2$ pour le pliage plan, $c_{\text{méandre}}(1,1) = 0$ pour le pliage complet, et $c_{\text{méandre}}(1,2) = 1$ pour le pliage partiel dans une seule direction.

Le modèle GFPL$^2(1,q)$ a été étudié dans la référence [45] où il est prédit en particulier un nombre de configurations à $2s$ nœuds en $R(1,q)^{2s}$ avec

$$R(1,q) = \frac{2\sin^2\left(\frac{\pi e}{2}\right)}{e^2} \qquad q = 2\cos(\pi e) \tag{13.2}$$

En particulier pour $q = 1$, on retrouve $R(1,1) = 9/2$ comme apparent sur la formule (13.1). Pour $q = 2$, le nombre de configuration avec pliage partiel dans une seule direction croît donc comme $(\pi^2/2)^{2s}$ qui, ramené au $(9/2)^{2s}$ quadrangulations pliables donne un nombre moyen de pliages variant comme $(\pi^2/9)^{2s}$, soit $(\pi^2/9)$ par lien horizontal.

Pour conclure, le problème original des méandres avec $n_1 = n_2 = 0$ décrit les *quadrangulations pliables "non-dépliables"*, c'est à dire celles pour lesquelles le pliage complet est le seul pliage autorisé. En effet, aucun dépliage n'est possible si et seulement si les orientations relatives des boucles sont toutes fixées, ce qui est vrai si et seulement si il n'y a qu'une seule boucle de chaque espèce.

La situation mixte où $n_1 = 0$ seul revient à sélectionner les quadrangulations non-dépliables sur les liens verticaux, mais potentiellement dépliables sur les liens horizontaux. Pour $n_2 = q = 1$, on impose un pliage complet des liens horizontaux (bien que certains soient a priori dépliables) tandis que pour $n_2 = q = 2$, on se permet de déplier les liens horizontaux dépliables.

En conclusion, le passage par les méandres nous montre que l'énumération des pliages sur un seul timbre d'une bande fermée, unidimensionnelle et auto-évitante, de $2n$ timbres est équivalente à l'énumération des quadrangulations aléatoires planaires à $2n$ faces, bidimensionnelles et fantômes, qui sont à la fois pliables et "non-dépliables", un résultat somme toute assez surprenant.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons tenté de faire une présentation unifiée d'un certain nombre de problèmes issus de la physique statistique des pliages. Nous avons mis en évidence les liens étroits qui existent entre les pliages, les coloriages de liens et de nœuds, ainsi que les gaz de boucles compactes. Nous avons vu en particulier comment diverses formulations peuvent être utilisées: variables de spins contraints, modèles de hauteurs, avec chacune leur avantage.

Dans le cas de réseaux réguliers, les pliages donnent lieu à des transitions de conformations intimement liées à la géométrie sous-jacente. Dans le cas de réseaux aléatoires, la sensibilité aux symétries sous-jacentes mène à des classes d'universalité différentes selon que le réseau est eulérien ou non, c'est à dire a un graphe dual bipartite ou non. Le phénomène de sensibilité au réseau sous-jacent, qui s'oppose à la notion d'universalité plus habituelle en physique statistique, existe dans d'autres problèmes. Un exemple particulier est celui des “objets durs”, où des particules occupent certains nœuds du réseau avec la contrainte que, si un nœud est occupé, alors ses nœuds voisins sont nécessairement vides. Sur réseau régulier, les cas les plus connus sont les carrés durs sur le réseau carré, ou les hexagones durs sur le réseau triangulaire. Ces deux problèmes présentent une transition de cristallisation entre une phase ordonnée à forte densité de particules et une phase désordonnée à faible densité. La classe d'universalité du point de transition diffère cependant pour les deux problèmes. On peut le comprendre en notant que la phase ordonnée correspond à placer les particules préférentiellement sur un sous-réseau fait de seconds voisins sur le réseau de départ. Le réseau carré est bipartite avec deux tels sous-réseaux tandis que le réseau triangulaire est tripartite avec trois sous-réseaux. La symétrie du problème est donc différente. Il est intéressant de noter que, là encore, il reste un trace de cette sensibilité quand le modèle est défini sur réseau aléatoire. Il a ainsi été montré [47] que le problème des particules dures sur graphes aléatoires tétravalents a une physique différente selon la classe de graphes qu'on autorise. Pour des graphes tétravalents quelconques, la transition de cristallisation disparaît tandis qu'elle réapparaît pour des graphes tétravalents bipartites. Ce résultat n'est pas tellement étonnant puisque pour avoir une phase ordonnée, il est préférable de pouvoir choisir un sous-réseau bien défini où placer les particules. Il est amusant de remarquer que dans ce cas, c'est encore l'aspect bipartite ou non qui intervient.

Au delà de la sensibilité au type de réseaux aléatoires autorisés, une autre surprise de cette étude est l'apparition d'exposants irrationnels dans des problèmes de combinatoire a priori simples. Là encore, on peut imaginer d'autres exemples. Ainsi, il a été récemment conjecturé [48] que l'énumération des courbes planaires fermées avec n intersections (un problème relié à l'énumération des nœuds alternés) correspond au couplage à la gravité d'une théorie conforme de charge centrale $c = -1$, et donc que le comportement asymptotique à grand n est caractérisé par le même exposant irrationnel (8.1) que dans la section 8.

Les résultats obtenus à ce jour restent bien sûr très partiels et beaucoup de questions restent ouvertes. Dans les cas à charge centrale "augmentée", la théorie conforme associée présente un spectre d'opérateurs dont les dimensions, données par (6.9) et (12.2), sont non triviales. Il serait intéressant de tester l'analogue gravitationnel de ce spectre en étudiant les géométries de boucles correspondantes dans les problèmes gravitationnels associés, par exemple les cycles hamiltoniens sur graphes trivalents bipartites, ou les méandres tangents sur graphes tétravalents bipartites, deux problèmes accessibles numériquement par matrice de transfert. Cette étude reste à faire.

Enfin, le problème combinatoire non-trivial le plus simple semble être celui de la section 8, et on peut espérer qu'une solution exacte verra le jour tôt ou tard.

Remerciements. Je remercie avant tout mon principal collaborateur Philippe Di Francesco sans lequel les travaux présentés ici n'auraient pas pu être effectués. Je remercie également M. Bowick, B. Eynard, O. Golinelli, J. Jacobsen C. Kristjansen, S. Mori et J. Nielsen qui ont co-signé certains des articles sur lesquels se base ce mémoire. Je remercie aussi mes collègues du Service de Physique Théorique de Saclay M. Bauer, A. Billoire, F. David, B. Duplantier, Th. Jolicœur, I. Kostov, R. Lacaze, J.-M. Luck, J.-M. Normand, V. Pasquier et J.-B. Zuber, qui on pu, à un moment ou un autre, apporter leur aide à cette étude. Merci enfin à J. Bouttier pour son intérêt dans ces travaux et pour sa collaboration présente et à venir à leur extension.

Références bibliographiques

[1] P. Di Francesco, Bulletin of the AMS, Vol.37, No.3 (2000) 251.

[2] D.R. Nelson et L. Peliti, J. Phys. France 48 (1987) 1085.

[3] Y. Kantor et D.R. Nelson, Phys. Rev. Lett. 58 (1987) 2774; Phys. Rev. A 36 (1987) 4020.

[4] M. Paczuski, M. Kardar et D.R. Nelson, Phys. Rev. Lett. 60 (1988) 2638.

[5] F. David et E. Guitter, Europhys. Lett. 5 (1988) 709.

[6] Y. Kantor et M.V. Jarić, Europhys. Lett. 11 (1990) 157.

[7] R.J. Baxter, J. Math. Phys. 11 (1970) 784; J. Phys. A 19 Math. Gen. (1986) 2821.

[8] E. N. M. Cirillo, G. Gonnella et A. Pelizzola, Phys. Rev. E 53 (1996) 1479.

[9] P. Di Francesco, Nucl. Phys. B 525 (1998) 507.

[10] W. Tutte, Canad. Jour. of Math. 14 (1962) 21; Canad. Jour. of Math. 14 (1962) 402; Canad. Jour. of Math. 14 (1962) 708; Canad. Jour. of Math. 15 (1963) 249.

[11] Pour une introduction aux modèles de matrice, voir par exemple: P. Di Francesco, P. Ginsparg et J. Zinn–Justin, Physics Reports 254 (1995) 1.

[12] J. Bouttier, P. Di Francesco et E. Guitter, Nucl. Phys. B 641 [FS] (2002) 519.

[13] E. Brézin, C. Itzykson, G. Parisi et J.-B. Zuber, Comm. Math. Phys. 59 (1978) 35.

[14] B. Eynard et C. Kristjansen, Nucl. Phys. B 516 (1998) 529.

[15] I. Kostov, Phys. Lett. B 549 (2002) 245.

[16] J. Kondev, J. de Gier et B. Nienhuis, J. Phys. A 29 Math. Gen. (1996) 6489.

[17] Pour une introduction au formalisme du gaz coulombien, voir B. Nienhuis, *Phase Transitions and Critical Phenomena*, Vol. 11, eds. C. Domb and J.L. Lebowitz, Academic Press (1987).

[18] M.T. Batchelor, J. Suzuki et C.M. Yung, Phys. Rev. Lett. 73 (1994) 2646.

[19] H.W.J. Blöte et B. Nienhuis, Phys. Rev. Lett. 72 (1994) 1372.

[20] V.G. Knizhnik, A.M. Polyakov et A.B. Zamolodchikov, Mod. Phys. Lett. A 3 (1988) 819; F. David, Mod. Phys. Lett. A 3 (1988) 1651; J. Distler and H. Kawai, Nucl. Phys. B 321 (1989) 509.

[21] I. Kostov, Mod. Phys. Lett. A 4 (1989) 217; B. Eynard et C. Kristjansen, Nucl.Phys. B 466 (1996) 463.

[22] B. Duplantier et I. Kostov, Phys. Rev. Lett. 61 (1988) 1433.

[23] P. Di Francesco, E. Guitter et C. Kristjansen, Nucl. Phys. B 549 [FS] (1999) 657.

[24] V.A. Kazakov et P. Zinn–Justin, Nucl. Phys. B 546 (1999) 647.

[25] E. Lucas *Théorie de nombres I*, p. 120, A. Blanchard, Paris (1961)

[26] A. Sainte Laguë *Avec des nombres et des lignes: récréations mathématiques*, p 147, Vuibert, Paris (1937).

[27] J. Touchard, Canad. J. Math. 2 (1950) 385.

[28] J. Koehler, J. Combinat. Theory 5 (1968) 135.
[29] W. Lunnon, Math of Computation 22 (1968) 193.
[30] V. I. Arnol'd, Siberian Math. J. 29 (1988) 717.
[31] S. K. Lando et A. K. Zvonkin, Selecta Mathematica Sovietica 11 (1992) 117; Theor. Comp. Science 117 (1993) 227.
[32] K.H. Ko et L. Smolinski, Pacific. J. Math. 149 (1991) 319.
[33] K. Hoffman, K. Mehlhorn, P. Rosenstiehl et R. Tarjan, Information and Control 68 (1986) 170.
[34] A. Phillips, *The Visual Mind: Art and Mathematics*, p 65, MIT Press (1993); voir aussi http://www.math.sunysb.edu/∼tony/mazes/.
[35] P. Di Francesco, O. Golinelli et E. Guitter, Mathl. Comput. Modelling 26 (1997) 97.
[36] P. Di Francesco, O. Golinelli et E. Guitter, Commun. Math. Phys. 186 (1997) 1.
[37] H. Temperley et E. Lieb, Proc. Roy. Soc. A 322 (1971) 251.
[38] P. Martin, *Potts models and related problems in statistical mechanics*, World Scientific (1991).
[39] P. Di Francesco, J. Math. Phys. 38 (1997) 5905.
[40] O. Golinelli, Eur. Phys. J. B 14 (2000) 145.
[41] I. Jensen, cond-mat/9910313. Voir aussi les extensions de cette référence: I Jensen, J. Phys. A 33 (2000) 5953; I. Jensen et A. J. Guttmann, J. Phys. A 33 (2000) L187.
[42] J.L. Jacobsen et J. Kondev, Nucl. Phys. B 532 [FS] (1998) 635.
[43] D. Dei Cont et B. Nienhuis, *The packing of two species of polygons on the square lattice*, cond-mat/0311244.
[44] J.L. Jacobsen et J. Kondev, J. Stat. Phys. 96 (1999) 21.
[45] L. Chekhov et C. Kristjansen, Nucl.Phys. B 479 (1996) 683.
[46] Voir par exemple: D. Poulalhon et G. Schaeffer *A note on bipartite Eulerian planar maps*, http://www.loria.fr/∼schaeffe/
[47] J. Bouttier, P. Di Francesco et E. Guitter, J. Phys A Math. Gen. 35 (2002) 3821.
[48] G. Schaeffer et P. Zinn–Justin, *On the Asymptotic Number of Plane Curves and Alternating Knots*, math-ph/0304034.

Liste des articles en annexe

Publication I: *Entropy of folding of the triangular lattice*, par P. Di Francesco et E. Guitter, Europhys. Lett 26 (1994) 455-460.

Publication II: *Folding transition of the triangular lattice*, par P. Di Francesco et E. Guitter, Phys. Rev. E 50 (1994) 4418-4426.

Publication III: *Three-dimensional folding of the triangular lattice*, par M. Bowick, P. Di Francesco, O. Golinelli et E. Guitter, Nucl. Phys. B 450 [FS] (1995) 463-494.

Publication IV: *Geometrical folding transitions of the triangular lattice in the face-centred cubic lattice*, par M. Bowick, O. Golinelli, E. Guitter et S. Mori, Nucl. Phys. B 495 [FS] (1997) 583-607.

Publication V: *Coloring random triangulations*, par P. Di Francesco, B. Eynard et E. Guitter, Nucl. Phys. B 516 [FS] (1998) 543-587.

Publication VI: *Hamiltonian cycles on random Eulerian triangulations*, par E. Guitter, C. Kristjansen et J.L. Nielsen, Nucl. Phys. B 546 [FS] (1999) 731-750.

Publication VII: *Meanders: a direct enumeration approach*, par P. Di Francesco, O. Golinelli et E. Guitter, Nucl. Phys. B [FS] 482 (1996) 497-535.

Publication VIII: *Meanders: exact asymptotics*, par P. Di Francesco, O. Golinelli et E. Guitter, Nucl. Phys. B 570 [FS] (2000) 699-712.

Publication IX: *Exact meanders asymptotics: a numerical check*, par P. Di Francesco, E. Guitter et J.L. Jacobsen, Nucl. Phys, B 580 [FS] (2000) 757-795.